M54 : Analyse Numériq Matricielle

Bernhard.Beckermann@univ-lille.fr

force $= Ax \cdot b$, $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$.

mat symétriq.

→ équa diff à coeff cte.

→ Résonnance

AL

→ Bibliographie.

Précision finie sr ordi

nbr machine ⊃ virgule flottante $\varepsilon \approx 10^{-8}$

$$|\alpha - \text{float}(\alpha)| \leq \varepsilon |\alpha|$$

nbr machine

$\alpha \otimes \beta = \text{float}(\alpha \times \beta)$, $\times \in \{+,-,\cdot,/\}$

Cmprdre err^R sr ordinat^R / opé élé^{taire} ↔ 2 nbrs machines α, β :

Ex d'err^R $\beta = (2+\alpha) - \alpha$ où $\alpha = 10^{20}$.

@ cancellation.

I/ Rappels

① • inv : $BA = I$

• sym (hermit) : $A^T = A$ (resp $A^* = A$)

• orthgle (unit^R) : $A^T A = I$ (resp $A^* A = I$)

$\boxed{\text{normale si } AA^* = A^* A}$

• semi-def ⊕ si $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $(Ax, x) \geq 0$

• def ⊕ : si sdp & si $(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

• diagonale

• tgle^R supér^R

• simil^R : si $\exists$ mat inv S, $B = S^{-1} A S$.

diagonalisable si simil^R à mat diagonale.

• élt propre de A : (λ, x) — λ : VP, x : $\vec{vp}$.

• Rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}.$$

CM - Jeudi pro

⚠ matrice en fonction

⚠ mat inv est carrée.

Gramm-Schmidt

$(AB)^* = B^*A^*$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A)^\perp = \operatorname{Im}(A^*)$

$rg(A) + \dim(\ker(A)) = n$. $\operatorname{rang}(A) = rg(A^*)$

Matrices par blocs.

blocs de taille compatibles $\frac{\text{nbr}}{\text{lignes}} = \frac{\text{nbr}}{\text{colonnes}}$.

Cor $\nabla \times \nabla = \nabla$.

Factorisation de Schur & conséquences

Th 2.1 Fact de $\boxed{S}$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire orthogonale & $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sorte que $T = U^*AU$.

Si A est normale $\Rightarrow T$ diagonale.

Preuve 2.1 Preuve par récurrence sur n,

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$n=1$: $A = (a_{11})$, $U = I_1 = (1)$, $T = U^*AU = (a_{11}) \leftarrow \nabla$

$n-1$ à n : d'après 1.13, $\exists \lambda \in Sp(A)$, ie

$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $Ax = \lambda x$

(sans perte de généralité $\|x\|_2 = 1$.

Posons $q_1 = x$, avec Th S_4, je peux compléter pour trouver 1 base orthonormée $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ de $\mathbb{C}^n$.

Posons $Q = (q_1, \dots, q_n)$;

$Q^*Q = ((q_{i,j}, q_k)) = I_n$.

$\boxed{\text{unit}^{re}}$

$\Rightarrow Q$ unitaire & $Q^*AQ = Q^*(Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n)$

$= Q_1^*(\lambda q_1 \mid \underset{n-1}{*})$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ n-1 \\ \end{array}$$

tq $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

← écrire les dimensions pour mat par blocs.

D'après HDR, $\exists\, U_{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{C})$ de sorte que $U^*_{n-1} A_{n-1} U_{n-1} = T_{n-1}$ ←

Donc $U = Q \cdot U_{n-1} = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & U_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$

$$U^* \underline{AU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & U^*_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & U_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & U^*_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \\ 0 & \\ \vdots & U^*_{n-1} A_{n-1} U_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & T_{n-1} \end{bmatrix}$$

si $A = A^* = A^* A \iff T$ est inv. car $TT^* = T^*T$
$= U^*AU$.
U^*A^*U

NB: $A = U^*AU = T \iff A = UTU^*$

$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U$

$TT^* - T^*T = U^*AU\,U^*A^*U - U^*A^*U\,U^*AU$

$= U^*(AA^* - A^*A)\,U = 0$

L Tte mat normale & ◺ est fict DIAGONALE.

Cor 2.2. Diag mat hermitienne (sym'tiq)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermit. Alors $\exists\, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitR de sorte q mat $D = U^*AU$ est diagonale & composée des vp de A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$(RR^*)_{1,1} = R^*R$ $\Big\} \Rightarrow r_{1,1}, r_{1,2}, \dots r_{n,n} = 0$.

$\Rightarrow R$ diagonale.

On déduit mat. hermit. admet 1 base orée de $\vec{vp}$.

Si A normale, on pt la diagonaliser ds U^*AU (on a tiré base orée $\vec{vp}$).

normale si $AA^* = A^*A$.

Décomposit° en valeurs singulières

L.2.3 $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les vp de A^*A st réelles & ≥ 0.

DM Posons $B = A^*A$ & $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
$B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$.

$B = B^*$ car $(A^*A)^* = A^*A = B$. (B est hermitien)

D'après 2.2, $Spec(B) \subset \mathbb{R}$.

soit (λ, x) un élt propre de B

alors $Bx = A^*Ax = \lambda x$

Mltpls à gauche p x^*

$$(Ax)^*(Ax) = \lambda x^* x = \lambda \|x\|$$

$$\|Ax\|_2^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\|Ax\|_2^2 \geq 0}{\|x\|_2^2 > 0} \qquad \square$$

NB Une mat unitaire est inversible.
car $Q^*Q = I$ & $Q^{-1} = Q^*$.

L.2.4 soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors les vp $\neq 0$ de AB & BA st les m̂s. (comptant multiplicité).

DM
TD ici $m = n$, B inversible
$$B(AB)B^{-1} = BA.$$

TH 2.6 Vl^{rs} singl^{re} d'1 mat normale

Les vs d'1 mat normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ st les modules de sf vp.

DM Mq A est normale. Fac° Schur

(*) $\exists\, U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ unitaire tq $U^*AU = D$.
(mat diag $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ & $\lambda_j \in sp(A)$).

$sp(A^*A)$?

Multiplions (A) à gauche par $(U^*)^{-1} = U$

& à droite par $(U^{-1}) = U^*$.

$$\underbrace{(U^*)^{-1} \times U^*}_{I} . A . \underbrace{U \times U^{-1}}_{I} = A = UDU^*$$

$$\Rightarrow A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*)$$
$$= UD^*DU^* = UD^*DU^{-1}$$

$Sp(A^*A) = Sp(D^*D)$

or $D^* = \mathrm{diag}(\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \dots, \bar\lambda_n)$

$D^*D = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$

$$\Rightarrow \mu_j = \sqrt{|\lambda_j|^2} = |\lambda_j|$$

ccl Ce sont des valeurs singulières de A pour $j = 1, \dots, n$.

Th 2.7. Décomposition en val sing, svd

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de r valeurs sing positives alors $\exists\, U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ & $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toutes les 2 unitaires & $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ "diagonale" tq

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \tilde\Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\tilde\Sigma = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$

ep $rg(A) = r \leq \min(m,n)$

Rq : Schéma de calcul SVD

- calculer élts propres (μ_j^2, v_j) de A^*A où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ & $\{v_1, \dots, v_n\}$ base onée du $\mathbb{K}^n$.
- calculer $u_j = Av_j / \mu_j$ pr $j = 1, \dots, r$ ainsi $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ base onée de $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$
- Poser $U = (u_1, \dots, u_m)$; $V = (v_1, \dots, v_n)$, Σ c avt

5 NB : ~

DM 2.7

D'après Rq : A^*A adm^t bse ornée ds

Vp $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$; plus précisém^t :

$$\forall j = 1, \dots, n \ : A^*A v_j = \lambda_j v_j$$

On sait que $\lambda_j \geq 0$ d'après 2.3.

et une permutat° près,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = 0 \dots \lambda_n$$

Pr les valRs singulières

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \mu_r = \sqrt{\lambda_r}$$

Notons que $V_j = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

est unitaire car $V^*V = I$.

Posons pr $j = 1, \dots, r$: $u_j = \dfrac{Av_j}{\mu_j} \in \mathbb{R}^n$.

Mq $\{u_1, \dots, u_r\}$ est orthonormée

soit $i, j \in \{1, \dots, r\}$

$$(u_i, u_j) = u_j^* u_i = \frac{1}{\mu_j \mu_i} v_j^* A^* A v_i$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_j \mu_i} v_j^* v_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, r : u_i \in \mathrm{Im}(A).$$

$\{u_1, \dots, u_r\}$ est syst. libre $\subset \mathrm{Im}(A)$

espace engendré : span : Vect.

$\underbrace{\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_r\}}_{E}$ sev de $\mathrm{Im}(A)$

$$\Rightarrow r \leq \dim(\mathrm{Im}(A)) = rg(A)$$

$\dim \mathrm{Ker}(A^*) = m - \dim \mathrm{Im}(A) \leq m - r$

~~Posons~~ mais $v_{r+1}, \dots, v_n \in \ker(A)$ libres

$$\dim \ker(A) \geq n - r$$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A^*) \leq r \Rightarrow rg(A) = r$. égalité partout.

$\{u_1, \dots, u_r\}$ ornées / libres.

On pt ~~compléter~~ trouver $u_{r+1}, \dots, u_m \in \mathbb{K}^m$

pr former une base ornée de $\mathbb{K}^m$.

colonnes forment base ornée : famille

Plus précisément, $u_{r+1}, \dots, u_m$ doivent former une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \ker(A^*)$.

$\Rightarrow U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{K})$ est unitaire et

$$A \cdot V = (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_n)$$
$$= (\mu_1 u_1, \dots, \mu_r u_r, 0, \dots, 0)$$
$$= U \cdot \Sigma = U \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

En multipliant par V^* :

$$A \cdot V \cdot V^* = A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

$\square$

SVD (3) : Approcher A par une matrice de faible rang.

Th 2.9 TH Eckhart - Young

Normes matricielles & normes compatibles

Plus précisément, $u_{r+1}, \dots, u_m$ doivent former une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$.

$\Rightarrow U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{K})$ est unitaire et

$$A \cdot V = (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_n)$$
$$= (\mu_1 u_1, \dots, \mu_r u_r, 0, \dots, 0)$$
$$= U \cdot \Sigma = U \cdot \left(\begin{array}{cc|c} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_r & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$$

En multipliant par V^* :

$$A \cdot V \cdot V^* = A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$ $\square$

SVD (3) : Approcher A par une matrice de faible rang.

Th 2.9 Th Eckhart - Young

pour $k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ la mat de rg $\leq k$ la + proche de A est donné par

$$B = U \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = \sum_{j=1}^{k} u_j \mu_j v_j^*$$

de dista donnée par μ_{k+1}.

Normes matricielles & normes compatibles

On se donne $\forall n \geq 1$, une nv $|||\cdot|||$ sur $\mathbb{K}^n$.

Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite :

- compatible à la norme vectorielle $|||\cdot|||$ si
$$\forall A\ \forall x : |||Ax||| \leq \|A\| \cdot |||x|||$$
- sous-multipl. ou norme matricielle si
$$\forall A\ \forall B : \|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$$

@3.2 (Norme de Frobenius)

On va identifier $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

a Vect(A). $= \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$

alors $\|A\|_s = \|Vect(A)\|_2$

Encore preuve 32.

