M33 - C1 Approfondissement sur les suites numériques.

I BI et BS

$m \in \mathbb{R}$

- minorant, $\forall a \in A, m \leq a$.

$M \in \mathbb{R}$

- majorant, $\forall a \in A, a \leq M$.
- ppe $\rightarrow m \in A$; $\rightarrow m$ est minorant de A.
- pge $\rightarrow M \in A$; $\rightarrow M$ est majorant de A.

- ens minorants : $]-\infty, d]$ nø
- ens majorants : $[d, +\infty[$ nø

- BI $\rightarrow m$ minorant de A. ; $\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon < m + \varepsilon$.
- BS $\rightarrow M$ majorant de A. ; $\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < x_\varepsilon$

Th Tte pie majorée & nn vide de $\mathbb{R}$ a BS.
Tte pie minorée & nn vide de $\mathbb{R}$ a BI.

Rq $\mathbb{Q}$ n'a pas cette ppté.

II Suite de nbres réels

$(U_n)_n$ ste nbr réels, $u_* \in \mathbb{R}$,
$(U_n)_n$ CV vers u_* si
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - u_*| < \varepsilon$.

$(U_n)_n$ DV vers $+\infty$ si
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \geq M$.

Th La limite d'une suite lsq^{ll} existe est unique

Prop soit $M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ alors $M = \sup A$ ssi
(i) M est majorant de A
(ii) $\exists (x_n)_n \subset A$ q CV vers M.

III Suite convgtes & Inégalités

Prop Tte suite CV est bornée.

Th Si $(U_n)_n$ CV vers l, si $U_n \geq \lambda$ apcr alors $l \geq \lambda$.

Th gendarmes

$$\underbrace{U_n}_{l \text{ identiqs}} \leq \underbrace{V_n}_{l \in \mathbb{R}} \leq \underbrace{W_n}_{l \text{ identiques}}$$

IV Equivalents

D $(U_n)_n$ & $(V_n)_n$ st équivalts si $\exists (\varepsilon_n)_n$ CV vers 0 apcr $U_n = V_n(1+\varepsilon_n)$

$\rightarrow U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} V_n$.

Rq Si $U_n \sim V_n$ alors $U_n = 0$ ssi $V_n = 0$.

Propté si $(U_n)_n$ & $(V_n)_n$ ne s'annulent pas apcr alors $U_n \sim V_n$ ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$.

(P) $U_m \sim V_m$ et $U'_m \sim V'_m$ $\Rightarrow U_m U'_m \sim V_m V'_m$

IV) $\boxed{\text{Equivalents}}$

⚠ Somme & fonction : ça ne va PAS.

(TH) $U_m \nearrow$, $U_m \leq M$ alors U_m (CV) vers ℓ où $\ell \leq M$

VI) Existence de limite
1) Croissance & (CV)

⚠ $U_m \nearrow$ & $U_m \leq M$ $\not\Rightarrow$ $\lim U_m = M$

(Coro) $(U_m)_m \nearrow$ soit : - majorée (CV)
- (DV) $(+\infty)$

(TH) si $(U_m)_m \nearrow$ & non-majorée $\Rightarrow$ (DV) $+\infty$

(D) $(U_m), (V_m)$ adjacentes si :
- $U_m \nearrow$ - $V_m \searrow$ - $L\, U_m - V_m = 0$

2) Suites adjacentes

(P) $(U_m), (V_m)$ adj. (suppose $U_m \nearrow$, $V_m \searrow$)
$\Rightarrow U_m \leq V_m$.

(TH) $(U_m), (V_m)$ 2 suites adj, U_m, V_m (CV) m̂ limite.

3) Suites extraites & TH Bolzano - Weierstrass

(D) Suite extraite ou sous-suite de (U_m) si $\exists$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ S^T croissante.
$U_{\varphi(m)}$.

(TH) Tte suite extraite d'une suite (CV) m̂ limite.

TH (B-W) soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(U_m)_m \subset [a, b]$ alors
$\exists$ suite extraite $(U_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ q (CV) vers $\ell \in [a, b]$.

(D) (U_m) vérifie le critère de Cauchy ou dite de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m_0,$
$| U_p - U_q | < \varepsilon$.

4) Suites de Cauchy

(P) Tte suite de Cauchy est bornée.

(P) Si (U_m) : SDC q admet sous-suite (CV) alors (U_m) (CV).

