M-54 Pr: Bernhard Beckermann

# ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

## Introductions et rappels

1. motivation pour la résolution de systèmes linéaires ; matrices particulières ; normes vectorielles Hölderiennes ($p = 1, 2, \infty$), normes matricielles associées,rayon spectral, norme de Frobenius ; conditionnement d'une matrice ; série de Neumann,sensibilité de la solution d'un système linéaire par rapport aux perturbations des données.

## Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

1. méthodes d'élimination de Gauss, pivotage, factorisation LU, PA=LU, complexité ; cas particulier des matrices symétriques définies positives, factorisation de Cholesky ; problème des moindres carrés : équation normale et utilité d'une factorisation QR ; factorisation QR : approches de Householder et de Givens.

## Calculs numériques de valeurs propres

1. théorème de Bauer-Fike ;méthode de la puissance, convergence ; itération invese ; décomposition en valeurs singulières(SVD) (motivations et applications), existence d'une SVD, calcul numérique, théorème deEckart-Young (meilleure approximation d'une matrice de moindre rang).

# M54 - Analyse Numériq Matricielle

- Précision finie ordi $|\alpha - \text{float}(\alpha)| \leq \varepsilon |\alpha|$
  où $\varepsilon \approx 10^{-8}$ (resp. pré. double)
- ⚠ exemple de cancellat°

## 1. Mat, vect$^{rs}$

- Transposée : ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
  tq $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$
- Adjointe : $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tq $(A^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$
- Produit Scalaire : $\leftrightarrow$ 2 vect$^{rs}$ $x, y \in \mathbb{C}^m$ :
  $(y,x) = x^* y = \sum_{j=1}^{m} \overline{x_j}\, y_j$
- Inég. de Cauchy Schwarz : $|(x,y)| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$
- Complément orthogonal : $K^\perp = \{ y \in \mathbb{K}^n : \forall x \in \mathbb{K}, (x,y) = 0 \}$.

## 2. Mat particulières

- symétriq (hermitienne) : $A^* = A$ (resp ${}^tA = A$)
- orthogonale (unitaire) : ${}^tAA = I$ (resp $A^*A = I$)
- normale si $AA^* = A^*A$
- semi-déf ⊕ si $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $(Ax, x) \geq 0$
- déf ⊕ si SDP ET $(Ax,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- diagonale : si $a_{j,k} = 0$ pour $j \neq k$.
- $\triangledown$ : si $a_{j,k} = 0$ pr $j > k$.
- similaire : à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'$\exists$ mat inv. $S$ tq $B = S^{-1}AS$. (diagonalisable si siml$^{re}$ à mat diagonale)

## 3. Val$^{rs}$ propres

- $(\lambda, x)$ : él$^t$ propre de $A$.
- $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$ : rayon spectral

**TH.1** Mat diagonalisables

(a) $\exists$ mat non diagonalisable.

(b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable tq $B = S^{-1}AS$ diagonale ssi $A$ admet 1 base de vect$^{rs}$ donnée p colonnes de $S$, tq vp $\leftarrow A \rightarrow$ r diagonale de $B$.

(c) si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt $n$ vp distincts $\Rightarrow A$ est diagonalisable

## 5. Norme.

a) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

→ une mat invers. d$^t$ ê carrée
→ $(AB)^* = B^*A^*$ (resp. transposée)
→ $\det(\triangledown) = \Pi$(élts diagonale)
→ $\det(A) = \det({}^tA)$

→ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, le systm̂

$Ax = b$ admt soluθ ssi $b \in \mathrm{Im}(A)$.

Ds ce cas, $\mathcal{S} = \{y + \ker(A)\}$.

→ Pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ : & K sev $K \subset \mathbb{K}^n$ :

$rg(A) + \dim(\ker(A)) = n$. $rg(A) = rg(A^*)$

$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A^\perp) = \mathrm{Im}(A^*)$

## Th 2 Factorisaθ de Schur

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire & $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sut q $T = U^* A U$.

Si A normale ⇒ T diagonale.

## Cor 2.2 Diagonalisaθ mat hermitienne

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire dsq $D = U^* A U$ est diagonale & composé ds vp de A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L Tte mat normale et ◺ : forcémt diagonale.

→ Mat hermitienne admt base orńée de $\vec{vp}$.

## 4. Décompositθ en valeurs singulières

L 2.3 $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les vp de $A^*A$ st réelles et +.

NB mat unitaire est inversible. ($Q^*Q = I$ et $Q^{-1} = Q^*$).

