La méthode Laman

Gijs M. Tuynman

Table des matières

La méthode Laman

1. Introduction

Dans les cours d'algèbre linéaire à l'université (et certainement ailleurs aussi) l'étudiant est fréquemment confronté aux questions suivantes.

- On donne k vecteurs dans $\mathbf{R}^n$ (généralement avec $n \leq 6$) et on demande de trouver une base pour le sous-espace vectoriel (de $\mathbf{R}^n$) engendré par ces k vecteurs (ce qui donne en même temps la dimension de ce sous-espace).
- On donne une application linéaire $A : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ sous forme d'une matrice (généralement avec $k, n \leq 6$) et on demande de trouver une base du noyau de A et une base de l'image de A (ce qui fournit en même temps le rang de l'application A).
- On donne une application linéaire $A : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ sous forme d'une matrice et un vecteur $b \in \mathbf{R}^n$ et on demande de trouver toutes les solutions $x \in \mathbf{R}^k$ de l'équation $Ax = b$.
- On donne une application linéaire $A : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ sous forme d'une matrice (carrée) et on demande (si c'est possible) de calculer la matrice de l'application réciproque.

Avec un peu de chance, on apprend quelques techniques pour pouvoir répondre à ces questions : par exemple la méthode du pivot pour les équations ou la formule avec la co-matrice pour la réciproque. Dans ce petit texte je propose une méthode générale unique qui permet de résoudre toutes ces questions. Certes, ce n'est pas toujours la méthode la plus rapide, mais elle n'est certainement pas la pire. Et elle a l'avantage que c'est *la même* méthode qui s'emploie pour toutes ces questions. En particulier, si en cours de route d'un exercice on se rend compte qu'il y a une autre de ces questions à résoudre, on n'a pas besoin de refaire un calcul, il suffit de reprendre/continuer le calcul qu'on a déjà fait. J'ai appelé cette méthode "la méthode Laman," car c'est Gerard Laman qui me l'a appris. J'aurais pu l'appeler aussi "méthode du pivot sur colonnes," car l'essentiel de la méthode est exactement cela : on applique la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes (et uniquement sur les colonnes) d'une matrice.

2. Comment reconnaître l'indépendance de vecteurs ?

En général il n'y a pas une méthode facile de voir directement si k vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ dans $\mathbf{R}^n$ sont indépendants. Par exemple, il n'est pas directement évident que les trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^4$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

ne sont pas indépendants. Pour le montrer, il faut montrer que l'équation $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$, c'est-à-dire le système d'équations

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a des solutions autres que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ce système est équivalent aux quatre équations linéaires

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 14\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Et il n'est pas évident s'il y a des solutions non-triviales.

Par contre, s'il y a suffisamment de zéros aux bons endroits dans les vecteurs, alors il devient plus facile de voir directement l'indépendance. Par exemple, si on considère les trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^4$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} ,$$

alors il est facile de voir qu'ils sont indépendants. Car si on considère l'équation $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$, c'est-à-dire le système

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 8\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 14\lambda_3 &= 0 \end{aligned} ,$$

alors on voit immédiatement qu'on doit avoir $\lambda_1 = 0$ par la troisième équation, ensuite on voit qu'on doit avoir $\lambda_3 = 0$ par la deuxième équation (car on sait déjà qu'on a $\lambda_1 = 0$), et finalement on voit qu'on doit avoir $\lambda_2 = 0$ par la première (ou la quatrième) équation (car on sait déjà qu'on a $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$).

Au lieu d'écrire ces équations "évidentes," on pourrait indiquer les points clés de ce calcul en entourant (ici mis en gras souligné) les coefficients cruciales dans l'ordre comme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \underline{\mathbf{3}} \\ 4 \end{pmatrix}^{1} \quad , \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}^{3} \quad , \quad \begin{pmatrix} 5 \\ \underline{\mathbf{8}} \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}^{2} .$$

Le vecteur indiqué comme premier (ici v_1) a son troisième coefficient en gras souligné : sur cette troisième ligne c'est le seul coefficient non-nul. "Donc" dans le calcul de l'indépendance le coefficient λ_1 est forcément nul (voir ci-dessus). Ensuite, le vecteur indiqué comme deuxième (ici v_3) a son deuxième coefficient en gras souligné : sur cette deuxième ligne, c'est le seul coefficient non-nuls parmi les vecteurs qui ont un numéro d'ordre supérieur (ici qu'un seul : v_2 qui porte le numéro 3). "Donc" dans le calcul de l'indépendance, le coefficient λ_3 est forcément nul (sachant qu'on a déjà montré $\lambda_1 = 0$). Ensuite on a le vecteur indiqué comme troisième (ici v_2) avec son premier coefficient en gras souligné. Sachant qu'on a déjà montré $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, l'équation associée à la première ligne se simplifie en l'équation $2\lambda_2 = 0$ et donc en fin de compte tous les trois coefficients doivent être nuls. Et donc ces trois vecteurs sont indépendants.

