Licence de Mathématiques L2 S4 – Université de Lille – 2018-2019

UE XM1A4U1 • M42 « Formes bilinéaires, espaces euclidiens »

Corrigé du devoir surveillé du 13 mars 2019

Dans ce qui suit K désigne un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours **(6 points).**

(1) (**2 points**) Donner les définitions d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme quadratique et d'une base orthogonale. Donner un énoncé complet de la proposition du cours affirmant l'existence de bases orthogonales (on pourra se servir de cet énoncé sans démonstration dans la suite).

Réponse. Définition. Soit E en K-espace vectoriel. Une application $\phi : E \times E \to K$ est appelée forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\phi(x, \cdot) : E \to K$, $y \mapsto \phi(x, y)$ est une forme linéaire, et pour tout $y \in E$, l'application $\phi(\cdot, y) : E \to K$, $x \mapsto \phi(x, y)$ est une forme linéaire. Si, de plus, pour tous $(x, y) \in E^2$ on a $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, on dit que la forme bilinéaire ϕ est symétrique.

Définition. Soit E en K-espace vectoriel. Une application $Q : E \to K$ est une forme quadratique si et seulement si :

a) $\forall\ \lambda \in K\ \forall\ v \in E,\ Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$, et

b) l'application $b_Q : E \times E \to K,\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ est une forme bilinéaire sur E.

Définition. Soit E un K-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique ϕ. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite ϕ-orthogonale si pour tous $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, on a $\phi(e_i, e_j) = 0$, ou, de façon équivalente, si la matrice de ϕ dans cette base est diagonale.

Proposition. Tout K-espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique ϕ, admet des bases ϕ-orthogonales.

(2) (**1 point**) Enoncer (sans démonstration) le théorème du cours sur la classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$? (Justifier.)

Réponse. Théorème. Toute forme quadratique Q sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n s'écrit, dans une base convenable, par la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

où $r = \mathrm{rg}(Q)$. Deux formes quadratiques Q, resp. Q' sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels E, resp. E', de dimensions finies, sont équivalentes si et seulement si $\dim E = \dim E'$ et $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(Q')$.

Il suit du théorème que deux formes quadratique sur $\mathbb{C}^n$ appartiennent à la même classe si et seulement si elles ont le même rang, donc le nombre de classes d'équivalence des formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$ est égal au nombre des valeurs possibles distinctes du rang. Le rang peut prendre $n + 1$ valeurs $0, 1, \dots, n$, donc le nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$ est égal à $n + 1$.

(3) (**3 points**) Enoncer et démontrer le théorème du cours sur la classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

RÉPONSE. THÉORÈME. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ et $r = \mathrm{rg}(Q)$. Alors il existe un unique $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$, tel que la matrice de Q se réduit, dans une base convenable, à la forme suivante, diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $q = r - p$.

Démonstration. Par la proposition du point (1) ci-dessus, il existe une base Q-orthogonale $\mathscr{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E. Notons $\lambda_i = Q(u_i)$. Quitte à permuter les u_i, on peut supposer que $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0$, $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Pour réduire la matrice de Q à la forme (1), il sufft de passer à la base

$$\mathscr{E} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} u_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} u_{p+1}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}} u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n \right).$$

Il reste à démontrer l'unicité de p. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases orthogonales telles que

$$Q(e_1) = \ldots = Q(e_p) = 1,\ Q(e'_1) = \ldots = Q(e'_{p'}) = 1,$$

$$Q(e_{p+1}) = \ldots = Q(e_r) = -1,\ Q(e'_{p'+1}) = \ldots = Q(e'_r) = -1,$$

$$Q(e_i) = Q(e'_i) = 0 \text{ pour } i = r+1, \ldots, n.$$

Soient $V = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, $W = \mathrm{Vect}(e'_{p'+1}, \ldots, e'_n)$. Alors $Q(x) > 0$ pour tout $x \in V \setminus \{0\}$ et $Q(x) \leq 0$ pour tout $x \in W$, donc $V \cap W = \{0\}$. Donc $\dim V + \dim W \leq n$, soit $p + n - p' \leq n$, d'où $p \leq p'$. Les rôles de p, p' étant symétriques, on a aussi $p' \leq p$, donc $p = p'$.

EXERCICE 1 **(3 points)**. Soient $V = K^2$ et $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ une base de V, où $v_1 = (7, 5)$, $v_2 = (11, 8)$.

