M42

C1 Dualité

I / Formes linéaires & espace dual

D1 Lorsq $F = \mathbb{K}^1$, on appelle les élts de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ formes linéaires sur E, et on appelle $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ espace dual de E.

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1) \overset{not}{=} E^*.$$

- Bijecto linéaire: $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ $\quad \varphi \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$
- Changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) . T$
- Cas général : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(\varphi) = \mathcal{S}^{-1} . \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)$

II / Hyperplans

D1 Un hyperplan de E est un $\mathbb{K}$-e-v de E de dim $n-1$. (où $n = \dim E$).

P1 soit E ev $\neq 0$.

(i) pr tte forme linéaire l non nulle pour E, son noyau $\ker l$ est un hyperplan de E.

(ii) pr tt hyperplan H de E, $\exists$ une forme linéaire l non nulle sur E, uniq à un fact^{r} non nul près, tq $\ker l = H$.

III / Base duale

P2 soit E un $\mathbb{K}$-e-v, de dim n, soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ où pr chq $i = 1, \dots, n$ $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}^1$ est la forme linéaire associant à tout vecteur de E son i-ème coordonné ds la base $\mathcal{E}$, est une base de E^*.

D2 La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ introduite ds P2 s'appelle base duale de $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

Cor si $\dim E < \infty$ alors $\dim E^* < \infty$ et $\dim E = \dim E^*$

D2' Def $\Leftrightarrow$ base duale

Une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* est la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ base de E ssi $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$: delta de Kronecker. $i,j = 1, \dots, n$ ($n = \dim E$)

IV / Base anté-duale

D3 soit E ev de dim finie n et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E^*. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ pr tous $i,j = 1, \dots, n$ s'appelle base anté-duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

P3 soit E ev, $\dim E = n$. Alors toute base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* admet une $\boxed{\text{uniq.}}$ base anté-duale.

P4 soit E ev, $\dim E = n$, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors pr les mat de passage : $P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}\right)^{-1}$

R9 Adit, $F^{\perp}$ est l'ensemble des équat°s linéaires de F.

(P1) soit E un ev et F, G des sev de E ou de E^* alors :

a) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

b) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

c) $F \subset F^{\perp\perp}$

d) $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

si en plus, $\dim E < \infty$ alors on a :

c') $F = F^{\perp\perp}$

d') $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

e) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

VII / La transposée

(D2) soit E, F des e.v alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on déf la **transposée** ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par

$$\forall f \in F^*, \ {}^t\varphi(f) = f \circ \varphi .$$

(P2) (i) soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases de E, F. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right)$$

(ii) $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp} = \ker({}^t\varphi)$

$(\ker \varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^t\varphi)$

cf φ surjective $\iff {}^t\varphi$ injective.

φ injective $\iff {}^t\varphi$ surjective.

(iii) $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,{}^t\varphi$.

(iv) si on identifie E à E^{**} et F à F^{**} $\Rightarrow {}^t({}^t\varphi) = \varphi$.

(v) soit G un 3° ev et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$

Alors ${}^t(\psi \circ \varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$

(vi) si $E = F$, si $\varphi \in \mathcal{L}(F, E)$ est inversible $\Rightarrow {}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_E"'] & F \arrow[d, "\Phi_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^t({}^t\varphi)"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

le diag est commutatif : $\Phi_F \circ \varphi = {}^t({}^t\varphi) \circ \Phi_E$.

C2 Formes bilinéaires

I / formes bilinéaires

(D1) 1) Une **forme bilinéaire** sur e.v E est une applicat° $\varphi : E \times E \to K$ linéaire en chacun de ses arguments ie :

- $\forall x \in E$, l'applicat° $E \to K$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ $\overset{\text{not}}{\to}$ $\varphi(x, \cdot)$ est une forme linéaire.
- $\forall y \in E$, l'applicat° $E \to K$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ $\overset{\text{not}}{\to}$ $\varphi(\cdot, y)$ est une forme linéaire.

2) Une forme bilinéaire φ est dite **symétriq** (resp. **alternée**) : si $\forall x, y \in E$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ resp. $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

Notat° : Pour ces formes bilinéaires : bil, bil sym, bil alt soit : $\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$. Ce sont des ev.

Puis $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{B}(E)$, $\forall \lambda \in K$: $\lambda\varphi + \psi \in \mathcal{B}(E)$, de m̂ $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$.

→ ds une base : soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{B}(E)$ alors $\forall X, Y \in E$, on pt écrire $X = \sum x_i e_i$, $Y = \sum y_j e_j$,

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \, \varphi(e_i, e_j).$$

(D2) La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i\leq j\leq n}$ s'appelle matrice de la forme bilinéaire φ ds la base $\mathcal{E}$ et est notée $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ si on note $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $A=(a_{ij})=\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ alors $\forall x,y\in E$, $\varphi(X,Y)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\,x_i\,y_j$.

$$\varphi(x,y)=(x_1 \dots x_n)\,A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}.$$

(P1) soit $E,\varphi,\mathcal{E},A$ comme ci-dessus alors :

(i) $\varphi\in\mathcal{S}(E)\iff\forall i,j=1,\dots,n$; $a_{ij}=a_{ji}$
→ la mat A est symétrique.

(ii) $\varphi\in\mathcal{A}(E)\iff\forall i,j=1,\dots,n$, $a_{ij}=-a_{ji}$.
→ la mat A est anti-symétriq

(iii) $\dim\mathcal{B}(E)=n^2$, $\dim\mathcal{S}(E)=\frac{n(n+1)}{2}$

$\dim\mathcal{A}(E)=\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{\mathcal{B}(E)=\mathcal{S}(E)\oplus\mathcal{A}(E)}$$

(P2) soit E ev dim n, $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ des bases de E,
$P=P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, $A=\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)\Rightarrow A'={}^tP.A.P$

II / Formes quadratiques

(D3) soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une foncθ $\boxed{Q:E\to\mathbb{K}}$ s'appelle forme quadratique si

1) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall v\in E$, $Q(\lambda v)=\lambda^2.Q(v)$ et

2) $b_Q:E\times E\to\mathbb{K}$, $(x,y)\mapsto\frac{1}{2}\big(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big)$ est une forme linéaire.

On appelle b_Q : forme bilinéaire symétriq associé à Q, ou la forme polaire de Q, ou polaire de Q.

Les formes quadratiqs sur E forment un $\mathbb{K}$-ev que l'on note $Q(E)$; l'applicaθ $\mathcal{P}:Q(E)\to\mathcal{S}(E)$,
$Q\longmapsto b_Q$ est linéaire
et est appelée polarisaθ (morphisme de polarisaθ).

(L) $\mathcal{P}$ est un isomorphisme de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ d'inverse
$\mathcal{D}:\mathcal{S}(E)\to Q(E)$, $\varphi\longmapsto q_\varphi$ où q_φ est def par $x\mapsto\varphi(x)$.