(TH) $\mathbb{R}$ est complet.
Ad^t tt $\boxed{SdC}$ (CV).

4) Suites de Cauchy

(P) Tte $\boxed{SdC}$ (CV)

(TH) ASSE. (i) $\mathbb{R}$ est complet
(ii) $\mathbb{R}$ a ppté (BS).
(iii) Tte suite majorée $\nearrow$ (CV).
(iv) 2 suites adjctes (CV) vers m̂ lim.
(v) $\boxed{\text{TBW}}$.

(D) $(U_m)_m$ est récurrente, si $\exists$ f f déf. int I, $\forall m \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} U_m \in I \\ U_{m+1} = f(U_m). \end{cases}$

5) Suites Récurrentes

(P) soit $I^{\mathbb{R}}_{int}$, $f : I \to I$, une appli dérivable à l'intérieur de I, $c \in]0, 1[$, $\forall x \in I$, $| f'(x) | \leq c$ alors f est contractante de rapport c

(D) $I^{int}_{\mathbb{R}}$, $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante si
(i) $f(I) \subset I$
(ii) $\exists$ $c \in]0, 1[$, $\forall x, x' \in]0, 1[$,
$| f(x) - f(x') | \leq c\, | x - x' |$
c : rapport de contraction de f sur I.

(TH) (Points fixes de Banach)
$I^{\mathbb{R}}_{int}$ fermé, f appli : contractante sur I de rapport c alors $\exists$ uniq $\ell \in I$, $f(\ell) = \ell$
(ℓ : point fixe de f).

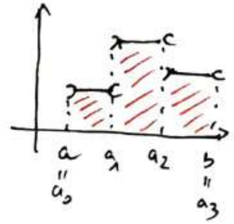
D+, $\forall u_0 \in I$, $(U_m)_m$ déf p $U_{m+1} = f(U_m)$ (CV) vers ℓ.

D+, $\forall m \in \mathbb{N}$, $| U_m - \ell | \leq c^m\, | U_0 - \ell |$
$| U_m - \ell | \leq \dfrac{c^m}{1 - c}\, | U_0 - U_1 |$.

M33 C_2 : Intégrales généralisées

- $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une f en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ & des réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ tq $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\phi(x) = c_i$.

- $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$



- $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx \leq M(b-a)$

R* intégrale de Riemann

- ▶ f en escaliers
- ▶ f monotones
- ▶ f cont & cont p morcx

- f est Riemann intégrable si $I^+(f) = I^-(f)$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I^+(f) - I^-(f)$.

Intégrabilité locale

(D) J, $f : J \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur I si p tt intérv. fermé et borné (= compact) $[c,d]$ inclus dans I, f est Riemann intégrable sur $[c,d]$.

(D) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$) et une f local^t intgb. sur I.
On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$, (resp $]a,b]$) est CV si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ existe. (resp $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$)

Dans ce cas, on la note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et sinon on dit que IG $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ DV en b. (resp a).

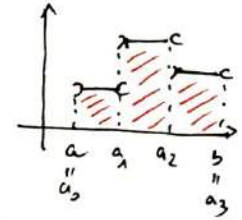
Intégrales généralisées

(D) soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f loc. int. sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ CV si $\exists\, c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ CV toutes les 2.

M33 C_2 : Intégrales généralisées

- $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une f **en escalier** s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ & des réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ tq $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\phi(x) = c_i$.

- $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$



- $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx \leq M(b-a)$

R intégrale de Riemann

- ▶ f en escaliers
- ▶ f monotones
- ▶ f cont & cont p morcx

- f est **Riemann intégrable** si $I^+(f) = I^-(f)$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I^+(f) - I^-(f)$.

Intégrabilité locale

(D) I, $f : I \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur I si pr tt intérv. fermé et borné (= compact) $[c,d]$ inclus dans I, f est Riemann intégrable sur $[c,d]$.

Intégrales généralisées

(D) soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f loc. int. sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ CV si $\exists\, c \in]a,b[$, $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ CV toutes les 2.

(P) (Linéarité)

soit $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, f,g déf sr $]a,b[$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ CV $\to$ $\int_a^b (f+g)$ CV, $\int_a^b \lambda.f$ CV

et $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda . \int_a^b f$.

