

M 51 - Groupes, Anneaux & Corps

(C1) Ensembles, \leftrightarrow équivltes, cardinal, dénombrabilité

1 - Ensembles

- \emptyset ens, ens vide, elt $x \in E$

1.1. Inclusion, intersec \emptyset , réunion

- (D₁) inclusion, ss-ens
- (D₂) Réunion 2 ss-ens, intersec \emptyset , produit cartésien, différence ensembliste

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

- (D₃)^{ens} équipotents. biject. \hat{m} cardinal.
- (D₄) ens non vide fini
- (D_{4.0}) défini \emptyset des entiers
- (P₁) inject \emptyset i, E équipotent à $\mathcal{P}(E) \setminus E$, card $E \neq m$
- (D₅) E fini n'est pas infini.

(TH₁) Cantor - Bernstein injective \Rightarrow équipotents

(TH₂) Cantor : pas surject entre E_{fin} & $\mathcal{P}(E)$.

2.2. Dénombrabilité

(D₆) ens infini dénombrable si équipotent à \mathbb{N} .

(P₂)^{ss-ens} ∞ d'4 ens dénomb. est dénomb.

M 51 - Groupes, Anneaux & Corps

(C1) Ensembles, \leftrightarrow équivls, cardinal, dénombrabilité

1 - Ensembles

• mot ens, ens vide, elt $x \in E$

1.2. Inclusion, intersec, réunion

(D1) inclusion, ss-ens

(D2) Réunion 2 ss-ens, intersec, produit cartésien, différence ensembliste

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

(D3) ^{ens} équipotents. biject. m cardinal.

(D4) ens non vide fini

(D4.0) défini des entiers

(P1) inject i , E équipotent à $P(E) \setminus E$, card $E \neq m$

(D5) E fini n'est pas infini.

(TH1) Cantor - Bernstein injective surjective \Rightarrow équipotents

(TH2) Cantor : pas surject entre E_{fin} & $P(E)$.

2.2. Dénombrabilité

(D6) ens infini dénombrable si équipotent à \mathbb{N} .

(P2) ^{ss} ens ∞ d'1 ens dénomb. est dénomb.

(P3) \exists inj $f: \mathbb{N} \rightarrow E \Rightarrow E$ (d) (E ens ss).

(P4) $E \times F$ (d) (P5) \cup (d) est (d) (P6) \mathbb{R} pas (d).

3. Relats d'équivalence

3.1. Def

(D6) \leftrightarrow bim R

(D7) R l' d'éqte $\begin{bmatrix} R \\ S \\ T \end{bmatrix}$

(D9) Parti d E (P1) ens cd $E \rightarrow$ parti d

(D10) f compatible de R

(P8) $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$; $\bar{f} \circ P = f$

(NB) décompos canonig

$\{y \in E \mid x R y\}$

(D8) \bar{x} : classe d'égle
ens quot E/R

(C2) Groupes

1. Premières def

1.1 Def

(D11) Une Opérat

(D12) Groupe

(D13) Groupe abélien

(D14) Sous-groupe

(P11) $\langle g \rangle$...

(P12) $\bigcap_{i \in I} H_i$ $\langle g \rangle$ de G

(D15) $\langle S \rangle$: ss gpe engendré S de G

int $\Rightarrow G$ $\langle g \rangle$ de G cntnt S .

(1)

D16 ordre élt

1.3. Morphismes

D17 MDG ; isomorphisme

P14 mdg alors $\varphi(e) = e'$ & $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

P15 $\text{mdg} \circ \text{mdg} = \text{mdg}$

D18 $\ker \varphi = \dots$ & $\text{Im } \varphi$

P16 $\ker \varphi \cong G$ & $\text{Im } \varphi \cong G'$

P17 mdg φ i) si $\ker \varphi = \{e\}$ / mdg φ ii) si $\text{Im } \varphi = G'$

P18 $\text{Aut}(G)$ (isomorph. de l.m)

P19 $\varphi_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ est aut. int.

2. Groupe quotient & groupe produit

2.1. Relations de congruences

D19 Relat de congru à droite & à gauche

P21 Une classe à dré mod H + biject $\rightarrow H$.

