M-62 Pr: Goubet Olivier

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction générale aux Equations différentielles

1. forme générale d'une équation différentielle, cas scalaire et vectoriel
2. notion d'ordre ; condition initiale, problème de Cauchy
3. définition d'une solution, solution maximale, solution globale
4. énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz
5. quelques techniques de résolution explicite (pour les équations linéaires scalaires,d'ordre 1, ou d'ordre 2 à coefficients constants, équations à variables séparées)
6. illustration sur des modèles : datation du carbone 14, équation du pendule, dynamique des populations.

Théorie de Cauchy

1. preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = F(t, y)$ dans R^n
2. applications à l'étude qualitative (non-intersection des graphes de solutions, théorèmed'explosion en temps fini)
3. exemples d'études qualitatives (points d'équilibre, portrait dephase), exemples du mouvement du pendule, système de Lotka-Volterra.

Equations différentielles linéaires

1. Solutions des équations linéaires scalaires
2. lemme de Grön-wall
3. théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
4. structure de l'ensemble des solutions, Wronskien, méthode de variation des constantes
5. équations différentielles linéaires d'ordre n
6. équations à coefficients constants
7. portraits de phase de $Y' = AY$ dans R^2 , où A est une matrice à coefficients constants.Les 36 heures de TD comportent 10h de TP avec Python.

f cont $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t,y) \longmapsto f(t,y)$

Résoudre $\dot{y} = y' = f(t,y)$: $(*)$
chercher I de $\mathbb{R}$ & $y : I \to \mathbb{R}^D \in C^1$
q vérifie $(*)$

Équa° autonome : ne dépd pas de t

Pb Cauchy $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ cont

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases} \quad (P)$$

Rq $y(t_0) = y_0$, $t_0 = 0$

(D) Sol maximale

Sm de (P) : $y :]-T_{min}, T_{max}[\to \mathbb{R}^D$ de C^1 sol° de (P)

Sol globale si $T_{max} = \infty$, $-T_{min} = -\infty$

(D) f globalmt lipschitzienne p/ 2nde var y si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y, z \in \mathbb{R}^D$:

$$\| f(t,y) - f(t,z) \| \leq L \|y - z\|$$

(cte de lipschitz)

(D) f localmt lipschitzienne p/ 2nde var y si $\forall$ K compact $\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^D$, $\exists L_K$, $\forall t, y, z \in K$:

$$\| f(t,y) - f(t,z) \| \leq L_K \|y - z\|$$

(P) si $f \in C^1 \Rightarrow f$ loc. lip.

(Th) Cauchy-Lipschitz (v1)
(PdC) (H) f glob lip p/ y
$\Rightarrow \exists !\, y$ sol° glob à (P)

(Th) Cauchy-Lipschitz (v2)
(PdC) (H) f loc. lip p/ y alors
1) $\exists !\, y$ sol max à (P)
2) $]-T_{min}, T_{max}[$ int max $\nexists$ alternative (d'explo°), soit $T_{max} = \infty$, si $y(t)$ sort de tt compact de $\mathbb{R}^D$ qd $t \to T_{max}$.
$\left(\lim_{t \to T_{max}} \|y(t)\| = -\infty\right)$

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } A \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D \in C^1$

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t b(s) e^{a(t-s)} ds$$ p MVC

(D) Exponentielle de mat
mat $\longrightarrow$ $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Série normalt CV ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dc CV.

(L) $t, s \in \mathbb{R}$, $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}$

Calculer e^A ? $\to$ M1 diago/trigonalise A
$\to$ M2 (Th) Cayley-Hamilton.

M1
$P^{-1}AP \to P^{-1} e^A P$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

M2 $P_A(X) = X(X-2)$, (DE) de X^n par $P_A(X)$,
$\exists\, Q(X)$, $X^n = P_A(X)Q(X) + a_n X + b_n$.
$A^n = 0 + a_n A + b_n Id$
$X^n = X(X-2)Q(X) + a_n X + b_n$
$X = 0$: $0 = 0 + a_n \cdot 0 + b_n$
$X = 2$: $2^n = 0 + 2a_n$ $\Rightarrow A^n = 2^{n-1} A$, $n \geq 1$.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Id + \sum \frac{A^n}{n!} = Id + \left(\sum \frac{2^{n-1}}{n!}\right) A = Id + \frac{1}{2}[e^2 - 1]A$$

(ex) Résoudre $x'' + 2x' + x = 0$

(Th) Décomposit° de Dunford
$A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\exists (D, N)$ diagonalisable & nilpotent
$A = D + N$ & $DN = ND$, $e^{tA} = e^{tD}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(tN)^j}{j!}\right)$

Prop : $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, l'ens des soluts de $y' = Ay$ est ev de dim d.

(ex) Résol° Eq° non-linéaire.

(L) soit y une solut, f $g(y(t))$ ne pt pas s'annuler.

EDO coeff cte $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$,
$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_1 \lambda + a_0$; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ racines réelles & $\mu_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_r$ racines de Im $\neq 0$
L'espace des soluts est engendré p $e^{\lambda_j t} t^k$, $0 \leq k \leq s_j - 1$
où s_j est multiplicité de λ_j et
$e^{a_j t} \cos(b_j t) t^k$, $e^{a_j t} \sin(b_j t) t^k$ où $\mu_j = a_j + ib_j$

EDO M62.

$\Phi : E \to E$, $y \mapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds$

Pr $0 \leq t \leq T$, $\| \Phi^k(y) - \Phi^k(z) \|_T \leq \frac{(LT)^k}{k!} \|y - z\|_T$

(Th) pt fixe revisitée
(E, d) espace métriq complet, $\Phi : E \to E$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, Φ^k st contractante $\Rightarrow \Phi$ admet un uniq pt fixe.

Cylindre de sécurité (CdS)

$$C = \{ (t, y),\ |t| \leq T,\ \|y - y_0\| \leq r \}$$

(D) CdS est un cylindre C tq si y solu° de (I), y ne pt pas quitter le cylindre C par le bord $\|y - y_0\| = r$.

(L) $\exists$ CdS.

(Prop) CCL v3
(P) si f cont & loct lipschitz p/ y
$\Rightarrow \exists$ T approximatif, (P) admet une uniq solu° C^1 sr $[-T, T]$.

(E_h) $ay'' + by' + cy = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
(E_c) $a\lambda^2 + bX + c = 0$
• $\Delta > 0$: $y_h(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$
• $\Delta = 0$: $y_h(x) = (A_1 + A_2 x) e^{rx}$
• $\Delta < 0$: $y_h(x) = A_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + A_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

racines conj $\alpha \pm i\beta$.

(1)

Quoi ? (ex) pendule
équ autonome.
Pb de Cauchy
(D) sol max / globale

(D) glob/loc. lipschitz
(P) si f $C^1 \Rightarrow f$ loc lips.
(Th) Cauchy Lipschitz v1/v2

(ex) Syst diff à coeff cte
(M) V° cte / des ctes.
(D) exponentielle de mat
(L) expo.
Appli

SD autonome : ne dépd pas de t,

$$(P) \begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$$ $\Leftarrow$ indépendant de t

Hypo : $f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ cont, loc. lipschitz.

Rq : $\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}^D$; $z \in \mathbb{R}^{D+1}$

$z = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, $\dot{z} = \begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$

(D) (P) $\dot{y} = f(y)$ si f cont, loc. lipsch. sr $\mathbb{R}^D$.

(D) Orbite / trajectoire
si y sol° de $(E) \Rightarrow \{ y(t),\ t \in]-T_{min}, T_{max}[\}$

(P) 1) 2 orbites du système distinctes ou confondues.

2) On note $s(t) y_0 = y(t)$: les solu°s de $\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $s(t+s) y_0 = s(t) s(s) y_0$ ds semi groupe

3) si une orbite se recoupe $\Rightarrow$ traj. périodiq

Rq : Une traj périodiq est déf $\forall t \in \mathbb{R}$.
est bornée.

Elle ne pt sortir de tt compact.
Ppe d'explo° $\Rightarrow$ sol° globale.

(D) $y^* \in \mathbb{R}^D$ point fixe pr SDA
$\dot{y} = f(y)$ ssi $f(y^*) = 0$
$t \mapsto y^*$ sol° stationn^{re} de $\dot{y} = f(y)$.

$$\frac{d}{dt} y^* = 0 = f(y^*)$$

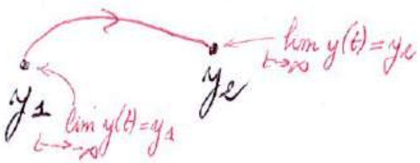
$\{y(t)\}$ trajectoire déf $\forall t \geq 0$: $[T_{max} = \infty]$

si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y^* \in \mathbb{R}^D \Longrightarrow y^*$ pt fixe

---

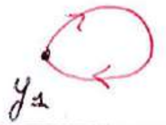
(D) Orbites hétéroclines & homoclines.

▶ Hétéro :



$y_1 \neq y_2$

▶ Homo :



$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = y_1$

(Rq) Une traj. ds $\mathbb{R}^2$ est donnée p. $y = \varphi(x)$; $y(t) = \varphi(x(t))$.

$\dot{y} = \varphi'(x)\,\dot{x}$. Pente de la tangente au point (x,y) donnée p. $\varphi'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

(D) $\alpha \in [0, \infty]$, l'isocline $I_\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \alpha \right\}$

(en pratiq calculer I_0 & I_∞)

tangente = tangente //

Pts fixes $= I_0 \cap I_\infty$.

Trouver soluts de $x''+2x'+x=0$

soit $y=\dot x$, $Y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $Y'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $Y'=AY=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}Y$.

① ① vp de A : $x^2+2x+1=0 \Rightarrow \lambda=1$ (vp).

$x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$ où a,b param connus.

Cor Cauchy-Lip

S = ens des soluts de (E) : ev dim 2.

Calculer a,b en f de $x_0=x(0)$, $y_0=x'(0)$.

$x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$.

DL en 0 $\quad x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$ $\quad$ M1

$$=a(1-t+o(t))+bt+o(t)$$
$$=a+t(b-a)+o(t)$$
$$=x(0)+x'(0)(t)+o(t)$$

$$\begin{cases}a=x(0)\\ b-a=x'(0)\end{cases} \Rightarrow x(t)=x(0)e^{-t}+x'(0)e^{-t}$$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}$, calculer e^{tA} $\quad$ M2

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=e^{tA}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$
$\to -1$ vp de A

$\to A+Id=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$\to (A+Id)^2=0$

$$e^{tA}=e^{-t}[Id+t(A+Id)+0]=e^{-t}\begin{pmatrix}1+t&t\\-t&1-t\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$$

Exemples $\quad$ Résoudre $t\ddot y+2\dot y+2ty=0$.

$Y=\begin{pmatrix}y\\\dot y\end{pmatrix}$, $\begin{cases}\dot y=z\\ \dot z=\dfrac{-2}{t}z-2y\end{cases}$ $\quad$ Je peux chercher sol° ds $I_+=]0,\infty[$

S = ev dim 2, $\dot Y=A(t)Y$.

Cherchons une solut ss la forme DSE $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$, $R>0$ et $|t|<R$, cp y est dérivable $\forall t\in]-R,R[$.

$\dot y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n t^{n-1}$, $\ddot y(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}$. Je cherche $(a_n)_{n\in\mathbb N}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}n a_n t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}=0.$$

$$\sum n(n-1)a_n t^{n-1}+2\sum n a_n t^{n-1}+2a_1+\sum a_n t^{n+1}=0$$

$$2a_1+\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)t^{j+1}a_{j+2}+2\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)a_{j+2}t^{j+1}+\sum_{j=0}^{\infty}2a_j t^{j+1}=0 \qquad n=j+2$$

$t=0$, $a_1=0$ $\quad (j+2)(j+3)a_{j+2}+2a_j=0 \iff a_{2n+1}=0$

$$(2n+2)(2n+3)a_{2n+2}+2a_{2n}=0 \iff a_{2n+2}=\frac{-2a_{2n}}{(2n+2)(2n+3)}$$

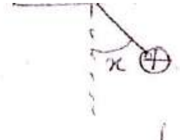
Par Crit de d'Alembert, $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=L$, de RDC $R=\infty=\frac{1}{L}$

$\exists y\in C^1(\mathbb R)$ à (E) déf f (SO).

$t\ddot y+2\dot y+2ty=0$, on cherche $y=y_1(t)z(t)$

①₁ Pendule pesant (sans frottement)

$\ddot{x} = -\sin x$ (syst. diff. auton. ds $\mathbb{R}^2$) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

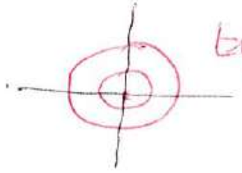


①₂ "linéarisat° ①₁" $\sin x \simeq x$, si x suffisamment petit : $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

↳ $z(t) = x + iy$; $\dot{z} = y - ix = -iz$, $z(t) = z_0 e^{-it}$

↳ Orbites : $\{e^{-it}\}_{t\in\mathbb{R}} = \{e^{-it} e^{i\theta}\}_{t\in\mathbb{R}}$

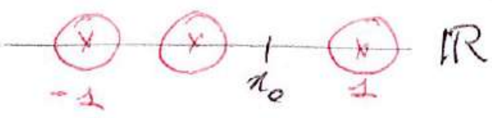
Trajectoire



↳ pts fixes : $\overset{*}{Y} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ pt fixe.

①₃ Déterminer les trajectoires de $\dot{x} + x^3 - x = 0$.

⇒ Pts fixes : ? $\dot{x} = x - x^3$ ainsi $f(x) = x - x^3 = 0$ ssi $x = \{0, -1, 1\}$



(*) $\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ x(0) = x_0 \in]0,1[\end{cases}$

→ 2 traje. ne se coupent pas, les sol° de (*) : $x(t) \in]0,1[$.

→ Vu que $x(t)$ piégée ds le compact $[0,1]$, elle est déf ∀ tps d'après ppe d'explos°.

$\dot{x} = x(1-x^2) \geq 0$ pr $x \in [0,1]$; $\begin{array}{l} t \longmapsto x(t) \\ \mathbb{R} \longmapsto]0,1[\end{array}$ ↗ $\begin{cases} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x^- & \exists \\ \lim_{t\to\infty} x(t) = x^+ & \exists. \end{cases}$

(f ↗ majorée admet une limite)

⇝ Ⓛ pcédt : ∄ x^-, x^+ pts fixes.

orb. ht Ecoulem

Affirmat° (orbite noire) : $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ en ↓

$\overbrace{\dot{x} = x(1-x^2) \leq 0}$

∃ $-T_{min} < \infty$ tq $x(t) \xrightarrow[t\to -T_{min}]{} \infty$, si $x(t)$ sol°, $-x(t)$ sol° : ens des orbites sym / à l'origine.

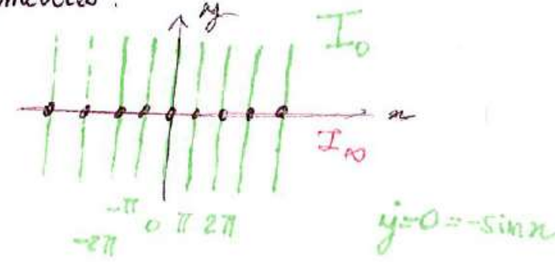
Exemple d'étude SDA : pendule pesant

(P) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ → étude qualitative des solut°s. → Vérifions cadre Ⓛ de (P).

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glob lip., ttes solut°s de (P) st globales

→ Isoclines ? Symétries ?

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$



lieu où $\dot{x} = 0 = y$

Pts fixes $= I_0 \cap I_\infty$.

$y = y_1(t)\, z(t)$ $\qquad\qquad$ $t\ddot{y} + 2\dot{y} + 2ty = 0$

$\dot{y} = \dot{y}_1(t)\, z(t) + y_1(t)\, \dot{z}(t)$

$\ddot{y} = \ddot{y}_1 z + \dot{y}_1 \dot{z} + \dot{y}_1 \dot{z}_1 + y_1 \ddot{z}_1$

$t\ddot{y}_1 z + t\dot{y}_1 \dot{z} + t\dot{y}_1 \dot{z}_1 + t y_1 \ddot{z}_1 + 2t y_1 z = 0$

$+2\dot{y}_1 z \qquad\qquad + 2y_1 \dot{z}$

$2t\dot{y}_1 \dot{z} + 2y_1 \dot{z} + t y_1 \ddot{z}_1 = 0$

$a\dot{y}_1 + b y_1 = 0 \rightarrow \quad a = 2t\dot{z}, \quad b = 2\dot{z} + t\ddot{z}$

$a \neq 0$

$\dot{y}_1 + \frac{b}{a} y_1 = 0$

$= -\int_0^x \frac{2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)}{2t\,\dot{z}(t)}\, dt$

$a(x)$

$-\int a(x)$

$\dot{Y} + AY = B(t) \rightarrow Y_0 e^{At}, \; Y_0 \in \mathbb{R}^2.$

② Borel - Cantelli I.