(D) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$) et une f local^t intgb. sr I.
On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$, (resp $]a,b]$) est CV si

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \text{ existe. } \left(\text{resp } \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt\right)$$

Dans ce cas, on la note $\int_a^b f(t)\,dt$ et sinon on dit que IG $\int_a^b f(t)\,dt$ DV en b. (resp a).

(P) ($\nearrow$ et CV) hyp,
$\forall t \in]a,b[$, $f(t) \leq g(t)$ et $\int f$ et $\int g$ CV
alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

(P) hyp, $F : [a, b[\to \mathbb{R}$, une fonction ↗ alors :

soit F est majorée et $\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe $\in \mathbb{R}$,

soit $\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$.

(TH) hypo, $\forall t \in]a, b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

(i) si $\int_a^b g(t)\,dt$ CV et $0 \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

(ii) si $\int_a^b f(t)\,dt$ DV alors $\int_a^b g(t)\,dt$ DV également.

(Rq) $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ ssi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

(Rq) $\int \frac{1}{t^\alpha}$ CV dès que $\alpha > 1$, n'est pas intégrale de Riemann si $\alpha \neq$ cte.

Cas f à valeurs positives

TH de comparaison

(TH) soit $a, b \in \mathbb{R}$, f f positive ou nulle $]a, b[$ & localement intégrable sur $[a, b[$. (resp $]a, b]$)

Alors :

- soit $\exists M, \forall x \in [a, b[, \int_a^x f(t)\,dt \leq M$ (resp) et l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.
- soit $\int_a^x f(t)\,dt$ n'est pas majorée lorsq $x \in]a, b[$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ DV.

(D) hypo, $x_0 \in I$, ou $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. On dit que f est équivalente à g en x_0 et on note $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ si $\exists\ \varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq (i) $f = g(1 + \varepsilon)$ sur I.

(ii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \varepsilon(x) = 0$

(TH) (comparaison)

hypo, On suppose $g \geq 0$ sur $]a, b[$ et $f \underset{x \to b^-}{\sim} g$ (resp $f \underset{x \to a^+}{\sim} g$)

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ st de m̂ nature.

TH $F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ **Cas f à valeurs réelles ou complexes**

alors $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ssi $\forall (U_n)_n \subset [a,b[$

tq (CV) vers b alors $\lim\limits_{n \to \infty} F(U_n)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

D $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f localem^t int sur $[a, b[$ (resp),

on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) absolument

si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ (CV).

Convergence absolue

(si $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) mais ne (CV) pas absolum^t alors elle est semi-convergente).

TH si $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) absolument alors elle (CV).

D soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f localement intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$). On dit que f satisfait le critère de Cauchy des intégrales généralisées

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [a, b[$, $\forall x, x' \in]x_\varepsilon, b[$,

on ait $\quad \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$

TH soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f localement intégrable sur $[a, b[$,

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) ssi elle vérifie le critère de Cauchy.

(TH) $F : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

Cas f à valeurs réelles ou complexes

alors $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ssi) $\forall (U_n)_n \subset [a,b[$

q (CV) vers b alors $\lim_{n\to\infty} F(U_n)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

(D) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f localement intégrable sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$). On dit que f satisfait le critère de Cauchy des intégrales généralisées

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [a,b[$, $\forall x, x' \in]x_\varepsilon, b[$,

on ait $\left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$

(TH) soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f localement intégrable sur $[a,b[$,

alors $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV) (ssi) elle vérifie le critère de Cauchy.

(D) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f localem^t int sur $[a,b[$ (resp), on dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV) absolument si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ (CV).

Convergence absolue

(si $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV) mais ne (CV) pas absolum^t alors elle est semi-convergente).

(TH) si $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV) absolument alors elle (CV).

(P) $-\infty < a < b, \infty$, f loc int$_g$ sur $]a,b[$ et bornée sur $]a,b[$ alors $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV).

(PPC) (Cons) $-\infty < a < b < +\infty$, f cont^t $[a,b[$, (resp) et si se prolonge par cont en b

alors $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV).

(Techniq Abel) Techq à appliquer pr $\int_a^\infty f(t)\, g(t)\, dt$ dq

* f admet primitive bornée.
* $g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

3 : Séries numériques.

Définids

(D) On appelle suite des sommes partielles de la suite $(U_n)_n$ la suite $(s_n)_n$:

$s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Le nbr s_n : somme partielle d'ordre n.

