**Ce document évoluera au cours du semestre.** De ce fait il n'est pas destiné à une impression. Ce document contient :

Déf ▶ 52 définitions ;

Lemme ▶ 10 lemmes ;

Cor ▶ 13 corollaires ;

TH ▶ 8 theoremes ;

Prop ▶ 31 propositions ;

▶ .

# §2. Dualité

### 2.1 Formes linéaires et espace dual

Déf 01 ▶ Application bilinéaire $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \mapsto & Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \end{array}.$$

### 2.2 Hyperplans

Prop 02 ▶ $Mat_{\mathcal{E}'}(\varphi) = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi).T$

$Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1}Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$

Déf 03 ▶ Un **hyperplan** : $\forall x \in E, \varphi(l) = 0$ .

Ker($l$) est un hyperplan.

$E^* = \mathcal{L}(E,K) \longrightarrow \varphi \in E^*$ signifie $\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$. (Ainsi $\forall\, x \in E$)

Déf 04 ▶ Le **delta de Kronecker** $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$ .

### 2.3 Base duale et anté-duale

Déf 05 ▶ $(\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n)$ de $E^*$ base duale / $(e_1, \cdots, e_n)$ base anté duale.

### 2.4 Le double dual

Prop 06 ▶ $P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = ( {}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} )^{-1}$

Cor 07 ▶ AL, $\varphi : E \to E^{**}$ avec $\dim E < \infty \longrightarrow \varphi$ isomorphisme canonique entre $E$ et $E^{**}$.

### 2.5 Les annulateurs

Déf 08 ▶ Annulateur de $F$ dans $E^*$, avec $F$ s-e.v. de $E$ : noté $F^\perp = \{l \ \in \ E^* | \forall \ v \ \in \ F, \ l(v) = 0\}$

Déf 09 ▶ Annulateur de $G$ dans $E$, avec $G$ un s-e.v. de $E^*$ :$G^\perp = \{v \ \in E | \ \forall \ l \in \ G, \ l(v) = 0\}$

Déf 10 ▶ $F^\perp$ : ens équations linéaires de F

Prop 11 ▶ $F \subset G \longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$
$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
$F \subset F^{\perp\perp}$
$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp)$
$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

### 2.6 La transposée

Déf 12 ▶ On def la transposee : ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ : $\forall \ l \ \in \ F^*, \ {}^t\varphi(l) = l \circ \varphi$.

Prop 13 ▶ $Mat_{\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*}( {}^t\varphi) = \ {}^t(Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi))$

Prop 14 ▶ $(\mathrm{Im}(\varphi))^\perp = (\mathrm{Ker}( \ t^\varphi))$
$(\mathrm{Ker} \ \varphi)^\perp = \mathrm{Im}(() \ t\varphi)$

Prop 15 ▶ $\mathrm{rg}\varphi = \mathrm{rg} \ \ t^\varphi$ (si $E$ identifie à $E^{**}$ et vcversa pr $F$ )

Prop 16 ▶ ${}^t(\varphi \circ \psi) = \ {}^t\varphi \circ \ {}^t\psi$
${}^t\varphi^{-1} = ( \ {}^t\varphi)^{-1}$

Prop 17 ▶ $\varphi_F \circ \varphi = \ {}^t \, {}^t\varphi \circ \varphi_E$

### 2.7 Formes bilinéaires

Prop 18 ▶ **Forme bilinéaire**

si $\forall x \ \in \ E, \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \varphi(x,.) \ est$ . f l

si $\forall y \ \in \ E, \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \varphi(.,y) \ est$ . f l

Prop 19 ▶ $\forall \ x, y \ \in \ E$, **f b. symétrique** $\varphi(y,x) = \ \varphi(x,y$ et **f b. alt.** $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$

Déf 20 ▶ $X = \sum \ x_i \ e_i, \ \ Y = \sum y_j \ e_j \ \ \varphi(X,Y) = \varphi(\sum x_i \ e_i, \sum x_j \ e_j) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i \ x_j \varphi(e_i, e_j)$

Déf 21 ▶ $\mathrm{mat}(\varphi(e_i \ e_j))_{1 \le i \le j \le n} \coloneqq Mat_{\mathcal{E}(\varphi)}$

Déf 22 ▶ $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j), \ A = (a_{ij} = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi))$

Déf 23 ▶ $\forall x, y \ \in \ E, \varphi(X,Y) = \sum a_{ij} \ x_i \ x_j = (x_1 \ \cdots \ x_n) \ A \ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Prop 24 ▶ $\dim \mathcal{B}(E) = n^2, \ \ \dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}, \ \ \dim \mathcal{A}(E) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Prop 25 ▶ $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

Prop 26 ▶ $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}, \ A = Mat_{\mathcal{E}(\varphi)} \longrightarrow A' = \ {}^tP.A.P$

### 2.8 Formes quadratiques

Déf 27 ▶ $Q : E \to K$ **forme quadratique si**
$\bullet Q(\lambda v) = \lambda^2 \, Q(v)$

$$\begin{array}{rcl} b_Q : E \times E & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \text{ est f l} \end{array}.$$

Déf 28 ▶ $b_Q$ :**f l sym** associé à $Q$ ou **forme polaire**de $Q$.

