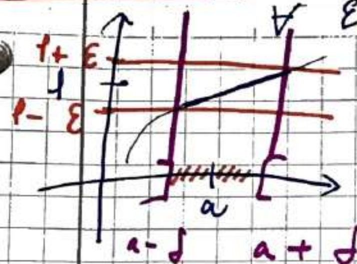
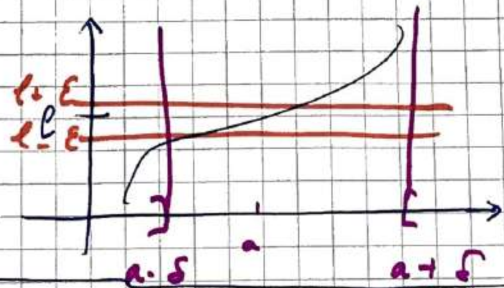
M-ANA

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \delta$

on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$





__Exemple :__ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$. alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

__Preuve__ : Soit $\varepsilon > 0$. Ici $a = 1$, $\ell = 2$ $\quad |x-1| < \delta$

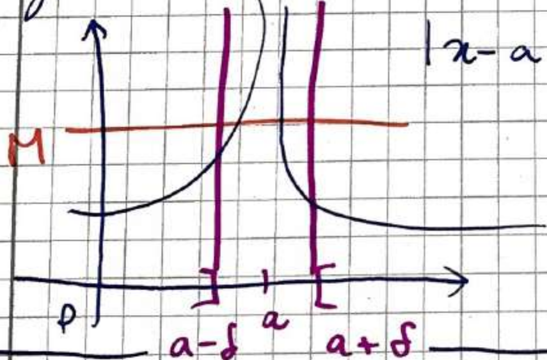
Soit alors $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ avec $|x-a| < \delta$.

On a $|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2|x-1| < 2\delta$

On veut $|f(x) - 2| < \varepsilon$

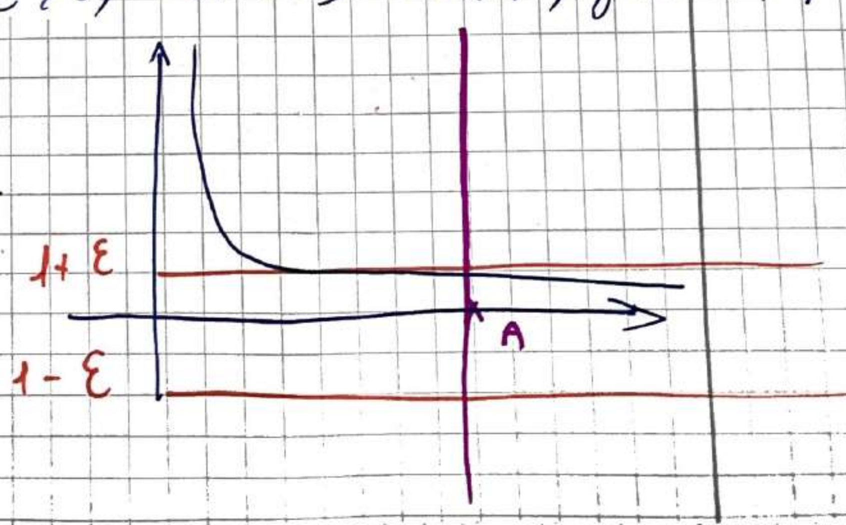
Avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| < \delta, |f(x) - 2| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\},$
$|x-a| < \delta$, on a $f(x) > M$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$; $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(D) $a, \ell \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$.



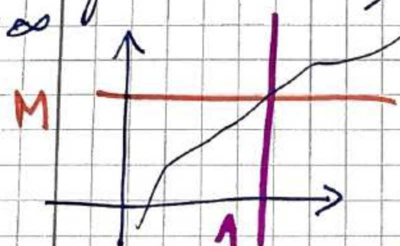
ⓐ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ici $l=0$).

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$,
soit $A > 0$ et $x > A$.

Alors $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{A}$.

Avec $A = \frac{1}{\varepsilon}$: $\forall x > A$, $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$.

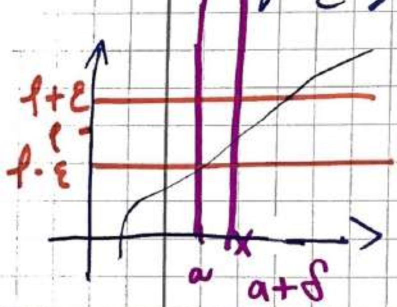
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x > A, f(x) > M$



ⓓ $a, l \in \mathbb{R}$, f définie sur $I \setminus \{a\}$.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ (limite à droite de a)

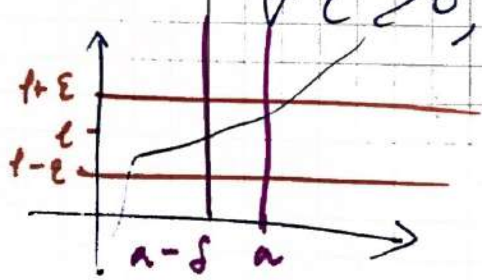
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a, a+\delta[, |f(x) - l| <$



ⓓ $a, l \in \mathbb{R}$, f définie sur $I \setminus \{a\}$.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ (limite à gauche de a)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a[, |f(x) - l| <$



Proposition : Une fonction réelle f admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ ssi elle admet une limite en a^- et en a^+ & ces lim st les mêmes.

Preuve !

ⓐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ car $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Proposition : La limite d'une f est unique lorsqu'elle existe.

Preuve : Soit f une fonction réelle, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$

Par absurde supposons que $l_1 \neq l_2$.
Soit $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$.

Alors $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \delta_1$, on a $|f(x) - l_1| < \varepsilon$
et $\exists \delta_2 > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \delta_2$, on a $|f(x) - l_2| < \varepsilon$

Soit alors $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$.
Soit alors $x \in D_f$, $|x-a| < \delta$.

$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$

$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$

Appris 3° terme

$|l_1 - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = |l_1 - l_2|$

$|x-a| < \delta_1$; $|x-a| < \delta_2$ ③

Contradiction

Donc $\boxed{l_1 = l_2}$.

2) Calcul de Limites

Proposition : $\forall a \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x\to a} x = a$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ — $\frac{1}{x}$ n'ont × lim en 0.
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

TH Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, f et g f réelles avec $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$

où l_1 et $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Alors
- $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x\to a} f(x) . g(x) = l_1 . l_2$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

∅ FI

$+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\frac{0}{0}$

ⓔ $\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{x^2-1}$

Soit $x \neq 1$ un réel ; $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

Dc $\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Ⓔ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$? $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{\cancel{x}(2+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}$

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$.

Ⓔ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$?

Soit $x \geqslant 0$; $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

$\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

TH composi° limites: Soit u une fonction définie sur un voisinage de a sauf peut-être en a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage J de b, $u(I\setminus\{a\}) \subset J\setminus\{b\}$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = \lim\limits_{u\to b} f(u) = \ell$

Ⓔ $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^3+x^2+1} = \sqrt{3}$

car $\lim\limits_{x\to 1} x^3+x^2+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^3+x^2+1} = \lim\limits_{u\to 3} \sqrt{u} = \sqrt{3}$.

__Conséquences :__ Pour $a > 0$, fixé

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{x \to 0^+} e^{a \ln x} = \lim_{u \to -\infty} e^{au} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = \lim_{x \to +\infty} e^{a \ln x} = \lim_{u \to +\infty} e^{au} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-a} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{-a} = 0.$$

@ $\lim_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = \lim_{u \to 0} \ln(1+u) = 0$

@ $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1.$

(TH) Soient f et g avec $]a-\delta, a+\delta[\subset \mathcal{D}f$ et $\subset \mathcal{D}g$; définie au voisinage de a

avec $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

On suppose ~~il existe~~ $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$, $x \neq a$, $f(x) \leq g(x)$

Alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ si elles existent.

(Rq) On peut avoir $f(x) < g(x)$ & $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

$a = 0$, $f(x) = |x|$, $g(x) = 2|x|$.

c) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$

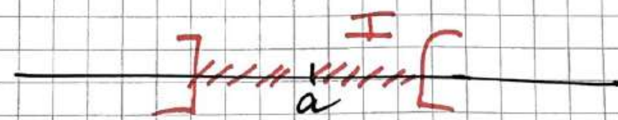
- On a que $\sin\frac{1}{x} \geq -1$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

Pr $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$

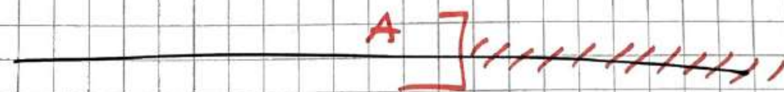
or $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ d'où $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

M-ANA $\mathbb{R}$ Voisinages :

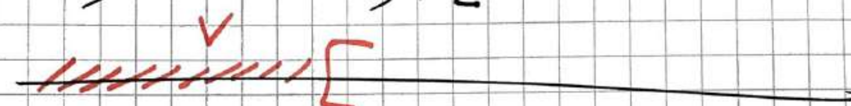
• $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si :
$\exists\, I$ intervalle ouvert, avec $a \in I \subset \mathbb{R}$.



• $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si :
$\exists A \in \mathbb{R}$, $]A ; +\infty[\subset V$.



• $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ si :
$\exists A \in \mathbb{R}$, $]-\infty , A[\subset V$.



$a \in \overline{\mathbb{R}}$; "Soit V voisinage de a"

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

"Au voisinage de a, f a ses valeurs au voisinage de l".

• **TH** : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et u une f réelle définie sur un voisinage de a, avec $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

• f une f réelle tq :
• $\lim\limits_{x \to b} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$
• $u(V \setminus \{a\}) \subset \mathcal{D}_f$

Alors : $\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to b} f(u) = l$

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

En $x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$
avec $u(x) = \sin x$, donc

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{u} - 1}{u} = 1$

TH Passage à lim des inégalités :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V un voisinage de a & f, g des f réelles définies sur $V \setminus \{a\}$ tq: $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$.

