# Feuille 3. II Exercice 8 (Calcul d'intégrales curvilignes)

Calculer $Q = \int_{\partial D} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle$ dans les cas suivants

(a) Par un calcul direct

(b) En utilisant la formule de Green-Riemann.

(1) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$, $D$ carré de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ et $(0,2)$

On a d'une part :

$$Q_{1,a} = \int_0^2 V(x,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx + \int_0^2 V(2,y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy$$

$$- \int_0^2 V(x,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx - \int_0^2 V(0,y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy$$

$$Q_{1,a} = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx + \int_0^2 \begin{pmatrix} y^2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy$$

$$- \int_0^2 \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx - \int_0^2 \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy$$

$$= 0 + 4 - 8 - 0 = \boxed{-4.}$$

D'autre part, en notant $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$

$$Q_{1,b} := \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D (1 - 2y)\, dx\,dy$$

$$= 4 - \int_0^2 \int_0^2 2y\,dy\,dx = 4 - 2 \times 4 = \boxed{-4.}$$

On a bien $Q_{1,a} = Q_{1,b}$.

(2) $\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $D$ est le disque unité.

- On a en utilisant le paramétrage standard du cercle unité

$$Q_{2,a} := \int_{\partial D} \langle \vec{V} ; d\vec{\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta = 0.$$

- D'autre par en écrivant $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, on a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 1 - 1 = 0$

et donc

$$Q_{2,b} := \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\, dx\, dy = 0.$$

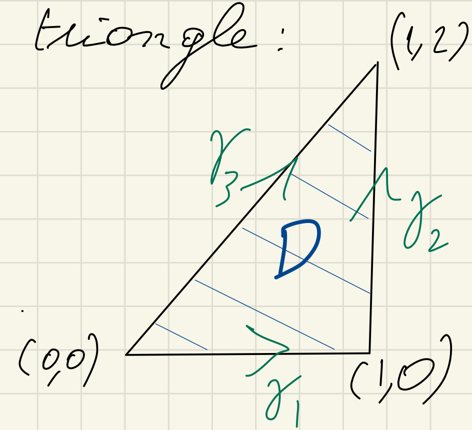
(3) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x \end{pmatrix}$ $D$ triangle de sommets $(0,0), (1,0), (1,2)$

- On paramètre chacun des côté du triangle :

$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$

$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$

$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1.$




(Remarquer que $\gamma_3$ n'est pas orienté positi-
-vement).

$$Q_{3,a} = \int_{\gamma_1} \langle V, d\gamma_1 \rangle + \int_{\gamma_2} \langle V, d\gamma_2 \rangle - \int_{\gamma_3} \langle V, d\gamma_3 \rangle$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt - \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^2 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt$$

$$= 0 - 2 + \int_0^1 (2t - 4t^2)\, dt$$

$$= 0 - 2 + 1 - 4/3 = \boxed{-7/3}.$$

D'autre part par Fubini

$$Q_{3,b} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2x} (-1 - 2y)\, dy\, dx$$

$$= - \int_0^1 (2x + 4x^2)\, dx = -1 - \frac{4}{3} = \boxed{-7/3}$$

(4) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 y \\ x + xy^2 \end{pmatrix}$ D disque d'équation $\{x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$

- $D = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} = B((0,1), 1)$

On paramètre $\partial D$ (dans le sens trigonométrique) par $(x,y) = (\cos\theta, 1+\sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi[$

On calcule

$$Q_{4,a} := \int_{\partial D} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta(1+\sin\theta) \\ \cos\theta\left(1 + (1+\sin\theta)^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-\sin\theta - 2\sin^2\theta - \sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\, d\theta.$$

$$Q_{4,a} = \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

- En utilisant la formule de Green-Riemann,

$$Q_{4,b} := \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

On calcule

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 1 + y^2 - 2y + x^2$$

On intègre sur $D$ en utilisant les coordonnées polaires centrées en $(0,1)$.

