M42

C1 Dualité

I / Formes linéaires & espace dual

D1 Lorsq $F = \mathbb{K}^1$, on appelle les élts de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ **formes linéaires** sur E, et on appelle $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ **espace dual de E**.

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1) \overset{not}{=} E^*.$$

- Bijectⁿ linéaire: $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

  $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$, $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_m)$ $\quad \varphi \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$

- Changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi).\, T$
- Cas général : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1}.\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)$

II / Hyperplans

D1 Un **hyperplan** de E est un $\mathbb{K}$-e-v de E de dim $n-1$. (où $n = \dim E$).

P1 soit E ev $\neq 0$.

(i) pr tte forme linéaire l non nulle pour E, son noyau $\ker l$ est un **hyperplan de E**.

(ii) pr tt hyperplan H de E, $\exists$ une forme linéaire l non nulle sur E, uniq à un factᵉᵘʳ non nul près, tq $\ker l = H$.

III / Base duale

P2 soit E un $\mathbb{K}$-e-v, de dim n, soit $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\dots,e_n^*)$ où pr chq $i = 1,\dots,n$ $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}^1$ est la **forme linéaire** associant à tout vecteur de E son i-ème coordonné ds la base $\mathcal{E}$, est une base de E^*.

D2 La base $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ introduite ds P2 s'appelle **base duale de $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$**.

Cor si $\dim E < \infty$ alors $\dim E^* < \infty$ et $\dim E = \dim E^*$

D2' Def $\Longleftrightarrow$ base duale

Une base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E^* est la base duale de $(e_1,\dots,e_n)$ base de E ssi $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$: delta de Kronecker. $i,j = 1,\dots,n$ ($n = \dim E$)

IV / Base anté-duale

D3 soit E ev de dim finie n et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de E^*. Une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E, $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ pr tous $i,j = 1,\dots,n$ s'appelle **base anté-duale de $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$**.

P3 soit E ev, $\dim E = n$. Alors toute base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E^* admet une $\boxed{\text{uniq}}$ **base anté-duale**.

P4 soit E ev, $\dim E = n$, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors pr les mat de passage : $P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}\right)^{-1}$

R9 Adit, $F^{\perp}$ est l'ensemble des équat°s linéaires de F.

P1 soit E un ev et F, G des sev de E ou de E^* alors :

a) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

b) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

c) $F \subset F^{\perp\perp}$

d) $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

si en plus, $\dim E < \infty$ alors on a :

c') $F = F^{\perp\perp}$

d') $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

e) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

VII / La transposée

D2 soit E, F des e.v alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on déf la transposée ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par

$$\forall \ell \in F^*, \quad {}^t\varphi(\ell) = \ell \circ \varphi.$$

P2 (i) soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases de E, F.
Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right)$$

(ii) $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp} = \ker({}^t\varphi)$

$(\ker \varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^t\varphi)$

cf φ surjective $\Longleftrightarrow$ ${}^t\varphi$ injective.

φ injective $\Longleftrightarrow$ ${}^t\varphi$ surjective.

(iii) $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,{}^t\varphi$.

(iv) si on identifie E & E^{**} et F & F^{**} $\Rightarrow$ ${}^t({}^t\varphi) = \varphi$.

(v) soit G un 3° ev et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$
alors ${}^t(\psi \circ \varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$

(vi) si $E = F$, si $\varphi \in \mathcal{L}(F, E)$ est inversible $\Rightarrow$ ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \varphi\ } & F \\ \Phi_E \downarrow & & \downarrow \Phi_F \\ E^{**} & \xrightarrow{\ {}^t({}^t\varphi)\ } & F^{**} \end{array}$$

le diag est commutatif : $\Phi_F \circ \varphi = {}^t({}^t\varphi) \circ \Phi_E$.

C2 Formes bilinéaires

I / formes bilinéaires

D1 1) Une forme bilinéaire sur e.v E est une applicat° $\varphi : E \times E \to K$ linéaire en chacun de ses arguments ie :

▸ $\forall x \in E$, l'applicat° $E \to K$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ $\xrightarrow{\text{not}}$ $\varphi(x, \cdot)$ est une forme linéaire.

▸ $\forall y \in E$, l'applicat° $E \to K$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ $\xrightarrow{\text{not}}$ $\varphi(\cdot, y)$ est une forme linéaire.

2) Une forme bilinéaire φ est dite symétriq (resp. alternée) :
si $\forall x, y \in E$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ resp. $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

Notat° : Pour ces formes bilinéaires : bil, bil sym, bil alt soit :
$\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$. Ce sont des ev.

Puis $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{B}(E)$, $\forall \lambda \in K$: $\lambda\varphi + \psi \in \mathcal{B}(E)$, de m̂ $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$.