(D4) Pour $\varphi\in\mathcal{S}(E)$, on appelle $q_\varphi\in Q(E)$ forme quadratiq associée à φ. $(q_\varphi=\mathcal{D}(\varphi))$.

(D5) La matrice d'une forme quadratiq Q ds une base $\mathcal{E}$ de E est la matrice de la forme polaire de Q : $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q):=\text{Mat}_{\mathcal{E}}(b_Q)$.

Écriture d'une forme quadratiq ds une base

soit $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ une base, $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)=(a_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$

Alors $a_{ji}=a_{ij}$, on a $Q(x)=\sum a_{ij}\,x_i x_j$

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,x_i^2+2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\,x_i\,x_j$$

(TH) soit E un $\mathbb{K}$ e-v de dim finie alors tte forme quadratiq (ou bil. sym) sur E est diagonalisable ie $\exists$ une base $\mathcal{E}$ de E, ds lq^{ll} la mat est diagonale.

Bases Orthogonales

(D1) soit E ev muni forme lin. sym. ie 2 vct^{rs} $x, y \in E$, on écrit $x \perp_\varphi y$, on dit "x est φ-orthogonal à y" si $\varphi(x,y) = 0$. Px tte forme quad. Q sur E, on écrit aussi $x \perp_Q y$ au lieu de $x \perp_{b_Q} y$.

Rq : $x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$.

(D2) soit E ev, dim n, muni f. quad. (ou bil. sym).
Une $\boxed{\text{base}}$ $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite $\boxed{\text{orthogonal}}$ si pptés vérifiées :
(i) $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
(ii) la mat de la forme de base $\mathcal{E}$ est diagonale.

(Cor 1) (Toute) forme quad. (ou bil. sym) sur ev dim finie admet bases orthogonales.

Formes quadratiqs positives

(D3) hypo, une forme quadra Q (resp f. bil. sym. φ) est positive si $\forall x \in E$, $Q(x) \geq 0$. (resp $\varphi(x,x) \geq 0$).

(Prop 1) soit $Q \in \mathcal{Q}(E)$:
(i) Q est positive $\iff$ pr tte base Q-orthogonal $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a $Q(e_i) \geq 0$ pr tt $i = 1, \dots, n$.
(ii) Q est def positive $\iff$ positive ds base $(e_1, \dots, e_n)$, $\exists$ une base $(e_1, \dots, e_n)$ Q-orthogonal de E pr $Q(e_i) > 0$.
(iii) soit F un ss ens de E alors $Q_{/F} : F \to K$ est une forme quad. sur F, $Q_{/F} \in \mathcal{Q}(F)$, et on a :
$Q \geq 0 \Rightarrow Q_{/F} \geq 0$ et $Q > 0 \Rightarrow Q_{/F} > 0$.

(D4) Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-ev E de dim finie muni d'une forme quad. def positive Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

(D5) Ds un espace euclidien, une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale & de + $Q(e_1) = \dots = Q(e_n) = 1$.

(Cor 2) Un espace euclidien admet des bases orthonormées.

Classificat° des formes quadratiqs $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Notat° : E : K ev, $n < \infty$. Q fme quad sr E, $\varphi = b_Q \in \mathcal{S}(E)$.

(D6) Le noyau de Q (ou de φ) est : $\ker Q = \ker \varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$

(L1) $\ker Q$ est sev de E de $\dim (n - r)$, où $r = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_\mathcal{E}(Q)$ pr n'importe qu'elle base $\mathcal{E}$ de E. (rg mat ~~pe~~ forme quad. ne dpd pas base).

(D7) Le rg de Q (ou de φ), $\operatorname{rg} Q$ ($\operatorname{rg} \varphi$) est le rg de $\operatorname{Mat}_\mathcal{E}(Q)$ ds n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E. $\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} \varphi = n - \dim \ker \varphi$.

$\to$ Q est une forme non-dégénérée si $\operatorname{rg}(Q) = n$, ou si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

(D8) Deux formes quad. $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $Q' \in \mathcal{Q}'(E')$ st équivalentes si :
(i) $\exists$ isomorphisme $h : E' = E$, $Q' = Q \circ h$.
(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $\operatorname{Mat}_\mathcal{E}(Q) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q')$).
(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $\exists T \in GL_n(K)$ tq $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT . \operatorname{Mat}_\mathcal{E}(Q) . T$.

Classificat° sur $\mathbb{C}$

(Th2) Toute forme quadratiq Q sur un $\mathbb{C}$ e-v E de dim $= n$ s'écrit ds une base convenable, p la mat $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$ où $r = \operatorname{rg} Q$.
Deux formes quad. complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$ ev E, E' équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et $\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$.

(Cor3) Sur un $\mathbb{C}$ ev de E, dim n, $\exists\, n+1$ classes d'équivalences de form. quad. distinguées p le rg.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

(TH3) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ alors $\exists$ uniq $p \in \mathbb{N}$ tq Q s'écrit ds base convenable p mat diagonale :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $q = r - p$, $r = rg\, Q$.

(D9) Le couple $(p,q) = (p_Q, q_Q)$ est $\leftarrow A \rightarrow$ à 1 forme quad. Q sr $\mathbb{R}$- ev de dim finie Q sn $\mathbb{R}$-ev : Signature de Q.

(Cor) Deux formes quad. Q, Q' sur des $\mathbb{R}$-ev de dim n sont équivalts ssi $\hat{m}$ signature.

(D) (p,q) : signature de Q. (invariant classifiant les φ sr ev réel dim n.

Orthogonalité

soit E : $\mathbb{K}$ev, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, $Q = q_\varphi$, $q_\varphi \in \mathcal{Q}(E)$

(D) $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E,\ \varphi(x,y) = 0,\ \forall y \in A\}$

(P) (i) $A^\perp$ sev, $\ker \varphi \subset A^\perp \Rightarrow \emptyset^\perp = \{\emptyset\}^\perp = E$
$\qquad \Rightarrow E^\perp = \ker \varphi$, $A \subset (A^\perp)^\perp$

(ii) si $A \subset B \subset E \Rightarrow \ker\varphi \subset B^\perp \subset A^\perp$.

(iii) si $A \subset E$, $A \neq \emptyset \Rightarrow A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ si $A = \{v_1, \dots, v_k\}$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$

$$\Rightarrow F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^{k} v_i^\perp$$

(TH) (sur orthogonal) F sev de E,

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F \cap \ker\varphi)$

(ii) $n \leq \dim F + \dim F^\perp \leq n + \dim \ker \varphi$

(iii) $(F^\perp)^\perp = F + \ker\varphi$, $(F^\perp)^\perp = F \iff \ker\varphi \subset F$

De + si φ non-dégénéré ie $\ker\varphi = \{0\} \Rightarrow$

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F$ (iii) $(F^\perp)^\perp = F$

(iv) φ_F : restric° de φ à $F \times F$; $\varphi_F : F \times F \longrightarrow K$, $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_F$ aussi (fb) symétriq.

