

Probabilités DiscrètesC.0 : Introduction

- pas de proba si on pt t' prévoir
- éprouve aléatoire : prévoir ?
 - lancer pièce de monnaie.
 - lois de le hasard q ne s'exprime q pr des nrs assez grds.

@ usine, 10 000 bches plastiques
 si 100 → 7 pb. ≈ 700 défauts

@ municipalité, 10 000 votants
 interrogés, si 100 votants → 7 bidules
 ≈ 700 pr bidules

- L'DH dépeint :
 - nbr objets (pas de la nature objets) → modélisat^{modélisat} mathématiques
 - s'exprim + d'autant mieux q nbr d'expériences est + grd. → Poi des grds nbrs
 - on ne cherche pas "mais" proba d'un événement MS la meilleure proba contenue de l'inform^{TV} disponible → tribus, probas conditionnelles
 - avec outils de la théorie des probabilités

Probabilités : faire des maths pr prévoir ou expliquer

(C1) Espaces probabilisésI/ Événements observables & leurs ensembles

- on réalise une xp aléatoire.
- on la modélise vis-à-vis d'une question qu'on se pose dessus.
 - Simplifier & mathématiser info^{info}
- on note Ω : l'ens des résultats possibles de l'expérience.

- ces résultats s'appellent : événements élémentaires.
- les événements observables st les choses q't on pt dire après l'expérience si elles se st produites ou non! (représentés par parties Ω)

@ un g & lst en Ω : quel groupe?

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,2), (1,1), (1,3), (2,1), \dots, (3,3)\} \\ &= \{1,2,3\}^2 \quad 9 \text{ résultats possibles}\end{aligned}$$

• "ils st du groupe 1": (1,1) est événement élémentaire.

	Langage probabiliste	Écriture ensembliste
"il est gr. $\neq 5$ ": $\{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\} = A \subset \Omega$	• événement certain	• Ω contient 6 résultats possibles
"il ne est pas gr. 1": $\{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\} = B \subset \Omega$	• événent impossible	∅ aucun résultat possible
"il ne est pas gr. 1 \textcircled{R} gr. \neq ": $\{(2,3), (3,2)\} = A \cap B$.	w est événent élémentaire	$w \in \Omega$
"il ne est pas gr. 1 \textcircled{ou} gr. \neq ": $A \cup B$. $A \cup B = \Omega \setminus \{(1,1)\}$.	A est un événent (observable)	$A \subset \Omega$ A est une partie de Ω $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
"il n'est pas vrai q il ne est pas gr. 1": $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\} = B^C = \Omega \setminus B$.	$A \& B$ st réalisés	$A \cap B$
(R) nota \overline{B} maladroité adhérance en topologie, on utilise B^c .	A ou B est réalisé	$A \cup B$
	A et B st incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B st disjoints
	A implique B	$A \subset B$
	n A est réalisé alors B est réalisé.	
	pour A_1, A_2, A_3, \dots une suite évén.: au moins un des A_i est réalisé	$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$
	$\exists i \in \mathbb{N}^*, A_i$ est réalisé	
	tous les A_i st réalisés	$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$
(2) $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i$ est réalisé.		

II / Rappels sur le dénombrement & les séries

*) le nombre d'ordres possibles par n objets.

(nbre de biject de $\{1, 2, \dots, n\}$ vers E de cardinal n)

$$[n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1]$$

*) le nombre de façons de prendre p objets
parmi n (nbr de parties à p élém
d'un ensemble à n elt).

$$C_m^p = \binom{m}{p} = \frac{m!}{p! (m-p)!}$$

*) un ensemble infini E est dénombrable

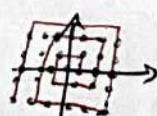
s' \exists une bijact de \mathbb{N}^* vers E ,
i.e. les élts de E forment une suite.

$$E = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dénombrable

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ idem

$\mathbb{Z}^2 = \{(-1, 0), \dots\}$



$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ dénombrable}$$

comme une partie de \mathbb{Z}^2

\mathbb{R} n'est pas dénombrable.

*) FF du Binôme

$$[(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}]$$

*) séries géométriques :

$$x \neq 1, \quad \sum_{k=M}^N x^k = \frac{x^M - x^{N+1}}{1-x}$$

$$|x| < 1, \quad \sum_{k=M}^{\infty} x^k = \frac{x^M}{1-x}$$

*) série exponentielle :

$$[\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}]$$

Exemple : (Tir à l'arc) @ ss de Bernoulli. $E = \{\text{on ne touche jamais la cible}\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Bon & Clara tire à tour de rôle.

Bon commence. Le premier q touche la cible a gagné. - B, C, E st 2 à 2 incompatibles.

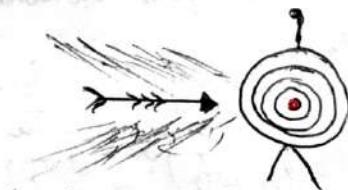
$A_i = \{\text{la } i^{\text{e}} \text{ flèche touche la cible}\}$

$B = \{\text{Bon gagne}\}$

$C = \{\text{Clara gagne}\}$

$D_m = \{\text{la première flèche q touche est la } m\text{-ième}\}$

$D_m = \{\text{1}^{\text{o}} \text{ tir rate et } 2^{\text{o}} \text{ tir rate et ... et } (m-1)^{\text{o}} \text{ tir rate et } m^{\text{o}} \text{ tir réussi}\}$



$D_m = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{m-1}^c \cap A_m$

$D_m = \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c \right) \cap A_m$

$B = D_1 \cup D_3 \cup D_5 \cup \dots$

$B = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{2j+1} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2j} A_i^c \right) \cap A_{2j+1} \right)$

$C = D_2 \cup D_4 \cup D_6 \cup \dots$

$C = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2j-1} A_i^c \right) \cap A_{2j} \right)$. ④

- les D_m st 2 à 2 incompatibles (si $m \neq n$, $D_m \cap D_n = \emptyset$)
- les A_i ne st pas incompatibles.

on pt prendre $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ensemble des suites de 0 et 1

$A_i = \{w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \Omega, w_i = 1\}$

$E = \{(0,0,0,\dots)\}$ ne contient que la suite nulle.

III / Une probabilité est une fonction d'ensembles

soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une xp.

on note \mathcal{F} : ens évts observables :

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega \quad \text{ie } \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ \mathcal{F} n'est pas partie de Ω .

→ Évts observables st ce qd on sait dire après q'ils st réalisés ou non. (cisi ce art: probabilité de réaliser)

On impose que : ⑦ \mathcal{F} est tribu si :

- (i) • $\Omega \in \mathcal{F}$: on sait dire si est cert^{a env} bien.
- (ii) • si $B \in \mathcal{F}$ alors $B^c \in \mathcal{F}$ (est réalis^é voir)
voir et non réalis^é
- (iii) • si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

• si on a une suite d'événements tous observables, on sait observer si au moins un d'entre eux s'est produit.

Un ens. \mathcal{F} ayant ces propriétés s'appelle une tribu sur Ω . (\mathcal{F} est ens d'ens).