Prop 29 ▶ Formes quadratiques sur E : $Q(E)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : Q(E) & \to & \mathcal{S}(E) \\ Q & \mapsto & b_Q \text{ est linéaire} \end{array}$$

.

Déf 30 ▶ ($\mathcal{P}$ : polarisation ou morphisme depolarisation)

Lemme 31 ▶ $\mathcal{P}$ est un isomorphisme de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ d'inverse

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} : \mathcal{S}(E) & \to & \mathcal{Q}(E) \\ \varphi & \mapsto & q_\varphi \end{array}$$

Déf 32 ▶ $q_\phi \in Q(E)$ forme quad associé à $\varphi(q_{\varphi = \mathcal{D}(\varphi})$

Prop 33 ▶ $Mat_{\mathcal{E}(Q) := Mat_{\mathcal{E}}(b_Q})$

### 2.9 Ecriture d'une forme quadratique ds une base

Déf 34 ▶ $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n),\ Mat_{\mathcal{E}}(Q) = (a_{ij})_{1 \le i \le j \le n},\ a_{ji} = a_{ij}$
$Q(X) = \sum a_{ij} x_i \, x_j = \sum a_{ij} \, x_i^2 + 2 \, \sum a_{ij} \, x_i \, x_j$

TH 35 ▶ E dimension finie toute forme quad. diagonalisable.

### 2.10 Bases Orthogonales

Déf 36 ▶ $x \bot_\varphi y$ si $\varphi(x,y) = 0 \qquad | \; x \bot_\varphi y \iff y \bot_\varphi x$

Déf 37 ▶ Base $\mathcal{E}$ orthogonal si $e_i \perp e_j \ \forall i \neq j,\ 1 \le i,j \le n$, mat forme $\mathcal{E}$ est diagonale.

Cor 38 ▶ Toute forme quad. E, fini, admet des bases orthogonales.

### 2.11 Formes quadratiques positives

Déf 39 ▶ Forme quad positive si $\forall \ x \ \in \ E, Q(x) \ge 0$

Déf 40 ▶ Forme quad définie (positive) si $\forall x \in E, Q(x) = 0 \implies x = 0$

Prop 41 ▶ Q positive $\iff$ pour toute base Q-orthogonal, $Q(e_i) \ge 0$

Déf 42 ▶ Un **espace euclidien** (E dim finie) avec forme quad. Q, ici $b_Q$ est appelé **produit scalaire**.

Déf 43 ▶ Dans espace euclidien, base $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormée si orthogonale et $Q(e_1) = \cdots = Q(e_n) = 1$

Cor 44 ▶ Un espace euclidien admet bases orthonormées.

### 2.12 Classification des formes quadratiques dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Déf 45 ▶ $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \varphi = x \in E | \ \forall y \ \in \ E, \varphi(x,y) = 0$

Lemme 46 ▶ $\operatorname{Ker} Q$ sev de E, $\dim Q = n - r;\ r =$rang$Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ $\forall$ base.

Déf 47 ▶ rang $Q$ =rang $Mat_\epsilon(Q)$ et rang $Q$ =rang $\varphi = n - \dim \operatorname{Ker}\varphi$

Déf 48 ▶ $Q$ est une forme **non-dégénérée** si rang$(Q) = n$ ou si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Déf 49 ▶ $Q$ et $Q'$ sont équivalents si $\exists$ isomorphisme $h : E' = E, Q' = Q \circ h$
$\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}', Mat_{\mathcal{E}}(Q) = Mat_{\mathcal{E}'}(Q)$
$\forall$ bases $Mat_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT.Mat_{\mathcal{E}}(Q).T$

### 2.12.1 Classification sur $\mathbb{C}$

TH 50 ▶ Toute forme quad. sur $\mathbb{C}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où $r =$ rang $Q$)

Cor 51 ▶ 2 formes quadratiques sont équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et rang $Q$ = rang $Q'$

Prop 52 ▶ Sur $\mathbb{C}, \exists\, n+1$ classes d'équivalences de forme quad. distinguées par rang

### 2.12.2 Classification sur $\mathbb{R}$

TH 53 ▶ Sur $\mathbb{R}, \exists$ unique mat diagonale $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $q = r - p, r =$ rang $Q$

Prop 54 ▶ $(p, q) = (p_Q, q_Q)$ signature de $Q$

Cor 55 ▶ 2 formes quad. sont équivalentes ssi même signature.

