C1 Suites de fonctions

D₁ (f_n) CV **simplement (ou ponctuellement)** vers f, si $\forall x \in A$, la suite numériq $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$.

$\rightarrow \forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(N dépend de x et ε : $N_{\varepsilon, x}$).

D₂ (f_n) CV **uniformément** vers f si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

P₃ soit sdf (f_n) CV simplmt vers $f : A \to \mathbb{R}$
si $\exists$ une suite de nbres $(s_n)_n$ ne dépendant pas de x, CV vers 0 tq
$$\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq s_n.$$
alors la CV de (f_n) vers f est **uniforme**.

P₄ soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV simplement vers f
$f : A \to \mathbb{K}$, si $\exists\, x_n \in A$,
$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$$
$\Rightarrow (f_n)$ ne CV pas unif. vers f sur A.

Th₅ (Crit. de Cauchy Uniforme)
soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$, CV unifom.t vers $f : A \to \mathbb{K}$ ssi
$$\forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

⚠ CV uniforme cont pr somme MS pas pr produit.

Th₆ (Continuité) :
soit sdf (f_n) cont sur $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV uniform. vers f $f : A \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ f cont sur A.

ie CV unifor. conserve continuité MS pas CV simple.

P₇ (Prolongement) :
soit $I = [a, b[$ & sdf cont (f_n) sur $[a, b]$ CV uniform. sur I vers f $f : I \to \mathbb{K}$, alors f est prolongeable par continuité à $[a, b]$ & la suite (f_n) CV unif. vers f (prolongée) sr $[a, b]$.

Th₈ soit sdf cont (f_n), $f_n : I = [a, b] \to \mathbb{K}$ CV uniform vers f $f : I \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow$
$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Th₉ (Dérivat°) :
soit sdf $(f_n) : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $C^1([a, b])$ tq
(i) (f_n) CV simplmt vers f $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(ii) (f_n') CV uniformt vers g $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $g = f'$. D+, (f_n) CV uniform vers f.

C2 Série de foncts

D1 (u_n) sdf, $u_n : A \to \mathbb{R}$,

- série de f, on note $\sum_n u_n$ CV **simplement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si la Sdf (f_N) ; $(f_N)(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ CV simplement vers f, appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

  $\forall x \in A, \lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = 0$.

- La même Sdf sera CV **uniforme** vers f si la ste (f_n) CV uniformément vers f.

  $\lim_{N\to\infty} (\sup_{x\in A} |R_N(x)|) = 0$.

TH (Cauchy Uniforme)

Une série $\sum_n u_n$ **CV uniformément** sur A ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \forall x \in A,$

$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$.

D2 (Normalement CV)

$\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A, s'$\exists$ une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nbrs réels tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,$

$|u_n(x)| \leq \alpha_n$, série numériq $\sum_n u_n$ CV.

TH 2

si série $\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A alors elle est **uniformément** CV sur A.

C2 Série de foncθs

D1 (u_n) sdf, $u_n : A \to \mathbb{R}$,

- série de f, on note $\sum_n u_n$ CV **simplement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si la Sdf (f_N) ; $(f_N)(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ CV simplement vers f, appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

$\forall x \in A$, $\lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = 0$.

- La mê Sdf sera CV **uniforme** vers f si la ste (f_n) CV uniformément vers f.

$\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in A} |R_N(x)| \right) = 0$.

TH (Cauchy Uniforme)

Une série $\sum_n u_n$ **CV uniformément** sur A ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$, $\forall x \in A$, $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$.

D2 (Normalement CV)

$\sum_n u_n$ est **normalement CV** sur A, s'$\exists$ une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nbrs réels tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $|u_n(x)| \leq s_n$, série numériq $\sum_n u_n$ CV.

TH 2 si série $\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A alors elle est **uniformément** CV sur A.

