M2 301

M53 : Intégrales à Paramètres

→ Résolu° équa diff, on aboutit à f

$x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$.

Étude de < cont uniforme / intég. impropres.

CI : Continuité UN & intég. généralisées

D CS I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ alors f est cont,
$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall y \in I,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

D @ ..., f cont & UN sr I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall x, y \in I,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

f UN cont sr $I \Rightarrow f$ cont sr I. (~~R~~F).

TH Heine :
soit I compact de $\mathbb{R}$ & $f : I \to \mathbb{R}$ cont
alors f est UN cont.

DM ?! En suppos^t que f cont sr I & pas UN cont.
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in I$ tq $|x-y| < \delta$
$|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

On apply ppté à $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\exists x_n \in I, \exists y_n \in I$,
$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

ĉ I est fermé, borné & $(x_n)_n \subset I$, $\exists$ ss-suite
$(x_{\varphi(n)})_n$ q @ vrs $\alpha \in I$.

On Rq $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(car $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st ↗ & de $\varphi(n) \geq n$).

D'où $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$.

ĉ f est cont on a : $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\alpha)$
& $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\alpha)$

de $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ce q ?! $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon > 0$

0.1 / 13/09.

(th) Heine $\mathbb{R}^2$

soit I, J 2 compacts de $\mathbb{R}$.
soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont, alors f est (UN) cont sur $I \times J$.

$\to$ f UN cont sur $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$

(DE) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$ preuve exos.

I. 2.1. Intégrales généralisées

On suppose connue notion intégral de Riemann.

(D2) soit I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est localem^t intégrable (au sens de Riemann) si f est Riemann intégrable sur tt interv. compact.

(D3) soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ & supposons f localm^t intégrable sur $[a, b[$, on dit que l'intégrable de f sur $[a, b[$ est (CV) si $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in [a, b[$ a une limite finie qd $x \to b$ & on note $\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$ & c^{tte} limite s'appelle l'int. généralisée de f sur $[a, b[$. (de m̂ sur ôtres intervalles)

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est (CV) $\iff \alpha > 1$.

• $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est cont sur $[1, \infty[$ dc loc^t int.

soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\, dx \overset{\text{si } \alpha = 1}{=} \int_1^x \frac{1}{x}\, dx = \ln x \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ (DV).

si $\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_1^x x^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_1^x$

$= \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1) \longrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$

@$_2$: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ CV $\Rightarrow \alpha < 1$. idem @1.

I.2.2. Fausse Généralité

P3 soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ cont & supposons que $\lim_{x \to b^-} f(x)$ $\exists$ (& est finie)

alors $\int_a^b f(x)\, dx$ CV.

@1 : $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ CV.

$f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est cont, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

Dt, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ d'où p P3,

l'int $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ CV.

I.2.3. Crit de CV ∞ f de signe cte

Th4 soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ & spps que

(i) $\exists c \in [a, b[$, $\forall x \in [c, b[$: $f(x) \geq 0$

(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$

(ie : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in [c, b[$, $f(x) \leq M.g(x)$)

alors @ si $\int_a^b g(x)\, dx$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ CV

(b) si $\int_a^b f(x)\, dx$ DV $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx$ DV.

@ $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$ CV.

En effet, $t \mapsto e^{-t^2}$ cont de lclmt intgbl ∞ $[0, \infty[$

- $e^{-t^2} \geq 0$, $\forall t \geq 0$.
- $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ie $t^2 . e^{-t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV dc p le crit de comparaison,

$\int_1^\infty e^{-t^2}\, dt$ CV & dc $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$ CV.

TH5 $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intég. |

Supposons (i) $\exists c \in [a, b[, \forall x \in [a, b[,$ $f(x) \geq 0$.

(ii) $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ <}}{\sim} g(x)$ (ie $\exists \varepsilon : [c, b[\to \mathbb{R}$ tq

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \varepsilon(x) = 0$ & $\forall x \in [c, b[, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$)

alors $\int_a^b f(x)\,dx$ CV ssi $\int_a^b g(x)\,dx$ CV.

Ex $\gamma > 0$: $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(t) + t^\gamma}\,dt$ CV si $\gamma > 1$.

en effet, $\frac{1}{\ln t + t^\gamma} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^\gamma}$

car $\frac{t^\gamma}{\ln(t) + t^\gamma} = \frac{t^\gamma}{t^\gamma(1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t^\gamma}}_{\xrightarrow[t \to \infty]{} 0})} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{\ln t + t^\gamma}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \int_a^\infty \frac{1}{t^\gamma}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \gamma > 1$

CV en Valeur Absolue

TH $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intgble & (CV abs)

supposs que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV alors

$\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

Ex $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV

- $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont dc lclmt intg sr $[1, \infty[$
- $\forall t \geq 1, \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

M53 CV en valeur absolue

Th $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intégrable & supposons que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV.
(on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ CV abs)
alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

@ $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV

• $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont de localmt intégrable sur $[1,\infty[$.

• $\forall t \geq 1$, $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

à @ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ CV MS ne CV pas abs.

|| • $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ cont de loclmt intégrable sur $]0,\infty[$.

• $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ dc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ CV.

soit $x > 1$, IPP sur $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,dt$

on vt ↗ du puissance de x, dc on intègre $\frac{1}{t}$

$u(t) = \frac{1}{t}$ $\quad u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$v(t) = -\cos(t)$ $\quad v'(t) = \sin(t)$

d'où $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos(X)}{X} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$

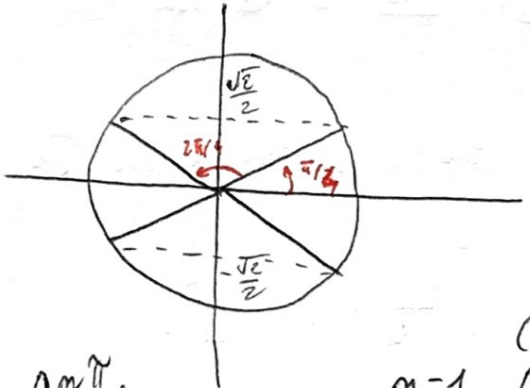
$\left|-\frac{\cos(X)}{X}\right| \leq \frac{1}{X} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV abs dc CV. D'où $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,dt \to \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt \in \mathbb{R}$

Ainsi $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,dt$ possède 1 limite finie qd $X \longrightarrow \infty$.

① Donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ CV.

Étude de CV abs si @ $\frac{\sin t}{t}$



$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Dc l'int ne CV pas abs.

Critère de Cauchy

TH soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ loclmt intégrable

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV $\iff \forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in [a,b[$ tq

$\forall x, x'$; $x_\varepsilon < x < x' \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon.$

C2 : Intégrales définies à paramètres

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle (éventuell^t non borné) de $\mathbb{R}$, $J = [a,b]$ désigne un intervalle fermé, borné ($-\infty < a < b < \infty$).

On considère $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

& on suppose $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann intégrable sur I.

On pt de définir, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$

Q° Qd est-ce que F est cont ? dérivable, C^1, ... ?

II. 1. Continuité de F

Th Supposons que $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont alors si on pose $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$, la f F est bien déf. & cont sur I.

⚠ a, b dvt ê des réels finis ! me f pas pr IG.

DM (·) $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cont donc Riemann intégrable. D'où F est bien déf sur I.

(··) F est cont sur I. Soit $x_0 \in I$ & mq F est cont en x_0. Supposons que x_0 n'est pas 1 extrémité de I (s'il y en a !) Alors $\exists\, \eta > 0$ tq $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$.

soit $\varepsilon > 0$: on cherche à mq $\exists\, \delta$, $\exists\, 0 < \delta < \eta$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt \right|$$

D'où $|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt$

La foncО $f : [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont donc UN cont p le Th de Heine (J est fermé borné)

$\exists\, \delta,\ 0<\delta<\eta$ tq $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\forall t \in [a,b]$, on a :

$$|f(x,t)-f(x_0,t)| \leqslant \varepsilon / b-a$$

En effet, $\exists\, \delta>0$, $\forall (s,t),(s',t') \in [x_0-\eta, x_0+\eta]\times J$.

$$\max(|s-s'|, |t-t'|) < \delta \Rightarrow |f(s,t)-f(s',t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\left| \begin{array}{l} s=x \\ s'=x' \end{array}\right.$ $\left| t=t' \right.$ → on a appliqué cela ds la démo.