Déf 56 ▶ $(p, q) = (p_Q, q_Q)$ : **signature de Q** ( invariant classifiant les formes quad sur ev réel $\dim n$

Prop 57 ▶ 2 formes quad. sont équivalentes ssi même **signature**

## 2.13 Orthogonalite

Déf 58 ▶ soit E sur $\mathbb{K}$ ev, $\varphi\ \mathcal{S}(E), Q = q_\varphi, q_\varphi \in Q(E)$
pour $A \subset E, A^\perp = \{x \in E | \varphi(x, y) = 0, \forall\, y \in A\}$

TH 59 ▶ $(i) A^\perp$ sev , $\operatorname{Ker}\varphi \subset A^\perp : \varnothing^\perp = \{\varnothing\}^\perp = E,\ E^\perp = \operatorname{Ker}\varphi, A \subset (A^\perp)^\perp$
$(ii)\ A \subset B \subset E \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi\ B^\perp \subset A^\perp$
$(iii)\ A \subset E, A \neq \varnothing \longrightarrow A^\perp = \operatorname{Vect}(A)^\perp$,
$siA = \{v_1, \cdots, v_k\}, F = \operatorname{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\} \longrightarrow F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^k v_i^k$

TH 60 ▶ Sur orthogonal, F sev de E, $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F \wedge \operatorname{Ker}\varphi)$
$(ii) n \leq \dim F + \dim F^\perp \leq n + \dim \operatorname{Ker}\varphi$
$(iii)(F^\perp)^\perp = F + \operatorname{Ker}\varphi, (F^\perp)^\perp \iff \operatorname{Ker}\varphi \subset F$
De plus si $\varphi$ non-dégénéré ie $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \longrightarrow$
$(i) \dim F^\perp = n - \dim F$
$(iii)\ (F^\perp)^\perp = F$
$(iv)\ \varphi_F$ : restriction de $\varphi$ à $F \times F$, $\varphi_F : \begin{array}{rcl} \varphi_F = F \times F & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array} \longrightarrow \varphi_F$ : aussi forme linéaire symétriq
$\varphi_F \in \mathcal{S}_F : \bullet \operatorname{Ker}\varphi_F = F \wedge F^\perp = \operatorname{Ker}\varphi^\perp$
$\bullet\ E = F \oplus F^\perp \overset{F \wedge F^\perp}{\iff} \iff \{0\} \iff \varphi_F$ non dégénéré $\iff \varphi_F^\perp$ non-dégénéré.

### 2.13.1 Projections orthogonales

Déf 61 ▶ $E = K \oplus L, \forall v \ \in E, \exists (x,y) \ \in E \ K \times L | s = x + y$ et **proj-linéaire** $p_K^L$ ou $pr_K^L$ de $S$ par $S$ sur $K$ parallèlement à $L : p_K^L(v) = x$.

Prop 62 ▶ $p = p_K^L : E \longrightarrow E$ satisfait : $(i)\ p \ \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Ker} p = L, \operatorname{Im}(K), p_K = id_K$ ( restriction de $p$ à $K$ $(ii) p^2 = p(p^2 = p \circ p))$
$(iii)\ q = id_E - p \longrightarrow p + q = id_E, p^2 = p, q^2 = q, pq = qp = 0$
Réciproquement : $p$ endormophisme linéaire $p \in \ \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p \longrightarrow p$ est projection linéaire $p_K^L$ où $K = \operatorname{Im}(p)$ et $L = \operatorname{Ker} p$

Déf 63 ▶ Une projection linéaire $p_K^L$ est orthogonale $\iff K \perp L$. De façon équivalente, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est proj. orthogonale $\iff p^2 = p$ et $E = \operatorname{Ker} p \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(p)$ (somme directe orthogonale)

Déf 64 ▶ F sev de E est non dégénéré si $Q_F = Q_{|F}$ (ou $\varphi_F = \varphi_{|F \times F}$ ) est forme non dégénéré.
F non dégénéré $\iff F \wedge F^{\perp} = \{0\} \iff E = F \oplus F^{\perp}$

Prop 65 ▶ F sev de E, $(i) si F$ non-deg $\longrightarrow \exists!$ proj. orhtogonale $p$ d'image $F \underset{not}{:=} p_F (ou p_F^R$
$(ii)$si en plus$Q$est forme non-deg $\longrightarrow$ réciproque est vraie

### 2.13.2 Calcul projection orthogonale

Prop 66 ▶ F sev non-deg, $(a_1, \cdots, a_k)$ base orhtogonale de $F$. Alors $Q(\omega_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0 \ \ \forall i = 1, \cdots, k$ est $\forall x \ \in \ E, p_F^r(x) = \sum_{i=1}^k \dfrac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i}$

## 2.14 Groupe orthogonal

Déf 67 ▶ Un endomorphisme $f \ \in \ \mathcal{L}(E)$, est def **orthogonal** ( ou Q-orthogonal ou $\varphi$orthogonal ) s'il préserve $Q$ ou ( $\varphi$) :
$\forall x \ \in \ E, Q(f(x)) = Q(x)$ ( ou $\forall \ x, y \ \in E, \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. On note $\mathcal{O}(E)$ ou $\mathcal{O}(E,Q), \mathcal{O}(E,\varphi), \mathcal{O}(\varphi)$, **l'ens des endom. orthogonaux** de $(E,Q)$

Prop 68 ▶ $(i)\ f \ \in \mathcal{O}(E) \ \longrightarrow \ f$ inversible
$(ii) \mathcal{O}(E)$ est un groupe.