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- si f & g ont tts 2 limites ℓ & ℓ' alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

TH Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V un voisinage de a & f, g f réelles définies sur $V \setminus \{a\}$ tq: $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $|f(x)| \leq g(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

@ $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ est défini pour tout $x \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

or $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ Donc $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

TH Gendarmes : $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V voisinage de a, et

f, g, h f réelles définies sur $V \setminus \{a\}$ tq :

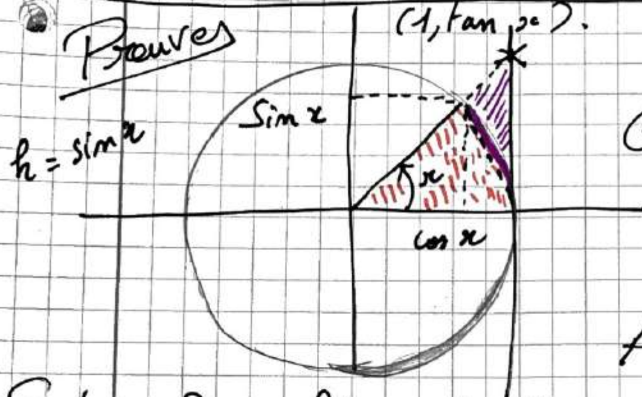
$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \ h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

avec $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors f admet une limite en a & $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$,

Proposition : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Preuves



Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

On note A_x l'aire triangle : $\big((0,0), (1,0), (\cos x, \sin x)\big)$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2}$$

Soit S_x : l'aire de la section circulaire d'angle x :

////// +

$$S_x = \frac{x}{2}$$

$x = 2\pi$
$S_x = \pi$
$x = \pi$
$S_x = \frac{\pi}{2}$

Soit T_x : l'aire du triangle $\big((0,0), (1,0), (1, \tan x)\big)$

$$T_x = \frac{\tan x}{2}$$

Finalement, $A_x \leq S_x \leq T_x$

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$

- On passe à inverse, $\frac{2}{\tan x} \leq \frac{2}{x} \leq \frac{2}{\sin x}$

On multiplie par $\frac{\sin x}{2}$ $\quad \frac{\sin x}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

Finalement, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$

- On a bien $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim\limits_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$

Cl : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Propositio : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Preuves $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} \times \frac{\overbrace{\sin x}^{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}}{\underbrace{1 + \cos x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 2}}$$

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$? $\qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{x}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{1} \times 1 = 1$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$. ? Or $\forall x \neq 0$,

$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Ex 1 p33

Sommes termes Suites géométriques

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = ?$

Pr $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$

Or $\lim_{x \to 1} (1 + x + x^2 + x^3) = 4$

---

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = ?$

Pr $x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$.

$$\frac{x + 1 - (1 - x)}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \ldots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Méthode de l'Hôpital $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$?

$=$ dérivée $\frac{x^4 - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{4x^3}{1} = 4$

Règle de l'Hôpital applicable

ssi la forme indéterminée

est $\boxed{\frac{0}{0}}$ ou $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

5

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$;

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$: taux accroissement end

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln(1+e^x) - x\right]$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x)$$

$$= \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln(1+e^x) - x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

MH $\frac{2x-3}{2x}$: $= -\frac{1}{2}$

3) $\lim \frac{\ldots}{x^2-1} = \frac{\ldots}{(x-1)(x+1)}$

~~Pr $x \neq \pm 1$~~

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-a)$

$2 = (-1)(-a) = a$

D'où $\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1}{2}$

Ex2 p33.

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = ?$ Pr $x > 0$ et Pr $x \neq 1$.

RC conjugué

$\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

---

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ Pour $x \neq -2$,

$X^3 + 8 \;|\; X + 2$

$-(X^3 + 2X^2) \;|\; X^2 - 2X + 4$

$-2X^2 + 8$

$+2X^2 + 4X$

$4X + 8$

$-4X - 8$

0

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots\}$

$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

$\frac{x^3+8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$

Donc $\lim_{x \to -2} x^2 - 2x + 4 = 12$

Ne pas prendre x en facteur … ça … tend … vers …

M-ANA : R $\forall k > 0$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^k \cdot \ln x = 0$

Pour $a > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$

Pour $a \in]0,1[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{a^x}{x^k} = 0$

Preuve $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$

- $\forall x > 1$: $\ln x \leq x - 1 \leq x$

$\left| \frac{\ln x}{x^k} \right| = \frac{\ln x}{x^k} = \frac{2}{k} \frac{\ln(x^{k/2})}{x^k} \leq \frac{2}{k} \frac{x^{k/2}}{x^k}$

où $\frac{2}{k} \frac{\ln(x^{k/2})}{x^k}$. $\ln\left(\left(x^{k/2}\right)^{2/k}\right) = \ln(x)$.   " $\frac{2}{k} \times \frac{1}{x^{k/2}}$

Ex2 Déterminer lim si elles existent

- 3) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ Donc $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = \frac{-2}{6} \times (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$

De m̂, $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = +\infty \times \frac{-2}{6} = +\infty \neq \lim\limits_{x \to 4^-}$

- Donc $x \mapsto \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ n'a pas de limite en 4

4) $\lim_{x\to 0} \left(x + \frac{|x|}{x}\right)$.

Pour $x > 0$, $x + \frac{|x|}{x} = x + \frac{x}{x} = x + 1$

Donc $\lim_{x\to 0^+} x + \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} x + 1 = 1$

Pour $x < 0$, $x + \frac{|x|}{x} = x + \frac{-x}{x} = x - 1$

Donc $\lim_{x\to 0^-} x + \frac{|x|}{x} = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} x + \frac{|x|}{x}$

En conclusion, $x \mapsto x + \frac{|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0.

---

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \arctan x}{x+1}$

Pour $x \geq 1$, $\frac{x - \frac{\pi}{2}}{x+1} \leq \frac{x + \arctan x}{x+1} \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{x+1}$

Or $\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \frac{\pi}{2x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$

De même $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{x+1} = 1$.

On en déduit d'après le TH gendarmes $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \arctan x}{x+1} = 1$

$\frac{x^2 + 1 + 1}{x^2+1}$ $\frac{x^2+2}{x^2+1}$ $\frac{2x}{2x} = 1$, $\lim \frac{1 + \frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$

F.I $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ 2

6) $\lim_{x\to 1^+} [\ln x \cdot \ln(\ln x)]$.

comme $\lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$

On a $\lim_{x\to 1^+} \ln x \cdot \ln(\ln x) = \lim_{u\to 0^+} u \ln u = 0$

7) $\lim_{x\to +\infty} e^{x - \sin x}$.

Pr $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$

Donc $\lim_{x\to +\infty} x - \sin x = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} e^{x - \sin x} = \lim_{u\to +\infty} e^{u} = +\infty$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$1 \geq -\sin x \geq -1$

8) $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \ln x$.

Pour $x \in]0,1[$ $1 + \sin^2 \frac{1}{x} \geq 1 + 0$

$\Rightarrow \ln(x)\left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \leq \ln x$

car $\ln x < 0$ or $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Donc $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \ln x = -\infty$

Ex 3 R) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$

2.a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x}$

$\Rightarrow \lim_{u \to 0} \frac{3 \cdot \sin(u)}{u} = 3 \times 1 = 3$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$. $\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - 2\sin x . \cos x}{x^3} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{x} \cdot \frac{(1-\cos x)}{x^2} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$.

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

car $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} . \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$\sqrt{x} = u$

2. Continuité

2.1. Def thm gén'ux

(D) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est continue en a si 3 condiᵗˢ satisfaites:

1) $a \in Df$

2) $\lim_{x \to a} f(x) \quad \exists$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Rq équivaut à dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

@ Continuité f en 2 :

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$; $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2. \end{cases}$

- f est discontinue en 2 car $2 \notin Df$.
- g : pr $x \neq 2$; $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2$

$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 \neq g(x)$

Donc g discontinue en 2.

- De même $\lim_{x \to 2} h(x) = 4 = h(x)$

$\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)' = \dfrac{2x}{1}$

$2 \times 2 = 4$

Rq : $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

n'est continue en aucun $a \in \mathbb{R}$.

D. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; on dit que f est continue sur $[a,b]$ si :

- $\forall x \in]a,b[$, f est continue en x.
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

TH Les sommes, produit, quotients et composition de fonctions continues st CONTINUES sur leur domaines de définition.

Corollaire : Si $f : I \to J$ est continue et bijective, alors $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue.

$f \circ g$

$f(g)$

Rq : polynomes, ln, exp, sin, cos, tan, f circulaires sont toutes continues sur leurs domaines de définit°.

Ex 6 p 34

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} & \text{si } -2 < x < 2 \\ m & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

soit continue sur $]-2, 2]$ ← n'est pas déf à droite de 2

Comme $\frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$ est un quotient de composées de f usuelles, elle est continue sur $]-2, 2[$.

Donc f continue sur $]-2, 2[$.

Pour que f soit continue en 2, il faut que la $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = m$

Or $\frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x-2}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \frac{x-2}{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x+2}} = \frac{-(2-x)}{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x+2}}$

$= \frac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$ $\boxed{\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{-0}{2} = 0.}$

Finalement, avec $m = 0$, on obtient que

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

Donc f est continue sur $]-2, 2]$.

(e) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; f est composée de f continues.

Donc f est continue sur $\mathcal{D}f$.

Or $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie ssi $\frac{x-1}{x+1} > 0$, cad $x-1$ & $x+1$ de m̂ signes

$\begin{cases} x-1 > 0 \text{ et } x+1 > 0 \\ \text{ou} \\ x-1 < 0 \text{ et } x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ et } x > -1 \\ \text{ou} \\ x < 1 \text{ et } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1 \end{cases}$

Donc $\mathcal{D}f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

7

Ex 5 Déterminer $\mathcal{D}f$ & continuités f.

① $f(x) = \arccos(\ln x)$ Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\arccos(\ln(x))$ déf $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \ln x \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{e}, e]$

$\boxed{\mathcal{D}f = [\frac{1}{e}, e]}$. Finalement f est continue sur $[\frac{1}{e}, e]$ (f usuelles).

② $f(x) = \arcsin(2x+1)$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définit $\Leftrightarrow -1 \leq 2x+1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$.

$\Leftrightarrow x \in [-1, 0]$

Donc $\mathcal{D}f \in [-1, 0]$, f est continue sur $\mathcal{D}f$.

$\arccos x$
$[-1, 1]$
$\downarrow$
$[0, \pi]$
$\arcsin$
$[-1, 1]$
$\downarrow$
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

③ $f(x) = \ln(\arcsin x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow x \in]0, 1]$.