⑧ : si Ω est fini ou dénombrable, on choisit le + fort $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

On impose que : ① F est tribu sur Ω : d'éps de F 2×2 disjoint

- (i) • $\Omega \in F$: on sait dire si c'est arrivé ou non.
- (ii) • si $B \in F$ alors $B^c \in F$ (est réalisé ou non et non réalisé)
- (iii) • si $A_1, A_2, A_3, \dots \in F$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Si on a une suite d'événements tous observables, on sait observer si au moins un d'entre eux s'est produit.

Un ens. F ayant ces propriétés s'appelle une tribu sur Ω . (F est un σ -ens).

④ : si Ω est fini ou dénombrable, on choisit le σ -art $F = \mathcal{P}(\Omega)$

⑤ Une probabilité sur (Ω, F) est l'application sur F dans $[0, 1]$ σ -additive de masse totale 1:

$$P: F \rightarrow [0, 1] \quad \text{tq}$$

$$A \mapsto P(A) \quad (\text{masse totale})$$

$$\bullet P(\Omega) = 1 \quad (\text{masse totale})$$

$$\bullet \sigma\text{-additivité}: P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{pour la suite } \textcircled{5} (A_i)_{i \geq 1}$$

$\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$
(@ faire de maths et physiq ne correspond pas).

On dit que (Ω, F, P) est un espace probabilisé.
 (Ω, F) espace probabilisable.

@ (fin à l'arc).

Pour modéliser situation où chaque flèche a $\frac{1}{10}$ de toucher. On construit (Ω, F, P) tq

$$P(D_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ben: B: "Ben gagne"

$$P(B) = P\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} D_{2j+1}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} P(D_{2j+1})$$

$$P(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{2j+1-1} = \frac{1}{10} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{81}{100}\right)^j$$

$$P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{81}{100}} = \frac{10}{19}.$$

Ben est avantagé car il tire le premier.

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(D_{2j}) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{2j-4} \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{81}{100}\right)^j \\
 &= \frac{1}{9} \times \frac{81/100}{1 - \frac{81}{100}} = \frac{9}{19}
 \end{aligned}$$

Pptés des probas

Toute probabilité P sur (Ω, \mathcal{F}) vérifie:

- 1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$
- 2) si $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(disjoints) additivité
- 3) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$.
- 4) si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- 5) $\forall A, B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
pour A_1, \dots, A_m : FF de Poincaré ! ...

6) Continuité Séquentielle \mathcal{T}/\mathcal{V} :

- si la suite \nearrow d'evts $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

- si la suite \searrow d'evts $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n)$$

7) si evts gg (\hat{m} non disjoints):

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Preuves :

1) $A_1 = \emptyset, A_2 = \emptyset, \dots$ sont des événements deux à deux disjoints

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

i.e. $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \geq \underbrace{P(\emptyset)}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{P(\emptyset)}_{2^{\text{e}} \text{ terme}}$

dc $\underbrace{P(\emptyset)}_{\in [0,1]} \leq 0$. dc $P(\emptyset) = 0$.

2) additivité:

si A_1, A_2, \dots, A_n deux à deux disjoints

$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = \emptyset, A_{n+2} = \emptyset, \dots$

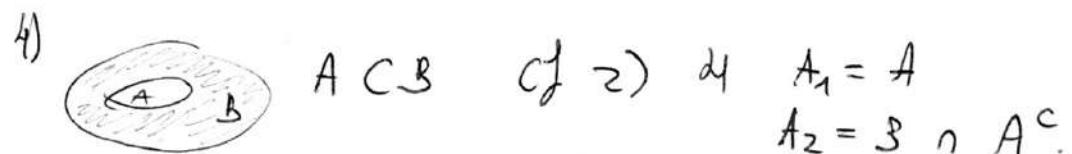
sont deux à deux disjoints.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \xrightarrow{=0}$$

3) cf 2) si $A_1 = A$ et $A_2 = A^c$.

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$$



$$P(B) = P(A \cup A^c) = P(A) + \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0} \geq P(A)$$

5) cf 2)

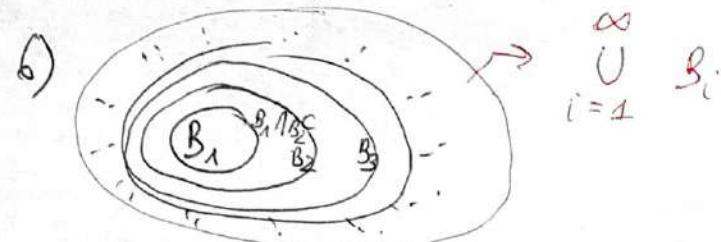


$$\begin{aligned} A_1 &= A \cap B^c \\ A_2 &= A \cap B \\ A_3 &= A^c \cap B \end{aligned}$$

$P(B)$ cf 2)

$$P(A \cup B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \underbrace{P(A_1)}_{P(A)} + \underbrace{P(A_2)}_{P(A)} + P(A_3)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 \cup (B_2 \cap B_1^c) \cup (B_3 \cap B_2^c) \cup \dots$$

$$= B_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} (B_i \cap B_{i-1}^c) \right) \leftarrow \begin{matrix} \text{à 2} \\ \text{disjoints} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= P(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(B_i \cap B_{i-1}^c) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P(B_1) + \sum_{i=1}^n P(B_i \cap B_{i-1}^c) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(B_1 \cup (B_2 \cap B_1^c) \cup (B_3 \cap B_2^c) \cup \dots \cup (B_n \cap B_{n-1}^c)\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).
 \end{aligned}$$

• La continuité séquentielle \downarrow s'obtient en appliquant ceci à $B_1 = C_1^c \subset B_2 = C_2^c \subset \dots$

7) \rightarrow cf 5)

\rightarrow DM par récurrence

\rightarrow user continuité séquentielle \Rightarrow

© tir à l'arc

$E = \{ \text{on ne touche jamais la cible} \}$

$E = \{(0,0,\dots,0)\} \neq \emptyset$. Δ

$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ où $E_m = \{ \text{les } n \text{ premiers tirs ratent la cible} \}$

$$E = D_1^c \cap D_2^c \cap \dots \cap D_m^c = \left(\bigcup_{i=1}^m D_i \right)^c$$

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^m D_i\right) &= \sum_{i=1}^m P(D_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \\
 &\quad \text{2 à 2 disjts} \\
 &= \frac{1}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m}{1 - \frac{9}{10}} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m
 \end{aligned}$$

$$P(E_m) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^m D_i\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^m$$

Refuser hypothèse $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

$$\text{dc } P(E) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(E_m)$$

$$E \text{ est evt } \underline{\text{négligeable}} \quad (P(E)=0) \quad = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10}\right)^m = 0$$

ΔE n'est pas event impossible. ($E \neq \emptyset$).

(P) (i) si Ω est un ens fini :

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

► se donner une proba P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

revient à se donner un n -uplet (p_1, p_2, \dots, p_n) dans $[0,1]$ tq $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

et on pose $P(\{w_i\}) = p_i$

► cas particulier de l'équiprobabilité :

si les p_i sont tous égaux ($p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$),

on a $\forall B \subset \Omega$, $P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nbr cas favorables}}{\text{nbr cas possibles}}$

⚠ Seulement il y a EQUIPROBABILITÉ.