Déf 69 ▶ soit F un ss-espace non-deg de E $\longrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$ et les 2 projections orthogonales $p_F, p_{F^\perp}$ sont def, tq $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. On def la **symétrie orthogonale** $s_F$ par : $\forall v, \in \ E, \exists\,!\,(x,y) \ \in \ F \times F^{\perp}, v = x + y$ et on pose $s_F(v) = x - y$

70 ▶ $s_F = p_F - p_{F^\perp} = id_E - 2p_{F^\perp} = 2p_F - id_E$
Lorsque F est un **hyperplan**, $s_F$ :réflexion orthogonale
Toute symétrie orthogonale est un endom. orthogonal
Quand $F \subsetneqq E, p_F$ proj orthogonale n'est pas endom orthog.

## 2.15 Caractérisation de $f \in \mathcal{O}(E)$ par matrices

71 ▶ $\mathcal{E}$, *base* $f \ \in \mathcal{L}(E), G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ alors $f \ \in \mathcal{O}(E) \iff {}^tAGA = G \iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) \ \ \forall i, j = 1, \cdots, n, \mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$
Cas particulier : $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & . & O \\ . & \ddots & . \\ O & . & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $(E,Q)$ est un espace euclidien muni base orthornormée $\mathcal{E}$, on a $f \ \in \ \mathcal{O}(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA \iff A$mat orthogonale

TH 72 ▶ (Cartau-Dieudonné)
Tout élément de $\mathcal{O}(Q)$ est produit d'au plus $n$ **réflexions orthogonales**

TH 73 ▶ (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
$(v_1, \cdots, v_n)$ base de $E$, $\forall i = 1, \cdots, n-1, E_i = \text{Vect}(v_1, \cdots, v_i)$ est **non-dégénéré** alors les $n$ vecteurs :
$u_1 = v_1,\ u_2 = v_1 - \dfrac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1, \cdots, u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\varphi(u_1, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$ sont bien def et forment **base orthogonale**.
$\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_k)$ de E, dans cette base $Q$ s'écrit :
$Q(\sum_{i=1}^{n}) = \Delta_1 x_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \cdots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$, où $\Delta_k = det\ A_k,\ A_k = Mat_{(v_1, \cdots, v_k)}(Q|_{F_k}$.

74 ▶ $\mathcal{U}$ s'apelle **orthogonalisée** $G - S$

75 ▶ $Q|_{F_{n-1}}$ non-dég $\longrightarrow$ le rang de $Q$ est au moins $n-1 \longrightarrow \text{Rang}\, Q = n-1$ ou $n$, on ne suppose pas que $\Delta \neq 0$

Cor 76 ▶ ( Critère de Sylvester )
$E, \mathbb{K} - ev, \dim E = n, \varphi \ \in\in \mathcal{L}(E), \varphi = b_Q, Q \ \in \ Q(E), (v_1, \cdots, v_n)$ base de $E, a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n, F_k = \text{Vect}(v_1, \cdots, v_k), A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}, A_k = Mat_{(v_1, \cdots, v_k)}(Q|_{F_k}), \Delta_k = det A_k$ alors :
1)$\varphi(ouQ)$ est def **positive** $\iff \Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$
Supposons $\Delta_1 \neq 0, \cdots, \Delta_{n-1} \neq 0, \Delta_0 = 1$ alors : l'indice négatif $q$ de $Q$ ( c'est la 2° composante de la signature $(p, q) deQ$ est le **nbr de changements de signe** dans la suite $\Delta_0, \cdots, \Delta_n$ ( on dit ( $\Delta_i$ ) possède un changement de signe au rang $i$ si $\Delta_i . \Delta_{i-1} < 0$
3) $\varphi$ est def **négative** $\iff \forall i = 1, \cdots, n, \Delta_i = (-1)^i | \Delta_i \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & & A_n \\ & & & & \\ a_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & a\ \ 23 & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

les $A_k = det A_k$ s'appellent **mineurs principaux dominant.**

# §3. Espaces euclidiens

## 3.1 Norme, distance, angles, volumes

Déf 01 ▶ Un $\mathbb{R}$ ev-E muni FB sym $\varphi$ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ et $\varphi$ def positive.
$\varphi$ est appelé **produit scalaire.** $\langle x | y \rangle := \varphi(x, y)\ \forall x, y \ \in \ E.$
Par def, $\forall x \ \in \ E, \langle x, x | \geq \rangle 0$ et $\langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$. On note $\sqrt{\langle x | x \rangle} = \|x\|$. On a $\forall x \ \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$

