$$M31$$

$$TD$$

$$S_3(nov - dec)$$

VIII . 2. Trigonaliser matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ Calculons $P_A(\lambda)$ de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2-3(4-\lambda) & -2-(4-\lambda)(-\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{1^{\circ}\text{col}}{\overset{\text{dev}}{=}} \begin{vmatrix} 3\lambda-10 & -\lambda^2+5\lambda-6 \\ 2-\lambda & -2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3\lambda-10 & -\lambda^2+5\lambda-6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3+10+\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+16) = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2.$$

Donc $P_A(\lambda)$ est scindé et A admet 2 vp :

$\lambda_1 = 2$ (simple)

$\lambda_2 = 4$ (double).

∴ $N_2 = E_2 = \ker(A-2I)^1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z. \end{cases} \quad \text{Donc } E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $E_2 = \mathrm{Vect}(e_1)$.

∴ $N_4 = \ker(A-4I)^2$ et $E_4 = \ker(A-4I)$.

$E_4 \subset N_4$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x+3y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = 0. \end{cases}$$

Donc $E_4 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, posons $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $E_4 = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $\dim E_4 = 1 < 2 = \underset{\lambda=4}{\text{multiplicité}}$

↳ Donc A n'est pas diagonalisable.

→ Si e_3 est un vecteur de $N_4 \setminus E_4$ alors ds la base (e_1, e_2, e_3) la matrice A sera de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour choisir $e_3 \in N_4 \setminus E_4$, on a :

$$(A-4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

d'où
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N_4 \iff \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff -y+z = 0 \iff y = z.$$

Donc N_4 est le plan d'équat° $y = z$.

Choisissons $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $e_3 \in N_4 \setminus E_4$:
On calcule Ae_3 et on identifie.

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 4e_3 + e_2.$$

D'où $a = 1$. La matrice de A ds la base (e_1, e_2, e_3) est $\triangledown$, s'écrit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
(On a calculé $Ae_1 = 2e_1$ et $Ae_2 = 4e_2$).

Ex : VIII . 3 soit f l'endomorphisme de ev canoniq $\mathbb{R}^3$ dt la mat ds la base canoniq $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Mq $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2Id)$

∴ Calculons le poly $P_A(\lambda)$ de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ -2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (1-\lambda)L_2 \\ L_2 \text{ pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 + (1-\lambda)(3-\lambda) & -1 - 3(1-\lambda) \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 2\lambda - 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 3\lambda - 4 \\ -1 & -\lambda + 3 & -3 \\ 0 & 2\lambda - 4 & -\lambda + 4 \end{vmatrix} \rightarrow \text{dev selon } 1^\circ \text{ col}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} (\lambda-2)^2 & 3\lambda - 4 \\ 2(\lambda - 2) & -\lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3\lambda - 4 \\ 2 & -\lambda + 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\left[(-\lambda^2 + 6\lambda - 8) - (6\lambda - 8)\right] = -\lambda^2(\lambda - 2).$$

Donc $\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)}$

Q1 → comme $P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$, d'après la décomposition en sous-espaces caractéristiqs, on a $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$. (voir proposit° cours)

2) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tq

$$\operatorname{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

∴ Calcul de $\ker f$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - 0 Id) \iff \begin{cases} 4y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f.$$

∴ Calcul de $\operatorname{Ker} f^2$:

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\operatorname{Ker} f^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$.

Choisissons $e_2'' = (1, 0, 1) \in \operatorname{Ker} f^2 \setminus \operatorname{Ker} f$.

On a $A e_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 e_1'$.

Prenons $e_2' = -\frac{1}{4} e_2'' = \left(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$.

On a $A e_2' = -\frac{1}{4} e_2'' = e_1'$.

∴ Calcul de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f - 2Id) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Donc $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.

La base B' cherchée est $B' = (e_1', e_2', e_3')$
et la matrice de f ds cette base est déterminée
par Ac $f e_1' = 0$, $f e_2' = e_1'$, $f e_3' = 2e_3'$

9

Donc $\operatorname{mat}(f, B') = \begin{array}{c|ccc} & fe_1' & fe_2' & fe_3' \\ \hline e_1' & & & \\ e_2' & & & \\ e_3' & & & \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

↳ on a testé 4 e_2'', on constate qu'il faut dilater

3) soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $g^2 = f$.

Mq $\ker f^2$ est stable par g.

En déduire qu'un tel endomorphisme g ne pt exister.

Révisions D-S

Ex1 : ⟶ Groupe des permutaᵗⁱᵒⁿˢ (F. 1)
⟶ Déterminant.
⟶ Diagonalisaᵗⁱᵒⁿ

- Spectre : ens vp. (racines P caract).

1) @ de mat $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dt le spectre est vide.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$

$\hookrightarrow Sp(A) = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$.

2) @ mat diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dt spectre est réduit à $\{1\}$. q pt-on dire mat ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(A) = (\lambda-1)^2$, $Sp(A) = \{1\}$.

3) @ mat non diag^{ble} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dt spectre réd.t $\{1\}$.

ordre dig 2 et ici une sle vp 1.
$P(\lambda)$ admt une uniq racine réelle 1.
$P(x)$ admt 1 c racine double.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(x) = (\lambda-1)^2$, $Sp(A) = \{1\}$,

$E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim E_1 = 1 < 2$ dc n'est pas diago.

4) @ mat non diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{-1, 1\}$. Une telle mat est-elle tjrs diagonalisable ?

TH si vp distinctes $\Rightarrow$ mat diagonalisable
et si P_C scindé

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $Sp(A) = \{\pm 1\}$

5) @ mat non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dt spectre réduit à $\{0\}$. Cette mat est diagonalisable ?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \lambda^2$, $Sp(A) = \{0\}$, $E_0 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

A n'est pas diagonalisable.

6) @ couple $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^2)$ tq $Sp(A) = Sp(B) = \{1\}$ tq A et B ne st pas mat semblables.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$, $P_B(\lambda) = (\lambda-1)^2$.

Donc $Sp(A) = Sp(B) = \{1\}$.

A n'est pas $\boxed{\text{semblable}}$ à B car sinon $\exists$ une matrice P inversible $\boxed{tq}$ $\boxed{PA.P^{-1} = B.}$

Or $P.A.P^{-1} = P.I.P^{-1} = P.P^{-1} = I$.

Il vient que $B = I$ or $B \neq I$. Dc A n'est pas semblable à B.

7) @ $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^2)$ tq $Sp(A) = Sp(B) = \{-1, 1\}$ et tq A et B ne st pas semblables ?

Cela n'$\exists$. si $\exists$ $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^2)$ tq $Sp(A) = Sp(B) = \{-1, 1\}$ alors A et B st diagonalisable car les vp st distinctes.

Dc A et B st semblables à mat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dc A & B st semblables.

Ex2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Sans aucun calcul, en observ^t colonnes mat A, repérer vp λ et μ de A.

- $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$
- $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$
- $Ae_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 - e_3.$

Par conséq^t, $A(e_1 + e_3) = e_1 + e_3 - e_1 - e_3 = 0.$

et $A(e_2) = e_2.$

Donc $e_1 + e_3$ est un vp $\lambda = 0$

e_2 vp $\mu = 1$.

2) la mat A est semblable à une mat du type

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Considérons la base $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_3, e_2, f\}$,

où f est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tq $\mathcal{B}'$ est une famille libre. Écrivons $Af = \alpha(e_1 + e_3) + \beta e_2 + \nu f$

alors la mat de A ds la base $\mathcal{B}'$ est

$$T = \begin{array}{c|ccc} & A(e_1+e_3) & Ae_2 & Af \\ \hline e_1+e_3 & 0 & 0 & \alpha \\ e_2 & 0 & 1 & \beta \\ f & 0 & 0 & \nu \end{array}$$

3) En usant la trace, déterminer ν.
La mat A est-elle diagonalisable ?

