CM M44

I / Le plan cartésien

(D1) On identifie plan à $\mathbb{R}^2$: plan cartésien.

(D2) Un élt du plan cartésien ie un couple de nbrs réels : un point.

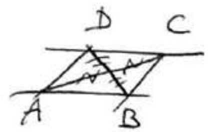
- on nomme un point P, $P := (x,y)$
  on écrit $P(x,y)$.
- pas de sens de multiplier par 2 un point.
- soit $P(x,y)$, on note $\vec{P}$ le vecteur (x,y) de l'EV euclidien $\mathbb{R}^2$: vecteur sous-jacent à P.
- on ne pt pas additionner point, ni multiplier par des scalaires MS opéraθs possibles à vecteurs sous-jacents.

(D6) Un vecteur concret est la donnée couple ordonné de points. Au lieu de noter (A,B) : $\overrightarrow{AB}$.

(D7) Un vecteur abstrait sous-jacent au vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\vec{B}-\vec{A}$.
$\overrightarrow{AB}$ est une réalisaθ de $\vec{u}$ si $\vec{u}$ est le vecteur abstrait sous-jacent à $\overrightarrow{AB}$, ie $\vec{u}=\vec{B}-\vec{A}$.

- Par abus notaθ, on identifie le vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ et son vecteur abstrait sous-jacent. si on écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, on s-entend qu'il s'agit des opéraθs sur les vecteurs abstraits sous-jacents.

(P9) (Règle du parallélogramme) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, on dit que ABCD est un parallélogramme



(DM) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \vec{B}-\vec{A}=\vec{C}-\vec{D}$
$\Leftrightarrow \vec{D}-\vec{A}=\vec{C}-\vec{B}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Rq $\frac{\vec{B}+\vec{D}}{2}=\frac{\vec{A}+\vec{C}}{2}=M$

(P10) (somme de vecteur concrets)
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$: Règle de Chasles.

(DM) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{B}-\vec{A}+\vec{C}-\vec{B}=\overrightarrow{AC}$

(P11) soit Ω le point $(0,0)$.
On a $\overrightarrow{\Omega P}=\vec{P}$ pour tout point P.

(DM) $\overrightarrow{\Omega P}=\vec{P}-\underset{\vec{0}}{\underset{\shortparallel}{\vec{\Omega}}}=\vec{P}$.

(P12) La norme d'un vecteur abstrait (x,y) est
$\|(x,y)\|=\sqrt{\langle (x,y)|(x,y)\rangle}=\sqrt{x^2+y^2}$
où $\langle (x_1,y_1)|(x_2,y_2)\rangle$ est le produit scalaire entre vecteurs abstraits

(D13) La distance AB entre deux points A et B :
est définit par $AB = \| \overrightarrow{AB} \|$.

(D14) La distance entre un point A & un ensemble de points $\mathcal{G}$ est définit par

$$d(A, \mathcal{G}) := \inf_{B \in \mathcal{G}} AB.$$

II / TranslaOs

(D1) Une isométrie T est une applicaO q préserve les distances, ie $T(A)\,T(B) = AB$.

(P2) soit un point A, un vecteur $\vec{u}$. $\exists$ uniq point B tq $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On le note

$$A + \vec{u} = B.$$

DM $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \iff \vec{B} - \vec{A} = \vec{u}$

$\iff \vec{B} = \vec{A} + \vec{u}$.

(Rq) sens à "point" + "vecteur abstrait")

$$\iff \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{\vec{u}} \\ y_A + y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

$\iff B = A + \vec{u}$

De même, $\overrightarrow{(A + \vec{u})} = \vec{A} + \vec{u}$.

(P4) $A + \vec{u} = B \iff \forall P,\ \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$

$\iff \exists P,\ \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$

DM $\overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB} \iff \vec{A} - \cancel{\vec{P}} + \vec{u} = \vec{B} - \cancel{\vec{P}}$

Parbitraire. $\iff \vec{A} + \vec{u} = \vec{B}$

$\iff A + \vec{u} = B$.

(D6) L'applicaO $T_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$ est appelée une translaO par $\vec{u}$.

(P7) On a $T_{\vec{0}} = Id$. (translaO triviale)

$T_{\vec{0}} = A + \vec{0} =: B$

or $\vec{B} = \vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

$\Rightarrow B = A \Rightarrow T_{\vec{0}}(A) = A$. □

(P8) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$.

DM P8 $T_{\vec u}\circ T_{\vec v} = T_{\vec v}\circ T_{\vec u} = T_{\vec u+\vec v}$

soit A un point.

$$T_{\vec u}\circ T_{\vec v}(A) = T_{\vec u}(A+\vec v)$$
$$= (A+\vec v)+\vec u =: B$$

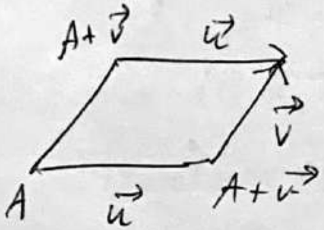
$$\vec B = \overrightarrow{(A+\vec v)+\vec u}$$
$$= \overrightarrow{A+v} + \vec u = \vec A + \vec v + \vec u$$
$$= \vec A + (\vec v+\vec u) = \overrightarrow{A+(\vec v+\vec u)}$$

$$\Longrightarrow B = A + (\vec v+\vec u)$$

et $T_{\vec u}\circ T_{\vec v}(A) = T_{\vec v+\vec u}(A)$ $\quad \vec u+\vec v = \vec v+\vec a$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ||$

$T_{\vec v}\circ T_{\vec u}(A) = T_{\vec u+\vec v}(A)$



$$(A+\vec u)+\vec v = (A+\vec v)+\vec u.$$

P9 Pour $\forall \vec u$ la translaθ $T_{\vec u}$ est une isométrie & $T^{-1}_{\vec u} = T_{-\vec u}$.

DM

→ $T_{\vec u}\circ T_{-\vec u} = T_{\vec u+(-\vec u)} = T_{\vec 0} = Id$.

Donc $T_{\vec u}$ est une bijectθ & inverse $T_{-\vec u}$.

→ $T_{\vec u}(A)T_{\vec u}(B) = \| \overrightarrow{B+u} - \overrightarrow{A+u} \|$

$\| \overrightarrow{T_{\vec u}(A)T_{\vec u}(B)} \|$ $\quad = \| \vec B+\vec u - (\vec A+\vec u) \|$

$\quad = \| \vec{AB} \| = AB \Rightarrow T_{\vec u}$ isométrie.

$T_{\vec u}(A) = A+\vec u$.

P10 si T est une translaθ & $B=T(A)$ alors $T=T_{\vec{AB}}$.

ep si $\exists A$, $T_{\vec u}(A)=T_{\vec v}(A)$ alors $\vec u=\vec v$ ($\Leftrightarrow T_{\vec u}=T_{\vec v}$).

DM soit $T=T_{\vec u}$, on cherche $\vec u$.

$A+\vec u = T(A) = B \Leftrightarrow A+\vec u = B$ par définiθ

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Leftrightarrow \vec u = \vec{AB}$

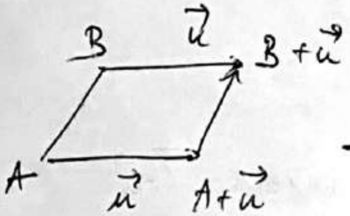
$\quad\quad\quad\quad\quad \Rightarrow T = T_{\vec{AB}}$

$T_{\vec u}(A)=T_{\vec v}(A) := B$. $\quad \vec u = \vec{AB} = \vec v$. ($\Rightarrow T_{\vec u}=T_{\vec v}$)

$T_{\vec u}=T_{\vec v} \Rightarrow \forall A,\ T_{\vec u}(A)=T_{\vec v}(A)$

$\quad\quad \Rightarrow \vec u = \vec v$.

(P11) si T est une applicaø tq $\exists A, B$, $\forall \vec{u}$, $T(A+\vec{v}) = B + \vec{v}$ alors $T = T_{\overrightarrow{AB}}$.



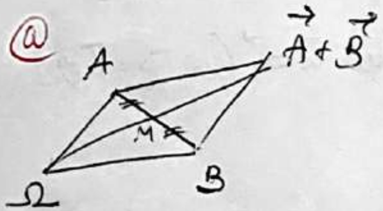
soit P quelconque.

$$\overrightarrow{T(P)} = \overrightarrow{T(A + \overrightarrow{AP})} = \overrightarrow{B + \overrightarrow{AP}}$$
$$= \vec{B} + \vec{P} - \vec{A}$$
$$= \overrightarrow{P + \overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{T_{\overrightarrow{AB}}(P)}$$

(P12) Les translatøs st *affines*, ie si T est une translatø. A & B 2 points, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow T(\lambda A + (1-\lambda) B) = \lambda T(A) + (1-\lambda) T(B).$$

@



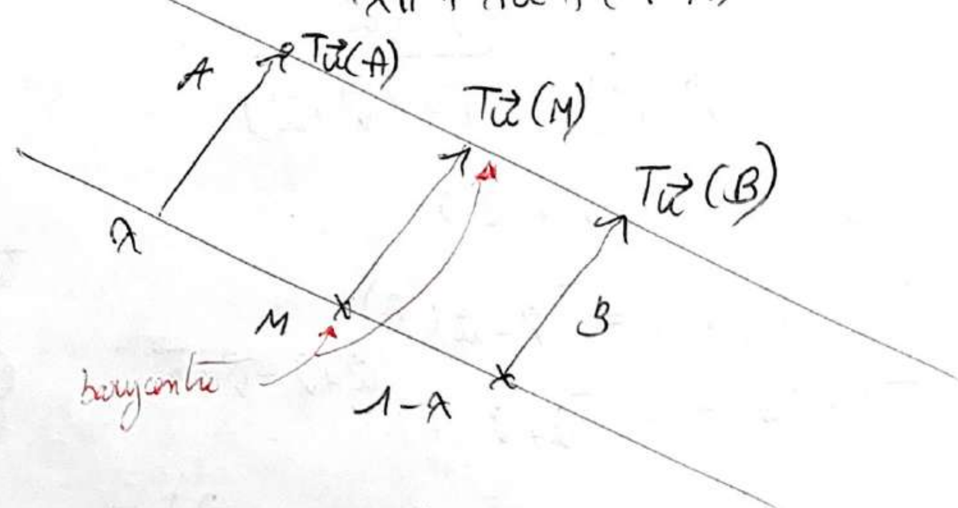
$\dfrac{A+B}{2}$ est le milieu de $[AB]$ a un sens.

$$T = T_{\vec{u}} = T(\lambda A + (1-\lambda) B)$$
$$= \lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda) T_{\vec{u}}(B)$$

points coïncident?

Mq vecteurs sous-jacents coïncident.

$$\overrightarrow{T(\lambda A + (1-\lambda) B)} \overset{?}{=} \overrightarrow{\lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda) T(B)}$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{\lambda A + (1-\lambda) B + \vec{u}} = \lambda\, \overrightarrow{(A + \vec{u})} + (1-\lambda)\, \overrightarrow{(B + \vec{u})}$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{\lambda A + (1-\lambda) B + \vec{u}} = \lambda \vec{A} + (1-\lambda) \vec{B} + \vec{u}$$
$$\shortparallel$$
$$\lambda \vec{A} + \lambda \vec{u} + (1-\lambda) \vec{B} + (1-\lambda) \vec{u}.$$



III / Repères affines

(D1) Un repère (affine) et $(O, \vec{u}, \vec{v})$, O un points, $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs abstrait indépendants. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D2) Un repère (affine) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D3) Le triplet $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ où $\Omega(0,0)$ $\vec{e_1}(1,0)$ et $\vec{e_2}(0,1)$ est le repère canoniq. (il est orthonormé).

(P5) si $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère ; l'applica° $(x,y) \longmapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijec° (isomorphisme affine) de $\mathbb{R}^2$ ds plan cartésien.
Si on + repère orthon. $\Rightarrow$ isométrie.

DM $(x,y) \longmapsto x\vec{u} + y\vec{v}$.
$\vec{\mathbb{R}} \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}$ bijec° linéaire

isométrie ssi $(\vec{u}, \vec{v})$ BON.

$\vec{w} \xmapsto{\mathcal{B}} O + \vec{w}$
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
(plan euclidien) (plan cartésien)

$(x,y) \xleftrightarrow{\mathcal{A}} \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}} \xrightarrow{\mathcal{B}} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$

isomorphisme mq

$\mathcal{B}$: isomorphisme isométrie

on va dmq $\vec{w} \longrightarrow O + \vec{w}$ est 1 bijec° isométriq.
- c'est injectif : $O + \vec{w_1} = O + \vec{w_2}$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{O} + \vec{w_1} = \vec{O} + \vec{w_2}$$
$$\vec{w_1} \Updownarrow \vec{w_2} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ injective.}$$
- c'est surjectif : $\forall A$ on a :
$$A = O + \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{w}} \Rightarrow A \in \mathrm{Im}\,\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ surjective.}$$
$$(O+w_1)(O+w_2) = \| \overrightarrow{O + w_2} - \overrightarrow{O + w_1} \|$$
$$= \| \vec{O} + \vec{w_2} - \vec{O} - \vec{w_1} \| = \| \vec{w_2} - \vec{w_1} \| \Rightarrow \mathcal{B} \text{ est 1 isométrie}$$

(R9) si $\Omega = (0,0)$ | $\vec{u} = \vec{e_1}\ (1,0)$
| $\vec{v} = \vec{e_2}\ (0,1)$

alors $P(x,y)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow P = \Omega + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x,y)$

(P7) soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ et notons $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base sous-jacente.
Alors pr tt point $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}(x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}})_{\mathcal{B}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_P + x_w, y_P + y_w)_{\mathcal{R}}.$$

DM
$$P + \vec{w} = (O + x_P\vec{u} + y_P\vec{v}) + (x_w\vec{u} + y_w\vec{v})$$
$$= O + (x_P + x_w)\vec{u} + (y_P + y_w)\vec{v}$$
$$= (x_P + x_w, y_P + y_w)_{\mathcal{R}}.$$

coord P ds repère + coord w ds base $\Rightarrow$ coord P+w ds repère.

III / Repères affines

(D1) Un repère (affine) est $(O, \vec{u}, \vec{v})$, O un points, $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs abstrait indépendants. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D2) Un repère (affine) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D3) Le triplet $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ où $\Omega(0,0)$ $\vec{e_1}(1,0)$ et $\vec{e_2}(0,1)$ est le repère canoniq. (il est orthonormé).

(P5) si $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère ; l'applicaθ $(x,y) \longmapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijecθ (isomorphisme affine) de $\mathbb{R}^2$ ds plan cartésien.
Si on + repère orthor. $\Rightarrow$ isométrie.

DM $(x,y) \longmapsto x\vec{u} + y\vec{v}$.

$\vec{\mathbb{R}} \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}$ bijecθ linéaire

isométrie ssi $(\vec{u}, \vec{v})$ BON.

$$\vec{w} \xmapsto{\mathcal{B}} O + \vec{w}$$

$$\underset{\text{(plan euclidien)}}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{\text{(plan cartésien)}}{\mathbb{R}^2}$$

$$(x,y) \xmapsto[\text{isomorphisme}]{A} \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}} \xmapsto[\text{mq}]{B} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$$

B : isomorphisme isométrie

on va dmq $\vec{w} \longrightarrow O + \vec{w}$ est 1 bijecθ isométriq.

- c'est injectif : $O + \vec{w_1} = O + \vec{w_2}$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{O} + \vec{w_1} = \vec{O} + \vec{w_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{w_1} = \vec{w_2} \Rightarrow B \text{ injective.}$$

- c'est surjectif : $\forall A$ on a :

$$A = O + \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{w}} \Rightarrow A \in \text{Im } B \Rightarrow B \text{ surjective.}$$

$$(O+w_1)(O+w_2) = \| \overrightarrow{O + w_2} - \overrightarrow{O + w_1} \|$$

(5) $= \| \vec{O} + \vec{w_2} - \vec{O} - \vec{w_1} \| = \| \vec{w_2} - \vec{w_1} \| \Rightarrow B$ est 1 isométrie

(R9) si $\Omega = (0,0)$ $\Big|$ $\vec{u} = \vec{e_1}\,(1,0)$, $\vec{v} = \vec{e_2}\,(0,1)$

alors $P(x,y)_{\mathcal{C}} \iff P = \Omega + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x,y)$

(P7) soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ et notons $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base sous-jacente.

Alors pr tt point $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}\,(x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}})_{\mathcal{B}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_P + x_w,\ y_P + y_w)_{\mathcal{R}}.$$

DM $P + \vec{w} = (O + x_P\vec{u} + y_P\vec{v}) + (x_w\vec{u} + y_w\vec{v})$

$= O + (x_P + x_w)\vec{u} + (y_P + y_w)\vec{v}$

$= (x_P + x_w,\ y_P + y_w)_{\mathcal{R}}$.

coord P du repère + coord w ds base $\Rightarrow$ coord P+w ds repère.

§ 4 : Barycentre

(D1) $w_1, \dots, w_n$ nbs ≥ 0 forment un système de poids si $w_1 + \dots + w_n \neq 0$.

Puis $w := w_1 + \dots + w_k$: poids total.

(D2) sdp $w_1, \dots, w_n$ est normalisé si poids total $= 1$.

$\leftarrow A \rightarrow$ pr $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}$ et $\overline{w_i} = \frac{w_i}{w}$

(D3) n points $A_1, \dots, A_n$; $w_1, \dots, w_n$,

Barycentre de $(A_1, \dots, A_n)$ et poids $(w_1 : \dots : w_n)$

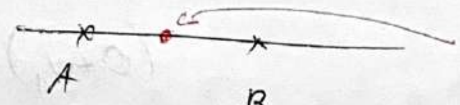
uniq point G, $\vec{G} = \frac{1}{w} \sum w_i \vec{A_i}$.

on note $\sum \overline{w_i} A_i := G$ ce barycentre.

$(w_1 : \dots : w_n)$ la classe d'équivalence de $(w_1, \dots, w_n)$ par $\xleftrightarrow{R}$ équivce

$(w_1, \dots, w_n) \sim (w_1', \dots, w_n') \iff \exists \lambda \neq 0,\ (w_1, \dots, w_n) = \lambda(w_1', \dots, w_n')$

$\iff (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}) = (\overline{w_1'}, \dots, \overline{w_n'})$



$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B =$ Barycentre de A, B avec poids $(1,1)$

(P4) $A_1, \dots, A_n, \dots$

$$G = \sum \overline{w_i} A_i \Leftrightarrow \forall P, \, w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}$$

$$\Leftrightarrow \exists P, \, w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}.$$

P, w_1, A_1, G, w, A_n, w_n

DM $w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}$

$$\Leftrightarrow w(\vec{G}-\vec{P}) = \sum w_i (A_i - \vec{P}) = \sum w_i A_i - (\sum w_i)\vec{P}$$

$\overset{\shortparallel}{w}$

$$\Leftrightarrow w\vec{G} = \sum w_i \overrightarrow{A_i}$$

$\div w$

$$\Leftrightarrow \vec{G} = \sum \overline{w_i} \vec{A_i} \quad \Rightarrow \exists P \Rightarrow \forall P$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G} = \sum \overline{w_i} \, \overrightarrow{\Omega A_i} \quad \text{(ne d'pd pas posiO } \mathcal{O}\text{)}.$$

(P6) si $w_1, \dots, w_n$ n'est pas sdp ie

$$w_1 + \dots + w_n = 0 \Rightarrow \forall P, \sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i \vec{A_i}$$

DM $\sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i (\vec{A_i} - \vec{P})$

$$= \sum w_i A_i - (\sum w_i)\vec{P} = \sum w_i A_i.$$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$$\Rightarrow \sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i} \text{ ssi } \sum w_i = 0.$$

(D7) on note $\sum w_i A_i := \sum w_i \vec{A_i}$.

(R8) $(1)B + (-1)A = B - A = \vec{B} - \vec{A} = \overrightarrow{AB}$.

⚠ $2B$ n'a pas de sens : dépend posiO $\mathcal{O}$

mais $\underbrace{2B - A \text{ est un point}}_{}$. $2B - 2A$ est vecteur.

$\sum \text{coeff} = 1$.

→ si besoin normaliser la somme des poids.

(D11) si (w_i) (sdp) notaO abusive :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

(D12) Un point pondéré est donné (A, w) par vect${}^{\text{e}}$ $\vec{u}$:

$$(A + w) + \vec{u} = \left(A + \frac{1}{w}\vec{u}, w\right) \quad \text{si } w \neq 0$$

▷ $\frac{A+B}{2} + \vec{u} = A + B$. ▷ $(A, 2) = \text{"}2A\text{"}$

▷ $(A, 2) + \vec{u} = \text{"}2A + \vec{u}\text{"} = 2(A + \frac{1}{2}\vec{u}) = (A + \frac{1}{2}\vec{u}, 2)$

(D13) Somme (A_i, w_i) points pondérés.

$$\sum (A_i, w_i) = \begin{cases} (\sum w_i A_i, \sum w_i) & \text{si } \sum w_i \neq 0 \\ \sum w_i A_i & \text{si } \sum w_i = 0 \end{cases}$$

$(M, 2)$, $(A, 1)$, $(B, 1)$

$$(A, 1) + (B, 1) = \left(\frac{A+B}{2}, 2\right)$$

$\overset{\shortparallel}{M}$ ← point pondéré

• $(A, -1) + (B, 1) = B - A = \overrightarrow{AB}$ → $\sum$ poids : 0 vecteur.

(P14) $(A, 0) = \vec{0}$.

$$(A, 0) = \sum 0 \vec{A} = \vec{0}.$$

(P15) si $A_1 = \dots = A_n = A \Rightarrow \sum (A_i, w_i) = (A, \sum w_i)$

P15 $\sum (A_i, w_i) = ?$ $\quad (A_i = A)$

▶ si $\sum w_i \neq 0$, $\quad \sum A_i w_i = (\sum \overline{w_i} A_i, w) = (A, w)$ car ⊛

⊛ $\overrightarrow{\sum \overline{w_i} A_i} = \sum \overline{w_i} \overrightarrow{A_i} = (\sum \overline{w_i}) \vec{A}$, $\quad \sum \overline{w_i} = 1$

▶ si $\sum w_i = 0$, $\quad \sum (A_i w_i) \overset{\text{def}}{=} \sum w_i \overrightarrow{A_i} = (\sum w_i) \vec{A}$.

ici on ne pt pas normaliser car $\sum w_i = 0$

$= (\sum w_i) \vec{A} = \vec{0} = (A, 0)$, $\quad \sum w_i = 0$, $\quad 0 = w$

(P17) Somme poids pondérés & associative,

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i, w_i) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i)\right) + \left(\sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i)\right)$$

pr $k = \{1, \dots, n\}$.

