M-33

TD

M33-TD. **Suites & Séries Numériques**

Ex 1 si $\exists$ majorants, minorants, BS, BI.

• $A = [0, 3[$

→ Ens minorants : $]-\infty, 0]$ car

- $\forall m \in]-\infty, 0]$ et $\forall x \in A$, si $m > 0$ alors $m > 0$ dc m n'est pas minorants. $m \leq x$.

→ Ens majorants : $[3, +\infty[$ (tjrs ens fermés).

→ On en déduit $sup(A)$, $sup([0,3[) = 3$ car le plus petit des majorants est 3.

Puis $inf([0,3[) = 0$, le plus grd des minorants.

• $B = [0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

• Ens minorants : $]-\infty, 0]$ car

◦ $\forall m \in]-\infty, 0]$, $\forall x \in B$, $m \leq 0 \leq x$ dc m est un minorant.

◦ $\forall m \notin]-\infty, 0]$, $m > 0$, dc psq $0 \in B$, m n'est pas un minorant.

• On en déduit que $inf(B) = 0$, le plus grd minorant

→ B n'a pas de majorants car $M \in \mathbb{R}$, $\exists x \in B$, $x \geq M$: @ $x = E(M) + 1 \in B$ et $x > M$ et B n'a pas de BS

• $C =]0, 1] \cap \mathbb{Q}$

• Ens minorants est $]-\infty, 0]$ car

◦ $\forall m \leq 0$ et si $\forall x \in C$, $x \geq 0 \geq m$: m est un minorant.

◦ $\forall m \notin]-\infty, 0]$, $x = \frac{1}{n}$, de $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in C$ et $x < m$, $n > \frac{1}{m}$.

$A^+ dit$: $\lim \frac{1}{n} = 0$, dc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{m} = \varepsilon$$

→ On en déduit que $inf(C) = 0$.

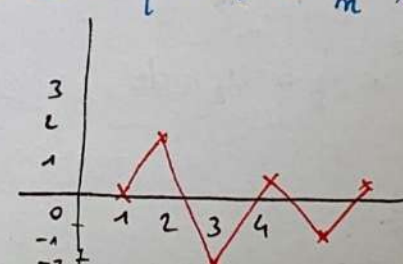
• Ens majorants est $[1, +\infty[$ car

◦ $\forall m \in [1, +\infty[$, $\forall x \in C$, $x \leq 1 \leq m$, donc m est bien un majorant.

◦ $\forall m \notin [1, +\infty[$, $m < 1$ et $1 \in C$, dc m n'est pas un majorant.

→ On en déduit que $sup(C) = 1$.

• $D = \{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$



• $D = \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

• Ens minorants est $]-\infty, 0]$ car

◦ $\forall m \in]-\infty,-1]$, $\forall x \in D$, $x \leq 0 \leq m$,

dc m est bien un minorant. $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{(-1)^n}_{\geq -1} > -1 \geq m$

◦ $\forall m \notin]-\infty,-1]$, $m > -1$,

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} = -1$

dc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, on ait

$(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} < m$ et de m n'est pas minorant.

On en déduit alors que $\inf(D) = -1$.

• Ens majorants est $[\frac{3}{2}, +\infty[$ car

$\cdot \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} + \frac{1}{2n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \leq -1 + 1 = 0.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq (-1)^n + \frac{1}{n}$

$\cdot \forall m < \frac{3}{2}$, $m < (-1)^2 + \frac{1}{2} = u_2$ dc

m n'est pas majorant.

→ On en déduit $\sup(D) = \frac{3}{2}$.

Ex 2 : 1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \frac{n.m}{n^2+m^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{n.m}{m^2+n^2} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{n.m}{m^2+n^2} - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\iff \frac{2n.m - m^2 - n^2}{2(m^2+n^2)} \leq 0 \iff -\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \leq 0.$$

comme $(n-m)^2 \geq 0$ et $\hat{c}$ $n^2+m^2 > 0$, on a

$-\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \leq 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, dc $\frac{nm}{m^2+n^2} \leq \frac{1}{2}$

2) On en déduit d'après (TH),

(TH) Tte partie majorée (ici $A \leq \frac{1}{2}$) et non-vide admet une (BS).

(TH) Tte partie minorée (ici $0 < A$) & nv a.u. (BI).

3) On mq $\sup(A) = \frac{1}{2}$. En effet, $\frac{1}{2}$ est un majorant et pr $n = m = 1$, on a $\frac{n.m}{n^2+m^2} = \frac{1}{2}$, dc $\frac{1}{2}$ est le plus petit des majorants.

R si α est un majorant d'un ensemble B et si $\alpha \in B$ alors $\alpha = \sup B$.

On mq $\inf(A) = 0$, pour $n = 1$,
la suite $\left(\frac{n}{1+n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est incluse dans A et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$, dc $\inf A = 0$

CV vers 0 et 0 est un minorant de A.

Ex 3 : $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- $A \neq \emptyset$ car $\frac{2^{1}}{2^1 - 1} = 2 \in A$.
- A minorée : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2^n}{2^n - 1} \geq 0$.

Puisque $\mathbb{R}$ vérifie la ppté de BI, A une BI.
soit $(U_n)_n$ définie par $U_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$.

Mq $(U_n)_n$ est $\searrow$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}}{\frac{2^n}{2^n - 1}} = \frac{2(2^n - 1)}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} \leq 1$$

Donc $(U_n)_n$ est $\searrow$. De plus $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$1 \leq U_n \leq U_1$.

Ainsi puisque $U_n \geq 1$, $\forall n$, A est minorée par 1 et puisque $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$, $\inf A = 1$.

On a aussi $U_n \leq U_1 = 2$, dc A est majorée par 2 et puisque $2 \in A$, $\sup(A) = 2$.

$C = \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|}, x > 0, x \neq 1 \right\}$

$\forall x \in C$, $\frac{x^n}{|x^n - 1|} > 0$ donc C est minorée par 0.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k > 1$,

$$y_k = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left|\left(\frac{1}{k}\right)^n - 1\right|} \in C \text{ et } \lim_{n \to +\infty} y_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1/k)^n}{(1 - \frac{1}{k^n})} = 0$$

Ainsi $\inf(C) = 0$.

Pour $x_k = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. $z_k = \frac{x_k^n}{|1 - x_k^n|}$

$$z_k = \frac{(1 - \frac{1}{k})^n}{1 - (1 - \frac{1}{k})^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Comme $z_k \in C$, on en déduit que C n'est pas majorée dc n'a pas de BS

3

comment trouver : $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x^n - 1|}$

x	0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	1

Ex 6 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1)

$(u_n)_n$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\sqrt{2}+2}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}+2}$
n	0	1	2	3	4

2) Mq $(u_n)_n$ est majorée par 2.

On a $u_0 \leq 2$, supposons $u_n \leq 2$ alors

$u_n + 2 \leq 4$ dc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

3) Mq $(u_n)_n$ est $\nearrow$.

on vt mq $u_{n+1} \geq u_n \iff \sqrt{u_n + 2} \geq u_n$

⚠ $a \geq b \not\Rightarrow a^2 \geq b^2$ $\iff u_n + 2 \geq u_n^2$

car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}} \geq 0$ et $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$

Donc $u_{n+1} \geq u_n \iff u_n^2 - u_n - 2 \leq 0$.

soit $P(X) = X^2 - X - 2$.

Déterminer le signe de P. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Donc $P(x) \leq 0$, $\forall x \in [-1, 2]$ et $\hat{c}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

on a $0 \leq u_n \leq 2$, $P(u_n) \leq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, 4

$u_{n+1} \geq u_n$: $(u_n)_n$ est croissante.

4) En déduire $(u_n)_n$ est CV et sa limite.

$(u_n)_n$ est majorée et $\nearrow$ dc $(u_n)_n$ CV.

(et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup u_n$)

soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$

dc $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n + 2}$, $f(x) = \sqrt{x + 2}$

$\ell = \sqrt{\ell + 2}$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$

car f est continue.

Dc on sait que ℓ vérifie l'équa° $\ell = \sqrt{\ell + 2}$

et $P(\ell) = 0$, dc $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.

Comme la suite est tjrs positive $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a forcément $\ell = 2$.

Ex 7 : Mq si 2 suites extraites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ d'une suite $(U_n)_n$ CV vers m̂ lim ℓ, alors $(U_n)_n$ CV ell-m̂ vers ℓ. Réciproq vraie ?

soit $\varepsilon > 0$, comme $(U_{2n})_n$ CV vers ℓ dc :

$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_2$, on ait $|U_{2n} - \ell| < \varepsilon$,

comme $(U_{2n+1})_n$ CV vers ℓ dc :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1$: on ait $|U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$,

Pour $N = \max(2n_1 + 1, 2n_2)$, on a $\forall p \geqslant N$,

$|U_p - \ell| < \varepsilon$.

En effet si p est pair, $p = 2n$ et $|U_{2n} - \ell| < \varepsilon$

car $n = \frac{p}{2} \geqslant 2 . \frac{n_2}{2} = n_2$.

si p impair, $p = 2n+1$ et $|U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

car $n = \frac{p-1}{2} \geqslant \frac{2n_1 - 1 + 1}{2} = n_1$

Donc $(U_n)_n$ CV vers ℓ.

La réciproque est vraie. $(U_{2n})_n$ une suite extraite de $(U_n)_n$ et $(U_n)_n$ CV vers ℓ, dc toute suite extraite CV vers ℓ.

En particulier $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$.

2) On suppose mtn E est fini.
Soit $N = \max(E)$. Mq si $n > N$, alors il existe $p > n$ tq $U_p \geq U_n$.
Construire ainsi une suite extraite de $(U_n)_n$ ↗.

→ On doit mq $(n > N) \Rightarrow (\exists p > N, U_p \geq U_n)$.
Pour cela on mq la CONTRAPOSÉE.
$(\forall p > n, U_p < U_n) \Rightarrow (n \leq N)$.
→ $\forall p > n, U_p < U_n \Rightarrow n \in E \Rightarrow n \leq \max(E) = N$.
On extrait une suite $(U_{n_k})_k$ q est ↗.
soit $\underline{n_0 = N + 1}$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $U_{n_1} \geq U_{n_0}$ et $n_1 > n_0$ car $n_0 > N$.
Supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tq $\forall j = 0, \dots, k-1$, $U_{n_{j+1}} \geq U_{n_j}$
Alors, il existe $n_{k+1} > n_k$ tq $U_{n_{k+1}} \geq U_{n_k}$ car $n_k > N$.
On construit ainsi par récurrence une suite extraite croissante.

