M2
301

M53 : Intégrales à Paramètres

→ Résolu⁰ équa diff, on aboutit à f
$x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$.

Étude de < cont uniforme / intég. impropres.

CI : Continuité UN & intég. généralisées

(D) (CS) I de $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ alors f est cont,
$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall y \in I, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

(D) (a) ..., f cont & UN sur I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: ~~$\forall$~~
$\forall x, y \in I, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

f UN cont sur I ⇒ f cont sur I. (~~R~~F).

(TH) Heine :
soit I compact de $\mathbb{R}$ & $f: I \to \mathbb{R}$ cont
alors f est UN cont.

DM (?!) En suppos^t que f cont sur I & pas UN cont.
$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in I$ tq $|x-y| < \delta$
$|f(x)-f(y)| > \varepsilon$.

On apply ppté à $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\exists x_n \in I, \exists y_n \in I$,
$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

ĉ I est fermé, borné & $(x_n)_n \subset I$, ∃ ss-suite
$(x_{\varphi(n)})_n$ q (a) vers $\alpha \in I$.

On Rq $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(car $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st ↗ & de $\varphi(n) \geq n$).

D'où $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$.

ĉ f est cont on a : $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha)$
& $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha)$

de $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

0.1
13/09.

ceq (?!) $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon > 0$ ∎

(th) Heine $\mathbb{R}^2$

soit I, J 2 compacts de $\mathbb{R}$.
soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont, alors f est UN cont
sur $I \times J$.

$\to f$ UN cont sur $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq
$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$
(DE) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$ preuve exos.

I. 2.1. Intégrales généralisées

On suppose connue notion intégral de Riemann.

(D2) soit I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que
f est localem^t intégrable (au sens de Riemann)
si f est Riemann intégrable sur tt interv. compact.

(D3) soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$
& supposons f localm^t intégrable sur $[a, b[$,
on dit que l'intégrable de f sur $[a, b[$ est CV si
$f : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b[$ a une limite
finie qd $x \to b$ & on note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \overset{<}{\to} b} \int_a^x f(t)\,dt$
& c^{tte} limite s'appelle l'int. généralisée de
f sur $[a, b[$. (de m sur autres intervalles)

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est CV $\iff \alpha > 1$.

- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est cont sur $[1, \infty[$ dc loc^t int.

soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{si } \alpha = 1}{=} \int_1^x \frac{1}{x}\,dx = \ln x \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ DV.

si $\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^x x^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_1^x$

$= \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1) \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$

ⓔ$_2$: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CV $\Rightarrow \alpha < 1$. idem ⓔ 1.

I.2.2. Fausse Généralité

(P3) soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont & supposons que $\lim_{x \to b^<} f(x)$ $\exists$ (& est finie)

alors $\int_a^b f(x)\,dx$ CV.

ⓔ1 : $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ CV.

$f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est cont, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$

D+, $\lim_{x \to 0^>} f(x) = 1$ d'où $\mathcal{P}$ (P3),

l'int $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ CV.

I.2.3. Crit de CV $\mathcal{N}$ f de signe cte

(Th 4) soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ lclmt intég & spps que

(i) $\exists\, c \in [a,b[$, $\forall x \in [c,b[$: $f(x) \geq 0$

(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$

(ie : $\exists\, M>0$ tq $\forall x \in [c,b[$, $f(x) \leq M \cdot g(x)$)

alors ⓐ si $\int_a^b g(x)\,dx$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CV

ⓑ si $\int_a^b f(x)\,dx$ DV $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ DV.

ⓔ $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV.

En effet, $t \longmapsto e^{-t^2}$ cont de lclmt intgble $\mathcal{N}$ $[0,\infty[$

• $e^{-t^2} \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$.

• $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ie $t^2 e^{-t^2} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV dc $\mathcal{P}$ le crit de comparaison,

$\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV & dc $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV.

TH5 $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intég.

Supposons (i) $\exists\, c \in [a, b[,\ \forall x \in [a, b[,\ f(x) \geq 0.$

(ii) $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ <}}{\sim} g(x)$ (ie $\exists\, \varepsilon : [c, b[\to \mathbb{R}$ tq

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \varepsilon(x) = 0$ & $\forall x \in [c, b[,\ f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$)

alors $\int_a^b f(x)\, dx$ CV ssi $\int_a^b g(x)\, dx$ CV.

Ex $\gamma > 0$: $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(t) + t^\gamma}\, dt$ CV si $\gamma > 1$.

en effet, $\frac{1}{\ln t + t^\gamma} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^\gamma}$

car $\frac{t^\gamma}{\ln(t) + t^\gamma} = \frac{t^\gamma}{t^\gamma \left(1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t^\gamma}}_{\xrightarrow[t \to \infty]{} 0}\right)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{\ln t + t^\gamma}\, dt$ CV $\Leftrightarrow \int_a^\infty \frac{1}{t^\gamma}\, dt$ CV $\Leftrightarrow \gamma > 1$

CV en Valeur Absolue

TH $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intgble & supposons que $\int_a^b |f(t)|\, dt$ CV (CV abs) alors $\int_a^b f(t)\, dt$ CV.

Ex $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV

- $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont dc localmt intg sur $[1, \infty[$
- $\forall t \geq 1,\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV.

M53 CV en valeur absolue

Th $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intégrable & supposons que $\int_a^b |f(t)|\, dt$ CV.
(on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ CV abs)
alors $\int_a^b f(t)\, dt$ CV.

ⓐ $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV

• $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont de localmt intégrable sur $[1,\infty[$.

• $\forall t \geq 1$, $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV.

àr ⓐ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ CV MS ne CV pas abs.

|| • $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ cont de localmt intégrable sur $]0,\infty[$.

• $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ CV.

soit $x > 1$, IPP sur $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ on vt $\nearrow$ la puissce de x, de on intègre $\frac{1}{t}$

$u(t) = \frac{1}{t}$ $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$v(t) = -\cos(t)$ $v'(t) = \sin(t)$

d'où $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\cos(X)}{X} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$

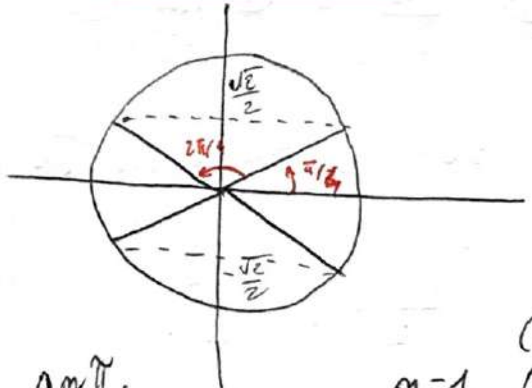
$\left|\frac{-\cos(X)}{X}\right| \leq \frac{1}{X} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV abs de CV. D'où $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\, dt \to \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt \in \mathbb{R}$

Ainsi $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ possède 1 limite finie qd $X \to \infty$.

ⓐ Donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ CV.

Étude de CV abs ∫ @ $\frac{\sin t}{t}$



$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Dc l'int ne CV pas abs.

Critère de Cauchy

TH soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ loclmt intégrable

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV $\iff \forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in [a,b[$ tq

$\forall x, x'$; $x_\varepsilon < x < x' \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon.$

C2 : Intégrales définies à paramètres

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle (éventuell^t non borné) de $\mathbb{R}$, $J = [a,b]$ désigne un intervalle fermé, borné ($-\infty < a < b < \infty$).

On considère
$$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

& on suppose $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann intégrable sur J.

On pt de définir, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$

Q° Qd est-ce que F est cont ? dérivable, C^1, ... ?

II. 1. Continuité de F

Th Supposons que $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont alors si on pose $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$, la f F est bien déf & cont sur I.

⚠ a, b dvt ê des réels finis ! ne f pas pu IG.

DM (•) $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cont donc Riemann intégrable. D'où F est bien déf sur I.

(••) F est cont sur I. Soit $x_0 \in I$ & mq F est cont en x_0. Supposons que x_0 n'est pas 1 extrémité de I (s'il y en a !) Alors $\exists\, \eta > 0$ tq $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$: on cherche à mq $\exists\, \delta$, $\exists\, 0 < \delta < \eta$,
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt \right|$$
$$= \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt \right|$$

D'où $|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt$

La fonct° $f : [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont donc UN cont p le Th de Heine (J est fermé borné)

$\exists\, \delta,\ 0<\delta<\eta$ tq $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$,
$\forall t \in [a,b]$, on a :

$$|f(x,t)-f(x_0,t)| \leqslant \varepsilon / b-a$$

En effet, $\exists\, \delta>0$, $\forall (s,t),(s',t') \in [x_0-\eta, x_0+\eta]\times J$.

$$\max\left(|s-s'|, |t-t'|\right) < \delta \Rightarrow |f(s,t)-f(s',t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$s=x$, $s'=x'$; $t=t'$ $\longrightarrow$ on a appliqué cela ds la démo.

D'où $|F(x)-F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t)-f(x_0,t)|\, dt$

$$\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt = \varepsilon\, \frac{(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ F est cont en x_0, $\forall x_0 \in I$
& F est cont sr I.

ⓐ soit $F(x) = \int_0^x \sin(x+t)\, e^{xt^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

$\to$ calculer $\lim_{x\to 0} F(x) = ?$

On introduit $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \sin(x+t)\, e^{xt^2}$

f est continue & $[0,\pi] = J$ est fermé, borné.

⚠ condi TH.

Dc F est cont sr $\mathbb{R}$ (par TH-1.)

ep $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^\pi \sin t\, dt = \left[-\cos t\right]_0^\pi = 1+1 = 2$

II.2 Condits pr que F soit de classe C^1.

TH soit $f : I\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ & supposons que
(i) f est cont sr $I\times[a,b]$
(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe & est cont sr $I\times[a,b]$

alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien dlf & de classe C^1 sr I.
$x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$

et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

<u>Preuve</u> soit $x_0 \in I$ & supposons
$\exists \eta > 0$, $[x_0-\eta, x_0+\eta] \subset I$.
soit $\varepsilon > 0$. On cherche δ, $0<\delta<\eta$,
$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \int_a^b (\partial_1 f)(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon$$

- On a $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$,

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| =$$
$$= \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt - \int_a^b (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right|$$
$$= \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right. \right|$$

- $\leq \displaystyle\int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$

Fixons $t \in [a,b]$ & on applique le $\boxed{\text{TAF}}$ à
$[x_0-\eta, x_0+\eta] \to \mathbb{R}$
$s \longmapsto f(s,t)$

$\forall x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$, $\exists\, c_{x,t}$ compris entre x & x_0 tq

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t)$$

D'où $\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |x-x_0| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$
$$= |x-x_0| \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est <u>cont</u> sur $I \times J$ donc sur $[x_0-\eta, x_0+\eta] \times J$, & le TH de Heine, elle est <u>UN</u> cont sur $[x_0-\eta, x_0+\eta] \times J$.

Donc $\exists\, \delta$, $0<\delta<\eta$, tq :
$\max(|s-s'|, |t-t'|) \leq \delta \Rightarrow$
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(s,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(s',t') \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Appliquons ceci à $s = c_{x,t}$; $s' = x_0$,
$t = t' \in [a,b]$.

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0| < \delta$

$$x_0-\delta \quad x_0 \quad x \quad x_0+\delta$$

D'où $|x-x_0|<\delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $\left|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right|$

$$\leq |x-x_0| \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \qquad \text{dc } F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \quad C^1 \text{ car } \partial \text{ cont}$$

ⓐ $F(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \dfrac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont

2) déri part $\exists$ & cont.

Dc on pt appliquer le Th 2.

Ainsi F est C^1 & $F'(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_{t=2}^{t=2}, \ x \neq 0$$

dép. x. intg $\not\!\!\,$ t.

ⓑ

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0| < \delta$

$x_0-\delta \quad x_0 \quad x \quad x_0+\delta$

D'où $|x-x_0| < \delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $\left|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right|$

$$\leq |x-x_0| \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)$$

de $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ C^1 ou ∂ cont

@ $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont

2) dériv part $\exists$ & cont.

Dc on pt appliquer le TH 2.