D'où $|F(x)-F(x_0)| \leqslant \int_a^b |f(x,t)-f(x_0,t)|\, dt$

$$\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt = \varepsilon \frac{(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ est cont en x_0, $\forall x_0 \in I$

& F est cont sr I.

ⓐ soit $F(x) = \int_0^x \sin(x+t)\, e^{xt^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

→ calculer $\lim_{x\to 0} F(x) = ?$

On introduit $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \sin(x+t)\, e^{xt^2}$$

f est continue & $[0,\pi] = J$ est $\left[\begin{array}{l}\text{fermé,} \\ \text{borné.}\end{array}\right.$

⚠ Condi TH.

Dc F est cont sr $\mathbb{R}$ (par TH-1.)

ep $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^\pi \sin t\, dt = [-\cos t]_0^\pi = 1+1 = 2$

II.2 Condits pr que F soit de classe C^1.

TH soit $f : I\times[a,b] \to \mathbb{R}$ & supposons que

(i) f est cont sr $I\times[a,b]$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe & est cont sr $I\times[a,b]$

alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien déf & de classe C^1 sr I.

$$x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$$

et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

Preuve. soit $x_0 \in I$ & supposons $\exists \eta > 0$, $[x_0-\eta, x_0+\eta] \subset I$.

soit $\varepsilon > 0$. On cherche δ, $0<\delta<\eta$,

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \int_a^b (\partial_1 f)(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon$$

- On a $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$,

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| =$$

$$= \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt - \int_a^b (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) dt \right|$$

- $$\leq \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$

Fixons $t \in [a,b]$ & on applique le $\boxed{\text{TAF}}$ à

$$[x_0-\eta, x_0+\eta] \to \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto f(s,t)$$

$\forall x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$, $\exists\, c_{x,t}$ compris entre x & x_0 tq

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t)$$

D'où $$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |x-x_0| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt$$

$$= |x-x_0| \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sur $I \times J$ donc sur $[x_0-\eta, x_0+\eta]\times J$, & le TH de Heine, elle est UN cont sur $[x_0-\eta, x_0+\eta]\times J$.

Donc $\exists\, \delta$, $0<\delta<\eta$, tq :

$$\max(|s-s'|, |t-t'|) \leq \delta \Rightarrow$$
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(s,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(s',t')\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Appliquons ceci à $s = c_{x,t}$; $s' = x_0$, $t = t' \in [a,b]$.

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0| < \delta$

$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x \quad x_0+\delta$

D'où $|x-x_0|<\delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right|$

$$\leq |x-x_0| \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)$$

de $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ C^1 ou ∂ cont

---

@ $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont

2) déri part $\exists$ & cont.

Dc on pt appliquer le Th 2.

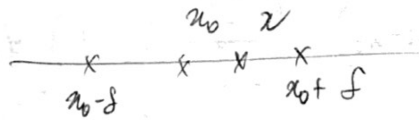
Ainsi F est C^1 & $F'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_{t=2}^{t=2}, \; x \neq$$

dep. x.

intg de t.

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0| < \delta$



D'où $|x-x_0|<\delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $\left|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right|$

$$\leq |x-x_0| \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)$$

de $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ C^1 ou ∂ cont

---

@ $F(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \dfrac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont
2) déri part $\exists$ & cont.

Dc on pt appliquer le TH 2.

Ainsi F est C^1 & $F'(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_{t=2}^{t=2}, \ x \neq$$

dep. x. intg de t.

Applicat° : TH de Fubini (intvlles bornés)

soit $I = [\alpha,\beta]$, $J = [a,b]$

& soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, on spps cont sr $I \times J$
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

Alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$

est cont sr I & la f $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto G(t)$

où $G(t) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ est cont sr J

& $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b G(t)\,dt$.

ie $\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right) dt.$

Preuve (Th) Fubini

ĉ $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est cont,

le (Th) de continuité $\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est cont sur } I. \\ G \text{ est cont sur } J. \end{cases}$

Pour G, on introduit la f $\tilde{f} : J \times I \to \mathbb{R}$
$(t,x) \mapsto \tilde{f}(t,x) = f(x,t)$

$\tilde{f}$ est cont ô composée de f & de la symétrie $(t,x) \longmapsto (x,t)$.

Idée de la preuve :

soit $\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\, dy$, $(x,t) \in I \times J$

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt = \int_a^b \varphi(\beta, t)\, dt$$

Posons $\phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\, dt$, $x \in I$

$$\phi(\beta) = \int_a^b \varphi(\beta,t)\, dt, \quad \phi(\alpha) = \int_a^b \varphi(\alpha,t)\, dt = 0$$

D'où $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt = \phi(\beta) = \phi(\beta) - \phi(\alpha)$

en admettant que ϕ est dérivable $= \int_\alpha^\beta \phi'(x)\, dx$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\, dt \right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$$

$\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\, dy$, $(x,t) \in I \times J$

$\phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\, dt$, $x \in I$

Mq ϕ est bien dérivable sur I.

• Mq φ est cont sur $I \times J$ soit $\varepsilon > 0$,

soit $(x_0, t_0) \in I \times J$: pr $(x,t) \in I \times J$, on a :

$$\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) = \int_\alpha^x f(y,t)\, dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)\, dy$$

$$= \int_\alpha^{x_0} \left(f(y,t) - f(y,t_0) \right) dy + \int_{x_0}^x f(y,t)\, dy$$

soit $M = \sup_{(x,t) \in I \times J} |f(x,t)| < \infty$ (car f cont sur $I \times J$ mult int fum's bornés)

(*) $\left| \int_{x_0}^x f(x,t)\, dt \right| \leq M |x - x_0|$

si $|x-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ alors $\left|\int_{x_0}^{x} f(y,t)\,dt\right| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'après le TH de Heine, f est UN. cont sr $I \times J$.
Donc on pt trouver $\exists\, \delta > 0$,

$$\begin{matrix} |y-y'| < \delta \\ |t-t'| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(y,t) - f(y',t')| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|}$$

• $\boxed{|t-t_0| < \delta} \Rightarrow |f(y,t) - f(y,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|}$
$y \in J$

Donc $\left|\int_{\alpha}^{x_0} f(y,t) - f(y,t_0)\,dy\right| \leq |x_0-\alpha|\frac{\varepsilon}{2|x_0-\alpha|} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'où si $|t-t_0| < \delta$ & $|x-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ alors $|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Donc φ est continue en $(x_0, t_0) \in I \times J$

dc φ est continue sr $I \times J$.

Donc ϕ est bien définie.

Mq ϕ est dérivable sr I

[Appliquons le TH_2 en vérifiant les hypo: de f cont sr $I \times J$ de f & $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sr $I \times J$

- φ est cont $I \times J$
- Mq $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & cont $I \times J$

Sr t fixé ds J, la f

$x \longmapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(y,t)\,dy$ représente la primitive de $y \longmapsto f(y,t)$ q s'annule en α.

Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

& par hypothèse, on a de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est cont $I \times J$

Dc p TH_{22}, ϕ est dérivable &

$\phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt$ d'où $\phi'(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

$$\Phi(\beta) - \cancel{\Phi(\alpha)} = \int_\alpha^\beta \Phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)' dx$$

$\cancel{\Phi(\alpha)} = 0$

$$\int_a^b \Psi(\beta,t)\,dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt$$

□

Exemples d'Applications

Calculer $I = \int_1^2 \left(\int_0^2 y\, e^{xy}\, dy \right) dx$

$[1,2]\times[2,0] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y e^{xy}$ est cont.

D'après le TH de Fubini, on a :

$$I = \int_0^2 \left(\int_1^2 y\, e^{xy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \cancel{y} \frac{1}{\cancel{y}} \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(e^{2y} - e^{y} \right) y$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^{y} \right]_0^2$$

aussi du Paramètre

2.4. Intégrales à Paramètres dt les bornes dépdt

On s'intéresse à une f $x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$.

TH I, J 2 intervalles fermés, bornés.

$f : I\times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b : I \longrightarrow J$.