Un autre exemple où on voit facilement que des vecteurs sont indépendants est donné par les quatre vecteurs suivants dans $\mathbf{R}^5$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\4\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\3\\9\\5\\5\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\8\\0\\0\\14\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}5\\8\\0\\0\\14\end{pmatrix} .$$

Si ici on entoure (ici mis en gras souligné) dans l'ordre comme suit :

$$2\ \begin{pmatrix}1\\2\\\underline{\mathbf{3}}\\0\\4\end{pmatrix}^{2} \quad , \quad 1\ \begin{pmatrix}2\\3\\9\\\underline{\mathbf{5}}\\5\end{pmatrix}^{1} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\\underline{\mathbf{8}}\\0\\0\\14\end{pmatrix}^{4}\ 4 \quad , \quad \begin{pmatrix}\underline{\mathbf{5}}\\8\\0\\0\\14\end{pmatrix}^{3}\ 3 \quad ,$$

alors on voit facilement que cela indique l'ordre dans lequel on montre que les coefficients dans l'équation $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$ sont nuls : on résout le système

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_4 &= 0\\
2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 8\lambda_4 &= 0\\
3\lambda_1 + 9\lambda_2 &= 0\\
5\lambda_2 &= 0\\
4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 14\lambda_3 + 14\lambda_4 &= 0
\end{aligned}$$

en quatre temps : la première étape est de regarder la colonne numérotée 1 où on a mis le 5 sur la quatrième ligne en gras souligné. Et la quatrième équation nous dit immédiatement qu'on a $\lambda_2 = 0$. La deuxième étape est de regarder la colonne numérotée 2 où on a mis le 3 sur la troisième ligne en gras souligné. On regarde donc la troisième équation qui nous dit (en combinaison avec $\lambda_2 = 0$) qu'on doit avoir $\lambda_1 = 0$. La troisième étape est de regarder la colonne numérotée 3 où on a mis le 5 sur la première ligne en gras souligné. Et si on regarde la première équation, on trouve (sachant qu'on a déjà montré $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$) qu'on doit avoir $\lambda_4 = 0$. Finalement, la quatrième et dernière étape consiste à regarder la colonne numérotée 4 où on a mis le 8 sur la deuxième ligne en gras souligné. Et effectivement, la deuxième équation nous dit qu'on doit avoir $\lambda_3 = 0$, car on sait déjà qu'on doit avoir $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_4 = 0$.

Dans la même veine, le lecteur devrait se convaincre que les indications sur les 5 vecteurs suivants dans $\mathbf{R}^5$ sont la recette pour montrer (très) rapidement qu'ils sont indépendants.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\\\underline{\mathbf{4}}\end{pmatrix}^{4} \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\3\\9\\\underline{\mathbf{5}}\\5\end{pmatrix}^{1} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\0\\\underline{\mathbf{1}}\\0\\0\end{pmatrix}^{5} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\\underline{\mathbf{8}}\\0\\0\\14\end{pmatrix}^{3} \quad , \quad \begin{pmatrix}\underline{\mathbf{5}}\\8\\0\\0\\14\end{pmatrix}^{2} .$$

2.1. Conclusion. *Si on a de la chance* qu'il y a beaucoup de zéros parmi les coefficients des vecteurs et aux bons endroits, alors on peut facilement montrer que ces vecteurs sont indépendants. Pour cela on cherche une ligne où il n'y a qu'un seul coefficient non-nul. On l'entoure et on donne le numéro 1 au vecteur concerné. Ensuite on répète l'opération avec les vecteurs qui restent : on cherche une ligne où il n'y a qu'un seul coefficient non-nul et on donne le numéro 2 au vecteur concerné. Et bien évidemment, cela ne peut pas être la ligne qu'on a trouvé pour le premier, car on ne considère que les vecteurs qui restent, et pour les vecteurs qui restent, cette ligne ne contient que des zéros ! Et on continue par récurrence : chercher une ligne parmi les vecteurs qui restent où il n'y a qu'un seul coefficient non-nul et donner le numéro suivant au vecteur concerné.

