TD

M22

Dérivée

+ Limites & Continuité

Vianney Combey

Karl L.

Dérivée

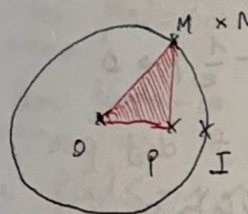
①

exo 0 Mq géométriq^t $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leq |x| \leq \tan x$$

On dmq l'inégalité (resp) pr $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ & $x = 0$.

• soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{1}{4}$ CT.



Thalès : $\frac{MP}{NI} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{NI} = \frac{\cos x}{1}$

$\Leftrightarrow NI = \tan a.$

$\mathcal{A}$ = Aire (OMI)

$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$_sect_angul^{re} (OM, OI) & Arc cercle IM.

$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(ONI) \Rightarrow \mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2 \leq \mathcal{A}_3$

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\pi \times \overset{\shortparallel}{\frac{x}{2\pi}}$$

Dc $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$.

• si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ alors $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$|\sin(-x)| \leq |-x| \leq \tan(-x)| \Leftrightarrow |-\sin x| \leq |-x| \leq |-\tan x|$

car f impaires $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$

• si $x = 0$, on a $\sin 0 = 0 = \tan 0$ & l'inégalité est vérifiée.

② **ex1** Mq en revenant à la définiθ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes st continues sr $\mathbb{R}$.

on considère réel x_0 qq & ns allons vérifier f cont en x_0

soit $\varepsilon > 0$, trouver réel $\delta > 0$, dépendant de ε & x_0,

$\forall x \in \mathbb{R}.\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, ∇, $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$,

par conséquent, il suffit choisir pour $\delta = \varepsilon$.

b) $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)$, ∇ $|f(x) - f(x_0)| =$

$= |x^3 - x_0^3| = |x - x_0|\,|x^2 + x x_0 + x_0^2| \leq |x - x_0|(x^2 + x_0^2 + |x||x_0|)$

Notons si $|x - x_0| \leq 1$ alors encore ∇,

$|x| = |x - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq |x_0| + 1$.

Ainsi si $|x - x_0| \leq 1$,

$|x^3 - x_0^3| \leq ((|x_0 + 1|)^2 + x_0^2 + |x_0|(|x_0| + 1))|x - x_0|$

$\shortparallel\ (3x_0^2 + 3|x_0| + 1)|x - x_0|$

Posons $C = 3x_0^2 + 3x_0 + 1 > 1$, $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{C}) > 0$.

Ainsi si $|x - x_0| \leq \delta$ on a ~~sf~~ $|x - x_0| \leq 1$,

$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| \leq C.\ \delta \leq \varepsilon$.

c) $f(x) = \sin x$; $\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2})(\sin(\frac{a-b}{2}))$

Ainsi $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin x_0| = |2\cos(\frac{x+x_0}{2})\sin(\frac{x-x_0}{2})| \leq 2.|\sin(\frac{x+x_0}{2})|$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leq |x|$.

en effet si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cnsqce exo0.

si $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, on a aussi $|\sin x| \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \leq |x|$

on en déduit $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$

on choisit de $\delta = \varepsilon$.

ex2 ③

$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$ étant donnés b & c, trouver valeurs de a pour f soit continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction sinus est continue sur $]-\infty, c]$ & la f $x \mapsto ax+b$, est continue sur $]c, +\infty[$. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi elle est continue au point c. ie $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) = \sin(c)$

La fonction f est dc continue sur $\mathbb{R}$ ssi $\sin c = ac + b$

$\Leftrightarrow ac = \sin c - b \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sin c - b}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ b = 0 \text{ et } a \text{ qq} & \text{si } c = 0 \end{cases}$

ex3

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$

En quels points de $\mathbb{R}$ la fonct° est-elle continue ?

Mq f est continue seulement au point $\frac{1}{2}$.

Nous utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ainsi CS de continuité.

- On considère élt de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élts de $\mathbb{Q}$ q CV vers x. on a alors $x \neq 1/2$.

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n = x \neq 1 - x = f(x)$

Ainsi si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la fonc° f n'est pas continue en x.

- On considère $x \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Alors $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élts de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ q CV vers x.