- sous-multiplicative

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$|(A\ B)_{i,k}| = |\sum A \quad B \quad|$

CS

$\leq \sqrt{\sum |A\ |} \sqrt{\sum |B\ |}$

$\|AB\|_2^2 \leq \sum \sum \sum |A\ |^2 \sum |B\ |^2$

$\|\cdot\|_S$ est compatible a norme vect. $\|\cdot\|_2$

On identifie un vect^r $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$ a mat $X^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

& $\|x\|_2 = \|X^e\|_e$

en prenant $p = 1$ ds la ~~s~~-multiplicativité.

$\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\|_2 = \|AX^e\|_S \leq \|A\|_S \|X^e\|_S = \|A\|_S \|x\|_2$

~~Preuve~~ L.3.3

À tte norme mat^{le} $\|\cdot\|$, on pt $\exists$ norme vectorielle q lui soit compatible.

~~ep~~ $\|A\| \geq \rho(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 3.3.

La norme mat^{le} est donnée $\forall n,\ n \geq 1$

alors $|||X||| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

& la compatibilité entre $\|\cdot\|$ & $|||\cdot|||$ découle de la sous-multip. de $\|\cdot\|$.

(b) Si on a une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pr un n alors

$$|||\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}||| = \| \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} x_1 & \\ \vdots & 0 \\ x_n & \end{array}\right)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \|$$

(c) lien entre $\|A\|$ & $\rho(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
ρ : rayon spectral.

soit (λ, x) un élt propre de A.

$x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ & $Ax = \lambda x$

& $|||\cdot|||$ compatible & $\|\cdot\|$ norme vect.

$|||Ax||| = |||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x||| \leq \|A\| \cdot |||x|||$

or $x \neq 0$ & alors $|||x||| \neq 0$ & on obtient

$\forall \lambda \in Sp(A)$: $|\lambda| \leq \|A\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$.

TH 3.4 Norme matricielle subordonnée

$\forall n \geq 1$, une nv $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$ & $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$\|A\| := \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$, donne bien nms de nv dite norme mat subord. à la nv $\|\cdot\|$.

Pr tte nms, $\|I_n\| = 1$. $\|I_n\|_S = \sqrt{n}$: elle n'est pas subordonnée.

Preuve 3.4

$A \longrightarrow \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ est une norme ?

- positivité ? $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \geq 0 = \|A\| \geq 0$

  si $\|A\| = 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1$; $Ax = 0$
  $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0$

  $\Rightarrow \forall k$: $Ae_k = k^{\text{ième}}$ colonne de $A = 0 \Rightarrow A = 0$.

- homogté : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

  $\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda A \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

- △ I $\|A+B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|$

  $\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \underbrace{\|Bx\|}_{\leq \max_{\|y\|=1} \|By\|}) \leq \|A\| + \|B\|$

- compatibilité : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\|Ay\| \leq \|A\| . \|y\|$

  car trivial pr $y=0$ sinon & $x = \frac{y}{\|y\|}$, $\|x\| = 1$

  $\|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$

- Sous-multip :

par compat.

$$\|AB\| = \max \|ABx\| \leqslant \|A\|.\|Bx\|$$

$$\leqslant \max_{\|x\|=1} \|A\|.\|Bx\| = \|A\|.\|B\|$$

Pr tte nms, $\|I_n\| = 1$. Pr la norme de Schur, $\|I_n\|_S = \sqrt{n}$, elle n'est alors pas subordonnée.

(D) 3.5 Normes mat subordonnés usuelles

Pr nv $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$, on note $\|A\|_p$ aussi la nms. La nm $\|\cdot\|_2$ est ausi appelé norme spectrale.

(TH) 3.6 FF pr normes nms usuels

Pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ns avs $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ (la + gde vlr singulière) &

$$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}|$$

Preuve 3.6 Notons par $N_p(A)$ l'expreO suggérée pour $\|A\|_p$

p = 2 : D'après 22 (compat ⇔ ss-mul) & 2.5, $\exists\, U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ tq $A^*A = UDU^*$ & D : mat diagonale.

$D = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$.

& $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$ les valeurs singulières de A.

$$N_2(A) = \sqrt{\rho(A^*A)} = \mu_1$$

$$\forall x : \|A\|_2^2 \overset{\text{def}}{=} \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} X^*A^*Ax$$

Posons $y = U^*x$, R9 $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 = 1$

$$\|Ax\|_2^2 = \max_{\|y\|=1} y^*Dy = \max_{\|y\|=1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \underbrace{\mu_j^2}_{\leqslant \mu_1^2} = \mu_1$$

$\Rightarrow \|A\|_2 \leqslant \mu_1$

En prenant $y = e_1$, $x = Ue_1$

$\|A\|_2^2 \geqslant \|e_1^* D e_1\| = \mu_1$ dc égalité.

$\underline{p=1}$ soit $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = 1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

alors $\|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\, x_k \right| \le$

$\le \max_{\ell=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|\, \|x\|_1$

En passant au max

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = N_1(A) = \max_{\ell} \sum |a_{k,\ell}|$

Aussi $\forall k \in \{1,\dots,n\}$:

$\|Ae_k\|_1 \le \|A\|_1$

$\uparrow \|e_k\| = 1$

$\|$

$\sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|$

En prenant le max sur ts les $k \in \{1,\dots,n\}$

$N_1(A) \le \|A\|_1 \Rightarrow$ égalité

$\underline{p=\infty}$

Pptés normes & rayon spectral

Co 3.7 Pptés norme spectrale

a) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \|A^*\|_2 = \|A\|_2$

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mat hermit $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaires, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \|UAV\|_2 = \|A\|_2$.

(a) $\|A^*\|_2^2 = \rho(AA^*) \overset{2.4}{=} \rho(A^*A) = \|A\|_2^2$

(b) comme $A = A^* \Rightarrow A$ est normale $(AA^* = A^*A)$,

d'après le 2.6, $\|A\|_2 \overset{3.6}{=} \max\{\mu_1, \dots, \mu_j$ VS de $A\}$

$= \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\} = \rho(A)$

(c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaires

$\|UAV\|_2 \overset{3.6}{=} \sqrt{\rho(\underbrace{V^*}_{=V^{-1}} A^* \underbrace{U^* U}_{I} AV)}$

dc $(UAV)^*(UAV)$ est simil^R à A^*A

m̂ spectre $= \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A\|_2^2$

μ A mat normale vs $= |vp|$

L vp non nulles AB & BA ont m̂s.

NB: $\|y\|_2^2 = y^* y$ ég

u

C-S

Th 3.8 de Gelfand

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ & $\varepsilon > 0$ alors on pt construire une nms $\|\cdot\|_*$ tq $\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$

ep $\forall$ nm $\|\cdot\|$ & $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

DM not

ⓐ soit $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \lambda^k \in Sp(A^k)$

$\Rightarrow \rho(A)^k \leq \rho(A^k) \leq \|A^k\|$

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$

ⓑ DM en TD : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

alors $\|X\|_* = \|Mx\|_2$ est une norme vectorielle

$\|B\|_* = \|MBM^{-1}\|_2$ est norme mat sub à $\|\cdot\|_x$.

ⓒ D'après Th de Schur 2.1 :

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unit^R tq $U^*AU = U^{-1}AU = T \leftarrow \triangledown$

Posons $\delta \in]0,1[$ à fixer plus tard,

posons $M^{-1} = U\Delta$, $\Delta = diag(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$

Alors $\|A\|_* = \|MAM^{-1}\|_2$

$= \|\Delta^{-1}U^*AU\Delta\|_2$

$= \|\Delta^{-1}T\Delta\|_2$

Posons $S = diag(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$ $\in Sp(A)$

$\|\Delta^{-1}S\Delta\|_2 = \|S\|_2 = \rho(S) = \rho(A)$

$\|\Delta^{-1}\underbrace{(T-S)}_{j,k}\Delta\|_2 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} |\delta^{k-j} t_{j,1}|^2}$

$\Rightarrow \|\Delta^{-1}(T-R)\Delta\|_2 \leq \delta\, \|T-R\|_S \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$

ⓓ $\|\cdot\|_2$ sous-m^{le} $\Rightarrow$

$\forall k : \|A^k\|_2 \leq \|A\|_*^k$

de ⓐ : $\liminf_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \geq \rho(A)$

$\liminf_{k\to\infty} \|A^k\|_*^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$

Suite de la Preuve :

ⓐ $\forall k=1,2,\dots,\ \|A^k\|^{1/k} \geq \rho(A)$

ⓑ $\forall A,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \|\cdot\|_*$ norme matricielle tq $\|A^k\|_*^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon \quad \forall k$

ⓒ Équivalence de normes :
$\exists \alpha,\beta>0$ tq $\forall B\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\alpha\|B\| \leq \|B\|_* \leq \beta\|B\|.$$

On déduit de ⓑ, ⓒ :

$$\limsup_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\alpha^{1/k}}}_{\to 1} \|A^k\|_*^{1/k} \overset{ⓑ}{\leq} \rho(A)+\varepsilon$$

& ⓐ implique

$$\liminf_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \geq \rho(A)$$

en faisant tendre $\varepsilon\to 0 \Rightarrow$ résultat $\square$.

Th 39. Série de von Neumann

$\forall E\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} E^k \text{ CV}}$ ssi $\boxed{\rho(E)<1}$.

Ds ce cas $I-E$ est inv & la limite de série est donnée p $(I-E)^{-1}$. Si de +, $\boxed{\|E\|<1}$ pr $\boxed{mm}$ $\Rightarrow$

$\|(I-E)^{-1}-I\| \leq \|E\|/(1-\|E\|)$ ⑬

Preuve : si $\rho(A)\geq 1$ alors d'après Th Gelfand 3.8 (ε livre)

$$\forall k=1,2,\dots : \|A^k\| \geq \rho(A)^k \geq 1.$$

Donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ne pt pas CV car le terme général A^k ne td pas vers 0.

si $\rho(A)<1$: Comme ttes les normes st équivalentes, il suffit de mq CV pr $\|\cdot\|_*$ & $\varepsilon>0$ de sorte q

$$\rho(A)+\varepsilon = q < 1.$$

D'après 38.ⓑ,

$$\forall k\geq 1 : \|A^k\|_* \leq q^k$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0$ tq $\forall k\geq m\geq N$:

crit de Cauchy

$$\Big\|\sum_{j=0}^{k} A^j - \sum_{j=0}^{m} A^j\Big\|_* = \Big\|\sum_{j=m+1}^{k} A^j\Big\|_*$$

$$\leq \sum_{j=m+1}^{k} \|A^j\|_* \leq \sum_{j=m+1}^{k} q^j \leq \frac{q^{m+1}}{1-q} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ d'après le crit de Cauchy, $\exists$ limite S

et $S(I-A) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} A^j(I-A) = \lim_{k\to\infty} -A^{k+1}+I = I$

cal $I-A$ inv & $S=\sum_{j=0}^{\infty} A^j$

si $\|A\| < 1$ alors en remplaçant $\|\cdot\|_\infty$ par $\|\cdot\|$ & en posant $q = \|A\| \in]0,1[$.