DM

• 1° cas : $\sum_i^n w_i = w_1^n \neq 0$, $\sum_i^{n-1} w_i = w_1^{k-1} \neq 0$, $\sum_k^n w_i = w_k^n \neq 0$

Rq : $\sum_1^n w_i = \sum_1^{k-1} w_i + \sum_k^n w_i$.

$$▲ = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i)$$

$$▲ = \left(\sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1}\right) + \left(\sum \frac{w_i}{w_k^n} A_i, w_k^n\right)$$

$$▲ = \left(\frac{w_1^{k-1}}{w_1^n} \sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \frac{w_k^n}{w_1^n} \sum_k^n \frac{w_i}{w_k^n} A_i, w_1^n\right)$$

calcul de coordonnées :

$$▲ = \left(\sum_1^n \frac{w_i}{w_1^n} A_i, w_1^n\right) = \sum_1^n (A_i, w_i)$$

on normalise poids par poids total !

• 2° cas : $w_1^n \neq 0$, $w_1^{k-1} \neq 0$, $w_k^n = 0$ (resp si $- = 0$, si $- = 0$).

$$▲▲ = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i) = \sum \left(\frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1}\right) + \sum w_i \overrightarrow{A_i}$$

$$▲▲ = \left(\sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum_k^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \overrightarrow{A_i}, w_1^{k-1}\right)$$

car $\overrightarrow{\sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \overrightarrow{A_i}} = •$

$$• = \sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \overrightarrow{A_i} + \sum_k^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i = \sum_1^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \overrightarrow{A_i} = \overrightarrow{\sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i}$$

$$▲▲ = \left(\sum_1^n \frac{w_i}{w_1^n} A_i, w_1^n\right)$$

• 3° cas : $\omega_1^n = 0,\ \omega_1^{k-1} = 0,\ \omega_k^n = 0$

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \sum_1^{k-1} (A_i, \omega_i) + \sum_k^n (A_i, \omega_i)$$

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \sum_1^{k-1} \omega_i \overrightarrow{A_i} + \sum_k^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_1^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_1^n (A_i, \omega_i)$$

• 4° cas : $\omega_n^n = 0,\ \omega_1^{k-1} \neq 0 \ (\Rightarrow \omega_k^{k-1} = -\omega_1^{k-1} \neq 0)$

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \sum_1^{k-1} (A_i, \omega_i) + \sum_k^n (A_i, \omega_i)$$

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \left(\sum_1^{k-1} \frac{\omega_i}{\omega_1^{k-1}} A_i,\ \omega_1^{k-1} \right) + \left(\sum_k^n \frac{\omega_i}{\omega_k^n} A_i,\ \omega_k^n \right)$$

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \omega_1^k \overrightarrow{\sum_1^{k-1} \frac{\omega_i}{\omega_1^{k-1}} A_i} + \omega_k^n \overrightarrow{\sum_k^n \frac{\omega_i}{\omega_k^n} A_i}$$

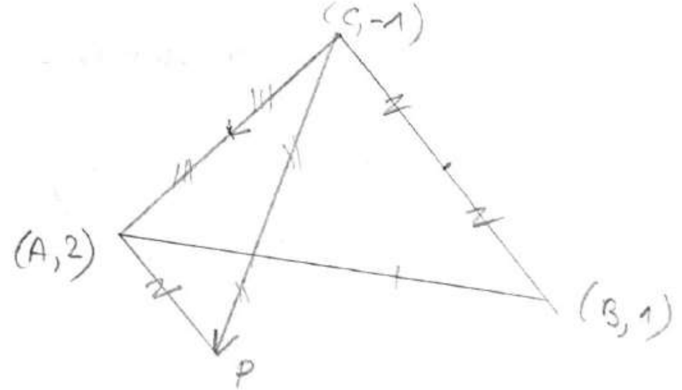
$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle = \sum_1^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_i (A_i, \omega_i)$$ somme pondérée

---

@ $\underbrace{(A,2)}_{\text{p. pondéré}} + \underbrace{(B,1) + (C,-1)}_{\text{vecteur } \overrightarrow{CB}} = \underbrace{P}_{\text{pt pond}}$

$= \underbrace{(A,2) + (B,1)}_{\text{p. pondéré}} + \underbrace{(C,-1)}_{\text{p. pond}} = P$

$= \underbrace{(A,1) + (B,1)}_{\left(\frac{A+B}{2},\, 2\right)} + \underbrace{(A,1) + (C,-1)}_{\overrightarrow{CA}} = P$



P18 Soit A, B, C pts non alignés, ∀ tt pt P ∃ uniq triplet de poids normalisés (α, β, γ) tq

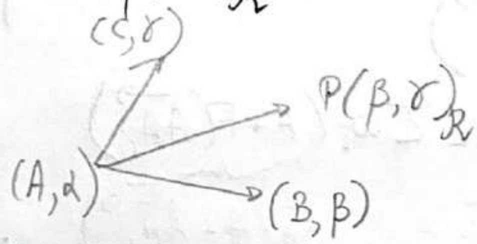
$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

DM $\alpha + \beta + \gamma = 1 \iff \alpha = 1 - \beta - \gamma$

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C \iff P = (1 - \beta - \gamma) A + \beta B + \gamma C.$

$\iff P = A + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

$\iff P = (\beta, \gamma)_{\mathcal{R}}$. $\quad \rightarrow \mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

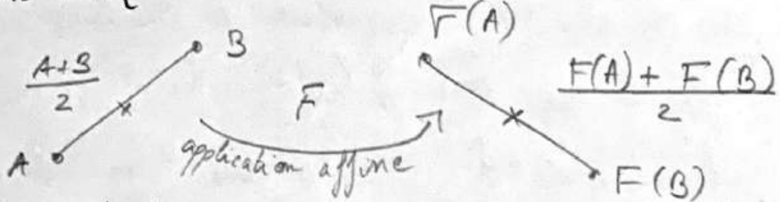


D'après ∃ & unicité des coord de $\mathcal{R}$

⇒ ∃ & ∃! de (α, β, γ).

D19 A, B, C PNA (A, B, C) est repère barycentriq & poids normalisés $(\alpha : \beta : \gamma)$ st les coordonnées barycentriqs de P ds cette base.

(D20) Une applicat° F est affine si elle préserve les barycentres : ie $F(\sum w_i A_i) = \sum w_i F(A_i)$ si $\sum w_i = 1$.



ici poids $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ mais vrai $\forall$ poids

(P21) si F (AL), appli $F_A : A+\vec{u} \longmapsto A + F(\vec{u})$ est affine. On dit que F_A est "F de centre A".

DM

$F_A(A+\vec{u}) = A + F(\vec{u})$

$F_A(\sum w_i A_i) = F_A(A + \sum w_i \overrightarrow{AA_i})$

$= A + F(\sum w_i \overrightarrow{AA_i})$

$= A + \sum w_i F(\overrightarrow{AA_i}) = \sum w_i \underbrace{(A + F(\overrightarrow{AA_i}))}_{F_A(A+\overrightarrow{AA_i}) \,=\, F_A(A_i)}$

$\Rightarrow F_A(\sum w_i A_i) =$ barycentre.

sortir somme : appli affine
sortir coeff : appli linéaire.

(P22) Une appli F est affine (ssi) $F(\lambda A + (1-\lambda) B) = \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B)$ pr ts pts A et B, $\lambda \in \mathbb{R}$.

DM Par récurrence.

$\Longrightarrow$ F affine $\Rightarrow F(\lambda A + (1-\lambda) B) \overset{def}{=} \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B)$

$\Longleftarrow$ H_k : "$F(\sum_i^k w_i A_i) = \sum_i^k w_i F(A_i)$ si $\sum w_i = 1$"

H_2 : $\boxed{\checkmark}$

On suppose H_k réalisée. on va dmq H_{k+1} soit $w_1, \dots, w_{k+1}$ tq $w_1 + \dots + w_k = 1$.

Sans généralités, on pt supposer $w_2 + \dots + w_{k+1} \neq 0$.

$F(w_1 A_1 + \dots + w_k A_{k+1}) = F(w_1 A_1 + (1-w_1) \times \left(\frac{w_2}{w_2^{k-1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1}\right)$

$= w_1 F(A_1) + (1-w_1) F\left(\underbrace{\frac{w_2}{w_2^{k-1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1}}_{k \text{ points}}\right)$

$\overset{HDR}{=} w_1 F(A_1) + (1-w_1) \left[\frac{w_2}{w_2^{k-1}} F(A_2) + \dots + \right]$

$= w_1 F(A_1) + w_2 F(A_2) + \dots$

§ 5 : Homothéties

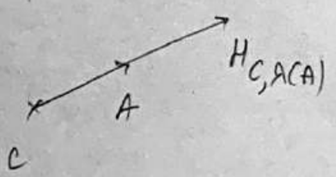
(D1) Une similitude H de rapport λ est applicat° q multiplie les distces par λ :
ie $T(A)\,T(B) = \lambda \cdot AB$ pr 2 pts A, B.
On dit que c'est λ-similitude.

(P2) Une 0-similitude est appli cte et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par def
0-similitude : $\forall A,B : T(A)T(B) = 0AB$
$T(A) = T(B)$.

(D3) soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$H_{C,\lambda} : A \mapsto C + \lambda \overrightarrow{CA}$ est appelée homothétie de centre C et de rapport λ.

[R9] H_λ est une (h) vectorielle si $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



(P4) $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$.

(P5) $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2}(B) = H_{C,\lambda_2}(C + \lambda_2 \overrightarrow{CB})$

(P6) $H_{C,1}(B) = C + 1 \times \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{CB} = B$.
$\Rightarrow H_{C,1} = Id \Rightarrow H_{C,1} = H_{C,1}$

(P7) Les homothéties de rapport non nul st des bijectº &
$$H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,1/\lambda}$$

(P8) $\boxed{H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}}$

$H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda \vec{u}$.

§ 5 : Homothéties

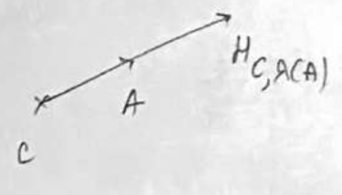
(D1) Une similitude H de rapport λ est applicat° q multiplie les distces par λ :
ie $T(A)\,T(B) = \lambda \cdot AB$ pr 2 pts A, B.
On dit que c'est λ-similitude.

(P2) Une 0-similitude est appli cte et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par def
0-similitude : $\forall A, B : T(A)T(B) = 0 AB$
$T(A) = T(B)$.

(D3) soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$H_{C,\lambda} : A \mapsto C + \lambda \overrightarrow{CA}$ est appelée homothétie de centre C et de rapport λ.

[R9] H_λ est une (h) vectorielle si $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



(P4) $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$.

(P5) $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2}(B) = H_{C,\lambda_2}(C + \lambda_2 \overrightarrow{CB})$

(P6) $H_{C,1}(B) = C + 1 \times \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{CB} = B$.

$\Rightarrow H_{C,1} = Id \Rightarrow H_{C,1} = H_{C,1}$

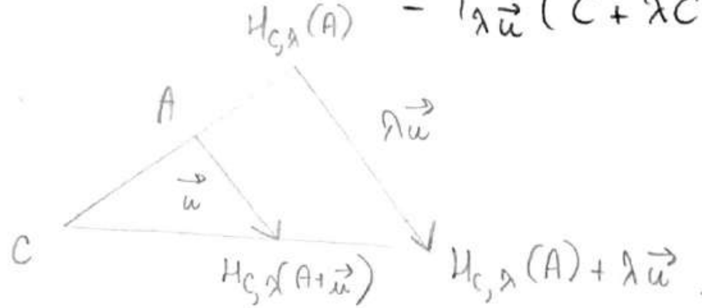
(P7) Les homothéties de rapport non nul st des biject° &

$$H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,1/\lambda}$$

(P8) $\boxed{H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}}$ Thalès.

$H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda \vec{u}$.

DM $H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}}(A) = H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(C + \overrightarrow{CA} + \vec{u}) =$
$= C + \lambda(\overrightarrow{CA} + \vec{u}) = C + \lambda \overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}$
$= T_{\lambda\vec{u}}(C + \lambda \overrightarrow{CA}) = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}(A)$.



(D9) Une ho de rapport -1 est symétrie centrale
& notée $S_C = H_{C,-1}$.

(P10) Une ho $H_{C,\lambda}$ est une $|\lambda|$-similitude

ie $H_{C,\lambda}(A) \cdot H_{C,\lambda}(B) = |\lambda| \, AB$

cf une ho & isom ssi $\lambda = \pm 1$, ainsi les symboles st seules ho non triviales q st isométries.

DM
$$\overrightarrow{H_{C,\lambda}(A)\,H_{C,\lambda}(B)} = (C + \lambda\overrightarrow{CB}) - (C + \lambda\overrightarrow{CA}) = \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$H_{C,\lambda}(A)H_{C,\lambda}(B) = |\lambda| \; AB.$$

(P11) Toute similitude est la composition d'une isométrie & d'une ho.

DM
- T est 0-similitude ($\Leftrightarrow T(A) = B \leftarrow$ cte)
  $T = H_{B,0} \circ Id \leftarrow$ isométrie
- T est 1-similitude $\Leftrightarrow$ T est une isométrie.
  $T = Id \circ T = H_{C,1} \circ T \leftarrow$ isométrie.
- cq $\lambda \notin \{0,1\}$, T est λ similitude
  $T = H_{C,\lambda} \circ H_{C,1/\lambda} \circ T$
  $H_{C,\frac{1}{\lambda}} \circ T(A) \cdot H_{C,\frac{1}{\lambda}} \circ T(B) = \frac{1}{\lambda}\, T(A)\,T(B) = \frac{1}{\lambda}\lambda AB = AB.$

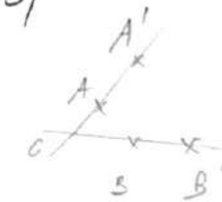
(P12) Le centre ho non trivial est son uniq pt fixe,
ie H est une ho non triviale et $H(C) = C$
alors C est Ω de ho.

DM $H_{C,\lambda}(A) = A$, $(\lambda \neq 1)$ $\lambda = 0$ trivial d'après (P10).
$$\overrightarrow{H_{C,\lambda}(C)\,H_{C,\lambda}(A)} = \lambda\,\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow A = C$$

(P13) si $\lambda \neq 1$, $A \neq C$ et $H_{C,\lambda}(A) = B \Rightarrow C \in (AB)$.

DM $H_{C,\lambda}(A) = B \Leftrightarrow C + \lambda\overrightarrow{CA} = B \Leftrightarrow (1-\lambda)C + \lambda A = B$
$\Leftrightarrow (1-\lambda \neq 0) \Leftrightarrow C = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda}A + \dfrac{1}{1-\lambda}B$
(!) car $\sum$ coeff $= 1$.
$\Leftrightarrow C \in (AB)$

[R1] si $H_{C,\lambda}(A) = A'$, $H_{C,\lambda}(B) = B'$
$(AA') \neq (BB') \Rightarrow C = (AA') \cap (BB')$



(P14) si $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2} \Leftrightarrow$ si $\lambda_1 = \lambda_2$ et $C_1 = C_2$.

DM $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2} \Rightarrow C_1$ et C_2 pts fixes de cette ho $\Rightarrow C_1 = C_2$.
$H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2}$ $\left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ cte $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$.
$$Id = H_{C,\frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{C,\lambda_1} = H_{C,\frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{C,\lambda_2} = H_{C,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

(P15) Les (h) st affines.

DM $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est linéaire.

$H_{C,\lambda}(C+\vec{u}) = C + \lambda\vec{u} = C + H_\lambda(\vec{u})$

§ 6 : Droites

(D1) soit A, $\vec{u} \neq 0$, l'ens $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$:

$\mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \{A + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une droite (affine)

(P2) L'appli $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} = T_{\lambda\vec{u}}(A)$ est une bijecti de $\mathbb{R}$ ds $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ appelée paramétrisat affine.

DM $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u}$ est surjective p définit.

soit $A + \lambda_1\vec{u} = A + \lambda_2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{A} + \lambda_1\vec{u} = \vec{A} + \lambda_2\vec{u}$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ injective.

(D3) Pr 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ & $\vec{v}$, on note $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (ssi) $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ $(\lambda \neq 0)$. On note $\vec{u} : \vec{v} := \lambda$

(P4) si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$.

DM $\mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{A + t\lambda\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{A + s\vec{v} \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{D}_{A,\vec{v}}$.

$\Rightarrow \vec{v}$ directeur aussi.

(P5) soit $A \neq B$ d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

DM $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{O,\vec{u}}$, $A, B \in \mathcal{D}_{O,\vec{u}}$. $\boxed{Mq}$ $(AB) \parallel \mathcal{D}_{O,\vec{u}}$

$\begin{matrix} A = O + \lambda\vec{u} \\ B = O + \mu\vec{u} \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\mu - \lambda)\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}$.

$(A \neq B \Rightarrow \lambda \neq \mu \Rightarrow \mu - \lambda \neq 0)$.

(P6) $\mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \mathcal{D}_{B,\vec{v}}$ (ssi) $\vec{u} \parallel \vec{v}$ et $B \in \mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ (et/ou $A \in \mathcal{D}_{B,\vec{v}}$)

Ainsi si u est vecteur directeur d'une droite, l'ens vecteurs de m̂ droite est $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

DM $B \in \mathcal{D}_{A,\vec{u}}$, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $B = A + \lambda\vec{u}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\lambda\vec{u}} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{B + (t-\lambda)\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + s\vec{u} \mid s \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{D}_{B,\vec{u}} = \mathcal{D}_{B,\vec{v}}$. prop 4.

$\boxed{\Leftarrow}$

$\mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \mathcal{D}_{B,\vec{v}} \Rightarrow B \underset{\text{def}}{\in} \mathcal{D}_{B,\vec{v}} = \mathcal{D}_{A,\vec{u}}$.

soit $M \neq N \in \mathcal{D}_{A,\vec{u}} = \mathcal{D}_{B,\vec{v}}$.

$\Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{MN} \parallel \vec{u} \\ \overrightarrow{MN} \parallel \vec{v} \end{matrix} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

(P7) si une droite contient une autre alors les 2 droites coïncident.

DM $D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$ soit $M \neq N \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$.
$\Rightarrow \vec{u} \parallel \overrightarrow{MN} \parallel \vec{v}$.

$A \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$ $\underline{+\text{ prop 6.}}$ $\Rightarrow D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$.

(P8) $\vec{u}$, D alors $\forall A$, on a $D = D_{A,\vec{u}}$.
cf si $A \neq B \in D$ alors $D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$.

(P9) Par 2 points passe une uniq droite.
cf si $\#(D_1 \cap D_2) > 1$ alors $D_1 = D_2$.

DM $A \neq B \in D \Rightarrow D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$ uniq.
$\#(D_1 \cap D_2) > 1 \Rightarrow \exists A \neq B \in D_1 = D_{A,\overrightarrow{AB}}$.
$\in D_2$
ens := nbr élts ens.

(D10) L'uniq droite passant par 2 points distincts $A \neq B$ est noté (AB).

(P11) soit $A \neq B$ 2 pts distincts d'une droite D, alors D est l'ens des barycentres de A et B.

DM $M \in (AB) \Longleftrightarrow M \in D_{A,\overrightarrow{AB}} \Longleftrightarrow M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Longleftrightarrow \underline{M = (1-\lambda) A + \lambda B}$

(P12) $\lambda \mapsto (1-\lambda) A + \lambda B$ est une bijecθ de $\mathbb{R}$ ds (AB) appelée paramétrisaθ barycentriq.

DM $\lambda \mapsto (1-\lambda) A + \lambda B = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ (bijcθ d'après 2).

(P13) L'image d'une droite p une applicaθ affine est une droite

DM T affine. $T((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)\, T(A) + \lambda\, T(B)$
$T((AB)) = \{ (1-\lambda) T(A) + \lambda T(B) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
et $\begin{cases} \text{si } T(A) \neq T(B) & ; \ ((T(A)\ T(B)) \\ \text{si } T(A) = T(B) & ; \ \{ T(A) \} \end{cases}$ barycentre lui-m

(D14) 2 droites st $\parallel$ si elles possèdent vecteurs directeur en commun (tous).

(R) $D_1 \parallel D_2$: relaθ équivalence | classes équivalences : direcθs
ens direcθs : espace projectif de dim 1.

(P16) $T_{\vec v}(\mathcal{D}_{A,\vec u}) = \mathcal{D}_{T_{\vec v}(A),\vec u}$

DM $T_{\vec v}(A+\lambda\vec u) = A+\lambda\vec u+\vec v = (A+\vec v)+\lambda\vec u$.

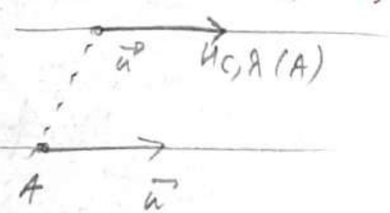
$T_{\vec v}(\{A+\lambda\vec u \mid \lambda\in\mathbb{R}\}) = \{(A+\vec v)+\lambda\vec u \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$
$= \mathcal{D}_{A+\vec v,\vec u}$.

Rq Une droite est invariante p une translaθ $T_{\vec v}$ $\iff$ $\vec v$ est vecteur direct^r de droite.