L 2.4. soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

alors vp $\neq 0$ de AB & BA st m̂s. (ẽ multplcté).

## Th 2.6. Val$^r$ singulière mat normale

Les vs mat normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ st les modules de ses vp.

## Th 2.7 Décompositθ en vs, SVD

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ & r vs + alors $\exists U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ & $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ttes 2 unitaires et $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ("diag")

tq $A = U \Sigma V^*$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$

ẽ $rg(A) = r \leq \min(m,n)$.

Th 3.6 FF pr normes $\boxed{\text{nms}}$ usuels

pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ : $\|A\|_S = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ (+ gde vl$^{R}$ singulière).

$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum |a_{j,k}|$

$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,m} \sum |a_{j,k}|$

## Ptés normes & Rayon Spectral

Cor 3.7 Ptés norme spectrale

a) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \|A^*\|_2 = \|A\|_2$

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ h $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}), V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ u $\Rightarrow \|UAV\|_2 = \|A\|_2$.

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Th 3.8 de Gelfant

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ alors n pt construire $\boxed{\text{nms}}$

$\|\cdot\|_*$ tq $\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$.

cq $\forall$ $\boxed{\text{nm}}$ $\|\cdot\|$ & $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Th 3.9 Série de Von Neumann

$\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum_{k=0}^{\infty} E^k$ CV ssi $\rho(E) < 1$.

Ds ce cas $I-E$ est inv & la limite de série est

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^k = \frac{1}{I-E}.$$

Si d+, $\|E\| < 1$ pr $\boxed{\text{nm}}$ $\Rightarrow$ $\|(I-E)^{-1} - I\| \leq \dfrac{\|E\|}{1-\|E\|}$

## Conditionnement

(Machine au lieu rsdr $Ax = b \to (A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$

L 3.11 Pire amplificat° erreurs relatives.

$$\|A\|.\|A^{-1}\| = \sup_{b,\Delta b}\left\{ \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} : \begin{array}{l} Ax = b, \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\}$$

D Conditionnem$^t$

Pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{cond}(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$

(ex $\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ , $p = 1, 2, \infty$).

L Ptés cond

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv alors

a) $\mathrm{cond}(A) \geq 1$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ : $\mathrm{cond}(\lambda A) = \mathrm{cond}(A)$

c) $\mathrm{cond}(A^{-1}) = \mathrm{cond}(A)$

d) $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_1}{\mu_n}$ 4

e) $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ pr $A$ unit$^{re}$

A est bien conditionné si $\mathrm{cond}(A) \approx 1$.

(resp $\mathrm{cond}(A) \gg 1$).

**Cor** Distance aux matrices non inversibles

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv :

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min\left\{ \frac{\|A-B\|_2}{\|A\|_2} : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ non inv} \right\}$$

## Estimations d'erreur pour systèmes perturbés

**Th** [3.15] soit $A, \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; $A$ inv ; $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$
$b, \Delta b \in \mathbb{K}^n$, $b \neq 0$ :

$$\begin{cases} Ax = b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

**Rq** [3.16] ⚠ comme $\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \dfrac{\mathrm{cond}(A)\,\|\Delta A\|}{\|A\|}$,
cel le système perturbé admet une solution proche de $Ax=b$ tant que :

$$\mathrm{cond}(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \ll 1.$$

## 4. Résolution de SL $Ax=b$ par élimination de Gauss & décomposition LU

(Résoudre système $n$ inconnues, $n$ équations)

**Algo 4.1** EDG à pivotage naturel

Idée : $A = A^{(1)}$, $b = b^{(1)}$ transforme pour $k = 1, \dots, n-1$ le syst. $A^{(k)}x = b^{(k)}$ en un système $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$, en créant dans $A^{(k+1)}$ des $0$ en colonne $k$ en dessous diagonale.

Pour $k = 1, \dots, n-1$
- Supposons hypo pivot $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$
- Pour $i = k+1, \dots, n$
  - Calculer multiplicateur $l_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$
  - soustraire $l_{i,k}$ fois la $k$° équation (ligne pivot) de $i$° équation.

### Forme de $A^{(k)}$ dans cas général

**L** [4.3] Une étape d'élimination

Sous hypo pivotage naturel, on a $\begin{aligned} A^{(k+1)} &= L^{(k)} A^{(k)} \\ b^{(k+1)} &= L^{(k)} b^{(k)} \end{aligned}$ pour $k = 1, \dots, n-1$

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \vdots & & -l_{k+1,k} & 1 & & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & -l_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & \cdots & & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

**L** [4.4]

$$L := (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

## Décomposit° LU : ∃ & Unicité

**D 4.5** Déf décomp. LU

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt décp LU si $A = LU$

4 $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\triangle$ à diagonale unité, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\nabla$.

