TD - M53

TD-1 - Rappels

→ Uniforme continuité
→ Intégrales de Riemann
→ Intég. Généralisées

cont [ ]
dér] [

conditions !!

pk ?

TAF

Uniforme Continuité

Ex1 a) Mq si $f : I \to \mathbb{R}$ est f k-lipschitzienne sr I. (ie $\forall x,y \in I$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ alors f est UN cont sr I.

$f : I \to \mathbb{R}$, $\forall x,y \in I$, Montrons que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$[\,|x-y| < \delta \Rightarrow$

→ k donné p l'énoncé, on a ε !, on cherche δ.

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{k}} \times \cancel{k} = \varepsilon$

b) ed $x \longmapsto \sin(x)$ est UN. cont sr $\mathbb{R}$.
→ C^1.

$f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ est f k-lipschitzienne ?

$\forall x,y \in I$, $|\sin(x)-\sin(y)| \leq k|x-y|$.

$\exists c \in [x,y]$ tq ~~$d \in [x,y]$~~

$$\frac{|\sin(x)-\sin(y)|}{|x-y|} \overset{\sin'}{=} (c) = |\cos(d)| \leq 1$$

On peut écrire pour $c = 1$

$|\sin(x)-\sin(y)| \leq 1.|x-y|$

Donc f sinus est k-lipschitzienne.

Ainsi d'après a) f est UN cont sr I.

c) Mq $x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est UN cont.

$\forall x,y \in I, \left|f(x)-f(y)\right| = \left|\dfrac{1}{1+|x|} - \dfrac{1}{1+|y|}\right|$

$= \left|\dfrac{1+|y|-1-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| = \left|\dfrac{|y|-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|$

$\leqslant \dfrac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \leqslant k|x-y|$

$\cancel{\text{avec } k = \dfrac{1}{(1+|x|)(1+|y|)}}$

On a montré que la f est k-lipschitzienne.
Ainsi f est uniformément cont sur I.

DM ⚠ $|y| = |y-x+x| \leqslant |y-x| + |x|$

$\Leftrightarrow |y|-|x| \leqslant |y-x|$

$\Leftrightarrow |x|-|y| \leqslant |x-y|$

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$ $\Leftrightarrow \boxed{\left||x|-|y|\right| \leqslant |x-y|}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \cancel{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\left||a|-|b|\right| \leqslant |a+b|$

$|\sqrt{x-y}|$ $\sqrt{|x-y|}$ ②

d) Mq $x \longmapsto \sqrt{x}$ est UN. cont sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \varepsilon.$

$\cancel{|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \times \dfrac{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}}$

pour $\varepsilon = \delta^2$ $\mu\ x>y$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \leqslant \delta^2$

⚠

1° M $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

2° M $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

QC

sur $[1,\infty[$, $\forall x,y \in [1,\infty[$, on a :

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant 2.$

Donc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$

sur $[1,\infty[$, $f\ \sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

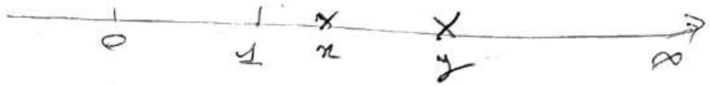
• Sur $[0,1]$: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est cont !
sur $[0,1]$ - fermé, borné.
Le TH de Heine implique que
$x \longmapsto \sqrt{x}$ est UN cont sur $[0,1]$.

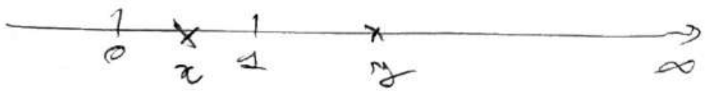
→ si f est f UN cont sur $[0,1]$ & UN cont sur $[1,\infty[$ alors f est UN cont sur $[0,\infty[$

• soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$, $\forall x,y \in [0,1]$,
$|x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
$\exists\, \delta_2 > 0$, $\forall x,y \in [1,\infty[$,
$|x-y| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et soit $x,y \in [0,\infty[$ tq $|x-y| \leq \delta$.

1° cas

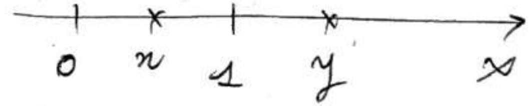

2° cas


3° cas


si $x,y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \delta \leq \delta_1$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

2° cas : $x,y \in [1,\infty[$:
$|x-y| \leq \delta < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

3° cas $x \in [0,1]$, $y \in [1,\infty[$, $|x-y| \leq \delta$



$$|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f(1)|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|f(1)-f(y)|}_{\leq \varepsilon/2}$$

(car $x, 1 \in [0,1]$, $|x-1| \leq \delta_1$
$y, 1 \in [1,\infty[$ & $|y-1| \leq \delta_2$)

Ex d) Pk $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Mq $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sr $[0, \infty[$.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad \forall x,y>0,$$

Rais^t ?! $\exists k \,/\, |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq k|x-y|$

D'où $\forall x,y>0,\ x \neq y,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq k$

$$\forall n \geq 1 : \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} \leq k \qquad \begin{pmatrix} x = 1/n \\ y = 1/n+1 \end{pmatrix}$$

Absurde

Ex 2 Mq $x \mapsto x^2$ est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$ mais n'est pas UN cont sr $\mathbb{R}$.

• $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Le Th de Heine implique que f est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$.

•• Sur $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|x^2-y^2| = |x-y|\,|x+y|$$

négat°

Mq $\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, \exists x,y \in \mathbb{R}$.
$|x-y| \leq \delta$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

soit $\delta>0$, prenons $x_n = n$, $y_n = n+\frac{1}{n}$
où n est choisit tq $n \geq \frac{1}{\delta}$.

Dc $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \leq \delta$.

& $|f(x_n)-f(y_n)| = \left|n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right| = 2+\frac{1}{n^2} \geq 2$

$\varepsilon = 2$.

Dc $\varepsilon = 2$ fonctionne & f n'est pas <u>UN</u> cont sr $\mathbb{R}$.

Ex3 : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. f <u>UN</u> cont.
On vt mq $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \leq ax + b$. But

a) Justifier l'$\exists$ $\eta_1 > 0$ tq
$|x-y| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.
par définit° cela convient

b) soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ & $n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1$

(i) Mq $|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|$

$$\left| f\left(\frac{\cancel{n_0} x_0}{\cancel{n_0}}\right) - f(0) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right)\right|$$

$\hat{s}$ télescpq

$$\underset{\text{I}\Delta}{\leq} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|$$

(ii) $|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|$

car $\left|\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0}\right| = \frac{x_0}{n_0} < \eta_1$ ≤ 1 dq a)

$\underbrace{\left\lfloor\frac{x_0}{\eta_1}\right\rfloor}_{n_0-1} \leq \frac{x_0}{\eta_1} < \left\lfloor\frac{x_0}{\eta_1}\right\rfloor + 1 = n_0$

Donc $|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0$

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0) + f(0)| \leq |f(x_0) - f(0)| + |f(0)|$$
$$\leq n_0 + |f(0)| \leq \underbrace{\frac{1}{\eta_1}}_{a} x_0 + \underbrace{1 + |f(0)|}_{b}$$
$$\leq a x_0 + b.$$

Dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq ax + b$

c) (i) $f(x) = e^x$, $x > 0$.

Supposons f UN cont alors $\exists\, a, b > 0$ tq $e^x \leq ax + b$, $\forall x \geq 0$.

$$\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} \infty} \leq \underbrace{a + \frac{b}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} a}$$

voir DM

cf TVI

Intégrales de Riemann

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cont sur I, $a \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in I.$$

(F est la primitive de f q s'annule en a.

$x_0 \in I$, $x \in I$; $x \neq x_0$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\, dt} + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\, dt}}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Le Th de la moyenne : $\exists\, c_x$ compris entre x et x_0 tq $\boxed{\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f(c_x)}$

Or lorsque $x \longrightarrow x_0$, on a $c_x \longrightarrow x_0$ & par continuité de f, on a : $f(c_x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ $\exists$ & vaut $f(x_0)$.

Donc F est dérivable & $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in I$.

Ex 7 $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>cont</u>.

Supposons g est <u>positive</u> & <u>décroissante</u> alors $\exists\, c \in [a, b]$ tq

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \underbrace{\int_a^c f(x)\, dx}_{F(c)} .$$

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_{n-1} \quad b = x_n$.

pas : découpage

$$\delta(S) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

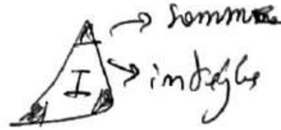
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty .$$

soit $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

---

1 a) Mq $\underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(x_{i-1})) f(x)\, dx \right|}_{I} \leq$

$$I \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(g(x) - g(x_{i-1}))| |f(x)|\, dx$$



$$\leqslant \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\, dx$$

$$= \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_{i-1}) - g(x))\, dx$$

car $g \searrow$ & dc $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ $g(x) \leq g(x_{i-1})$.

D'où $I \leqslant \|f\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_{i-1})\, dx}_{= (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})} - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\, dx \right)$

D'où $I \leqslant \|f\|_\infty \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})}_{\text{Somme de Riemann.}} - \int_a^b g(x)\, dx \right)$

Lorsque $\delta(S) \to 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big) f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\,dx = \lim_{\delta(S)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$.

c) F dérivable de continue sur $[a,b]$ & de F admet un minimum & un maximum.

Lorsque $\delta(S) \to 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g(x) - g(x_{i-1})\right) f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\,dx = \lim_{\delta(S) \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$.

c) F dérivable de continue sur $[a,b]$ & de F admet un minimum & un maximum.

- $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont
- g est $\oplus$ & $\searrow$

Mq $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g(a) \int_a^c f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

On a vu que $\delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\delta(S)\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \big) = \circ$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \boxed{v_i} \qquad V_i = \sum_{k=1}^{i} v_k \qquad \cancel{j = i-1}$$

$$\circ = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_{i-1})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \big)} = $$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{j=0}^{n-1} g(x_j) F(x_j)$$

$$= g(x_{n-1}) F(x_n) - \cancel{g(x_0) F(x_0)} \quad \text{car } x_0 = a \ \& \ F(a) = 0$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \big(g(x_{i-1}) - g(x_i) \big) F(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

$$= g(x_{n-1}) F(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(g(x_{i-1}) - g(x_i) \big) F(x_i)$$

$$m = \min_{t\in[a,b]} F(t) \quad \& \quad M = \max_{t\in[a,b]} F(t).$$

$$F(b) \le M \quad \& \quad F(x_i) \le M \ ; \ 1 \le i \le n-1$$

& $\hat{c}$ $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0$ car g est $\searrow$.

$$I \le M g(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(g(x_{i-1}) - g(x_i) \big) M$$

$$= M \left[\cancel{g(x_{n-1})} + g(x_0) - \cancel{g(x_{n-1})} \right] = M g(a)$$

De m̂, $I \geq m \cdot g(a)$.

$$\text{D'où } m \cdot g(a) \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx} \le M g(a)$$

$$\downarrow \delta(S) \longrightarrow 0$$

$$m\, g(a) \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le M\, g(a)$$

cl si $g(a)=0$, n'importe quel c fonctionne car alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ d'après l'inég. précédente.

si $g(a)\neq 0$: $m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M$

& on appliq le TVI : $\exists\, c\in [a,b]$ tq

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(c)$$

d'où $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx$. $\square$

Applicat° soit f cont $\searrow$ de $[0,\infty[$ ds $\mathbb{R}$; $\lim_{\infty} f = 0$

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} f(t)\, e^{it}\,dt$. (mq q ça tnd vers 0 qd $n\to\infty$)

$\int_n^{n^2} f(t)\, e^{it}\,dt = ?$

- $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt$: f & cos st cont
- f est $\searrow$ & $\oplus$.

$\exists\, c \in [n, n^2]$ tq $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt =$

$= f(n) \int_n^{c_n} \cos(t)\,dt$

$= f(n)\,[\sin(t)]_n^{c_n}$

$= f(n)\,(\sin(c_n) - \sin(n))$

$\Rightarrow \left| \int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt \right| \leq 2 f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $\int_n^{n^2} f(t)\cos t\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

De m̂ pr sinus.

Intégrales Généralisées

1) • $t \longmapsto \ln t$ est cont sur $]0,1]$. IPP

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}} \, dt$$

$u(t) = \ln t$ $\quad u'(t) = 1/t$

$v(t) = t$ $\quad v'(t) = 1$

$$= \underbrace{-\varepsilon \ln(\varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0} - \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\to 1}$$

par croissce comparée

D'où $\int_\varepsilon^1 \ln(t) \, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -1$

Dc $\int_0^1 \ln(t) \, dt$ CV & vaut -1.

2) $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ est cont sur $\mathbb{R}$.

dc localemt intégrable sur $[0, \infty[$.

• $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive

~~$0 \leq e^{-t^2}$~~ comme $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ croissce comparée.

$\exists t_0 \geq 0$, $t \geq t_0 \Rightarrow 0 \leq t^2 e^{-t^2} \leq 1$

$0 \leq e^{-t^2} \leq 1/t^2$

$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV $\Rightarrow \int_{t_0}^\infty e^{-t^2} dt$ CV

ainsi $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \longmapsto \infty$

• $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} \geq 0$ $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

pas de primitive
11 par $e^{u(x)}$

Rq : on pt prendre aussi $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} x.(\sin x)e^{-x}\,dx$

• $x \longmapsto x(\sin x)e^{-x}$ est cont sur $[0,\infty[$

dc localem^t intégrable sur $[0,\infty[$.

$|x \sin x . e^{-x}| \leq x . e^{-x}$

& $x e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\text{car } x^3 e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\right]$

& $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CV.

Donc $\displaystyle\int_1 x \sin x . e^{-x}\,dx$ CV abs dc CV.

$\frac{\ln t}{t} \times t^3 e^{-t} = t^2 \ln(t)\, e^{-t}$ raccourci

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} (\ln t)\, e^{-t}\,dt$?

$t \mapsto (\ln t)\, e^{-t}$ est cont sur $]0,\infty[$ dc (li)$^{]0,\infty[}$

On a $k_1 \in]0,1[$ & $k_2 \in [1,\infty[$

Sur $]0,1[$:

$\ln(t)\, e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$

[ô $\ln(t) e^{-t}$ & $\ln(t)$ st de m̂ signes.]

$\displaystyle\int_0^1 \ln t . e^{-t}\,dt$ & $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ st de m̂ nature.

D'après 1) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \ln t\, e^{-t}\,dt$ CV.

Sur $[1,\infty[$: IPP

$u(t) = \ln t \quad u'(t) = 1/t$

$v(t) = -e^{-t} \quad v'(t) = e^{-t}$

$\displaystyle\int_1^{k_2} \ln t . e^{-t}\,dt =$

$= -\left[\ln t . e^{-t}\right]_1^{k_2} + \displaystyle\int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

$= -\ln k_2 . e^{-k_2} + \displaystyle\int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

• $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ dc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ CV. • $\lim\limits_{k_2\to\infty} -\ln(k_2)\, e^{-k_2} = 0$

Ainsi par somme $\lim\limits_{k_2\to\infty} \displaystyle\int_1^{k_2} \ln(t)\, e^{-t^2}\,dt$ $\exists$

12 cl $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln t\; e^{-t^2}\,dt$ CV.

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ ---> DV

← ⚠ majorant n'est pas vraie pour tout $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\iff \alpha < 1$

⚠ CV en 0 ok mais ne pas oublier impropre en 1.

⑤ $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont p morcx

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ CV

$\exists c \in]a,b[$ tq $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ CV.

Étude en 1 :

$\forall t \in [0,1[$

$\displaystyle\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{1-t}$ & $\displaystyle\frac{1}{1-t} \geq 0$,

$\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ DV (① ① & CDV en $u = 1-t$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ DV

$\boxed{L = 1}$ 13 voir lim PPI qd indét

Ex 9 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1}$ ---> DV

$t \mapsto \dfrac{1}{e^t - 1}$ est cont sur $]0, \infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{e^t - 1} = \infty$. $\quad e^t = 1 + t + o(t),\ t \to 0$

$e^t - 1 = t + o(t)$

$\displaystyle\frac{1}{e^t - 1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ $\quad \Rightarrow e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$

$\frac{1}{t} \geq 0$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ est DV. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t - 1}\,dt$ DV.

et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1}\,dt$ est DV.

2) $\int_0^{\infty} \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \, dt$

$t \longmapsto \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est <u>cont</u> sur $[0,\infty[$.

+ grde puissance

Or $\frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{t^2} = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$

~~lim~~ $= \lim_{t\to\infty} t.e^{-\sqrt{t}} = 0$, par croissance comparée

alors $\exists t_0$ tq $\forall t \geq t_0$,

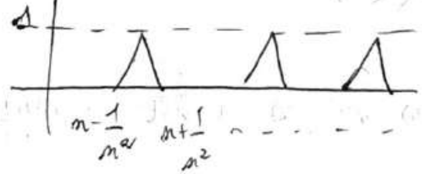
$0 < te^{-\sqrt{t}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t} e^{-\sqrt{t}} < \frac{1}{t^2}$

Or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ (cv) donc $\int_0^{\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ (cv).