(ii) si Ω est infini dénombrable :

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots\} = \{w_i\}, i \in \mathbb{N}^*$$

► de donner une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ revient à se donner une série de nombres

$p_i \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ et à poser

$$P(\{w_i\}) = p_i. \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

► équiprobabilité impossible sur un ens infini dénombrable !

(iii) Ω pt être ∞ non dénombrable

ds ce cas $\sum_{w \in \Omega} P(\{w\})$ pt prendre

n'importe quelle valeur entre 0 et 1 !

$$P(\Omega) = 1 \text{ reste vrai.}$$

@ fixe à l'arc

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$$

$$w = (u_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ et } u_i \text{ suite de 0 ou 1.}$$

on note $F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}$ l'ensemble des suites q' commencent par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$,

par l'ensemble F_{0100} est l'ensemble des cas où les tirs commencent par "1 rate, 1 réussi, 1 rate, 1 rate".

si $F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m}$ est réalisé, il y a exactement $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ de tirs réussis parmi les m premiers.

Avec 1 chance sur 10 de réussite :

$$P(F_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{m - \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i}$$

Résultats possibles \rightarrow

$$\leq \left(\frac{9}{10}\right)^m$$

Si $w = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\{w\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_{u_1 u_2 \dots u_m}$$

$$F_{u_1} \supseteq F_{u_1 u_2} \supseteq F_{u_1 u_2 u_3} \supseteq \dots \text{ suite d'évts.}$$

continuité séquentielle monotone:

$$P(\{w\}) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} F_{u_1 u_2 \dots u_m}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(F_{u_1 \dots u_n}) = 0$$

$\leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$

Donc $\forall w \in \Omega$, $P(\{w\}) = 0$

$$\text{de } \sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = 0$$

Ceci contredit-il la σ -additivité ???

σ -additivité: par la suite d'évts 2 à 2 disjoints $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$

les $\{w\}$ st 2 à 2 disjoints : si $w \neq w'$, $\{w\} \cap \{w'\} = \emptyset$.

$$\Omega = \bigcup_{w \in \Omega} \{w\} \quad P(\Omega) = 1.$$

[NON] pas de contradiction ||

car les $\{w\}$ ne forment pas une suite d'évts, ils st trop nombreux pr former une suite.

Pour toute suite w des Ω , on pt trouver un w' q n'est pas ds la suite

$$\begin{aligned} w_1 &= 010010001 \\ w_2 &= 010101010 \\ w_3 &= 101001000 \\ w_4 &= \dots \end{aligned}$$

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \text{ non dénombrable.}$$

$$w' = 10001\dots \in \Omega$$

$$\notin \{w_i ; i \in \mathbb{N}^*\}$$

② Probabilités conditionnelles, indépendance

② sachet 100 graines "fleurs variées":

10		20	
30		40	

On tire une graine au hasard.

$$P(\text{fleur bleue}) = \frac{20+40}{10+20+30+40} = \frac{60}{100}$$

Un mois après, il plante des feuilles circulaires,

$$P(\text{fleur bleue} | \text{feuille circulaire}) = \frac{40}{40+40} = \frac{20}{100} = \frac{P(\text{fleur bleue} \cap \text{feuille circulaire})}{P(\text{feuille circulaire})}$$

I / Probabilité conditionnelle

③ Sur un espace probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) ; on fixe un événement H tq $P(H) \neq 0$.

Pour tout evt A , la probabilité sachant H de A est:

$$P_H(A) = \boxed{P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}}$$

Prop: La fonction $P_H = P(\quad | H)$:

$\mathcal{F} \longrightarrow [0; 1]$
 $A \longmapsto P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$ est une proba sur (Ω, \mathcal{F}) .

• $P(\Omega|H) = \frac{P(\Omega \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$. HC-Ω

• Vérifiau σ -additivité: si les A_i st 2 à 2 disjoint.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i | H\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \cap H\right)}{P(H)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap H)\right)}{P(H)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap H)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | H)$$

$\Rightarrow P(\cdot | H)$ est σ -additive.

Consequence: $P(\quad | H)$ a toutes les prop de une probabilité

$$\underline{\text{Rq}} \quad P(H|H) = \frac{P(H \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$$

⚠ Aucun lien entre $P(A|H)$ et $P(A|H^c)$ (ii) Calcul de conditionnement

$A|H$ n'a pas de sens.

$H \hookrightarrow P(A|H)$ n'est pas une probabilité.

Les probas conditionnelles sont + faciles à calculer.

Q Proba de ne pas avoir P utilisable si on prend 2 de une caisse de 100 où 5% sont grillés.

$$P(D_1 \cap D_2) = ? \quad \text{où } D_1 = \{1^\circ \text{ défectueux}\} \\ D_2 = \{2^\circ\}$$

(i) Calcul sans conditionnement :

→ équiprobabilité sur $\Omega = \{2 \text{ parties à 2 élts d'un ens. à 100 éléments}\}$

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{\text{card}(D_1 \cap D_2)}{\text{card}(\Omega)} \\ = \frac{\binom{65}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{5 \times 64}{100 \times 99} = \frac{20}{9900} \approx 0,2\%$$

$$P(D_1) = \frac{5}{100}, \quad P(D_2 | D_1) = \frac{4}{99}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_2 | D_1) \cdot P(D_1) \\ = \frac{5}{100} \times \frac{4}{99} = \frac{20}{9900}$$

Règle de conditionnement successif (ou probabilités composées) :

si les evts A_1, A_2, \dots, A_n sont tels que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0 \text{ alors } P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1) = \\ = P(A_n | A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \times P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \\ \times \dots \times \dots \times P(A_3 | A_2 \cap A_1) \times P(A_2 | A_1) \\ \times P(A_1)$$

$$\begin{aligned}
 & P\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right) = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right)} \times \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-2} A_i\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-2} A_i\right)} \times \dots \times \\
 & \quad \times \dots \times \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times P(A_1) \\
 & \rightarrow \text{ceci est bien défini car } \forall j \text{ de } 1 \text{ à } m-1, \\
 & P\left(\bigcap_{i=1}^j A_i\right) \geq P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0
 \end{aligned}$$

$$P(D_m) = \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

⑤ On appelle partie de Ω , une famille $(H_i)_{i \in I}$ d'elts non-vides ($\forall i \in I, H_i \neq \emptyset$), 2 à 2 disjointes ($i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$) et dont l'union est Ω .
 $\left(\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega \right)$. On dit aussi un système d'évén. complet



Conditionnement P, tels cas possibles (probabilités totales).