Ainsi F est C^1 & $F'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \left[\frac{1}{x} e^{xt}\right]_{t=1}^{t=2}, x \neq$$

dep. x. — intg de t.

Applicat° : TH de Fubini

(intervalles bornés)

soit $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a,b]$

& soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, on spps cont sur $I \times J$

$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

Alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

est cont sur I & la f $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto G(t)$

où $G(t) = \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ est cont sur J

& $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b G(t)\,dt$.

ie $$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right) dt.$$

b

Preuve (Th) Fubini

ĉ $f : [\alpha,\beta]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est cont,

le (Th) de continuité $\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est cont sur } I. \\ G \text{ est cont sur } J. \end{cases}$

Pour G, on introduit la f $\tilde{f} : J\times I \to \mathbb{R}$

$(t,x) \mapsto \tilde{f}(t,x) = f(x,t)$

$\tilde{f}$ est cont ô composée de f & de la symétrie $(t,x) \longmapsto (x,t)$.

Idée de la preuve :

soit $\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy$, $(x,t)\in I\times J$

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt = \int_a^b \varphi(\beta,t)\,dt$$

Posons $\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\,dt$, $x\in I$

$$\Phi(\beta) = \int_a^b \varphi(\beta,t)\,dt,\quad \Phi(\alpha) = \int_a^b \varphi(\alpha,t)\,dt = 0$$

D'où $\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt = \Phi(\beta) = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$

en admettant que Φ est dérivable $= \int_\alpha^\beta \Phi'(x)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt\right)dx = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx$$

$\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy$, $(x,t)\in I\times J$

$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\,dt$, $x\in I$

Mq Φ est bien dérivable sur I.

• Mq φ est cont sur $I\times J$. soit $\varepsilon>0$,

soit $(x_0,t_0)\in I\times J$: pr $(x,t)\in I\times J$, on a :

$$\varphi(x,t)-\varphi(x_0,t_0) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)\,dy$$

$$= \int_\alpha^{x_0}\big(f(y,t)-f(y,t_0)\big)\,dy + \int_{x_0}^x f(y,t)\,dy$$

soit $M = \sup_{(x,t)\in I\times J} |f(x,t)| < \infty$ (car f cont sur $I\times J$) produit int fermés bornés

(I) $\left|\int_{x_0}^x f(x,t)\,dt\right| \leq M|x-x_0|$

si $\boxed{|x-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}}$ alors $\left|\int_{x_0}^{x} f(y,t)\,dt\right| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'après le TH de Heine, f est U.N. cont sur $I \times J$.
Donc on pt trouver $\exists\, \delta > 0$,

$$\begin{matrix} |y-y'| < \delta \\ |t-t'| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(y,t) - f(y',t')| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|}$$

$\bullet\ \boxed{\underset{y \in J}{|t-t_0| < \delta}} \Rightarrow |f(y,t) - f(y,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|}$

Donc $\left|\int_{\alpha}^{x_0} f(y,t) - f(y,t_0)\,dy\right| \leq |x_0-\alpha| \frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'où si $|t-t_0| < \delta$ & $|x-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ alors $|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Donc φ est continue en $(x_0, t_0) \in I \times J$

dc φ est continue sur $I \times J$.

Donc ϕ est bien définie.

Mq ϕ est dérivable sur I

[Appliquons le TH_2 en vérifiant les hypo : de f cont sur $I \times J$ de f & $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sur $I \times J$

- φ est cont$^{I \times J}$
- Mq $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & cont$^{I \times J}$

Pr t fixé ds J, la f

$x \longmapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(y,t)\,dy$ représente la primitive de $y \mapsto f(y,t)$ q s'annule en α.

Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

& par hypothèse, on a de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est cont$^{I \times J}$

Dc p TH_2, ϕ est dérivable &

$\phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt$ d'où $\phi'(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

$$\Phi(\beta) - \cancel{\Phi(\alpha)} = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi'(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{a}^{b} f(x,t)\, dt \right)' dx$$

$\Phi(\alpha) = 0$

$$\int_a^b \Psi(\beta, t)\, dt = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\, dx \right) dt$$

$\square$

Exemples d'Applications

Calculer $I = \int_1^2 \left(\int_0^2 y\, e^{xy}\, dy \right) dx$

$[1,2] \times [2,0] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y e^{xy}$ est cont.

D'après le TH de Fubini, on a :

$$I = \int_0^2 \left(\int_1^2 y\, e^{xy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \cancel{y} \frac{1}{\cancel{y}} \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(e^{2y} - e^{y} \right) y$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^{y} \right]_0^2$$

aussi du Paramètre

2.4 Intégrales à Paramètres dont les bornes dépendent

On s'intéresse à une f $x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt$.

TH I, J 2 intervalles fermés, bornés.

$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b : I \longrightarrow J$.

On suppose :
- a, b sont de C^1 sur I.
- f cont $^{I \times J}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $^{I \times J}$

Alors la f $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt$ est C^1

& $\forall x \in I$,
$$\boxed{\Psi'(x) = f(x, b(x)).b'(x) - f(x, a(x)).a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt}$$

(R9) Supposons que $x \longmapsto f(x,t)$ est constante sur I égale à $\varphi(t) = f(x,t)$, $\forall x$

$$\Psi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt = \int_{a(x)}^{t_0} \varphi(t)\,dt + \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt - \int_{t_0}^{a(x)} \varphi(t)\,dt$$

si $H(t) = \int_{t_0}^{u} \varphi(t)\,dt$, $u \in J$

H est dérivable & $H'(u) = \varphi(u)$, $\forall u \in J$.

& $\Psi(x) = (H \circ b)(x) - (H \circ a)(x)$

$\Rightarrow \Psi$ est dérivable & $\Psi'(x) =$

$$\Psi'(x) = H'(b(x)) \cdot b'(x) - H'(a(x)) \cdot a'(x)$$
$$= \varphi(b(x)) \cdot b'(x) - \varphi(a(x)) \cdot a'(x)$$
$$= f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x)$$

///

Preuve :

soit $\Theta : I \times J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,u,v) \longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt$$

- Θ est bien définie (car f est cont)
- $\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x))$.

D'après Th2 , si $(u,v) \in I \times J$, l'applicaθ $x \longmapsto \Theta(x,u,v)$ est dérivable sur I et

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

soit $(x,v) \in I \times J$, $u \longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt = -\int_v^u f(x,t)\,dt$ q est de la primitive de la f cont $t \longmapsto f(x,t)$ q s'annule en v. & de

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v) = -f(x,u) \quad \& \text{ de m̂ :}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v) = f(x,v).$$

$\frac{\partial \Theta}{\partial u}, \frac{\partial \Theta}{\partial v}$ st cont $^{I \times J \times J}$ car f l'est.

$\frac{\partial \theta}{\partial x}$ est cont$^{I \times J \times J}$ (voir DM continuité & preuve (III) Fubini)

$\Rightarrow$ Θ est de classe C^1.

De plus $d\theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) =$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v).h_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v).h_3$$

$$\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x)) = (\Theta \circ L)(x)$$

$$L : x \longmapsto (x, a(x), b(x))$$

L est de classe C^1 & $L'(x) = (1, a'(x), b'(x))$

Donc $\Psi'(x) = d\Theta(x, a(x), b(x))(1, a'(x), b'(x))$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, a(x), b(x)) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x, a(x), b(x)).a'(x)$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x, a(x), b(x)).b'(x)$$

$\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ est cont $^{I\times J\times J}$ (voir DM continuité & preuve (Th) Fubini)

$\Rightarrow \Theta$ est de classe C^1.

De plus $d\Theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) =$

$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v).h_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v).h_3$

$\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x)) = (\Theta \circ L)(x)$

$L : x \longmapsto (x, a(x), b(x))$

L est de classe C^1 & $L'(x) = (1, a'(x), b'(x))$

Donc $\Psi'(x) = d\Theta(x, a(x), b(x))(1, a'(x), b'(x))$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,a(x),b(x)) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,a(x),b(x)).a'(x) + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,a(x),b(x)).b'(x)$$

Retour sur la preuve du (Th) de Fubini

$f : [\alpha,\beta]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

On pose $\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy$, $(x,t) \in [\alpha,\beta]\times[a,b]$

alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ \exists$ & $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$; $(x,t) \in [\alpha,\beta]\times[a,b]$

(Th) 1ère année $h : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ cont ~~Alors~~ posons (Th) fondam. de l'analyse

$H(x) = \int_\alpha^x h(y)\,dy$, $x \in [\alpha,\beta]$

Alors H est dérivable sur $[\alpha,\beta]$ & $\begin{cases} H'(x) = f(x) \\ H(\alpha) = 0 \end{cases}$

Fixons $t \in [a,b]$ & on appliq le (Th) à $h(y) = f(y,t)$

C3 Intégrales généralisées à paramètres

On considère f $f : I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

où I est un intervalle qq de $\mathbb{R}$
& $-\infty < a < b \leq \infty$ & on suppose que
$\forall x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV.

Q° : Que pt-on dire de $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$

III 1. Continuité

TH 1 soit $f : I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont &
on suppose que :
(a) $\exists\, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (li) tq
(i) $\forall (x,t) \in I \times [a,b[, \ |f(x,t)| \leq g(t)$
(ii) $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

Alors $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est bien définie & cont sr I.

Preuve : ❖ Mq F est bien définie.
Pr $x \in I$ fixé, l'appli $t \longmapsto f(x,t)$ cont de (li) sr $[a,b[$.
D'après (i) & (ii), l'integ. gén. $\int_a^b |f(x,t)|\,dt$ CV.
Donc l'(ig) $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV, ce q̄ prouve que $F(x)$ a bien a un sens $\forall x \in I$.

❖ Mq F est cont. sr I
soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de point de $[a,b[$ q td vers b.
On pose $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$, $x \in I$.
Comme $I \times [a, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est cont.
le TH 1 du C^2 (TH cont des integ. définies) implique
$\forall n \geq 1$, F_n est cont sr I.
D+, $x \in I$, $F(x) - F_n(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$
$= \cancel{\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt} + \int_{b_n}^b f(x,t)\,dt - \cancel{\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt}$

D'où $\left| F(x) - F_n(x) \right| = \left| \int_{b_n}^{b} f(x,t)\,dt \right| \leqslant \int_{b_n}^{b} |f(x,t)|\,dt$

$\leqslant \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt$

$\sup_{x\in I} | F(x) - F_n(x) | \leqslant \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt$

Or $\int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^{b_n} g(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\int_a^b g(t)dt$ ⓐ

Donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} | F(x) - F_n(x) | = 0$

Autrement dit, la suite de fs $(F_n)_n$ CV UN. vers F sur I. Comme chq. f F_n est cont sr I, on cd que F est cont sr I. □

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\,dt$

Mq F est bien définie & cont sr $\mathbb{R}$

mon par à trop subtile $\int_0^1 dt$ ne CV pas

soit $f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \cos(2xt)\, e^{-t^2}$

(.) La f f est cont.

(..) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[, \quad |f(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$

& si on pose $g : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto g(t) = e^{-t^2}$.

On Rq que g est continue sr $[0,\infty[$ de ⓛⓘ sr $[0,\infty[$

De plus, $g(t) \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (car $\lim_{t\to\infty} e^{-t^2} = 0$)

et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV & dc $\int_1^\infty g(t)\,dt$ CV. D'où $\int_0^\infty g(t)\,dt$ CV (...)

Par le TH 1, on cd que F est cont sr $\mathbb{R}$.

III. 2. Dérivabilité

Th 2. soit $f: I \times [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont & sppo que :

(i) $\forall x \in I$, $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $I \times [a,b[$

(iii) $\exists\, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq (i)

• $\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq g(t)$

•• $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

Alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

est de classe C^1 sur I &

$\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Preuve : soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de pts de $[a,b[$ tq $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ & on pose $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$, $x \in I$.

On sait que $f_1 : I \times [a,b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f_1(x,t)$ est cont sr $I \times [a,b_n]$ & $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ $\exists$ & cont sr $I \times [a,b_n]$

& de le Th 2 de C2 implique que $\forall n \geq 1$, F_n est de classe C^1 & $\forall x \in I$,

$F_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Par (i), on sait aussi que $\forall x \in I$

$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x,t)\,dt = F(x)$

Par (ii) & (iii), $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ CV abs de CV.