Et si on n'a pas de chance ? Dans la plupart des cas on n'aura pas la chance qui nous aide à simplifier la vie. Il faut donc créer la chance pour que ça marche. C'est le but de la section suivante.

3. Les opérations

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ (on s'imagine toujours que c'est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais ce n'est pas une obligation) et soit $v_1, \ldots, v_k \in E$ des éléments (vecteurs) de E (k en nombre). On voit ces k vecteurs comme k vecteurs *ordonnés*, car on a un premier (à savoir v_1), un deuxième (à savoir v_2) etcætera. Si on met ces k vecteurs côte-à-côte avec parenthèses comme $(v) = (v_1 \cdots v_k)$, on obtient une "matrice" (v) dans plusieurs sens. D'abord, si E est l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ des n-uplets dans $\mathbf{K}$ vu comme des colonnes (un espace vectoriel de dimension n), alors (v) est une vraie matrice à k colonnes et n lignes :

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (v) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

(À noter que c'est la deuxième indice qui indique la colonne.) Mais on peut aussi le voir comme une application linéaire de $\mathbf{K}^k$ à valeurs dans E donnée par l'expression

$$(v) : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i \ . \tag{3.2}$$

Et bien sûr, dans le cas $E = \mathbf{K}^n$, ces deux interprétations coïncident : la matrice de l'application (3.1↑) est la matrice (3.2↑). Ce qu'il faut bien noter, c'est que la matrice (v) dépend de l'ordre des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$.

Maintenant on distingue trois types opérations qui transforment un système de k vecteurs ordonnés $v_1, \ldots, v_k$ en un autre système de k vecteurs ordonnés $w_1, \ldots, w_k$. Associé on a donc des opérations qui transforment la matrice (v) en la matrice (w).

(type I) le remplacement d'un vecteur par ce même vecteur plus une combinaison linéaire des autres vecteurs : on choisit $j \in \{1, \ldots, k\}$ et on choisit pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$ un $\lambda_i \in \mathbf{K}$ et on définit les vecteurs w_i par $w_i = v_i$ si $i \neq j$ et $w_j = v_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} \lambda_i \cdot v_i$:

$$(v_1 \cdots v_n) \quad \to \quad (w_1 \cdots w_k) = (v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} \lambda_i \cdot v_i, v_{j+1}, \cdots, v_k) \ .$$

(type II) la multiplication d'un des vecteurs par un élément non-nul de $\mathbf{K}$: on choisit $j \in \{1, \ldots, k\}$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et on définit les vecteurs w_i par $w_i = v_i$ si $i \neq j$ et $w_j = \lambda \cdot v_j$:

$$(v_1 \cdots v_k) \quad \to \quad (w_1 \cdots w_k) = (v_1, \cdots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \cdots, v_k) \ .$$

À noter qu'on a rajouté des virgules dans la dernière matrice (qui n'ont pas lieu d'y être !) pour améliorer la lisibilité (comme on l'a fait pour la formule décrivant l'opération de type I).

(type III) une permutation des vecteurs : si $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ est une permutation de $1, \ldots, k$, alors on définit les vecteurs w_i par $w_i = v_{\sigma(i)}$:

$$(v_1 \cdots v_k) \quad \to \quad (w_1 \cdots w_k) = (v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}) \ .$$

L'ensemble des k vecteurs n'a donc pas changé, seulement l'ordre. Et en termes de la matrice, on a simplement permuté les colonnes.

L'intérêt des ces opérations se trouve dans l'énoncé suivant.

3.3. Proposition. *Soit $v_1, \ldots, v_k$ un système de k vecteurs ordonnés dans E et soit $w_1, \ldots, w_k$ le système ordonné obtenu par une des trois types opérations décrite ci-dessus. Alors on a les propriétés :*

(i) *$\{v_1, \ldots, v_k\}$ et $\{w_1, \ldots, w_k\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E ;*

(ii) *les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont indépendants si et seulement si les vecteurs $w_1, \ldots, w_k$ sont indépendants.*

4. Application I : base d'un sous-espace engendré par des vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_k \in E$. Le but est de trouver une base de F quand on a les expressions explicites des vecteurs v_i en termes de la base. L'idée est d'utiliser la méthode du pivot sur les colonnes, ce qui n'est rien d'autres que l'application d'une opération de type I décrite dans §3↑ sur le système ordonné $v_1, \ldots, v_k$. On applique plusieurs fois une telle opération, jusqu'au moment où on *voit* la base/les vecteurs indépendants. Plus précisément, on choisit les opérations d'une telle façon qu'on peut appliquer la recette donnée dans [2.1↑].