$\forall k = 1, 2, \ldots \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k \leq q^k$ par sous-multiplicativité

Reste à ant.

$$\|(I-A)^{-1} - I\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} A^j - A^0 \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A^j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A^j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{q}{1-q}$$

Conditionnement

→ $\|\cdot\|$ mv & m.m.s (nota ©)

Machine au lieu résoudre $Ax = b$

résoudre $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$

© ∩

Preuve

$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\Delta x = \Delta b \\ \Delta x = A^{-1}\Delta b \end{cases}$$

$$\sup_{b, \Delta b \neq 0} \left\{ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|\Delta b\|} \right\} \overset{A \text{ bijective}}{=} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \Delta b \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|\Delta b\|}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \sup_{\Delta b \neq 0} \frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|\Delta b\|}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| \cdot \sup \left\| \frac{A^{-1}\Delta b}{\|\Delta b\|} \right\|$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \cdot \sup_{\substack{c \neq 0 \\ \|c\|=1}} \|A^{-1}c\| \overset{\text{Analyse}}{=} \underbrace{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}_{\|A\|} \cdot \underbrace{\max_{\|c\|=1} \|A^{-1}c\|}_{\|A^{-1}\|}$$

□

① 3.11 Pire amplification erreurs relatives.

$$\|A\| \, \|A^{-1}\| = \sup_{b, \Delta b} \frac{\left\{ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right.}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} \; : \; \begin{matrix} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{matrix}$$

Ⓓ Conditionnement

pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on déf le conditionnement

$$\text{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

ex $\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \, \|A^{-1}\|_p$. pour $p \in \{1, 2, \infty\}$

Ⓟ Ptés cond

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv alors

a) $\text{cond}(A) \geq 1$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$

c) $\text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$

d) $\text{cond}_2(A) = \mu_1 / \mu_n \quad \frac{+ \text{ petite vs}}{+ \text{ grande vs}}$

e) $\text{cond}_2(A) = 1$ pour A unitaire.

→ A est bien (resp. mal) conditionné si $\text{cond}(A) \simeq 1$. (resp $\text{cond}(A) \gg 1$)

Preuve: a) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A) \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1$$

ⓑ $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv

$$\text{Cond}(\lambda A) = \|\lambda A\| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} A^{-1} \right\| \overset{\text{homogénéité}}{=} |\lambda| \, \|A\| \cdot \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|A^{-1}\|$$

$$= \text{Cond}(A)$$

c) $\text{cond}(A^{-1}) = \|A^{-1}\| \, \|(A^{-1})^{-1}\|$

$= \|A^{-1}\| \, \|A\| = \text{cond}(A)$

d) $\|A\|_2 = \mu_1$ + grande vs de A

$$\|A^{-1}\|_2 \; \; Sp\left((A^{-1})^* A^{-1}\right) = Sp\left((AA^*)^{-1}\right)$$

$$= \left\{ \frac{1}{\mu} : \mu \in Sp(AA^*) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\mu} : \mu \in \underbrace{Sp(A^*A)}_{\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\}} \right\}$$

Donc $\underbrace{\rho\left((A^{-1})^* A^{-1}\right)}_{= \|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\mu_n^2}$

ⓔ U unitaire, $Sp(U^*U) = \{1\}$

$\Rightarrow \mu_1(U) = \mu_n(U) = 1 \;\; \underset{©}{\Rightarrow} \;\; \text{cond}(U) = \frac{\mu_1}{\mu_n} = 1$.

(Cor) (Distance aux matrices non inversibles)

Pr tte mat $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv.

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min\left\{\frac{\|A-B\|_2}{\|A\|_2} : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ non inv}\right\}$$

Preuve : $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inv $\Leftrightarrow rg(B) \leq n-1$

$\Rightarrow$ on pt appliquer Eckhart-Young pr $k = n-1$

$\min\{\|A-B\|_2 : rg(B) \leq n-1\} = \mu_{k+1} = \mu_n = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Estimations d'erreur pr systm perturbés

3.15 (TH) soit $A, \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ & A inv

& $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$. Si $b, \Delta b \in \mathbb{K}^n$, $b \neq 0$,

$$\begin{cases} Ax = b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Longrightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Rq 3.16 important

ⓒ $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$, on conclut q le Systm perturbé admt solu° proche de celle de $Ax = b$ tant que.

$$\mathrm{cond}(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \ll 1$$

Preuve 3.15

Posons $E = -A^{-1}\Delta A \Rightarrow \|E\| < 1$.

D'après 3.9. $(I-E) = A^{-1}(A+\Delta A)$

$\Rightarrow A + \Delta A$ inv & le systm perturbé

$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$.

admt une uniq sol° $y = x + \Delta x$.

Prenons $(I-E)(x+\Delta x) = A^{-1}(b+\Delta b)$

$\Rightarrow x + \Delta x = (I-E)^{-1}\underbrace{A^{-1}b}_{=x} + (I-E)^{-1}A^{-1}\Delta b$

$\Rightarrow \Delta x = \{(I-E)^{-1} - I\}x + (I-E)^{-1}A^{-1}\Delta b \; -I+I$

$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|\underbrace{\{(I-E)^{-1} - I\}}_{\leq \frac{\|E\|}{1-\|E\|}}\|(\|x\| + \|A^{-1}\Delta b\|) + \|A^{-1}\Delta b\|$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|E\|}{1-\|E\|} + \underbrace{\left[\left(\frac{\|E\|}{1-\|E\|}\right) + 1\right]}_{\frac{1}{1-\|E\|}}\frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|A^{-1}b\|}$$

$$\frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|A^{-1}b\|} = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\cdot\underbrace{\frac{\|AA^{-1}b\|}{\|A^{-1}b\|}}_{\leq \|A\|}\underbrace{\frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|\Delta b\|}}_{\leq \|A^{-1}\|}$$

$$\leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

et $\frac{\|E\|}{1-\|E\|} = \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1-\|E\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\|E\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Ch 4. Résolu° de SL $Ax = b$ p élim de Gauss & décomposi° LU

ED Gauss

Résoudre systm à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ & n équa°s

$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$, $i = 1, \dots, n$

q pt s'écrire $Ax = b$ (A inv)

Algo 4.1. EDG & pivotage naturel

Idée : $A = A^{(1)}$, $b = b^{(1)}$ tr pr $k = 1, \dots, n-1$ le systm $A^{(k)}x = b^{(k)}$ en un système $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$ équivlt, en créant des $A^{(k+1)}$ des 0 en colonne k en-dss diag.

But : Résoudre + simple $A^{(n)}x = b^{(n)}$ & $A^{(n)}$ ◸ p remonté

pr $k = 1, \dots, n-1$

spse hypo pivot $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$

pr $i = k+1, \dots, n$

calculer multiplicatr $l_{i,k} = \frac{a^{(k)}_{i,k}}{a^{(k)}_{k,k}}$

soustraire $l_{i,k}$ fois la k° équa° (ligne pivot) de la i° équa°

ⓐ

		$A^{(k)}$			$b^{(k)}$
$k=1$		$\boxed{4}$	8	12	4
		3	8	13	5
		2	9	18	11
$k=2$		4	8	12	4
	$l_{2,1} = \frac{3}{4}$	0	$\boxed{2}$	4	2
	$l_{3,1} = \frac{2}{4}$	0	5	12	9
$k=3$		4	8	12	4
		0	2	4	2
	$l_{3,2} = \frac{5}{2}$	0	0	2	4

→ les premières k lignes de $[A^{(k)}, b^{(k)}]$ & $[A^{(k+1)}, b^{(k+1)}]$ identiqs

→ $A^{(3)}$ est ◹.

→ $A^{(3)}x = b^{(3)}$ pt ê résolu p remontée

→ p 3° éq° : $x_3 = \frac{4}{2} = 2$

→ 2° $x_2 = (2 - 4x_3)/2 = -3$

(R) → 1° $x_1 = (4 - 8x_2 - 12x_3)/4 = 1$

Forme de $A^{(k)}$ ds cas général

(L) 4.3 une étape d'éliminaθ

ss hyp. pivotage naturel, on a $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$ (pareil pr $b^{(k)}$)

& $b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}$ pr $k = 1, \dots, n-1$

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & -l_{n,k} & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & \cdots & & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}$$

ep $A^{(n)}$ est ∇

$k=1$: ici $k-1=0$, il n'y a rien à mq pr $A^{(1)} = A$

$k \Rightarrow k+1$: spps $A^{(k)}$ admt la S^{ce} indiquée.

Analysons la $i$ème ligne de $L^{(k)} A^{(k)}$

$i \in \{1, \dots, k\}$: on obtient

$$[0, \dots, 0, \underset{\uparrow\, i}{1}, 0, 0, \dots, 0] \cdot A^{(k)} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, a_{i,i}^{(i)}, \dots, a_{i,n}^{(i)}]$$

$i \in \{k+1, \dots, n\}$ on obtient

$$= [0, \dots, 0, \underset{\uparrow\, k}{-l_{i,k}}, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow\, i}{1}, 0, \dots, 0]\, A^{(k)} =$$

$$= [\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_{i,k}^{(k)}, \dots, a_{i,n}^{(k)}] - l_{i,k} [\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_{k,k}^{(k)}, \dots, a_{k,n}^{(k)}]$$

$$= [0, \dots, 0, \underset{\uparrow\, k}{0}, a_{i,k+1}^{(k+1)}, \dots, a_{i,n}^{(k+1)}]$$

Donc $A^{(k+1)}$ a la S^{ce} souhaitée.

Aussi $A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & * \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix}$ cqfd

(18) vite →

(L) 4.4

$$L := (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} \dots (L^{(n-1)})^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Preuve : (a) Représentaθ $\boxed{L^{(k)} = I - y^{(k)} \underbrace{e_k^T}_{[0, \dots, 1, 0, \dots, 0]}}$

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix}$$

(b) **Inverse ?** $L^{(k)}(I + y^{(k)} \cdot e_k^T) = I$ ←

car $L^{(k)}(I + y^{(k)} \cdot e_k^T) = (I - y^{(k)} e_k^T)(I + y^{(k)} e_k^T)$

$$= I - y^{(k)} \underbrace{e_k^T \cdot y^{(k)}}_{=0} e_k^T$$

$$\Rightarrow (L^{(k)})^{-1} = I + y^{(k)} e_k^T.$$

(c) **FF pr produit** :

Mq $(I + y^{(1)} e_1^T) \dots (I + y^{(k)} e_k^T) = I + \sum_{j=1}^{k} y^{(j)} e_j^T$

(PR) $k=1$ ok

$k \Rightarrow k+1$

$$= \underbrace{(I + y^{(1)} e_1^T) \dots (I + y^{(k)} e_k^T)}(I + y^{(k+1)} e_{k+1}^T) =$$

$$= I + \sum$$

$$= I + \sum_{j=1}^{k} y^{(j)} e_j^T + I\, y^{(k+1)} e_{k+1}^T + \sum_{j=1}^{k} y^{(j)} \underbrace{e_j^T y^{(k+1)}}_{=0} e_{k+1}^T$$

Décompoθ LU : ∃ & unicité

(D) 4.5 déf décomp LU.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt une décomp LU ssi $A = LU$

& $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\triangle$ à diagonale unité, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ∇

(Th) 4.6 Unicité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv. alors une décomp LU est uniq.