3) En déduire $(U_n)_n$ possède tjrs une suite extraite monotone.
soit E est infini et on pt extraire une suite S^T ↘.
soit E est fini et on pt extraire une suite ↗.

4) En déduire nv^lle DM $\boxed{TBW}$
Soit $[a, b]$, un intervalle non-vide $a < b$.
et soit $(U_n)_n \subset [a, b]$.

On peut construire une suite $(U_{n_k})_k$ ↗ q est alors majorée par b de CV ou on peut extraire une suite $(U_{n_k})_k$ ↘ minorée par a de CV.

Ex 6 : Mq 2 manières la suite $((-1)^n)_n$ n'est pas de Cauchy.
1°M On mq $(U_n)_n$ ne CV pas et ĉ ds $\mathbb{R}$ une suite CV ssi elle est de Cauchy, on aura mqé $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy.
?! si $(U_n)_n$ convergeait, il existerait $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$
et alors ttes suites extraites convergeraient vers ℓ.
En particulier, $\lim_{n \to +\infty} U_{2n} = \ell$, puisq $\forall n$, $U_{2n} = 1$, $\ell = 1$.
et $\lim_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \ell$ de puisq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} = -1$, $\ell = -1$.
D'où $1 = -1$ $\boxed{c!!c}$
C'est absurde $(U_n)_n$ ne CV pas.

2°M | Par définiθ $(U_n)_n$ est de Cauchy si
$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p,q \geq N, |U_p-U_q|<\varepsilon$.

Donc $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy si
$\exists \varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists p,q\geq N, |U_p-U_q|\geq\varepsilon$.

Pour $\varepsilon=1$, $N\in\mathbb{N}$ qq, $p=N$, $q=N+1$, on a
$U_p=1$ et $U_q=-1$ si N est paire. et
$U_p=-1$ et $U_q=1$ si N est impaire.

Ds ts les cas $|U_p-U_q|=2\geq\varepsilon=1$.
Donc $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Ex 11 : soit $a_0, a_1\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

1) Mq $\forall n\in\mathbb{N}, |a_{n+1}-a_n|=\dfrac{|a_1-a_0|}{2^n}$.

On raisonne par récurrence :

* $n=0$, $|a_1-a_0|=|a_1-a_0|$ et $\dfrac{|a_1-a_0|}{2^0}=|a_1-a_0|$
Donc $|a_1-a_0|=\dfrac{|a_1-a_0|}{2^0}$, la proposiθ est vérifiée.

* On a $(P_n) = |a_{n+1}-a_n| = \dfrac{|a_1-a_0|}{2^n}$, on souhaite mq $\forall n\in\mathbb{N}$, (P_{n+1}) est vraie, ie $|a_{n+2}-a_{n+1}|=\dfrac{|a_1-a_0|}{2^{n+1}}$

soit $|a_{n+2}-a_{n+1}| = \left|\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}-a_{n+1}\right|$
$= \left|\dfrac{a_n-a_{n+1}}{2}\right| = \dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{2} = \dfrac{|a_1-a_0|}{2^n}\times\dfrac{1}{2}$ d'après HDR $= \dfrac{|a_1-a_0|}{2^{n+1}}$.

Donc la proposiθ (P_{n+1}) est vraie.
⊛ On en conduit par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_{n+1}-a_n|=\dfrac{|a_1-a_0|}{2^n}$

2) Mq $\forall n,p\in\mathbb{N}$, si $p\geq n+2$, a_p est compris entre a_n et a_{n+1}

On suppose que $a_n\leq a_{n+1}$. Et $a_{n+2}\in[a_n, a_{n+1}]$ car a_{n+2} est le milieu de ...

Brouillon
$\forall k\geq 2$, a_{n+k} est compris entre a_{n+k-1} et a_{n+k-2}.
Dc $a_{n+k}\in\left[\min(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}), \max(a_{n+k-1}, a_{n+k-2})\right]$

On suppose que pour $j=1,2,\dots,k$; $a_{n+j}\in[a_n, a_{n+1}]$
et mq $a_{n+k+1}\in[a_n, a_{n+1}]$.
En effet, a_{n+k+1} est le milieu du segment $[a_{n+k}, a_{n+k-1}]$
dc a_{n+k+1} appartient à l'intervalle $I=[\min(a_{n+k}, a_{n+k-1}), \max(a_{n+k}, a_{n+k-1})]$
D'après notre hypothèse de récurrence, $I\subset[a_n, a_{n+1}]$ dc
$a_{n+k+1}\in[a_n, a_{n+1}]$. On en déduit par récurrence que
$\forall k\geq 0$, $a_{n+k}\in[a_n, a_{n+1}]$.

3) En déduire $(a_n)_n$ est de Cauchy et qu'elle CV.

soit $p\geq q$, 2 entiers,
$|a_p-a_q| = |a_p-a_{p-1}+a_{p-1}-a_{p-2}+a_{p-2}+a_{q+1}-a_q|$
$\leq |a_p-a_{p-1}|+|a_{p-1}-a_{p-2}|+\dots+|a_{q+1}-a_q|$
$= \dfrac{|a_1-a_0|}{2^{p-1}}+\dfrac{|a_1-a_0|}{2^{p-2}}+\dots+\dfrac{|a_1-a_0|}{2^q}$ <0
$= \dfrac{|a_1-a_0|}{2^q}\left(\dfrac{1}{2^{p-1-q}}+\dfrac{1}{2^{p-2-q}}+\dots+1\right) = \dfrac{|a_1-a_0|}{2^q}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}}{1-\frac{1}{2}}$
$\leq \dfrac{|a_1-a_0|}{2^{q-1}}$

Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, on ait
$$\frac{|a_1 - a_0|}{2^n} < \varepsilon \quad \text{car} \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_1 - a_0|}{2^n} = 0$$

Ainsi $\forall p \geqslant q > N$, on a $|U_p - U_q| < \frac{|a_1 - a_0|}{2^{q-1}} \underset{\text{car } q-1 \geqslant N}{<} \varepsilon$

4) Calcul $\lim (a_n)_n$ en f a_0 et a_1.

Brouillon

$$a_2 - a_1 = \frac{a_1 - a_0}{2} - a_1 = \frac{a_0 - a_1}{2}$$
$$a_3 - a_2 = \frac{a_2 + a_1}{2} - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{-a_0 - a_1}{2^2}$$
$$a_4 - a_3 = \frac{a_2 + a_3}{2} - a_3 = \frac{a_2 - a_3}{2} = \frac{a_0 - a_1}{2^3}$$

On a l'air d'avoir $a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^n}$.

On va mq par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^n}.$$

* c'est vrai pour $n = 0$.
* si c'est vrai au rang n :

$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^n}$, alors

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} - a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$$
$$= -(-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2 \times 2^n} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 - a_0}{2^{n+1}}$$

On en conclut p récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^n}.$$

Puis $a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - a_n + a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_1 - a_0$.
$$= (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^n} + (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} + \dots + (-1)^n \frac{a_1 - a_0}{2^0}$$
$$= (a_1 - a_0)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^0\right).$$
$$= a_1 - a_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2(a_1 - a_0)\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{2}{3}(a_1 - a_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

On en déduit que $a_{n+1} - a_0 = \frac{2}{3}(a_1 - a_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a : $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_0 = \frac{2}{3}(a_1 - a_0)$

D'où $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}(a_1 - a_0) + a_0 = \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_0$.

2) Mq $\forall$ suite réelle, on pt extraire une suite q tend soit vers limite réelle, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Soit $(U_n)_n$ une suite de réels alors :

1) soit $(U_n)_n$ est bornée
2) soit $(U_n)_n$ n'est pas majorée
3) soit $(U_n)_n$ n'est pas minorée.

D'après 1° qst°, $(-U_n)_n$ n'est pas majorée dc il existe une suite extraite $(-U_{n_k})_k$ tq

$$\lim_{k\to+\infty} -U_{n_k} = +\infty \text{ et dc } \lim_{k\to+\infty} U_{n_k} = +\infty$$

" suite maj " = " -suite min ".

Dans le cas (1), $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$ ê bornée

Ainsi $(U_n)_n \subset [-M, M]$, et d'après $\boxed{TBW}$, il existe une suite extraite $(U_{n_k})_k$ CV

3) Est-il possible qu'une suite possède une suite extraite q td vers une lim finie, une q td $+\infty$ et une td $-\infty$.

soit $(U_n)_n$ déf p :
$$\begin{cases} U_{3n} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ U_{3n+1} = 3n+1 \\ U_{3n+2} = -(3n+2) \end{cases}$$

- $(U_{3n})_n$ CV vers 0.
- $(U_{3n+1})_n$ td $+\infty$
- $(U_{3n+2})_n$ td $-\infty$.

Ex 9 : On vt mq $\forall$ suite possède une suite extraite monotone.
soit $(U_n)_n$ suite qlq, on déf $E = \{n \in \mathbb{N}, \forall p > n, U_p < U_n\}$.

1) On suppose E est ∞. En utilisant les élts de E, construire une suite extraite de $(U_n)_n$ q $S^T \searrow$.

soit $n_0 \in E$, E est majorée $\Rightarrow E = \emptyset$ et n_0 existe.

soit n_1 tq $n_1 > n_0$ si $n_1 \in E$ et si $n_1 > n_0$
$U_{n_1} < U_{n_0}$

alors $U_{n_1} < U_{n_0}$ car $\forall p > n_0$, $U_p < U_{n_0}$ car $n_0 \in E$.

soit $n_1 \in E$, $n_1 > n_0$ alors ĉ $n_0 \in E$, $U_{n_1} < U_{n_0}$.