4.1. Exemple. Dans $\mathbf{R}^4$ on donne les trois vecteurs v_1, v_2, v_3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix} \ ,$$

et on demande de trouver une base (et donc la dimension) du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs. On commence à écrire ces trois vecteurs sous forme de matrice :

$$(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \ .$$

Ensuite on choisit un pivot, ce qui veut dire qu'on choisit au hasard un élément non-nul de cette matrice. Mais pour que les calculs ne deviennent pas "compliqués" (trop de nombre rationnels), on choisit de préférence un élément de matrice qui vaut 1.

L'étape suivante est d'appliquer une opération de type I sur les colonnes autres que la colonne qu'on a choisit pour créer des zéros dans la même ligne qu'on a choisi. Ici on choisit "donc" l'élément 1 dans la première colonne–première ligne. Pour créer un 0 dans la deuxième colonne–première ligne, on applique une opération de type I avec $j = 2$ et $\lambda_1 = -2$, $\lambda_3 = 0$. En termes de matrices cette opération donne

$$(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \quad \to \quad (w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 11 \\ 4 & -3 & 14 \end{pmatrix} \qquad v_2 \to w_2 = v_2 - 2 \cdot v_1 \ .$$

Et par [3.3$\uparrow$] les colonnes de ces deux matrices engendrent le même sous-espace vectoriel.

Pour créer un 0 dans la troisième colonne–première ligne, on applique une opération de type I avec $j = 3$ et $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$. En termes de matrices cette opération donne (en supprimant les noms, car sinon il faut utiliser de plus en plus de lettres et l'alphabet n'en a que 26, et en indiquant l'opération avec la lettre générique c pour colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 11 \\ 4 & -3 & 14 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad c_3 \to c_3 - 5 \cdot c_1 \ .$$

Et de nouveau par [3.3$\uparrow$] les colonnes de ces deux matrices engendrent le même sous-espace vectoriel. En plus, les colonnes dans la dernières matrices ont déjà une ligne où il n'y a qu'un seul coefficient non-nul comme le demande notre recette [2.1$\uparrow$].

Maintenant il "faut" trouver parmi les autres colonnes une ligne où il n'y a qu'un seul coefficient non-nul. Mais il n'en a pas ! On va donc le créer en choisissant un pivot (dans les colonnes qui restent !), c'est-à-dire un élément de matrice non-nul. Ici on choisit le -1 dans la deuxième colonne–deuxième ligne et on veut créer un zéro dans la troisième colonne–deuxième ligne. Pour cela on applique une opération de type I avec $j = 3$ et $\lambda_2 = -2$, $\lambda_1 = 0$. En termes de matrices cete opération donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_3 \to c_3 - 2 \cdot c_2 \ .$$

Et comme toujours, les colones de cette nouvelle matrice engendrent le même sous-espace vectoriel que précédemment. Il suffit maintenant de "marquer" les colonnes et des éléments comme dans §2$\uparrow$:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}}^{\,1} & 0^{\,2} & 0 \\ 2 & -\underline{\mathbf{1}} & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

pour "voir" que les deux premières colonnes sont indépendants. La colonne avec que des zéros (le vecteur nul) n'engendre rien. La conclusion est donc que le sous-espace vectoriel a dimension 2 et qu'une base est donnée par les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Bien sûr, on aurait pu créer encore plus de zéros en utilisant le même pivot -1 de la deuxième colonne et d'appliquer une opération de type I avec $j = 1$ et $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_1 \to c_1 + 2 \cdot c_2 \ .$$

Et on aurait écrit la recette

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}}^{1} & 0^{2} & 0 \\ 0 & -\underline{\mathbf{1}} & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

pour conclure que le sous-espace vectoriel a dimension 2 (ça n'a pas changé, heureusement) et qu'une base est donnée par les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Souvent on peut faire plusieurs opération en une fois (mais attention, il ne faut jamais utiliser deux pivots différents dans une même étape, cela conduit presque toujours à des erreurs !). Ainsi, le calcul ci-dessus s'écrit d'une façon raccourcie comme

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} c_2 \to c_2 - 2 \cdot c_1 \\ c_3 \to c_3 - 5 \cdot c_1 \end{matrix} ,$$

suivi de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\underline{\mathbf{1}} & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}}^{1} & 0^{2} & 0 \\ 2 & -\underline{\mathbf{1}} & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_3 \to c_3 - 2 \cdot c_2 \ ,$$

pour obtenir la conclusion ci-dessus.

