Département de Mathématiques

M41 - Devoir Surveillé 1

19 mars 2021 - Durée 2 heures

Exercice 1. (10 points)

(1) Montrer que

(a) $\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1+u) \leq u$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad te^{-t} \leq e^{-1}$.

Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \ln(e^x + \frac{x}{n}), \ \ x \in A = \mathbb{R}^+.$$

10'

(2) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur A.

(3) Soit $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \ \ x \in A$.

(i) Montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{e^{-1}}{n} \quad \forall x \in A$.

(On pourra utiliser (1) (a) et (b)).

(ii) En déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.

(4) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx. \quad \to \quad \int_0^1 \lim f_n(x)\, dx$$

30'

35'

Exercice 2. (12 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \exp(-nx)}{n^2+1}, \ n \geq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x), \ \ x \in A = \mathbb{R}^+.$$

(1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

(2) (a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \ 0 < a < b$, on a

CV. normale.

CV.UN

$$\forall\, x \in [a,b], \quad |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b \exp(-na)}{n^2+1}, \ \forall\, n \geq 1.$$

10'

(b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(3) (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$si et seulement si $\alpha < 2$.

(On pourra calculer le $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u_n(x)|$).

(b) En déduire que si $\alpha < 2$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(4) Supposons que $\alpha \geq 2$.

(a) Montrer que f n'est pas continue en zéro.

(b) Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

cont + CV uni $\Rightarrow$ f cont.

DEVOIR SURVEILLÉ

20 mars 2021

[durée : 2 heures]

⚠ Documents non autorisés.

Annexe

Exercice 1 (exercice fait en TD)

Soit un triangle $\triangle ABC$. La bissectrice intérieure de $\measuredangle A$ et la bissectrice extérieure de $\measuredangle B$ se coupent en D. La droite parallèle à (AB) passant par D coupe les droites (AC) et (BC) en L et M respectivement.

a) En sachant que les côtés LA et MB du trapèze $ABML$ sont respectivement de 5 et 7, trouver la mesure de la petite base LM.

b) En sachant que le triangle $\triangle ABC$ est isocèle en C, trouver la mesure de LM.

Exercice 2 (exercice des feuilles de TD, non fait en TD) $(JK) \parallel (IJ)$?

Soient $ABCD$ un rectangle avec $E, F \in [AB]$ et $G, H \in [CD]$ avec $AEHD$, $EFGH$ et $FBCG$ des carrés. Soit $I = (AC) \cap (EH)$. Montrer que F, I et le centre J du carré $AEHD$ sont alignés.

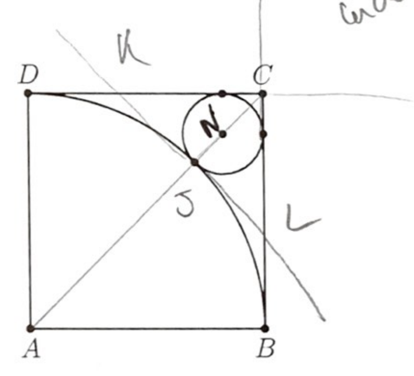
cercle ins

Exercice 3 (exercice de construction)

Les points A et B sont donnés. On souhaite réaliser la figure ci-contre à la règle et au compas. Ainsi il faut construire :

a) le carré $ABCD$;

b) le petit cercle, et donc en particulier son centre, tangent au cercle $\mathcal{C}(A, B)$ et aux deux côtés CB et CD du carré.



Donnez le programme de construction, sans justification, mais en expliquant, au préalable, votre démarche pour la construction du petit cercle. Les programmes des constructions classiques utilisées doivent être détaillés à part.