M-33

Séries Numériques

&

Intégrales généralisées

Professeur : William Alexandre

→ C_1 : Approfondissement sur les suites numériques

C_2 : Intégration sur un intervalle quelconque.

C_3 : Séries numériques.

C_1 Appfdssm^t sr suites numériques

I BI, BS

D soit $A \subset \mathbb{R}$,

(i) $m \in \mathbb{R}$ est minorant de A si $\forall a \in A,\ m \leq a$.
(ii) $M \in \mathbb{R}$ est Majorant de A si $\forall a \in A,\ a \leq M$.
(iii) $m \in \mathbb{R}$ est plus petit élt de A si : - $m \in A$
- m est un minorant de A.

(iv) $M \in \mathbb{R}$ est plus grd élt de A si - $M \in A$
- M est un majorant de A.

(v) $m \in \mathbb{R}$, BI de A si : - m est minorant de A.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

(A^{dit} m est le plus grd des minorants de A)

(vi) $M \in \mathbb{R}$, BS de A si: - M est majorant de A.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

@ $A = [0,1[$; 0 est minorant, de $\hat{m}$ -1.

- Tt élt de $]-\infty, 0]$ sera un minorant de A. car $\forall m \in]-\infty, 0]$, $m \leq 0$ & $\forall x \in A,\ x \geq 0$, dc $m \leq x$, $\forall x \in A$.
- $\forall M \in [1, +\infty[$, M est majorant de A car $\forall x \in A,\ x < 1$ et $M \geq 1$ dc $x \leq M$.
- 0 est le + petit élt de A car $0 \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geq 0$.
- A n'a pas de + grd élt car - $\forall M \in [1, +\infty[$, $M \notin A$.
  - $\forall M \in]-\infty, 1[$, M n'est pas majo^t.
- La BI de A est 0 car l'ens des minorants est $]-\infty, 0]$ & le + grd élt de $]-\infty, 0]$ est 0. (vér : BS 1)

@ Certains ens n'ont ni BS, ni BI, ni ppe, ni pge.

@ $B = [0, +\infty[$ n'a pas de majorant, dc pas BS et pas pge.

Rq L'ens minorants TOUJOURS de la forme $]-\infty, \alpha]$ ou $\emptyset$.
Alors $\inf = \alpha$.
L'ens majorants TJRS dlf $[\alpha, +\infty[$ ou $\emptyset$. $\sup = \alpha$

[M] Si on cherche BI/BS, on cherche l'ens des minorants/majorants $]-\infty, \alpha]$ ou $[\alpha, +\infty[$ puis α correspond BI/BS.

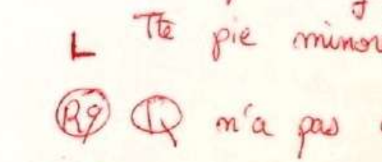
TH Tte pie majorée & non vide de $\mathbb{R}$ a une BS.
Tte pie minorée & non vide de $\mathbb{R}$ a une BI.

Rq $\mathbb{Q}$ n'a pas cette ppté.

II Suite de nbres réels

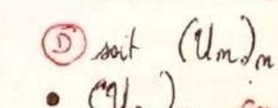
D soit $(U_n)_n$ est une suite de nombres réels et $u_* \in \mathbb{R}$

- $(U_n)_n$ converge vers u_* si $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - u_*| <}$



n_0 : ap de ce n_0, ts st ts ds cette bande

- $(U_n)_n$ diverge vers $+\infty$ si $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \geq M}$



TH La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.

Prop soit $M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ alors $M = \sup A$ ssi
(i) M est un majorant de A
(ii) $\exists (x_n)_n \subset A$ q CV vers M.

Preuve ⇒) si $M = \sup A$, M est un majorant de A, (i) ✓

comme $M = \sup A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in A$, $\forall n \geq n_0$, $x_\varepsilon < M - \varepsilon$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $\underset{x_{1/n}}{u_n} \in A$, $u_n > M - \frac{1}{n}$

On a donc $M - \frac{1}{n} < u_n \leq M$.

Le TH des gendarmes ⇒ $(u_n)_n$ tend vers M.

⇐) (i) M est un majorant, soit $\varepsilon > 0$, d'après (ii)

$\exists (u_n)_n \in A$, $(u_n)_n$ CV vers M.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - M| < \varepsilon$,

d'où $-\varepsilon < u_n - M < \varepsilon$

$M - \varepsilon < u_n$ de $M - \varepsilon < u_{n_0} = x_\varepsilon$.

Ainsi $M = \sup A$.

III Suites convergentes & Inégalités

Prop Tte suite CV est bornée.