Prop 02 ▶ $\forall x, y \ \in E, \lambda \in \mathbb{R}$,on a :
$(i) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
$(ii) \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$
(si $x \perp y \longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (TH de Pythagore)
$(iii) \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ( inégalité du parallélogramme)
$(iv) |\langle x | y \rangle)| \leq \|x\| \|y\|$ ( Inégalité de Cauchy-Scwhartz)

$(v)\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ ( inégalité de Minkowski )

Déf 03 ▶ Norme classique $N(x)$

Déf 04 ▶ soit $X \neq$. On appelle **distance ( ou métrique )** sur $X$ toute fonction $d : X \times X \longrightarrow R \geq 0$ tq :
$(i)\forall x, y \in X, d(x,y) = d(y,x)$
$(ii) d(x,y) = 0 \iff x = y$
$(iii)\forall (x,y,z) \in X^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un espace métrique est un ens. muni d'une métrique. La fonction $E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \geq 0, (x,y) \longrightarrow \|x-y\|$ est une **distance**.

Déf 05 ▶ soit $(E, \langle . | . \rangle$, un **espace euclidien**, la fonction $E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \longrightarrow \|x\|$ s'appelle **norme euclidienne** sur $E$ et la fonction $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, (x,y) \longrightarrow \|x-y\|$ s'appelle **distance euclidienne** sur $E$.

06 ▶ Tout espace euclidien possède une base orthonormée et est donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son porduit scalaire standard

## 3.2 Angles

Cor 07 ▶ $\forall x, y \in E \backslash \{0\}$ par Cauchy-Schwarz, $| \dfrac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} | \leq 1$

Déf 08 ▶ **L'angle** $(\widehat{x,y})$ entre deux vecteurs non nuls de $E$ est def comme unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tq $\cos\theta = \dfrac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$. On peut écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \dfrac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ ( arccos désigne la valeur principale de arccos comprise entre 0 et $\pi$).
$\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
On def aussi les angles entre 2 sous-espaces vectoriels $F_1, F_2 \neq 0$ de $E$ :
$(\widehat{F_1, F_2}) = \inf\{(\widehat{v_1, v_2}| \ v_1 \in F_1 \backslash \{0\}, v_2 \in F_2 \backslash \{0\}\}$ et l'angle entre un vecteur non nul est un sous-espace vectoriel de $F$ : $(\widehat{v,F}) = \inf\{(\widehat{v,w}) \ | w \ \in F \backslash 0\}$

09 ▶ Par exemple, l'angle entre 2 droites $F_1, F_2$ de vecteurs directeurs $v_1, v_2$ :
$(\widehat{F_1, F_2}) = \min\{(\widehat{v_1, v_2}), (\widehat{v_1, -v_2})\} = \min\{\theta, \pi - \theta\} \ \ o\theta = (\widehat{v_1, v_2})$

## 3.3 Volumes

Déf 10 ▶ $(i)$Pour une famille $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs de $E$, le parallélépipède engendré par $v$ est def par :
$\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \{\sum_{i=1}^k \ t_i v_i \ | \ (t_1, \cdots, t_\alpha) \ \in [0,1]^\alpha\}$
$(ii)$Le k-volume $v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est def par :
1) si $\mathcal{V}$est **liée** , $v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V})) = 0$
2) si $\mathcal{V}$ est **libre**, $v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V})) =| \det P_{\mathcal{E}_F \longrightarrow v} \ |$ où $\mathcal{E}_F$ est base orthonormée qq de $F = \mathrm{Vect}(v)$ et $P_{\mathcal{E}_F \longrightarrow v}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à $v$.
$P_{\mathcal{E}_F \longrightarrow v} = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \forall j = 1, \cdots, k, \ v_j = \sum_{i=1}^k p_{ij} e_i$

Lemme 11 ▶ $| \det P_{\mathcal{E}_F \longrightarrow v} \ |$ ne dépend pas choix de $\mathcal{E}_F$

Cor 12 ▶ ( de la démo du lemme )
La mat de passage $A$ entre 2 bases orthorn. est une mat orthogonale : $A$ est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Le **déterminant d'une mat orthogonale** ne peut prendre que deux valeurs : 1 et $-1$.

### 3.4 Groupe orhtogonale d'un espace euclidien

Déf 13 ▶ soit $E$ un ee $\dim E = n$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ens des endomorphismes orthogonaux de $E$. $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E, \langle .|.\rangle) = \{x \in \mathcal{L}(E) \,|(x,y) \in E \times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}$ . C'est un groupe. L'ens des mat orhtogonales de taille $n$ est def par : $\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille $n$.

Déf 14 ▶ $E$ espace euclidien ( ee ) $\dim n \geq 1, \mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n)$ base orthonormée $\Rightarrow$ $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) & \to & \mathcal{O}(n) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{E}}(f) \end{array}$ est un isom. de groupes. Pour chaque $n \geq 1$, on a un seul groupe orthor euclidien à isom près.