(9) $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ (cv) $\overset{?}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ Faux

(ce)



$\sum \frac{1}{\cancel{2}n^2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{4}} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Si la limite existe en $+\infty$ & $f \geq 0$.

3) $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right) dt$, $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est cont sur $]0,1]$.

Or $0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$

$\int_0^1 1\, dt$ CV d'où $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ CV.

Ex 6

1) $\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ cont sur $]0,\infty[$

Étude en 0 : on a $\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ basse puissance.

$\int_0^1 \ln t\, dt$ CV dc $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

$\ln t \leq 0 \ \forall t \in (0,1)$

Étude en ∞ :

$1+t^2 \geq t^2 \iff \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2} \iff \frac{t^{3/2} \cdot \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$

Or par croissance comparée $t^{-\frac{1}{2}} \ln t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Puis $\exists t_0, \forall t \geq t_0$, $\cancel{\frac{\ln t}{\sqrt{t}}}$

$\sqrt{t} \geq \ln(t)$, $\frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2}$

$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$

or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ CV car $\frac{3}{2} > 1$.

On a $\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$

$x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ cont sur $]1, \infty[$ & $\oplus$

$\ln(x) = \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

$u = x-1$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx \quad \text{CV}$$

$\frac{1}{2} < 1$.

Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV

Choisir $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$,

$$x^{1+\varepsilon}\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{1+\varepsilon}\cdot\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \frac{1}{2}-\varepsilon > 0$$

D'où $\exists\, t_0$ tq $t \geq t_0 \Rightarrow x^{1+\varepsilon}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x+1)\sqrt{x}} \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

& $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,dx$ CV.

Donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV.

Riemann

CV $\alpha < 1 \Rightarrow x^{\alpha} \rightsquigarrow f \to 0$

DV $\alpha \geq 1 \Rightarrow x^{\alpha} \rightsquigarrow f \xrightarrow[x\to\infty]{} > 0$

multiplier x^{α}

16

3) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$, $t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est cont n $[1,\infty[$

Pensons $\displaystyle\frac{1}{t}\,e^{\sqrt{\ln t}} = \frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{e^{\ln t}} = e^{\sqrt{\ln t}-\ln t}$

$$= e^{-\ln t\left(1-\frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

D'où $\exists\, t_0,\ \forall\, t \geq t_0$:

$$0 < \frac{1}{t}\,e^{\sqrt{\ln t}} \leq 1$$

$$\frac{1}{t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ DV.

Donc $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$ DV.

3) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$, $t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est cont sur $[1,\infty[$

Ex 11 $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$?

$t \longmapsto \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est cont sur $]0,\infty[$.

(sur $[0,\infty[$ si $\alpha \leq 0$).

Penser $\frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} = \frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{e^{\ln t}} = e^{\sqrt{\ln t} - \ln t}$

$= e^{-\ln t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

D'où $\exists\, t_0,\ \forall t \geq t_0$:

$0 < \frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} \leq 1$

$\frac{1}{t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$

Or $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt$ (DV).

Donc $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$ (DV).

$e^{-t} = 1 - t + o(t) \rightarrow \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} = \frac{-t+o(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t^{\alpha-1}}$

La f $t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est négative $\forall t > 0$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ (cv) ssi $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (cv) $\iff \alpha < 2$.

en $+\infty$

$e^{-t} - 1 \xrightarrow[t\to\infty]{} -1$ d'où $\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{t^\alpha}$

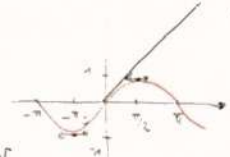
La f $t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est négative (de signe cte) sur $]0,\infty[$.

Or $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ (cv) ssi $\alpha > 1$.

Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (cv) $\iff \alpha > 1$.

D'où $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (CV) $\iff \alpha \in]1,2[$.

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$



$t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est cont sur $]0,\infty[$

$\forall t \geq 0$, $\sin(t) \leq t$ (à prouver)

$\Rightarrow t \longmapsto \dfrac{t-\sin(t)}{t^\alpha}$ est ⊕ sur $]0,\infty[$.

• $\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$

$$\frac{t-\sin t}{t^\alpha} = \frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^\alpha} = \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}}\,dt$ CV $\iff \alpha-3<1 \iff \alpha<4$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha<4$

$\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$ ... $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leq \dfrac{1}{t} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$

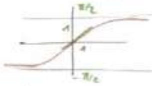
D'où $t-\sin t \underset{t\to\infty}{\sim} t$ & $\dfrac{t-\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ CV ssi $\alpha-1>1$ ssi $\alpha>2$

D'où $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha>2$.

En résumé $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\underline{2<\alpha<4.}$

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$, $t \longmapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$ est cont & ⊕ sur $]0,\infty[$.



Or $\arctan(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

$\dfrac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ CV $\iff \alpha-1<1 \iff \alpha<2$

or $1/t^{\alpha-1} \geq 0$, $\forall t>0$

D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\alpha<2$.

• $\arctan(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^\alpha}$ & $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\iff 1<\alpha$.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha>1$.

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff 1<\alpha<2$.

Ex 10 a) Mq CV $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,dx$, $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/4}}$ est cont sur $]0,1]$.

• $x^\alpha \cdot \dfrac{\ln x}{x^{3/4}} = x^{\alpha-\frac{3}{4}} \ln x$, or $\boxed{\lim_{x\to 0} x^\beta \ln x = 0 \text{ si } \beta>0}$

Donc $x^{\alpha-\frac{3}{4}} \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ si $\alpha > \dfrac{3}{4}$.

Donc $\dfrac{\ln x}{x^{3/4}} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$; or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CV ssi $\alpha<1$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}$ CV (pour $\alpha = \frac{7}{8}$)

b) Mq CV $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}$ cont sur $]0,1]$

& ⊕ car $x+\sqrt{x} \geq x \Rightarrow \ln(x+\sqrt{x}) \geq \ln(x)$.

$\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)$

$= \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) + \ln(1+\sqrt{x}) = -\dfrac{1}{2}\ln x + \ln(1+\sqrt{x})$

or $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(1+\sqrt{x}) = 0$

Donc $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln(x)$

D'où $\dfrac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x^{3/4}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,dx$ CV

Donc $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$ CV

On va étudier nature $\int_1^\infty \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$

Or $\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u\right)$

$\frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/4}\,x^{1/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$

comme $\frac{5}{4} > 1$, $\int^\infty \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$ CV

dc $\int_1^\infty \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$ CV

⚠ on ne peut pas utiliser l'é abs… $\int f(\ldots)$ … positive

Ex 13

1. $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$

Pr $x \geq 4$,

$\sqrt{x}+\sin(x) \geq \sqrt{4}+(-1) = 2-1 = 1 > 0$.

d'où $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ est cont sur $[4,\infty[$,

indic°: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$ $\qquad \frac{1}{1+u}$

$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+O(u^2)$ $+ \frac{-\sin^2(x)}{x}$

$f(x) = \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\right)}_{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}$ et $\int_4^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ CV

dc $\int_4^\infty \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\right)dx$ CV

Or $\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x)-2\right) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\int_4^\infty f(x)\,dx$ CV ssi $\int_4^\infty g(x)\,dx$ CV.

$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}$

$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}$

$\boxed{M1}$ IPP en ↗ d'abord le deg de x à $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$\boxed{M2}$ $\int_X^{X'} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ soit $X' > X$

Par la 2° ff de la moyenne $\exists\, c \in [X, X']$ tq

$\frac{1}{\sqrt{X}} \int_X^c \sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{X}}(\cos X - \cos c)$

$\Rightarrow \left| \int_X^{X'} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

Dc l'intégrale $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ CV.

De même pr $\int_X^{X'} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx = \frac{1}{2X}\int_X^c \cos(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2X}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_X^c = \frac{1}{4X}\left(\sin(2c)-\sin(2X)\right)$

Prdt de 2 fc, l'1 q ↘ & td vers 0
l'autre est bornée & dte q ne dpd pas

$\Rightarrow \left| \int_X^{X'} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx \right| \leq \frac{2}{4X} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

Dc l'integ $\int_4^\infty \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$ CV.

De plus, $\int_4^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ DV

Donc $\int_4^\infty f(x)\,dx$ DV.

2. $\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)dx$, $\alpha > 0$ | Résultat CV ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

TD 2 : Intégrale déf dépendant d'un paramètre

Ex 1 : pr $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,dt$

soit $f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \cos(tx)$

⚠ mê si cont fon's j'ai Δ cont f sinon int. impropre

f est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$

Donc F est bien déf & cont sr $\mathbb{R}$. (Th1 du C8)

$F(-x) = \int_0^1 \cos(t(-x))\,dt = \int_0^1 \cos(tx)\,dt = F(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

car cos est paire. Donc F est paire.

b) Mq F est dérivable
· f est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$.
· $\forall t \in [0,1]$,
$x \longmapsto f(x,t) = \cos(xt)$ est dérivable sr $\mathbb{R}$
& $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$

P (Th4) du (C8), la f F est dérivable sr $\mathbb{R}$
& $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

ie $F'(x) = -\int_0^1 t\sin(xt)\,dt$

Ex 2 soit $F(x) = \int_0^1 t^3 e^{xt}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est de classe C^1 sr $\mathbb{R}$ & calculer $F'(0)$

$f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto t^3 e^{xt}$

· f est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$

· $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^4 \cdot e^{xt}$

↳ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$

$\Rightarrow$ F est C^1 sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 t^4 e^{xt}\,dt$.

en 0 : $F'(0) = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

Ex 3 $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \ ?$

$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Mq F bien déf & cont sr $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$

· f est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$ $\quad \left((1+t^2)(1+x^2t^2) \geq 1 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1] \right)$

$\Rightarrow$ F est bien déf & cont.

b) Par DES, calculer $F(x)$, ed $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

On sait q' $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{1+x^2t^2} \overset{\text{parité}}{=} \frac{-at+b}{1+t^2} + \frac{-ct+d}{1+x^2t^2}$$

unicité DES (23) $\Rightarrow a = c = 0$

Pour $t = 0$; $1 = b + d$

~~$t = 1$: $\frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{b}{2} + \frac{d}{1+x^2}$~~

$\times(1+t^2)$ puis calculer $t = i$:

$\frac{1}{1-x^2} = b$; $d = 1 - b = \frac{1-x^2-1}{1-x^2} = \frac{-x^2}{1-x^2}$

$x \neq \pm 1$

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\arctan(t)\right]_0^1 - \frac{x}{1-x^2}\left[\arctan(xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{x\cdot\arctan(x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} - x\arctan(x)}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1.$$

[illegible]

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \underbrace{\frac{x . \arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}}_{\downarrow x \to 1}$$

$(x \arctan x)'(1) =$

$$\left[\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right]_{x=1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$F(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$

Ex 4 pr $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

Mq F bien déf & dérivable sr $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \begin{cases} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

- f est cont sr $\mathbb{R} \times]0,1]$
- soit $(x_0, 0)$ mq f est cont en $(x_0, 0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} f(x,t) = f(x_0, 0) = 1 \, ?$$

$$f(x,t) = \underbrace{e^{-xt}}_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}\ 1} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{t \to 0\ 1}$$

Donc f est cont sr $\mathbb{R} \times [0,1]$

Dc F est bien ~~dérivable~~ définie sr $\mathbb{R}$.

- Mq $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Fixons $t \in [0,1]$ & on étudie la dérivabilité de $x \mapsto f(x,t)$.

si $t = 0$: $x \mapsto f(x,t) = 1$ est dérivable

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$

si $t > 0$ $x \mapsto f(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}(-t) . e^{-xt} = -\sin(t) \, e^{-xt}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ sr $\mathbb{R} \times [0,1]$ & $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sr $\mathbb{R} \times]0,1]$.

D+, pr $(x_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

on a : $\lim_{(x,t) \to (x_0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \lim_{(x,t) \to (x_0,0)} \left(-\sin(t) \, e^{-xt}\right) = 0 \times 1 = 0$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$

Dc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sr $\mathbb{R} \times [0,1]$.

$\Rightarrow$ F est dérivable sr $\mathbb{R}$.

cg TD1 · TD2 $\longrightarrow$ IE la semaine 05/10 (cc = $\frac{[illegible]}{100}$, NF max$\left(\frac{[illegible]}{2}, [illegible]\right)$)

Ex 6 Pr $x \in]-1,1[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) \, dt$$

a) Mq F bien déf sr $]-1,1[$ & que $]-1,1[$

pr $x \in]-1,1[$

$$F(x) = 2 \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) \, dt$$

@ $1 - 2x\cos(t) + x^2 > 0$?

pr $x \in]-1,1[$, $\forall t \in [0, 2\pi]$

M1 la f $g_t :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g_t(x) = x^2 - 2x\cos(t) + 1$

est une f polynômiale.

$\boxed{M2}$ si $x \in [0,1[$

$-\cos(t) \geq -1 \Leftrightarrow -2x\cos(t) \geq -2x$

$\Leftrightarrow 1-2x\cos(t)+x^2 > 1-2x+x^2 = (x-1)^2 > 0$ car $x \neq 1$.

si $x \in]-1,0]$,

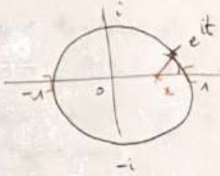
$\cos t \geq -1 \Leftrightarrow -2x\cos t \geq +2x$

$\Leftrightarrow 1-2x\cos t + x^2 \geq 2x+1+x^2 = (x+1)^2 > 0$ car $x \neq -1$.

$\boxed{M3}$ Rq voir un module au carré.

$1-2x\cos t + x^2 = |e^{-it} + x|^2$

$|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\, a\bar{b}$.



$\forall (x,t) \in]-1,1[\times [0,2\pi]$,

$1-2x\cos(t)+x^2$.

Donc $t \longmapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est cont sur $[0,2\pi]$, $\forall x \in]-1,1[$.

$\Rightarrow$ F est définie sur $]-1,1[$.

Mq $F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$.

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$$

Fait : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodiq$^{\text{e}}$ cont

alors $\int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt$, $\forall \alpha$.

DM $\int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt = \int_\alpha^{0} g(t)\,dt + \int_0^T g(t)\,dt + \int_T^{\alpha+T} g(t)\,dt$

DM $G(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

g cont $\Rightarrow \exists\, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable tq $H'(t) = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$G(\alpha) = H(\alpha+T) - H(\alpha)$.

G est dérivable &

$G'(\alpha) = H'(\alpha+T) - H'(\alpha)$

$G'(\alpha) = g(\alpha+T) - g(\alpha) = 0$

$\Rightarrow G = $ cte sur $\mathbb{R}$.

$G(\alpha) = G(0)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ici $t \longmapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est 2π-périodiq.

Donc $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$

$F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$

car $t \longmapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$ est paire.

b) Mq F est dérivable sur $]-1,1[$.

$F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$, $x \in]-1,1[$

$f :]-1,1[\times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$

- f est cont sur $]-1,1[\times [0,\pi]$ car $(1-2x\cos(t)+x^2 > 0)$
- $\forall t \in [0,\pi]$, $x \longmapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est dérivable sur $]-1,1[$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2\cos(t)+2x}{1-2x\cos(t)+x^2}$

& comme $1-2x\cos t + x^2 \neq 0$.

on a $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sur $]-1,1[\times [0,\pi]$.

D'après le Th de dérivabilité des intégrales définies, on sd que F est dérivable sur $]-1,1[$ &

$\forall x \in]-1,1[$;

$$F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\,dt .$$

c) en posant $u = \tan(t/2)$; $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
mq $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$

$$F'(x) = 4\int_0^{\infty} \frac{x - \frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+x^2} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$dt = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{x(1+u^2)-(1-u^2)}{\left[1+u^2-2x(1-u^2)+x^2(1+u^2)\right](1+u^2)}\,du$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)\left[(x^2+2x+1)u^2+x^2-2x+1\right]}\,du$$

$$= 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{\underbrace{(1+u^2)}_{\geq 1}\left[(x+1)^2u^2+\underbrace{(x-1)^2}_{>0}\right]}\,du$$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

$$\frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)\left[(x+1)^2u^2+(x-1)^2\right]} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{cu+d}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}$$

DES

Par parité $a = c = 0$.

$\times(1+u^2)$ & on évalue en $u = i$

$$\frac{-(x+1)+x-1}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = c = \frac{-2}{(x-1+x+1)(x-1-x-1)}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2x}}$$

On évalue en $u = 0$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2} = c + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

$$d = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2x} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x} = d}$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(x+1)u^2+x-1}{(u^2+1)\left((x+1)^2u^2+(x-1)^2\right)}\,du$$

$$F'(x) = \frac{8}{2x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\right)du$$

$$= \frac{4}{x}\underbrace{\left[\arctan(u)\right]_0^{\infty}}_{\pi/2} + \frac{4(x^2-1)}{x}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du$$

or $$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = (x-1)^2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)^2}\,du$$

On fait $\boxed{\text{CDV}}$ $v = \frac{x+1}{x-1}u$, $du = \frac{x-1}{x+1}\,dv$

$x \in]-1,1[$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = \frac{1}{(x-1)^2}\int_0^{-\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}}{1+v^2}\,dv$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\cdot\left[\arctan(v)\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{-\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{4}{x}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{4(x^2-1)}{x}\cdot\frac{-\pi}{2(x^2-1)} = 0 .$$

$\Rightarrow F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$.