On spps :
- a, b st de C^1 sr I.
- f cont $^{I\times J}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $^{I\times J}$

Alors la f $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1

$$x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

& $\forall x \in I$,

$$\boxed{\Psi'(x) = f(x, b(x)).b'(x) - f(x,a(x)).a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt}$$

(R9) Supposons que $x \mapsto f(x,t)$ est constante sur I égale à $\varphi(t) = f(x,t)$, $\forall x$

$$\Psi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt = \int_{a(x)}^{t_0} \varphi(t)\,dt + \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt - \int_{t_0}^{a(x)} \varphi(t)\,dt$$

si $H(t) = \int_{t_0}^{u} \varphi(t)\,dt$, $u \in J$

H est dérivable & $H'(u) = \varphi(u)$, $\forall u \in J$.

& $\Psi(x) = (H \circ b)(x) - (H \circ a)(x)$

$\Rightarrow \Psi$ est dérivable & $\Psi'(x) =$

$$\Psi'(x) = H'(b(x)).b'(x) - H'(a(x)).a'(x)$$

$$= \varphi(b(x)).b'(x) - \varphi(a(x)).a'(x)$$

$$= f(x,b(x)).b'(x) - f(x,a(x)).a'(x)$$

Preuve :

soit $\Theta : I \times J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,u,v) \longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt$$

- Θ est bien définie (car f est cont)
- $\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x))$.

D'après Th 2, si $(u,v) \in I \times J$, l'applicat° $x \mapsto \Theta(x,u,v)$ est dérivable sur I et

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

soit $(x,v) \in I \times J$, $u \mapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt = -\int_v^u f(x,t)\,dt$

q est de la primitive de la f cont $t \mapsto f(x,t)$ q s'annule en v. & de

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v) = -f(x,u) \quad \text{\& de même :}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v) = f(x,v).$$

$\frac{\partial \Theta}{\partial u}, \frac{\partial \Theta}{\partial v}$ st cont $^{I \times J \times J}$ car f l'est.

$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ est cont $^{I \times J \times J}$ $\left(\begin{array}{l}\text{voir DM continuité} \\ \text{\& preuve Th Fubini}\end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Θ est de classe C^1.

De plus $d\theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) =$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v).h_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v).h_3$$

$$\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x)) = (\Theta \circ L)(x)$$

$$L : x \longmapsto (x, a(x), b(x))$$

L est de classe C^1 & $L'(x) = (1, a'(x), b'(x))$

Donc $\Psi'(x) = d\Theta(x, a(x), b(x))\,(1, a'(x), b'(x))$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, a(x), b(x)) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x, a(x), b(x)).\,a'(x)$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x, a(x), b(x)).\,b'(x)$$

$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ est cont$^{I\times J\times J}$ (voir DM continuité + preuve (Th) Fubini)

$\Rightarrow$ Θ est de classe C^1.

De plus $d\theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) =$

$$= \frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial\Theta}{\partial u}(x,u,v).h_2 + \frac{\partial\Theta}{\partial v}(x,u,v).h_3$$

$$\Psi(x) = \Theta(x,a(x),b(x)) = (\Theta\circ L)(x)$$

$$L : x \longmapsto (x,a(x),b(x))$$

L est de classe C^1 & $L'(x) = (1, a'(x), b'(x))$

Donc $\Psi'(x) = d\Theta(x,a(x),b(x))\,(1,a'(x),b'(x))$

$$= \frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,a(x),b(x)) + \frac{\partial\Theta}{\partial u}(x,a(x),b(x)).a'(x)$$

$$+ \frac{\partial\Theta}{\partial v}(x,a(x),b(x)).b'(x)$$

Retour sur la preuve du (Th) de Fubini

$f : [\alpha,\beta]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

On pose $\varphi(x,t) = \displaystyle\int_\alpha^x f(y,t)\,dy$, $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]$

alors $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ $\exists$ & $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$; $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]$

(Th) 1° année $h : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ cont ~~Alors~~ posons ((Th) fondam. de l'analyse)

$$H(x) = \int_\alpha^x h(y)\,dy, \quad x\in[\alpha,\beta]$$

Alors H est dérivable sur $[\alpha,\beta]$ & $\begin{cases} H'(x) = f(x) \\ H(\alpha) = 0 \end{cases}$

Fixons $t\in[a,b]$ & on appliq le (Th) à $h(y) = f(y,t)$

C3 Intégrales généralisées à paramètres

On considère f $f : I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

où I est un intervalle qq de $\mathbb{R}$
& $-\infty < a < b \leq \infty$ & on suppose que
$\forall x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV.

Q° : Que pt-on dire de $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$

III. 1. Continuité

TH 1 soit $f : I \times [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont &
on suppose que :
(a) $\exists\, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (li) tq
(i) $\forall (x,t) \in I \times [a,b[, \quad |f(x,t)| \leq g(t)$
(ii) $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

Alors $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie & cont sr I.
$x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$

Preuve : ❖ Mq F est bien définie.
Pr $x \in I$ fixé, l'appli $t \longmapsto f(x,t)$ cont de (li) sr $[a,b[$.
D'après (i) & (ii), l'integ. gén. $\int_a^b |f(x,t)|\,dt$ CV.
Donc l'(ig) $\int_a^b f(x,t)\,dt$ CV, ce q̇ prouve que $F(x)$ a bien a un sens $\forall x \in I$.

❖ Mq F est cont. sr I
soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de point de $[a,b[$ q̇ td vers b.
On pose $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$, $x \in I$.

Comme $I \times [a, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$
le TH 1 du C^2 (TH cont des integ. définies) implique
$\forall n \geq 1$, F_n est cont sr I.
D+, $x \in I$, $F(x) - F_n(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$
$= \cancel{\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt} + \int_{b_n}^{b} f(x,t)\,dt - \cancel{\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt}$

D'où $\left|F(x) - F_n(x)\right| = \left|\int_{b_n}^{b} f(x,t)\,dt\right| \leqslant \int_{b_n}^{b} |f(x,t)|\,dt$

$\leqslant \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt$

$\sup_{x\in I} |F(x) - F_n(x)| \leqslant \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt$

Or $\int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^{b_n} g(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\int_a^b g(t)dt$ CV

Donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |F(x) - F_n(x)| = 0$

Autrement dit, la suite de fs $(F_n)_n$ CV UN. vers F sur I. Comme chq. f F_n est cont sur I, on cd que F est cont sur I. □

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\,dt$

Mq F est bien définie & cont sur $\mathbb{R}$

soit $f : \mathbb{R}\times[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \cos(2xt)\, e^{-t^2}$

(.) La f f est cont.

(..) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[$, $|f(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$
& si on pose $g : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto g(t) = e^{-t^2}$.

On Rq que g est continue sur $[0,\infty[$ de CV sur $[0,\infty[$

De plus, $g(t) \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (car $\lim_{t\to\infty} e^{-t^2} = 0$)

et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV & dc $\int_1^\infty g(t)\,dt$ CV. D'où $\int_0^\infty g(t)\,dt$ CV (...)

mon par 1 trop brutal $\int_0^\infty 1\,dt$ ne CV pas

Par le TH 1, on cd que F est cont sur $\mathbb{R}$.

III.2. Dérivabilité

Th 2. Soit $f : I \times [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont & spps que :

(i) $\forall x \in I$, $\int_a^b f(x,t)\,dt$ cv.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $I \times [a,b[$

(iii) $\exists g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq (i)

• $\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$

•• $\int_a^b g(t)\,dt$ cv

Alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

est de classe C^1 sur I &

$\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Preuve : soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de pts de $[a,b[$ tq $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ & on pose $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$, $x \in I$.

On sait que $f_1 : I \times [a,b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto f_1(x,t)$ est cont sr $I \times [a,b_n]$ & $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ $\exists$ & cont sr $I \times [a,b_n]$ & de le Th 2 de C2 implique que $\forall n \geq 1$, F_n est de classe C^1 & $\forall x \in I$,

$$F_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Par (i), on sait aussi que $\forall x \in I$

$$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x,t)\,dt = F(x)$$

Par (ii) & (iii), $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ cv abs de cv.