Comme A est semblable à T, on a $Tr(A) = Tr(T)$.
Or $Tr(A) = 1 + 1 - 1 = 1$. Donc $1 = Tr(T) = 0 + 1 + \nu$
D'où $\nu = 0$.
On a $P_A(\lambda) = P_T(\lambda)$. Comme T est triangulaire et $\nu = 0$, il vient que $P_T(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 1)$.

Donc $E_1 = N_1 = \ker(A - I)$

$E_0 = \ker(A - 0I) = \ker A$.

Un calcul direct mq $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $\ker A = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Donc $\dim E_0 = 1 < \dim N_0 = \dim \ker A^2 = 2$.
Donc A n'est pas diagonalisable.

M31 (Algèbre linéaire) DS1

14 novembre 2020 8h00 - 10h00

Nota Bene : les justifications de vos réponses sont aussi (voire **PLUS**) importantes que les réponses en soi !

1. Questions de cours.

i) Donner la définition d'une transposition, d'un cycle d'ordre k.

ii) Donner la définition d'un vecteur propre, d'une valeur propre.

iii) Donner la définition d'un sous-espace propre.

iv) Que veut dire qu'un polynôme est scindé ?

v) Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice/application linaire.

vi) Énoncer et démontrer le lien entre le polynôme caractéristique d'une application linéaire et une valeur propre.

vii) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

$Au = \lambda u$. $u \neq 0$

$E_\lambda = \ker(A - \lambda Id)$

$\chi_A = \det(A - \lambda Id)$

Polynôme scindé

Ve distinctes

Id

2. Exercice. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 & 5 & 8 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

i) Écrire σ comme un produit de cycles à support disjoint.

ii) Écrire σ comme un produit de transpositions.

iii) Déterminer la signature de σ.

iv) Soit $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_p)$ un cycle d'ordre 4, élément de $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer qu'on a l'égalité

$$(i_1\, i_2\, i_3\, i_4) = (i_1\, i_2) \circ (i_2\, i_3) \circ (i_3\, i_4) .$$

v) Généraliser le résultat précédent à un cycle d'ordre $p \leq n$ (une preuve n'est pas demandé !) et utiliser le pour montrer que toute permutation de n éléments s'écrit comme un produit d'au plus n transpositions.

3. Exercice. Soit $x \in \mathbf{R}$ un paramètre et soit A_x la matrice définie par

$$A_x = \begin{pmatrix} x-1 & x-4 & -3 & -1 \\ 1 & x+4 & x+3 & 1 \\ 1 & 4 & x+3 & 1 \\ 1 & 2x+4 & -x-1 & x+1 \end{pmatrix} .$$

$4x^2 (x-2)(x+1)$

i) Calculer le déterminant de A_x en fonction de x.

ii) Pour chaque valeur de x déterminer une base de $\ker(A_x)$.

4. Exercice. Soit $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -12 & 9 & -2 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

i) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

ii) Déterminer les valeurs propres de A.

iii) Déterminer si oui ou non A est diagonalisable. Si elle est diagonalisable, déterminer la matrice P de changement de base dans laquelle la matrice prend la forme diagonale et déterminer cette matrice diagonale.

Barème indicatif : Q1 : 4 points ; Q2 : 4 points ; Q3 : 6 points ; Q4 : 6 points.

$-x^2$

Ex VIII.4 soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pr matrice A ds la base canoniq $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Calculer polym caractéristiq de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1/2 & \frac{3}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -1/2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2(1-\lambda)L_2 \\ L_2 \text{ pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-(1-\lambda)(3-2\lambda) & 1-\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda & -1/2 \\ 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda^2+5\lambda-2 & 1-\lambda \\ 1/2 & -\lambda+3/2 & -1/2 \\ 0 & -\lambda+2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \text{on dev selon } 1^{\circ} \text{ col}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2\lambda^2+5\lambda-2 & 1-\lambda \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda-1}{2} \begin{vmatrix} -2\lambda^2+5\lambda-2 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\lambda-1}{2}\left[(-2\lambda^2+5\lambda-2) - (-\lambda+2)\right] = \frac{\lambda-1}{2}(-2\lambda^2+6\lambda-4)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

A admet 2 vp $\left\| \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \text{ (simple)} \\ \lambda_2 = 1 \text{ (double)} \end{matrix} \right.$

* ou pr compléter base

$(A-I)\varepsilon_3 = (\ )(\ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_2$

2) Trouver une base $\mathcal{E}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

tq $\text{Mat}(f, \mathcal{E}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

↳ $\boxed{M}$ Calcul s-espace-propre + sec. (a général^t s-e-caractéristiq et contenus)

* Calcul de $\text{Ker}(A-2I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Donc $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\ker(A-2I) = \text{Vect}\{(\varepsilon_1)\}$.

* Calcul de $\text{Ker}(A-I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ker(A-I) = \text{Vect}\{(\varepsilon_2)\}$.

* Calcul de $\text{Ker}(A-I)^2$: # S3-espace caractéristiq

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ # compléter pr une base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_2}_{\text{déjà calculé}}$ $\Rightarrow \ker(A-I)^2 = \text{Vect}\{(\varepsilon_2), (\varepsilon_3)\}$

On a dc $A\varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2$, $(A-I)\varepsilon_3 = \varepsilon_2$.

La matrice A ds la base $\varepsilon' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ s'écrit

$$\begin{array}{c|ccc} & A\varepsilon_1 & A\varepsilon_2 & A\varepsilon_3 \\ \hline \varepsilon_1 & 2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tq $f\circ g = g\circ f$.
Mq $\mathrm{Ker}(f-2\,Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$ st laissés stables par g. Ed la mat g ds ε' est de la forme

$$\mathrm{mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Ds $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ valeurs a, b, c, d ?

D (stable)

Un sous-espace F dans E est stable par un endom. de E si $h(F)$ est dans F.
(Un endom. h de E).

Par hypothèse, comme $f\circ g = g\circ f$, on a bien

(*) $(f-Id)\circ g = f\circ g - g = g\circ f - g = g\circ(f-Id)$

→ soit $v \in \mathrm{Ker}(f-2\,Id)$. On a $g\circ(f-2\,Id)v = g(0) = 0$ car (AL) endom.

L'identité précédente mq $(f-2\,Id)(g(v)) = 0$.

Donc $g(v) \in \mathrm{Ker}(f-2\,Id)$.

Donc $\mathrm{Ker}(f-2\,Id)$ est laissé par stable par g.

(*) On calcule : $(f-Id)^2\circ g = (f^2 - 2f + Id)\circ g$
$= f^2\circ g - 2f\circ g + g = f\circ f\circ g - 2f\circ g + g$
$= f\circ g\circ f - 2g\circ f + g = g\circ f\circ f - 2g\circ f + g$
$= g\circ(f^2 - 2f + Id) = g\circ(f-Id)^2$.

→ soit $w \in \mathrm{Ker}(f-Id)^2$.

On a $g\circ(f-Id)^2 v = g(0) = 0$ car (AL) (endom.)

L'identité précédente mq $(f-Id)^2(g(w)) = 0$.

Donc $g(w) \in \mathrm{Ker}(f-Id)^2$.

Donc $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$ est laissé stable par g.

La matrice de $g | \mathrm{Ker}(f - 2Id)$ est de la forme (λ) ! sur la base $\{\varepsilon_1\}$. " N_{λ_1} de multiplicité 1.

La matrice de $g \setminus \mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sur la base $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

car $g(\varepsilon_1) = \lambda \varepsilon_1 + 0.\varepsilon_2 + 0.\varepsilon_3$.

$g(\varepsilon_2) = 0\,\varepsilon_1 + a\,\varepsilon_2 + c.\varepsilon_3$

$g(\varepsilon_3) = 0.\varepsilon_1 + b.\varepsilon_2 + d\,\varepsilon_3$.

comme $f \setminus \mathrm{Ker}(f - Id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$f \circ g \setminus \mathrm{Ker}(f - Id)^2 = g \circ f \setminus \mathrm{Ker}(f - Id)^2$.