Remarquons E est ∞, il existe un élt de E tq $n > n_0$.
Supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tq $\forall j = 0, \dots, k$, $n_j \in E$. Alors ĉ E est ∞, $\exists n_{k+1} \in E$ tq $n_{k+1} > n_k$ alors la suite extraite $(U_{n_k})_k$ est $S^T \searrow$ car $\forall k$: $n_k \in E$.

Donc $U_{n_k} > U_n$, $\forall n > n_k$, en particulier pour $n = n_{k+1}$, $U_{n_k} > U_{n_{k+1}}$.

Ex 12 : Pr $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1) Mq $(U_n)_n$ est ↗

soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \dots - \frac{1}{n} - \dots$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

> 0 car $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $(U_n)_n$ est ↗.

2) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

$$U_{2n} - U_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{\underset{= n+n}{2n}}}_{n \text{ termes}}$$ le plus petit

$$\geq n \times \frac{1}{2n} \quad \text{car } \forall k = 1, \dots, n, \ \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Dc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

3) En déduire $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Comme $(U_n)_n$ ↗, soit $(U_n)_n$ CV
soit (U_n) : $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

$\boxed{\text{SdC}}$ par définit,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geq n_0$, $|U_p - U_q| < \varepsilon$.

négat : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists p, q \geq n_0$, $|U_p - U_q| \geq \varepsilon$.

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{cases} p = 2n_0 \\ q = n_0 \end{cases}$

alors d'après question 2, $|U_{2n_0} - U_{n_0}| \geq \frac{1}{2}$.

Donc $(U_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy.

4) cd : $(U_n)_n$ td $\longrightarrow +\infty$.

On sait que $(U_n)_n$ ↗ est une suite qui n'est pas de Cauchy, ie elle ne CV pas. Donc elle tend nécessairement vers $+\infty$.

Ex 13 : 1) soit $0 < a < 1$, $c > 0$: deux réels et $(U_n)_n$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - U_n| < c.a^n$.
Mq $(U_n)_n$ est de Cauchy.

$$|U_p - U_q| = |U_p - U_{p-1} + U_{p-1} - U_{p-2} + \dots + U_{q+1} + U_q|$$
$$\leq |U_p - U_{p-1}| + |U_{p-1} - U_{p-2}| + \dots + |U_{q+1} - U_q|$$
$$< c.a^{p-1} + c.a^{p-2} + \dots + c.a^q$$
$$= ca^q\left(a^{p-1-q} + a^{p-q-2} + \dots + 1\right)$$
$$= c.a^q . \frac{1 - a^{p-q}}{1-a} \leq c.\frac{a^q}{1-a} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\frac{c.a^q}{1-a} < \varepsilon$, pour tout $q \geq N$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{ca^q}{1-a} = 0$.

Donc $\forall p, q \geq N$, on a : $|U_p - U_q| \leq \frac{ca^q}{1-a} < \varepsilon$.

Donc $(U_n)_n$ est de Cauchy.

2) La suite $(U_n)_n$ est-elle encore de Cauchy si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \ |U_{n+1} - U_n| < \frac{1}{n}$.

↳ on ne pt rien dire en général.

soit $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

$|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy d'après ex 12.

Ex 14 : soit $(U_n)_n$ une suite positive, ↘, tendant vers 0, on pose $V_n = U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \dots + (-1)^n U_n$.

1) soit p et k des entiers, Mq :

$$0 \leq U_p - U_{p+1} + U_{p+2} - + \dots + (-1)^k U_{p+k} \leq U_p .$$

D'une part,

$$U_p - U_{p+1} + U_{p+2} - U_{p+3} + \dots + U_{p+2k-2} - U_{p+2k-1} + U_{p+2k}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(U_p - U_{p+1})}_{\geq 0} + \underbrace{(U_{p+2} - U_{p+3})}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(U_{p+2k-2} - U_{p+2k-1})}_{\geq 0} + \underbrace{U_{p+2k}}_{\geq 0}$$

car $U_n \geq 0$

D'autre part,

$$U_p \underbrace{(-U_{p+1} + U_{p+2})}_{\leq 0} \underbrace{(-U_{p+3} + U_{p+4})}_{\leq 0} - \underbrace{(U_{p+k-1} + U_{p+2k})}_{\leq 0} \leq U_p .$$

car $(U_n)_n$ ↘

$$\overset{\geq 0}{(U_p - U_{p+1})} + \overset{\geq 0}{(U_{p+2} - U_{p+3})} + \dots + \overset{\geq 0}{(U_{p+2k-2} - U_{p+2k-1})}$$
$$+ (U_{p+2k} - \underbrace{U_{p+2k+1}}_{\geq 0}) \geq 0 \text{ car } (U_n)_n \searrow .$$

$$(U_p) + \underbrace{(-U_{p+1} + U_{p+2})}_{\leq 0} - \underbrace{(U_{p+3} + \dots)}_{\leq 0} \dots + U_{p+2k-2}$$
$$- \underbrace{(U_{p+2k-1} + U_{p+2k})}_{\leq 0} - U_{p+2k+1} \leq U_p - U_{p+2k+1} \leq U_p$$

car $U_n \geq 0$

Dc $\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq U_p - U_{p+1} + \dots + (-1)^k U_{p+k} \leq U_p .$$

2) ed : $(V_n)_n$ est SdC :

soit $p \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}$,

au lieu de V_p

$$|V_{p+k} - V_{p-1}| = |U_0 - U_1 + \dots + (-1)^{p+k} U_{p+k} - (U_0 - U_1 + \dots + (-1)^{p-1} U_{p-1})|$$

$$= |(-1)^{p+k} U_{p+k}| = |(-1)^{p} U_p + (-1)^{p+1} U_{p+1} + \dots + (-1)^{p+k} U_{p+k}|$$

$$= |U_p - U_{p+1} + (-1)^k U_{p+k}| .$$

Dc $|V_{p+k} - V_p| = U_{p+1} - U_{p+2} + \dots + (-1)^{k-1} U_{p+k} \leq U_{p+1}$

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, on ait $|U_n| < \varepsilon$, car $\lim U_n = 0$.

on ed $\forall p \geq N, \ \forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$$|V_{p+k} - V_{p-1}| \leq U_p < \varepsilon .$$

Ainsi $(V_n)_n$ est SdC, dc CV.

Rq : "techniq" transforma° d'Abel.

Ex 15 : On a la suite $U_{n+1} = \sin(U_n)$ et $U_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) Mq l'équaθ $\sin x = x$ admet une uniq soluθ ds $[0, \frac{\pi}{2}]$.

soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \sin x$$

Alors l'équaθ (E) $\sin x - x$ admet une uniq soluθ ssi $f(x) = 0$ admet une uniq soluθ.

On étudie les variations de f, f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ car $\cos x \leqslant 1$.

$f'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ dc f est $S^T \nearrow$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

x	0	t'	t	$\frac{\pi}{2}$
f	0		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - 1$

Comme f est $S^T \nearrow$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$\exists\, t' \in]0, t[$ et on a :

$$\underset{\text{car } f\ S^T \nearrow}{f(t) > f(t')} \underset{\text{car } f \nearrow}{\geqslant} f(0) = 0$$

Donc $f(t) \neq 0$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(0) = 0$ dc (E) a une uniq soluθ ds $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Mq suite CV et déterminer sa limite.

$U_{n+1} = \sin(U_n)$: on ne peut pas appliquer le TH des points fixes car f sinus n'est pas contractante au voisinage de 0 car $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a,

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) \leqslant 0$. dc $(U_n)_n \searrow$, on a

$\frac{\pi}{2} \geqslant U_0 \geqslant 0$ car $U_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Supposons que $\frac{\pi}{2} \geqslant U_n \geqslant 0$,

$U_{n+1} - \sin(U_n) \in [0, 1]$ car $\sin x \geqslant 0$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leqslant 1$.

Donc $\frac{\pi}{2} \geqslant U_{n+1} \geqslant 0$.

On en déduit p récc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Comme $(U_n)_n$ est $\searrow$ et minorée par 0, $(U_n)_n$ est CV.

Notons ℓ sa limite, on a puisq sin est continue.

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sin(U_n) = \sin(\ell).$$

De plus $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

d'après 1° q°, $\ell = 0$; donc $(U_n)_n$ CV vers 0.

Rq : f contractante si dérivée < 1.

(R9) si $U_{n+1} = g(U_n)$.

$g \nearrow \cancel{\Rightarrow} U_n \nearrow$ et $g \searrow \cancel{\Rightarrow} U_n \searrow$.

Méthodologies :

$\boxed{M1}$ étudier $f(x) = x - g(x)$, si

si $f \geq 0$, $U_n \searrow$ et si $f \leq 0 \Rightarrow U_n \nearrow$

$\boxed{M2}$ • $g \nearrow$ et si $U_0 \leq U_1 \Rightarrow (U_n)_n \nearrow$

• $g \nearrow$ et si $U_0 \geq U_1 \Rightarrow (U_n)_n \searrow$

☹ si $g \searrow$, on ne pt rien dire.

Ex 16 : $(U_n)_{n \geq 0}$ $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \end{cases}$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \geq U_n \geq 1$ et $U_n \in \mathbb{Q}$.

* $U_0 \in [1,2]$ et $U_0 \in \mathbb{Q}$.
* supposons que $U_n \in [1,2]$ et $U_n \in \mathbb{Q}$ alors

$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \in \mathbb{Q}$.

Or $2 \geq U_n \Rightarrow \frac{2}{U_n} \geq 1 \Rightarrow U_n + \frac{2}{U_n} \geq 2$ car $U_n \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \geq 1$.

et $U_n \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{U_n} \leq 2 \Rightarrow U_n + \frac{2}{U_n} \leq 4$ car $U_n \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \leq 2$

Donc $1 \leq U_{n+1} \leq 2$. On $\underset{\infty}{\text{ed}}$ (PR) $\begin{cases} U_n \in \mathbb{Q} \\ 1 \leq U_n \leq 2. \end{cases}$

2) Mq $(U_n)_n$ CV et déterminer sa limite.