La suite (s_n) noté $\sum_{n\geq 0} U_n$, on parle de la série de termes général U_n.

- Si $\sum_{n\geq 0} U_n$ ne CV pas, on dit DV.
- Lorsq $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV, on appelle reste d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} U_n$ le nombre $r_n = s - s_n$.

Rq Si $(U_n)_n$ def à pg n_0 : $\sum_{n\geq n_0}$.

Rq Les séries ne st pas cas part. de suite, ce st TOUTES suites. Dmq de $U_n = u_n - u_{n-1}$.

CV d'une série

(D) si suite sommes partielles $(s_n)_n$ de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV $s \in \mathbb{R}$, on dit que $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV.

On appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ et on note $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ le nombre s.

→ $s = \lim_{n\to k} \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$.

→ ep $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. ($r_n$ n'a de sens que si s_n CV). → $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k$

(P) soit $\sum_{n\geq 0} U_n$, $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux séries, on suppose qu'elles ne diffèrent que d'un nbr fini de termes alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ st de m̂ nature.

→ Rq La nature ne change pas MS la valeur de la somme change.

@ Série géométriq, $U_n = a.q^n$

$$\begin{cases} S_n = a.\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ S_n = a(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

alors $\lim_{n\to\infty} S_n$ ∃ si $|q| < 1$.

Ds ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} a.q^n = \dfrac{a}{1-q}$ et $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV si $|q|<1$.

@ Série télescopique $U_n = V_n - V_{n-1}$.

(P) Si $\sum_{n\geq 0} U_n$ est une série CV alors $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

⚠ réciproque fausse.

(Csq) Si $(U_n)_n$ ne tend pas vers 0, $\sum_n U_n$ DV.

On dit qu'il DV grossièrement.

(TH) Si $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ (CV) vers s et t et si

$\sum_{n\geq 0} W_n$ (DV) alors :

(i) $\sum_{n\geq 0} (U_n + V_n)$ (CV) vers $s+t$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} (\lambda U_n)$ (CV) vers λs.

(iii) $\sum_{n\geq 0} (U_n + W_n)$ (DV).

(D) Critère de Cauchy :

$\sum_{n\geq 0} U_n$ est de Cauchy si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq N, \left|\sum_{k=q}^{p} U_k\right| < \varepsilon$.

(TH) $\sum_{n\geq 0} U_n$ (CV) ssi $\sum_{n\geq 0} U_n$ est de Cauchy.

II/ Séries à termes positifs

(D) $\sum_{n\geq 0} U_n$ est dite à termes positifs si $U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(RQ) En applique (TH), suffit $U_n \geq 0$ (apcr)

(Prop) soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ à termes positifs alors la série (CV)

ssi $\exists M / \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} U_k \leq M$.

(TH) Comparaison :

soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux séries à termes positifs :

$\forall n$, $0 \leq U_n \leq V_n$ Alors :

(i) si $\sum_{n\geq 0} V_n$ (CV), $\sum_{n\geq 0} U_n$ (CV) et $\sum_{n=0}^{\infty} U_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} V_n$

(ii) si $\sum_{n\geq 0} V_n$ (DV), $\sum_{n\geq 0} U_n$ (DV).

(TH) $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ 2 séries à termes positifs

tq $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} V_n$ alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ st de

m̂ nature.

Si ds le cas l'une d'elle (CV), $\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} V_k$

(TH) Règle de d'Alembert :

soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ série à termes S^T positifs,

1) si $\exists \lambda \in]0,1[$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \lambda$ apcr

alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ (CV). (si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$)

2) si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ apcr alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ (DV) grossièrt.

(si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$)

TU Critère de Cauchy :

soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positifs,

(i) $\exists \lambda \in]0,1[$, apcr $\sqrt[n]{U_n} \leq \lambda$ alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV.

(ii) si $\sqrt[n]{U_n} \geq 1$ apcr alors $\sum_{n\geq 0}$ DV grossièr^{t}.

(TU) Critère de Cauchy :

soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positifs,

(i) $\exists \lambda \in]0,1[$, àpcr $\sqrt[n]{U_n} \leq \lambda$ alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ (CV).

(ii) si $\sqrt[n]{U_n} \geq 1$ àpcr alors $\sum_{n\geq 0}$ (DV) grossièrt.

