M22 : Mathématiques fondamentales 2 L1 SESI 2019–2020

# Corrigé du devoir surveillé n° 3 – Partie Analyse

**Exercice 1.**

1. La fonction $h$ est deux fois dérivable comme la fonction $f$ et on a, pour tout $x \in ]a, b[$,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad h''(x) = f''(x) > 0.$$

   On en déduit que la fonction $h'$ est strictement croissante sur $]a, b[$.

2. La fonction $h$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $h(a) = h(b) = 0$. Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

3. Comme la fonction $h'$ est strictement croissante sur $]a, b[$ et s'annule en $c$ d'après les questions précédentes, on en déduit qu'elle est strictement négative sur $]a, c[$ et qu'elle est strictement positive sur $]c, b[$. Ainsi, la fonction $h$ est strictement décroissante sur $]a, c[$ et strictement croissante sur $]c, b[$. Mais comme de plus $h(a) = h(b) = 0$ alors, pour tout $x \in ]a, b[$, on a $h(x) < 0$, et donc l'inégalité

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

   La droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

   Ainsi, l'inégalité démontrée prouve que la courbe de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est toute entière en-dessous de cette droite.

**Exercice 2.**

1. (a) Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus la composée de deux fonctions strictement décroissantes est une fonction strictement croissante, on en déduit que la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction $f$ étant décroissante sur $[1, 2]$, on en déduit que

$$f([1, 2]) \subset [f(2), f(1)] = \left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset [1, 2].$$

(c) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on calcule

$$g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}.$$

On en déduit que

$$g(x) = x \iff \frac{1+2x}{1+x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Or l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ admet les deux solutions réelles

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0,$$

donc l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $g(x) = x$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. (a) Par définition, on a

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = 2,\ u_2 = f(u_1) = f(2) = \frac{3}{2},\ u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3},$$

et donc

$$v_0 = u_0 = 1,\ v_1 = u_2 = \frac{3}{2},\ w_0 = u_1 = 2,\ w_1 = u_3 = \frac{5}{3}.$$

(b) On montre que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur $n$. En effet, on a bien $u_0 = 1 \in [1,2]$ et si, pour $n$ arbitrairement fixé, on a $u_n \in [1,2]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,2]$ d'après le point (b) de la question 1.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}) = g(v_n),$$

et de même

$$w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(u_{2n+1}) = g(w_n).$$

(d) On montre que $v_{n+1} \geq v_n$ et $w_{n+1} \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans chaque cas par récurrence sur $n$, et on en déduit respectivement que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

— On a $v_1 = \frac{3}{2} \geq 1 = v_0$ d'après le point (a) et si, pour $n$ arbitrairement fixé, on a $v_{n+1} \geq v_n$ alors, comme la fonction $g$ est croissante d'après le point (a) de la question 1, on obtient

$$g(v_{n+1}) \geq g(v_n) \ \text{ et donc } \ v_{n+2} \geq v_{n+1}.$$

— De même, on a $w_1 = \frac{5}{3} \leq 2 = w_0$ et si, pour $n$ arbitrairement fixé, on a $w_{n+1} \leq w_n$, alors

$$g(w_{n+1}) \leq g(w_n) \ \text{ et donc } \ w_{n+2} \leq w_{n+1}.$$

(e) — D'après le point (b), on a $1 \leq v_n \leq 2$ et $1 \leq w_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) donc convergente et, de même, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1) donc convergente aussi.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. La fonction $g$ étant continue (comme composée de fonctions continues), on en déduit par passage à la limite dans ces égalités que les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite qui est un point fixe de la fonction $g$, celui-ci devant dans chaque cas appartenir à $[1, 2]$ d'après la question précédente. Ainsi, d'après le point (c) de la question 1, ces deux limites sont en fait égales à $\ell$, l'unique réel strictement positif vérifiant $g(\ell) = \ell$.

(f) D'après la question précédente, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell$. Par théorème, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\ell$.