$\varphi_F \in \mathcal{S}_F$: • $\ker \varphi_F = F \cap F^\perp = \ker \varphi_F^{\perp}$

• $E = F \oplus F^\perp \iff F \cap F^\perp = \{0\} \iff \varphi_F$ nd $\iff \varphi_F^\perp$ est nd.

Projections orthogonales

(D) $E = K \oplus L$, $\forall v \in E$, $\exists!\,(x,y) \in K \times L \mid v = x + y$ & proj linéaire p_K^L (ou p_K^{L}) de S par S sur K parallèlement à L : $\boxed{p_K^L(v) = x}$

(P) $p = p_K^L : E \to E$ satisfait :

(i) $p \in \mathcal{L}(E)$, $\ker p = L$, $\mathrm{Im}\, p = K$, $p|_K = id_K$ (restric° de p à K)

(ii) $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$)

(iii) $q = id_E - p \Rightarrow p + q = id_E$, $p^2 = p$, $q^2 = q$, $pq = qp = 0$.

Réciprqt : p endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$
$\Rightarrow p$ est project° linéaire p_K^L où $K = \mathrm{Im}\, p$ & $L = \ker p$.

(D) Une project° linéaire p_K^L est orthogonale $\iff K \perp L$. De façon équivlte, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est proj. orthogonale $\iff p^2 = p$ et $E = \ker p \oplus^\perp \mathrm{Im}\, p$ (somme directe orthogonale)

(D) F sev de E, F non-dégénéré si $Q_F = Q|_F$ (ou $\varphi_F = \varphi|_{F\times F}$) est forme non-dégénéré.

F non-dégénéré $\iff F \cap F^\perp = \{0\} \iff E = F \oplus F^\perp$.

(P) F sev de E, (i) si F (nd) $\Rightarrow \exists !$ projecⓉ orthogonale p d'image p $\overset{not}{:=}$ p_F ($p_F^\perp$).
(ii) si en + Q est forme (nd) $\Rightarrow$ récipoq vraie.

Calcul projecⓉ orthogonale

(P) F (sev) (nd) $(a_1, \dots, a_k)$ base orthogonale de F.
Alors $Q(u_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots k$ et $\forall x \in E$,
$$p_F^x(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i .$$

Groupe Orthogonal

NotatⓉ : $\mathbb{K}$, E $\mathbb{K}$ ev, $\dim E = n$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ FQ non-deg, $\varphi = b_Q$: forme polaire de Q.

(D1) Un endom. $f \in \mathcal{L}(E)$ est déf. orthogonal (ou Q-orthog.l) (ou φ-orthg.l) s'il préserve Q (ou φ) :
$\forall x \in E$, $Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall x, y \in E$, $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. On note $O(E)$.
(ou $O(E, Q)$, $O(E, \varphi)$, $O(Q)$, $O(\varphi)$), l'ens des end. orthogonx de (E, Q).

(P1) (i) $f \in O(E) \Rightarrow f$ inversible.
(ii) $O(E)$ est un groupe.

(D2) st F ss-espce (nd) de E $\Rightarrow E = F \oplus F^\perp$ et les 2 projecⓉs orthogonales p_F, $p_F^\perp$ st déf, tq $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. On déf. la symétrie orthogonale s_F p : $\forall v \in E$, $\exists ! (x, y) \in F \times F^\perp$, $v = x + y$ et on pose $s_F(v) = x - y$.

De m̂ $s_F = p_F - p_{F^\perp} = id_E - 2p_{F^\perp} = 2p_F - id_E$.
Lorsq F est un hyperplan, s_F : réflexion orthogonale.
$\rightarrow$ toute symétrie orthogonale est un endom. orthogonal.
$\rightarrow$ qd $F \subsetneqq E$, p_F proj orthogon. n'est pas endom. orthog.

CaractérisaⓉ de $f \in O(E)$ p matrices

$\mathcal{E}$ base, $f \in \mathcal{L}(E)$, $G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ alors $f \in O(E) \Leftrightarrow {}^tAGA = G$.
$\Leftrightarrow \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) \quad \forall i,j = 1, \dots, n$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

• cq $G = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix}$, (E, Q) est espace euclidien muni base orthonormé $\mathcal{E}$,
on a $f \in O(E) \Leftrightarrow {}^tAA = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow A^{-1} = {}^tA$
$\Leftrightarrow$ A mat orthogonale.

(TH) Cartan - Dieudonné
Tout élt de $O(Q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonale.

OrthogonalisaⓉ de Gram - Schmidt

(TH) d'orthogⓉ de Gram - Schmidt.
$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $\forall i = 1, \dots, n-1$, $E_i = Vect(v_1, \dots, v_i)$ est non-dégénéré alors les n vect.rs : $u_1 = v_1$,
$$u_2 = v_1 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1, \dots, u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i \qquad k = 1, \dots, n$$
st bien déf & fournt base orthogonale.
$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. ds cte base Q s'écrit :
$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 ,$$
où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = Mat(v_1, \dots, v_k)$ $(Q|_{F_k})$

- Il s'appelle orthogonalisée de G-S.
- $Q\big|_{F_{n-1}}$ non-dégénérée $\Rightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1$
  $\Rightarrow \operatorname{rg} Q = n-1$ ou n ; on ne suppose pas $\Delta_n \neq 0$.

Cor 1 Crit de Sylvester

E $\mathbb{K}$-ev, $n := \dim E$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi = b_Q$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$,
$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pr $1 \leq i,j \leq n$.
$F_k = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$,
$A_k = \operatorname{Mat}_{(v_1, \dots, v_k)}\left(Q\big|_{F_k}\right)$, $\Delta_k = \det A_k$ Alors :

① φ (ou Q) est déf positive $\Longleftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

② Supps. $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$, $\Delta_0 = 1$ Alors :
l'indice négatif q de Q (c'est la 2° composante de la signature (p,q) de Q) est le nbre de chgts de signe ds la suite $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ (on dit (Δ_i) présente un chgt de signe au rang i si $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

③ φ est déf négative $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$, $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0$

$$A = \begin{array}{c} \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \qquad\qquad A_n \\ \begin{pmatrix} a_{1} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

les $\Delta_k = \det A_k$ s'appellent mineurs principx dominant.

C3 Espaces Euclidiens

§1. Norme, distance, angles, volumes

(D) Un $\mathbb{R}$-ev E muni $\boxed{\text{FB sym}}$ φ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ & φ déf positive. (φ: **produit scalaire**)

$$\langle x | y \rangle := \varphi(x,y) \quad \forall\, x,y \in E,$$

p. déf $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$ & $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On note $\sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$. ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$)

(P) $\forall x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$

((ii) ep si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Th Pythagore)

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (idtité ▱)

(iv) $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|$ (Inégalité Cauchy-Schwarz si $\exists a \in \mathbb{R}$, $x = ay$ & $y = ax$)

(v) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski $\exists a \geqslant 0$, $x = ay$ & $y = ax$)

(D) Norme $N : V \to \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

(D) soit X ens $\neq \emptyset$. On appelle **distance (ou métriq)** sr X tte f $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tq : (i) $\forall x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Un **espace métriq** est un ens muni d'une métriq.