(a) (**2 points**) Déterminer a_i, b_i $(i = 1, 2)$ pour que les formes linéaires

$$\phi_i : V \to K, \quad \phi_i(x, y) = a_i x + b_i y \ (i = 1, 2)$$

forment la base $\mathscr{B}^*$ de V^* duale de $\mathscr{B}$;

(b) (**1 point**) décomposer la forme linéaire $\ell : V \to K$, $(x, y) \mapsto x$ dans la base $\mathscr{B}^*$.

RÉPONSE. (a) $P = P_{\mathscr{E} \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = P_{\mathscr{E}^* \to \mathscr{B}^*} = {}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) $\ell = e_1^*$, le premier élément de la base $\mathscr{E}^* = (e_1^*, e_2^*)$, donc les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}^*$ forment la première colonne de $P_{\mathscr{B}^* \to \mathscr{E}^*} = {}^tP$. Donc $\ell = 7\phi_1 + 11\phi_2$.

Exercice 2 (**5 points**). Soient données les formes quadratiques sur des espaces vectoriels de dimension 3 :

$$f_1, f_2, f_3 : K^3 \to K, \quad f_1(x,y,z) = x^2 - y^2 + yz, \;\; f_2(x,y,z) = 2xy - z^2,$$

$$f_3(x,y,z) = x^2 - y^2 + xz + yz, \;\; f_4 : \mathfrak{sl}_2(K) \to K, \quad f_4(M) = \det M,$$

où $\mathfrak{sl}_2(K)$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille 2 de trace nulle à coefficients dans K :

$$\mathfrak{sl}_2(K) = \{M \in M_2(K) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

(i) (**2 points**) En supposant $K = \mathbb{R}$, déterminer les signatures des f_i et identifier les paires de formes quadratiques équivalentes parmi les f_i.

Réponse. On utilise l'astuce qui consiste à transformer les produits de deux formes linéaires $\phi\psi$ en la différence des carrés de formes linéaires ξ, η en posant $\phi = \xi + \eta, \psi = \xi - \eta$.

1) $f_1 = x^2 - y^2 + yz = x^2 + y(z - y) = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$ avec $x = \xi, y = \eta + \zeta, z - y = \eta - \zeta$, soit $z = 2\eta$; la signature de f_1 est $(2, 1)$.
2) $f_2 = 2xy - z^2 = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$ avec $2x = \xi + \eta$, soit $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), y = \xi - \eta, z = \zeta$; la signature de f_2 est $(1, 2)$.
3) $f_3 = x^2 - y^2 + xz + yz = (x+y)(x-y+z) = \xi^2 - \eta^2$ avec $x + y = \xi + \eta, x - y + z = \xi - \eta$; la signature de f_3 est $(1, 1)$.
4) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 3, et on peut y introduire des coordonnées en écrivant les matrices de taille 2 et de trace nulle sous la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, alors $f_4 = -x^2 - yz = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$ avec $x = \zeta, y = \eta + \xi, z = \eta - \xi$; la signature de f_4 est $(1, 2)$.
5) En comparant les signature, on voit que la seule paire de formes équivalentes est (f_2, f_4).

(ii) (**1 points**) En supposant $K = \mathbb{R}$, pour chaque paire de formes f_i, f_j équivalentes $(i < j)$, trouver des bases $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{E}_j$ pour lesquelles $\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}_i}(f_i) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E}_j}(f_j)$.

Réponse. On peut choisir les bases anté-duales de (ξ, η, ζ), et dans ces bases f_2, f_4 seront données par la même matrice diagonale aux éléments diagonaux $1, -1, -1$. Pour f_2, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

donc on choisit pour $\mathscr{E}_2$ la base $(u_1, u_2, u_3) = (\frac{1}{2}e_1 + e_2, \frac{1}{2}e_1 - e_2, e_3)$, où (e_1, e_2, e_3) est la base standard de $\mathbb{R}^3$. Pour f_4, notre choix des coordonnées sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ correspond à la base

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

donc on choisit pour $\mathscr{E}_4$ la base $(U_1, U_2, U_3) = (M_2 - M_3, M_2 + M_3, M_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

(iii) (**2 points**) Soit maintenant $K = \mathbb{C}$. Identifier les paires de formes équivalentes parmi les f_i et refaire la question (ii) pour $K = \mathbb{C}$.