$(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré, $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\geq n} A_p\Big) = 0$$

On doit prouver que $\sin(t) \cdot 2t^2$

② BC II

$(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on opps (A_n) indépendante,

si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

$E \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$.

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{n, n \in \mathbb{N}\}$.

$$\lambda(A) = \lambda\Big(\bigcup_{n\geq 0} A_n\Big) = \sum \lambda(A_n)$$

$$= \lambda\Big(\bigcup_{n\geq 0}]n, n+2^{-n}[\Big)$$

$\Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$, $A =$ "pfffp apparait une infinité de fois"

$B_n =$ "apparition de pfffp $n^{\text{ème}}$ fois"

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$

$$f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$
$$w \longmapsto f(w)$$

$\mathring{A} \neq \emptyset$: On veut $\mathbb{P}(A) = 1$

$p \Rightarrow q$ $\quad \neg(p \Rightarrow q)^{\text{Fa}} = \neg q \Rightarrow \neg p$

M62
CM

Équat° différentielles Ordinaires

1. Qu'est-ce que c'est ?

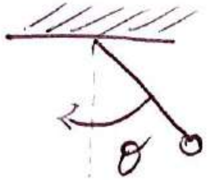
f cont de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$
(t, y)

Résoudre $\boxed{\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt} = f(t,y)}$ $(*)$

c'est chercher I intervalle de $\mathbb{R}$

& $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^D \in C^1$ (continue/dérivable)

q vérifie $(*)$.



ex Pendule pesant

$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0.$

Équat° diff. ordinaire (d'ordre 2).

$v = \dot{\theta} = \theta'$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin\theta \end{cases}$$

$y = \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^D$, $f(y) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

Vocab : si la f ne dépd pas de t, on dit qu'on a une équat° autonome.

Pb de Cauchy

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$ cont $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$ (P)

Rq $y(t_0) = y_0$, $t_0 = 0$.

D (Solut° maximale)

On appelle solut° maximale du pb (P) (la donnée d'un intervalle $]-T_{min}, T_{max}[\ni 0$),

$y :]-T_{min}, T_{max}[\longrightarrow \mathbb{R}^d$

de classe C^1 sol° de (P).

(Condit° $]-T_{min}, T_{max}[$ dit intervalle d'$\exists$ est le plus grand au sens de l'inclusion possible).

Rq : Une solut° sera dite globale si $T_{max} = \infty$
$-T_{min} = -\infty$.

NbO de f lipschitzienne PAR RAPPORT À LA SECONDE VARIABLE Y.

(D) f sera dite globalement lipschitzienne (de constante de Lipschitz L)

si $\forall t \in \mathbb{R}$, tout $y, z \in \mathbb{R}^D$

$$\boxed{\| f(t,y) - f(t,z) \| \leq L \| y - z \|}$$

(Rq) ici $\|\cdot\|$ norme qq sur $\mathbb{R}^D$.

@ norme euclidienne $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}$$

(D_2) f est localmt lipschitzienne (*) idem si $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D$

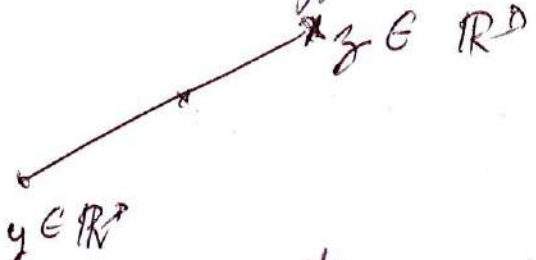
$\exists L_K$, $\forall t, y, z \in K$:

$$\boxed{\| f(t,y) - f(t,z) \| \leq L_K \| y - z \|}$$

(Rq) import t

si f est de classe $C^1 \Longrightarrow f$ est localmt lipschitzienne

Vérifions cette affirmaᴼ.



$D_y f$: la différentielle partielle p/ y.

IAF. $\| f(t,y) - f(t,z) \| \leq \sup$

$$\leq \sup_{\theta \in [y,z]} \| D_y f(t, \theta) \| \| y - \theta \|$$

Pendule : $y = \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$, $f(y) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ f de classe C^∞ de C^1 de localement lipsch

$y = \begin{pmatrix} \theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $f(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ -\sin\tilde{\theta} \end{pmatrix}$ $\leq |\theta - \tilde{\theta}|^2 + |\theta - \tilde{\theta}|^2 = \|y - \tilde{y}\|$

$\| y - f(\tilde{y}) \| = |v - \tilde{v}|^2 + |\sin\theta - \sin\tilde{\theta}|^2$

La f : $x \longmapsto \sin x$ est 1-lipschitz

$(\sin x)' = \cos x$.

$$|\sin x - \sin \tilde{x}| \leq \sup \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} |x - \tilde{x}|$$

(2) $\mathbb{R}^{\epsilon} \searrow$ f est Globalt Lipschitz.

Th de Cauchy-Lipschitz (v1)

Pb de Cauchy ($\forall f$ cont)

(H) f globalement lipschitzienne ($\not\!\!P$ y)

alors $\exists!$ y solut° **globale** à (P).

Th de Cauchy-Lipschitz (v2)

Pb de Cauchy ($\forall f$ cont)

(H) f localement lipschitzienne

alors $\exists!$ y solut° **maximale** à (P).

i) $]-T_{min}, T_{max}[$ interv max^{le} d'$\exists$

alternative ("d'explosion")

soit $T_{max} = +\infty$, si $y(t)$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^D$ qd $t \mapsto T_{max}$.

$$\left(\lim_{t \to T_{max}^-} \|y(t)\| = -\infty \right)$$

Id.

a) $D = 1$ $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

La f $f(x) = x^2 \in C^1$, localm^t lipschitz.

Affirmat°: $y(t)$ ne pt pas s'annuler.

$\not\exists$ p l'absurde : On sppo $\exists\, t_0 \in]-T_{min}, T_{max}[$ tq $y(t_0) = 0$.

Pb de Cauchy : $\begin{cases} \dot{z} = z^2 \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$

$z \equiv 0$
$y(t) = 0$
$t = 0$

unicité

contradic°

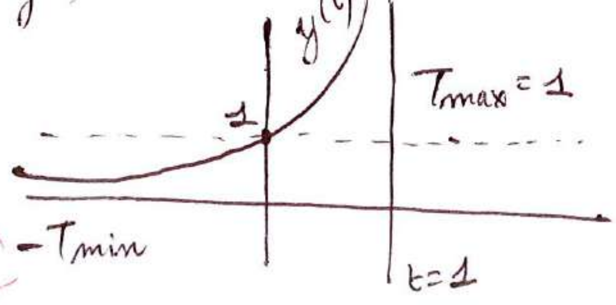
$1 \neq 0$

$\dfrac{\dot{y}}{y^2} = 1$, s'intègre ff entre 0 et t qq.

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s)}\, ds = t$$

$u = y(s)$
$du = \dot{y}(s)\, ds$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{du}{u^2} = t = -\frac{1}{y(t)} + \underbrace{\frac{1}{y(0)}}_{=1} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$



(3)

$]-\infty, 1[$ + intervalle maximale d'$\exists$

Autre vers°

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{y^2} = dt \quad y \neq 0$$

$$-\frac{1}{y} + 1 = t \rightarrow y = \frac{1}{1-t}$$

2. Exemples des systèmes différentiels à coeff. constants.

$b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^D$ cont

A mat $D \times D$, $A \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$

(L) $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^D$ de classe C^1 tq

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

NB coeff de A st indep de t. (des cte.)

Hypo
- $t \longmapsto Ay + b(t)$ cont
- $\|Ay + b(t) - Az - b(t)\| = \|A(y-z)\| \leq \underbrace{\|A\|}_{L} \|y-z\|$

Con a l'∃ & !! d'une sol globale.

$\boxed{D = 1}$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Équa° homog sans b.

$\dot{y} = ay$, $y(t) = y_0 e^{ta}$

$\boxed{M}$ de la variat° de la constante.

$y(t) = z(t) \cdot e^{ta}$.

$$\frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt}\left[e^{ta} z\right] = a(e^{ta} z) + e^{ta}\dot{z}$$

$$\dot{y} = ay + e^{ta}\dot{z}$$

$$e^{ta}\dot{z} = \dot{y} - ay = b(t)$$

$$\dot{z} = b(t) e^{-ta}$$

$$z(t) = \int_0^t b(s) e^{-sa} ds + C$$

$$y(t) = Ce^{at} + \int_0^t b(s) e^{(t-s)a} ds$$

$t = 0$

$C = y_0$ ④ $y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t b(s) e^{a(t-s)} ds$

Résolut° p la [M] des variat°s des constantes

Équat° homog :

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

① (Exponentielle de matrice)

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad \text{(matrice)}$$

Série normalem^t CV ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dc CV.

$$t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

(L) $t, s \in \mathbb{R}$, $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}$.

Dm

$$e^{tA} e^{sA} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \right)$$

$$= \sum_{n,k} \frac{t^n s^k A^{n+k}}{n!\, k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n+k=m} \frac{t^n s^k}{n!\, k!} \right) A^m \quad ⑤$$

$$(t+s)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k s^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} t^k s^{m-k}$$

$$= m! \sum_{k+n=m} \frac{t^k s^n}{k!\, n!}$$

$$e^{tA} e^{sA} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m (t+s)^m}{m!} = e^{(t+s)A}$$

cqfd

Appli

$h \neq 0$

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \underset{(L)}{=} e^{tA} \frac{e^{hA} - Id}{h}$$

or $e^{hA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m A^m}{m!} = Id + Ah + O(h^2)$

$$= e^{tA} . A + O(h^2)$$

dc $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable

$$\frac{d}{dt}\left[e^{tA}\right] = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

$y(t) = e^{tA} y_0$

$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^D$

$(y(0) = y_0)$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA} y_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) y_0 = A e^{tA} y_0 = Ay$$

<u>Ccl</u> : La sol° du pb de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{est } \underline{e^{tA} y_0}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} = O(h^2) \qquad \text{Ques acquo ?}$$

$\|\cdot\|$ norme <u>mat</u> subordonnée.

$$\varphi(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!}, \quad \varphi : \mathbb{R} \to M_D(\mathbb{R})$$

$$\|\varphi(h)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|h\|^n \|A^n\|}{n!} \qquad \|A^n\| \leq \|A\|^n$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^n \|A\|^n}{n!} \leq |h|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \leq \underbrace{e^{\|A\|} h^2}_{\text{est } = O(h^2)}$$

$h \to 0$, je px suppose $|h| \leq 1$

Intérêt : $\begin{cases} y' = Ay, & A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$

alors $\boxed{y(t) = e^{tA} y_0.}$ (e^{tA} mat, y_0 vect)

<u>Pr cet objet $\exists$-t-il ?</u>

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}}_{d} \Big\} d$$

$\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ = ens mat $d \times d$ à coeff réels $= \mathbb{R}^{d^2}$

soit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ muni d'une norme (matricielle subordonnée)

si $\|\cdot\|$ norme qq sr $\mathbb{R}^d$ $\quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

<u>Fait</u> $(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ <u>evn</u> complet. (espace de Banach)

<u>Fait</u> Dans $(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ toute série normalement cv est cv.

Ques acquo : A_n suite de <u>mat</u> $\sum_n \|A_n\| < \infty$

alors $\exists\, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$: $\sum_{k=0}^{n} A_k \longrightarrow B$.

Regardons la série d'élément e^A.

$$\sum_n \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_n \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < \infty$$

Dc cette série cv car elle est normalem^t cv

Affirmation : A donné, il existe un polynôme
$$e^A = q(A)$$ vrai.
$\longleftarrow$ dépend de A.

$\boxed{\text{Th de Cayley-Hamilton}}$

$\rightarrow \underbrace{P_A(X)}_{\text{polynôme caractéristiq d'une mat.}} = \det(A - X\,Id)$ $\Rightarrow \boxed{P_A(A) = 0}$

$P_A(X)$ polynôme de deg n dont le terme de plus haut deg est $(-1)^{d}$.

$$(-1)^d P_A(X) = X^d + \underbrace{Q(X)}_{\deg \leq d-1}$$

$$A^d = -Q(A) \in \mathrm{Vect}(Id, A, - A^{d-1})$$
$$A^{d+1} \in \mathrm{Vect}(Id, A, - A^{d-1})$$
$$\forall n, A^n \in \mathrm{Vect}(Id, - A^{d-1})$$ ε sev fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$
$$e^A \in \mathrm{Vect}(Id, - A^{d-1}).$$

Exemples de calculs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comment calculer e^A ?

$\boxed{M1}$ diagonaliser ou trigonaliser mat A.

ici $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$, 0 + autre vp = $\mathrm{Tr}A = 2$; 0 & 2 st les vp de A.

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$P^{-1}e^AP = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^A.$ $(P^{-1}AP)^n$

Th Cayley-Hamilton.

$\boxed{M2}$ $P_A(X) = X(X-2)$

Division euclidienne de X^n par $P_A(X)$, $\exists\, Q(X)$,

$$X^n = P_A(X)Q(X) + a_n X + b_n$$
$$\boxed{A^n = 0 + a_n A + b_n Id}$$

$$X^n = X(X-2)\,Q(X) + a_n X + b_n$$

$X=0$ $0 = 0 + a_n \cdot 0 + \cancel{b_n}$ $\Rightarrow \boxed{A^n = 2^{n-1} A}$, $n \geq 1$

$X=2$ $2^n = 0 + a_n \cdot 2$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Id + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}\right) A$$
$$= Id + \frac{1}{2}\left[e^2 - 1\right] A$$

Cas général "exponentielle polynômes"

@ : Résoudre $x''+2x'+x=0$ (*)

je pose $y=x'$, je pose $\underline{Y}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Résoudre (*) revient à résoudre

$$Y'=\begin{pmatrix}y\\-2y-x\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}}_{A}Y$$

Je veux connaître e^{tA} vp de A :

$X(X+2)+1=0 \quad \rightarrow -1$ vp double de A.

$\rightarrow$ la mat A est non diagonalisable. (car n'est pas semblable à $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$)

Th (Décomposition de Dunford)

$A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$

$\exists\, (D,N)$ diagonalisable & nilpotent :

$A=D+N$ et $DN=ND$

$$e^{tA}=e^{tD}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(tN)^j}{j!}\right)$$

$$A=\underbrace{-Id}_{\text{diagonale}}+\underbrace{(A+Id)}_{\text{Nilpotente}}$$

$(A+Id)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=0$

$$e^{tA}=e^{-t}\left(Id+t(A+Id)+0\right)$$

On peut faire cela autrement :

$x''+2x'+x=0 \Leftrightarrow r^2+2r+1=0 \qquad e^{-t},\ te^{-t}$

$(r+1)^2=0$

$r=-1$

Méthode de variat° des constantes

$y'=Ay+b(t)$

Eq homog $\quad y'=Ay \xrightarrow{\text{sol}^{\circ}} e^{tA}y_0$

Regardons $\quad y=e^{tA}z(t),\ z\in\mathbb{R}^d.$

$\dot{y}=\frac{d}{dt}\left[e^{tA}z\right]$

$\dot{y}=(e^{tA})'z+e^{tA}z'=Ae^{tA}z+e^{tA}z'$

$\dot{y}=Ay+e^{tA}z'=Ay+b(t)$

$e^{tA}z(t)'=b(t) \qquad e^{tA}e^{sA}=e^{(t+s)A}$

$\dot{z}=e^{-tA}b(t) \qquad e^{tA}e^{-tA}=Id$

(h_1+h_2)

Prop : $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, l'ens des solut° de $\dot{y} = Ay$ est un ev de dimension d.

Démo : $S = \{y \text{ f de classe } C^1, \dot{y} = Ay\}$,

si $y, z \in S$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}(y + \lambda z) = y' + \lambda z'$
$= Ay + \lambda A z = A(y + \lambda z)$

L'ens S est bien un ev.

$\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \longrightarrow S$
$y_0 \longmapsto e^{tA} y_0$ sol° $\begin{pmatrix} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}$ linéaire bijective (Th de Cauchy-Lipschitz).
$\mathcal{L}$ isomorphisme : $\dim S = d$

Rq : $\dot{y} = Ay + b(t)$; sol° : espace affine de dim d.

2. Exemples de résolut° d'éq non linéaires

e.1 Eq° de Bernoulli

$\dot{y} = p(t)\, y(t) + q(t)\, y(t)^\alpha$ (E) où $\alpha > 1$.

Hypothèses : p & q sont cont

On est ici ds Th de Cauchy-Lipschitz (cont en t, C^1 en y)

y sol° pb de Cauchy : $\begin{cases} \dot{y} = py + qy^\alpha \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ C.L. $y \equiv 0$.

Cas y ne s'annule pas : $y > 0$

CDV $z(t) = \frac{1}{y(t)^{\alpha-1}}$

$\frac{\dot{y}}{y^\alpha} = \frac{p}{y^{\alpha-1}} + q$

$z(t) = y(t)^{1-\alpha}$, $z'(t) = (1-\alpha)\, y'\, y^{-\alpha} = (1-\alpha) \frac{y'}{y^\alpha}$.