D'après (Pi), f $E \times E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une **distance**.

(D) soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, un espace euclidien, la $f : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto \|x\|$ s'appelle **norme euclidienne** sur E, la f $d : E\times E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ s'appelle **distce euclidienne** sr E.

Angles

$\forall x,y \in E \setminus \{0\}$, p. Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|.\|y\|} \right| \leqslant 1.$$

(D) • **L'angle** $(\widehat{x,y})$ entre 2 vect^{rs} $\neq 0$ de E, uniq réel $\theta \in [0,\pi]$,

$$\cos\theta = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|.\|y\|}$$

on pt écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \dfrac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$, $\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• **L'angle** $(\widehat{F_1,F_2})$ entre 2 sev $\neq 0$ de E,

$$(\widehat{F_1,F_2}) = \inf\{(\widehat{v_1,v_2}) \mid v_1 \in F_1\setminus\{0\},\ v_2 \in F_2\setminus\{0\}\}$$

• **L'angle** $(\widehat{v,F})$ entre un vect^{r} & sev $\neq 0$ de F :

$$(\widehat{v,F}) = \inf\{(\widehat{v,w}) \mid w \in F\setminus\{0\}\}.$$

@ angle 2 droites F_1, F_2 vct^{r} dirct^{r} v_1, v_2 ie $F_1 = \mathbb{R}v_1$, $F_2 = \mathbb{R}v_2$.

$(\widehat{F_1,F_2}) = \min\{(\widehat{v_1,v_2}), (\widehat{v_1,-v_2})\} = \min\{\theta, \pi-\theta\}$

Volumes (calcul intégral)

(D) (i) Pr famille $\mathcal{V} = (v_1,\dots,v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est : $\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k\}$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est :

1) si $\mathcal{V}$ est **liée**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = 0$

2) si $\mathcal{V}$ est **libre**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = |\det P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{V}}|$

où $\mathcal{E}_F$ base orthonorm. qq de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ & $P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}$ désigne mat de passage.

1) Mq (i), on a $\ell \in E^*$: $\dim \ell + \dim \ker \ell = \dim E$

D+, $\{0\} \subset \mathrm{Im}(\ell) \subset K^1$, d'où $\mathrm{Im}(\ell) \subset \{0,1\}$

Dc pr $\ell \in E^*$, on a $\ell \neq 0 \iff \mathrm{Im}(\ell) = K^1 \iff \dim$

$\iff \dim \mathrm{Im}(\ell) = 1 \iff \dim \ker \ell = n-1$

$\iff \ker \ell$ est un hyperplan.

Mq (ii) soit H un hyperplan, on choisit 1 base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de H & complétons-la à $(e_1,\dots,e_n)$ de E.

On définit $\varphi : E \to K^1$ par mat $(0\dots 0 1)$.

$\varphi : x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \mathrm{Mat}(\varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_n$.

On a bien $\ker \varphi = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1}) = H$ △ mqé.

soit $\psi \in E^*$ une 2ème forme linéaire sr E, $\ker \psi = H$,

soit A mat, $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(\psi)$, $A = (a_1,\dots,a_n)$ alors

$\forall i = 1,\dots,n-1$; $\psi(e_i) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_i = 0$

(car $e_i \in H$ & $H = \ker \psi$) dc $A = (0,\dots,0,a_n)$

$A = a_n \underbrace{(0,\dots,0,1)}_{\mathrm{mat}_{(e_i)}(\varphi)}$ ie $\psi = a_n \varphi$ ∎

2) soit $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_n)$ base qq de E, pose $\varepsilon_i(f_j) = a_{ij}$. $i,j = 1,\dots,n$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, on a alors:

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varepsilon_i) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$.

$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\sum \lambda_i \varepsilon_i) = \sum \lambda_i (a_{i1} \dots a_{in})$.

Pr $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = 0$ dc $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ st linéairt indpts $\iff$ lignes $(a_{i1} \dots a_{in})$ st lin. ind, $rg(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Donc $\forall i = 1,\dots,n$ le systm linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 à ième place admt uniq solθ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Or ce systm exprime : $\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = \delta_{ij}$

car $\varepsilon_j(\sum x_k f_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\varepsilon_j(f_k)}_{a_{jk}} = \sum a_{jk} x_k$

Nots ett solθ e_i. On a dmq $\forall i = 1,\dots,n$

$\exists$ uniq $e_i \in E$ tq $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$, voyons pq $e_1,\dots,e_n$ forment une base de E. En effet, en notant solθ uniq $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de (*) p $\begin{pmatrix} e_{1i} \\ \vdots \\ e_{ni} \end{pmatrix}$, on obtt $B = (b_{ji})$,

$e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j$ $(i = 1,\dots,n)$ alors ppté $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ se réécrit ĉ $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \delta_{ij}$ où $AB = Id_n$.

Donc B est invers. & $(e_1,\dots,e_n)$ est une base liée à $(f_1,\dots,f_n)$ p mat de passge B.

3) (i) pr $\forall v \in E$, $f : E^* \to K$, $\ell \mapsto \ell(v)$ est linéaire,

dc est un élt de E^{**}. On def $\Phi(v)$ égal à cte f,

on a 1 applicaθ $\Phi : E \to E^{**}$ bien def en v, dc

$v \mapsto E(v)$ est linéaire. ie $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.

(ii) soit $\dim E < \infty$, si $v \in E \setminus \{0\}$, on pt complt v à une base $(v = e_1,\dots,e_n)$ de E. On pt construire une fl $\ell \in E^*$ q ne s'annule pas p v ; p @ on pt choisir $\ell = e_1^*$, le 1° élt de base duale de $(e_1,\dots,e_n)$

alors $\ell(v) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$. Mais alors $\Phi(v) \neq 0$

car $\Phi(v)$ est fl sr E^* q prd 1 valr $\neq 0$ ds $\ell(v)$ sur ℓ. Dc $\ker \Phi = \{0\}$ & Φ injective.

(iii) on a $\dim E < \infty \Rightarrow \dim E^* < \infty$ & $\dim E = \dim E^*$.

Dc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$. Psq E est injective & dimθ coincidt, Φ est isom. bijectif.

4) Par Th diagonalisaθ FQ, $\exists$ base orthogonale

$q = (e_1,\dots,e_n)$ tq $Q(e_i) = \lambda_i$ & on pt ordonner vectrs de la base ĉ : $\lambda_i > 0$ pr $i = 1 - p$; $\lambda_i < 0$ pr $i = p+1,\dots,p+q$;

$\lambda_i = 0$ pr $i = p+q+1,\dots,n$ alors mat de Q acquiert la forme

$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ds base $\varepsilon' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n\right)$.

Le nbe $p+q$ et déterminé p Q car $p+q$ est le rang de la mat (*) & dc égal à $r = rg\, Q$.