→ ds une base : soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{B}(E)$
alors $\forall X, Y \in E$, on pt écrire $X = \sum x_i e_i$, $Y = \sum y_j e_j$,

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \, \varphi(e_i, e_j).$$

(D2) La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i\leq j\leq n}$ s'appelle matrice de la forme bilinéaire φ ds la base $\mathcal{E}$ et est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ si on note $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $A=(a_{ij})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$

alors $\forall x,y\in E$, $\varphi(X,Y)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\,x_i\,y_j$.

$$\varphi(x,y)=(x_1\dots x_n)\,A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

(P1) soit $E,\varphi,\mathcal{E},A$ comme ci-dessus alors :

(i) $\varphi\in\mathcal{S}(E)\iff\forall i,j=1,\dots,n\ ;\ a_{ij}=a_{ji}$
$\rightarrow$ la mat A est symétrique.

(ii) $\varphi\in\mathcal{A}(E)\iff\forall i,j=1,\dots,n,\ a_{ij}=-a_{ji}$.
$\rightarrow$ la mat A est anti-symétriq

(iii) $\dim\mathcal{B}(E)=n^2$, $\dim\mathcal{S}(E)=\frac{n(n+1)}{2}$
$\dim\mathcal{A}(E)=\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{\mathcal{B}(E)=\mathcal{S}(E)\oplus\mathcal{A}(E)}$$

(P2) soit E ev dim n, $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ des bases de E,
$P=P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)\Rightarrow A'={}^tP.A.P$

II / Formes quadratiques

(D3) soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une foncθ $\boxed{Q:E\to K}$ s'appelle **forme quadratique** si

1) $\forall\lambda\in K,\ \forall v\in E,\ Q(\lambda v)=\lambda^2.Q(v)$ et

2) $b_Q: E\times E\to K,\ (x,y)\mapsto\frac{1}{2}\big(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big)$ est une forme linéaire.

On appelle b_Q : **forme bilinéaire symétriq** associé à Q, ou la **forme polaire de Q**, ou **polaire de Q**.

Les formes quadratiqs sur E forment un $\mathbb{K}$-ev que l'on note $Q(E)$; l'applicaθ $\mathcal{P}: Q(E)\to\mathcal{S}(E)$,
$Q\longmapsto b_Q$ est linéaire

et est appelée **polarisaθ** (morphisme de polarisaθ).

(L) $\mathcal{P}$ est un **isomorphisme** de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ d'inverse
$\mathcal{D}:\mathcal{S}(E)\to Q(E)$
$\varphi\longmapsto q_\varphi$
où q_φ est def par $x\mapsto\varphi(x)$.

(D4) Pour $\varphi\in\mathcal{S}(E)$, on appelle $q_\varphi\in Q(E)$ **forme quadratiq** associée à φ. $(q_\varphi=\mathcal{D}(\varphi))$.

(D5) La matrice d'une forme quadratiq Q ds une base $\mathcal{E}$ de E est la matrice de la forme polaire de Q : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q):=\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(b_Q)$.

Écriture d'une forme quadratiq ds une base

soit $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ une base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)=(a_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$

Alors $a_{ji}=a_{ij}$, on a $Q(x)=\sum a_{ij}x_ix_j$

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i^2+2\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}\,x_i\,x_j$$

(TH) soit E un $\mathbb{K}$ e-v de dim *finie* alors tte forme quadratiq (ou bil. sym) sur E est **diagonalisable** *ie* $\exists$ une base $\mathcal{E}$ de E, ds lq^ll la mat est diagonale.

Bases Orthogonales

(D1) soit E (ev) muni forme lin. sym. ie 2 vct^{rs} $x, y \in E$, on écrit $x \perp_\varphi y$, on dit "x est φ-orthogonal à y" si $\varphi(x,y) = 0$. Pr tte forme quad. Q sur E, on écrit aussi $x \perp_Q y$ au lieu de $x \perp_{b_Q} y$.

Rq : $x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$.

(D2) soit E (ev), dim n, muni f. quad. (ou bil. sym).
Une $\boxed{\text{base}}$ $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite $\boxed{\text{orthogonal}}$ si pptés vérifiées :
(i) $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
(ii) la mat de la forme de base $\mathcal{E}$ est diagonale.

(Cor 1) Toute forme quad. (ou bil. sym) sur ev dim finie admet bases orthogonales.

Formes quadratiqs positives

(D3) Hyp, une forme quadra Q (resp f. bil. sym. φ) est positive si $\forall x \in E$, $Q(x) \geq 0$. (resp $\varphi(x,x) \geq 0$).

(Prop 1) soit $Q \in \mathcal{Q}(E)$:
(i) Q est positive $\iff$ pr tte base Q-orthogonal $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a $Q(e_i) \geq 0$ pr tt $i = 1, \dots, n$.
(ii) Q est déf positive $\iff$ positive ds base $(e_1, \dots, e_n)$, $\exists$ une base $(e_1, \dots, e_n)$ Q-orthogonal de E pr $Q(e_i) > 0$.
(iii) soit F un ss ens de E alors $Q|_F : F \to \mathbb{K}$ est une forme quad. sur F, $Q|_F \in \mathcal{Q}(F)$, et on a :

$$Q \geq 0 \Rightarrow Q|_F \geq 0 \quad \text{et} \quad Q > 0 \Rightarrow Q|_F > 0.$$

(D4) Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-ev E de dim finie muni d'une forme quad. déf positive Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

(D5) Ds un espace euclidien, une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale & de + $Q(e_1) = \dots = Q(e_n) = 1$.