TH (Abel Uniforme) soit sdf (u_n), (v_n) sr $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$, $v_n : A \to \mathbb{K}$ si

(i) $\forall x \in A$, suite $(u_n(x))_n > 0$ et $\searrow$

(ii) u_n CV U.N $\longrightarrow 0$ sur A

(iii) $\exists M > 0 \mid \forall x \in A$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{p=n}^{m} v_p(x) \right| \leq M$.

$\Rightarrow \sum_n u_n . v_n$ CV U.N sr A et $|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x). v_n(x) \right| \leq M |u_{N+1}(x)|$

Coro sdf (v_n), $v_n : A \to \mathbb{K}$, ste de réels $(\alpha_n)_n$ si $\forall x \in A$, $u_n(x) = \alpha_n . v_n(x)$ &

(i) suite $(\alpha_n)_n \geq 0$, $\searrow$, CV vers 0.

(ii) $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $|v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV U.N. sr A.

TH (Continuité) (u_n) sdf, $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{K}$, si $\sum_n u_n$ CV U.N sr $A \Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ **cont** sr A.

TH (Intégraθ) (u_n) sdf cont, $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

si $\sum_n u_n$ CV U.N sr $[a,b] \Rightarrow \sum_n \int_a^b u_n(x)\,dx$ CV

et dc $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x) \right) dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\,dx$.

TH (Dérivaθ) soit sdf (u_n) : $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C^1([a,b])$,

(i) $\sum_n u_n \xrightarrow{CV\ S.}$ sr $[a,b]$

(ii) $\sum_n u_n' \xrightarrow{CV\ U.N}$ sr $[a,b] \Rightarrow f(x) = \sum u_n(x)$ est classe $C^1([a,b])$

et $\left(\sum u_n(x) \right)' = \sum u_n'(x)$ et dt, $\sum u_n$ CV U.N sr $[a,b]$.

C3 Séries Entières.

I/ D SE & Rayon CV

D Série entière : $\sum_n U_n(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$),
$U_n(z) = a_n \cdot z^n$ et $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$: $\sum a_n \cdot z^n$.

(NB : les polynômes st SE et $a_n = 0$

Th (Rayon de CV)
soit SE $\sum a_n \cdot z^n$, $\exists R \in [0, \infty[$ tq

- 1) si $|z| < R$ (R fini ou non) $\Rightarrow \sum a_n \cdot z^n$ CV abslmt
  $\Leftrightarrow \sum |a_n| |z|^n$ CV.
  2) si $|z| > R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV $\left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0\right)$

→ RDC uniq
→ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$: disq de CV de SE.
→ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) =]-R, R[$.

L (d'Abel)
soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n \cdot z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n \cdot z^n$ CV.

- **Déterminat de R** (svt Cauchy ou d'Alembert)

P soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$
2. si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

(convent° $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$). ⚠ si $a_n z^{2n}$, ① ① $\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n}\right|$.

(C3) Séries Entières.

I/ (D) SE & Rayon CV

(D) Série entière : $\sum_n u_n(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$),

$u_n(z) = a_n \cdot z^n$ et $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$: $\sum a_n \cdot z^n$.

(NB: les polynômes st SE et $a_n = 0$

Th (Rayon de CV)

soit SE $\sum a_n \cdot z^n$, $\exists R \in [0, \infty[$ tq

1) si $|z| < R$ (R fini ou non) $\Rightarrow \sum a_n \cdot z^n$ CV abslmt
$\iff \sum |a_n| |z|^n$ CV.

2) si $|z| > R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV $\left(\iff \lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0 \right)$

→ RDC uniq

→ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < R \}$: disq de CV de SE.

→ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) =]-R, R[$.

L (d'Abel)

soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n \cdot z^n$ CV.

Déterminat° de R (svt Cauchy ou d'Alembert)

P soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

2. si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

(convent° $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$). ⚠ si $a_n z^{2n}$, ⊕ ⊕ $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n} \right|$.

P soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE et R_a, $\sum b_n \cdot z^n$ SE et R_b Alors

(i) $\forall n \geq 0$, $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

(ii) $a_n = O(b_n) \iff \exists M > 0, |a_n| \leq M \cdot |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

(iii) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$.