4.2. Exemple. On demande de calculer la dimension et une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les 4 vecteurs

$$\begin{pmatrix} m-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} m-4 \\ m+4 \\ 4 \\ 2m+4 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -3 \\ m+3 \\ m+3 \\ -m-1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ m+1 \end{pmatrix} ,$$

et cela en fonction de $m \in \mathbf{R}$. Dans le même style raccourci comme utilisé à la fin de l'exemple précédent, on fait le calcul suivant. On commence avec le -1 première ligne–dernière colonne comme pivot :

$$\begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & -\underline{\mathbf{1}} \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & 1 \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ m & 2m & m & 1 \\ m & m & m & 1 \\ m^2 & m(m-1) & -4m-4 & m+1 \end{pmatrix}$$

avec les opérations

$$c_1 \to c_1 + (m-1)c_4 \quad , \quad c_2 \to c_2 + (m-4)c_4 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 3c_4 \ .$$

Ensuite on choisit le m première colonne–troisième ligne comme pivot :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ m & 2m & m & 1 \\ \underline{\mathbf{m}} & m & m & 1 \\ m^2 & m(m-1) & -4m-4 & m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0^{\,2} & 0^{\,3} & 0^{\,4} & -\underline{\mathbf{1}}^{\,1} \\ m & \underline{\mathbf{m}} & 0 & 1 \\ \underline{\mathbf{m}} & 0 & 0 & 1 \\ m^2 & -m & \underline{-(\mathbf{m+2})^{\mathbf{2}}} & m+1 \end{pmatrix}$$

avec les opérations

$$c_2 \to c_2 - c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 - c_1 \ .$$

Et dans le résultat final on a déjà indiqué comment on voit que ces quatre vecteurs sont indépendants. Mais il y a un piège ! Notre recette pour l'indépendance ne marche que si les coefficients en gras soulignés sont non-nuls ! La première conclusion est donc :

Si $m \neq 0$ et si $m+2 \neq 0$, alors les 4 vecteurs sont indépendant, la dimension du sous-espace est donc 4 et on peut prendre au choix les quatre vecteurs du début ou les quatre vecteurs obtenus à la fin comme base (ou n'importe quel autre quadruplet de vecteurs indépendants, car on est en $\mathbf{R}^4$ et le sous-espace est donc l'espace total).

Mais si on a $m = 0$ ou $m = -2$, cette analyse n'est plus valable. Il faut donc regarder ces cas à part. Commençons avec le cas $m = 0$, au quel cas on a obtenu que le sous-espace vectoriel est engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0^{\,2} & -\underline{\mathbf{1}}^{\,1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\underline{\mathbf{4}} & 1 \end{pmatrix} .$$

Et on voit que dans ce cas le sous-espace vectoriel est engendré par les deux dernières colonnes qui sont indépendants.

Dans le dernier cas $m = -2$ on voit que le sous-espace vectoriel est engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0^{\,2} & 0^{\,3} & 0 & -\underline{\mathbf{1}}^{\,1} \\ -2 & -\underline{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ -\underline{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et "donc" on voit que la dimension du sous-espace est 3 et que les trois colonnes non-nulles forment une base.

5. Les opérations en combinaison avec une application

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension k, soit $e_1, \ldots, e_k \in E$ une base de E, soit F un espace vectoriel de dimension n et soit $A : E \to F$ une application linéaire. Si on définit les vecteurs $v_i = A(e_i) \in F$, alors ils engendrent l'image de A, un sous-espace vectoriel de F.*

Corollaire. *Soit $A : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire décrite par la matrice (A_{ij}) à n lignes et k colonnes. Alors le calcul du rang de A et d'une base de l'image se fait par la procédure décrite dans §4↑.*

5.1. Proposition. *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F et soit $e_1, \ldots, e_k \in E$ un système de k vecteurs ordonnés de E (il est nullement exigé qu'ils sont indépendants et/ou générateurs). Si on définit le système $v_1, \ldots, v_k \in F$ de k vecteurs ordonnés de F par $v_i = A(e_i)$, alors on a l'égalité*

$$A \cdot (e) = (v) \ ,$$

où on interprète (e) et (v) comme une application linéaire de $\mathbf{R}^k$ dans E respectivement F et où on interprète le produit $A \cdot (e)$ comme la composition de deux applications linéaires (ou, le cas échéant, le produit matricielle).

Mais on peut faire mieux que seulement calculer le rang et une base de l'image : quasiment sans effort supplémentaire on calcule aussi une base du noyau de l'application. L'essentiel de cette "astuce" se trouve dans la proposition suivante.