(Cor 2) Un espace euclidien admet des bases orthonormées.

Classificat des formes quadratiqs $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Notat : E : $\mathbb{K}$ ev, $n < \infty$. Q fme quad sr E, $\varphi = b_Q \in \mathcal{S}(E)$.

(D6) Le noyau de Q (ou de φ) est : $\ker Q = \ker \varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$

(L1) $\ker Q$ est sev de E de dim $(n-r)$, où $r = \text{rg}\ \text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)$ pr n'importe qu'elle base $\mathcal{E}$ de E. (rg mat forme quad. ne dpd pas base).

(D7) Le rg de Q (ou de φ), $\text{rg}\, Q$ ($\text{rg}\, \varphi$) est le rg de $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)$ ds n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E. $\text{rg}\, Q = \text{rg}\, \varphi = n - \dim \ker \varphi$.
$\to$ Q est une forme non-dégénérée si $\text{rg}(Q) = n$, ou si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

(D8) Deux formes quad. $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $Q' \in \mathcal{Q}'(E')$ st équivalentes si :
(i) $\exists$ isomorphisme $h : E' = E$, $Q' = Q \circ h$.
(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q')$).
(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $\exists\, T \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $\text{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT . \text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) . T$.

Classificat sur $\mathbb{C}$

(TH2) Toute forme quadratiq Q sur un $\mathbb{C}$ e-v E de dim $= n$ s'écrit ds une base convenable, p la mat $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix}$ où $r = \text{rg}\, Q$.
Deux formes quad. complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$ ev E, E' équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et $\text{rg}\, Q = \text{rg}\, Q'$.

(Cor3) Sur un $\mathbb{C}$ ev de E, dim n, $\exists\ n+1$ classes d'équivalences de form. quad. distinguées p le rg.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

(TH3) On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $Q\in Q(E)$ alors $\exists$ uniq $p\in\mathbb{N}$ tq Q s'écrit ds base convenable p mat diagonale :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $q=r-p$, $r=rg\ Q$.

(D9) Le couple $(p,q)=(p_Q,q_Q)$ est $\leftrightarrow$ à 1 forme quad. Q s $\mathbb{R}$-ev de dim finie Q s $\mathbb{R}$-ev : Signature de Q.

(Cor) Deux formes quad. Q, Q' sur des $\mathbb{R}$-ev de dim n st équivalts ssi $\hat{m}$ signature.

(D) (p,q) : signature de Q. (invariant classifiant les $\mathcal{Q}$ s ev réel dim n.

Orthogonalité

soit E : $\mathbb{K}$ev, $\varphi\in\mathcal{S}(E)$, $Q=q_\varphi$, $q_\varphi\in Q(E)$

(D) $A\subset E$, $A^\perp=\{x\in E,\ \varphi(x,y)=0,\ \forall y\in A\}$

(P) (i) $A^\perp$ sev, $\ker\varphi\subset A^\perp$ $\Rightarrow \emptyset^\perp=\{\emptyset\}^\perp=E$, $E^\perp=\ker\varphi$, $A\subset(A^\perp)^\perp$

(ii) si $A\subset B\subset E\Rightarrow \ker\varphi\subset B^\perp\subset A^\perp$.

(iii) si $A\subset E$, $A\neq\emptyset\Rightarrow A^\perp=\mathrm{Vect}(A)^\perp$ si $A=\{v_1,\dots,v_k\}$, $F=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$

$$\Rightarrow F^\perp=A^\perp=\bigcap_{i=1}^{k} v_i^\perp$$

(TH) (sur orthogonal) F sev de E,

(i) $\dim F^\perp = n-\dim F+\dim(F\cap\ker\varphi)$

(ii) $n\leqslant \dim F+\dim F^\perp\leqslant n+\dim\ker\varphi$

(iii) $(F^\perp)^\perp=F+\ker\varphi$, $(F^\perp)^\perp=F\Leftrightarrow \ker\varphi\subset F$

De + si φ non-dégénéré ie $\ker\varphi=\{0\}\Rightarrow$

(i) $\dim F^\perp=n-\dim F$ (iii) $(F^\perp)^\perp=F$

(iv) φ_F : restric° de φ à $F\times F$; $\varphi_F : F\times F\longrightarrow K$, $(x,y)\longmapsto\varphi(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_F$ aussi fbl symétq.

$\varphi_F\in\mathcal{S}_F$: $\cdot \ker\varphi_F=F\cap F^\perp=\ker\varphi_F^\perp$

$\cdot\ E=F\oplus F^\perp\Leftrightarrow F\cap F^\perp=\{0\}\Leftrightarrow \varphi_F$ nd $\Leftrightarrow \varphi_F^\perp$ est nd.