TH Si $(u_n)_n$ CV vers ℓ et si $u_n \geq \lambda$ apcr alors $\ell \geq \lambda$.

TH gendarmes × apcr $u_n \leq v_n \leq w_n$
× $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ CV vers $\ell \in \mathbb{R}$.
alors $(v_n)_n$ CV vers ℓ. ↳ ⚠ identiques.

$v_n \backslash u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$v_n \backslash u_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ / $-\infty$ si $\ell' < 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ / $+\infty$ si $\ell' < 0$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ / $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ / $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$	$+\infty$

u_n	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

V Équivalents

D $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des équivalents, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe $(\varepsilon_n)_n$ CV vers 0, apcr $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$

Rq Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors apcr $u_n = 0$ ssi $v_n = 0$.

Prop Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne s'annulent pas apcr alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Preuve ⇒) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $\exists (\varepsilon_n)_n$ tq

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
- $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ apcr

Puisque v_n ne s'annule pas apcr de $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n$ apcr

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \varepsilon_n = 1$.

⇐) On pose $\varepsilon_n = \frac{u_n - v_n}{v_n}$ alors $\varepsilon_n v_n + v_n = u_n$.

Donc $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} - 1 = 0$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

P soit $(U_n)_n$, $(U'_n)_n$, $(V_n)_n$, $(V'_n)_n$ telles que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ et $U'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V'_n$

alors $U_n U'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n V'_n$.

Preuve : soit $(\varepsilon_n)_n$, $(\varepsilon'_n)_n$ 2 suites CV 0,

$U_n = (1+\varepsilon_n)V_n$
$U'_n = (1+\varepsilon'_n)V'_n$ $\boxed{\text{apcr}}$

a priori ce n'est pas m̂ rang dc on prend max

Alors $U_n U'_n = (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n) V_n V'_n$

$= (1+\overbrace{\varepsilon_n+\varepsilon'_n+\varepsilon_n\varepsilon'_n}) V_n V'_n$

$= (1+\varepsilon''_n) V_n V'_n$ $\boxed{\text{apcr}}$

et $\varepsilon''_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ainsi $U_n U'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n V'_n$.

Rq : $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} U'_n$ et $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V'_n$ $\overset{\text{SOMME}}{\not\Longrightarrow}$ $U_n+U'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n+V'_n$ en général

Rq : $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ $\overset{\text{FONCTION}}{\not\Longrightarrow}$ $f(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(V_n)$

@ $f : x \mapsto e^x$

$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ car $L \frac{U_n}{V_n} = L \frac{n^2}{n^2+n} = L = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

mais $\frac{f(U_n)}{f(V_n)} = L \frac{e^{n^2}}{e^{n^2+n}} = L e^{-n} = 0 \neq 1$

Dc $f(U_n) \not\sim f(V_n)$.

VI / Existence de la limite

1) Croissance & Convergence

TH soit $(U_n)_n$ une suite croissante et majorée par M. Alors $(U_n)_n$ CV vers un réel l où $l \leq M$.

Preuve : $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée & non-vide dc admet une BS que l'on note l. Dmq $\underset{n\to+\infty}{L} U_n = l$.

soit $\varepsilon > 0$ alors $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant de U_n car l est BS, $l-\varepsilon < l$ et l est le plus petit des majorants. Il existe dc $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$l-\varepsilon < U_{n_0}$. Ainsi $\forall n \geq n_0$,

$l-\varepsilon < U_{n_0} \underset{\text{suite croissante}}{\leq} U_n \underset{l \text{ est majorant}}{\leq} l < l+\varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, on a $|U_n - l| <$
Donc $(U_n)_n$ CV vers l et on a $l \leq M$.
car $l = \sup\{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ & M est un majorant.

⚠ $(U_n)_n$ ↗ et majorée par M $\not\Longrightarrow$ $\lim U_n = M$

@ $U_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, U_n est majorée par 2 et croissante mais $(U_n)_n$ ne CV pas vers 2 ps $L U_n = 1$

(TH) Si $(U_n)_n$ est ↗ & non-majorée alors $(U_n)_n$ (DV) vers $+\infty$.

Preuve : soit $M \in \mathbb{R}$, comme $(U_n)_n$ n'est pas majorée, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tq $U_{n_0} \geq M$.

Comme (U_n) a ↗, dc $\forall\ n \geq n_0$, $U_n \geq U_{n_0} \geq M$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

(Coro) soit $(U_n)_n$ une suite croissante alors soit $(U_n)_n$ est majorée (et CV) soit (U_n) DV $+\infty$.

