Convergence de la méthode de dichotomie

Construction de 3 suites récurrentes

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

— $a_0 = a$, $b_0 = b$,

— $\forall n \geq 0$, $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$,

— si $g(x_n) = 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$,
si $g(a_n)g(x_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$,
si $g(a_n)g(x_n) > 0$ alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Théorème

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$.

Supposons $g(a)g(b) < 0$.

Alors, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers un zéro $\alpha \in]a, b[$ de g.

Démonstration

Cas 1 : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g(x_{n_0}) = 0$.
Dans ce cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang n_0, donc convergente et $\alpha = x_{n_0}$ est bien un zéro de g.
Cas 2 : $g(x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par construction, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Par ailleurs,

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 \text{ ou} \\ \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{et } b_{n+1} - b_n = \begin{cases} 0 \text{ ou} \\ \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0. \end{cases}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée par b et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante minorée par a. Elles sont donc convergentes et ont la même limite car

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Notons α la limite. Comme $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on a également $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
Comme g est continue, $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)g(b_n) = g(\alpha)^2$.
Or, par construction, $g(a_n)g(b_n) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n)g(b_n) \leq 0.$$

D'où $g(\alpha)^2 \leq 0$, soit $g(\alpha) = 0$.