Preuve

Spps $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ & U_1, U_2 ∇, L_1, L_2 $\triangle$ à diagonale unité.

A (inv) $\Rightarrow \underbrace{L_1, L_2}_{(\text{car } \det = 1)}, U_1, U_2$ (inv)

car $\det(A) = \det(L_1 U_1)$
$= \det(L_1) \det(U_1)$
le tout est non nul.

En multipliant (**) $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ à gauche de L_1^{-1} & à droite U_2^{-1}.

$$L_1^{-1} L_1 U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 U_2 U_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \underset{\nabla}{U_1 U_2^{-1}} = \underset{\Delta}{L_1^{-1} L_2}$$

(p ptés mat ∇)

$\left(\begin{array}{l} \nabla \cdot \nabla = \nabla \\ \nabla \text{inv} \to (\nabla \text{inv})^{-1} \end{array} \right)$

$= \quad \nabla = \Delta$

à diagonale unité

Donc $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = I$

D'où $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$. □.

Th 4.7 Δ

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv. ssi :

a) A admet décomp. LU

b) pr $k = 1, \dots, n-1$, la sous-mat principale $[A]_k$ composée ds k^{er} lignes & colonnes de A est inv.

c) l'hypo PN : $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ pr $k = 1, \dots, n-1$

Ds ce cas $U = A^{(n)}$ (L 4.3) & L. (L.4.4).

80∞∞∞

Preuve Th 4.7

(a) $\Rightarrow$ (b) $A = LU = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad [A]_k = \left[[L]_k, * \right] \cdot \begin{bmatrix} [U]_k \\ 0 \end{bmatrix}$

$= [L]_k [U]_k$ p produit p blocs.

A inv $\det(A) = \det(LU) = \underbrace{\det(L)}_{1} \cdot \det(U)$

$= u_{11} \cdot u_{2,2} \cdots u_{n,n}$.

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, n : u_{j,j} \neq 0 \Rightarrow \det([U]_k) \neq 0$

$\Rightarrow \det([A]_k) \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) PR sr k.

$k = 1$ $\quad a_{1,1}^{(1)} = a_{1,1} = \det([A]_1)$ d'après b)

$1, \dots, k-1 \Rightarrow k$: $a_{1,1}^{(1)}, \dots, a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{(k)}$ bien définie

$\det\left([A^{(k)}] \right) = \det([A]_k) \overset{(b)}{\neq} 0$

vu opérat° élém. (multiple lgn à 1 autre).

mais $\det \left[A^{(k)} \right]_k \overset{4.3}{=} a_{1,1}^{(1)} \cdot a_{2,2}^{(2)} \cdots a_{k,k}^{(k)}$

∇

— vu —

(c) $\Rightarrow$ (a) : D'après l'hypothèse c),
on pt appliquer l'éliminat° de Gauss.
Dc d'après L 4.3.

$$U = A^{(n)} = L^{(n-1)} A^{(n-1)}$$

$$= L^{(n-1)} \cdots L^{(1)} A$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{[L^{(1)}]^{-1} \cdots [L^{(n-1)}]^{-1}}_{\overset{L4.4}{=} L \,:\, \nabla \text{ à diag unité}} U$$

$A = LU$

□

Rq 4.8. (utilité décomp LU)

- $Ax = b$ ssi résoudre $Ly = b$ (p descente) & $Ux = b$ (p remtée)
- calcul efficace $\det(A)$ et A^{-1}!

Pivotage Partiel

Si $a_{k,k}^{(k)} = 0$ alors effectuer une permutat°. (avt chq étape) Stratégie dite pivotage partiel.

Algo 4.9. Éliminat° de Gauss à pivotage partiel

pr $k = 1, \dots, n-1$

chercher l'indice π_k du + grd élt en module parmi les $a_{i,k}^{(k)}$; $i = k, \dots, n$.

Pour $i = k+1, \dots, n$

calculer multiplicat^{r} $l_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$

soustraire $l_{i,k}$ la k^{e} équat° (ligne pivot) de la i^{e} équat°.

On notera $P^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: mat de transposit° q échange 2 élts d'indice k et π_k & laisse les autres composantes invariantes.

Th 4.10. Factorisat° LU & pivotage partiel

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une mat inv. Alors la mat A admet une décomp LU à permutat° près, ie $PA = LU$ où $P = P^{(n-1)} \cdots P^{(1)}$ est une mat de permutat° & L, U st c avt à condit° q l'on permute simult. ts ls multiplic^{rs} et ls équat°s.

Idée preuve (Th 4.1)

$A^{(k+1)} = L^{(k)} P^{(k)} A^{(k)}$

$U = A^{(n)} = L^{(n-1)} P^{(n-1)} L^{(n-2)} P^{(n-1)} \dots L^{(2)} P^{(2)} L^{(1)} P^{(1)} A$

$\hookrightarrow P^{(n-1)} \dots P^{(1)} = P$

si $j > k$ & $P^{(j)} L^{(k)} = \tilde{L}^{(k)} P^{(j)}$

permutation des comp. j & π_j dans $y^{(k)}$

Il reste à mq dans 4.9 après permutation, le pivot $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$.

PR sur k :

$k=1$: $A^{(1)} = A$, $\max_{i=1,\dots,n} |a^{(k)}_{i,k}| \neq 0$

sinon contradiction de A inv.

$k-1 \Rightarrow k$: $A^{(k)}$ bien déf.

$A^{(k)} = L^{(k-1)} P^{(k-1)} \dots L^{(1)} P^{(1)} A$

$\Rightarrow \det(A^{(k)}) = \pm \det(A) \neq 0$

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & * \\ & \ddots & \vdots & \\ & & a_{k,k} & \\ \hline & \emptyset & \vdots & * \\ & & a_{n,k} & \end{array}\right]$$

$\max_{i=k,\dots,n} |a^{(k)}_{i,k}| > 0$.

car $A^{(k)}$ inversible.

Stockage en place & vectorisation

Rq 5.1 (Stockage en place)

$a^{(k+1)}_{i,j}$ calculé, on n'a + besoin $a^{(k)}_{i,j}$. On stockera $a^{(k+1)}_{i,j}$ à sa place avec tableau $M \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{K})$ initialisé : $M = [A, b]$

On stockera $l_{i,k}$ à position (i,k) de M.

(à la place d'un zéro de $A^{(k+1)}$)

Rq 5.2 (Vectorisation)

$\forall\, i,j > k$

$$l_{i,k} = \frac{a^{(k)}_{i,k}}{a^{(k)}_{k,k}}, \quad a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l_{i,k}\, a^{(k)}_{k,j}, \quad b^{(k+1)}_i = b^{(k)}_i - l_{i,k}\, b^{(k)}_k$$

deviennent ff vectorisées $M[k+1:n,k] = \dfrac{M[k+1:n]}{M[k,k]}$ pr $i \in [k+1, n]$

$M[i, k+1:n+1] = M[i, k+1:n+1] - M[i,k] * M[k, k+1:n+1]$

Triangulation de Gauss

Algo 5.3 (TDG & descente, pivotage partiel)

Initialisation $M = [A, b]$, n = ordre de A

Pour $k = 1, 2, \dots, n-1$

Chercher $\pi_k \in [k:n]$ tq $|M[\pi_k, k]| = \max(M[k:n, k])$

Permuter lignes k & π_k de M

$M[k+1:n, k] = M[k+1:n, k] / M[k,k]$

Pour $i = k+1, \dots, n$

$M[i, k+1:n+1] = M[i, k+1:n+1]$
$\qquad - M[i,k] * M[k, k+1:n+1]$

Possible suppression boucle i en calculant directement :

Si M (& tableau π) en sortie, on a factorisation $PA = LU$ & $Lb^{(n)} = Pb$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ m_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n,1} & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & m_{n,n} \end{bmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{bmatrix} m_{1,n+1} \\ \vdots \\ m_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Remontée & Complexité

Algo 5.4. Remontée pour trouver sol° $Ax = b$. $\quad x = 0 \in \mathbb{R}$

initialisation M sortie algo 5.3, n = nbr de lignes de M,

pour $i = n, n-1, \dots, 2, 1$

$$x[i] = \frac{\left(M[i, n+1] - M[i, i+1:n] \overset{\text{mult matriciel}}{*} x[i+1:n]\right)}{M[i,i]}$$

np.dot(·)

Th 5.5 Complexité de l'algo de Gauss

Algo 5.3 / 5.4 nécessite $O(n^2)$ espaces mémoire.

La TDG 5.3 nécessite $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ opéra° élt^{re},

& la remontée 5.4 nécessite $n^2 + O(n)$ opér éltres.

Preuve Compter nbr OP pour remontée

$$\sum_{i=1}^{n} \left(2 + (2(n-i)-1)\right) = n^2 + O(n)$$

& pour triangulation

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{n-k}_{\substack{\text{divisions} \\ \text{nbr de multiplications}}} + \underbrace{2(n-k)(n-k+1)}_{\text{produits \& soustractions}}\Big) = 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 + O(n^2)$$

$$= \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

$\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

L'algo de Gauss en précision finie

Th 5.6 (sans preuve)

soit $\hat{L}, \hat{u}, \hat{P}$ calculés sur ordi de précision machine ε alors

$$\boxed{\|\hat{P}A - \hat{L}\hat{u}\|_\infty \leq 2\varepsilon n^2 \gamma(A)}$$

où le facteur de grossissement $\boxed{\gamma(A) = \max_{i,j,k} |A_{i,j}^{(k)}|}$

a) sans pivotage, $\gamma(A)$ peut être arbitrairement + grand que $\|A\|_\infty$

b) cas pivotage partiel, $\gamma(A) \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$

c) si A (h) déf $\oplus$ alors $\gamma(A) \leq \|A\|_\infty$.

Ex 5.7 4 pvt naturel $\delta > 0$ "petit"

$$A = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = LU, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\delta & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}$$

& en précision finie, (pn), $\delta \ll \varepsilon$,

$$\hat{L} = L, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 0 & -1/\delta \end{bmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|\hat{P}A - \hat{L}\hat{u}\|_\infty = 1$$

q? 4 pv partiel?

Exploiter la symétrie

Th 6.1 Décomposition de Crout

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv & (h) admet décomp $A = LU$, alors elle admet uniq décomp. $\boxed{A = LDL^*}$ où D diagonale & réelle.

Preuve 6.1.