En effet, pr $x \in I$, fixé,

• $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cont sr $[a,b[$ (hypo (ii))

• $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$, $\forall t \in [a,b[$ $\Rightarrow \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| dt$ cv

$\int_a^b g(t)\,dt$ cv

Or, $\forall x \in I$,

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt - F_n'(x) \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt - \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{b_n}^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \right| \leq \int_{b_n}^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| dt \underset{\text{par (iii)}}{\leq} \int_{b_n}^b g(t)\, dt$$

Ainsi $\sup_{x \in I} \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt - F_n'(x) \right| \leq \int_{b_n}^b g(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

car $\int_a^b g(t)\, dt$ (cv)

$(F_n')_n$ (cv) UN sur I vers

$$G : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto G(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

En résumé,

(*) $\forall n \geq 1$, F_n est de classe C^1 sur I.

(**) $(F_n)_{n\geq 1}$ (cv) simplem^t vers F sur I.

(***) $(F_n')_{n\geq 1}$ (cv) UN vers G sur I.

Alors par un résultat sur les suites de fonctions, F est de classe C^1 sur I.

& $\forall x \in I$, $F'(x) = G(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$ $\square$

Exemple Pour $x \in I$,

$$F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$$

On sait que F est cont sur $\mathbb{R}$ (voir ce qui précède)

Mq F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \cos(2xt)\, e^{-t^2}$$

(o) f est cont sur $\mathbb{R} \times [0,\infty[$

(i) $\forall x \in I$, $\int_0^\infty f(x,t)\, dt$ (cv) (voir résol^o page 13)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t \sin(2xt)\, e^{-t^2}$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $\mathbb{R}\times[0,\infty[$

(iii) $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq 2t\, e^{-t^2} = g(t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[$

mq bien $\int_0^\infty g(t)\, dt$ (cv) (⚠)

Par Th 2, F est C^1 & $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -2 \int_0^{\infty} t \cdot \sin(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$$

$\underline{\text{ct chercher}}$: trouver équa diff de 1° ordre p. F.

Effectuons une IPP sur $\int_0^X \sin(2xt)(-2t)e^{-t^2}\,dt$

$u(t) = \sin(2xt)$ $\qquad u'(t) = 2x\cos(2xt)$

$v(t) = e^{-t^2}$ $\qquad v'(t) = -2t \cdot e^{-t^2}$

u & v st de C^1 s. $[0, X]$

$$\int_0^X \sin(2xt)(-2t\,e^{-t^2})\,dt = \Big[\sin(2xt)\,e^{-t^2}\Big]_{t=0}^{t=X} - 2x \int_0^X \cos(2xt)\,e^{-t^2}\,dt$$

$$= \underbrace{\sin(2xX)\,e^{-X^2}}_{|\ldots| \leq e^{-X^2} \xrightarrow[X \to \infty]{} 0} - 2x \underbrace{\int_0^X \cos(2xt)\,e^{-t^2}\,dt}_{\downarrow} = \int_0^X \sin(2xt)(-2t\,e^{-t^2})\,dt \quad \Big\downarrow X \to \infty$$

$$-2x\; F(x) \qquad = \qquad F'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F'(x) = -2x\,F(x)}$$

Donc F est solu° de l'$\underline{ED}$.

(E) $y'(x) + 2x\, y(x) = 0$.

On sait q solu° (E) st de la forme.

$$y(x) = k \cdot e^{-\int 2x\,dx} = k\,e^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Dc $\exists\, k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = k \cdot e^{-x^2}$$

D'où ep pr $x = 0$, on obtient $F(0) = k$.

Or $F(0) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x^2}$$

Calcul : $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

$$I \overset{\text{Pair}}{=} 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \qquad I^2 = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}\,dy\,dx$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty y\,e^{-y^2(1+s^2)}\,dy\,ds \qquad s = \frac{x}{y},\quad ds = \frac{dx}{y},\quad ds\,y = dx.$$

$$= 4\int_0^\infty \left[-\frac{1}{2(1+s^2)}e^{-y^2(1+s^2)}\right]_{y=0}^{y=\infty} ds$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\,ds = 2\left[\arctan(s)\right]_0^\infty$$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$ dc $I^2 = \pi$ & $I > 0$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Th de Fubini

soit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$; $-\infty < a < b < \infty$

soit $f : [\alpha, \beta] \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont &

Sppsons q' $\exists\, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ li & tq

* $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,b[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$

** $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

alors $$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx$$

NB ca si $[a,b]$: pas besoin f g.

Preuve $F : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est cont sr $[\alpha, \beta]$

($\int_P$ Th ca)

dc $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx$ $\exists$

• $t \longmapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ cont sr $[a, b[$. (Th 1 ca)

Or, $\left| G(t) \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x,t)|\, dx$

$\leq \int_\alpha^\beta g(t)\, dx = (\beta-\alpha)\, g(t)$

Or $\int_a^b g(t)\, dt$ CV

Donc $\int_a^b G(t)\, dt$ CV abs donc CV.

ie $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt \ \exists$.

Mq $\int_a^b G(t)\, dt = \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$.

Fixons une suite $(b_n)_n$, $a < b_n < b$ & $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\, dt$, $n \geq 1$, $x \in [\alpha,\beta]$.

$F(x) - F_n(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt - \int_a^{b_n} f(x,t)\, dt = \int_{b_n}^b f(x,t)\, dt$.

$|F_n(x) - F_n(x)| \leq \int_{b_n}^b |f(x,t)|\, dt \leq \int_{b_n}^b g(t)\, dt$

Ainsi $\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |F(x) - F_n(x)| \leq \underbrace{\int_{b_n}^b g(t)\, dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

(car $\int_a^b g(t)\, dt$ CV)

Donc $(F_n)_n$ CV <u>U.N.</u> vers F sur $[\alpha,\beta]$.

Donc un TH sur les suites de fs (v. L2) impliq que

$$\int_\alpha^\beta F_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$$

$|F_n - F| \leq \beta-\alpha \times \sup$

D'où $\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta F_n(x)\, dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\, dt \right) dx \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt$ Fubini CV

$= \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} G(t)\, dt = \int_a^b G(t)\, dt$ car int. CV.

Rq : On a ~~une~~ la version suivante du TH de Fubini :

soit $f : [\alpha, \beta[\times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont

& spps $\displaystyle\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta |f(x,t)|\, dx \right) dt < \infty$

alors $\displaystyle\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$

Transformée de Fourier :

Séries de Fourier :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodiq

+ certses hypothèses de régularité

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{f}(n)\, e^{int}$$

où $\displaystyle\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$

Pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-périodique, l'idée est de remplacer $n \in \mathbb{Z} \longrightarrow s \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ds$$

On voudrait écrire :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\, e^{ist}\, ds \quad \text{où} \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$$

Défino de la transformée de Fourier

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont p morcx &

spps $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ CV Alors on pose

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt \quad , s \in \mathbb{R}.$$

Rq $\hat{f}$ est bien déf sr $\mathbb{R}$.

$t \longmapsto f(t)\, e^{-ist}$ cont p mrcx

et $|f(t)\, e^{-ist}| = |f(t)|$ & p hypothèse

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$ CV abs de CV.

who what when how

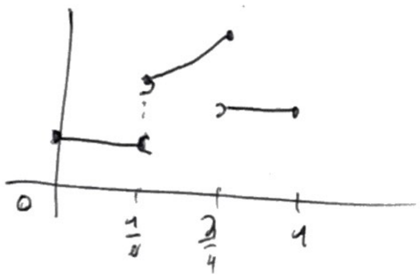
(Rq) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont p mcx

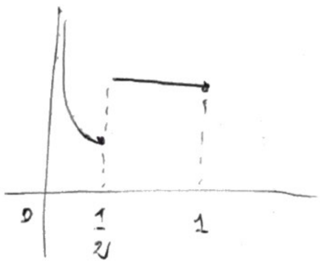
s'∃ $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.

tq (*) $f_{]a_i, a_{i+1}[}$ est cont $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$

(**) f se prolonge par continuité

sur $[a_i, a_{i+1}]$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$



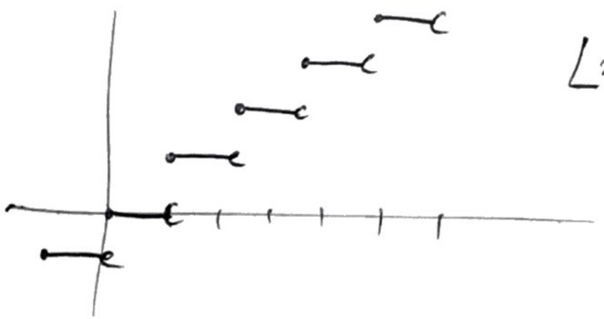


n'est pas cont p mcx

car $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \infty$

Une fonct° $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont p mcx

pr tt $-\infty < a < b < \infty$; f est cont p mcx sr $[a,b]$.



