C1 Suites de fonctions

D1 (f_n) CV simplement (ou ponctuellement) vers f, si $\forall x \in A$, la suite numériq $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$.

→ $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(N dépend de x et ε : $N_{\varepsilon,x}$).

D2 (f_n) CV uniformément vers f si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

P3 soit sdf (f_n) CV simplmt vers $f : A \to \mathbb{R}$
si $\exists$ une suite de nbres $(s_n)_n$ ne dépendant pas de x, CV vers 0 tq
$$\forall x \in A, \ |f_n(x) - f(x)| \leq s_n.$$
alors la CV de (f_n) vers f est uniforme.

P4 soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV simplement vers f
$f : A \to \mathbb{K}$, si $\exists x_n \in A$,
$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$$
$\Rightarrow (f_n)$ ne CV pas unif. vers f sur A.

Th5 (Crit. de Cauchy Uniforme)
soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$, CV uniform.t vers $f : A \to \mathbb{K}$ ssi
$\forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \ \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

⚠ CV uniforme cont pr somme MS pas pr produit.

Th6 (Continuité) :
soit sdf (f_n) cont sur $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV uniform. vers f $f : A \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ f cont sur A.

ie CV unifor. conserve continuité MS pas CV simple.

P7 (Prolongement) :
soit $I = [a, b[$ & sdf cont (f_n) sur $[a, b]$ CV uniform. sur I vers f $f : I \to \mathbb{K}$, alors f est prolongeable par continuité à $[a, b]$ & la suite (f_n) CV unif. vers f (prolongée) sr $[a, b]$.

Th8 soit sdf cont (f_n), $f_n : I = [a, b] \to \mathbb{K}$ CV uniform vers f $f : I \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Th9 (Dérivat) :
soit sdf $(f_n) : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $C^1([a, b])$ tq
(i) (f_n) CV simplmt vers f $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(ii) (f'_n) CV uniformt vers g $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $g = f'$. De +, (f_n) CV uniform vers f.

C2 Série de foncΘs

D1 (u_n) sdf, $u_n : A \to \mathbb{R}$,

- série de f, on note $\sum_n u_n$ CV **simplement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si la Sdf (f_N) ; $(f_N)(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ CV simplement vers f, appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

  $\forall x \in A, \lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = 0$.

- La m̂ Sdf sera CV **uniforme** vers f si la ste (f_n) CV uniformément vers f.

  $\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in A} |R_N(x)| \right) = 0$.

TH (Cauchy Uniforme)

Une série $\sum_n u_n$ **CV uniformément** sur A ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \forall x \in A,$
$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$.

D2 (Normalement CV)

$\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A, s'∃ une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nbrs réels tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$,
$|u_n(x)| \leq s_n$, série numériq $\sum_n u_n$ CV.

TH2 si série $\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A alors elle est **uniformément** CV sur A.

TH (Abel Uniforme) soit sdf $(u_n), (v_n)$ sr $A \subset \mathbb{R}$,
$u_n : A \to \mathbb{R}$, $v_n : A \to K$ si

(i) $\forall x \in A$, suite $(u_n(x))_n > 0$ et ↘

(ii) u_n CV U.N $\longrightarrow 0$ sur A

(iii) $\exists M > 0 \mid \forall x \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{p=n}^{m} v_p(x) \right| \leq M$.

$\Rightarrow \sum_n u_n . v_n$ CV U.N sr A et $|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x).v_n(x) \right| \leq M |u_{N+1}(x)|$

Coro sdf (v_n), $v_n : A \to K$, ste de réels $(\alpha_n)_n$ si $\forall x \in A$,
$u_n(x) = \alpha_n . v_n(x)$ &

(i) suite $(\alpha_n)_n \geq 0$, ↘, CV vers 0.

(ii) $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV U.N. sr A.

TH (Continuité) (u_n) sdf, $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{K}$,
si $\sum_n u_n$ CV U.N sr A $\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ **cont** sr A.

TH (IntégraΘ) (u_n) sdf cont, $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
si $\sum_n u_n$ CV U.N sr $[a,b] \Rightarrow \sum_n \int_a^b u_n(x)\,dx$ CV
et dc $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x) \right) dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\,dx$.

TH (DérivaΘ) soit sdf (u_n) : $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C^1([a,b])$,

(i) $\sum_n u_n \xrightarrow{\text{CV S.}}$ sr $[a,b]$

(ii) $\sum_n u'_n \xrightarrow{\text{CV U.N}}$ sr $[a,b] \Rightarrow f(x) = \sum u_n(x)$ est classe $C^1([a,b])$
et $\left(\sum u_n(x)\right)' = \sum u'_n(x)$ et dt, $\sum u_n$ CV U.N sr $[a,b]$.