P22 Ena quotients $(G/H)_g$ & $(G/H)_d$ est un biject.

D21 $|(G/H)_g| = |(G/H)_d| = [G:H]$
(l'indice de H de G)

2.2. Th de Lagrange

Th $|H|$ divise $|G|$. Cor 1 $[G:H] \cdot |H| = |G|$

Cor 2 $|n|$ divise $|G|$. Cor 3 $x^n = e_G$.

2.3. Sg distingués

D22 H distingué, $H \triangleleft G$ si $\forall g \in H, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$.

P23 ASE H distingué de G . $ghg^{-1} = h$; $gH = Hg$.

a) G abélien : $H \cong H$ est distingué.

c) $\ker \varphi$ distingué de G . (φ : MDG).

P25 $[G:H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$.

P26 $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ D23 Le centre $Z(G)$ d'1 G

D24 G simple.

2.4. Groupe Quotient

P27 $H \triangleleft G$, loi de $n \in G/H$ & cc' donne à G/H une \mathcal{S}^u de \mathcal{S} .

La surjct canonig $G \rightarrow G/H$ est $[MDG]$
 $x \mapsto s(x) = xH$

P28 $H \triangleleft G$ si c'est le \mathcal{M} de morphisme.

2.5. Th d'Isomorphisme

Cor 4 1° Thi : $\varphi = \bar{\varphi} \circ s, \text{Im } \varphi = \text{Im } \bar{\varphi}, \ker \varphi = \ker \bar{\varphi} / H$, si $H = \ker \varphi$:
 $G / \ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$

Th 5 2° Thi : $HK/K \cong H/H \cap K$

Th 6 3° Thi : $G/H \cong (G/K)/(H/K)$

Th 7 Th compde: Bijectivité entre appli $\mathcal{H} \dots$

2.6. Groupe Produit

$$H \times K = \{ (h, k), h \in H, k \in K \} ; (h, k)(h', k') = (hh', kk')$$

Prop 34: G isom $H \times K$ si $H \triangleleft G, K \triangleleft G, H \cap K = \{e_G\}, G = HK$.

3. Groupe Cycliq

3.1. Définitions

① Groupe mono① ② Groupe cycliq

③ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle = G$

m ordre de a si $a^m = 1$ & $\forall k \in \mathbb{Z}, a^k = 1 \Leftrightarrow m \mid k$.

④ $\langle k \rangle = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si k premier à m

⑤ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $| \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} | = m$

⑥ p premier, $|G| = p \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

⑦ H cycliq $\rightarrow \exists x \in H \Rightarrow |H| = \frac{m}{k}$
si $d \mid m \Rightarrow G$ posséd. : ordre d'engendr. $\frac{m}{d}$ x

3.4. Sg & produits

① $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\left(\frac{m}{k}\right)\mathbb{Z}$

② m, n p. $\Rightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4. Act de groupe

4.1. Déf

① Une act

② Stabilisat^r & Fixateur

③ X' orbite

④ G agissant n. sur $X \Rightarrow$ orbites de l'act de X font parti③ de X .

4.2. Formule des classes

① $P_{q_1} \quad \Omega_x \simeq G/\text{Stab}(x)$

② $P_{q_2} \quad \text{card}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|}$

4.3. Act par conjugaison

① Act p. conjugaison + classe de conjugaison

② $P_{q_2} \quad p \sim q$

5. Groupes symétriqs

① permutat, cycle, support, transposit

② $P_{18} \quad |S_n| = n!$

5.2. Décomposit en cycles

① th_1 Une permutat se décomp. de manière ! on peut de ca. sd.

② support d'1 permutat stable

③ th_2 k -cycle ; $\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

④ P_{19} 2 cycles à supports disjoints commutent.

(R9) $\langle \sigma \rangle$

(L) support perm σ stable ...

(P50) $\sigma(i_1 \dots i_n) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n))$

(TK8) cycles à supports disjoints

(L) $\Omega = \{\sigma^l(i), l \in \mathbb{Z}\}$

(Cor 6) In engendré p transpos.

(Cor 7) 2 perm σ conjugués ssi

(Prop 51) pperm

5.3. Signature

(D34) $\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod (j - i)}$

(P52) $\varepsilon: \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ MDG

(D) ker ε