$\lfloor x \rfloor$ = pie entière de x.

est CPM sr $\mathbb{R}$.

(Th4) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont & spps que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Alors $\hat{f}$ est cont sur $\mathbb{R}$.

Not° : $\hat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de f.

Preuve $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt$, $s \in \mathbb{R}$.

• $(s,t) \longmapsto f(t)\, e^{-ist}$ est cont sr $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

•• $|f(t)\, e^{-ist}| = |f(t)|$ & $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ (CV)

De le (Th)1 du (C3) implique $\hat{f}$ est cont sr $\mathbb{R}$.

□

ⓐ $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ Calculer $\hat{f}$.

$t \longmapsto e^{-|t|}$ est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$ donc (li)

De+, $e^{-|t|} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \to \infty$

D'où $\int_0^\infty e^{-|t|}\,dt$ (cv).

comme $t \longmapsto e^{-|t|}$ est paire, $\int_{-\infty}^0 e^{|t|}\,dt$ (cv) aussi.

De+, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ist}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-ist}\,dt + \int_0^\infty e^{-t} e^{-ist}\,dt$$

Ainsi $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^0 e^{(1-is)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(1+is)t}\,dt$

$$= \frac{1}{1-is}\left[e^{(1-is)t}\right]_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+is}\left[e^{-(1+is)t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{1-is} - \frac{1}{1+is} = \frac{2}{1+s^2} \quad (21)$$

Or $\left|e^{(1-is)t}\right| = e^t \xrightarrow[t\to -\infty]{} 0$

$\left|e^{-(1+is)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Th soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>cont</u> tq $\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\,dt < \infty$

Alors $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ & $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-its}\,dt$$

<u>Preuve</u> Vérifions $\hat{f}$ est bien définie.

Mq $\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\,dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$

Comme f est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$, alors f est (li) sur $\mathbb{R}$.

De+, pr $|t| \geq 1$; on a $0 \leq |f(t)| \leq |t f(t)|$

Or $\int_{-\infty}^{-1} |t f(t)|\,dt + \int_1^\infty |t f(t)|\,dt < \infty$.

& donc $\int_{-\infty}^{-1} |f(t)|\,dt + \int_1^\infty |f(t)|\,dt < \infty$.

D'où $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$.

$$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(s,t) \longmapsto g(s,t) = f(t)\, e^{-its}$$

- g est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- $\dfrac{\partial g}{\partial s}(s,t) = -it\, f(t)\, e^{-its}$

$\rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial s}$ $\exists$ & est <u>cont</u> sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| = |t f(t)| \quad \left(\begin{array}{c}\text{pseudo}\\ \text{majorant}\end{array}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\, dt < \infty.$$

Donc d'après le (Th) 2., $\hat{f}$ est de classe C^1 et

$$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\, dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, e^{-its}\, dt$$

$\square$

(Th) Riemann - Lebesgue

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>cont</u> sur $\mathbb{R}$ tq $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

alors $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \hat{f}(s) = 0$ & $\displaystyle\lim_{s\to-\infty} \hat{f}(s) = 0$.

<u>Preuve</u> ① Si f est de classe C^1 :

$$|\hat{f}(s)| \leq \int_{-\infty}^{a} |f(t)\, e^{-its}|\, dt + \left|\int_{a}^{b} f(t)\, e^{-its}\, dt\right| + \int_{b}^{\infty} |f(t)\, e^{-its}|\, dt$$

② Cas général

On use le lemme suivant de densité.

(L) soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ <u>cont</u>

alors $\exists$ $(\varphi_n)_n$ suite de fs en escalier

tq $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve (Th) de Riemann Lebesgue

soit $\varepsilon > 0$, choix $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$$\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \& \quad \int_{b}^{\infty} |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}$$

D'après (L), $\exists$ suite φ en escalier sur $[a,b]$ tq $\sup\limits_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, e^{-its} + \int_{a}^{b} f(t)\, e^{-its} + \int_{b}^{\infty} f(t)\, e^{-its}$$

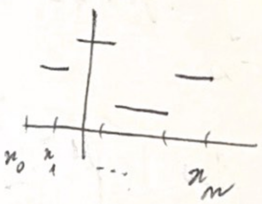
D'où $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{a} + \int_{b}^{\infty} + \int_{a}^{b} (f(t) - \varphi(t))\, e^{-its}\,dt + \int_{a}^{b} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt$

$$|\hat{f}(s)| \le \underbrace{\int_{-\infty}^{a}}_{\le \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\int_{b}^{\infty}}_{\le \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\int_{a}^{b}}_{\le \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi(t)|(b-a) \le \frac{\varepsilon}{4}} + \left| \int_{a}^{b} \right|$$

Comme φ est une f en escalier, il existe $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ tq

$\forall i \in \{0, n-1\}$, $\exists\, c_i \in \mathbb{R}$ tq

$\forall x \in \,]x_i, x_{i+1}[\,$, $\varphi(x) = c_i$



D'où $\displaystyle\int_{a}^{b} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt$ (Chasles)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k-1}} e^{-its}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[-\frac{1}{is} e^{-its} \right]_{t=x_k}^{t=x_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{c_k}{is} \left(e^{-isx_{k+1}} - e^{-isx_k} \right)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{a}^{b} \varphi(t)\, e^{-its}\,dt \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2|c_k|}{|s|} = M \cdot \frac{1}{|s|}$$

où $M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2|c_k|$

Donc $\exists\, s_0 \in \mathbb{R}$ tq $|s| \ge \underset{\frac{4M}{\varepsilon}}{\overset{\shortparallel}{s_0}} \Rightarrow \frac{M}{|s|} \le \frac{\varepsilon}{4}$

$$|s| \ge \frac{4M}{\varepsilon} \Rightarrow |\hat{f}(s)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \square$$

TH $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 & tq

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ & $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$ CV

alors $\widehat{f'}(s) = is\,\hat{f}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Preuve : f, f' st cont & $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ & $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$ CV

$\Rightarrow \widehat{f'}$ & $\hat{f}$ $\exists$ (& st cont sr $\mathbb{R}$).

$$\widehat{f'}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-its}\, dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pour $a < b$, on a :

$$\int_a^b f'(t)\, e^{-its}\, dt = \left[f(t)\, e^{-its} \right]_{t=a}^{t=b} + is \int_a^b f(t)\, e^{-its}\, dt$$

$u(t) = e^{-its}$ $\qquad u'(t) = -is\, e^{-its}$

$v'(t) = f(t)$ $\qquad v(t) = f'(t)$

On a $\int_a^b f'(t)\, e^{-its}\, dt \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}]{} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) . e^{-its} = \widehat{f'}(s)$

$$\int_a^b f(t)\, e^{-its}\, dt \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-its}\, dt = \hat{f}(s)$$

Il reste à mq $\left(f(b) e^{-ibs} - f(a)\, e^{-ias} \right) \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}]{} 0$

On a : $\left| f(b) e^{-ibs} - f(a)\, e^{-ias} \right| \leq |f(a)| + |f(b)|$

Il reste à mq $\lim_{a \to -\infty} |f(a)| = \lim_{b \to \infty} |f(b)| = 0$

$$f(0) - f(a) = \int_a^0 f'(t)\, dt \Rightarrow f(a) = -\int_a^0 f'(t)\, dt + f(0)$$

Or $\int_{-\infty}^0 f'(t)\, dt$ CV & de

$$\int_a^0 f'(t)\, dt \xrightarrow[a \to -\infty]{} \ell := \int_{-\infty}^0 f'(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

D'où $f(a) \xrightarrow[a \to -\infty]{} f(0) - \ell =: \ell_1 \in \mathbb{R}$.