C3 Séries Entières.

I/ D SE & Rayon CV

D Série entière : $\sum_n u_n(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$),

$u_n(z) = a_n \cdot z^n$ & $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$: $\sum a_n \cdot z^n$.

(NB : les polynômes st SE & $a_n = 0$

Th (Rayon de CV)

soit SE $\sum a_n \cdot z^n$, $\exists R \in [0, \infty[$ tq

1) si $|z| < R$ (R fini ou non) $\Rightarrow \sum a_n \cdot z^n$ CV abslmt
$\Leftrightarrow \sum |a_n| |z|^n$ CV.

2) si $|z| > R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV $\left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0\right)$

→ RDC uniq

→ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$: disq de CV de SE.

→ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) =]-R, R[$.

L (d'Abel)

soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|, \sum a_n \cdot z^n$ CV.

Déterminat° de R (svt Cauchy ou d'Alembert)

P soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

2. si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

(convent° $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$). ⚠ si $a_n z^{2n}$, D $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n}\right|$.

P soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE & R_a, $\sum b_n \cdot z^n$ SE & R_b Alors

(i) $\forall n \geq 0$, $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

(ii) $a_n = O(b_n) \Leftrightarrow \exists M > 0, |a_n| \leq M \cdot |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

(iii) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$.

@ $f(x) = \sum e^{\cos(n)} |x|^n$; étude $\sum e^1 \cdot |x|^n$

P (Somme & Produit)

soit $\sum a_n \cdot z^n$, $\sum b_n \cdot z^n$, R_1, R_2 → $c_n \cdot z^n = (a_n + b_n) z^n$; → $d_n \cdot z^n = (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) z^n$

ont ces séries RDC $\geq \min(R_1, R_2)$.

→ D+, si $|z| < \min(R_1, R_2)$: → $\sum c_n \cdot z^n = \sum a_n \cdot z^n + \sum b_n \cdot z^n$

→ $\sum d_n \cdot z^n = \left(\sum a_n \cdot z^n\right)\left(\sum b_n \cdot z^n\right)$.

(si $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min(R_1, R_2)$; si $R_1 = R_2 \Rightarrow R > \min(R_1, R_2)$)

P (Dérivat° & Intg°)

soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE & R $\xrightarrow{\text{dér}^\circ} \sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$; $\xrightarrow{\text{intg}^\circ} \sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ } ont m̂ R.

Pptés Var Réelle

Th soit $\sum a_n \cdot x^n$ SE, $a_n \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{R}$, RDC R ; soit $f(x)$ sa somme,

$\mathcal{D}f(x) =]-R, R[\Rightarrow f$ de $C^\infty(]-R, R[)$ & ses dérivés s'obtiennt en dérivant terme à terme SE successives.

D+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Développem^t en SE :

(D) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en SE au $\mathcal{V}_{x_0} \in I$
si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ & $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$,
$\sum a_n (x-x_0)^n$ CV & a pr somme $f(x)$.

(P) (condi$^\theta$ nécessR mais pas suffisante)
Pour que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$, il faut que :
(i) $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Rq : $f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \Big(\prod_{0 \le j \le k-1} (n-j) \Big) a_n x^{n-k} = \sum_{n \geq 0} \Big(\prod_{1 \le j \le k} (n+j) \Big) a_{n+k} x^n$

⚠ Dev SE ?
$\to \sum \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ CV ? $\to$ CV-t-elle vers $f(x)$?

contre @ Cauchy (1822) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

PR $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$, $\deg\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3n \Rightarrow$ Série Taylor nulle car
$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ dc $\sum_{n \geq 0} a_n (x)^n = 0$ et $f \neq 0$.

(D) Une f dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$: analytiq en x_0

(P) (Condi$^\theta$ suffis^{te}) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty(I)$ soit analytiq $\mathcal{V}_{x_0}$
ssi $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[= J$,
$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{|x-x_0|^n}{n!} M_n \right) = 0$ où $M_n = \sup\limits_{x \in J} |f^{(n)}(x)|$

Pratiq du DL en SE :

1. FF Taylor pt $\begin{cases} \to \text{av}^{\text{c}} \text{ terme Gén}^{\text{l}} \text{ de série} \\ \to \text{mq reste de Lagrange} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{cases}$

2. $\int$ dev connus, op. connus, $+, \times, \div$, $\int$, $(\cdot)'$, CDV.