En effet, pr $x \in I$, fixé,

• $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cont sr $[a,b[$ (hypo (ii))

• $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq g(t)$, $\forall t \in [a,b[$ $\Rightarrow \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| dt$ CV

$\int_a^b g(t)\,dt$ CV

D^+, $\forall x \in I$,

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - F_n'(x) \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{b_n}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \int_{b_n}^{b} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| dt \underset{\text{par (iii)}}{\leq} \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt$$

Ainsi $\sup_{x \in I} \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - F_n'(x) \right| \leq \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

car $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

$(F_n')_n$ CV UN sur I vers

$$G : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto G(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

En résumé,

(*) $\forall n \geq 1$, F_n est de classe C^1 sur I.

(**) $(F_n)_{n\geq 1}$ CV simplem^t vers F sur I.

(***) $(F_n')_{n\geq 1}$ CV UN vers G sur I.

Alors par un résultat sur les suites de fonctions, F est de classe C^1 sur I.

& $\forall x \in I$, $F'(x) = G(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ □

Exemple Pour $x \in I$,

$$F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\,dt$$

On sait que F est cont sur $\mathbb{R}$ (voir ex précédent)

Mq F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \cos(2xt)\, e^{-t^2}$$

(o) f est cont sur $\mathbb{R} \times [0,\infty[$

(i) $\forall x \in I$, $\int_0^\infty f(x,t)\,dt$ CV (voir résol° page 13)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t \sin(2xt)\, e^{-t^2}$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∃ & cont $\mathbb{R}\times[0,\infty[$

(iii) $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq 2t\, e^{-t^2} = g(t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[$

mq bien $\int_0^\infty g(t)\,dt$ CV (△)

Par Th2, F est C^1 & $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -2 \int_0^{\infty} t.\sin(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$$

on cherche: trouver équa diff de 1° ordre p F.

Effectuons une IPP sur $\int_0^X \sin(2xt)(-2t)e^{-t^2}\,dt$

$u(t) = \sin(2xt)$ $\qquad u'(t) = 2x\cos(2xt)$

$v(t) = e^{-t^2}$ $\qquad v'(t) = -2t\, e^{-t^2}$

u & v st de C^1 s $[0, X]$

$$\int_0^X \sin(2xt)(-2t\, e^{-t^2})\,dt = \Big[\sin(2xt)\, e^{-t^2}\Big]_{t=0}^{t=X} - 2x\int_0^X \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$$

$$= \underbrace{\sin(2xX)\, e^{-X^2}}_{|\cdot| \leq e^{-X^2} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0} - \underbrace{2x \int_0^X \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt}_{\downarrow\ -2x\, F(x)} = \int_0^X \sin(2xt)(-2t\, e^{-t^2})\,dt \ \xrightarrow{X\to\infty} F'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F'(x) = -2x\, F(x)}$$

Donc F est solut de l'ED.

(E) $y'(x) + 2x\, y(x) = 0$.

On sait q solus (E) st de la forme.

$$y(x) = k.\, e^{-\int 2x\,dx} = k\, e^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Dc $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = k.\, e^{-x^2}$$

D'où ep pr $x = 0$, on obtient $F(0) = k$.

Or $F(0) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x^2}$$

Calcul : $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$$I \overset{\text{Pair}}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \Big| \quad I^2 = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= 4 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$= 4 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} dy\, dx$$

$$= 4 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y\, e^{-y^2(1+s^2)} dy\, ds \qquad s = \frac{x}{y} \quad ds = \frac{dx}{y} \quad ds\, y = dx$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \left[-\frac{1}{2(1+s^2)} e^{-y^2(1+s^2)} \right]_{y=0}^{y=\infty} ds$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = 2 \left[\arctan(s)\right]_0^{\infty}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \quad \text{dc } I^2 = \pi \text{ ç } I > 0.$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Th$_3$ de Fubini

soit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$; $-\infty < a < b < \infty$

soit $f : [\alpha, \beta] \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont &

sppsons q' $\exists$ $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (li) & tq

* $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,b[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$

** $\int_a^b g(t)\, dt$ (CV)

alors $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$

NB (ca) si $[a,b]$: pas besoin $\exists g$.

Preuve $F : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$ est cont sur $[\alpha, \beta]$ (p Th$_1$ (e$_3$))

dc $\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$ $\exists$

• $t \longmapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx$ cont sur $[a, b[$. (Th$_1$ (e$_2$)

Or, $\left| G(t) \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x,t)|\, dx$

$\leq \int_\alpha^\beta g(t)\, dx$

$\parallel$

$(\beta-\alpha)\, g(t)$

Or $\int_a^b g(t)\, dt$ CV

Donc $\int_a^b G(t)\, dt$ CV abs donc CV.

ie $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt$ $\exists$.

Mq $\int_a^b G(t)\, dt = \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$.

Fixons une suite $(b_n)_n$, $a < b_n < b$ & $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\, dt$, $n \geq 1$, $x \in [\alpha, \beta]$.

$F(x) - F_n(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt - \int_a^{b_n} f(x,t)\, dt = \int_{b_n}^b f(x,t)\, dt$.

$|F_n(x) - F_n(x)| \leq \int_{b_n}^b |f(x,t)|\, dt \leq \int_{b_m}^b g(t)\, dt$

Ainsi $\sup_{x \in [\alpha,\beta]} |F(x) - F_n(x)| \leq \underbrace{\int_{b_n}^b g(t)\, dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

(car $\int_a^b g(t)\, dt$ CV) $\longrightarrow$

Donc $(F_n)_n$ CV U.N. vers F sur $[\alpha, \beta]$.

Donc un TH sur les suites de fs (v. L_2) implique que

$$\int_\alpha^\beta F_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$$

$|F_n - F| \leq \beta-\alpha \times \sup$

D'où $\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta F_n(x)\, dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\, dt \right) dx \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt \right)$ Fubini CV

$= \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} G(t)\, dt = \int_a^b G(t)\, dt$ car int. CV.

18

(Rq) On a ~~une~~ la version suivante du (Th) de Fubini :

soit $f : [\alpha, \beta[\times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont

& spps. $\displaystyle\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta |f(x,t)|\, dx \right) dt < \infty$

alors $\displaystyle\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$

Transformée de Fourier :

Séries de Fourier :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodiq

+ certs hypothèses de régularité

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{f}(n)\, e^{int}$$

où $\displaystyle\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$

Pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-périodique, l'idée est de remplacer $n \in \mathbb{Z} \longrightarrow s \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ds$$

On voudrait écrire :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\, e^{ist}\, ds \quad \text{où} \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$$

Défino de la transformée de Fourier

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont p morcx &

spps $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ (cv) Alors on pose

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt \quad , s \in \mathbb{R}.$$

(Rq) $\hat{f}$ est bien déf sr $\mathbb{R}$.

$t \longmapsto f(t)\, e^{-ist}$ cont p mcx

et $|f(t)\, e^{-ist}| = |f(t)|$ € p hypothèse

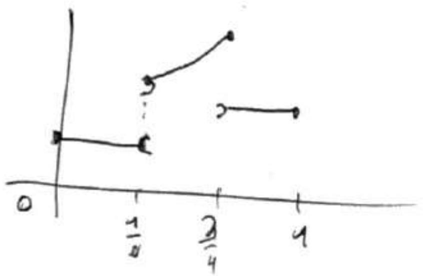
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$ (cv) abs donc (cv).

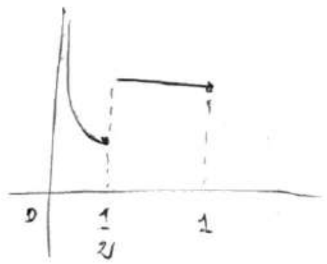
who what when how (1.9)

(R) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont p mcx s' ∃ $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.

tq (*) $f_{]a_i, a_{i+1}[}$ est cont $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$

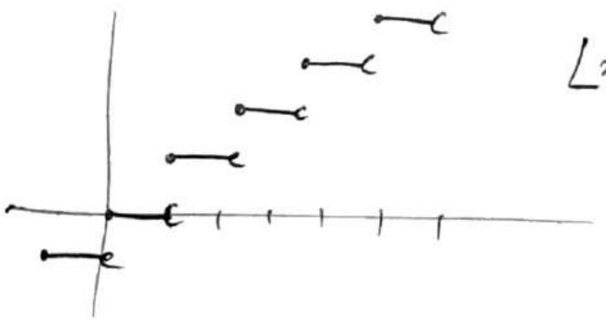
(**) f se prolonge par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$





n'est pas cont p mcx car $\lim\limits_{t \to 0^{>}} f(t) = \infty$

Une foncθ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont p mcx pr tt $-\infty < a < b < \infty$; f est cont p mcx sr $[a,b]$.



$\lfloor x \rfloor$ = pie entière de x.
est CPM sr $\mathbb{R}$.

(Th4) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont & spps que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Alors $\hat{f}$ est cont sur $\mathbb{R}$.

Notθ : $\hat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de f.

Preuve $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$, $s \in \mathbb{R}$.

• $(s,t) \longmapsto f(t) \cdot e^{-ist}$ est cont sr $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

•• $|f(t)\, e^{-ist}| = |f(t)|$ & $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ CV

De le Th1 du C3 implique $\hat{f}$ est cont sr $\mathbb{R}$.

□

ⓐ $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ Calculer $\hat{f}$.

$t \longmapsto e^{-|t|}$ est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$ donc (li)

De +, $e^{-|t|} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \to \infty$

D'où $\int_0^\infty e^{-|t|} dt$ (cv).

comme $t \longmapsto e^{-|t|}$ est paire, $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|} dt$ (cv) aussi.

De +, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ist}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-ist} dt + \int_0^\infty e^{-t} e^{-ist} dt$$

Ainsi $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^0 e^{(1-is)t} dt + \int_0^\infty e^{-(1+is)t} dt$

$$= \frac{1}{1-is}\left[e^{(1-is)t}\right]_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+is}\left[e^{-(1+is)t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{1-is} - \frac{1}{1+is} = \frac{2}{1+s^2}$$ (21)

Or $\left|e^{(1-is)t}\right| = e^t \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

$\left|e^{-(1+is)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

(Th) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>cont</u> tq $\int_{-\infty}^\infty |t f(t)| dt < \infty$

Alors $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ & $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^\infty t f(t) e^{-its} dt$$

<u>Preuve</u> Vérifions $\hat{f}$ est bien définie.

Mq $\int_{-\infty}^\infty |t f(t)| dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt < \infty$

Comme f est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$, alors f est (li) sur $\mathbb{R}$.

De +, pr $|t| \geq 1$; on a $0 \leq |f(t)| \leq |t f(t)|$

Or $\int_{-\infty}^{-1} |t f(t)| dt + \int_1^\infty |t f(t)| dt < \infty$.

& donc $\int_{-\infty}^{-1} |f(t)| dt + \int_1^\infty |f(t)| dt < \infty$.

D'où $\int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt < \infty$.

$$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(s,t) \longmapsto g(s,t) = f(t)\, e^{-its}$$

- g est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = -it\, f(t)\, e^{-its}$

$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial s}$ $\exists$ & est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| = |t f(t)| \quad \left(\begin{matrix}\text{pseudo}\\ \text{majorant}\end{matrix}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\, dt < \infty .$$

Donc d'après le (Th) 2., $\hat{f}$ est de classe C^1 et

$$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\, dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, e^{-its}\, dt$$

$\square$

(Th) Riemann - Lebesgue

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

alors $\lim_{s\to\infty} \hat{f}(s) = 0$ & $\lim_{s\to -\infty} \hat{f}(s) = 0$.

<u>Preuve</u> ① Si f est de classe C^1 :

$$|\hat{f}(s)| \leq \int_{-\infty}^{a} |f(t)\, e^{-its}|\, dt + \left|\int_{a}^{b} f(t)\, e^{-its}\, dt\right| + \int_{b}^{\infty} |f(t)\, e^{-its}|\, dt$$

② Cas général

On use le lemme suivant de densité.