$\frac{1}{1-\alpha} \dot{z} = pz + q$ équa linéaire ...

2.2. Équat° à variables séparées

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1

$\begin{cases} \dot{y} = f(t)\, g(y) \\ y(0) = a \end{cases}$

"$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt$" $Z_g = \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}$.

$\to$ ss-ens fermé de $\mathbb{R}$.

1° cas $a \in Z_g$, $z(t) = a$: $\begin{cases} 0 = \dot{z} = f \cdot 0 \\ z(0) = a \end{cases}$.

Unicité de Cauchy-Lip. $y(t) \equiv a$.

2° cas : $a \notin Z_g$, $\exists\, \Omega$ intervalle de $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \setminus Z_g$

Si y une sol, $t \mapsto g(y(t))$ ne pt pas s'annuler.

DM Absurde $\exists t_0 / g(y(t_0)) = 0$

$y(t_0) \in Z_g$ C-Lip. $y(t) = y(t_0)$

$y(0) = a = y(t) \in Z_g$.

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{g(y)} = f(t)$$ Intègre entre 0 et t.

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)\,ds}{g(y(s))} = \int_0^t f(s)\,ds$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{du}{g(u)} \quad u = y(s)$$

$$X \longmapsto \int_a^X \frac{du}{g(u)}$$ monotone sur Ω

$$y(t) = G^{-1}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

Ex $t > 0$

Résoudre $\dot{y} = \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}$ & $y(1) = 1$

En posant $z(t) = \frac{y}{t}$

Th Cauchy-Lipschitz (v2)

$\dot{y} = f(t, y)$ déf sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$
$t \in \quad y \in$

$y(1) = 1 \quad (1 \in]0, \infty[)$

$t \mapsto f(t, y)$ cont en t, C^1 en y

ccl $\exists$ uniq sol° maximale y, $y :]T_-, T_+[\to \mathbb{R}$
$\cap \;]0, \infty[$
se a l'tendre d'expr.

Je pose $(t > 0)$, $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, soit $y = tz$.

$$z^2 + z = \frac{y^2}{t^2} + \frac{y}{t} = \dot{y} = t\dot{z} + z$$

$$\begin{cases} t\dot{z} = z^{(2)} \\ z(1) = \frac{y(1)}{1} = 1 \end{cases}$$

Eq° à variables séparées

La f z pt-elle s'annuler!

si $\exists\, z(t_0) = 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0$ or $z(1) = 1$

$\frac{\dot{z}}{z^2} = \frac{1}{t}$. J'intègre entre 1 & t.

$$\int_1^t \frac{ds}{s} = \int_1^t \frac{\dot{z}(s)\, ds}{z^2(s)} \underset{u=z(s)}{=} \int_1^{z(t)} \frac{du}{u^2}$$

$$\ln(t) = 1 - \frac{1}{z(t)} \rightarrow z(t) = \frac{1}{1-\log(t)}$$

$$\boxed{\Rightarrow y(t) = \frac{t}{1-\log(t)}}$$

définie sur $]0, e[$

Th de Cauchy-Lipschitz

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$ cont

(H) f est glob. lipschitzienne $\not p$ 2^nde^ variable

si $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^D$

$\exists L$ tq $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L \|y-z\|$

(PbC) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$

$\exists !\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ solu (globale) (C^1)

Pr dmq le Th, on aura besoin du résultat suivant :

Th du pt fixe de Banach (à paramètre)

(E,d) espace métriq complet, $F : \mathbb{R}^D \times E \longrightarrow E$

1) $\forall x \in E$, $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ continue.

2) $\exists q < 1$, $d(f(\lambda,x), f(\lambda,y)) \leq q\, d(x,y)$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^D$, $\forall x,y \in E$

alors i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^D$, $\exists !\ x_\lambda$ tq $f(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$

ii) $\lambda \longmapsto x_\lambda$ cont
$\mathbb{R}^D \longrightarrow E$

Vérifions ii) : $\lambda \longrightarrow \lambda_0$ alors $x_\lambda \longrightarrow x_{\lambda_0}$?

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) = d(f(\lambda, x_\lambda), f(\lambda_0, x_{\lambda_0})) \leq d(f(\lambda, x_\lambda), f(\lambda, x_{\lambda_0})) + d(f(\lambda, x_{\lambda_0}), f(\lambda_0, x_{\lambda_0}))$$

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq q\, d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(f(\lambda, x_{\lambda_0}), f(\lambda_0, x_{\lambda_0}))$$

$$\leq \frac{1}{1-q} \underbrace{d(f(\lambda, x_{\lambda_0}) - f(\lambda_0, x_{\lambda_0}))}_{\text{par 1) } \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} 0}$$

$\downarrow$ 0

□

DM (4) : C-Lip

1°) Réparat° : Il est équivalent

(i) de chercher y C^1 sol° $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ (P)

(ii) de chercher y cont q vérifie $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$ (I)

Vérifions (i) $\Rightarrow$ (ii) ; j'intègre la 1° équat° ds (P) entre 0 et t.

(ii) $\Rightarrow$ (i) soit y cont, $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$

si $t = 0$, $y(0) = y_0$; si y cont $s \mapsto f(s, y(s))$ cont.

$t \mapsto \underbrace{y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds}_{= y(t)}$ est alors C^1

$= y(t)$ aussi C^1.

En dérivant (I), je tente 1° équat° de (P).

2°) On fixe $T > 0$, on va chercher une sol° de (I) ds $C([-T,T], \mathbb{R}^n) = E$

E ev, $y \in E$,

$$|||y|||_T = \sup_{t \in [-T,T]} \|y(t)\| \leftarrow \text{norme sc } \mathbb{R}^n,$$

$(E, |||\cdot|||_T)$ Banach

$$\Phi : E \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$$

$\rightarrow$ Φ est-elle une contract° ?

$y, z \in E$, $\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t) =$

$$= \int_0^t \left(f(s,y(s)) - f(s,z(s))\right) ds$$

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq \left| \int_0^t \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\|\,ds \right.$$

$$\underset{f \text{ lipschitzienne}}{\leq} \left| \int_0^t L \|y(s) - z(s)\|\,ds \right.$$

$$\leq \left| \int_0^t L \left(\sup_{|s| \leq |t|} \|y(s) - z(s)\| \right) ds \right. \leq \sup_{|s| \leq |t|} \|y(s) - z(s)\| . L |t|$$

(F)

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_T \leq L\,T\ \|y-z\|_T$$

On cherche $q = LT < 1$ si T assez petit.

J'ai supposé T quelconque. Comment contourner cette difficulté ? $\Phi^k = \underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi}_{k \text{ fois}}$

(2) Pour $0 \leq t \leq T$,

$$\boxed{\|\Phi^k(y) - \Phi^k(z)\|_T \leq \frac{(Lt)^k}{k!} \|y-z\|_T \quad (*)}$$

DM Comme. Récurrence sur k.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\forall\, 0 \leq t < T$, $(*)$ vraie.

$\underline{k=0}$ ok

$\underline{k=1}$ $(F) \Rightarrow (H)$ vraie.

$\underline{k \Rightarrow k+1}$

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \Phi^k(y)(s))\, ds$$

$$\|\Phi^{k+1}(y)(\tau) - \Phi^{k+1}(z)(\tau)\| \leq \int_0^\tau \|f(s, \Phi^k(y)(s)) - f(s, \Phi^k(z)(s))\| ds$$

$$\|\Phi^{k+1}(y)(\tau) - \Phi^{k+1}(z)(\tau)\| \leq L \left| \int_0^\tau \|\Phi^k(y)(s) - \Phi^k(z)(s)\| ds \right|$$

$0 \leq |\tau| \leq t \leq T$.

$$\leq L \left| \int_0^\tau \frac{(Ls)^k}{n!} \|y-z\| ds \right| = \frac{L^{k+1}}{k!} \|y-z\|_t \left| \int_0^\tau s^k ds \right|$$

$$\leq \frac{(Lt)^{k+1}}{(k+1)!} \|y-z\|_t \quad : \text{passer au sup en } \tau.$$

NB : J'ai fait le calcul "$\tau \geq 0$", le refaire "$\tau < 0$". $\square$

$$\|\Phi^k(y) - \Phi^k(z)\|_T \leq \underbrace{\frac{(LT)^k}{k!}}_{q} \|y-z\|_T$$

Rq : $e^{LT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(LT)^k}{k!} < \infty$, $\exists\, k$ assez grand $\mid \frac{(LT)^k}{k!} = q \leq \frac{1}{2}$

cl possible : $\exists\, k$ assez grd, Φ admet un uniq pt fixe dans E : y

$\boxed{\text{Corollk}}$ y aussi l'uniq pt fixe de Φ.

$$\Phi(y) = y \Rightarrow \Phi^k(\Phi(y)) = \Phi^k(y)$$

$\Phi^n(\Phi^k(y))$ / "$\Phi^k(y) = y$.

Inversement : $\Phi^k(y) = y \Rightarrow \Phi^k(\Phi(y)) = \Phi(y)$.

dc $\Phi(y) = y$ & unicité du point fixe

MDR

13

(E,d) espace métriq complet

$\Phi : E \longrightarrow E$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$,

Φ^k strict. contractante $\Rightarrow \Phi$ admet un uniq point fixe.

Où en est-on?

Pour (I) (ou pour (P)).

$\forall T>0, \exists ! \, y : [-T,T] \to \mathbb{R}^D$ C^0 sol° de (I)

Rq. $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$

$$(y_0, y) \mapsto y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

$y_0 \longmapsto \Phi(y_0, y)$ cont.

$y_0 \longmapsto y \in E$ sol° de (P) cont.

si vous fixez T $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0$,

$\|y_0 - z_0\| < \alpha$

y_0 z_0

$\|y(t) - z(t)\| < \varepsilon$, $|t| \le T$.

$\boxed{2^\circ \text{ étape}}$ construct° d'une uniq sol° globale

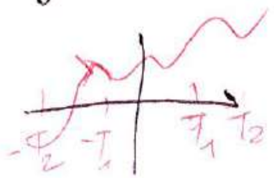
ie déf sur $\mathbb{R}$. $(\ni t)$.

À T fixé j'appelle y_T l'uniq sol° déf sur $[-T,T]$

Fait $T_1 < T_2 \Rightarrow \forall |t| \le T_1$, $y_{T_1}(t) = y_{T_2}(t)$

$y_{T_2} : [-T_1, T_1] \to \mathbb{R}^D$ sol° de (I) ds $C([-T_1,T_1], \mathbb{R}^D)$

par unicité $y_{T_1} = y_{T_2}$ sur $[-T_1, T_1]$



A sol° globale, soit $t \in \mathbb{R}$, soit $T > |t|$

$y(t) \overset{\text{déf}}{=} y_T(t)$ cette déf + uniq

$\tilde{T} > |t|$, $y_T(t) = y_{\tilde{T}}(t)$

Cette f coïncide $\forall$ y_T sur $[-T,T]$ et

1) cont sur $[-T,T]$ (vrai $\forall T$, cont sur $\mathbb{R}$)

2) vérifie (P) sur $[-T,T]$ ok sur $\mathbb{R}$.

Unicité de la sol° globale

$y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ 2 sol^{ues}, pr $T>0$ qq

$$y(t) = y_T(t) = z(t) \quad \text{pour } |t| < T.$$

$$y \equiv z$$

$\square$

Cas Particulier important

A matrice $D \times D$ à coeffs réels

$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ cont
$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une sol° uniq globale.

$$f(t,y) = Ay + \underbrace{b(t)}_{\text{cont en } t \text{ pas}}$$

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| = \|Ay - Az\| = \|A(y-z)\| \leq \underbrace{\|A\|}_{L} \|y-z\|$$

Ex Trouver sol°s de $x'' + 2x' + x = 0$ (E)

soit $y = \dot{x}$, $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$Y' = AY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} Y$$

Regarder vp de A : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \to \lambda = 1$ (2)

"exponentielle - polynôme" $x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$ à a, b comme param

Cor Cauchy-Lip

S = ens des sol°s de (E) : ev dim 2.

Peut-on calculer a, b en f de $x_0 = x(0)$, $y_0 = x'(0)$.

$$x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$$

$$\underline{\text{DL en } 0} = a(1 - t + o(t)) + bt + o(t)$$
$$= a + t(b-a) + o(t) = x(0) + x'(0)(t) + o(t)$$

$$\begin{cases} a = x(0) \\ b - a = x'(0) \end{cases} \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-t} + x'(0)e^{-t}.$$

$\boxed{M2}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ calculer e^{tA}

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$\to$ -1 vp double de A.

$A + Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A = -Id + (A+Id)$

$(A+Id)^2 = 0$

$e^{tA} = e^{-t}\left[Id + t(A+Id) + 0 \right]$

$= e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$.

$e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(1+t)x_0 + y_0 t e^{-t} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix}$

Ex $\quad ty'' + 2y' + 2ty = 0$.

indice on pourra chercher une sol° $\sum a_n t^n$.

$t \neq 0$ $\quad y'' + \frac{2}{t} y' + 2y = 0$

$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad$ (H) du Th de C-L

vp si 1 ens
non dia exp poly deg 2
60

Si on résoud sur l'intervalle $]0, \infty[$ $(\ni t)$

Espace de sol° ev de dim 2.

Idem sur $]-\infty, 0[$

~~Démo~~ Énoncé (Th) Cauchy - Lipschitz

$(P) \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$ où f cont de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D$ dans $\mathbb{R}^D$,

localm^t lipschitzienne p/ y.

$\exists !$ solu° maximale: $y : \underbrace{]-T_{min}, T_{max}[}$ $\xrightarrow[C^1]{} \mathbb{R}^D$

sol° de (P) (intervalle le + grd, possible au sens de l'inclusion) contenant $t_0 = 0$.

Alternative : soit $T_{max} = \infty$, soit $< \infty$

$y(t)$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^D$ qd $t \to T_{max}^-$

idem $\quad -T_{min} = -\infty$

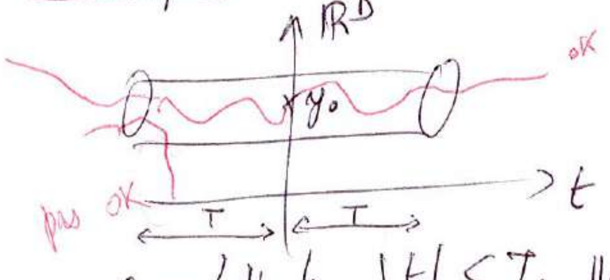
soit $\lim\limits_{t \to T_{min}^+} \|y(t)\| = \infty$.

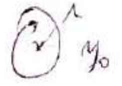
Démo — 1° étape : il est équivalent de

1) Trouver y C^1 sol° de (P)

2) Trouver y cont sol° de $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds$

2° étape : Construc° d'un cylindre de sécurité (CDS)





$C = \{(t,y),\ |t| \le T,\ \|y-y_0\| \le r\}$.

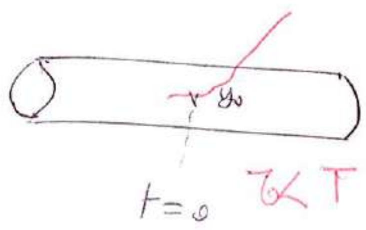
(D) Un CdS est un cylindre C tq si y sol° de (I), y ne peut pas quitter le cylindre C par le bord

$$\|y - y_0\| = r$$

(L) $\exists$ un CdS.

soit $C = [-T,T] \times B(y_0, r)$

C



$\Rightarrow C$: ss-ens compact

$$M = \sup_{(t,y)\in C} \|f(s,y)\| < \infty.$$

soit C un CdS, gagné ; soit C ne l'est pas

$$\tau = \inf\{t < T \mid \|y(t) - y(0)\| > r\}$$

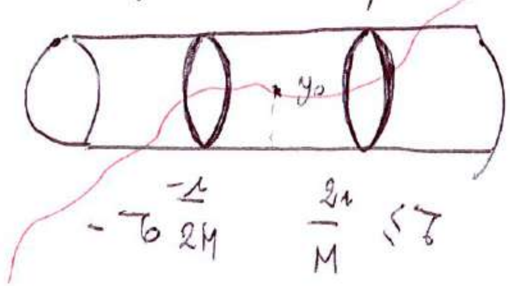
$$\|y(\tau) - y_0\| = r$$

Justifie y solu° de (P)

$$r = \|y(\tau) - y_0\| = \left\|\int_0^\tau f(s,y(s))\,ds\right\| \le \int_0^\tau \|f(s,y(s))\|\,ds \le \int_0^\tau M\,ds = M\tau.$$

pour $s \le \tau$, $(s,y(s)) \in C$

Une mauvaise trajectoire y ne peut quitter C qu'à un temps $\tau \geq \frac{r}{M}$.



Affirmation : $\tilde{C} = [-T_1, T_1] \times B(y_0, r)$,

$T_1 = \min\left(T, \frac{r}{2M}\right)$, $\tilde{C}$ est CdS.

$\tilde{C} \subset C$, $\sup_{\tilde{C}} \|f\| \leq M$.

3ᵉ étape : À la recherche d'un point fixe.