$\mathcal{D}_{A+\vec v,\vec u} = \mathcal{D}_{A,\vec u} \iff \underbrace{A+\vec v}_{=B} \in \mathcal{D}_{A,\vec u}$

$\vec v \parallel \vec u \iff \vec{AB} = \vec v$: direct^r de $\mathcal{D}_{A,\vec u}$

(P17) $H_{C,\lambda}(\mathcal{D}_{A,\vec u}) = \mathcal{D}_{H_{C,\lambda}(A),\vec u}$



DM $H_{C,\lambda}(\{A+t\vec u\}) = \{H_{C,\lambda}(A+t\vec u)\}$
$= \{H_{C,\lambda}(A) + \lambda t\vec u\}$
$= \mathcal{D}_{H_{C,\lambda}(A),\lambda\vec u} = \mathcal{D}_{H_{C,\lambda}(A),\vec u}$.

cf L'image non nulle p hθ d'une droite est une droite //. Thalès

$\mathcal{D}_{A,\vec u} = \mathcal{D}_{H_{C,\lambda}(A),\vec u} \iff H_{C,\lambda}(A) \in \mathcal{D}_{A,\vec u}$.

$\iff \mathcal{D}_{A,\vec u} = (A\,H_{C,\lambda}(A)) \ni C$.

↳ Droite est invariante p hθ non nulle ssi un autre est sur une droite.

(P18) Etant donnée une droite $\mathcal{D}$ & un point A, $\exists$ uniq droite $\parallel$ à $\mathcal{D}$ passant par A.

DM $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{B,\vec u}$: $\mathcal{D}' \ni A$, $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}_{B,\vec u} \rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D}_{A,\vec u}$

(P19) 2 droites $\parallel$ st disjointes ou confondues.

DM $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \iff \mathcal{D}\cap\mathcal{D}' \neq \emptyset \Rightarrow \exists M \in \mathcal{D}\cap\mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D}=\mathcal{D}'=\mathcal{D}_{M,\vec u}$

(D20) Un vecteur $\neq 0$ est normal à $\mathcal{D}$ ssi il est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite. Deux droites st perpendiculaires si un (tout) vecteur directeur de l'une est un vct^r normal pr l'autre.

(P21) Deux droites perpendiculaires à une 3° st $\parallel$s.

DM $\mathcal{D}_{A,\vec u} \perp \mathcal{D}_{B,\vec v}$, $\perp \mathcal{D}_{C,\vec w}$ $\Rightarrow \vec v \perp \vec u \perp \vec w \iff \vec v \parallel \vec w \iff \mathcal{D}_{B,\vec v} \parallel \mathcal{D}_{C,\vec w}$

(P22) Etant donné droite $\mathcal{D}$ & point A, $\exists$ uniq droite perpendicul^r à $\mathcal{D}$ passant par A.

Rq $\vec u(x,y)$; $\vec u^{\perp}(-y,x)$.

DM (P22) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{B,\vec{u}} \Rightarrow \mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp} \ni A$

et $\mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp} \perp \mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ & vice-versa :

$\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{D}' \Rightarrow \vec{u}^\perp$ direct^{r} de $\mathcal{D}'$

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp}$.

(P23) $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b) \neq (0,0)$.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

équa° cartésienne de cette droite.

DM soit $A(x_A, y_A) \in \{(ax+by=d\}$

$\Leftrightarrow a x_A + b y_A = d$.

$M \in \{ax+by=d\} \Leftrightarrow a x_M + b y_M = d$.

$\Leftrightarrow a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) = 0$.

$\Leftrightarrow (a,b) \perp (x_M - x_A, y_M - y_A)$.

soit $B = A + (-b,a)$.

$a(x_A - b) + b(y_A + a) = \begin{array}{l} a x_A - ab + b y_A + ab \\ = d. \end{array}$

$\Rightarrow B \in \{ax+by=d\}$

$(-b,a) = \vec{AB} \perp (a,b) \Rightarrow \forall M, \vec{AM} \parallel \vec{AB}$ $(\perp(a,b))$

$M = A + \vec{AM} = A + \lambda \vec{AB} \in \mathcal{D}_{A,\vec{AB}} = (AB)$

$\Rightarrow \{ax+by=d\} \subset (AB)$

$M \in (AB) \Rightarrow M = A + \lambda \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{AB} \perp (a,b)$

$\Leftrightarrow M \in \{ax+by=d\}$.

(16)

Rq Nota°: $\{ax+by=d\} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$.

Prop 25. Deux droites $\{a_1x + b_1y = d_1\}$ et $\{a_2x + b_2y = d_2\}$ st égales (resp parallèles) ssi $(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$ resp $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$

DM

$\{a_1x + b_1y = d_1\}$ admt (a_1, b_1) vect^{r} normal et $(-b_1, a_1)$ vct^{r} direct^{r} $\Rightarrow D_1 \parallel D_2$

$\Leftrightarrow (a_1, b_1) \parallel (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$

$(\lambda \neq 0)$

$(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2) \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, d_1)$

$\Rightarrow \underbrace{\{a_2x + b_2y = d_2\}}_{D_2} = \underbrace{\{\cancel{\lambda} a_1x + \cancel{\lambda} b_1y = \cancel{\lambda} d_1\}}_{D_1}$

Si $D_1 = D_2 \Rightarrow D_1 \parallel D_2$, $\exists \lambda\ (a_2, b_2) = \lambda(a_1, b_1)$

$\Rightarrow D_2 = \{a_2x + b_2y = d_2\} = \{\lambda a_1x + \lambda b_1y = d_2\}$

$= \{a_1x + b_1y = \frac{d_2}{\lambda}\} = \underbrace{\{a_1x + b_1y = d_1\}}_{D_1}$

$\Leftrightarrow d_2 = \lambda d_1 \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, d_1)$

$\Rightarrow (a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$

D26 L'EC $ax + by = d$ est normalisée si $\|(a, b)\| = 1$.

P27 Tte droite possède ssté EC (ttes proportionnelles) dt exactement 2 st normalisées.

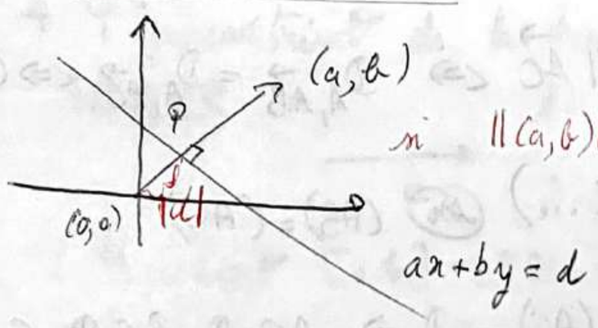
DM Toutes les EC $\{ax + by = d\}$ st de la forme $\{\lambda ax + \lambda by = \lambda d\}$ d'après 25

$\Rightarrow \exists$ une ssté $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ mais une telle EC est normalisé ssi

$\|\lambda(a, b)\| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|(a, b)\|} = \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

P28 Si a EC $ax + by = d$ normalisée de D

$\Rightarrow d(\Omega, D) = |d|$, d'où $\Omega(0, 0)$



si $\|(a, b)\| = 1$

• $P(da, db)$ car $a\,da + b\,db = d(a^2+b^2) = d$! car normalisé

$\Rightarrow P \in \{ax+by=d\} = \mathcal{D}$

• $\vec{OP}(da, db) = d(a,b)$ normal à $\{ax+by=d\}$

$\Rightarrow (OP) \perp \mathcal{D}$, d'après le TD,

$d(O, \mathcal{D}) = OP = \|(da, db)\| = |d|$

§7. Points Alignés

(D1) Des points sont a l g s'ils appartiennent à même droite. (On note : $\boxed{(ABC\ldots)}$ si les pts sont $_{ABC}$ alignés.)

(P3) 3 pts distincts A, B, C sont alg ssi $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$.

DM $\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Leftrightarrow D_{A,\vec{AB}} = D_{A,\vec{AC}} \Leftrightarrow (AB) = (AC)$.

(P4) $(ABC\ldots)$ ssi $(AB) = (AC)$

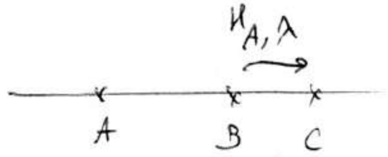
DM $(AB) = (AC) = D \Rightarrow A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, C \in \mathcal{D}$.

$A, B, C \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} = (AB)$ car $A \neq B$
$\mathcal{D} = (AC)$ car $A \neq C$ $\Rightarrow (AB) = (AC)$

②

(P5) $(ABC\ldots) \Leftrightarrow C = H_{A,\lambda}(B)$ pr certain λ.

DM



$C = H_{A,\lambda}(B) \Rightarrow A \in (BC)$ car $B \neq C$

voir §5.

$(ABC\ldots)$ par hypo,

$\Rightarrow C \in (AB) = D_{A,\vec{AB}} \Rightarrow C = A + \lambda \vec{AB} \overset{def}{=} H_{A,\lambda}(B)$

(P6) $(ABC\ldots) \Leftrightarrow$ l'un est un barycentre des 2 autres.

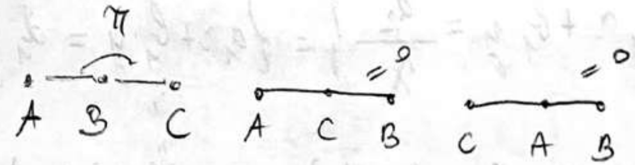
DM Conséquence directe de

$(AB) = \{$ens barycentres de A et $B\}$ voir §6.

$C \in AB \Leftrightarrow C$ barycentre de A et B.

(P7) $(ABC\ldots) \Leftrightarrow \measuredangle ABC = 0 \pmod{\pi}$

$(ABC\ldots) \Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$.



$z_A - z_B$ affine de $\vec{BA}$
$z_C - z_B$ affine de $\vec{BC}$, $(ABC\ldots) \Leftrightarrow \vec{BA} = \lambda \vec{BC}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_B}{}$

§ 8. Segments & Demi-droites

(P1) $\forall\, I \subset \mathbb{R}$, on a $\{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in I\} =$
$= \{(1-\lambda) A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$ et on dit que
$\lambda \mapsto A + \lambda \vec{AB}$ est une paramétrisa° (affine)
et que $\lambda \mapsto (1-\lambda) A + \lambda B$ est une
paramétrisa° barycentriq de cet ens.

$\xrightarrow{DM}$ $A + \lambda \vec{AB} = A + \lambda (B - A) = (1-\lambda) A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \longrightarrow D_{A, \vec{AB}} = (AB) = \{$ Barycentres de A et $B\}$.

$\varphi_{A,B} : \lambda \mapsto A + \lambda \vec{AB} = (1-\lambda) A + \lambda B$ est une bijec°.

$\varphi_{A,B}\big|_I$ bijec° sur $\varphi_{A,B}(I) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in I\}$
$= \{(1-\lambda) A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$

$\boxed{R9}$ $\varphi_{A,B}$ est affine de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$\varphi_{A,B}(\lambda a + \mu b) = \varphi_{A,B}(a)\lambda + \varphi_{A,B}(b)\mu$ si $(\lambda + \mu) = 1$

$\varphi_{\vec{AB}} :$ $\begin{matrix} \lambda \longrightarrow \lambda \vec{AB} \\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{matrix}$ $\}$ linéaire et $\varphi_{\vec{AB}}$ "centré en A".

(D2) Un ens $[AB] := \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in [0,1]\}$
on dit segment fermé d'extrémités A et B.
$\forall\, C \in [AB]$, on dit que C est entre A et B.

(P3) $[AB] = [BA]$.

$$\underbrace{\{(1-\lambda) A + \lambda B\}}_{} \quad \{(1-\mu) A + \mu A\} \quad \longleftarrow \text{DM}$$

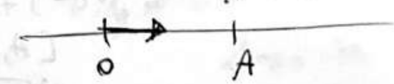
$\mu := 1 - \lambda$

$\lambda \in [0,1] \iff \mu \in [0,1]$

(P4) $[AB] = [CD] \iff \{A, B\} = \{C, D\}$
ie un segment n'a que 2 extrémités.

$\xrightarrow{DM}$ $[AB] = [CD] \iff [a,b] = [c,d]$
↳ φ paramétrisa° de la droite.

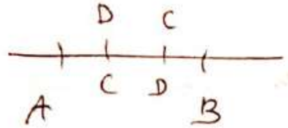
$\varphi(x) = X$ $\qquad A = O + a\vec{u}$



↳ la conven° $[a,b] := [b,a]$ si $a > b$
(@ $[2,1] := [1,2]$)

(P5) $[AB] \supset [CD] \Leftrightarrow \{C, D\} \in [A,B]$.

DM $\to$



$[AB] \supset [CD] \Leftrightarrow [a,b] \supset [c,d]$
$\Leftrightarrow \{c,d\} \in [a,b]$

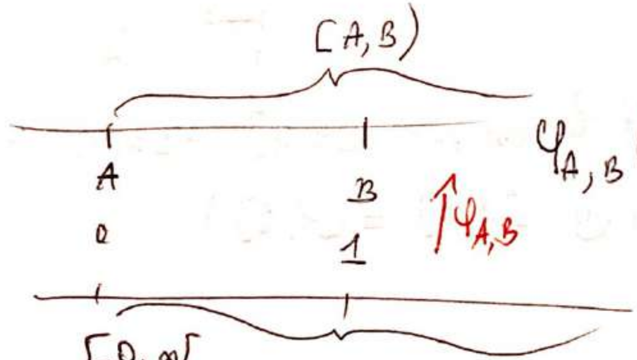
(D6) Un ens de la forme $]AB[= \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0,1[\}$ est dit segment ouvert. $\forall C \in]AB[$, on dit que C est strictement entre A et B.

(R1) Aussi $]AB]$ et $[AB[$.

Notat°s $[A, B]$ ← on pt ajouter virgule.

(D9) Un ens $[AB) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[\}$ est demi-droite fermée d'extrémité A & de direc° $\overrightarrow{AB}$.

DM $\to$

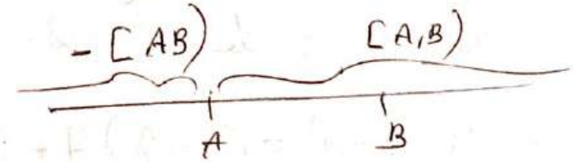


$\varphi_{A,B}([0, \infty[)$

(D10) $]AB) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[$ est demi-droite ouverte.

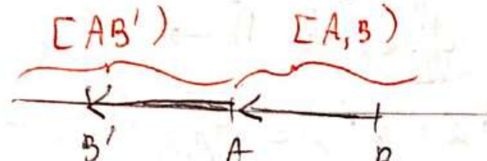
(D11) La demi-droite opposée à $[AB)$ est $-[AB)$

$-[AB) = \{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[$ et celle de $]AB)$ est $-]A,B) = \{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[$.



(P12) La $\frac{1}{2}$ d op est $\frac{1}{2}$d fermée de direc° $\overrightarrow{BA}$.
De plus $[AB) \cup -[AB) = (AB)$
et $[AB) \cap -[AB) = \{A\}$.

DM $\to$ $\{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \geq 0\} \overset{\circledast}{=} \underbrace{\{A + \lambda \overrightarrow{AB'} \mid \lambda \geq 0\}}_{[A,B')}$



où $B' = A + \overrightarrow{BA}$
$B' = A - \overrightarrow{AB}$
$= 2A - B$

$\circledast$ En effet $A + \lambda(B' - A) = A + \lambda(2A - B - A)$
$= A + \lambda(A - B) = A + \lambda \overrightarrow{BA} = A - \lambda \overrightarrow{AB}$

et comme $[AB')$ de direc° $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$

$[A,B) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \geq 0\} \cup \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \leq 0\} = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (AB)$

(q) $\{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \leq 0\} = -[A,B)$

$[AB) \cap -[AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geq 0\} \cap$

$\cap \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda = 0\} = \{A\}$

P13 Le complémentaire $\frac{1}{2}$ d fermé (resp ouverte) est $\frac{1}{2}$ d ouverte (resp fermé) appelée la **demi-droite complémentaire**.

- DM $\to$ $(AB) \setminus [AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geq 0\}$

$= \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda < 0\} = \{A + \lambda \vec{AB'} \mid \lambda > 0\}$

$=]AB')$

P14 Pour tout $[AB) = [CD) \iff A = C$ et et $D \in [AB)$ (et/ou $B \in [C,D)$).

DM $\to$ $\varphi_{A,B}([0,\infty[) = [A,B)$

$\varphi_{A,B}(c) = C$, $\varphi_{A,B}(d) = D$.

-

convention : $[c d) = \begin{cases} [c, \infty[& \text{si } d > 0 \\ ]\infty, c] & \text{si } d < 0 \end{cases}$

$[A,B) = [C,D) \iff [0,\infty[= [c,d) \iff \begin{cases} c = 0 \\ d \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C = A \\ D \in [AB) \end{cases}$

§ 9. Demi-plans

D1 Si $(a,b) \neq (0,0)$ un **demi-plan ouvert** (resp **fermé**) est ens de la forme $\{ax + by > d\}$ (resp $\{ax + by \geq d\}$. On dit que la droite $\{ax + by = d\}$ **délimite** ces $\frac{1}{2}$-plans

Rq 2 On pt remplacer $> \to \geq$ et $< \to \leq$.

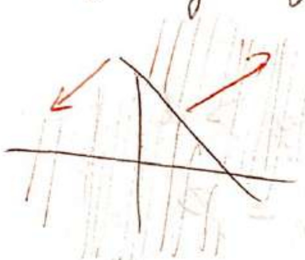
$ax + by > d \iff (-a)x + (-b)y < -d$

délimité par $\{ax + by = d\} = \{(-a)x + (-b)y = -d\}$

P3 Une droite "coupe" un plan en $\frac{1}{2}$-plans, ie $\mathbb{R}^2 = \{ax + by > d\} \cup \{ax + by = d\} \cup \{ax + by < d\}$

DM $\to$ Evident, il reste à vérifier $\{ax + by < d\}$ est $\frac{1}{2}$ plan délimité par $\{ax + by = d\}$.

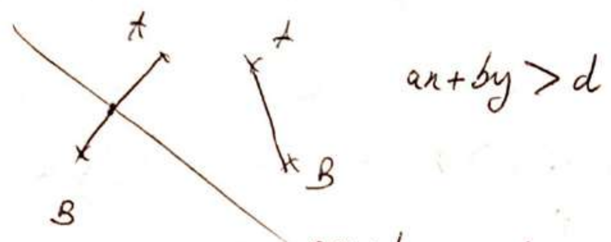
$\{ax + by < d\} = \{-ax + (-b)y > -d\}$ délimité par $\{-ax - by = -d\}$
$= \{ax + by = d\}$



(P4) soit $\mathcal{D} = \{ax+by=d\}$ et un point A !
$A \in \{ax+by>d\}$ alors :

▶ $B \in \{ax+by>d\} \Leftrightarrow [AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$

▶ $B \in \{ax+by<d\} \Leftrightarrow [AB] \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$



DM ⟶ $B(x_B, y_B) \in \{ax+by>d\}$

(*) $\Leftrightarrow ax_B + by_B > d$ (+)

$A(x_A, y_A)$ tq $ax_A + by_A > d$

$a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B) > \cdot$

$\cdot = (\lambda + (1-\lambda))d = d$

$\Rightarrow \forall C \in [A,B]$ vérifie $ax+by>d$

$\Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\} = \emptyset$.

(*) si $B(x_B, y_B)$, $ax_B + by_B < d$.

Considérons $\Psi : \lambda \mapsto a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B)$
$[0,1] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(0) = ax_A + by_A > d \\ \Psi(1) = ax_B + by_B < d\end{array}\right\} \text{TVI} \Rightarrow \exists \lambda,\ \Psi(\lambda) = d.$$

car appli cont
car appli affine.

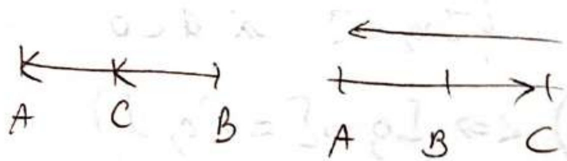
$\Rightarrow C = \lambda A + (1-\lambda)B$ vérifie $C \in [AB]$ ($]AB[$)

$ax_C + by_C = d \Rightarrow C \in \{ax+by=d\}$

$\Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\}$

§ 10. Relations métriques !! ☺ !!

(P1) Soit $C \in (AB)$, alors $C \in [AB]$ (resp. $C \in]AB[$) ssi si $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{CA} \rangle \geq 0$ (resp. $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{CA} \rangle > 0$).



DM $C \in (AB) \quad (A \neq B)$

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \iff \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\iff \overrightarrow{BC} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA} = (\lambda-1)\overrightarrow{AB}.$$

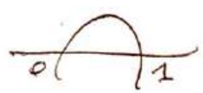
$$\overrightarrow{CA} = -\lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BC} = (\lambda-1)\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA}.$$

- $$\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{CA} \rangle = \langle (1-\lambda)\overrightarrow{BA} \mid \lambda \overrightarrow{BA} \rangle$$

$$= (1-\lambda)\lambda \underbrace{\|\overrightarrow{BA}\|^2}_{\geq 0}$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{CA} \rangle \geq 0 \iff (1-\lambda)\lambda \geq 0$$



$$\iff \lambda \in [0,1]$$

$$\iff C \in [AB].$$

-

DM $C \in (AB) \quad (A \neq B)$

$C = (1-\lambda)A + \lambda B \iff \vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

$\iff \vec{BC} = (1-\lambda)\vec{BA} = (\lambda-1)\vec{AB}$.

$\vec{CA} = -\lambda \vec{AB} = \lambda \vec{BA}$

$\vec{BC} = (\lambda-1)\vec{AB} = (1-\lambda)\vec{BA}$.

- $\langle \vec{BC} \mid \vec{CA} \rangle = \langle (1-\lambda)\vec{BA} \mid \lambda \vec{BA} \rangle$

$= (1-\lambda)\lambda \, \|\vec{BA}\|^2$

$\langle \vec{BC} \mid \vec{CA} \rangle \geqslant 0 \iff (1-\lambda)\lambda \geqslant 0$

$\iff \lambda \in [0,1]$

$\iff C \in [AB]$.

- P2 soit $A, B, C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

DM $AB^2 = \langle \vec{AB} \mid \vec{AB} \rangle = \langle \vec{AC} + \vec{CB} \mid \vec{AC} + \vec{CB} \rangle$

$= \langle \vec{AC} \mid \vec{AC} \rangle + \langle \vec{CB} + \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC} + \vec{CB} \rangle + \langle \vec{CB} + \vec{CB} \rangle$

$= AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

P3 Th Pythag Étant 3 pts distincts A, B, C, droites AC & BC et perpendiculaires ssi

$$AB^2 = CA^2 + CB^2.$$

DM D'après 2), $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ssi $\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle = 0$

$\overset{\text{def}}{\iff} (AC) \perp (CB)$.