5.2. Proposition. *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F et soit $e_1, \ldots, e_k \in E$ un système de k vecteurs ordonnés de E. Soit $v_i = A(e_i)$ l'image de e_i par A et soit $v_1, \ldots, v_k$ le système associé de k vecteurs ordonnés dans F.*

Si $f_1, \ldots, f_k$ est le système de k vecteurs ordonnés dans E obtenu par une des trois types d'opérations de §3↑ appliquée au système $e_1, \ldots, e_k$ et si $w_1, \ldots, w_k$ est le système de k vecteurs ordonnés dans F obtenu en appliquant la même *opération sur le système $v_1, \ldots v_k$, alors on a l'égalité $w_i = A(f_i)$. Sous forme "matricielle" :*

$$A(e_1 \cdots e_k) = (v_1 \cdots v_k) \quad \overset{\textit{même opération sur } (e) \textit{ et } (v)}{\Longrightarrow} \quad A(f_1 \cdots f_k) = (w_1 \cdots w_k) \ .$$

6. Application II : noyau, image, réciproque et équations

Exemple. Soit $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \ .$$

Pour calculer une base du noyau et une base de l'image, on prend e_1, e_2, e_3 les trois vecteurs de base :

$$(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

et on définit les vecteurs $v_i = A(e_i)$ ce qui donne (trivialement)

$$(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} .$$

Selon [5.2↑] on a donc l'égalité

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} ,$$

ce qui est aussi une évidence absolue. Comme dans [4.1↑] on choisit, dans la matrice à droite de l'égalité, le 1 première ligne–première colonne comme pivot pour créer des zéros dans les autres colonnes à la première ligne, toujours dans la matrice à droite. Et ensuite on choisit, toujours comme dans [4.1↑], le coefficient deuxième ligne–deuxième colonne comme pivot. Mais maintenant on effectue *les mêmes* opérations sur la matrice à gauche de l'égalité. Ce qui donne :

$$\begin{array}{c} A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \\ \downarrow \qquad c_2 \to c_2 - 2c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 5c_1 \\ A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\underline{\mathbf{1}} & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\ \downarrow \qquad c_3 \to c_3 - 2c_2 \\ A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 \\ 2 & -\underline{\mathbf{1}} & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} . \end{array}$$

Comme avant, on voit que les deux premières colonnes de la dernière matrice sont indépendantes. Elles forment donc une base de l'image. Mais on sait beaucoup plus : les vecteurs e_1, e_2, e_3 étant indépendants, on peut appliquer [3.3↑] et conclure que la même chose est vraie pour les trois colonnes de la matrice à gauche dans la dernière ligne de notre calcul. Et selon [5.2↑] l'image de la troisième est la troisième colonne à droite, c'est-à-dire le vecteur nul. On en déduit qu'une base du noyau est donné par le vecteur $(-1, -2, 1) \in \mathbf{R}^3$.

Exemple. Soit $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & -1 \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & 1 \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix} .$$

On demande de calculer une base du noyau et une base de l'image en fonction de $m \in \mathbf{R}$.

On choisit $e_1, \ldots, e_4$ les quatre vecteurs de base :

$$(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et on définit les vecteurs $v_i = A(e_i)$, ce qui donne (trivialement)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & -1 \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & 1 \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix} .$$

On effectue maintenant les opérations déjà décrites dans [4.2↑], mais cette fois ci des deux côtés de l'égalité.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & \underline{-\mathbf{1}} \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & 1 \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 + (m-1)c_4 \quad , \quad c_2 \to c_2 + (m-4)c_4 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 3c_4$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m-1 & m-4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ m & 2m & m & 1 \\ \underline{\mathbf{m}} & m & m & 1 \\ m^2 & m(m-1) & -4m-4 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_2 \to c_2 - c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 - c_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m-1 & -3 & -m-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\underline{\mathbf{1}} \\ m & \underline{\mathbf{m}} & 0 & 1 \\ \underline{\mathbf{m}} & 0 & 0 & 1 \\ m^2 & -m & \underline{-(\mathbf{m+2})^\mathbf{2}} & m+1 \end{pmatrix} .$$

Comme dans [4.2↑] on voit que si $m \neq 0$ et $m \neq -2$ l'image a dimension 4, donc le noyau est réduit au vecteur nul, ce qui représente un sous-espace vectoriel de dimension 0 sans base.