$$(x,y) = (r\cos\theta,\ 1 + r\sin\theta), \quad dx\,dy = r\,d\theta\,dr$$

On a

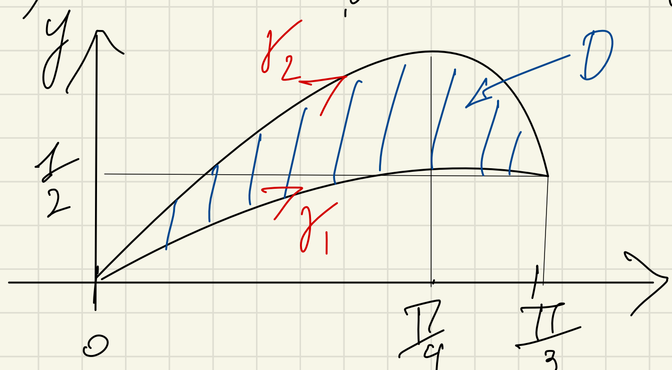
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 1 + (1+r\sin\theta)^2 - 2(1+r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta$$

$$= r^2$$

D'où $Q_{4,b} = 2\pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{2}$.

On a bien $Q_{4,a} = Q_{4,b}$.

(5) $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1+y^2 \\ y \end{pmatrix}$ $\quad D = \left\{(x,y) : \sin x \le y \le \sin 2x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right\}$



Le bord de D se décompose en deux courbes paramétrées

$$\gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix} \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

($\gamma_2$ n'est pas orientée positivement).

On a

$$Q_{5,a} := \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle = \int_{\gamma_1} \langle V, d\gamma_1 \rangle - \int_{\gamma_2} \langle V, d\gamma_2 \rangle.$$

$$Q_{5,a} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} 1+\sin^2 x \\ \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \end{pmatrix} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} 1+\sin^2(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos 2x \end{pmatrix} dx$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \underbrace{\sin^2 x}_{} + \sin x \cos x - \underbrace{\sin^2(2x)}_{} - 2\cos(2x)\sin 2x \right) dx$$

$$(\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) - \frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right) dx + \underbrace{\left[\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^2(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\left[\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{16} = -\frac{3}{16}$$

- Calculons $Q_{5,b} := \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 0 - 2y = -2y$$

Par Fubini

$$Q_{5,b} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{\sin x}^{\sin 2x} (-2y)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(\underbrace{\sin^2 x - \sin^2(2x)}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2x) - \frac{1}{2}(1-\cos 4x)}\Big)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 4x - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}$$

## Exercice 9 (Voir l'énoncé sur la feuille 3.II)

(1) On paramètre le cercle $\Gamma^+$ par

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad 0 \le r < 2\pi$$

Sur ce cercle, on a

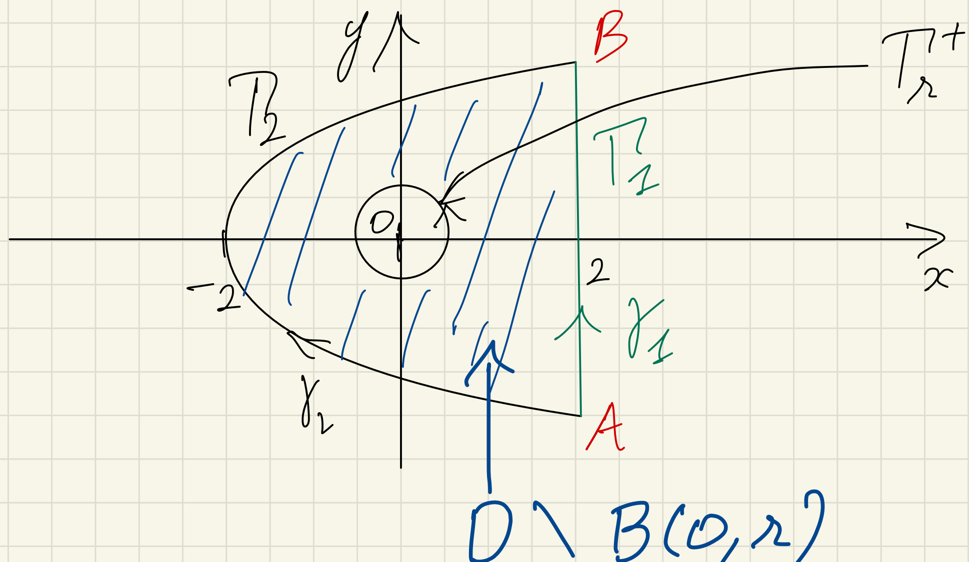
$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-r\sin\theta}{r^2} \\ \dfrac{r\cos\theta}{r^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\boxed{\int_{\Gamma_r^+} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} d\theta = 2\pi.}$$

(2) Le champ $\vec{V}$ n'est pas un champ de gradient car son intégrale sur la courbe fermée $\Gamma_r^+$ n'est pas nulle (voir exercices 4.(3) et 5.(3).)