P4 (inégalité triangulaire) A, B, C distincts.

(i) $AB \leq BC + CA$.

(ii) $AB = BC + CA$ ssi $C \in [AB]$.

DM D'après ② $AB^2 = AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

d'après Cauchy-Schwartz $\leq AC^2 + 2\,AC \cdot CB + CB^2 = (AC+CB)^2$

& "=" ssi $\vec{AC} \parallel \vec{CB}$ et $\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle \geqslant 0$

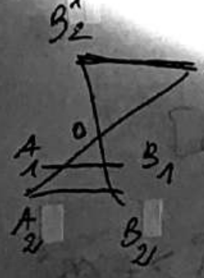
+ prop 1 $\iff C \in [AB]$

(P5) (Th Thalès) pts distincts A_1, A_2, B_1, B_2 et $\{O\} = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$ Alors on a l'équivalence $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2)$

$$\iff \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}.$$

et si cette condition est vérifiée nous avons

$$\overrightarrow{A_1B_1} : \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}.$$



on note $\alpha := \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} \in \mathbb{R}^*$

$\beta := \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2} \in \mathbb{R}^*$

$(A_1B_1) \parallel (A_2B_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,$
$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \overrightarrow{A_2B_2}$.

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OB_2} - \lambda \overrightarrow{OA_2}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \lambda \overrightarrow{OA_2} - \alpha \overrightarrow{OA_2} = \lambda \overrightarrow{OB_2} - \beta \overrightarrow{OB_2}$

$\iff$ ———, $(\lambda - \alpha)\overrightarrow{OA_2} = (\lambda - \beta)\overrightarrow{OB_2}$ $\underbrace{(\overrightarrow{OA_2} \nparallel \overrightarrow{OB_2})}_{\text{libres}}$

$\iff$ ———, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \lambda - \alpha = \lambda - \beta$.

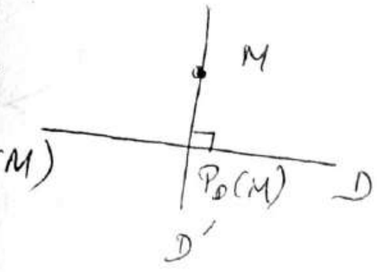
$\iff \alpha = \beta \ (= \lambda)$.

$\iff \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = \overline{OB_1} : \overline{OB_2} \ (= \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2})$

§ 11. Projection Orthogonale

(D1) D droite, M point, $D' \perp D$ passant par M. On note $P_D(M) := D \cap D'$. L'application P_D ainsi définit est appelé la projection orthogonale sur D.

(P2) $P_D(M) = M \iff M \in D$.



DM $M \in D \Rightarrow \begin{matrix} M \in D \\ M \in D' \end{matrix} \Rightarrow M \in P(M)$

$M = P(M) \ni D$.

(P3) $P_D(M) = P \iff P \in D$ et $\overrightarrow{MP}$ est nul ou vect^r normal à D.

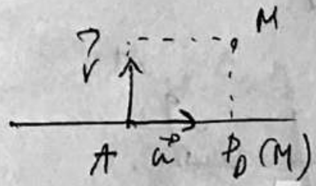
DM • $M \in D \Rightarrow M = P_D(M) \iff \overrightarrow{MP_D(M)} = 0$

• $M \notin D \Rightarrow P_D(M) \ni D$, $\overrightarrow{MP_D}(M)$ normal à D (par def)

si $P_D \in D$: $\overrightarrow{MP} \perp D$ alors

$P \in D' \Rightarrow P \in D \cap D'$
$\Rightarrow P = P_D(M)$.

(P4) soit $D_{A,\vec u}$ droite & $\vec v$ un de ses vect^rs normaux. Alors $P_D(A+\lambda\vec u+\mu\vec v)=A+\lambda\vec u$.



$M=A+\lambda\vec u+\mu\vec v$

DM soit $P=A+\lambda\vec u \in D_{A,\vec u}$

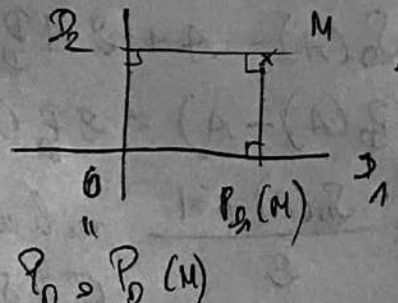
$\Rightarrow \vec{MP}=(A+\lambda\vec u)-(A+\lambda\vec u+\mu\vec v)$
$= -\mu\vec v \perp D_{A,\vec u}$.

$P_D(A+\lambda\vec u+\mu\vec v)=A+\lambda\vec u$

(P5) Les projec^ons orthogonales sont des applications affines idempotentes, ie $P_D\circ P_D=P_D$.

DM $\underbrace{P_D\circ P_D(M)}_{\in D} = P_D(M)$ (P1) $\forall M \Rightarrow P_D\circ P_D=P_D$

(P6) si $D_1\perp D_2$ sécantes en O alors $P_{D_1}\circ P_{D_2}=0=P_{D_2}\circ P_{D_1}$
où 0 applica^on de $A\mapsto O$, $\forall A$.



DM soit $M=O+\lambda\vec u+\mu\vec v$
où $D_1=D_{O,\vec u}$, $D_2=D_{O,\vec v}$
$(D_1\perp D_2 \iff \vec u\perp\vec v)$

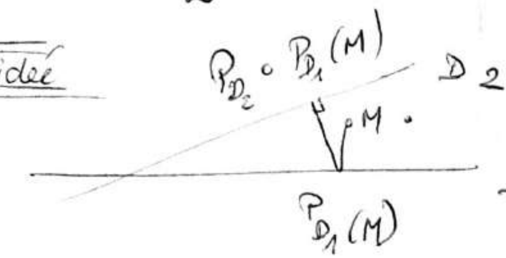
D'après (prop 4) : $P_{D_1}\circ P_{D_2}(M)=$

$= P_{D_1}\circ \underbrace{P_{D_2}(O+\lambda\vec u+\mu\vec v)}_{O+\mu\vec v}=O$

$= P_{D_2}\circ \underbrace{P_{D_1}(O+\lambda\vec u+\mu\vec v)}_{O+\lambda\vec u}=O$

(P7) La récipr. est vraie : si $D_1\neq D_2$, P_{D_1} et P_{D_2} commutent ssi $D_1\perp D_2$ ou $D_1=D_2$.

DM idée



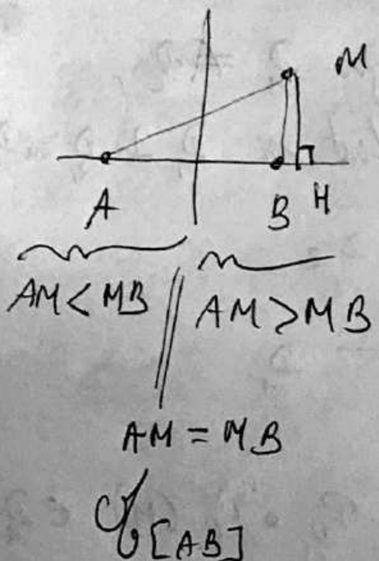
$\underbrace{P_{D_2}\circ P_{D_1}(M)}_{\in D_2\setminus D_1}\neq O$, $P_{D_1}\circ P_{D_2}(M)\in D_1$.

$\Rightarrow P_{D_1}\circ P_{D_2}(M)\neq P_{D_2}\circ P_{D_1}(M)$

§ 12. Médiatrices

(D1) soit pts $A \neq B$. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendicl^re à (AB) q passe par milieu de $[AB]$.

(P2) $A \neq B$, l'ens $\{M \mid AM = BM\}$ est la médiatrice, et $\frac{1}{2}$ plans délim. p méd. et $\{M \mid AM > BM\}$ et $\{M \mid AM < BM\}$.



DM soit $H := P_{(AB)}(M)$

par Pythagore, $AM^2 = AH^2 + HM^2$

$BM^2 = BM^2 + HM^2$

Ainsi $AM \gtreqless BM$ ssi

$AM^2 \gtreqless BM^2$ ssi

$AH^2 \lesseqgtr BH^2$ ssi

$AH \lesseqgtr BH$

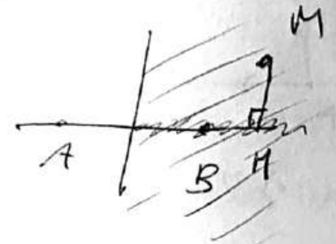
ccl $AM = MB \Leftrightarrow P_{(AB)}(M)$ milieu de $[AB]$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_{[AB]}$ médiat. de $[AB]$

$AM > MB \Leftrightarrow AM > HB$

$\Leftrightarrow M \in \frac{1}{2}$ plan de B.

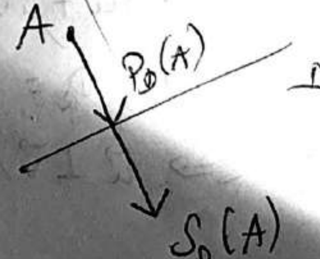
et inversement p A.



§ 13. Symétries axiales

(D1) soit D droite, A point. On pose $S_D(A) := A + 2\overrightarrow{A P_D(A)}$. L'applicat° S_D ainsi déf est appelée symétrie axiale par rapport à D.

(P2) $S_D(A)$ est l'uniq point tq $P_D(A)$ soit le milieu de $[A S_D(A)]$



DM $S_D(A) = A + 2\overrightarrow{A P_D(A)}$

$= A + 2(P_D(A) - A) = 2P_D(A) - A$

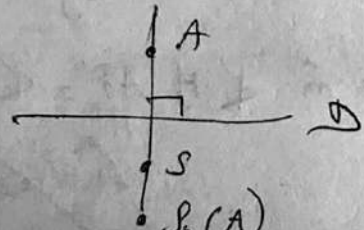
$\Leftrightarrow P_D(A) = \dfrac{S_D(A) + A}{2}$ milieu de $[A, S_D(A)]$

(P3) Si $A \notin D$, $S_D(A)$ est l'uniq point tq D soit médiatrice de $[A S_D(A)]$.

DM D'après 2), D passe par milieu de $P_D(A)$ de $[A, S_D(A)]$. De +,
$D \perp (A P_D(A)) = (A S_D(A)) \Rightarrow$
$\Rightarrow D$ médiat. de $[A S_D(A)]$.

Vérifions l'unicité : Supposons D médiat. de $[A, S]$, $(AS) \perp D \perp (A S_D(A))$
$\Rightarrow A, S, S_D$ alignés sur D'.

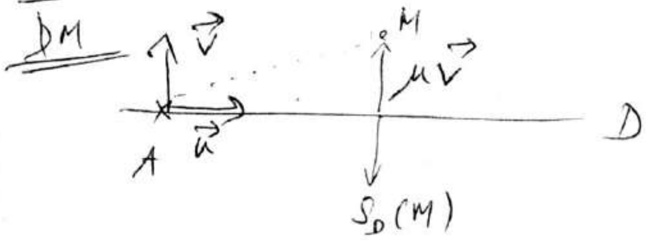
$$\frac{A+S}{2} = D' \cap D = \frac{A + S_D(A)}{2}$$



$\Rightarrow \underline{S = S_D(A)}$ $\square$

(P4) soit $D = D_{A,\vec{u}}$, $\vec{v}$ un de ses vct$^{\text{rs}}$ normx.
Alors $S_D : A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mapsto A + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}$.

DM



$M = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$$S_{D_{A,\vec{u}}}(M) = M + 2 \overrightarrow{M P_D(M)} = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + $$
$$+ 2(A + \lambda\vec{u} - A - \lambda\vec{u} - \mu\vec{v})$$
$$= A + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}$$

(P5) Les symétries axiales st des isométries affines q st leur propre inverse. (de m̂ pr projec°s)

DM $S(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}$ la symétrie linéaire par rapport à droite engendrée par $\langle\vec{u}\rangle$ est appli linéaire.

$S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = A + S(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})$

prop 4

$\Downarrow$

appli affine

$$S_{D_{A,\vec{u}}} \circ S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v})$$
$$= A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad \forall \lambda, \vec{u}.$$

(P6) L'ens des points fixes de S_D est D.

ie $S_D(A) = A \iff A \in D$.

DM $S_{D_0,\vec{u}}(A) = S_{D_0,\vec{u}}(O + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v})$

$= O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ... $= O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

ssi $\mu = -\mu$

ssi $\mu = 0$

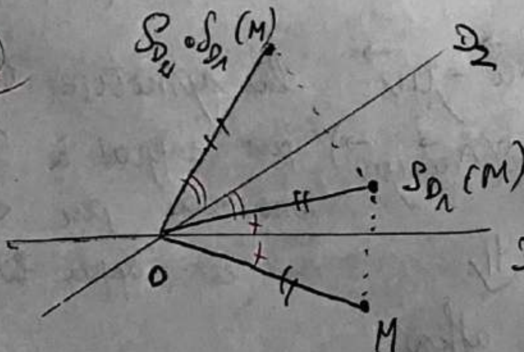
ssi $A \in D_{0,\vec{u}} = D$.

(P7) $D_1 = D_2 \iff S_{D_1} = S_{D_2}$.

$\Rightarrow$ "évident"

$\Leftarrow$ Si $S_{D_1} = S_{D_2}$ d'après (6), $D_1 =$ "ens pts fixes" $= D_2$

(P8)



Soit θ [π] l'angle orienté entre D_1 et D_2 sécants en O alors

$S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{O,2\theta}$

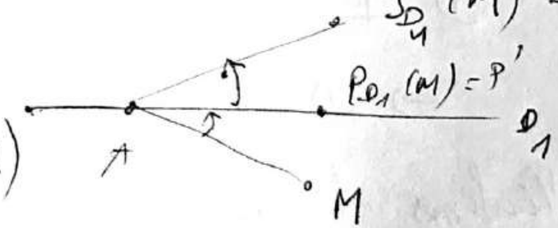
DM $OM = O S_{D_1}(M)$ car D_1 médiatrice de $(M\, S_D(M))$

De même, $O S_{D_1}(M) = O\, S_{D_2} \circ S_{D_1}(M)$

$\Rightarrow OM = O\, S_{D_2} \circ S_{D_1}(M)$.

$\measuredangle\, M A P_{D_1}(M) =$

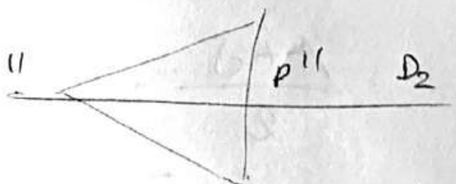
$= \measuredangle\, P_{D_1}(M) A S_{D_1}(M)$



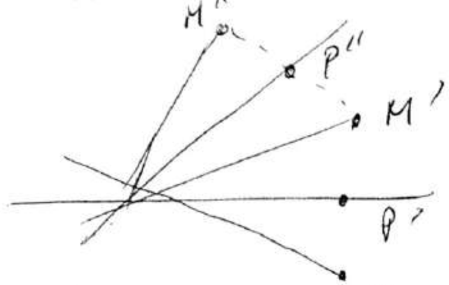
$\triangle AM P_{D_1}(M) = \triangle P_{D_1}(M) A S_{D_1}(M)$

car 3 côtés égaux

De m̂ $\measuredangle M'AP'' = \measuredangle P''AM''$



Ainsi



$\measuredangle MAM'' = \underbrace{\measuredangle MAP' + \measuredangle P'AM'}_{} + \underbrace{\measuredangle M'AP'' + \measuredangle P''AM''}_{}$

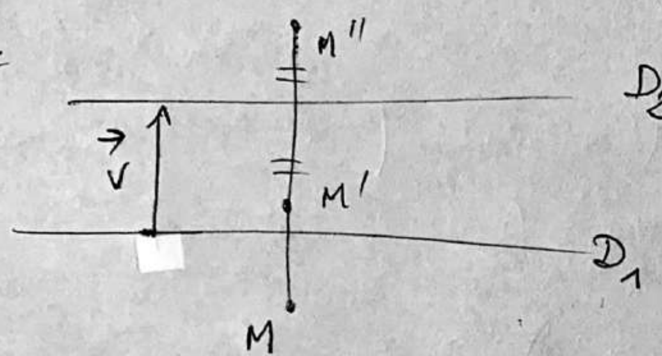
$= 2\, P'AM' + 2\, M'AP'' = 2\, P'AP''$

$= 2\measuredangle(D_1, D_2)$.

(19) soit $D_1 // D_2$ & $D_2 = D_1 + \vec{v}$ où $\vec{v}$ est un vect^r normal aux 2 droites

$$\Longrightarrow S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{2\vec{v}}$$

DM



(Rq) $D_1 // D_2 \Rightarrow \exists \vec{v} \perp D_1$ tq $D_2 = D_1 + \vec{v}$.

soit $O \in D_1$, $(\vec{u} \perp \vec{v})$

$$S_{D_2} \circ S_{D_1} (O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = S_{D_2}(O + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v})$$

$$= S_{D_2}(O + \vec{v} + \lambda\vec{u} - (\mu+1)\vec{v})$$

$$= O + \vec{v} + \lambda\vec{u} + (\mu+1)\vec{v}$$

$$= O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + 2\vec{v} = M + 2\vec{v}.$$

§ 4. Cercles

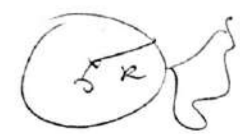
(D1) Point O, $R > 0$:

- ▷ $C(O,R) = \{A \mid OA = R\}$, le cercle de centre O & rayon R
- ▷ $D(O,R) = \{A \mid OA \leq R\}$, le disq fermé de centre O & R.
- ▷ $\{A \mid OA < R\}$, l'int cercle $C(O,R)$ → disq ouvert
- ▷ $\{A \mid OA > R\}$, l'ext cercle $C(O,R)$.

(D2) On dit ens est à l'int (resp à l'ext) d'un cercle s'il est contenu ds son intérieur (resp ext).

(P3) soit A point, X ens points $\Rightarrow d(A,X) \geq R$
(ssi) X n'a pas de points à l'int $C(A,R)$.

DM



$d(A,X) \geq R$

$\Leftrightarrow d(A,P) \geq R \ \forall P \in X$

$\Leftrightarrow \forall P \in X, d(A,P) \not< R$

$\Leftrightarrow \forall P \in X, P \notin$ intérieur $C(A,R)$

(P4) $\mathcal{C}$ cercle, A pt int à $\mathcal{C}$ & B un pt ext à $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C} \cap]AB[\neq \emptyset$.

DM

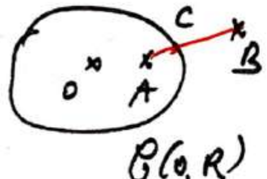
$\rightarrow$ l'appli $f: \lambda \mapsto d((1-\lambda)A + \lambda B, O)$ est cont tq $f(0) = d(A,O) < R$

$f(1) = d(B,O) > R$, d'après TVI

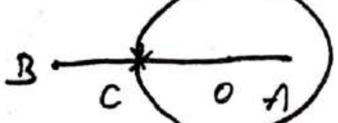
$\exists\ \lambda_0 \in]0,1[$ tq $f(\lambda_0) = R$

$\Rightarrow C := (1-\lambda_0)A + \lambda_0 B \in]A,B[$.

et $f(\lambda_0) = d(C,O) = R \Rightarrow C \in \mathcal{C}(O,R)$

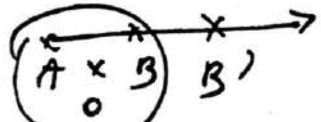


$C \in]A,B[\cap \mathcal{C} \Rightarrow \neq \emptyset$ ~~& p ailleurs on voit que f est monotone $\Rightarrow \lambda_0$ uniq~~



(P6) $\mathcal{C}$, A pt int $\mathcal{C}$, $\forall B \neq A$, $\mathcal{C} \cap]AB) \neq \emptyset$.

DM $\hat{c}$ $[A,B)$ est non bornée $\Rightarrow$ $[AB)$ n'est pas int du $\mathcal{C} \Rightarrow \exists B' \in [A,B)$ en dehors de $\mathcal{C}$,



Ainsi d'après Prop 4,

$]A,B'[\cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

$\cap$

$[A\ B)$

Rq 7 D'après P6, les $]AB)$ et $-]AB)$ rencontrent cercle $\mathcal{C}$ ds au moins 1 pt chacune, & $\in]AB) \cap -]AB) = \emptyset$

$\Rightarrow$ il s'agit de 2 pts distincts de $(AB) \cap \mathcal{C}$.

& $\in (AB) \cap \mathcal{C} \leq 2 \Rightarrow$ ds où ns = 2, ainsi

$\#]AB) \cap \mathcal{C} = 1$. & p conséqt ssi si B ext

$\#]AB) \cap \mathcal{C} = 1$

(D8) Ds pts st cocycliqs s'ils $\in$ à m̂ cercle

Rq 9 3 pts distincts st cocycliqs $\Leftrightarrow$ ils ne st pas alignés.

§ 15 Courbes paramétrées.

D1 On appelle **courbe paramétrée**, ∀ appli $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où $I \subset \mathbb{R}$.
L'ens $\Gamma := \gamma(I)$ s'appelle le **support** de γ.

- ⚠ courbe $\gamma \neq$ support Γ.

support d'une courbe
mais courbe = paramétrisat°.
point q le parcourt ↓ de tps

-  possible.
- C^1, C^∞ analytiqs polynomiales.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ courbes complexes.

D6 on dit $\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un **reparamétrage** de $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$, s'∃ difféomorphisme (de m̂ qlté γ_0) $\phi : J \to I$ tq $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$.

P7 "**est un reparamétrage**" est <R> d'équivlc, dt les classes équivlces st **courbes géométriqs**, & le support d'une courbe géomtiq est défini.