Donc $\mathcal{D}f \in]0, 1]$, f continue sur $\mathcal{D}f$.

⑧

d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie

$\Leftrightarrow \quad 1-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow \mathcal{D}f = [-1, 1]$.

M-ANA

TH prolongement par continuité

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$
avec $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
alors $\exists\ \tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, continue en a et tq :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}\ ;\ \tilde{f}(x) = f(x)$$

On appelle $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en a ;
il est uniq, donné par $\boxed{\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}}$

@ Pour $x > 0$,

$f_x : x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue.

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = 0$$

Donc f_x a un prolongement par continuité en 0, donné par

$$\tilde{f}_x(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, $\tilde{f}_x$ est continue en 0 et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, $\tilde{f}_x$ est définie & continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ex : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \to x(\sin \frac{1}{x})$

Mq : f admet un prolongement à $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$
- De plus, pour $x \neq 0$, $|f(x)| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq \underbrace{|x|}_{} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
- f admet de le prlg^t par continuité en 0.

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue en 0 & sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}^*$.

2.2. Image d'une suite par une fonction

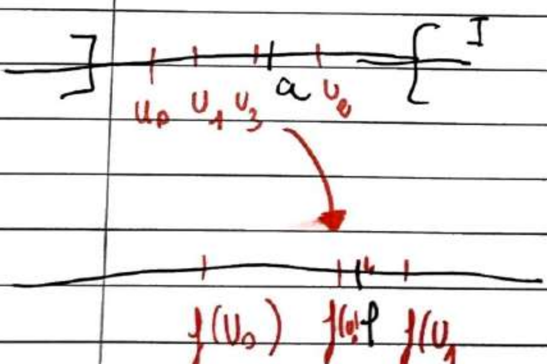
$(U_n)_{n \geq 0}$ suite réelle ;

$(f(U_n))_{n \geq 0}$

Prop : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f définie au voisinage de a sauf peut-être en a. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

Ssi Pour toute suite $(U_n)_{n \geq 0}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$

et $\forall n \geq 0$, $U_n \neq a$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \ell$.



Applicat°:

- Si $\exists\,(U_n)_{n\geq 0}$ avec $U_n \to a$ tq $(f(U_n))_{n\geq 0}$ n'a pas de limite alors $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.
- $\exists\,(U_n)\,\&\,(V_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} f(U_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(V_n)$

Alors $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

(n) cos & sin n'ont de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = n\pi$

$\lim_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$ et $\cos(U_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Donc $(\cos(U_n))_{n\geq 0}$ n'a pas de limite.

Corollaire : $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, $a \in I$:

f est continue en $a \iff \forall\,(U_n)$ à valeurs dans I avec $\lim_{n\to+\infty} U_n = a$

On a $\lim_{n\to+\infty} f(U_n) = f(a)$

Ex 12 : Déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(2x) = f(x)$.

Indication : l'image par f de la suite $U_n = \frac{x}{2^n}$.

Soit $f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

On définit $(U_n)_{n \geq 0}$ par $U_n = \frac{x}{2^n}$ alors $f(U_n) = f(x)$

Donc $\left(f(U_n)\right)_{n \geq 0}$ est cte, égale à $f(x)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(x)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ comme f est continue,

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(0)$ D'où $f(x) = f(0)$.

Donc f est cte.

@ Soit $f : I \to I$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_0 \in I$.
On peut alors définir $(U_n)_{n \geq 0}$ par $U_{n+1} = f(U_n)$.

ex 4 p23 $U_0 = 3$ $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

Si (U_n) admet une limite $\ell \in I$ et si f continue :

$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell)$

D'où $\ell = f(\ell)$.

Pour $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{2 + x}$; on a vu $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

Donc (U_n) a une limite $\ell \in [2,3]$

Comme f est continue sur $[2,3]$: $\ell = f(\ell) = \sqrt{2 + \ell}$

$\ell^2 = 2 + \ell \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0$

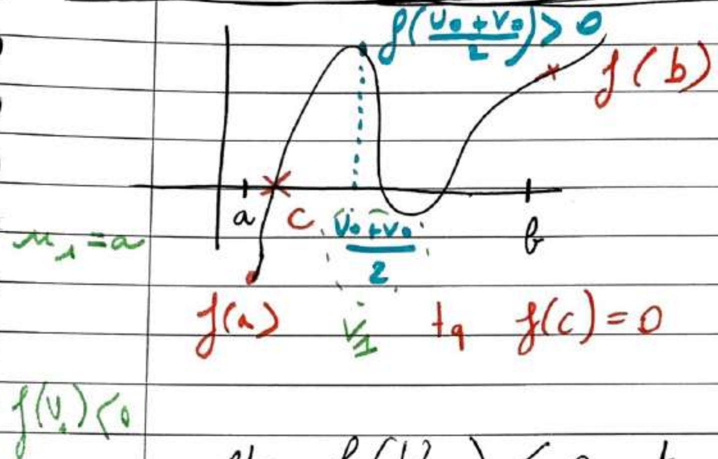
$\iff \boxed{\ell = 2}$

de signes $\neq$.

2.3. Théorèmes fondamentaux

Th $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(a).f(b) < 0$

Alors $\exists\ c \in]a, b[,\ f(c) = 0$



(U_n) $\qquad$ (V_n)

$U_0 = a$ $\qquad$ $V_0 = b$

$U_n \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n$

&

$|U_n - V_n| = \frac{b-a}{2^n}$

et $f(U_n) < 0$ et $f(V_n) > 0$.

$U_n \to \ell$; $V_n \to \ell$; $f(U_n) \to f(\ell)$; $f(V_n) \longrightarrow f(\ell) = 0$

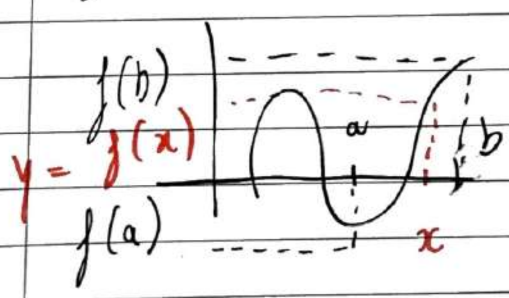
$\Longrightarrow f(\ell) = 0$.

$|u_1 - v_1| = \frac{b-a}{2}$.

TVI : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, intervalle, $a < b \in I$

alors $\forall\ y$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists\ x \in [a, b]$, $y = f(x)$.

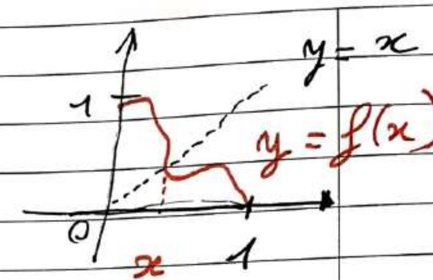
"L'image d'un intervalle par une f continue est un intervalle"



Exemple : Soit $f : [0;1] \to [0;1]$

Continue :

Mq $\exists x \in [0,1]$, $\boxed{f(x) = x}$.



On considère $g : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) - x$

g continue sur $[0,1]$, • $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0$

• $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 1-1 \leqslant 0$.

Donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$: TVI

$\exists x \in [0,1]$ $\quad g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$\boxed{\text{Ex } 12}$ Mq $\exists x \in]0,1[$; $e^{-x} = x$

On considère la f continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to e^{-x} - x$

• $g(0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ $\qquad$ • $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$.

0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$.

TVI, $\exists x \in [0,1]$, $g(x) = 0$.

Comme $g(0)$ et $g(1) \neq 0$, un tel x appartient à $]0,1[$

Donc $\exists x \in]0,1[$, $e^{-x} - y = g(x) = 0$ cad $e^{-x} = x$.

Th : TVE : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue Alors $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b]$, $f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$.

Adit : $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$

+ex 8 TVI

M-ANA

$f : I \to \mathbb{R}$ continue $I \subset \mathbb{R}$ intervalle pr $a < b \in I$
pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists\, c \in [a, b]$, $y = f(c)$

Ex8 p 34 : $f(x) = x^5 - 3x - 1$
$g(x) = x \cdot 2^x - 1$.

Mq
- $f(x) = 0$ a une solu° ds $[1, 2]$
- $g(x) = 0$ a une solu° ds $[0, 1]$.
- $f(x) = g(x)$ a une solu° ds $]0, 2]$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, a fortiori, f est continue sur $[1, 2]$.

De plus $f(1) = 1^5 - 3\times 1 - 1 = -3 < 0$
et $f(2) = 2^5 - 3\times 2 - 1 = 32 - 7 = 25 > 0$.

Donc $0 \in [-3, 25] = [f(1), f(2)]$.

Par TVI, $\exists\, x \in [1, 2]$ tq $f(x) = 0$

Donc l'équa° $f(x) = 0$ admet une solu° sr $[1, 2]$.

- g est continue sur $\mathbb{R}$, a fortiori, continue sur $[0, 1]$.
$g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$.

Donc $0 \in [-1, 1] = [g(0), g(1)]$.

Par **TVI**, $\exists\, x \in [0, 1]$ tq $g(x) = 0$ dc $g(x) = 0$ admet une solu° ds $[0, 1]$

Notons $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - g(x) \end{array}$; h est continue ĉ ≠ce f continues.

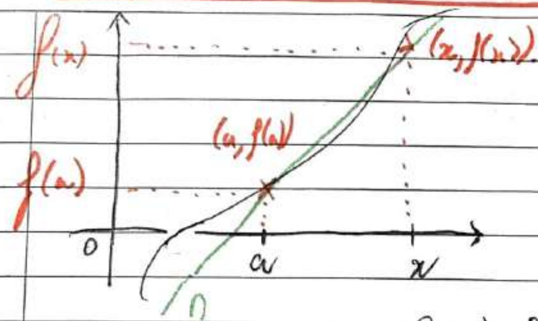
De plus ~~$h(0) = 0$~~ $h(1) = -4 < 0$ et $h(2) = 25 - 7 = 18 > 0$

Donc par TVI, $\exists\, x \in [1, 2]$, $h(x) = f(x) - g(x) = 0$

Dc l'équa° $f(x) = g(x)$ a une solu° sr $[1, 2] \subset]0, 2]$.

Dc a fortiori, $f(x) = g(x)$ admt 1 solu° sr $]0, 2]$.