Par hypo $A = LU$ $\exists$ & donc $\det(A) = \overbrace{\det(L)}^{1} \cdot \det(U)$

$$= \prod_{j=1}^{n} u_{jj}.$$

$\Rightarrow D = \operatorname{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$ est inv.

$$A = LU = LDD^{-1}U$$

$$= A^* = \underbrace{(D^{-1}U)^*}_{\text{de diag unité}} D^* L^*$$

D'après Th 4.6 Unicité :

$$U = D^* L^* \quad \& \quad L = (D^{-1}U)^* = U^* D^{-*}$$

en comparant les élts diag : $\Rightarrow D = D^*$ et $U = DL^*$

$\forall j = 1, \dots, n$; $u_{jj} = \overline{u_{jj}}$ $\Rightarrow A = LDL^*$ □

Th 6.2 Décompo de Cholesky

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ h déf + ssi

il admt uniq décomp $\boxed{A = CC^*}$

ᵒᵘ $C \triangle$ ayt élts diag > 0.

Preuve Mq PR si tous les pivots $a^{(k)}_{k,k} > 0$.

$\Rightarrow$

$k=1$ trivial

$k-1 \Rightarrow k$: $A^{(k)}$ h déf inie.

soit $y^* = e_k^* L^{(k-1)} \cdots L^{(1)} \neq 0$.

$= [\ * \quad 1 \ 0 \cdots 0\ ]$ (1 en position k)

$$y^* A y = e_k^* L^{(k-1)} \cdots L^{(1)} A y$$

$$= e_k^* A^{(k)} y$$

où $e_k^* A^{(k)} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \underset{\uparrow k}{a^{(k)}_{k,k}}, *]$, $y = \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ($k-1$ composantes $*$)

$$= a^{(k)}_{k,k} > 0$$

$\Rightarrow$ par Th 4.7 $\Rightarrow A = LU$ existe

" " 6.1 $\Rightarrow A = LDL^*$

où $D = \mathrm{diag}(a^{(1)}_{1,1}, \dots, a^{(n)}_{n,n})$

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, n : d_{jj} = a^{(j)}_{jj} = \delta_j^2, \quad \delta_j > 0$

$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \ \Delta^2 = D = \Delta\Delta^*$.

$\Rightarrow A = L \cdot \Delta \cdot (L \cdot \Delta)^* = C$ où diagonale $\delta_1, \dots, \delta_n$

$\Leftarrow$ ⚠

Rq 6.3 ⚠ écrire ssi algo $\boxed{\text{IMPORTANT !!!}}$

On conclut que calculer la factorisation de Cholesky nécessite $n^3/3 + O(n^2)$ opé.

$C^* x = y$

$C y = x$

2/5

$A = LDL^*$ $\exists$

$\Rightarrow \forall\ 1 \leq j \leq i \leq n$:

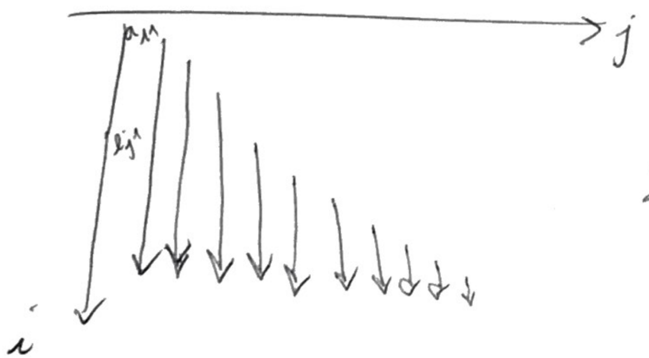
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{l_{i,k}}_{=0 \text{ si } k>i} d_{kk} \underbrace{(L^*)_{kj}}_{= \overline{l_{jk}} = 0 \text{ si } k>j}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} l_{i,k}\, d_{k,k}\, \overline{l_{j,k}}$$

$\underline{j<i}$: $a_{ij} = l_{ij} d_{jj} \overline{l_{jj}} + \sum_{1}^{j-1} \dots l_{ij}$

$$= \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k}\, d_{kk}\, \overline{l_{j,k}} \right)$$

$\underline{i=j}$: $d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}\, d_{kk}\, \overline{l_{jk}}$



on doit trouver opéra°s algo de Gauss

Exploiter des 0 dans A

↳ ex A mat tridiagonale. ie $a_{i,j} = 0$ pr $|i-j| > 1$

Th 6.4 Th du front

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv admettant une décomp $A = LU$.

Nots front$(A) = (j(1), \dots, j(n))$.

ac $j(i)$ l'indice colonne du 1er élt $\neq 0$ ds ligne i de A. Alors front(L) = front(A)

front(U^T) = front(A^T).

⚠ calcul front (mat. tridiagonale)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \emptyset \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots \\ \emptyset & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

front$(A) = (1, 1, 2, \dots, n-1)$

Preuve 6.4 $A = LU$ inv

$\Rightarrow u_{11}, \dots, u_{nn} \neq 0$

$\text{front}(A) = (j(1), \dots, j(n))$ (ici i fixe)

$\text{Lg} \quad a_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{pr } j = 1, 2, \dots, j(i) - 1 \\ \neq 0 & \text{pr } j = j(i) \end{cases} \quad (*)$

$\forall\, i > j, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{l_{ik}}_{\substack{= 0 \\ \text{pr } k > i}} \cdot \underbrace{u_{kj}}_{= 0 \text{ pour } k > j}$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}\, u_{kj}$$

$$\Rightarrow a_{ij} = l_{ij}\, u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

$$\Rightarrow l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right)$$

<u>Mq (PR) pr $j = 1, 2, \dots, j(i) - 1$: $l_{ij} = 0$</u>

<u>$j = 1$</u> $\quad l_{i1} = \frac{1}{u_{11}} a_{i1} \overset{(*)}{=} 0.$

<u>$1, \dots, j-1 \Rightarrow j$</u>

<u>$1, \dots, j \Rightarrow j$</u> : Par (HDR) :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \underbrace{l_{ik}}_{=0}\, u_{kj} = 0 \Rightarrow l_{ij} = \frac{a_{ij}}{u_{jj}} \overset{(*)}{=} 0$$

□

Il reste à mq $l_{ij} \neq 0$ pr $j = j(i)$

Par ce q précède, $\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} = 0$

de $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \neq 0$ par hyp $\Rightarrow l_{ij} \neq 0$

---

soit A mat tridiagonale.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix} \qquad \text{front}(A) = (1, 1, 2, 3, \dots, n-1) = \text{front}(A^T)$$

$* \neq 0.$

$$A = L.U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bidiagonal inf.}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{bidiag sup.}$$

$\Rightarrow 3n - 2$ inconnues

À réfléchir : L & U peuvent être obtenus en $O(n)$ opérations. (voir livre)

7 - Le problème des moindres carrés & la décomposition QR

Histoire : Étude des cartes.

Position du pb des moindres carrés

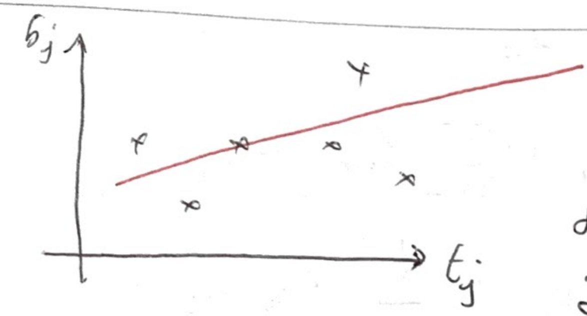
ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ & $rg(A) = n \leq m$
$\Rightarrow$ pas inv. $b \in \mathbb{R}^m$.

D 7.1 Le pb des moindres carrés

Trouver $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que

$$\boxed{\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|Az - b\|_2} \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Ex (La droite de régression)



$t \mapsto g(t) = x_1 + x_2 t$

$\delta_j \; j = 1, \dots, m$

$\delta_j = g(t_j) - b_j$

But : chercher $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de sorte que $\sum_j \delta_j^2$ soit minimale

L'∃ & l'unicité d'une solut°

Th 7.3 (Solut° pb de moindres carrés)

L'uniq sol° $\underline{x}$ du pb d's moindres carrés est l'uniq solut° $\underline{x}$ du système des équat°s normales : $A^T A\underline{x} = A^T b$

Ns donnons pve algébriq, alternativᵗ on pt donner une pve analytiq en calculᵗ les points annulant le gradient de $\mathbb{R}^n \ni$ $\ni f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ & déterminer nature du Hessien. (⊕?)

⚠ calcul le gradient de $f(x)$.

Preuve 7.3 Par hyp : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $rg(A) = n \le m$

$b \in \underline{\mathbb{R}^m} = Im(A) \oplus Ker(A^T)$

De $b = b_1 + b_2$, $b_1 \in Im(A)$, $b_2 \in Ker(A^T)$

$b_1 \perp b_2$

$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^2$, $\|Ax - b\|^2 = \|\underbrace{(Ax - b_1)}_{\in Im(A)} - b_2\|^2$ $\perp$ à $Im(A)$

$= \|Ax - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$ (Pythagore).

$\geq \|b_2\|_2^2$ & égalité ssi $Ax = b_1$.

Notons que $Ax = b_1 \Rightarrow A^T A x = A^T b$

et $A^T A$ inv car sym déf ⊕.

car $\forall x \neq 0$, $\langle A^T A x, x\rangle = x^T A^T A x = \|Ax\|^2 \geq 0$

& $\neq 0 \Leftrightarrow Ax \neq 0$ car les colonnes de A st libres. (car $rg A = n$).

On vient de mq que $Ax = b$ admet au plus 1 sle solut° = sol° du système : $A^T A x = A^T b$ d'équat°s normales.

Pk au moins une sol° au plus ?

$b_1 \in \mathrm{Im}(A) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^n : b_1 = Az$

$\Rightarrow z = (A^TA)^{-1}A^Tb_1$, soit $x = (A^TA)^{-1}(A^Tb)$

$\|Ax - b_1\|^2 =$

$= \| A(A^TA)^{-1}A^Tb - A(A^TA)^{-1}A^Tb_1 \|^2$

$= \| A(A^TA)^{-1}A^T\underbrace{(b-b_1)}_{\substack{b_2 \in \mathrm{Ker}(A^T) \\ =0}} \| = 0.$

$\square$

D.7.4 (Décomposi° QR (pleine ou économiq))

On dira que $A = QR$ est une décomposi° (QR)

si $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthogonale

$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$,

& $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ◸ à diag > 0.

On dira que $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ est une décomposi° QR économiq si $\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ & $\tilde{Q}^T\tilde{Q} = I_n$ ($\tilde{Q}$ est à col^{nes} orthonormés), $\tilde{R}$ c̃ avt.

Th 7.5 Il existe 1 & 1 seule décompo QR économiq $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

Preuve Th 7.5 ⚠ oblig $\square$

Uniq: soit $A = \tilde{Q}_1\tilde{R}_1 = \tilde{Q}_2\tilde{R}_2$ & $\tilde{Q}_1^T\tilde{Q}_1 = I_n$ (oui →, ← non)

$\tilde{Q}_2^T\tilde{Q}_2 = I_n$

$\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ ◸, élts diag > 0.

$\Rightarrow \underbrace{A^TA}_{\text{sym. déf. p.}} = \tilde{R}_1^T\tilde{Q}_1^T\tilde{Q}_1\tilde{R}_1 = \tilde{R}_1^T\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2^T\tilde{R}_2$

& $\tilde{R}_1^T = C$ ◢ à élts diag > 0

$\xRightarrow{\text{unicité!}}$ du Th de Cholesky $\tilde{R}_1^T = \tilde{R}_2^T$.