(P) soit $(U_n)_n$ suite tq $\forall n$, $U_n > 0$

alors si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$ alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$

(Rq) Applicat° critère d'alembert ☹ ⇒ applicat° CdC ☹ sinon non.

(TU) (Comparaison Séries - Int généralisées) :

soit $a \geq 0$, $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, f f positive et décroissante. Alors la série

$\sum_{n\geq a} f(n)$ et $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ st de m̂ nature.

De plus, si elles convergent, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n}^{\infty} f(t)\,dt.$$

IDR

$\int^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$	(DV) : $\alpha \leq 1$ (CV) : $\alpha > 1$
$\int_0 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$	(DV) : $\alpha \geq 1$ (CV) : $\alpha < 1$
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	(DV) : $\alpha \leq 0$ (CV) : $\alpha > 1$.
$\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$	(CV)

III / Séries à termes quelconques

1) CV absolue

(D) On dit série $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ CV.

(TH) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV.

2) Semi convergence

(D) Une série est semi-CVte si elle CV sans CV absolument.

(TH) $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ 2 suites adjacentes tq $\begin{cases}(a_n)_n \searrow \\ (b_n)_n \nearrow\end{cases}$ alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ CV même lim ℓ et $b_n \leq \ell \leq a_n$

(D) (Crit série alternée):

Une série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est série alternée, si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \cdot U_{n+1} \leq 0$ (U_n et U_{n+1} : signe opposé).

(TH) (Crit séries alternées):

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée tq $(|U_n|)_n \searrow$ et CV vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV et $\forall n \in \mathbb{N}$,

on a : $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$ (estimation du reste)

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est de même signe que u_{n+1}.

TH d'Abel : Si $u_n = \varepsilon_n \cdot V_n$ avec :

(i) $(\varepsilon_n)_n$ est ≥ 0, $\searrow$ & CV vers 0.

(ii) $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=0}^{n} V_k \right| \leq M$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et le reste vérifie :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq 2 \cdot \varepsilon_{n+1} \cdot M$$

III / Séries à termes quelconques

1) CV absolue

(D) On dit série $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ CV.

(TH) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV.

2) Semi convergence

(D) Cdqs est semi-CVte si elle CV sans CV absolument.

(TH) $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ 2 suites adjacentes tq $\begin{cases}(a_n)_n \searrow \\ (b_n)_n \nearrow\end{cases}$ alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ CV même lim l et $b_n \leq l \leq a_n$

(D) (Crit série alternée):
Cdqu série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est série alternée, si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$ (u_n et u_{n+1} : signe opposé).

(TH) (Crit séries alternées):
soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée tq $(|u_n|)_n \searrow$ et CV vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et $\forall n \in \mathbb{N}$,

on a : $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$ (estimation du reste)

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est de même signe que u_{n+1}.

TH d'Abel : Si $u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$ avec :

(i) $(\varepsilon_n)_n$ est ≥ 0, $\searrow$ & CV vers 0.

(ii) $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq M$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et le reste vérifie :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq 2 \cdot \varepsilon_{n+1} \cdot M$$

@ Utilisation dev asymptotiq
⚠ u_n n'est pas signe cte ⇒ faire DL

IV/ Opérations algébriqs sur séries

1) Associativité ou Groupement de termes

(TH) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $S^T \nearrow$.
On pose $v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et $v_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$. Alors :

(i) si $\sum_n u_n$ CV alors $\sum_n v_n$ CV et a la même somme s.

(ii) si $\sum_n v_n$ CV et si la condition (a) ou (b) est réalisée, alors : $\sum_n u_n$ CV et a même somme.

(a) $(u_n)_n$ CV vers 0 et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est fini

(b) $\forall k \in [\![\varphi(n-1)+1, \varphi(n)]\!]$, tous u_k même signe.

2) Permutatⁿ de termes

(D) Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite commutativement CV si pr tte bijectⁿ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV aussi.

(TH) Une série absolmᵗ CV est commutativmᵗ CV.

(TH) (de Riemann sr réarrangmᵗ séries semi-CV) : soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ série semi-CV et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\exists$ permutatⁿ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV et a pr somme α.
(on pt atteindre n'impᵗ q'l nbr réel ds série où série semi-CV).