**Th 4.6** Unicité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv $\Rightarrow$ décomp LU est unique.

**Th 4.7** ∃

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv, ASSE :

a) A admt décomp LU

b) pr $k = 1, \dots, n-1$ ; la ss-mat principale $[A]_k$ composée ds k lignes & col. de A est inv.

c) l'hypo PN : $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ pr $k = 1, \dots, n-1$

**Rq 4.8** (Utilité décomp LU)

- $Ax = b$ rvt résoudre $Ly = b$ & $Ux = b$.
- calcul efficace $\det(A)$ & $A^{-1}$.

## Pivotage Partiel

si $a_{k,k}^{(k)} = 0$ alors effectuer une permutat° (avt chq étape)

Stratégie dite pivotage partiel.

## Algo 4.9. Éliminat° de Gauss + pivotage partiel.

Pour $k = 1, \dots, n-1$

Chercher l'indice $\pi_k$ du + grd élt en module parmi les $a_{i,k-i}^{(k)}$, $i = k, \dots, n$

Pour $i = k+1, \dots, n$

Calculer multiplicat$^{R}$ $l_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$

Soustraire $l_{i,k}$ la $k^{\circ}$ équat° de la $i^{\circ}$ équat°.

Notat° : $P^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : mat de transposit° q échange 2 élts d'indice k & $\pi_k$ : laisse otrs composantes invariantes

**Th 4.10** Factorisat° LU & pivotage partiel

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv $\Rightarrow$ A admt décomp LU à permutat° près, ie $PA = LU$ où $P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)}$ est une mat de permutat° & L,U st ĉ avt à condit° q l'n permute simultnt ts ls mltplts + ls équat°s

## Algo pr calculer $H = Q^T$, $R = EA^{(m)}$

$m, n$, $H = I_m$

Pr $k = 1, \dots, m-1$ :

calcul $y^{(k)}$ & $Q(y^{(k)})$

$A(k{:}m, k{:}n) \leftarrow Q(y^{(k)}) \cdot A(k{:}m, k{:}n)$

$H(k{:}m, 1{:}m) \leftarrow Q(y^{(k)}) \cdot H(k{:}m, 1{:}m)$

$$y^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{pmatrix}$$

$$H^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(y^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{1,1} & \dots & a^{(k)}_{1,k} & \dots & a^{(k)}_{1,n} \\ 0 & \ddots & a^{(k)}_{k,k} & \dots & a^{(k)}_{k,n} \\ 0 & 0 & a^{(k)}_{m,k} & \dots & a^{(k)}_{m,n} \end{pmatrix}$$

## Householder

$\exists$ mat orthg $H(y)$ tq $H(y)\,y$ est multiple $e_1$.

$Hy = \alpha e_1$

$A^{(1)} = A$, $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$

$E = \mathrm{diag}(\pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

---

$R = EA^{(n)} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$Q^T = EH^{(m-1)} \dots H^{(1)}$

$\rightarrow A = QR$.

$H = EH^{(m+1)} \dots H^{(1)}$ (a)

$HA = R$, $A = QR$

$Q^T = H$

## Mat householder

$$H_w = I_m - \frac{2}{w^T w} w w^T$$

sym, orthgl ; $w^T w$ : $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ; $\in \mathcal{M}_m$

## Compl algo Householder

$\frac{4}{3}n^3 + 2(m-n)n^2 + \frac{4}{3}n^3 + 4(m-n)mn + O(mn)$

## Élim p mat Householder $w = y - \alpha e_1$

$\alpha = -\|y\|_2$ si $y_1 > 0$, $\|y\|_2$ si $y_1 \leq 0$

$w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$

$H$ vérifie $Hy = \alpha e_1$.