Etudions les variaƆs de $(U_n)_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{U_n} - U_n\right)$$
$$= \frac{1}{2U_n}\left(2 - U_n^2\right).$$

On a $U_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 - U_n^2 \geq 0 \iff \overbrace{-\sqrt{2} \leq U_n \leq \sqrt{2}}^{??}$
not working.

soit $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

On étudie les variaƆs de f :

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}(x^2 - 2) \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|$		$-$		0	$+$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$3/2$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

$f([1,2]) = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right] \subset [1,2]$.

De plus $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

et $2 \geq x^2 \geq 1 \iff 2 \geq \frac{2}{x^2} \geq 1 \iff 1 \geq 1 - \frac{2}{x^2} \geq -1$

$\iff \frac{1}{2} \geq f'(x) \geq -\frac{1}{2}$.

$\forall x \in [\sqrt{2}, 2]$, on a : $4 \geq x^2 \geq 2$

$1 \geq \frac{2}{x^2} \geq \frac{1}{2}$

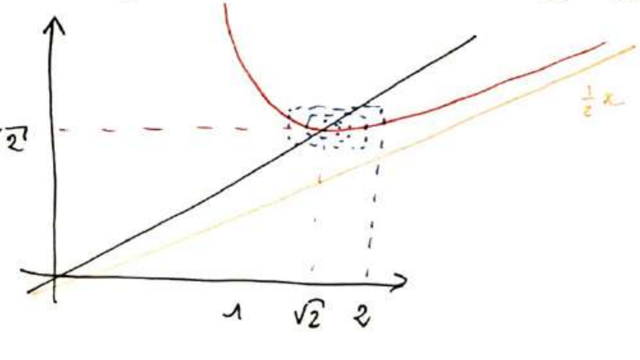
$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{2}{x^2} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq f'(x) \geq 0$.

Donc $\forall x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Donc f est contractante sur $[1,2]$, dc $(U_n)_n$ CV vers l'uniq $\ell \in [1,2]$ tq $f(\ell) = \ell$.

Or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ dc $(U_n)_n$ CV vers $\sqrt{2}$.



$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0$ et $x^2 \geq 2\}$.

3) Mq A, vu ĉ un ss-ens $\mathbb{R}$ a BI ?

$A \neq \emptyset$ et minorée par 0 dc A a une inférieure

si $x \in A$, $x^2 \geq 2$ et $x \geq 0$ dc $x \geq \sqrt{2}$.

Donc $\sqrt{2}$ minore A.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{2}$, $U_n \geq 0$,

si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n^2 \geq 2$ alors $(U_n)_n \subset A$, et $(U_n)_n$ CV vers $\sqrt{2}$ q est un minorant de A, on aura alors mqé $\inf(A) = \sqrt{2}$. si $U_0 \in [1,2]$, on pt avoir $U_0 \leq \sqrt{2}$.

x	0	1	$\sqrt{2}$	2
	$3/2$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$ $3/2$

$U_1 = f(U_0) \geq \sqrt{2}$ d'après le tableau de variaΘs de f, et alors $\forall n \geq 1$, $f(U_n) \geq \sqrt{2}$.

car $f(x) \geq \sqrt{2}$, $\forall x \in [1,2]$, on a dc $\inf A = \sqrt{2}$.

4) Mq A, vu ĉ ss-ens de $\mathbb{Q}$, n'a pas BI.

soit m la BI de A dans $\mathbb{Q}$.

On a $m \in \mathbb{Q}$ mais m est un minorant de A : $\forall x \in A, x \geq m$.

Donc m est un minorant de A aussi lorsq A est vu ĉ partie de $\mathbb{R}$ dc $\sqrt{2} \geq m$.

Si $m < \sqrt{2}$ alors $\exists m' \in \mathbb{Q} \cap]m, \sqrt{2}[$ (car $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$)

Mais alors : $\forall x \in A$, on a $x \geq \sqrt{2} > m'$. Dc $m' \in \mathbb{Q}$ et m' minore A ce q implique $m \geq m'$ mais $m' > m$ car $m' \in]m, \sqrt{2}[$?!

ContradicΘ : A n'a pas BI ds $\mathbb{Q}$.

C2 : Intégrales Généralisées

Ex 1 Mq CV et calculer la valeur intégrales

1) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = ?$ L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

soit $x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x}+1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ CV et vaut 1.

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}\,dx = ?$ N'est pas défini en $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

Donc $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ est généralisée en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

On étudie par exemple $\int_0^{\pi/6} f(x)\,dx$ et $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,dx$.

- $\int_0^{\pi/6} f(x)\,dx$ est impropre en 0 et $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right]$,

on a $\int_x^{\pi/6} f(t)\,dt = \int_x^{\pi/6} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}\,dt$

$= \left[\sqrt{\sin(2t)}\right]_x^{\pi/6} = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{\sin(2x)} \xrightarrow[x\to0^+]{} \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

On a $\lim_{x\to0^+} \int_x^{\pi/6} f(t)\,dt = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Dc $\int_0^{\pi/6} f(t)\,dt$ CV et vaut $\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

- $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(t)\,dt$ est impropre en $\frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_{\pi/6}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}\,dt$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\sqrt{\sin(2t)}\right]_{\pi/6}^{x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\sin(2x)} - \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Donc $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(t)\,dt$ CV et vaut $-\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

cd que $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$ CV et vaut $0. = \int_0^{\pi/2} f(t)\,dt + \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(t)\,dt$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = ?$ Intégrale généralisée en $+\infty$.

soit $x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^x$

$= \arctan x - \arctan 0 = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\,dt = ?$ L'intégrale est impropre en $+\infty$.

Cas $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t-1} \to \dfrac{\alpha(t-1)+\beta t}{t(t-1)} = \dfrac{(\alpha+\beta)t-\alpha}{t(t-1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1. \end{cases}$

$$I = \int_2^x -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\,dt = \left[-\ln(t)\right]_2^x + \left[\ln(t-1)\right]_2^x$$

$$= -\ln x + \ln(2) + \ln(x-1) - \ln(1) = \ln(x-1) - \ln(x) + \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln(2) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln(2).$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln(2) = \ln(2)$

Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\,dt$ CV et vaut $\ln(2)$.

5) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = ?$ L'intégrale est généralisée en 0.

soit $x > 0$, $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,dt \overset{IPP}{=} \left[t.\ln(t) - t\right]_x^1$

$$= -1 - x.\ln x + x.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} -1 - x.\ln x + x = -1.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ CV et vaut -1.

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = ?$ L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

soit $t > 1$,

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}$

$dv = \frac{1}{x^2}$ $v = -\frac{1}{x}$

$$= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{t}\times\ln t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{t}\times\ln t - \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t}\times\ln t - \frac{1}{t} + 1.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\times\ln(t) - \frac{1}{t} + 1$$

Par croissance comparée.

L'intégrale généralisée de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ CV et vaut 1.

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$, L'intégrale est impropre en 0.
soit $t>0$,

$$\int_t^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx =$$

$u=\ln x \quad du=\frac{1}{x}$

$dv=\frac{1}{(1+x)^2} \quad v=\frac{-1}{1+x}$

$$= \left[-\frac{1}{1+x}\times \ln x\right]_t^1 - \int_t^1 -\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{x}\,dx.$$

$$= \frac{1}{1+t}\times\ln t + \int_t^1 \frac{1}{1+x}\times\frac{1}{x}\,dx$$

or $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1} = \frac{\alpha(x+1)+\beta x}{x(x+1)} = \frac{(\alpha+\beta)x+\alpha}{x(x+1)}$

D'où $\alpha=1,\ \beta=-1$.

$$= \frac{1}{1+t}\times\ln t + \int_t^1 \frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\,dx = \frac{\ln t}{1+t} + \left[\ln x - \ln(1+x)\right]_t^1$$

$$= \frac{\ln t}{1+t} + \ln(1) - \ln(2) - \ln(t) + \ln(1+t)$$

$$= \ln(t)\times\left[\frac{1}{1+t} - \frac{t+1}{t+1}\right] - \ln(2) + \ln(1+t)$$

$$= -\frac{1}{t+1}\times\ln t - \ln 2 + \ln(1+t)$$

quant t tend vers 0: $\frac{0}{1} - \ln 2 + 0 = -\ln 2$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$ CV et vaut $-\ln(2)$.

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 . e^{-t}\,dt = ?$ L'intégrale est impropre en $+\infty$.
soit $x>0$,

$$\int_0^x t^3 . e^{-t}\,dt = ?$$

$u=t^3 \quad du=3t^2$

$dv=e^{-t} \quad v=-e^{-t}$

$$= \left[t^3 (-e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x 3t^2(-e^{-t})\,dt$$

$$= -x^3 . e^{-x} + 3\left(\left[-t^2 . e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) . 2t\,dt\right)$$

$u=t^2 \quad du=2t$

$dv=e^{-t} \quad v=-e^{-t}$.

$$= e^{-x}(-x^3) - 3x^2 . e^{-x} + 6\int_0^x t . e^{-t}\,dt$$

$$= e^{-x}(-x^3) - 3x(e^{-x}) + 6\left(\left[t . (-e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x 1 . e^{-t}\,dt\right)$$

$u=t \quad du=1$

$dv=e^{-t} \quad v=-e^{-t}$.

$$= e^{-x}(-x^3) - 3x(e^{-x}) - 6x . e^{-x} + 6\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= e^{-x}(-x^3) - 3x(e^{-x}) - 6x . e^{-x} + 6\,\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= e^{-x}(-x^3) - 3x(e^{-x}) - 6x . e^{-x} + 6$$

quand x tend vers $+\infty$: $\longrightarrow 6$. Par croissance comparée.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 . e^{-t}\,dt$ CV et vaut 6.

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$, L'intégrale est impropre en $+\infty$.

soit $t > 0$,

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = ?$$

$\varphi = e^x$ CDV

$d\varphi = e^x \, dx$

$\Rightarrow dx = \dfrac{d\varphi}{\varphi}$.

⚠ si $x = 0 \Rightarrow \varphi = 1$

si $x = t \Rightarrow \varphi = e^t$.

$$\int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{\varphi(1+\varphi)(1+\frac{1}{\varphi})}$$

$$= \int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{(1+\varphi)(\varphi+1)} = \int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^2} = \left[-\frac{1}{(1+\varphi)} \right]_1^{e^t}$$

$$= \frac{-1}{(1+e^t)} + \frac{1}{2}$$

si $t \longrightarrow +\infty$ alors $\longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ CV et vaut $\dfrac{1}{2}$.