Déf 15 ▶ $\mathbb{O}(n)$ identifié à $\theta(\mathbb{R}^n, \langle .|.\rangle)$

Déf 16 ▶ **Groupes spéciaux orthogonaux** :
$SO(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | det u = 1\}$
$SO(A) = \{A \in \mathcal{O}(n) | det A = 1\}$

Déf 17 ▶ Pour $A \in \mathcal{O}(n), det = \pm 1$
$\mathcal{O}(E) = SO(E) \bigsqcup \mathcal{O}^-(E)$
$\mathcal{O}(n) = SO(n) \bigsqcup \mathcal{O}^-(n)$
où $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{O}(E) \backslash SO(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | det u = -1\}$
$\mathcal{O}^-(n) = \{u \in \mathcal{O}(n) | det u = -1\}$

18 ▶ $SO(E) \subset \mathcal{O}(E)$ est un ss-groupe (mais pas $\mathcal{O}^-(E)$
$\forall \tau \in \mathcal{O}^-(E), \mathcal{O}^-(E) = \tau . SO(E) . \tau$

19 ▶ Le groupe quotient $\mathcal{O}(E) \diagup SO(E)$ est isom au groupe d'ordre 2 : $\mu_2 = \{\pm 1, \mathcal{O}(E) \diagup SO(E) \approx \{\pm 1\}\}$, cela suit du TH d'isom pr groupe quotient : on considère morphisme du déterminant,
$\begin{array}{ccc} det : \mathcal{O}(E) & \to & \mathbb{R}^*) \\ u & \mapsto & det u \end{array}$ , son image est $\mu_2 = \{\pm 1\}$
Donc $\mathcal{O}(E) \diagup \mathrm{Ker}(det) \approx \mu_2$ or $\mathrm{Ker}(det) = SO(E)$
• $n = 1$ : $\dim E = 1 \Rightarrow \mathcal{O}(E) \approx \mathcal{O}(l) = \{\lambda \in \mathbb{R}^* | \lambda^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mu_2$
$SO(1) = \{1\}$ groupe trivial avec élément neutre , mat taille 1, $A(\lambda) tq\ \lambda^2 = t\ AA = \mathbb{1}_n$
• $n = 2$ : E plan eucli, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base ornee de $E, u \in \mathcal{L}(E), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A = Mat_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$
1) $u \in SO(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2) $u \in \mathcal{O}^-(E) \iff \exists\, \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

20 ▶ $\mathbb{R}^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de rotation d'angle $\theta$ ds plan eucl $\mathbb{R}^2$

Prop 21 ▶ soit E un plan eucl, un élt $u \in SO(u)$ donné par même matrice $\mathbb{R}^\theta$ ds 2 bases ornee liées par mat de passage ornee tq $det P_{\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'} = -1$ et si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = \mathbb{R}^\theta, Mat_{\mathcal{E}'}(u) = \mathbb{R}^{\theta'} \Rightarrow \theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}^{\theta'} = (\mathbb{R}^\theta)^{-1} = \mathbb{R}^{-\theta}$

### 3.5 Orientation

Déf 22 ▶ soit $V$ ev, dim finie, on peut diviser l'ens $\mathbb{B}(v)$ de ttes les bases de $V$ en 2 parties disjointes, classe d'équivalence pr relation d'équivalence suivante :
pr $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathbb{B}(v), \mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \iff detP_{\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'} > 0$

Déf 23 ▶ Muni $V$ d'une orientation : c'est choisir laquelle de 2 classes, on appelle **classe des bases directes**, l'autre étant la classe des **bases indirectes**

24 ▶ On peut donner une orientation en précisant une base directe.

Cor 25 ▶ soit $E$ plan eucl orienté. On a alors un isomorph. canonique $x : SO(E) \longrightarrow SO(z)$ qui associe à chaque élément $u \in SO(E)$ sa matrice $\mathbb{R}^{\theta}$ ds n'importe quelle base ornee, l'angle de rotation $\theta[2\pi]$ **ne dépend pas choix base ornee directe** .

26 ▶ L'orientation standard du plan eucl standard $(\mathbb{R}^2, \langle . | . \rangle)$ peut ê décrit comme : une base $(u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ est directe si $v$ s'obtient par la rotation de $u$ d'angle 90° dans sens contraire des aiguilles d'une montre.

### 3.6 Sens géométriques des éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ : dim 2

Lemme 27 ▶ Tt élément $u$ de $\mathcal{O}^-(E) a \{1, -1\}$ pour spectre, donc s'écrit par $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

Lemme 28 ▶ Les vecteurs propres unitaires ( = de norme 1) de la mat $A = \mathbb{R}^{\theta} T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ sont $v_1 = \pm(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ de vp 1
$v_2 = \pm(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$ de vp $-1$.

Prop 29 ▶ soit $E$ un plan eucl, les élts de $\mathcal{O}^-(E)$ sont les **réflexions orthogonales** $\forall u \in \mathcal{O}^-(E)$, il y a exactement 4 bases ornee de $E$ ds lsquels $u$ s'écrit par la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si $E$ est orienté, deux de ces bases sont **directes**, 2 autres **indirectes**.