## Complexité calculer $H_w \cdot B = B - w \cdot \beta$

où $\beta = \frac{2}{w^T w} w^T B$ ; $2lp + O(lp)$

## Pb moindres carrés

$\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$

uniq soluº :

$A^T A x = A^T b$

## Décomp QR pleine

$m,n$ : $A = QR$

$Q$ : orthgl $\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ▽ diag $> 0$

## Décomp QR éco

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$

$\tilde{Q}$ : orthg $\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\tilde{R}$ idem

## Soluº pM²

$\tilde{R} x = \tilde{Q}^T b$

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$

## Algo décomp QR éco p GS

Pr $k = 1, \dots, n$ :

$y = a_k$

Pr $j = 1, \dots, k-1$ :

$\tilde{x}_{j,k} = (q_j, y)$ ; $y = y - x_{j,k} \cdot q_j$

$\tilde{x}_{k,k} = \|y\|_2 > 0$, $q_k = y / \tilde{x}_{k,k}$

## Pire amplificats

$\|A\| \, \|A^{-1}\| = \sup_{b, \Delta b} \left\{ \frac{\|\Delta x\| / \|x\|}{\|\Delta b\| / \|b\|} \right\}$ ; $Ax = b$, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

$\mathrm{cond}(A) \geq 1$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$

$\mathrm{cond}(A^{-1}) = ?$

$(K^\perp)^\perp = K$, $\ker(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^*)$

$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n}$ ; $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ pr $A$ (u)

si $A$ bien condit : $\mathrm{cond}(A) \approx 1$

$Ax = b$ solº si $b = \mathrm{Im}(A)$

$y = \{y + \ker A\}$

$\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker A) = n$. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$

## Facto Schur

$T = U^* A U$

▽ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $U$ unitaire

$D = U^* A U$ si $A$ normale ou (h)

$VS = |vp|$ de $A^* A$

M54

$\langle w, w \rangle = w^* w = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} w_i$

## Décomp SVD

$A = U \Sigma V^*$ ; $m,n$ ; $m$ ; $m,n$ ; $n$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ décroissant

## Process

$(\mu_i^2, v_i)$ de $A^* A$

$u_i = \frac{1}{\mu_i} A v_i$

## Norme compt $\not p$ mv si $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

sous-mlt ou nm si $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

$\|A\| \geq \rho(A)$

Nmb $\|A\| = \max \|Ax\|$, $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\| = 1$

$\|A\|_S = \sqrt{\mathrm{tr}(A^* A)}$ $\quad$ $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$

$\|A\|_1 = \max_k \sum |a_{jk}|$ $\quad$ $\|A\|_\infty = \max_j \sum |a_{jk}|$

$\|A^*\|_2 = \|A\|_2$

$\|A\|_2 = \rho(A)$ si $A$ (h)

$\|UAV\|_2 = \|A\|_2$

$A$ (d) , $B = S^{-1} A S$ diag ssi $A$ admt bs vect$^K$ dnn p colonnes de $S$ & vp $\Leftrightarrow$ $\not{p}$ diag de $B$.

$A$ (vp) dist 2 $\Rightarrow$ $A$ diag$^l$

## Th Gelfand

$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$

## Th Eckart Young

$B = U \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$

$B = \sum_{i=1}^{k} u_i \mu_i v_i^*$

$k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$

$t$ connaît $k$ élts pr. de $A^* A$

## Th Série Von Neumann

$\sum_{k=0}^{\infty} E^k$ (cv) ssi $\rho(E) < 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} E^k = (I - E)^{-1}$

si $\|E\| < 1 \Rightarrow \|(I - E)^{-1} - I\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|E\|}$

## Distce ax mat non inv

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2}, B \text{ non-inv} \right\}$$

## Estimatº d'err pr systᵉ perturb

$\|A^{-1} \Delta A\| < 1$ :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

## Algo solº $Ax = b$ p décomp LU

Pr $k = 1, \dots, m-1$ :

spps $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$

Pr $i = k+1, \dots, m$ :

$l_{i,k} = a^{(k)}_{i,k} / a^{(k)}_{k,k}$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l_{i,k} a^{(k)}_{k,j}$

$L = (L^{(1)})^{-1} \dots (L^{(m-1)})^{-1}$

Décomp $A = LU$ ; inv ; ▽ ; ◸

$b^{(k+1)}_i = b^{(k)}_i - l_{i,k} b^{(k)}_k$

## Algo élim Gauss & piv partiel

Pr $k = 1, \dots, m-1$ :

chercher indice $\pi_k$ + grd élt en module parmi $a^{(k)}_{i,k-i}$

Pr $i = k+1, \dots, m$ :

$l_{i,k} = a^{(k)}_{i,k} / a^{(k)}_{k,k}$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l_{i,k} a^{(k)}_{k,j}$

$P^{(k)}$ : mat permutº $k \leftrightarrow \pi_k$

$A$ inv $\Rightarrow PA = LU$ où $P = P^{(m-1)} \dots P^{(1)}$

$A$ inv $\Rightarrow$ $A$ admt dcp LU (i)