Pour résoudre localement (P) → sur un petit intervalle de tps.

Soit $C = [-T, T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité.

$E_T = \{y : [-T, T] \to \mathbb{R}^D \text{ cont}\}$

Banach muni $\|y\|_T = \sup_{|t| \leq T} \|y(t)\|$.

$F_T = \{y \in E,\ (t, y(t)) \in C\}$

$|t| \leq T$, $\|y(t) - y_0\| \leq r$.

F_T n'est pas un e.v, F_T ss-ens fermé de E.

$y_n \in F_T$, $y_n \xrightarrow{UN} y$, sur $[-T, T]$ alors $y \in F_T$.

$\lim_n \|y_n(t) - y_0\| \leq r$

$\|y(t) - y_0\|$

F_T muni $d(y, z) = \|y - z\|_T$, espace métriq complet

$\Phi : F_T \to E$

$y \longmapsto y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$

(a) Pour T assez petit, $\Phi(F_T) \subset F_T$ & Φ strict contract (b)

$M = \sup_C \|f(s, y)\|$, f est localᵗ lipschᵗ / y,

sur le compact C, $\exists L \mid (s, y), (s, z) \in C$:

$\|f(s, y) - f(s, z)\| \leq L \|y - z\|$

a) $\|\Phi(y)(t) - y_0\| = \left\| \int_0^t f(s, y(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|f(s, y(s))\| ds \right|$

$\leq MT \leq r$ ← pr contrac^e F_T.

b) $|t| \leq T$, $\|\Phi(y(t)) - \Phi(z(t))\| = \left\| \int_0^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\, ds \right\|$

$\leq \left| \int_0^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \right| \leq \left| \int_0^t L \|y(s) - z(s)\| ds \right|$

$\leq L \sup_{|s| \leq T} \|y(s) - z(s)\|$

En passant au "sup" $\sup_t$: $\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_T \leq \underbrace{L T}_{\leq \frac{1}{2}} \|y - z\|$

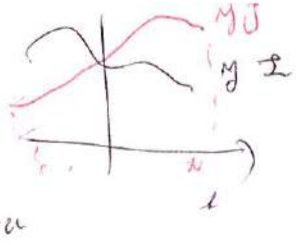
Rq : $[-T,T] \times B(y_0, r)$ CdS
alors $\left[-\min(T, \frac{1}{2L}), \min(T, \frac{1}{2L})\right] \times B(y_0, r)$
aussi un CdS

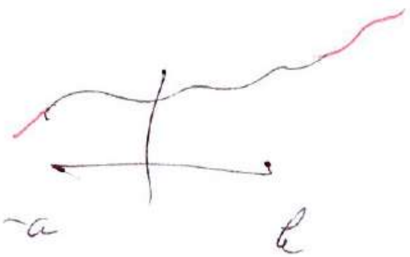
(CL) V3 Prop (P) : si f cont loc^t lipschitz % y
alors $\exists T$ approximatif (P) admet une
uniq solu° C^1 sur $[-T,T]$.

4° étape Passage de local à maximal.

$S = \{(I, y_I)$ I interv. ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0
et $y_I : I \to \mathbb{R}^d$, C^1 solu° de P.

(L) (S non vide)
(I, y_I) et (J, y_J) 2 élts $\in S$
$y_I(t) = y_J(t)$ $\forall t \in I \cap J$.





Démo du (L) : $V = \{t \in I \cap J$ ... $\}$
intervalle contenant 0.
$y_I(t) = y_J(t)$

V (nv) $0 \in V$, $V = (y_I - y_J)^{-1}(\{0\})$ fermé.

V ouvert : $t_0 \in V$: $\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(t_0) = y_I(t_0) = y_J(t_0) \end{cases}$

D'après 3° étape $\exists T > 0$ / unicité de sol
$[-T + t_0, t_0 + T]$, $y_I(t) = y_J(t)$ $\forall t / |t - t_0| < T$
$]t_0 - T, t_0 + T[\subset V$ V ouvert

$I \cap J = V$

$$I_\infty = \bigcup_{(I, y_I) \in S} I$$

I_∞ intervalle contenant 0.
Pour $t \in I_\infty$, $\exists I / t \in I$,
$y(t) \stackrel{def}{=} y_I(t)$ (D) univoq à cause du (L) précédent.

(I_∞, y) sol° de (P).
I_∞ + grd possible $(\tilde{I}, y_{\tilde{I}})$ sol°, $\tilde{I} \subset I_\infty$.
$I_\infty \subset \tilde{I}$

5ᵉ étape : Principe d'explosion.

$y :]-T_{min}, T_{max}[\longrightarrow \mathbb{R}^D$

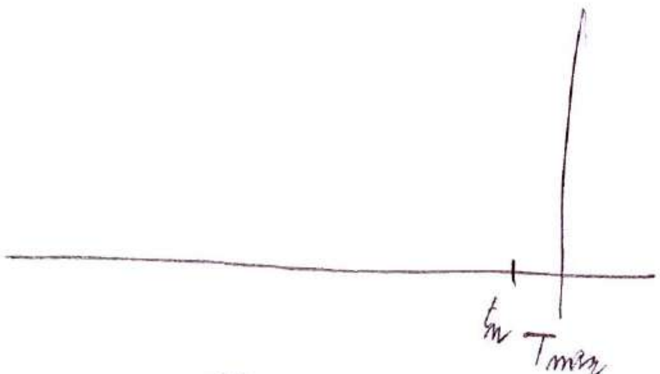
sol° maximale de (P).

→ Supposons $T_{max} < \infty$, je vais mier,

$\forall K$ compact, $\exists\, t(K)$, $y(t) \notin K$, $t > t(K)$

(H) $\exists K$ compact de $\mathbb{R}^D$, $\exists\, t_K \to T_{max}^-$,

$t_n \nearrow$, $y(t_n) \in K$.



Je vais user le (Th) de Cauchy-Lipschitz ds sa version locale

$\exists\, T \,/\, \exists\ \&\ \exists!$ d'une sol° sr $[t_n - T, t_n + T]$

, $T : y_0, r$, $LT \leq 1/2$ non plus

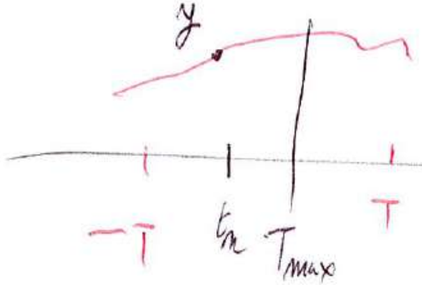
si vous avez $y_n \in K$ compact fixe,

$L = \max$ ds 2 cas de Lipschitz sr $[0, T_{max}]$

$\vee\ (K + B(0,r))$

ne dépd pas de r

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t,z) \\ z(t_n) = y(t_n) \end{cases} \quad \& \quad T_{max} - t_n < \frac{T}{e}$$



contient la déf de T_{max}, nouvelle sol° déf $t_n + T > T_{max}$

(Th) Cauchy-Lipschitz.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^D \end{cases}$$

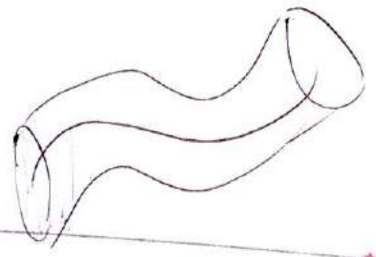
$f : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ cont, loc^t lipsch.

$\exists\, y :]-T_{min}, T_{max}[\longrightarrow \Omega$ $\quad C^1$

intervalle maximale d'$\triangle$

$T_{max} = \infty$, où $y(t)$ sort de tout compact de Ω qd $t \longrightarrow T_{max}^-$.

NB $\quad K + B(a,r) = \{a + b,\ a \in K,\ \|b\| \leq c\}$.



Quelle série commence en t^0 ?

Exo $\quad$ On vt résoudre $\boxed{t\ddot{y} + 2\dot{y} + 2ty = 0}$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = \dfrac{-2}{t} z - 2y. \end{cases}$$

$\triangle$

Je peux chercher sol$^{\circ}$ ds $I_+ =]0, \infty[$

$S =$ ev de dim 2, $\quad \dot{Y} = A(t) Y$

Cherchons une sol$^{\circ}$ ss la forme

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, là où la SE CV $\rightarrow$ elle est dérivable

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad \ddot{y}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Je cherche $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1}}_{t\ddot{y}(t)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\sum n(n-1) a_n t^{n-1} + 2\sum n a_n t^{n-1} + 2a_1 + \sum a_n t^{n+1} = 0$$

$$0 = 2a_1 + \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) t^{j+1} a_{j+2} \qquad n = j+2$$
$$+ 2\sum_{j=0}^{\infty} (j+2) a_{j+2} t^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} 2a_j t^{j+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 0,\ a_1 = 0. \\ (j+2)(j+3) a_{j+2} + 2a_j = 0 \end{array}}$$

$\Leftrightarrow a_{2n+1} = 0$,

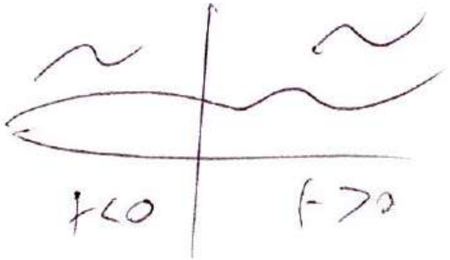
$$(2n+2)(2n+3) a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0$$

$$a_{2n+2} = \frac{-2\, a_{2n}}{(2n+2)(2n+3)}$$

Par crit de d'Alembert, $\frac{a_{2n+2}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = L$

de RDC $R = \infty = \frac{1}{L}$.

$\exists\, y \in C^1(\mathbb{R})$ à (E) déf p une DSE.



$t\ddot{y} + 2\dot{y} + 2ty = 0$.

On cherche $y = y_1(t)\, z(t)$

$\cancel{t\ddot{y}_1 z + 2\dot{y}_1 z + 2t y_1 z}$

$+2t\dot{y}_1\dot{z} + t y_1 \ddot{z} + \cancel{2\dot{y}_1 z} + 2 y_1 \dot{z}$
$\quad + \cancel{2t y_1 z} = 0$

Résoudre EDO d'ordre 1 par z.

III. Systèmes différentiels autonomes

Qu'est-ce qu'un SD Autonome ? → dépd pas t ps.

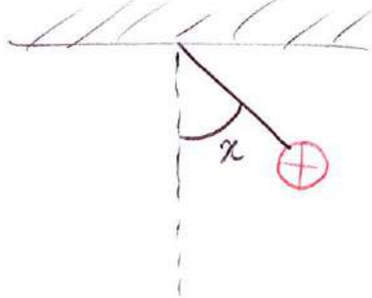
Pb : $\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$ ↖ indépdt de t

Hypo : $f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ cont, locl^t lipschitzienne

Rq : $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}^D$

$z \in \mathbb{R}^{D+1}$, $z = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$; $\dot{z} = \begin{cases} f(t,y) = \dot{y} \\ 1 = \dot{t} \end{cases}$

Ex 1 : Pendule pesant (sans frottement).



$\ddot{x} + \sin x = 0$

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ syst. diff auton. sur $\mathbb{R}^2$.

@2 "linéarisé" du préc'dt, "petites oscillat°s" !

$\sin x \simeq x$ si x suffisament petit.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

(D)/(P) $\dot{y} = f(y)$ où f cont, loc^t lipschitz sur $\mathbb{R}^D$.

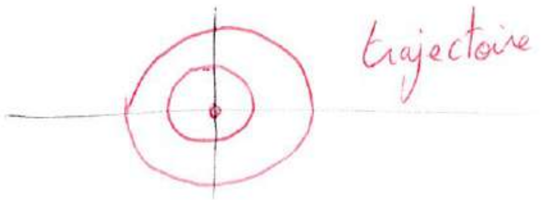
(D) Orbite / trajectoire

si y sol° de $(E) \Rightarrow \{y(t),\ t \in]-T_{min}, T_{max}[\}$

(ss-ens de $\mathbb{R}^D$)

@2 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$, $z(t) = x + iy$

$\dot{z} = y - ix = -iz$, $z(t) = z_0 e^{-it}$.



trajectoire μ @2

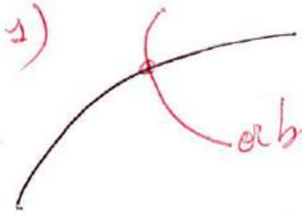
$\boxed{\text{Prop}}$ 1) 2 orbites du système soit : $\begin{cases} \text{soit distinctes} \\ \text{soit confondues.} \end{cases}$

2) Je note $s(t)y_0 = y(t)$, les sol° de $\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $s(t+s)y_0 = s(t)s(s)y_0$

"ppté semi-groupe"

3) Si une orbite se recoupe alors périodiq. traj.

DM du 1)



orbite 1

orbite 2

$\dot{y} = f(y)$

$\{y(t)\}$ orbite 1

$\{z(t)\}$ orbite 2.

$\exists\ t_1$ & t_2, $y(t_1) = z(t_2)$

Pb de Cauchy : (P) $\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_2) = y(t_1) \end{cases}$ Je sais que y sol° du pb

En fait j'ai une autre soluΘ :

$$v(t) = z(t - t_1 + t_2)$$

$$\dot{v} = f(v)$$

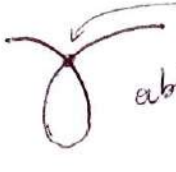
$$v(t_1) = z(t_2) = y(t_1)$$

J'appliq alors l'unicité de Cauchy Lipschitz

$$z(t - t_1 + t_2) = y(t).$$

@2 $\{e^{-it}\}_{t\in\mathbb{R}} = \{e^{-it}e^{i\theta}\}_{t\in\mathbb{R}}$

3) (Démo de 3) SDA.



exclu →

trajectoire périodiq.

DM : $\{y(t)\}$ orbite | $y(t_1) = y(t_2)$

$t_1 < t_2$.

$$(P) \begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_2) = y(t_1) \end{cases}$$

y soluΘ mais $t \longmapsto y(t - t_1 + t_2)$

, Par unicité de CL : $y(t) = y(t - t_1 + t_2)$

y est $T = t_2 - t_1$ périodiq.

Rq : Une trajectoire périodiq est déf. $\forall t \in \mathbb{R}$.

trajectre périodiq est bornée.

Elle ne pt sortir de tt compact.

Ppe d'explosion → sol° globale.

$\boxed{\text{DM 2}}$ $y(t) = s(t)y_0$, s fixé

$u : t \longmapsto s(t+s)\,y_0$

$v : t \longmapsto s(t)\,(s(s)\,y_0)$

$\Rightarrow u$ & v st sol° de $\dot{y} = f(y)$

$u(0) = s(s)\,y_0 = v(0)$ dc $u \equiv v$.

∮ unicité de CL

□

(D) $y^* \in \mathbb{R}^D$ point fixe pr le SDA : $\dot{y} = f(y)$ ssi $f(y^*) = 0$.

$t \to y^*$ sol° stationn^{re} de $\dot{y} = f(y)$.

$$\frac{d}{dt} y^* = 0 = f(y^*)$$

(ex) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\quad Y^{*} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ pt fixe ssi $x^* = y^* = 0$.

(L) $\{y(t)\}$ trajectoire déf $\forall\, t \geq 0$: $[T_{max} = \infty]$

si $y(t) \longrightarrow y^* \in \mathbb{R}^D$ qd $t \longrightarrow \infty$ alors y^* pt fixe.

DM On va procéder p DM p l'(?!) : spps $f(y^*) \neq 0$ (qu'on n'a pas un pt fixe). soit $\|\cdot\|$ norme qq s $\mathbb{R}^D$

$$\|f(y^*)\| = \varepsilon > 0.$$

$y(t) \longrightarrow y^*$ qd $t \longmapsto \infty$.

Comme f cont, $\exists$ alors $T > 0$ tq si $t > T$, $\|f(y(t)) - f(y^*)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (19).