En effet, si $\ell_1 \neq 0$; $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq

$t \leq t_0 \Rightarrow |f(t) - \ell_1| \leq \frac{|\ell_1|}{2}$

$$\Rightarrow |f(t)| = |f(t) - \ell_1 + \ell_1| \geq |\ell_1| - |f(t) - \ell_1|$$
$$\geq |\ell_1| - \frac{|\ell_1|}{2}$$
$$= \frac{|\ell_1|}{2} > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} |f(t)|\,dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} \frac{|\ell_1|}{2}\,dt = \infty \quad \boxed{c ?/c}$$

On a donc $\ell_1 = 0$ & donc $\lim_{a \to -\infty} f(a) = 0$.

De même, $\lim_{b \to \infty} f(b) = 0$.

$\square$

② soit $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont tq

$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$ & y de classe C^2 tq

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y^{(k)}(t)|\,dt < \infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

On vt résoudre $y''(t) - y(t) = -g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{y''}(s) - \hat{y}(s) = \hat{g}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Par Th précédent, $\widehat{y''}(s) = (-is)^2 \hat{y}(s) = -s^2 \hat{y}(s)$

D'où $-s^2 \hat{y}(s) - \hat{y}(s) = -\hat{g}(s)$

$$\boxed{\hat{y}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,\hat{g}(s)}$$

Rq $h(t) = e^{-|t|}$; on a vu $\hat{h}(s) = \frac{2}{1+s^2}$

D'où $\hat{y}(s) = \frac{1}{2}\,\hat{h}(s)\,\hat{g}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$= \frac{1}{2}\,\widehat{h * g}(s) \quad \text{admis}$$

$h * g$ est le produit de convolu° de h par g déf :

$$(h * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)\, g(x)\, dx \,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par injectivité de $f \longmapsto \hat{f}$, on a

$$y(t) = \frac{1}{2} (h * g)(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)}\, g(x)\, dx .$$

Correcc DS 1

Ex 1 pr $x>1$, $F(x)=\int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\,dt$

a) Justif F bien déf sur $]1,\infty[$.

Pr $x>1$, $x+\cos t > 1+\cos t \geqslant 0$.
$t\in[0,\pi]$ (ici bes1 cont % t)

Dc $t\mapsto \ln(x+\cos t)$ est cont sur $[0,\pi]$
& de Riemann intégrable sur $[0,\pi]$.

Dc F bien déf sur $]1,\infty[$.

b) Mq F est classe C^1 sur $]1,\infty[$

Pr $x>1$, exprimer $F'(x)$ sous f^m d'int.

- Soit $f :]1,\infty[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \ln(1+x\cos t)$

Comme $x+\cos(t)>0$, $\forall (x,t)\in]1,\infty[\times[0,\pi]$.
Pa f f est cont sur $]1,\infty[\times[0,\pi]$.

- • On Rq pr $t\in[0,\pi]$, $x\longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]1,\infty[$.

Et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{1}{x+\cos(t)}$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $]1,\infty[\times[0,\pi]$.

D'après un TH du cours, F est de classe C^1 sur $]1,\infty[$

& $\forall x>1$, $F'(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{x+\cos t}\,dt$

c) Av CDV $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer $F'(x)$, $x>1$

indic $\cos(t)=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

$du=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt=\frac{1}{2}(1+u^2)\,dt \Rightarrow \boxed{dt=\dfrac{2}{1+u^2}\,du}$

Dc $F'(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du=2\int_0^{\infty}\frac{1}{x(1+u^2)+1-u^2}$

$=2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x+(x-1)u^2}\,du=\frac{2}{1+x}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)}_{>0 \text{ car } x>1}u^2}\,du$

$=\dfrac{2}{1+x}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}\,u\right)^2}\,du=\frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)u\right]_0^{\infty}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{(1+x)(x-1)}}\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=\boxed{\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}}$

d) $G(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$, $x > 1$

Mq $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 1$,

$$F(x) = \pi G(x) + k.$$

On Rq que G est dérivable sur $]1, \infty[$ (car $\sqrt{x^2+1} + x > 1$).

et $G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} \times \left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 1\right)$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2-1}+x}} \cdot \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Dc $F - \pi G$ est dérivable sur $]1, \infty[$ & $\forall x > 1$, $(F-\pi G)'(x) = F'(x) - \pi G'(x)$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Donc $F - \pi G$ est cte sur $]1, \infty[$.

D'où $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x > 1$, $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Mq $\forall v \in]-1, 1[$, $|\ln(1+v)| \leq \dfrac{|v|}{1-|v|}$

indic IAF finis

ou $\ln(1+v) = \displaystyle\int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$

$\varphi : t \longmapsto \ln(1+t)$ est C^1 sur $]-1, \infty[$

& $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $\forall t > -1$

$\forall a, b \in]-1, \infty[$,

$$\boxed{|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq |b-a| \sup_{t \text{ compris entre } a \& b} |\varphi'(t)|}$$

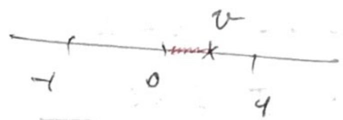
On appliq ac $a = v$, $b = 0$

D'où $|\ln(1+v)| = |\varphi(v) - \varphi(0)| \leq |v| \displaystyle\sup_{t \in [0,v]} \left|\frac{1}{1+t}\right|$

si $v > 0$:

On a $|1+t| \geq 1 - |t|$

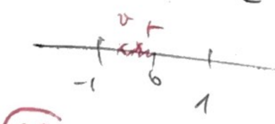
alors $t \in [0, v]$



$\Rightarrow |t| = t \leq v = |v|$

$\Rightarrow |1+t| \geq 1 - |t| \geq 1 - |v| \Rightarrow |\ln(1+v)| \leq \dfrac{|v|}{1-|v|}$

si $v \leq 0$



$t \in [v, 0] \Rightarrow |t| = -t \leq -v = |v|$

$\Rightarrow |1+t| \geq 1 - |t| \geq 1 - |v|$

f) ed pr $x \geq 2$, $|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x}$!

Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x) - \pi \ln(x)$:

$$|F(x) - \pi \ln(x)| = \left|\int_0^\pi \ln(x+\cos(t))\,dt - \pi \ln(x)\right|$$

$$= \left|\int_0^\pi \ln(x+\cos t)\,dt - \int_0^\pi \ln(x)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^\pi \ln(x+\cos t) - \ln(x)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^\pi \ln\left(1+\frac{\cos t}{x}\right)dt\right|$$

$$\Rightarrow |F(x) - \pi \ln(x)| \leq \int_0^\pi \left|\ln\left(1+\frac{\cos t}{x}\right)\right| dt$$

si $v = \frac{\cos t}{x}$, $|v| \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (car $x \geq 2$).

$\Rightarrow v \in]-1, 1[$.

D'où $$|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \int_0^\pi \frac{\left|\frac{\cos(t)}{x}\right|}{1 - \left|\frac{\cos t}{x}\right|}\,dt$$

$\rightarrow$ $\frac{|\cos t|}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ & $1 - \left|\frac{\cos t}{x}\right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$

$$\Rightarrow |F(x) - \pi \ln x| \leq \int_0^\pi \frac{1/x}{1/2}\,dt = \frac{2\pi}{x}.$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{2\pi}{x} = 0$ & de p TDG,

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) - \pi \ln(x)) = 0.$$

g) ed val^{r} cte k & finalem^{t} $F(x)$.

indic pq $F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

$$F(x) - \pi \ln(x) \overset{(d)}{=} \pi G(x) + k - \pi \ln(x)$$

$$= \pi \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + k - \pi \ln(x)$$

$$= \pi \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$$

$\Rightarrow F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

D'après f), $\lim_{x\to\infty} F(x) - \pi \ln(x) = 0$

& $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2)$

$\Rightarrow 0 = \pi \ln(2) + k$

$\Rightarrow k = -\pi \ln(2)$.