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$, L'intégrale est impropre en $+\infty$.

soit $t > 0$,

$\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = ?$

CDV

$\varphi = e^x$

$d\varphi = e^x\, dx$

$\Rightarrow dx = \dfrac{d\varphi}{\varphi}$.

⚠ si $x = 0 \Rightarrow \varphi = 1$

si $x = t \Rightarrow \varphi = e^t$.

$$\int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{\varphi(1+\varphi)(1+\frac{1}{\varphi})}$$

$$= \int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{(1+\varphi)(\varphi+1)} = \int_1^{e^t} \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^2} = \left[-\frac{1}{(1+\varphi)}\right]_1^{e^t}$$

$$= \frac{-1}{(1+e^t)} + \frac{1}{2}$$

si $t \longrightarrow +\infty$ alors $\longrightarrow \frac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ CV et vaut $\frac{1}{2}$.

Ex 2 : Intégrales généralisées CV ou DV ?

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln(t)\, dt$: L'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $x \in [2, +\infty[$,

$$\int_2^x \ln(t)\, dt = \left[t.\ln(t) - t\right]_2^x = x.\ln(x) - x - 2\ln(2) - 2$$
$$= x(\ln(x) - 1) - 2(\ln(2) + 1)$$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x(\ln(x) - 1) - 2(\ln(2)+1)\right) = +\infty$.

Donc l'intégrale DV.

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$: ⚠ On ne sait pas déterminer une primitive de $t \longmapsto e^{-t^2}$. Cependant, $\forall t \in [1, +\infty[$:

On a $\underbrace{t \leq t^2}_{\text{fausse si } 0<t<1} \Rightarrow -t \geqslant t^2 \Rightarrow e^{-t} \geqslant e^{-t^2} \geqslant 0$ car $e^{\nearrow}$.

De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ CV (vaut e^{-1}), de par comparaison,

$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ CV. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

st de mê nature, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ CV.

5) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,dt$, impropre en 0 et en $+\infty$.

On étudie $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,dt$ impropre en 0

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,dt$ impropre en $+\infty$.

On a $\displaystyle\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t^5}{t^{1/2}} = t^{9/2}$ et $t^{9/2} \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$;

↳ au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.

Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{9/2}\,dt$ CV

On a aussi $\displaystyle\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{t^5}{t^4\sqrt{t}}$ car $t^{1/2} \geq 0$, $\forall t \in [1,+\infty$

↳ au voisinage de $+\infty$, un polynôme est équivt à son terme de plus haut degré.

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{1/2}\,dt$ DV car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{1/2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_1^x = +\infty$

Par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,dt$ DV,

on en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,dt$ DV.

→ qd on ① ① équivlts, vérifier f positives, (signe cte) - f positive.

6) L'int $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ est impropre en 0 et en π.

⚠ La composiθ n'est pas équivalente. $u \sim v \not\Rightarrow f(u) \sim f(v)$.

On étudie $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt$ impropre en 0.

$\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ impropre en π.

On a $\sin t = t + t.\underbrace{\varepsilon(t)}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0}$ (DL sinus à l'ordre 1).

Donc $\ln(\sin t) = \ln(t + t.\varepsilon(t)) = \ln(t(1+\varepsilon(t)))$
$= \ln(t) + \underbrace{\ln(1+\varepsilon(t))}_{\to 0}$.

D'où $\displaystyle\frac{\ln(\sin t)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon(t)) \to 0}{\ln(t) \to -\infty} \Rightarrow \to 0$.

$\displaystyle\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\ln(\sin t)}{\ln t} = 1$, donc $\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ CV (voir ex 1),

et ĉ $\ln(t)$ est de signe cte sur $]0,1]$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \ln(\sin t)\,dt$ CV

et de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$ CV.

• soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, on a :

CDV $t = \pi - \theta$, $d\theta = -dt$

$$= \int_{\pi/2}^{x} \ln(\sin t)\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi - x} \ln(\sin(\pi-\theta)) \times -1\,d\theta$$

$$= \int_{\pi - x}^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,d\theta \quad \text{et pcq} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,d\theta \text{ CV},$$

$\pi - x \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} 0$

on obtient : $\lim\limits_{x\to\pi} \int_{\pi/2}^{x} \ln(\sin t)\,dt = \lim\limits_{x\to\pi} \int_{\pi-x}^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,d\theta.$$

Donc $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)\,dt$ CV et finalement $\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt$ CV.

⚠ Ne pas faire somme sur équivalents.

$$\cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} u(t) \;\not\Longrightarrow\; 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1 - u(t).$$

7) $\int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ est généralisée en $+\infty$.

comme $\cos(X) - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \frac{-X^2}{2}$, on a $1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$

D'autre part $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est IDRiemann. CV

et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$, $\forall t \in [2, +\infty[$.

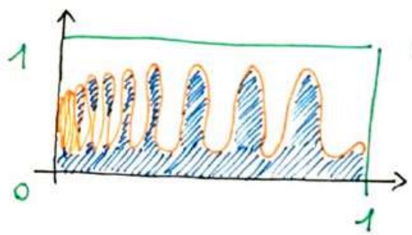
Par comparaison, on en déduit $\int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ CV.

8) $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est impropre en 0.

On a $\forall t \in \,]0, 1]$: $0 \leqslant \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant 1$.

Or $\int_0^1 1\,dt$ CV donc $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ CV.

Idée :



Aire finie incluse ds pavé.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$ est impropre en 0 et $+\infty$.

On étudie $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$,

- $\cos t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^2}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{2}\,dt \text{ CV} \\ \frac{1}{2} \geq 0. \end{cases}$

Donc par comparaison $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

- $\forall t \geq 1, \quad 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$,

$\cos t \geq -1 \Rightarrow -\cos t \leq 1$,

et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt$ est ID Riemann CV donc

par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

DL(0) usuels :

- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-(n-1))}{n!} \times x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + o(x^n))$.
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + o(x^n)$

11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, dt$; l'int est généralisée en 0 et en $+\infty$.
On étudie $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$.

Or $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, d'où par équivalence $\displaystyle\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

→ au voisinage de 0, le terme de + bas degré l'emporte ;
$x \in]0,1]$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ est IdR CV car $\frac{1}{2} < 1$.

D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ est CV.

soit $x \geqslant 1$; $\displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$?

On a $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^2 \times \frac{\sqrt{t}}{e^t-1} = 0$, donc $\exists\, t_0 > 0, \forall t \geqslant t_0$;

on ai $0 \leqslant t^2 \dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ est IdR CV, $2 > 1$, on ed $\displaystyle\int_{t_0}^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$

et par suite $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ CV.

Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\, dt$ CV.

10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx$ est généralisée en 0.

comme $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\dfrac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Or $\dfrac{1}{x} \geqslant 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\, dx$ sont de m̂ nature.

Comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\, dx$ est IdR DV,

on conclut que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx$ DV.

Ex 3 :

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$; l'int est généralisée en 0 si $\alpha > 0$

❖ 1° cas : $\alpha \leq 0$: $\forall t \geq 1$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \geq 1 \geq 0$ et

$\displaystyle\int_1^\infty 1\,dt$ DV donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

❖ 2° cas : $0 < \alpha < 1$: soit $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}}$$

et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}} = \infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

❖ 3° cas : $\alpha = 1$, soit $x > 1$; $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x)$

donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \infty$ donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t}\,dt$ DV.

❖ 4° cas : $\alpha > 1$: soit $0 < x < 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = -\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \infty$ donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

Ccl : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$, L'intégrale est impropre en 0 si $\alpha > 0$ et tjrs en $+\infty$.

❖ 1° cas : $\alpha \leq 0$: comme $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-t} - 1 = -1$,

$\dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t^\alpha}$ et comme $-\dfrac{1}{t^\alpha} \leq 0$, $\forall t \geq 1$, (ie signe cte)

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ sont de m̂ nature.

comme $\alpha \leq 0$, $\displaystyle\int_1^\infty -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ DV donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ DV

et par suite $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

❖ 2° cas : $0 < \alpha \leq 1$: on a $\dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t^\alpha}$ *

et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ st de m̂ nature.

comme $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est IDR DV.

Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ DV.

$$* \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}}{-\frac{1}{t^\alpha}} = -(e^{-t}-1) = 1.$$

3° cas : $\alpha > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_1^{\infty} -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ st de m̂ nature.

Comme $\alpha > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ CV.

Comme $\alpha > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est IdR CV donc $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV.

On a $e^{-t}-1 \underset{t\to 0}{\sim} -t$ donc $\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t^{\alpha-1}}$,

comme $-\frac{1}{t^{\alpha-1}} < 0$ pour tout $t \in]0,1[$,

$\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ st de m̂ nature.

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ est IdR CV ssi $\alpha - 1 < 1$ dc ssi $\alpha < 2$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\alpha < 2$.

Par conséq^t, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $1 < \alpha < 2$.

Ex 3 :

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$; l'int est généralisée en 0 si $\alpha > 0$

1° cas : $\alpha \leq 0$: $\forall\, t \geq 1,\ \frac{1}{t^\alpha} \geq 1 \geq 0$ et

$\displaystyle\int_1^{\infty} 1\,dt$ (DV) donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

2° cas : $0 < \alpha < 1$: soit $x > 1$:

$$\int_1^{x} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$$

et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

3° cas : $\alpha = 1$, soit $x > 1$; $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln(x)$

donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \infty$ donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ (DV).

4° cas : $\alpha > 1$: soit $0 < x < 1$,

$$\int_x^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = -\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \infty$ donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

Ccl $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$, L'intégrale est impropre en 0 si $\alpha > 0$ et tjrs en $+\infty$.

1° cas : $\alpha \leq 0$: comme $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-t} - 1 = -1$,

$\displaystyle\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} -\frac{1}{t^\alpha}$ et comme $-\frac{1}{t^\alpha} < 0,\ \forall\, t \geq 1$, ie signe cte,

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ sont de m̂ nature.

comme $\alpha \leq 0$, $\displaystyle\int_1^{\infty} -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ (DV) donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (DV)

et par suite $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

2° cas : $0 < \alpha \leq 1$: on a $\displaystyle\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} -\frac{1}{t^\alpha}$ *

et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} -\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ st de m̂ nature.

comme $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est (IDR) (DV).

Donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ (DV).

* $$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}}{-\frac{1}{t^\alpha}} = -(e^{-t}-1) = 1.$$

3° cas : $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ et $\int_1^\infty -\frac{1}{t^\alpha}dt$ st de m̂ nature.

Comme $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$ CV.

Comme $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$ est IdR CV donc $\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ CV.

On a $e^{-t}-1 \underset{t\to 0}{\sim} -t$ donc $\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t^{\alpha-1}}$,

comme $-\frac{1}{t^{\alpha-1}} < 0$ pour tout $t \in]0,1[$,

$\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ st de m̂ nature.

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ est IdR CV ssi $\alpha-1<1$ dc ssi $\alpha<2$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ CV ssi $\alpha < 2$.

Par conséq^t, $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ CV ssi $1 < \alpha < 2$.

5) $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$ Ig $\begin{cases} \cdot \text{ en } 0 \quad \text{si } \alpha > 0 \\ \cdot \text{ en } +\infty \quad \text{tjrs.} \end{cases}$

On a $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ & $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$

donc $t-\sin t = t - t + \frac{t^3}{6} - t^3\varepsilon(t) = \frac{t^3}{6}(1+\varepsilon(t))$ & $\varepsilon(t)\underset{t\to 0}{\to} 0$

Donc $t-\sin t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$ et $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{6.t^{\alpha-3}}$.

- comme $\frac{1}{6.t^{\alpha-3}} \geq 0$, $\forall t>0$, $\int_0^1 \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$

et $\int_0^1 \frac{1}{6.t^{\alpha-3}}$ st tjrs de m̂ nature.

L'int. $\int_0^1 \frac{1}{6.t^{\alpha-3}}dt$ est IdR q CV ssi $\alpha-3<1$

on ed $\int_0^1 \frac{1}{6.t^{\alpha-3}}dt$ CV ssi $\alpha < 4$.

- $\forall t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{t-1}{t^\alpha} \leq \frac{t-\sin t}{t^\alpha} \leq \frac{t+1}{t^\alpha}$.

De plus $\frac{t-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\frac{t+1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$

car $\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t-1}{t^\alpha}}{\frac{1}{t^{\alpha-1}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t-1}{t^\alpha} \times \frac{t^{\alpha-1}}{1} = \lim_{t\to\infty} \frac{t-1}{t} = 1$

$\left(\frac{t-1}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}} = \frac{1}{t^\alpha \times \frac{1}{t}}\right)$

On ed $\int_1^{\infty} \frac{t-1}{t^\alpha}\,dt$, $\int_1^{\infty}\frac{t+1}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ st de m̂ nature et que $\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ et $\int_1^{\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ st de m̂ nature car si $\int_1^{\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ DV alors $\int_1^{\infty}\frac{t+1}{t^\alpha}\,dt$ DV et de $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ DV et si $\int_1^{\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ CV, comme $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ est IdR q CV ssi $\alpha-1>1$,

$\int_1^{\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\alpha>2$.

On conclut que $\int_0^{\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $2<\alpha<4$.

Ex 4 : 1) a) $\frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est de la forme $\frac{u'}{u^\beta}\,dt$, de primitive est $-\frac{1}{\beta-1}\cdot\frac{1}{u^{\beta-1}}$.

$\int u'u^\beta = \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}$

- si $\beta=1$, $\ln|u|$,
- si $\beta\neq 1$, $\int_2^A \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = \left[\frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}}\right]_2^A$

$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln A)^{\beta-1}}-\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right)$$

et $\lim_{A\to\infty}\int_2^A\frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln A)^{\beta-1}}-\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right)$

$= \frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}$ si $\beta-1>0$

$= +\infty$ si $\beta-1<0$

- si $\beta=1$, $\int_2^A\frac{1}{t.\ln(t)}\,dt = \left[\ln(\ln t)\right]_2^A = \ln(\ln A)-\ln(\ln 2)$

et $\lim_{A\to\infty}\int_2^A\frac{1}{t.\ln t}\,dt = +\infty$.

On ed $\int_2^{\infty}\frac{1}{t.(\ln t)^\beta}\,dt$ CV ssi $\beta>1$.

b) ∴ si $\alpha > 1$, on pose $\boxed{\varepsilon = \alpha - 1 > 0}$, on a $\qquad \alpha = 1+\varepsilon$

$$\lim_{t\to\infty} t^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1+\varepsilon/2}}{t^{1+\varepsilon}(\ln t)^\beta}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varepsilon/2}(\ln t)^\beta} = 0.$$

Donc $\exists\, M>0,\ \forall\, t \geq M,\ 0 \leq \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \leq \frac{1}{t^{1+\varepsilon/2}}$

comme $\int_2^\infty \frac{1}{t^{1+\varepsilon/2}}\,dt$ est (IdR) (CV).

On ed $\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ (CV). $\qquad \frac{1}{t^{\alpha-\varepsilon}} \times \frac{1}{t^\varepsilon \ln t}$

∴ $\alpha < 1$: on pose $\boxed{\varepsilon = 1-\alpha > 0}$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^{1-\varepsilon}(\ln t)^\beta} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^\varepsilon}{(\ln t)^\beta} = \infty$$

Il existe dc $M>0$ tq $\forall\, t \geq M$, on a $\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geq 1$ et

dc $\forall\, t \geq M$: $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geq \frac{1}{t} \geq 0$.

comme $\int_M^\infty \frac{1}{t}\,dt$ est (IdR) (DV), on ed $\int_M^\infty \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt$ (DV).

(ccl) $\int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,dt$ (CV) ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2) Déterminer nature I_g $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,dt$.

I_g en 0, soit $x > 0$,

on a $\int_x^{1/2} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,dt \overset{CDV}{=} \int_{1/x}^{2} \frac{u^\alpha}{|\ln(\frac{1}{u})|^\beta} \times \left(-\frac{du}{u^2}\right)$

$u = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$.

$$= \int_2^{1/x} \frac{du}{u^{2-\alpha}|\ln u|^\beta} \quad \text{or} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

et $\int_2^\infty \frac{du}{u^{2-\alpha}|\ln u|^\beta}$ (CV) ssi $2-\alpha > 1$ ou $2-\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Ainsi $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,dt$ (CV) ssi $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Ex 5 : 1) Mq $I_g \int_0^{\infty} e^{-t\sin t}\,dt$ DV.

(Indication considère $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t\sin t}$ pr $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$)

Stratégie x_n et y_n à déterminer tel que

$\begin{cases} \sin(t) < 0 \\ \forall t \in [x_n, y_n] \end{cases}$ et mq $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t\sin t}\,dt \geq \varepsilon_0 > 0$:

pour contredire le critère de Cauchy.

- De plus $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ doivt tendre vers $+\infty$.

→ soit $\sin t \leq 0 \quad \forall t \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], \forall k \in \mathbb{Z}$,

soit $x_k = \pi + 2k\pi$, $y_k = 2\pi + 2k\pi$

$e^{-t\sin t} \geq f(t)$ et $\int_{x_k}^{y_k} f(t)\,dt \geq \varepsilon_0$.

$\sin t \leq 0 \Rightarrow -t.\sin(t) \geq 0 \Rightarrow e^{-t\sin t} \geq 1$.

$\Rightarrow \int_{x_k}^{y_k} e^{-t\sin t}\,dt \geq \int_{x_k}^{y_k} dt = y_k - x_k = \pi$

Donc pour $\varepsilon = \pi$, $\forall M > 0$,

$\exists\, x_k = \pi + 2k\pi$, $y_k = 2\pi + 2k\pi > M$.

(si k est assez grand) tq

$\int_{x_k}^{y_k} e^{-t\sin t}\,dt \geq \pi$ car :

$\forall t \in [x_k, y_k]$, $\sin t \leq 0 \Rightarrow -t\sin t \geq 0$.

$\Rightarrow e^{-t\sin t} \geq 1 \Rightarrow \int_{x_k}^{y_k} e^{-t\sin t}\,dt \geq \int_{x_k}^{y_k} dt = \pi$.

Donc $\int_0^{\infty} e^{-t\sin t}\,dt$ ne satisfait pas le CdC

donc $\int_0^{\infty} e^{-t\sin t}\,dt$ DV.

2) Mq $\int_1^{\infty} (\sin t)\left(\sin \frac{1}{t}\right) dt$ CV.

(indic : étude $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t}\, dt$.

→ ig en $+\infty$. De plus $\forall\, t \geqslant 1$, on a :

$0 \leqslant \left| \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, comme $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est CV,

on en déduit $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t}$ CV absolument dc CV.

On étudie $\int_1^{\infty} (\sin t)\left(\sin \frac{1}{t}\right) dt$, soit $x > 1$,

$$\int_1^{x} (\sin t)\left(\sin \frac{1}{t}\right) dt = \left[-\cos t . \sin \frac{1}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \cos \frac{1}{t}\, dt$$

$u = -\cos t \qquad du = \sin t$

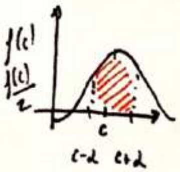
$dv = -\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} \qquad v = \sin \frac{1}{t}$

$$= \underbrace{-\cos x . \sin \frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x \to \infty]{} 0} + \cos 1 . \sin 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt .$$

comme $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t}\, dt$ CV, on ed :

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x \sin t . \sin \frac{1}{t}\, dt = \cos 1 . \sin 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t}\, dt$$

dc $\int_1^{\infty} \sin t . \sin \frac{1}{t}\, dt$ CV



Ex 6 soit f périodique, cont, $\int^{\infty} f(x)\, dx$ CV alors

$\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in \,]c-\alpha, c+\alpha[,\ f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(c)$.

f cont, $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$, en effet puisq f cont en c,

pour $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, $\exists\, \alpha > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x-c| < \alpha$

$\Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{1}{2} f(c)$.