2) Suites adjacentes

(D) $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ st adjacentes si :

- $(U_n)_n$ est croissante.
- $(V_n)_n$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

(P) soit $(U_n)_n$ & $(V_n)_n$ 2 suites adjacentes, on suppose $(U_n)_n$ ↗, $(V_n)_n$ ↘ Alors $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$

Preuve : $\boxed{c?!c}$ On suppose q' $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $U_{n_0} > V_{n_0}$ alors ĉ $(U_n)_n$ ↗ et $(V_n)_n$ ↘, on a $\forall\ n \geq n_0$: $U_n - V_n \geq U_{n_0} - V_{n_0}$.

et dc $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n \geq U_{n_0} - V_{n_0} > 0$. $\boxed{?!}$

Donc $U_n \leq V_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(TH) soit $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ 2 suites adj. alors $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ (CV) vers m̂ limite.

Preuve : on a $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq V_0$.

Ainsi $(U_n)_n$ est majorée par V_0 & ↗ dc $(U_n)_n$ (CV). $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \geq U_n \geq U_{n-1} \geq \dots \geq U_0$

Donc $(V_n)_n$ est minorée par U_0 & ↘ dc (CV).

On note l' sa limite.

On a $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = l - l'$.

Donc $l = l'$

3) Suites extraites & T^{h} de Bolzano-Weierstrass

(D) soit $(U_n)_n$ une suite. Une suite $(V_n)_n$ sera dite extraite de $(U_n)_n$ ou sous-suite de $(U_n)_n$ s'$\exists$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante,

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$

@ $(U_{2n})_n$, $(U_{2n+1})_n$ st extraites de $(U_n)_n$.

(TH) Tte suite extraite d'une suite (CV) vers m̂ limite.

<u>Preuve</u> : soit $(U_n)_n$ une suite (CV) ℓ sa limite, $(U_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, on ait $|U_n - \ell| < \varepsilon$. Comme φ est strictement croissante $\varphi(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de $\forall n \geq n_0$, on a :

$$|U_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon \quad \text{car } \varphi(n) \geq n \geq n_0.$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{\varphi(n)} = \ell$.

(TH) (Bolzano-Weierstrass)

soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(U_n)_n \subset [a,b]$ alors il existe une suite extraite $(U_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ q (CV) vers $\ell \in [a,b]$.

$\varphi : k \longrightarrow n_k$
$a_k = u_{\varphi(k)}$

<u>Preuve</u> :

$$\underset{a}{[}\ \ \underset{a_0}{|}\ \ \underset{a_1}{|}\ \ \overset{\frac{a+b}{2}}{|}\ \ \underset{a_3}{|}\ \ \underset{a_4}{|}\ \ \underset{b}{]} \qquad \mathbb{R}$$

soit $a_0 = a$, $b_0 = b$; supposons avoir built une suite d'intervalles emboîtés :

- $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset \dots \subset [a_0, b_0]$
- $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$
- $\forall j$, $[a_j, b_j]$ contient ∞té de termes de $(U_n)_n$

→ Construisons a_{n+1}, b_{n+1} ; on considère

$$\alpha = \frac{b_n + a_n}{2} \qquad \underset{a_n}{[}\ \ \underset{\alpha}{|}\ \ \underset{b_n}{]}$$

Comme $[a_n, b_n]$ contient ∞té termes de U_n.

Donc $[a_n, \alpha]$ ou $[\alpha, b_n]$ cont^t ∞té tels [...]

Ds <u>1° cas</u> : on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \alpha \end{cases}$

et 2° cas : $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

De sorte que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

On build suite-extraite.

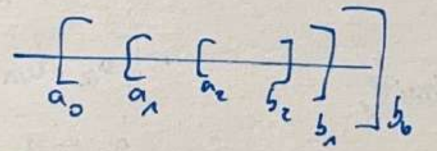
On prend $n_0 = 0$, dsq $u_{n_0} \in [a_0, b_0]$.

Si $u_{n_1}, \dots, u_{n_k}$ st construits dsq $\forall i$, $u_{n_i} \in [a_i, b_i]$, comme $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient qté d'élts de la suite $(u_n)_n$, $\exists n_{k+1} > n_k$ tq $u_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

We build ~~so~~ par récurrence [1] suite extraite $(u_{n_k})_k$ tq

$\forall k : \quad a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$.

Comme $(a_n)_n \nearrow$, $(b_n)_n \searrow$



et c $\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$.

$(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ st adjacentes.

Dc elles CV vers m̂ limite ℓ & TH gendarmes implique $(u_{n_k})_k$ CV vers ℓ. □

4) Suites de Cauchy

D Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels vérifie le critère de Cauchy ou dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| < \varepsilon$.