Il vient que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

cette égalité impliq $\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} a = a + c \\ a+b = b+d \\ c = c \\ c+d = d \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = d \\ a, b \text{ arbitraires.} \end{cases}$

4) soit $F = \{ B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \; ; \; AB = BA \}$.

Mq F est sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer sa dimension.

Il suffit de vérifier $\forall B_1, B_2 \in F$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \in F$.

D'après q3 : $F \cong \{(\lambda, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5, \; c = 0, a = d\}$

$\cong \mathbb{R}^3$ (3 deg de liberté).

Donc $\dim F = 3$.

Ex : VIII . 5 ; $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) P_u de u ?... indépend^t de n'pt q'le base.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - (1-\lambda)L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \text{ pivot} \end{matrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1+\lambda & -\lambda^2+\lambda-2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -\lambda & 1+\lambda & -\lambda^2+\lambda-2 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda & -\lambda^2+\lambda-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda & -\lambda^2+\lambda-2 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2-\lambda+1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda^2-\lambda+1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(-\lambda + \lambda^2 - \lambda + 1) = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda-1)^2.$$

Donc $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2$ & $Sp(A) = \{\underset{\text{double}}{0}, \underset{\text{double}}{1}\}$

Calcul $E_0 = \ker(A - \lambda_0 Id) = \ker(A)$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_0 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Vect\{(e'_1)\}.$$

choisissons $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calcul $N_0 = \ker(A - \lambda_0 Id)^2 = \ker(A^2)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_0 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Vect\{e'_2, e'_1\}.$$

Observons que $(A - 0.I)e'_2 = e'_1 \Rightarrow A e'_2 = e'_1$.

Calcul $E_1 = \ker(A - \lambda_1 Id) = \ker(A - Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = Vect\{(e'_3)\}.$$

Calcul $N_1 = \ker(A - \lambda_1 Id)^2 = \ker((A - Id)^2)$

$$(A - Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_1 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Vect\{e'_3, e'_4\}$$

On a $(A - 1.I)e'_4 = e'_3$.

2) Donner une base suivant laquelle la mat de u se décompose en deux blocs diagonaux.

On a $Ae_1' = 0$, $Ae_2' = e_1'$, $(A-I)e_3' = 0$, $(A-I)e_4' = e_3'$

D'où la mat de A ds la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$.

$$D = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Ae_1' & Ae_2' & Ae_3' & Ae_4' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

cette mat se décompose 2 blocs diagonaux : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A = P.D.P^{-1}$, où P est mat de passage de la base canoniq $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ à la base $\mathcal{B}'$.

D'après Q1, on a :

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) Donner les projecθs p_i de $\mathbb{R}^4$ sur N_i.

Dans la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$, la projecθ p_0 de $\mathbb{R}^4$ sur N_0 parallèlement à N_1 a pr mat :

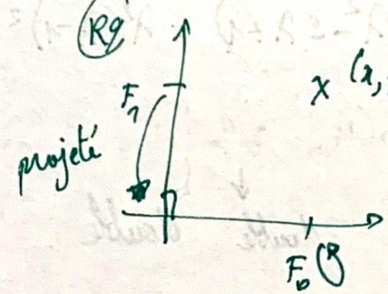
$$D_0 = \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la projecθ p_1 de $\mathbb{R}^4$ sur N_1 parallèlement à F_0 a pr mat :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la projecθ p_1 a pr mat $P.D.P^{-1}$ dans la base canoniq $\mathcal{B}$ pour $i = 0, 1$.

Rq



→ projecθ de F_0 ds lui-m̂ dc Identité

Ex VIII . 6 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} A^3 = -A \\ A \neq 0 \end{cases}$ $\rightarrow A^3 + A = 0$

Mq A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^3 + A = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda$: polyn. annulateur.

Th Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristiq est un polynôme annulateur.

le polynôme : Racines dans $\mathbb{C}$: $0, \pm i$ → scindé
Racines ds $\mathbb{R}$: 0 → pas scindé.

Ex VIII.6 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} A^3 = -A \\ A \neq 0 \end{cases}$ → $A^3+A=0$

Mq A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^3+A=0 \Rightarrow \lambda^3+\lambda$: polyn. annulateur.

Th Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristiq est un polynôme annulateur.

- Le polynôme : Racines dans $\mathbb{C}$: $0, \pm i$ → scindé
  Racines ds $\mathbb{R}$: 0 → pas scindé.

→ D'après l'hyp, $Q(\lambda) = \lambda^3+\lambda$ est un polyn. annulatR de A. Écrivons $Q(\lambda) = \lambda(\lambda^2+1)$ et λ et λ^2+1 st 2 polyn. $\boxed{\text{pee}}$. D'après le Lemme des noyaux :

$$\ker A \oplus \ker(A^2+I) = \ker A(A^2+1)$$

• Or $\operatorname{Ker} A(A^2+1) = \ker Q(A) = \ker 0 = \mathbb{R}^3$.

Donc $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A^2+I) = \mathbb{R}^3$.

- • Comme $A \neq 0$, $\ker(A) \neq \mathbb{R}^3$ et il y a 3 cas à distinguer.

▸ **Cas ① dim Ker A = 0 :**

Donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(A^2+I) = \mathbb{R}^3$. D'où $A^2+I=0$ $\Rightarrow A^2 = -I \Rightarrow \det(A^2) = \det(-I)$. Or $\det(A^2) = (\det(A))^2 \geq 0$ car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\det(-I) = (-1)^3 \det I = -1$. $\boxed{\text{c!!c}}$

Ce cas n'est pas possible.

▸ **Cas ② dim Ker A = 1 :**

Ds ce cas, $\dim \operatorname{Ker}(A^2+I) = 2$. On pt choisir une base $\{\varepsilon_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\}$ tq $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1\}$ et $\operatorname{Ker}(A^2+I) = \operatorname{Vect}\{\varepsilon'_2, \varepsilon'_3\}$. La matrice de A ds la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\}$ est

$$\begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A\varepsilon_1 & A\varepsilon'_2 & A\varepsilon'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'égalité $\operatorname{Ker}(A^2+I) = \operatorname{Vect}\{\varepsilon'_2, \varepsilon'_3\}$ se traduit par $B^2+I=0$. D'où B admet le polyn. annulateur λ^2+1. Comme ce polyn. admet 2 racines simples ds $\mathbb{C}$ ie $\pm i$, il s'ensuit que son polyn. minimal est soit $\lambda - i$, soit $\lambda + i$, soit $(\lambda+i)(\lambda-i) = \lambda^2+1$. Les 2 premiers cas étant exclus car $B+iI \neq 0$, $B - iI \neq 0$ car $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dc (λ^2+1) est le polyn. minimal de B.

Donc B est semblable ds $\mathbb{C}$ à mat $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Notons que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi semblable dans $\mathbb{C}$ à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Donc B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$, il existe une mat inversible $P \in \mathcal{G}_2(\mathbb{C})$ tq $P.B.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En écrivant $P = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix}$ 4 $x, y, z, t \in \mathbb{C}$, on a :

$PB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P$ et $\det P \neq 0$. En écrivant $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $xt - yz \neq 0$.

C'est un systm 4 équats à 4 inconnus (x, y, z, t) qui admt au moins une solu° (x_0, y_0, z_0, t_0) de $x_0 t_0 - y_0 z_0 \neq 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$.

Comme les coeff de ce système st réels $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, ce syst admt 1 solu° $(x_0, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ de $xy - zt \neq 0$. Donc $\exists P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{G}_2(\mathbb{R})$ tq $P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Considérons la base $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} = P\{\varepsilon_2', \varepsilon_3'\}$.

La mat de $A|_{\ker A^2 + I}$ ds $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est $P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc A ds la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$P^{-1}BP$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▸ Cas ③ $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.

On a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et $\operatorname{Ker} A^2 + I = \{\varepsilon_3\}$.

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

car $\ker A \oplus \ker A^2 + I = \mathbb{R}^3$.