Ainsi $\forall\, x \in \,]c-\alpha, c+\alpha[,\ f(x) - f(c) > -\frac{1}{2} f(c)$

dc $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. On en déduit que

$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\, dx \geqslant \alpha . f(c)$. Si on note T la période de f, on ed alors $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\geqslant \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \frac{f(c)}{2}\, dx = 2.\alpha . \frac{f(c)}{2} = \alpha . f(c).$$

$\int_{kT+c-\alpha}^{kT+c+\alpha} f(x)\, dx \geqslant \alpha . f(x)$, ainsi $\exists\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \alpha . f(c)$, tq

$M > 0$, $\exists\, x_1 > x_0 > M$.

$= \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\, dx$ ← car périodiq $(x_1 = kT + c + \alpha,\ x_0 = kT + c - \alpha)$ pour k grand.

tel que $\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \right| = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \geqslant \varepsilon$.

ainsi $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ ne vérifie pas CdC des (ig) dc $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ DV. ?! Donc $f(x) = 0\ \forall x$.

Ex 3

6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (ig) en ∞ et 0.

* On étudie $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$:

$(1+t^2)^{\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ dc $\displaystyle\frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$.

$\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ (CV), $\ln t \leq 0$, $\forall\, t \in]0,1]$,

dc de signe cte.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}$ st de m̂ nature.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (CV).

* On étudie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$,

on a $\displaystyle\frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}$ car $(1+t^2)^{\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} t^{2\alpha}$

Comme $\displaystyle\frac{\ln t}{t^{2\alpha}} \geq 0$, $\forall\, t \geq 1$, on $\underset{\infty}{\text{ed}}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$

et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}\,dt$ st de m̂ nature.

* si $2\alpha \leq 1$: pour $t \geq e$, on a $\ln t \geq 1$, dc $\forall \beta, e$,

$\displaystyle\frac{\ln t}{t^{2\alpha}} \geq \frac{1}{t^{2\alpha}} \geq 0$. Comme $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}}\,dt$ (DV),

dc $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}\,dt$ (DV) et dc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}\,dt$ (DV),

dc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (DV).

* si $2\alpha > 1$: On cherche une majoraθ de la forme,

$0 \leq \displaystyle\frac{\ln t}{t^{2\alpha}} \leq \frac{1}{t^{\beta}}$ 4 $\beta > 1$, si une telle majoraθ est possible alors $0 \leq \underbrace{t^{\beta-2\alpha}}\ln t \leq 1$.

$\longrightarrow \infty$ si $\beta - 2\alpha \geq 0$

$\longrightarrow 0$ si $\beta - 2\alpha < 0$.

Donc on a besoin d'avoir: $1 < \beta < 2\alpha$.

Pour $\beta = \dfrac{1+2\alpha}{2}$, on a $1 < \beta < 2\alpha$ et dc $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\beta}\cdot\frac{\ln t}{t^{2\alpha}} = 0$ par croissance comparée.

" $\displaystyle\frac{\ln t}{t^{2\alpha-\beta}}$ " > 0.

$\Rightarrow \exists\, M > 0$, $\forall\, t \geq M$, $0 \leq \displaystyle\frac{t^{\beta}\cdot\ln t}{t^{2\alpha}} \leq 1$.

$\Rightarrow \exists\, M > 0$, $\forall\, t \geq M$, $0 \leq \displaystyle\frac{\ln t}{t^{2\alpha}} \leq \frac{1}{t^{\beta}}$.

Comme $\beta > 1$, $\displaystyle\int_M^{\infty} \frac{1}{t^{\beta}}\,dt$ (CV) dc $\displaystyle\int_M^{\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}\,dt$,

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha}}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (CV) également.

ccl • $\forall\, \alpha > \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (CV).

29 • $\forall\, \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\,dt$ (DV).

7) $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (*) ig en $+\infty$ (*) ig en 0 si $\alpha - 1 < 0$.

(*) On étudie $\int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$:

$x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ car $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$

comme $x^{\alpha-1} \geq 0 \ \forall x \in]0,1]$, de

$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ et $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ st de de m̂ nature.

$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ est IdR CV ssi $\alpha - 1 > -1$
$\alpha > 0$.

(*) On étudie $\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$:

$0 \leq x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow 0 \leq x^{\alpha+1} \cdot e^{-x} \leq 1$.

comme $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} \cdot e^{-x} = 0$ (crois. comparée),

$\exists M > 0, \forall x \geq M, \ 0 \leq x^{\alpha+1} \cdot e^{-x} \leq 1$

de $0 \leq x^{\alpha+1} \cdot e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$.

cm $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CV, $\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$ CV

ccl $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$ CV ssi $\alpha > 0$

8) $\int_2^{\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right) dx$,

• $\sqrt{x^4+x^2+1} = \sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)} = x^2\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}}$

$(1+t)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + t^2 \varepsilon(t)$; $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

Avec $t = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}$.

$= 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}+\frac{2}{x^6}\right)(1+\varepsilon(x))$.

$= 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon(x)$.

Donc $x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\varepsilon(x)$.

• $x\sqrt[3]{x^3+\alpha x} = x \cdot x\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{x^2}} = x^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}\left(\frac{\alpha}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^4}\varepsilon(x)\right)$

$= x^2 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{9}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$.

Donc $\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \left(\frac{3}{8} - \frac{\alpha^2}{9}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$.

si $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \neq 0$ alors $\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}$.

Quand on calcul f, ses équivalent à son 1° terme du DL.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}}{1/2 - \alpha/3} = 1 + \left(\frac{3/8 - \alpha^2/9}{1/2 - \alpha/3}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x) = 1$

et comme $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}$ est de signe cte.

Donc $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ et $\int_2^{\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) dx$ st de m̂ nature.

et comme $\int_2^{\infty} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \, dx$ DV car $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \neq 0$

dc $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ DV à condit° $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \neq 0$.

si $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} = 0$ alors $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{8} - \frac{\alpha^2}{9} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0$

Donc $f(x) \sim \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$, donc

puisq $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ est (id) CV, on cd

$\int_2^{\infty} f(x)$ CV.

ccl $\int_2^{\infty} \sqrt{x^4+x+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x} \, dx$ CV ssi $\alpha = \frac{3}{2}$.

Ex 9 : Transformée de Laplace.

soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, f cont tq $\int_0^{\infty} f(t) . e^{-s_0 t} \, dt$ CV.

$s_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

1)

F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, car F est dériv. sur $[0,+\infty[$ et $\forall\, t \geq 0$, $F'(t) = f(t) . e^{-s_0 . t}$ & f cont.

$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\, e^{-st} \, dt + F(0)$

$\left(= F(x) - F(0) + F(0) = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0) \right)$

car $\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s_0 t} \, dt$ CV.

comme $\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_0^{\infty} f(t) . e^{-s_0 t} \, dt + F(0)$, $\exists\, M > 0$,

$\forall\, x \geq M$, $\left| F(x) - \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s_0 t} \, dt - F(0) \right| \leq 1$,

dc $\forall\, x \geq M$, $|F(x)| \leq 1 + \left| \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s_0 t} \, dt + F(0) \right| = \alpha$

car $|a-b| \leq \varepsilon \Rightarrow |a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a-b| \leq \varepsilon$

comme F est cont sur $[0,+\infty[$, F cont sur $[0,M]$ dc elle est bornée sur $[0,M]$: $\exists\, \beta \geq 0$, $\forall\, x \in [0,M]$, $|F(x)| \leq \beta$. Donc $\forall\, x \in [0,+\infty[$, $|F(x)| \leq \max(\alpha, \beta)$

Technique d'Abel :

$\int_0^x f(t) . e^{-ts} \, dt = \int_0^x f(t)\, e^{-ts_0} . e^{-t\varepsilon} \, dt$ $\quad u = F \quad u' = f(t) . e^{-ts_0}$ $\quad v' = -\varepsilon . e^{-t\varepsilon} \quad v = e^{-t\varepsilon}$

$= \left[F(t)\, e^{-t\varepsilon} \right]_0^x + \varepsilon \int_0^x F(t) . e^{-t\varepsilon} \, dt$

$= F(x) . e^{-x\varepsilon} - F(0) + \varepsilon \int_0^x F(t) . e^{-t\varepsilon} \, dt$

Comme F est majorée sur $\mathbb{R}^+$, $\exists\, M$ tq $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $|F(t)| \leq M$, alors $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $\left| F(t) . e^{-t\varepsilon} \right| \leq M . e^{-t\varepsilon}$

comme $\int_0^{\infty} e^{-t\varepsilon} \, dt$ CV (ssi $\varepsilon > 0$).

On $\int_0^\infty F(t)\cdot e^{-t\varepsilon}\,dt$ CV absolument,

dc CV.

Ainsi $\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,e^{-st}\,dt = -F(0)+\varepsilon\int_0^\infty F(t)\,e^{-t\varepsilon}\,dt$

Donc $\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\,dt$ CV $\forall s > s_0$.

Ex 11 : 1) Pour $x \geq 1$, on pose $f(x) = x\cdot e^{ix^3}$, vérifier que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ est CV.

Est-elle |CV| ?

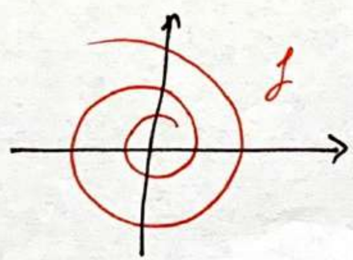
1) Module de $f(x)$: $|f(x)| = \sqrt{x^2\cdot\cos^2(x^3)+x^2\cdot\sin^2(x^3)}$
$= \sqrt{x^2\times 1} = \sqrt{x^2} = |x|$.

$|x| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$.

R: $|e^{i\theta}| = 1, \ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Cvg $\int_1^a f(x)\,dx$ est ig en $+\infty$, soit $x>0$,

$\int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a x\cdot e^{ix^3}\,dx$



$\int e^{u(t)}\,dt$

$\int u'(t)\,e^{u(t)} = e^{u(t)}$

IPP $\int_1^a x\cdot e^{ix^3}\,dx = \int_1^a \frac{x^2\cdot e^{ix^3}}{x}\,dx$ $\quad u = \frac{1}{x} \quad du = -\frac{1}{x^2}$

$dv = x^2\cdot e^{ix^3} \quad v = \frac{e^{ix^3}}{3i}$

$= \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{ix^3}}{3x}\right]_1^a + \int_1^a \frac{e^{ix^3}}{3ix^2}\,dx$.