Projections orthogonales

(D) $E=K\oplus L$, $\forall v\in E$, $\exists!\ (x,y)\in K\times L\mid s=x+y$ & proj linéaire p_K^L (ou $p_K^{c\,L}$) de S par S sur K parallèlement à L : $\boxed{p_K^L(v)=x}$

(P) $p=p_K^L : E\to E$ satisfait :

(i) $p\in\mathcal{L}(E)$, $\ker p=L$, $\mathrm{Im}\ p=K$, $p|_K=id_K$ (restric° de p à K)

(ii) $p^2=p$ ($p^2= p\circ p$)

(iii) $q=id_E-p\Rightarrow p+q=id_E$, $p^2=p$, $q^2=q$, $pq=qp=0$.

Récipqt : p endomorphisme linéaire $p\in\mathcal{L}(E)$ tq $p^2=p$

$\Rightarrow p$ est projec° linéaire p_K^L où $K=\mathrm{Im}\ p$ & $L=\ker p$.

(D) Une projec° linéaire p_K^L est orthogonale $\Leftrightarrow K\perp L$. De façon équivlte, un endomorphisme linéaire $p\in\mathcal{L}(E)$ est proj. orthogonale $\Leftrightarrow p^2=p$ et $E=\ker p\oplus^\perp \mathrm{Im}\ p$ (somme directe orthogonale)

(D) F sev de E, F non-dégénéré si $Q_F=Q|_F$ (ou $\varphi_F=\varphi|_{F\times F}$) est forme non-dégénéré.

F non-dégénéré $\Leftrightarrow F\cap F^\perp=\{0\}\Leftrightarrow E=F\oplus F^\perp$.

(P) F sev de E, (i) si F (nd) $\Rightarrow \exists!$ projecᶿ orthogonale p d'image p $\overset{not}{:=}$ p_F ($p^{\perp}_F$).
(ii) si on + Q est forme (nd) $\Rightarrow$ récipoq vraie.

Calcul projecᶿ orthogonale

(P) F (sev) (nd) $(a_1, \dots, a_k)$ base orthogonale de F.
Alors $Q(w_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots k$ est
$\forall x \in E$, $$p^x_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i.$$

Groupe Orthogonal

Notatᶿ : $\mathbb{K}$, E $\mathbb{K}$ ev, $\dim E = n$, $Q \in Q(E)$ FQ non-deg,
$\varphi = b_Q$: forme polaire de Q.

(D1) Un endom. $f \in \mathcal{L}(E)$ est déf. orthogonal (ou Q-orthogᵉ / ou φ-orthogᵉ) s'il préserve Q (ou φ) :
$\forall x \in E$, $Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall x, y \in E$, $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$). On note $O(E)$.
(ou $O(E, Q)$, $O(E, \varphi)$, $O(Q)$, $O(\varphi)$), l'ens des end. orthogonx de (E, Q).

(P1) (i) $f \in O(E) \Rightarrow f$ inversible.
(ii) $O(E)$ est un groupe.

(D2) st F ss-espce (nd) de E $\Longrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$ et les 2 projecᶿˢ orthogonales p_F, $p_{F^{\perp}}$ st déf, tq $p_F + p_{F^{\perp}} = id_E$. On déf. la symétrie orthogonale s_F p : $\forall v \in E$, $\exists! (x, y) \in F \times F^{\perp}$, $v = x + y$ et on pose $s_F(v) = x - y$.

De mˆ $s_F = p_F - p_{F^{\perp}} = id_E - 2p_{F^{\perp}} = 2p_F - id_E$.
Lorsq F est un hyperplan, (s_F) : réflexion orthogonale.
$\rightarrow$ toute symétrie orthogonale est un endom. orthogonal.
$\rightarrow$ qd $F \subsetneqq E$, p_F proj orthogon. n'est pas endom. orthog.

Caractérisaᶿ de $f \in O(E)$ p matrices

$\mathcal{E}$ base, $f \in \mathcal{L}(E)$, $G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ alors $f \in O(E) \iff {}^tAGA = G$.
$\iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) \quad \forall i,j = 1, \dots, n$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

• cq $G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, (E, Q) est espace euclidien muni base orthonormé $\mathcal{E}$,
on a $f \in O(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA$
$\iff A$ mat orthogonale.

(TH) Cartan - Dieudonné
Tout élt de $O(Q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonale.

Orthogonalisaᶿ de Gram - Schmidt

(TH) d'orthogᵒ de Gram - Schmidt.
$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $\forall i = 1, \dots, n-1$, $E_i = Vect(v_1, \dots, v_i)$ est non-dégénéré alors les n vectᴿˢ : $u_1 = v_1$,
$$u_2 = v_1 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1, \dots, u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i \qquad k = 1, \dots, n$$
st bien déf & fournᵗ base orthogonale.
$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. ds cᵗᵉ base Q s'écrit :
$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2,$$
où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = Mat(v_1, \dots, v_k)$ $(Q|_{F_k})$

- Il s'appelle orthogonalisée de G-S.
- $Q|_{F_{n-1}}$ non-dégénérée $\Rightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1$

$\Rightarrow \operatorname{rg} Q = n-1$ ou n ; on ne suppose pas $\Delta_n \neq 0$.