(I) $\|f(y(t))\| \geq \|f(y^*)\| - \|f(y(t)) - f(y^*)\|$

$$\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, $\left\| \int_T^t \dot{y}(s)\, ds \right\| = \left\| \int_T^t f(y(s))\, ds \right\|$

$$\geq \left\| \int_T^t f(y^*)\, ds \right\| - \left\| \int_T^t \big(f(y(s)) - f(y^*)\big)\, ds \right\|$$

$$\geq \|f(y^*)\| \left| \int_T^t ds \right| - \int_T^t \|f(y(s)) - f(y^*)\|\, ds$$

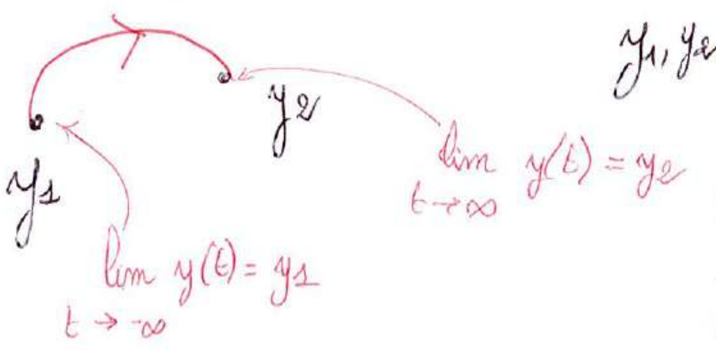
$$\geq \varepsilon(t-T) - \frac{\varepsilon}{2}(t-T) = \frac{\varepsilon}{2}(t-T)$$

ccl : $\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}(t-T)}_{\to \infty} \leq \overbrace{\left\| \int_T^t \dot{y}(s)\, ds \right\|}^{\|y(t) - y(T)\|}$

cv vers $\|y^* - y(T)\|$

$\square$

D orbite $\begin{cases} \text{hétérocline} \\ \text{homocline} \end{cases}$



y_1, y_2 2 pts fixes

$\boxed{\text{Hétéro}}$

$y_1 \neq y_2$

$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = y_1$

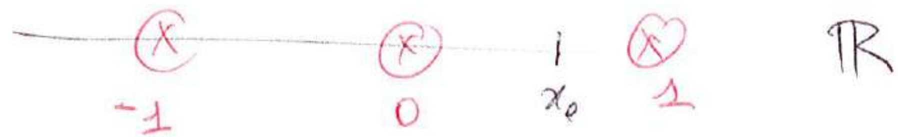
Homocline

[D=1] Déterminer les trajectoires de $\dot{x} + x^3 - x = 0$.

Pts fixes ? $f(x) = x - x^3 = 0$

$x = \{0, -1, 1\}$

$\dot{x} = x - x^3$



(*) $\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ x(0) = x_0 \in]0,1[. \end{cases}$

R1 2 trajectoires ne se coupent pas, la sol° de (*) : $x(t) \in]0,1[$.

vu que $x(t)$ piégée ds le compact $[0,1]$, elle est déf $\forall$ tps d'après ppe d'explosion.

$\dot{x} = x(1-x^2) \geq 0$ pr $x \in [0,1]$.

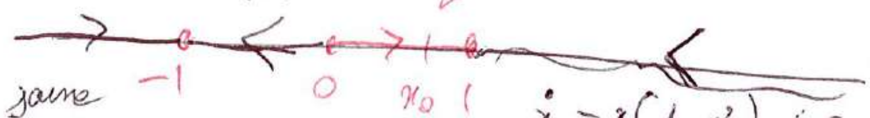
$$\begin{matrix} t \mapsto x(t) \\ \mathbb{R} \mapsto]0,1[\end{matrix} \nearrow \begin{cases} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x^- \ \exists \\ \lim_{t\to\infty} x(t) = x^+ \ \exists \end{cases}$$

($f \nearrow$ majorée admet une limite)

L(précédent) $\nearrow x^-, x^+$ pts fixes

vert

orbite hétérocline



$\dot{x} = x(1-x^2) \leq 0$

(Lo)

~~Comme il n'y a pas de pt fixe $x^* > 1$~~ :

Affirmaⁿ : Orbite (noire)

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ en ↘

$\exists\ -T_{min} < \infty \mid x(t) \xrightarrow[t\to -T_{min}]{} \infty$.

si $x(t)$ solⁿ, $-x(t)$ solⁿ : ens des orbites symétriq / à l'origine.

Démontrons l'affirmaⁿ :

Posons $y(t) = x(-t)$

$$\dot y = y^3 - y$$
$$\geqslant y_0(y^2-1).$$

$$\frac{\dot y}{y^2-1} \geqslant y_0 \quad \text{car } y > 1.$$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{-1}{2(y+1)} + \frac{1}{2(y-1)}$$

$$\int \quad = -\frac{1}{2}\ln(y+1) + \frac{1}{2}\ln(y-1) \geqslant y_0 t + C$$

Calcul : $t \mapsto \infty$ dans $\underbrace{y_0 t}_{\to\infty}$

d'où $y(t) \to \infty$. FOIREUX.

II. Exemple d'étude SDA.

Pendule pesant.

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\sin x \end{cases}$$

on ne sait pas calculer à l'aide fs élᵗᵉˢ une solⁿ explicite.

⇝ Etude qualitative des soluⁿs. (systèmes dynamiqs)

Pb à N corps : $N = 2$

$N \geqslant 3$ Concours (subventionné roi du siècle)

Poincaré ⇝ 1900's.

1) Vérifier cadre de CL. (PP) $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\sin x \end{cases}$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ glob lipsch.}$$

Ttes solᵒⁿˢ de (PP) + globales.

2) À la recherche $\left(\begin{array}{l} \text{isoclines} \\ \text{symétries} \end{array} \right.$.

Rq Une trajectoire ds $\mathbb{R}^2$ soit donnée par

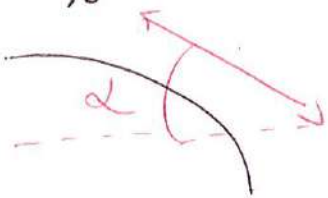
$$y = \varphi(x) \quad , \quad y(t) = \varphi(x(t)).$$

$$\dot{y} = \varphi'(x)\dot{x}$$

Pente de la tangente au point (x,y)

donnée p $\varphi'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

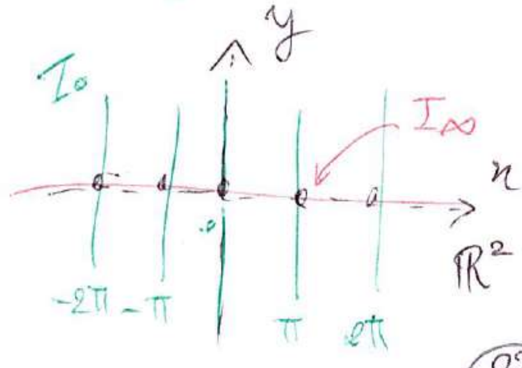
D $\alpha \in [0, \infty]$, l' isocline $I_\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \alpha \right\}$.



en pratiq :
calculer I_0 et I_∞.

tangente $=$ tangente $\parallel$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

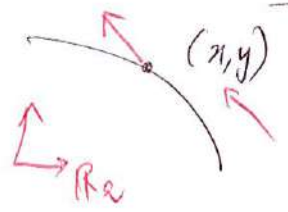


lieu où $\dot{x} = 0 = y$

$\dot{y} = 0 = -\sin x = 0$

Les pts fixes $= I_0 \cap I_\infty$.

Revenons ss isocline : $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \in$ à orbite



tangente trajectoire : pente

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = y \\ \dot{y} = g(x,y) = -\sin x \end{cases} \qquad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

en pratiq $\left(\begin{array}{l} \text{tangentes horiz.} \\ \qquad \text{verticales} \end{array} \right.$

$$I_\infty = \{ (x,y) \mid f(x,y) = 0 \}$$

$$I_0 = \{ (x,y) \mid g(x,y) = 0 \}.$$

Étude qualitative de $\ddot{x} + \sin x = 0$.
(pendule pesant sans frottements)

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ $\rightarrow$ étude SD sur $\mathbb{R}^2$ $\quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\dot{Y} = F(Y)$

(autonome car F ne ~~dépendant~~ pas de t)

① $F \in C^\infty$ et localt lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

Rq : $|\sin x - \sin \tilde{x}| \leq |x - \tilde{x}|$

$F(Y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$ globt lipschitz sur $\mathbb{R}^2$.

$\rightarrow$ solo EDO et globales (en temps).

② Symétries éventuelles du système.

si $(x(t), y(t))$ soluo alors $(-x(t), -y(t))$ aussi solo de $(*)$.

Ⓓ trajectoire/orbite

$\{x(t), y(t),\ t \in$ int maximal de déf $\underline{(\text{ici } \mathbb{R})}\}$

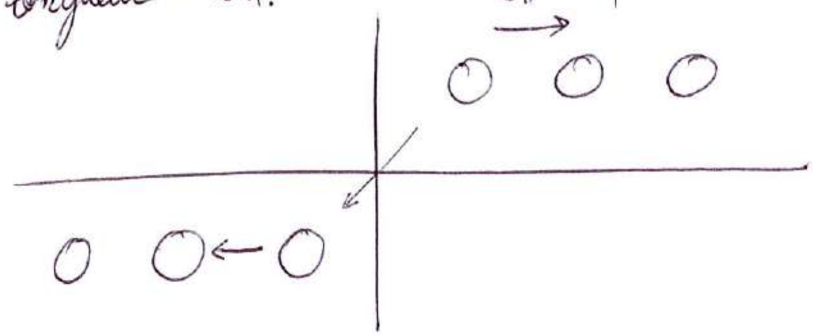
L'ens des trajectoires est symétriq (invariant par la sym. centrale de $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

(ii) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

$\rightarrow$ si $(x(t), y(t))$ solo de $(*) \Rightarrow (x(t) + 2\pi, y(t))$ aussi

En effet, $z(t) = x(t) + 2\pi$ $\quad \begin{cases} \dot{z} = \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x = -\sin z. \end{cases}$

L'ens des trajectoires est invariant par translao horizontale de longueur 2π.

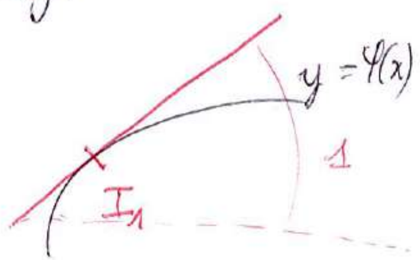


③ Isoclines & régionnement.

Ⓓ $I_\alpha = \{(x,y)\ ;\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \alpha\}$

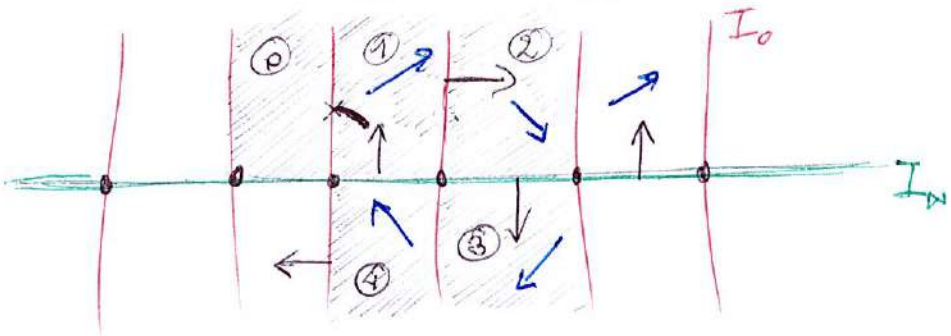
Rq Localt trajectR $\quad Y = \varphi(X)$; $Y(t) = \varphi(X(t))$

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \varphi'(X)$$



En général : $I_0 = \{\dot y = 0\}$ "horizontaux" ⚠ rel. à la direction des tangentes.
$I_\infty = \{\dot x = 0\}$ "verticaux"

I_0 : lieu des points où "$\dot y = -\sin x = 0$"
↳ $x = 0\ [\pi]$



"tangents" à l'ens des trajectoires sur $x = 0$.
$(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = 0 \end{cases}$

Rq $I_0 \cap I_\infty = \{\text{points fixes}\}$

⚠ intersecθ de 2 isoclines distinctes et non celle q se mord la queue.

Allure d'une trajectoire ?

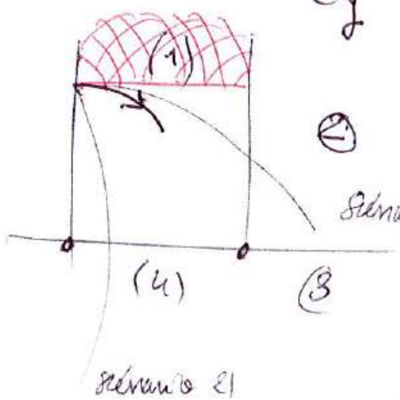
Suivre (pour $t \geq 0$) ; la trajectoire $(x(t), y(t))$ issue de $(0, y_0 > 0)$ à $t = 0$.

Régionnement du plan :

ⓘ $\forall t > 0$ petit $(x(t), y(t))$ rentre dans (1).

$$\begin{cases} x(t) = 0 + \dot x(0)\, t + o(t) = 0 + y_0 t + o(t) > 0 \\ y(t) = y_0 + o(1) > 0 \end{cases}$$

NB ds (1) $\begin{cases} x \nearrow \\ y \searrow \end{cases}$



Alternative

i) soit je rentre ds (2) en tps fini

ii) soit jd. (4) otf.

iii) soit je reste confiné $\forall t \geq 0$ ds (1)

$x(t) \nearrow$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty$ $\exists \leq \pi$.

$y(t) \searrow$ $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty \geq 0$

(C) $$\lim_{t \to \pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \text{ pts fixes.}$$

Vu que $x(\varepsilon) > 0$ pr $\varepsilon > 0$ petit et $x \uparrow$

alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non atteignable.

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$ cas exceptionnel : orbite hétérocline/homocline.

Il suffit
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial y} = \dot{y} & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial E}{\partial x} = \sin x & (2) \end{cases}$$

(1) $E(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + C(x)$

(2) $\dfrac{\partial E}{\partial x} = c' = \sin x \qquad c(x) = 1 - \cos x.$

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + (1 - \cos x)$$

$$E_c = \frac{\dot{x}^2}{2} + E_p = c$$

(D) (Intégrale première)

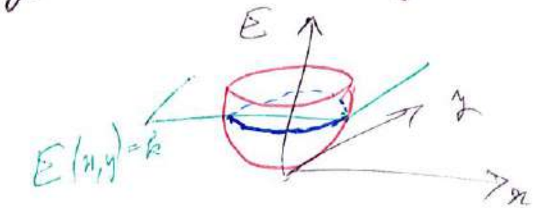
$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\exists$ la ppté

si $(x(t), y(t))$ sol° de $(*)$ alors $t \mapsto E(x(t), y(t)) = \text{cst}$. "les trajectoires st captives p les lignes de niveau de E"

Cherchons E :

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 0 = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y}$$
$$= y \frac{\partial E}{\partial x} - \sin x \frac{\partial E}{\partial y}.$$

$$E(x(t), y(t)) = E(0, y_0).$$
$$(x(t), y(t)) \in E^{-1}(E(0, y_0))$$



$E(0,0) = 0$

$E \geq 0.$

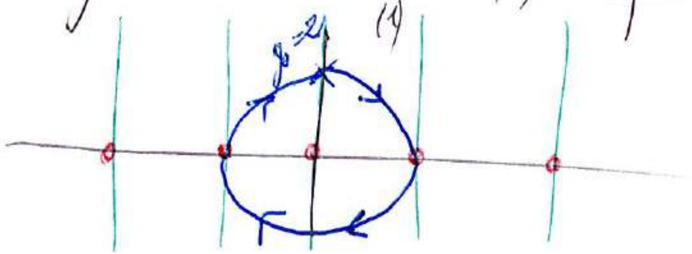
$E(0,0) = 0$, "énergie" de $(\pi, 0)$

$$E(\pi,0) = \frac{0^2}{2} + (1-\cos\pi) = 2$$

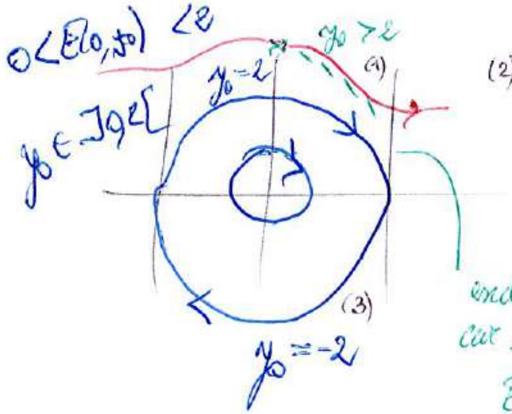
Je cherche y_0 | $E(0,y_0) = 2 = \frac{y_0^2}{2} + 0 = 2$

$$\boxed{y_0 = 2}$$

Trajectoire issue de $(0,2)$ $\longrightarrow$ captive de $E^{-1}(\{2\})$



$x \in [-\pi, \pi]$, $E^{-1}(\{2\})$ = réunion de 2 pts fixes + 2 orbites hétéroclines (2)



scénario (1) impossible car je ne peux pas couper l'hétérocline.

$$e^{tA} = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P$$

(26)

Classificat° des points fixes pr SDA sur $\mathbb{R}^2$

1. Cas des systèmes linéaires

$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où A mat 2×2 (inv.)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pt fixe

(a) Hyperbolicité

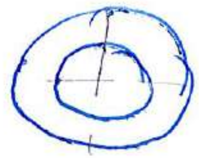
$Sp\,A = \{\lambda \in \mathbb{C}$, vp de $A\}$ A à coeffs réels

Je dis $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hyperboliq si $\lambda \in Sp\,A \Rightarrow Re(\lambda) \neq 0$.

Quels st les pts fixes non-hyperboliqs ?