Dans le cas $m = 0$ on a obtenu l'égalité

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\underline{\mathbf{1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\underline{\mathbf{4}} & 1 \end{pmatrix} . \tag{6.1}$$

Comme avant on voit que les deux colonnes non-nulles dans la matrice à droite forment une base de l'image. Mais on sait aussi que les quatre vecteurs $e_1, \ldots, e_4$ étaient indépendants. Par [3.3↑] la même chose est donc vraie pour les quatre colonnes de la matrice à gauche. En particulier les deux premières colonnes sont indépendantes. Mais ces deux vecteurs sont envoyés sur le vecteur nul (les deux premières colonnes à droite sont le vecteur nul). Ce sont donc deux vecteurs indépendants dans le noyau de A. Par le théorème du rang la dimension du noyau est la différence de la dimension de la source et de la dimension de l'image, c'est-à-dire $4 - 2 = 2$. Il s'ensuit que les deux premières colonnes à gauche forment une base du noyau.

Conclusion : dans le cas $m = 0$ la fin de notre calcul en (6.1↑) nous dit qu'on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ une base du noyau et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ une base de l'image.}$$

Dans le cas $m = -2$ on a obtenu l'égalité

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\underline{\mathbf{1}} \\ -2 & -\underline{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ -\underline{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Comme ci-dessus, on en déduit immédiatement le résultat :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ une base du noyau et } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ une base de l'image.}$$

Exemple de réciproque. Soit $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

On pose la question si cette application est inversible et si oui de calculer sa réciproque. Comme dans les exemples précédents on écrit l'équation "évidente" et on effectue des opérations :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_2 \to c_2 - 3c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 2c_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -\underline{\mathbf{1}} \\ 3 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_2 \to c_2 - 5c_3$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -\underline{\mathbf{1}} \\ 3 & -\underline{\mathbf{1}} & -2 \end{pmatrix} .$$

Ici on voit que les trois vecteurs dans la matrice à droite sont indépendants, le rang de la matrice est donc 3 et elle est inversible. On pousse le calcul un petit peu plus loin avec les opérations de type I comme

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -\underline{\mathbf{1}} \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 + 5c_3$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -9 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -7 & -\underline{\mathbf{1}} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 - 7c_2 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 2c_2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -58 & 7 & -16 \\ -7 & 1 & -2 \\ 40 & -5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il suffit maintenant d'effectuer des opération du type II et III pour obtenir :

$$A \cdot \begin{pmatrix} -58 & 7 & -16 \\ -7 & 1 & -2 \\ 40 & -5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_2 \to -c_2 \quad , \quad c_3 \to -c_3$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -58 & -7 & 16 \\ -7 & -1 & 2 \\ 40 & 5 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \text{permutation } 2 \leftrightarrow 3$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -58 & 16 & -7 \\ -7 & 2 & -1 \\ 40 & -11 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{6.2}$$

Et la réponse est là :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -58 & 16 & -7 \\ -7 & 2 & -1 \\ 40 & -11 & 5 \end{pmatrix} ,$$

simplement parce que l'égalité (6.2↑) dit que le produit de cette matrice avec A est la matrice identité.

Exemple avec équations. Soit $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La question est de trouver une base du noyau, une base de l'image et, si c'est possible, de résoudre les deux équations

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad .$$

On commence avec la première équation et choisit les *quatre* vecteurs $e_1, e_2, e_3, v \in \mathbf{R}^3$ donnés sous forme matricielle par

$$(e_1 \, e_2 \, e_3 \, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix} \quad .$$

Autrement dit, les e_1, e_2, e_3 sont les trois vecteurs de base et v est le vecteur des inconnus. Mais cela n'empêche pas d'appliquer [5.1↑] et obtenir l'égalité

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

où on a donc incorporé l'équation à résoudre comme quatrième colonne. Sur cette égalité on applique [5.2↑] avec des pivots judicieusement choisis :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & \underline{\mathbf{1}} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 - 2c_2 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 3c_2 \quad , \quad c_4 \to c_4 + c_2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -2 & 1 & -3 & y+1 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 3 \\ -\underline{\mathbf{3}} & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_3 \to c_3 - c_1 \quad , \quad c_4 \to c_4 + c_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x+1 \\ -2 & 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{3}} & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

De cette égalité on tire immédiatement les conclusions suivantes :

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{base de l'image,} \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{base du noyau et}$$

$$\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{une solution particulière.}$$