(3)



En notant $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ (voir exercice 5)}$$

donc par la formule de Green-Riemann

$$0 = \iint_{D \setminus B(0,r)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} \langle \vec{V} \cdot \vec{d\gamma} \rangle - \int_{K_r^+} \langle \vec{V} \cdot \vec{d\gamma} \rangle$$

⚠ l'orientation sur $\partial[B(0,r)^c]$ est opposée à celle sur $\partial B(0,r)$

D'après la question (1) $\int_{K_r^+} \langle \vec{V}, \vec{d\gamma} \rangle = 2\pi$

d'où

$$\boxed{\int_{\partial D} \langle \vec{V}, \vec{d\gamma} \rangle = 2\pi.}$$

(4) • Si $D$ ne contient pas $(0,0)$ alors $\vec{V}$ est bien défini et de classe $C^1$ sur $D$ et on a vu que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ sur $D$.

Par théorème de Green-Riemann, on a

$$\int_{\partial D} \langle V, d\vec{\gamma} \rangle = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

• Si $(0,0) \in \mathring{D}$, alors pour $r > 0$ assez petit $B(0,r) \subset \mathring{D}$ et on peut appliquer le théorème de Green-Riemann dans $D \setminus B(0,r)$ comme à la question précédente.

On a alors

$$0 = \iint_{D \setminus B(0,r)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle - \int_{K_r^+} \langle V, d\gamma \rangle$$

$$= \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle - 2\pi \quad \text{d'où} \quad \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle = 2\pi.$$

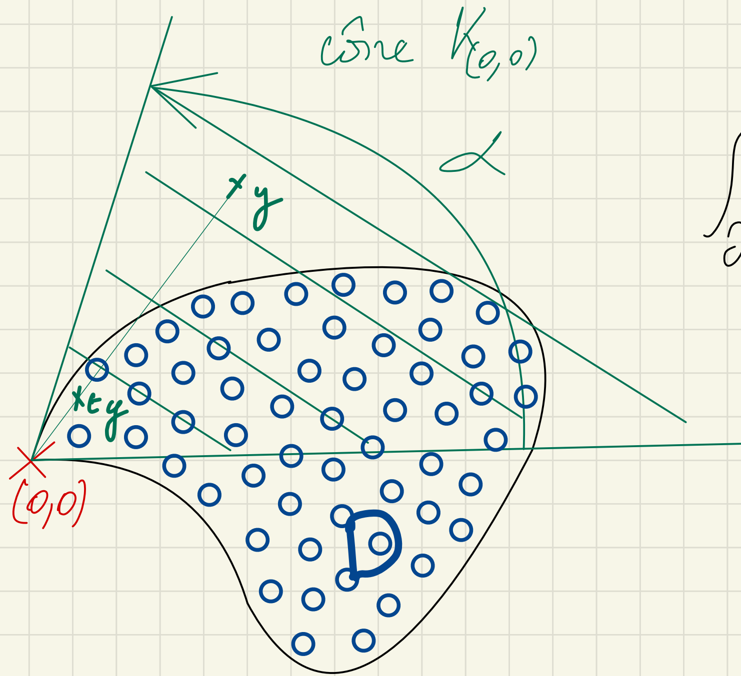
Remarque : si $\partial D$ est $C^1$ par morceaux et $(0,0) \in \partial D$ alors : si $(0,0)$ est un point régulier de $\partial D$,

$$\int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle = \pi$$

- si $(0,0)$ est un point singulier de $\partial D$,

$\int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle = \alpha \in [0, 2\pi]$ où $\alpha$ est l'angle du cône $K_{(0,0)}$ formé par les deux tangentes à $\partial D$ au point $(0,0)$ et qui est tel que pour $y \in \operatorname{Int} K_{(0,0)}$, $ty \in D$ pour $t > 0$ assez petit.

<u>exemple :</u>




$$\int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle = \alpha$$