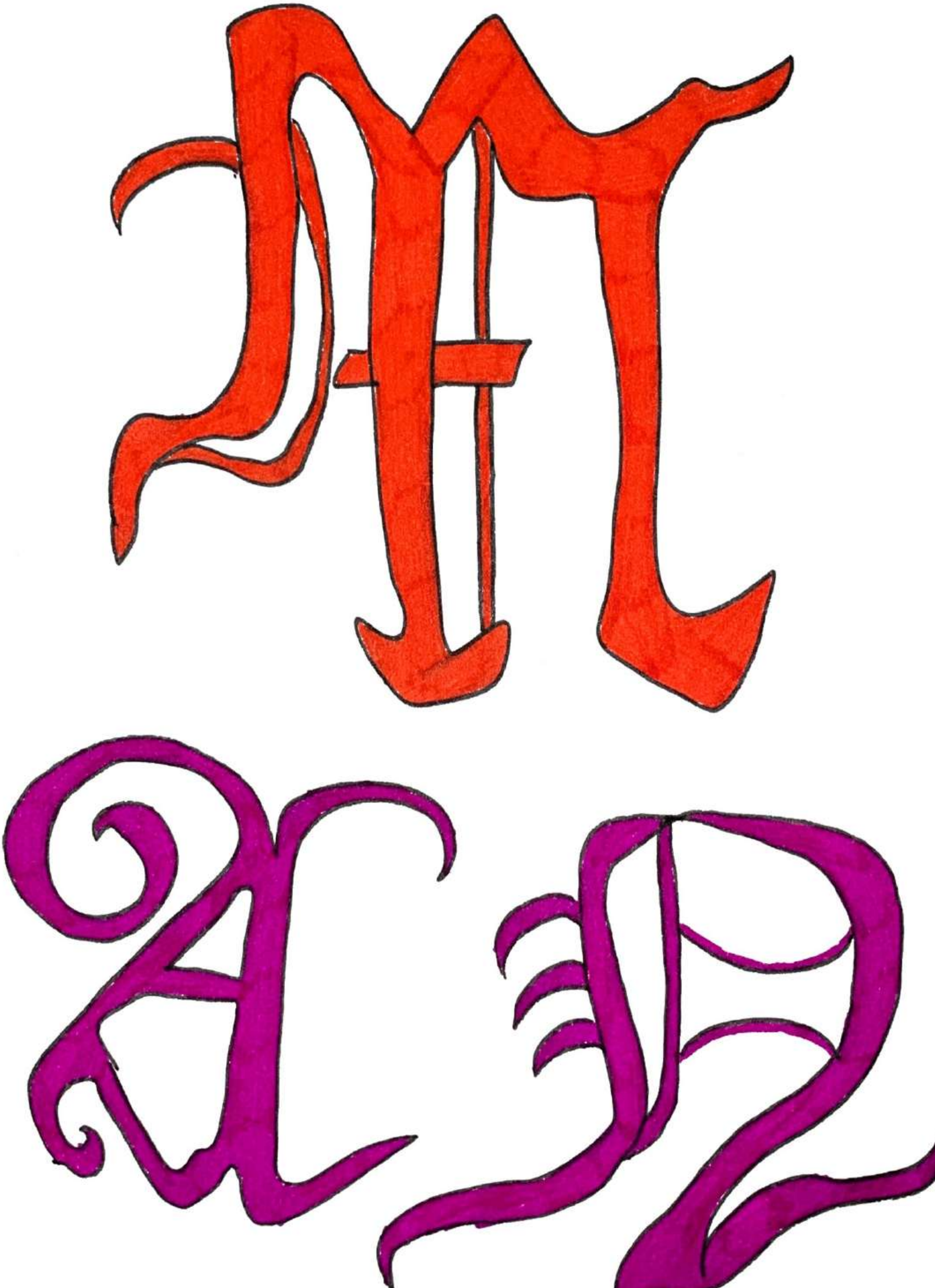

M
A

M-ANA

1. Compléments sur réels

1.1. Opérat°s & Relat°s ordres

- Addit° sur R : associative, élt neutre, chq réel opposé, commutative)
- Multiplic° R : asstve, cmttve, 0 absorbant, distributivité).

⚠ Ne pas Division par 0.

Voir Relat° ordre de $\leq$ & $\geq$.

- Compliment : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$.
- Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$.

1.1. 2. Voisinages

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle ssi $\forall a, b \in I$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I$

Voisinages : Soit V partie non vide de $\mathbb{R}$, V est un voisinage de :

1) x si V contient un intervalle ouvert I & $x \in I$.
2) $+\infty$ si V cont ——— non-majorée
3) $-\infty$ ——— non-minorée.

1.2. 2. Généralités fonctions

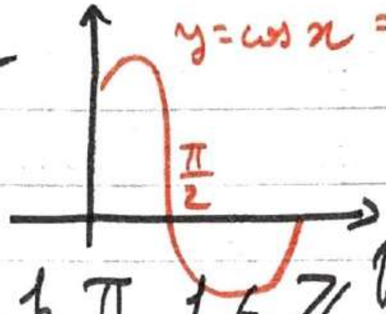
1.2.1. Def / Prélemin°s.

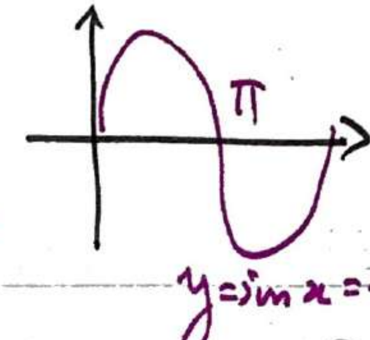
- $I \subset \mathbb{R}$, f réelle sur I est 1 règle $\Leftrightarrow$ $\forall$ élt x de I uniq réel $f(x) = y$.

- $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f(I) = \{ f(x), x \in I \}$
$f(I) = \{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y \}$

1.2.2. Pptés f réelles

- f majorée / minorée / bornée
- $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$





- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ & $\tan(x+\pi) = \tan(x)$
- monotone : ↗ et ↘ (@ cte).

1.2.3. TH Bijec θ

Soit $f : I \to J$, $\exists f^{-1} : J \to I$, $\forall x \in I, \forall y \in J$,

- $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(y)) = y$.
- $\forall y \in J$, $\exists ! \, x \in I$, $f(x) = y$ (uniq solu°)
- f est bijective.

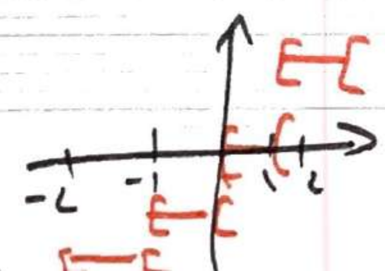
TH Bijec° : Soit f f réelle & $I \subset D_f$ intervalle.

Si f est STRICT^T MONOTONE sur I alors $f : I \to f(I)$ est BIJECTIVE & sa récipro $f^{-1}(f(I)) \to I$: m̂ monotonie directe.

1.3. Fonctions usuelles

Pr $x \in \mathbb{R}$, partie entière de x est + grd entier relatif qui soit $\leq x$: $\mathbb{E}(x)$

$$\mathbb{E}(x) \leq x \leq \mathbb{E}(x) + 1$$



1.3.3. Valeur absolue

- $|x.y| = |x|.|y|$ & $|x| = \sqrt{x^2}$ & $|x+y| \leq |x| + |y|$

1.3.4. Fs puissances de exposant irrationnel

- ▸ Si n IMPAIRE ; f_n ST $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$
par TH bijc°, f_n admt récipq $f_{\frac{1}{n}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt[n]{x}$.
- ▸ Si n PAIRE ; f_n ST $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$, $Im(f) = \mathbb{R}^+$.
par TH bijc°, f_n admt récipruq $f_{1/n}$ $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

1.3.4. Log & Exp

- $\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x}$; $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$ / $x.\ln a = \ln a^x$
$e^{a+b} = e^a . e^b$

1.3.5. Puissances Irrationnelles

Pr $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{a \ln x} = x^a$.

R/ : Si $a \in \mathbb{Q}$, on a bien $\forall x > 0$, $e^{a \ln x} = x^a$, $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
est bijective & $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

- $x^{a+b} = x^a . x^b$ $\quad (x.y)^a = x^a . y^a$ $\quad \ln x^a = a \ln x$
- $(x^a)^b = x^{ab}$ $\quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Pr $f(x) = u(x)^{v(x)} \iff f(x) = e^{v(x) . \ln u(x)}$.

$f(x) = \frac{1}{x+1}$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\boxed{\text{Analyse}}$ $y \in \mathbb{R}$, supposons ds Im f

Supposons $x \notin -1$, $x \in S_y$.

$y = f(x) \iff y = \frac{1}{x+1} \iff xy = 1-y$

⚠ Division par 0, on suppose

$y \neq 0 \implies x = \frac{1-y}{y}$.

$\implies y \in \mathbb{R}^* \implies \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

$\implies S_y \subset \left\{\frac{1-y}{y}\right\}$.

$\boxed{\text{Synthèse}}$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$, $x \in \left\{\frac{1-y}{y}\right\}$.

Vérifions $x \in D_f$, $x = (1-y)/y = -1$

Si $x = -1 \implies 0 = 1$ CONTRADICTION

Vérifions $f(x) = y$.

$f(x) = f\left(\frac{1-y}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1-y}{y}+1} = y$.

$x\ \frac{1-y}{y} \in S_y$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$

$\mathbb{R}^* \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\left\{\frac{1-y}{y}\right\} \subset S_y$.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ | $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

$\forall y \in \mathbb{R}^*, S_y = \left\{\frac{1-y}{y}\right\}$

$f(x) = x^2 + 2x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{\text{Analyse}}$ Supposons $y \in \mathbb{R}$; Spso ds $Im(f)$

$y = x^2 + 2x \iff x^2 + 2x - y = 0$

$\Delta = -4y + 4 = 4(-y+1)$.

A plusieurs solut^{o} si $4(-y+1) \geq 0$

$y \leq 1$.

$\alpha = \frac{2 - 2\sqrt{1-y}}{2} = 1\sqrt{1-y}$.

$\beta = 1 + \sqrt{1-y}$.

Si $y \in Im(f)$, (E) a 1 solu^{o}.

Pr $y \leq 1 \iff \left| \begin{array}{l} Im(f) \in]-\infty, 1]. \\ S_y \subset \{1 - \sqrt{1-y} ; 1 + \sqrt{1-y}\} \end{array} \right.$

$\boxed{\text{Synthèse}}$ Vérifions $x \in D_f$,

Soit $y \in]-\infty, 1]$.

Vérifions $f(x) = y \iff$ solu^{o} équa^{o}.

$]-\infty, 1] \subset Im(f)$.

$\{1 - \sqrt{1-y} ; 1 + \sqrt{1-y}\} \subset S_y$.

$\boxed{\text{Conclusion}}$

$Im(f) =]-\infty, 1]$.

$S_1 = \{1\}$.