F est de classe C^1 sur $]-1,1[$
donc F' est cont sur $]-1,1[$ &

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} F'(x) = 0$$

D'où $F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$.

d) Donc $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-1,1[$,

$F(x) = c$

Or $F(0) = \int_0^{2\pi} \ln(1)\,dt = 0$.

D'après le Th de dérivabilité des intégrales définie, on sd que F est dérivable sur $]-1,1[$ &

$\forall x \in]-1,1[$;

$$F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt .$$

c) en posant $u = \tan(t/2)$; $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

mq $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$

$$F'(x) = 4\int_0^{\infty} \frac{x-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+x^2}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du$$

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$dt = \frac{8}{1+u^2}\,du$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{x(1+u^2)-(1-u^2)}{\left[1+x^2-2x(1-u^2)+x^2(1+u^2)\right](1+u^2)}\,du$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)\left[(x^2+2x+1)u^2+x^2-2x+1\right]}\,du$$

$$= 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{\underbrace{(1+u^2)}_{\geq 1}\left[(x+1)^2u^2+\underbrace{(x-1)^2}_{>0}\right]}\,du$$

$\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)\left[(x+1)^2u^2+(x-1)^2\right]} = \frac{au+b}{1+u^2}+\frac{cu+d}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}$$

DES

Par parité $a = c = 0$.

$\times(1+u^2)$ & on évalue en $u = i$

$$\frac{-(x+1)+x-1}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = c = \frac{-2}{(x-1+x+1)(x-1-x-1)}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2x}}$$

On évalue en $u=0$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2} = c + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x}+\frac{d}{(x-1)^2}$$

$$d = +x-1-\frac{(x-1)^2}{2x} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x} = d}$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(x+1)u^2+x-1}{(u^2+1)\left((x+1)^2u^2+(x-1)^2\right)}\,du$$

$$F'(x) = \frac{8}{2x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\right)du$$

$$= \frac{4}{x}\underbrace{\left[\arctan(u)\right]_0^{\infty}}_{\pi/2}+\frac{4(x^2-1)}{x}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du$$

or $$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = (x-1)^2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)^2}\,du$$

On fait $\boxed{\text{CDV}}$ $v = \frac{x+1}{x-1}u$, $du = \frac{x-1}{x+1}\,dv$

$x \in]-1,1[$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = \frac{1}{(x-1)^2}\int_0^{-\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}}{1+v^2}\,dv$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\cdot\left[\arctan(v)\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{-\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{4}{x}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4(x^2-1)}{x}\cdot\frac{-\pi}{2(x^2-1)} = 0 .$$

$\Rightarrow F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$.

F est de classe C^1 sur $]-1,1[$

de F' est cont sur $]-1,1[$ &

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} F'(x) = 0$$

D'où $F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$.

d) Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-1,1[$,

$$F(x) = c$$

Or $F(0) = \int_0^{2\pi} \ln(1)\,dt = 0$.

Ex7 Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$$

a) Justifier que F bien déf sur $\mathbb{R}$.

On pose $\mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

La fonction f est bien continue (par quotient de 2 fonctions cont dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

Ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Mq F est une f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Rq f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\exists$ & cont sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\, dt$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^3}$.

c) calculer $F(0)$ & $F'(0)$.

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$F'(0) = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2}$$

d) Mq F est S^t $\searrow$ sur $\mathbb{R}$ & convexe.

On sait que F est dérivable & $F'(x) = -\underbrace{\int_0^1 \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\, dt}_{\geq 0}$

$\Rightarrow F'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Rq si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont & si $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$.

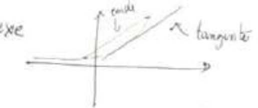
$$\int_a^b h(x)\, dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ h(x) = 0.$$

Or ici : $\forall t \in [0,1]$, $\frac{t.e^{-tx}}{1+t^2}$ est cont, positive, non-identiquement nulle.

Donc $\int_0^1 \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\, dt > 0$ d'où $F'(x) < 0$.

Donc F est strictement $\searrow$.

Rq f convexe



si f est 2 fois dérivables, alors

f est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$

$\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^3 e^{-tx}}{1+t^2} \geq 0$

dc $F''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ convexe.

e) Mq $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \infty$

Rq on a $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$$0 \leq \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leq e^{-tx}$$

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-tx}\, dt = -\frac{1}{x}\left[e^{-tx}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$0 \leq F(x) \leq -\frac{1}{x}(e^{-x} - 1) = \frac{1-e^{-x}}{x}$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} = 0$

D'après le Th des gendarmes, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

Mq $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \infty$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \geq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-tx} = -\frac{1}{2x}\left[e^{-tx}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$\frac{1-e^{-x}}{2x} \sim \frac{-e^{-x}}{2x} \to \infty$$

dc $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \infty$

f) Donner l'allure du graphe de F.

~~Ex~~ 10 $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$$F(x) = x\int_0^1 \frac{f(t)}{x^2+t^2}\,dt \quad , \; x>0$$

a) Mq F est cont sur $]0,\infty[$

$$g :]0,\infty[\times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto g(x,t) = \frac{x f(t)}{x^2+t^2}$$

La f g est cont sur $]0,\infty[\times [0,1]$.
(comme quotient de f cont dt le dénominateur ne s'annule pas).

$\Rightarrow$ F est cont sur $]0,\infty[$.

b) Mq
$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$\underline{x>0}$
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\left(\frac{t}{x}\right)^2\right)}\,dt$$

$$= \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan 0$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$$

c) Mq
$$\lim_{x\to 0^+} \left(F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt\right) = 0$$

$$\underbrace{F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt}_{G(x)} = \int_0^1 \frac{x f(t)}{x^2+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{f(0)\,x}{x^2+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\left(f(t)-f(0)\right)\,dt$$

soit $\varepsilon>0$, par continuité de f en 0,
$\exists\, 0<\delta$ tq $0\leq t<\delta \Rightarrow |f(t)-f(0)| \leq \varepsilon$.

$$G(x) = \int_0^\delta \frac{x}{x^2+t^2}\left(f(t)-f(0)\right)dt + \int_1^\delta \frac{x}{x^2+t^2}\left(f(t)-f(0)\right)dt$$

$$|G(x)| \leqslant \int_0^\delta \frac{x}{x^2+t^2}\underbrace{|f(t)-f(0)|}_{\leq \varepsilon}dt + \int_\delta^1 \frac{x}{x^2+t^2}|f(t)-f(0)|\,dt$$

$$\leqslant \varepsilon \underbrace{\int_0^\delta \frac{x}{x^2+t^2}dt}_{\arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)} \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon$$

$$\int_\delta^1 \frac{x}{x^2+t^2}|f(t)-f(0)|\,dt \leq 2M\int_\delta^1 \frac{x}{x^2+t^2}dt$$

où $M = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| < \infty$

$$= 2M\underbrace{\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$$

Dc $\exists\, x_0 > 0$ tq $0 < x < x_0 \Rightarrow \left|2M\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)\right)\right| \leq \varepsilon$.

Pour $0 < x < x_0$; on a :

$$|G(x)| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} G(x) = 0.$$

d) ed $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}f(0)$

$$G(x) = F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

$$\& \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}.$$

D'où $F(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \underbrace{\frac{\pi}{2}f(0)}_{\frac{\pi}{2}\int f\, d\delta_0}$

dirac en 0.

33

Ex 11 a) soit φ déf V_0^T, à v.r. $J^T > 0$

$\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}$ & dérivable en 0. Sppo $\varphi(0) = 1$.

Déterminer $\lim_{x \to 0} (\varphi(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\varphi'(0)}$

$$\varphi(x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(\varphi(x))}$$

$$\frac{\ln(\varphi(x))}{x} = \frac{\ln(\varphi(x)) - \ln(\varphi(0))}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \boxed{(\ln \circ \varphi)'(0)}$$

Car $(\ln \circ \varphi)'(0) = \ln'(\varphi(0) \times \varphi'(0))$

$$= \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \varphi'(0)$$

D'où $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\varphi(x))}{x} = \varphi'(0)$.

b) soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont & sppo $\forall t \in [0,1]$, $f(t) > 0$. Posons

$$I(x) = \int_0^1 f(t)^x \, dt.$$

Mq I bien déf & dérivable sur $\mathbb{R}$.

soit $g : (x,t) \longmapsto f(t)^x = e^{x \ln(f(t))}$

est cont sr $\mathbb{R} \times [0,1]$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(f(t))\, e^{x \ln(f(t))}$$

$\to \frac{\partial g}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $\mathbb{R} \times [0,1]$.

D'où I est bien déf & de C^1 sr $\mathbb{R}$.

$$I'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^1 \ln(f(t)) \cdot e^{x \ln(f(t))} \, dt$$

c) cd $\lim_{x \to 0} \left(\int_0^1 f(t)^x \, dt \right)^{1/x} = \exp\left(\int_0^1 \log(f(t)) \, dt \right)$

$$(I(x))^{\frac{1}{x}} = \left(\int_0^1 f(t)^x \, dt \right)^{1/x}$$

soit $\varphi(x) := I(x)$

- φ est déf sur $\mathbb{R}$ & dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\varphi(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ \varphi(0) = 1$

$\left(\text{car } \varphi(x) = \int_0^1 e^{x \ln(f(t))} dt > 0\right)$

D'où d'après a).

$$\lim_{x \to 0} I(x)^{\frac{1}{x}} = e^{I'(0)}$$

$$= e^{\int_0^1 \ln(f(t))\, dt}$$

⚠ complément : $\lim_{x \to \infty} I(x)^{1/x} = ?$

$$= \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Ex 8 : Soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2(t))\, dt \ , \ x > 1$

a) Mq F déf & dérivable sur $]-1, \infty[$. Calculer $F'(0)$.

$$f :]-1, \infty[\times [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,t) \longmapsto \ln(1 + x \sin^2(t))$$

$1 + x \sin^2(t) > 0 \iff x \sin^2(t) > -1$.

- si $x \geq 0$: alors $x \sin^2(t) \geq 0 > -1$
- si $-1 < x < 0$: $\sin^2(t) \leq 1 \Rightarrow x \sin^2(t) \geq x > -1$.

Par composition f est <u>cont</u> sur $]-1, \infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin^2(t)}{1 + x \sin^2(t)}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est <u>cont</u> sur $]-1, \infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$.

D'où $F'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{1 + x \sin^2(t)}\, dt$

$$F'(0) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, dt = \frac{\pi}{4}$$

linéariser sinus

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) Le CDV $u=\tan(t)$, trouver :

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}$$

$\sin^2(t) = \frac{u^2}{1+u^2}$, $du = \left(1+\tan^2(t)\right)dt$

$$dt = \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1+x\frac{u^2}{1+u^2}} \times \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+u^2+xu^2)}\,du = \int_0^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)}\,du \;, x>-1$$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{cu+d}{1+(1+x)u^2}$$

Par parité $a=c=0$.

D'où $u^2 = \left(b(x+1)+d\right)u^2 + b+d$

$$\begin{cases} b+d=0 & (1)\\ b(x+1)+d=1 & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow bx = 1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{x}}$ & $\boxed{d=\frac{-1}{x}}$

$$F'(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(x+1)u^2}\right)du$$

$$xF'(x) = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du - \int_0^{\infty}\frac{1}{1+(x+1)u^2}\,du$$

$$= \left[\arctan u\right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\arctan(\sqrt{x+1}\,u)\right]_0^{\infty}$$

$$xF'(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{1+x}}$$

D'où $xF'(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{(\sqrt{1+x})^2-1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}$

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)} \quad , x\neq 0.$$

$\forall t > -1, \quad F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+t}\,(\sqrt{1+t}+1)}$

$$F(x) - F(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t}\,(\sqrt{1+t}+1)}\, dt$$

$$F(x) - F(0) = \frac{\pi}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \cdot \Big[\ln(\sqrt{1+t}+1) \Big]_0^x$$

D'où $F(x) - F(0) = \pi \left[\ln(\sqrt{1+x}+1) - \ln(2) \right]$

or $F(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1)\, dt = 0$

$$\boxed{F(x) = \pi \left(\ln(\sqrt{1+x}+1 - \ln(2) \right)}$$

Ex 15 pr $x \in I = [0, \infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}, \quad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$$

a) Mq F est définie, cont, dériv sur I.
↳ Exprimer sa dérivée ss forme d'une intég.

Posons $f : I \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$$

La fonction f est bien définie et continue sur I . Donc la fonction F est bien définie & cont sr $I \times [0,1]$.

Cherchons si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ $\exists$ et est cont ?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(t^2+1)}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est bien continue sur I

Donc F est de classe C^1

Ainsi F est dérivable sur I.

Enfin $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} dt$

b) Justifier que G est définie, cont, dérivable sur I,

Mq $F'(x) + G'(x) = 0, \; \forall x \in I$.

Posons $g : I \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto g(x,t) = e^{-t^2}$$

La fonction g est bien définie.

$\forall (x,t) \in I \times [0, \infty[$,

$$|e^{-t^2}| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ est une IdR (cv) $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ (cv).

Ainsi G est bien définie, cont sr I.

$$G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \left(H(x) - H(0)\right)^2 \text{ où } H'(x) = G(x)$$

$$G'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) e^{-x^2}.$$

37

~~Rep~~

$f^2 = 2.f.f'$!! Ja dérivé d'un carré

b) Mq $F'(x) + G'(x) = 0, \ \forall x \in I.$

On a $\sqrt{G(x)} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt, \quad x \in [0, \infty[.$$

$$F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} \, dt.$$

soit H une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$

($\exists$ car $t \mapsto e^{-t^2}$ est cont).

$$G(x) = \left(H(x) - H(0) \right)^2$$

H étant dérivable sur $\mathbb{R}$, G est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G'(x) = 2 H'(x) \left(H(x) - (H(0)) \right)$$

$$H'(x) = e^{-x^2}$$

$$G'(x) = 2 . e^{-x^2} \left(H(x) - H(0) \right)$$

$$G'(x) = 2 . e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

posons $t = ux$

$dt = x \, du$

D'où $G'(x) = 2 e^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2 x^2} x \, du.$

$$= 2x \int_0^1 e^{-x^2 - u^2 x^2} \, du.$$

$$\boxed{G'(x) = 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)} \, du}$$

Donc $F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \geq 0.$

c) ed $\forall x \in I, \ F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.$

Ainsi $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) + G(x) = c.$

Pour $x = 0, \ c = F(0) + G(0)$ or $G(0) = 0.$

& $F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \left[\arctan t \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}.$

d) Mq $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

indic : Rq $|F(x)| \leq e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cq $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

$\forall t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$.

$1+t^2 \geq 1$ et $-x^2(1+t^2) \leq -x^2$

$e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$

$\Rightarrow \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2} \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$

Or $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$

& donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

e) Md $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

D'où $\lim_{x\to\infty} G(x)$ $\exists$ & vaut $\frac{\pi}{4}$.

Enfin $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

D'où $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (car $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt > 0$)

Autre M :

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right)$$

(Fubini)

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ex16 soit $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 - x.\cos t} dt$

a) Mq F cont & dériv sur $[0,1[$.
Exprimer $F'(x)$ sous forme d'intégrale.

$$f : [0,1[\times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \frac{t.\sin t}{1 - x\cos(t)}$$

ne pas ê confus & intervalle.

$-1 \leq \cos(t) \leq 1$, $\forall t \in [0,\pi]$
$-x \leq x\cos(t) \leq x$
$0 < 1-x \leq 1-x\cos(t)$ $\forall x \in [0,1[$.

f est cont sur $[0,1[\times [0,\pi]$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\sin(t)\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $[0,1[\times [0,\pi]$.

D'où F est dérivable sur $[0,1[$ &
$\forall x \in [0,1[$,

$$F'(x) = \int_0^{\pi} \frac{t.\sin(t)\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2} dt$$

b) Mq $xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{1-x\cos t} dt$

indic IPP $xF'(x) = \int_0^{\pi} \frac{xt\sin t\cos t}{(1-x\cos t)^2} dt$

posons $u(t) = t\cos(t)$ $u'(t) =$

$v(t) = \frac{-1}{1-x\cos t}$ $v'(t) = \frac{x\sin t}{(1-x.\cos t)^2}$.

- TD-3 - Intég Impropres dépendant d'un paramètre

Ex 1: $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$

$x \in \mathbb{R}$

a) Justifier F bien déf sur $\mathbb{R}$.

soit $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est cont sur $]0,\infty[$ de (li) sur $]0,\infty[$.

$$\frac{\sin(xt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t} = x$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} = x$$

La f $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se PPC en 0.

Donc $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$ (c).

• $\left|\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\right| \underset{t\geq 1}{\leq} e^{-t}$ & $\int_1^{\infty} e^{-t} dt$ (cv)

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$ (cv) abs de (cv).

Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Justif F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ & donner expr° $F'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

soit $f : \mathbb{R} \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$

• f est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$

• soit $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\cos(xt)}{t} e^{-t} = \cos(xt)\, e^{-t}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$.