Ces espaces st stables par rapport à A.

$\ker(A^2 + I) \Rightarrow b^2 + 1 = 0$ (impossible ds $\mathbb{R}$)

NB : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ semblables.

car $P_C(X) = X^2 + 1$.

Ex VIII.8 Réduire mat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(cad Etudier diagonalisabilité ou la triangularisabilité de A, donner une mat P tq $P^{-1} A . P$ soit aussi simple q possible).

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \text{ pivot} \end{array} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} -3\lambda+1 & -\lambda^2+4\lambda+1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$P_A(\lambda) = +(\lambda-4)(-\lambda^2+\lambda+2) = -(\lambda-4)(\lambda^2-\lambda-2)$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

$S_p(A) = \{-1, 2, 4\}$.

- $E_{-1} = \ker(A+I)$: $A \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ posons $e_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $E_2 = \ker(A-2I)$: $A \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect}\{e_2'\} \Rightarrow e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $E_4 = \ker(A-4I)$: $A \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_3 = \text{Vect}\{e_3'\} \Rightarrow e_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

soit P la mat de passage de la base canoniq $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

soit D la mat de A ds base $\mathcal{B}'$.

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1} A . P$.

Ex VIII.8 Réduire mat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(cad Etudier diagonalisabilité ou la triangularisabilité de A, donner une mat P tq $P^{-1}A.P$ soit aussi simple q possible).

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, L_3 pivot $= (\lambda-4)\begin{vmatrix} -3\lambda+1 & -\lambda^2+4\lambda+1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix}$

- $P_A(\lambda) = +(\lambda-4)(-\lambda^2+\lambda+2) = -(\lambda-4)(\lambda^2-\lambda-2)$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

$S_p(A) = \{-1, 2, 4\}$.

- $E_{-1} = \ker(A+I)$: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ posons $e_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $E_2 = \ker(A-2I)$: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect}\{e_2'\} \Rightarrow e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $E_4 = \ker(A-4I)$: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_3 = \text{Vect}\{e_3'\} \Rightarrow e_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

soit P la mat de passage de la base canoniq $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

soit D la mat de A ds base $\mathcal{B}'$.

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}A.P$.

Ex VIII. 12 Soit f un endomorphisme de E et P son polynôme minimal. Mq f est bijective ssi $P(0) \neq 0$.

Ex VIII. 10 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Vp de A ? Est-elle diagon ?

Calculons $P_A(\lambda)$ de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \text{ ni} \\ L_3 + (\lambda-2)L_2 \end{matrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda^2+2\lambda+1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda^2+2\lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + 2\right] \overset{\text{2 rac}}{=} -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)$$

$$= -(\lambda^2(\lambda-2) - (\lambda-2)] = -((\lambda^2-1)(\lambda-2)]$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

$P_A(\lambda)$ admet 3 racines distinctes -1, 1 et 2.

Donc A est diagonalisable.

NB : $X_n = A^1 . X_{n-1}$
$= A^2 . X_{n-2}$
$= A^3 . X_{n-3}$
$= \dots$

$X_n = A^n . X_0$

Ccl : $u_n = \frac{1}{2}\left(2.u_1 + (-1)^n u_0 - 2^n u_2 \right)$.

2) Soit u_n une suite récurrente.

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

en usant vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$; terme u_n en
de A.

termes u_0, u_1, u_2, n ?

X_{n+1}

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}, \text{ soit } X_{n+1} = A.X_n, \quad \forall n \in$$

Donc $\boxed{X_n = A^n . X_0}$ Pour calculer A^n, on diagonalise A :

on trouve une base de vecteurs propres de A.

- $E_{\lambda_{-1}} = \ker(A - \lambda_{-1} Id) = \ker(A + Id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$$

- $E_{\lambda_2} = \ker(A - 2Id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Ve}$$

- $E_{\lambda_1} = \ker(A - Id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}$$

Soit P mat de passage de $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$.

On a
$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } A = PDP^{-1} \quad \text{où } D = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ae_1' & Ae_2' & Ae_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$X^n = A^n . X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n u_0 \\ u_1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Ex VIII. 12 soit f l'endomorphisme de E et P son polynôme minimal : P_f. Mq f est bijective ssi $P(0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Supposons f est bijective. Mq $P(0) \neq 0$.

Soit P_f le polyn. caract de f.

$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I)$

$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$P_f(0) = \det(f)$.

Puisq f est $\boxed{\text{bijective}}$, $\det f \neq 0 \Rightarrow P_f(0) \neq 0$.

D'après Th Cayley-Hamilton, $P_f(f) = 0$.

Donc P divise P_f. Or $P_f(0) \neq 0$.

Il s'ensuit que $P(0) \neq 0$ car on écrire :

$\boxed{P_f(\lambda) = Q(\lambda)\, P(\lambda)}$ μ ant 1 polyn. Q_λ et

$P(0) = 0 \Rightarrow P_f(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $P(0) \neq 0$. Mq f est bijective.

$P(0) = a_0$

Écrivons $\underbrace{P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j}$, comme $P(0) \neq 0$,

on a $a_0 \neq 0$.

Puisq $P(f) = 0$, on obtient $\sum_{j=0}^{n} a_j f^j = 0$

$\Rightarrow I = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^j = f\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^{j-1}\right)$

Posons $g = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^{j}$. On a $I = f \circ g$.

D'où $g = f^{-1}$ et f est bijective.

Ex VIII. 13 soit E un ev de dim 3 sur $\mathbb{R}$.

Dmq f admet un plan stable par f.

(on discutera en f cas. trigonalisable de f).

soit P le polyn. caract de f : $P(\lambda) = \det(f - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme $\dim E = 3$, $P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Puisq $\frac{P(\lambda)}{\lambda^3} = -1 + a\left(\frac{1}{\lambda}\right) + b\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + c\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 \underset{|\lambda| \to \infty}{\longrightarrow} -1$.

et $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^3 = \infty$, $\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda^3 = -\infty$, $P(\lambda)$ admet au moins une racine réelle λ_0. Il y a 2 cas :

Cas I : P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$:

On pt écrire $P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)\, Q(\lambda)$ où $Q \in \mathbb{R}[\lambda]$ et $\deg Q = 2$

et Q n'est pas scindé. Comme Q n'est pas scindé, Q n'admet pas de racines réelles et de $Q(\lambda)$ et $\lambda - \lambda_0$ st $\boxed{\text{pee}}$.

D'après le $\boxed{\text{lemme des noyaux}}$:

$$\ker Q(f) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) = \operatorname{Ker} P(f) = \mathbb{R}^3 \quad (*)$$

où la dernière égalité découle $\boxed{\text{Th C-H}}$, $P(f) = 0$.

Puisq λ_0 est vp de f, $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) \geq 1$.

Il y a 2 sous-cas :

- sous-cas I.a) $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) \geq 2$.

Il suffit de prendre un plan $F \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I)$ et on a $f(F) \subset F$.

- sous-cas I.b) $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) = 1$.

Dans ce sous-cas, la somme directe $(*)$ entraîne que $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = 3 - 1 = 2$. Prenons de $F = \operatorname{Ker} Q(f)$.

C'est un plan stable par f d'après le Lemme des noyaux.

Ex VIII. 12 soit f l'endomorphisme de E et P son polynôme minimal : P_f. Mq f est bijective ssi $P(0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Supposons f est bijective. Mq $P(0) \neq 0$.

Soit P_f le polyn. caract de f.

$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I)$

$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$P_f(0) = \det(f)$.

Puisq f est $\boxed{\text{bijective}}$, $\det f \neq 0 \Rightarrow P_f(0) \neq 0$.

D'après Th Cayley-Hamilton, $P_f(f) = 0$.

Donc P divise P_f. Or $P_f(0) \neq 0$.

Il s'ensuit que $P(0) \neq 0$ car on écrire :

$\boxed{P_f(\lambda) = Q(\lambda)\ P(\lambda)}$ μ un polyn. Q_λ et

$P(0) = 0 \Rightarrow P_f(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $P(0) \neq 0$. Mq f est bijective.