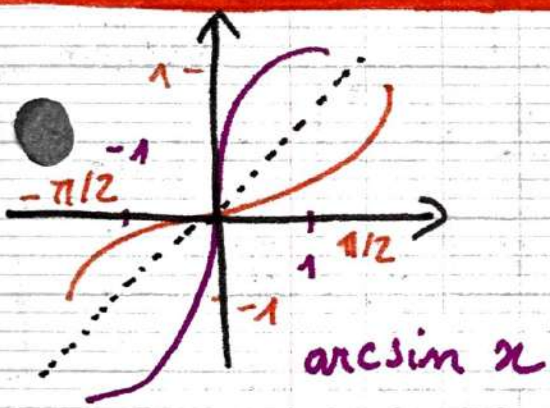
$\forall y < 1$, $S_y = \{1 - \sqrt{1-y} ; 1 + \sqrt{1-y}\}$

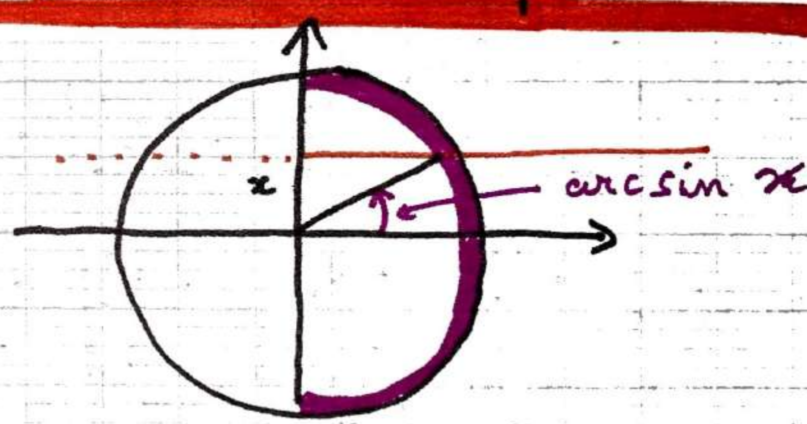
3.6. Fonctions Circulaires Réciproques

- $\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a \equiv b & [2\pi] \\ a \equiv \pi - b & [2\pi] \end{cases}$
- $\cos a = \cos b \iff a = b \pm [2\pi]$
  - $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$
    $\cos 2a = 2\cos a - 1$
  - $\sin 2a = 2 . \sin a . \cos a$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$: s^{trT} ↗ bijective.

$\arcsin [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: s^{tT} ↗ impaire.



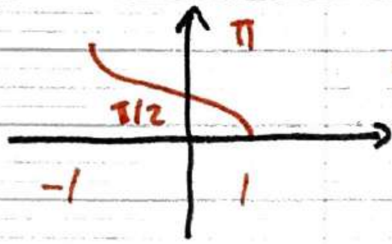


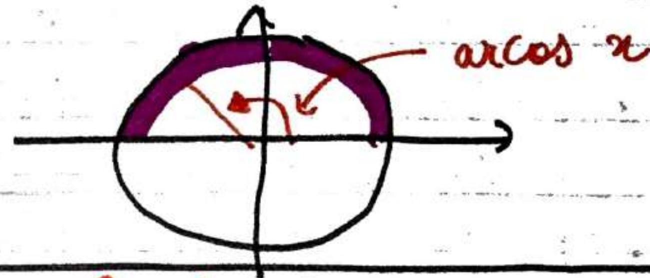
@ $\arcsin\left(\sin \frac{22\pi}{3}\right) = \,?$

$$\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(3 \times 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\cos [0, \pi] \to [-1, 1]$ st $\searrow$ bijective.

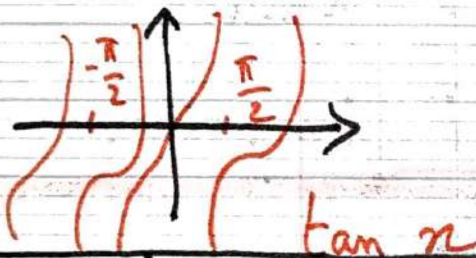
$\arccos [-1, 1] \to [0, \pi]$ st $\searrow$.

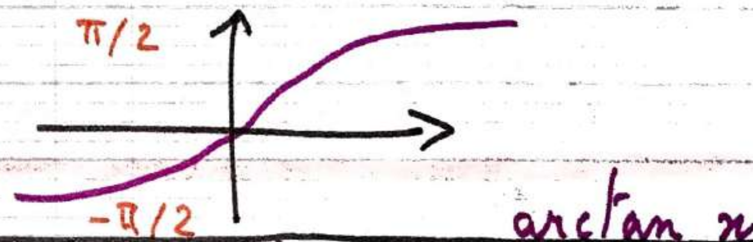




$\tan \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ st $\nearrow$ bijective

$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ st $\nearrow$.





x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arcos	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$\forall x \in [-1,1]$, $\boxed{\begin{aligned} \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}}$

<u>Preuve</u> : Soit $x \in [-1,1]$; $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$

Donc $\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$

Donc $|\sin(\arccos x)| = \sqrt{1-x^2}$

OR $\arccos x \in [0,\pi]$ dc $\sin(\arccos x) \geq 0$.

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = |\sin(\arccos x)| \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)$

RÉSOUDRE

$\arccos x = \arcsin(1-x)$

- $\arccos x$ déf $-1 \leq x \leq 1$
- $\arcsin x$ déf $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

Valide sur $x \in [0,1]$

Soit $x \in [0,1]$; $\arccos x = \arcsin(1-x)$

$\Rightarrow \cos(\arccos x) = \cos[\arcsin(1-x)]$

$\Rightarrow x = \sqrt{1-(1-x)^2} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 2x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

RÉCIPROQUEMENT

Pr $x = 0$; $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = \arcsin(1-0) \Rightarrow 0$ est solu°.

Pr $x = 1$; $\arccos(1) = 0 = \arcsin(0) = \arcsin(1-1) \Rightarrow 1$ est sol.

(11) Simplifier expre° + graphe f.

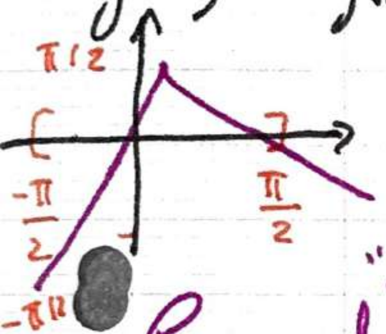
$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

Df : ▸ Pr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.

▸ Pr $x \in \left[+\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \sin(\pi - x) = \sin x$

Donc $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x))$
$\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = \pi - x$.

→ $f(x)$ défini sur $x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x)$ défini $\forall x \in \mathbb{R}$.



$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi))$
$= \arcsin(\sin x) = f(x)$

"Je connais f sur $[0, 2\pi]$" et $f(x + 2\pi) = f(x)$

Pour calculer $f(x)$:

Je trouve $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x - 2k\pi \leq 2\pi$.

→ si on a un tel k : $2k\pi \leq x \leq 2\pi(k+1)$

$k = \mathbb{E}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. $\iff k \leq \frac{x}{2k\pi} \leq k + 1$

Finalement ; $f(x) = f\left(x - 2\pi\, \mathbb{E}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$.

Je trouve $k \in \mathbb{Z}$, $-\pi/2 \leq x - 2k\pi \leq 3\pi/2$

Si $2k\pi \leq x + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi(k+1) \iff k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} \leq k + 1$

Finalement ; $f(x) = f\left(x - 2\pi\, \mathbb{E}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)\right)$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2\pi\, \mathbb{E}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right) & \text{si } \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - (x - 2\pi\, \mathbb{E}) & \text{si } \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

C-2 : Suites Numériques

1) Généralités

$u = (u_n) = (u_n)_{n \geqslant 0}$.

→ certaines suites déf à certain rang.

D Soit $(U_n)_{n \geqslant 0}$ suite réelle, (U_n) est :

- majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant M$.
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant m$.
- bornée si majorée & à la fois minorée.

@ $(n^2)_{n \geqslant 0}$ est minorée par 0 mais pas majorée.

$((-1)^n n^2)$ n'est ni majorée ni minorée.

D (U_n) suite réelle, (U_n) est :

- croissante (↗) si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geqslant U_n$.
- décroissante (↘) si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leqslant U_n$.
- monotone si (U_n) est ↗ ou ↘.

$\boxed{M}$ par monotonicité d'une suite :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{U_{n+1} - U_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{n!} \times \frac{2}{n+1} - \frac{2^n}{n!}$

$= \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{2^n}{n!}\left(\frac{1-n}{n+1}\right) \leqslant 0$. $\Rightarrow (U_n)_{n \geqslant 1}$ ↘.

$(n+1)! = n!(n+1)$

(U_n) suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$, (VP)

(U_n) $\boxed{\text{converge}}$ vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : |U_n - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \quad \text{ou} \quad U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

(U_n) $\boxed{\text{diverge}}$ vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n > M.$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \quad \text{ou} \quad U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Ptés : $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ & $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$ & $c \in \mathbb{R}^*$

- $\lim_{n \to +\infty} (c.U_n + V_n) = c\ell + \ell'$
- $\lim_{n \to +\infty} (U_n . V_n) = \ell . \ell'$
- $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

Sauf F.I.
- $+\infty - \infty$
- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \times \infty$

Mettre en facteur le terme dominant ou Rela° conjuguée

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1} = \frac{\cancel{n}(2 - \frac{1}{n})}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{\lim (2 - \frac{1}{n})}{\lim (1 + \frac{1}{n})} = 2.$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

DEMO Suite converge

On veut $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N :$

- $\left|\frac{1}{n^r}\right| = \frac{1}{n^r} < \varepsilon.$
- Soit $\varepsilon > 0$, je vx trouver $N : \frac{1}{N^r} < \varepsilon.$

$N : \frac{1}{N^r} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < N^r \iff \frac{1}{\varepsilon^r} < N.$

Soit donc N un entier avec $N > \varepsilon^{-\frac{1}{r}}.$

- Alors $\forall n \geqslant N : |U_n| = \frac{1}{n^r} \leqslant \frac{1}{N^r} < \varepsilon$

$x \mapsto \frac{1}{x^r} \searrow.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$

DEMO Suite diverge.

- Soit $M > 0$, et N un entier, $N > \frac{\ln M}{\ln a}$

Alors $\forall n \geqslant N : a^n \geqslant a^N > a^{\frac{\ln M}{\ln a}} = M.$

- $a^{\frac{\ln M}{\ln a}} = e^{\frac{\ln M}{\ln a} \cdot \ln a} = M.$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$$

3) Suites Particulières

$(b . a^n)_{n \geq 0}$.

3.1. Suites géométriques

SG raison $a \in \mathbb{R}^*$ & premier terme $b \in \mathbb{R}$

La suite $(a^n)_{n \geq 0}$,

- Si $a > 1$, $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
- Si $a = 1$, $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- Si $a \in]-1, 1[$, $a^n \longrightarrow 0$
- Si $a < -1$, $(a^n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite.

$S_n = 1 + a + \dots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k$

- Si $a = 1$: $S_n = n + 1 \longrightarrow +\infty$
- Si $a \neq 1$; $(1 + a + \dots + a^n)(1 - a) = 1 + \cancel{a} + \dots + \cancel{a^n} - \cancel{a} - \dots \cancel{a^n} - a^{n+1}$

$(1 + a + \dots + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1}$

$\forall n \geq 1$, $\boxed{S_n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$

- Si $a \in]-1, 1[$, $\lim S_n = \dfrac{1}{1 - a}$
- Si $a > 1$, $\lim S_n = +\infty$
- Si $a \leq -1$, S_n n'a pas de limite.

Pour $a = -1$, $S_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ paire} \\ 0 \text{ si } n \text{ impaire} \end{cases}$

$\Rightarrow (S_n)_{n \geq 0}$ bornée.

ⓐ $U_n = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}$; $n \in \mathbb{N}$.

$U_n = 2^{S_n}$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ $U_n = 2^{\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}}$.