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_1 \circ \phi^{-1} \Rightarrow \text{"réflexive"}$$

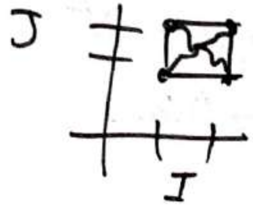
$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff \gamma_1 \sim \gamma_0.$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi_1,\ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi_2 \Rightarrow \gamma_2 = \gamma_0 \circ \underbrace{\phi_1 \circ \phi_2}_{\text{difféom } C^k}$$

$$\gamma_1 \sim \gamma_0,\ \gamma_2 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_0 \Rightarrow \sim \text{ transitive.}$$

$[\gamma_0]$ est courbe géométriq
$\mathrm{Supp}[\gamma_0] := \mathrm{supp}\,\gamma_0 = \mathrm{supp}\,\gamma_1$ si $\gamma_0 \sim \gamma_1$
car $\mathrm{Im}\,\gamma_1 = \mathrm{Im}\,\gamma_0 \circ \phi$

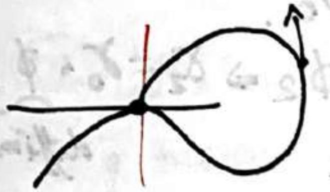
$\boxed{\text{Rq 8}}$ qd limité ax reparamétrages croissants on parle de **courbes géomtiqs orientées**.



ϕ : bijct° car de $I \to J$
$\Longrightarrow \phi$ monotone. } ⊛
& cd ns $\phi \nearrow \Rightarrow \phi^{-1} \nearrow$
$\phi_1, \phi_2 \nearrow \Rightarrow \phi_1 \circ \phi_2 \nearrow$

$\gamma_0 \sim \gamma_1 :\overset{\text{def}}{\iff} \gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$ & $\phi \nearrow$ difféo C^r
est aussi <R> équivlce & m̂ démo q ∞ + ⊛.

(D9) Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}_2$ est dite **régulière** en $t \in I$ si $\gamma'(t) \neq 0$. Ds ce cas la droite passant p $\gamma(t)$ & de vect^{r} direct^{r} $\gamma'(t)$ est **tangente** de courbe. param. γ en t. si d+, γ **injective** on parle de **tangente** en $\gamma(t)$.



← 2 tangtes → à $t=0$ → à $t=1$

⚠

(D10) Une courbe $\gamma : J \to \mathbb{R}_2$ est dite **singulière** en $t \in J$ si elle n'y est pas régulière ie si $\gamma'(t) = 0$.

(D11) Une courbe est dite **régulière** si elle est régulière en tte valeur du param.

(P12) Nots de régularité & tangente st bien def pr courbes géométriqs.

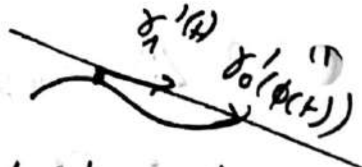
DM $\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t))$ ⇐ ϕ difféo $\Rightarrow \phi'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

$\gamma_1'(t) = \gamma_0'(\phi(t)).\phi'(t) \neq 0$.

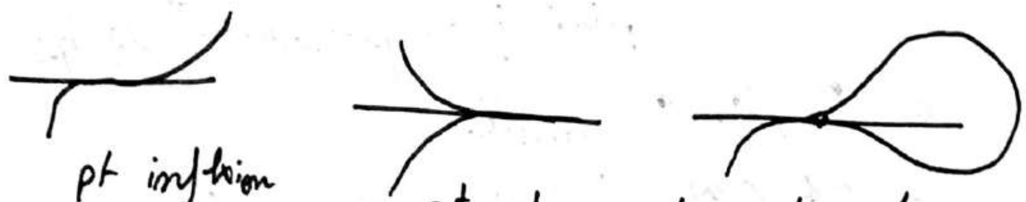
$\Rightarrow$ 1) $\gamma_0' \neq 0$ partout $\Rightarrow \gamma_1'$ aussi

2) $\gamma_1'(t) \parallel \gamma_0'(\phi(t))$ la tangte en t pr γ_1 est m̂ q elle de γ_0 en $\phi(t)$.

$(\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t))$



R4 m̂ si la courbe n'a pas de tangente en t le support Γ pt avoir **tangente** en $\gamma(t)$.



pt inflexion · pt rebroussement · pt ordinaire

on ne discute pas angles & branches ∞.

§ 16. Longueur courbe paramétrée

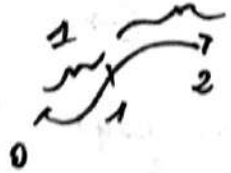
(D1) soit $I = [a,b]$ & $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ courbe C^1.
La longueur de γ est nbr positif
$$|\gamma| = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt.$$

(D2) L'abscisse curviligne est f $s \mapsto \int_a^s \| \gamma'(t) \| \, dt$
q mesure dist° parcourue entre départ a & s.

(D3) on dit courbe γ est paramétrée p (la) longueur d'arc (ou p l'abscisse curviligne) si $\forall t$ on a $\| \gamma'(t) \| = 1$.

$\to$ si $\| \gamma'(t) = 1$

$s \to \int_a^s \| \gamma'(t) \| \, dt = s - a$.



(P4) Toute courbe régulière possède un reparamétrage p longueur d'arc.

DM soit $\varphi(s) := \int_a^s \underbrace{\| \varphi'(t) \|}_{>0} \, dt$ $\varphi \nearrow$ ST

(*) $\varphi'(s) = \underbrace{\| \gamma'(s) \|}_{\text{cont p composée}} \neq 0 \Rightarrow$ difféo C^1

dc $\varphi : I \longmapsto [0, |\gamma|]$

on pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi^{-1} : [0, |\gamma|] \to \mathbb{R}^2$
↳ reparamétrisat° de γ

$$\| \gamma_1'(t) \| = \underbrace{\| \gamma'(\varphi^{-1}(t)) \|}_{} \, |\varphi^{-1\prime}(t)|$$

(*) $\xrightarrow[s = \varphi^{-1}(t)]{} \varphi'(\varphi^{-1}(t))$

$$= \left| [\varphi \circ \varphi^{-1}(t)]' \right| = |t'| = 1$$

(P5) La longueur d'une courbe géométriq est bien déf car longueur d'une courbe est invariant p reparamétrage

DM $\underbrace{[a_1,b_1]}_{J} \xrightarrow{\phi \text{ difféo}} \underbrace{[a,b]}_{I} \xrightarrow{\gamma \text{ courbe}} \mathbb{R}^2$

$$\gamma_1 = \gamma \circ \phi$$

on vt dmq $|\gamma_1| = |\gamma|$.

CDV

$$|\gamma_1| = \int_{a_1}^{b_1} \|\gamma'(\phi(t))\| \, |\phi'(t)| \, dt =$$

$$ds = \phi'(t)\, dt$$

CDV $s = \phi(t)$

$\phi(a_1) = a$, $\phi(b_1) = b$

$$= \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds = |\gamma|$$

Rq longueur support $\neq$ longueur courbe.

→ géodésiq dist $=$ min (dist entre ↔ pts).

↓

$\mathbb{R}^2$

courbure ?

← géodésiq cercle.

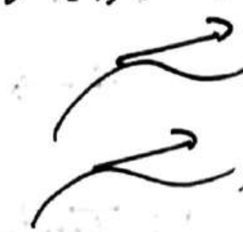
Pp si Φ est isométrie (resp λ-similitude) affine de $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ 2 courbes γ, $\Phi \circ \gamma$: $I \to \mathbb{R}^2$ ont m̂ long^r (resp long^{rs} rapport λ)

→ $[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2$

$$\|[\phi \circ \gamma]'(t)\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\phi(\gamma(t+a)) - \phi(\gamma(t))\|}{\varepsilon}$$

$\|$ ϕ - isométrie (translat° rotat°)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\gamma(t+a) - \gamma(t)\|}{\varepsilon} = \|\gamma'(t)\|$$



Par csqt $|\phi \circ \gamma| = \int_a^b \|(\phi \circ \gamma)'(t)\|$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\| = |\gamma|$$

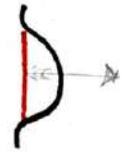
Rq Ainsi longueur arc est invariant p rotat°, symétrie, symétrie, translat°.

§ 17. Arcs & leurs mesures

petit arc $\overset{\frown}{AB}^{p}$

(D1)

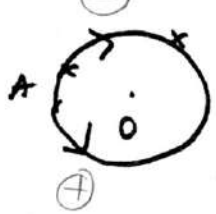
corde



grd arc $\overset{\frown}{AB}^{g} = \overset{\frown}{AKB}$.

(D3) Un arc orienté

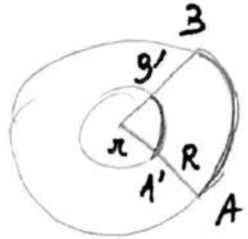
⊕ orienté ou ⊖ orienté



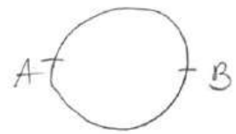
(Rq) la longueur $\ell(\overset{\frown}{AB})$ d'un arc de corde $\overset{\frown}{AB}$ est longueur d'une courbe q la paramètre. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt le pas tend vers 0.

(D5) La mesure en rad arc $\overset{\frown}{AB}$ $\mathcal{C}(O,R)$ est long^{r} arc ÷ le rayon :

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\ell(\overset{\frown}{AB})}{R}.$$



$\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{AB}$. m̂ mesure ici MS pas m̂ long^{r}



$\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$.

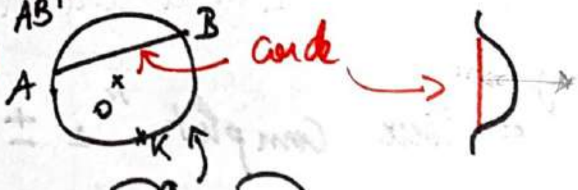
$\overset{\frown}{AB} = \pi$.

(D6) La mesure algébrq d'un arc est un nbre dt la vℓ^{R} abs. est mesure de l'arc & signe ⊕ (resp ⊖) si l'arc ⊕ (resp ⊖).

§17. Arcs & les mesures

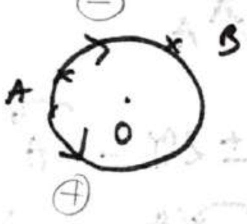
petit arc $\widehat{AB}^p$

(D1)



grd arc $\widehat{AB}^g = \widehat{AKB}$.

(D3) Un arc orienté



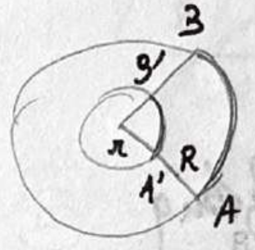
⊕ orienté ou ⊖ orienté

⊕ si sens inverse aig

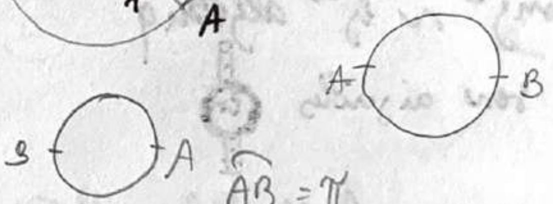
(Rq) la longueur $\ell(\widehat{AB})$ d'un arc de cercle $\widehat{AB}$ est longueur d'une courbe q la paramètre. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt le pas tend vers 0.

(D5) La mesure en rad arc $\widehat{AB}$ $\mathcal{C}(O,R)$ est long^R arc ÷ ~~R~~ rayon :

$$\widehat{AB} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R}$$



$\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$. $\hat{m}$ mesure ici MS pas $\hat{m}$ long^R

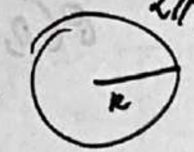


$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$

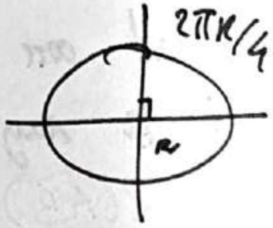
$\widehat{AB} = \pi$

(D6) La mesure algébriq d'un arc est un nbr dt la vl^R abs. est mesure de l'arc & signe ⊕ (resp ⊖) si l'arc ⊕ (resp ⊖).

R8

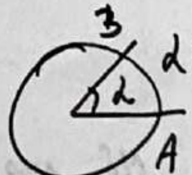


$2\pi R$



$2\pi R/4 = \frac{\pi}{2} R = \ell(AB)$

$\frac{\ell(AB)}{R} = \frac{\pi}{2}$

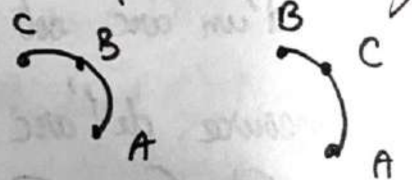


$\alpha R = \ell(AB)$

Rq abus $\mathcal{N}^{\circ}$, long^{r} ~ l_g^{r} algébriq

$\overset{\frown}{AB} = -\pi$ (sens aiguilles

→ R Chasles ds mesures algébriqs.



$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = AC \quad [2\pi]$

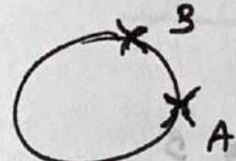
conséq RDC p les intégrals :

$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ def p intégrals & le R ont m̂

$\tilde{\ell}(\overset{\frown}{AB}) + \tilde{\ell}(\overset{\frown}{BC}) = \vec{\ell}(\overset{\frown}{AC})$

(P9) Petit & gd arc ⇒ m̂ corde : ont m̂ mesure algébq [mod 2π].

$\overset{\frown}{AB}^{p} + \overset{\frown}{BA}^{g}$ = "tour complet" $= \pm 2\pi$



car (périmètre $= 2\pi R$).

$\overset{\frown}{AB}^{p} = \pm 2\pi - \overset{\frown}{BA}^{g} = \overset{\frown}{AB}^{g} \pm 2\pi$

$\overset{\frown}{AB}^{p} = \overset{\frown}{AB}^{g} \quad (2\pi)$

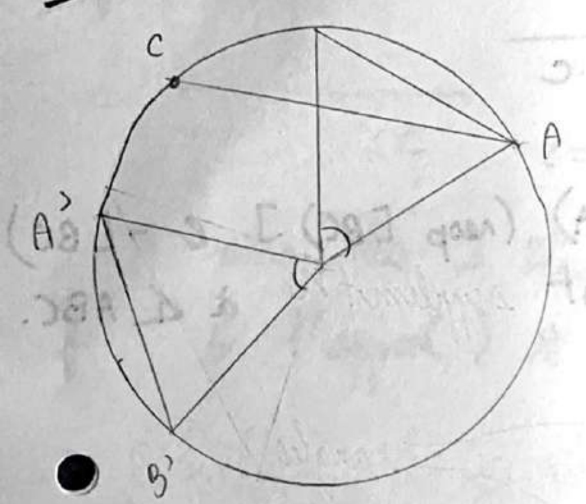
(P10) soit [AB] & [CD] 2 cordes ont m̂ cercle. Alors si on note $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ les 2 petits (resp. grds) arcs ; on a

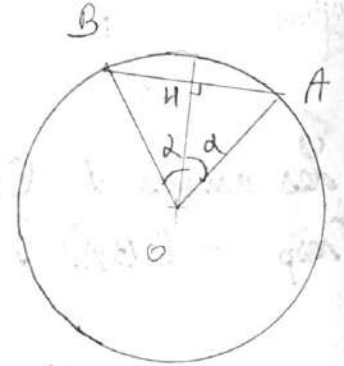
→ $AB = CD \iff \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

→ $AB > CD \iff \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$ (resp <)

P10

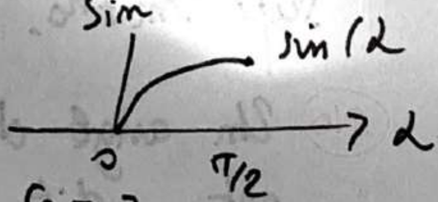
+ grd angle ↗ ⟹ + petit arc ↗





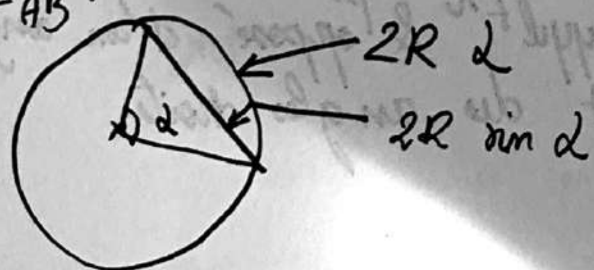
- $\measuredangle AOB \quad (\leq \pi) \Leftrightarrow \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\boxed{\begin{aligned} HA &= R.\sin(\alpha) \\ AB &= 2R\sin(\alpha) \\ \ell(\widehat{AB}) &= R2\alpha \end{aligned}} \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$



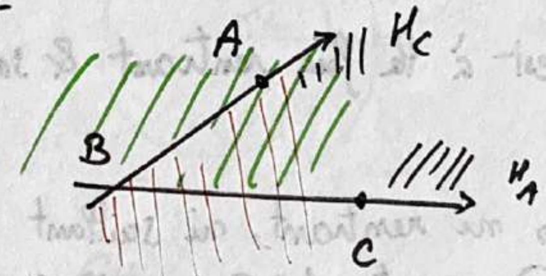
- Ainsi du fait $\sin \nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\widehat{AB}^{g} = 2\pi - \widehat{AB}^{p}$



§18. Angles.

soit



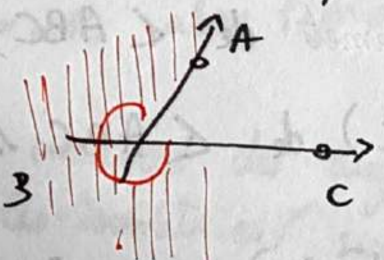
$////\ \cap\ \backslash\backslash\backslash\backslash = \widehat{ABC}$.

angle saillant convexe

(D1) L'angle saillant $\measuredangle ABC := H_A \cap H_C$

→ Un angle est secteur angulaire, noté $\widehat{ABC}$.

(D3) Complément^c d'un angle saillant est angle rentrant (pas convexe).

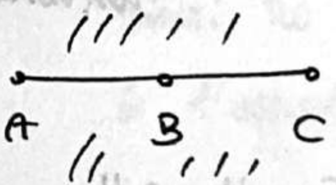


⚠ on ne pas confondre angle complément^n

21

(D5) qd $B \in [AB]$, $\measuredangle ABC$

Un angle plat est à la fois rentrant & saillant.

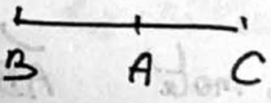


→ ni rentrant, ni saillant

→ rentrant & saillant

→ plat

(D6)



Si $[BA) = [BC)$

l'angle saillant

$\measuredangle ABC = [BA) = [BC)$

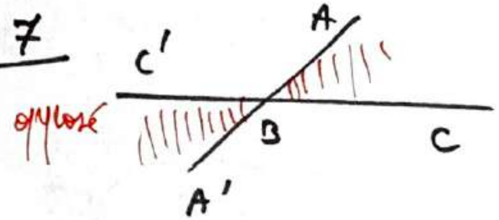
appelé angle nul.

(D6) Le pt B est sommet de $\measuredangle ABC$;

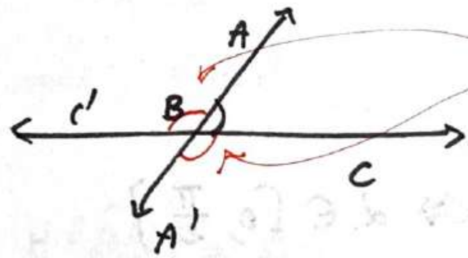
$[BA)$ & $[BC)$ de $\measuredangle ABC$ son ses côtés.

(D7) L'angle de $-[BA)$ & $-[BC)$ est l'angle opposé à $\measuredangle ABC$.

Ref 7



(D8) Les angles de $[BA)$ (resp $[BC)$) & $-[BC)$ (resp $-[BA)$) st supplémtres à $\measuredangle ABC$.



angles supplémentaires

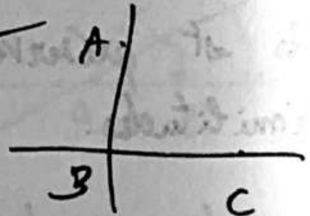
=) (asi supplémtres à $\measuredangle A'BC'$

(R9) Deux droites sécantes coupent le plan en 4 angles, 2 à 2 opposés & 2 à 2 supplémtres.

(D10) Un angle dt les 2 côtés st perpendres est dit droit.

(P11) Le supplt & l'opposé d'un angle droit st des angles droits.

Rq 11



$\widehat{ABC}$ droit $\Leftrightarrow \vec{BA} \perp \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle = 0$

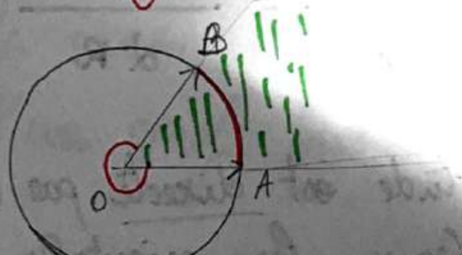
$\Leftrightarrow \langle \pm \vec{BA}, \pm \vec{BC} \rangle = 0$

ainsi les 3 autres angles (les 2 supplémentaires & l'opposé) sont aussi droit.

• D12 Un angle orienté est un angle dont un des côtés "début" & autre "fin".

§ 19. Mesures d'angles

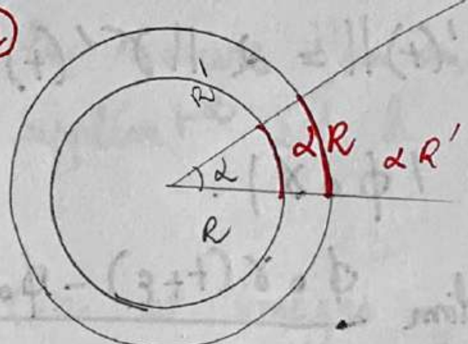
D1



• Ainsi le petit arc est éclairé par angle saillant

grd ... angle rentrant.

D2



Mesure d'un angle est la mesure (resp mesure algébriq) d'un arc qu'il éclaire au centre.

P3 Cette D2 ne dépend pas cercle choisi.

soit $H = H_{O, \frac{R'}{R}}$ $\quad H(A) = A'$ $\quad H(B) = B'$ $\quad H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

$H(\widehat{AB}) = \widehat{A'B'}$

$\Rightarrow \ell(\widehat{AB}) \cdot \frac{R'}{R} = \ell(\widehat{A'B'})$

$\Rightarrow$ si $\widehat{AB} = \alpha R$ alors $\ell(\widehat{A'B'}) = \alpha R \frac{R'}{R} = \alpha R'$

P5 Les mesures des angles sont préservées par les isométries / similitudes.