$Sp\,A = \{ia, -ia\}$, $a \neq 0$

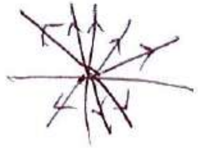
ex $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x \end{cases}$



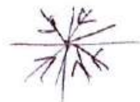
Cas hyperboliq :

1e cas : A admet 2 vp réelles $\neq$ de m̂ signe. $\dot Y = AY$.

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

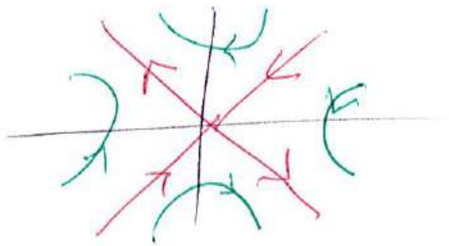


$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



2° cas : A a 2 vp réelles : $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,

$e^{tA} < 0$, $e^{tA} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P$.



(col)

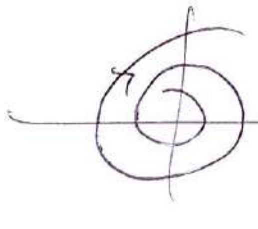
3° cas A admet une vp réelle double > 0.

noeud dégénéré ou non

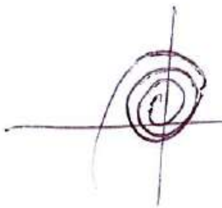
si A non diago (ou non)

4° cas $\mathrm{Sp}\, A = \{\alpha + ia, \alpha - ia\}$

$\alpha > 0$



foyer répulsif



foyer attractif

Cadre général

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y) \\ A\ C^1 \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ ds } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

soit $y^* \mid F(y^*) = 0$. "$F(y) = F(y^*) + DF(y^*)(y - y^*) + o(\|y - y^*\|)$"

$DF(y^*) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dc représenté p matrice.

D (Système linéarisé en y^*)

$$\dot{z} = DF(y^*)\, z$$

Th (Hartman-Grobman)

Spps que O pt fixe hyperboliq pr le système linéarisé.
alors $\exists$ V_{y^*} voisinage de y^* ds $\mathbb{R}^2$ & V_0 ds $\mathbb{R}^2$,
$h : V_0 \to V_{y^*}$ homéomorphisme (bijecθ bicont) tq

$$y(t) = h(z(t)).$$

cp y^* : "a la m̂ nature que O pr le linéarisé"

Col	col
foyer	foyer
noeud	noeud
centre	centre / foyer ?

2. Système de Van der Pol ⚠

$$\begin{cases} \dot x = y - x^3 + x & (1) \\ \dot y = -x & (2) \end{cases} \qquad (VdP)$$

1) S'assurer que $\dot Y = F(Y)$ où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rentre bien ds le cadre du Th de C-L.

F polynôme en x & y dc $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ (C^1) dc local^t lipschitzienne (car la dérivée n'est pas bornée).

Th $\forall \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\exists !$ $Y_1(t)$ maximale C^1 tq $Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

2) Symétries éventuelles

si $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une sol° de (VdP) alors

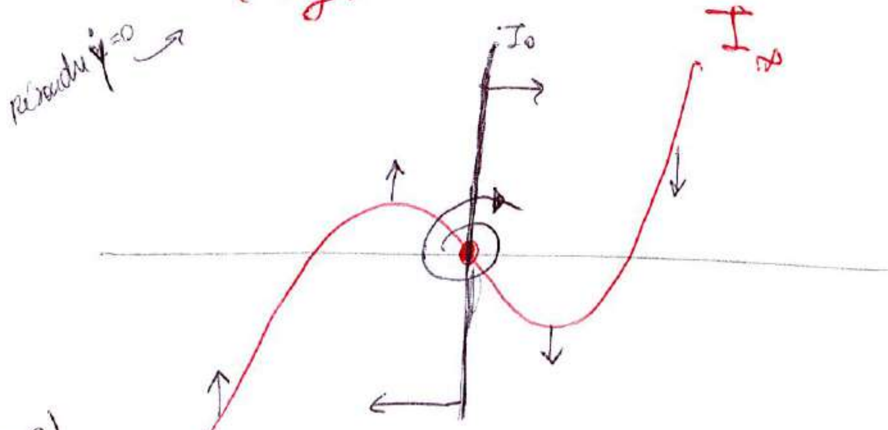
$t \mapsto \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ aussi sol°.

"L'ensemble des trajectoires est symétriq / invariant p. la symétrie central de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$".

3) Isoclines (de pts fixes)

$$\begin{cases} \dot x = g(x,y) \\ \dot y = f(x,y) \end{cases} \qquad I_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \alpha = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = "\frac{\dot y}{\dot x}" \right\}$$

$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = 0 \right\}$



En $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in I_0$, $\dot y = 0$ (tang^{te} horizontale)

Quel est le signe de $\dot x = y + 0 + 0$.

$I_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, y = x^3 - x \right\}$

Pts fixes est $\{ I_0 \cap I_\infty \}$. (0,0) seul pf du système

Que peut-on dire de la nature du pf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On va linéariser O. Nouvelle variables $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

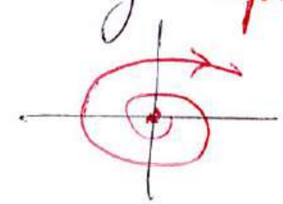
$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = DF(0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \dot u = u + v \\ \dot v = -u \end{cases}$$

Nature de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pr le linéarisé ?

vp de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = -3$

$-(1-x)x + 1 = 0$

2 (vp) $\begin{cases} \lambda_+ = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_- = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ foyer répulsif.

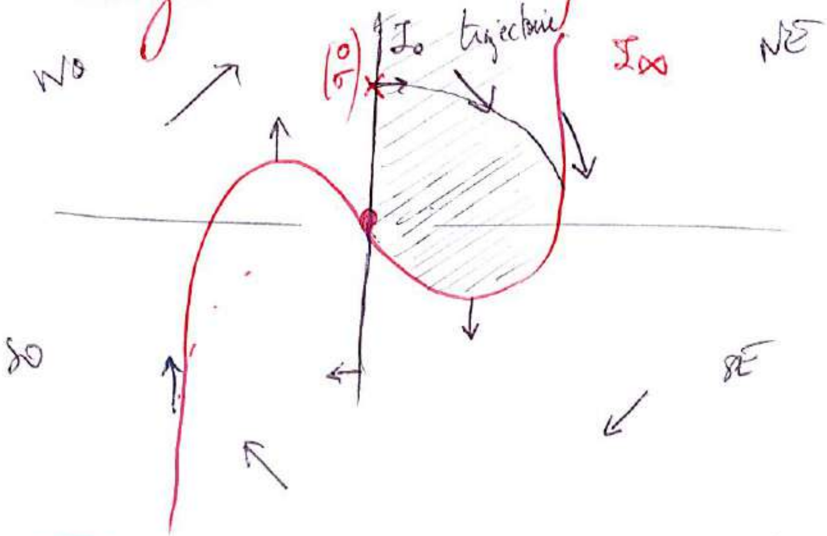


Point fixe hyperbolique

Appliquer le (Th) Hartman-Grobman.

Pour (VdP), $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ foyer répulsif

4) Régionnement du plan

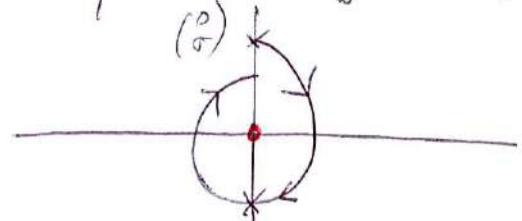


Prop $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$, $\sigma > 0$; $\exists\, T > 0$ tq la trajectoire issue de $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$ en $t = 0$ vérifie $\begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) > 0 \end{pmatrix}$

$\Phi : \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix}$ applicat° dite "de premier retour" de Poincaré

DM Δ de Φ.

Par symétrie, il suffit de faire un $\frac{1}{2}$ tour.



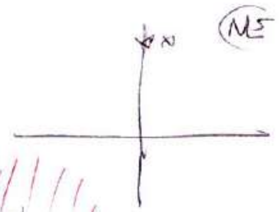
il suffit de mq Δ de Ψ.

$\Psi : \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tilde{T}) < 0 \end{pmatrix}$

1° étape : étude de la trajectoire ds zone (NE).

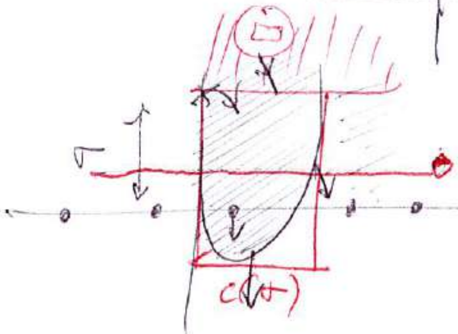
Si je pars $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$ av $\sigma > 0$. $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) = \sigma \\ \dot{y}(0) = 0 \end{pmatrix}$

$x(t) \underset{0^+}{\sim} \sigma t$



"initiat°"

Quelles st les options possibles ?



tant que je suis ds (NE)

$x(t) \nearrow$

$y(t) \searrow$

(i) soit la trajectoire reste pour $t \geq 0$ ds (NE)

(ii) soit $\exists\ T_1 < \infty / \ Y(T_1) \in I_\infty$.

(et bascule ensuite ds (SE)).

Réfuter (i) On va mq p l'absurde que (i) est impossible.

Pour $t \geq 0$, $y(t) \in$

minimum de $y = x^3 - x$, si $x>0$

$3x^2 - 1 = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$.

$y(t) \in \left[\frac{-2}{3\sqrt{3}}, \sigma\right]$

$x(t) = [0, c(\sigma)]$.

$y(t)$ captive $\forall\ t \geq 0$, zône piège compacte

Ppe d'explosion $T_{max} = \infty$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$ $(\nearrow)$ f ⓐ & minoré est ↗.

$\lim_{t \to \infty} y(t) = y^*$ $(\searrow)$

or $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ point fixe

Contradictⓞ !

1° argument : $\varepsilon > 0$, $x(\varepsilon) \sim \sigma\varepsilon > 0$

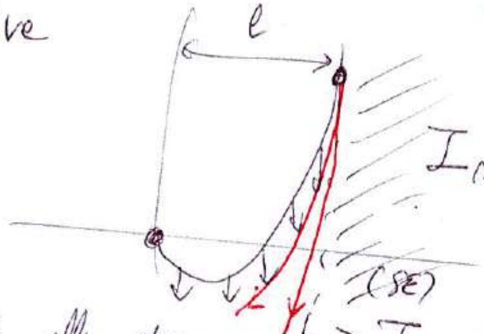
$x^* \geq x(\varepsilon) > 0$

2° argt : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ foyer répulsif

2e étape dans (SE)

$\dot{y}(T_1) < 0$ dans (SE) $x(t) \searrow$ $y(t) \searrow$

alternative



(i) soit elle demeure $t \geq T_1$ ds (SE)

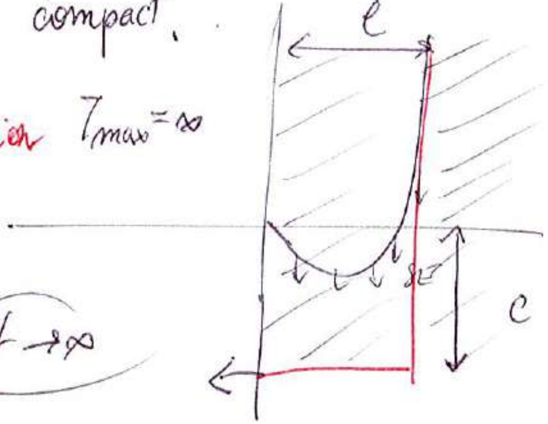
(ii) soit elle quitte en tps fixé (SE) puis (SO)

Il faut réfuter i), $x(t) \in [0, \ell]$

soit $y(t)$ minorée, soit $y(t) \longrightarrow -\infty$
(a) (b).

Réfutons (a) : spps $y(t) \geq c > -\infty$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ captive pr $t \geq 0$ d'un compact.



Par le ppe d'explosion $T_{max} = \infty$

Par monotonie,

$x(t) \searrow x_* \quad (t \to \infty)$

$y(t) \searrow y_*$

nécessrt $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impossible car foyer répulsif.

Cas (b) : soit $T_{max} < \infty \quad (b_1)$

soit $T_{max} = \infty \quad (b_2)$

Réfutons (b_1)

$\dot{y} = -x \quad (2)$

$|\dot{y}| \leq \ell$ Inégalité des accrs^ts finis.

$|y(t) - y(T_1)| \leq \ell (t - T_1)$
$\leq \ell (T_{max})$

$t \to T_{max}$

$\infty \leq \ell T_{max}$ contradicO.

Réfutons (b_2) $T_{max} = \infty$

$|\dot{x}| \geq |y| - \ell^3 - \ell \quad$ (p (1) et $0 \leq x < \ell$)

$\exists T > T_1 \ | y(T)| \geq 2(\ell^3 + \ell)$

Pour $t \geq T$, $|\dot{x}| \geq (\ell^3 + \ell)$

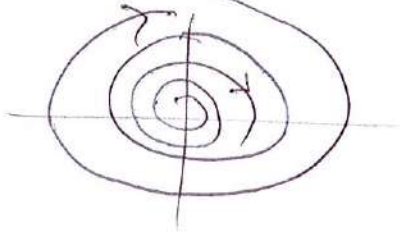
$2\ell \geq |x(t) - x(T)| \geq (\ell^3 + \ell)(t - T) \to +\infty$

Contradiction

Con a mqe $\exists\ \Phi$.

On montrera Φ cont, $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y_\infty > 0 \end{pmatrix}$ $\exists \sigma \ \Phi(\sigma) = 0$

$\Phi(\sigma) > \sigma$ si σ proche de 0
$\Phi(\sigma) < \sigma$ si $\sigma > \infty$.



Defraiteur
Maxence

Devoir à la Maison en M62.

On a (SD) $\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy = f(x,y) \\ \dot{y} = -cy + dxy = g(x,y) \end{cases}$

1) (SD) rentre bien dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz car $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont des polynômes continus $\Rightarrow C^\infty$, donc localement lipschitziennes,

2) Si $y(t) = 0 \ \forall t$; (SD') $\begin{cases} x(0) = k_1 \\ \dot{x} - ax = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$, l'ensemble des soluts de (SD') est $S_1 = \{ k_1 . e^{at}, t \in \mathbb{R}, \cancel{} \in \mathbb{R} \}$.

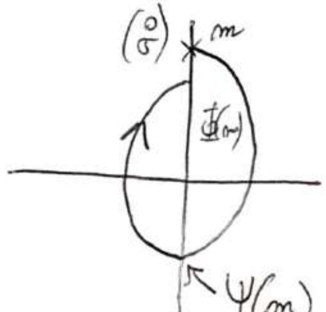
3) Si $x(t) = 0 \ \forall t$; (SD'') $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -cy \\ y(0) = k_2 \end{cases}$, l'ensemble des solutions de (SD'') est $S_2 = \{ k_2 \, e^{-ct}, t \in \mathbb{R} \}$.

Applicat° de 1° retour de Poincaré

$\Phi : \{0\} \times]0, \infty[\longrightarrow \{0\} \times]0, \infty[$.

Pr des raisons pratiqs : $\Phi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$\sigma \longmapsto \Phi(\sigma)$

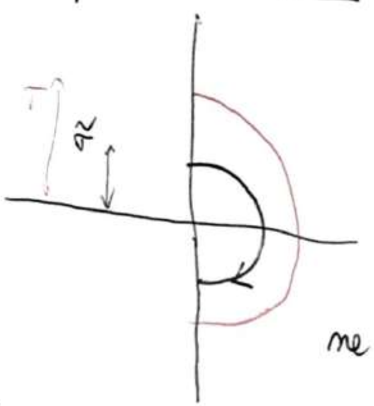
$\Psi : [0, \infty[\longrightarrow]-\infty, 0]$.
$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma > 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(\sigma) < 0 \end{pmatrix}$



Prop : Φ cont,

DM Pr établir ceci, il suffit de mq que Ψ est cont.

R.q



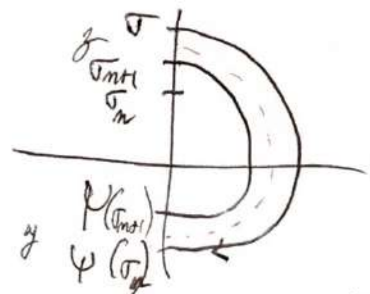
Comme a un système autonome q satisfait les hypothèses au Th de C-L, 2 trajectoires ne peuvent se couper.

$\tilde{\sigma} < \sigma \implies \Psi(\sigma) < \Psi(\tilde{\sigma})$ (Ψ décroissance)

, Mq p l'absurde que Ψ cont.

$\sigma_n \longrightarrow \sigma$ tq $\Psi(\sigma_n) \not\longrightarrow \Psi(\sigma)$

quitte à extraire une sous-suite, je px supposer σ_n croissante (ou décroissante)



La suite $\Psi(\sigma_n)$ suite ↓ minorée par $\Psi(s)$.