C_4 : Fonctions Dérivables



$\mathcal{C}_f : y = f(x)$

$D : y = kx + c$

$f(x) = kx + c$
$f(a) = ka + c$

$f(x) - f(a) = k(x-a)$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ↳ taux Accroissement.

1) Dérivée & tangente

Pr $f : I \to \mathbb{R}$, le taux d'accroissement de f entre a & $\underset{x}{\overset{a}{\neq}}$ est défini par $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

D $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(a) - f(a)}{x - a}$ existe et est réelle.
Cette limite, notée $f'(a)$ est appellé la dérivée de f en a.

Comme $\lim\limits_{h \to 0} a + h = a$; on a aussi $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

P Si f dérivable en a, alors droite Ta d'équaO $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est la tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f.

R/ Si $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet en a une tangente $\boxed{\text{verticale}}$.

@ Calculer (si $\exists$) $f'(a)$ ds ces cas :
$f(x) = c$; $a = 2$

Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{c - c}{h} = 0$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 0$ et $f'(2) = 0$.

$$= \frac{2+h-2}{h}$$

ⓐ $f(x) = x \quad , a = 2$

Pour $h \neq 0$, $\quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$

Donc $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$

ⓐ $f(x) = x^2$; $a = 1$; pr $h \neq 0$; $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$

$$f'(1) = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h$$

Dc $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$

ⓐ $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 0$ et $a = 1$

Pour $a = 0$, pr $h > 0$, $f'(0) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 MS son graphe admet une tangente verticale en $(0,0)$.

Pour $a = 1$, pr h petit et $\neq 0$, on a $\quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

$$= \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1+h-1}{h \cdot (\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{1 + \sqrt{h+1}}.$$

Dc $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}.$

(D) La dérivée de f, notée f' est définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On a $\mathcal{D}f' = \left\{ x \in \mathcal{D}f, \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe et finie} \right\}$

Ex. Si $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

si $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

(D) $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$:

1) f est dérivable à droite en a si $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

On note cette limite $f'_d(a)$ la dérivée à droite de f en a.

2) f dérivable à gauche en a si $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

On la note $f'_g(a)$, la dérivée à gauche de f en a

(RQ) Si a n'est pas une borne de I,

f dérivable en $a \iff f$ dérivable à gauche & à droite en a (ET) $f'_g(a) = f'_d(a)$

Ex. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

Pr $h > 0$, $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Donc $f'_g(0) = -1$; $f'_d(0) = 1$.

Sable revenir

Il faut oser à bâtir des idées neuves contraires aux postulats actés. Les vérités en science ne st pas figées.

qui ont bouleversé la vision du monde, d'abord le monde scientifiq puis le monde de tous les jours.

(3) Monde moderne est fondé sur la remise en cause de principes, (4) l'émergence de nvx concepts

P : Si f dérivable en a alors f est continue en a.

Notations : Si f' est dérivable sur I ($f : I \to \mathbb{R}$), on dit f est 2 fois dérivable sur I et on note $f^{(2)} = f'' = (f')'$

• Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est n fois dérivable, et on note.
$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

2) Méthodes de dérivat°

• Puissances entières : $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rq. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} b^k$

Pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right]$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\left[(\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x})\left(\underbrace{(x+h)^{n-1}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} x^{n-1}} + \dots + \underbrace{(x+h)^{n-2}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} x^{n-1}} + \dots + (x+h).x^{n-2} + x^{n-1}\right)\right]$$

$= (x+h)^{n-1} + \dots + x^{n-1}$

Finalement $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n.x^{n-1}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Concevoir nvx modèles q simplifient le problème posé.

@ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

On cherche constamment à trouver modèles représentat° q généralisent les cas ou présentent les choses $\neq$t.

$\cdot\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$
$\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$

Pr $x \neq 0$ et $h \neq 0$ assez petit.

$$\cdot = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right)$$

$$\cdot = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} = f'(x).$$

⊙ $f(x) = \sin x \quad , x \in \mathbb{R}.$

Pr $h \in \mathbb{R}$: $\underbrace{\sin(x+h)}_{Im(e^{ix} . e^{ih})} = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

$$\cdot = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$\cdot = \frac{\sin x\ (\cos h - 1) + \cos x . \sin h}{h}$$

$$\cdot = \sin x\ \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\ \frac{\sin h}{h}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$; $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Donc $\sin'(x) = \cos(x)$.

⊙ $f(x) = \cos x$; m̂ calcul &p $\underbrace{\cos(x+h)}_{Re(e^{ix} . e^{ih})} = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

• Pour $f(x) = \ln x$, $x > 0$

On a $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$; on admet $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

TH Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

Alors $x \mapsto \lambda u(x) + \mu v(x)$ et $x \mapsto u(x) v(x)$ st dérivables sur I, de dérivée :

$$(\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x) , \quad x \in I$$

• $(uv)'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$

Preuve : Pour $x \in I$, $h \neq 0$ assez petit,

$$\bullet = \frac{u(x+h) v(x+h) - u(x) v(x)}{h}$$

$$\bullet = \frac{u(x+h)\left[\underline{v(x+h) - v(x)} + v(x)\right] - u(x)\, v(x)}{h}$$

$$\bullet = u(x+h) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{u(x+h) v(x) - u(x) v(x)}{h}$$

$$\bullet = u(x+h) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h} \times v(x)$$

Or $\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$ & $\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$

$\lim_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ (u dérivable donc continue)

Finalement $(uv)'(x) = u(x) v'(x) + u'(x) v(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$$

Ex) Calculer la dérivée : $f(x) = 2x^3 - x^2$.

|| f définie & dérivable sur $\mathbb{R}$ ĉ Σ polynômes pr $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 2x$

2) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2 \sin x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ comme

|| Σ de produits de f dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et/ou $\mathbb{R}$.

et pour $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 2x \sin x + x^2 \cos x$.

3) $f(x) = 3 + \sqrt{x} \cdot \ln x$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^+_*$, dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ comme somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+_*$.

Pr $x \in \mathbb{R}^+_*$: $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right)$$

Th : Dérivée f composées :

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ tq
- $u(I) \subset J$
- u dérivable sur I
- f dérivable sur J.

Alors $f \circ u \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(u(x)) \end{array}$ est dérivable,

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Preuve : Pour $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tq $x+h \in I$.

$$\bullet = \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{u(x+h) - u(x)}$$

$$\bullet = \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

or $\lim\limits_{h} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$.

De plus comme u est dérivable, u est continue en x

dc $\lim\limits_{h \to 0} \underset{\text{" } y(h) \text{ "}}{u(x+h)} = u(x)$

$$\bullet = \lim_{x \to 0} \frac{f(\overbrace{u(x+h)}^{\text{" } y(h) \text{ "}}) - f(u(x))}{\underbrace{u(x+h)}_{\text{" } y(h) \text{ "}} - u(x)} = \lim_{y \to u(x)} \frac{f(y) - f(u(x))}{y - u(x)}$$

$$\bullet = f'(u(x))$$

Finalem^t, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = f'(u(x)).\ u'(x)$.

D'où $f \circ u$ dérivable en x, & $(f \circ u)'(x) = f'(u(x)).\ u'(x)$

Corollaire :

Soit u & v $I \to \mathbb{R}$ dérivable tq $\forall x \in I, v(x) \neq 0$

Alors les fonctions $x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ et $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ st dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2} \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Preuve : On considère $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \to 1/x$.

Comme v ne s'annule pas sur I, $v(I) \subset \mathbb{R}^*$

Donc $f \circ v$ $I \to \mathbb{R}$
$x \to f(v(x)) = \frac{1}{v(x)}$ sur I.

Pour $x \in I$: $(f \circ v)'(x) = f'(v(x))\, v'(x)$.

$$(f \circ v)'(x) = -\frac{1}{v(x)^2}\, v'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \left(u \times \frac{1}{v}\right)'(x) = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - v'(x)\, u(x)}{v(x)^2}$$

Ex3 1) $f(x) = \ln(2x^2 + x)$

f définie pour $x \in \mathbb{R}$ tq $2x^2 + x > 0$

$\iff x(2x+1) > 0$

$\iff x$ et $2x+1$ st nuls & de m̂ signes.

$\iff x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 0$.

> 0 en dehors de ses racines.

$(\ ) > 0$

Dc $\mathcal{D}f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$.

De plus sur $\mathcal{D}f$, f est une composée de f dérivables, & est dc dérivable.

$$f'(x) = (4x+1) \times \frac{1}{2x^2 + x}$$

$f \circ u = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

$\ln \circ u = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$x \longmapsto x^2 + 1$ est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$.
$\sqrt{\ } : x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ a fortiori sur $[1, +\infty[$

1) $u(I) \subset J$
2) u dérivable sur I
3) f dérivable sur J.

$I = \mathbb{R}$
$u(x) \subset [1 + \infty[$
$J = \mathbb{R}_+^*$
$u(I) \subset J$

Dc f est définie & dérivable sur $\mathbb{R}$ &

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

3) $\cos(-3x^2+1)$ dérivable car composé de f sur $\mathbb{R}$ composée f dérivables

$$f'(x) = [-\sin(-3x^2+1)][-9x^3] = 9x^2 \times \sin(-3x^2+1)$$

Ex4

$f'(x) = \tan x$; f est définie & dérivable sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{+\sin' x \sin x - \cos' \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 + \tan^2 x}$$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

f est défini & dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$ comme $x \mapsto x^4+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f est défini & dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - 4x^3(x^2-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{-4x^5-4x^3+2x^5+2x}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(1-2x^2-x^4)}{(x^4+1)^2}$$

TH Soit $f : I \to J$, continue & bijective.

($f^{-1} : J \to I$ continue)

Si f dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$,

alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$

$$\boxed{\text{et } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}}$$

$\forall x \in J$:

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$\frac{d}{dx} \rightsquigarrow f'(f^{-1}(x)) \, (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}}$$

Applicaⁿ : • $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp(x)$.

• $f_x(x) = x^x = \exp(x \cdot \ln x)$

dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; $f'_x(x) = \exp'(x \ln x) \cdot x \ln'(x)$.

$f'_x(x) = x^x \times \dfrac{x}{x} = x \cdot x^{x-1}$

• $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dérivable en x ~~si $\sin'(x) \neq 0$~~

si $\sin'(\arcsin x) \neq 0$

$\cos(\arcsin x) \neq 0$.