Retour P § 16.7 $\quad \gamma \xrightarrow[\alpha\text{-simil}]{\Phi} \Phi.\gamma$

$|\gamma| = \int_I \|\gamma'(t)\|$; $|\Phi.\gamma| = \int_I \|(\Phi.\gamma)'(t)\|$

on va mq $\|(\phi\cdot\gamma)'(t)\| = \alpha\,\|\gamma'(t)\|$

$\Rightarrow |\gamma|\,\alpha = |\phi\circ\gamma|$.

DM $\|\phi\circ\gamma'(t)\| = \left\| \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\phi\circ\gamma(t+\varepsilon)-\phi\circ\gamma(t)}{\varepsilon} \right\|$

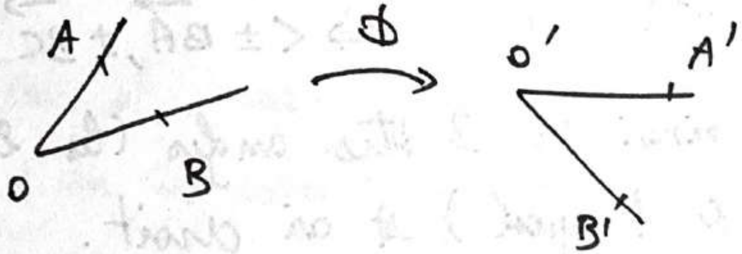
$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\|\phi\circ\gamma(t+\varepsilon)-\phi\circ\gamma(t)\|}{|\varepsilon|}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\alpha|\,\|\gamma(t+\varepsilon)-\gamma(t)\|}{|\varepsilon|}$

$= \alpha \left\| \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\gamma(t+\varepsilon)-\gamma(t)}{\varepsilon} \right\| = \alpha\,\|\gamma'(t)\|$ □

§16 P7 si Φ isométrie (resp α-similitude) affine de $\mathbb{R}^2$ alors courbes, $\gamma, \Phi\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ont m̂ long^R (resp. long^R rapport α).

P5 Les mesures des angles st préservées p les isométries / similitudes.



$\phi(A) = A'$

$\phi(O) = O' \Rightarrow \ell(\widehat{AB}) = \alpha\,\ell(\widehat{A'B'})$

$\phi(B) = B'$

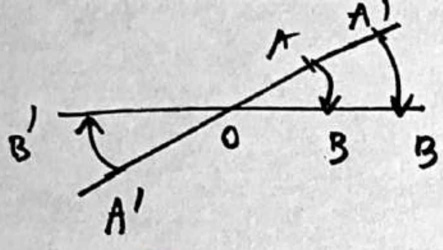
$\alpha\, OB = \alpha R = R' = \alpha\, OB'$

$\Rightarrow \measuredangle AOB = \dfrac{\ell(\widehat{AB})}{R} = \dfrac{\alpha\,\ell(\widehat{AB})}{\alpha R} = \dfrac{\ell(\widehat{A'B'})}{R'} = \measuredangle A'O'B'$

Une isométrie / similitude est directe par déf si elle préserve les orientat°s & indirecte sinon.

Ex: → translat°s st directes
→ rotat°s directes
→ symétries centrales = rotat° π
→ homothétie $H_{O,-1}$ directes

symétrie axiales indirectes.



$H_{O,-1}$ direct

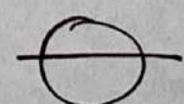
(P6) Un angle est égal à son opposé, <u>ie</u> m̂ mesure orienté.

car l'angle opposé est l'image de l'angle pr symétrie centrale (isom. directe) de centre de sommt du l'angle

(P7) La mesure d'un angle droit $\frac{\pi}{2}$ & d'un angle plat est π.

<u>DM</u>

1) Un angle plat à la m̂ mesure que son opposé & la somme des 2 est 2π

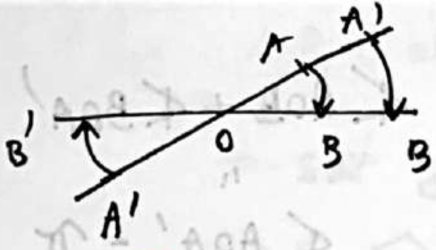


=> mesure π

2) la mesure d'un angle droit & de son supplémt est la m̂

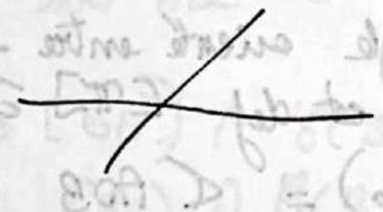
(car st images p la symétrie d'axe d'un des côtés) & 1r somme est π

=> $\measuredangle$ droit $= \frac{\pi}{2}$.



Ho;' direct

(P6) Un angle est égal à son opposé,
ie m̂ mesure orienté.

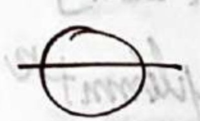


car l'angle opposé est l'image de l'angle par symétrie centrale (isom. directe) de centre de somm^t de l'angle

(P7) La mesure d'un angle droit $\frac{\pi}{2}$ & d'un angle plat est π.

DM 1) Un angle plat à la m̂ mesure que son opposé & la somme des 2 est 2π

=> mesure π



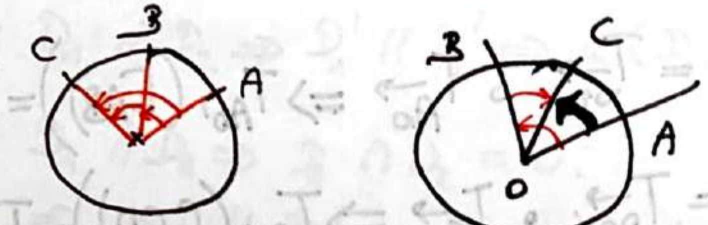
2) la mesure d'un angle droit & de son supplém^t est la m̂

(car st images p la symétrie d'axe d'un des cotés) & 1^R somme est π

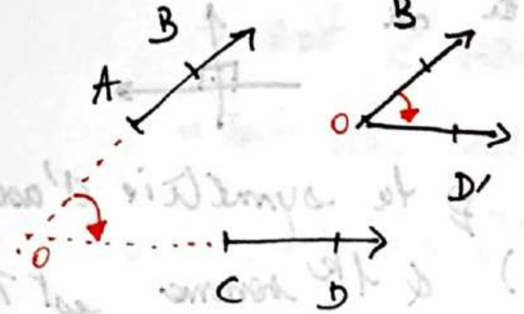
=> $\measuredangle$ droit = $\frac{\pi}{2}$.

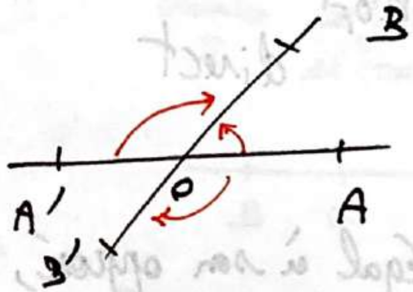
<u>Abus de Nota°</u> <=> mesure & mesure orientée.

o $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ $[2\pi]$ Rel° Chasles



(D10) La mesure d'angle (orienté ou pas) $\measuredangle([AB),[CD))$ entre 2 $\frac{1}{2}$ droites est la mesure (orienté ou pas) de l'angle $\measuredangle B'OD'$ où $T_{\vec{AO}}([AB)) = [OB')$ & $T_{\vec{CO}}([CD)) = [OD')$





$\measuredangle AOB + \measuredangle BOA'$
$\shortparallel$
$\measuredangle AOA' = \pi$

$\measuredangle AOB = \pi - \measuredangle BOA'$

$\measuredangle AOB = \pi + \measuredangle A'OB$

P11 D/O ne dépd pas choix de O & les mesures d'angles orientés entre $\frac{1}{2}$-droites respecte la règle de Chasles.

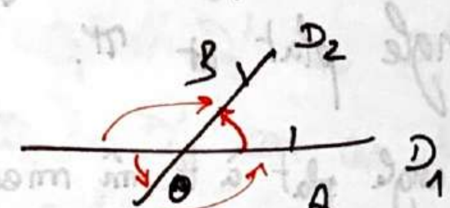
$$T_{\overrightarrow{AO'}} = T_{\overrightarrow{OO'}} \circ T_{\overrightarrow{AO}} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AO'}}([AB]) = T_{\overrightarrow{OO'}}([OB'])$$

$$T_{\overrightarrow{CO'}} = T_{\overrightarrow{OO'}} \circ T_{\overrightarrow{CO}} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CO'}}([CD]) = T_{\overrightarrow{OO'}}([OD'])$$

et comme $T_{\overrightarrow{OO'}}(\measuredangle BOD') = \measuredangle BOD'$

P12 Si la mesure orientée d'un angle est α $[2\pi]$ la mesure orientée de son angle supplémentaire est $\alpha - \pi$ $[2\pi]$. Ainsi un angle & son supplt ont la m̂ mesure algébriq $[\pi]$.

D13 La mesure d'angle orienté entre 2 droites sécantes est déf $[\pi]$ ĉ soit $\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle AOB$ $[\pi]$ si $D_1 = (OA)$, $D_2 = (OB)$. La mesure d'angle orienté $\leftrightarrow$ 2 droites // (confondues ou pas) est 0 $[\pi]$.



$$\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle AOB \ [\pi].$$

droites non orientés

orientés

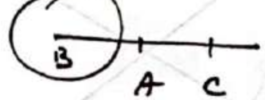
(P15) A, B, C alignés $\Leftrightarrow \measuredangle ABC = 0\ [\pi]$

→ soit $\measuredangle ABC$ est plat $\Rightarrow \measuredangle ABC = \pi$.

→ soit $\widehat{ABC}$ nul $\Rightarrow \measuredangle ABC = 0 \Rightarrow 0\ [\pi]$

si $\measuredangle ABC = 0\ [\pi]$

– soit $\widehat{ABC} = 0$



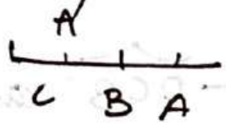
$\Rightarrow [BA) \cap \mathscr{C}(B,R) = A'$

$[BC) \cap \mathscr{C}(B,R) = C'$

$\Rightarrow \widehat{A'C'} = 0 \Rightarrow A' \equiv C'$

$\Rightarrow [BA) = [BA') \equiv [BC') \equiv [BC)$

– soit $\widehat{ABC} = \pi$

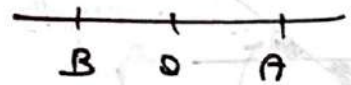


$\widehat{ABA'} = \pi \overset{\text{chasles}}{\Rightarrow} \widehat{A'BC} = 0\ [2\pi]$

$\Rightarrow A', B, C$ alignés

$\Rightarrow A, B, C$ alignés

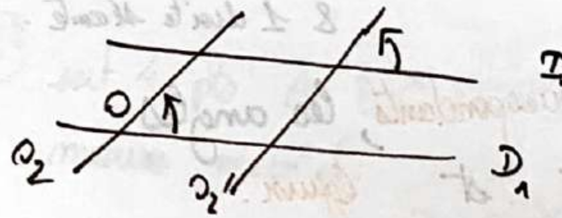
(R4) 16 · droites confondues peut ê considérées $\hat{c}$ sécantes.



(P17)

si $D_1 \parallel D_1'$ & $D_2 \parallel D_2'$

$\Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle(D_1', D_2')$.



$\measuredangle(D_1', D_2')$

cas 1) si $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow D_1' \parallel D_2' \Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = 0$

cas 2) si $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 = O$.

$\Rightarrow D_1' \parallel D_2' \Rightarrow D_1' \cap D_2' = O'$

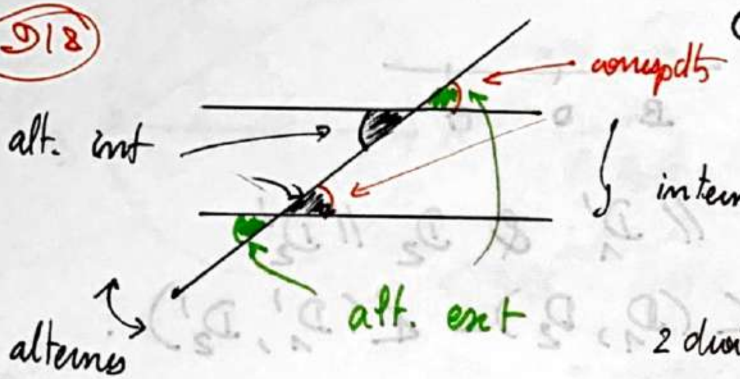
$\Rightarrow T_{\vec{OO'}}(D_1) = D_1'$ car ces 2 droites st $\parallel$ à D_1 & contiennent O'.

De m̂ $T_{\vec{OO'}}(D_2) = D_2'$

→ comme les isométries directes (ep les translaOs) préservent les angles orientés.

$\Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle(D_1', D_2')$ (orientés.

D18



2 droites //
& 1 droite sécante.

P19 Les angles correspondants, les angles alt. int, ext et égaux.
La somme de 2 autres angles est π.
(Réciproq vraie).

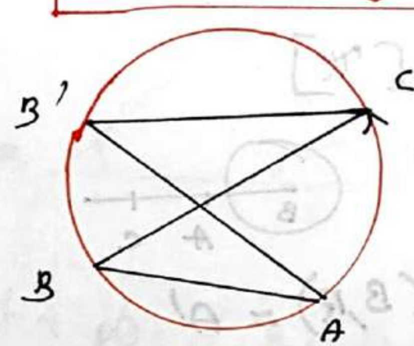
D20 A, B, C pts cercle $\mathcal{C}$. On dit que l'angle orienté $\measuredangle ABC$ est inscrit ds le $\mathcal{C}$ & qu'il éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC}$.

angle central si B=O.

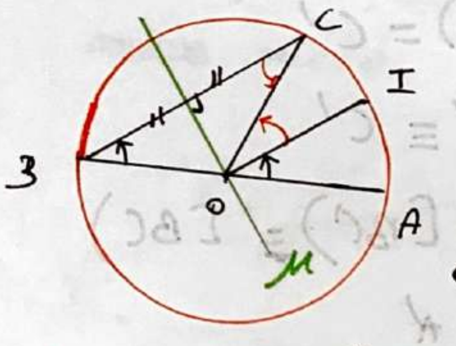
angle inscrit

P21 soit un angle orienté inscrit $\measuredangle ABC$ q éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC} \Rightarrow$

$$\boxed{\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\widehat{AC}}$$



P21



DM si [AB] diamètre, OI // BC, O $\frac{1}{2}$ [AB]

$\measuredangle AOI = \measuredangle OBC$ (correspdts)

$\measuredangle IOC = \measuredangle BCO$ (alt. int

$\measuredangle OBC = -\widehat{OCB}$ car image p symétrie de μ = médiatrice de [BC] $\ni$ O (OB = OC = R)

isométrie indirecte.

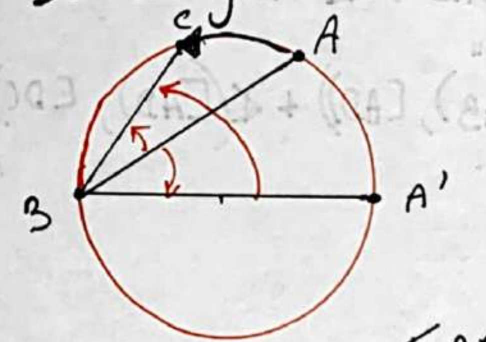
Ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{AOI} = \widehat{IOC}$

et $\widehat{AOI} + \widehat{IOC} = \widehat{AOC} = \widehat{AC}$.

$\widehat{ABC} + \widehat{ABC} = \widehat{AC}$

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}}$$

Ds cas général:



soit $[BA']$ diamètre

$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$

$\widehat{A'BA} = \frac{1}{2}\widehat{A'A}$

Chasles

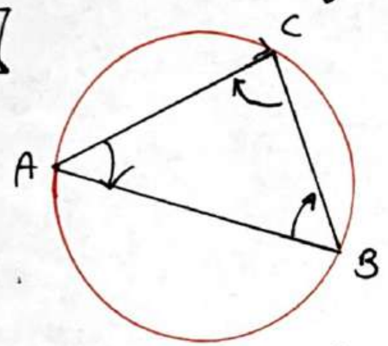
$\sphericalangle ABC = \widehat{ABA'} + \widehat{A'BC}$

$= \frac{1}{2}(\underbrace{\widehat{AA'} + \widehat{A'C}}_{\widehat{AC}})$

P22

La somme des angles ds un triangle est π.

$\boxed{\text{MI}}$



on considère le cercle circonscrit de $\triangle ABC$.

• Pr les angles orientés (ds le m̂ sens) on a l'égalité

$= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB$

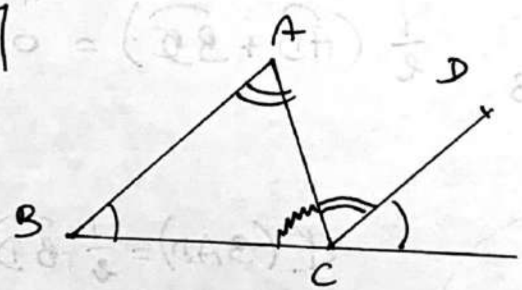
$= \frac{1}{2}\widehat{AC} + \frac{1}{2}\widehat{BA} + \frac{1}{2}\widehat{CB}$

$= \frac{1}{2}$ tour complet $= \frac{1}{2}(\pm 2\pi) = \pm\pi$.

$\Rightarrow$ l'égalité des angles non orientés.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = \pi$.

$\boxed{\text{MI}}$

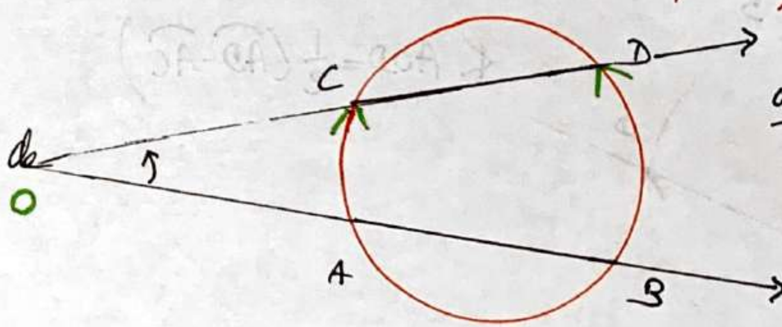


$\Rightarrow \quad + \quad + \quad = \pi$

(prop)

$CD \parallel AB$.

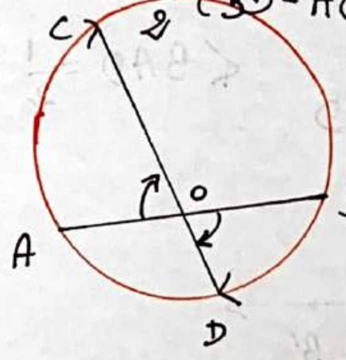
P24 soit 4 pts A, B, C, D d'un cercle $\mathcal{C}$. Entre mesures orientés: $\sphericalangle([AB],[CD]) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$



cas1 Conséquences

$\sphericalangle BOD = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$ (non orienté).

se coupe à l'int

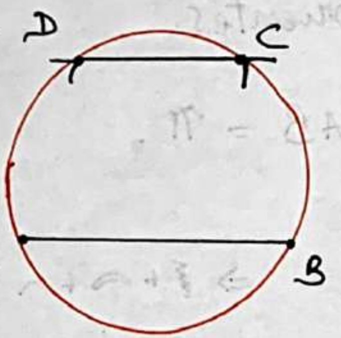


$\sphericalangle AOC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$

non-orienté.

cas2

cas 3



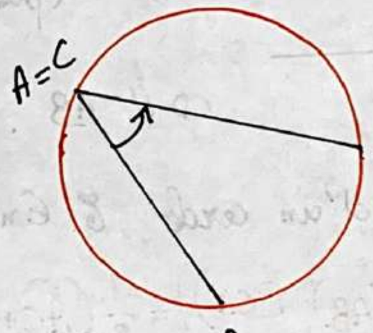
$\widehat{AD} = \widehat{CB}$

$\measuredangle([AB), [CD)) = 0$

$\frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 0$

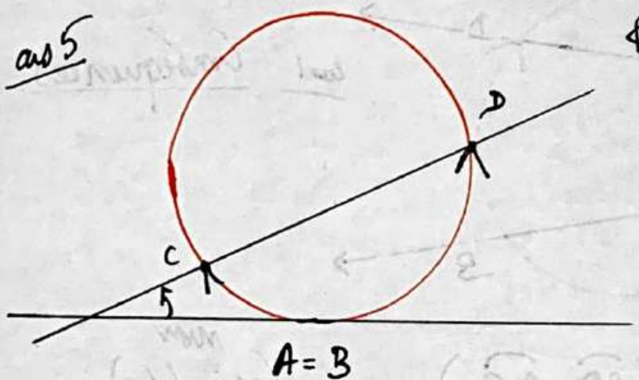
cas 4

se coupent sur le cercle.



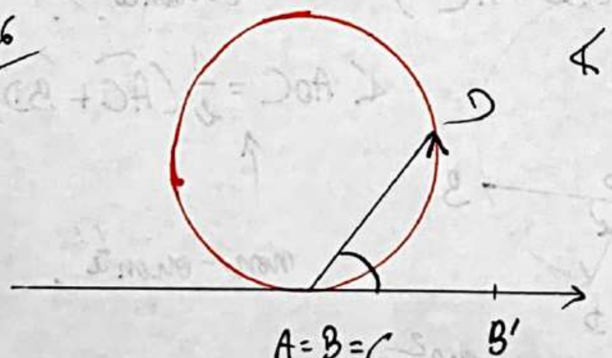
$\measuredangle(BAD) = \frac{1}{2}\widehat{BD}$.

cas 5



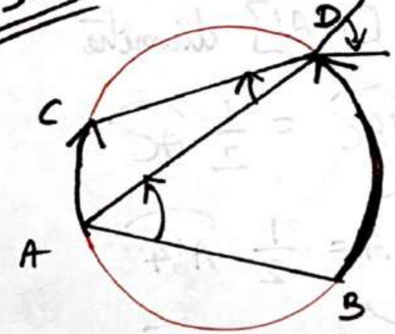
$\measuredangle AOD = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{AC})$

cas 6



$\measuredangle B'AD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$.

