Université de Lille

L2-mathématique 2020/2021

Séries et intégrales généralisées

Correction du devoir surveillé n° 1

Ex1 :

1) $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$ et $\forall b \in B$, $b \leq \sup B$ donc $a+b \leq \sup A + \sup B$.

Ainsi $\forall c \in A+B$, $c \leq \sup A + \sup B$ et $A+B$ est majoré par $\sup A + \sup B$.

Comme $A+B$ est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$ donc $\exists a \in A$, $B \neq \emptyset$ donc $\exists b \in B$ et $a+b \in A+B$) et comme $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure, $A+B$ a une borne supérieure.

2) Il existe une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

Il existe une suite $(b_n)_n \subset B$ telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \sup B$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \sup A + \sup B$. De plus, comme $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, on en déduit que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

3) $X = A+B$ avec $A = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} \,/\, p \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \frac{2}{q} \,/\, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{2}$ est un majorant de A et comme $\frac{1}{2} \in A$, $\sup A = \frac{1}{2}$.

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{q} \leq 2$ et $2 \in B$ donc $\sup B = 2$.

Ainsi, d'après la question (2) $\sup X = \sup A + \sup B = \frac{5}{2}$.

Ex2 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$

Pour $p=1$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$.

L'inégalité est donc vraie au rang $p=1$.

Supposons que $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$.

Alors : $$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} + \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{(n+p+1)(n+p)} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$

Or $\frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{(n+p+1)(n+p)}$ donc

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}.$$

L'inégalité est donc encore vraie au rang $p+1$.

On en déduit par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$.

2) On montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$. On a :

$$u_p - u_q = \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{q^2}\right)$$
$$= \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{p^2}$$
$$< \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p}$$
$$< \frac{1}{q+1}.$$

Comme $u_p - u_q > 0$, on en déduit que $|u_p - u_q| < \frac{1}{q+1}$.

Or, comme $\lim_{q \to +\infty} \frac{1}{q+1} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall q \geq N$, on ait $\frac{1}{q} < \varepsilon$.

Ainsi, $\forall p > q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$. La suite $(u_n)_n$ est donc de Cauchy et comme toute suite de Cauchy de nombres réels converge dans $\mathbb{R}$, $(u_n)_n$ converge.

Ex 3.

1) $I = \int_0^1 \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}}\, dx$.

I est généralisée en 0. On calcule un développement limité en 0 de $\sin(5x) - \sin(3x)$:

$$\sin(5x) - \sin(3x) = 5x - 3x + x\,\mathcal{E}(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0.$$

$$= 2x + x\,\mathcal{E}(x).$$

Ainsi
$$\frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} = \frac{2x + x\,\mathcal{E}(x)}{x^{5/3}}$$
$$= \frac{2 + \mathcal{E}(x)}{x^{2/3}}.$$

Comme $\lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}}}{\frac{2}{x^{2/3}}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + \mathcal{E}(x)}{2} = 1$ on en déduit

que $\dfrac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^{2/3}}$.

Comme $\dfrac{2}{x^{2/3}} > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, on en déduit que I et $\int_0^1 \frac{2}{x^{2/3}}\, dx$ sont de même nature.

Comme $\int_0^1 \frac{2}{x^{2/3}}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que I converge.

2) $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$. est généralisée en $+\infty$.

On a $\lim_{t \to +\infty} t^{3/2} \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$. Donc $\exists\, t_0$ tel que $\forall t \geq t_0$,

$$\left| t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2} \right| < 1.$$

Ainsi, $\forall t \geq t_0$: $\quad 0 \leq \left| \frac{\ln t}{t^2} \right| < \frac{1}{t^{3/2}}$.

On en déduit que $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ et $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$ et donc J sont de même nature. Comme $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ est une intégrale convergente, J converge.

Ex 4.

1) $\forall t \geq 1$, on a $\quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$.

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.

2) Soit $x_0 \geq x \geq 1$. $\forall t \in [x, x_0]$, on a : $\quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ d'où :

$$0 \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x_0}}{x}.$$

Lorsque x_0 tend vers $+\infty$, il vient : $\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) $\forall t \geq x$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}$ et $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ converge. De plus

$\forall x_0$, on a $\quad 0 \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{x^2}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x_0}}{x^2}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit que : $\quad 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{e^{-x}}{x^2}$

Ainsi $\quad 0 \leq \frac{x}{e^{-x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{-x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = 0$.

4) Soit $x \geq 1$ et $x_0 \geq x$. On a :

$$\int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t}dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{x_0} - \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \qquad u = \frac{1}{t} \quad u' = -\frac{1}{t^2}$$

$$= -\frac{e^{-x_0}}{x_0} + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \qquad v' = e^{-t} \quad v = -e^{-t}$$

Lorsque x_0 tend vers $+\infty$, il vient :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt.$$

$$= \frac{e^{-x}}{x}(1 + \mathcal{E}(x)) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(x) = \frac{e^{-x}}{x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{E}(x) = 0$, on en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.