- si $P(H) \neq 0$ et $P(H^c) \neq 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|H^c) \cdot P(H^c)$
- si H_1, H_2, \dots, H_m est une partie de Ω constituée d'elts tous de proba non-nulle :
 $\forall A \in \mathcal{F}: P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \dots + P(A|H_m) \cdot P(H_m)$
- si $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partie de Ω tq $\forall i \in \mathbb{N}, P(H_i) > 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$

$$\begin{aligned}
 P(D_m) &= P(D_m \cap D_{m-1}^c \cap \dots \cap D_1^c) \\
 &= P(D_m \mid D_{m-1}^c \cap \dots \cap D_1^c) \\
 &\quad \times P(D_{m-1}^c \cap \dots \cap D_1^c) \dots \times \\
 &\quad \times P(D_2^c \mid D_1^c) \times P(D_1^c)
 \end{aligned}$$

Fondues de Bayes (proba des causes):

n (H_i) $_{i \in \mathbb{N}}$ est une partie de Ω tq

$H_i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ et si A est un evt,
 $P(A) > 0$ alors $H_j \in \mathbb{N}$,

$$P(H_j | A) = \frac{P(A | H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A | H_i) \cdot P(H_i)}$$

\rightarrow \hat{m} ns^{ns} la partie finie (H_1, \dots, H_m) ou
 (H, H^c) .

~~cas~~ Des de cas de $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$,

les $(H_i \cap A)_{i \in \mathbb{N}}$ st 2 à 2 disjoints et

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (H_i \cap A) = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \right) \cap A = \Omega \cap A = A$$

$$\text{Donc } P(A) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} (H_i \cap A)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(H_i \cap A)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(A | H_i) \cdot P(H_i)$$

et en plus $P(A) > 0$:

$$P(H_j | A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)} = \frac{P(A | H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=0}^{\infty} P(A | H_i) \cdot P(H_i)}$$

Q (Tir à l'arc)

Un ami est venu au débat de l'entraînement,
mais il ne compte pas rester longtemps:

$$P(F | D_m) = \frac{1}{2^m} \text{ où } F = \{\text{il assiste au 1er tir}\}$$

$$P(F) = \sum_{m=1}^{\infty} P(F | D_m) P(D_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{9}{20}\right)^m$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1^{\text{er terme}}}{1 - \text{raison}} = \frac{1}{9} \frac{9/20}{1 - 9/20} = \frac{1}{11}.$$

$$P(D_1 | F) = \frac{P(F | D_1) \cdot P(D_1)}{\sum_{m=1}^{\infty} P(F | D_m) \cdot P(D_m)}$$

$$P(D_1 | F) = \frac{\frac{1}{2^1} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{11}} = \frac{11}{20}$$

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^\infty} \setminus \underbrace{\{(0, 0, \dots, 0, \dots)\}}$$

on avait calculé sa proba sur le

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^\infty} \text{ & faisait } 0$$

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m \rightarrow \text{les } (D_m)_m \text{ forment}$$

$$\text{une partie de } \{0,1\}^{\mathbb{N}^\infty} \setminus \{(0, \dots)\}$$

$$\text{FF Bayes p } (H, H^c): \Omega \quad \text{H } \text{H}^c$$

on suppose $P(H) > 0$ et $P(H^c) > 0$ p A,

$$P(H | A) = \frac{P(A | H) \cdot P(H)}{P(A | H) \cdot P(H) + P(A | H^c) \cdot P(H^c)}$$

$$P(A | H) \cdot P(H) + P(A | H^c) \cdot P(H^c)$$

II / Indépendance de 2 événements

Intuitivement, si la réalisation de B n'apporte aucune information sur celle de A, on doit avoir $P(A | B) = P(A)$.

Si A et B sont de probas non-nulles :

$$P(A | B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B | A) = P(B)$$

D) Deux évts A & B sont indépendants sous la proba P si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

RQ Deux évts incompatibles de proba non-nulle ne sont jamais indépendants.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

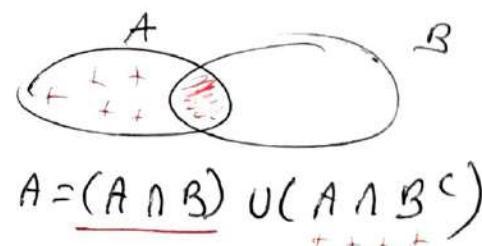
L'indépendance est relative à la probabilité choisie:

- @ 2 lancers d'une pièce $\Omega = \{ff, ft, pf, pp\}$
 $A = \{\text{face } \& 1^{\text{er}} \text{lancer } f\} = \{ff, fp\}$
 $B = \{\text{pareil } \& 2 \text{ lancers}\} = \{ff, pp\}$
 $A \cap B = \{ff\}$
- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_1)$ équiprobabilité modélisant une pièce équilibrée.
 $P_1(A) = \frac{1}{2}, P_1(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P_1(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
 A et B sont indépendants sous P_1 .
 - $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_2)$ modélisant une pièce qui fait face de proba $\frac{2}{3}$.
 $P_2(A) = \frac{2}{3}, P_2(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$
 $P_2(A \cap B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
 A et B ne sont pas indépendants sous P_2 .

Prop Si A et B sont indépendants sous P alors
 A, B^c aussi (de A^c, B aussi, et A^c, B^c aussi)



$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$



III / Indépendance de plus de 2 évts

- @ 3 pièces équit. drs $\neq s.$ 9 proba sur
 $\Omega = \{f, p\}^3$ muni de $\mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 A &= \{\text{rouge } \& \text{ jaune } \& \text{ bleu } \text{ dont pareil}\} \\
 B &= \{\text{rouge } \& \text{ bleu } \dots \dots \dots\} \\
 C &= \{\text{jaune } \& \text{ bleu } \dots \dots \dots\}.
 \end{aligned}$$

- ② à lancer d'une pièce $\Omega = \{H, T\}$, P_1
- $A = \{\text{face de 1er lancer} H\} = \{H\}$, $P_1(A) = \frac{1}{2}$
- $B = \{\text{pareil aux 2 lancers}\} = \{HH, TT\}$
- $A \cap B = \{HH\}$

- $(\Omega, P(\Omega), P_1)$ équivalente modélisant une pièce équilibrée.

$$P_1(A) = \frac{1}{2}, P_1(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P_1(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

A et B st indépendants sous P_1 .

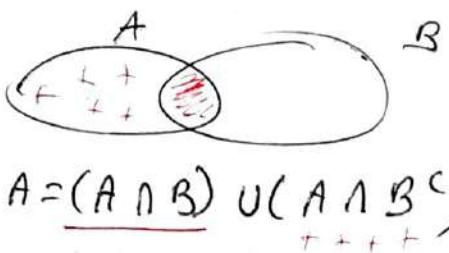
- $(\Omega, P(\Omega), P_2)$ modélisant une pièce q fait face de proba $\frac{2}{3}$.

$$P_2(A) = \frac{2}{3}, P_2(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$P_2(A \cap B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

A et B ne st pas indépendants sous P_2 .

Prop Si A et B st indépendants sous P alors A, B^c aussi (de A^c, B aussi, et A^c, B^c aussi).



$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

III / Indépendance de plus de 2 evts

- ③ 3 pièces équit. drs $\neq s$. Q proba sur $\Omega = \{H, T\}^3$ muni de $P(\Omega)$, P équivalente.

$$A = \{\text{1re & jaune donc pareil}\}$$

$$B = \{\text{2e & bleu ..}\}$$

$$C = \{\text{3e & bleu ..}\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$$

Intuitivement, A, B, C ne st pas indépendants.
(si A & B st réalisés, C l'est forcément)

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \quad \text{dc } A \& B \text{ st indépendants}$$

A et C aussi, B et C aussi.