$\Leftrightarrow \arcsin x \neq \pm \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

D'où arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$.

$\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

→ si f dérivable en a & $f'(a) \neq 0$

alors $\underbrace{f^{-1}}_{\arcsin}$ dér^{ble} en $b = f(a)$

$a = f^{-1}(b) = \arcsin x$

on ne doit pas

diviser par 0.

* De m̂, arccos est dérivable sur $]-1,1[$

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arcsin x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

* $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; f réciproque de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Sur ce domaine, tan est dérivable et pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$$

Dc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pr $x \in \mathbb{R}$.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Formule Leibniz : Si u & v $I \to \mathbb{R}$ st dérivables n fois, où $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \, v^{(n-k)}$$

Où on convient que $u^{(0)} = u$

Si une f ne s'annule jms Alors sa dérivée est définit partout.

Ex 1 p45

7. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; f définie pr $x \in \mathbb{R}$

Df ? $1 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow \mathcal{D}f = [-1, 1]$.

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable pour $x > 0$.

Dc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ dérivable pour $x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$.

et $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(*) Dérivabilité en 1 pr $x \in [-1, 1[$:

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \dfrac{x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{x-1} = \dfrac{-x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 1

De m, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty \Rightarrow$ f n'est pas dérivable en -1.

Finalement, f dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x)}$$ $$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

M-ANA

u, v dérivables $\to u+v,\ u \cdot v,\ \frac{1}{v}, \frac{1}{u}, u \circ v, u^{-1}$ aussi dérivables

$u : x \mapsto x^4$

$v : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto v(u(x))$ $\quad v \circ u$ dérivable dès que $u(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : $\mathcal{D}f$ & $\mathcal{D}$déri

1) $f: x \mapsto \ln(\ln x)$; pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \text{ définie} \\ \ln(\ln x) \text{ définie} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$ $\quad$ dc $\mathcal{D}f =]1, +\infty[$.

Sur $\mathcal{D}f$, f est une composée de f dérivables & dc dérivables.

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\, \ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

2) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; pr $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \text{ définie} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \text{ défini} \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ défini} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{ou} \begin{cases} x+1 > 0 \text{ et } 1-x > 0 \\ x+1 < 0 \text{ et } 1-x < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 < x < 1 \\ \text{ou} \\ \cancel{-1 < x < 1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$ $\quad$ dc $\mathcal{D}f =]-1, 1[$.

Sur $\mathcal{D}f$, f composée de fonctions dérivable et est dc dérivable, de dérivé.

	-1	1	
$1+x$	$-$ 0	$\cancel{+}$	$+$
$1-x$	$+$	0	$-$
	$-$	$+$	$-$

$x > -1$
$x < 1$ $\quad$ (1)

$$f'(x) = \ln'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

6) $f : x \longmapsto (1+x)^x = \exp(x.\ln(1+x))$ $\quad a^b = \exp(b\ln a)$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie $1+x > 0$.

$\Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[\Rightarrow Df =]-1, +\infty[$

Pr $x \in Df$: $f'(x) = \exp'(x.\ln(1+x)).\frac{d}{dx}(x.\ln(1+x))$

$$f'(x) = \exp(x.\ln(1+x))\left[1 \times \ln(1+x) + x\frac{1}{1+x}\right]$$

$$f'(x) = (1+x)^x\left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right]$$

$a^b = \exp b\ln a$

5) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}-1}$

Pr $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ définie si $e^{2x} - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Sur Df $\quad$ D $Df = \mathbb{R}^*$

$\rightarrow f$ est un quotient de f dérivables & de est dérivable de dérivée

$$f'(x) = \frac{2x(e^{2x}-1)-(2e^{2x})x^2}{(e^{2x}-1)^2} = 2x\frac{e^{2x}(1-x)-1}{(e^{2x}-1)^2}$$

"3" = 4.4. Etude fs

4.4.1. Extrema locaux

(D) $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, on dit que a est un maximum local, respectivement minimum local si il existe :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \begin{cases} |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) & \text{MAX} \\ |x-a| > \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a) & \text{MIN} \end{cases}$$

On dit que a est un extremum local si Max local ou Min local.

(Th) Si f est dérivable en a (et) si a extremum local, alors $\boxed{f'(a) = 0}$.

Preuve : Supposons que a est minimum local de f, soit $\delta > 0$

$$\forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

Pour $x \in I$, tq $a - \delta < x < a$.

On a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \leq 0$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \iff f'(a) \leq 0$$

De plus, pour $x \in I$, $a < x < a+\delta$; on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

le nb à la fois $\oplus$ & $\ominus$ est 0.

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \text{ or } f'(a) = 0$$

En général, on appelle $a \in I$, tq $f'(a) = 0$,
un point {CRITIQUE / STATIONNAIRE} de f.

⚠ extremum local $\Rightarrow$ point critique
point critiq. $\not\Rightarrow$ extremum local

@ $x \mapsto x^3$; c'est un point critiq, pas extremum local.

TH Soit $f : I \to \mathbb{R}$; deux fois dérivables, $\forall a \in I$, $f'(a) = 0$

1) Si $f''(a) > 0$ alors a est un minimum local.
2) Si $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local.
3) Si $f''(a) = 0$: aucune informat°.

@ Déterminer les points critiqs de $f(x) = x^5 - 20x^2$.
& préciser leur nature.

Df ✓
Dd ✓ Pr $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 40x$

$\Rightarrow$ Donc x point critiq $\Leftrightarrow f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow 5x^4 - 40x = 0$
$\Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0$
$\Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$.

Les points critiqs de f sont 0 et 2.

De plus $f''(x) = 20x^3 - 40$

$f''(0) = -40 < 0 \Leftrightarrow 0$ est maximum local.

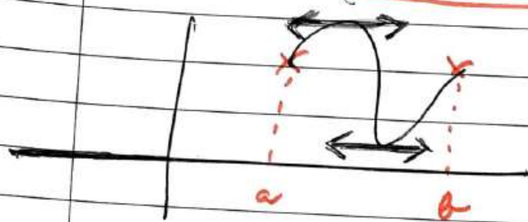
$f''(2) = 160 - 40 = 120 > 0 \Leftrightarrow 2$ est minimum local

3.2. TH Rolle & TH Accroiss^t Fini (TAF)

TH Rolle : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors $\exists\, c \in]a, b[,\ f'(c) = 0.$



Ⓐ $f : x \longmapsto x \cdot \sin x$.

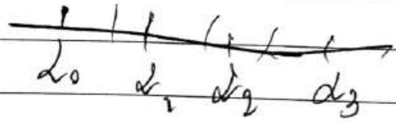
Mq $\exists\, c \in]0, \pi[$, tq tangente au graphe de f en c soit horizontale.

(THR)

- f est continue sur $[0, \pi]$
- f est dérivable sur $]0, \pi[$
- $f(0) = 0 = f(\pi)$.

Par (THR), $\exists\, c \in]0, \pi[,\ f'(c) = 0$, de tangente horizontale.

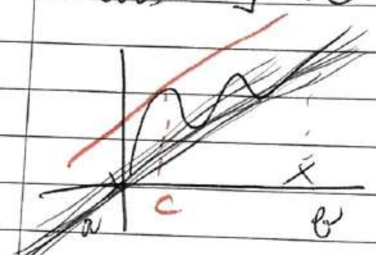
→ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, si P a n racines réelles comptées à ordre de multiplicité.
Alors P' a au moins $n-1$ racines réelles.



TAF : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq :

- f continue sur $[a,b]$.
- f dérivable sur $]a,b[$.

Alors $\exists\, c \in]a,b[$, tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Preuve : Soit g, $[a,b] \to \mathbb{R}$

définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

On a $g(a) = f(a) - 0 = f(a)$

$g(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) = g(a)$

$\exists\, c \in [a,b]$ tq $g'(c) = 0 = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Corollaire : Soit I intervalle ; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

Alors : • Si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$

Alors $f \nearrow$.

• Si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) > 0$.

Alors f ST $\nearrow$.

De m̂ si $f'(x) \leq 0$ et $f'(x) < 0$

$f \searrow$ ⑥ f st $\searrow$.

(Q) ⓐ $x \mapsto x^2$

$f^t \nearrow$ sur $[0, +\infty[$.

Preuve : Soit $x < y \in [a, b]$.

Alors f est continue sur $[x, y]$, et dérivable sur $]x, y[$.

Donc $\exists z \in]x, y[$ tq $f'(z) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ (par TAF)

- Si $f'(z) \geq 0$, comme $y - x > 0$, on a $f(y) - f(x) \geq 0$ d'où $f(x) \leq f(y)$.
- Si $f'(z) > 0$, alors $f(x) < f(y)$

(Th) Prolgt dérivabilité.

Soit I un intervalle, et $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$

Csq : si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en a.

- si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$ alors f a une tangente verticale en a.
- si f' n'a pas de lim en a, tout peut arriver

Ex 6-7

(Th) prolongement dérivabilité. M-ANA.

$a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I & dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

si $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell$ existe alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(x)$

- si $\ell \in \mathbb{R}$, f dér^{ble} en a.
- si $\ell = \pm\infty$, f pas dér^{ble}.

Ex $\boxed{1}$ $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

b) $x \in \mathcal{D}f \iff 2x - x^2 \geqslant 0 \iff x(2-x) \geqslant 0$.

$\iff \begin{cases} (x \geqslant 0 \text{ et } 2 \geqslant x) \\ \text{ou} \\ (\cancel{x \leqslant 0 \text{ et } 2 \leqslant x}) \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \text{ et } 2 \geqslant x \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0,2] \end{cases}$

Donc $\mathcal{D}f = [0, 2]$.

- si $x \in]0, 2[$, alors $2x - x^2 = x(2-x) > 0$.

comme $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$,
$x \longmapsto \sqrt{x(2-x)}$ est dérivable sur $]0, 2[$.

On a juste montré $]0, 2[\subset \mathcal{D}f'$.

De dérivée $f'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

De plus, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty = \frac{1}{0^+}$

& $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0 ni en 2.

$\Rightarrow \mathcal{D}f' =]0, 2[$.

7) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $1-x^2 \geqslant 0 \iff x \in [-1,1]$

et $1-x^2 > 0 \iff x \in]-1,1[$.