$= \frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ia^3}}{3i} - \frac{e^i}{3i} + \int_1^a \frac{e^{ix^3}}{3ix^2}\,dx$.

Ainsi $\left|\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ia^3}}{3i}\right| = \frac{1}{3a} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$ dc $\frac{1}{a}\frac{e^{ia^3}}{3i} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$

et $0 \leq \left|\frac{e^{ix^3}}{3ix^2}\right| = \frac{1}{3x^2}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{3x^2}\,dx$ CV.

Donc $\int_1^\infty \frac{e^{ix^3}}{3ix^2}\,dx$ CV et dc $\lim_{a\to\infty}\int_1^a f(x)\,dx = -\frac{e^i}{3i} + \int_1^\infty \frac{e^{ix^3}}{3ix^2}\,dx$ D'où $\int_1^\infty f(x)\,dx$ CV.

$\boxed{\text{IDR}}$

$\int^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ | DV $\alpha \leq 1$; CV $\alpha > 1$.

$\int_0 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ | DV $\alpha \geq 1$; CV $\alpha < 1$.

à traiter 7/8/10/15.

Université de Lille

L2 mathématiques
2020/2021

Séries numériques et intégrales généralisées

—

FICHE 3 : SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Calculs de sommes de séries

Exercice 1. Calculer les sommes des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

b) $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$. (On pourra d'abord calculer $(1-3^{-1})\sum_{n=0}^{N}(n+1)3^{-n}$).

c) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$. (On pourra écrire $\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$, puis $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$).

Exercice 2.

a) Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme.

b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $1/(4x^3-x)$.

c) Montrer la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1}1/(4k^3-k)$ et calculer sa somme.

Exercice 3.

a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1, et en déduire que

$$e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

b) Calculer les sommes des séries :

$$\text{(i)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}\qquad\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}.$$

c) Montrer que le reste d'ordre n de la série exponentielle, $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, est majoré par $\frac{1}{nn!}$. En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 4. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction logarithme, montrer que la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente de somme $\ln 2$.

→ **Exercice 5.** Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$.

a) Donner une expression simple de $S_n'(x)$.

b) En déduire que

$$S_n(x)=\ln(1+x)-\int_0^x\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

TD : Suites Numériques.

- [M] Pour calculer la somme $\sum_{n\geq 0} u_n$, on calcule $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k$.
  * trouver "belle express" de $\sum_{k=0}^{N} u_k$.
  * calculer $\lim_{n\to\infty}$ "belle expres".

a) $\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, soit $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \underset{\text{somme suite géométrique}}{=} -\frac{1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}}$$

1° terme

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^N}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^N - 1\right).$$

- On en déduit que $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \cdot$

$\cdot = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^N - 1\right) = -\frac{1}{3}$. car $\lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^N = 0$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ CV et sa somme vaut $-\frac{1}{3}$.

b) $\sum_{n\geq 0} (n+1)\, 3^{-n}$ indicat : soit $N \in \mathbb{N}$, calculer

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{k}{3^k}.$$

$k = n+1$
$n=0 \Rightarrow k=1$
$n=N \Rightarrow k=N+1$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} + \frac{0}{3^0} - \frac{N+1}{3^{N+1}}.$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n} - \frac{N+1}{3^{N+1}} = 1\times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{N+1}{3^{N+1}}$$

$$= \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\right) - \frac{N+1}{3^{N+1}}$$

Donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} = \left(\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\right) - \frac{N+1}{3^{N+1}}\right)\frac{3}{2}$

et $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$.

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ CV et sa somme vaut $\frac{9}{4}$.

c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, indications :

$$\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)} = \frac{2n}{\begin{matrix} n^4+n^3+n^2 \\ -n^3-n^2-n+n^2 \\ +n+1\end{matrix}}$$

$$= \frac{2n}{n^4+n^2+1}$$

et $n^2+n+1 = (n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+2n+1-n-1+1 = n^2+n+1$.

On en déduit que $\forall N \in \mathbb{N}$.

$$2\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2-n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2-n+1} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2-k+1} \qquad k = n+1$$

$$= 1 - \frac{1}{(N+1)^2-(N+1)+1}$$

1er terme 1ère somme

On en déduit que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^2-(N+1)+1}\right) = \frac{1}{2}$

Rq $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$.

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ CV et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

Ex 3 : a) appliquer ff Taylor-L à f e^x entre 0,1, et dd $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$\theta \in]x,a[$.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{FF. TL}}$, $\exists\, \theta$ compris entre 0 et x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{(n+1)!} e^{\theta}.$$

Pour $x = 1$, on a :

⚠ dépend de n.

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$, on en déduit :

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} e \quad \text{car } 0<\theta<1$$

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 0. \quad \underline{\text{ie}} \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

La série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ CV et sa somme vaut e.

Ccl :
- → série géométriq ou série. géom modifiée
- → CDV
- → série télescopiq
- → ff $\boxed{\text{T-L}}$.

b)' Calculer (i) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$, soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!}$$

sinon 0..

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{n(n-1)}(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}$$

On en déduit $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}$

$$= e + e = 2e$$

Université de Lille

L2 Mathématiques
2020/2021

Séries numériques et intégrales généralisées M33 - Devoir Surveillé N°1

—

MARDI 3 NOVEMBRE 2020, DURÉE 2 HEURES

9h

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices et autres objets électroniques sont interditsts. La rédaction tiendra une part importante dans l'évaluation des copies.

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble $A+B = \{a+b \ / \ a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que $A+B$ est majoré par $\sup A + \sup B$. En déduire que $A+B$ admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
3. Application : Soit $X = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} \ / \ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup X$

9h35

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer par récurrence sur p que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$
2. Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$
$\frac{\pi^2}{4}$

   Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente (on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite).

10h

Exercice 3. Indiquer si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes. Justifier.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}} dx.$
2. $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt.$

10h25

Exercice 4.

1. Soit $x \geqslant 1$. Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$
2. Pour tout $x \geqslant 1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. @ 0
3. Soit $x > 1$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge et satisfait $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt < \frac{e^{-x}}{x^2}$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{-x}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = 0.$
4. Faire une intégration par parties pour montrer que $f(x) \sim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Ex 5 $\quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

a) $S_n'(x)$?, S_n est un polynôme donc S_n est dérivable :

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{\cancel{k}} \times \cancel{k}$$

série géométrique $\leftarrow (-1x)^{k-1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$$

$$= 1 \times \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$$

de terme général $(-x)^{k-1}$

b) cd $\quad S_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-1)^n}{1+t}\,dt$.

$S_n(x) = S_n(x) - S_n(0)$ car $S_n(0) = 0$.

$$= \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt$$

$$= \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

c) conclure $\forall x \in [0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On a donc :

$$\ln(1+x) - \underbrace{\sum (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}_{S_n(x)} = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ ?$$

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

Pour $x \in [0,1]$,

- $\frac{t^n}{1+t} \leq \frac{x^n}{1+t} \leq \frac{1}{1+t} \rightarrow \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x$.

Ne fonctionne pas.

- $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ car $1+t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1$.

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \text{ car } 0 \leq x \leq 1$$

Donc $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ CV et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

d) Pour $x = 1$,

on a $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ série harmonique.

Ex 7 Mq $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{1+2^2+\dots+k^2}$ est CV.

Calculer sa somme.

(indic $1^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

et $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vue ex 6).

"$\ln 2$" série harmoniq.

soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1\times 6}{k(k+1)(2k+1)}$$

$\boxed{\text{DES}}$

$$\frac{6}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{2x+1}$$

- $x.x$ en $x=0$: $\alpha = 6$.
- $x(x+1)$ en $x=-1$: $\beta = \frac{6}{-1\times(-2+1)} = 6$.
- $x(2x+1)$ en $x=\frac{-1}{2}$: $\gamma = \frac{6}{-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = -24$

Donc $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k+1} - 24\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$$

(*) "

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{6}{k} - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

⚠ f car n : fini.

$\sum_{k=1}^{\infty}$ = Δ $+\infty-\infty$ FAUX

(*) $= 12\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{6}{n+1} - 6 - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$

on enlève 1° terme, on rajoute dernier terme

(*) $= 24\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) - 6 + \frac{6}{n+1}$

(*) $= 24\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)-6+\frac{6}{n+1}$

(*) $= +24\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k} - 6+\frac{6}{n+1}$

(ie)

→ enlever 1° terme
→ multiplier par (-1)

(*) $= 24 - 24\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - 6 + \frac{6}{n+1}$

(ie) $= 24\left(\sum_{k=1}^{2n+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} + 1\right) - 6 + \frac{6}{n+1}$

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ CV et a pr somme $\ln(2)$, on en déduit $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

ie $2n+1$ est suite extraite de $\mathbb{N}$.

D'où $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+\dots+k^2} = 24-24.\ln(2)-6$
$= 18-24.\ln(2)$.

Ainsi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1^2+\dots+k^2}$ CV et sa somme vaut $18-24.\ln(2)$.

II. Séries numériques à termes positifs

→ critère comparaison
→ critères c⇒, d'alembert, cdc.

Ex 8 Nature des séries

a) $\dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n\geq 1)$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ par $\boxed{DES}$, dc $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ CV et sa somme vaut 1.

Bonus : $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^2}\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, (**)

donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ st de m̂ nature et dc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ CV.

(6)

$\forall \alpha > 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<n^2\leq n^\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^\alpha}\leq\dfrac{1}{n^2}$, comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ CV,

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ CV. (en fait $\boxed{\sum_{n=1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \forall\alpha>1}$)

(**) ⚠ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \not= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

→ s'il on modifie un nbr fini de termes, les séries restent de m̂ nature MS les somment changent.

b) $V_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n\geq 1)$.

Cₙ $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$ et $\dfrac{1}{n^3}\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ CV car $\alpha=3>1$.

Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ CV.

c) $\dfrac{2n-1}{n(n^2-4)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^2}\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

m̂ justif b.

Donc $\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ CV.