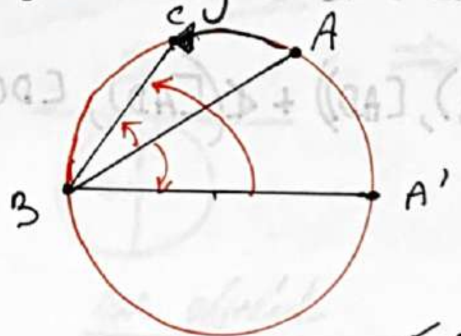
JM



$\measuredangle BAD + \measuredangle ADC =$

$\measuredangle([AB), [AD)) + \measuredangle([AD), [DC))$

Ds cas général:



soit $[BA']$ diamètre

$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$

$\widehat{A'BA} = \frac{1}{2}\widehat{A'A}$

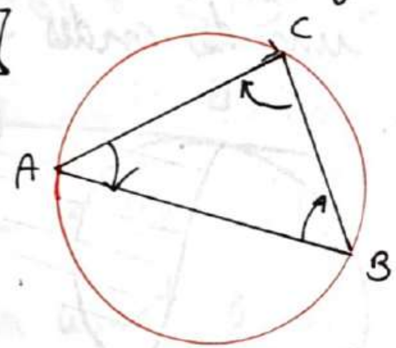
$\measuredangle ABC \overset{\text{chasles}}{=} \widehat{ABA'} + \widehat{A'BC}$

$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{\widehat{AA'} + \widehat{A'C}}_{\widehat{AC}}\big)$

P22

La somme des angles ds un triangle est π.

$\boxed{\text{MI}}$



on considère le cercle circonscrit de $\triangle ABC$.

Pr les angles orientés (ds le m̂ sens) on a l'égalité

$= \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$

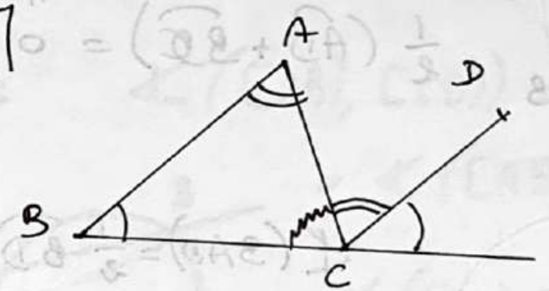
$= \frac{1}{2}\widehat{AC} + \frac{1}{2}\widehat{BA} + \frac{1}{2}\widehat{CB}$

$= \frac{1}{2}$ tour complet $= \frac{1}{2}(\pm 2\pi) = \pm\pi$.

$\Rightarrow$ l'égalité des angles non orientés.

$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \pi$.

$\boxed{\text{MI}}$

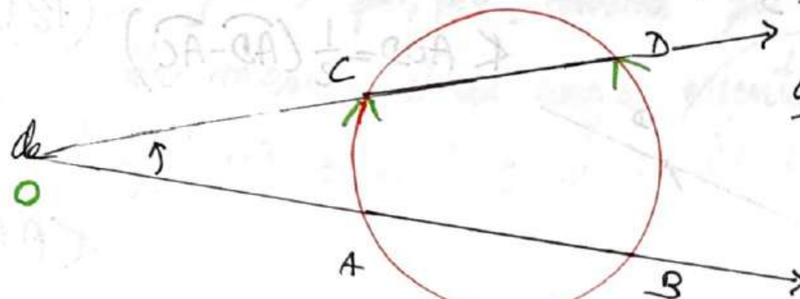


$\Rightarrow \xi + \frown + \frown = \pi$

(prop)

$CD \parallel AB$.

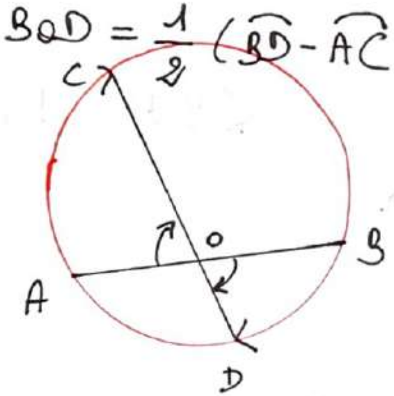
P24 soit 4 pts A, B, C, D d'un cercle $\mathscr{C}$. Entre mesures orientés: $\measuredangle([AB],[CD]) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$



cas 1 Conséquences

$\measuredangle BOD = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$ (non orienté).

de coupe à l'int

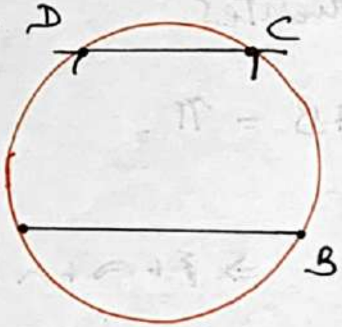


$\measuredangle AOC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$

non-orienté.

cas 2

cas 3

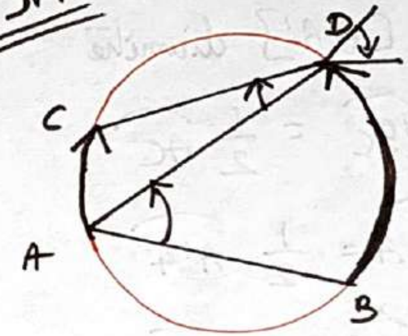


$\widehat{AD} = \widehat{CB}$

$\measuredangle([AB),[CD)) = 0$

$\frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 0$

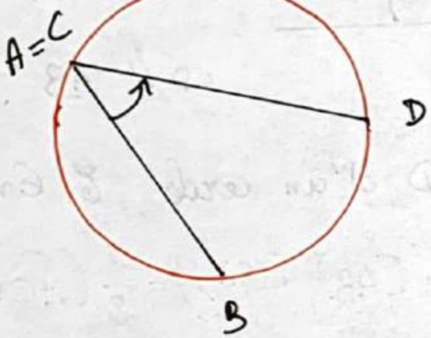
IM



$\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = \measuredangle([AB),[AD)) + \measuredangle([AD),[DC))$

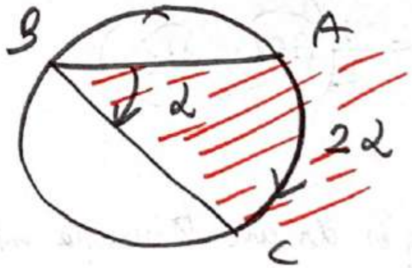
cas 4

se coupent sur le cercle.



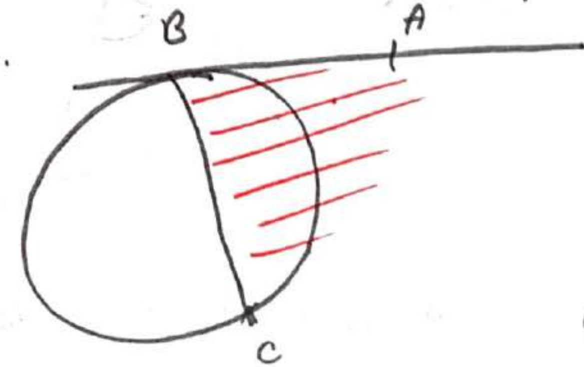
$\measuredangle(BAD) = \frac{1}{2}\widehat{BD}$.

RO



C

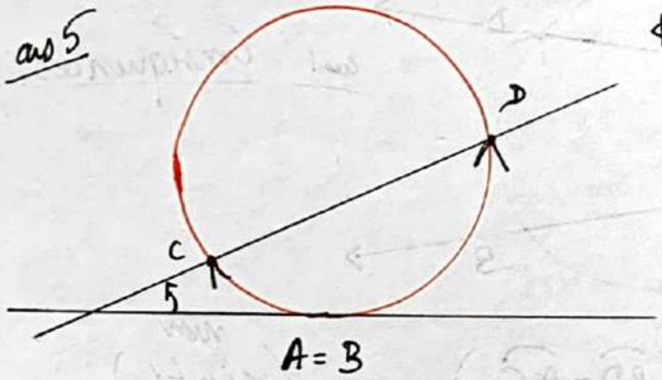
P21 reste vraie si une des cordes est remplacée par une tangente.



$\measuredangle ABC = \frac{\widehat{BC}}{2}$

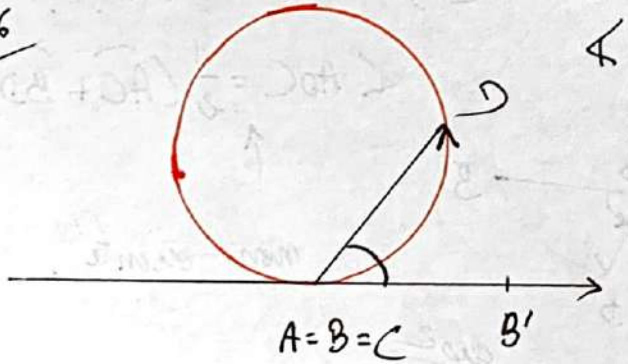
si (BA) tangente en B.

cas 5



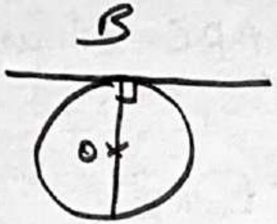
$\measuredangle AOD = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{AC})$

cas 6



$\measuredangle B'AD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$.

DM 1° cas : Si [BC] diamètre

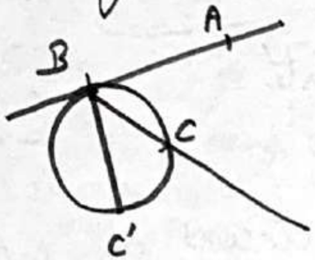


$\Rightarrow \measuredangle ABC = \frac{\pi}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

car (AB) tgte $\mathcal{C}$

[CB] diamètre

cas général



Soit C' tq [BC'] diamètre.

on a égalité d'angles orientés :

$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC' + \measuredangle C'BC$

on a aussi égalité des mesures algébriqs des axes.

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC'} + \overset{\frown}{C'C}$ (Chasles)

Ainsi en usant le cas 1 + p21

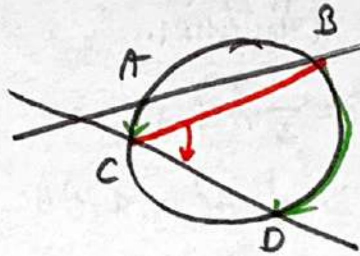
$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC' + \measuredangle C'BC$

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC'} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{C'C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

P24 | soit A, B, C, D d'un cercle $\mathcal{C}$.

$\measuredangle([AB),[CD)) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$

DM $\measuredangle([AB),[CD)) =$



$= \measuredangle([AB,[CB)) + \measuredangle([CB),[CD))$

$\measuredangle([BA),[BC)) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$; $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

Au final, p21, p24, comme peut se résumé :

[La mesure d'un angle orienté est la somme des (une) arc(s) orienté(s) q st à l'intérieur de l'angle.]

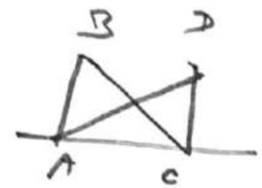
D25 A, B, C, D de $\mathcal{C}$ st cocycles ou alignés

ssi $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \; [\pi]$.

DM

1° cas si A & D st m̂ côté $\mathcal{P}$ (AC)

$\Rightarrow \measuredangle ABC$ & $\measuredangle ADC$ ont m̂ orientaθ

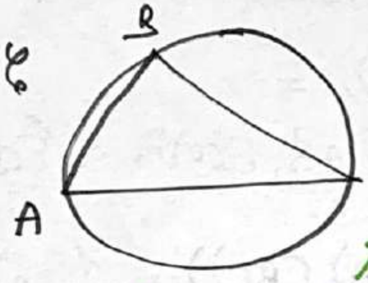


Ainsi soit les 2 angles st ds $[0, \pi]$ soit ds $[-\pi; 0]$

(31) ccl $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC [\pi] \Leftrightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle ADC \in]0, \pi[$ ou $]-\pi, 0[$

ou $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ADC \in \{\pm\pi, 0\}$

ds ce cas A, B, C, D st alignés.



soit 𝒞 le cercle circonscrit du $\triangle ABC$.

si D à l'intérieur $\Rightarrow \measuredangle ADC = \frac{1}{2}\widehat{AC} + \dots$

angles non orientés

$> \frac{1}{2}\widehat{AC} = \measuredangle ABC$

si D à l'ext $\Rightarrow \measuredangle ADC = \frac{1}{2}\widehat{AC} - \dots$

$< \frac{1}{2}\widehat{AC} = \measuredangle ABC.$

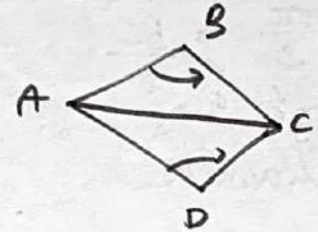
si $D \in$ 𝒞 $\Rightarrow \measuredangle ADC = \frac{1}{2} AC = \measuredangle ABC.$

en cl A, B, C, D cocycliques $\boxed{\text{ssi}}$

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \in \begin{matrix}]0,\pi[\\ ]-\pi,0[\end{matrix}$

$\boxed{\text{ori}}$ $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC\ [\pi]$

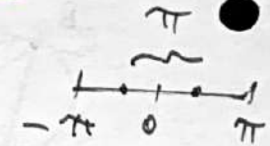
2° cas si A & D st côtés opp. p/ (AC)



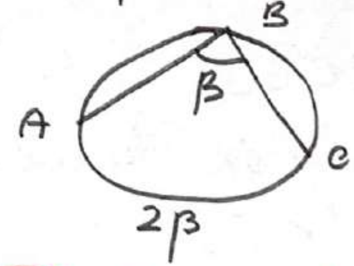
$\Rightarrow \measuredangle ABC$ & $\measuredangle ADC$ ont une rotat° opposé

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \underbrace{\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = \pi}_{\text{non orienté}}$

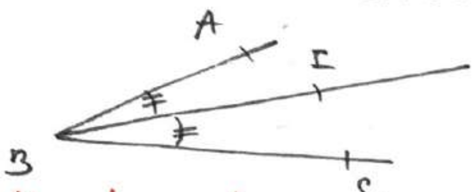


c ds le cas précédent, on ⊕ ⊕ la posit° de D / 𝒞 circons au $\triangle ABC$.



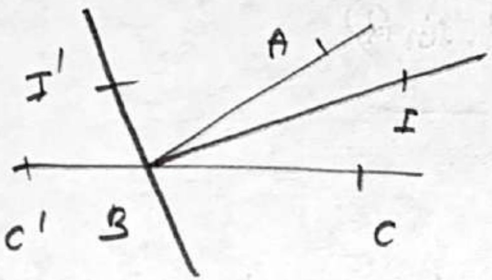
$\widehat{ABC} = 2\pi - 2\measuredangle ABC$

D26 La bissectrice int d'un angle $\measuredangle AOB$ est [BC) / $\measuredangle AOC = \measuredangle COB$.



D26 La bissect. ext d'un angle est la droite perpendiculR & q passe p sommet de angle

P28 La be est la bi de l'angle supplément. DM soit $d(M, BA) = d(M, BC) \Leftrightarrow MA = MC$



comme BM est une hypothénuse des ⊿ ABM et ⊿ CBM. Par pythagore, le 3° côté est aussi = $\Rightarrow BA = BC \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBM$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBM} \Rightarrow BM$ bissectrice.

$\Rightarrow M \in$ bissectrice.

- soit $\measuredangle ABC'$ supp $\measuredangle ABC$ &

BI' bisr de $\widehat{ABC'}$
BI $\widehat{ABC}$

$$\left\{ \begin{aligned} \pi &= \measuredangle CBA + \measuredangle \widehat{ABC'} \\ &= 2\widehat{IBA} + 2\widehat{ABI} \\ &= 2\widehat{IBI'} \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow \widehat{IBI'} = \frac{\pi}{2}$.

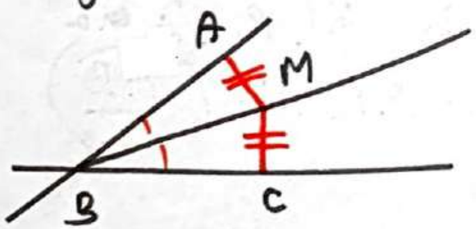
si $M \in$ bissectrice $\Rightarrow \measuredangle ABM = \measuredangle CBM$

& $2 \measuredangle BAM = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MCM$ $(\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BMC})$

& le côté BM est commun $\Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBM$

$\Rightarrow MA = MC$.

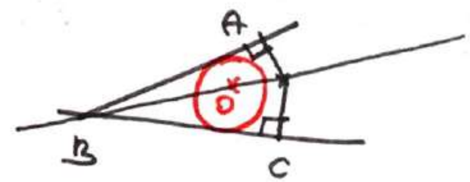
P29 Un point à l'intérieur d'un angle est sur la bissectrice ssi s'il est à distances égales des 2 côtés de l'angle.

- 

$A = \pi_M$ projecO
$C = \pi_M$ sur côté
$B =$ sommet de l'angle

P30 La bissectrice est l'ensemble des centres des cercles tangents aux 2 côtés de l'angle.

DM soit $O \in BI$ bissectrice de ABC.



$\Rightarrow d(O, (BA)) = d(O, (BC)) := r$ & (BC)

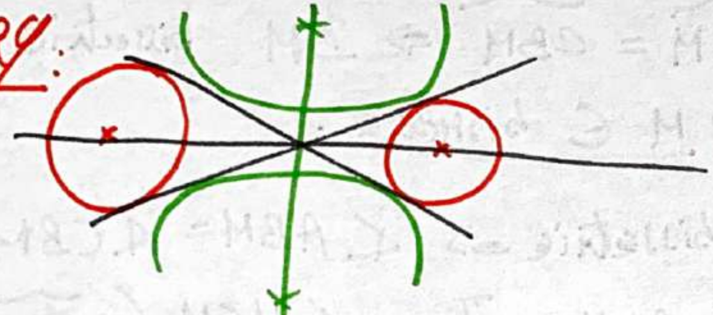
$\Rightarrow \mathscr{C}(O, r)$ tangent aux 2 côtés (BA)

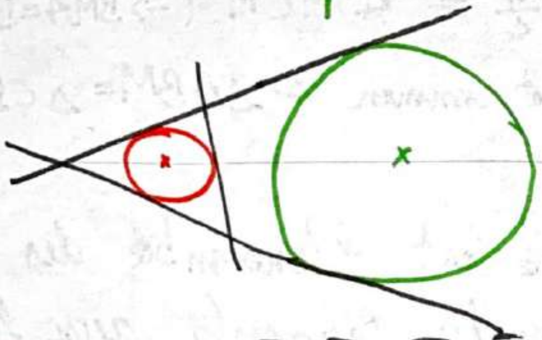
- si $\mathcal{C}(O,r)$ tangent aux côtés (BA) & (BC)

$\Longrightarrow d(O,(BA)) = r = d(O,(BC))$

P29. $\Longrightarrow O \in$ bissectrice.

RQ :





---

soit M milieu de $[AB]$

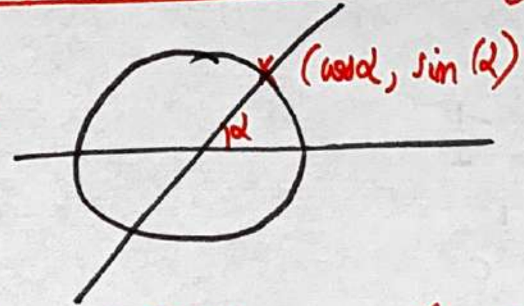
$\alpha = \measuredangle BOM = \measuredangle MOA \; ; AB = 2a$

$\frac{a}{R} = \sin(\alpha) \Longleftrightarrow \boxed{\frac{AB}{2} = R \sin\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)}$

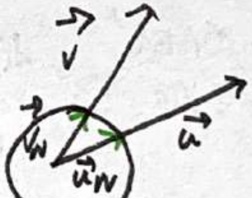
// trigos

§ 20. Fonctions trigonométriques

D1

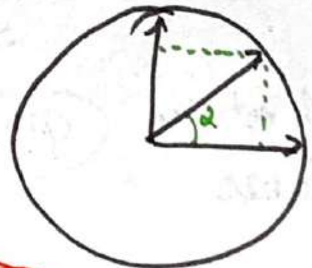


D2 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\measuredangle(\vec{u},\vec{v})) . \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$



$\vec{u} = \|\vec{u}\| \; \vec{u}_N$ $\quad$ u normalisé

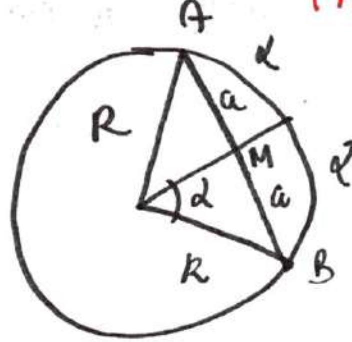
$\vec{v} = \|\vec{v}\| \; \vec{v}_N$.