Il existe donc une solution et la solution générale s'obtient en ajoutant un élément quelconque du noyau :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{solution générale avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Si on fait la même analyse pour la deuxième équation, on trouve :

$$A \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x\\0 & 1 & 0 & y\\0 & 0 & 1 & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\1 & 2 & 3 & 2\\2 & 1 & 3 & 3\\2 & \underline{\mathbf{1}} & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 - 2c_2 \quad , \quad c_3 \to c_3 - 3c_2 \quad , \quad c_4 \to c_4 - 4c_2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x\\-2 & 1 & -3 & y-4\\0 & 0 & 1 & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\underline{\mathbf{3}} & 2 & -3 & -7\\-3 & 2 & -3 & -6\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_3 \to c_3 - c_1 \quad , \quad c_4 \to c_4 - 2c_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & x-2\\-2 & 1 & -1 & y\\0 & 0 & 1 & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & -1\\-\underline{\mathbf{3}} & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -\underline{\mathbf{1}}\\0 & \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

Concernant les bases de l'image et du noyau on trouve les mêmes résultats, mais pour une solution de l'équation, on voit que les trois colonnes (première, deuxième et quatrième) à droite sont des vecteurs indépendants. En particulier le sous-espace vectoriel engendré par l'image de A **et** le vecteur, membre de droite de notre équation, a la dimension 3. Mais on sait aussi (et on le voit dans le calcul) que l'image n'a que dimension 2. La conclusion est que le membre de droite de notre équation est un vecteur qui n'appartient pas à l'image. Il n'y a donc pas de solution pour la deuxième équation.

Exemple de réciproque avec paramètre. Soit $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & -1 \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & \underline{\mathbf{1}} \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

et on demande de calculer sa réciproque en fonction de $m \in \mathbf{R}$ quand elle est inversible. Dans [4.2↑] on a vu qu'elle est inversible quand on a $m \neq 0$ et $m \neq -2$. Pour changer un peu, on fait d'autres choix pour les pivots qu'en [4.2↑].

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & -3 & -1 \\ 1 & m+4 & m+3 & 1 \\ 1 & 4 & m+3 & \underline{\mathbf{1}} \\ 1 & 2m+4 & -m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 - c_4 \quad , \quad c_2 \to c_2 - 4c_4 \quad , \quad c_3 \to c_3 - (m+3)c_4$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -m-3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{m}} & m & m & -1 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m & -2m & -(m+1)(m+4) & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_2 \to c_2 - c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 - c_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -m-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m & -m & -(m+2)^2 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to \tfrac{1}{m}c_1 \quad , \quad c_2 \to \tfrac{1}{m}c_2 \quad , \quad c_3 \to \tfrac{-1}{(m+2)^2}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{(m+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(m+2)^2} & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{3}{m} & \frac{1}{m+2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \underline{\mathbf{1}} & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_1 \to c_1 + c_3 \quad , \quad c_2 \to c_2 + c_3 \quad , \quad c_4 \to c_4 - (m+1)c_3 \quad ,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{m} & \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{-m-1}{(m+2)^2} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & \frac{m+1}{(m+2)^2} \\ \frac{-2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} - \frac{3}{m} & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad c_4 \to c_4 + c_1 - c_2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{m} & \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{2}{m} - \frac{m+1}{(m+2)^2} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & \frac{m+1}{(m+2)^2} \\ \frac{-2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} - \frac{3}{m} & \frac{1}{m+2} & \frac{3}{m} - \frac{2}{m(m+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \text{permutation } c_3 \leftrightarrow c_4$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{m} & \frac{2}{m} - \frac{m+1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & \frac{m+1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} \\ \frac{-2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} - \frac{3}{m} & \frac{3}{m} - \frac{2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve donc l'expression suivante pour la réciproque de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{m} & \frac{2}{m} - \frac{m+1}{(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} & \frac{m+1}{(m+2)^2} & -\frac{1}{(m+2)^2} \\ \frac{-2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} - \frac{3}{m} & \frac{3}{m} - \frac{2}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m^2+5m+4}{m(m+2)^2} & -\frac{m^2+3m+4}{m(m+2)^2} & \frac{m^2+7m+8}{m(m+2)^2} & \frac{1}{(m+2)^2} \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 \\ \frac{-1}{(m+2)^2} & \frac{-1}{(m+2)^2} & \frac{m+1}{(m+2)^2} & \frac{-1}{(m+2)^2} \\ \frac{-2}{m(m+2)} & \frac{-2m-6}{m(m+2)} & \frac{3m-4}{m(m+2)} & \frac{1}{m+2} \end{pmatrix}$$

et on constate que cette expression n'a pas de sens quand on a $m = 0$ ou $m = -2$ (on ne divise pas par zéro). Mais ces cas sont exactement les cas exclus d'avance. Même si on n'avait pas fait l'analyse préalable pour déterminer les valeurs pour lesquelles A n'est pas inversible, on l'aurait vu dans notre réponse.