Cor 1 Crit de Sylvester

E-$\mathbb{K}$ ev, $n:=\dim E$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi = b_Q$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$,

$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pr $1 \leq i,j \leq n$.

$F_k = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$,

$A_k = \operatorname{Mat}_{(v_1, \dots, v_k)}\left(Q|_{F_k}\right)$, $\Delta_k = \det A_k$ Alors :

① φ (ou Q) est déf positive $\Longleftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

② Supps. $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$, $\Delta_0 = 1$ Alors :
l'indice négatif q de Q (c'est la 2° composante de la signature (p,q) de Q) est le max de chgts de signe ds la suite $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ (on dit (Δ_i) présente un chgt de signe au rang i si $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

③ φ est déf négative $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$, $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0$

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & \quad A_n \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

les $\Delta_k = \det A_k$ s'appellent mineurs principx dominant.

(C3) Espaces Euclidiens

§ 1. Norme, distance, angles, volumes

(D) Un $\mathbb{R}$-ev (E) muni $\boxed{\text{FB sym}}$ φ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ & φ def positive. (φ: **produit scalaire**)

$$<x|y> := \varphi(x,y) \quad \forall\, x,y \in E,$$

p, def $\forall x \in E$, $<x|x> \geq 0$ & $<x|x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On note $\sqrt{<x|x>} = \|x\|$. ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$)

(P) $\forall x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x|y> + \|y\|^2$

((ii) ep si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Th Pythagore)

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (idtité ▱)

(iv) $|<x|y>| \leq \|x\|.\|y\|$ (Inégalité Cauchy-Schwarz ssi $\exists a \in \mathbb{R}$, $x = ay$ & $y = ax$)

(v) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski $\exists a \geq 0$, $x = ay$ & $y = ax$)

(D) Norme $N : V \to \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

(D) soit X ens $\neq \emptyset$. On appelle **distance (ou métriq)** sur X tte f $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq : (i) $\forall x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un **espace métriq** est un ens muni d'une métriq.

D'après (P1), f $E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une **distance**.

(D) soit $(E, <\cdot|\cdot>)$, un espace euclidien, la f : $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$ s'appelle **norme euclidienne** sur E, la f $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ s'appelle **distce euclidienne** sur E.

Angles

$\forall x,y \in E \setminus \{0\}$, p, Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{<x|y>}{\|x\|.\|y\|} \right| \leq 1.$$

(D) • **L'angle** $(\widehat{x,y})$ entre 2 vect^{rs} $\neq 0$ de E, uniq réel $\theta \in [0,\pi]$,

$$\cos\theta = \frac{<x|y>}{\|x\|.\|y\|}$$

on pt écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \frac{<x|y>}{\|x\|\ \|y\|}$, $\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• L'angle $(\widehat{F_1,F_2})$ entre 2 sev $\neq 0$ de E,

$$(\widehat{F_1,F_2}) = \inf\{(\widehat{v_1,v_2}) \mid v_1 \in F_1 \setminus \{0\},\ v_2 \in F_2 \setminus \{0\}\}$$

• L'angle $(\widehat{v,F})$ entre un vect^r & sev $\neq 0$ de F :

$$(\widehat{v,F}) = \inf\{(\widehat{v,w}) \mid w \in F \setminus \{0\}\}.$$

@ angle 2 droites F_1, F_2 vct^r dirct^r v_1, v_2 ie $F_1 = \mathbb{R} v_1$, $F_2 = \mathbb{R} v_2$.

$(\widehat{F_1,F_2}) = \min\{(\widehat{v_1,v_2}), (\widehat{v_1,-v_2})\} = \min\{\theta, \pi - \theta\}$

Volumes (calcul intégral)

(D) (i) Pr famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est : $\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid (t_1, \dots, t_k) \in [0,1]^k\}$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est :

1) si $\mathcal{V}$ est **liée**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = 0$

2) si $\mathcal{V}$ est **libre**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = |\det P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{V}}|$

où $\mathcal{E}_F$ base orthonm. qq de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ & $P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{V}}$ désigne mat de passage.

1) Mq (i), on a $\ell \in E^*$: $\dim \ell + \dim \ker \ell = \dim E$

D+, $\{0\} \subset Im(\ell) \subset K^1$, d'où $Im(\ell) \subset \{0,1\}$

Dc pr $\ell \in E^*$, on a $\ell \neq 0 \iff Im(\ell) = K^1 \iff$ dim

$\iff \dim Im(\ell) = 1 \iff \dim \ker \ell = n-1$

$\iff \ker \ell$ est un hyperplan.

Mq (ii) soit H un hyperplan, on choisit 1 base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de H & complétons-la à $(e_1,\dots,e_n)$ de E.

On définit $\varphi : E \to K^1$ par mat $(0\dots 0 1)$.

$\varphi : x_1e_1+\dots+x_ne_n \mapsto Mat(\varphi)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_n$.