On a alors $x \neq 1/2$,

$\lim f(x_n) = \lim (1 - x_n) = 1 - x \neq x = f(x)$

... f n'est pas cont en x.

③

① Mq f est cont en $\frac{1}{2}$, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels q CV vers $\frac{1}{x}$, & mq suite $(f(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ CV vers $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}$,

soit $(f(x_n) - \frac{1}{2}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$$|f(x_n) - \tfrac{1}{2}| = \begin{cases} |x_n - \frac{1}{2}| & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ |1 - x_n - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x_n| & \text{si } x_n \in \end{cases}$$

Dc $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - \frac{1}{2}| = |x_n - \frac{1}{2}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ex 4 : Étudier continuité sur $\mathbb{R}$ f déf par :

a) $f(x) = x.\sin(\frac{1}{x})$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,

en $x \neq 0$, f est cont cm composée & produits f cont.

De plus $\forall x \neq 0$, on a $0 \leq |f(x) - f(0)| = |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$

D'où par encadrement, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Ainsi f est aussi cont en 0, dc sur $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin x . \sin(\frac{1}{x})$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, pr qd a 5

f cont en tt point pr $x \neq 0$. D'après ④c),

$\forall x \neq 0$, $0 \leq |f(x) - f(0)| = |\sin x . \sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin x| \leq |x$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Ainsi f cont en 0 & dc sur $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \mathbb{E}(x).\sin(\pi x)$. $\mathbb{E}$ est cont en tt point $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ & dc ε composée, prodts, f conts, f ssi conts en tt pt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

soit $x_0 \in \mathbb{Z}$, $f(x_0) = \mathbb{E}(x_0).\sin(\pi x_0) = x_0 \times 0 = 0$.

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^-} (x_0 - 1)\sin(\pi x) = (x_0 - 1)\sin(\pi x_0) = (x_0 - 1).0 =$ ... Dc f cont en tt point de $\mathbb{Z}$.

22

Fiche de TD-3 - Exos 5 → 10

Ex5 ⓐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tq $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

q $\exists$ au moins un point $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$.

c est uniq si de plus f est $S^T \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

Soit P un polynôme de degré impair. Mq P admet au moins 1 racine réelle

hyp $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ dc $\exists b > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq b \Rightarrow f(x) \geq 1$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ dc $\exists a < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq a \Rightarrow f(x) \leq -1$.

on a $f(a) \leq -1 < 0$ & $f(b) \geq 1 > 0$. Ainsi pcq f est continue sur $[a, b]$, par TVI, $\exists c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$

de +, la fonction f est $S^T \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ alors elle est injective & le c est unique. En effet $f(c) = 0 = f(d) \Rightarrow c = d$ par injectivité.

soit $P(X) = a_{2n+1} X^{2n+1} + a_{2n} X^{2n} + \dots + a_1 X + a_0$ où $a_{2n+1} \neq 0$.

Ste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction polynomiale associée polynôm P par $f(x) = P(x)$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$a_{2n+1} > 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ & $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, dc d'après a

$c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$

$a_{2n+1} < 0$ alors $\tilde{f}(x) = -f(x)$, $\tilde{f}$ vérifie a), dc $\exists c \in \mathbb{R}$,

$\tilde{f}(c) = -f(c) = 0$, D'où $f(c) = 0$.

Dans les 2 cas P admet au moins une racine réelle.

① Ex6 soit $n \geq 1$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, f polynomiale à coeffs réels de deg n. Mq si $a_n a_0 < 0$ alors $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle. ②

- Si $a_n > 0$, $a_0 < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, dc $\exists b > 0$, tq $f(x) \geq 1 > 0$, $\forall x \geq b$, ~~ep~~ $f(b) > 0$. Par ailleurs, $f(0) = a_0 < 0$ et f est continue sur $[0, b]$, TVI, on en déduit $\exists c \in]0, b[$ tq $f(c) = 0$.

- Si $a_n < 0$, $a_0 > 0$ alors on définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $\tilde{f}(x) = -f(x)$

D'après point précédent, $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\tilde{f}(c) = -f(c) = 0$, soit $f(c) =$

Ex 7 on a $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$. Justifie tan ne s'annule pas sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Pq ce résultat ne contredit pas TVI ?