$A\tilde{R}_1^{-1} = \tilde{Q}_1 = A\tilde{R}_2^{-1} = \tilde{Q}_2$. $\Rightarrow$ unicité de $\tilde{R}$ & $\tilde{Q}$.

$\underline{\underline{\Delta}}$: A^TA : sym déf pos.

$\Rightarrow C \triangle$ à élts diag >0 tq

$$A^TA = C.C^T$$

$\Rightarrow$ posons $\tilde{R} = C^T \Rightarrow \underset{\text{inv.}}{\nabla}$ à diag >0

$\Rightarrow$ posa $\tilde{Q} = A.\tilde{R}^{-1}$

alors $\tilde{Q}^T\tilde{Q} = \tilde{R}^{-T}\underbrace{A^TA}_{\tilde{R}^T\tilde{R}}\tilde{R}^{-1} = I_n$

Rq 7.6 Dans déf décompo QR économ pleine, on doit prendre Q la mat formée p 1°s colonnes n de Q. Mais 8tes col^nnes ne st pas uniqs

soit décomp. QR pleine, $A = QR$,

$R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$ $\hat{R} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $Q^TQ = I_m$

$Q = [\underbrace{Q_1}_{n} \vdots \underbrace{Q_2}_{m-n}] \Rightarrow A = [Q_1 / Q_2]. \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}$

$= Q_1\tilde{R} + Q_2\tilde{R}$

$= Q_1\tilde{R}.$

$Q_1^TQ_1 = [I, 0]Q^T.Q\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = I_n.$

On trouve la décomp. QR économq. (uniq d'après L7.5)

$\Rightarrow Q_1$ & $\tilde{R}$ uniqs.

Q_2 n'est pas uniq.

Posons $\underline{Q} = [Q_1 | -Q_2]$

orthogonalité $\underline{Q}^T\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ -Q_2^T \end{bmatrix}[Q_1, -Q_2]$

$= \begin{bmatrix} Q_1^TQ_1 & -Q_1^TQ_2 \\ \underbrace{-Q_2^TQ_1}_{=0} & Q_2^TQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix} = I_m$

orthogonalité de Q

$\underline{Q}.R = Q_1.\tilde{R}.(-Q_2).0 = Q_1\tilde{R} = A.$

Résolut° p décompo QR économiq

Cor 7.7 La sol° $\underline{x}$ du pb dq moindres carrés est l'uniq solut° $\underline{x}$ du système $\tilde{R}x = \tilde{Q}^Tb$ où $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ une décomposi° QR économiq.

ASI → TD1,2,3

Preuve 7.7

déc QR réd (Soit $A = \tilde{Q}\tilde{R}$, $\tilde{R}$ ▽ & élt diag > 0 $\Leftrightarrow \tilde{R}$ est inv) & $\tilde{Q}^T\tilde{Q} = I$

Système des équa°s normales :

$$A^T A \underline{x} = A^T b \overset{A=\tilde{Q}\tilde{R}}{\Leftrightarrow}$$

$$\tilde{R}^T \underbrace{\tilde{Q}^T \tilde{Q}}_{I_n} \tilde{R} \underline{x} = \tilde{R}^T \tilde{Q}^T b \Leftrightarrow$$

$$\tilde{R}^T (\tilde{R} \underline{x}) = \tilde{R}^T (\tilde{Q}^T b) \Leftrightarrow$$ en multipliant à gauche par l'inverse $(\tilde{R}^T)^{-1}$

$$\tilde{R} \underline{x} = \tilde{Q}^T b \quad \Leftrightarrow$$

Le résultat découle du (TH) 7.3. □

Rq 7.8 Passage décomp. QR réd est préférable à résoudre SEN car

$$\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(\tilde{R}^T \tilde{R})$$
$$= (\text{cond}_2(\tilde{R}))^2 \gg \text{cond}_2(\tilde{R})$$

$\sigma = \sqrt{vp(A^T A)}$

aspect taille semplement

L'algorithme de Gram-Schmidt

Si $rg(A) = n$, dQR réd : $A = \tilde{Q}\tilde{R} \Rightarrow Im(A) = Im(\tilde{Q})$

Notons $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de A libres (car le $rg(A) = n$).

notons $q^1, \dots, q^m \in \mathbb{R}^m$, les colonnes de $\tilde{Q}$.

$$Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\} \underset{\text{bijecto}}{\overset{x = \tilde{R}^{-1}y}{=}} \{A\tilde{R}^{-1}y, y \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\overset{\text{décom}}{=} \{Ry, y \in \mathbb{R}^m\} = Im(\tilde{Q}).$$

Passage de A à $\tilde{Q}$: passage d'une base de $Im(A)$ à une base orné de $Im(A)$.

Idée : Rendre a_k orthogonale à $q_1, \dots, q_{k-1}$ & normaliser pr obtenir q_k.

$$\forall k, \ \tilde{r}_{k,k} \cdot q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{r}_{jk} q_j$$

rendre les vect^{rs} orthgnx.

$u_1 = v_1$

$u_2 = v_2 - \dfrac{u_1}{\|v_1\|}$ (32)

$u_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|}$

$\Leftrightarrow \forall k,\ a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{jk}\, q_j$

$\Leftrightarrow A = \tilde{Q}\tilde{R}$

ty $\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{n,1} \\ & \ddots & \\ \phi & & \tilde{r}_{nn} \end{bmatrix}$

Algo 7-9 : décomp QR écr p GS

b) /!\ m̂ si $\tilde{r}_{k,1} \neq 0$, il pt ê petit

$|\tilde{r}_{k,k}| / \|\tilde{R}\|_2 \geq \frac{1}{\mathrm{cond}_2(\tilde{R})}$.

Preuve : $\forall k \in \{1, .., n\}$

$|\tilde{r}_{k,k}| = |e_k^T \tilde{R} e_k| \leq \underbrace{\|e_k\|_2}_{1} . \|\tilde{R} e_k\|_2$

$\leq \|\tilde{R}\|_2$

$\left(\frac{1}{\tilde{r}_{k,k}}\right) = \left(\tilde{R}^{-1}\right)_{k,k} = |e_k^T \tilde{R}^{-1} e_k| \leq \|\tilde{R}^{-1}\|$

$\frac{1}{\mathrm{cond}(\tilde{R})} \leq \frac{|\tilde{r}_{k,k}|}{\|\tilde{R}\|} \leq 1$

c) algo de GS modifié.

RY 7.10

a) pr k fixe, on doit calculer k produits scalaire & k-1 CL ds $\mathbb{R}^m$, de en total un nbr opé arithmétiqs de

$\sum_k (4km) + O(n) = 2mn^2 + O(mn)$

8) Calcul de la décomposiᵒ QR pleine par Householder & Givens

sppo $m \geq 2$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\exists$ mat orthog $H(y) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tq $H(y)\,y$ est multiple du 1° vectᵉᵘʳ canoniq e_1 ds $\mathbb{R}^m$.

Th 8-1 Une étape d'éliminaᵒ ds facto QR pleine

Avec des mat orthogonales $H^{(k)}$ é ci-dessous, $A^{(1)} = A$ et $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$

pr $k = 1, \dots, n-1$ alors $A^{(k)}$ aura la forme

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{bmatrix}, \quad H^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H(y^k) \end{array}\right],$$

$$= \begin{bmatrix} a^{(k)}_{1,1} & & & a^{(k)}_{1,n} \\ 0 & a^{(k)}_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,n} \\ 0 & \cdots\ 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & a^{(k)}_{m,k} & a^{(k)}_{m,n} \end{bmatrix}$$

et $\exists\, E = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ approprié, $R = E A^{(n)} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ & $Q^T = E H^{(n-1)} \dots H^{(1)}$ ns obtenons la décomp QR pleine $A = QR$.

<u>NB</u> : les 1ᵉʳˢ $k-1$ lignes ds $A^{(k)}$ & $A^{(k+1)}$ st mêmes

---

Ds la suite $H(y).y = \alpha . e_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>NB</u> : $\alpha^2 = \|y\|^2$

<u>Preuve de 8.1</u> :

Mq $H^{(k)}$ est orthogonal. $m+1-k$

$$(H^{(k)})^T H^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q(y^k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q(y^k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q(y^{(k)})^T Q(y^{(k)}) \end{bmatrix} = I_m .$$

Mq la forme de $A^{(k)}$ est bien ĉ indiqué

PR sur $k=1,\dots,n$:

$\underline{k=1}$ $A^{(1)}=A$ bien S^{ce} souhaitée (aucune)

$\underline{k \Rightarrow k+1}$ $A^{(k)}$ la forme ci-dénoncée *

$$A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)} \qquad (*)$$

Premières $(k-1)$ lignes de $H^{(k)}A^{(k)}$

= premières $(k-1)$ lignes de $A^{(k+1)}$

Dernières $(n+1-k)$ lignes de $H^{(k)}A^{(k)}$

$$\left[\underbrace{0}_{k-1}, H(y^{(k)})\right] \cdot A^{(k)}$$

$= H(y^{(k)})$ [dernières $n+1-k$ lignes de $A^{(k)}$]

$= H(y^{(k)})\ [0,\dots,0, y^{(k)}, *]$

$$= [\underbrace{0,\dots,0}_{k-1}] \begin{bmatrix} a_{kk}^{(k+1)} & \\ 0 & \\ \vdots & ,* \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Dc on préserve les 0 en colonnes 1 jusque $k-1$ en-dessous de la diagonale & on a su créer des 0 en colonnes k sous la diagonale.

$\Rightarrow$ on obtient la S^{ce} de $A^{(k)}$

Par $(*)$ $A^{(n)} = H^{(n-1)} H^{(n-1)} \dots H^{(1)} \underbrace{A^{(1)}}_{A}$, $A^{n-1} = \begin{bmatrix} \ddots & * \\ & \end{bmatrix}$

Les colonnes de $A^{(n)}$ $\not\perp$ libres car $A^{(n)}$ orthog à A.

Posons $E = \mathrm{diag}(e_{11},\dots,e_{mm}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

où $e_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j>n \\ 1 & \text{si } j \le n \ \& \ a_{jj}^{(n)} \geq 0 \\ -1 & \text{si } j \le n \ \& \ a_{jj} < 0 \end{cases}$

$$EA^{(n)} = \underbrace{EH^{(n-1)} \dots H^{(1)}}_{Q^T \text{ orthog}} A = \begin{bmatrix} \diagdown * \\ 0 \end{bmatrix} = R.$$

diag >0.

$\Rightarrow$ décomp QR pleine.

Cours

$\forall \ell \geq 2, \forall y \in \mathbb{R}^\ell : \exists H(y) \in \mathcal{M}_{\ell,\ell}(\mathbb{R})$ orthogonale tq $H(y).y$ est un multiple de $e_1 \in \mathbb{R}^\ell$.

Retour au (TH) 8.1

Initialisation $A^{(1)} = A$, $H = I_m$

Pour $k = 1, \dots, n-1$.