Donc $\mathcal{D}f = [-1,1]$ et $]-1,1[\subset \mathcal{D}f'$

- Pr $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

TH Inégt Dérivabilité

$\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

Donc $\mathcal{D}f' =]-1,1[$.

Applicat° TH Rolle & T^h Accroissement Fini.

9 Mq graphe f admet tgte $\boxed{\text{horizontale}}$ en un point $c \in]-1,1[$.

cad $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

- f est continue sr $[-1,1]$.
- f est dérivable sr $]-1,1[$.
- $f(-1) = 1-1+1-1 = 0$ & $f(1) = 0 = f(-1)$

Par TH Rolle, $\exists c \in]-1,1[$, tq $f'(c) = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} (x+1)\sin\frac{2\pi}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- f est dérivable sur $]-1,1]$ (a fortiori continue sur $]-1,1]$).
- De plus $f(1) = 2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0 = f(-1)$.

→ Comme $\forall x \neq -1$,

$|f(x)| \leqslant |x+1|$ q tend vers 0 qd $x \to -1$

On a $\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(-1)$.

Donc f est continue en -1, et de sur $[-1,1]$.

Th. Rolle : $\exists c \in]-1,1[$, $f'(c) = 0$.

Ex 11 TAF Mq $\forall x \in]0,1[, \quad 0 < \sin x < x$.

Pr $x \in]0,1[$,

sin est continu sur $[0,x]$ et dérivable sr $]0,x[$.

Par TAF : $\exists\, c \in]0,x[$,

$$\boxed{\frac{\sin x - \sin(0)}{x-0}}$$

tq $\frac{\sin x}{x} = \sin'(c) = \cos c$

Or, comme $c \in]0,\frac{\pi}{2}[$; $0 < \cos c < 1$.

Donc $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$.

d'où $0 < \sin x < x$.

$\boxed{\text{Méthode 2}}$ $\quad f(x) = \sin x - x$.

$f(0) = 0$, f dérivable sur $[0,1]$ et pr $x \in]0,1[$.

$f'(x) = \cos x - 1 < 0$.

Donc f S^t ↘ sr $[0,1]$.

Donc $f(x) < f(0)$ pr $x \in]0,1[$.

D'où $\sin x - x < 0$.

2) Mq $\forall x > 0, \quad 0 < \arctan x < x$.

Pour $x > 0$, arctan est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$.

Par TAF : $\exists\, c \in]0, x[$,

tq $\dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \dfrac{\arctan x}{x} = \arctan'(c) = \dfrac{1}{1+c^2}$

or comme $c \in]0, x[$.

$0 < \dfrac{1}{1+c^2} < 1$.

Donc $0 < \dfrac{\arctan x}{x} < 1$.

D'où $0 < \arctan x < x$.

M ANA

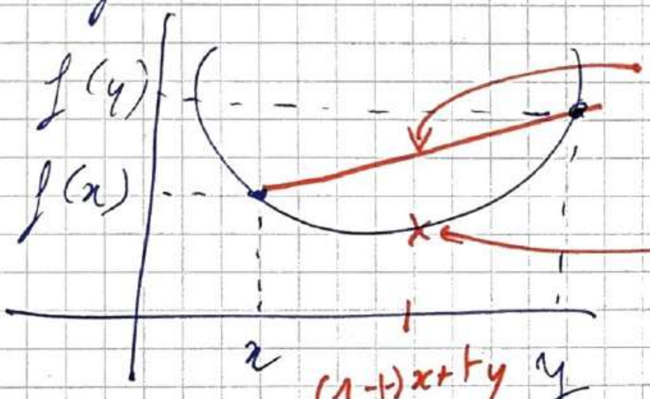
3.3. Convexité

(D) $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ; f continue, on dit que f est <u>convexe</u> si :

$\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t \cdot f(y).$$

$\to$ f est concave si $-f$ est convexe.

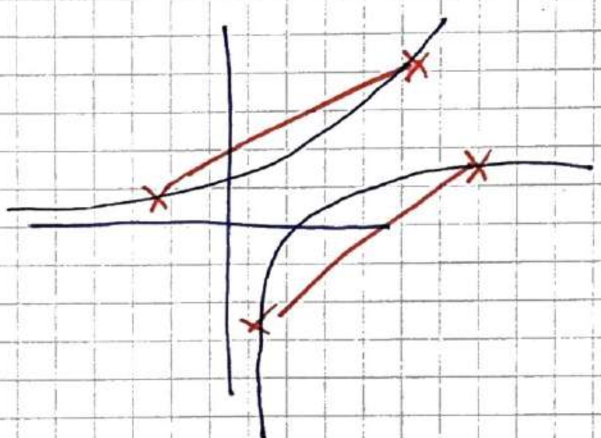


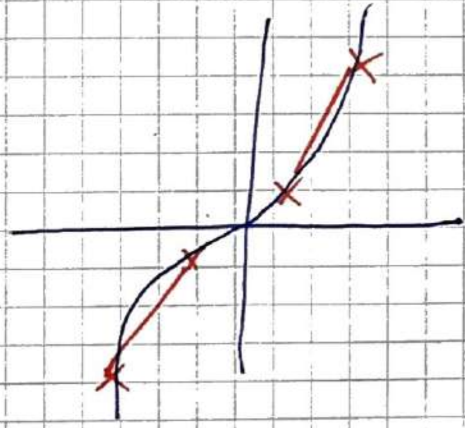
$(1-t)x + ty$ $(1-t)x + ty$

$t = 0$ $t = 1$.

(e) $x \mapsto e^x$ est cvxe.
$x \mapsto \ln x$ est concave.
$x \mapsto x^2$ est concave.

$x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$
concave sur $\mathbb{R}_-$.





(Th) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$,
2 fois dérivable sur $]a, b[$.

1) Si $\forall x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$, alors f convexe.

2) Si $\forall x \in]a, b[$, $f''(x) < 0$, alors f concave.

3) Si pr $c \in]a, b[$, $f''(c) = 0$ en changeant de signe, c est un point d'inflexion.

(R9) Le graphe en un point d'inflexion traverse sa tangente.

@ $x \longmapsto x^3$: $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$.

$\Rightarrow f''(0) = 0$, et $f''(x) < 0$ si $x < 0$.
$f''(x) > 0$ si $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ϕ	$+$	

Donc 0 est un point d'infexion.

ⓐ Etudier la convexité sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x.e^{-x}$.

Dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})x = e^{-x}[1-x]$.

Dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f''(x) = \cancel{+}e^{-x} + -e^{-x}(1-x) = (x-2)e^{-x}$.

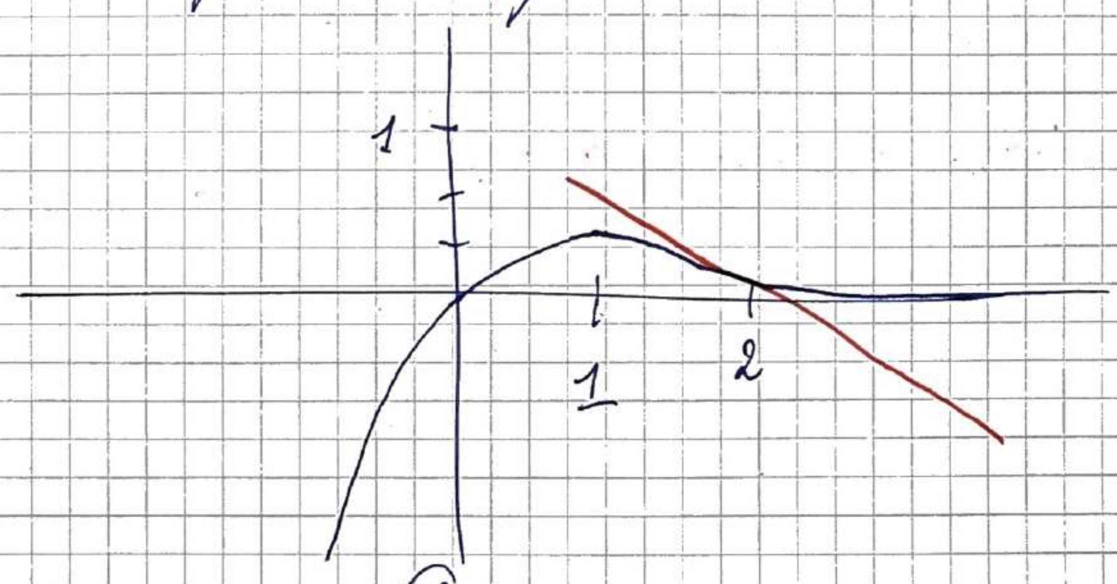
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0

f est concave sur $]-\infty, 2]$.

f est convexe sur $[2, +\infty[$.

2 est un point d'inflexion.

1 est maximum de f.



3.4. Plan étude d'une f réelle.

Pr étudier une fonction $f : x \mapsto f(x)$

Etape $\boxed{1}$ D_f ?

Etape $\boxed{2}$ Étudier cpt-t de f aux bornes de D_f.

e.g. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightsquigarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

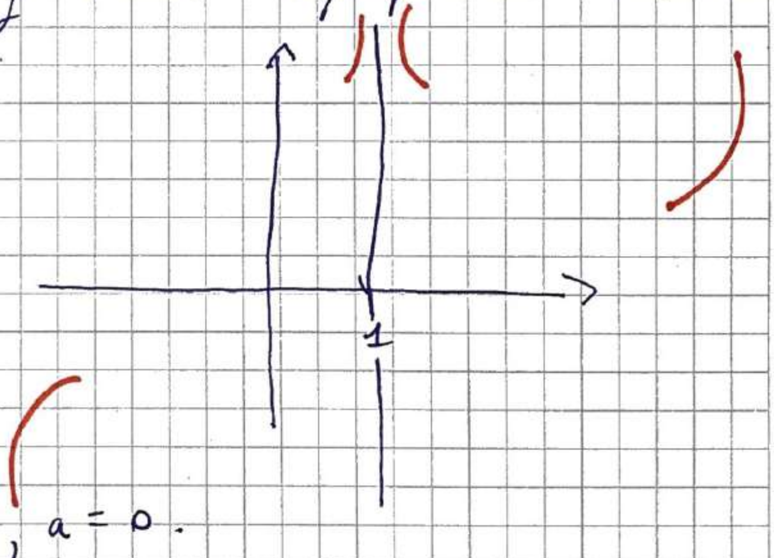
bornes $-\infty, 1^-, 1^+, +\infty$.