# §4. Espaces euclidiens de $\dim = 3$

### 4.1 Produit Vectoriel

01 ▶ soit $E$ un ee de dim 3 muni d'une **orientation**

02 ▶ $\mathbb{B}(E) \supset \mathbb{B}_{\mathcal{O}_n}(E) = \mathbb{B}^+_{\mathcal{O}_n} \bigsqcup \mathbb{B}^-_{\mathcal{O}_n}$
toutes les bases , bases ornee, bases ornees directes, bases ornees indirectes
$\mathbb{B}(E) = \mathbb{B}^+_{\mathcal{O}_n} \bigsqcup \mathbb{B}^-_{\mathcal{O}_n}$

Déf 03 ▶ soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de 3 facteurs de $E$. Le réel $det_{\mathcal{E}}(\mathcal{U})$ ds une base $\mathcal{E} \in \mathbb{B}^+_{\mathcal{O}_n}(E)$ , **ne dépend pas** $\mathcal{E}$ et est appelé **produit mixte de** $\mathcal{U}$.
$[\mathcal{U}] = [u, v, w]$

Prop 04 ▶ ( Pptés produit mixte)
Le produit mixte $\mathcal{P} : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v, w) \mapsto [u, v, w]$ est trilinéaaire et antisymétrique. Pr $\mathcal{U} \in E^3, ona$ :
$(i)$ $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 0 \iff \mathcal{U}$ est lié.
(ii) $\mathcal{P}(\sigma(\mathcal{U})) = \mathcal{E}(\sigma).\mathcal{P}(\mathcal{U})$

$ep : \mathcal{P}(u,v,w) = -\mathcal{P}(v,u,w) = \mathcal{P}(w,v,u)$
$(iii)\, \mathcal{U} \in \mathbb{B}_{\mathcal{O}_n^+} \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \pm 1$

Lemme 05 ▶ soit $V$ un ee $\Rightarrow$ $\begin{array}{ccc} \Psi : V & \to & V^* \\ x & \mapsto & \langle x|.\rangle \end{array}$ est isom canonique de $V$ sur $V^*$.

Déf 06 ▶ soit E ee orienté dim 3. Le produit vectoriel de 2 vecteurs $u, v \in E$ est l'unique vecteur de $E$, noté $u \bigwedge v$ tq $\forall\, w \in E, [u,v,w] = \langle u \bigwedge v | w\rangle$.
En utilisant l'isom canonique $\Psi : E \longrightarrow\approx E^*, ona$ :
$u \bigwedge v = \Psi^{-1}([u,v,\bullet])$
où $[u,v,\bullet] \in E^*$ est la **fl** $E \longrightarrow \mathbb{R}, w \mapsto [u,v,w]$

Prop 07 ▶ ( pptés produit vectoriel) soit $E$ ee orienté dim 3
1. L'appli $E \times E \to E, (u,v) \mapsto u \bigwedge v$ est **bilinéaire et antisymétrique**
2) $\forall u, v \in E, u \bigwedge v = 0 \Leftrightarrow$ **u,v st colinéaires**.
3) $\forall u, v \in E, u \bigwedge v \perp u, u \bigwedge v \perp v$
4) si $u, v$ **ne st pas colinéaires** $\Rightarrow (u, v, u \bigwedge v) \in \mathbb{B}^+(E)$
si de plus, $\|u\| = \|v\| = 1, u \perp v \Rightarrow (u, v, u \bigwedge v) \in \mathbb{B}^+_{\text{on}}(E)$
5) si $\geq = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$ alors $\forall\, i, j \in \{1,2,3\}$

$$e_i \bigwedge e_j = \begin{array}{c} 0 \text{ si } i = j \\ \geq_{ijk} \text{où } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \end{array}$$

$\geq_{ijk} = \geq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ est la signature d'une permutation 6) si $\geq = \mathbb{B}^+_{on}(E)$,

$u$

$$\geq = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v_{\geq} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } u \bigwedge v_{\geq} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

### 4.2 Endomorphismes orthogonaux ds ee E de dim 3

Lemme 08 ▶ Un **endomorphisme orthogonal** d'un ee E de dim 3 a tjrs **vp réelles** $\pm 1$ = **son déterminant**.

09 ▶ (vp complexes : vlrs abs 1)

Prop 10 ▶ soit E ee orienté dim $3, u, \in \mathcal{O}(E), \lambda = det(u) = \{\ \pm 1\}$

alors $\exists$ base $\geq \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$ et $\theta \in \mathbb{R}, \text{Mat}_{\geq}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & R^\theta \end{pmatrix}$

Déf 11 ▶ $(i)$ Un axe de $E$ est une **droite vectorielle** orientée de E. Tt axe est dirigé par un unique vecteur unitaire.