On a bien $\ker \varphi = Vect(e_1,\dots,e_{n-1}) = H$ △ mqé.

soit $\psi \in E^*$ une 2te forme linéaire sr E, $\ker \psi = H$,

soit A mat, $A = Mat_{(e_i)}(\psi)$, $A = (a_1,\dots,a_n)$ alors

$\forall i = 1,\dots,n-1$; $\psi(e_i) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = a_i = 0$

(car $e_i \in H$ & $H = \ker \psi$) dc $A = \underbrace{(0,\dots,0,a_n)}_{mat_{(e_i)}(\psi)}$

$A = a_n(0,\dots,0,1)$ ie $\psi = a_n \varphi$ ∎

2) soit $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_n)$ base qq de E, pose $\varepsilon_i(f_j) = a_{ij}$. $i,j = 1,\dots,n$

$A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, on a alors:

$Mat_{\mathcal F}(\varepsilon_i) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in M_{1,n}(K)$.

$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n$, $Mat_{\mathcal F}(\sum \lambda_i \varepsilon_i) = \sum \lambda_i (a_{i1} \dots a_{in})$.

Pr $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = 0 \iff Mat_{\mathcal F}(\varphi) = 0$ dc $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ st linéairt indpts $\iff$ lignes $(a_{i1}\dots a_{in})$ st lin. ind, $rg(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Donc $\forall i = 1,\dots,n$ le systm linéaire $AX = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ 1 à ième place admt uniq solθ $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Or ce systm exprime : $\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^n x_k f_k\right) = \delta_{ij}$

car $\varepsilon_j(\sum x_k f_k) = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{\varepsilon_j(f_k)}_{a_{jk}} = \sum a_{jk} x_k$

Nots ctt solθ e_i. On a dmq $\forall i = 1,\dots,n$

$\exists$ uniq $e_i \in E$ tq $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$, voyons pq $e_1,\dots,e_n$ forment une base de E. En effet, en notant solθ uniq $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de (*) p $\begin{pmatrix}e_{1i}\\ \vdots\\ e_{ni}\end{pmatrix}$, on obtt $B = (b_{ji})$,

$e_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} f_j$ $(i = 1,\dots,n)$ alors pté $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ se réécrit ĉ $\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \delta_{ij}$ où $AB = Id_n$.

Donc B est invers. & $(e_1,\dots,e_n)$ est une base liée à $(f_1,\dots,f_n)$ p mat de passge B.

3) (i) pr $\forall v \in E$, $\exists f : E^* \to K$, $\ell \mapsto \ell(v)$ est linéaire en ℓ,

dc est un élt de E^{**}. On déf $\Phi(v)$ égal à cette f,

on a 1 applicaθ $\Phi : E \to E^{**}$ bien déf en v, dc

$v \mapsto E(v)$ est linéaire. ie $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.

(ii) soit $\dim E < \infty$, si $v \in E \setminus \{0\}$, on pt compléter v à une base $(v = e_1,\dots,e_n)$ de E. On pt construire une fl $\ell \in E^*$ q ne s'annule pas p v ; p @ on pt choisir $\ell = e_1^*$, le 1° élt de base duale de $(e_1,\dots,e_n)$

alors $\ell(v) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$. Mais alors $\Phi(v) \neq 0$

car $\Phi(v)$ est fl sr E^* q prd 1 valr $\neq 0$ ds $\ell(v)$ sur ℓ. Dc $\ker \Phi = \{0\}$ & Φ injective.

(iii) on a $\dim E < \infty \Rightarrow \dim E^* < \infty$ & $\dim E = \dim E^*$.

Dc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$. Psq E est injective & dimθ coincidt, Φ est isom. bijectif.

4) Par Th diagonalisaθ FQ, $\exists$ base orthogonale $q = (e_1,\dots,e_n)$ tq $Q(e_i) = \lambda_i$ & on pt ordonner vectrs de la base ĉ : $\lambda_i > 0$ pr $i = 1-p$; $\lambda_i < 0$ pr $i = p+1,\dots,p+q$; $\lambda_i = 0$ pr $i = p+q+1,\dots,n$ alors mat de Q acquiert la forme

$\begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0\\ 0 & -1_q & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ds base $\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n\right)$.

Le nbr p+q est déterminé p Q car p+q est le rang de la mat (*) & dc égal à $r = rg\, Q$.

mq 3!, soit $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$; $\mathcal{E}' = (e_1',\dots,e_n')$ 2 bases orthogonales tq $Q(e_1) = \dots = Q(e_p) = Q(e_1') = \dots = Q(e_{p'}') = 1$

$Q(e_{p+1}) = \dots = Q(e_r) = Q(e'_{p'+1}) = \dots = Q(e_r') = -1$.

soit $V = Vect(e_1,\dots,e_p)$; $W = Vect(e'_{p'+1},\dots,e'_n)$ alors $Q(e_i) > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$. (Q est déf positive sr V puis sr W on a : $Q(x) \leq 0$ $\forall x \in W$. Dc $V \cap W = \{0\}$ dc $\dim V + \dim W \leq n$, soit $p + (n-p') \leq n$ soit $p \leq p'$. Par la symétrie des rôles de p & p', on a $p' \leq p$ dc $p = p'$.

5) soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base de F, complets la à 1 base, $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_k,\dots,e_n)$ une base de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i,e_j)$. $A = (a_{ij}) \in S_n(K)$. Pr 1 vectr $x = \sum x_i e_i$, on a $x \in F^\perp \iff \varphi(e_i,x) = 0$ pr $i = 1,\dots,k$

$\iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0\\ \vdots\\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0\end{cases}$ (S)

Puisq $\ker \varphi = \{0\}$, rg des lignes est maxi égal à k dc les lignes st lin. ind.

Dc $rg(S) = k$. Dc son espace solθ dim $n-k$.

dc $\dim F^\perp = n-k \Rightarrow \dim F^\perp + \dim F = n$.

Ⓛ (cohérence déf $v \circ l_x$)

$|\det P_{\mathcal{E}_F \to v}|$ ne dépd pas choix de $\mathcal{E}_F$.

Ⓒⓞⓡ (de dmo Ⓛ)

La mat de passage A entre 2 bases orthon. est une mat orthogonale : A est inversible & $A^{-1} = {}^tA$. Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prdre que 2 valeurs, **1 et -1**.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

- soit E ⓔⓔ dim n, on note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthognx de E.

$$O(E) = O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) = \{x \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x) | u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}.$$

C'est un groupe. L'ens des mat orthogonales de taille n est déf p : $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$.

◦ E ⓔⓔ dim $n \geq 1$, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ base o.n. $\Rightarrow$ $O(E) \longrightarrow O(n)$, $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ est **isom. de groupes**. Dc pr chq $n \geq 1$, on a 1 seul groupe orth. euclidien à isom. près.

◦ $O(n)$ identifié à $O(\mathbb{R}^n, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

- **Groupes spéciaux orthognx** : $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$
$SO(A) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.

· pr $A \in O(n)$, $\det = \pm 1$. Dc $\left\| \begin{array}{l} O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E) \\ O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n) \end{array}\right.$

où $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = -1\}$
$O^-(n) = \{u \in O(n) \mid \det u = -1\}$

Rq : → $SO(E) \subset O(E)$ est un ss-grpe (mais pas $O^-(E)$).
→ $\forall \tau \in O^-(E)$, $O^-(E) = \tau\, SO(E) = SO(E) \cdot \tau$.

· Le groupe quotient $O(E)/SO(E)$ est isom. à groupe d'ordre 2 :
$\mu_2 = \{\pm 1\}$; $O(E)/SO(E) \simeq \{\pm 1\}$. cela suit du Ⓣⓗ d'isomorph. pr grpe quotient : on consid. morphisme du det,

$\det : O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $u \longmapsto \det u$, son image est $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

Donc $O(E)/\ker(\det) \simeq \mu_2$ or $\ker(\det) = SO(E)$

▸ cas $n = 1$: $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) \simeq O(1) = \{\lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mu_2$
$SO(1) = \{1\}$ grpe trivial à élt neutre. mat taille 1, $A(\lambda)$ tq ${}^tAA = \mathbb{1}_n$

▸ cas $n = 2$: E plan eucl, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base O.n. de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ 1) $u \in SO(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) $u \in O^-(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

◦ Notaθ : $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de rotaθ d'angle θ ds plan eucl. $\mathbb{R}^2$.

Ⓟ soit E un plan eucl., un élt $u \in SO(u)$ donné p m̂ matrice R^θ ds 2 bases O.n. liées p mat de pssge O.n. tq $\det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = -1$ et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = R^\theta$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = R^{\theta'} \Rightarrow \theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $R^{\theta'} = (R^\theta)^{-1} = R^{-\theta}$.

Orientaθ :

soit V ev dim finie, on pt ÷ l'ens $\mathbb{B}(V)$ de ttes les bases de V en 2 parties disjointes, classe d'équivlce pr relaθ d'équivlce suivte :

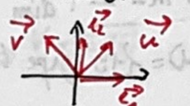
pr $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathbb{B}(V)$, $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \iff \det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} > 0$

Ⓓ Muni V d'une orientaθ : c'est choisir laquelle de 2 classes, on appelle **classe des bases directes**, l'autre étant la classe des **bases indirectes**.

↪ on pt donner une orientaθ, en précisant une base directe.

(Cor) soit E plan eucl. orienté. On a alors un isomorph. canoniq
$\pi : SO(E) \longrightarrow SO(2)$ q ↔ à chq élt $u \in SO(E)$ sa matrice R^θ ds n'importe q^lle base o^n. directe, l'angle de rotaθ θ $[2\pi]$ ne dpd pas ch·x base o.n. directe.

Rq: L'orientaθ standard du plan eucl. standard $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ pt ê décrit ĉ: une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ est directe si v s'obtient p la rotaθ de u d'angle $90°$ ds sens contr. ∅



Sens géométriqs des élts de $O^-(E)$: dim 2

(L1) Tt élt u de $O^-(E)$ a $\{1, -1\}$ pr spectre, dc s'écrit p $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

(L2) Les vect^Rs propres unitaires (= de norme 1) de la mat $A = R^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ de (P1) st : $v_1 = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ de vp 1.
$v_2 = \pm\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ de vp -1.