3) Produit de série

(D) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, pr $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 .$$

La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est série de produit des 2 séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

(L) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries à termes positifs CV. $\sum_n w_n$ leur série produit. Alors $\sum_n w_n$ CV et :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

(TH) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries absolumᵗ CV et $\sum_{n\geq 0} W_n$ lr prod
Alors $\sum_{n\geq 0} W_n$ CV et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n$

Séries Numériques

D $\sum U_n$ CV abs ssi $\sum |U_n|$ CV.

D si $\sum U_n$ CV $\Rightarrow r_n = s - s_n$ où $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

D $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV ssi $(s_n)_n$ CV $s \in \mathbb{R}$. $s = \lim_{n\to k} \sum_{k=0}^{\infty} U_k$

S géom : $U_n = a.q^n$, $S_n = a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ sinon $S_n = a(n+1)$. $\sum U_n = \frac{a}{1-q}$ et $\sum U_n$ CV si $|q| < 1$.

S tél : $U_n = V_n - V_{n-1}$

P si $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

P si U_n ne tend pas vers 0, $\sum_{n\geq 0} U_n$ DV.

CdC $\sum_{n\geq 0} U_n$ est Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \left|\sum_{k=0}^{p} U_k\right| \leq M$.

TH compa $0 \leq U_n \leq V_n$, si $\sum V_n$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV sinon DV.

D Satp : $\sum U_n$ SATP si $U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ apcr

P $\sum_{n\geq 0} U_n$ SATP $\Rightarrow$ série CV ssi $\exists M / \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} U_k \leq M$.

TH $\sum U_n$ et $\sum V_n$ SATP, $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} V_n \Rightarrow \sum U_n$ et $\sum V_n$ st m̂ natures.

TH Alemb si $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow \sum U_n$ CV. Simon DV grossièr.

TH Cauchy si $\sqrt[n]{U_n} < 1 \Rightarrow \sum U_n$ CV. Sinon DV gross.

D crit série alterné CSA $\sum U_n$ SA ssi $U_n . U_{n+1} \leq 0$.

TH CSA, $\sum U_n$ SA, $\begin{cases} |U_n| \searrow \\ U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow \sum U_n$ CV, on a $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_{k+1}\right| \leq |U_{n+1}|$

TH Abel si $U_n = \varepsilon_n . V_n$, $\begin{cases} (\varepsilon_n)_n \geq 0, \searrow, \text{CV} \to 0 \\ \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{\infty} V_k\right| \leq M \end{cases} \Rightarrow \sum U_n$ CV, on a $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k\right| \leq 2.M.\varepsilon_{n+1}$

TH compa S/ig $f \geq 0, \searrow \Rightarrow \sum_{n\geq a} f(n)$ et $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ st m̂ nature. Si elles CV : $\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(t)\,dt$.

TH associt. Grpt de termes
(i) $\sum U_n$ CV $\Rightarrow \sum V_n$ CV
(ii) $\sum V_n$ CV, ⓐ ou ⓑ $\Rightarrow \sum U_n$ CV
ⓐ $(U_n)_n$ CV $\to 0$
ⓑ U_k m̂ signe.
soit $\sum U_n$, $v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} U_k$, $v_k = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} U_k$

D commut^{vt} CV si $\forall$ bijecθ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\sum U_{\sigma(n)}$ CV.

TH $\sum U_n$ abs CV est commt^{vt} CV.

TH Riemann Réarrangt : $\sum U_n$ semi-CV $\Rightarrow \exists \underset{\text{permutaθ}}{\sigma}$, $\sum U_{\sigma(n)}$ CV $\alpha \in \mathbb{R}$.

Intégrales Généralisées

D ig $\int_a^b f(t)\,dt$ est ig si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ $\exists$.

P $f \geq 0 \xrightarrow{\text{soit}} \exists M, \int_a^x f(t)\,dt \leq M$ CV. $\xrightarrow{\text{soit}} \int_a^b f(t)\,dt$ DV.

TH compa $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ CV.

D $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ ssi $f = g(1+\varepsilon)$ où $\varepsilon \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

TH compa $g \geq 0$ et $f \sim g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ st m̂ nature.

CdC $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b[, \forall x, x' \in]x_\varepsilon, b[, \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$.

D CV abs ssi $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV.

PPC f cont $[a, b[$, si se PPC en b alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

Tech Abel pour $\int_a^\infty f(t)\,g(t)$ 4 f adm^t primitive bornée et $g(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.