@
- $\cos x = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\sin x = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$, $R = 1$ par ff Taylor
- $\int \dfrac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$, $R = 1$ par Intég$^\theta$
- $x \mapsto x^2$, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$ par CDV
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $R = 1$ par intégra$^\theta$
- $e^x = 1 + x + x^2 + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$, $R = \infty$ par FF Taylor.
- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$
- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ $\forall x \in]-1, 1[$ • $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum (-x)^n = \sum (-1)^n x^n$
- $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$, • $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum x^{2n}$

Th d'Abel :

soit $f(x) = \sum a_n x^n$, $R > 0$; supposons $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ CV

$\Rightarrow \lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$.

(si $x = -R$, $\sum a_n (-R)^n = \sum (-1)^n a_n R^n$ CV $\Rightarrow \lim_{x \to -R^+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n$.

Appli

- $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$; $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV p séries altern

Th Abel $\Longrightarrow -\ln(2) = \sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$,

$x = 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

⚠ Récipoq fausse : @ $f(x) = \sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ mais $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ DV.

Exponentielle complexe.

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$
- $e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$
- si $z = iy$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ |e^{iy}| = 1 \end{cases}$

- $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cosh(iy)$
- $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh(iy)$

$\begin{cases} |e^z| = e^x \\ y = \operatorname{Arg}(e^z) \end{cases}$

- $e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow z' = z + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{R}$.
- ∄ complexe tq $e^z = 0$ mais $\forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists z \in \mathbb{C}$, $e^z = t$.

si $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}] = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Th Fondamental de l'Algèbre (Gauss - D'Alembert)

$\forall P \in \mathbb{C}[X]$ polyn non-cte, $\exists$ tjrs $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$.

- **Appli Calcul d'intégrales**

- $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1) n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1) n!} + \underset{\leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}}{R_N}$

- **Appli 4 Equa diff**

- $xy'' - y = 0$? $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$; y' ?, y'' ? $xy'' = \sim = \sim \rightarrow$ identificaθ $a_0 = \dots$, $a_1 = \dots$, $\vdots$, $a_{n-1} = \dots$; $a_n = \dots$ (PR) $\Rightarrow$ dc (E) sol$^{\circ}$ $\sum a_n x^n$.

FF de Cauchy

soit $f(z) = \sum a_n z^n$, $R > 0$, $0 < x < R$ alors $\forall n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi x^n} \int_0^{2\pi} f(x . e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

TH Liouville soit $f(z) = \sum a_n z^n$ SE de $R = \infty$

si $f(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$ est cte.

TH (Polyn m̂ deg) soit $f(z) = \sum a_n z^n$, $R = +\infty$,

supposons $\exists\ P \in \mathbb{C}[X]$ un poly $\deg P \leq d$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$|f(z)| \leq |P(z)| \Rightarrow f$ est un polym. de m̂ deg P.

NB : ces TH st appli de ff Cauchy.

TH (Identité de Parseval) soit $f(z) = \sum a_n z^n$, SE, $R > 0$,

soit $0 < r < R \Rightarrow \sum |a_n|^2 r^{2n} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$

TH (Polynôme, borné : appli id Pars.)

soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de $R \geq 1$, supp $a_n \in \mathbb{Z}$ & f bornée

P disq unité (ie $\exists M > 0$, $\forall z, |z| \leq 1$, $|f(z)| \leq M$

$\Rightarrow f$ est un polynôme.

HS

TH (Principe du zéro isolé)

soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une SE de $R > 0$,

supp $\exists\ z_n \in \mathbb{D}(0,R)$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ & $f(z_n) = 0\ \forall n \geq 0$

$\Rightarrow f = 0$ (ie $a_n = 0\ \forall n \geq 0$).

TH (Principe de maximum)

soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une SE de $R > 0$.

Notons $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, supposons f est cont sur $\overline{\mathbb{D}_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ alors si $\exists\ z_0 \in \mathbb{D}_R$ (ie $|z_0| < R$)

tq $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}_R}} |f(z)| \Rightarrow f$ est cte.

Cor $f(z) = \sum a_n z^n$ de $R > 0$, cont sur $\overline{\mathbb{D}_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$

$\Rightarrow$ si f n'est pas cte alors $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$ tq

$\max\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}_R}} |f(z)| = |f(z_0)|$.