Soit $\tan \frac{\pi}{4} = 1 > 0$ et $\tan \frac{3\pi}{4} = -1 < 0$, De plus, on a $\tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x = k\pi$.

Dc f tangente ne s'annule pas sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Mais la f n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ et sa limite y est finie : dc elle n'est pas continue (ni prolongeable par continuité) sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Dc $\emptyset$ contradic° de TVI

Ex8 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, f continue. Mq f admet un point fixe (i.e. $\exists c \in [0, 1]$ tq $f(c) = c$? $f(c) - c = 0$

Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$; alors elle est continue sur $[0, 1]$, de plus, ĉ la fonction f est à v^les ds $[0, 1]$, on a $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

D'après TVI, $\exists c \in [0, 1]$ tq $g(c) = 0$, ie $f(c) = c$.

③ Ex 9 soit f continue sur $[a, b]$ tq $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = 0}$

Mq $\exists\, c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$.

ⓐ Mq de TVI & ⓑ Mq de TR.

ⓐ (1) fonction f ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors f est de signe constant sur $]a, b[$. En effet, d'après TVI, s'il existait deux points de l'intvll $]a, b[$ en lesq. la fonction f prenne des valeurs de signes opposés alors elle s'annulerait sur un point compris entre ces deux points

Supposons ⓐ $f(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$ alors par continuité de f en a & b, on a $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Soit $c \in]a, b[$ alors $f(c) > 0$, par continuité de f en c, $\exists\, \delta > 0$ tq $[c-\delta, c+\delta] \subset]a, b[$ & $f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2} > 0$ $\forall x \in [c-\delta, c+\delta]$ alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\, dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\, dx$$

$$\geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\, dx = \delta f(c) > 0$$

On aboutit à contradiction puisq intégrale est supposée nulle.

Ainsi $\exists$ un point $c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$.

ⓑ Soit F une primitive de f ... de l'analyse $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = 0$.

Dc $F(b) = F(a)$, puis F est continue sur $[a, b]$ & dérivable sur $]a, b[$ alors d'après Th Rolle, on déduit $\exists$ réel $c \in]a, b[$ tq $F'(c) = f(c) = 0$

Ex 10 f fonction continue sur $[a, b]$. Mq $\exists\, c \in [a, b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

ĉ de b) ex 9), on considère F de f. Alors F est continue sur ... dérivable sur $]a, b[$, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in]a, b[$.

Ainsi par $\boxed{\text{TAF}}$, $\exists\, c \in]a, b[$ tq

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}, \text{ ie } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

soit $f_1 = x^2$, $f_2 = \cos x$, $f_3 = \frac{1}{x}$.

on a $x \neq 0$, $f(x) = (f_1 (f_2 \circ f_3))(x)$

- f_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ & $f_1' = 2x$
- f_2 ——— & $f_2' = -\sin x$
- f_3 ——— $\mathbb{R}^*$ & $f_3' = -\frac{1}{x^2}$.

on déduit f dér sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = f_1' \cdot (f_2 \circ f_3) + f_1 (f_2' \circ f_3) \cdot f_3'$

$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

...me f cont en 0, on vérifie si f est déri aussi en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

...près Th encadt, $-|x| \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$.

...valeur limite existe, dc f est bien aussi dérivable ..., et alors dérivable sur $\mathbb{R}$.

...la f $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas cont en 0 car ...valeur $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\nexists$.

(12) b) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$

$f(x) = (f_1 (f_1 \circ f_2))(x)$

- f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $f_1'(x) = \cos x$
- f_2 ——— $\mathbb{R}^*$ $f_2'(x) = -1/x^2$.

on cclt f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ &

$f'(x) = f_1' \cdot (f_1 \circ f_2)(x) + f_1 (f_1' \circ f_2)(x) \cdot f_2'$

$f'(x) = \cos x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin x \cdot \cos x\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$

comme f cont en 0, on vérif f est dér en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

comme la valeur lim n $\nexists$,

f n'est pas dérivable en 0.

f cont $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Mq $\exists c \in]a,b[$, $f(c) = 0$.

