T. D. M54.

Ex1 : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{C})$

a) Mq $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ & $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$

Mq $\ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ pdt scalaire standard.

a endomorphisme.

$a : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

soit $E \overset{= \mathbb{C}^m}{}$ un ensemble,

$\forall x \in E$, $x \in \ker A^*$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $\langle a^*(x), y \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $\langle x, a(y) \rangle = 0$

$\Rightarrow x \in (\operatorname{Im} A)^\perp$

$\Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

$x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Mq $(\operatorname{Im} A)^\perp \subset \ker A^*$,

$\boxed{\operatorname{Im} A = \{ \forall x \in \mathbb{C}^m, y = Ax, \forall y \in \mathbb{C}^n \}}$

$(\operatorname{Im} A)^\perp = \{ y \in \mathbb{C}^m, \langle y, Ax \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n \}$

$\{ y \in \mathbb{C}^m, \underbrace{\langle A^*(y), x \rangle = 0}_{A^* y = 0}, \forall x \in \mathbb{C}^n \}$

$\Leftrightarrow y \in \ker A^*$.

On a bien mqé $\ker A^* \supset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Par double inclusion, on a mqé $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Mq $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$ en utilisant l'égalité.

$\ker (A^*)^* = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$.

① ⓓ $\ker A = \{ x \in \mathbb{C}^m, \langle x, Ay \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{C}^n \}$

b) A, B hermitiennes $\Rightarrow A.B$ hermitiennes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) $A = A^*$ hermit

on a bien $A = A^*$, $B = B^*$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 5i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (AB)^* = B^* A^* = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AB \neq (AB)^*$

c) A, B unitaires $\Rightarrow AB$ unitaires.

$AA^* = I = A^*A \qquad BB^* = I = B^*B$.

$$A \cdot B\,(AB)^* = A\underbrace{BB^*}_{I}A^* = AA^* = I$$

d) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

. A inversible $\Rightarrow \exists A^{-1}$, $\det A \neq 0 \neq \det A^{-1}$

$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1})$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$$

(2)

e) "A triangulaire $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ de taille n mat."

Dm :

(I) $n = 1$, $\det(A_{11}) = a_{11}$ $\quad P_1$ est initialisé

(H) HDR spps $\exists k \in \mathbb{N}^*$, P_k vraie. $\leftarrow k \in [\![1, n-1]\!]$.

Mq P_{k+1}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \emptyset & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,k+1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \emptyset & \\ 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

d'après HDR $\det(A) = a_{11} \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$

cl $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(R) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det(\text{com}(A_{i,1}))$

A privé de i° ligne & 1° col.

f) Mq $A+A^*$ est hermitienne.

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

anti-herm $A=-A^*$.

A pt ê décomposé en 2 matrices tq

mat carré

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^*)}_{\text{hermitienne}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^*)}_{\text{anti-hermitienne}}$$

soit $B = A+A^*$,

On a $B^* = (A+A^*)^* = A^* + A$

& $C^* = (A-A^*)^* = A^* - (A^*)^*$

$= A^* - A$

$= -(A-A^*)$

$(A.B)_{jj} = a_{jj}\, b_{jj}$

$(A.B)_{jl} = 0$ si $j=l$

idem écrire $(BA)_{jl}$.

g) $A.B=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A.B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dc $A.B=0 \not\Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} i & i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A.B=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

h) $A.B=0 \Rightarrow B.A=0$.

---

i) A, B diagonales $\Rightarrow A.B = B.A$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$(A.B)_{j,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl}$$

A est diagonale si $a_{jk}=0 \ \forall j\neq k$ / B diag si $b_{kl}=0 \ \forall k\neq l$

$$(A.B)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl} = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \underbrace{a_{jk}\, b_{kl}}_{0} + a_{jj}\, b_{jl}$$

$$= a_{jj}\, b_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq l \\ a_{jj}\, b_{jj} & \text{si } j=l \end{cases}$$

j) A.B triangulaire inf (resp. sup)

$\Rightarrow C = A.B$ triangulaire inf

et $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ pr $1 \leq i \leq n$

A, B triangulaire <u>inf</u> $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

or $a_{ik} \begin{cases} = 0 & \text{si } k < i \\ \neq 0 & \text{si } k \geq i \end{cases}$

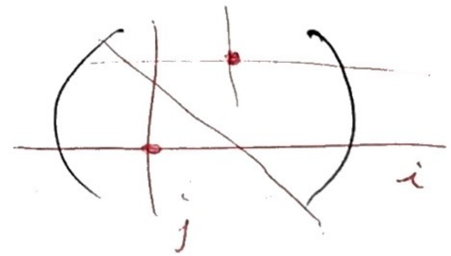
$b_{kj} \begin{cases} = 0 & \text{si } k > j \\ \neq 0 & \text{si } k \leq j \end{cases}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj}$$

* Pour $i > j \Rightarrow c_{ij} = 0$

Pour $i \leq j \Rightarrow c_{ij} \neq 0$

si $i = j$: $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.



k) A triangulaire ~~supérieure~~ inférieure

$\Rightarrow A^{-1}$ triangulaire ~~supérieure~~ inférieure

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$

& $a_{ij} = 0$ si $j > i$

1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in [\![1,\dots,n]\!]$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}, \quad x_2 = \dfrac{-a_{21} x_1}{a_{22}}$