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t}$ & $\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt$ (cv).

Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ &

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \cos(xt)\, e^{-t}\, dt \;,\; x \in \mathbb{R}.$$

c) calculer $F'(x)$:

1° $\boxed{M}$ on fait 2 IPP.

2° $\boxed{M}$ On Rq $\cos(xt) = \mathrm{Re}\left(e^{ixt}\right)$

D'où $F'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{ixt} e^{-t}\, dt\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(-1+ix)t}\, dt\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{-1+ix} e^{(-1+ix)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

or $\left|e^{(-1+ix)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$F'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+ix)}{|1-ix|^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

d) et exprimer $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt + F(0)$$

$$= \left[\arctan(t)\right]_0^{x} + F(0)$$

$\boxed{F(x) = \arctan(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

& $F(0) = \int_0^{\infty} \frac{0}{t} e^{-t}\, dt = 0$

Ex2 $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \quad , x>0.$

a) Mq F définie sur $]0,\infty[$.

. $t \longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est cont sur $]0,1]$

. $0 \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

or ĉ $x>0$, $1-x<1$

& de $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ cv

Donc $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ cv.

Ainsi F est bien déf sur $]0,\infty[$.

b) Mq F est cont sur $]0,\infty[$.

Si on veut ĉ cl que F soit cont sur $]0,\infty[$, il suffit de vérifier que :

$\circledast$ $f :]0,\infty[\times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont.

$\circledast$ $\forall\, 0<a<b$, $\exists\, \varphi_{a,b}$ tq $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in]0,1]$

$$|f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

$\int_0^1 \varphi_{a,b}(t)\,dt$ cv

Si on pt le mq sur 1 interv qq compact alors cont f ass sur int ouvert.

Brouillon

$t^{x-1} = e^{(x-1)\underset{<0}{\ln(t)}} \leq t^{-1} = \frac{1}{t}$ Or $\int_0 \frac{1}{t}$ DV.

Sur $[a, \infty[$, $a > 0$, $\forall x \geq a$,
$\forall t \in]0,1]$,

$$\left| \frac{t^{x-1}}{1+t} \right| = \frac{e^{(x-1)\ln(t)}}{1+t} \leq \frac{e^{(a-1)\ln(t)}}{1+t} = \frac{t^{a-1}}{1+t}$$

De +, $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ (cv) : c'est la q° a).

Donc F est cont sur $[a, \infty[$.
Comme c'est vrai $\forall a > 0$, on ed
F est cont sur $]0, \infty[$.

c) calculer $F(x) + F(x+1)$ $\forall x > 0$.

$F(x) + F(x+1) =$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t} dt$$

$$F(x) + F(x+1) = \left[\frac{t^x}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x}$$

$t^x = e^{x\ln t} \to 0$, $\mapsto 0$

$$\boxed{F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}}$$

d) ed un équivalent de F en 0

mq $F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

On a $xF(x) = 1 - xF(x+1)$

$$F(x+1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} F(1) \quad (F \text{ cont sur }]0, \infty[)$$

D'où $xF(x+1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \times F(1) = 0$

Donc $xF(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ & $F(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

e) cd lim F en ∞.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = ?$$

On Rq F est ↘ sur $]0,\infty[$

car si $x_1 \geq x_2$: $e^{(x_1-1)\ln t} \leq e^{(x_2-1)\ln t}$

$$\Downarrow$$

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

$\Rightarrow$ F est minorée par 0.

D'où $\ell = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ $\exists$

& c $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$

$\downarrow x \to \infty$

$\ell + \ell = 0 \Rightarrow \ell = 0$

Ex 3 $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,dt$, $x \geq 0$.

a) Mq F est définie & cont sur $[0,\infty[$

soit $f : \mathbb{R}^+ \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$$

- f est cont sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$
- on cherche $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\infty[$:

$|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ & $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$ CV.

$|f(x,t)| = f(x,t) \leq \frac{1}{t^2}$ mais $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ DV.

soit $a>0$: $\forall x \in [0,a]$, $\forall t \in]0,\infty[$.

$$\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \leq \frac{1-e^{-at^2}}{t^2}$$

Mq $\displaystyle\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1-e^{-at^2}}{t^2}}_{=\varphi(t)} dt$ CV.

(*) φ est continue sr $]0,\infty[$

(**) $e^{-at} = 1 - at^2 + o(t^2)$.

D'où $\displaystyle \frac{1-e^{-at}}{t^2} = \frac{at^2 + o(t^2)}{t^2} = a + o(1) \xrightarrow[t\to 0]{} a$

Dc φ se PPC en 0.

(***) $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$

& $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} \varphi(t)\, dt$ CV

Dc F est cont sr $[0,a]$; $\forall a > 0$

Ainsi F est cont sr $[0,\infty[$.

b) Mq f est de classe C^1 sr $]0,\infty[$.

(*) f cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$

(**) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $]0,\infty[\times]0,\infty[$

Fixons $t \in]0,\infty[$,

$x \longmapsto f(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est dérivable sr $[0,\infty[$

& $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt^2}$

(***) soit $a > 0$, $x \longmapsto e^{-xt^2}$ est $\searrow$ sr $[a,\infty[$.

& de $\forall (x,t) \in [a,\infty[\times]0,\infty[$,

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2} = \varphi(t)$ & $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt$ CV

Donc F est C^1 sur $[a,\infty[$, $\forall a > 0$.

Donc F est C^1 sur $]0,\infty[$.

cont & $e^{-at^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

c) Calculer $F'(x)$ $\forall x \in]0,\infty[$.

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-xt^2}\,dt \ , \ x>0.$$

a $\boxed{\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Dans l'intégrale donnant $F'(x)$, on effectue le cov $u=\sqrt{x}\,t$.

$$du = \sqrt{x}\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,du$$

$$F'(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,du$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \ , \ x>0$$

d) ed calcul $F(x)$ $\forall x \in [0,\infty[$.

$\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x>0$:

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{x} + k$$

$$F(x) = \sqrt{\pi x} + k \ , \ x>0$$

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = k \quad (F \text{ cont sur } [0,\infty[)$$

$$\text{D'où } k = F(0) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^0}{t^2}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sqrt{\pi x}} \ , \ x \geq 0.$$

Ex 4 soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

a) Mq F déf & cont sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$

- f est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$.
- Cherchons $\varphi(t)$ tq $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,\infty[$:

$|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Fixons $a > 0$: pr $x \in [-a,a]$.

$$0 \leq x^2 \leq a^2$$
$$t^2 \leq t^2+x^2 \leq a^2+t^2$$
$$2\ln t \leq \ln(x^2+t^2) \leq \ln(a^2+t^2)$$
$$|\ln(x^2+t^2)| \leq |\ln(a^2+t^2)| + 2|\ln t|$$

car $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \Rightarrow |x_2| \leq |x_1| + |x_3|$

Donc $|f(x,t)| \leq \underbrace{\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{1+t^2} + \frac{2|\ln t|}{1+t^2}}_{\varphi(t)}$

- φ est cont sur $]0,\infty[$
- $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} |\ln(a^2)| + 2|\ln t|$ or $\int_0^1 \ln t\, dt$ CV.

$\Rightarrow \int_0^1 \varphi(t)\, dt$ CV.

$$\varphi(t) = \cancel{\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{\sqrt{t}\,(t^{3/2}+\ldots}} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{\ln(a^2+t^2)}{t^2} + \frac{2|\ln t|}{t^2}$$

$$= \frac{1}{t^{3/2}} \Bigg(\underbrace{\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{t^{1/2}} + \frac{|2\ln(t)|}{t^{1/2}}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \Bigg)$$

D'où $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ CV $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

Donc $\int_1^{\infty} \varphi(t)\, dt$ CV.

b) Mq F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

$$f : \mathbb{R} \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$$

(*) f est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$ & $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$ (cv) (f a).

(**) Pr $t \in]0,\infty[$, $x \mapsto f(x,t) = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x/x^2+t^2}{1+t^2} = \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$.

(***) soit $0<a<b<\infty$; $\forall x \in [a,b]$, $\forall t>0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)}$$

$t \longmapsto \frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)}$ est cont sur $[0,\infty[$.

Donc (li) sur $[0,\infty[$

De +, $\frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t^4} dt$ (cv)

Donc $\int_0^\infty \frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)} dt$ (cv).

Ainsi, p. le (Th) de dérivat° des intégrales à paramètres généralisées, F est de classe C^1 sr $[a,b]$, et $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

Comme c'est vrai $\forall\, 0<a<b<\infty$, on ed que F est C^1 sr $]0,\infty[$ & $\forall x > 0$,

c) $F'(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} dt$. calculer F'

Pr $x>0$, $x \neq 1$, $F'(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} dt$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{x^2+t^2}$$ par l'argument de parité $a=c=0$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{b}{1+t^2} + \frac{d}{x^2+t^2} = \frac{(d+b)t^2 + d + bx^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

D'où $\begin{cases} d+b=0 \\ d+bx^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-b \\ b(x^2-1) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-b \\ b = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2x}{x^2-1} \end{cases}$

Ainsi $\dfrac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \dfrac{2x}{x^2-1}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{t^2+x^2}\right)$

D'où $F'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}\left[\int_0^\infty \dfrac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^\infty \dfrac{1}{t^2+x^2}\,dt\right]$ car les integ cv bien donc on peut les séparer.

$F'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}\left(\left[\arctan(t)\right]_0^\infty - \dfrac{1}{x^2}\int_0^\infty \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt\right)$

$= \dfrac{2x}{x^2-1}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x^2}\int_0^\infty \dfrac{1}{1+v^2}\,x\,dv\right)$

$= \dfrac{2x}{x^2-1}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x^2}\left(x\,\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{2x}{x^2-1}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x}$

Ainsi $\boxed{F'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}.}$ $\forall x>0,\ x \neq 1.$

Par continuité de F' sur $]0,\infty[$, on obtient

$$F'(x) = \frac{\pi}{x+1}, \quad x>0.$$

d) ed le calcul de $F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

indic un calcul $F(0)$ + CDV $u = \frac{1}{t}$.

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,dt + F(0).$$

$F(x) = \left[\pi \ln(t+1)\right]_0^x + F(0)$

$F(x) = \pi\ln(1+x) + F(0)$, $x>0$.

$F(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}\,dt$ $\quad u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$

$dt = -\frac{1}{u^2}\,du$

$= \displaystyle\int_\infty^0 -\frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{1}{u^2}\,du = \int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{1}{u^2}\,du$

$= \displaystyle\int_0^\infty \frac{-\ln(u^2)}{1+u^2}\,du = -F(0)$

$\Rightarrow 2F(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 0.$

$\forall x>0,\ F(x) = \pi\ln(x+1)$

D+, $F(0) = 0 = \pi\ln(0+1)$ et $\forall x \geq 0,\ F(x) = \pi\ln(x+1)$

On Rq et, $F(-x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln\left((-x)^2+t^2\right)}{1+t^2}\,dt = F(x)$

Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2021-2022

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Interrogation– Durée : 1h30

Groupe 2

Exercice 1. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \sin(t) e^{-t}\, dt.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1-\cos^2(t)}\, dt$, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 + t^2 \ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)\right) dt.$

Indication : pour l'intégrale c), on pourra écrire $\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$.

$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\, dt$

Exercice 2. On pose pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 + \sin^2(t))\, dt.$$

$f(x) \cdot g(x)$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer pour $x > 0$, $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

c) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}.$$

CDV bornes

d) En effectuant le changement de variable $u = \tan(t)$ (dans l'expression de $F'(x)$ sous forme d'intégrale), montrer que pour $x > 0$, on a $\boxed{F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}}$.

e) Soit $G(x) = \pi \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x > 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = G(x) + A$.

f) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) - \pi \ln(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + \frac{\sin^2(t)}{x^2}\right) dt.$$

g) En déduire que pour tout $x > 0$, on a $0 \le F(x) - \pi \ln(x) \le \frac{\pi}{2x^2}$.

Indication : on pourra utiliser (sans justification) que $\ln(1+u) \le u$, pour $u \ge 0$.

h) En déduire la valeur de A.

Barème :

Exercice 1 : question a) : 2 points ; question b) : 2 points ; question c) : 2 points.

Exercice 2 : question a) : 3 points ; question b) : 3 points ; question c) : 1 point ; question d) : 2 points ; question e) : 1 point ; question f) : 1 points question g) : 2 point ; question h) : 2 points.

$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

M53 TD1

Ex8 : $\int_0^1 \ln t \, dt$, $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, $\int_0^\infty x (\sin x) e^{-x} dx$.

$\int_0^\infty (\ln t) e^{-t} dt$, $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$.

Ex9 . $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1}$, $\int_0^\infty \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$, $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Ex10 $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$, $\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}} dt$

Ex11. $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - 1}{t^\alpha} dt$, $\int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$, $\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$

Ex12 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}} dx$, $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$, $\int_1^\infty \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$

Ex13 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$, $\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx$, $\alpha > 0$.

1 TD2 : Ex 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 8, 15, 16,

cont sur I ? de (li) sur I ?

équivlts $\leftrightarrow$ mêmes signes de même convergence. positivité

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha \geq 1$ DV, $\alpha < 1$ CV $\qquad \int^\infty \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha \geq 2$ CV, $\alpha < 1$ DV.

$\lim_{x \to 0} x^\beta \ln x = 0$ si $\beta > 0$

$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx$ | f, g cont $[a,b]$, $g \geq 0$ & $\searrow$, $c \in [a,b]$

$1 - 2x \cos t + x^2 = |e^{-it} - x|^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T périodiq $\qquad \int_\alpha^{\alpha+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt \quad \forall \alpha$.

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dt = \frac{+2 du}{1+u^2}$

si f est 2 fois dérivable $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$. f convexe.

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t) dt$

(1) $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

TD 1 . Ex 14

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt, \quad \int_0^{\infty} t\, e^{-\sqrt{t}}\,dt, \quad \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{-at}\,dt, \quad a>0$$

TD 2

9, 12, 13, 14, 16.

Ainsi $F(x) = \begin{cases} \pi \ln(x+1) & , x \geq 0 \\ \pi \ln(-x+1) & , x < 0 \end{cases}$

$$\boxed{F(x) = \pi \ln(|x| + 1)} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Ex 7 a) Mq l'integ géne $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-(a) ((cv) mais |cv|). voir cours.

Transformée de Laplace

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \quad \forall x \geq 0.$$

b) Mq F est de classe C^1 sr $]0, \infty[$ & déterminer sa dérivée.

soit $f :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$

- f est cont sr $]0,\infty[\times]0,\infty[$.

$t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ se PPC en 0.

- $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \Rightarrow \left| \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ (cv) & ainsi $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ (a).

** $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $]0,\infty[$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \cdot (-t) e^{-xt} = -\sin t . e^{-xt}$$

Etude variaOs de f

*** fixons $a > 0$, $\forall x \geq a$; $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}$.

& $\int_0^\infty e^{-at} dt$ (a)

Dc d'après le (Th) du cours, F est C^1 sr $]0,\infty[$

$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) = -\int_0^\infty \sin(t) e^{-xt} dt.$$

Puis se prolonge à $]0,\infty[$.

$\ln(1+x^2) \leq \frac{x^2}{t^2}$ $\frac{\ln(1+x)}{}$ $x \geq 0$

si question : minorer démo. / mais se ramener

c) calculer $F'(x)$

Mq $\forall x>0,\ F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(par 2 IPP ou écrire $\sin(t)e^{-xt} = \mathrm{Im}(e^{(i-x)t})$).

$|\sin(t)| = |\sin(t) - \sin(0)|$
$\leq \sup_{u\in[0,t]} |\sin'(u)|\,|t-0|$
$\leq |t|$

$|\ln(1+t)| \leq t$ & $t \leq e^t - 1$.

$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x>0$

$$F(x) = -\arctan(x) + k \quad (*)$$

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,dt$$

$x \neq 0$

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty \underbrace{\left|\frac{\sin t}{t}\right|}_{\leq 1} e^{-xt}\,dt \leq \int_0^\infty e^{-xt}\,dt$$

car $|\sin(t)| \leq |t|$ $\forall t\in\mathbb{R}$

$$|F(x)| \leq -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ & donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

Par $(*)$, on a $0 = -\frac{\pi}{2} + k$ & donc $k = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x>0,\ \boxed{F(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}$$

---

d) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $x\geq 0$, soit $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$.

(i) Mq : $(F_n)_n$ CV UN vers F sur $[0,\infty[$.

indic : uso 2nde FF moyenne.

$\overset{\text{ie}}{\Rightarrow}$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} |F_n(x) - F(x)| = 0$

$$F(x) - F_n(x) = \int_n^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

<u>1° essai</u> : $|F(x) - F_n(x)| \leq \int_n^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| |e^{-xt}|\, dt$

$$\leq \int_n^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty.$$

<u>2° essai</u>

user 2° ff de la moyenne.

$\exists c \in [a,b]$, f, g cont, $g \geq 0$, $\searrow$

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$

Fixons $A > n$.

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

Posons $g(t) = \frac{1}{t} e^{-xt}$, $f(t) = \sin t$.

f, g <u>cont</u> sur $[n, A]$; $g \geq 0$, $\searrow$.