$(ii)$ L'élément $u \in SO(E)$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & R^\theta \end{pmatrix}$ dans une base o.n. directe $\geq = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$ s'appelle rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe dirigé par $e_1$

12 ▶ (Notation :) $u = R_v^\theta, \forall\ v$ dirigeant l'axe $(v = \alpha e, \alpha > 0)$

Cor 13 ▶ soit $u \in\ SO(E), u \neq \mathrm{id}_E$ alors $u$ possède 2 axes de rotation, ayant pr support la même droite vectorielle $\gtrapprox E$, où $v \neq 0$, l'un est dirigé par $v$ , l'autre par $-v$.
L'axe et l'angle

$$2\pi$$

$stlesltscaract.d'unerotationde$E.

### 4.3 Détermination pratique des élts caractqs d'une rotation ds un ee orienté E :

14 ▶ (Méthodoligie : ) soit $u \in SO(E), u\ \neq \mathrm{id}_E$
1) On trouve vecteur propre $v$ de $u$ de vp $1 = detu$ , solution de $u(v) = v$
2) Déterminer $\cos\theta$ par $tr(u) = 1 + 2\cos\theta$
3) Déterminer le signe de $\sin\theta$ qui coïncide avec signe

$$x, u(x), v$$

$\forall x\ \in E\backslash\mathbb{R}v$, grâce Relation : $x, u(x), v = \|v\|(\beta^2+\gamma^2)\sin\theta$, où $x = \alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3, \geq=$ $(e_1, e_2, e_3)$ la base o.n directe dans $E$ tq $e_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$, avec ce chemin $u = R_v^\theta$

### 4.4 Endormorphismes orthogonaux ds ee qq

TH 15 ▶ soit E un ee de dim $n \geq 1$ alors $\exists$ une base o.n. de $E$ ds lqlle $u$ s'écrit par mat :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & \emptyset & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & \emptyset & & & & R^{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R^{\theta_r} \end{pmatrix} \theta_1, \cdots, \theta_r\ \in \mathbb{R}, R^{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\ \sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

Cor 16 ▶ Ttes les vp de $u\ \in\ \mathcal{O}(E)$ ds $\mathbb{C}$ st de vlr abs. 1.

Lemme 17 ▶ soit E ee de dim $n \geq 1, u\ \in \mathcal{O}(E), F \subset E$, un sev stable par $u(F) \subset F \Rightarrow u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$

Lemme 18 ▶ soit $V$ un $\mathbb{R}$ev de dim $n \geq 1, u\ \in \mathcal{L}(v)$ alors $u$ a un sev de dim 1 ou 2 .

Lemme 19 ▶ soit E un ee, $u\ \in \mathcal{O}(E)$ alors $E$ est une somme directe orthogonale de sev stables par $u$ de dim 1 ou 2.

### 4.5 Endomorphismes adjoints et symétriques

Déf 20 ▶ ( Proposition) soit E ee et $u\ \in \mathcal{L}(E)$ alors :
1) Il existe un uniuqe $v \in\ \mathcal{L}(E)$ tq
• $\forall\ x \in E, \forall y\ \in E, \langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle$
L'endomorphisme $v$ ainsi défini s'appelle adjoint de u et noté $u^*$
2) $si \geq$ est une base ornée de $E \Rightarrow Mat_\geq(u^*) = t\ Mat_\geq(u)$

Prop 21 ▶ soit E ee et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors on a :
1) $(f^*)^* = f$
2) $(f+g)^* = f^* + g^*$
3) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
4) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Déf 22 ▶ soit E ee, $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $u$ est **symétrique** ou **auto-adjoint** si $u = u^*$. De façon équivalente, $u$ est symétrique $\iff \forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x)|y\rangle = \langle y|u(y)\rangle$

Cor 23 ▶ (Proposition 1) soit E un ee, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u$ est symétrique $\iff$ une des 2 pptés équivalents est vrai :
1) $Mat_{\geq}(u)$ est sym $\forall$ base o.n. $\geq$ de $E$.
2) $\exists$ une base o.n. $\geq$ de $E$ tq $Mat_{\geq}(u)$ soit **sym**

24 ▶ (Rappel) : Une mat $A$ est dite **symétrique** si $t\ A = A$
*Exemples* :
$;\bullet Uneprojectionorthogonaleestsymtrique$
$\bullet Ttesymtriqueorthogonaleestsymtrique$

Cor 25 ▶ soit E ee, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in \mathcal{O}(E)$
$\iff$ $u$ est **inversible** et $u^* = u^{-1}$
$\iff$ $u^*u = uu^* = id_E$

26 ▶ (Notation ) : $\mathcal{S}_E = \{u \in \mathcal{L}(E)|u = u^*\}, \mathcal{S}_n(K) = \{A \in M_n(K)|t\ A = A\}$
On a si $\geq$ est une base o.n. de $E$ alors $u \in \mathcal{S}(E) \iff Mat_{\geq}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prop 27 ▶ soit E ee et $u \in \mathcal{S}_E$. Si $F$ est sev de $E$ stable par $u$ , alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.