$x_k = \dfrac{b_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j^{(1)}}{a_{kk}} \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$

k) $Ax = e_k$

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$

Raisonnons par récurrence :

$j=1$: $a_{11} x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

HDR supposons $\exists j \in [\![1,k-2]\!]$ tq $x_1, x_2, \dots, x_j = 0$

Mq $x_{j+1} = 0$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{j+1} a_{j+1,i}\, x_i = 0$

D'après HDR, $a_{j+1,j+1} x_{j+1} = 0 \Rightarrow x_{j+1} = 0$

cl :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{ki} x_i = 1 \Rightarrow a_{kk} x_k = 1 \Rightarrow x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & & 0 \\ & 1/a_{22} & & \\ \vdots & ? & \ddots & 0 \\ & & & 1/a_{kk} \end{pmatrix}$

l) Tte mat de rg 1 pt s'écrire comme $A = xy^*$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $rg(A) = 1$

D'où $A = [\alpha_1 U, \alpha_2 U, \dots, \alpha_i U, \alpha_n U]$

$A = U[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$

$U \in \mathbb{K}^n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $y = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$, $x = U$.

$A = xy^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⚠ $x^* y = \langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}$
$\in \mathbb{K}$.

Ex 2 a) Mq A est diagonalisable ssi elle possède n vect^{Rs} propres lin^t indep.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = SDS^{-1}$ et $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

et $Av_i = \lambda_i v_i$, $i \in [\![1, n]\!]$

et $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$

~~(⟹)~~

(⟸)

On suppose $v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

alors $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ et $rg(S) = n$.

$\Rightarrow S$ inversible $\Rightarrow S^{-1}$ bien définie.

$\boxed{Av_i = \lambda_i v_i}$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in \mathbb{C}^n$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\boxed{AS = SD}$ alors $ASS^{-1} = SDS^{-1}$

$\neq DS$

$A = SDS^{-1} \Rightarrow A$ est diagonalisable.

($\Rightarrow$) On suppose $A = SDS^{-1}$

et S mat inversible (chgt de base)

D mat diagonale, $D = diag\{d_{11}, \dots, d_{nn}\}$

$$AS = SDS^{-1}S \Leftrightarrow AS = SD$$

cad $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$Av_i = d_{ii} v_i$ et v_i : la $i°$ colonne de S.

alors $d_{ii} = \lambda_i$: la $i°$ la vl^{r} propre $\leftrightarrow$ au vecteur colonne v_i q est le Vecteur propre associé à λ_i. $v_i \neq 0$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$rg(A) = n$ car S est inversible.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0 \in \mathbb{C}$

$v_1, \dots, v_n \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

$S = [v_1, \dots, v_n]$ et $rg(S) = n$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

b) Mq si $\forall$ vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ st distincts $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

(H) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ les vp de A.

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_s)^{\alpha_s} \text{ et } \alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$$

$$(H) \Rightarrow \chi_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_n).$$

On va mq A possède n vecteurs propres lin^t indep. Grâce à a) $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

?! Supposons par l'absurde que $v_1, v_2, \dots, v_k$ (vp $\leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$) st lin^t indep. (HH)

& que $\boxed{v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}$ et $\alpha_i \neq 0$ pr au moins un $i \in [\![1,k]\!]$

lui est dép^t

pr $k \in [\![1, n-1]\!]$

et ~~λ~~ v_{k+1} vecteur propre de A et $Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (Av_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i}$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i}$$

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (\underbrace{\lambda_{k+1} - \lambda_i}_{\neq 0}) \underbrace{v_i}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow \underline{\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0} \Rightarrow v_{k+1}$ est lin^t ind

de $v_1, \dots, v_k$ $\boxed{\text{c.q.f.c}}$ φ (HH)

Vrai $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$.

c) Donner l'exemple d'une mat non diagonalisable.

@ bloc de Jordan $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$Av = \lambda v$

$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + v_2 \\ \lambda v_2 + v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_{n-1} + v_n \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \\ v_n = 0 \\ v_1 = \beta \end{matrix}$$

Donc $v = \beta e_1$ (dc et tous lin. indep)

Ex 4 Réduc°s mat particulières.

a) R° Th Schur. (thm mat)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire $\begin{cases} UU^* = I = U^*U \\ U^* = U^{-1} \end{cases}$

& $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangl^e sup

$\Rightarrow A = UTU^*$.

b) Mq A est normale ssi $\exists U$, D diagonale tq $A = UDU^*$.

A normale $\iff AA^* = A^*A$.

$$AA^* \overset{\text{Th Schur}}{=} (UTU^*)(UTU^*)^*$$
$$= UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* = UTT^*U^*$$

$$A^*A \overset{\text{Schur}}{=} (UTU^*)^*(UTU^*)$$
$$= UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT^*TU^*$$

A normale $\Rightarrow UTT^*U^* = UT^*TU^*$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$

il faut mq TT^* est diagonale $\Rightarrow$ Par Récurrence.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj}}_{\text{élt } ij \ (TT^*)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{jk}}$$

avec triangl^e supérieure.