$P(0) = a_0$

Ecrivons $\underbrace{P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j}$, comme $P(0) \neq 0$,

on a $a_0 \neq 0$.

Puisq $P(f) = 0$, on obtient $\sum_{j=0}^{n} a_j f^j = 0$

$$\Rightarrow I = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^j = f\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^{j-1}\right)$$

Posons $g = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} f^j$. On a $I = f \circ g$.

D'où $g = f^{-1}$ et f est bijective.

Ex VIII. 13 soit E un ev de dim 3 sur $\mathbb{R}$.

Dmq f admet un plan stable par f. (on discutera en f car. trigonalisable de f).

(espace propre / esp. caract)

soit P le polyn. caract de f : $P(\lambda) = \det(f - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme $\dim E = 3$, $P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Puisq $\dfrac{P(\lambda)}{\lambda^3} = -1 + a\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + b\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right) + c\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^3 \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} -1$.

et $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^3 = \infty$, $\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda^3 = -\infty$, $P(\lambda)$ admet au moins une racine réelle λ_0. Il y a 2 cas :

Cas I : P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$:

On pt écrire $P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)\, Q(\lambda)$ où $Q \in \mathbb{R}[\lambda]$ et $\deg Q = 2$ et Q n'est pas scindé. Comme Q n'est pas scindé, Q n'admet pas de racines réelles et dc $Q(\lambda)$ + $\lambda - \lambda_0$ st $\boxed{\text{pee}}$.

D'après le $\boxed{\text{Lemme des noyaux}}$:

$$\operatorname{Ker} Q(f) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) = \operatorname{Ker} P(f) = \mathbb{R}^3 \quad (*)$$

où la dernière égalité découle $\boxed{\text{Th C-H}}$, $P(f) = 0$.

Puisq λ_0 est vp de f, $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) \geq 1$.

Il y a 2 sous-cas :

- **sous-cas I.a)** $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) \geq 2$.

  Il suffit de prendre un plan $F \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I)$ et on a $f(F) \subset F$.

- **sous-cas I.b)** $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_0 I) = 1$.

  Dans ce sous-cas, la somme directe $(*)$ entraîne que $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = 3 - 1 = 2$. Prenons dc $F = \operatorname{Ker} Q(f)$.

  C'est un plan stable par f d'après le Lemme des noyaux.

Cas II : P est scindé sur $\mathbb{R}$.

f endo E

$\dim E = n$

$P_f(\lambda) = .$ $\quad \deg P_f = n$.

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \ , \ a_k \in \mathbb{K}$$

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A + (-1)\lambda I)$$

n fois. dc $(-1)^n$

$$P(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2).$$

i : λ_0, multiplicité 1

Ex 15 Soit A mat de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Dmq Vp de A est 1 & 2.
2) Dtmr sep de A. mat A diago ?
3) Dtmr sec de A.
4) Dtmr une base de $\mathbb{R}^3$ ds lq^{lle} mat de l'endo $\leftarrow A \rightarrow$ à A est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire la décomposiθ de Dunford de B.

1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (1-\lambda) L_2 \\ L_2 \text{ pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} (2-\lambda)(1-\lambda) & 2-\lambda \\ 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (2-\lambda)(1-\lambda)$$

$$= -(2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)\right]$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{2, 1\}$

$2 = \lambda_2$, multiplicité $= 1$; $1 = \lambda_1$, multiplicité $= 2$

2) • $E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 Id) = \ker(A - 2Id)$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| A \iff \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| A$$

$\Rightarrow E_{\lambda_2} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1'$

• $E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 Id) = \ker(A - Id)$ non colinéaires donc indépdts

$$A \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right| \iff A \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow E_{\lambda_1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2'$

$\Rightarrow$ mat n'est pas diagonalisable car

$$\dim(E_{\lambda_2}) + \dim(E_{\lambda_1}) = 1 + 1 \neq \deg(P_A(\lambda))$$

ou comme $\dim E_{\lambda_1} = 1 < 2 \Rightarrow$ n'est pas diag.

3) • $E_{\lambda_2} = N_{\lambda_2} = \ker(A - 2Id)^1$

• $N_{\lambda_1} = \ker(A - Id)^2 = \ker(A_1^2)$.

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_1^2 \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right| \iff A_1^2 \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right|.$$

On peut choisir $N_{\lambda_1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ où $e_3'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis $(A - I) e_3'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2'$.

4) Dtmn base de $\mathbb{R}^3$ ds lq^{lle} mat endo $\leftrightarrow$ A : $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On choisit dc $e_3' = e_3'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$(A - 2I)\, e_1' = 0 \Rightarrow A e_1' = 2 e_1'$,

$(A - I)\, e_2' = 0 \Rightarrow A e_2' = 1 e_2'$,

$(A - I)\, e_3' = (A - I)\, e_3'' = e_2' \Rightarrow A e_3' = e_2' + e_3'$.

La mat de A ds la base $\mathcal{B} = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est ∇ :

$$B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} Ae_1' & Ae_2' & Ae_3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La mat de passage de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $A = P . B . P^{-1}$

Cette $\boxed{\text{trigonalisa}\Theta}$ permt obtenir décomposiΘ de Dunford en A, en écrivant :

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

On a
$A = P . B . P^{-1} = P D . P^{-1} + P . N . P^{-1}$. La mat D est diagonalisable, N est nilpotente et $DN = ND$.
Ce sont les mat de la décomposiΘ de Dunford.

NB : on a décomp de Dunford ssi polyn. scindé.

$\boxed{\text{Ex 14}}$ soit E un ev de dim finie sr un corps $\mathbb{K}$. soit f un endo. de E vérifiant :

$$f^4 = f^2 + f .$$

1) Dmq $E = \ker(f^3 - f - Id) \oplus \ker f$

2) Dmq $Im f \subseteq \ker(f^3 - f - Id)$

puis que $Im f = \ker(f^3 - f - Id)$

Puisq $f^4 = f^2 + f$. Le polyn $P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda$ est annulateur par f.

Ecrivons $P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - \lambda - 1)$.

Observons que les 2 premiers polyn. λ et $\lambda^3 - \lambda - 1$ st $\boxed{\text{PEE}}$ car la DE de $\lambda^3 - \lambda - 1$ par λ donne le reste -1. ($-1 \neq 0$ dc ils st pee).

Et -1 n'est pas racine du polyn. λ (son uniq racine est 0).

En effet $\lambda^3 - \lambda - 1 = \lambda(\lambda^2 - 1) + (-1)$

1) Dmq $E = \ker(f^3 - f - Id) \oplus \ker f$.

En appliquant lemme du noyau aux 2 polyn X et $X^3 - X - 1$.

On obtient que :

$$\ker(f^3 - f - I) \oplus \ker f = \ker f(f^3 - f - I).$$

Le membre de droite est $\ker(f^4 - f^2 - f) = \ker 0 = E$, d'après l'hypothèse.

D'où $\ker(f^3 - f - I) \oplus \ker f = E$

2) Dmq $\operatorname{Im} f \subseteq \ker(f^3 - f - Id)$ puis que
$\operatorname{Im} f = \ker(f^3 - f - Id)$.

Pr mq $\operatorname{Im} f \subset \ker(f^3 - f - I)$, il faut & il suffit de mq $\forall x \in E : f(x) \in \ker(f^3 - f - I)$, ce q revient au m à dire q $(f^3 - f - I)(f(x)) = 0$.

Or $(f^3 - f - I)(f(x)) = (f^4 - f^2 - f)(x) = 0$, d'après hypo.

L'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \ker(f^3 - f - I)$ s'en découle.

D'une part, d'après $\boxed{\text{TH du rang}}$!

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

D'autre part, d'après Q1, $\dim \ker(f^3 - f - I) + \dim \ker f = \dim E$.

Ceci, combiné à l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \ker(f^3 - f - I)$, implique que $\operatorname{Im} f = \ker(f^3 - f - I)$.