$\Rightarrow \lim U_n = 2^{\frac{1}{1 - 1/2}} = 4$.

$$① \quad U_n = \sqrt{n^2+n} - n = \sqrt{n^2+n} - n \left(\frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n} \right)$$

$$U_n = \frac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \quad \text{or} \quad \sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{1+0} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

$$V_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

$$W_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right]}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]} = 3 \times \frac{1+(2/3)^{n+1}}{1+(2/3)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} W_n = 3$$

$$Z_n = \ln(n^2+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n}\right) = \ln\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} Z_n = +\infty$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$X_n = \frac{3^n + \pi^n}{2^{2n}} = \frac{3^n + \pi^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \quad \frac{3}{4}, \frac{\pi}{4} \in]-1,1[$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = 0$$

3.2. Suites de références, suites équivalentes

(U_n) & (V_n) ne s'annule pas apcr. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, V_n \neq 0$

(U_n) & (V_n) sont équivalents ; $\boxed{U_n \underset{+\infty}{\sim} \text{ si } \lim \frac{U_n}{V_n} = 1}$

ex : $n^2 + n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$

PPTES :

- $U_n \times U'_n \underset{+\infty}{\sim} V_n \times V'_n$
- $\frac{U_n}{U'_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{V_n}{V'_n}$
- si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

⚠ ON N'AJOUTE PAS & ON NE SOUSTRAIT PAS $\sim$.

Équivalents usuels : $\lim U_n = 0$

- $\sin(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $e^{U_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $\tan(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $\ln(1 + U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $1 - \cos(U_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{U_n^2}{2}$
- $(1 + U_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha . U_n$ $\forall \alpha > 0$

ex : $U_n = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\sin 1/n}$ comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ & $\ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

D'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1/n}{1/n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

TH Comparée : Pr tout $a > 1$, $x > 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} = 0} \quad \boxed{\lim \frac{n^x}{a^n} = 0} \quad \boxed{\lim \frac{a^n}{n!} = 0}$$

$$a^b = \exp(b \cdot \ln(a))$$

---

4. TH convergence ou divergence

4.1. TH encadrement

TH Pssg à la limite ds les inégalités : $U_n \leq V_n$ $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$.

si $\lim U_n = +\infty \Rightarrow \lim V_n = +\infty$

si $\lim V_n = -\infty \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

si (U_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ & (V_n) CV vers $\ell' \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell \leq \ell'$.

@ $U_n = \frac{n}{1+\sin^2 n}$; $1 + \sin^2 n \leq 2$ dc $\frac{n}{1+\sin^2 n} \geqslant \frac{n}{2}$.

ĉ $\frac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \lim U_n = +\infty$.

TH $\lim V_n = 0$ & $|U_n| \leq V_n$ apcr $\Rightarrow \lim U_n = 0$.

TH : Encadrement

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 \,;\; V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$
- (V_n) & (W_n) m̂ lim $\ell \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

4.3. Suites monotones, suites adjacentes

Soit $(U_n) \nearrow$:

1) Si (U_n) est majorée, elle CV vers lim $\ell \in \mathbb{R}$.
2) Si (U_n) n'est pas majorée, elle DV vers $+\infty$.

Rq) Si (U_n) majorée de limite ℓ, ℓ est un majorant de (U_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n \leqslant \ell$.

On dit que (U_n) & (V_n) st ADJACENTES si l'une est $\nearrow$, l'autre $\searrow$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0}$$

TH : Suite adjacente :

(U_n) & (V_n) 2 suites adjacentes t.q. $(U_n) \nearrow$, $(V_n) \searrow$.

1) (U_n) & (V_n) CV vers m̂ limite $\ell \in \mathbb{R}$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leqslant \ell \leqslant V_n$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln a}$$

Ex2

1) $U_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$, $n \in \mathbb{N}$,

$\rightarrow 2 \leq 3-\sin n^2 \leq 4$

$\hat{\imath}$ $\sqrt[n]{\;}$ $\nearrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{3-\sin n^2} \leq \sqrt[n]{4}$

or $\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$

$\Rightarrow$ par TH encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3-\sin^2} = 1$

3) $U_n = n.\sin n + n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\underbrace{n^2 - n}_{n \to +\infty} \leq n.\sin n + n^2 \leq n^2 + n$

$+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

4) $U_n = \cos n . \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$|U_n| = |\cos n| . \left|\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq 1 . \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

6) $U_n = \frac{e^{(n \cdot \cos^2 n)}}{n+1}$, $\forall n > 1$.

$\rightarrow -n . \cos^2 n \leq 0$

$\rightarrow e^{(-n . \cos^2 n)} \leq 1$

$\rightarrow 0$

$|U_n| = \frac{e^{(-n . \cos^2 n)}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

8) $U_n = 1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$1 \geq -\cos n \geq -1$

$1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \geq -1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\rightarrow 0$

$\Rightarrow \lim U_n = 1 - 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

11) $U_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + \sin n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{\sin n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\to \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3+0}{1+0+0} = 3$

---

c) $U_n = \left(\frac{\sin n}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|U_n| = \frac{|\sin n|^n}{2^n} \leq \frac{1^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

---

s) $U_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{3}$$

$$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} \to e^0 = 1$$

$U_n = \left(\frac{10^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$;

$$U_{n+1} = \frac{10}{n+1} U_n$$

Si $n \geq 9$; $U_{n+1} \leq \frac{10}{9+1} U_n = U_n$

Dc $(U_n)_{n\geq 9}$ est $\searrow$.

Or $(U_n) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dc $(U_n)_{n\geq 9}$ est $\searrow$ & minorée.

Elle converge dc vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Or $\underbrace{U_{n+1}}_{\to \ell} = \underbrace{\frac{10}{n+1}}_{\to 0} \underbrace{U_n}_{\to \ell}$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

Ex5 $(U_n)_{n\geq 1}$ $(V_n)_{n\geq 1}$

$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$

1) Mq (U_n) & (V_n) CV vers lim $l \in \mathbb{R}$.

Mq (U_n) & (V_n) adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{U_n - V_n} = \cancel{U_n} - \cancel{U_n} - \frac{1}{n.n!} = \frac{-1}{n.n!}$

- $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} + \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0. \Rightarrow U_n \nearrow.$

- $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right]$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)^2}\right]$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0.$ $\Rightarrow V_n \searrow$

$\Rightarrow (U_n)$ & (V_n) adjacentes & CV vers $l \in \mathbb{R}$.

- $U_2 = 2,5$; $V_2 = 2,75$: $2,5 \leq l \leq 2,75$

4.2. Suites extraites

$(U_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ → suite extraite de U_n ou → sous-suite

TH (U_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi $(U_{2n})_{n\geqslant 0}$ & $(U_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ CV ts les 2 vers m̂ lim ℓ.

TH
- Si (U_n) CV vers $\ell \Rightarrow \forall$ sous-suite U_n CV vers ℓ.
- Si $\exists$ ss-suite de U_n q ne CV pas ou s'il $\exists$ 2 ss-suites q CV vers 2 lim $\neq$ $\Rightarrow$ U_n diverge

TH. 4.2 @ $\left((-1)^n\right)_{n\geq 0}$

La suite DV car $\left|\begin{array}{l}\lim U_{2n} = 1 \\ \lim U_{2n+1} = -1\end{array}\right. \neq$.

Soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+3)}$

- $U_{2(n+1)} - U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)}$

$U_{2(n+1)} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+3)} + \frac{(-1)^{2n}}{\ln(2n+4)}$

$U_{2(n+1)} - U_{2n} = \frac{-1}{\ln(2n+3)} + \frac{1}{\ln(2n+4)} \leq 0$.

Dc $(U_{2n})_{n\geq 0} \searrow$; de m̂ $(U_{2n+1})_{n\geq 0} \nearrow$

Finalem^t (U_{2n}) & (U_{2n+1}) st ADJACENTES CV vers m̂ lim $\ell \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

Ex 7 • $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_n = (-2)^n + 2^n \Rightarrow U_n$ n'a pas de lim.

- $U_{2n} = (-2)^{2n} + 2^{2n} = 2^{2n} + 2^{2n} = 2^{n+1} \longrightarrow +\infty$
- $U_{2n+1} = (-2)^{2n+1} + 2^{2n+1} = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 0 \to 0$

6) $U_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow U_n$ n'a pas lim

- $U_{3n} = \sin(2\pi n) = 0$
- $U_{3n+1} = \sin\left(\frac{-2\pi}{3} \times (3n+1)\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ex 3 1) Mq $U_n \nearrow$.

- $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \Rightarrow U_n \nearrow$

2) Pr $n \geq 1$, on pose $P(n)$: $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Mq par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

$U_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1} \leq 2 - \frac{1}{1} \Rightarrow P(1)$ vraie

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Mq $P(n+1)$ est vraie cad $U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

- $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ par H IR

Or $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}$

Par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall\, n\geq 1$,

càd $\forall\, n\geq 1$; $U_n\leq 2-\frac{1}{n}$.

3) En déduire que U_n est majorée.

$\forall\, n\geq 1$; $U_n\leq 2-\frac{1}{n}\leq 2$.

Dc $(U_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.

ĉ (U_n) ↗, elle CV vers lim. $\ell \in \mathbb{R}$ $\to \pi^2/6$.

Ex4 $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$ & $U_0=3$.

Récurrence $\Rightarrow 2<U_n$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}^2-U_n^2=(\sqrt{U_n+2})^2-U_n^2=-U_n^2+U_n+2$

Or $(2-U_n)(1+U_n)=-U_n^2+U_n+2$

Dc $(2-U_n)(1+U_n)=U_{n+1}^2-U_n^2$.

3) $(2-U_n)(1+U_n)<0$ car $2-U_n<0$.

$\Rightarrow U_{n+1}^2<U_n^2$ comme ils st >0 $\Rightarrow U_{n+1}<U_n$.

$\Rightarrow U_n$ ↘.

4) Mq (U_n) CV ? Lim ?

- (U_n) ↘, minorée par 2 ; elle CV dc vers $\ell\in\mathbb{R}$.

Dc $U_{n+1}^2\longrightarrow \ell^2$ & $U_n^2\longrightarrow \ell^2$

En passant à la limite ds $U_{n+1}^2-U_n^2=(2-U_n)(1+U_n)$

$\Rightarrow \ell^2-\ell^2=0=(2-\ell)(1+\ell)$

$\Rightarrow \ell=2$ ou $\cancel{\ell=-1}$ impossible car $U_n>2$

$\Rightarrow \ell=2$

Ex6 $n \geqslant 2$.

$$U_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} = \frac{\ln n}{\ln n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

$$U_n = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

$$U_n = 4^n - 3^n + 1 = 4^n\left[1 - \frac{3^n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right] = 4^n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

or $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{4} \in]-1,1[\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ & $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} U_n = +\infty$

Ex6 $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$; $V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) Mq (U_n) & (V_n) st adjacentes.

Écrire 2 derniers termes de la suite E2DTS

• $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$

• $U_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \dots \frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ E2DTS

$\Rightarrow U_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n \underbrace{- \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}_{<0} < U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} < U_n \Rightarrow \searrow$

$$V_{n+1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$V_{n+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}}_{V_n} + \underbrace{\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}}_{>0} > V_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} > V_n \Rightarrow \nearrow$

Puis $V_n - U_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$

$V_n - U_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$

$V_n - U_n = \frac{-1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$ U_n & V_n adjacentes

2) $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$; on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n = W_{2n}$ & $V_n = W_{2n+1}$.

(U_n) & (V_n) st dc sous-suites termes paires / impaires de (W_n).

De plus ĉ (U_n) & (V_n) st adjacentes, elles CV vers m̂ lim $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = \ell$

Voir (ex 8) VRAI - FAUX

Ex 12 $f(x) = \arccos(1-2x^2)$

$x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie si $-2x^2+1 \in [-1,1]$.