P Tte suite de Cauchy est Bornée.

Preuve : soit $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| < 1$ dc $\forall n \geq n_0$.

$$|u_n - u_{n_0}| < 1 \Rightarrow |u_n| - |u_{n_0}| < 1$$
$$\Rightarrow |u_n| < 1 + |u_{n_0}|$$

soit $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}|+1)$ alors $(u_n)_n$ est borné par M.

P Si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy q admet une sous-suite CV alors $(u_n)_n$ CV.

Preuve : soit $(u_{n_k})_k$ une suite extraite q CV vers ℓ.
On mq $(u_n)_n$ CV vers ℓ.
soit $\varepsilon > 0$, c $(u_n)_n$ est de Cauchy.
$\exists n_0 \; \forall p, q \geq N : \quad |u_p - u_q| < \varepsilon_2$.
comme $(u_{n_k})_k$ CV vers ℓ, $\exists N'$ tq $\forall k \geq N'$, $|u_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ alors $\forall n \geq \max(N, n_{N'})$, on a $k \geq \max(N, N') \Rightarrow n_k \geq k \geq N'$.

$$|u_n - \ell| = |u_n - u_{n_k} + u_{n_k} - \ell| \leq \underbrace{|u_n - u_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n \geq N} + \underbrace{|u_{n_k} - \ell|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ n_k > k \geq N}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_n$ CV vers ℓ.

(TH) (Complétude de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ est complet, adit Tte suite de Cauchy réelle (CV).

Preuve : soit $(U_n)_n$ $\boxed{SdC}$ alors $(U_n)_n$ est bornée.
$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, -M \leq U_n \leq M \iff U_n \in [-M,M]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'après $\boxed{TBW}$, $(U_n)_n$ admet une ss-suite q (CV). Ainsi $(U_n)_n$ est $\boxed{SdC}$ q admt ss-suite (CV) dc $(U_n)_n$ (CV).

(Prop) Toute suite de Cauchy (CV).

Preuve : soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, on ait :
$|U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, où $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Alors $\forall p,q \geq N$, $|U_p - U_q| = |U_p - \ell + \ell - U_q|$

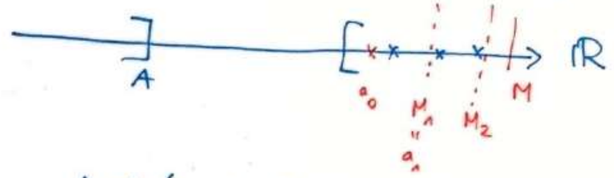
$$|U_p - \ell + \ell - U_q| \leq \underbrace{|U_p - \ell|}_{\varepsilon/2 \text{ car } p \geq N} + \underbrace{|\ell - U_q|}_{\varepsilon/2 \text{ car } q \geq N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(TH) ASSE :

(i) $\mathbb{R}$ est complet.
(ii) $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure.
(iii) Deux suites adjacentes (CV) vers m̂ limite.
(iii) Tte suite réelle majorée croissante (CV).
(v) $\boxed{TBW}$ (Tte suit (B) admt ss-s (CV))

Preuve : (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) et (iv) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (i)

On suppose que (i) est vraie, on va mq (ii).
soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et A majorée.



$\exists M_0 \in \mathbb{R}$,
comme $A \neq \emptyset$, dc $\exists a_0 \in A$. comme A est majorée, $\forall a \in A, a \leq M_0$

Supposons avoir construit $a_0, \dots, a_n, M_0, \dots, M_n$ tq :

- $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq M_n \leq M_{n-1} \leq \dots \leq M_0$.
- $\forall j = 0, \dots, n$; $a_j \in A$ et M_j majorant de A.
- $\forall j = 0, \dots, n$: $0 \leq M_j - a_j \leq \dfrac{M_0 - a_0}{2^j}$

On considère $\alpha = \dfrac{M_n + a_n}{2}$

1° cas : α est un majorant de A alors on pose :

$$M_{n+1} = \alpha \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n.$$

de sorte que $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq M_{n+1} \leq M_n \leq \dots \leq M_0$.

- $a_{n+1} \in A$ et M_{n+1} est un majorant de A.
- $M_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{M_n + a_n}{2} - a_n = \dfrac{M_n - a_n}{2} \leq \dfrac{M_0 - a_0}{2^{n+1}}$

2° cas : si α n'est pas un majorant de A, $\exists a_{n+1} \in A$, $\alpha \leq a_{n+1}$.
Et on pose $M_{n+1} = M_n$.
on a $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \alpha \leq a_{n+1} \leq M_{n+1} \leq M_n \leq \dots \leq M_1 \leq M_0$.