(L) soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ <u>cont</u>

alors $\exists\ (\varphi_n)_n$ suite de fs en escalier

tq $\sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve (Th) de Riemann Lebesgue

soit $\varepsilon > 0$, choix $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$$\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \& \quad \int_{b}^{\infty} |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}$$

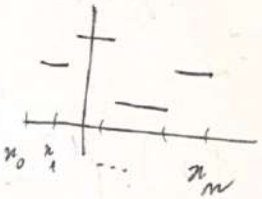
D'après (L), $\exists$ suite φ en escalier sur $[a,b]$ tq $\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, e^{-its} + \int_{a}^{b} f(t)\, e^{-its} + \int_{b}^{\infty} f(t)\, e^{-its}$$

D'où $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{a} + \int_{b}^{\infty} + \int_{a}^{b} (f(t) - \varphi(t)) e^{-its}\,dt + \int_{a}^{b} \varphi(t) e^{-its}\,dt$

$$|\hat{f}(s)| \le \underbrace{\int_{-\infty}^{a}}_{\le \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\int_{b}^{\infty}}_{\le \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\int_{a}^{b}}_{\le \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi(t)|(b-a) \le \frac{\varepsilon}{4}} + \left| \int_{a}^{b} \right|$$

Comme φ est une f en escalier, il existe $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ tq $\forall i \in \{0, n-1\}$, $\exists\, c_i \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in\,]x_i, x_{i+1}[\,,\ \varphi(x) = c_i$



D'où $\int_{a}^{b} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt$ (Chasles)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k-1}} e^{-its}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[-\frac{1}{is} e^{-its} \right]_{t = x_k}^{t = x_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{c_k}{is} \left(e^{-isx_{k+1}} - e^{-isx_k} \right)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{a}^{b} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2|c_k|}{|s|} = M \cdot \frac{1}{|s|}$$

où $M = \sum_{k=0}^{n-1} 2|c_k|$

Donc $\exists\, s_0 \in \mathbb{R}$ tq $|s| \ge \underset{\frac{4M}{\varepsilon}}{\overset{\shortparallel}{s_0}} \Rightarrow \frac{M}{|s|} \le \frac{\varepsilon}{4}$

$$|s| \ge \frac{4M}{\varepsilon} \Rightarrow |\hat{f}(s)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \square$$

TH $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 & tq

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \ \& \ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt \ \text{CV}$$

alors $\widehat{f'}(s) = is\,\widehat{f}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Preuve : f, f' st cont & $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ & $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,dt$ CV

$\Rightarrow \widehat{f'}$ & $\widehat{f}$ $\exists$ (& st cont sur $\mathbb{R}$).

$$\widehat{f'}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-its}\, dt \ , \ s \in \mathbb{R}.$$

Pour $a < b$, on a :

$$\int_a^b f'(t)\, e^{-its}\, dt = \left[f(t)\, e^{-its} \right]_{t=a}^{t=b} + is \int_a^b f(t) e^{-its}\, dt$$

$u(t) = e^{-its}$ $\qquad u'(t) = -is\, e^{-its}$

$v'(t) = f(t)$ $\qquad v(t) = f'(t)$

On a $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, e^{-its}\, dt \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}]{} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) . e^{-its} = \widehat{f'}(s)$

$$\int_a^b f(t)\, e^{-its}\, dt \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-its}\, dt = \widehat{f}(s)$$

Il reste à mq $\left(f(b) e^{-ibs} - f(a) e^{-ias} \right) \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}]{} 0$

On a : $\left| f(b) e^{-ibs} - f(a) e^{-ias} \right| \leq |f(a)| + |f(b)|$

Il reste à mq $\lim_{a \to -\infty} |f(a)| = \lim_{b \to \infty} |f(b)| = 0$

$$f(0) - f(a) = \int_a^0 f'(t)\, dt \Rightarrow f(a) = -\int_a^0 f'(t)\, dt + f(0)$$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f'(t)\, dt$ CV & de

$$\int_a^0 f'(t)\, dt \xrightarrow[a \to -\infty]{} \ell := \int_{-\infty}^{0} f'(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

D'où $f(a) \xrightarrow[a \to -\infty]{} f(0) - \ell =: \ell_1 \in \mathbb{R}$.

En effet, si $\ell_1 \neq 0$; $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq
$t \leq t_0 \Rightarrow |f(t) - \ell_1| \leq \frac{|\ell_1|}{2}$

$$\Rightarrow |f(t)| = |f(t) - \ell_1 + \ell_1| \geq |\ell_1| - |f(t) - \ell_1|$$
$$\geq |\ell_1| - \frac{|\ell_1|}{2}$$
$$= \frac{|\ell_1|}{2} > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} |f(t)|\,dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} \frac{|\ell_1|}{2}\,dt = \infty \quad \boxed{c?/c}$$

On a donc $\ell_1 = 0$ & donc $\lim_{a \to -\infty} f(a) = 0$.

De même, $\lim_{b \to \infty} f(b) = 0$. □

② soit $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont tq
$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$ & y de classe C^2 tq
$$\int_{-\infty}^{\infty} |y^{(k)}(t)|\,dt < \infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

On vt résoudre $y''(t) - y(t) = -g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{y''}(s) - \hat{y}(s) = \hat{g}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Par (Th) précédent, $\widehat{y''}(s) = (-is)^2 \hat{y}(s) = -s^2 \hat{y}(s)$

D'où $-s^2 \hat{y}(s) - \hat{y}(s) = -\hat{g}(s)$

$$\boxed{\hat{y}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,\hat{g}(s)}$$

(R) $h(t) = e^{-|t|}$, on a vu $\hat{h}(s) = \frac{2}{1+s^2}$

D'où $\hat{y}(s) = \frac{1}{2}\hat{h}(s)\,\hat{g}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.
$$= \frac{1}{2}\,\widehat{h * g}(s) \quad \text{admis}$$

$h * g$ est le produit de convolu° de h par g déf :

$$(h * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)\, g(x)\, dx \,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par injectivité de $f \longmapsto \hat{f}$, on a

$$y(t) = \frac{1}{2}\, (h * g)(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)}\, g(x)\, dx .$$

Correc DS 1

Ex 1 pr $x>1$, $F(x)=\int_0^\pi \ln(x+\cos t)\,dt$

a) Justif F bien déf sr $]1,\infty[$.

Pr $x>1$, $x+\cos t > 1+\cos t \geq 0$.
$t\in[0,\pi]$ (ici besoin cont $\int t$)

Dc $t\mapsto \ln(x+\cos t)$ est cont sr $[0,\pi]$
& de Riemann intégrable sr $[0,\pi]$.

Dc F bien déf sr $]1,\infty[$.

b) Mq F est classe C^1 sr $]1,\infty[$

Pr $x>1$, exprimer $F'(x)$ sr f^m d'int.

- soit $f :]1,\infty[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \ln(1+x\cos t)$

Comme $x+\cos(t)>0$, $\forall (x,t)\in]1,\infty[\times[0,\pi]$.
Pa f est cont sr $]1,\infty[\times[0,\pi]$.

•• On Rq pr $t\in[0,\pi]$, $x\longmapsto f(x,t)$ est dérivable sr $]1,\infty[$.

Et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{x+\cos(t)}$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $]1,\infty[\times[0,\pi]$.

D'après un TH du cours, F est de classe C^1 sr $]1,\infty[$
& $\forall x>1$, $F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^\pi \frac{1}{x+\cos t}\,dt$

c) à CDV $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer $F'(x)$, $x>1$

indic $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt = \frac{1}{2}(1+u^2)\,dt \Rightarrow \boxed{dt = \frac{2}{1+u^2}\,du}$

Dc $F'(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = 2\int_0^\infty \frac{1}{x(1+u^2)+1-u^2}$

$= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x+(x-1)u^2}\,du = \frac{2}{1+x}\int_0^\infty \frac{1}{1+\underbrace{\frac{x-1}{1+x}}_{>0 \text{ car } x>1}u^2}\,du$

$= \frac{2}{1+x}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}\,u\right)^2}\,du = \frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}u\right)\right]_0^\infty$

$= \frac{2}{\sqrt{(1+x)(x-1)}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}}$

d) $G(x)=\ln(\sqrt{x^2-1}+x)$, $x>1$

Mq $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x>1$,

$$F(x)=\pi G(x)+k.$$

On sait que G est dérivable sur $]1,\infty[$ (car $\sqrt{x^2+1}+x>1$).

et $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+1\right)$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2-1}+x}} \; \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Dc $F-\pi G$ est dérivable sur $]1,\infty[$ & $\forall x>1$, $(F-\pi G)'(x) = F'(x)-\pi G'(x)$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Donc $F-\pi G$ est <u>cte</u> sur $]1,\infty[$.

D'où $\exists k\in\mathbb{R}$, $\forall x>1$, $F(x)=\pi G(x)+k$.

e) Mq $\forall v \in]-1,1[$, $|\ln(1+v)| \leq \frac{|v|}{1-|v|}$

<u>indic</u> IAF finies

ou $\ln(1+v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\,dt$

$\varphi : t \longmapsto \ln(1+t)$ est C^1 sur $]-1,\infty[$

& $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t}$, $\forall t>-1$

$\forall a,b \in]-1,\infty[$,

$$\boxed{|\varphi(a)-\varphi(b)| \leq |b-a| \sup_{t \text{ compris entre } a \,\&\, b} |\varphi'(t)|}$$

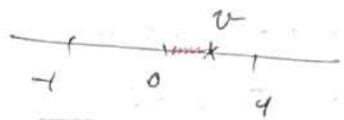
En appliq de $a=v$, $b=0$

D'où $|\ln(1+v)| = |\varphi(v)-\varphi(0)| \leq |v| \sup_{t\in[0,v]} \left|\frac{1}{1+t}\right|$

<u>si $v>0$</u>

On a $|1+t| \geq 1-|t|$

alors $t\in[0,v]$

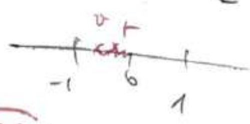


$\Rightarrow |t|=t \leq v=|v|$

$\Rightarrow |1+t| \geq 1-|t| \geq 1-|v| \Rightarrow |\ln(1+v)| \leq \frac{|v|}{1-|v|}$

<u>si $v\leq 0$</u>

$t\in[v,0] \Rightarrow |t| = -t \leq -v = |v|$



$\Rightarrow |1+t| \geq 1-|t| \geq 1-|v|$

f) ed pr $x \geq 2$, $|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x}$

Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x) - \pi \ln(x)$.

$$|F(x) - \pi \ln(x)| = \int_0^{\pi} \ln(x+\cos(t))\,dt - \pi \ln(x)$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\,dt - \int_0^{\pi} \ln(x)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t) - \ln(x)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{\cos t}{x}\right)dt$$

$$\Rightarrow |F(x) - \pi \ln(x)| \leq \int_0^{\pi} \left|\ln\left(1+\frac{\cos t}{x}\right)\right| dt$$

si $v = \frac{\cos t}{x}$, $|v| \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (car $x \geq 2$).

$\Rightarrow v \in]-1,1[$.

D'où $|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \int_0^{\pi} \frac{\left|\frac{\cos(t)}{x}\right|}{1-\left|\frac{\cos t}{x}\right|}\,dt$

$\rightarrow$ $\frac{|\cos t|}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ & $1 - \left|\frac{\cos t}{x}\right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$

$$\Rightarrow |F(x) - \pi \ln x| \leq \int_0^{\pi} \frac{1/x}{1/2}\,dt = \frac{2\pi}{x}.$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{2\pi}{x} = 0$ & de p TDG,

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) - \pi \ln(x)) = 0.$$

g) ed valeur cte k & finalement $F(x)$.

indic pq $F(x) - \pi\ln(x) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

$$F(x) - \pi \ln(x) \overset{(d)}{=} \pi G(x) + k - \pi \ln(x)$$

$$= \pi \ln(\sqrt{x^2-1}+x) + k - \pi \ln(x)$$

$$= \pi \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$$

$\Rightarrow F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

D'après f), $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) - \pi\ln(x) = 0$

& d+, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2)$

$\Rightarrow \quad 0 = \pi \ln(2) + k$

$\Rightarrow \quad k = -\pi \ln(2).$

D'où $F(x) = \pi G(x) + k$

$F(x) = \pi \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) - \pi \ln(2)$

$$\boxed{F(x) = \pi\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) - \ln(2)\right]} \quad x>1$$

$x>1$

Ex 2 $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt, \quad x\in\mathbb{R}$

a) Mq F bien déf & cont sr $\mathbb{R}$.

soit $f : \mathbb{R}\times[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

• La f f est cont sr $\mathbb{R}\times[0,\infty[$.