D'après la 2° ff de la moyenne, on a :

$\exists\, c_{n,A} \in [n, A]$ tq

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \frac{e^{-nx}}{n} \int_n^{c_{n,A}} \sin t\, dt.$$

On obtient que :

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \frac{e^{-nx}}{n}\left(-\cos(c_{n,A}) + \cos(n)\right)$$

$$\left|\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt\right| \leq 2\,\frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{2}{n} \quad \forall x \geq 0$$

En faisant tendre $A \to \infty$, on obtient que :

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_n^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt\right| \leq \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \geq 0} |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(ii) Justifier que $\forall n \geq 1$, F_n est <u>cont</u> sur $[0, \infty[$.

$$F_n : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$ est <u>cont</u> sur $[0,\infty[$.

$$f_n : [0,\infty[\times\,]0,n] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$$

53 f_n est <u>cont</u> sur $[0,\infty[\times\,]0,n]$.

• $\left|f_n(x,t)\right| \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$

et $\int_0^n 1\,dt$ CV.

D'après le Th de continuité, on a

chaque F_n est cont sur $[0,\infty[$, $\forall n \geq 1$.

(iii) a $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$.

F_n est cont sur $[0,\infty[$.

$(F_n)_n$ CV UN vers F sur $[0,\infty[$.

$\Rightarrow$ F est cont sur $[0,\infty[$.

ep $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} F(x) = F(0)$

e) Calculer $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = F(0) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} F(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\left(-\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Transformée de Laplace

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\,dt$$

tdF is $\in \int_{-\infty}^{\infty}$!

Ex 14 soit $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ f cont

La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}f$ définie p

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\exists\, n \geq 0$ tq $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{t^n} = 0$.

a) Mq $\mathcal{L}f$ est déf & cont sr $]0, \infty[$.

soit $g :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(s,t) \longmapsto f(t)\, e^{-st}$

Donc g est continue sr $]0,\infty[\times [0,\infty[$.

* soit $a > 0$,

pr $s \in [a, \infty[$, $t \in [0, \infty[$:

$|f(t)\, e^{-ts}| \leq |f(t)|\, e^{-at}$ car $s \mapsto e^{-ts}$ ↘

De plus $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_0 > 0$ tq $\forall t \geq t_0$,

$\dfrac{|f(t)|}{t^n} \leq 1$ ie $|f(t)| \leq t^n$ & $\dfrac{t^{n+2}}{e^{at}} \leq 1$

D'où pour $t \geq t_0 \Rightarrow |f(t)|\, e^{-at} \leq t^n e^{-at} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ (CV) $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^\infty |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ (CV)

et $\displaystyle\int_0^{t_0} |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ (CV) car $t \mapsto |f(t)|\, e^{-at}$ est cont

Dc p le (TH) de cont, $\mathcal{L}f$ est bien déf & cont sr $[a, \infty[$, $\forall a > 0$.

Donc $\mathcal{L}f$ est bien déf & cont sr $]0,\infty[$.

b) Mq $\lim_{s\to\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

1er essai

$$\int_0^{A} f(t)\, e^{-st}\, dt = e^{-0\times s} \int_0^{c} f(t)\, dt$$

0 pb en 0.

2e essai

$$= \int_0^{1} f(t) e^{-st}\, dt + \int_1^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt.$$

pb

$\exists t_0, \forall t \geq t_0, \ |f(t)| \leq t^n$

Mq $$\int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

Pour $n=0$: $s>0$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-ts}\, dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t=\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - e^{-t_0 s}\right) = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \leq \frac{1}{s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

spps $$\lim_{s\to\infty} \int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt = 0$$

$u(t) = t^{n+1}$ $\quad u'(t) = t^n(n+1)$

$v'(t) = e^{-ts}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{s} e^{-ts}$

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n+1} e^{-ts}\, dt = \underbrace{-\frac{1}{s}\left[t^{n+1} e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t\to\infty}}_{\frac{1}{s} t_0^{n+1} e^{-t_0 s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{n+1}{s}}_{\xrightarrow[s\to\infty]{} 0} \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt}_{\xrightarrow[s\to\infty]{} 0}$$

$$\left|\int_0^{t_0} f(t) e^{-st}\, dt\right| \leq \sup_{t\in[0,t_0]} |f(t)| \int_0^{t_0} e^{-st}\, dt < \infty$$ car f est cont.

Fonction	Une primitive
$f+g$	$F+G$
$f' f^{\alpha}$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
f'/f	$\ln f$
$\frac{f'}{f^n}$	$-\frac{1}{(n-1) f^{n-1}}$
$f' \sin f$	$-\cos f$
$f' \cos f$	$\sin f$
$\frac{f'}{\cos^2 f} = f'(1+\tan^2 f)$	$\tan f$
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\arctan f$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

- $$\frac{1}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)} = \frac{A_1}{X-\alpha_1}+\dots+\frac{A_n}{X-\alpha_n} \Rightarrow A_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\alpha_i-\alpha_j)^{-1}$$

- $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}+\frac{p}{2\sqrt{\delta}}\right)+c \quad ; \delta = q-\frac{p^2}{4}$$

- $$\int \frac{cx+d}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+px+q\rvert - \frac{p}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}+\frac{p}{2\sqrt{\delta}}\right)\right]+C$$

- $$\frac{a_n}{Q(X)} = \frac{A_1}{X-\alpha_1}+\dots+\frac{A_r}{X-\alpha_r}+\frac{B_1X+C_1}{X^2+p_1X+q_1}+\dots+\frac{B_kX+C_k}{X^2+p_kX+q_k}$$

$$F'(x) = \int_0^\infty \sin(t)\, e^{-xt}\, dt = \int_0^\infty \operatorname{Im}(e^{it} e^{-xt})\, dt = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left(e^{t(i-x)}\right) dt = -\operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{(i-x)t}\, dt\right) = -\operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{i-x} e^{(i-x)t}\right]_0^\infty\right)$$

$$= -\operatorname{Im}\left(0 - \frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

or $\left|e^{(i-x)t}\right| = e^{-xt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-x+i} - \frac{1}{-x-i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-2i}{1+x^2}\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Ex 14 soit $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ f cont !

La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}f$ définie p

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\exists\, m \geq 0$ tq $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^m} = 0$.

a) Mq $\mathcal{L}f$ est déf & cont sr $]0, \infty[$.

soit
$$g :]0, \infty[\times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,t) \longmapsto f(t)\, e^{-st}$$

Donc g est continue sr $]0, \infty[\times [0, \infty[$.

* soit $a > 0$,

pr $s \in [a, \infty[$, $t \in [0, \infty[$:

$|f(t)\, e^{-ts}| \leq |f(t)|\, e^{-at}$ car $s \longmapsto e^{-ts} \searrow$

De plus $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_0 > 0$ tq $\forall t \geq t_0$,

$\dfrac{|f(t)|}{t^n} \leq 1$ ie $|f(t)| \leq t^n$ & $t^{n+2} e^{-at} \leq 1$

D'où pour $t \geq t_0 \Rightarrow |f(t)|\, e^{-at} \leq t^n e^{-at} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ CV

et $\displaystyle\int_0^{t_0} |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ CV car $t \mapsto |f(t)|\, e^{-at}$ est cont

Dc p le TH de cont, $\mathcal{L}f$ est bien déf & cont sr $[a, \infty[$, $\forall a > 0$.

Donc $\mathcal{L}f$ est bien déf & cont sr $]0, \infty[$.

b) Mq $\lim_{s\to\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

1° essai

$$\int_0^A f(t)\, e^{-st}\, dt = e^{-0\times s}\int_0^c f(t)\, dt$$

0 pb en 0.

2° essai

$$= \int_0^1 f(t) e^{-st}\, dt + \int_1^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

pb

$\exists\, t_0, \forall t \geq t_0,\ |f(t)| \leq t^n$

Mq $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

Pour $n=0$: $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-ts}\, dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t=\infty}$

$s>0$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - e^{-t_0 s}\right) = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \leq \frac{1}{s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

spps $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt = 0$

$u(t) = t^{n+1}$ $\quad u'(t) = t^n(n+1)$

$v'(t) = e^{-ts}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{s}e^{-ts}$

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n+1} e^{-ts}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[t^{n+1} e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t\to\infty} + \frac{n+1}{s}\int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt$$

$\frac{1}{s} t_0^{m+1} e^{-t_0 s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ $\quad$ $\frac{n+1}{s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ $\quad$ $\int_{t_0}^{\infty} t^n e^{-ts}\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

$$\left|\int_0^{t_0} f(t) e^{-st}\, dt\right| \leq \sup_{t\in[0,t_0]} |f(t)| \int_0^{t_0} e^{-st}\, dt < \infty$$ car f est cont.

55

c) Mq $\mathcal{L}f$ est dérivable sur $]0,\infty[$ & $\forall s>0$, $(\mathcal{L}f)'(s) = -\int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt$

soit $g :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(s,t) \longmapsto f(t) e^{-st}$

* g est cont sur $]0,\infty[\times [0,\infty[$ & $\forall s>0$, $\int_0^\infty g(s,t)\, dt$ CV. (car $\mathcal{L}f$ est bien déf sur $\mathbb{R}_+^*$ & cont)

* $\forall t \geq 0$, $s \longmapsto g(s,t) = f(t) e^{-st}$ est dérivable sur $]0,\infty[$ et $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = -t f(t) e^{-st}$.

Dc $\frac{\partial g}{\partial s}$ $\exists$ & est cont sur $]0,\infty[\times [0,\infty[$.

(soit un compact) soit $a>0$,

$\forall s \in [a,\infty[$, $\forall t \geq 0$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s}(s,t) \right| = |t f(t)| e^{-st} \leq \underbrace{t |f(t)| e^{-at}}_{\varphi(t)}.$$

$\rightarrow \varphi$ est cont sur $[0,\infty[$ dc (li) sur $[0,\infty[$.

Csq $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^m} = 0$, $\exists\, t_0 > 0 \,/\, t \geq t_0$,

$|f(t)| \leq t^m$.

$t \geq t_0 \Rightarrow 0 \leq \varphi(t) \leq t^{m+1} e^{-at}$

& $t^{m+1} e^{-at} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \longrightarrow \infty$ (par croissance comparée)

Or $\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV & dc $\int_{t_0}^\infty t^{m+1} e^{-at} dt$ CV

& dc $\int_{t_0}^\infty \varphi(t)\, dt$ CV.

Ex 13 Soit $f(t) = e^{-t^2}$.

a) Justifier $\hat{f}$ $\exists$ & classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

R $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt.$

(1) f cont + $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \Rightarrow \hat{f}\ \exists$ & cont.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue.
- $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $|t| \to \infty$.

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ CV

par D'alembert, CV.

$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

$z \longmapsto e^z$ est cont sur $\mathbb{C}$

R 2) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\, dt < \infty$

$\Rightarrow \hat{f}$ est C^1.

ici $t \mapsto t f(t) = t e^{-t^2}$ est cont sur $\mathbb{R}$ & $|te^{-t^2}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $|t| \to \infty$

Donc $\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ & $\hat{f}'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -it e^{-t^2} e^{-itx}\, dt.$

$= +i \int_{-\infty}^{\infty} -t e^{-t^2} e^{-itx}\, dt$

b) Mq $\hat{f}$ vérifie équa° différentielle linéaire du premier ordre que l'on résoudra.

IPP $v(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2}$ $\quad v'(t) = -t e^{-t^2}$

$u(t) = e^{-itx}$ $\quad u'(t) = -ix\, e^{-itx}$.

$\hat{f}'(x) = \frac{-i}{2}\left[e^{-t^2} e^{-itx}\right]_{-\infty}^{\infty} + i \frac{ix}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-itx}\, dt$

or $|e^{-t^2} e^{-itx}| = e^{-t^2} \longrightarrow 0$, $|t| \to \infty$.

D'où $\hat{f}'(x) = \frac{-x}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-itx}\, dt}_{\hat{f}(x)}$

$\hat{f}$ vérifie l'équaɵ différentielle suivante :

$$y'(x) + \frac{x}{2}\, y(x) = 0 \quad (E)$$

L'ensemble des soluɵs de (E) et

$$y(x) = k\, e^{-\int \frac{x}{2}\, dx} = k\, e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Donc $\exists\, k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = k\, e^{-\frac{x^2}{4}}$.

$\hat{f}(0) = k \cdot e^0 = k$

$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}$.

formule d'inverɵ.

$xF(x) - 1$?

$F(x) \underset{x\to\infty}{\sim}$! ... $\int_0^{\pi/2} \frac{t\cos t}{t+x}\,dt \geq$?

$$x\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t}\,dt - 1 = \int_0^{\pi/2} \frac{x\cos t}{x+t} - 1$$

$\varepsilon \to 0$
-1

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(x+t)\cos t}{x+t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t\cos t}{x+t}\,dt - 1$$

$$= 1 - \int_0^{\pi/2} \frac{t\cos(t)}{x+t}\,dt = -1$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \frac{t\cos(t)}{t+x}\,dt \leq 0 = g(x)$$

$$\geq -\int_0^{\pi/2} \frac{t}{t+x}\,dt \geq -\int_0^{\pi/2} \frac{t+x}{t+x} - \frac{x}{t+x}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + x\left[\ln(t+x)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + x\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \ln(x)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t\cos t}{t+x}\,dt \leq \cancel{\int_0^{\pi/2} \frac{t}{t+x}\,dt = \int_0^{\pi/2} 1 - \frac{x}{x+t}\,dt}$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} \frac{t\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right)}{t+x}\,dt = \int_0^{\pi/2} 1 - x\,\frac{1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}}{t+x}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - x\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} + \frac{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}}{t+x}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - x\left(\ln\left(1 + \frac{\pi/2}{x}\right)\right) + \int_0^{\pi/2} -\frac{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}}{t+x}\,dt$$

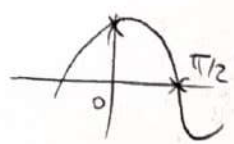
$g(x) \leq F(x) \leq g(x) + \varepsilon(x)$

$xF(x) - 1 \to 0$
$xF(x) \to 1$

$F(x) \sim \frac{1}{x}$.

2

$$\boxed{\cos(x) \leq -\frac{2}{\pi}x + 1.}$$



$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -3t^2 & t+x \\ \hline +3xt & -3t+3x \\ -3x^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} t^4 & t+x \\ \hline -xt^3 & t^3 - xt^2 + tx - x^2 \\ t^2x^2 & \\ -tx^2 & \\ +x^3 & \end{array}$$

$a = bq + r$

$\frac{a}{q} = b + \frac{r}{q}$

$$\frac{-3t^2}{t+x} = \frac{1}{t+x}(t+x)(-3t+3x) + \frac{-x^2}{t+x} \quad \underline{\text{oui}}$$

$$-\frac{\pi}{2} + x\ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) \leq xF(x) - 1 \leq 0$$

$$1 - \frac{\pi}{2} + x\ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) \leq xF(x) \leq 1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2x} + \ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{x}.$$

$e^x = 1 + t$

<u>Ex 3</u> $F(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\, dt$

$\triangle$ ~~ig~~ $\overset{\infty}{0}$. $\underline{\forall x > 0}$

a) Mq F dcf / Cont sr $[0, +\infty[$.

→ (cv) en ∞ slmt, en 0 : fausse singularité

car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{2xt\,e^{-xt^2}}{2t} = \lim\limits_{t\to 0} x e^{-xt^2} = x$

dc $\underline{\text{PPC}}$ en x.

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,dt$$

(cv) OK borner (CS) cont sr I_0 ?

Mq $|f(x,t)| \leq g(t)$

$$\left|\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\right| \leq \left|\frac{1}{t^2}\right| + \left|\frac{e^{-xt^2}}{t^2}\right| \quad \forall t \quad \leq \frac{e}{t^2} \quad \text{ic}$$

Mq $\int g(t)\,dt$ (cv) !   EdR $\int_1^\infty$ (cv).

° $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} = e^{-xt^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $e^{-xt^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt$$

$$F'(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

cd F.

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,dx\ ???$$

Ex 7 a) Mq (ig) $I = \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi-CV. Calculer la val I.. IPP !

(celle-ci CV mais ne CV pas abs.)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$dv = \sin t$ ✓ $v = -\cos t$

$du = -\frac{1}{t^2}\,du$ $u = \frac{1}{t}$

$$\cancel{I = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt}$$

$$\int u\,dv = [uv] - \int v\,du$$

$x \to \infty$

$$\cancel{I = \frac{\sin X}{X} + \int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt \leq \sin x}$$

cont sur 1 borne

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt}_{CV} + \int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^{\infty} = \frac{-\cos X}{X} + \frac{\cos(1)}{1}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \cancel{\left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^{\infty}} + \int_1^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$\leq \cancel{\frac{\sin X}{X}} - \int_1^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt \leq \frac{-\cos X}{X} + \frac{\cos(1)}{1} - \underbrace{\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt}_{CV}.$$

$\to 0$

Mq ne CV pas abs.

$$\cancel{\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{|t|}\,dt} \qquad \cancel{\frac{|\sin(\frac{1}{u})|}{|\frac{1}{u}|}}.$$

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \geq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{t}\,dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Dc l'int ne CV pas abs.