D'où $F(x) = \pi G(x) + k$

$F(x) = \pi \ln(\sqrt{x^2-1} + x) - \pi \ln(2)$

$$\boxed{F(x) = \pi\left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x) - \ln(2)\right]}$$

$x>1$

$x>1$

Ex 2 $F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$

a) Mq F bien déf & cont sur $\mathbb{R}$.

soit $f: \mathbb{R}\times[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

• La f f est cont sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$.

$|f(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[$.

et $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$ CV, car $t\mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est cont sur $[0,\infty[$

& "$[\arctan(t)]_0^X = \arctan(X) \xrightarrow[X\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Le Th₁ du C3 $\Rightarrow$ F bien déf & cont sur $\mathbb{R}$. ~~sur I de R~~

b) Mq F est C^1 sur $]0,\infty[$ & calculer $F'(x)$, $x>0$:

$$f :]0,\infty[\times[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$$

$\forall t>0$, $x \longmapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est dérivable sur $]0,\infty[$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+t^2}\times\frac{1}{1+x^2t^2}\times t = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ $\exists$ & est cont sur $]0,\infty[\times[0,\infty[$
- ⚠ On majore $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ & non $f(x,t)$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^2}$$ Vrai mais $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\,dt$ ne CV pas.

Pr $x_0>0$ & pr $(x,t)\in[x_0,\infty[\times[0,\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x_0^2t^2}$$

- $t \longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)}$ est cont sur $[0,\infty[$
- $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t}{x_0^2t^4} = \dfrac{1}{x_0^2t^3}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)(1+x_0^2t^2)}\,dt$ CV.

De d'après Thm 3, F est C^1 sur $[x_0,\infty[$ & $\forall x>x_0$; $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$$

Comme ce qui précède est vrai $\forall x>0$, on ad F est C^1 sur $]0,\infty[$.

c) Calculer $F'(x)$ pr $x>0$, $x \neq 1$.
ed vt[k] $F'(1)$.

indic DES...

$$F'(x) \overset{\text{indic}}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+x^2t^2}\right) dt$$

⚠ on ne pt pas séparer integ car l'une DV.

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2t^2}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left(-2\ln(x)\right)$$

$$= \frac{-\ln(x)}{1-x^2}.$$

M53 DS-1

Ex 1 $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\, dt \quad , x > 1$

a) Justif F bien déf sur $]1,\infty[$.

b) Mq F est classe C^1 sur $]1,\infty[$ & pr $x>1$ Exprimer $F'(x)$ ss fm d'intég.

c) 4 CDV $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer $F'(x)$, $x>1$

<u>indic</u> $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

d) $G(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$, $x>1$. Mq $\exists$ cte $k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x>1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Mq $\forall v \in]-1,1[$, on a

$$|\ln(1+v)| \leq \frac{|v|}{1-|v|}$$

<u>indic</u> user <u>IAF</u> soit écrire pr $v \in]-1,1[$, $\ln(1+v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$

f) ed pr $x \geq 2$, $|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x}$

& calculer $\lim_{x\to\infty} F(x) - \pi\ln(x)$

<u>indic</u> : pr l'inégalité, Rq $\pi\ln(x) = \int_0^{\pi} \ln(x)\, dt$ & écrire $F(x) - \pi\ln(x)$ ss fm d'1 de int + ⓔ.

g) <u>ed</u> vl^R cte k & finalmt expreѳ $F(x)$ pr $x>1$

<u>indic</u> Rq $F(x) - \pi\ln(x) = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$

Ex 2 pr $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, dt$

a) Mq F bien déf & cont sur $\mathbb{R}$

b) Mq F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ & pr $x>0$, exprimer $F'(x)$ ss fm integ

c) calculer $F'(x)$ pr $x>0$, $x\neq 1$. <u>ed</u> vl^R $F'(1)$

<u>indic</u> pr calcul $F'(x)$ DES

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right)$$

d) soit $a>0$, Mq $\forall x>0$

$$\arctan(ax)\int_a^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$\pi/2$

e) Mq $F \nearrow$ sur $]0,\infty[$, <u>ed</u> & ⓓ F a limite finie ℓ en $+\infty$

p ⓐ p f) Mq $\ell = \frac{\pi^2}{4}$.

Mes Impressions

COV $\frac{1}{2}$ branche parabolique : $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$dt = \frac{2}{1+u^2}\, du \qquad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$(\tan u)' = u'(1+\tan u)$$

- user majorants implicites en jouant sur le domaine de définition

⚠ Ne jamais split des integ DV

↳ si possible faire le calcul de l'integ initiale

IAF si f dérivable : $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup |f'(t)|$ (on appliq @ $\begin{cases} x = v \\ y = 0 \end{cases}$)

- $\pi \ln(1+x) = \int_0^{\pi} \ln(1+x)\, dt$

- F^R attention au cov FF de Bioche : vérifier égalité expression.
- Pas besoin d'introduire $f(x,t)$ sur $\mathbb{R} \times [a,b]$ pour déterminer si $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ est bien déf.

⚠ Pr déterminer C^1 de $F(x)$, on majore $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur cas $\mathbb{R} \times]a,b]$.

Chap 4 : Séries de Fourier

4.1. Séries trigonométriques

D Une série trigonométriq est une série de fs dont le terme général est :

$$U_n(x) = a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{où} \quad n \geq 0,\ a_n, b_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}.$$

Rq 1) Comme $\sin(0\cdot x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la valeur de b_0 n'est pas importante & on supposera que $b_0 = 0$.

2) En utilisant $\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

On a $\boxed{\sum_{n=0}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)} = \bullet$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-inx}$$

$\frac{1}{i} = -i$

On pose pour $n = -k$

$$\bullet = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{k=-N}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-1} + ib_{-1}) e^{ikx}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-N}^{N} c_0\, e^{inx}}$$

où $c_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n \geq 1 \\ a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & n \leq -1. \end{cases}$

ie : une st pt ê aussi écrit ĉ une série de foncts dt le terme général est donné par $\boxed{v_n(x) = c_n\, e^{inx}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans notre cadre, une série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n$ CV si

$\sum_{n \geq 0} (v_n + v_{-n})$ CV $\left(\text{ie } \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} v_n \ \exists\right)$

Th 1 Sppps $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfont :

$\sum_n |a_n| < \infty$, $\sum_n |b_n| < \infty$,

Alors la série trigonométriq associée

$\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ CV normalement sur $\mathbb{R}$ et si $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $x \in \mathbb{R}$

alors S est cont sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$

Or on a $\sum_n (|a_n| + |b_n|) < \infty$ & donc

$\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| < \infty$

Ainsi la série $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

Rq $\forall n \geq 0$, $x \longmapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ & par convergence normale de UN, on cd que S est cont sur $\mathbb{R}$.

TH 2 soit $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $(a_n)_{n\geq 0}$ & $(b_n)_{n\geq 0}$ st 2 suites décroissantes & qui tendent vers 0.

$k\in\mathbb{Z}$, $\alpha>0$, $\alpha<\pi$

Alors (i) la st $\Leftrightarrow$ CV sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(ii) la st CV UN sur $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$

(iii) si $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (34) $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ alors S est cont sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Rq

$2(k+1)\pi - \alpha$

$2\pi k \quad 2k\pi+\alpha \quad 2\pi(k+1) \quad \mathbb{R}$

$I_k = [2k\pi+\alpha, 2\pi(k+1)-\alpha]$ alors $I_k \cap 2\pi\mathbb{Z} = \emptyset$.

Preuve : Mq si $I_k = [2k\pi+\alpha, 2\pi(k+1)-\alpha]$ où $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in]0,\pi[$ alors $\sum_n a_n \cos(nx)$ CV UN sur I_k.

comme $\cos(nx) = \cos(n(x-2k\pi))$, la série $\sum_n a_n \cos(nx)$ CV UN sur I_k ssi $\sum_k a_n \cos(nx)$ CV UN sur $I_k - 2k\pi = I_0 = [\alpha, 2\pi-\alpha]$.

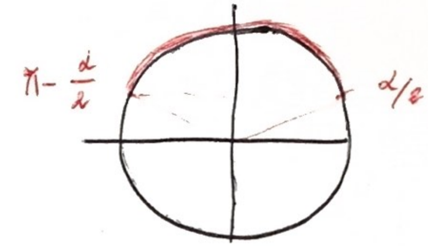
$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx), \quad x\in I_0.$$

Mq $(S_N^{(x)})_N$ vérifie le cd Cauchy UN sur I_0.