$|f(x,t)| \leq \dfrac{\pi/2}{1+t^2}, \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty[.$

et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (cv), car $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est cont s $[0,\infty[$

& "$[\arctan(t)]_0^X = \arctan(X) \xrightarrow[X\to\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$

Le Th1 du C3 $\Rightarrow$ F bien déf & cont sr $\mathbb{R}$. ~~sr J de R~~

b) Mq F est C^1 sur $]0,\infty[$ & calculer $F'(x)$, $x>0$:

$f :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

$\forall t \geq 0$, $x \longmapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est dérivable sur $]0,\infty[$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{1+x^2t^2} \times t = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ $\exists$ & est cont sur $]0,\infty[\times[0,\infty[$

•• ⚠ On majore $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ & non $f(x,t)$.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t}{1+t^2}$ vrai mais $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\,dt$ ne CV pas.

Pr $x_0 > 0$ & pr $(x,t) \in [x_0,\infty[\times [0,\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x_0^2t^2}$$

◦ $t \longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)}$ est cont sur $[0,\infty[$

◦ $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t}{x_0^2t^4} = \dfrac{1}{x_0^2t^3}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)}\,dt$ CV.

De d'après TWD 3, F est C^1 sr $[x_0,\infty[$ & $\forall x > x_0$; $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$$

Comme ce q précède est vrai $\forall x>0$, on ad F est C^1 sr $]0,\infty[$.

c) Calculer $F'(x)$ pr $x>0$, $x \neq 1$.
et vt^{R} $F'(1)$.

indic DES...

$$F'(x) \overset{\text{indic}}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+x^2t^2}\right) dt$$

/!\ on ne pt pas séparer integ car l'une (DV).

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2t^2}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2(1-x^2)}(-2\ln(x))$$

$$= \frac{-\ln(x)}{1-x^2}.$$

M53 DS-1

Ex1 $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\, dt \quad , x > 1$

a) Justif F bien déf sr $]1,\infty[$.
b) Mq F est classe C^1 sr $]1,\infty[$ & pr $x>1$
Exprimer $F'(x)$ ss f^m d'intég.
c) 4 CDV $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer $F'(x)$, $x>1$

indic $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

d) $G(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$, $x>1$. Mq $\exists$ cte $k \in \mathbb{R}$
tq $\forall x>1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Mq $\forall v \in]-1,1[$, on a
$$|\ln(1+v)| \leq \frac{|v|}{1-|v|}$$

indic user IAF soit écrire pr $v \in]-1,1[$,
$$\ln(1+v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$$

f) ed pr $x \geq 2$, $|F(x) - \pi\ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x}$

& calculer $\lim_{x\to\infty} F(x) - \pi\ln(x)$

indic : pr l'inégalité, Rq $\pi\ln(x) = \int_0^{\pi} \ln(x)\, dt$
& écrire $F(x) - \pi\ln(x)$ ss f^m d'1 de int + (e).

g) ed vl^R cte k & finalmt exprea $F(x)$ pr $x>1$

indic Rq $F(x) - \pi\ln(x) = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

Ex2 pr $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, dt$

a) Mq F bien déf & cont sr $\mathbb{R}$
b) Mq F est de classe C^1 sr $]0,\infty[$ & pr $x>0$,
exprimer $F'(x)$ ss f^m integ
c) calculer $F'(x)$ pr $x>0$, $x \neq 1$. ed vl^R $F'(1)$

indic pr calcul $F'(x)$ DES
$$\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right)$$

d) soit $a>0$, Mq $\forall x>0$
$$\arctan(ax) \int_a^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$\pi/2$

e) Mq F $\nearrow$ sr $]0,\infty[$, ed ac (d) F a limite finie ℓ en $+\infty$

p (1) p f) Mq $\ell = \frac{\pi^2}{4}$.

Mes Impressions

COV $\frac{1}{2}$ branche parabolique : $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2},\ \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$dt = \frac{2}{1+u^2}\,du \qquad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$(\tan u)' = u'(1+\tan u)$$

- user majorants implicites en jouant sur le domaine de définition

⚠ Ne jamais split des integ (DV)

↳ si possible faire le calcul de l'integ initiale

IAF si f dérivable. $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup |f'(t)|$

(on appliq @ $\begin{cases} x = v \\ y = 0 \end{cases}$

- $\pi \ln(1+x) = \int_0^{\pi} \ln(1+x)\,dt$

- F^R attention si COV FF de Bioch : vérifier égalité expression.
- Pas besoin d'introduire $f(x,t)$ sur $\mathbb{R} \times [a,b]$ pour déterminer si $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est bien déf.

⚠ - Pour déterminer C^1 de $F(x)$, on majore $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur cas $\mathbb{R} \times]a,b]$.

Chap 4 : Séries de Fourier

4.1. Séries trigonométriques

D Une série trigonométriq est une série de f° dont le terme général est :

$$U_n(x) = a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{où} \quad n \geq 0,\ a_n, b_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}.$$

Rq 1) Comme $\sin(0 \cdot x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la valeur de b_0 n'est pas importante & on supposera que $b_0 = 0$.

2) En utilisant $\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

On a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)} = \bullet$$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\, e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\, e^{-inx}$$

$\frac{1}{i} = -i$

On pose pour $n = -k$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\, e^{inx} + \sum_{k=-N}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-1} + ib_{-1})\, e^{ikx}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}}$$

où $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n \geq 1 \\ a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & n \leq -1. \end{cases}$

ie : une st pt ê aussi écrit ĉ une série de fonct° dt le terme général est donné par $\boxed{v_n(x) = c_n\, e^{inx}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans notre cadre, une série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n$ CV si

$$\sum_{n \geq 0} (v_n + v_{-n}) \text{ CV} \quad \left(\text{ie } \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} v_n\ \exists\right)$$

TH 1 Sppos $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfont : $\sum_n |a_n| < \infty$, $\sum_n |b_n| < \infty$,

Alors la série trigonométriq associée $\sum_n \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$ CV normalement sur $\mathbb{R}$ et si $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$, $x \in \mathbb{R}$

alors S est cont sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \leq |a_n|+|b_n|$

Or on a $\sum_n (|a_n|+|b_n|) < \infty$ & donc

$$\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| < \infty$$

Ainsi la série $\sum_n (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

Rq $\forall n\geq 0$, $x\longmapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ & par convergence normale donc UN, on cd que S est cont sur $\mathbb{R}$.

TH 2 soit $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $(a_n)_{n\geq 0}$ & $(b_n)_{n\geq 0}$ st 2 suites décroissantes & qui tendent vers 0.

$k\in\mathbb{Z}$, $\alpha>0$, $\alpha<\pi$

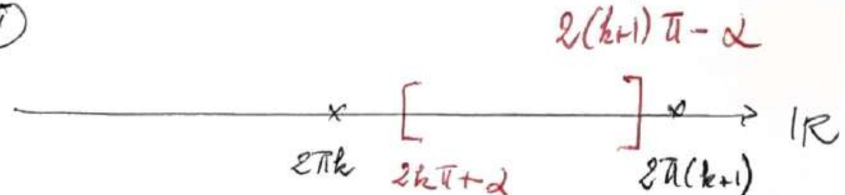
Alors (i) la st $\Longleftrightarrow$ CV sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(ii) la st CV UN s $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$

(iii) si $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ 34 $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

alors S est cont sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Rq



$I_k = [2k\pi+\alpha, 2\pi(k+1)-\alpha]$ alors $I_k \cap 2\pi\mathbb{Z} = \emptyset$.

Preuve : Mq si $I_k = [2k\pi+\alpha, 2\pi(k+1)-\alpha]$ où $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in]0,\pi[$ alors $\sum_n a_n\cos(nx)$ CV UN sur I_k.

comme $\cos(nx) = \cos(n(x-2k\pi))$, la série $\sum_n a_n\cos(nx)$ CV UN sur I_k ssi $\sum_k a_n\cos(nx)$ CV UN sur $I_k - 2k\pi = I_0 = [\alpha, 2\pi-\alpha]$.

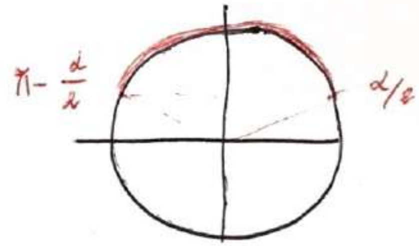
$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\cos(nx), \quad x\in I_0.$$

Mq $(S_n(x))_N$ vérifie le CdCauchy UN sur I_0.

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall p>q\geq N_0, \forall x\in I_0$,

$$|S_p(x)-S_q(x)| \leq \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0, \forall p>q\geq N_0, \forall x\in I_0, |S_p(x)-S_q(x)|\leq \varepsilon.$



Étape 1 : Mq $\exists C>0$ tq $\forall N\geq 0$, $\forall x\in I_0$,

$$|V_N(x)|\leq C \text{ où } V_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\cos(nx)$$

En effet, $V_N(x) = Re\left(\sum_{n=0}^{N} e^{inx}\right)$

$$= Re\left(\frac{e^{i(N+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right),$$ $x\in I_0$ alors $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ dc $e^{ix}\neq 1$

$$= Re\left(\frac{e^{\frac{i(N+1)x}{2}}\left(e^{\frac{i(N+1)x}{2}}-e^{-\frac{i(N+1)x}{2}}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow V_N(x) = Re\left[\frac{e^{i(N+1)x/2}}{e^{ix/2}}\cdot\underbrace{\frac{2i\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\in\mathbb{R}}\right]$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow |V_N(x)|\leq\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$x\in I_0 \iff \alpha\leq x\leq 2\pi-\alpha \iff \frac{\alpha}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\pi-\frac{\alpha}{2}$

Étape 2 : On mq $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall p>q\geq N_0$, $\forall x\in I_0 \Rightarrow |S_p(x)-S_q(x)|\leq\varepsilon$.

$$S_p(x)-S_q(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k\cos(kx) - \sum_{k=0}^{q} a_k\cos(kx)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} a_k\cos(kx)$$

On a $\cos(kx)=V_k(x)-V_{k-1}(x)$, $k\geq 1$ Transformée d'Abel

$\left(V_k(x)=\sum_{n=0}^{k}\cos(nx)\right)$.

$$S_p(x)-S_q(x) = \sum_{k=q+1}^{p} a_k\left(V_k(x)-V_{k-1}(x)\right)$$

$j=k-1$

$$= \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_k(x) - \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_{k-1}(x)$$ $k=j+1$

$$\Rightarrow S_p(x) - S_q(x) = \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_k - \sum_{j=q}^{p-1} a_{j+1} V_j$$

$$= -a_{q+1} V_q + a_p V_p + \sum_{k=q+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x).$$

$$|S_p(x) - S_q(x)| \leq |a_{q+1}| |V_q(x)| + |a_p| |V_p(x)| + \sum_{k=q+1}^{p-1} |a_k - a_{k+1}| |V_k(x)|$$

$$\Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|a_{q+1}| + |a_p| + \sum_{k=q+1}^{p-1} |a_k - a_{k+1}| \right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|a_{q+1}| + |a_p| + \sum_{k=q+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) \right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(a_{q+1} + a_p + a_{q+1} - a_p \right)$$

$$= \frac{2\, a_{q+1}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Comme $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, $\exists N_0 \mid q \geq N_0$

$\Rightarrow a_{q+1} \leq \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \varepsilon \Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon.$

Donc $\sum_n (a_n \cos(nx))$ CV CVU sur I_0 & de m ts les I_k, $k \in \mathbb{Z}$.

De m̂, on mq $\sum b_n \sin(nx)$ CV UN sur I_k, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ CV UN sur I_k, $k \in \mathbb{Z}$, ce q mq le point (ii).