(P3) soit E un plan eucl., les élts de $O^-(E)$ st les réflexions orthog.
$\forall u \in O^-(E)$, il y a exactem^t 4 bases o^n. de E ds lqls u s'écrit p la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si E est orienté, deux de ces bases st directes, 2 autres indirectes.

Espaces euclidiens de (dim = 3)

Produit Vectoriel

soit E un esp. ee de dim 3 muni d'une orientaθ.

Notθ : $\mathbb{B}(E) \supset \mathbb{B}_{on}(E) = \mathbb{B}^+_{on}(E) \sqcup \mathbb{B}^-_{on}(E)$
∀ bases " $\mathbb{B}^+(E) \sqcup \mathbb{B}^-(E)$; bases o^n. ; b. o^n directes ; b. o^n. indirectes.

(D) soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de 3 vect^Rs de E. Le réel $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{U})$, ds une base $\mathcal{E} \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$, ne dpd pas $\mathcal{E}$ & est appelé produit mixte de $\mathcal{U}$. $[\mathcal{U}] = [u, v, w]$.

(P) (pptés prdt mixte)
Le produit mixte $\mathcal{P} : E^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v, w) \mapsto [u, v, w]$ est trilinéaire & antisymétriq. Pr $\mathcal{U} \in E^3$, on a

(i) $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 0 \iff \mathcal{U}$ est lié.

(ii) $\mathcal{P}(\sigma(\mathcal{U})) = \varepsilon(\sigma) . \mathcal{P}(\mathcal{U})$ ∀ permutaθ $\sigma \in S_3$, où $\varepsilon(\sigma)$ signature permutaθ.

ex $\mathcal{P}(u, v, w) = -\mathcal{P}(v, u, w) = -\mathcal{P}(w, v, u)$.

(iii) $\mathcal{U} \in \mathbb{B}^+_{on}(E) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \pm 1$.

(L1) soit V un ee $\Rightarrow$ $\Psi : V \to V^*$, $x \mapsto \langle x|\cdot\rangle$ est isom canoniq de V sur V^*.

(D1) soit E ee orté dim 3. Le produit vectoriel de 2 vecteurs $u, v \in E$ est l'uniq vect^R de E, noté $u \wedge v$ tq
$\forall w \in E, [u, v, w] = \langle u \wedge v | w \rangle$.
En usant l'isom. canoniq $\Psi : E \xrightarrow{\sim} E^*$ de (L1), on a :
$$u \wedge v = \Psi^{-1}([u, v, \cdot])$$
où $[u, v, \cdot] \in E^*$ est la fl $E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto [u, v, w]$

(P1) (pptés prdt vectoriel)

soit E (ee) orienté dim 3.

1. L'appli $E\times E \to E$, $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire & antisymétriq ($\forall u,v\in E$, $u\wedge v=-v\wedge u$)
2. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v=0 \Leftrightarrow u,v$ st colinéaires.
3. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v\perp u$, $u\wedge v\perp v$.
4. si u,v ne st pas colin^{R} $\Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in \mathcal{B}^+(E)$
   si d+ $\|u\|=\|v\|=1$, $u\perp v \Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$.
5. si $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$ alors $\forall i,j\in\{1,2,3\}$:
   $$e_i\wedge e_j=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ \varepsilon_{ijk} & \text{où } \{i,j,k\}=\{1,2,3\},\end{cases}$$
   $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ est la signature d'une permutaθ.
6. si $\mathcal{E}=\mathcal{B}^+_{om}(E)$, $[u]_\mathcal{E}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $[v]_\mathcal{E}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.
   puis $$[u\wedge v]_\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_3&v_3\\u_1&v_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

Endomorphismes orthogn^x ds (ee) E de dim 3

(L2) Un endomorphisme orthogonal d'un (ee) E de dim 3 a tjrs (vp) réelle ±1 = son déterminant.

((vp) complexes vl abs 1).

(P2) soit E (ee) ort. dim 3, $u\in O(E)$, $\lambda=\det(u)=\{\pm1\}$.
Alors $\exists$ base $\mathcal{E}\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$ & $\theta\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(u)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda & 0\ \ 0\\ \hline 0 & \\ 0 & R^\theta\end{array}\right),\quad R^\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

(D2) (i) Un axe de E est une droite vectorielle orientée ds E.
Tt axe est dirigé par un uniq vecteur unitaire.
(ii) L'élt $u\in SO(E)$ de matrice $\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline 0 & \\ 0 & R^\theta\end{array}\right)$ ds une base o.n directe $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ de E s'appelle rotaθ d'angle θ autour de l'axe dirigé par e_1.

Notθ: $u=R^\theta_v$, $\forall v$ dirigeant l'axe ($v=\alpha.e$, $\alpha>0$).

(Cor1) soit $u\in SO(E)$, $u\neq id_E$ alors u possède 2 axes de rotaθ, ayant pr support la m̂ droite vectorielle $\mathbb{R}v\subset E$, où $v\neq0$, l'un est dirigé par v, l'autre par $-v$.
L'axe & l'angle $[2\pi]$ st les élts caract. d'une rotaθ de E.