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

$$F'(x) = -\int_0^\infty \sin t \cdot e^{-xt}\, dt$$

$$F'(x) = -\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(e^{it} \cdot e^{-xt}\right) dt$$

$$= -\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(e^{t(i-x)}\right) dt$$

$$= -\operatorname{Im} \int_0^\infty e^{t(i-x)}\, dt$$

$$= -\operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{i-x} e^{t(i-x)}\right]_0^\infty \right)$$

$$= -\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right)$$

$$\frac{1}{-x+i} \cdot \frac{-x-i}{-x-i} = \frac{-x-i}{1+x^2} = \operatorname{Im} \to \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+\bar{z}}{2i}\right)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-x} - \frac{1}{-x-i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-x+i+x+i}{(i-x)(-x-i)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{-2i}{-ix+1+x^2+xi}\right) = \frac{+1}{1+x^2}$$

$$= -\cancel{\operatorname{Im}}\ \frac{+1}{1+x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

d'où $F'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,$

$$\boxed{F(x) = -\arctan(x) + k}\ ?$$

$$|F(x)| = \int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| e^{-xt}\, dt \leq \int_0^\infty e^{-xt}\, dt = -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_{t\to 0}^{t\to\infty} = \frac{1}{x}$$

$|\sin t| \leq |t|$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où $\lim_{x\to\infty} |F(x)| = 0$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + k \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow F(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

$\left|\frac{\sin t}{\cancel{t}}\right| \leq |t|$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+i} = x+i + i-x$$

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \left|\frac{\sin^2 t}{t}\right| = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$$

$$\int_1^X \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \int_1^X \frac{1-\cos(2t)}{2t}\, dt$$

$$\geq \underbrace{\int_1^X \frac{1}{2t}}_{DV} - \underbrace{\int_1^X \frac{\cos(2t)}{2t}\, dt}_{\text{raisonn}^t \text{ simil}^{\text{t}} \text{ que ds le thème i: CV}}$$

$DC \longrightarrow \infty$. dc ne CV pas de semi CV

$\forall x \geq 0 :\ F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$

a) Mq F est classe C^1 sur $]0,\infty[$ & donner $F'(x)$.

~~$\exists$~~ hypot C_3 (i) $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV ✓

(ii) ~~$\forall (x,t)$~~ $\exists$ & cont $\frac{\partial f}{\partial x}$

(iii) $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ Mq $\int_a^b g(t)\,dt$ CV C_3

1 Mq $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$ CV sur $[0,\infty[$ & $]0,\infty[$.

|cont| ✓

~~cont~~ ptt & en 0 PCC $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

$\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$

On a $\left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ⊕ positivité $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ Idr CV $\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \text{CV}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin t}{\cancel{t}} e^{-xt}$ $\exists$ & cont

fixe $a > 0$.

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\sin e^{-xt}\right| \leq \sin e^{-xt} \leq e^{-at}$

Mq $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at}\,dt$ CV & $o(\cdot)$... oui CV.

Donc F est C^1 sur $]a,\infty[$.

$F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = -\int_0^\infty \sin t\, e^{-xt}\, dt$

$\Rightarrow$ sur PPC on $]0,\infty[$.

$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$.

$F'(x) = -\int_0^\infty \sin t \cdot e^{-xt}$ ..

d) pr $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$, soit

$$F_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \, dt.$$

(i) Mq $(F_n)_n$ CV UN vers F sr $[0, \infty[$ usa 2 FF moy.

$(F_n)_n \xrightarrow{CV\ UN} F$ sn

$\sup_x |F_n - F| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad A > n$ $\quad [n, A]$

<u>2 FFm</u> $a, b \geq 0$, f, g cont $g \geq 0$, $\exists c \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx$$

$g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{t}$, $f(t) = \sin(t)$

$$\int_n^A \sin t \, \frac{e^{-xt}}{t} dt = \frac{e^{-nx}}{t} \int_n^{c_{n,A}} \sin t \, dt = \frac{e^{-nx}}{t} [-\cos t]_n^{c_{n,A}}$$

$$= \frac{e^{-nx}}{n} \left(\cos(n) - \cos(c_{n,A}) \right).$$

or $\left| \int_n^A \sin t \, \frac{e^{-xt}}{t} dt \right| \leq 2 \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Dc on a bien F_n CV UN F.

(ii) Jsf $\forall n \geq 1$, F_n cont sr $[0, \infty[$.

$f_n : [0, \infty[\times]0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$

f_n cont sr $[0, \infty[\times]0, n]$.

$|f_n(x,t)| \leq \left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$

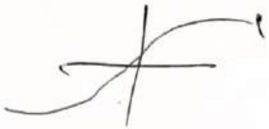
or $\int_0^n 1 \, dt$ CV dc d'après TH cont, F_n cont sr $[0, \infty[$.

(iii) ets $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$

F_n cont $[0, \infty[$ & F_n CV UN sr $[0, \infty[$ $\Rightarrow F$ cont $[0, \infty[$

ainsi $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$

e) calcul $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.



$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = \lim_{x\to 0} \left(-\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

IE $du = 1+u^2\, dt \Rightarrow dt = \frac{1}{1+u^2}\, du$

$$\frac{u^2}{1+u^2} = \sin^2(t).$$

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{x^2+\frac{u^2}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{2x}{x^2(1+u^2)+u^2}\, du = \int_0^\infty \frac{2x}{x^2+(1+x^2)u^2}$$

$$= \frac{2x}{x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{1+x^2}{x^2}u^2}\, du$$

Posons $v = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, u$

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dv$$

$$F'(x) = \frac{2}{x}\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\, dv = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\left[\arctan(v)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$G(x) = \pi\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$du \times \frac{1}{u}$

$$du \times \frac{1}{u} = \frac{\pi}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$F(x) - \pi\ln(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2+\sin^2(t))\,dt - \frac{\pi}{2}\ln(x^2)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\ln(x^2+\sin^2(t)) - \ln(x^2)\right)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{x^2+\sin^2(t)}{x^2}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\left(1+\frac{\sin^2(t)}{x^2}\right)dt$$

$\forall x > 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\ln t \leq t$.

$0 \leq \ln\left(1 + \frac{\sin^2(t)}{x^2}\right) \leq \frac{\sin^2(t)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$0 \leq \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + \frac{\sin^2(t)}{x^2}\right) dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{x^2} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{x^2}$

$0 \leq F(x) - \pi \ln(x) \leq \frac{\pi}{2x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$F(x) = \pi \ln(x)$.

$F(x) - \pi\ln(x) = G(x) + A - \pi \ln(x)$

$= \pi \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \pi \ln(x) + A$

$= \pi \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right) + A$

$= \pi \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) + A$

$= \pi \ln\left(1 + \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}\right) + A$

$= \pi \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + A$

$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2)$

$\lim_{x\to\infty} (F(x) - \pi\ln(x)) = \pi\ln(2) + A$.

$\pi \ln(2) + A = 0 \Rightarrow A = -\pi\ln(2)$.

$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \pi \ln(2)$

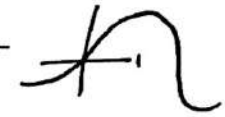
$F(x) = \pi \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{2}\right)$, $x > 0$

Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2021-2022
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Samedi 13 novembre
Durée : 2 heures



$\cos(u) \to -u'\sin(u)$
$: -\sin(t).\sin(x\sin(t))$
$-\sin$

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

→ c) En déduire que F est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

d) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$\cos(u) \sim 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$

$$\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}.$$

Indication : on pourra soit utiliser une formule de Taylor soit étudier la fonction $\varphi(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \cos(u)$ en étudiant ses variations sur $[0, +\infty[$.

→ e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,dt = \quad F(x) \leq \pi \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right).$$

Indication : on utilisera sans démonstration les formules suivantes :

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \quad \textit{et} \quad \sin^4(t) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)).$$

f) En utilisant c) et e), en déduire que l'équation

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\, dt = 0$$

a une unique solution $x \in [0, \pi]$.
Indication : on pourra montrer que $F(2\sqrt{2}) \leq 0$ et remarquer que $2\sqrt{2} \leq \pi$.

équivlt? a?

Exercice 2. Pour $0 < x < 1$, on pose

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt.$$

a) Montrer que H est bien définie sur $]0, 1[$.

T.S.V.P.

$H(x) = \int_0^{\infty} (1-e^{-t}) t^{x-2}\, dt$ $\int_0^1 t^{x-2} \int_1^{\infty}$ CV.

$x \in]0,1[$

$[-a,a]$!

$[a,b]$?

$0<a<b<\infty$.

b) Montrer que H est de classe C^1 sur $]0,1[$ et pour $0 < x < 1$, exprimer $H'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Indication : on pourra utiliser (sans les démontrer) les résultats de convergence suivants sur les intégrales de Bertrand :

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}\, dt \text{ converge } \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1);$$

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}\, dt \text{ converge } \iff (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1);$$

c) Fixons $\alpha > 0$.

(i) Montrer que pour tout $0 < x < 1$, on a

$$0 \le \int_0^{\alpha} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \le \frac{\alpha^x}{x}.$$

Indication : on pourra utiliser (sans la démontrer) l'inégalité suivante : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-u} \le u$.

$\int t^n = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^2$

$= \frac{2^x}{x}$.

(ii) Montrer que pour tout $0 < x < 1$, on a

$$\left(1 - e^{-\alpha}\right) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \le \int_{\alpha}^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \le \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $\alpha > 0$ et tout $0 < x < 1$, on a

$$\left(1 - e^{-\alpha}\right) \alpha^{x-1} \le (1-x)H(x) \le \frac{\alpha^x}{x}(1-x) + \alpha^{x-1}. \qquad (1)$$

e) Conclure que lorsque $x \to 1^-$, $H(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{1-x}$.

Indication : on pourra utiliser :

- l'inégalité de gauche dans (1) *pour minorer* $\liminf_{x\to 1^-}(1-x)H(x)$

- et l'inégalité de droite dans (1) *pour majorer* $\limsup_{x\to 1^-}(1-x)H(x)$.

$]0,\infty[$.

$\int_a^b f(x,t)\, dt$ CV !

f cont

$\exists g$ cont.

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le g(t)$

$\int_a^b g(t)\, dt$ CV

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^n)$

$t^2 t^{x-2} \to t^{x+2}$

t^x.

$x-2 \ge 2$

$x \ge 4$.

CV

$x-2 \ge 2$

$\int_1^{\infty} t^{x-2}\, dt$

$\frac{t^{x-\frac{1}{2}}}{t^2}$

→ f. cont

→ $|f(x,t)| \le g(t)$

→ $\int_a^b g(t)\, dt$ CV

$t^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{t^{3/2}}$

$\lim_{x\to}$

D'où $\hat{f}'(x) = \frac{-x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-itx} \, dt$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\hat{f}(x)}$

$\hat{f}$ vérifie l'équaᵒ différentielle suivante :

$$y'(x) + \frac{x}{2} y(x) = 0 \quad (E)$$

L'ensemble des soluᵒˢ de (E) et

$$y(x) = k e^{-\int \frac{x}{2} dx} = k e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Donc $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = k e^{-\frac{x^2}{4}}$.

$\hat{f}(0) = k . e^0 = k$

$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{x^2}{4}}$.

si $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} \arctan(x)$, $x \in [0, \pi]$.

$f \in C^1$ sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$ (par parité) $\Rightarrow f$ cont en 0

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \frac{\ln(\pi+1)}{\pi^2+1} \arctan(\pi)$ | Par périodicité : $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} f(x)$

(58)

formule d'inversᵒ.

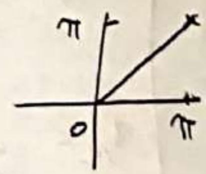
TD. 4. Séries de Fourier

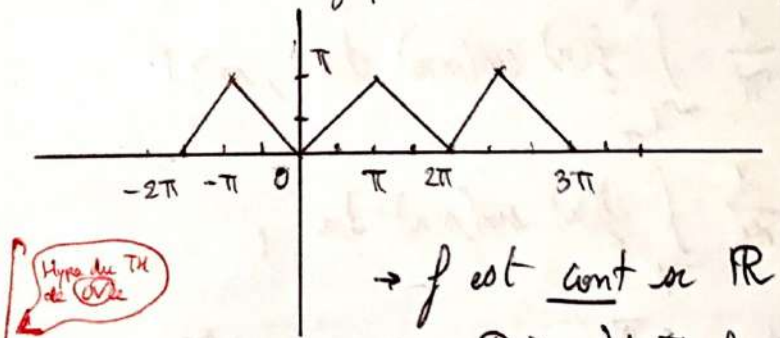
Ex 1 soit f paire, 2π-périodiq & déf p $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$

a) Détermina série de Fourier de f.

(ie calculer les coeffs de Fourier)

conseil : tracer la graphe f (cont, C¹ ? cvl ???)





→ f est cont sur $\mathbb{R}$ & dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et

Hypo du Th de CVce

f' admet des limites à droite & à gauche aux points $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ & f est de C^1 p mcx sur $\mathbb{R}$.

Aparté $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x - 2\pi) = \lim_{v \to -\pi^+} f(v) = \lim_{v \to -\pi^+} f(-v) = \lim_{u \to \pi^-} f(u)$

$u = -v \to \pi$, $v > -\pi$, $u = -v$ cf

f cont en π.

→ dérivée : $f'(x)$ sur $]0, \pi[$ p regarder limites à gauche & à droite

* f cont sur $\mathbb{R}$
* f C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Calcul des coeff de Fourier de f

À connaître

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad , n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{\text{paire}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

---

f paire $\Rightarrow b_n = 0 \ , \forall n \geq 1.$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$u = x \qquad du = 1$

$dv = \cos(nx) \qquad v = \frac{1}{n}\sin(nx).$

Par FF IPP, on obtient :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$a_n = 0 - \frac{2}{\pi n}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

b) Étudier cv série de Fourier.
(Féjer , Th Dirichlet, vers° améliorée Th Dirichlet).

f cont sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Dc d'après Th cours, on sait que série de Fourier de f.

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx),$$ cv normalt vers f sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$. /// Dirichlet.

Calcul des séries suivantes : (? (CV) ou Id Parseval)

Dirichlet $1/n^2$; $1/n^4$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = ?$

$Sf(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos(nx)$

$Sf(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$

Pr $x=0$, $\underset{\overset{\parallel}{0}}{Sf(0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

D'où $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}}$

• $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (car $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ ok séparation linéarité)

D'où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}}$

Comme f est $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$,

on pt appliquer la (FF) de Parseval

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) + |a_0|^2}$$

$\parallel$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$, $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n < 0 \end{cases}$

$= \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$

$= \sum_{n=-\infty} \frac{1}{4}(|a_{-n}|^2 + |b_{-n}|^2) + |a_0|^2 \sum_{n=1} \frac{1}{4}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n^2| + |b_n|^2) + a_0^2$

FF $\Rightarrow \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k+1}|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt$

f est paire $= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}$

d'où $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{\pi^2}{3}$.

$$\rightarrow \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = ?$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\cancel{16}\,\pi^4}{15\times\cancel{96}\times 6}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

⇝ f zeta de Riemann : ⇝ lié à nbr premier.

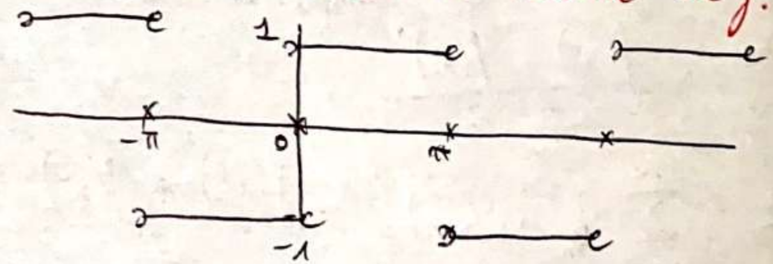
$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}, \quad s>1.$$

$\zeta(3)$ irrationnel. $\zeta(5) = ???$

Ex 2 soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π périodiq

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

a) Déterminer série de Fourier de f.



On Rq f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

- f est $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et est cont sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\}$.
- De +, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\}$.

Donc f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$a_0 = 0$, $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \forall n \geq 1,$$

par parité imp x paire = paire

$$b_n = \frac{1}{\pi}\times 2\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right).$$

b) Etudier CV de cette série de Fourier.

f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dc d'après le Th de Dirichlet, on sait que la SDF CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

ie $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\}.$$

c) Ecrire l'identité de Parseval pr cette série de Fourier.

f est cont par morcx sur $\mathbb{R}$ & 2π périodiq.
On pt appliquer Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 + |a_0|^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{\pi n}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)$$

Dt, $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi n}$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,dt$$

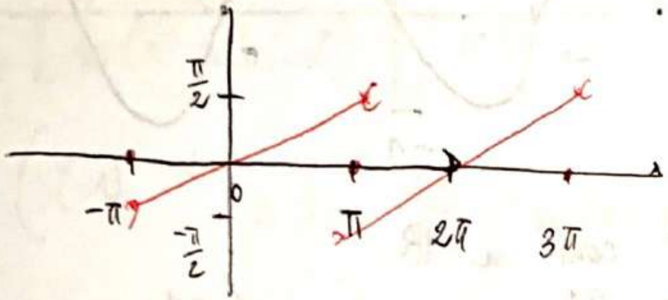
$= 1$ (car $|f|^2$ paire)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2\times\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$$

$f \times \sin$ (impaire × paire) = paire.