Réponse. Sur $\mathbb{C}$ sont équivalentes les formes de même rang, donc $f_1 \sim f_2 \sim f_4 \not\sim f_3$. On choisit les mêmes $\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_4$ que dans le point (ii), et pour réduire f_1 à la même forme que f_2, f_4, aux coordonnées (ξ, η, ζ), on remplace la coordonnée η pour f_1 par $i\eta$. Avec ce nouveau choix de coordonnées pour f_1 on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

d'où la base $\mathscr{E}_1' = (e_1, ie_2 + 2ie_3, e_2)$. La matrice de f_k dans la base $\mathscr{E}_k$ est la même pour $k = 1, 2, 4$ et est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (**7 points**). Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q((x, y, z)) = 2xy + 8xz - 2yz - 5x^2 - 3z^2.$$

1. (**1 point**) Donner la matrice A de la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Q dans la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, ainsi qu'une expression explicite de $\phi((x, y, z), (x', y', z'))$ pour une paire $((x, y, z), (x', y', z'))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + yx' + 4xz' + 4zx' - yz' - zy' - 5xx' - 3zz'.$$

2. (**1,5 points**) Calculer l'orthogonalisée de Gram–Schmidt $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathscr{E}$ pour la forme ϕ.

Réponse. On note l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de $\mathscr{E}$ par $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$. On calcule :

$$u_1 = e_1, \; u_2 = e_2 - \frac{\phi(u_1, e_2)}{\phi(u_1, u_1)} u_1 = e_2 + \frac{1}{5} e_1,$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\phi(u_1, e_3)}{\phi(u_1, u_1)} u_1 - \frac{\phi(u_2, e_3)}{\phi(u_2, u_2)} u_2 = e_3 + \frac{4}{5} e_1 - \frac{\frac{4}{5} - 1}{\frac{1}{5}} (\tfrac{1}{5} e_1 + e_2) = e_1 + e_2 + e_3.$$

3. (**0,5 points**) Déterminer le noyau de ϕ.

Réponse. Puisque la base $\mathscr{U}$ est orthogonale, $\ker \phi$ est engendré par les vecteurs u_i de la base pour lesquels $\phi(u_i, u_i) = 0$. On a déjà calculé $\phi(u_1, u_1) = -5$, $\phi(u_2, u_2) = \frac{1}{5}$, il reste à calculer $\phi(u_3, u_3)$. On trouve $\phi(u_3, u_3) = 0$, donc $\ker \phi = \mathbb{R}u_3$ est de dimension 1.

4. (**1 point**) Ecrire une présentation de Q en fonction de coordonnées dans la base $\mathscr{U}$, ainsi que la matrice B de Q dans cette base. Quelle relation relie les matrices $A, B, P = P_{\mathscr{E}\to\mathscr{U}}, {}^tP$?

Réponse. $Q(\sum \xi_i u_i) = -5\xi_1^2 + \frac{1}{5}\xi_2^2$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = {}^tPAP$.

5. (**0,5 points**) Soit $F = \mathbb{R}e_1$. Déterminer $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$ (ici $\perp = \perp_\phi$; la réponse doit être justifiée sans calculs).

Réponse. $x = \sum \xi_i u_i \in F^\perp = u_1^\perp \iff \phi(x, u_1) = -5\xi_1 = 0$, donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$. Puis, $F^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)^\perp = u_2^\perp \cap u_3^\perp = u_2^\perp$, car $u_3^\perp = \mathbb{R}^3$. Comme pour $u_1^\perp$, on trouve $u_2^\perp = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$. Donc $F^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$.

6. (**1 point**) La projection ϕ-orthogonale sur le plan Oxy est-elle bien définie ? (Justifier.) Si c'est oui, déterminer la projection ϕ-orthogonale du vecteur $v = (1, 1, 1)$ sur Oxy.

Réponse. La plan Oxy n'est autre que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$; la restriction de ϕ à ce plan s'écrit dans la base (u_1, u_2) par la matrice non dégénérée $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Donc ce plan est un sous-espace non dégénéré et la projection orthogonale sur ce sous-espace est bien définie. Puisque $u_3 \in \ker \phi$, on a $u_3 \perp \mathbb{R}^3$, et à plus forte raison $u_3 \perp \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, donc la projection de u_3 sur ce plan est nulle.

7. (**1,5 points**) Montrer que toute base orthogonale pour ϕ contient un vecteur colinéaire à u_3.

Réponse. Puisque le rang de ϕ est 2, toute base orthogonale contient deux vecteurs de carré non nul et un vecteur de carré nul, ce dernier engendrant le noyau. Donc toute base orthogonale contient un vecteur proportionnel à u_3, vecteur directeur du noyau de ϕ.