- $a_{n+1} \in A$ par construction et M_{n+1} est un majorant de A.

$\cdot\ M_{n+1} - a_{n+1} \leqslant M_n - \alpha$ car $\alpha \leqslant a_{n+1}$ et $M_{n+1} = M_n$

d'où $M_n - \alpha = M_n - \frac{M_n + a_n}{2} = \frac{M_n - a_n}{2} \leqslant \frac{M_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

On construit ainsi par récurrence : $(a_n)_n$ et $(M_n)_n$, $(a_n)_n \nearrow$, $(M_n)_n \searrow$, $(a_n)_n \subset A$;
$(M_n)_n$ est une suite de majorants de A.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant M_n - a_n \leqslant \frac{M_0 - a_0}{2^n}$.

On mq $(a_n)_n$ et $(M_n)_n$ sont $\boxed{\text{SdC}}$.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$, on ait

$\frac{M_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{M_0 - a_0}{2^n} = 0$.

$\forall p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant N$, $p \geqslant q$ alors

$|a_p - a_q| = a_p - a_q$ car $(a_n) \nearrow$ et $p \geqslant q$

D'où $a_p - a_q \leqslant M_p - a_q$ car M_p majore a, $a_p \in A$.

$M_p - a_q \leqslant \underbrace{M_q - a_q}_{\text{car } (M_n)_n \searrow \text{ et } p \geqslant q.} \leqslant \frac{M_0 - a_0}{2^q} \underbrace{< \varepsilon}_{\text{car } q \geqslant N}$

$|M_p - M_q| = M_q - M_p$ car $(M_n)_n \searrow \Rightarrow M_p - M_q < 0$.

$M_q - M_p \underbrace{\leqslant M_q - a_p}_{\text{car } M_p \geqslant a_p} \underbrace{\leqslant M_q - a_q}_{\text{car } a_p \geqslant a_q} \underbrace{< \varepsilon}_{\text{car } (a_n)_n \nearrow}$.

Donc $(a_n)_n$ et $(M_n)_n$ st $\boxed{\text{SdC}}$ et dc CV.

Notons $a_* = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $M_* = \lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

On a $0 \leqslant M_n - a_n \leqslant \frac{M_0 - a_0}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $0 \leqslant M_* - a_* \leqslant 0$.
Donc $M_* = a_*$.
On fixe $a \in A$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a \leqslant M_n$.
Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $a \leqslant M_*$, $\forall a \in A$.
Donc M_* est un majorant de A.
Ainsi M_* est un majorant de A et $(a_n)_n$ est une suite d'élts de A q CV vers M_*, $\underline{M_* = \sup A}$.

□

5) Suites Récurrentes

(D) $(U_n)_n$ est récurrente s'$\exists$ fonction f définie sur un intervalle I, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

(D) soit I : intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante si : (i) $f(I) \subset I$

(ii) $\exists\, c \in \,]0,1[, \forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leqslant c\,|x - x'|.$$

c est appelé rapport de contraction de f sur I.

(P) soit I un intervalle, $f : I \to I$ une applicat° dérivable à l'intérieur de I (si $I = [a,b]$, intérieur de $I = \,]a,b[$), $c \in \,]0,1[$, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant c$

alors f est contractante de rapport c.

Preuve : soit $x, x' \in I$, d'après TAF, $\exists\, \alpha \in [x,x']$;

$$f(x) - f(x') = f'(\alpha)(x - x').$$

On en déduit $|f(x) - f(x')| = |f'(\alpha)|.|x - x'|$

$$< c.\,|x - x'|.$$

$\square$

(TH) (Des points fixes de Banach).

soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ ($I = [a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$)

f une applicat° contractante sur I de rapport c.

Alors $\exists$ un unique $\ell \in I$, $f(\ell) = \ell$.

(ℓ est appelé point fixe de f).

De plus, $\forall u_0 \in I$, la $(U_n)_n$ déf. p. $U_{n+1} = f(U_n)$ (CV) vers ℓ.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|U_n - \ell| \leqslant c^n\,|U_0 - \ell|$$

$$|U_n - \ell| \leqslant \frac{c^n}{1-c}\,|u_0 - u_1|$$

Preuve :

- Unicité de ℓ : Supposons $\exists\, \ell_1$ et ℓ_2 tq $f(\ell_1) = \ell_1$, $f(\ell_2) = \ell_2$ et $\ell_1 \neq \ell_2$.

  Comme f est contractante sur I, on a :

  $|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leqslant c\,|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$ car $c < 1$

  c'est absurde. D'où unicité.