$\boxed{\text{mq}}$ 3!, soit $\varepsilon = (e_1,\dots,e_n)$; $\varepsilon' = (e'_1,\dots,e'_n)$ 2 bases orthogonales tq $Q(e_1) = \dots = Q(e_p) = Q(e'_1) = \dots = Q(e'_{p'}) = 1$

$Q(e_{p+1}) = \dots = Q(e_r) = Q(e'_{p'+1}) = \dots = Q(e'_r) = -1$.

soit $V = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$; $W = \mathrm{Vect}(e'_{p+1},\dots,e'_r)$ alors

$Q(e_i) > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$. (Q est def positive sr V

puis sr W on a : $Q(x) \leq 0$ $\forall x \in W$. Dc $V \cap W = \{0\}$

dc $\dim V + \dim W \leq n$, soit $p + (n - p') \leq n$ soit $p \leq p'$.

Par la symétrie des rôles de p & p', on a $p' \leq p$ dc $p = p'$.

5) soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base de F, complétons la à 1 base,

$\varepsilon = (e_1,\dots,e_k,\dots,e_n)$ une base de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i,e_j)$. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(K)$. Pr 1 vectr

$x = \sum x_i e_i$, on a $x \in F^\perp \iff \varphi(e_i, x) = 0$ pr $i = 1,\dots,k$

$\iff \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n = 0 \end{cases}$ (S)

Puisq $\ker \varphi = \{0\}$, rg des lignes est max égal à k

dc les lignes st lin. ind.

Dc $rg(S) = k$. Dc son espace solθ dim $n-k$.

dc $\dim F^\perp = n - k \Rightarrow \dim F^\perp + \dim F = n$.

Ⓛ (cohérence déf $v \circ l_E$)

$|\det P_{\mathcal{E}_F \to v}|$ ne dépd pas choix de $\mathcal{E}_F$.

Cor (de dmo Ⓛ)

La mat de passage A entre 2 bases orthon. est une mat orthogonale : A est inversible & $A^{-1} = {}^tA$. Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prdre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

- soit E ee dim n, on note $\mathcal{O}(E)$ l'ens des endomorphismes orthognx de E.

$$\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) = \{ u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle \}.$$

C'est un groupe. L'ens des mat orthogonales de taille n est déf p : $\mathcal{O}(n) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n \} \subset GL(n, \mathbb{R})$.

∘ E ee dim $n \geq 1$, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ base o.n. $\Rightarrow$ $O(E) \longrightarrow O(n)$, $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ est isom. de groupes. Dc pr chq $n \geq 1$, on a 1 seul groupe orth. euclidien à isom. près.

∘ $\mathcal{O}(n)$ identifié à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

- Groupes spéciaux orthognx : $SO(E) = \{ u \in O(E) \mid \det u = 1 \}$
$SO(A) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$.

∘ pr $A \in \mathcal{O}(n)$, $\det = \pm 1$. Dc $\left\| \begin{array}{l} O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E) \\ O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n) \end{array} \right.$

où $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{ u \in O(E) \mid \det u = -1 \}$
$O^-(n) = \{ u \in O(u) \mid \det u = -1 \}$

Rq : $\rightarrow SO(E) \subset O(E)$ est un ss-grpe (mais pas $O^-(E)$.
$\rightarrow \forall \tau \in O^-(E)$, $O^-(E) = \tau\, SO(E) = SO(E) . \tau$.

∘ Le groupe quotient $O(E) / SO(E)$ est isom. à groupe d'ordre 2 :

$\mu_2 = \{ \pm 1 \}$; $O(E) / SO(E) \simeq \{ \pm 1 \}$ }. cela suit du Th d'isomorph. pr grpe quotient : on considr. morphisme du det, $\det : O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $u \longmapsto \det u$, son image est $\mu_2 = \{ \pm 1 \}$.

Donc $O(E) / \ker(\det) \simeq \mu_2$ or $\ker(\det) = SO(E)$

▸ cas $n = 1$: $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) \simeq O(1) = \{ \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda^2 = 1 \} = \{ \pm 1 \} = \mu_2$

$SO(1) = \{1\}$ grpe trivial 4 élt neutre. mat taille 1, $A(\lambda)$ tq ${}^tAA = \mathbb{1}_n$

▸ cas $n = 2$: E plan eucl, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base O.N. de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ 1) $u \in SO(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) $u \in O^-(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

∘ Notaθ : $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de rotaθ d'angle θ du plan eucl. $\mathbb{R}^2$.

Ⓟ soit E un plan eucl., un élt $u \in SO(u)$ donné p m̂ matrice R^θ ds 2 bases O.N. liées p mat de passage O.N. tq $\det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = -1$ et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = R^\theta$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = R^{\theta'} \Rightarrow \theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $R^{\theta'} = (R^\theta)^{-1} = R^{-\theta}$.

Orientaθ :

soit V ev dim finie, on pt ÷ l'ens $\mathbb{B}(V)$ de ttes les bases de V en 2 parties disjointes, classe d'équivlce pr relaθ d'équivlce suivte :

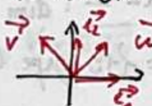
pr $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathbb{B}(V)$, $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \iff \det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} > 0$

Ⓓ Muni V d'une orientaθ : c'est choisir laquelle de 2 classes, on appelle **classe des bases directes**, l'autre étant la classe des **bases indirectes**.

↝ on pt donner une orientaθ en précisant une base directe.

(Cor) soit E plan eucl. orienté. On a alors un isomorph. canoniq $\pi : SO(E) \longrightarrow SO(2)$ q ↔ à chq élt $u \in SO(E)$ sa matrice R^θ ds n'importe q^lle base o.n. directe, l'angle de rotat° θ $[2\pi]$ ne dpd pas ch.x base o.n directe.

Rq: L'orientat° standard du plan eucl. standard $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ pt ê décrit ∂ : une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ est directe si v s'obtient p la rotat° de u d'angle 90° ds sens anti. ∮



Sens géométriqs des élts de $O^-(E)$: dim 2

(L1) Tt élt u de $O^-(E)$ a $\{1,-1\}$ pr spectre, dc s'écrit p $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

(L2) Les vect^Rs propres unitaires (= de norme 1) de la mat $A = R^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ de (L1) st : $v_1 = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ de vp 1.
$v_2 = \pm\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ de vp -1.

(P3) soit E un plan eucl., les élts de $O^-(E)$ st les **réflexions orthog.** $\forall u \in O^-(E)$, il y a exactem^t 4 bases o.n. de E ds lq^ls u s'écrit p la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si E est orienté, deux de ces bases st **directes**, 2 autres **indirectes**.

Espaces euclidiens de (dim = 3)

Produit Vectoriel

soit E un esp. ee de dim 3 muni d'une **orientat°**.

Not°: $\mathbb{B}(E) \supset \mathbb{B}_{on}(E) = \mathbb{B}^+_{on}(E) \sqcup \mathbb{B}^-_{on}(E)$

∀ bases " bases o.n. b.o.n. directes b.o.n. indirectes.