$A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$, $H \leftarrow H^{(k)}.H$.

& $H^{(k)} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H(y^{(k)}) \end{array}\right] & \begin{array}{c} k-1 \\ m+1-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k-1 & m+1-k \end{array} & \end{array}$,

$y^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{bmatrix}$

En sortie

$H = E.H^{(n+1)} \dots H^{(1)}$ unit^R (orthogonale)

$R = EA^{(n)} = HA$

$E = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$

Les élts diag de $R > 0$.

ex : Décomp QR pleine $\underline{HA = R}$

$\underline{A = QR}$ & $\underline{Q^T = H}$.

Algo pr calculer $H = Q^T$ & $R = EA^{(n)}$

↳ stockage en place ($A^{(k)}$ ds A)

Initialiser m, n, $H = I_m$.

Pour $k = 1, \dots, n-1$.

Calculer $y^{(k)}$ & $Q(y^{(k)})$

$A(k:m, \cancel{1}\,k:n) \leftarrow Q(y^{(k)}).A(k:m, \cancel{1}\,k:n)$

$H(k:m, 1:m) \leftarrow Q(y^{(k)}).H(k:m, 1:m)$.

Trouver $E = \text{diag}(\pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ approprié

$R = EA$, $H = EH$, $Q^T = H$.

Exigences pr $Q(y)$ produit $Q(y).B$ soit pas cher.

Matrices de Householder

(D82) soit, $w \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, la mat de Householder $H = H_w$ est déf p

$$H_w = I_m - \underbrace{\frac{2}{w^T w}}_{\text{scalaire}} \, w w^T \leftarrow \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$$

(L83) Pptés mat de Householder

Une $\boxed{\text{mdH}}$ est symétriq & orthogonale.

H représente une mat de sym p au hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^m : (x, w) = 0\}$

Preuve : H_w sym : $H_w^T = I_\ell^T - \left(\frac{2}{w^T w} w w^T\right)^T$

$$= I_\ell - \frac{2}{w^T w} (w w^T)^T$$

$$= H_w.$$

H_w orthogonal :

$$H_w^T H_w = \left(I - \frac{2}{w^T w} w w^T\right)\left(I - \frac{2}{w^T w} w w^T\right)$$

$$= I - \frac{4}{w^T w} w w^T + \left(\frac{2}{w^T w}\right)^2 w (w^T w) w^T = I$$

Sym p à hyperplan

si $y \perp w$: $H_w y = y$

$y = \gamma w, \gamma \in \mathbb{R}$: $H_w y = \left(I - \frac{2}{w^T w} w w^T\right)(\gamma w)$

$$= \gamma \left(w - \frac{2}{w^T w} w (w^T w) w^T\right)$$

$$= -y$$

Sym p à hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^\ell : w^T x = 0\}$

(L84) Élim p mat de Householder

soit $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $\alpha = -\|y\|_2$ si $y_1 > 0$

$\alpha = \|y\|_2$ si $y_1 < 0$

alors le vecteur $w = y - \alpha e_1$

et $w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$

est donc (mdH) $H = H_w$ vérifie $H y = \alpha e_1$

37

Preuve

$y \in \mathbb{R}^{\ell} \setminus \{0\}$:

$$\alpha = \begin{cases} -\|y\|_2 & : \text{si } y_1 \geq 0 \\ \|y\|_2 & : \text{si } y_1 < 0 \end{cases}$$

NB : $\alpha \neq 0$, $\alpha^2 = \|y\|_2^2$, $w = y - \alpha e_1$.

$$w^T w = \|y\|^2 - 2\alpha e_1^T y + \alpha^2$$

$$w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$$

$$w^T y = \|y\|_2^2 - \alpha . y_1 = \alpha(\alpha - y_1)$$

$$\Rightarrow H_w \cdot y = y - \frac{2}{w^T w} w(w^T y) = y - w = \alpha e_1 .$$

Modif 8.5 $w \in \mathbb{R}^{\ell}$ ô art, $B \in \mathcal{M}_{\ell,p}(\mathbb{R})$

Complexité de calculer $H_w . B$.

$e_1^T w = y_1$.

$$= H_w . B = \cancel{B - B}$$

$$= \underbrace{B - w . \beta}_{\ell . p . 2 + \mathcal{O}(\ell + p) \text{ op}} , \quad \beta = \frac{2}{\underbrace{w^T w}_{2\ell + \mathcal{O}(1) \text{ op}}} w^T B \quad \text{avec } w^T B : 2\ell . p + \mathcal{O}(\ell + p)$$

Une combinaison 8.1 – 8.5 donne l'algo suivant où on stocke sur place les mat $A^{(k)}$, ainsi des H les pds partiels $H^{(1)} \dots H^{(1)}$. Ici suffit $\tilde{C}$

Algo 8.6 (Décomp QR pleine $A = QR$ + algo de Householder).

OB : calculer $H = Q^T$ & $R = A^{(n)}$ (ds A).

L.8.7

Simplificat°s

$A = (a_{ij})$ est dite de Hessenberg si $a_{ij} = 0$: $i > j+1$

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & & * \\ \times & \times & \times & & \\ 0 & \times & \times & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \end{bmatrix}$$

R9 8.8 Résolut° pb mc^2

Pas besoin de Q mais $\begin{cases} x \\ b^{(n)} = Q^* b \end{cases}$

et $b^{(1)} = b$, $b^{(k+1)} = H^{(k)} b^{(k)}$

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{bmatrix}$$

R9 8.10 Simplificat° pr mat tridiagonale

$$\begin{bmatrix} \times & \times & & 0 \\ \times & \times & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & & \times & \times \end{bmatrix}$$

Les rotat°s de Givens

Tte variante de ...

@8.11. Une rotat° de $\mathbb{R}^2$

$\forall y = [y_1, y_2]^T$, $\exists$ angle φ de sorte que

$$Gy = \begin{bmatrix} \|y\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = G(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

D.8.12 (Rotat° de Givens)

Soit $1 \leq i < j \leq m$, une rotat° de Givens $G^{(i,j)} = G^{(ij)}(\varphi)$ $\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est obtenue en part^t I_m où on remplace les ss-mat à indices lignes/colonnes i & j p une rotat° $G(\varphi)$ ĉ avt.

$$G^{(i,j)}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos(\varphi) & & \cdots & -\sin\varphi & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & \sin(\varphi) & & & \cos\varphi & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \uparrow i \qquad\qquad \uparrow j \end{array}$$

Rq Produit RdG est mat orthogonale.

$G^{(i,j)} B$ iz $(6n + O(1)$ o.e$)$

Créer des zéros ~ les rotat° de Givens

soit $y \in \mathbb{R}^m$, on pt trouver des angles de sorte que :

$$G^{(1,2)} \cdots G^{(m-2,m-1)} G^{(m-1,m)} y = \|y\| e_1 .$$

le facteur

Cor 8.14

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists$ $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthog (produit de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ rotat° de givens) de sorte que $Q^T A Q$ soit une mat de Hessenberg, en complexité $O(n^3)$.

9/ Calcul numériq de vp

Elts propres & 1re utilité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ couple $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est dit elt propre (à droite) de A si $v \neq 0$ & $Av = \lambda v$ (& elt propre à gauche si $(\bar{\lambda}, v)$ est elt propre de A^*.

@ mat de rigidité, masse-ressort, vp axe de symétrie solide mat inertie.

@ Th eckhart - Young ; approche mat gde taille test les elts propres de A^TA.

@ Th Perron-Frobenius, Google, hyperlien score de page. page suivante

$$a_{j,k} = \frac{\text{nb liens de la page } k \text{ vers page } j}{\text{nb liens sortant page } k}.$$

$$(e^T.A)_k = \sum_j a_{jk} = 1$$

NB $1 \in Sp(A)$

$1 = |1| \leq \rho(A) \leq \|A^T\|_\infty = 1.$

$e^T = (1, 1 \ldots 1)$

Stabilité des vp ss perturbations

pr $\varepsilon > 0$, $A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

@ bloc de Jordan Perturbé

pr $n = 10$

$\varepsilon = 10^{-10}$.

(L) $a, b \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \|ab^*\|_2 = \|a\| . \|b\|$

<u>Preuve</u> soit $C = ab^*$, $C^*C \to$ spectre ?

$C^*C = b\|a\|_2^2 b^*$ elt propre $(\|a\|_2^2\|b\|_2^2, b)$ (de multiple 1) :

$\forall x \perp b$: $(0, x)$ (de multiplicité $n-1$).

$\rho(C^*C) = \max(0, \|a\|_2^2\|b\|_2^2)$

$\Rightarrow \|C\|_2 = \sqrt{\rho(C^*C)} = \|a\|_2 \|b\|_2$ $\square$

$\Rightarrow \|A(\varepsilon) - A(0)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|$

$= |\varepsilon| . \|e_n e_1^*\| \overset{(L)}{=} \varepsilon$

$\varepsilon > 0$

$Sp(A(0)) = \{0\}$, $Sp(A(\varepsilon)) = \left\{ \frac{e^{\left(\frac{\pi i j}{5}\right)}}{10}, j = 1, \ldots n \right\}$

$Sp(A(\varepsilon))$? . $\chi_{A(\varepsilon)}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A(\varepsilon))$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & -1 \\ \varepsilon & & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + (-\varepsilon) \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ \lambda & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$= \lambda^n - \varepsilon$.

$m \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow Sp(A(\varepsilon)) = \{ \varepsilon^{1/m} e^{\left(\frac{2\pi i j}{m}\right)}, j=1,\dots,m \}$

ici $\varepsilon = 10^{-10}$, $m=10$.

$Sp(A(\varepsilon)) = \{ \frac{1}{10} e^{\left(\frac{\pi i j}{m}\right)}, j=1,\dots,10 \}$

$\Rightarrow$ Spectre $(A(\varepsilon))$ est LOIN Spectre $(A(0))$.

Th 9.5 (de Bauer-Fike)

soit $A, B, V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ & $D = V^{-1}AV$ diagonal

alors $\forall \mu \in Sp(B)$, $\exists \lambda \in Sp(A)$ tq

$$|\lambda - \mu| \leq \mathrm{cond}_2(V) \, \|B-A\|_2.$$

Preuve 9.5 Posons $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_m}_{\text{vp de } A})$

soit $\mu \in Sp(B) \Rightarrow \mu I - B$ n'est pas inv

$\Rightarrow \mu I - A - (B-A)$ n'est pas inv

cas 1 $\mu I - A$ n'est pas inv.

$\Rightarrow \mu \in Sp(A)$, trivial $\lambda = \mu$.

cas 2 $\mu I - A = \mu V V^{-1} - V D V^{-1}$

$= V(\mu I - D) V^{-1}$ est inv

$\Rightarrow I - (\mu I - A)^{-1}(B-A)$

$= I - V(\mu I - D)^{-1} V^{-1}(B-A)$ pas inv

$\Rightarrow$ p/ Th 3.9 de Van Neumann.