$-1 \leq -2x^2+1 \leq 1$

$\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \iff x \in [-1,1] = D_f$.

• Pr $x \in [-1,1]$, $f(-x) = \arccos(-2(-x)^2+1)$

$f(-x) = \arccos(-2x^2+1)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

Pr $x \in [0,1]$ soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, | $x = \sin t$, $t = \arcsin x$

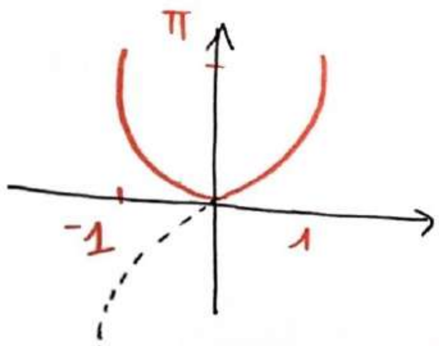
$f(\sin t) = \arccos(1-2\sin^2 t) = \arccos(\cos 2t)$

$= 2t$ car $2t \in [0,\pi]$

$= 2\arcsin x$

Pr $x \in [-1,0]$, soit $f(x) = f(-x) = 2\arcsin(-x)$

$= -2\arcsin(x)$.



$f(x) = 2\arcsin x$

Ch 3 : Limites & Continuités

I / Limites

1.1. Def / Généralités

Limite en un point fini :

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert contenant a, fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$.

- f admet pr limite $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \delta,$
  $|f(x) - \ell| < \varepsilon.$

- f admet pr limite $+\infty$ en a : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
  $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \delta, f(x) > M.$

- f admet pr lim $-\infty$ si : $\lim_{x \to a} -f(x) = +\infty$

rq : ▸ limite à gauche : $I =]b, a[$ avec $b < a$
$\lim_{x \to a^-} f(x)$ qd limite à gauche $\exists$.

▸ limite à droite : $I =]a, b[$, $b > a$.

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ qd limite à droite $\exists$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; $\forall M>0, \exists \delta>0, \forall x \in I\setminus\{a\}$,
$|x-a| < \delta$, on a $f(x) > M$.

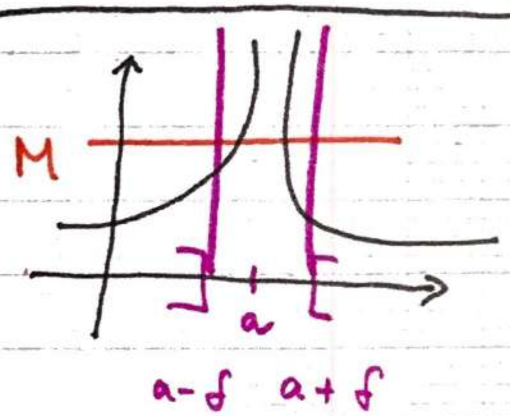
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$; $\forall \varepsilon>0, \exists A>0, \forall x>A$,
$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

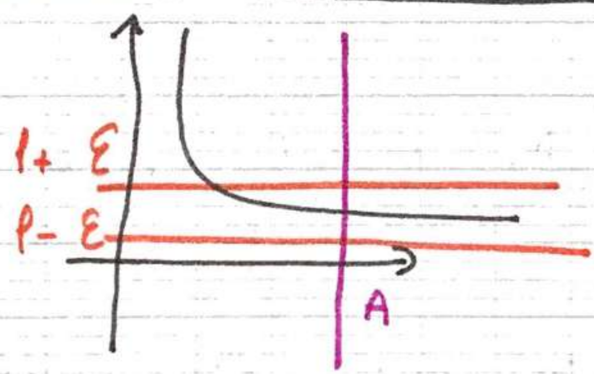
$a, \ell \in \mathbb{R}$, f déf sur $I\setminus\{a\}$: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$

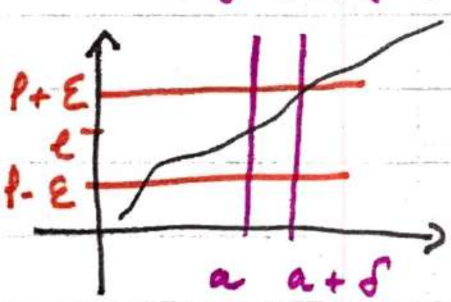
Limite à droite de a : $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in]a, a+\delta[, |f(x)-\ell| < \varepsilon$

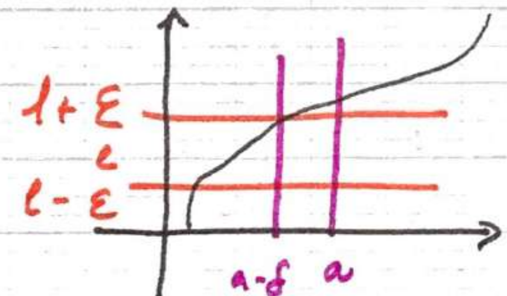
-- -- -- -- -- : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$: Limite à gauche a

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in]a-\delta, a[, |f(x)-\ell| < \varepsilon$

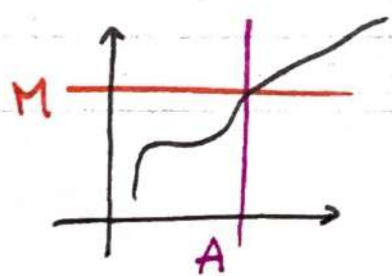








$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\forall M>0, \exists A>0, \forall x>A, f(x)>M$.



Prop : f réelle f admt lim en $a \in \mathbb{R}$ ssi $\lim a^-$ et $\lim a^+$ st idtqs.

Prop : Lim d'une f est UNIQUE lorsqu'elle existe.

(pr preuve astuce : apparition 3° terme : $-f(x) + f(x)$).

2) Calcul de limites

- Prop : $\lim\limits_{x \to a} x = a$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

TH $a \in \overline{\mathbb{R}}$; $(l_1, l_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$ | $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = l_1 . l_2$ | $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = \frac{l_1}{l_2}$.

Th Composition limites : u : f déf sur voisinage de a, sauf en a, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Soit f, f définie sur voisinage J de b, $u(I \setminus \{a\}) \subset J_{\setminus\{b\}}$

et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = l$ Alors $\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = \lim\limits_{x \to b} f(u) = l$

@ $\lim\limits_{x \to 1} x^3 + x^2 + 1 = 3$; $\lim\limits_{u \to 3} \sqrt{u} = \sqrt{3}$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{x \to 0^+} e^{a \ln x} = \lim_{u \to -\infty} e^{a u} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = \lim_{x \to +\infty} e^{a \ln x} = \lim_{u \to +\infty} e^{a u} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = \lim_{u \to 0} \ln(1 + u) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

TH Soit f & g tq $]a-\delta, a+\delta[\subset D_f$ & $\subset D_g$.
On suppose $x \neq a$, $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$, $f(x) \leq g(x)$
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ si elles existent.

@ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) = ?$ tq $\sin \frac{1}{x} \geq -1$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} +\infty} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2}\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} +\infty}.$$

$\Longrightarrow$ $\xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

$\boxed{\text{TH}}$ Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V voisinage de a ; f, g réelles déf. sur $V \setminus \{a\}$

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \ |f(x)| \leq g(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

@ $x.\sin\frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, $\underbrace{\left|x.\sin\frac{1}{x}\right|}_{\text{Donc } \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \leq \underbrace{|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

$\boxed{\text{TH Gendarmes}}$ $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V voisinage de a, f, g " " :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \ h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

& $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DM Aires

Preuve : $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \times \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{1+\cos x}_{2}}$

@ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$ $\qquad \underbrace{\left|\frac{\cos x}{x}\right|}_{\text{Donc } \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0} \leq \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\xrightarrow[x\to +\infty]{} 0}$

$\boxed{\text{M}}$ Hôpital si FI : $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^3}{1} = 4$$

1

Σ termes suites géométriqs

1) $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}}$

Pr $x \neq 1$

$1+x+x^2+x^3 = \frac{1-x^4}{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} \lim 1+x+x^2+x^3 = 4$

---

5) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x}$

$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$

Pr $x>0$,

$\bullet = \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \bullet = \frac{1}{2}$

---

8) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x}$

$\ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$

Pr $x \in \mathbb{R}$,

$\ln\left(\frac{e^x[1+e^{-x}]}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x}) = \bullet$

$\lim_{x\to+\infty} (1+e^x) - x = \lim_{x\to+\infty} \bullet = 0$

---

3) $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$

$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)}$ & $x^2-3x+2 = (x-1)(x-a)$

$2 = (-1)(-a) = a$

Pr $x \neq \pm 1$

$\frac{(\cancel{x-1})(x-2)}{(\cancel{x-1})(x+1)} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{2}$

2

$\boxed{\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}}$

Pr $x \neq -2$

$$\begin{array}{r|l} X^3+8 & X+2 \\ \hline -X^3-2X^2 & X^2-2X+4 \\ -2X^2+8 & \\ +2X^2+4X & \\ 4X+8 & \\ 0 & \end{array}$$

D'où

$(x^3+8) = (x+2)(x^2-2x+4)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+4 = \frac{x^3+8}{x+2}$

Ne pas Factoriser par x qd ça ne tend pas vers ∞.

Donc $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} x^2-2x+4 = 12$

---

② $\lim_{x\to 4} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

or $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = +\infty$ Dc $\lim \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = \frac{-2}{6}(-\infty) = +\infty$

De m̂, $\lim_{x\to 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = +\infty\left(\frac{-2}{6}\right) = +\infty \neq \lim_{x\to 4^-}$

Donc $x \mapsto \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ n'a pas de limite en 4.

---

4) $\boxed{\lim_{x\to 0} \left(x + \frac{|x|}{x}\right)}$

$x>0$, $x+\frac{|x|}{x} = x+\frac{x}{x} = x+1$

Pr $x>0$, Dc $\lim_{x\to 0^+} x+\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$

Pr $x<0$, $x+\frac{|x|}{x} = x+\frac{-x}{x} = x-1 \rightsquigarrow \lim_{x\to 0^-} x-1 = -1$

$\lim_{x\to 0^+} x+\frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} x+\frac{|x|}{x}$ $\Rightarrow$ n'a pas de lim en 0

---

5) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan x}{x+1}}$

$\boxed{x \neq -1}$

$\underbrace{\frac{x-\pi/2}{x+1}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \leq \frac{x+\arctan x}{x+1} \leq \underbrace{\frac{x+\pi/2}{x+1}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$

D'après TH gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \bullet = 1$

---

6) $\boxed{\lim_{x\to 1^+} (\ln x \,.\, \ln(\ln x))}$

ĉ $\lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$

On a $\lim_{x\to 1^+} \ln x \,.\, \ln(\ln x) = \lim_{u\to 0^+} u \,.\, \ln u = 0$

Composit° limites

7) $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - \sin x}$ $\quad x-1 \leq x - \sin x \leq x+1$, $\quad x-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\quad x-\sin x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\quad x+1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - \sin x} = \lim_{x \to +\infty} e^{u} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \ln x$ $\quad \boxed{1 + \sin^2 \frac{1}{x} \geq 1}$

Pr $x \in]0, 1[$;

$$\ln(x)\left[\left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right)\right] \leq \ln x$$

car $\ln x < 0$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Dc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \ln x = -\infty$

③ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \times \sin(3x)}{3x}$

$$\lim_{u \to 0} \frac{3 . \sin(u)}{u} = 3 \times 1 = 3$$

④ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$ $\quad \sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

$$\frac{2 \sin x - 2 \sin x . \cos x}{x^3} = \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{x^3} = \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Continuité f en 2 :

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ / $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ / $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

- f est discontinue en 2 car $2 \notin \mathcal{D}f$.
- Pr $x \neq 2$; $g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4 \neq g(2) \implies g$ discontinue en 2.

