Licence de Mathématiques L2 S4 – Université de Lille – 2018-2019

UE XM1A4U1 • M42 ≪ Formes bilinéaires, espaces euclidiens ≫

Enseignants : Dimitri Markouchevitch, Arthur Renaudineau et Alexis Virelizier

13 mars 2019 • 10H30–12H30 • Bâtiment A5

Aucun document ni outil électronique n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées. La précision des arguments utilisés et la qualité de rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Dans ce qui suit K désigne un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours **(6 points).**

(1) (**2 points**) Donner les définitions d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme quadratique et d'une base orthogonale. Donner un énoncé complet de la proposition du cours affirmant l'existence de bases orthogonales (on pourra se servir de cet énoncé sans démonstration dans la suite).

(2) (**1 point**) Enoncer (sans démonstration) le théorème du cours sur la classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$? (Justifier.)

(3) (**3 points**) Enoncer et démontrer le théorème du cours sur la classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 **(3 points)**. Soient $V = K^2$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de V, où $v_1 = (7,5)$, $v_2 = (11,8)$.

(a) (**2 points**) Déterminer a_i, b_i $(i = 1,2)$ pour que les formes linéaires

$$\phi_i : V \to K, \quad \phi_i(x,y) = a_i x + b_i y \ (i = 1,2)$$

forment la base $\mathcal{B}^*$ de V^* duale de $\mathcal{B}$;

(b) (**1 point**) décomposer la forme linéaire $\ell : V \to K$, $(x,y) \mapsto x$ dans la base $\mathcal{B}^*$.

Exercice 2 **(5 points)**. Soient données les formes quadratiques sur des espaces vectoriels de dimension 3 :

$$f_1, f_2, f_3 : K^3 \to K, \quad f_1(x,y,z) = x^2 - y^2 + yz, \ f_2(x,y,z) = 2xy - z^2,$$

$$f_3(x,y,z) = x^2 - y^2 + xz + yz, \ f_4 : \mathfrak{sl}_2(K) \to K, \quad f_4(M) = \det M,$$

où $\mathfrak{sl}_2(K)$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille 2 de trace nulle à coefficients dans K :

$$\mathfrak{sl}_2(K) = \{M \in M_2(K) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

(i) (**2 points**) En supposant $K = \mathbb{R}$, déterminer les signatures des f_i et identifier les paires de formes quadratiques équivalentes parmi les f_i.

(ii) (**1 points**) En supposant $K = \mathbb{R}$, pour chaque paire de formes f_i, f_j équivalentes $(i < j)$, trouver des bases $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_j$ pour lesquelles $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_i}(f_i) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_j}(f_j)$.

(iii) (**2 points**) Soit maintenant $K = \mathbb{C}$. Identifier les paires de formes équivalentes parmi les f_i et refaire la question (ii) pour $K = \mathbb{C}$.

Exercice 3 **(7 points)**. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q((x, y, z)) = 2xy + 8xz - 2yz - 5x^2 - 3z^2.$$

1. (**1 point**) Donner la matrice A de la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Q dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, ainsi qu'une expression explicite de $\phi((x, y, z), (x', y', z'))$ pour une paire $((x, y, z), (x', y', z'))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
2. (**1,5 points**) Calculer l'orthogonalisée de Gram–Schmidt $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathcal{E}$ pour la forme ϕ.
3. (**0,5 points**) Déterminer le noyau de ϕ.
4. (**1 point**) Ecrire une présentation de Q en fonction de coordonnées dans la base $\mathcal{U}$, ainsi que la matrice B de Q dans cette base. Quelle relation relie les matrices $A, B, P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{U}}, {}^tP$?
5. (**0,5 points**) Soit $F = \mathbb{R}e_1$. Déterminer $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$ (ici $\perp = \perp_\phi$; la réponse doit être justifiée sans calculs).
6. (**1 point**) La projection ϕ-orthogonale sur le plan Oxy est-elle bien définie ? (Justifier.) Si c'est oui, déterminer la projection ϕ-orthogonale du vecteur $v = (1, 1, 1)$ sur Oxy.
7. (**1,5 points**) Montrer que toute base orthogonale pour ϕ contient un vecteur colinéaire à u_3.