Pour les pts (i) & (ii), RQ si $x_n \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on pt trouver $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ tq $x \in I_k = [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$

$\square$

Qqs pptés générale sur (st)

(1) La (st) $\sum_{n} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (CV) en un point $x \in \mathbb{R}$ (resp. (CV) UN sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$) si et seulement si la (st) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{in\mathbb{Z}}$ (CV) en $x \in \mathbb{R}$. (resp UN sur I).

où $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - i b_n), & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + i b_n), & n < 0 \end{cases}$

(2) Si la (st) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (CV) en un pt $x \in \mathbb{R}$, alors elle (CV) en $x + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ & si $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

On a $S(x + 2k\pi) = S(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

ie S est une f 2π-périodiq.

(3) Si la (st) (CV) U.N. sur $I \subset \mathbb{R}$ alors si $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $x \in I$,

on a que S est cont sur I.

(4) Si la série (st) (CV) simplement sur I et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-n a_n \sin(nx) + n b_n \cos(nx))$ (CV) UN sur I

alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $x \in I$

On a que S est C^1 sur I & $\forall x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n b_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx)).$$

Calcul de coefficients d'une (st)

Sppps la (st) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$ (CV) UN sur $\mathbb{R}$.

Notons $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x) e^{-ipx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ipx} dx$$

& (CV) U.N

Rq $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ipx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-p)} e^{i(n-p)x}\right]_0^{2\pi} & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

$\overset{\text{"}}{0}$ car $e^{2ik\pi} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

D'où $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ipx} dx, \ p \in \mathbb{Z}$.

or $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - i b_n) & , n > 0 \\ a_0 & \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) & , n < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} & , n > 0 \\ b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) & , n > 0 \end{cases}$

D'où • $\boxed{a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) dx.}$

• Pour $n > 0$,

$a_n = c_{-n} + c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-inx} dx$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) (e^{inx} + e^{-inx}) dx$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \cos(nx) dx, \ n > 0.$

• Pour $n > 0$,

$b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{inx} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-inx} dx$

$= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \underbrace{(e^{inx} - e^{-inx})}_{2i \sin(nx)} dx$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \sin(nx) dx, \ n > 0.$

Le pb de séries de Fourier est un peu le pb inverse : On $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$. l'espace des fs cont par morcx sur $\mathbb{R}$ & 2π- périodiqs.

On se donne $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on lui associe les coefficients réels de Fourier de f :

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$, pr $n > 0$,

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Et les coefficients de Fourier complexes de f pr $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$.

La série de Fourier (sdF) $\leftarrow A \rightarrow$ à f est la (st) $\leftarrow A \rightarrow$ à aux coeff réels a_n & b_n ou c_n.

ie, la sdF de f est la (st) suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \quad \text{ou} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e^{inx}.$$

Rq Comme $x \longmapsto f(x)\, e^{-inx}$ est 2π-périodiq, on a
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$.

De m̂ pr les a_n & b_n.

Prop soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$

a) si f est paire, alors $\forall n > 0$, $b_n = 0$

& $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx & n = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx & n > 0 \end{cases}$

b) si f est impaire alors $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$ &
$\forall n > 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx$,

Preuve (a) $\forall n > 0$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$

car $x \longmapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \underset{f \text{ paire}}{=} \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx$$

Pour $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx$$

car $x \longmapsto f(x) \cos(nx)$ est paire

(b) $\triangle$

$\square$

youtube-dl → ffmpeg.

Règle de CV de SdF

On va en voir essentiellement 3 :

(*) TH de Dirichlet (CV ponctuelle)

(**) TH de convergence L^2 (quadratiq)

(***) TH de Féjer (CV UN.)

L (de Riemann - Lebesgue)

$-\infty < a < b < \infty$

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, spps intégrable au sens de Riemann.

Alors $I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $I(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$.

Preuve : (voir sec° sur $t^{\text{ée}}$ de Fourier)

RQ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont,

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$; on pt définir

$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx}\,dx$ & on a :

$\hat{f}(s) \xrightarrow[|s| \to \infty]{} 0$, On a prouvé $\int_a^b f(x) e^{-isx}\,dx \xrightarrow[|s| \to \infty]{} 0$

Cor soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ & $c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $c_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0$.

Preuve : $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$ (par Lemme Riemann Lebesgue)

$a_n = c_n + c_{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ □

Pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on notera :

$x \in \mathbb{R}$, $(S_\infty f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, où $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt$

Th de Dirichlet

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ & spps $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tq & $\exists\, \delta > 0$

$$u \longmapsto \frac{1}{u}\left(f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right)$$

est borné sur $]0, \delta]$ alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

ici $f(x_0^+) = \lim_{\substack{t \to x_0 \\ >}} f(t)$, $f(x_0^-) = \lim_{\substack{t \to x_0 \\ <}} f(t)$

ex si f est de plus cont en x_0 alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = f(x_0)$$

Cor (TH de Dirichlet)

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 par morx & 2π périodiq sr $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

ex si f est de + cont en x, on a $\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = f(x)$.

Th de Dirichlet

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ & spps $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq & $\exists \delta > 0$

$$u \longmapsto \frac{1}{u}\left(f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0^+)-f(x_0^-)\right)$$

est bornée sur $]0,\delta]$ alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

ici $f(x_0^+) = \lim_{t \to x_0, >} f(t)$, $f(x_0^-) = \lim_{t\to x_0, <} f(t)$

ep si f est de plus cont en x_0 alors
$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = f(x_0)$$

Cor (TH de Dirichlet)

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 par morcx & 2π périodiq sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

ep si f est de + cont en x, on a $\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = f(x)$.

Preuve Th Dirichlet

$$S_n f(x_0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx_0}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

$$S_n f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x_0-t)}}_{D_n(x_0-t)}\,dt$$

où $D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku}$, $u \in \mathbb{R}$.

Calculons $D_n(u)$: $\quad p = k+n$

$$D_n(u) = e^{-inu}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)u} = e^{-inu}\sum_{p=0}^{2n} e^{ipu}$$

- si $u \in 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ipu} = 1$, $\forall p \in \mathbb{N}$
  $D_n(u) = 2n+1$
- si $u \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{iu} \neq 1$, $D_n(u) = e^{-inu}\dfrac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1}$

$$= \frac{e^{-inu}e^{i(n+\frac{1}{2})u}\left[e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}\right]}{e^{i\frac{u}{2}}\left[e^{i\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right]}$$

$$= \frac{2i\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right)}{2i\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$e^{i\theta}-1 \leftarrow$ m^ttre en fct° angle moitié noyau de Dirichlet

$$D_m(u) = \begin{cases} 2m+1, & \text{si } u \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}, & \text{si } u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

D+, on R D_m est paire & 2π-périodiq.

On a $S_m f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_m(x_0 - t)\, dt$

Posons $u = t - x_0$.

D'où $S_m f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(u+x_0)\, D_m(\cancel{-}u)\, du$

D_m paire

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0)\, D_m(u)\, du$$

par 2π-périodicité !

$$S_m f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(u+x_0) D_m(u)\, du + \int_0^{\pi} f(u+x_0) D_m(u)\, du\right]$$

pose $v = -u$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(x_0 - v) D_m(v)(-dv) + \int_0^{\pi} f(u+x_0) D_m(u)\, du\right]$$

$$S_m f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+u) + f(x_0-u)\, D_m(u)\, du$$

$$\cdot\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_m(u)\, du = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-m}^{m} e^{iku}\, du$$

$$= \sum_{k=-m}^{m}\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\, du = \frac{1}{4\pi} 2\pi = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\, du = \begin{cases} 2\pi & k = 0 \\ \frac{1}{ik}\left[e^{iku}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Posons $y_0 := \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

$-2y_0 \times \frac{1}{2}$

On a $S_m f(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+u) + f(x_0-u)\, D_m(u)\, du$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x_0+u) + f(x_0-u)\right) D_m(u)\, du - 2y_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_m(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y_0\right) D_m(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y_0}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot \sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)u\right) du$$

Notons $\varphi : \left]0, \pi\right] \to \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \varphi(u) = \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y_0}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

D'où $S_n f(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(u) \sin((n+\frac{1}{2})u)\, du$

On sait que • φ est cont par morceaux sur $]0,\pi]$.

• $\varphi(u) = \dfrac{\frac{u}{2}}{\sin(\frac{u}{2})} \times \dfrac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y_0}{\frac{u}{2}}$

limite vaut 1. — bornée sur $]0,\delta]$.

Donc $\int_0^\pi \varphi(u)\, du$ CV.

$S_n f(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(u) \dfrac{e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{2i}\, du$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2i} \left[\int_0^\pi \varphi(u)\, e^{i\frac{u}{2}} e^{inu}\, du - \int_0^\pi \varphi(u)\, e^{-i\frac{u}{2}} e^{-inu}\, du \right]$

Or d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\boxed{CPM}$ & tq $\int_a^b |h(t)|\, dt < \infty$

Alors $\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b h(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = 0$.

D'où $\lim_{n\to\infty} (S_n f(x_0) - y_0) = 0$

§ Th de Féjer & CV UN

livre : Trigonometric Series

Notat° : soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cont & mes, 2π-périodiq.

$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x) =: (\sigma_n f)(x)$ n° polynôme de Féjer.

Th (Cde Féjer) soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont, 2π-périodiq

Alors $\lim_{n\to\infty} \sup |\sigma_n f(x) - f(x)| = 0$.

Preuve : On a $\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} (S_j f)(x) =$

$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u))\, D_j(u)\, du$

où $D_j(u) = \begin{cases} 2j+1 & , u = 0 \\ \dfrac{\sin((j+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} & u \in]0,\pi] \end{cases}$

$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) \left(\sum_{j=0}^{n} D_j(u) \right) du$

□

$u \in]0,\pi]$,

$$\sum_{j=0}^{n} D_j(u) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin\left(\left(j+1/2\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{i\left(j+\frac{1}{2}\right)u}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{u}{2}} \sum_{j=0}^{n} e^{iju}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{u}{2}} \frac{e^{i(n+1)u}-1}{e^{iu}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\cancel{e^{i\frac{u}{2}}} \frac{e^{i(n+1)\frac{u}{2}}\left(e^{\frac{i(n+1)u}{2}} - e^{-i(n+1)\frac{u}{2}}\right)}{\cancel{e^{i\frac{u}{2}}}\left(e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)\frac{u}{2}} \frac{\cancel{2i}\sin\left((n+1)\frac{u}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} D_j(u) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2$$

D'où $(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u)\right) K_n(u)\, du$

où $K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_j(u) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2$, $u \in]0,\pi]$

Fait 1 : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(u)\, du = \frac{1}{2}$ exercice

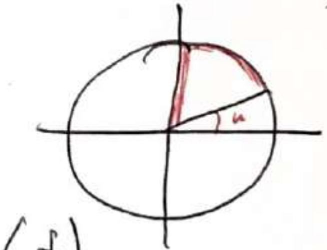
Fait 2 : $\forall \delta \in]0,\pi]$, $\sup_{u \in [0,\pi]\setminus[0,\delta]} |K_n(u)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$u \neq 0$, $|K_n(u)| = \frac{1}{n+1} \frac{\sin\left((n+1)\frac{u}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

car $\forall u \in]0,\pi]\setminus[0,\delta]$,

$\sin\left(\frac{u}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0$

et donc $\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$



$K_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(0)$; $D_j(0) = \sum_{k=-j}^{j} e^{ik0}$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(2j+1)$ $\quad = 2j+1$

$$\sup_{u \in [0,\pi]\setminus[0,\delta]} |K_n(u)| \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sigma_n f(x) - f(x) \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u)\right) K_n(u)\, du$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 f(x) K_n(u)\, du .$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)\right) K_n(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\delta} \dots + \int_{\delta}^{\pi} \dots\right]$$

f cont & 2π-périodiq $\Rightarrow f$ est unif. cont.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq

$|u-v| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon$ & $|f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon$

Rappel $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ (Pr $n, m \in \mathbb{N}$), $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$, $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} (S_k f)(x)$

Th Fejer si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N f(x) - f(x)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Cor 1 si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ & si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Preuve $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = 0 \Rightarrow S_N f = 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sigma_N f = 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$

& dc p. le Th de Fejer, $f \equiv 0$. □

Polynômes trigonométriqs

Pr $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}(e_k, k \in [\![-N, N]\!] = [-N, N] \cap \mathbb{Z})$

où pr $k \in \mathbb{Z}$, $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(t) = e^{ikt}$

L'ens des polynômes trigo $\mathcal{P}$ est déf ċ $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_k, k \in \mathbb{Z})$

Cor 2 $\mathcal{P}$ est dense ds $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni de la norme infinie

Preuve : $\forall 0 \leq k \leq N$, $S_k f \in \mathcal{P}_N$, $\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k f \in \mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}$.