(i) borne $a \in \mathbb{R}$

- Calcul $\lim_{x \to a} f(x)$.

→ Ds l'exemple, $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, C_f a une asymptote verticale d'équat° $x = a$.



- Si $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$, f admet un prolgt par continuité en a.

@ $f(x) = x + \left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$, $a = 0$.

(ii) borne $= +\infty$ ou $-\infty$ → Calcul $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

(Dans l'exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

• si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

•• si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors f admet une branche parabolig de direcθ asymptotig $x=0$.

($@$ x^2) "$f'(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$"

•• si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$:

$@_1$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{(x-1)^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$

$@_2$ $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

On calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - l.x$.

• si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - lx$ est infinie, C_f admet une branche parabolile de direction asymptotique $y = lx$.

• si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) - lx = b \in \mathbb{R}$ alors C_f admet en $\pm\infty$ pr asymptote la droite Δ. $y = lx + b$.

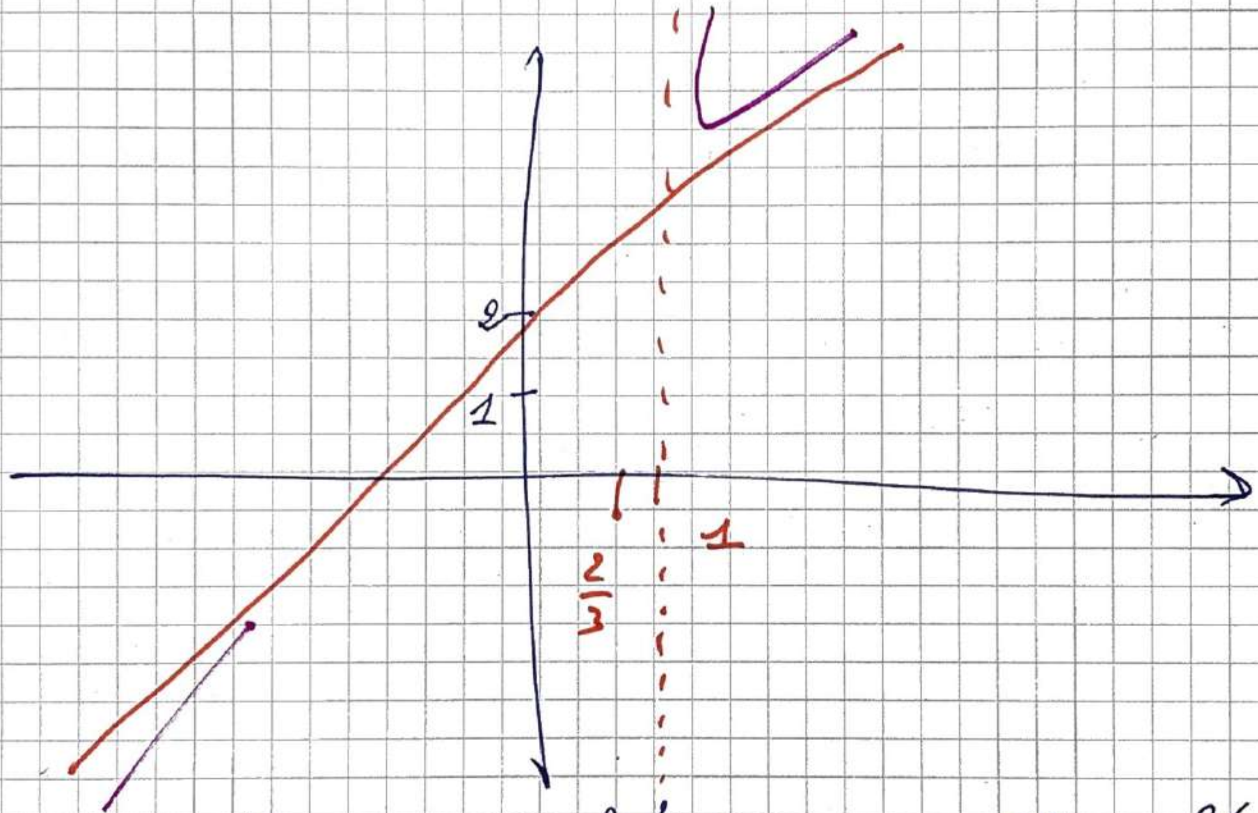
On étudie la posiθ d C_f r à Δ en étudiant le signe de $f(x) - lx - b$.

Ds l'exple, $\quad l = 1$

$$f(x) - 1x = \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - lx = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 2$$

Donc $\Delta : y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



De plus $f(x) - x - 2 = \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} - 2 = \dfrac{2x^2 - x - 2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2}$

$$f(x) - x - 2 = \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

Donc $\mathcal{C}f$ est en-dessous de Δ pr $x < \frac{2}{3}$.

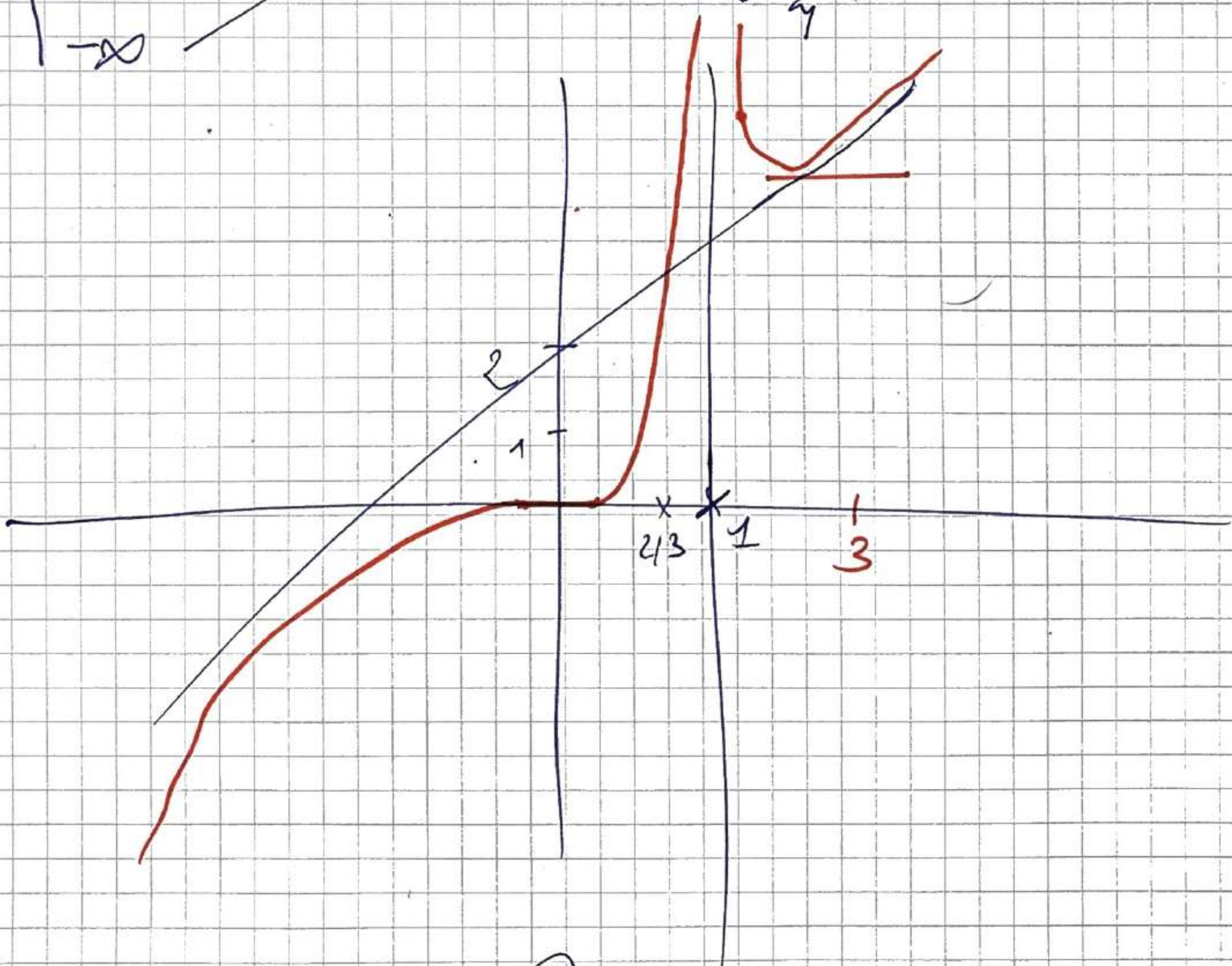
- au-dessus Δ pr $x > \frac{2}{3}$.

Etape 3 : Étude variat°s de f & signe dérivée de f', points critiques & extrema locaux

Ds l'exemple f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$



Etape 4 : Convexité & Pts inflexion de f. par étude signe f''.

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

x	$-\infty$		0		1	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$
$f(x)$		Concave		cxe	||	Convexe

inflexion.

Ex 16 $\quad f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

① Variaθs f u : $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$D_u = [-1,1]$; u est continue sur D_u.

Pour $x \in]-1,1[$, $1-x^2 > 0$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ dérivable sur $]-1,1[$.

Donc u dérivable sur $]-1,1[$.

• Pour $x \in]-1,1[$, $u'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$u'(x) = 2\left(\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Donc $u'(x) > 0$ sur $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$

$= 0$ en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$

< 0 sur $]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$.

De plus $u(-1) = 0$; $u(1) = 0$.

$$u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = -1.$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		1
$u'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) D'après 1) $u([-1,1]) = [-1,1]$.

Donc $\arcsin(u(x))$ définie $\forall x \in [-1,1]$: $\mathcal{D}f = [-1,1]$.

Pr $x \in [-1,1]$, $f(-x) = \arcsin\left(-2x\sqrt{1-x^2}\right)$

arcsin est impaires

$$f(-x) = -\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$f(-x) = -f(x).$$

$]-1,1[$ arcsin dérivable.