(ii) pr $k = 1, \dots, m-1$ $[A]_k$ inv

(iii) $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$

$Ax = b$ $\quad$ $Ly = b$, $Ux = y$

Algo descente / remontée :

$O(m^2)$ espace mémoire

Descte : $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ oe

Rmtée : $n^2 + O(n)$ oe

## Th Dcp de Crout

$A = LDL^*$

inv, (h) ; diag. réelle

## Dcp de Cholesky

$A = CC^*$

(h), déf (+) ; ◸ diag $> 0$

## Th Front

$A$ inv, $A = LU$ $\quad$ $\mathrm{front}(A) = (j(1), \dots, j(m))$

$\mathrm{front}(A^T) = \mathrm{front}(U^T)$ $\quad$ $\mathrm{front}(A) = \mathrm{front}(L)$

## Idée algo GS

Rendre $a_k$ orthg à $q_1, \dots, q_{m-1}$ & normaliser pr obtenir $q_k$.

Cmplxté algo GS QR éco $\sum (4km) + 2mn^2 + O(mn)$ oe

## $Ax = b$

soluº tant que $\mathrm{cond}(A) \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \ll 1$

## Stockage en place & vectorisation

5.1 Rq $a_{i,j}^{(k+1)}$ calculé, + bsn $a_{i,j}^{(k)}$. On stock $a_{i,j}^{(k+1)}$ à sa place.

Tbleau $M \in \mathcal{M}_{m,m+1}(\mathbb{K})$ : $\boxed{M = [A, b]}$

On stocke $l_{i,k}$ à position $(i,k)$ de $M$.

(à la place $0$ ds $A^{(k+1)}$).

5.2 Rq Vectorisation

$\forall\, i,j > k$.

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - l_{i,k}\, a_{k,j}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{i,k}\, b_k^{(k)}$$

deviennent ff vectorisées :

M[k+1:m, k] = M[k+1:m] / M[k,k] & pr $i \in [k+1, m]$.

M[i, k+1:m+1] = M[i, k+1:m+1] - M[i,k] * M[k, k+1:m+1]

## Triangulation de Gauss

**Algo 5.3** TD G, descente, pivotage partiel

M = [A, b], $m$ = ordre de $A$

Pr $k = 1, \dots, m-1$

Chercher $\pi_k \in [k:m]$ tq $|M[\pi_k, k]| = \max(M[k:m, k])$

Permuter lignes $k$ & $\pi_k$ de $M$.

M[k+1:m, k] = M[k+1:m, k] / M[k,k]

Pr $i = k+1, \dots, m$

M[i, k+1:m+1] = M[i, k+1:m+1] - M[i,k] * M[k, k+1:m+1]

On pt suppr boucle de $i$ si on calcule directement :

M[k+1:m, k+1:m+1] = M[k+1, k+1:m+1] - - M[k+1:m, k] * M[k, k+1:m+1]

→ de $M$ & tbleau $\pi$ en sortie, on a facto $PA = LU$ & $Lb^{(m)} = Pb$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ m_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{m,1} & & m_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,m} \\ 0 & m_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{m,m} \end{bmatrix}, \quad b^{(m)} = \begin{bmatrix} m_{1,m+1} \\ \vdots \\ \\ m_{m,m+1} \end{bmatrix}$$

## Remontée & Complexité

**Algo 5.4** Remontée pr sol° $Ax = b$

initl° M sortie A.5.3., $m$ = nbr lignes M

Pr $i = m, m-1, \dots, 1$

x[i] = (M[i, m+1] - M[i, i+1:m] * x[i+1:m]) / M[i,i]

np.dot(.,.)

**Th 5.5** Complexité algo de Gauss

A.5.3/5.4 nécess^t $\mathcal{O}(m^2)$ espaces mémoire.

TDG 5.3 nécess^t $\frac{2}{3}m^3 + \mathcal{O}(m^2)$ opérat° élt^re

RTel 5.4 nécess^t $m^2 + \mathcal{O}(m)$ op.e.

Preuve !!!

# L'algo de Gauss en précision finie

Th 5.6 soit $\hat{L}, \hat{U}, \hat{P}$ calculés sur ordi de précisᵒ machine $\varepsilon$

alors $\| \hat{P}A - \hat{L}\hat{U} \|_\infty \leq 2 \varepsilon n^2 \gamma(A)$.