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(E)}{8}$$

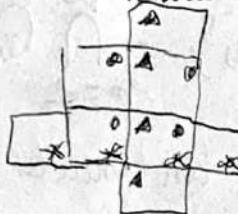
A, B, C sont à 2 indépendants.

Mais A, B et C ne sont pas indépendants car

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

• @ Un carré au hasard de une zone de 8 cases.

Probabilité que le tiré soit de la zone



carré rouge : \bullet
carré vert : \bullet
carré bleu : \bullet

$$R = \{\text{rouge}\}, B = \{\text{bleu}\}, V = \{\text{vert}\}$$

$$P(R) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(V) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Intuitivement R, B, V ne sont pas indépendants car si on sait que V et B sont réalisés, on est sûr que R est réalisée.

$$P(B \cap R \cap V) = \frac{1}{8} = P(B) \cdot P(R) \cdot P(V)$$

$$P(R \cap B) = \frac{2}{8} = P(R) \cdot P(B)$$

$$P(R \cap V) = \frac{2}{8} = P(R) \cdot P(V)$$

$$P(B \cap V) = \frac{1}{8} \neq P(B) \cdot P(V)$$

① a) A, B, C sont indépendants (sous P) si
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ et $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
 et $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

ii) n événements sont indépendants si la proba de l'intersection est égale au produit des probabilités.

Pour toute sous-famille de $2, 3, \dots$ ou n d'entre eux.

iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée "suite d'événements indépendants" si A_1, \dots, A_m sont indépendants pour chaque choix d'un nombre fini m sur un ensemble fini d'indices distincts.

→ Suites d'épreuves indépendantes :

Lors d'une suite d'expériences, on dit qu'elles sont indépendantes si cette suite d'événements A_1, \dots, A_n , où chaque A_i ne dépend que du résultat de la prochaine expérience forme une suite d'événements indépendants.

Schema de Bernoulli

Il s'agit d'une suite d'expériences indépendantes qui ont toutes la même proba p de succès et $1-p$ d'échec (c'est ce qui m'intéresse). La proba d'échec (est contre) est à chaque fois $1-p$.

A_i = {succès à la i^{e} épreuve}, $P(A_i) = p$
 $D_n = \{\text{le } 1^{\text{o}} \text{ succès arrive à la } n^{\text{ième}} \text{ épreuve}\}$ les A_i st indépds

$$\begin{aligned} P(D_n) &= P(A_1^c \cap A_2^c \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) \\ &= P(A_1^c) \times \dots \times P_{(n-1)}^c \times P(A_n) \\ &= (1-p)^{n-1} \cdot p \end{aligned}$$

(P) si des événements sont indépendants, en remplaçant certains par leurs complémentaires, ça reste une famille d'événements indép.ds.

$G_{n,k}$ = { k succès et $n-k$ échecs parmi les n premières épreuves}

$$P(G_{n,k}) = P\left(\bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I)=k}} \left(\bigcap_{i \in I} (A_i) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} A_j^c\right)\right)\right)$$

les I disjoints d'intervalle vide $\Rightarrow I \neq I'$

$$\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I)=k}} P\left(\left(\bigcap_{i \in I} (A_i)\right) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} A_j^c\right)\right)$$

les A_i st indépds

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I)=k}} \underbrace{\prod_{i \in I} P(A_i)}_{p^k} \times \underbrace{\prod_{j \notin I} P(A_j^c)}_{(1-p)^{n-k}} \\ &\quad \text{Ces termes} \\ &= p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (\text{loi binomiale}) \end{aligned}$$

$$G = \{\text{il n'y a pas que des succès}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_{n,m}$$

$$\begin{aligned} \forall n, G_{n+1, m+1} &\text{ dc } p \text{ continue séquentielle} \\ \text{de croissante: } P(G) &= \lim_{m \rightarrow \infty} P(G_{n,m}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} \infty \text{ si } p \geq 1 \\ 0 \leq p < 1 \text{ else } 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(P) loi de Murphy: "Tout ce q pf mal tourner finira par mal tourner si on essaye assez de fois"
 $P(\{\text{finir chac finira p arriver}\}) = 1 - P(Q)$
 ≤ 1 car la proba d'échec est positive mais nulle positive

LDM \rightarrow besoin hyp., ent. indépds.

(C3) Les variables aléatoires discrètes
 & leurs lois

I / Variables aléatoires discrètes

D) Une va discrète sur (Ω, \mathcal{F}, P)

est une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$w \mapsto X(w)$$

• l'ens. des images $X(\Omega) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$= \{X(w), w \in \Omega\} \hookrightarrow$ ens fini dénombrable

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

• $\forall n_k \in X(\Omega)$, forme une suite

$$\begin{aligned} & X^{-1}(\{n_k\}) = \\ & = \{w \in \Omega, X(w) = n_k\} \in \mathcal{F} \\ & = \{X = n_k\} \end{aligned}$$

• Not^e: $\{X \leq t\} = \{w \in \Omega, \text{image réciproq } X(w) \leq t\}$
 $= X^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{F}$

~~$\{a \leq X \leq b\} = \{w \in \Omega, a \leq X(w) \leq b\}$~~
 $= X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.

• n lancers d'une pièce $\Omega = \{0, 1\}^n$

• face = pile.

$$X: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w = (u_1, \dots, u_n) \mapsto X(w) = \sum_{i=1}^n u_i$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \text{nb fini de val.}$$

• (tir à l'arc)

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \setminus \{(0, 0, 0, \dots)\}$$

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto Y(w) = \inf_{\downarrow} \{i \in \mathbb{N}^*, u_i = 1\}$$

est le rang du 1^{er} tir réussit.

$$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

$$\{Y = n\} = \Omega_n \in \mathcal{F}$$

D) Pour X une vad, on note $p_x = \mathbb{P}(X = x)$
 si $\exists x_k \in X(\Omega)$

$$p_x: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

$$B \mapsto p_x(B) = \sum_{x_k \in B} p_k$$

$$= \sum_{x_k \in B} \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X \in B)$$

P_x est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée
loi de X .

(RG) les P_x peuvent $x_k \in X(\mathbb{Q})$ suffisant
à déterminer la loi P_x de X

Première P_x est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$:

$$\begin{aligned} P_x(\mathbb{R}) &= \sum_{x_k \in \mathbb{R}} P(X = x_k) \\ &= P\left(\bigcup_{x_k \in \mathbb{R}} \{X = x_k\}\right) \\ &\stackrel{x \in 2 \text{ digits}}{=} P(\mathbb{Q}) = 1. \end{aligned}$$

Si $(B_i)_{i \in \Pi V^*}$ est une famille d'événements
de parties 2 à 2 disjointes de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} P_x\left(\bigcup_{i \in \Pi V^*} B_i\right) &= \sum_{x_k \in \bigcup_{i \in \Pi V^*} B_i} P(X = x_k) \\ &= \sum_{i \in \Pi V} \sum_{\substack{x_k \in B_i \\ 2 \text{ à 2 disjoint}}} P(X = x_k) \\ &\stackrel{\text{P}(X \in B_i) = P_x(B_i)}{=} P_x(B_i) \end{aligned}$$

P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée loi de X .