3) Pour $x \in]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

$u(x) \in]-1,1[$. dc $x \mapsto f(x)$ dérivable sur $]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

- $f'(x) = u'(x). \arcsin'(u(x))$.

$$f'(x) = 2\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} = 2\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^4-4x^2+1}} \left(= \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pr } x \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\\ \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pr } x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[. \end{cases}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \cdot \arcsin'(x)$$
$$= (2 \arcsin)'\ x .$$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$,

$f(x) = c + 2 \arcsin x$. $\rightarrow \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

car f et arcsin continues sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Pr $x = 0$, on trouve

$$f(0) = \begin{cases} \arcsin(2 \times 0 \sqrt{1-0^2}) = 0 \\ c + 2 \arcsin(0) = c. \end{cases} \Rightarrow \underline{c = 0}.$$

Donc $f(x) = 2 \arcsin x$ sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$f(x) = 2 \arccos(x) + [\ 0$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

$f'(x) = 2 \arccos'(x)$ sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.

$f(x) = 2 \arccos$.

$[-1, 0]$

utiliser impaire

M-AL6 4.3. Plans de l'espace

(D) Soit $\vec{u}$ & $\vec{v}$ 2 vecteurs non colinéaires & A un point de l'espace. Le plan passant par A et engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tq $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $M \in \mathcal{P}(A, (\vec{u}, \vec{v}))$

$\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$.

(Prop) Soit $A(a, b, c)$ & $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ ds $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ RON, non-colinéa

$M(x, y, z) \in \mathcal{P}(A, (\vec{u}, \vec{v})) \iff \exists s, t \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$

$\iff \exists s, t \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

$\iff \boxed{\begin{cases} x = a + s\alpha + t\alpha' \\ y = b + s\beta + t\beta' \\ z = c + s\gamma + t\gamma' \end{cases}}$ c'est une représentation paramétriq du plan P.

(Prop) Soit $A \in \mathcal{P}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$; $\vec{u}$ & $\vec{v}$ non colinéaires.

$\boxed{M \in \mathcal{P} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0}$

$\iff \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

|| $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
|| Tout vecteur colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan P.

(DM) Soit $M \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

$\exists s, t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$

$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}^2$

$\iff \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (s\vec{u} + t\vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$

$\iff s(\underbrace{\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})}_{0}) + (\underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})}_{0})$

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

(1)

Équat° cartésienne de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ $(\vec{u}, \vec{v})$ dirige $\mathcal{P}$.

on a $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ | $\iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = d(x-a) + e(y-b) + f(z-c)$.

• $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff \boxed{dx + ey + fz + g = 0}$ équat° cartésienne.

$(\vec{u}, \vec{v})$ dirige $\mathcal{P}$

$\Downarrow$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ normal $\mathcal{P}$.

4.4. Droites dans l'espace

(D) Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tq $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ st colinéaires.

càd $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda . \vec{u}$

Représentat° Paramétriq

$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ds $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D(A, \vec{u}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda . \vec{u}$

$\iff \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

EC → Point & $\vec{n}$: $\vec{AM} . \vec{n} = 0$

EP → $\det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \vec{AM} . (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ (2)

$\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \vec{v} . \vec{u} = 0$

$\iff x'\alpha + y'\beta + z'\gamma = 0$

On a $\begin{cases} x = \lambda\alpha + a \\ y = \lambda\beta + b \\ z = \lambda\gamma + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta x - \alpha y = \beta a - \alpha b \\ \gamma y - \beta z = \gamma b - \beta c \end{cases}$ l'intersect° 2 plans : 1 droite.

$\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\vec{v'}$ non colinéaire à $\vec{v}$.

Prop 4.2. $\vec{n}(a, b, c)$ $\vec{n'}(a', b', c')$: 2 vecteurs non colinéaires

$M(x, y, z)$ vérifiant $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

est la représentat° cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Gplt 1) 2 d // $\Leftrightarrow$ vcts direct^{rs} colinéaires

2) 2 d orthogonales $\Leftrightarrow$ vd ~~...~~ orthogonales.

3) 2 d $\perp$ $\Leftrightarrow$ sécantes & orthogonales.

Prop 4.3 Soit D_1 & D_2 deux droites non parallèles (ds espace).

Il existe <u>une uniq</u> droite Δ perpendicul^{re} à D_1 & D_2.

Si $\vec{v_1}$ vecteur direct° D_1 & $\vec{v_2}$ direct° D_2.

alors <u>$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$</u> est un <u>vecteur directeur</u> de Δ.

<u>Méthode de construct°.</u>

$D_1(A_1, \vec{v_1})$, $D_2(A_2, \vec{v_2})$

D_1 & D_2 ne st pas // de $\vec{v_1}$ & $\vec{v_2}$ ne st pas colinéaires

On considère le $\vec{v} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \neq 0$.

On considère le plan $P_1(A_1, \vec{v_1}, \vec{v})$.

$P_2(A_2, \vec{v_2}, \vec{v})$.

$P_1 \cap P_2 = \Delta$ droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

$\vec{v} \perp \vec{v_1} \Rightarrow D_1$ & Δ st perpendiculaires.

$\vec{v} \perp \vec{v_2} \Rightarrow D_2$ & Δ st $//$.

D) La distce entre D_1 & D_2

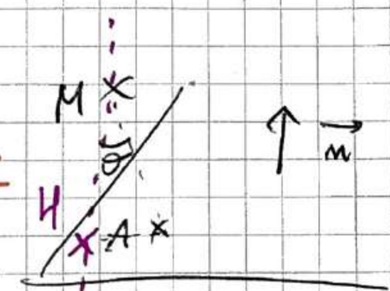
$$d(D_1, D_2) = \| \overrightarrow{H_1 H_2} \|$$

où $H_1 = D_1 \cap \Delta$ & $H_2 = D_2 \cap \Delta$.

où Δ est la perpendicul^{R} commune à D_1, D_2.

4.5. Calcul des distances

Prop. 4.4. Distance d'un point à un plan.



Soit H projeté orthogonal de M sur P.

$$d(M, P) = \| \overrightarrow{MH} \|$$

on a $$\boxed{d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

où $A \subset P$, $\vec{n}$ vecteur normal à P.

$$\boxed{d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}}$$

Si $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et $P : ax + by + cz + d = 0$.

$$\boxed{d(M,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(DM) Ds le plan défini par A, M, H.

$\theta = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{AM})$ $\qquad |\cos\theta| = \dfrac{\|\overrightarrow{MH}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

$$d(M,P) = \|\overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot |\cos\theta| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} \cdot |\cos\theta|$$

$$d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

• $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'où $d(M,P) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

$$d(M,P) = \frac{|a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

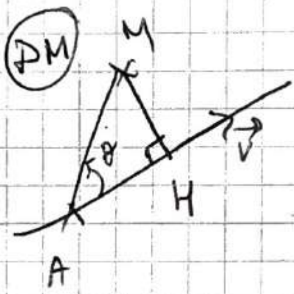
$A \in P$ d'où $a x_A + b y_A + c z_A + d = 0$

Prop 4.6 : Distance entre un point & une droite.

$D(A, \vec{v})$ & M un point espace.

$$d(M,D) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

(DM)



$|\sin\theta| = \dfrac{\|\overrightarrow{HM}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ $\qquad \Leftrightarrow \|\overrightarrow{HM}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot |\sin\theta|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{HM}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} |\sin\theta|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{HM}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

Prop 4.1.6 $D_1(A_1, \vec{v_1})$ & $D_2(A_2, \vec{v_2})$ $D_1 \nparallel D_2$

Distce entre deux droites.

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}\|}$$

DM Soit Δ la perpendicul^re commune à D_1 & D_2.

$D_1 \cap \Delta = \{H_1\}$ & $D_2 \cap \Delta = \{H_2\}$.

D'après Relat° Chasles, on a.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}$$

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) = \det(\overrightarrow{A_1H_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + \det(\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + \det(\overrightarrow{H_2A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$$

$A_1 H_1 \in D_1$ de $\overrightarrow{A_1H_1}$ et $\vec{v_1}$ st colinéaires.

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) = \underbrace{\det(\overrightarrow{A_1H_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2})}_{=0} + \det(\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + \underbrace{\det(\overrightarrow{H_2A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})}_{=0}$$

$$\det(A_1A_2, v_1, v_2) = \det(\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) = \overrightarrow{H_1H_2} \cdot (\vec{v_1} \wedge \vec{v_2})$$

$$|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})| = \|H_1H_2\| \cdot \|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}\| \cdot \underbrace{\cos(\text{angle})}_{1}.$$

$$\|\overrightarrow{H_1H_2}\| = d(D_1, D_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}\|}.$$

Ex 16 : $A(1,0,1)$; $\vec{n}(1,-1,2)$

1) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P \iff \vec{AM}\cdot\vec{n}=0$ $A(1;2;1)$

$\vec{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0$ EC

$\iff x-1-y+2z-2=0 \iff \boxed{x-y+2z-3=0}$

EP de P $\begin{cases}x=s\\3+y=s+2t\\z=t\end{cases} \iff \begin{cases}x=s\\y=s+2t-3\\z=t.\end{cases}$, $s,t\in\mathbb{R}^2$.

$\iff \begin{pmatrix}x\\y+3\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$-9x-7y+12z+11=0$

$-9-14+12+11=0$

$-23+23=0$

$A'\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\in P \iff \vec{A'M}=s\vec{u}+t\vec{v}$, $s,t\in\mathbb{R}$.

2) EC & EP passant par $A(1,2,1)$ & dirigé par $\vec{u}(4,0,3)$ & $\vec{v}(1,3,-1)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}-9\\-7\\12\end{pmatrix}=\vec{n}$ $\Rightarrow -9x-7y+12z+d=0$

$-9+7\times2+12=-d$

$d=$ ~~11~~

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P(A,\vec{u},\vec{v})$ $\Rightarrow -9x+7y+12z+d=0.$

$\iff \exists s,t\in\mathbb{R}^2,\ \vec{AM}=s\vec{u}+t\vec{v}.$

$\iff \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=4s+t+1\\y=3t+2\\z=3s-t+1.\end{cases}$

$\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&0&3\\1&3&-1\end{matrix} = -\vec{j}\,(-4-3)$

(7) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal au plan.

2) ~~passant par A(1,1,1) & B(2,0,1)~~

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$-9x + 7y \; 12z - 17 = 0$

3)

$\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{AC}$

A( )
B( )
C( )

4) $P \perp D \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

$A \in P$

$\vec{v}$ vecteur directr de D

$\vec{v} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{v}$ ~~//~~ normal à P

All ex16

17

21