Fejer $\Rightarrow \|\sigma_N f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

CV quadratique

Pr $f, g \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on déf :

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)}\, dt .$$

$$\& \quad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

▸ $<\cdot,\cdot>$: est une forme sesquilinéaire, positive.

⚠ elle n'est pas déf. ⊕ car si $\|f\|_2 = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Prop La famille $(e_k)_{-N\leq k\leq N}$ forme une base orné de $\mathcal{P}_N$.

Preuve ⚠ $\langle e_k, e_j\rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\overline{e^{ijt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq j \\ 1 & \text{si } k=j\end{cases}$, $\overline{e^{ijt}} = e^{-ijt}$

Puis vrai libre

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt$

$= \langle f, e_k\rangle_2$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle_2\, e_k}$$

$\forall |l| \leq N$, $\langle S_N f, e_l\rangle_2 = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle_2 \underbrace{\langle e_k, e_k\rangle}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ si } k\neq l}$

$= \langle f, e_k\rangle_2$.

$\forall |l| \leq N$, $\boxed{\langle S_N f - f, e_l\rangle_2 = 0}$ ff magiq.

ie $S_N f - f$ est orthogonal : $\perp \mathcal{P}_N$

Th si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors ($\forall$ si $N \in \mathbb{N}$)

$$\inf_{p\in\mathcal{P}_N} \|f-p\| = \|f - S_N f\|_2$$

Preuve : $\boxed{\leq}$ est évidente car $S_N f \in \mathcal{P}_N$.

$\boxed{\geq}$ soit $p \in \mathcal{P}_N$:

$\|f-p\|_2^2 = \|(f - S_N f) + (S_N f - p)\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \underbrace{\|S_N f - p\|_2^2}_{\geq 0}$.

or $S_N f - p \in \mathcal{P}_N$ (car $\mathcal{P}_N$ est sev)

FF magiq $\Rightarrow f - S_N f \perp \mathcal{P}_N$.

D'où $\|f-p\|_2 \geq \|f - S_N f\|_2$, $\forall p \in \mathcal{P}_N$

& de $\inf_{p\in\mathcal{P}_N} \|f-p\|_2 \geq \|f - S_N f\|_2$ □

Th (Inégalité de Bessel) si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$ CV & $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$

espace préhibertien.

Preuve du (Th) Inégalité de Bessel

D'après ff magiq, $f - S_N f \perp \mathcal{P}_N$.

$S_N f \in \mathcal{P}_N$ de $\langle f - S_N, f - S_N \rangle_2 = 0$

$\Rightarrow \langle f, S_N f \rangle = \| S_N f \|_2^2$

D'où $\| f - S_N f \|_2^2 = \| f \|_2^2 + \| S_N f \|_2^2 - 2 \underbrace{\mathrm{Re} \langle f, S_N f \rangle}_{\| S_N f \|_2^2}$

$= \| f \|_2^2 - \| S_N f \|_2^2$

$\Rightarrow \| f \|_2^2 - \| S_N f \|_2^2 \geq 0 \Rightarrow \| S_N f \|_2^2 \leq \| f \|_2^2$

Car $\| S_N f \|_2^2 = \| \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$ car $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ base orthonormée.

$\left(\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ et bornée (par $\| f \|_2^2$)

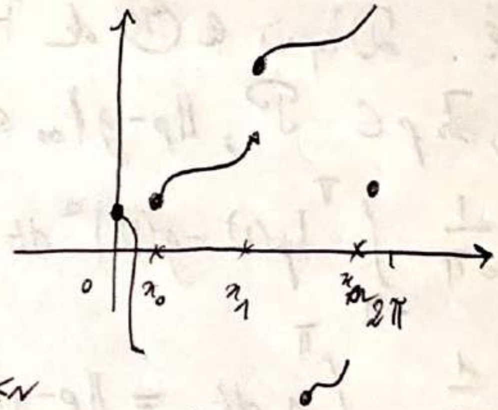
donc elle (CV), ce qui montre le (Th) □

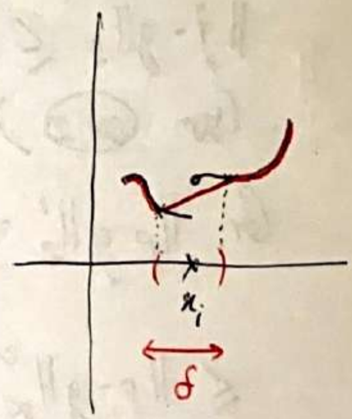
(L) Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ alors

$\exists g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\| f - g \|_2 \leq \varepsilon$. □

Preuve : On peut se ramener à une f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont par morceaux & 2π-périodiq.

Notons $x_0, x_1, \dots, x_N$ les points de discontinuité de f sur $[0, 2\pi]$.





$$\int_{x_i - \delta}^{x_i + \delta} | f(t) - g(t) |^2 \, dt \leq \delta \| f \|_\infty^2 \, \delta$$

$$\Rightarrow \| f - g \|_2^2 = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i - \delta}^{x_i + \delta} | f(t) - g(t) |^2 \, dt \leq \delta \| f \|_\infty^2 \delta (N+1)$$

Avec $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\delta \| f \|_\infty^2 (N+1)}$, on obtient $\| f - g \|_2 \leq \varepsilon$.

□

Cor si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ alors $\exists p \in \mathcal{P}$ tq $\|f-p\|_2 \leq \varepsilon$.

__Preuve__ D'après le lemme, $\exists g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\|f-g\|_2 \leq \varepsilon$. D'après le Th de Féjer (son cor 2), $\exists p \in \mathcal{P}$, $\|p-g\|_\infty \leq \varepsilon$

Or $\|p-g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(t)-g(t)|^2 dt$

$\leq \|p-g\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = \|p-g\|_\infty^2$.

D'où $\|p-g\|_2 \leq \varepsilon$ & p l'inégalité triangulaire :

$\|f-g\|_2 \leq \|f-g\| + \|g+p\|_2 \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$

$\square$

Th (de CV quadratiq).

si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\|S_k f - f\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

__Preuve__ : soit $\varepsilon > 0$, d'après le cor précéd^t, $\exists p \in \mathcal{P}$ tq $\|f-p\|_2 \leq \varepsilon$.

Or $\exists N \in \mathbb{N} \mid p \in \mathcal{P}_N$ or $\forall k \geq N$, $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}_k$.

$\forall k \geq N$, $p \in \mathcal{P}_k$ & $\|f-p\|_2 \leq \varepsilon$

$\|f - S_k f\|_2 \leq \|f-p\|_2 \leq \varepsilon$.

$\square$

Th Egalité de Parseval.

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

& $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$.

__Preuve__ : On a vu ds la preuve de l'inégalité de Bessel : $\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N f\|_2^2$

D'après le Th précédent, $\|f - S_N f\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

& $\|S_N f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$.

D'où $\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \|f\|_2^2$ ie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$.

$\square$

Thm soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont & 2π-périodique & C^1 par morceaux. Alors $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e^{ikt}$ CV normalement de UN vers f sur $\mathbb{R}$.

Preuve D'après Thm de Dirichlet (f est C^1 par morceaux) la SdF de f CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f cont sur $\mathbb{R}$

Mq SdF de f CV normalement sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |c_n e^{inx}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty \,?$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ une subdivision de $[-\pi,\pi]$ tq f est C^1 sur $]x_k, x_{k+1}[$, $k=0,\dots,n-1$

Par Chasles, $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, e^{-inx}\, dx$

Soit $x_k < a_{k(j)} < b_{k(j)} < x_{k+1}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{a_{k(j)}}^{b_{k(j)}} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{-1}{2i\pi n}\left[f(x)e^{-inx}\right]_{a_{k(j)}}^{b_{k(j)}}$$

$f(x)$	$f'(x)$
e^{-inx}	$-\frac{1}{in}e^{-inx}$

Considérons $a_{k,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_k$; $b_{k,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_{k+1}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{-1}{2i\pi n}\left(f(x_{k+1})e^{-inx_{k+1}} - f(x_k)e^{-inx_k}\right) + \frac{1}{2i\pi n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\, e^{-inx}\, dx \,.$$ (L'intégrale CV)

$$c_n = \frac{-1}{2i\pi n}\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})e^{-inx_{k+1}} - f(x_k)e^{-inx_k}\right)}_{\text{somme télescopique}} + \frac{1}{2i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$$

par périodicité

$$c_n = -\frac{1}{2i\pi n}\left(\cancel{f(x_N)e^{-inx_N} - f(x_0)e^{-inx_0}}\right) + \frac{1}{in}c_n(f')$$

$x_N = \pi$, $x_0 = -\pi$.

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(f')}\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

f' est cont ℓ morcx. Dc par le thm de Parseval,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < \infty, \text{ comme } \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

D'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ & $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2\right)^{1/2}$

⚠ Retour sur Parseval

si f est cont ℓ morcx, 2π-périodiq,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

On pt mq $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n>0 \\ a_0 & n=0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n), & n<0. \end{cases}$

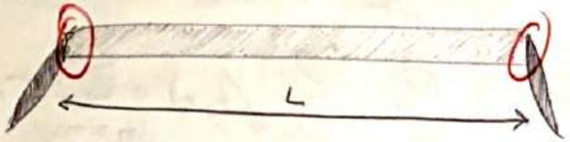
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{4}|a_{-n} + ib_{-n}|^2 + |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}|a_n + ib_n|^2$$

On pt sppser f réelle, ds ce cas $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{-1} (|a_{-n}|^2 + |b_{-n}|^2) + |a_0|^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)}$$

1807 J. Fourier équat de la chaleur
barre métallique de longueur L



Spps qu'à l'état initial ($t=0$), la température en t de la barre. Spp de t, qu'on chauffe les 2 extrémités de la barre de façon à maintenir une température égale aux extrémités de la barre au cours du temps.

Pt-on déterminer la $T°$ en tt point de la barre au cours du tps ?

J. Fourier a modélisé le pb de la façon suivante

La $T°$: $u : [0,\infty[\times [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t,x) \longmapsto u(t,x)$

est solut d'une équat, appelée <u>équat</u> de la chaleur.

pr simplifier, sppr que $L = 2\pi$

Or $\forall t \geq 0$, $u(t,0) = u(t,2\pi)$

Et dc on pt prolonger u en une f encore notée u.

$$u : [0,\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et $\forall t \geq 0$, $x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodiq.

L'équat de la chaleur consiste à résoudre le pb suivant : étant donné $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une f cont. C^1 par morcx 2π périodiq, on cherche une f $u : [0,\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>cont</u> sr $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, C^2 sr $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, 2π-périodiq en x & tq

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

<u>Th (Fourier)</u>

Le pb ci-dessous admet une uniq solut.

<u>Preuve</u> : <u>Spps</u> que pb admet une solut u.
Fixons $t \geq 0$, $x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodiq, <u>cont</u> sr $\mathbb{R}$, C^1 p morcx.
P le Th précédent, on a $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-inx}$$

:

où $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}$

$\forall t \geq 0,\ x \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ est 2π-périodiq

& C^1 sur $\mathbb{R}$, ℓ (Th) précdt

$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum \tilde{c}_n(t)\, e^{-inx}$

où $\tilde{c}_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, e^{-inx}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}.$

(Mq) c_n est dérivable sur $]0,\infty[$ & $\forall t > 0$,

$c_n'(t) = \tilde{c}_n(t)$.