□

Cas II : P est scindé sur $\mathbb{R}$.

f endo E

$\dim E = n$

$P_f(\lambda) = .$ $\deg P_f = n$.

$$P_f(\lambda) = \underline{(-1)^n}\, \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \quad a_k \in \mathbb{K}$$

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A + (-1)\lambda I)$$

← n fois. dc $(-1)^n$

$$P(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2).$$

<u>i</u> : λ_0, multiplicité 1

on pt écrire $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)\,Q(\lambda)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = 2$ et $Q(\lambda_0) \neq 0$. Donc $\lambda - \lambda_0$ et Q st PEE.

D'après le lemme des noyaux, on a :

$$\ker Q(f) \oplus \ker(f - \lambda_0 I) = \ker P(f) = \mathbb{R}^3.$$

Puisq la multip. de $\lambda = \lambda_0$ est 1, on a $\dim \ker(f-\lambda_0 I) = 1$.

Il suffit de choisir $F = \ker Q(f)$, et dc $\dim F = 2$ et F est stable par f.

<u>ii</u> : la multiplicité de λ_0 : 2.

On pt écrire $P(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)$ où $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_0$. Donc $(\lambda-\lambda_0)^2$ et $(\lambda-\lambda_1)$ st PEE.

D'après le lemme des noyaux,

$$\ker(f-\lambda_0 I)^2 \oplus \ker(f-\lambda_1 I) = \ker P(f) = \mathbb{R}^3$$

Puisq la multiplicité de $\lambda = \lambda_1$ est 1, on a $\dim \ker(f - \lambda_1 I) = 1$. D'où $\dim \ker(f-\lambda_0 I)^2 = 3-1 = 2$

Il suffit de de choisi $F = \ker(f - \lambda_0 I)^2$ et $\dim F = 2$ et F est stable par f.

<u>iii</u> : la mult. de λ_0 : 3

$P(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)^3$. On use la forme canoniq de Jordan.

On voit que ds une base convenable $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ f s'exprime par 1 des mat suivants :

possibilité (i) :
$$\begin{array}{c|ccc} & f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ e_1' & \lambda_0 & 1 & 0 \\ e_2' & 0 & \lambda_0 & 1 \\ e_3' & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}$$

possibilité (ii) :
$$\begin{array}{c|ccc} & f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ e_1' & \lambda_0 & 0 & 0 \\ e_2' & 0 & \lambda_0 & 1 \\ e_3' & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}$$

si on se trouve ds (i), il suffit de prendre

$$F = \text{Vect}\{e_1', e_2'\}.$$

si on se trouve ds (ii), il sdp :

$$F = \text{Vect}\{e_2', e_3'\}$$

possibilité (iii) :
$$\begin{array}{c|ccc} e_1' & \boxed{\lambda_0} & 0 & 0 \\ e_2' & 0 & \boxed{\lambda_0} & 0 \\ e_3' & 0 & 0 & \boxed{\lambda_0} \end{array} \rightarrow F = \text{Vect}\{e_1', e_2'\}$$

Ex VIII.16 soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1) Factoriser le polym. caract. $P_{A_\alpha}(X)$ en monômes.
2) Dtmn selon α : vp de A_α & la multiplicité
3) Dtmn valeurs α pr lsqlls A_α est diagona.
4) Dtmn selon α : polym. minimal de A_α.

On suppose $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ l'endo de $\mathbb{R}^3 \leftrightarrow A$.

a) Dtmn sep & sec de A
b) Dmq f admt plan stable (ie f invariant)
c) Dmq $\exists$ base de $\mathbb{R}^3$ ds dqll mat f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

et trouver mat P inv. tq $A = P.B.P^{-1}$

d) écrire décomposit° de Dunford de B.

1) Calculons $P_{A_\alpha}(X)$ de A_α.

$$P_{A_\alpha}(X) = \det(A_\alpha - XI) = \det\begin{pmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (1+X)L_2 \\ L_2 \text{ pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -(X+2)(X+1) & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 0 & -1-X & \alpha-X \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -(X+2)(X+1) & \alpha+1 \\ -(X+1) & \alpha-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\left(-(X+1)\right) \begin{vmatrix} X+2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$

$$= (X+1)\left[(X+2)(\alpha-X) - 1(\alpha+1)\right] = -(X+1)\left(X^2 - (\alpha-2)X - (\alpha-1)\right)$$

$$= -(X+1)(X-(\alpha-1))(X+1) = -(X+1)^2(X-(\alpha-1))$$

Donc $P_{A_\alpha} = -(X+1)^2(X-(\alpha-1))$.

2) Cas $\alpha \neq 0$: Ds ce cas $\alpha - 1 \neq -1$ et A_α admt 2 vp distinctes à savoir : $X_1 = -1$ (double) et $X = \alpha - 1$ (simple).

Cas $\alpha = 0$: Ds ce cas $\alpha - 1 = -1$ et $P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^3$ et A_α admt uniq vp $X = -1$ (triple)

3) Valeurs α pr lsq A_α est diago ?

On détermine E_{-1} car multip. Vp $X_{-1} = -1 \geqslant 2$.

Cas $\alpha \neq -1$

$$A \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \rightarrow A \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\{e_1'\}.$$

Cas $\alpha = -1$

$$\Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}\{e_1', e_2^*\} \text{ où } e_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mtn on combine ces 2 cas & 2 cas 2).

Cas $\alpha \notin \{-1, 0\}$:

on a $X = -1$ est racine double de P_{A_α} et $\dim E_{-1} = -1$.
Donc A_α n'est pas diagonalisable.

Cas $\alpha = 0$:

on a $X = -1$ est racine multip. 3 et $\dim E_{-1} = 1$.
Donc A_α n'est pas diagonalisable.

Cas $\alpha = -1$:

on a $X = -1$ est racine double de P_{A_α} & $\dim E_{-1} = 2$.
De plus $X = \alpha - 1$ est une racine simple de P_{A_α} et dc on a $\dim E_{\alpha-1} = 1$ où $E_{\alpha-1} = \ker(A_\alpha - (\alpha-1)I)$.
Donc A_α est diagonalisable lsq $\alpha = -1$.

NB : Prop 2 : $\lambda \in \mathbb{K}$, λ vp de u ssi λ est racine son polyn min.

4) Dtmr selon α vl$^{\text{r}}$ polynôme minimal de A_α.

Soit M_α le polynôme minimal de A_α.
On considère 2 cas Q2).

Cas $\alpha \neq 0$: selon 2), A_α admt 2 vp distinctes : $\begin{cases} X = -1 \text{ (double)} \\ X = \alpha - 1 \text{ (simple)} \end{cases}$

D'après Prop 2) p38 ; -1 et $\alpha - 1$ st racines de M_α.
Par conséqt, il n'y a que 2 possibilités :

(i) $M_\alpha(X) = (X+1)^2(X - (\alpha-1)) \quad (= -P_{A_\alpha}(X))$

(ii) $M_\alpha(X) = (X+1)(X - (\alpha-1))$.

D'après Prop 3), (ii) a lieu ssi A_α est diagonalisable.
Or d'après 3), A_α est diagonalisable ssi $\alpha = -1$. On en conclut pr $\alpha \neq 0$, il y a 2 possibilité :

$$M_\alpha(X) = (X+1)^2 (X - (\alpha-1)) \text{ pour } \alpha \neq -1, \text{ et}$$
$$M_\alpha(X) = (X+1)(X - (\alpha-1)) \text{ pour } \alpha = -1.$$

Cas $\alpha = 0$: selon 2), A_0 admt 1 vp (triple). $P_{A_0}(X) = -(X+1)^3$.
Puisq M_0 divise P_{A_0}, on a $M_0(X) = (\underset{A_0}{X} + \underset{I}{1})^k$ où $k \in \{1, 2, 3\}$.

$$A_0 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (A_0+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Par conséqt, $k = 3$ et $M_0(X) = (X+1)^3 \quad (= -P_{A_0}(X))$ est le polyn min.