Ex3 Reprendre ex 1, 2 4 f périodiqs 2π périodiq

(4) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in \,]-\pi, \pi[\\ 0 & , \; x = \pi \end{cases}$



× $C_1 \wedge \mathbb{R}$
× C_M
× périodicité
× ℓd / ℓg
× C_1 p morc

- g est cont par morcx, 2π-périodiq sur $\mathbb{R}$
- g est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \text{ impair de } \mathbb{Z}\}$.
- D+, g & g' ont des limites à droite & à gauche aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, k impair.

Donc g est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D+, g est impaire.

Calcul des coeff de Fourier

g impaire $\Rightarrow a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$n \geq 1$,

$u = x \qquad du = 1$

$dv = \sin(nx) \qquad v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

D'où $b_n = -\frac{1}{2\pi n}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \cancel{\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx} = 0$

$$= -\frac{1}{\pi n}\pi\cos(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

→ La série de Fourier de g est :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)}$$

CVce de la SdF

Comme g est C^1 par morceaux, de d'après le Th de Dirichlet, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$ CV simplement sur $\mathbb{R}$ &

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = \frac{g(x^+)+g(x^-)}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{x}{2},\ \forall x \in \,]-\pi,\pi[$$

Applicat° de Parseval :

g est $\underline{\text{cont}}$ $\mathcal{C}$ mcx, 2π-périodiq,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx$$

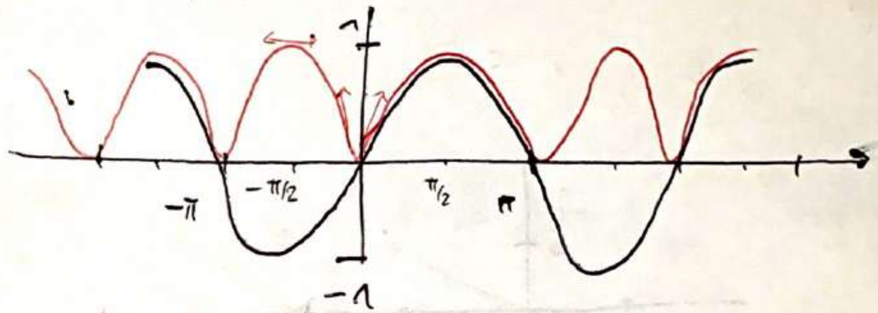
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{6\pi}\left[x^3\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{6\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

→ si f est $\underline{\text{cont}}$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiq.
$\forall n \geq 0$, $a_n = b_n = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

b) $h(x) = |\sin(x)|$ pr $x \in [-\pi, \pi[$.

h 2π périodiq



- h est cont sur $\mathbb{R}$.
- h est C^1 par morceaux (C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ & en chacun des points, h' admet une limite à droite & à gauche).
- h est paire

Calcul des coeff de Fourier de h

- h est paire $\Rightarrow b_n = 0$, $\forall n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\,dx \overset{h \text{ paire}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}.$$

Pr $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx)\, dx$

$u = \cos(nx) \qquad du = -n \sin(nx)$

$dv = \sin(x) \qquad v = -\cos(x).$

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left[\cos(x) \cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx)\, dx$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left((-1)^{n+1} - 1\right) - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx)\, dx$$

$u = \sin(nx) \qquad du = n \cos(nx)$

$dv = \cos(x) \qquad v = \sin(x).$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left((-1)^n + 1\right) - \frac{2n}{\pi} \underbrace{\left[\sin x \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0}$$
$$+ \underbrace{\frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx)\, dx}_{= a_n}$$

$$(1-n^2)\, a_n = \frac{2}{\pi} \left((-1)^n + 1\right)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(x)\, dx$$

$2 \sin x \cos(x) = \sin(2x)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2\pi} \left[\cos(2x)\right]_0^{\pi} = 0$$

→ h cont, C^1 par morceaux, la série de Fourier CV normalement sur $\mathbb{R}$ vers h.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{((-1)^n + 1)}{(1-n^2)} \cos(nx)$$

→ ici termes impairs st nuls.

$$h(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kx)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$(n = 2k)$

FF de Parseval.

Pr $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx$

$u = \cos(nx)$ $\quad du = -n\sin(nx)$

$dv = \sin(x)$ $\quad v = -\cos(x).$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\Big[\cos(x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi} - \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right) - \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx$$

$u = \sin(nx)$ $\quad du = n\cos(nx)$

$dv = \cos(x)$ $\quad v = \sin(x).$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left((-1)^n + 1\right) - \frac{2n}{\pi}\underbrace{\Big[\sin x\,\sin(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\frac{2n^2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx}_{=a_n}$$

$$(1-n^2)\,a_n = \frac{2}{\pi}\left((-1)^n + 1\right)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n + 1}{1-n^2}}$$

$\sin(a-b) = \sin(a) + \sin(b)$

$\sin(x)\cos(nx)$

65

J.

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(x)\,dx$$

$2\sin x\cos(x) = \sin(2x)$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\pi} = 0$$

⇒ h cont, C^1 par morceaux, la série de Fourier CV normalement sur $\mathbb{R}$ vers h.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{((-1)^n+1)}{(1-n^2)}\cos(nx)$$

→ ici termes impaires st nuls.

$$h(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$(n = 2k)$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{si } n \text{ pair},\ n \geq 2 \\ \pi/2 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

FF de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4k^2)^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx \quad \text{or } \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

D'où $\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2(\pi^2-8)}{16\pi^2}$$

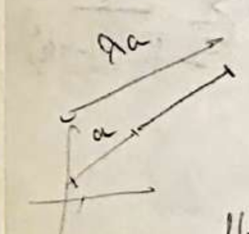
$$= \frac{\pi^2-8}{16}$$

Brouille

$[a, b]$ $\xleftrightarrow{\text{lngr } t}$

→ si $f(a) = f(b)$

on pt tjrs plge f en 1 f t-périodiq sr $\mathbb{R}$.



$f\left(\frac{x}{\pi}+\pi\right) = f\left(\cdot\frac{\pi}{\pi}\right)^{\in\mathbb{R}}$ $\quad f(k+\pi) = f(k)$.

$\sin(x) \to 2\pi$

$\sin(3\pi x) : \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

Ex 6 : soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

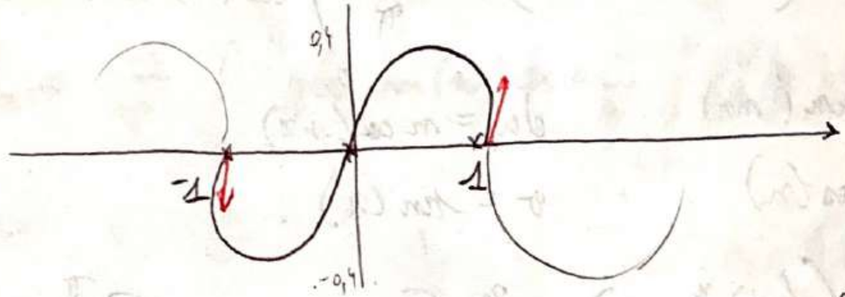
$x \longmapsto x(1-x^2)$

a) Mq $\exists$ suite de réels $(b_n)_{n\geq 1}$ tq $\forall x \in [-1, 1]$,

on a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$.

→ f est impaire

→ f est C^∞ sur $[-1, 1]$.



Comme $f(-1) = f(1) = 0$, on pt prolonger f en une f 2 périodiq sr $\mathbb{R}$.

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

⇝ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(\alpha x)$.

On cherche α tq $g(x+2\pi) = g(x)$

$2\pi\alpha = 2$, $\alpha = \frac{1}{\pi}$ $\quad f(\alpha x + 2\pi\alpha) = f(\alpha x)$.

On déf : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ On obtient alors une f g 2π-périodq.

66 $\quad x \longmapsto f\left(\frac{x}{\pi}\right)$

- f est cont sur $\mathbb{R}$ (cont sur $[-1,1]$ & $f(1)=f(-1)$).

Pr $x \in [-1,1]$, $f(x) = x(1-x^2)$

$\underline{x<1}$ $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x(1-x^2)}{x-1} = \dfrac{x(1-x)(1+x)}{x-1}$

$= \dfrac{x(1+x)}{-1}$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[x \to 1, <]{} -2$

$\underline{x>-1}$ $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x(1-x^2)}{x+1} = x(1-x)$

$\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} \xrightarrow[x \to -1, >]{} -2$

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

De g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

→ f est impaire & de g est aussi impaire.

$\left(g(-x) = f\left(\frac{-x}{\pi}\right) = -f\left(\frac{x}{\pi}\right) = -g(x)\right)$

$\Rightarrow$ le (Th) de Dirichlet,

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

$f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$

b) calcul coeff $(b_n)_{n \geq 1}$.

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right) \sin(nx)\,dx$

Posons $u = \frac{x}{\pi}$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\pi} \iff dx = \pi\,du$.

$b_n = \frac{1}{\pi} \times \pi \int_{-1}^{1} f(u) \sin(n\pi u)\,du$

$$\boxed{b_n = \int_{-1}^{1} f(u) \sin(n\pi u)\,du}$$

$b_n = \int_{-1}^{1} u(1-u^2) \sin(n\pi u)\,du$ $\quad$ impaire x impaire = pair

$\overset{\text{parité}}{=} 2 \int_{0}^{1} u(1-u^2) \sin(n\pi u)\,du$

$$= 2\int_0^1 u(1-u^2)\sin(n\pi u)\,du$$

$$= 2\int_0^1 (u-u^3)\sin(n\pi u)\,du$$

$$u-u^3 \rightsquigarrow 1-3u^2$$

$$-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi u) \rightsquigarrow \sin(n\pi u).$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\underbrace{\cancel{\Big[(u-u^3)\cos(n\pi u)\Big]_0^1}}_{=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-3u^2)\cos(n\pi u)\,du$$

$$1-3u^2 \rightsquigarrow -6u$$

$$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi u) \rightsquigarrow \cos(n\pi u)$$

$$b_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[(1-3u^2)\sin(\pi n u)\Big]_0^1 + \frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1 u\sin(n\pi u)\,du$$

$$u \rightsquigarrow 1$$

$$-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi u) \rightsquigarrow \sin(n\pi u)$$

$$b_n = \frac{-12}{n^3\pi^3}\Big[u\cos(n\pi u)\Big]_0^1 + \frac{12}{n^3\pi^3}\int_0^1 \cos(n\pi u)\,du$$

$$b_n = \frac{-12}{n^3\pi^3}(-1)^n + \underbrace{\cancel{\frac{12}{n^4\pi^4}\Big[\sin(\pi u n)\Big]_0^1}}_{=0}$$

$$\boxed{b_n = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}}$$

c) ed valeurs de $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

M Dini $\sum^{\infty} b_n\sin(nx)$, qq vt x, $\sin(nx)$ ⇒ aucun espoir $\frac{1}{n^4}$.

<u>Dirichlet</u> $\frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx) = g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

<u>Parseval</u> : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{12^2}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

<u>idée</u> : <u>intégrer.</u>

On applique le Th de Dirichlet (g est C^1 sur $\mathbb{R}$).

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx).$$

On intègre cette relat° sur $[0,\pi]$.

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{12}{\pi^3}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx)\,dx$$

Or $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{n^3}$

et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. CV

Donc $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx)$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^4}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi}.$$

$$= \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^4}\left((-1)^n - 1\right)$$

Or $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -2 & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{12}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+3}(-2)}{(2k+1)^4}$$

$\underline{n=2k+1}$
$$= \frac{24}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Puis $\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right)dx \underset{u=\frac{x}{\pi}}{=} \pi\int_0^1 f(u)\,du = \pi\int_0^1 u(1-u^2)\,du$

$$= \pi\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

D'où $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi}{4}\times\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^4}{96}$

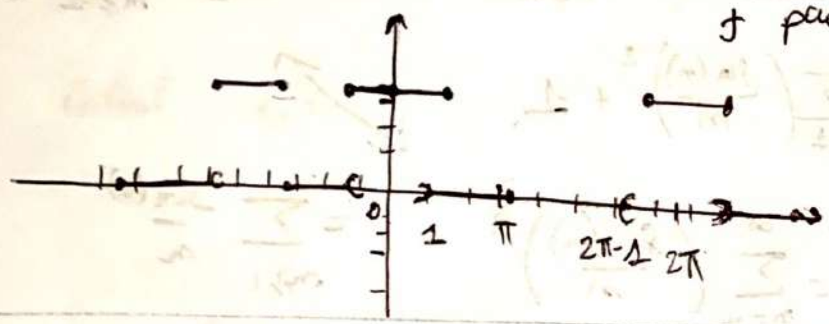
Ex 7 ~~soit~~ g f 2π périodiq, paire ~~$g(x)=\pi$~~

$$g(x)=\begin{cases}\pi & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{si } 1< x\leq \pi\end{cases}$$

a) Déterminer SdF de g & discuter sa CV.

b) Mq $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$.

f paire



- g cont p mcx, 2π périodiq sr $\mathbb{R}$, paire.
- g est C^1 sr $\mathbb{R}\setminus\{k(2\pi+1),$ k impair ds $\mathbb{Z}\}$
- D+, g & g' ont des limites à droite / & à gauche aux points $k(2\pi+1)$, k impair ds $\mathbb{Z}$.

De g est C^1 p mcx sr $\mathbb{R}$.

→ ~~comme g est~~

si g paire $b_n=0$

Calcul des coefficients de Fourier

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx\\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(nx)\,dx, \quad n\geq 1.\\ b_n=0\end{cases}$$

- $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx \overset{g\text{ paire}}{=} \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^1\pi\,dx+\int_1^{\pi}0.\,dx$

$\underline{a_0=1}$.

- $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(nx)\,dx \overset{g\text{ paire}}{=}\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\cos(nx)\,dx$

$=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1\pi\cos(nx)\,dx+\int_1^{\pi}0\,dx=2\int_0^1\cos(nx)\,dx$

$=2\times\left[\dfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=1}=\dfrac{2}{n}\sin(n)$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=1\\ a_n=\dfrac{2}{n}\sin(n)\\ b_n=0.\end{cases}$$

$\boxed{\text{SdF}}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n\cos(nx)+a_0=2\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)\cos(nx)}{n}+1$

Prep 1

Discuter de sa CV

Comme g est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

De d'après Th de Dirichlet, on sait

SdF CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

ie $1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k(2\pi+1), k \text{ impair de } \mathbb{Z}\}$

3) Mq $\sum^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$

Égalité de Parseval $\to f$ cont p morx, 2π périod,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2+|b_n|^2)\right)+|a_0|^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}\cos^2(nx)\right)+1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}\cos^2(nx)+1$$

$\boxed{\text{SdF} = 1+2\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\pi - 1 = 2\sum_{n=1}^{} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2 \cos^2(nx)$

Pour $x=0$, $\boxed{\pi - 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2}$

On a $\text{SdF}(x) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}\cos(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{SdF}(0) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi-1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$

$\pi = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2 + 1$

$\frac{\pi-1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2 \quad = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$

Prep 2

Ex 8 soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$f_\alpha(t) = \cos(\alpha t) \quad \forall t \in]-\pi, \pi]$

f 2π-périodiq sur $\mathbb{R}$

a) Calculer SdF f_α, ed

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\cot a n t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$

Calcul $a_0 =$

$$a_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(t) \cos(nt)\, dt$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt)\, dt$$

$\boxed{M1}$ 2 IPP.

$\boxed{M2}$ $\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) = \cos a \cos b$

car $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{4}\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right)$

$\cos(a)\cos b) = \frac{1}{4}\left(2\cos(a+b) + 2\cos(a-b)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

Dc $a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)\, dt$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi}$ Rq $\alpha \neq n$, $\alpha \neq -n$ car $\alpha \in \mathbb{Z}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right]$

$\sin((\alpha-n)\pi \overset{\text{sin : }2\pi\text{-périodiq}}{=} \sin((\alpha-n)\pi + 2n\pi) = \sin((\alpha+n)\pi)$

$a_n = \frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) = \frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\pi} \frac{\alpha-n+\alpha+n}{\alpha^2-n^2}$

or $\sin((\alpha+n)\pi) = \sin(\alpha\pi + n\pi)$

$= \begin{cases} \sin(\alpha\pi), & n \text{ pair} \\ -\sin(\alpha\pi), & n \text{ impaire} \end{cases} = (-1)^n \sin(\alpha\pi)$

col $a_n = \dfrac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$, $n \geq 1$

$b_n = 0$ car $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ est paire.

La SdF de f_α est

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx).$$

(on a besoin CM & T-périodicité pr calculer coeff de SdF)

→ cd $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, ← oui

(*) $\cot(t) = \dfrac{1}{\tan(t)} = \dfrac{1}{t} + 2t \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$

Réflexe 1 : appliquer Th Dirichlet cd formel ⇏ égalité ponctuelle.