$\mathbb{B}^+(E) \sqcup \mathbb{B}^-(E)$

(D) soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de 3 vect^Rs de E. Le réel $\det_\varepsilon(\mathcal{U})$, ds une base $\varepsilon \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$, ne dpd pas ε & est appelé **produit mixte de $\mathcal{U}$**. $[\mathcal{U}] = [u, v, w]$.

(P) (pptés prdt mixte)
Le produit mixte $\mathcal{P} : E^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v,w) \mapsto [u,v,w]$ est trilinéaire & antisymétriq. Pr $\mathcal{U} \in E^3$, on a

(i) $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 0 \iff \mathcal{U}$ est lié.

(ii) $\mathcal{P}(\sigma(\mathcal{U})) = \varepsilon(\sigma).\ \mathcal{P}(\mathcal{U})$ ∀ permutat° $\sigma \in S_3$, où $\varepsilon(\sigma)$ signature permuta°.

eg $\mathcal{P}(u,v,w) = -\mathcal{P}(v,u,w) = -\mathcal{P}(w,v,u)$.

(iii) $\mathcal{U} \in \mathbb{B}^+_{on}(E) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \pm 1$.

(L1) soit V un ee $\Rightarrow \Psi : V \to V^*$, $x \mapsto \langle x | \cdot \rangle$ est isom canoniq de V sur V^*.

(D1) soit E ee orité dim 3. Le produit vectoriel de 2 vecteurs $u, v \in E$ est l'uniq vect^R de E, noté $u \wedge v$ tq
$\forall w \in E,\ [u,v,w] = \langle u \wedge v | w \rangle$.

En usant l'isom. canoniq $\Psi : E \xrightarrow{\sim} E^*$ de (L1), on a :

$$u \wedge v = \Psi^{-1}([u, v, \cdot])$$

où $[u,v,\cdot] \in E^*$ est la fl $E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto [u,v,w]$

(P1) (pptés prdt vectoriel)

soit E ee orienté dim 3.

1. L'appli $E\times E \to E$, $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire & antisymétiq ($\forall u,v\in E$, $u\wedge v=-v\wedge u$)
2. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v=0 \Leftrightarrow u,v$ st colinéaires.
3. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v\perp u$, $u\wedge v\perp v$.
4. si u,v ne st pas colinR $\Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in \mathbb{B}^+(E)$

   si d+ $\|u\|=\|v\|=1$, $u\perp v \Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in \mathbb{B}^+_{om}(E)$.
5. si $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)\in \mathbb{B}^+_{om}(E)$ alors $\forall i,j\in\{1,2,3\}$:

$$e_i\wedge e_j=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ \mathcal{E}_{ijk} & \text{où } \{i,j,k\}=\{1,2,3\},\end{cases}$$

$\mathcal{E}_{ijk}=\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ est la signature d'une permutaθ.

6. si $\mathcal{E}=\mathbb{B}^+_{om}(E)$, $[u]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.

puis $$[u\wedge v]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_3&v_3\\u_1&v_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

Endomorphismes orthognx ds ee E de dim 3

(L2) Un endomorphisme orthogonal d'un ee E de dim 3 a tjrs vp rlle ± 1 = son déterminant.

(vp complexes vl abs 1).

(P2) soit E ee ort. dim 3, $u\in O(E)$, $\lambda=\det(u)=\{\pm 1\}$.

Alors $\exists$ base $\mathcal{E}\in\mathbb{B}^+_{om}(E)$ & $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)=\left(\begin{array}{c|cc}\lambda&0&0\\ \hline 0& \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R^θ}}\\ 0&&\end{array}\right),\quad R^\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

(D2) (i) Un axe de E est une droite vectorielle orientée ds E.

Tt axe est dirigé par un uniq vecteur unitaire.

(ii) L'élt $u\in SO(E)$ de matrice $\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&\multicolumn{2}{c}{R^\theta}\\ 0&&\end{array}\right)$ ds une base o.n directe $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ de E s'appelle rotaθ d'angle θ autour de l'axe dirigé par e_1.

Notθ: $u=R^\theta_v$, $\forall v$ dirigeant l'axe ($v=\alpha.e$, $\alpha>0$).

(Cor1) soit $u\in SO(E)$, $u\neq id_E$ alors u possède 2 axes de rotaθ, ayant pr support la m̂ droite vectorielle $\mathbb{R}v$, E, où $v\neq 0$, l'un est dirigé par v, l'autre par $-v$.

L'axe & l'angle $[2\pi]$ st les élts caract. d'une rotaθ de E.

Déterminaθ pratiq des élts caractqs d'une rotaθ ds un ⓔⓔ orienté E :

soit $u \in SO(E)$, $u \neq id_E$

① On trouve vct^r prop. v de u de ⓥⓟ $\underline{1 = \det u}$, solθ de $u(v) = v$.

② Déterminer $\cos\theta$ p $tr(u) = 1 + 2\cos\theta$.

③ Dét. le signe de $\sin\theta$ q coïncide ā signe $[x, u(x), v]$ $\forall x \in E \setminus \mathbb{R}v$, ĝ R^θ : $[x, u(x), v] = \|v\|(\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta$, où $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base o.n. directe de E tq $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$, & ce choix $u = R_v^\theta$.

Endomorphismes orthogonx ds ⓔⓔ de dim qq

(TH1) soit E un ⓔⓔ de dim $n \geq 1$ alors $\exists$ une base o.n de E ds lqlle u s'écrit p la mat

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \varnothing & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & \varnothing & & & & & R^{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R^{\theta_r} \end{pmatrix} \quad \theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R}, \quad R^{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}.$$

(Cor3) Ttes les ⓥⓟ de $u \in O(E)$ ds $\mathbb{C}$ st de vp^r absl. $\underline{1}$.

(L1) soit E ⓔⓔ de dim $n \geq 1$, $u \in O(E)$, $F \subset E$ un ss ev $\boxed{\text{stable}}$ par $u(F) \subset F \Rightarrow u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$.

(L2) soit V un $\mathbb{R}$-ⓔⓥ de dim $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(V)$ alors u a un ss-ev de dim 1 ou 2.

(L3) soit E un ⓔⓔ, $u \in O(E)$ alors E est une somme directe orthogonale de sev stables par u de dim 1 ou 2.

Endomorphismes adjoints & symétrigs

(P/D) soit E ⓔⓔ & $u \in \mathcal{L}(E)$ alors :

1) Il existe un uniq $v \in \mathcal{L}(E)$ tq

(*) $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\boxed{\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle}$

L'endom v ainsi défini s'appelle $\underline{\text{adjoint}}$ de u & est noté u^*.

2) si $\mathcal{E}$ est une base ormée de $E \Rightarrow Mat_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^tMat_{\mathcal{E}}(u)$

(P1) soit E ⓔⓔ & $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors on a :

1) $(f^*)^* = f$ 2) $(f+g)^* = f^* + g^*$ 3) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$

4) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(D1) soit E ⓔⓔ $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est symétriq, ou auto-adjoint, si $u = u^*$. De façon équivalt, u est symétriq $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\langle u(x) | y\rangle = \langle x | u(y)\rangle$

(Cor) (prop1) soit E un ⓔⓔ, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est symétriq $\underline{\text{ssi}}$ une des 2 pptés équivalts est vrai :

1) $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ est sym $\forall$ base o.n $\mathcal{E}$ de E.