D4 soit $[AB]$ une corde de $\mathcal{C}(R)$ rayon ; on a

$AB = 2R \sin\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)$

$\exists M \to$

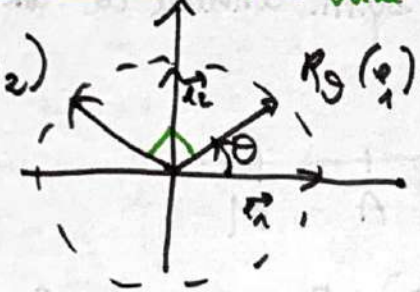


§21. Rota°s

(D1) $\mathcal{L}$(AL) dt mat $R^{\vartheta} = (e_1\ e_2)$ est rota° linéaire d'angle $\theta\ [2\pi]$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e_1 e_2 base orme de $\mathbb{R}^2$

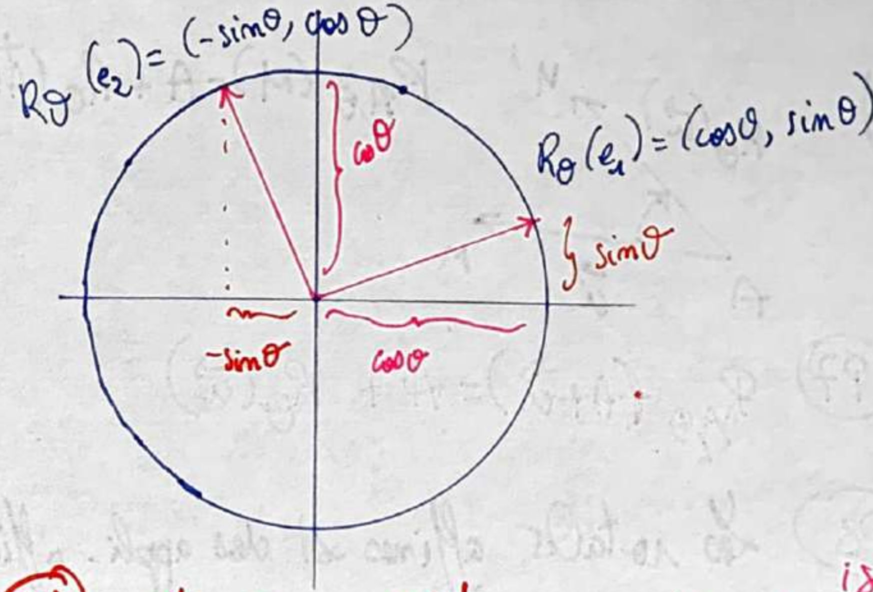
- 

(P2) $R_0 = Id$ & c'est rota° triviale.

(P3) $R_{\theta_1} R_{\vartheta_2} = R_{\theta_1 + \vartheta_2}$

- $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\vartheta_2) & \\ & \end{pmatrix}$

Le ff trigos pr vérifier



(P4) $R_\theta^t = R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$, dc Rota°s st isométries linéaires.

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR_\theta$$

$$R_\theta \circ R_{\theta-} = R_0 = Id.$$

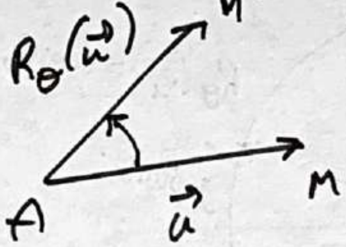
(P5) $R_\theta(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\theta = 0\ [2\pi]$

ie l'uniq vect$^{\text{r}}$ fixe d'une rota° non triviale est $\vec{0}$.

DM

$$Spec(R_\theta) = e^{\pm i\vartheta}$$

Ainsi cette matrice admet une mat fixe non nul ssi 1 v.p. $\Leftrightarrow e^{\pm i\vartheta} = \{1\} \Leftrightarrow \theta = 0\ [2\pi]$

Rq 

$R_{A,\theta}(M) = A + R_\theta(\vec{AM})$

(P7) $R_{A,\theta}(A+\vec u) = A + R_\theta(\vec u)$

(P8) Les rotaOs affines st des appli. affines.

conséq pcq ; si F linéaire $A+\vec u \mapsto A+F(\vec u)$ affine & ĉ $F = R_\theta$ linéaire ⇒ cl.

(P9) $R_{A,0} = Id$ (RotaO affine) triviale.

Tout point est un centre de la rotaO triv.

DM $R_{A,0}(M) = A + R_0(\vec{AM}) = A + \vec{AM} = M$

$\Rightarrow R_{A,0} = Id$ (cp $\forall M$ est fixe p. $R_{A,0}$)

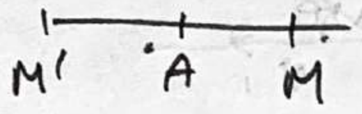
& $\forall A'$, $R_{A,0} = Id = R_{A',0}$

(P10) $R_{A,\pi} = S_A$ est symétrie centrale de centre A.

DM $R_\pi = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow R_\pi(\vec u) = -\vec u$.

ainsi $R_{A,\pi}(A+\vec u) = A - \vec u$

⇒ c'est la sym. centrale de centre A $(= H_{A,-1})$



(P11) $R_{A,\theta}(B) = B \iff A = B$ ou $\theta = 0\ [2\pi]$

ie l'uniq point fixe d'une rotaO non triviale est son centre.

DM $R_{A,\theta}(B) = B$

$\quad = A + R_\theta(\vec{AB}) \Rightarrow R_\theta(\vec{AB}) = \vec{AB}$

$\iff \theta \neq 0\ [2\pi]$ & $\vec{AB} = 0 \iff A = B$

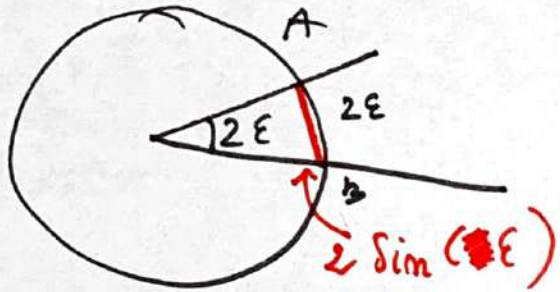
$\theta = 0\ [2\pi]$ & pas condit° s. $\vec{AB}$.

(P12) Un cercle est invariant par les rotations du même centre que ce cercle.

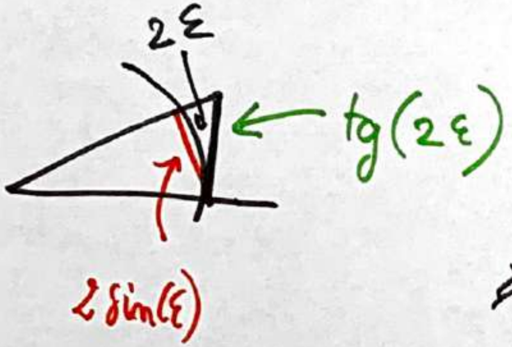
<u>Idée</u> Pr $\frac{AB}{2} = e \sin\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right).$

- $\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ ↳ (f) trigos

  $\frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \cos(x)$

- 

$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{AB}{\widehat{AB}}}$



À propos (P10) : !

$H_{\frac{A'B'}{AB}, *}(\Delta ABC) = \Delta A''B''C''$

↑ n'importe q^l centre

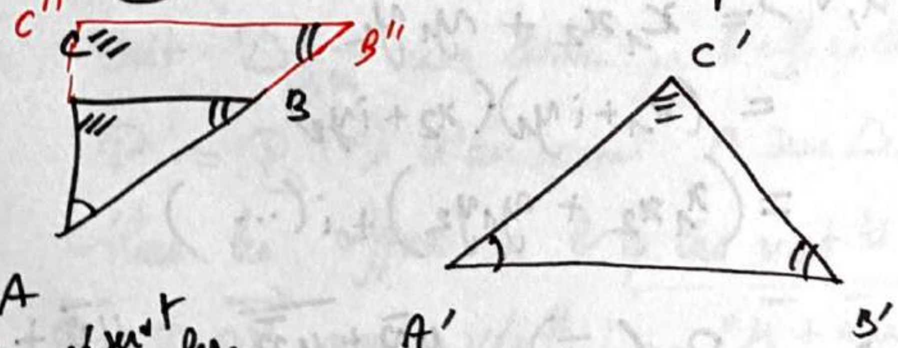
- $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$, $A''B'' = AB \dfrac{A'B'}{AB} = A'B'$.

en al, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \iff$

$\Delta A'B'C' = \Delta A''B''C''$.

& ttes les propriétés et des tracés

de (P6) 4 $A''B''C''$ à la place de ABC



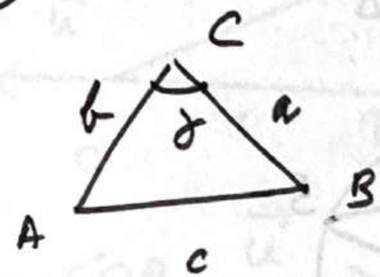
} préservent angles.

tels/ts symétries rotations homothéties

symétrie & isométrie ⇒ similitude.

(46)

(28) Al-Kashi



$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$.

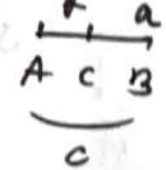
$c^2 = \|\vec{AB}\| = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle$

$= \langle \vec{CB} - \vec{CA}, \vec{CB} - \vec{CA} \rangle$

$= \|\vec{CB}\|^2 - 2 \langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle + \|\vec{CA}\|^2$

$= a^2 - 2ab\cos(\gamma) + b^2$

(Rq) $C \in [AB]$, ΔABC dégénéré

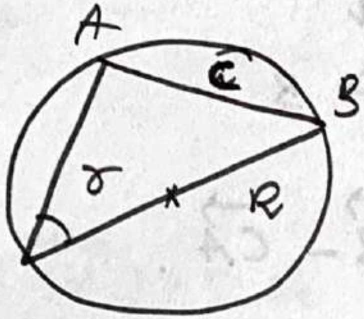


$c = a + b \to c^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\cos(\gamma) = \cos(\pi) = -1$.

$\measuredangle C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Pythagore $\sim \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(29) Loi des sinus



$c = AB = 2R\sin\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right) = 2R\sin(\gamma)$

$\Rightarrow \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$

de même pr $\dfrac{a}{\sin(\alpha)}$ & $\dfrac{b}{\sin(\beta)}$, ainsi

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (= 2R)$$

§23: Nombres Complexes.

(D1) Étant donné point $P(x,y)$; resp $\vec{u}(x,y)$
le nombre complexe $z := x+iy$ l'affixe de P
(resp $\vec{u}$) & on note $P(z)$ (resp $\vec{u}(z)$).

(P3) soit a, μ, b affixes respectifs A, $\vec{u}$, B,
$B := A + \vec{u} \Longrightarrow b = a + \mu$.

(P4) soit μ, v affixes de $\vec{u}$ & $\vec{v}$:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \mathrm{Re}(\mu\bar{v}) = \frac{1}{2}(\mu\bar{v} + \bar{\mu}v)$$

Dm $\vec{u}(\mu)$, $\mu = x_1 + iy_1$ $\quad \vec{u}(x_1, y_1)$
$v = x_2 + iy_2$ $\quad \vec{v}(x_2, y_2)$.

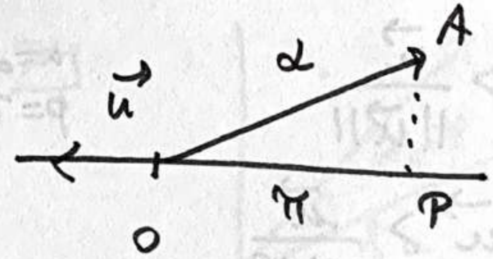
$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(\dots)\end{aligned}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \mathrm{Re}(\mu\bar{v}) = \frac{\mu\bar{v} + \overline{\mu\bar{v}}}{2} = \frac{\mu\bar{v} + \bar{\mu}v}{2}$$
$$= \mathrm{Re}(\bar{\mu}v)$$

(47)

P5 soit μ & υ affixes de $\vec{u}$ & $\vec{v}$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \mu\bar{\upsilon} \in i\mathbb{R}$$
$$\iff \frac{\mu}{\upsilon} \in i\mathbb{R}.$$



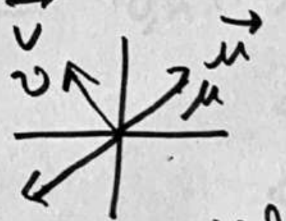
$$\vec{OP} = \left\langle OA, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\iff P = O + \langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

DM

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ssi $\mathrm{Re}(\mu\bar{\upsilon}) = 0$

ssi $\mu\bar{\upsilon} \in i\mathbb{R}$



ssi $\dfrac{\mu\cancel{\bar{\upsilon}}}{\upsilon\cancel{\bar{\upsilon}}} \in i\mathbb{R}$

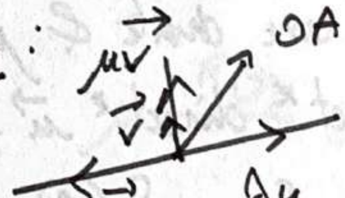
$i\upsilon$ $\quad \mu = i\upsilon\lambda$

$i\lambda = \dfrac{\mu}{\upsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\in$

$i\mathbb{R}$

NB :



$\langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle =$

$= \langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{u} \rangle$

$= \lambda \|\vec{u}\|^2 + \mu.0$ car $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OP} = \lambda\vec{u} = \frac{\langle OA, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|} \vec{u}}$$

P6 Soit $D_{O,\vec{u}}$ une droite μ l'affixe de $\vec{u}$.

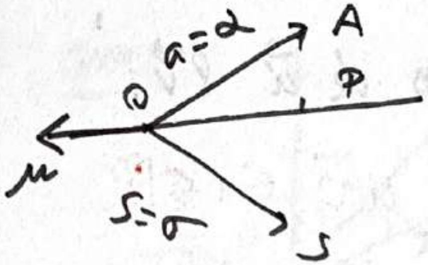
$P := P_D(A)$ d'un point A sur D.

Alors les affixes a & p des vect^{rs} $\vec{OA}$ & $\vec{OP}$ resp, vérif^t

$$\boxed{p = \frac{a\bar{\mu} + \bar{a}\mu}{2\bar{\mu}}}$$

$$\vec{OP} = \left\langle OA, \frac{\vec u}{\|\vec u\|} \right\rangle \frac{\vec u}{\|\vec u\|}$$

$a = \alpha$
$p = \pi$



$$\frac{\alpha+\sigma}{2} = \pi \quad \left(\frac{\vec{OA}+\vec{OS}}{2} = \vec{OP} \right)$$

$$\Longleftrightarrow p = O + \langle \vec{OA}, \vec u \rangle \frac{\vec u}{\|\vec u\|^2}$$

$$\frac{\alpha+\sigma}{\cancel{2}} = \frac{\alpha\bar\mu + \bar\alpha\mu}{\cancel{2}\bar\mu}$$

$$\pi = \frac{\alpha\bar\mu + \bar\alpha\mu}{2} \cdot \frac{\cancel{\mu}}{\cancel{\mu}\bar\mu} = \frac{\alpha\bar\mu + \bar\alpha\mu}{2}$$

$$\cancel{\alpha} + \sigma = \frac{\cancel{\alpha\bar\mu} + \bar\alpha\mu}{\bar\mu}$$

$\left(\frac{\vec u}{\|\vec u\|^2} \right.$ a μ affixe $\frac{\mu}{\mu\bar\mu} = \frac{1}{\bar\mu}$

$$\Longleftrightarrow \bar\mu\sigma = \bar\alpha\mu.$$

$$(\Longleftrightarrow \mu\bar\sigma = \alpha\bar\mu)$$

P7 soit $D_{O,\vec u}$ une droite & μ l'affixe du vect^{re} direct^{r} $\vec u$. Soit pt sym $S := S_D(A)$ d'un point A par rapport D. Alors les affixes a & s des vecteurs $\vec{OA}$ & $\vec{OS}$, resp. vérifient $s\bar\mu = \bar a\mu$.

$$\sigma\bar\mu = \bar\alpha\mu$$

P8 soit w, α, β affixes de O, A, B où $B = H_{O,\lambda}(A)$ Alors

$$\beta = w + \lambda(\alpha - w).$$

$$b = w + \lambda(a - w)$$

DM, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u}\,(x,y) = \vec{u}(\mu)$

↳ $\mu = x+iy.$

$$\lambda\,\vec{u}(\lambda x, \lambda y) = \lambda\vec{u}(\lambda\mu)$$

$$\| \quad H_\lambda(\vec{u}) \qquad \text{où } \lambda\mu = \lambda x + i\lambda y$$

- $B = H_{O,\lambda}(A) \Rightarrow B = O + \lambda\,\vec{OA}$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} = \lambda\,\vec{OA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} = H_\lambda(\vec{OA})$$

$$\Leftrightarrow (b-\omega) = \lambda(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b = \omega + \lambda(a-\omega)}$$

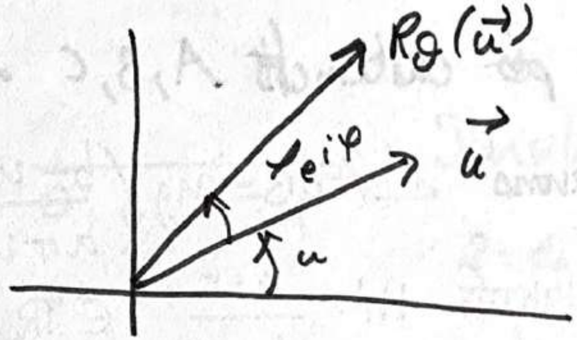
79

Soit ω, a, b, où $B = R_{O,\theta}(A)$ est l'image de A par la Rotation $R_{O,\theta}$.

$$\Longrightarrow \cancel{b}\ \boxed{b = \omega + e^{i\theta}(a-\omega)}$$

Hom multipl^e réel
Rota multipl. mod 1
Rotaθ + Hom = Similitude

DM



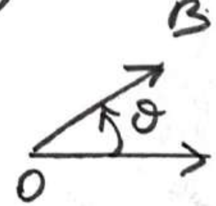
$R_\theta(\vec{u})$ a pour affixe $\rho e^{i(\theta+\varphi)}$ =

$$= e^{i\theta}\underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\text{affixe de } \vec{u}}.$$

Ainsi $u \xrightarrow{R_\theta} R_\theta(\vec{u})$

$$\mu \xrightarrow{R_\theta} e^{i\theta}\mu.$$

Ainsi $B = R_{O,\theta}(A)$



$$\Leftrightarrow B = O + R_\theta(\vec{OA})$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} = R_\theta(\vec{OA})$$

$$\Leftrightarrow (b-\omega) = e^{i\theta}(a-\omega)$$

50 $\Leftrightarrow \boxed{b = \omega + e^{i\theta}(a-\omega)}$

(P11) Pr 3 pts distincts A, B, C d'affixes a, b, c :

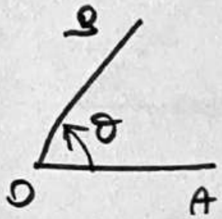
a) ns avons $\measuredangle AOB = \arg\left(\dfrac{b-w}{a-w}\right)\ [2\pi]$

b) st alignés ssi $\dfrac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

c) $C \in [AB]$ ssi $\dfrac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}^-$

DM

a)



$\lambda > 0$

$\vartheta = \measuredangle AOB \iff R_\vartheta(\overrightarrow{OA}) = \lambda \overrightarrow{OB}$

$\iff e^{i\theta}(a-w) = \lambda(b-w)$

$\iff e^{i\theta} = \lambda \dfrac{b-w}{a-w}$

$\iff \arg\left(\dfrac{b-w}{a-w}\right) = \vartheta$

car $\arg(\lambda z) = \arg(z)$ si $\lambda > 0$.

rotation homoth. → $e^{i\theta}$ rotation

mult par nbre complexe

b) En remplaçant O par C de a)

$\measuredangle ACB = \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$

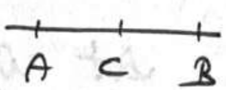
A, C, B alignés ssi $\measuredangle ACB = 0\ [\pi]$

ssi $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) = 0\ [\pi]$

ssi $\dfrac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$

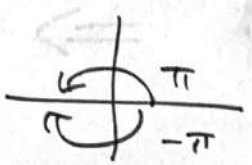
c) $C \in [AB]$

ssi $\measuredangle ACB = \pi$

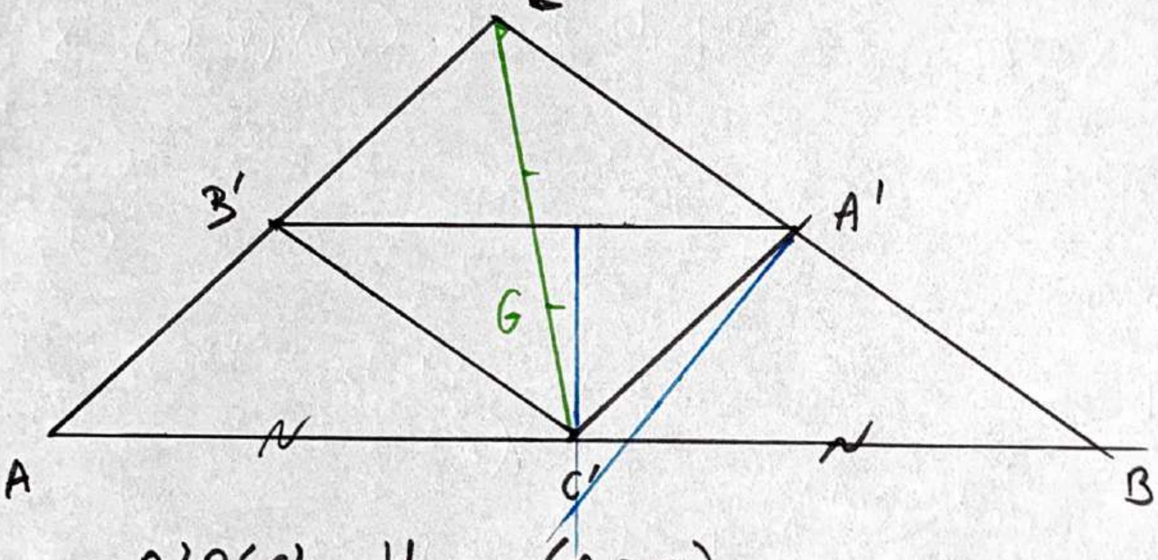


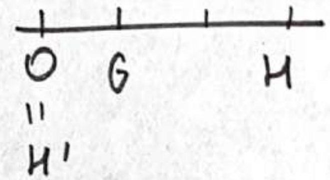
ssi $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) = \pi\ [2\pi]$

ssi $\dfrac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}^-$



P22 Les 3 hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.





Droite d'Euler.

2 : 1.

- $A'B'C' = H_{G,\frac{1}{2}}(ABC)$

$ABC = H_{G,-2}(A'B'C')$

- $H_{G,-\frac{1}{2}}(\underset{H'}{\overset{\shortparallel}{O}}) = H$

NB :  OGH confondus ds triangle équilatéral.

52