$\gamma(A) = \max_{i,j,k} | A_{i,j}^{(k)} |$ : factᵉ de croissᵗ.

a) sans pivotage, $\gamma(A)$ arbitrᵗ + grd $\|A\|_\infty$

b) pivtgᵉ partiel, $\gamma(A) \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$

c) si $A$ (h) déf ⊕ $\Longrightarrow \gamma(A) \leq \|A\|_\infty$.

## Exploiter la symétrie

Th 6.1 Décompositᵒ de Crout

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv & (h) admᵗ déc. $A = LU$

alors ll admᵗ uniq décomp $A = L D L^*$
diagonale réelle.

Th 6.3 Décompositᵒ de Cholesky

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (h) déf ⊕ ssi ll admᵗ uniq

décomp $A = CC^*$. (de $C$: $\Delta$, élts diag $> 0$)

Rq C3.

$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} l_{i,k} \, d_{k,k} \, \overline{l_{j,k}}$ $\quad l_{i,i} = l_{j,j} = 1$

en parcourant $(i,j)$, on pt résdre sle inconnue $d_{i,i}$ si $i=j$
si $i > j$ (déjà calculées).

→ besoin $\boxed{\frac{n^3}{3} + \Theta(n^2)}$ op. él. → $\frac{1}{2}$ TD6 !

8

# Exploiter des 0 dans A

Th 6.4. du front

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv admttᵗ $A = LU$, notons

$\text{front}(A) = (j(1), j(2), \dots, j(n))$

de $j(i)$ l'indice colonne du 1ᵉ élt non nul ds la ligne $i$ de $A$.

Alors $\text{front}(L) = \text{front}(A)$, $\text{front}(U^T) = \text{front}(A^T)$

(si mat tridiagonale : $\text{front}(A) = (1,1,2,3,\dots,n-1) = \text{front}(A^T)$)

# 7. Le pb des moindres carrés & la décompositᵒ QR

## Positᵒ du pb des moindres carrés

(N) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(A) = n \leq m$, $b \in \mathbb{R}^m$

D 7.1 Pb moindres carrés

Trouver $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

## ∃ & ∃! solutᵒ

L'uniq solᵒ $\underline{x}$ pb moindres carrés est l'uniq solutᵒ $\underline{x}$ du
système des équatᵒs normales : $A^T A x \overset{!}{=} A^T b$.

D 7.4 (Décompositᵒ QR pleine ou économiq)

On dit $A = QR$ est une décompositᵒ (QR) si $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthog,

$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ◸ à diag $> 0$.

On dit $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ est décompo économiq si $\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de
$\tilde{Q}^T \tilde{Q} = I_n$ ($\tilde{Q}$ est colⁿ ornées), $\tilde{R}$ idem ĉ avt.

(L) 7.5 ∃ 1 & 1 sle décompo QR économiq $A=\tilde{Q}\tilde{R}$.

(Rq) 7.6 Ds déf décompo QR écon ou pleine pm doit prendre $\tilde{Q}$ la mat formée p 1°s colonnes n de Q. Ms ôtrs colonnes ne st pas uniqs.

## Résolu° p décompo QR économiq

(Cor) 7.7 La sol° $x$ du pb d moindres carrés est l'uniq solu° $x$ du système $\tilde{R}x = \tilde{Q}^T b$ ∀ $A=\tilde{Q}\tilde{R}$ une décompo° QR économiq.

(Rq) 7.8 Passage décomp. QR éco est préférable à résolu° système équa°s normale car

$$cond_2(A^TA) = cond_2(\tilde{R}^T\tilde{R}) = (cond_2(\tilde{R}))^2 \gg cond_2(\tilde{R})$$

## L'algorithme de Gram-Schmidt

$rg(A)=n$, $d_{QR\acute{e}co}$ : $A=\tilde{Q}\tilde{R} \Rightarrow Im(A)=Im(\tilde{Q})$.

Notons $a^1,\dots,a^n \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de $A$ libres (car $rg(A)=n$)

Notons $q^1,\dots,q^n \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de $\tilde{Q}$.

$$Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \underset{bijco}{\overset{x=\tilde{R}^{-1}y}{=}} \{A\tilde{R}^{-1}y,\ y\in\mathbb{R}^n\} \overset{décomp}{=} \{\tilde{Q}y,\ y\in\mathbb{R}^n\} = Im(\tilde{Q}).$$

Passage de $A$ à $\tilde{Q}$ : passage d'une base de $Im(A)$ à base ornée de $Im(A)$.