- De m̂, $h(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 4 = h(2)$

⑥ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} & \text{si } -2 < x < 2 \\ m & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Trouver m tq $f(x)$ continue sur $]-2, 2]$

n'est pas définie à droite de 2.

$\frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$ est quotient composées f usuelles, elle est continue sr $]-2, 2]$ dc f continue sr $]-2, 2]$.

Suite ⑥

Pour q f s.t continue en 2, il faut $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = m}$

Or $\dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \dfrac{-(2-x)}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}} = \dfrac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{-0}{2} = 0$

Finalement, avec $m = 0$, on obtient $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

Donc f est continue sur $]-2, 2]$.

---

④ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; f composée f continues.

Dc f est continue sur $\mathcal{D}f$.

Or $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ déf ssi $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$; càd $x-1$ & $x+1$ de m̂ signe

$\begin{cases} x-1 > 0 \text{ et } x+1 > 0 \\ \text{ou} \\ x-1 < 0 \text{ et } x+1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1 \end{cases}$ Dc $\boxed{\mathcal{D}f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$

---

⑤ Déterminer $\mathcal{D}f$ & continuité f

$x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \arccos(\ln x)$

$\arccos(\ln x)$ déf $\iff \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \ln x \leq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e \end{cases} \iff x \in [e^{-1}, e]$

$\mathcal{D}f = [\frac{1}{e}, e]$; f est continue sur $[e^{-1}, e]$ car f usuelles.

---

3) $f(x) = \ln(\arcsin x)$ Or $x \in \mathbb{R}$,

$f(x)$ déf ssi $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in]0, 1]$

Donc $\mathcal{D}f \in]0, 1]$, f continue sur $\mathcal{D}f$; f usuelles

2. Continuité

2.1. Def thm g'n'rx

Ⓓ f est continue ssi (3 condi°s dvt ê satisfaites)

1) $a \in \mathcal{D}f$
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Ⓓ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; f est continue sr $[a,b]$ si :

- $\forall x \in]a,b[$, f est continue en x
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ & $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

(TH) Sommes, produit, quotient, composi° f continues SONT CONTINUES sr le $\mathcal{D}f$.

Coroll^{r} : Si $f : I \to J$ est continue & bijective, $f \circ g$ alors $f^{-1} : J \to I$ continue

2. Continuité

2.1. Def thm g'n'rx

(D) f est continue ssi (3 condi°s dvt ê satisfaites)

1) $a \in \mathcal{D}f$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

(D) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; f est continue sr $[a,b]$ si :

- $\forall x \in]a,b[$, f est continue en x
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ & $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

(TH) Sommes, produit, quotient compositio f continues SONT CONTINUES sr le $\mathcal{D}f$.

Coroll^{r} : Si $f : I \to J$ est continue & bijective, $f \circ g$ alors $f^{-1} : J \to I$ continue

---

TH - PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\exists \tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, continue en a tq $\forall x \in I \setminus \{a\} : \tilde{f}(x) = f(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

↳ prolongement par continuité de f en a, il est <u>unique</u>.

@ Pr $x>0$, $f_x : x \longmapsto x^x$, définie s $\mathbb{R}_+^*$ & continue.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 0$

Donc f_x a un prlgt par continuité en 0, donné par

$$\tilde{f}_x(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus $\tilde{f}_x$ est continue en 0 et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalt, $\tilde{f}_x$ est définie & sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. Image suite par 1 f

Ⓟ Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f déf au voisinage de a sauf pt-ê en a. Alors

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff (U_n)_{n\geq 0}$ ave $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$

et $\forall n \geq 0$, $U_n \neq a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = \ell$

- Si $\exists\, (U_n)$ ℓq $(U_n) \to a$ tq $f(U_n)$ n'a pas limite alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas

- $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} V_n = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(U_n) \neq \lim\limits_{x\to+\infty} f(V_n) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ @

Corollaire : $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, $a \in I$:

f est continue en $a \iff \forall\, (U_n)$ à valeurs dans I ℓq $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(a)}$

Ex 12 : Déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues & vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Soit $f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ par $U_n = \frac{x}{2^n}$ alors $f(U_n) = f(x)$.

Donc $(f(U_n))_{n \geq 0}$ est cte, égale à $f(x)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(x)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ comme f est continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(0)$

D'où $f(x) = f(0)$ donc f est cte.

@ Soit $f : I \to I$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On pt alors définir $(U_n)_{n \geq 0}$ par $\boxed{U_{n+1} = f(U_n)}$ $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

Si (U_n) admet une limite $\ell \in I$ et si f continue :

$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell)$

$\Rightarrow \ell = f(\ell)$

Pr $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{2 + x}$; on a vu $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

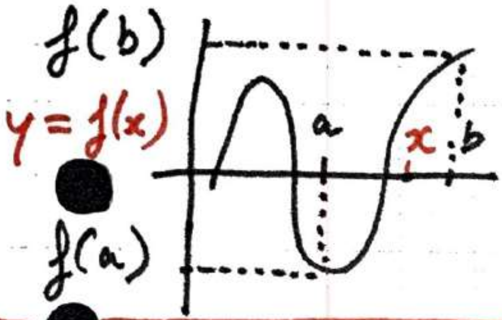
Dc (U_n) a une limite $\ell \in [2, 3]$ comme f est continue sur $[2,3]$

$\ell = f(\ell) = \sqrt{2 + \ell}$; $\ell^2 = 2 + \ell \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\ell = 2}$

2.3. Théorèmes fondamentaux

TH $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $\underbrace{f(a).f(b)}_{\text{signes } \neq} < 0$ alors $\exists c$, $c \in]a, b[$, $f(c) = 0$.

TVI Soit $f : I \to \mathbb{R}$, intervalle, $a < b \in I$ alors $\forall y$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x \in [a,b]$, $y = f(x)$.



TVE Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue Alors $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b]$, $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

Adit $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

Ex : Prolongement par continuité

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \to x\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ | Mq f admt prolgt à $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- De plus pr $x \neq 0$, $|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
- f admt de $\boxed{\text{PPC}}$ en 0^- : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{f}$ est continue en 0 & sur $\mathbb{R}^*$ dc sur $\mathbb{R}$

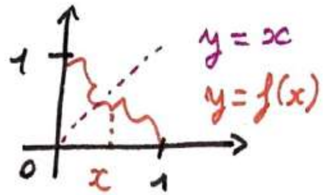
@ cos & sin n'ont pas de limite en $\pm\infty$.

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n\pi$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n\pi = +\infty$ et $\cos(U_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Dc $(\cos(U_n))_{n \geq 0}$ n'a pas de limite

@ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.



Mq $\exists x \in [0,1]$, $\boxed{f(x) = x}$

$\boxed{f(x) - x = 0}$

On considère $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) - x$

g continue sur $[0,1]$; • $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$
• $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 \leq 0$

Dc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$: TVI

$\exists x \in [0,1]$, $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

Ex 12 Mq $\exists x \in]0,1[$; $e^{-x} = x$

On considère ~~f~~ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^{-x} - x$.
CONTINUE

$g(0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ | $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

0 est compris entre $g(0)$ et $g(1) \neq 0$; $x \in]0,1[$.

Dc $\exists x \in]0,1[$, $e^{-x} - y = g(x) = 0$ cad $e^{-x} = x$.

Suite (6)

Pour q f s.t continue en 2, il faut $\boxed{\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = m}$

Or $\dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \dfrac{-(2-x)}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}} = \dfrac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{-0}{2} = 0$

Finalement, avec $m = 0$, on obtient $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

Donc f est continue sur $]-2, 2]$.

---

④ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; f composée f continues.
Dc f est continue sur Df.

Or $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ déf ssi $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$; cad $x-1$ & $x+1$ de m̂ signe

$\begin{cases} x-1>0 \text{ et } x+1>0 \\ \text{ou} \\ x-1<0 \text{ et } x+1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ \text{ou} \\ x<-1 \end{cases}$ Dc $\boxed{Df =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$

---

⑤ Déterminer Df & continuité f $\quad x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \arccos(\ln x)$

$\arccos(\ln x)$ déf $\iff \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \ln x \leq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e \end{cases} \iff x \in [e^{-1}, e]$

$Df = [\frac{1}{e}, e]$; f est continue sr $[e^{-1}, e]$ car f usuelles.

---

③ $f(x) = \ln(\arcsin x)$ $\quad$ Or $x \in \mathbb{R}$,

$f(x)$ déf ssi $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in]0,1]$

Donc $Df \in]0,1]$, f continue sr Df ; f usuelles

@ **TVI** : $f(x) = x^5 - 3x - 1$ & $g(x) = x2^x - 1$ $\quad$ 8

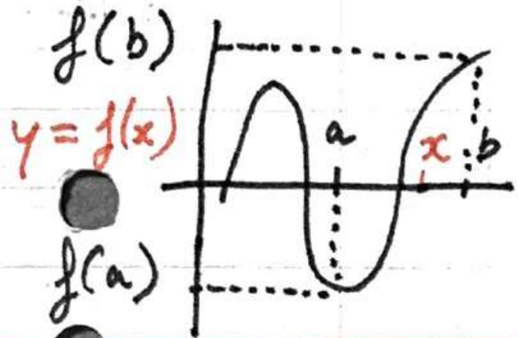
Mq $f(x) = 0$ a 1 sol ds $[1,2]$; Mq $g(x) = 0$ a 1 s ds $[0,1]$

Mq $f(x) = g(x)$ a 1 s ds $]0,2]$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, a fortiori, f est continue sr $[1,2]$.
- $f(1) = 1^5 - 3\times 1 - 1 = -3 < 0$ & $f(2) = 25 > 0$
- Dc $0 \in [-3, 25] = [f(1), f(2)]$.
- Par $\boxed{\text{TVI}}$, $\exists x \in [1,2]$ tq $f(x) = 0$ dc $f(x) = 0$ admt 1 s sr $[1,2]$

- Notons $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - g(x) \end{array}$; h est continue ĉ $\neq$ ce f continues.
- $h(0) = 0$, $h(1) = -4 < 0$ et $h(2) = 18 > 0$
- Donc par TVI, $\exists x \in [1,2]$; $h(x) = f(x) - g(x) = 0$.
- Donc $f(x) = g(x)$ a 1 s sr $[1,2] \subset]0,2]$.
  (a fortiori $f(x) = g(x)$ a 1 s sr $]0,2]$.)

TVI Soit $f : I \to \mathbb{R}$, intervalle, $a < b \in I$ alors $\forall y$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x \in [a,b]$, $y = f(x)$.



TVE Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue Alors $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b]$, $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

Adit $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

Ch. 4 : Fonctions Dérivables

- $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$: taux accroissement.

D $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\exists$ et est réelle.

ĉ $\lim\limits_{h \to 0} a + h = a \Rightarrow f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$: tangente en $(a, f(a))$

- Rq : Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet en a 1 tangente verticale

- $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\mathcal{D}f' = \left\{ x \in \mathcal{D}f,\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \ \exists \text{ et est réelle} \right\}$

(D) Si f dérivable à droite en a : $f'_d(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Si f dérivable à gauche en a : $f'_g(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f dérivable à gauche / droite ET $f'_d(a) = f'_g(a)$

P : Si f dérivable en a alors f est continue en a $\quad f^{(2)} = f'' = (f')'$

• Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, f est n fois dérivable :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

@ TVI : $f(x) = x^5 - 3x - 1$ & $g(x) = x2^x - 1$

Mq $f(x) = 0$ a 1 sol ds $[1,2]$; Mq $g(x) = 0$ a 1 s ds $[0,1]$

Mq $f(x) = g(x)$ a 1 s ds $]0,2]$.