2) $\exists$ une base $\underline{\text{o.n}}$ $\mathcal{E}$ de E tq $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ soit $\underline{\text{sym}}$.

(R*) Une mat A est dite symétriq si ${}^tA = A$.

$@_1$ Une projecθ orthogonale est symétriq.

$@_2$ Tte symétrie orthogonale est symétriq.

Cor 2 soit E (ee), $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in O(E)$

$\iff u$ est inversible & $u^* = u^{-1}$

$\iff u^* u = u^* u = id_E$.

Not° : $S_E = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u = u^*\}$, $S_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = A\}$.

→ on a si $\mathcal{E}$ est une base o.n de E alors $u \in S_E$

$\iff Mat_{\mathcal{E}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$.

Prop 2 soit E (ee) & $u \in S_E$. Si F est (sev) de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Rq si $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$ sev stable par u, on note u_F la restric° de u à F vue c un automorphisme de F,

$u_F \in \mathcal{L}(F)$, $\forall x \in F$, $u_F(x) = u(x)$, $u \in S(E) \Rightarrow u_F \in S(F)$.

$u \in S(E) \iff \forall x, y \in E$, $\langle x | uy \rangle = \langle ux | y \rangle$.

$\forall x, y \in F$, $\langle x | u_F y \rangle = \langle u_F x | y \rangle$.

P2 E (ee), $u \in S(E)$. λ_1, λ_2 2 (vp) réelles distinctes de u.

soit $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ les sep de u alors $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.

Th Diagonalisa° ds endom. sym en base orné

soit E un (ee) & $u \in S_E$ alors:

1) Tes (vp) complexes de u st réelles : $Spec(u) \subset \mathbb{R}$.

2) $\exists$ base ornée $\mathcal{E}$ de E, mat $M_{\mathcal{E}}(u)$ soit diagonale.

Cor si $u \in S_E$, $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ & λ_i distinctes

alors $E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_n}$.

Cor 2 soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in O(n)$ tq la mat

$D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Endomorphismes sym & formes bil. sym

Nota° : E un (ee) dim n. On a une correspondance bijective naturelle :

$$S_E = \left\{ \begin{matrix} \text{endom. sym} \\ \text{de } E \end{matrix} \right\} \underset{\Theta^{-1}}{\overset{\Theta}{\rightleftarrows}} S(E) = \left\{ \begin{matrix} \text{formes bil} \\ \text{sym de } E \end{matrix} \right\}.$$

Construc° de Θ :

(i) $u \in S_E \mapsto \Theta(u) = \varphi \in S(E)$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \langle x, u(y) \rangle$

(ii) $\varphi(y,x) = \langle y, u(x) \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \varphi(x,y)$

(i) $\Rightarrow$ bilinéarité de φ (ii) $\Rightarrow$ sym.

(iii) Θ est bijective.

P3 Tte forme bilinéaire sym $\varphi \in S(E)$ se diagonalise ds base o.n de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

D2 Un endom. sym $u \in S_E$ est dit $\oplus$. (nota° : $u \in S_E^+$) si la FB $S \leftrightarrow \Theta(u)$ est $\oplus$: $\Theta(u) \geq 0$.

De façon équiv : $u \in S_E^+ \iff u \in S_E$, $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$.

De façon simil^{R}, on déf. S_E^{++} les endom sym déf. $\oplus$:

$u \in S_E^{++} \iff \Theta(u) > 0 \iff \dots$ $\langle x, u(x) \rangle > 0$.

P4 soit $u \in S_E$ alors on a :

1) $u \in S_E^+ \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^+$

2) $u \in S_E^{++} \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^{>0}$

(Cor 3) soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ base o.née, $A = Mat_{\mathcal{E}}(u) \Rightarrow$

- $u \in \mathcal{S}_E \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^+ \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^{++} \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

(Th) soit $u \in \mathcal{S}_E^+ \Rightarrow \exists!\, v \in \mathcal{S}_E^+$ tq $v^2 = u$.

Notat° : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ spec(A) \subset \mathbb{R}^+\}$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ spec(A) \subset \mathbb{R}^{>0}\}$.

(L1) soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $fg = gf$ alors :

1) Tout sep de f est stable par g.
2) si les polyn. caractqs de f, g st ttlmt scindés sur $\mathbb{R}$ alors ils ont un (vp) commun.

(L2) soit $f, g \in \mathcal{S}(E)$, $fg = gf$ alors f, g admettent une diagonalisat° simultanée ds base O.n :
$\exists\ \varepsilon \in \mathcal{B}o.n(E)$, $Mat_\varepsilon(f)$, $Mat_\varepsilon(g)$ soient diagonales.

(TH2) (Décomposit° polaire)

soit E (ee), $u \in GL(E)$ alors $\exists$ uniq paire $(w, p) \in O(E) \times \mathcal{S}_E^{++}$ tq $u = wp$.

(Cor) (vers° matricielle)

1) $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ $\exists!\, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $A = B^2$.
2) $\forall M \in GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\})$ $\exists$ uniq paire $(\Omega, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = \Omega S$.

(resp $GL^+(n, \mathbb{R})$.... resp $(\Omega, S \in SO(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.

Applicat° de la décomposit° polaire.

(P) $GL^+(n, \mathbb{R})$ est $\boxed{\text{connexe par arcs}}$ ie $\forall A, B \in GL^+(n, \mathbb{R})$, $\exists\ \varphi : [a, b] \to GL^+(n, \mathbb{R})$ cont tq $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$.

(P) $O(n)$ est un ss-groupe $\boxed{\text{compact}}$ maximal de $GL(n, \mathbb{R})$.

Compact : on a une norme ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ et p. cette norme $O(n)$ est un fermé-borné de $\mathbb{R}^{n^2}$, ie un compact.

Puis la maximalité signifie : si K est un ss-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ contenant $O(n)$ & si K est compact $\Rightarrow K = O(n)$

Autres décomposit°s

(TH3) (Décomposit° d'Iwasawa)

soit $K = SO(n)$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \\ \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = 1 \end{cases} \right\}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}),\ \det M = 1\}$

alors $\forall$ matrice $M \in SL(n, \mathbb{R})$; $\exists!$ triplet $(k, t, n) \in K \times T \times N$ tq $M = ktn$.

ⓐ de calcul de décomposi° polaire

Trouver la décomposi° polaire de $M \in \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) $^tMM = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) calcul de la racine carrée :

→ Trouver $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ définie positive ($a>0$, $ac-b^2>0$). tq $S^2 = {}^tM.M$

$$S^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ab+bc=-1 \\ b^2+c^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-c^2=-1 \\ (a-c)(a+c)=-1 \\ -\frac{1}{b}(a-c)=-1 \to b=a-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=-\frac{1}{b} \\ a-c=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ c=-\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4b^2}+b^2=1 \\ \frac{5}{4}b^2-\frac{3}{2}+\frac{1}{4b^2}=1. \end{cases}$$

$\leftrightarrow 5b^4-6b^2+1=0$, posons $t=b^2$, d'où $b=\sqrt{t}$.