- $(t,x) \longmapsto u(t,x)\, e^{-inx}$ est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi]$.

$\forall x \in [-\pi,\pi],\ t \longmapsto u(t,x)\, e^{-inx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ &

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x), e^{-inx}\right) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, e^{-inx}$.

& $(t,x) \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, e^{-inx}$ est cont sur $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi]$

$\Rightarrow c_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ &

$c_n'(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, e^{-inx}\, dx = \tilde{c}_n(t)$

<u>Rq</u> $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial u}{\partial x^2}(t,x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t) e^{-inx}$

u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Donc $\forall t > 0,\ u_t : x \longmapsto u(t,x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{-inx}$

D'a preuve du (Th) précdt, on a :

$c_n(t) = c_n(u_t) = \dfrac{1}{in} c_n(u_t') = \dfrac{1}{in} \times \dfrac{1}{in} c_n(u_t'')$

$\Rightarrow -n^2 c_n(t) = c_n(u_t'')$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| -n^2 c_n(t)\, e^{-inx} \right| = n^2 |c_n(t)| = |c_n(u_t'')|$

$u_t''(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x^2}(t,x) \overset{\text{équa}}{=} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$.

$\forall t > 0,\ x \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ est C^1.

(car u est C^2 sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$).

$\Rightarrow \forall t>0,\ u''_t$ est $C^1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u''_t)| < \infty$

& (Th) de dérivat° des séries, on obtient la (f)

u vérifiant l'(E) de la chaleur on a :

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n'(t) - n^2 c_n(t))\, e^{-inx}, \quad \forall t>0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n'(t) - n^2 c_n(t) = 0$

$\forall t>0 \quad \Rightarrow \forall t>0,\ c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$

Or c_n est cont sur $[0,\infty[$

car $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\, dx$

& $(t,x) \longmapsto u(t,x)\, e^{-inx}$ est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi]$

$$\lim_{t\to 0} c_n(t) = \alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{t\to 0} u(t,x)\, e^{-inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\, e^{-inx} = c_n(u_0)$$

<u>cl</u> si u est solut°, alors $\forall t \geq 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u_0)\, e^{-n^2 t} e^{-inx}$$

Il reste à mq si u est défini ĉ ci-dessus, alors u est bien solut° du pb. (Δ).

(Δ : exercice).

On pt mq $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{t\to\infty} c_n(u_0)\, e^{-n^2 t} e^{-inx}$

or $\lim_{t\to\infty} e^{-n^2 t} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t,x) = c_0(u_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\, dx$$

Retour sur algo GS

c) en précision finie, on pt avoir perte d'orthogonalité $\| I_n - \tilde{Q}^T \tilde{Q} \|_2$ de l'ordre de grandeur $\epsilon \, cond_2(\tilde{R})$.
Ceci pt ê encore + grd ds GS classiq = vers° vectorisée où on remplace la boucle j par
$\tilde{R}[1:k-1, k] = \tilde{Q}[:, 1:k-1]^T A[:, k]$;
$y = A[:, k] - \tilde{Q}[:, 1:k-1] * \tilde{R}[1:k-1; k]$

Rq 10.5

XI / La méthode QR

Calculer $Sp(A)$?

Algo 11.1 ($\boxed{M}$ QR de shift)

On initialise $A_0 = Q_0^T A Q_0$ & Q_0 orthogonale, A_0 forme de Hessenberg.
Pr $k = 0, 1, 2, \dots$
On se donne un shift $\mu_k \in \mathbb{R}$
calcule décompo QR de $A_k - \mu_k I = Q_{k+1} R_{k+1}$
Calcule $A_{k+1} = \mu_k I + R_{k+1} Q_{k+1}$.

NB A & A_k st semblables. car $A_{k+1} = Q_{k+1}^T A_k Q_{k+1}$

Rq
ⓐ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists Q_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale tq $A_0 = Q_0^T A Q_0$ est de Hessenberg $\Leftarrow$ cor 8.4
ⓑ $Q_{k+1}^T A_k Q_{k+1} = Q_{k+1}^T (A_k - \mu_k I) Q_{k+1} + \mu_k I$
$= Q_{k+1}^T Q_{k+1} R_{k+1} Q_{k+1} + \mu_k I$
$= A_{k+1} - \mu_k I + \mu_k I = A_{k+1}$.

Th 11.2 (de préservat° de forme)

a) Q_{k+1} & A_{k+1} st de forme Hessenberg, & + précisément Q_{k+1} pt s'écrire ĉ un produit de $n-1$ rotat°s de Givens.

b) si de + A est symétriq, alors tt mat A_k est sym & tridiag, & R_{k+1} ne contient que élts non-nuls sr diag. ppl, ainsi que sr 1° & 2° super-diag.

98

Preuve : Mq

ⓐ PR s/ k.

$\underline{k=0}$, A_0 est de forme Hessenberg d'après 8.14.

$\underline{k \Rightarrow k+1}$ soit A_k de forme Hessenberg

$\Rightarrow A_k - \mu_k I$ est aussi de forme Hessenberg

Rq 8.9 $\Rightarrow$ le facteur ortho Q_{k+1} ds la décomp QR de $A_k - \mu_k I$ est de forme Hessenberg

$\Rightarrow A_{k+1} - \mu_k I = R_{k+1} Q_{k+1}$ de forme Hessenberg.

ⓑ A, A_0 symétriqs par hypo/constructO : $\underline{k=0}$

PR $\underline{k \Rightarrow k+1}$: $(*)$ $A_{k+1} = Q_{k+1}^T A_k Q_{k+1}$

NB : A_k est sym & de forme Hessenberg

$\Rightarrow A_k$ tridiagonale symétriq

aussi $A_k - \mu_k I$ $\Rightarrow$ d'après Rq 8.10 :

R_{k+1} ▽ ds tridiag$_n$ $\neq 0$ potentiellement. □

Cor 11.3 (Complexité de $\boxed{M}$ QR)

L'algo QR nécessite $O(n^3)$ ou p initialisaO, ainsi que $O(n^2)$ p itéraO. Si A est symétriq & creuse, la complexité pt ê réduite à $O(n^2)$ au p initiO ainsi $O(n)$ p itéraO.

Cvce de l'algo QR ss shift $\mu_k = 0$

Lemme 11.4 Posons $W_k = Q_0 \cdot Q_1 \cdots Q_k$ mat orthog

$$\Rightarrow A W_k = W_k A_k$$

$$(A - \mu_k I) W_k = W_{k+1} R_{k+1}$$

$$(A^T - \mu_k I)^{-1} W_k = W_{k+1} R_{k+1}^{-1}$$

Preuve 11.4 Mq $A W_k = W_k A_k$ PR s/ k.

$\underline{k=0}$ $W_0 = Q_0$ & $A_0 = Q^T A Q_0 \Rightarrow Q_0 A_0 = A Q_0$

$\underline{k \Rightarrow k+1}$ $A W_{k+1} = A W_k Q_{k+1} \overset{\text{hdr}}{=} W_k \underbrace{A_k Q_{k+1}}_{Q_{k+1} A_{k+1} \text{ par } (*)}$

$= W_k Q_{k+1} A_{k+1}$

$= W_{k+1} A_{k+1}$.

ⓑ $(A-\mu_k I)W_k = AW_k - \mu_k W_k$.

$\overset{ⓐ}{=} W_k(A_k - \mu I)$

$= W_k Q_{k+1} R_{k+1} = W_{k+1} R_{k+1}$.

ⓒ On prend l'inverse & la transposée de ⓑ.

Rq 11.5

considérons cas $\mu_k = 0$ $\forall k$ & supps $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$ vp de A, plus conditions techniques sur $\vec{vp}$. Alors $\forall j$: $\lim_{k\to\infty} (A_k)_{j,j} = \lambda_j$, $\forall j < \ell$: $(A_k)_{\ell,j} = \mathcal{O}(|\lambda_\ell/\lambda_j|^k)_{k\to\infty}$.

Ce qui généralise [M] puisse normalisée :

$AW_k e_1 = W_{k+1}(R_{k+1})_{1} e_1 \Rightarrow W_{k+1} e_1 = \frac{AW_k e_1}{\|AW_k e_1\|_2}$

Plus généralement $\exists\, \Delta_k = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ approprié

$\lim_{k\to\infty} W_k \Delta_k = W$, $\lim_{k\to\infty} (W_k \Delta_k)^T A (W_k \Delta_k) =$

$= \lim_{k\to\infty} \Delta_k^T A_k \Delta_k = R$

le facto de Schur $W^T A W = R$ ∇.

CVce algo QR & shift de Rayleigh $\mu_k = (A_k)_{n,n}$

On souhaite accélérer la CVce en remplaçant la [M] de la puissance par $W_k e_1$ & la mat A par :

$(A^T - \mu_k I)^{-1} W_k e_n = W_{k+1} (R_{k+1}^{-T})_{n,n} e_n$

$\Rightarrow W_{k+1} e_n = \frac{(A^T - \mu_k I)^{-1} W_k e_n}{\|(A^T - \mu_k I)^{-1} W_k e_n\|_2}$

la [M] de la puissance inverse par $W_k e_n$ & mat A^T qui localement CV bien + rapidement par le shift de Rayleigh $\mu_k = (A_k)_{n,n} = R_A(W_k e_n)$.

Rq 11.6 (sur déflation)

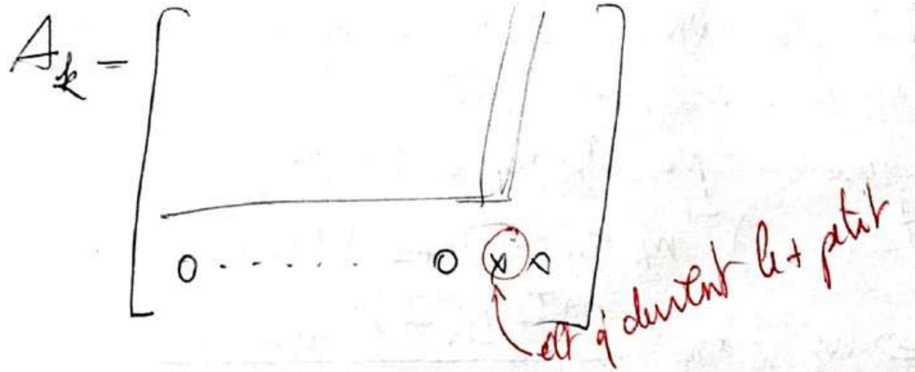
Par construction, la norme du résidu

$\|A^T W_k e_n - \mu_k W_k e_n\| = \|(e_n^T W_k^T A - \mu_k e_n^T W_k^T) W_k\|_2$

$= \|A_k[n, 1:n-1]\|_2$

$= |(A_k)_{n,n-1}|$

est petit si A_k est presque bloc-diagonale



Algo QR av shift de Rayleigh & déflation

Algo 11.7 [M] QR av shift de Rayleigh & déflation

① $A \leftarrow Q^T A Q$ de forme Hessenberg, Q orthogonale

On pose $m = n$

Pr $k = 0, 1, 2, \dots$

si $|(A)_{m,m-1}|$ petit $\Rightarrow (A)_{m,m-1} \leftarrow 0,\ m \leftarrow m-1$

arrêt si $m = 1$

calcule shift $\mu_k = (A)_{m,m}$

calcule décompo QR de $A - \mu_k I = QR$

calcule $A \leftarrow \mu_k I + RQ$.

Complexité : 3-4 itérations pr chq vp dem.

Rq 11.8.

ds algo QR, on ne stocke ni mat Q_k, ni W_k, ie en sortant algo si $m=1$, on a sur diagonale de A_k, des bonnes approx $\tilde{\lambda}_j$ des vp λ_j de A. Pr calculer bonnes approx des $\vec{vp}$ of A, on lancera pr chq $j = 1, \dots, n$ la [M] de la puissance inverse à param initial $\mu_0 = \tilde{\lambda}_j$

Rq 11.9.

si on vt slt l élts propres de A, ∃ variante dite [M] ss-espaces itérés où mat W_k est à colonnes orthonormées mais taille $n \times l$ & mat A_k de taille $l \times l$. L'algo & étude CV ressemble à celui [M] QR.