**Idée** Rendre $a_k$ orthogonal à $q_1,\dots,q_{k-1}$ & normaliser pr obtenir $q_k$.

$$\forall k,\quad \tilde{r}_{k,k}\cdot q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1}\tilde{r}_{jk}\,q_j$$

$$\iff \forall k,\quad a_k = \sum_{j=1}^{k} r_{jk}\,q_j \iff A=\tilde{Q}\tilde{R}.$$

tq $\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{n,1} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & \tilde{r}_{nn} \end{bmatrix}$

## Algo 7.9 (Décompo QR éco p GS)

Ob : ∀ $A=(a_1,\dots,a_n)$ ; construire $\tilde{Q}=(q_1,\dots,q_n)$ à colonnes $q_j$ orthno. ainsi élts ≠ 0 de $\tilde{R}$ d'une décomposi° QR économiq $A=\tilde{Q}\tilde{R}$.

Pour $k=1,\dots,n$ :
- Poser $y=a_k$
- Pour $j=1,\dots,k-1$ :
  - $\tilde{r}_{j,k}=(q_j,y)$, $y=y-r_{j,k}\,q_j$ (rendre $y$ orthogonal à $q_j$)
- $\tilde{r}_{k,k}=\|y\|_2>0$, normaliser $q_k=y/\tilde{r}_{k,k}$

(Rq) 7.10 a) Pr $k$ fixe, on doit calculer $k$ produits scalaire & $k-1$ (CL) ds $\mathbb{R}^m$, de au total nbr opé arithmétiqs de

$$\sum_k (4km) + O(n) = 2mn^2 + O(mn)$$

b) $\hat{M}$ si $\tilde{r}_{k,k}\neq 0$ pt ê petit. $\dfrac{|\tilde{r}_{k,k}|}{\|\tilde{R}\|_2} \geq \dfrac{1}{cond_2(\tilde{R})}$

c) Algo GS modifié, en précis° fini : ↘ perte d'orthogonalité $\|I_n-\tilde{Q}^T\tilde{Q}\|_2$ : On pose $q_j=a_j$ pr $j=1,\dots,n$ & pr $k=1,\dots,n$, on normalise $q_k$ & on rend $q_{k+1},\dots,q_n$ orthogonal à $q_k$.

## 8) Calcul de la décompo QR pleine par Householder & Givens

sppo $m \geq 2$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\exists$ mat orthog $H(y) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tq $H(y)\,y$ est multiple du 1° vct$^{r}$ canoniq $e_1$ de $\mathbb{R}^m$.

**Th 8.1 Une étape d'éliminat° de 1 facto QR pleine.**

Avec mat orthglo $H^{(k)}$, posons $A^{(1)} = A$, $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$ pr $k = 1, \dots, n-1$. Alors $A^{(k)}$ aura la forme

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{bmatrix}, \quad H^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(y^{(k)}) \end{bmatrix}, \quad A^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{1,1} & \cdots & a^{(k)}_{1,k} & \cdots & a^{(k)}_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 \cdots & 0 & a^{(k)}_{k,k} & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & a^{(k)}_{m,k} & \cdots & a^{(k)}_{m,n} \end{bmatrix}$$

ap $E = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ appropriée,
$R = EA^{(n)} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ & $Q^T = EH^{(n-1)} \dots H^{(1)}$ :
on obtient $A = QR$. $H = E.H^{(n-1)} \dots H^{(1)}$ unit$^{re}$ (orthog$^{le}$)

NB : Les premières $k-1$ lignes de $A^{(k)}$ & $A^{(k+1)}$ st m̂$_s$ (possibilités de stockage $\mathfrak{n}$ place).

cl $HA = R$, $A = QR$, $Q^T = H$.

### Algo pr calculer $H = Q^T$, $R = EA^{(n)}$ + stockage $\mathfrak{n}$ $A^{(k)}$ de $A$

Initial° $n, m$, $H = I_m$.

Pour $k = 1, \dots, n-1$

Calculer $y^{(k)}$ & $Q(y^{(k)})$

$A(k{:}m, k{:}n) \longleftarrow Q(y^{(k)}).\, A(k{:}m, k{:}n)$

$H(k{:}m, 1{:}m) \longleftarrow Q(y^{(k)}).\, H(k{:}m, 1{:}m)$

Trouver $E = \mathrm{diag}(\pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ approprié
$R = EA$, $H = EH$, $Q^T = H$.

(exigence $Q(y)$ : produit $Q(y).\,B$ pas cher).

### Matrices de Householder

**D 8.2** $w \in \mathbb{R}^e \setminus \{0\}$, mat de Householder $H = H_w$ est def p

$$H_w = I_m - \underbrace{\frac{2}{w^T w}}_{\text{scalaire}} \underbrace{w w^T}_{\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})}$$

**P 8.3 Ptés mat de Householder**

Une mdH est symétriq & orthogonale.