$\Psi(\sigma_n) \longrightarrow \ell < \Psi(\sigma)$.

$y = \dfrac{\ell + \Psi(\sigma)}{2}$.

Je vais résoudre pr le tps des négatifs (VdP) partant de $\binom{0}{y}$.

Nécessairt, cette trajectoire coupe en tps fini $\{0\} \times [0, \infty[$ ds $T > -\infty$

$\Psi(\sigma_n) > y > \Psi(\sigma)$

$\sigma_n \leq z < \sigma$, vrai $\forall n$: $n \to \infty$

$\sigma = \lim \sigma_n \leq z < \sigma$ exclu

Notre applicat° Φ cont., on va établir

(i) si $\sigma \to 0$, $\Phi(\sigma) > \sigma$

ii) si $\sigma \to \infty$, $\Phi(\sigma) < \sigma$

par le Th des Valeurs intermédiaires,

$\exists\ \sigma_0 \mid \Phi(\sigma_0) = \sigma_0$

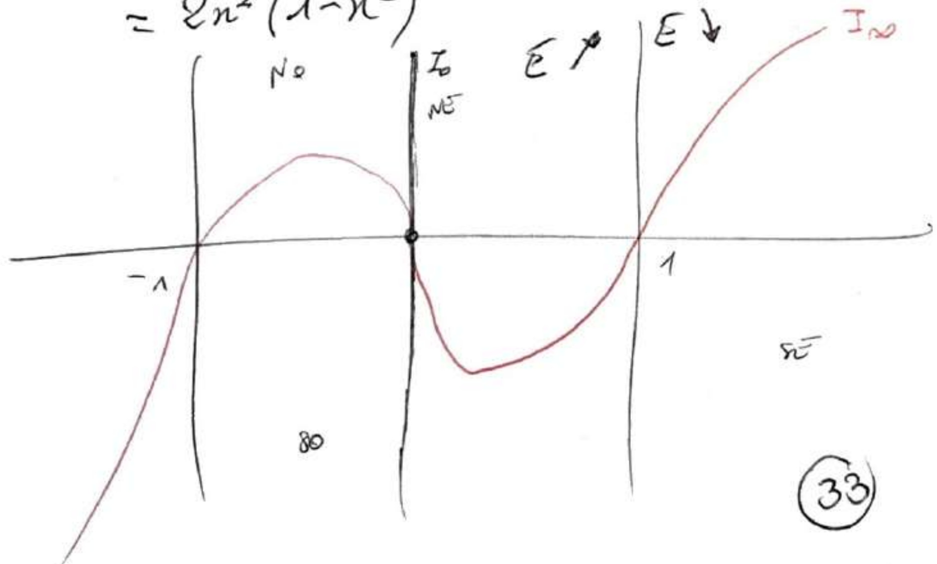
$\boxed{\text{Mq (i)}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ foyer instable

voir Th Hartman

$\boxed{\text{Pour (ii)}}$ Résultats préliminaires.

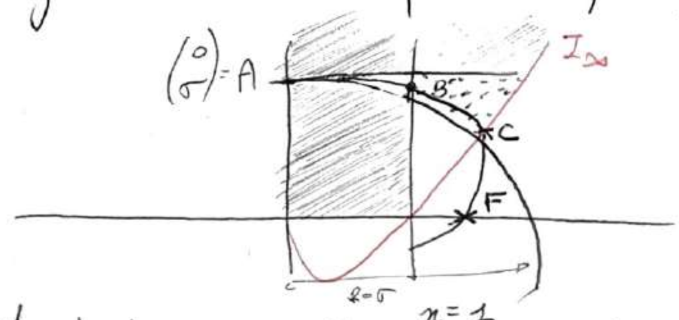
$E(x,y) = x^2 + y^2$, regardons comment E varie le long des trajectoires. $(t>0)$

$$\frac{d}{dt}E = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x)$$
$$= 2x^2(1-x^2)$$



Je pars d'un point $A = \begin{pmatrix}0\\\sigma\end{pmatrix}$ $(\sigma \gg 1)$.

Trajectoire issue de A pr les tps positifs.



en NE $x \nearrow$ $y \searrow$

Avant de couper l'axe $x = 1$, $t \mapsto E(t) \nearrow$.

$B = \begin{pmatrix}1\\y_B\end{pmatrix}$, $\sigma^2 \leq 1 + y_B^2 \leq 1 + \sigma^2$, $y_B \underset{\infty}{\sim} \sigma$

$$1 \leq \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{y_B(\sigma)}{\sigma}\right)^2 \leq 1 + \frac{1}{\sigma^2}$$

Pour $t>0$, la trajectoire issue de B poursuit sa course dans ⁘ . Mtn $E \searrow$: $x_C^2 + y_C^2 \leq 1 + y_B^2$ (1)

Dans SE, $x \searrow$, $y \searrow$: $x_F \leq x_C$ (2)

$1 + y_D^2 \leq x_F^2 + 0$ (3)

$y_C = x_C^3 - x_C$ (car point $\in I_\infty$)

$x_C \gg 1$.

x_C^6 + tps d'ordre inférieur $\leq 1 + y_B^2 \sim \sigma^2$.

$x_C \leq c.\,\sigma^{1/3}$

$y_D \leq \tilde{c}\,\sigma^{1/3}$.

① $V = E + 2y$

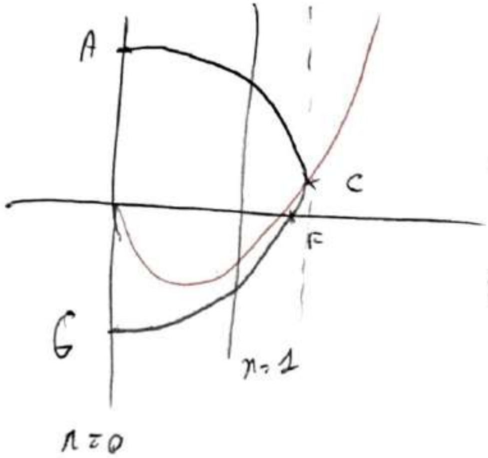
$\dot V = \dot E + 2\dot y = 2x^2(1-x^2) - 2x = 2x(x-1) - 2x^4 < 0$

zone à [illegible]

Pendule pesant = système conservatif (1 deg conservé, 1 une intég première).

Pendule pesant & frottements :

$k>0, \quad \ddot x + k\dot x + \sin x = 0.$



$V(G) \leq V(D)$

$0 + y_G^2 + 2y_G \leq 1 + y_D^2 + 2y_D$

$\leq \tilde{c}\,\sigma^{2/3}$

$\Psi(\sigma)^2 \leq \tilde{\tilde{c}}\,\sigma^{4/3} << \sigma^2$

$\boxed{\text{CQFD}}$.

$$\begin{cases} y = \dot x \\ \dot y = -\sin x - ky \end{cases}$$

Q1 si $k=0$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ centre, que se passe-t-il entre si $k>0$.

NB : $(0,0)$ pt fixe de $(*)$.

Linéarisons au $\mathcal{V}$ de $(0,0)$

$\begin{cases} x = u + o(u) \\ y = v + o(v) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot u = v \\ \dot v = kv - u. \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$ vp de A ?

$X(X+k)+1=0 : \quad X^2 + kX + 1 = 0$

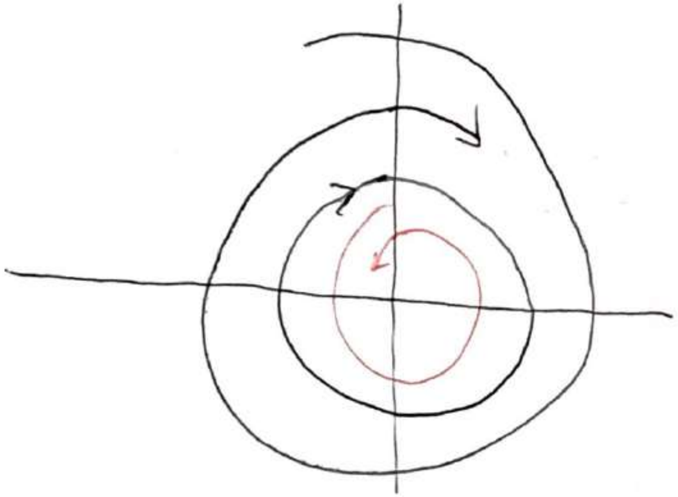
$\Delta = k^2 - 4.$

1° cas : $0<k<2$, $\Delta<0$ $\lambda, \bar\lambda$ vp c. conj

$\lambda + \bar\lambda = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Tr}\,A = -k < 0$

2° cas $k>2$ $\Delta>0$ 2 vp réelles

$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -k \end{cases}$



$\begin{matrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k-\lambda \end{matrix}$

$\lambda^2 + \lambda k + 1$ $\quad -\lambda(-k-\lambda) + 1$

Je suppose $0 < k < 2$

(1°2) Que devient l'int. 1° ?

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + (1-\cos x).$$

Comment évolue E le long d'une trajectoire $(t>0)$

$$\frac{dE}{dt} = y\dot{y} + \sin x\,\dot{x} = y(-\sin x - ky) + \sin x\, y$$
$$= -ky^2 \leq 0.$$

Système conservatif $\leftrightarrow$ integ 1°

Système dissipatif $\Leftrightarrow$ f de Lyapenov

(D) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, C^1 cont

L f de Lyapenov si

i) L décroît le long des trajectoires.

ii) si $\exists\ ]t_1, t_1+\varepsilon[$, $\forall s \in]t, t+\varepsilon[$,
L est cte $\Rightarrow \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ point fixe.

Vérifions p le PP à frottements que E est bien f de Lyapenov.

Vérifions (ii), $]T_1, T_1+\varepsilon[\ \exists t, \frac{dE}{dt} = 0 = -ky^2$

implique $y \equiv 0\ \forall t \in]T, T+\varepsilon[$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky - \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \text{ à }]T, T+\varepsilon[\\ \sin x = 0 \text{ à }]T, T+\varepsilon[\end{cases}$$

$x(t) = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

(Th) [pp d'invariance de La Salle]

soit un système à L Lyapenov,

soit $(x(t), y(t))$ trajectoire qq alors tte valeur d'adhérence de cette trajectoire est un pt fixe,

$t_n \longrightarrow \infty$

$(x(t_n), y(t_n)) \longrightarrow (x^*, y^*)$ alors celui-ci est un point fixe.

DM Quitte à extraire une sous-suite de t_n, je peux supposer $t_{n+1} - t_n > 1$

$$s(t)(x_0,y_0) = (x(t), y(t))$$

$\tau \in \,]0,1[$,

$$L(s(\tau)s(t_0)(x_0,y_0))$$

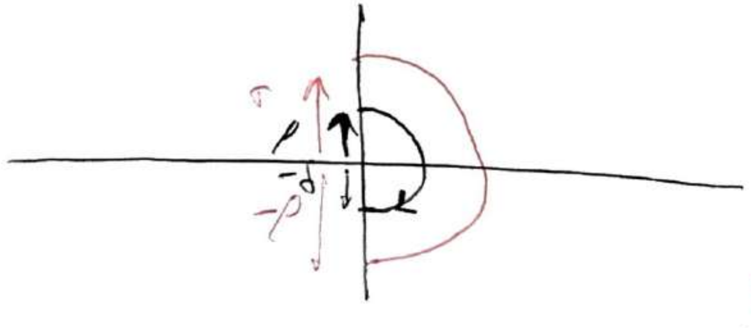
$$L(s(t_{n+1})(x_0,y_0)) \leq L(s(t_n+\tau)(x_0,y_0)) \leq L(s(t_n)(x_0,y_0)).$$

$$L(x^*,y^*) \leq L(s(\tau)(x^*,y^*)) \leq L(x^*,y^*) \leq L(x^*,y^*)$$

avec (ii) Lyapunov, $\tau \mapsto L(s(t)(x^*,y^*))$ est (x^*,y^*) pt fixe.

Q°: Symétries @ de Van der Pol

• Ens trajectoires symétriq p $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.



Autre exemple d'utilité de fonctionnelle de Lyapunov (Annales)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - (x^2+y^2)x \\ \dot{y} = x - (x^2+y^2)y \end{cases} \quad (E)$$

1) Déterminer pts fixes
2) Démq $L = x^2+y^2$ est f de Lyapunov.

$$g(x,y) = -y - (x^2+y^2)x$$
$$f(x,y) = x - (x^2+y^2)y$$

polynômiales en x, y donc C^1

P le (TH) de CL, $\exists$ pr ce système autonome & pr chq donnée initiale $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\exists!$ sol$^{\circ}$ maximale à (E) issue de $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

Regardons les pts fixes

$$\begin{cases} y = -(x^2+y^2)x \\ x = (x^2+y^2)y \end{cases}.$$

Pas de cours

Mardi 36 29/03.

Pts fixes : $\begin{cases} y = -(x^2+y^2)x & \cdot y \\ x = (x^2+y^2)y & \cdot x \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y^2=0$ seul pt fixe $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Rq linéarisé en 0.

$\begin{cases} \dot{u} = -v \\ \dot{v} = u. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

vp i & $-i$

Centre : NON hyperbolique.
On ne pt rien dire...

2) D (f Lyapunov)

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cont,

(i) $L \searrow$ le long d'une trajectoire.

(ii) si L cte m̂ localem^t sur $(x(t), y(t))$ trajectoire

$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$ pt fixe

Vérifions (i).

$\frac{d}{dt} L(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x[\cancel{-y} - (x^2+y^2)x] + 2y[\cancel{x} - (x^2+y^2)y].$

$= -2L^2$

≤ 0 ok. $6€$ $\exists P^{cc}$

(ii) Sups $L(x(t), y(t)) = $ cte pr $t \in]t_0, t_0+\epsilon[$.

$\frac{d}{dt}$ cte $= -2L^2(x(t), y(t)) = 0$ sur $]t_0, t_0+\epsilon[$.

$x^2(t) + y^2(t_0) = 0 \iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ pt fixe ok.

3) Mq $\forall (x_0, y_0)$, la trajectoire issue de (x_0, y_0) $\exists$ $\forall t \geq 0$ & vérifie

$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

≥ 0

On sait que $(x(t), y(t))$ définie sur $]-T_{min}, T_{max}[$

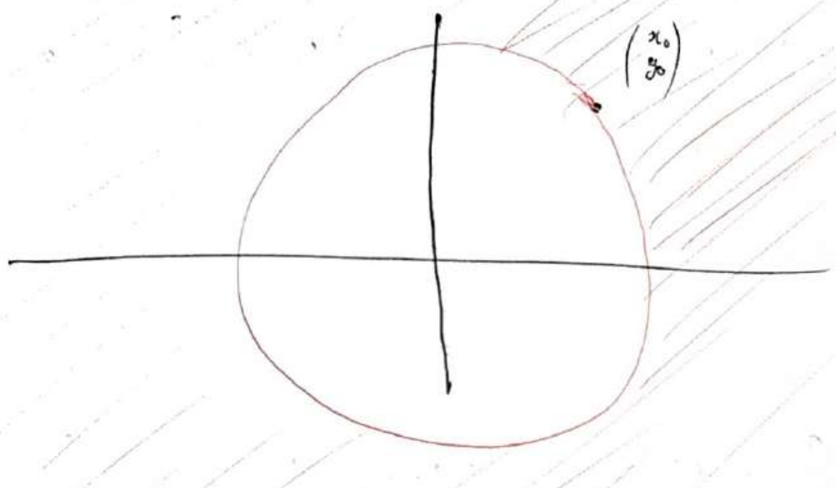
$\left(\begin{array}{l} \text{soit } T_{max} = \infty \\ \text{soit } T_{max} < \infty \quad \lim_{t \to T_{max}} (x^2(t)+y^2(t)) = \infty \end{array} \right)$

Rq $T_{max} = \infty$ $\left(\begin{array}{l} x^2(t) + y^2(t) \leq x_0^2 + y_0^2 \quad \forall t \geq 0. \\ \text{Ceci nie la } 2^e \text{ partie de l'alternative} \end{array} \right)$

Refaire Zuidvalle

Comment conclure ?

Raisonnement qualitatif



On va mq p l'absurde $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \longmapsto \infty$. Niions un peu.

$\exists\, t_n \longrightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \leq x^2(t_0) + y^2(t_0)$

Bolzano-Weierstrass :

$\exists\, (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x(t_{\sigma(n)}) \longrightarrow x^* \\ y(t_{\sigma(n)}) \longrightarrow y^* \end{pmatrix}$

Th si f^{ll} de Lyapunov $\exists$, les val^{rs} d'adhérence d'une trajectoire $\in$ {pts fixes}.

$x^* = y^* = 0$, $0 < \varepsilon \leq \lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{x^2(t_{\sigma(n)}) + y^2(t_{\sigma(n)})}_{=0}$

2^e démo : $t \mapsto L(t) \searrow$ minorée

$\lim\limits_{t \to \infty} L(t) = l \geq 0$.

1er cas : $l = 0$ & on a gagné !