∘ Existence : soit $u_0 \in I$, $(u_n)_n$ déf p. $f(u_n) = u_{n+1}$.

Mq $(u_n)_n$ est de Cauchy :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})|$

$\leq c|u_n - u_{n-1}| \leq \dots \leq c^n |u_1 - u_0|$

soit alors $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq q$:

$|u_p - u_q| = |u_p - u_{p-1} + u_{p-1} - u_{p-2} + u_{p-2} + \dots$

$- u_{q+1} + u_{q+1} - u_q| \leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \dots +$

$|u_{q+1} - u_q| \leq (c^{p-1} + c^{p-2} + \dots + c^q)|u_1 - u_0|$

$= c^q \dfrac{1 - c^{p-q}}{1-c} |u_1 - u_0| \leq \dfrac{c^q}{1-c} |u_1 - u_0| \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$ / $\forall n \geq N$, on ait $\dfrac{c^n}{1-c} |u_1 - u_0| < \varepsilon$.

car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c^n}{1-c} |u_1 - u_0| = 0$,

$\forall p, q \geq N$, on a dc $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Dc $(u_n)_n$ est de Cauchy, dc $(u_n)_n$ CV.

Notons l sa limite.

On a $\forall p \geq q$, $|u_p - u_q| < \dfrac{c^q}{1-c} |u_0 - u_1|$

et lsq $p \to +\infty$, $|l - u_q| \leq \dfrac{c^q}{1-c} |u_0 - u_1|$

Ensuite, $\forall n \geq N$,

$|u_{n+1} - f(l)| = |f(u_n) - f(l)| \leq c|u_n - l|$.

Lorsque $n \to +\infty$, $|l - f(l)| \leq c|l - l| = 0$

Donc $f(l) = l$.

Enfin $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$

$\leq c|u_n - l| \leq \dots < c^{n+1} |u_0 - l|$

□

Ex 7 : Mq si 2 suites extraites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ d'une suite $(U_n)_n$ CV vers m̂ lim ℓ, alors $(U_n)_n$ CV ℓl-m̂ vers ℓ. Réciproq vraie ?

soit $\varepsilon > 0$, comme $(U_{2n})_n$ CV vers ℓ dc :
$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2$, on ait $|U_{2n} - \ell| < \varepsilon$,
comme $(U_{2n+1})_n$ CV vers ℓ dc :
$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1$: on ait $|U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$,
Pour $N = \max(2n_1 + 1, 2n_2)$, on a $\forall p \geq N$,
$|U_p - \ell| < \varepsilon$.
En effet si p est pair, $p = 2n$ et $|U_{2n} - \ell| < \varepsilon$
car $n = \frac{p}{2} \geq 2 \cdot \frac{n_2}{2} = n_2$.
si p impair, $p = 2n+1$ et $|U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$
car $n = \frac{p-1}{2} \geq \frac{2n_1 - 1 + 1}{2} = n_1$
Donc $(U_n)_n$ CV vers ℓ.
La réciproque est vraie. $(U_{2n})_n$ une suite extraite de $(U_n)_n$ et $(U_n)_n$ CV vers ℓ, dc toute suite extraite CV vers ℓ.
En particulier $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$.

Ex 8 : 1) soit $(U_n)_n$ une suite non-majorée.
Mq $(U_n)_n$ possède une suite extraite q td $+\infty$.

1) Comme $(U_n)_n$ est non-majorée, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, U_n > M$
On mq $\forall M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, U_n > M$.
On Raisonne par l'ABSURDE ?!,
$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \leq M$.
Alors on pose $N' = \max(|U_0|, |U_1|, |U_2|, \dots, |U_{N-1}|, M)$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \leq N-1$: on a,
$U_n \leq |U_n| \leq M'$. si $n \geq N$, alors
$U_n \leq M \leq M'$ ainsi $(U_n)_n$ est majorée : $\boxed{c?!c}$
On extrait ss-suite $(U_{n_k})_k$ q td vers $+\infty$.
Comme $(U_n)_n$ est non-majorée, il existe n_0 tq $U_{n_0} \geq 0$.
Supposons construits $n_0 < n_1 < \dots < n_k$, $\forall j = 0, 1, \dots, k$,
$U_{n_j} \geq j$.
Alors il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ et $U_{n_{k+1}} \geq k+1$
On construit ainsi par récurrence une sous-suite $(U_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$,
$\forall k$, $U_{n_k} \geq k$ et dc $\lim_{k \to +\infty} U_{n_k} = +\infty$.