On suppose mtn $\alpha = 0$, $A = A_0$, f l'endo de $\mathbb{R}^3 \leftrightarrow A$.

1) sep, sec de A ? $\quad P_{A_0}(X) = -(X+1)^3$.

Calcul $E_{-1} = \ker(A_0 + I) = \text{Vect}\{e_1'\}$ où $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

comme $P_A(X)$ est scindé & $X = -1$: uniq racine, on a

$N_{-1} = \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$. Le sec N_{-1} est tt espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

2) Dmq f admet un $\boxed{\text{plan stable}}$ (ie f invariant).

D'après Th du rang, $\dim \ker(A+I) + \dim \text{Im}(A+I) = \dim E = 3$

D'où $\dim \text{Im}(A+I) = 2$. Posons $F = \text{Im}(A+I)$.

F est dc un plan stable par f.

3) Dmq $\exists$ base de $\mathbb{R}^3$ ds lq^{lle} mat de f est $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcul $\ker(A_0+I)^2 = C^2$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow C^2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\{e_1', e_2'\}.$$

Ensuite on choisit $e_3' \in \ker(A+I)^3 \setminus \ker(A+I)^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \ker(A+I)^2$

$= \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : -x+y+z = 0\}$: par exemple $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

NB : Vérifier $A+I$ est stable par f :

$A(A+I) = (A+I)A$

$\underbrace{\text{Im}\, A(A+I)}_{f(F)} = \text{Im}(A+I)A \subset \underbrace{\text{Im}(A+I)}_{F}$

On calcule : $(A+I)e_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \boxed{A e_1' = -e_1'}$.

$(A+I)e_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1'$

$\Rightarrow \boxed{A e_2' = e_1' - e_2'}$

$(A+I)e_3' \; \ldots\ldots \Rightarrow \boxed{A e_3' = e_2' - e_3'}$

Donc la mat de passage de la base canoniq $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & e_1' & e_2' & e_3' \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et on a} \quad A = P.B.P^{-1}.$$

$$\text{Donc } B = \begin{array}{c|ccc} & Ae_1' & Ae_2' & Ae_3' \\ \hline e_1' & -1 & 1 & 0 \\ e_2' & 0 & -1 & 1 \\ e_3' & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

4) Cette trigonalisation permet obtenir la décomposition de Dunford de A :

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}$$

On a $A = P.B.P^{-1} = P\Delta P^{-1} + P.M.P^{-1}$.

Ex 88 (@ Delaunay)

Forme Normale de Jordan

1) Vérifions $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$.

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Décrire $(F_k)_{0 \leq k \leq N}$ des noyaux itérés de v. Donner la dimension de chacun sev F_k. L endom.

Soit $\boxed{F_k = \ker v^k}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

▸ $F_0 = \ker v^0 = \ker I = \{0\}$.

▸ $F_1 = \ker v = \ker v$ $\Rightarrow \dim F_1 = 1$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

▸ $F_2 = \ker v^2$ $\Leftrightarrow A^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow F_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\Rightarrow \dim F_2 = 2$

▸ $F_3 = \ker v^3 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow F_3 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim F_3 = 3$

▸ $F_4 = \ker v^4 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_4 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim F_4 = 0.$

3) Mq $\exists$ vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tq $(x, v(x), v^2(x), v^3(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Exiber x.

Calculons les nbrs $\sigma_k = \dim F_k - \dim F_{k-1}$ pr $k \in \{0,1,2,3,4\}$

D'après 2), on a: $\sigma_1 = \dim F_1 - \dim F_0 = 1 - 0 = 1$

$\sigma_2 = \dim F_2 - \dim F_1 = 2 - 1 = 1$

$\sigma_3 = \dim F_3 - \dim F_2 = 3 - 2 = 1$

$\sigma_4 = \dim F_4 - \dim F_3 = 4 - 3 = 1$.

Par TH sces des élts nilpotentes, $\exists$ base de $\mathbb{R}^4$ tq mat de v ds cette base soit de forme :

$$J = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{J_4, \dots, J_4}_{\sigma_4 \text{ blocs}}, \underbrace{J_3, \dots, J_3}_{\sigma_3 \text{ blocs}}, \underbrace{J_2, \dots, J_2}_{\sigma_2 \text{ blocs}}, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\sigma_1 \text{ blocs}}\Big)$$

$= J_4$ car $\sigma_4 = 1$ et $\sigma_3 - \sigma_4 = \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = 0$

Donc $J = J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← sur-diagonale des 1, le reste nul

Pr trouver vecteur X tq $\{X, v(X), v^2(X), v^3(X)\}$ comme une base de $\mathbb{R}^4$, il faut & il suffit de prendre n'importe quel vecteur dans $F_4 \setminus F_3$.

Or $F_4 \setminus F_3 = \mathbb{R}^4 \setminus \{(x,y,z,y),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

On pt choisir pr ex $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_4$.

D'après 1), on a $v(X) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^2(X) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^3(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme on a
$$v(v^3(X)) = v^4(X) = 0,$$
$$v(v^2(X)) = v^3(X)$$
$$v(v(X)) = v^2(X)$$
$$v(X) = v(X).$$

La mat de v ds la base $\{v^3(X), v^2(X), v(X), X\} = \mathcal{B}$ est J.

5)
$$\mathcal{B} = \begin{array}{c|c} & v(v^3(X)) \quad v(v^2(X)) \quad v(v(X)) \quad v(X) \\ \hline \begin{array}{c} v^3(X) \\ v^2(X) \\ v(X) \\ X \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et la mat de passage de la base canoniq $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v^3(X) \quad v^2(X) \quad v(X) \quad X \end{array}.$$

com a $A = P.J.P^{-1}$.

Ex 22 Q pt-on dire d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dim finie annulé par $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$?

soit M le polyn. minimal de f. D'après hypo $P(X)$ et $Q(X)$ st des polyn. annulateurs de f. Par consqt M divise P et Q. Dc $M \mid \mathrm{pgcd}(P,Q)$

Calcul $\mathrm{pgcd}(P,Q)$:

$P(X) = -(X-1)(X^2+X+1)$ et $Q(X) = (X-1)^2$

- $\mathrm{pgcd}(P,Q) = (X-1) \cdot \mathrm{pgcd}(X^2+X+1, X-1)$.

comme $\deg(X-1) = 1$ et $X = 1$ est racine uniq de $X-1$ et $X=1$ n'est pas racine de X^2+X+1, on a $\mathrm{pgcd}(X^2+X+1, X-1) = 1$.

Donc $\mathrm{pgcd}(P,Q) = X-1$ et $M \mid X-1$.

D'où $X-1$ est polyn. annulateur de f.

Il vient que $f - Id = 0$ dc $f = Id$.

L'endomorphisme cherché est l'identité.

Rq soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = X - \alpha$ alors

$$\mathrm{pgcd}(P,Q) = \begin{cases} Q & \text{si } P(\alpha) = 0 \\ 1 & \text{si } P(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

en effet, si $P(\alpha) = 0$ alors d'aps TH Bézt $Q \mid P$ dc $\mathrm{pgcd}(P,Q) = Q$.
si $P(\alpha) \neq 0$ ——— $Q \nmid P$ et dc $\mathrm{pgcd}(P,Q)$ est un polyn de deg $<$ deg Q. č $\deg Q = 1$; deg $\mathrm{pgcd}(P,Q)$ d.t ê 0, ie $\mathrm{pgcd}(P,Q)$ est cte non nulle. Dc $\mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$.

Ex 89

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

1) Vérif $A^2 = 0$ et $A^3 \neq 0$. On note v l'endom. de $\mathbb{R}^4$ canoniqmt «As» à A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{pmatrix} \varnothing \end{pmatrix}$$

2) Décrire $(F_k)_{0 \leq k \leq N}$ des noyaux itérés de v. Donner dim. chacun sev F_k, $0 \leq k \leq 3$.