• f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, a fortiori, f est continue sr $[1,2]$.

• $f(1) = 1^5 - 3\times 1 - 1 = -3 < 0$ & $f(2) = 25 > 0$

• Dc $0 \in [-3, 25] = [f(1), f(2)]$.

• Par $\boxed{\text{TVI}}$, $\exists\, x \in [1,2]$ tq $f(x) = 0$ dc $f(x) = 0$ admt 1 s sr $[1,$

• Notons $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) - g(x) \end{array}$; h est continue c $\neq$ ce f continues.

• ~~$h(0) = 0$~~, $h(1) = -4 < 0$ et $h(2) = 18 > 0$

• Donc par TVI, $\exists\, x \in [1,2]$; $h(x) = f(x) - g(x) = 0$.

• Donc $f(x) = g(x)$ a 1 s sr $[1,2] \subset]0,2]$.

(a fortiori $f(x) = g(x)$ a 1 s sr $]0,2]$.)

@ $f(x) = x$

Pour $h \neq 0$; $a = 2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Donc $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 1$

@ $f(x) = x^2$, $a = 1$, $h \neq 0$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2 + h = f'(1)$$

Donc $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$

@ $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$, $a = 1$, $h > 0$

$$f'(0) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

• $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty = \lim \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0 MAIS son graphe admet une tangente verticale en $(0,0)$.

$$f'(1) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$f'(1) = \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{1+\sqrt{h+1}}$$ Donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{2}$

@ f'_g & f'_d | $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad \lim_{h \to 0^-} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Donc $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$

@ $f(x) = x^n$ $\qquad h \neq 0$

Rq : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} \cdot b^k$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{h}}\left[(\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x})\left((x+h)^{n-1} + \dots + \underbrace{(x+h)^{n-2}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} x^{n-1}} + \dots + \underbrace{(x+h)x^{n-2}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} x^{n-1}} + x^{n-1}\right)\right]$$

$$f'(x) = (x+h)^{n-1} + \dots + x^{n-1}$$

Final^t : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = n \cdot x^{n-1} = f'(x)$.

@ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\bullet = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{x(x+h)}$$

$$\bullet = \frac{-1}{x(x+h)}$$ Final^t $\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} = f'(x)$

@ $f(x) = \sin x$, $h \in \mathbb{R}$

$\sin(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \sin h$

$\mathrm{Im}(e^{ix} \cdot e^{ih})$

$$\bullet = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$\bullet = \frac{\sin x[\cos h - 1] + \cos x \cdot \sin h}{h} = \sin h \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

or $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Donc $\sin'(x) = \cos(x)$

De même $\cos'(x) = -\sin(x)$

Preuve $(uv)'(x)$ $x \in I$,

- $= \dfrac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$
- $= \left[u(x+h)\left[v(x+h) - v(x) + v(x)\right] - u(x)\,v(x)\right]\dfrac{1}{h}$
- $= u(x+h)\,\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} + \dfrac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x)}{h}$
- $= u(x+h) \cdot \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} + \dfrac{\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h} \cdot v(x)$

or $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$

or $\displaystyle\lim_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ (u derivable dc continue)

Finalement, $(uv)'(x) = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$

Admissible : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. $\quad = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

(D) Si f dérivable à droite en a : $f'_d(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Si f dérivable à gauche en a : $f'_g(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f dérivable à | gauche / droite (ET) $f'_d(a) = f'_g(a)$

P : Si f dérivable en a alors f est continue en a | $f^{(2)} = f'' = (f')'$

• Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, f est n fois dérivable :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

TH : Dérivée f composées $\boxed{(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) . u'(x)}$ DM

$(\ln \circ u)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ | $(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$\boxed{\tan x = 1 + \tan^2 x}$

(TH) Si f dérivable en a $\in I$ (et) $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' . f^{-1}(b)}$

NB : $f \circ f^{-1}(x) = x$

$$f'(f^{-1}(x)) . (f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' . f^{-1}(x)}$$

FF Leibniz : $(uv)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$

$u^{(0)} = u$

Ex : Prolongement par continuité

$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x \left(\sin \frac{1}{x}\right)$

Mq f admt prolgt à $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- De plus pr $x \neq 0$, $|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{|x|}_{x \to 0} \to 0$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
- f admt de $\boxed{PPC}$ en 0^- : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow \tilde{f}$ est continue en 0 & sur $\mathbb{R}^*$ dc sur $\mathbb{R}$

@ cos & sin n'ont pas de limite en $\pm \infty$.

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n\pi$

$\lim_{n \to +\infty} n\pi = +\infty$ et $\cos(U_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Dc $(\cos(U_n))_{n \geq 0}$ n'a pas de limite

Ex 3 $f(x) = \ln(2x^2 + x)$

$\rightarrow f$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $2x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(2x+1) > 0$

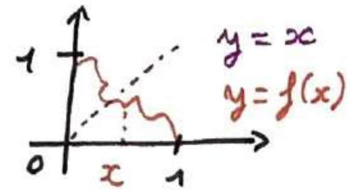
$\Leftrightarrow x$ & $2x+1$ st non nuls & mm signes.

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 0$. $\mathcal{D}f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$.

f est composée de f dérivables $\Rightarrow$ dc dérivable.

$f'(x) = (4x+1) \times \frac{1}{2x^2 + x}$.

@ Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.



Mq $\exists x \in [0,1]$, $\boxed{f(x) = x}$

$\boxed{f(x) - x = 0}$

On considère $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) - x$

g continue sur $[0,1]$; • $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$
• $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 \leq 0$

Dc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$: TVI

$\exists x \in [0,1]$, $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

Ex 12 Mq $\exists x \in]0,1[$; $e^{-x} = x$

On considère $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE
$x \longrightarrow e^{-x} - x$.

$g(0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ | $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

0 est compris entre $g(0)$ et $g(1) \neq 0$; $x \in]0,1[$.

Dc $\exists x \in]0,1[$, $e^{-x} - y = g(x) = 0$ càd $e^{-x} = x$

$(\tan x)'$?

$f'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x \sin x - \cos' \sin}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

Preuve $(uv)'(x)$ $x \in I$,

• $= \dfrac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$

• $= \left[u(x+h)\left[v(x+h) - v(x) + v(x)\right] - u(x)\,v(x)\right] \dfrac{1}{h}$

• $= u(x+h)\ \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} + \dfrac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x)}{h}$

• $= u(x+h).\ \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} + \dfrac{\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h}.\ v(x)$

or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$

or $\lim\limits_{h\to 0} u(x+h) = u(x)$ (u derivable dc continue)

Finalement, $(uv)'(x) = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$

Admissible: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. $= \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Preuve | $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \left(u \times \dfrac{1}{v}\right)'(x) = u'(x).\dfrac{1}{v(x)} - u(x)\,\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v(x)^2}$

$\ln \circ u = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Preuve $(f\circ u)'(x)$

• $= \dfrac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} \times \dfrac{u(x+h) - u(x)}{u(x+h) - u(x)}$

• $= \dfrac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \times \underbrace{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} u'(x)}$

Puis $\lim\limits_{h\to 0} u(x+h) = u(x)$

• $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = \lim\limits_{y\to u(x)} \dfrac{f(y) - f(u(x))}{y - u(x)}$

• $= f'(u(x))$

D'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(u(x+h) - f(x)}{h} = \boxed{f'(u(x)).\ u'(x).}$

Preuve | $v(I) \subset \mathbb{R}^*$, de $f\circ v$ $I \to \mathbb{R}$, $x \to f(v(x)) = \dfrac{1}{v(x)}$

Pr $x \in I$: $(f\circ v)'(x) = f'(v(x))\ v'(x)$

$(f\circ v)'(x) = \dfrac{-1}{v(x)^2}\ v'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$

Ex $\cos(-3x^2+1)$

$f'(x) = \left[-\sin(-3x^2+1)\right]\left[-9x^3\right]$

• $f_r(x) = x^r = \exp(r.\ln x)$

dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; $f_r'(x) = \exp'(r\ln x).r\ln'(x)$.

$f_r'(x) = x^r \times \frac{r}{x} = r.x^{r-1}$

• arcsin $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dérivable en x si

$\sin'(\arcsin x) \neq 0 \iff \cos(\arcsin x) \neq 0$

$\iff \arcsin x \neq \pm\frac{\pi}{2} \iff x \neq \pm 1$

D'où arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

• $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; f réciproq de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Sur ce domaine, tan est dérivable $\forall$ pr $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$

---

(3) Ex 1

7) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; f définie pr $x \in \mathbb{R}$,

$1-x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leq 1 \implies x \in [-1,1] \implies \mathcal{D}f = [-1,1]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable pr $x > 0$

$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est d/p $x > 0 \iff x \in]-1,1[$.

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Dérivabilité en 1 pr $x \in [-1,1[$.

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{x\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{x-1} = \frac{-x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty \implies f$ n'est pas dérivable en 1.

De m̂ $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty \implies f$ n'est pas dér en -1.

Finalt, f dérivable sur $]-1,1[$.

FF Leibniz : $(uv)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} . v^{(n-k)}$

$u^{(0)} = u$

Etude de fonctions → Extrema locaux

(D) • $\exists \delta > 0, \forall x \in I$, $|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ max local

$|x-a| > \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ min local

(TH) • Si f dérivable en a & si a extremum local ALORS $\boxed{f'(a) = 0}$

(Point critiq ou stationn^{R} désigne EL max ou EL min).

(TH) f deux fois dérivables, et $a \in I$, $f'(a) = 0$.

1) Si $f''(a) > 0$ alors a : min local

• 2) Si $f''(a) < 0$ alors a : max local.

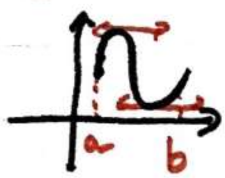
3) Si $f''(a) = 0$: aucune info. @

(TH Rolle) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tq :

· f continue sur $[a,b]$ & f dérivable sur $]a,b[$

· $f(a) = f(b)$

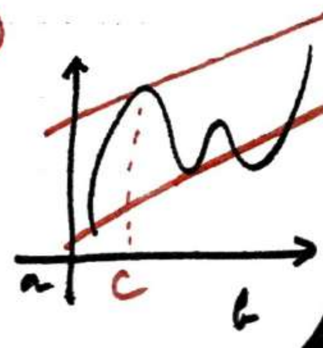
• $\boxed{\text{ALORS}}$ $\exists\, c \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.



(TAF) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq :

· f continue sur $[a,b]$ & dérivable sur $]a,b[$

• ALORS $\exists\, c \in]a,b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



* T. Accroissement Fini

Corollaire : $\widehat{m}$ CI. $f \in \mathcal{C}$ sur $[a,b]$ & $f \in \mathcal{D}$ sur $]a,b[$.

Alors • Si $\forall x \in]a,b[$; $f'(x) \geqslant 0$: $f \nearrow$

• " " " " " ; $f'(x) > 0$: f ST $\nearrow$

réciproqt

Pr lgt dérivabilité : I intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ $\exists$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(x)$

Csq : ◦ si $\lim_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en a.

◦ si $\lim f'(x) = \pm \infty$ alors f a une tgte verticale,

◦ si f' n'a pas de lim en a, tout pt arriver.

Ex 2

1) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$; pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie tq

$\iff \begin{cases} \ln x \text{ définie} \\ \ln(\ln x) \text{ défini} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$\iff x \in]1, +\infty[$ dc $\boxed{\mathcal{D}f =]1, +\infty[.}$

Sur $\mathcal{D}f$, f est une composée de f dérivables & dc dérivables.