@ $f(x) = \sum e^{\cos(n)} |x|^n$; étude $\sum e^1 \cdot |x|^n$

P (Somme & Produit)

soit $\sum a_n \cdot z^n$, $\sum b_n \cdot z^n$, R_1, R_2 → $c_n \cdot z^n = (a_n + b_n) z^n$
→ $d_n \cdot z^n = (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) z^n$

ont ces séries RDC $\geq \min(R_1, R_2)$.

⇒ D+, si $|z| < \min(R_1, R_2)$: → $\sum c_n \cdot z^n = \sum a_n \cdot z^n + \sum b_n \cdot z^n$

→ $\sum d_n \cdot z^n = \left(\sum a_n \cdot z^n\right)\left(\sum b_n \cdot z^n\right)$.

(si $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min(R_1, R_2)$; si $R_1 = R_2 \Rightarrow R > \min(R_1, R_2)$)

P (Dérivat° & Intg°)

soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE et (R) → dériv° $\sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$
→ intg° $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$
} ont m̂ R.

Ppté Var Réelle

Th soit $\sum a_n \cdot x^n$ SE, $a_n \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{R}$, RDC R ; soit $f(x)$ sa somme,

$D_f(x) =]-R, R[\Rightarrow f$ de $C^\infty(]-R, R[)$ & ses dérivés s'obtiennt en dérivant terme à terme SE successives.

D+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Développem^t en SE :

D $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en SE au $\mathcal{V}_{x_0} \in I$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ & $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,
$\sum a_n (x - x_0)^n$ CV & a pr somme $f(x)$.

P (condi$^\circ$ nécessR mais pas suffisante)
Pour que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$, il faut que :
(i) $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Rq : $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{0 \le j \le k-1} (n-j) \right) a_n \cdot x^{n-k} = \sum_{n \ge 0} \left(\prod_{1 \le j \le k} (n+j) \right) a_{n+k} x^n$

⚠ Dev SE ?
$\to \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ CV ? $\to$ CV-t^{elle} vers $f(x)$?

contre @ Cauchy (1822) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

PR $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$, $\deg\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3n \Rightarrow$ série Taylor nulle car
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ dc $\sum_{n \ge 0} a_n (x)^n = 0$ or $f \neq 0$.

D Une f dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$: analytiq en x_0.

P (Condi$^\circ$ suffis^{te}) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty(I)$ soit analytiq $\mathcal{V}_{x_0}$
est $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[= J$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{|x - x_0|^n}{n!} M_n \right) = 0 \quad \text{où} \quad M_n = \sup_{x \in J} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Pratiq du DL en SE :

1. FF Taylor pt $\to$ av^{ec} terme Gén^{al} de série ; $\to$ mq reste de Lagrange $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

2. $\mathcal{C}$ dev connus, op. connus, $+, \times, \div, \int, (\cdot)'$, CDV.

@
- $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$, $R = 1$ par ff Taylor
- $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $R = 1$ par Intég$^\circ$
- $x \mapsto x^2$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$ par CDV
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $R = 1$ par intégra$^\circ$
- $e^x = 1 + x + x^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $R = \infty$ par FF Taylor.
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \ge 0} x^n$ $\forall x \in]-1, 1[$ • $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum (-x)^n = \sum (-1)^n x^n$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$, • $\frac{1}{1-x^2} = \sum x^{2n}$

Thm d'Abel :

soit $f(x) = \sum a_n x^n$, $R > 0$; supposons $\sum\limits_{n \geq 0} a_n R^n$ CV

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to R^-} f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n R^n$.

(si $x = -R$, $\sum a_n (-R)^n = \sum (-1)^n a_n R^n$ CV $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -R^+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n$.

Appli

- $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$; $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV p séries altern

Thm $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} -\ln(2) = \sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$,

$x = 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} \underset{\pi/4}{\underset{\shortparallel}{\arctan(1)}} = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

⚠ Récipoq fausse : ex $f(x) = \sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ mais $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n$ DV.