2^e cas : $l > 0$, on cherche une contradic°

$$\frac{dL}{dt} + 2L^2 = 0$$

$$L(t) + 2\int_0^t L^2(s)\, ds = L(0) < \infty.$$

$\left.\int_0^\infty L^2(s)\, ds < \infty \text{ et } \lim\limits_{s \to \infty} L(s) = l > 0\right) \Rightarrow$ contradiction

3° démo : $\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} + 2L^2 = 0 \\ L(0) > 0 \end{cases}$

C- Lipschitz $L(t) > 0$;

$-\dfrac{\dot{L}}{L^2} = 2$; $\dfrac{1}{L(t)} - \dfrac{1}{L(0)} = 2t \to \infty$.

$t \to \infty$, $L(t) \to 0$ cqfd.

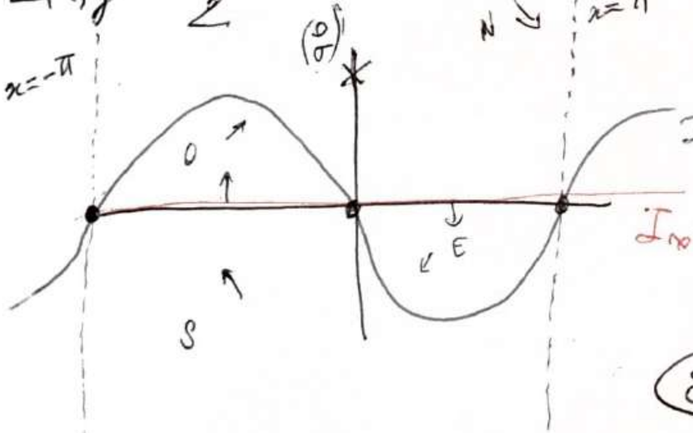
Retour au pendule pesant de frottement :

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky - \sin x \end{cases}$

Hypothèse $0 < k << 1$

Rappel des épisodes :

$L(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + (1 - \cos x)$ fonction de Lyapunov.



$I_0 = \{(x,y) \mid y = \dfrac{-\sin x}{k}\}$.

Symétries . translation horizontale de 2π.

$(x(t), y(t))$ sol° $\Rightarrow (x(t)+2\pi, y(t)+2\pi)$ sol°

$(x(t), y(t))$ sol° $\Rightarrow (-x(t), -y(t))$ sol°

symétrie centrale.

Nature des pts fixes :

$\binom{0}{0}$ $\binom{\pi}{0}$

$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - u \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$

$+\lambda(+\lambda - k) + 1 = 0$ Foyer attractif

$\Delta = k^2 - 4 < 0$

Hyperbolic

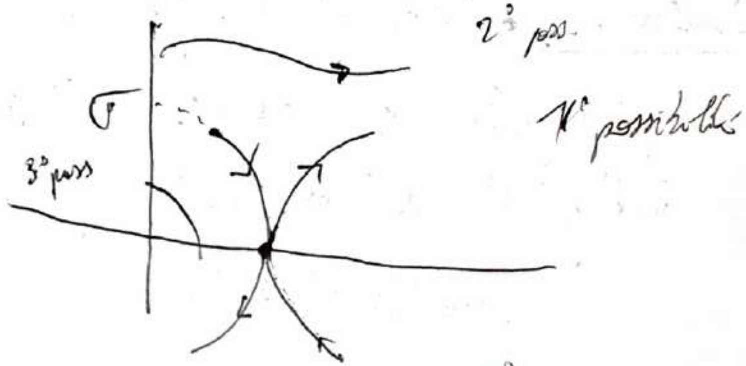
$\binom{\pi}{0}$. $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - u \end{cases}$ car $x = \pi + u$

$\sin x = \sin(\pi + u) \underset{0}{\sim} -u$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$, $\Delta > 0$, $\lambda < 0 < \lambda_2$

col

$$\begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = \sigma \end{pmatrix} \quad N \quad \begin{matrix} x \nearrow \\ y \searrow \end{matrix} \qquad \swarrow \qquad \begin{matrix} x \searrow \\ y \searrow \end{matrix}$$



Scénarios possibles

soit 1) je coupe I_0 en tps fini

2) Je reste captif "à l'est"

$x(t) \to 0$

$y(t) \to 0$

μ ε petit

$y(\varepsilon) < 0$

y continue à décroître

On va suppose σ | $L(0,\sigma) = \frac{\sigma_0^2}{2} + 0$

$= 0 + 2$

$\Rightarrow \sigma_0 = 2$

L'existence de L-Lyapunov

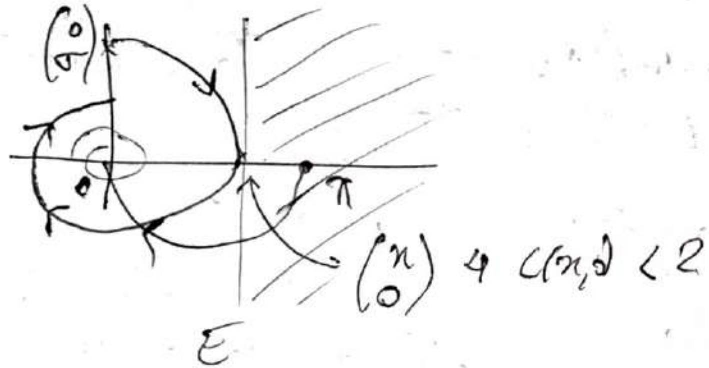
$\Rightarrow$ CV vers $(0,0)$ ici en spirale (Foyer)

Lemme de Gronwall

$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \leq a(t)\, y(t) + b(t)$

alors

Comme L $\searrow$ strictement.



Dem Lemme de Gronwall

$$\frac{d}{dt} \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right) = \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right)(-a(t))$$

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\right] = e^{-\int_0^t a(s)ds}\left[\dot y(t) - a(t)y(t)\right]$$

$$\leq b(t)\, e^{-\int_0^t a(s)\,ds}$$

$$y(t)e^{-\int_0^t a(\sigma)d\sigma} \leq y(0) = \int_0^t b(s)\,e^{-\int_0^s a(\sigma)d\sigma}$$

$$y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t a(s)d\sigma} + \int_0^t b(s)\,e^{\int_s^t a(\sigma)\,d\sigma}$$

Sppns $y(t) \geq 0$ alors $y(t)$ bornée a tt compact de $[0,\infty[$

$$y(t) \leq y(0)\exp\left(\int_0^T a\right) + \int_0^T b\,e^{\int_0^T a} < \infty$$

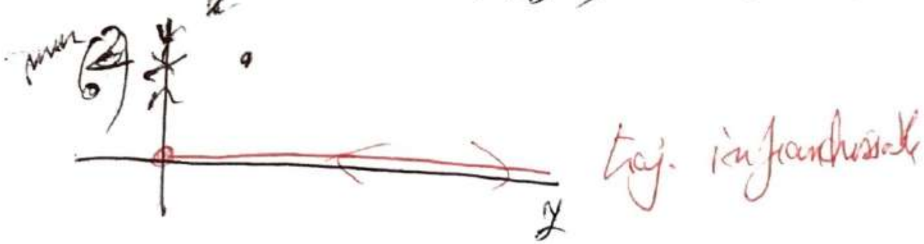
Ⓐ $\begin{cases} \dot x = x - yx - \frac{x^2}{2} & x_0 > 0 \\ \dot y = -y + xy & y_0 > 0 \end{cases}$

Mq on ne pt pas avoir $\begin{matrix} x(t) \to \infty \\ y(t) \to \infty \end{matrix}$ en tps fini.

Etape 1. Mq $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ pct $t \geq 0$

Etape 2 qe d'explos.

Chercher une solu° $(0, y(t)) = (0, e^{-t})$.



Cherchons une solu° de la forme $(x(t), 0)$.

$\dot x = x - \frac{x^2}{2}$ réunion de $(2, 0)$

Tant que je suis ds quadran $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$.

$\begin{cases} \dot{x} \leq x \\ \dot{y} \leq xy + 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x(t) \leq x_0 e^t$ interdit $\lim_{t\to T_{max}^-<\infty} x(t) = \infty$

$\underbrace{x}_{a(t)}\underbrace{y}_{b(t)}$ ⟸ invoquer Lemme de Gronwall

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)e^{-\int_0^t x(s)\,ds}\right] \leq 0$$

$$y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t x(s)\,ds}$$

interdit $\lim_{t\to T_{max}^- <\infty} y(t) = \infty$.

$x_0, y_0 > 0 \longrightarrow x(t) \geq 0,\ y(t) > 0$ $\forall t \in [0,\infty[$

Correctios possibles du DS 1

Ex 1 : $\begin{cases} \dot{x} = x + y - 1 \\ \dot{y} = x + y - e^t - 1. \end{cases}$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\dot{Y} = AY + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1-e^t \end{pmatrix}}_{\text{cont en } t}$

mat à coeff cte

Système h $\Leftrightarrow$: $\dot{Y} = AY$. (H)

Px ce système 2×2, l'ens des solutOs S :

$S = \{$sol° particulière + $S_H\}$

S_H : ens sol° syst h.

$$\underbrace{S_H = \left\{ e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{ev réel de dim 2}}.$$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to S_H$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre e.v.

Un élt + ev de dim 2 = e. affine dim 2.

2) S_H ?

$\boxed{M1}$ Calculer e^{tA}

A de rg 1. 0 vp de A.

$\mathrm{Ker} A = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

2° vp : $\mathrm{Tr} A = 2$

$\mathrm{Ker}(A - 2Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = P^{*} = P^{-1}$

$P\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}$.

$PAP^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$Pe^{tA}P^{-1} = \begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = P^{-1}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P$

$\boxed{M2}$ ① ② S^{ce} syst hom.

$$\begin{cases}\dot{\overline{x+y}} = 2(x+y)\\ \dot{\overline{x-y}} = 0\end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x(t)+y(t) = e^{2t}(x_0+y_0)\\ x(t)-y(t) = x_0+y_0\end{matrix}$$

$x(t) = \frac{1}{2}\left[(e^{2t}+1)x_0 + (e^{2t}+1)y_0\right]$

$y(t) = \frac{1}{2}\left[(e^{t}-1)x_0 + (e^{t}-1)y_0\right] = e^{tA}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$.

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2t}+1 & e^{2t}+1\\ e^{2t}-1 & e^{2t}-1\end{pmatrix}$$

3) S? on veut une solu° particulière. → SE sol évidente → $\boxed{MVC}$

SE $x = e^t$, $y = 1$

MVC

$$e^{tA}\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1-e^t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix} = e^{-tA}\begin{pmatrix}-1\\ -1-e^t\end{pmatrix}.$$

Ex 2 $\begin{cases} \dot{y} = |y+t| - t = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ (P)

(TH) Pb de Cauchy (P)

si $t \mapsto |y+t| - t$ cont

si $y \mapsto |y+t| - t$ lipschitzienne alors $\exists!$

solu° globale, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sol° du pb.

- $t \mapsto f(t,y)$ cont sur $\mathbb{R}$ car une composée & somme de f.
- Vérifions f lipschitz

$$|f(t,y) - f(t,z)| = \big| |y-t| - |z+t| \big|$$

$$\overset{\text{I}}{\leq} |y-z|$$

$y \mapsto f(t,y)$ est 1-lipschitz.

2) Mq $y(t) \equiv y_0$ impossible

$$\dot{y}_0 = 0 = |y_0 + t| - t \quad \forall t$$

$$t = -1, \quad 0 = \underbrace{|y_0 - 1|}_{\geq 0} + 1 > 0$$

3) Calculer la sol°

$$\begin{cases} \dot{y} = |y+t| - t \\ y(0) = \cancel{y_0} = 0 \end{cases}$$

$\underline{t<0}$ $\quad \dot{y} = |y+t| - t \geq 0$

Pour les $t<0$, $t \mapsto y(t) \nearrow$

Vu que $y(0) = 0$, nécessairement $y(t) \leq 0$ pr $t \leq 0$.

$y(t) + t \leq 0$ si $t \leq 0$.

$$\dot{y} = -y - t - t$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^t y\right] = e^t(\dot{y} + y) = -2te^t$$

$$e^t y = -2 \int_0^t s e^s \, ds = 2\int_0^t e^s \, ds - \left[2se^s\right]_0^t$$

$$e^t y(t) = 2\int_0^t e^s \, ds - 2te^t$$

$$= 2e^t - 2te^t - 2.$$

$$\boxed{y(t) = 2 - 2t - 2e^{-t}} \text{ pr } t<0.$$

$t \geq 0$ $\begin{cases} \dot y = |y+t| - t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$t \geq 0$ petit : $y(t) + t = t + o(t) > 0$

$\dot y = y + t - t = y \to y(t) = 0 e^t = 0.$

$t \geq 0$ $y(t) = 0$ solᵒ.

4) Solᵒ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? Pb ell^t en 0.

si $t<0$: $y(t) = 2 - 2t - 2e^{-t} \cdot t$

$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\hookrightarrow y(t) = -t^2 + o(t^2)$, $t<0$

$y(t) = 0 + o(t^2)$, $t<0$

si $\ddot y(0)$ $\exists$ $-1 = 0$ contra.

~~On pose $z = \dot y$~~ ~~$Y = \binom{y}{z}$~~

Ex 3 $\begin{cases} \ddot y = 2y^3 - 2y \\ y(0) = 0 \\ \dot y(0) = 1 \end{cases}$

On pose $z = \dot y$, $Y = \binom{y}{z}$, $\begin{cases} \dot y = z \\ \dot z = 2y^3 - 2y \\ y(0) = 0, \ \dot y(0) = 1. \end{cases}$

Pb de Cauchy associé à un (SD) d'ordre 2 autonome. (dc C^0 en t).

$F(Y) = \begin{pmatrix} z \\ 2y^3 - 2y \end{pmatrix}$ C^1 dc loc lipschitzien.

$\exists$! (TH) AF.

et $\binom{y}{z}$ C^1 déf sur $]-T_{min}, T_{max}[$ ....

2) Mq $y(t)$ impaire. soit $y(t)$ solᵒ de (SD).

$v(t) := -y(-t)$, $v(t)$ solᵒ du m pb de Cauchy (sur $]-T_{max}, T_{min}[$).

Unicité de (C-L), $y(t) = v(t) = -y(-t)$ partout où elle est déf nécessairement $-T_{min} = T_{max}$.

$v(t) = y(t)$ là où elles est déf sur $]-(-), \min(T_{min}, T_{max})[$
$= T_{max}$

3) $\dot{y}^2 = (y^2-1)^2$

$E(t) = \dot{y}^2 - (y^2-1)^2$

$\frac{dE}{dt} = 2\dot{y}\,[\ddot{y} - 2(y^2-1)y]$

$E(t) = E(0) = 1-1=0$

4) $\ddot{z} = 2z^3 - 2z = 2z(z^2-1)$ $\qquad S = \{0,-1,1\}$.

5) Mq $\nexists\, t$ tq $y^2(t) = 1$.

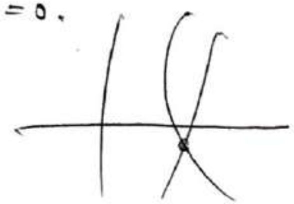
Un raisonnement incorrect.

Syst. Autonome dc les traj. ne se coupent pas sauf si elles st confondues.

$\exists\, t_0 \,/\, y(t_0) = 1 \Rightarrow y(t) \equiv 1$

contredit $y(0) = 0$.

$\left.\begin{array}{l} y(t_0) = 1 \\ \dot{y}(t_0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{l} y(t) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0. \end{array}\right.$



$\dot{y}^2(t) = (y^2(t) - 1)^2$

$y(t_0) = 1 \Rightarrow \dot{y}(t_0) = 0$

$\Rightarrow y(t) = 1$ exclu.

6) $\dot{y}^2 = (y^2-1)^2$, & TVI & 5)

$\Rightarrow \forall t \in \,]-T_{max}, T_{min}[\; : -1 < y(t) < 1$. (*)

$\overset{?}{\Rightarrow} T_{max} = \infty$.

d'après (*),

$\dot{y}^2 = (y^2-1)^2 \leq 4$.

7) $\dot{y}^2 = (y^2-1)^2 > 0$. car $|y| < 1$,

$|\dot{y}| = 1 - y^2$.

On va mq $\dot{y} > 0$.

3) et $|y| < 1 \Rightarrow \dot{y}$ ne pt pas s'annuler $\dot{y}(0) = 1$

8) $\dot{y} = 1 - y^2$.

$1-y$ et $1+y$ ne s'annulent pas.

$$\frac{\dot{y}}{1-y^2} = 1 = \left(\frac{\dot{y}}{1-y} + \frac{\dot{y}}{1+y}\right)\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 2t &= \ln|1+y| - \ln|1-y| \\ &= \ln(1+y) - \ln(1-y) \quad \text{car } -1 < y < 1. \\ &= \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

$$e^{2t} = \frac{1+y(t)}{1-y(t)}$$

$$(1+y(t))e^{2t} = 1+y(t)$$

$$e^{2t} - 1 = y(t)(e^{2t}+1).$$

$$y(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{th} t$$

(Ex)

(1)