$5t^2-6t+1=0$. $\Delta = 36-20=16$.

$t_{1,2} = \frac{6\pm4}{10}$, $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{5}$.

- si $t=1$, $b=\pm1 \Rightarrow a=0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ | n'est pas déf ⊕ ne convient pas.

- si $t=\frac{1}{5}$, $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. pas 1 solu°.

▸ si $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ alors $a=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}\right)<0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \not> 0$.

▸ si $b=\frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c=a-b=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

(iii) Déterminat° de la mat orthogonale :

$\Omega = MS^{-1}$, $S^{-1}=\frac{1}{\Delta_S}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Omega=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 12-7 & 4-14 \\ 9-1 & 3+2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposi° polaire M est : ΩS.

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\ \Omega\in O(2);\ S\in \mathcal{S}_2^{++}.$$

Résumé : Calcul de décomposi° polaire

(i) ^tMM

(ii) Calcul $\sqrt{\cdot}$: trouver $S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ déf-⊕ tq $S^2={}^tM.M$.

(iii) Déterminat° mat orthogonale : $\Omega = MS^{-1}$.

^tMM

$S^2={}^tMM$

$\Omega = MS^{-1}$.

Réduc° de conique à une forme normale

soit E plan euclidien, une coniq de E est l'ens des zéros de $f: E \to \mathbb{R}$ de la forme $f = q + l + c$

où $q \in Q(E) \setminus \{0\}$, $l \in E^*$ (fl), $c \in \mathbb{R}$.

En coordonnées (x,y) correspondant à une base ornée (e_1, e_2), une coniq est l'ens des zéros d'un polyn. de deg 2 en x, y.

$$f(x,y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + b_1 x + b_2 y + c.$$

$$\mathcal{C} = \{ x e_1 + y e_2 \in E \mid f(x,y) = 0 \}.$$

Classificat° métriq

Ramener l'équa° de C à une forme normale par une isométrie affine.

Forme générale d'une isométrie affine :

(*) $\varphi : E \to E, \; x \mapsto ux + v, \quad u \in O(E), \; v \in E$

En coord, si on identifie E à $\mathbb{R}^2$ (p choix base ornée)

(*) devient $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$.

$P \in O(2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Étapes de Réduc°

1) Diagonaliser la forme quadratiq.

$$q = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

par une transformat° orthogonale $P \in O(2)$:

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ vp de } A.$$

soit (e_1', e_2') la base ornée donnée par mat de Passage

$P = P_{(e_1, e_2) \to (e_1', e_2')}$ & (x', y') les coord associées.

On a : $f = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1' x + b_2' y + c$ (**)

FF transf° fl $\quad (b_1' \; b_2') = (b_1 \; b_2) P$.

où $(b_1 \; b_2) = \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2)} (l)$

2) Éliminat° du maximum de termes de deg 1 en (x', y') par 1 translat°.

$$x'' = x' + \alpha \; ; \quad y'' = y' + \beta \qquad (\alpha, \beta \text{ cte}).$$

- si $\lambda_1 \neq 0$, transformat° (**) :

$$\lambda_1 x'^2 + b_1' x' = \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1'}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{b_1'}{4\lambda_1}$$

- si $\lambda_2 \neq 0$, $y'' = y' + \dfrac{b_2'}{2\lambda_2}$

→ Quitte à multiplier l'équaθ par un facteur cte, on arrive à une des formes normales suivantes :

(i) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, ellipse aux $\frac{1}{2}$ axes $a>0$, $b>0$.

(ii) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$, hyperbole (vp signes opposés)

$a>0$, $b>0$; ▸ si on a $+1$ au second membre, a est appelé $\frac{1}{2}$ axe réel, b : $\frac{1}{2}$ axe imaginaire.

▸ si on a -1 au 2^{nd} mbre, on inverse axe réel, imagnre.

(iii) $2py=x^2$ ou $2px=y^2$, parabole, une parabole de param focal $p>0$ (si besoin chgt $x\mapsto -x$, $y\mapsto -y$)

(iv) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, ens vide : ellipse imaginaire.

(v) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$, paire droites concourantes.

$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$.

(vi) $x^2=a^2$, paire droites parallèles, $x=\pm a$.

(vii) $x^2=0$ ou $y^2=0$, une droite double.

(viii) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ $(a>0, b>0)$ une paire de droites concourantes imaginaires (en tant que ss-ens de $\mathbb{R}^2$, la coniq se réduit à 1 sl point $x=y=0$).

(ix) $x^2=-a^2$ ou $y^2=-b^2$ $(a>0, b>0)$ paire de droites parallèles imaginaires.

@ Réduire à une forme normale par une isométrie affine, en conique de $\mathbb{R}^2$ d'équaθ

$$f(x,y)=5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$$

I/ $q=5x^2+4xy+8y^2$, $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}$, $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda&2\\2&8-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-9)$

FF Biès : Sp $\begin{cases}\to \text{pdt racines : } 36\\ \to \Sigma \text{ racines : } 13\end{cases}$ $E_{\lambda_4}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $E_{\lambda_9}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

$v_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $v_2=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

II/ $P=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$; $x=\dfrac{1}{\sqrt5}(2x'+y')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt5}(-x'+2y')$

$f=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+b_1' x'+b_2' y'+c$; $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$

$(b_1'\ b_2')=(b_1\ b_2)P=(-32\ \ -56)\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt5}(-8\ \ -144)$

$\to f=4x'^2+9y'^2-\dfrac{8}{\sqrt5}x'-\dfrac{144}{\sqrt5}y'+80.$

Rq : Autre $\boxed{M}$ très calculatoire :

$f=5\left(\dfrac{1}{\sqrt5}(2x'+y')^2\right)+4\left(\dfrac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\right)-\dfrac{1}{\sqrt5}(-x'+2y')$
$+8\left(\dfrac{1}{\sqrt5}(-x'+2y')\right)^2-32\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}(2x'+y')-56\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}(-x'+2y')$
$+80=\dots$

III / Éliminat termes linéaires en x', y'

$$f = 4x'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + 9y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80.$$

$$f = 4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5} + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5}\right)$$

$$- \frac{9 \times 64}{5} + 80.$$

$$f = 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

$$\to \tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Une ellipse à $\frac{1}{2}$ axes $a = 3$, $b = 2$.

L'origine du nouveau système de coordonnées:

$$\tilde{x} = \tilde{y} = 0.$$

$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$x' = \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y' = \tilde{y} + \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \tilde{y} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\tilde{x} + \tilde{y}) + 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\tilde{y} + \frac{16}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tilde{x} + 2\tilde{y}) + 3.$$

→ le centre de cette ellipse est au point $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$;

soit $(x, y) = (2, 3)$