$1 \leq \| V(\mu I - D)^{-1} V^{-1}(B-A)\|_2$

sous multiplicativité

$\leq \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \|B-A\|_2 \underbrace{\|(\mu I - D)^{-1}\|_2}$

$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\mu-\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\mu-\lambda_m}\right)$

"$\max_i \frac{1}{\mu - \lambda_i} = \frac{1}{\min_j \mu - \lambda_j}$"

$\Rightarrow \min_j |\mu - \lambda| \leq \mathrm{cond}_2(V) \|B-A\|_2$ $\square$

Preuve 9.6 découle de 9.5

car A est normale $\Rightarrow$ on peut la diagonaliser $D = V^{-1}AV$ & V u.

d'après Th de Schur.

si V u $\overset{3.13}{\Rightarrow} \mathrm{cond}_2(V) = 1$.

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{1-\|\Delta A^{-1}\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{b} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$ $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$?

u pas forcément normale

~~(M) 9.7 Résidu~~

Un $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ donné, est-il proche vp de A?

(M)[97] Résidu

Pr $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on déf le résidu

$$r(\lambda, y) = \lambda y - Ay$$

$$\Rightarrow \arg\min \{ \| r(\lambda, y) \|_2 : \lambda \in \mathbb{C} \} = \frac{y^* A y}{y^* y} = R_A(y)$$

dit quotient de Rayleigh.

Aussi si $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ & $D = V^{-1} A V$ diagonal

alors $\operatorname{dist}(\lambda, Sp(A)) \leq \operatorname{cond}_2(V) \dfrac{\| r(\lambda, y) \|_2}{\| y \|_2}$

Preuve 97 pio (a)

$y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\min \{ \| r(\lambda, y) \|_2 : \lambda \in \mathbb{C} \}^2$

p monotonie $\min \{ \| r(\lambda, y) \|_2^2 : \lambda \in \mathbb{C} \}$

$= \min \{ \| \lambda y - Ay \|^2, \lambda \in \mathbb{C} \}$

$$= \min \{ \| \underbrace{(\lambda - R_A(y)) y}_{/\!/ \text{ à } y} + \underbrace{(R_A(y) I - A) y}_{\substack{-(A\cdot y - \frac{y y^* A y}{y^* y}) \\ = (I - \frac{y y^*}{y^* y}) A y \\ \perp y}} \|^2 \}$$

$$\overset{\text{Pyth}}{\Longrightarrow} = \min \{ \| (\lambda - R_A(y)) y \|^2 + \| (R_A(y) I - A) y \|^2 \}$$

$\Rightarrow$ minimiseur est donné par $\lambda = R_A(y)$.

Preuve (b) On pose $B = A + \dfrac{r(\lambda, y) \cdot y^*}{y^* y}$ $= \|y\|^2 = \langle y, y \rangle$

alors $By = Ay + (\lambda y - Ay) \dfrac{y^*}{y^* y} y$

$= \lambda y$

$\Rightarrow (\lambda, y)$ est élt propre de B, dc d'après Bauer-Fike.

$\exists \tilde{\lambda} \in Sp(A)$ $|\lambda - \underset{\text{inconnu}}{\tilde{\lambda}}| \leq \operatorname{cond}_2(V) \| B - A \|_2$

$\overset{(2)}{=} \| r(\lambda, y) \| \left\| \dfrac{y}{y^* y} \right\|$.

X / La [M] de la puissance

NB : x_k : ne désigne pas k° composante d'un vect^r mais le k° vect^r d'une suite.

$x_0 \in \mathbb{C}^n$ [M] : calculer $x_{k+1} = A x_k$ pr $k = 0, 1, \dots$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = A^k x_0}$$

Th. 10 (Cv de [M] de la puissance)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de vp λ_j vérifiant $|\lambda_1| > \dots \geq |\lambda_n|$; choisit $x_0, y \in \mathbb{C}^n$ tq $u_1^* x_0 \neq 0$ & $y^* v_1 \neq 0$ où v_1, u_1 $\vec{vp}$ de A à droite, à gauche

$$\Rightarrow \frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)_{k \to \infty}$$

$$\frac{x_k}{y^* x_k} = \frac{v_1}{y^* v_1} + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)_{k \to \infty}$$

si de + A est une matrice normale alors

$$R_A(x_k) = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)_{k \to \infty}$$

Preuve 10.1

Par hypothèse, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable à vp $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, de d'après le TH 15 :

$\exists \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$ & $\forall j = 1, \dots, n$:

$A v_j = \lambda_j v_j$.

Donc (a) $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ & $X_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$

Mq (b) $\forall k \geq 0$, $X_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k v_j$

Preuve de (b) PR sur k :

$k = 0$: $x_0 \overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^0 v_j$

$k \Rightarrow k+1$: $x_{k+1} = A x_k \overset{hyp}{=} A \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k v_j$

$= \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k A v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^{k+1} v_j$ ∎

Mq $\alpha_1 \neq 0$ (c) :

$u_1^* A = \lambda_1 u_1^*$, $u_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ pr $j = 2, \dots, n$: $\lambda_1 u_1^* v_j = u_1^* A v_j = \lambda_j u_1^* v_j$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_j - \lambda_1)}_{\neq 0 \text{ par hypo}} u_1^* v_j = 0 \quad \Rightarrow u_1^* v_j = 0$

$\Rightarrow 0 \neq u_1^* x_0 \overset{ⓐ}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{u_1^* v_j}_{=0 \text{ si } j>1} = \alpha_1 u_1^* v_1$

$\Rightarrow \alpha_1 \neq 0$.

ⓓ Mq $y^* x_k = y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^k \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}\right)$

$y^* x_k \overset{ⓑ}{=} \underbrace{y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^k}_{\neq 0} + \sum_{j=2}^{n} y^* v_j \alpha_j \lambda_j^k$

$\neq 0$ p ⓒ & p hypo (TH)

$\left|\frac{y^* x_k}{y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^k} - 1\right| = \left|\sum_{j=2}^{n} \frac{y^* v_j \alpha_j}{y^* v_1 \alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k\right|$

$\leq \sum_{j=2}^{n} \underbrace{\left|\frac{y^* v_j \alpha_j}{y^* v_1 \alpha_1}\right|}_{\text{ne dpd pas de } k} \underbrace{\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k}_{\leq |\lambda_2/\lambda_1|^k} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}$

ⓔ Mq $\frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}$

Preuve ⓔ d'après ⓓ

$\frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} = \frac{y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^{k+1}}{y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^k} \frac{1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)}{1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)}$

$\Rightarrow \left|\frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} - \lambda_1\right| = \left|\frac{1+\mathcal{O}}{1+\mathcal{O}} - 1\right| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}$

ⓕ Mq $\frac{x_k}{y^* x_k} - \frac{v_1}{y^* v_1} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}$

Preuve de ⓕ d'après ⓑ & ⓓ

$\frac{x_k}{y^* x_k} - \frac{v_1}{y^* v_1} \overset{ⓓ}{=} \frac{\alpha_1 v_1 \lambda_1^k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \lambda_j^k}{y^* v_1 \alpha_1 \lambda_1^k \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}\right)} - \frac{v_1}{y^* v_1}$

$= \| \cdot \|_2 \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \|\alpha_j v_j\|}{y^* v_1 \alpha_1} \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k (1 + \mathcal{O}(1 \cdot 1)$

$= \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty}$

Soit mtn A mat normale, à ce moment on pt choisir $v_1, \dots, v_n$ vecteurs orthonormés: $l \in \{0,1\}$: $x_k^* A^l x_k =$

$\overset{ⓑ}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k \overline{\alpha_s} \overline{\lambda_s}^k \underbrace{v_s^* A^l v_j}$

$= \lambda_j v_s^* v_j$

$= \lambda_j$ si $j = s$

0 sinon

$= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^{2k}$

$$\Rightarrow R_x(x_k) - \lambda_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^{2k} \lambda_j^1}{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^{2k} \lambda_j^0}$$

$$= \frac{\sum_{j=2}^{n} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^{2k} (\lambda_j - \lambda_1)}{\underbrace{|\alpha_1|^2 |\lambda_1|^{2k}}_{\neq 0} + \sum_{j=2}^{n} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^{2k}}$$

$$\leq \frac{\sum_{j=2}^{n} \frac{|\alpha_j|^2}{|\alpha_1|^2} \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^{2k} |(\lambda_j - \lambda_1)|}{1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{|\alpha_j|^2}{|\alpha_1|^2} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k}}$$

$$\leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$$

$$= O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)_{k \to \infty}.$$

$\square$

Variante de la [M] de la puissance

D'après DM $TH_{10.1}$, $y^* x_k$ se comporte $\bar{c}$ cte fois λ_1^k, & on a intérêt de normaliser $q_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}$.

$\rightarrow$ si $x_0 = z_0$ Mq sortie de l'algo 10.2 :

$$\forall k > 0, \quad q_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}$$

DM par rec sur k

$k = 0$, $q_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|} \overset{z_0 = x_0}{=} \frac{x_0}{\|x_0\|}$

$k \Rightarrow k+1$, par HDR, $z_{k+1} = A q_k$

$$A . \frac{x_k}{\|x_k\|} = \frac{x_{k+1}}{\|x_k\|}$$

$$q_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|} = \frac{x_{k+1} / \|x_k\|}{\|x_{k+1}\| / \|x_k\|} = \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|}$$

Algo 10.2

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, \ldots$

$q_k = z_k / \|z_k\|$, $z_{k+1} = A q_k$

Sortie

Complexité

Donc en sortie :

- $\dfrac{y^* z_{k+1}}{y^* q_k} = \dfrac{y^* A q_k}{y^* q_k} = \dfrac{y^* A x_k}{y^* x_k} = \dfrac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k}$

$\overset{10.1}{=} \lambda_1 (1 + O(|\cdot|))$

- $\dfrac{q_k}{y^* q_k} = \dfrac{x_k}{y^* \cancel{x_k}} = \dfrac{v_1}{y^* v_1}(1 + O(\cdot))$

$R_A(q_A) = R_A(x_k)$

Algo 10.3

Algo 10.3 = Algo 10.2 $(A-\mu)^{-1}$ à la place de A

$\mu \notin Sp(A)$.

$A v_j = \lambda_j v_j \iff (A - \mu I) v_j = (\lambda_j - \mu) v_j$.

$(A - \mu I)^{-1} v_j = \dfrac{1}{\lambda_j - \mu} v_j$.

$\Rightarrow$ les vp de $(A-\mu I)^{-1}$ est données par $\tilde{\lambda}_j = \dfrac{1}{\lambda_j - \mu}$.

Tx de convergence μ converge vers λ_ℓ

$\max \left| \dfrac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_\ell} \right| = \max_{j \neq \ell} \left| \dfrac{\lambda_\ell - \mu}{\lambda_j - \mu} \right| < 1$

$\iff \lambda_\ell$ est vp de A la + proche de μ.

IM pas satisfaisante

→ μ variables

→ quotient de Rayleigh. (10.4)

mat change d'une itérat° à l'autre

Algo : 10.4

Complexité

A.b : $n \times n \times n \times 1 = n \times 1 : 2n^2$

$\langle i, b \rangle$

$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} : O(n)$ $\quad \div : O(n)$