(RG) les P_X peuvent suffisamment déterminer la loi P_X de X

Preuve P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{aligned} P_X(\mathbb{R}) &= \sum_{x_k \in \mathbb{R}} P(X = x_k) \\ &= P\left(\bigcup_{x_k \in \mathbb{R}} \{X = x_k\}\right) \\ &\stackrel{\text{2 à 2 disjoints}}{=} P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

n (B_i) $_{i \in \text{ITV}^*}$ est une famille de parties 2 à 2 disjointes de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i \in \text{ITV}^*} B_i\right) &= \sum_{x_k \in \bigcup_{i \in \text{ITV}^*} B_i} P(X = x_k) \\ &= \sum_{i \in \text{ITV}} \sum_{\substack{x_k \in B_i \\ \text{2 à 2 disjoints}}} P(X = x_k) \\ &\stackrel{\text{P}(X \in B_i) = P_X(B_i)}{=} P_X(B_i) \end{aligned}$$

@ (Tir à l'arc).

Y augmente lorsque la première flèche qui touche la cible.

$$Y(\omega) = \text{ITV}^*$$

$$\forall n \in \text{ITV}^*, P_Y(\{n\}) = P(Y = n) = P(D_n) = \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$Y \sim \text{Géom}\left(\frac{1}{10}\right)$$

→ "suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$ ".

(RG) Des r.v. peuvent avoir la m^e loi sans être égales

@ : On lance 2 dés, un vert & un rouge.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}, F = \mathcal{P}(\Omega) \quad \Omega \text{ équipable}$$

$$X: \text{résultat de vert} \quad X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

$$Y: \text{résultat de rouge} \quad Y(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

Loi de X :

x_k	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P(X=1) = \frac{\text{card}(\{X=1\})}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{6}$$

$$X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$$

loi uniforme.

Y suit la m^e loi.

Pour la plupart des tirages $w \in \Omega$:

$$X(w) \neq Y(w)$$

$$P(X \neq Y) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{36}$$

X et Y ne sont pas des v.a. égales.

(entre ens départ & ens d'arrivée, ne donnent pas m chos).

① La f de répart de la v.a. X est

$$\text{une } f : F_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} t \mapsto F_x(t) &= P_x([-\infty; t]) \\ &= P(X \leq t) \\ &= \sum_{\substack{x_k \in X(\mathbb{Z}) \\ x_k \leq t}} P(X=x_k) \end{aligned}$$

→ elle caractérise la loi mais pour une v.a. X discrète, la liste des $(P(X=x_k))_{x_k \in X(\mathbb{Z})}$ suffit à caractériser la loi.

II / Lois discrètes classiques

II.1) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

$X \sim \text{Ber}(p)$ si $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Rq L'indicateur est A est

$$\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \mathbf{1}_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A. \end{cases}$$

La r.c $\mathbf{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(\mathbf{1}_A=1) = P(A)$.

@ Pa pièce équilibrée $\mathbf{1}_{\{\text{pile}\}} \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$

II.2) Loi uniforme sur l'ens fini $\{x_1, \dots, x_n\}$

$X \sim \text{Unif}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ si $P(X=x_k) = \frac{1}{n}$

i.e si P_X est l'équiprobabilité sur $\{x_1, \dots, x_n\}$.

@ Le tirage d'un de mon tirage suit la loi $\text{Unif}(\{1, \dots, 6\})$. On a même (cf schéma de Bernoulli) que

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ si $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$

⚠ Q: Quelle loi suit variable?

→ ça suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

→ ça suit la loi Uniforme des ensembles de 1 à 100...

➡ bien préciser le paramètre.

$$\text{NB: } \text{Ber}\left(\frac{1}{6}\right) = \text{Unif}(\{0, 1\})$$

V.3 | Loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$)

D La loi $\text{Bin}(n, p)$ est la loi du nbr de "succès" obtenus en n expériences aléatoires indépendantes q' ont ttes la m^e proba p de "succès".

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

R^o On a bien $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$

@ Un wagon contient 120 places réservées par 120 voyageurs indépendants q' ont tous 95% de chances de venir:

X nbr de sièges occupés: $X \sim \text{Bin}(120; 0,95)$
 Y ——— si — vides: $Y \sim \text{Bin}(120; 0,05)$

@ si erts A_1, \dots, A_n st indépendants et tress de proba P , le nbr de A_i réalisés est

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \sim \text{Bin}(n, p)$$

II.4] Loi hypergéométrique de paramètres

N, M et n

$N \in \mathbb{N}^*$,

$M \in \{0, 1, \dots, N\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

- ⑦ Hypergeom(N, M, n) est la loi du nbr d'objets remarquables tirés qd on tire au hasard sans remise ds un tas de N objets dont M st remarquables.

$X \sim \text{Hypergeom}(N, M, n)$ si

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{b_M^k \times b_{N-M}^{n-k}}{b_N^n} & \text{si } \begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n-k \leq N-M \end{array} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ⑧ On prend 2 ampoules parmi 100 dont 5 sont grillées. Le nbr d'ampoules grillées prises suit Hypergéométrique($100, 5, 2$).

II.5] Loi géométrique de paramètre p ($p \in \mathbb{I}, 1$)

- ⑨ Géom(p) est la loi du nbr tentatives nécessaires pr obtenir le 1^o "succès" ds une suite de tentatives indépendantes q ont toutes la m^e proba p de succès.

$$X \sim \text{Géom}(p) \text{ si } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

Rq $\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$.

- ⑩ si les tirs st indépendants df 10% de chances de succès alors df la 1^o flèche q touche l'abre suit $\text{Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$

II.6] Loi de Poisson de paramètre λ ,
 $\lambda \in \mathbb{R}_0, \infty \mathbb{C}$.

$X \sim \text{Pois}(\lambda)$ si $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k)$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{rg } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

@ Compteur GGR.

II.7) Mesure de Dirac en $c \in \mathbb{R}$

$X \sim \delta_c$ si $P(X=c) = 1$,
 on dit alors la v.a X est déterministe.