→ f_α est C^∞ sur $]-\pi, \pi[$.

→ Pr $x \in]-\pi, \pi]$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x) \xrightarrow[x \to \pi^<]{} \cos(\alpha\pi)$

si $x \in]\pi, 3\pi]$, $f_\alpha(x) = f_\alpha(x - 2\pi)$

$= \cos(\alpha(x - 2\pi)) \xrightarrow[]{x \overset{>}{\to} \pi} \cos(-\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi)$

par périodicité

fermé

ouvert

$x - 2\pi \in]-\pi, \pi]$. x_0 $-\delta$ δ

71

⇒ m̂ valeurs de cont en π.

→ Donc f_α est cont en π & de finalement f est cont sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f'_\alpha(x) = -\alpha \sin(\alpha x)$

$f'_\alpha(x) \xrightarrow[x \to \pi^<]{} -\alpha \sin(\alpha\pi)$.

Pour $x \in]\pi, 3\pi]$, $f'_\alpha(x) = f'_\alpha(x - 2\pi)$

$= -\alpha \sin(\alpha(x - 2\pi)) \xrightarrow[x \to \pi^>]{} \alpha \cdot \sin(\alpha\pi)$

Donc f_α est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'après le Th de Dirichlet :

$f_\alpha(t) = Sf_\alpha(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$f_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{\alpha^2 - n^2}$$

$\Rightarrow \forall x \in]-\pi,\pi]$,

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}$$

Pour $t=\alpha x$ dans $(*)$, posons $x=\pi$;

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\boxed{\overset{\cos(n\pi)}{\overset{\shortparallel}{(-1)^n}}}}{\alpha^2-n^2}$$

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$$

comme $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\sin(\alpha\pi)\neq 0$ & dc

$$\underbrace{\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)}}_{\cot(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$$

, posons $t=\alpha\pi, \in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$,

$$\Rightarrow \cot(t) = \frac{1}{t} + \frac{2\times\frac{t}{\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{t^2}{\pi^2}-n^2}$$

$$\cot(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}$$

b) Fixons $x\in]0,\pi[$ & soit $f:[0,x]\to\mathbb{R}$

déf $f(t)=\begin{cases}\cot(t)-\frac{1}{t} & \text{si } 0<t\leq x\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}$

Vérifier f est cont sur $[0,x]$ & mq

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$\rightarrow$ f est cont sur $]0,x]$ car $t\neq 0$ & $\sin(t)\neq 0$

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}-\frac{1}{t} & , 0<t\leq x\\ 0 & , t=0.\end{cases}$$

$\boxed{M1}$

$$f(t) = \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t\sin(t)}$$ puis hôpital....

$\boxed{M2}$ DL

$$f(t) = \frac{t\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)}{t\left(t+o(t^2)\right)}$$

$$= \frac{t-\frac{t^3}{3}-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^2+o(t^3)}$$

$$f(t) = \frac{\cancel{t} - \frac{t^3}{3} - \cancel{t} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

D'où on peut écrire l'intégrale :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\cotan(t) - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \int_0^x \left(2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{t^2 - n^2\pi^2}\right) dt \quad \text{d'après a).}$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\, dt$$

on vt CVU / CVnormal
p inverser symboles.

$$\sup_{t\in[0,x]} \frac{|2t|}{|t^2 - n^2\pi^2|} \leq \frac{2x}{n^2\pi^2 - \pi^2}$$

← ici majoration

← ici minoration

$n \neq 1$

car $t^2 \leq \pi^2 \leq n^2\pi^2$

$$\Rightarrow |t^2 - n^2\pi^2| = n^2\pi^2 - t^2 \geq n^2\pi^2 - \pi^2$$

De plus, $\frac{2x}{n^2\pi^2 - \pi^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

& $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV Dc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ CV normalement $\underset{}{}$ sur $[0,x]$

D'où $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\, dt$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(t^2 - n^2\pi^2)\right]_0^{\pi}$$

$$f(t) = \frac{\cancel{t} - \frac{t^3}{3} - \cancel{t} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

D'où on peut écrire l'intégrale :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\cotan(t) - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \int_0^x \left(2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}\right) dt \quad \text{d'après a).}$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\, dt$$

on vt CVU / CVnormal
pr inverser symboles.

← ici majoré

$$\sup_{t\in[0,x]} \frac{|2t|}{|t^2 - n^2\pi^2|} \leq \frac{2x}{n^2\pi^2 - \pi^2}$$

← ici minoré

$n \neq 1$

car $t^2 \leq \pi^2 \leq n^2\pi^2$

$$\Rightarrow |t^2 - n^2\pi^2| = n^2\pi^2 - t^2 \geqslant n^2\pi^2 - \pi^2$$

De plus, $\displaystyle \frac{2x}{n^2\pi^2 - \pi^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

& $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV. Dc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ CV normalement s[ur] $[0,x]$

D'où $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\, dt$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log |t^2 - n^2\pi^2|\right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left|\frac{x^2 - n^2\pi^2}{n^2\pi^2}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$x \in \left]0,\pi\right[$

$0 < x < \pi$

$0 < \frac{x}{\pi} < 1$

$0 < \frac{x}{n\pi} < \frac{1}{n} < 1.$

$0 < \frac{x^2}{n^2\pi^2} < 1.$

c) ed $\forall t \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin(t) = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

$x \in]0,\pi]$ $$= t. \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \ln\left[\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right]$$

$$\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right)\right)$$

(car $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ par continuité de exp, on a $\exp(u_n) \to \exp(a)$)

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\operatorname{cotan}(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \Big[\ln|\sin t| - \ln(t)\Big]_0^x = \Big[\ln(\sin(t)) - \ln(t)\Big]_0^x$$ pr $x \in]0,\pi[$

$$= \left[\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)\right]_0^x = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

$\forall x \in]0,\pi[$, $\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

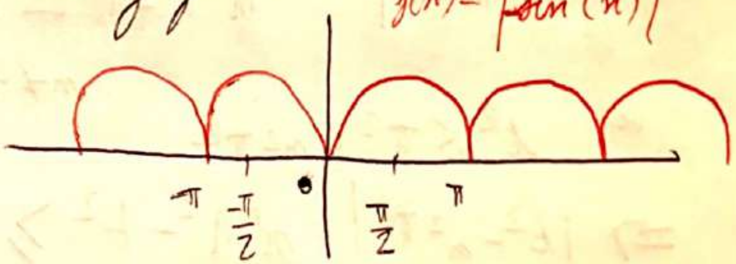
↳ FF vraie aussi en 0.

Par imparité, elle est valable sur $]-\pi, 0]$.

Ex 11 a) $\exists$-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ tq $\forall x \in [0,\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$

Si j'arrive à construire une f, f 2π-périodiq, paire, cont & C^1 p morcx tq $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0,\pi]$, c'est gagné !

$f(x) = |\sin(x)|$



 cont C^1 p morx paire

Comme f est paire, la SdF de f est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$.

Comme f est cont & C^1 p morceaux,

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

et $\forall x \in [0,\pi]$; $\sin(x) = \sum a_n \cdot \cos(nx)$

La parité n'a de sens que pr des intervalles centrés en 0.

b) $\exists$-t-il suite réelle $(b_n)_{n\geq 0}$ tq
$\forall x \in]0,\pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$?

Impossible l'égalité ne peut pas ê vraie en $x=0$ car $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin(n 0) = 0$. et $\cos(0) = 1$.

c) $\exists$-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\geq 0}$ tq
$\forall x \in [0,2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \cos(nx)$?

si $(c_n)_n$ $\exists$, on a par 2π-périodicité :

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Or sin est impaire sur $\mathbb{R}$ & la série est paire.

Ex 12 a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la SdF d'une f cont p morceaux 2π-périodiq ?

ie, $\exists ?\ f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \geq 1 \\ a_n(f) = 0, & n \geq 0. \end{cases}$?

Or $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DV & dc p le Th de Parseval, ce q contredit le Th.

b) (SP) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle SdF d'une f C^1 p morceaux & 2π-périodiq.

S'il existait une telle fonction, par le théorème de Dirichlet, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ convergerait simplement sur $\mathbb{R}$

ce q n'est pas vrai pour $x=0$.

Ex 9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ déf p $f(t) = e^{e^{it}}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Justifier f est égale à la somme de sa série de Fourier.

- f est cont, C^1 sur $\mathbb{R}$.
- f est 2π-périodiq

car $f(t+2\pi) = e^{e^{i(t+2\pi)}} = e^{e^{it+2i\pi}} = e^{e^{it}e^{2i\pi}} = e^{e^{it}}$

Par le (Th) de Dirichlet,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

b) Mq $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k!}$

$\rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\underline{RDC = \infty}$

Pour $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$,

On obtient $e^{e^{it}} = f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$

c) ed coeff de Fourier c_n de f pr $n \in \mathbb{Z}$.

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} = \alpha_n$$

~~$\forall t \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n - c_n) e^{int} = 0.$~~

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i(k-n)t}}{k!} dt$$

$f(t)$ (cv) normale

(TB) $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi k!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt$

si $n \geq 0$: $c_n = \frac{1}{n!}$

si $n < 0$: $\Rightarrow c_n = 0$ (car $k-n > 0$).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t) = e^{e^{it}} = e^{\cos(t)} e^{i\sin(t)}$

On a vu que : ⊗ $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$.

(CV normale) ⊗ $c_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$.

d) Mq $\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

f est cont & 2π-périodiq. Donc d'après TH de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)} dt$$

Ex B (Equaθs diff & SdF)

On considère l'équaθ diff :

$$(E) \quad y''(t) - y(t) e^{it} = 0.$$

a) (i) Mq $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$ CV $\forall t \in \mathbb{R}$ & que sa somme f est 2π-périodiq.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int} \right| = \frac{1}{(n!)^2} \underset{n \geq 2}{\leq} \frac{1}{n^2},$$ comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV

Donc $\sum_n \frac{(-1)^n e^{int}}{(n!)^2}$ CV normalement.

On définit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t+2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \underbrace{e^{in(t+2\pi)}}_{e^{int} e^{in2\pi} = e^{int}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} e^{int} = f(t)$$

(ii) Mq f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ & que f est solu° de l'équa° diff (E).

On doit mq :

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} e^{int}$ CV simplement

(ii) si $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n!^2} e^{int}$ alors u_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\sum_n u_n'$ & $\sum_n u_n''$ CV uniformément sur $\mathbb{R}$

Alors

(i), (ii) + (iii) $\Rightarrow f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

& $f''(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n''(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

(i) ✓

(ii) u_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ &

$$u_n'(t) = \frac{in(-1)^n}{n!^2} e^{int}$$

$$u_n''(t) = -\frac{n^2(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n'(t)| = \frac{n}{n!^2} = \frac{n}{n^2(n-1)!^2} = \frac{1}{n(n-1)!^2}$

$$\frac{1}{n(n-1)!^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\Rightarrow \sum_n u_n'$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

- $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n''(t)| = \frac{n^2}{(n!)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2} \Rightarrow \sum_n u_n''$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

Mq f est solu° de (E) :

$\forall t \in \mathbb{R}, \ f''(t) - e^{it} f(t) = \sum$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n!)^2} e^{int} - e^{it} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)^2} e^{int} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{i(n+1)t}$$

posons $k = n+1$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)^2} e^{int} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!^2} e^{ikt}$$

Tchao Pantin 78 $\quad n! \sim \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{e^{n}}$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!^2} e^{imt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!^2} e^{ikt}$$

b) soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solu° 2π-périodiq de classe C^2 de l'équa° (E).

(i) pr $n \in \mathbb{Z}$, en usant g est solu° de (E), exprimer $c_n(g'')$ en f de $c_{n-1}(g)$

soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ f 2π-périodiq, de classe C^2 sr $\mathbb{R}$ & on spps g est solu° de (E).

→ g est 2π-périodiq & de classe C^2, on a

$\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g)\, e^{int}$ (& la série cv normalement)

De plus, comme $\forall t \in \mathbb{R}$,

$g''(t) = e^{it} g(t)$ & g est de classe C^2.

On ed g'' est de classe C^2 & 2π-périodiq

D'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $g''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g'')\, e^{int}$

Comme g est solu° de (E), on a :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g'') e^{int} - e^{it} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g)\, e^{int} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g'') e^{int} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g)\, e^{i\underbrace{(n+1)}_{k}t} = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g'') e^{int} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-1}(g)\, e^{ikt} = 0$$

d'où $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n(g'') - c_{n-1}(g)\right) e^{int} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Fixons $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n(g'') - c_{n-1}(g)\right) e^{int} e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$$

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n(g'') - c_{n-1}(g)\right) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} \frac{dt}{2\pi}}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } n=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \quad \text{(par cv normale)}$$

$$0 = c_k(g'') - c_{k-1}(g).$$

3,8
9, ...

(iii) RM si f est C^1 & 2π-périodiq
alors $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad \boxed{IPP}$$

$f(t)$	$f'(t)$
$-\frac{1}{in} e^{-int}$	e^{-int}

$$IPP \Rightarrow c_n(f) = -\frac{1}{in2\pi} \left[f(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt}_{c_n(f')}$$

Comme g est de classe C^2,
on a $\boxed{c_n(g) = \frac{1}{in} c_n(g') = \frac{-1}{n^2} c_n(g''),}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

D'où $\forall n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(g'') = -n^2 c_n(g) = c_{n-1}(g).$$

, $c_0(g'') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g''(t) dt = \frac{1}{2\pi} (g'(\pi) - g'(\pi)) = 0$

(iii) Calculer $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g)$ en f de $c_0(g)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad -n^2 c_n(g) = c_{n-1}(g)$$

$n \neq 0$ $\quad c_n(g) = -\frac{1}{n^2} c_{n-1}(g) = -\frac{1}{n^2} \times \frac{-1}{(n-1)^2} c_{n-2}$

$$= \frac{(-1)^n}{n!^2} c_0(g), \quad n > 0.$$

Mq $\quad c_n(g) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!^2} c_0(g), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

se mq par récurrence.

si g est solut de (E), 2π-périodicité.

$$\Rightarrow g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} c_0(g) e^{int}$$

$$= c_0(g) \, f(t)$$

TD
D6

(vi) Donc l'espace vectoriel des solut°s est de dimension 1, engendré par f.

Ex16 soit f f 2π-périodiq & cont° sr $\mathbb{R}$. Notons $S_n(f)$ la n-ème somme partielle de la SdF de f, ie $S_n(f)(t) =$

$$S_n(f)(t) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)\, e^{ikt}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Spps $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|S_n(f)\|_\infty \leq 1$.

→ Mq $\|f\|_\infty \leq 1$. ←

Mq $\|S_n(f)\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |S_n(f)(t)| \leq 1$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \|f\|_\infty \leq 1$$

---

soit $\sigma_N f(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(t)$

Comme f est cont & 2π-périodiq, le Th de Féjer $\Rightarrow \|\sigma_N f - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Or $|\sigma_N f(t)| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} |S_n f(t)|$

$$\leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 1 = 1 \underset{N\to\infty}{\Rightarrow} |f(t)| \leq 1.$$

Ex17 soit f f 2π-périodiq & cont de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$. Mq f est de classe C^∞ sr $\mathbb{R}$ ssi $\forall k\in\mathbb{N}$, on a

$$c_n(f) = o(n^{-k}), \quad |n|\to\infty.$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont & 2π-périodiq.

Mq f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}$, $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $|n|\to\infty$

($\Rightarrow$) On suppose que f est de C^∞ sr $\mathbb{R}$.

Mq $\forall k\in\mathbb{N}$, $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $|n|\to\infty$.

(R) si f est C^1 alors $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$, $n\in\mathbb{Z}^*$

si f est de classe C^k alors $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)})$

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|^k} \underbrace{|c_n(f^{(k)})|}_{} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \ |n| \longrightarrow \infty.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \ |n| \longrightarrow \infty.$$

Mq f est C^∞

$$Sf(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |c_n(f) e^{int}| = |c_n(f)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} \text{ CV normalement sur } \mathbb{R}.$$

Dc Sf définit une f cont sur $\mathbb{R}$.

Mq Sf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:

$u_n(t) := c_n(f) e^{int}$; on sait que

(i) $\sum_n u_n$ CV simplement

(ii) u_n est de classe C^k, $\forall k \in \mathbb{N}$

(iii) et $u_n^{(k)}(t) = (in)^k c_n(f) e^{int}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n^{(k)}(t)| = |n|^k |c_n(f)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ |n| \to \infty.$$

Donc $\sum_n u_n^{(k)}$ CV normalement, $\forall k \in \mathbb{N}$,

on sait que Sf est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Mq $f = Sf$:

Idée : si f, g st 2 fs 2π-périodiqs alors

$$f = g \iff \forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = c_n(g)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2$$

$$c_n(Sf) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Sf(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt} e^{-int} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}} = c_n(f).$$

CV p. norma | cont | $\Sigma S f \xrightarrow{\text{cont}} \left(\frac{1}{2\pi}\int |f|^2\right)^{1/2}$

Dirich | Féjer | Cauw

$$\Rightarrow f = Sf \text{ est de } C^\infty.$$