$f'(x) = \ln'(\ln x)\ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x . \ln x}$

---

6) $f : x \mapsto (1+x)^x = \exp(x . \ln(1+x))$ $\mathcal{D}f =]-1, +\infty[$.

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie $1 + x > 0 \iff x \in]-1, +\infty[$

Pr $x \in \mathcal{D}f$, $f'(x) = \exp'(x . \ln(1+x)) . \frac{d}{dx}(x . \ln(1+x))$

$f'(x) = \exp(x . \ln(1+x)\left[1 . \ln(1+x) + x\frac{1}{1+x}\right]$

$f'(x) = (1+x)^x\left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right]$

@ Déterminer pts critiqs de $f(x) = x^5 - 20x^3$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 40x$

→ Dc x point critiq $\iff f'(x) = 0 \iff 5x^4 - 40x = 0$

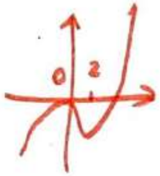
$\iff x(x^3 - 8) = 0 \iff x(x-2)(x^2 + 2x + 4 = 0) \iff x \in \{0, 2\}$.

→ Dc ls points critiqs de f st 0 & 2.

→ De plus $f''(x) = 20x^3 - 40$

→ $f''(0) = -40 < 0$ $\iff$ 0 : max local

→ $f''(2) = 160 - 40 = 120 > 0 \iff$ 2 : min local



---

(3) $f : x \mapsto x . \sin x$

@ Th Rolle
- f est continue sr $[0, \pi]$ & dérivable sr $]0, \pi[$
- $f(0) = 0 = f(\pi)$

Par (TR), $\exists c \in]0, \pi[$, $f'(c) = 0$ (tang^te horizontale)

Ex 2

1) $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$; pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie tq

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \text{ définie} \\ \ln(\ln x) \text{ défini} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$ dc $\boxed{\mathcal{D}f =]1, +\infty[.}$

Sur $\mathcal{D}f$, f est une composée de f dérivables & dc dérivables.

$f'(x) = \ln'(\ln x)\ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x . \ln x}$

---

6) $f : x \longmapsto (1+x)^x = \exp(x . \ln(1+x))$ $\quad \mathcal{D}f \underset{\Uparrow}{=}]-1, +\infty[$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie $1 + x > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[$

Pr $x \in \mathcal{D}f$, $f'(x) = \exp'(x . \ln(1+x)) . \frac{d}{dx}(x . \ln(1+x))$

$f'(x) = \exp(x . \ln(1+x)\left[1 . \ln(1+x) + x \frac{1}{1+x}\right]$

$f'(x) = (1+x)^x \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right]$

@ Déterminer pts critiqs de $f(x) = x^5 - 20x^3$

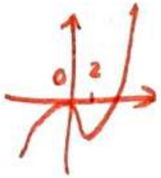
Pr $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 40x$

$\rightarrow$ Dc x point critiq $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 40x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 4 = 0) \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$.

$\rightarrow$ Dc les points critiqs de f st 0 & 2.

$\Rightarrow$ De plus $f''(x) = 20x^3 - 40$



$\rightarrow f''(0) = -40 < 0 \quad \Leftrightarrow 0$: max local

$\rightarrow f''(2) = 160 - 40 = 20 > 0 \Leftrightarrow 2$: min local

---

(3) $f : x \longmapsto x . \sin x$

@ TH Rolle

- f est continue sur $[0, \pi]$ & dérivable sur $]0, \pi[$
- $f(0) = 0 = f(\pi)$

Par (TR), $\exists c \in]0, \pi[$, $f'(c) = 0$ (tangte horizontale

---

@ TH Prolongt Dérivabilité $\quad f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ (6 $\boxed{1}$

- $x \in \mathcal{D}f \Leftrightarrow 2x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x(2 - x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x \geqslant 0 \ \& \ 2 \geqslant x) \\ \quad \text{ou} \\ (x \leqslant 0 \ \& \ 2 \leqslant x) \end{cases} \Leftrightarrow \{x \geqslant 0 \ \& \ 2 \geqslant x \Leftrightarrow x \in [0, 2]$

Donc $\underline{\mathcal{D}f = [0, 2]}$

- Si $x \in]0, 2[$ alors $2x - x^2 = x(2 - x) > 0$.

comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+ \Leftrightarrow x \mapsto \sqrt{x(2-x)}$ derble sur $]0, 2[$

(On a juste mq $]0, 2[\subset \mathcal{D}f'$)

- De dérivée $f'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 ni en 2.

$\Rightarrow \mathcal{D}f' =]0, 2[$.

1) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1,1]$
$1-x^2 > 0 \iff x \in]-1,1[$.

Dc $\mathcal{D}f = [-1,1]$ & $]-1,1[\subset \mathcal{D}f'$.

Pr $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

TH Prlgt dérivabilité :

$\lim_{x \to -1} f'(x) = -\infty$ & $\lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty \Rightarrow \mathcal{D}f' =]-1,1[$

9 Mq graphe f admt tgte horizontale en un point $c \in]-1,1[$ cad $f'(c) = 0$.

1)

- f est continue sr $[-1,1]$.
- f est dérivable sr $]-1,1[$.

$f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

- $f(-1) = 1-1+1-1 = 0$ & $f(1) = 0 = f(-1)$.

Par TH Rôlle : $\exists c \in]-1,1[$, $f'(c) = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} (x+1)\sin\frac{2\pi}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 \text{ si } x = -1. \end{cases}$

- f est dérivable sr $]-1,1]$ car $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. (a fortiori continue sur $]-1,1]$)
- De plus, $f(1) = 2.\sin\frac{2\pi}{2} = 0 = f(-1)$

com $\forall x \neq -1$, $|f(x)| \leq |x+1|$ q td vrs 0 qd $x \mapsto -1$

On a $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(-1)$

Dc f est continue en -1, dc sur $[-1,1]$.

TH. ROLLE : $\exists c \in]-1,1[$, $f'(c) = 0$.

(4) 11 @ TAF. Mq $\forall x \in]0,1[$, $0 < \sin x < x$. (1)

- Pr $x \in]0,1[$, sin est continu sur $[0,x]$ & dble

Par TAF : $\exists c \in]0,x[$, $\frac{\sin x - \sin(0)}{x-0} = \sin'(c) = \cos(c)$

Or, comme $c \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos c < 1$

Dc $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$ d'où $0 < \sin x < x$

Mq $\forall x > 0$, $0 < \arctan x < x$ (2

- Pr $x > 0$, arctan est continu sur $[0,x]$ & dble sr $]0,x[$.

Par TAF : $\exists c \in]0,x[$ tq $\frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \frac{\arctan x}{x}$
$= \arctan'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

or comme $c \in]0,x[\rightarrow 0 < \frac{1}{1+c^2} < 1$

Dc $0 < \frac{\arctan x}{x} < 1$ d'où $0 < \arctan x < x$

Corollaire : m̂ CI. f c sur $[a,b]$ & f d sur $]a,b[$.

Alors • Si $\forall x \in]a,b[$; $f'(x) \geq 0$: $f \nearrow$

• " " " " " ; $f'(x) > 0$: f SI $\nearrow$ réciproque

Prolgt dérivabilité : I intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ $\exists$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$

Csq : ◦ si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en a.

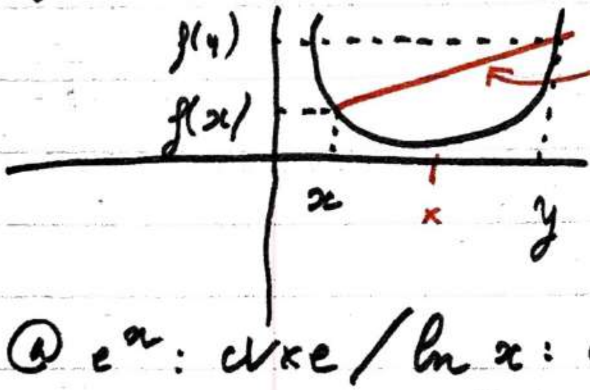
◦ si $\lim f'(x) = \pm\infty$ alors f a une tgte verticale,

◦ si f' n'a pas de lim en a, tout pt arriver.

3.3. Convexité.

Ⓓ $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ; f continue ; f est CONVEXE si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + f(y)$.

→ f est concave si $-f$ est convexe.



$(1-t)f(x) + tf(y)$

× $(1-t)x + ty$.

ⓔ e^x : cvxe / $\ln x$: concave / x^2 : convexe

x^3 $\begin{cases} \text{convexe sur } \mathbb{R}+ \\ \text{concave sur } \mathbb{R}- \end{cases}$

(TH) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, 2 fois dérivable sur $]a,b[$.

1) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$: convexe $(\forall x \in]a,b[)$

2) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$: concave $(\forall x \in]a,b[)$

3) $f''(c) = 0$: c point inflexion $(\text{pr } c \in]a,b[)$

Rq : Graphe en un point d'inflexion $t\to$ sa tangente. @.

Plan étude fonction réelle

[1] $\mathcal{D}f$? (parité & périodicité si nécessaire)

[2] Etude cpt f aux bornes de $\mathcal{D}f$.

(i) borne $a \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow \lim\limits_{\boxed{x \to a}} f(x) = \, ? = f\!\to$

- si $f\!\to = +\infty$; asymptote verticale : $x = a$.
- si $f\!\to = l \in \mathbb{R}$; f admt prlgt cntnté en a. $\left(x + (1 + \frac{x}{|x|})\right)^{x=0}$

(ii) borne $= \pm\infty$.

$\longrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \, ? = f\!\to_2$

- si $f\!\to_2 = \pm\infty$; étude $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \, ? = f\!\to_3$
  - si $f\!\to_3 = \pm\infty \Rightarrow f$ admt branche parabolig direct° asymptotiq $x = 0$
  - si $f\!\to_3 = l \in \mathbb{R}$, étude $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - l.x = \, ? = f\!\to_4$
    - si $f\!\to_4 = \pm\infty$, f abpda. $y = l.x$.
    - si $f\!\to_4 = b \in \mathbb{R}$, en $\pm\infty$, asymptote $\Delta : lx + b$.

(étude signe $f(x) - lx - b$: posit° $\mathcal{C}f$ / Δ).

$\boxed{3}$ Étude var° f ĝ signe dérivée f'
+ points critiqs & extrema locaux.

$\boxed{4}$ Convexité & pts inflexion de f : étude signe f''

• si $f \to_{\infty} = l \in \mathbb{R}$, $y = l$; asymptôte horizontale.

7) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

Pr $x\in\mathbb{R}$, $1-x^2\geqslant 0 \iff x\in[-1,1]$

$1-x^2>0 \iff x\in]-1,1[$.

Dc $\mathcal{D}f=[-1,1]$ & $]-1,1[\subset \mathcal{D}f'$.

• Pr $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

TH Prlgt dérivabilité:

$\lim_{x\to -1} f'(x)=-\infty$ & $\lim_{x\to 1} f'(x)=-\infty \Rightarrow \mathcal{D}f'=]-1,1[$

$\boxed{9}$ Mq graphe f admt tgte horizontale en un point $c\in]-1,1[$ cad $f'(c)=0$.

1)

• f est continue sr $[-1,1]$.

• f est dérivable sr $]-1,1[$.

$f(x)=x^4+x^3-x-1$.

• $f(-1)=1-1+1-1=0$ & $f(1)=0=f(-1)$.

Par TH Rôlle : $\exists c\in]-1,1[$, $f'(c)=0$.