III. Deux théorèmes limites

(Th) Convergence des binomiales vers les Poisson)

λ $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $[0,1]$ tq
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k \frac{p_n^k}{n^k} (1-p_n)^{n-k} = \underset{QH}{\underset{?}{\lim}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=k) = P(Y=k)$ si
 $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ et $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Usage en pratiq:

Quand n est grand et m petit ($n > 100$ et $np \leq 10$)
 on utilise $\text{Bin}(n, p)$ pour calculer des
 valeurs approchées de $\text{Bin}(m, p)$

Preuve: pr $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$C_n^k (p_n)^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times$$

$$\times \frac{1}{n^n} (n \cdot p_n)^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k!} (n \cdot p_n)^k \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \times \dots \times$$

$$\times \frac{1}{n^n} e^{n \ln(1-p_n)} \times \frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{1}{k!} (np_m)^k (1-p_m)^{m-k} \frac{1}{(1-p_m)^k} = \binom{k}{m} (p_m)^k (1-p_m)^{m-k}$$

$$= \frac{1}{k!} (np_m)^k \prod_{j=0}^{k-1} (m-j) \frac{1}{m^k} e^{n \ln(1-p_m)} \frac{1}{(1-p_m)^k}$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{(np_m)^k}_{\rightarrow \lambda^k} \prod_{j=0}^{k-1} \underbrace{\left(\frac{m-j}{m}\right)}_1 \underbrace{e^{n \ln(1-p_m)}}_{e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1-p_m)}}_1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = 0$$

$$\ln(1-p_m) \approx -p_m.$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{1}{k!} (np_m)^k (1-p_m)^{m-k} \frac{1}{(1-p_m)^k} \\
 &= \frac{1}{k!} (np_m)^k \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{m-j}{m}\right) \frac{1}{m^k} e^{m \ln(1-p_m)} \frac{1}{(1-p_m)^k} \\
 &= \frac{1}{k!} (np_m)^k \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{m-j}{m}\right) e^{m \ln(1-p_m)} \frac{1}{(1-p_m)^k} \\
 &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^k \frac{1}{e^{-\lambda}} \cdot \frac{1}{e^{-\lambda}} \cdot \frac{1}{(1-p_m)^k} \\
 &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

2° **(T4)** limite :

TH Cv des hypergéométriques vers les binomiaux

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ fixiert & $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = p \in [0,1]$ aber $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}}{\binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}} = \sum_{n=k}^{\infty} p^k (1-p)^{n-k} \text{ i.e. } \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N = k) = P(Y = k) \text{ as } X_N \sim \text{Hypergeometric}(N, M, n)$$

→ Intuitif: si taille N du tas d'objets est très grande alors tirer n objets avec ou sans remise ne change pas grand chose.

Prinzip

$$\frac{\binom{k}{M(N)} \cdot \binom{n-k}{N-M(N)}}{\binom{n}{N}} = \frac{M(N)!}{k! (M(N)-k)!} \times \frac{(N-M(N))!}{(n-k)! (N-M(N)-n+k)!} \times \frac{m!}{N!}$$

$$= \binom{k}{m} \prod_{j=0}^{k-1} (M(N)-j) \prod_{i=0}^{n-k-1} (N-M(N)-i) \prod_{l=0}^{m-1} \frac{1}{(N-l)}$$

$$= \binom{k}{m} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{M(N)-j}{N-j}}_{\text{k terms q tendt vs p}} \underbrace{\prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{N-M(N)-i}{N-k-i}}_{\text{n-k terms q tendt vs } 1-p}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\prod_{l=k}^{n-1} \frac{1}{N-l} = \prod_{i=0}^{m-k} \frac{1}{N-k-i}$$

$$\frac{M!}{(M-k)!} = \frac{M(M-1)\dots(M-(k-1))(M-k)}{(M-k)(M-k+1)}$$

IV / Vecteurs aléatoires discrets

④ Trois pers. répondent à un QCM
 (3 qds, 2 Rep poss^{bl} p 1 qd) On note
 U, V, W nbr bonnes rép chacun.

Les 2 premiers répondent ^{en} au hasard.
 La 3^e p. copie la 1^{re}. W=U.

$$U \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) \quad V \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) = W$$

$$\begin{aligned} P(U=0 \text{ et } V=0) &= P(U=0) P(V=0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad \{U=0\} \text{ ind'pdt} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{du } \{V=0\} \end{aligned}$$

$$P(U=0 \text{ et } W=0) = P(U=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Pi calculer probas concernant plusieurs v.a., il ne suffit pas de connaître la loi de chacune !

⑤ Soit X_1, X_2, \dots, X_m des v.a. def sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle **vecteur aléatoire** (X_1, X_2, \dots, X_m) l'application :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ w &\longmapsto (X_1(w), X_2(w), \dots, X_m(w)) \end{aligned}$$

Sa loi est la proba P_{X_1, \dots, X_m} def sur \mathbb{R}^m par :

$$\forall B \subset \mathbb{R}^m \quad P_{X_1, \dots, X_m}(B) = P\left(\left\{ \begin{array}{l} w \in \Omega, \\ (X_1(w), \dots, X_m(w)) \in B \end{array} \right\}\right)$$

Elle est caractérisée par les

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right)$$

pour toutes les valeurs x_1 de $X_1(\Omega)$, toutes les valeurs $x_2 \in X_2(\Omega)$, etc.

Qd $m=2$, on parle de **couple aléatoire**.

La ⑥ X_i est la i^{e} **marginal** du vecteur aléat^{ne}.
 Sa loi P_{X_i} est la i^{e} **loi marginale**.

⑦ De la loi, on peut déduire les lois marginales.
 Mais connaître les lois marginales ne suffit pas pour connaître la loi du vecteur.

Astuce si (X, Y) couple aléatoire : $\textcircled{4}$ loi du couple (U, V)

$$\forall x \in X(\Omega), P(X=x) =$$

$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)$$

$$\text{car } \{X=x\} = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X=x \text{ et } Y=y\}$$

$X=1$ et $Y=1$, ou $X=1$ et $Y=2$, ou ...

@ QCM

$\textcircled{5}$ loi du couple (U, V)

$\vee \backslash U$	0	1	2	3	Total
0	$P(U=0, V=0)$ $= \frac{1}{64}$	$P(U=1, V=0)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=2, V=0)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=3, V=0)$ $= \frac{1}{64}$	$P(V=0) = \frac{1}{8}$
1	$P(U=0, V=1)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=1, V=1)$ $= \frac{9}{64}$	$P(U=2, V=1)$ $= \frac{9}{64}$	$P(U=3, V=1)$ $= \frac{3}{64}$	$P(V=1) = \frac{3}{8} = P(V=1)$
2	$P(U=0, V=2)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=1, V=2)$ $= \frac{9}{64}$	$P(U=2, V=2)$ $= \frac{9}{64}$	$P(U=3, V=2)$ $= \frac{3}{64}$	$P(V=2) = \frac{3}{8} = P(V=2)$
3	$P(U=0, V=3)$ $= \frac{1}{64}$	$P(U=1, V=3)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=2, V=3)$ $= \frac{3}{64}$	$P(U=3, V=3)$ $= \frac{1}{64}$	$P(V=3) = \frac{1}{8} = P(V=3)$
Total	$P(U=0)$ $= \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{1}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	$P(U=1)$ $= \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$	$P(U=2)$ $= \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$	$P(U=3)$ $= \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{1}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	1 ^o loi de U : $P(U=0) = \frac{1}{8}$ 1 ^o loi marginale

W	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	0	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

1^o marginal $\mathcal{Q} \dim(3, \frac{1}{8})$

1^o loi de V
2^o loi marginale

$\textcircled{6}$ 2 \textcircled{va} discrètes X & Y def
sur Ω m ($\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$) et indépendantes si
 $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A, Y \in B) =$
 $= P(X \in A). P(Y \in B)$

$\textcircled{7}$ les 2 \textcircled{va} discrètes X_1, \dots, X_m
def sur Ω m ($\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$) et indépendantes si les
evts $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ sont
indépendantes pour toutes parties de A_1, \dots, A_m

④ on dit que suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de v.a discrètes est indépendante si la famille finie est indépendante.