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall p>q\geq N_0, \forall x\in I_0$,

$$|S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0, \forall p>q \geqslant N_0, \forall x \in I_0, \ |S_p(x) - S_q(x)| \leqslant \varepsilon.$



Étape 1 : Mq $\exists C>0$ tq $\forall N \geqslant 0, \forall x \in I_0,$

$$|V_N(x)| \leqslant C \quad \text{où} \quad V_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx)$$

En effet, $V_N(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{inx}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right), \quad x \in I_0 \text{ alors } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \text{ donc } e^{ix} \neq 1$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{i(N+1)x}{2}}\left(e^{\frac{i(N+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(N+1)x}{2}}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow V_N(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(N+1)x/2}}{e^{ix/2}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{2i}\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\in \mathbb{R}}\right]$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow |V_N(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$x \in I_0 \iff \alpha \leqslant x \leqslant 2\pi - \alpha \iff \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \pi - \frac{\alpha}{2}$

Étape 2 : On mq $\forall \varepsilon>0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p>q \geqslant N_0, \forall x \in I_0 \Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| \leqslant \varepsilon.$

$$S_p(x) - S_q(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k \cos(kx) - \sum_{k=0}^{q} a_k \cos(kx)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k \cos(kx)$$

On a $\cos(kx) = V_k(x) - V_{k-1}(x), \ k \geqslant 1$ — Transformée d'Abel

$\left(V_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \cos(nx)\right).$

$$S_p(x) - S_q(x) = \sum_{k=q+1}^{p} a_k\left(V_k(x) - V_{k-1}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_k(x) - \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_{k-1}(x) \qquad j = k-1, \ k = j+1$$

$$\Rightarrow S_p(x) - S_q(x) = \sum_{k=q+1}^{p} a_k V_k - \sum_{j=q}^{p-1} a_{j+1} V_j$$

$$= -a_{q+1} V_q + a_p V_p + \sum_{k=q+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x).$$

$$|S_p(x) - S_q(x)| \leq |a_{q+1}|\,|V_q(x)| + |a_p|\,|V_p(x)| + \sum_{k=q+1}^{p-1} |a_k - a_{k-1}|\,|V_k(x)|$$

$$\Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|a_{q+1}| + |a_p| + \sum_{k=q+1}^{p-1} |a_k - a_{k+1}| \right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|a_{q+1}| + |a_p| + \sum_{k=q+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) \right)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(a_{q+1} + a_p + a_{q+1} - a_p \right)$$

$$= \frac{2 a_{q+1}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Comme $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, $\exists N_0 \mid q \geq N_0$

$\Rightarrow a_{q+1} \leq \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \varepsilon \Rightarrow |S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon.$

Donc $\sum_n (a_n \cos(nx))$ CV UN sur I_0 & de m sur tous les I_k, $k \in \mathbb{Z}$.

De m, on mq $\sum b_n \sin(nx)$ CV UN sur I_k, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ CV UN sur I_k, $k \in \mathbb{Z}$, ce q mq le point (ii).

Pour les pts (i) & (ii), RQ si $x_n \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on pt trouver $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ tq $x \in I_k = [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$

$\square$

Qqs pptés générale sur (st)

① La (st) $\sum_{n} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (CV) en un point $x \in \mathbb{R}$ (resp. (CV) UN sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$) si et seulement si la (st) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$ (CV) en $x \in \mathbb{R}$. (resp UN sur I).

où
$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - i b_n), & n>0 \\ a_0, & n=0 \\ \frac{1}{2}(a_n + i b_n), & n<0 \end{cases}$$

② Si la (st) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (CV) en un pt $x \in \mathbb{R}$, alors elle (CV) en $x + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ & si
$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

On a $S(x+2k\pi) = S(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

ie S est une f 2π-périodiq.

③ Si la (st) (CV) U.N. sur $I \subset \mathbb{R}$ alors si $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $x \in I$,

on a que S est cont sur I.

④ Si la série (st) (CV) simplement sur I et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-n\, a_n \sin(nx) + n\, b_n \cos(nx))$ (CV) UN sur I alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $x \in I$.

On a que S est C^1 sur I & $\forall x \in I$,
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n b_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx)).$$

Calcul de coefficients d'une (st)

Sppps la (st) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$ (CV) UN sur $\mathbb{R}$.

Notons $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\, e^{-ipx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ipx}\, dx$$
car (CV) U.N

Rq
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ipx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\, dx$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n=p \\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-p)} e^{i(n-p)x}\right]_0^{2\pi} & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

$\overset{\shortparallel}{0}$ car $e^{2ik\pi} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

D'où $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ipx} dx, \ p \in \mathbb{Z}$.

or $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - i b_n) & , n > 0 \\ a_0 & \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) & , n < 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} & , n > 0 \\ b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) & , n > 0 \end{cases}$

D'où • $\boxed{a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x)\, dx.}$

• Pour $n > 0$,

$$a_n = c_{-n} + c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \left(e^{inx} + e^{-inx}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \cos(nx)\, dx, \ n > 0.$$

• Pour $n > 0$,

$$b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{inx} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \underbrace{\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)}_{2i\sin(nx)} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \sin(nx)\, dx, \ n > 0.$$

Le pb de séries de Fourier est un peu le pb inverse : On $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$: l'espace des fs cont par morcx sur $\mathbb{R}$ & 2π-périodiqs.

On se donne $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on lui associe les coefficients réels de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \text{ pr } n > 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Et les coefficients de Fourier complexes de f pr $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$.

La série de Fourier (sdF) $\leftrightarrow$A$\rightarrow$ à f est la (st) $\leftrightarrow$A$\rightarrow$ée aux coeff réels a_n & b_n ou c_n.

ie, la sdF de f est la (st) suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \quad \text{ou} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}.$$

Rq Comme $x \longmapsto f(x)\, e^{-inx}$ est 2π-périodiq, on a

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$.

De m̂ pr les a_n & b_n.

Prop soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$

a) si f est paire, alors $\forall n>0$, $b_n = 0$

& $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx & n = 0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\, dx & n>0 \end{cases}$

b) si f est impair alors $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$ &

$\forall n>0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\, dx$,

Preuve (a) $\forall n>0$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = 0$

car $x \longmapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \underset{f\text{ paire}}{=} \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx$$

Pour $n>0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\, dx$$

car $x \longmapsto f(x)\cos(nx)$ est paire

(b) $\triangle$

$\square$

youtube-dl $\rightarrow$ ffmpeg.

Règle de CV de SdF

On va en voir essentiellement 3 :

(*) TH de Dirichlet (CV ponctuelle)

(**) TH de convergence L^2 (quadratiq)

(***) TH de Féjer (CV UN.)

L (de Riemann - Lebesgue)

$-\infty < a < b < \infty$

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, spps intégrable au sens de Riemann.

Alors $I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $I(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$.

Preuve : (voir secO sr $t^{\acute{e}e}$ de Fourier)

RQ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont,

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$; on pt définir

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx}\, dx \quad \& \text{ on a :}$$

$\hat{f}(s) \xrightarrow[|s| \to \infty]{} 0$, On a prouvé $\int_a^b f(x) e^{-isx}\, dx \xrightarrow[|s| \to \infty]{} 0$

$\sim[\;]\sim$

Cor soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

& $c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $c_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0$.

Preuve : $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$ (par Lemme Riemann Lebesgue)

$a_n = c_n + c_{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

□

Pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on notera :

$x \in \mathbb{R}$, $(S_\infty f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, où $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$

Th de Dirichlet

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ & spps $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tq & $\exists\, \delta > 0$

$$u \longmapsto \frac{1}{u}\left(f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right)$$

est bornée sur $]0, \delta]$ alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

ici $f(x_0^+) = \lim\limits_{t \underset{>}{\to} x_0} f(t)$, $f(x_0^-) = \lim\limits_{t \underset{<}{\to} x_0} f(t)$

ex si f est de plus cont en x_0 alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = f(x_0)$$

Cor (TH de Dirichlet)

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 par mcx & 2π périodiq sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

ex si f est de + cont en x, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n f)(x) = f(x)$.