cf TVI : cf ex 10

b) soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

- alors F cont sur $[a,b]$ car f cont $[a,b]$ & le segment $[a,x]$ est continu en f de x.
- F dérivable sur $]a,b[$ car $\forall x \in]a,b[$, $F'(x) = f(x)$
- $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = 0$

Donc $F(a) = F(b) = 0$

d'après Th Rolle, $\exists c \in]a,b[$, $F'(c) = 0$, $f(c) = 0$

ex 10 $f \, c^{[a,b]}$, Mq $\exists c \in]a,b[$, $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

soit $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

Alors $\forall x \in [a,b]$, $m \le f(x) \le M$

$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$

$\Leftrightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

$\Leftrightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$

Ce qq $f \, c^{[a,b]}$, $\forall y \in [m, M]$, $\exists x \in [a,b]$, $f(x) = y$ d'après TVI.

$\sin x \le x \le \tan x \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 1 \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x$.

Par passage à la lim $x \to 0^+$

$1 \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \ge \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$

Donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

D'après Th encadrement. De façon $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

...

où $\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^-} = 1$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

c) En déduire qu'elle est dérivable, ET la dérivée.

soit x_0 qq de $\mathbb{R}$, par définition f est dérivable en x_0 si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\exists$ et est finie.

on a $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x_0} \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}$

$= \cos x_0 \times \lim_{x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)} = \cos x_0 \times \lim_{0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos x_0 \times 1 = \cos x_0$

on en déduit que la fonc° sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $(\sin)'(x) = \cos x$.

Pas pour $\cos x$. Rq : $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

on sait f dér sur $\mathbb{R}^*$ & $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$

De plus f cont en 0 et

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$

Donc f est dér en 0, et alors dérivable sur $\mathbb{R}$,

Enfin on a : et

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$ $\quad \lim f'(x) = \lim -2x = 0$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

OEDT $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \begin{cases} f_1 = \frac{x}{1+x}, & x \ge 0 \\ f_2 = \frac{x}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$

f_1 cont & dér sur $\mathbb{R}^+$, Mq f_2 cont-dér sur $\mathbb{R}^-$

OEDT f dér sur $\mathbb{R}^*$ &

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{(1-x^2)}, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ De + f est cont en 0

$\lim_{0^+} f'(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1$ et $\lim_{0^-} \ldots = 1$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$.

On en déduit f est dér en 0 & alors dér sur $\mathbb{R}$ ... $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ...

(14) e) $f(x) = \begin{cases} f_1 = \frac{1}{1+x}, & x \ge 0 \\ f_2 = \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$

f_1 cont dér sur $\mathbb{R}^+$, f_2 cont dér $\mathbb{R}^-$

OEDT f dér sur $\mathbb{R}^*$ &

$f'(x) = \begin{cases} f_1' = \frac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ f_2' = \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0. \end{cases}$

f est bien cont en 0, f n'est pas dér en 0 (AR)

$\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$

$\lim_{0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{0^-} \frac{1}{1-x} = 1$

Dc val^r $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ $\nexists$.

ex 13

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$

dc $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$.

avec pr $\delta = \frac{1}{2}$, on a :

- $\forall x \in]-\delta, \delta[$, $f'(x) \le 0$, dc 0 n'est pas extremum de f
- $\forall x \in]\frac{3}{4} - \delta, \frac{3}{4}[$, $f'(x) \le 0$ et $\forall x \in [\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \delta[$, $f'(x) \ge 0$.

Dc $\frac{3}{4}$ est bien un extremum de f.

$\frac{3}{4}$ est un minimum global de f.

ex 14 Mq $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists$ au plus un réel (15) (16)

$x \in [-1,1]$, $x^3 - 3x + b = 0$.

$\boxed{c!!c}$ ~~sihi $\exists x_1$ et x_2 tq $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$,~~

~~$f(x_1) = f(x_2) = 0$.~~

TAR $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

D'où $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$.

sihi $\boxed{c!!c}$ $\exists$ 2 réels x_1 & x_2 tq $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$

et $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

D'après TAR, $\exists c \in]x_1, x_2[$ ~~tq~~

$-1 < c < 1$ tq $f'(c) = 0$. ce qui est impossible.

ex 15 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ f dér sur I.

Mq si f s'annule en n points distincts ($n \geq 2$),

alors f' s'annule au moins $(n-1)$ fois sur I.