Prop: X_1, \dots, X_m v.a indéples si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega) \dots \forall x_m \in X_m(\Omega)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^m P(X_i = x_i)$$

Prop si X_1, \dots, X_m st v.a discrètes indéples & si f_1, \dots, f_m st des appli def resp sur $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ st indéples.

on note: $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée:

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

④ on dit que suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de va discrètes est indépendante si la famille finie est indépendante.

Prop: X_1, \dots, X_m va indépendantes

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_m \in X_m(\Omega)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^m P(X_i = x_i)$$

Prop: si X_1, \dots, X_m sont va discrètes indépendantes & si f_1, \dots, f_m sont des appli def resp. sur $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ sont indépendantes.

on note: $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée:

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

DM
Mq X, Y ind. $\Rightarrow V = f(X), W = g(Y)$ ind.
 $V \in V(\Omega), \forall w \in W(\Omega)$.

$$P(V=v, W=w) = \sum_{\substack{i, f(x_i)=v \\ j, g(y_j)=w}} P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= P(X=x_i) P(Y=y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ indp.}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i, f(x_i)=v} \underbrace{\left(P(X=x_i) \right)}_{P(X=v)} \underbrace{\sum_{j, g(y_j)=w} P(Y=y_j)}_{P(Y=w)} \\ &= P(W=w) \sum_{i, f(x_i)=v} P(X=x_i) \end{aligned}$$

@(ACM)

U, V ind. ; U, V non ind (3° p. Gide n°1)

$$\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}, P(U=i, V=j) = P(U=i) \cdot P(V=j)$$

$$P(U=0, V=0) = \frac{1}{8} \neq P(U=0) \cdot P(V=0) = \frac{1}{64} \text{ (cf. table)}$$

④ X, Y res de dérouge / vert

X, Y indp, X^2 & Y^2 ari; $\sin(X), \sqrt{Y}$ ari

Loi multinomiale de param m, p_1, p_2, \dots, p_n

$$m \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{N}^*, p_1, p_2, \dots, p_n \in [0, 1]$$

$$\text{tq } p_1 + \dots + p_n = 1.$$

\rightarrow m excp. indpontes ont chacune x résultats possibles de probabilit. respectives p_1, \dots, p_n

On note X_1 le nbr de fois où on obtient le res de type $1, X_2 \dots$ type $2, \dots, X_n \dots$ de type n .

$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{Mult}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$

si $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) =$$

$$\begin{cases} = \frac{n!}{(k_1!)(k_2!) \dots (k_n)!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} & \text{si } k_1 + k_2 + \dots + k_n = n \\ = 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (k_i!)^r} \prod_{i=1}^r (p_i^{k_i})^r \quad \text{si } \sum_{i=1}^r k_i = n$$

Rq

$$\int_{m-k_1}^{k_1} \int_{m-k_2}^{k_2} \int_{m-k_1-k_2}^{k_3} \dots \int_{k_{n-1}}^{k_n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (k_i!)}$$

@ 6m Pense 1000 fois un dé équil. X_i est nbre de fois où il fait i .

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \sim \text{Mult}(n, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

Rq $X \sim \text{Bin}(n, p)$

est équivalent à $(X, n-X) \sim \text{Mult}(n, p, 1-p)$

(30)

C4 Espérance, Variance, Inégalités de Markov & de Tchebychev

Markov

Чебышев

I/ Espérance

@ $n=100$ étud font un DS. Gm note m_i le n^{me} de cx q ont la note i.

on tire au hasard un étud. La loi de sa note X est : $\forall i \in \{0, 1, \dots, 20\} : P(X=i) = \frac{m_i}{n}$

La moyenne de l'amphi est

$$\frac{\sum_{i=0}^{20} i m_i}{n} = \sum_{i=0}^{20} i \frac{m_i}{n} = \sum_{i \in X(\Omega)} i P(X=i)$$

1) Def

Une va. discrète X est intégrable si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X=x_k) < +\infty$$

→ elle a alors une espérance, donnée par

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X=x_k)$$

R9: si $X(\Omega)$ est finie ($\sum_{x \in X(\Omega)}$ somme finie)
ou si $X(\Omega)$ est bornée ($\forall x_n \in X(\Omega)$, $|x_n| \leq N$ où $N \in \mathbb{R}$ fixé) alors X est intégrable.

R9: 2 R9 q ont la loi ont l'espérance.
△ réciproq fausse.

@ si $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 i P(X=i) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 3,5$$

R9 Intuitif qd rP^{RS} prises p R9 "tournant autour" de l'espérance. Ça n'implique pas que l'espérance est une val^{RE} très probable.

@ Une wme de 50 jetons marqués "1"
 $\frac{100}{100}$ "2".

On tire de remise qd 1° obtenu "1". Gm note X le produit des n^{mes} tirés.

$$X(\Omega) = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$P(X=2^k) = P(\{e 1^{\circ} = 1 \text{ et } e (k+1)^{\text{e tirage}}\})$$

$$P(X=2^k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X=x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty$$

IM

1) $E(\lambda X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (\lambda x_k) \underbrace{P(X=x_k)}_{P(X=x_k)}$

$\lambda \neq 0$.

$E(\lambda X) = \lambda \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X=x_k)$

$= \lambda E(X)$

et si $\lambda=0$; $E(0 \cdot X) = E(0) = 0$. $P(0 \cdot X=0) = 0 \times 1 = 0$. $E(X)$

$\Rightarrow X$ n'a pas d'espérance.

2) Propriétés

soit X & Y 2 variables discrètes intégrables.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3) si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$

si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.

5) si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

6) si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intégrable

4) si $\forall x_k \in X(\Omega)$, $x_k \geq a$

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X=x_k) \geq a \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X=x_k) = a$$

6) Crit de comparaison des séries à termes \oplus

$$P(X=2^k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X=x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3} t(X) = \lambda \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X=x_k)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty$$

$$= \lambda E(X)$$

$\lambda \neq 0$

$\Rightarrow X$ n'a pas d'espérance.

2) Propriétés

soit X & Y 2 variables discrètes intégrables.

$$1) \forall \lambda \in \mathbb{R}, E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

$$2) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$3) \text{ si } X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$$

$$4) \forall a \in \mathbb{R}, \text{ si } X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$$

$$\text{ si } X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a.$$

$$5) \text{ si } X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

$$6) \text{ si } X \text{ intégrable et } |Z| \leq |X| \Rightarrow Z \text{ intégrable}$$

$$4) \forall x_k \in X(\Omega), z_k \geq a$$

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} z_k P(X=x_k) \geq a \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X=x_k) = a$$

6) Critère de comparaison des variables à termes \oplus

X intégrable? $|x_k| \leq |z_j|$ si $x_k = z_j$, $j = j_k$

$$\sum |x_k| P(X=x_k)$$

$$= \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \sum P(X=x_k, Z=z_j)$$

$$\leq \sum_{x_k, z_j} |z_j| P(X=x_k, Z=z_j)$$