H représente mat de sym p/ hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^m, (x, w) = 0\}$.



→ besoin | 3

## L 8.4 Élim de mat de Householder

soit $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\begin{cases} \alpha = -\|y\|_2 & \text{si } y_1 > 0 \\ \alpha = \|y\|_2 & \text{si } y_1 \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow w = y - \alpha e_1$ tq $w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$

est de sorte que mat $H = H_w$ vérifie $Hy = \alpha e_1$.

**Rq 8.5**

$w \in \mathbb{R}^\ell$ ĉ art, $B \in \mathcal{M}_{\ell,p}(\mathbb{R})$ ;

complexité de calculer $H_w \cdot B =$

$= \underbrace{B - w.\beta}_{\ell.p.2 + O(\ell p)}$ où $\beta = \underbrace{\frac{2}{w^T w}}_{2\ell + O(1)} w^T B$ — $2\ell.p + O(\ell + p)$

## Algo 8.6 (Décomp QR pleine $A = QR$ tq algo de Householder)

Object : $H = Q^T$, $R = A^{(n)}$

Poser $(m;n)$ = taille de $A$, $H = I_m$.

Pour $k = 1, \dots, n-1$ :

$y = A[k:m, k]$, $\alpha = \text{signe}(-y_1)\|y\|$, $\gamma = \frac{1}{\alpha(\alpha - y_1)}$

$w = y - \alpha e_1$, $A[k,k] = \alpha$, $A[k+1:m, k] = 0$

$\beta = \gamma w^T A[k:m, k+1:n]$, $A[k:m, k+1:n] = A[k:m, k+1:n] - w\beta$

$\beta = \gamma w^T H[k:m, 1:m]$

$H[k:m, 1:m] = H[k:m, 1:m] - w\beta$

## L 8.7 Complexité $^{\mu}$ algo de Householder

Pr k fixe : $2(m-k) + O(1)$ oa μ calcul w & sa norme,

$4(n-k)(m-k) + O(m)$ oa μ A, $4m(m-k) + O(m)$ oa μ H : in fine

$\underbrace{\frac{4}{3}n^3 + 2(m-n)n^2}_{\text{Calcul de R}} + \underbrace{\frac{4}{3}m^3 + 4(m-n)mn}_{\text{Calcul Q}} + O(mn)$ oa + n racines

### Simplificatⁿˢ

Rq pb moindres carrés : no need Q, ms R & $b^{(n)} = Q^* b$. $\begin{cases} b^{(1)} = b \\ b^{(k+1)} = H^{(k)} b^{(k)} \end{cases}$ μ $k = 1, \dots, n-1$ de A

Rq Spl. Hessenberg si $m = n$, ↓ ca. QR.

Rq Sp. mat tridiag : ie $a_{j,k} = 0$ μ $k > j+1$ : mq $A^{(k)}$ contient au + 3 élts $\neq 0$ ℓ ligne.

### Rotatⁿˢ de Givens

(variante mat orthog ↔ variante algo Householder)

**P 8.11 Rotatⁿ ds $\mathbb{R}^2$**

$\forall y = [y_1, y_2]^T$, $\exists$ angle $\theta$ tq $Gy = \begin{bmatrix} \|y\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$G = G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

**D 8.12 Rotatⁿ de Givens**

soit $1 \le i \le j \le m$, rotatⁿ de Givens $G^{(i,j)} = G^{(i,j)}(\theta) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est obtenue en partᵗ $I_m$ où on remplace ss-mat à indices lignes / colonnes i, j μ rotatⁿ $G(\theta)$ ĉ art.

$$G^{(i,j)}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos(\theta) & & -\sin(\theta) & & \\ & & & 1 \ddots 1 & & & \\ & & \sin(\theta) & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

**Rq** Produit RdG est <u>mat</u> orthogonale.
$(6n + \mathcal{O}(1)$ oa$)$

## Créer des zéros ap rotat° de Givens

soit $y \in \mathbb{R}^n$, on pt trouver angles $\alpha$ :
$$\|y\| e_1 = G^{(1,2)} \dots G^{(n-2,n-1)} G^{(n-1,n)}$$

**Cor 2.14** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthog.
(produit de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ rotat° de Givens) <u>d sqe</u> $Q^T A Q$ soit mat de Hessenberg, en complexité $\mathcal{O}(n^3)$.