M-51 Pr: Pierre Dèbes

GROUPES

ANNEAUX ET CORPS

Ensembles

1. Axiomatiques de N, relations d'équivalence, ensemble quotient, construction de Z.

Groupes, Anneaux et corps

1. groupes, sous-groupes, morphismes, noyau, image, groupe cyclique, ordre d'unélément, théorème de Lagrange, sous-groupe distingué, groupe quotient, groupe symétrique, groupe alterné, groupe opérant sur un ensemble, orbites, stabilisateurs, automorphismes intérieurs, classes de conjugaison, formule des classes, groupes diédraux et polygones réguliers.

2. Congruences, théorème chinois, groupe des éléments inversibles de Z/nZ, exemples deméthode de codage et de cryptage, morphismes d'anneaux, anneaux intègres, idéal, idéal premier, idéal principal, anneaux quotients, anneaux principaux, exemple des entiers de Gauss.

3. corps, sous-corps, corps premier, caractéristique d'un corps, corps des fractions d'un anneau intègre, construction de Q.

Polynômes et Nombres

1. Polynômes sur un corps K, polynômes irréductibles, idéaux de K[X], algorithme d'Euclide, relations entre coefficients et racines ; corps des fractions rationnelles sur K.

2. construction de R (à partir des suites de Cauchy) et de C (à partir de R[X]), éléments algébriques, transcendants, dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur Q.

M51 - Groupes, Anneaux & Corps

C1 - Ensembles, R^o équivalces, cardinal, dénombrabilité

1. Ensembles

$E = \{1, 2, 3\}$.

- Un ensemble est un objet math. composé d'élts.
- On note E cet ensemble. Pour x élément de E.
- Ensemble composé d'aucun élt est l'ens vide : $\emptyset$.

1.2. Inclusion, intersec^o, réunion

D1 soit A, E ens, A est inclus dans E ou A est une partie ou ss-ens de E si $\forall x \in A, x \in E$.
On note $A \subset E$.
L'ensemble des parties d'un ens E : $\mathcal{P}(E)$.

D2 soit E un ens, soit A, B 2 ss-ens de E, on définit la réunion $A \cup B$ par

→ $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

→ l'intersec^o $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$

→ le produit cartésien $A \times B = \{(a,b) \in E \times E, a \in A, b \in B\}$

→ la différence ensembliste $A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

D3 2 ens E, F st équipotents s'$\exists$ $\boxed{\text{bijec}^o}$ de l'1 vers l'autre.
Si équipotents : ils ont même cardinal.

D4 Un ens non vide E est fini s'$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tq E soit équipotent à l'ens $\{1, 2, \dots, n\}$.
On dit $\text{Card } E = n$.

D.4.0 Définit^o des entiers
On pose $0 = \text{card}(\emptyset)$, $1 = \text{card}\{0\}$, $2 = \text{card}\{0, 1\}$
.... $n+1 = \text{card}\{0, 1, \dots, n\}$

Rq On mq (PR) si $\text{card}(E) = n$ et $F \subset E$ alors $\text{card}(F) \in \{0, 1, \dots, n\}$
D+, si $\text{Card } F = n \Rightarrow \text{card } E = F$.

P1 soit E ens : ASSE :
(i) $\exists$ injec^o $\mathbb{N} \xrightarrow{i} E$
(ii) E équipotent à une partie de E distincte de E
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{card}(E) \neq n$.

D5 E est dit fini s'il n'est pas infini.

Th Cantor-Bernstein

soit E, F 2 ens, spps $\exists$ appli injective $f: E \to F$ & appli injective $g: F \to E$ Alors $\{$ ens E, F st en bijecθ, ils ont m̂ cardinal.

Th Cantor

soit E un ens nV & $\mathcal{P}(E)$ l'ens de ss parties $\nexists$ surjecθ de E ds $\mathcal{P}(E)$.

P1 L'ens $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ens E est en bijecθ ↓ l'ens $\{0,1\}^E$ des appli de E ds $\{0,1\}$.

2.2. Dénombrabilité

Df Un ens infini E est dit dénombrable s'il est en bijecθ ↓ l'ens $\mathbb{N}$.
(ie équipotent à $\mathbb{N}$).

P2 Tt ss-ens infini d'un ens dénombrable est dénombrable.