- $F_0 = \ker v^0 = \ker I$
- $F_1 = \ker v = \ker 0 \iff A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  $\Rightarrow F_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\Rightarrow \dim F_1 = 1$
- $F_2 = \ker v^2 \iff A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow F_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\Rightarrow \dim F_2 = 3$
- $F_3 = \ker v^3 = \mathbb{R}^4$

  $\Rightarrow \dim F_3 = 4$.

3) soit G_{N-1} un supplémentaire de F_{N-1} dans $F_N = \mathbb{R}^4$. Mq $v(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.

D'après 1) on a $A^N = 0$ pr $N = 3$. Donc $N = 3$.
soit G_{N-1} un supplémentaire de $F_{N-1} = \mathbb{R}^4$;
$G_{N-1} \oplus F_{N-1} = F_N$. Comme $F_{N-1} = \ker v^{N-1}$, pr mq $v(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$, on doit prouver que $v(G_{N-1}) \subset \ker v^{N-1}$, ce q revient à dire $v^{N-1}(v(G_{N-1})) = 0 \iff v^N(G_{N-1}) = 0$.
La dernière égalité est vraie car $G_{N-1} \subset F_N = \mathbb{R}^4$ et $v^N = 0$.
Donc $v(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.

4) Trouver un supplémentaire G_{N-2} de F_{N-2} dans F_{N-1} tq $v(G_{N-1}) \subset G_{N-2}$.

Il suffit de mq ★ $v(G_{N-1}) \cap F_{N-2} = \{0\}$. En effet, suppos vraie ★. comme $v(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$ d'après 3) et $F_{N-2} \subset F_{N-1}$, on a $v(G_{N-1}) \oplus F_{N-2} \subset F_{N-1}$.
soit G' un supplémentaire de $v(G_{N-1}) \oplus F_{N-2}$ ds F_{N-1}.
Choisissons $G_{N-2} = v(G_{N-1}) \oplus G'$.
On xq $v(G_{N-1}) \subset G_{N-2}$ et $G_{N-2} \oplus F_{N-2} = v(G_{N-1}) \oplus G' \oplus F_{N-2}$
$= F_{N-1}$.

5) en procédant ainsi de suite, Mq $\exists$ base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ ds laquelle mat de v est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ds a cas $N=3$, en pads, on trouve G_2, G_1, G_0 tq
$G_2 \oplus F_2 = F_3 = \mathbb{R}^4$, $v(G_2) \subset F_2$
$G_1 \oplus F_1 = F_2$, $v(G_1) \subset G_0$.
$G_0 \oplus F_0 = F_1$

D'après ces décomposits & 2) on a $\dim G_2 = \dim F_3 - \dim F_2 = 4-3 = 1$, $\dim G_1 = \dim F_2 - \dim F_1 = 3-2 = 1$.
$\dim G_0 = \dim F_1 - \dim F_0 = 2-0 = 2$.

Une base $\mathcal{B}$ est obtenue c suit : soit $G_2 = Vect(X)$, on a : $G_1 = Vect(v(X))$. c $v^2(X) \in G_0$ et $\dim G_0 = 2$, il suffit de prendre un vecteur $Y \in G_0$ tq $G_0 = Vect\{v^2(X), Y\}$.

Par consqt, on pt prendre $X \in F_3 \setminus F_2$ qq et $Y \in F_1 \setminus F_0$ qq tq $\{v^2(X), Y\}$ soit libre. P@ on prd $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_4$
et on a $v(X) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^2(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On prd $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dc $Y \in F_1$ et $Y \notin F_0$ et $\{v^2(X), Y\}$ est libre.

On a $v(v^2(X)) = v^3(X) = 0$ car $v^3 = 0$.
$v(v(X)) = v^2(X)$,
$v(X) = v(X)$
$v(Y) = 0$ car $Y \in F_1 = \ker v$

Dc la mat de v ds la base $\mathcal{B} = \{v^2(X), v(X), X, Y\}$ est

$$J = \begin{array}{c} \\ v^2(X) \\ v(X) \\ X \\ Y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v^3(X) & v^2(X) & v(X) & v(Y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Autre $\boxed{M}$ voir A est semblable à J : appliquer TH 5e elts nilpotents.
Calculons $\boxed{\gamma_k = \dim F_k - \dim F_{k-1}}$ p $k = 1, 2, 3$.

on a $\gamma_3 = \dim F_3 - \dim F_2 = 4-3 = 1$
$\gamma_2 = \dim F_2 - \dim F_1 = 3-2 = 1$
$\gamma_1 = \dim F_1 - \dim F_0 = 2-0 = 2$.

Par consqt, $J = \mathrm{diag}(J_3, J_1)$.

6) Trouver mat inv.ble $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tq $A = PJP^{-1}$.
Soit P mat de passg de base can. $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ à la base $\mathcal{B}$. on a :

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v^2(X) & v(X) & X & Y \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ex 90

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = 0$ et $A \neq 0$

2) ▸ $F_0 = \ker v^0 = \ker Id$ $\qquad 0 \leq k \leq 2.$

▸ $F_1 = \ker v \iff A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow \dim F_1 = 3.$

▸ $F_2 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim F_2 = 4$

3) soit G_{N-1} un supplémentaire de F_{N-1} dans $F_N = \mathbb{R}^4$.

Mq $v(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.

Voir preuve 3) ex 89

4) ed $\exists$ base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ ds laquelle mat de v est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après 3), soit G_1 un supplémentaire de F_1 dans $F_2 = \mathbb{R}^4$ et on a $v(G_1) \subset F_1$. D'après 2, $\dim F_1 = 3$.

Par csqt, $\dim G_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F_1 = 4 - 3 = 1$.

Par csqt, on pt choisir $\{e_2'\}$ une base de G_1.

Observons que $v(e_2') \neq 0$, car sinon $e_2' \in \ker v = F_1$, ce q contredit le fait que $G_1 \cap F_1 = \{0\}$.

Prenons $e_1' = v(e_2') \in F_1$ car $v(G_1) \subset F_1$.

Comme $\dim F_1 = 3$, trouvons 2 autres vecteurs e_3', e_4' pr que $\{e_1', e_3', e_4'\}$ soit une base de F_1.

On a $v(e_2') = e_1'$

$v(e_1') = 0 = v(e_3') = v(e_4')$.

La mat de v ds la base $\mathcal{B} = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ est

$$J = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} v(e_1') & v(e_2') & v(e_3') & v(e_4') \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

T4 S^{ce} élts nilpotts.

Autre $\boxed{M}$: A est semblable à J est applique

$\gamma_k = \dim F_k - \dim F_{k-1}$ pr $k = 0, 1, 2$.

$\gamma_1 = \dim F_1 - \dim F_0 = 3 - 0 = 3$.

$\gamma_2 = \dim F_2 - \dim F_1 = 4 - 3 = 1$.

$\Rightarrow J = \mathrm{diag}(J_2, J_1, J_1)$. car $\gamma_2 = 1$ et $\gamma_1 - \gamma_2 = 2$.

$$J = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^{J_2} & & \\ & \overbrace{\boxed{0}}^{J_1} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

5) Trouver mat inv. $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tq $A = PJP^{-1}$!

Revenons à 4), choisissons e_2' une base de G_1.

Il suffit de prendre un vecteur $e_2' \in F_2 \setminus F_1 = \mathbb{R}^4 \setminus *$

$= \mathbb{R}^4 \setminus \{-x+z+t=0\}$. p. ex. $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on a $v(e_2') = e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il reste à choisir $e_3', e_4' \in F_1$

tq que $\{e_1', e_3', e_4'\}$ soit une base de $F_1 = \{-x+z+t=0\}$.

on pt prendre p. ex. $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\{e_1', e_3', e_4'\}$ est libre car $\left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ admet une

s-mat d'ordre 3 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de det $= -1 \neq 0$.

La mat de passage de la base canoniq $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$

$= \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ est dc

$$P = \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $\underline{A = PJP^{-1}}$.