2) $f(x)=\begin{cases}(x+1)\sin\frac{2\pi}{x+1} & \text{si } x\neq -1\\ 0 & \text{si } x=-1.\end{cases}$

• f est dérivable sr $]-1,1]$ car $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. (c fonction continue sur $]-1,1]$)

• De plus, $f(1)=2.\sin\frac{2\pi}{2}=0=f(-1)$

com $\forall x\neq -1$, $|f(x)|\leqslant|x+1|$ q td vs 0 qd $x\mapsto -1$

On a $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(-1)$

Dc f est continue en -1, dc sur $[-1,1]$.

TH. RÔLLE : $\exists c\in]-1,1[$, $f'(c)=0$.

(4) $\boxed{11}$ @ TAF. Mq $\forall x\in]0,1[$, $0<\sin x<x$. (1

• Pr $x\in]0,1[$, sin est continu sur $[0,x]$ & dble

Par TAF : $\exists c\in]0,x[$, $\frac{\sin x-\sin(0)}{x-0}=\sin'(c)=\cos(c)$

Or, comme $c\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $0<\cos c<1$

Dc $0<\frac{\sin x}{x}<1$ d'où $0<\sin x<x$

Mq $\forall x>0$, $0<\arctan x<x$ (2

• Pr $x>0$, arctan est continu sur $[0,x]$ & dble sr $]0,x[$.

Par TAF : $\exists c\in]0,x[$ tq $\frac{\arctan x-\arctan 0}{x-0}=\frac{\arctan x}{x}$

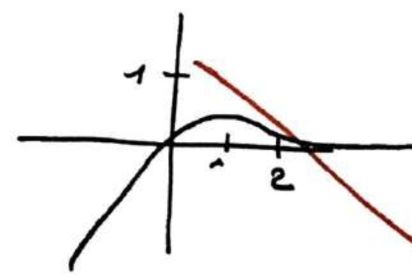
$=\arctan'(c)=\frac{1}{1+c^2}$

Or comme $c\in]0,x[\to 0<\frac{1}{1+c^2}<1$

Dc $0<\frac{\arctan x}{x}<1$ d'où $0<\arctan x<x$

@ Etude CONVEXITÉ | $f(x)=x.e^{-x}$; $f'(x)=e^{-x}(1-x)$ | $f''(x)=(x-2)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0



f est concave sur $]-\infty,2]$. f est convexe sur $[2,+\infty[$.

2 est un point d'inflexion.

Plan étude f réelle

1 $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

→ bornes
$-\infty$
1^-
1^+
$+\infty$

2

(i) Borne $a \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

(ii) borne $\pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(iii) si $f_2 = \pm\infty \Rightarrow$ (b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ ? = f_3$

- $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$.

si $f_3 = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - lx = \ ? = f_4$

ici $l = 1$, $f(x) - lx = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x = \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 2$

Dc $\Delta : y = lx + b \iff y = x + 2$ (asymptote en $+\infty$ et $-\infty$)

De plus, $f(x) - lx - b \iff f(x) - x - 2 = \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} - 2 = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

Dc $\mathcal{C}_f$ est
- en-dessous de Δ pr $x < \dfrac{2}{3}$.
- au-dessus de Δ pr $x > \dfrac{2}{3}$.

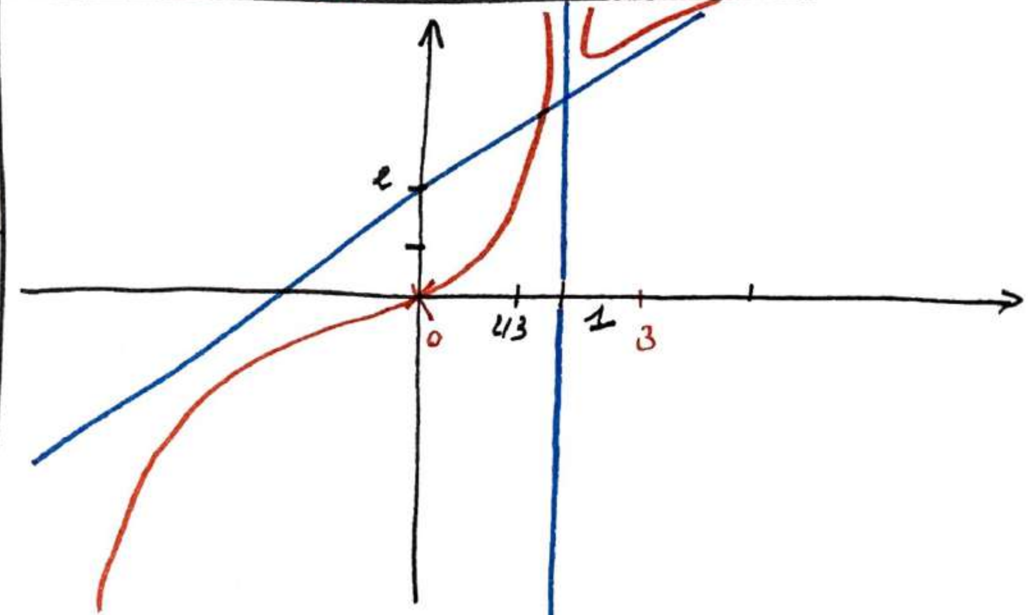
(5) **3** f est dérivable sur D_f.

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

4 $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

x	$-\infty$		0		1		
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		concave	point d'inflexion	convexe		convexe	



16 $f(x)=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

1) Variat° : (u). $u(x)=2x\sqrt{1-x^2}$

$D_u=[-1,1]$; u continue sur D_u.

Pour $x\in]-1,1[$, $1-x^2>0$ dc $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ dérivable sur $]-1,1[$.

Donc u dérivable sur $]-1,1[$.

• Pr $x\in]-1,1[$; $u'(x)=2\sqrt{1-x^2}+2x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$u'(x)=2\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Donc $u'(x)>0$ sur $]-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}[$

$=0$ en $-1/\sqrt2$ & $1/\sqrt2$

<0 sur $]-1,-1/\sqrt2[\,\cup\,]1/\sqrt2,1[$.

De plus $u(-1)=0$; $u(1)=0$.

$u\left(\frac{-1}{\sqrt2}\right)=-1$ & $u\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=1$.

x	-1		$-1/\sqrt2$		$1/\sqrt2$		1
$u'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) D'après 1) $u([-1,1])=[-1,1]$

Dc $\arcsin(u(x))$ définie $\forall x\in[-1,1]$: $D_f=[-1,1]$.

Pr $x\in[-1,1]$; $f(-x)=\arcsin(-2x\sqrt{1-x^2})$

$f(-x)=-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

$f(-x)=-f(x)$

arcsin impaires.

arcsin dérivable $]-1,1[$.

(6) 3) Pr $x\in]0,1[\setminus\{1/\sqrt2\}$.

$u(x)\in]-1,1[$ dc $x\mapsto f(x)$ dérivable sr $]0,1[\setminus\{\frac{1}{\sqrt2}\}$

$f'(x)=u'(x).\arcsin'(u(x))$.

$f'(x)=2\cdot\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}=2\cdot\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$

$f'(x)=2\cdot\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x^4-4x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2}}$

$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1-2x^2}{(1-2x^2)}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x\in]0,\frac{1}{\sqrt2}[\\ \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{pr } x\in]\frac{1}{\sqrt2},1[.\end{cases}$

$f'(x)=2\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2.\arcsin'(x)=(2\arcsin)'x$

Dc $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]0,\frac{1}{\sqrt2}[$, $f(x)=c+2\arcsin x$.

car f et arcsin continues sur $[0,\frac{1}{\sqrt2}]$

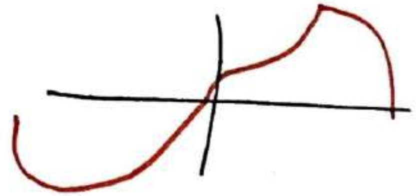
Pr $x=0$, $f(0)=\begin{cases}\arcsin(2\times0\sqrt{\dots})=0\\ c+2\arcsin(0)=c\end{cases}$ $\Rightarrow c=0$

Dc $f(x)=2\arcsin x$ sr $[0,\frac{1}{\sqrt2}]$.

De m̂ $f(x)=+2\times\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=+2\arccos x$ sur $[\frac{1}{\sqrt2},1]$

$f'(x)=2\arccos'(x)$ sur $]\frac{1}{\sqrt2},1[$.

$f(x)=2\,a\cos(x)$



3 p45

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$x \in D_f \iff 1+\cos x \neq 0 \iff \cos x \neq -1$

$\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \pi + 2k\pi$

$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi\mathbb{Z}\}$.

• De plus sur D_f, f est un quotient de f dériv^{bles} $\Rightarrow D_{f'} = D_f$.

Pr $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{\cos(x)(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1}{1+\cos x}$

Rq • Dto cld : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \iff 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$.

• $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

• $\sin x = 2 \sin x \cos x$

$(f \circ f^{-1})'(x) = 1$

$f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$.

2) $f(x) = \sqrt{1+\tan^2 x}$, $x \in D_f \iff \begin{cases} 1+\tan^2 x \\ \sqrt{1+\tan^2 x} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \tan x \text{ défini} \\ 1+\tan^2 x \geqslant 0 \text{ tjrs vrai} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\} \\ \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\} \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$.

$f'(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{2\tan' x \tan x}{2\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{(1+\tan^2 x)\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$f'(x) = \tan x \sqrt{1+\tan^2 x}$

De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dériv^{ble} sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{1+\tan^2 x}$ est dériv^{ble} sur D_f, à valeurs dans $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Dc f est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables

23 p48

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

1) Pr $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geqslant 4$ Dc $\sqrt{x^2-4x+8}$ est défini & $x \in D_f$. Finalement $D_f = \mathbb{R}$.

2) comme $x \mapsto x^2 - 4x + 8$ est à valeurs ds $[4, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$

comme $x \mapsto \sqrt{x}$ dériv^{ble} sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée. $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

Signe f' dépd $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

car

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = $ F.I.

F.I. $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} = +\infty$

3) Mq f réalise bijec° de $I = [2, +\infty[$ sur son image

• f est st $\nearrow$ sur $[2, +\infty[$ est dc une bijec° de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[)$.

• $f(2) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f est continue sur $[2, +\infty[$.

Alors f est une bijec° de $[2, +\infty[$ sur $[2, +\infty$.

4) f est continue sur $[2, +\infty[$ dc f^{-1} est continue sur $D_{f^{-1}} = [2, +\infty[$

Pr $x \in [2, +\infty[$, $f(f^{-1}(x)) = x = \sqrt{f^{-1}(x)^2 - 4 f^{-1}(x) + 8}$

En posant $y = f^{-1}(x)$: $x = \sqrt{y^2 - 4y + 8} \iff x^2 = y^2 - 4y + 8$

$\iff y^2 - 4y + 8 - x^2 = 0$ dc $\Delta = 16 - 4(8 - x^2) = 4(x^2 - 4)$.

Comme $x \geqslant 2 \iff \Delta \geqslant 0$ & $y = \dfrac{4 - 2\sqrt{x^2-4}}{2}$ & $= 2 - \sqrt{x^2-4}$ & $y = 2 + \sqrt{x^2-4}$

Comme $y = f^{-1}(x)$, $y \geqslant 2$

D'où $y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 4}$

10

$f(x) = \tan x$

1) Mq $\nexists\, c \in]0, \pi[$ tq $f'(c) = 0$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x \geqslant 1$ dc

$\forall c$, $f'(c) \geqslant 1$; â f n'est pas définie sur $[0, \pi]$, elle ne satisfait pas hypothèses au TH Rolle.