2) Mq ∀te suite réelle, on pt extraire une suite q tend soit vers limite réelle, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Soit $(U_n)_n$ une suite de réels alors :

1) soit $(U_n)_n$ est bornée
2) soit $(U_n)_n$ n'est pas majorée
3) soit $(U_n)_n$ n'est pas minorée.

D'après 1°qst°, $(-U_n)_n$ n'est pas majorée dc il existe une suite extraite $(-U_{n_k})_k$ tq

$\lim\limits_{k\to+\infty} -U_{n_k} = +\infty$ et dc $\lim\limits_{k\to+\infty} U_{n_k} = +\infty$

" suite maj " = " -suite min ".

Dans le cas (1), $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$ ê bornée

Ainsi $(U_n)_n \subset [-M, M]$, et d'après $\boxed{TBW}$, il existe une suite extraite $(U_{n_k})_k$ CV

3) Est-il possible qu'une suite possède une suite extraite q td vers une lim finie, une q td $+\infty$ et une td $-\infty$.

soit $(U_n)_n$ déf ℓ : $\begin{cases} U_{3n} = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ U_{3n+1} = 3n+1 \\ U_{3n+2} = -(3n+2) \end{cases}$

- $(U_{3n})_n$ CV vers 0.
- $(U_{3n+1})_n$ td $+\infty$
- $(U_{3n+2})_n$ td $-\infty$.

Ex 9 : On vt mq ∀ suite possède une suite extraite monotone.
soit $(U_n)_n$ suite qlcq, on déf $E = \{n \in \mathbb{N}, \forall p > n, U_p < U_n\}$.

1) On suppose E est ∞. En utilisant les élts de E, construire une suite extraite de $(U_n)_n$ q $S^T \searrow$.

soit $n_0 \in E$, E est majorée $\Rightarrow E = \emptyset$ et n_0 existe.

soit n_1 tq $n_1 > n_0$ si $n_1 \in E$ et si $n_1 > n_0$
$U_{n_1} < U_{n_0}$

alors $U_{n_1} < U_{n_0}$ car $\forall p > n_0, U_p < U_{n_0}$ car $n_0 \in E$.

soit $n_1 \in E$, $n_1 > n_0$ alors ĉ $n_0 \in E$, $U_{n_1} < U_{n_0}$.

Remarquons E est ∞, il existe un élt de E tq $n > n_0$.
Supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tq $\forall j = 0, \dots, k$, $n_j \in E$. Alors ĉ E est ∞, $\exists n_{k+1} \in E$ tq $n_{k+1} > n_k$ alors la suite extraite $(U_{n_k})_k$ est $S^T \searrow$ car $\forall k : n_k \in E$.

Donc $U_{n_k} > U_n, \forall n > n_k$, en particulier pour $n = n_{k+1}$, $U_{n_k} > U_{n_{k+1}}$.

2) On suppose mtn E est fini.
Soit $N = \max(E)$. Mq si $n > N$, alors il existe $p > n$ tq $U_p \geq U_n$.
Construire ainsi une suite extraite de $(U_n)_n$ ↗.

→ On doit mq $(n > N) \Rightarrow (\exists p > N, U_p \geq U_n)$.
Pour cela on mq la CONTRAPOSÉE.
$(\forall p > n, U_p < U_n) \Rightarrow (n \leq N)$.
→ $\forall p > n, U_p < U_n \Rightarrow n \in E \Rightarrow n \leq \max(E) = N$.
On extrait une suite $(U_{n_k})_k$ q est ↗.
soit $\underline{n_0 = N + 1}$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $U_{n_1} \geq U_{n_0}$ et $n_1 > n_0$ car $n_0 > N$.

Supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tq $\forall j = 0, \dots, k-1, \quad U_{n_{j+1}} \geq U_{n_j}$
Alors, il existe $n_{k+1} > n_k$ tq $U_{n_{k+1}} \geq U_{n_k}$ car $n_k > N$.
On construit ainsi par récurrence une suite extraite croissante.

3) En déduire $(U_n)_n$ possède tjrs une suite extraite monotone.
soit E est infini et on pt extraire une suite s^{t} ↘.
soit E est fini et on pt extraire une suite ↗.

4) En déduire nv$^{\text{lle}}$ DM $\boxed{\text{TBW}}$
Soit $[a, b]$, un intervalle non-vide $a < b$.
et soit $(U_n)_n \subset [a, b]$.

On peut construire une suite $(U_{n_k})_k$ ↗ q est alors majorée par b de CV ou on peut extraire une suite $(U_{n_k})_k$ ↘ minorée par a de CV.

C2 : Intégrales généralisées

But : donner un sens à $\int_a^b f(t)\, dt$.

Lorsq f n'est pas définie / continue en a &/ou b.

@ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$

I/ Généralités

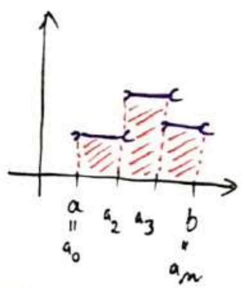
1) Rappel sur l'intégrale de Riemann

- soit $a < b$, on dit que $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une f en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et des réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ tq

$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad \phi(x) = c_i$.

- Pour une telle fonction ϕ, on pose

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$$



(R) On ne change pas la valeur de $\int_a^b \phi(x)\, dx$, si on modifie ϕ en un point ou en nombre <u>fini</u> de points.

soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction bornée, on pose

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx, \ \begin{matrix} \phi \text{ en escalier} \\ \text{et } \phi \leq f \end{matrix} \right\}$$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx, \ \begin{matrix} \phi \text{ en escalier} \\ \text{et } \phi \geq f \end{matrix} \right\}$$

(R)

- f est bornée $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \ -M \leq f \leq M$.

$\phi : x \mapsto -M$ est en escalier, $\phi(x) \leq f(x)$

donc $\left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx, \ \begin{matrix} \phi \text{ en escalier,} \\ \phi \leq f \end{matrix} \right\}$ est non-vide,

il existerait $\int_a^b -M\, dx = -M(b-a)$.

De plus $\forall \phi$ en escalier, $\phi \leq f$ alors $\phi \leq M$ et

$\int_a^b \phi(x)\, dx \leq M(b-a)$.

Donc $\left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx, \ \begin{matrix} \phi \text{ en escalier,} \\ \phi \leq f \end{matrix} \right\}$ est majorée par $M(b-a)$.

Ainsi $I^-(f)$ existe car $\mathbb{R}$ a la ppté de la (BS).

De m̂ pour $I^+(f)$.

On dit que f est Riemann intégrable si $I^+(f) = I^-(f)$

et on pose $\int_a^b f(x)\, dx = I^+(f) - I^-(f)$.

(R9) si f est Riemann intégrable sur $[a, b[$, la nature (convergence ou divergence) de $\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépd pas de c. En effet, si $a<a'<x<b$

alors $$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt + \int_{a'}^x f(t)\,dt$$

et donc si $\lim\limits_{x\to b^-} \int_{a'}^x f(t)\,dt$ existe alors

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt + \lim_{x\to b^-} \int_{a'}^x f(t)\,dt$$

et donc $\int_a^b f(t)\,dt$ CV et $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt + \int_{a'}^b f(t)\,dt$.

@ $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt =$ CV ? DV ? valeur ?

→ L'intégrale est généralisée (impropre) en $+\infty$.

soit $x \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ CV et vaut 1.

@ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pour $\alpha>0$ (Intégrales de Riemann)

si $\alpha \neq 1$, $\forall x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{-1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{-1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

Dc $$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = 0 + \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{si } \alpha>1$$
$$= +\infty \quad \text{si } \alpha<1.$$

si $\alpha=1$: $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^x = \ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = +\infty$.

(ccl) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, CV et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha>1$.
DV si $0<\alpha<1$.

@ $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ (Intégrale de Riemann)

Cette intégrale est impropre en 0,

si $\alpha\neq 1$, $\forall x \in]0, 1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{-1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

On a $$\lim_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = +\infty \quad \text{si } \alpha>1$$
$$= -\frac{1}{\alpha-1} - 0 \quad \text{si } \alpha<1.$$

si $\alpha=1$, $\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty$

(12) (ccl) $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ CV et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha<1$
et DV sinon.

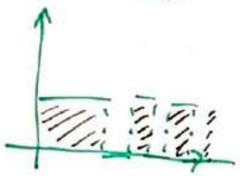
(R9) $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ (CV) n'implique pas que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(e) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 1$ si $\exists n \in \mathbb{N},\ n \leq x \leq n + \frac{1}{2^n}$

0 sinon

$\forall x \in \mathbb{R}$, pr $n = E(x)$, la pie entière de x on a :



$$\int_0^n f(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

si $x \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (car a^n, $a \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$)

$\rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (CV) mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$

(D) soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f localement intégrable sur $]a, b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) si

$\exists\, c \in]a,b[$ tq $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ (CV) toutes les 2.

On pose $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

(R9) La définition ne dépend pas de c.

si $a < c < c' < b$ alors $\forall x \in]a, c'[$,

$$\int_x^{c'} f(t)\,dt = \int_x^c f(t)\,dt + \int_c^{c'} f(t)\,dt$$

donc si $\int_a^{c'} f(t)\,dt$ (CV) ssi $\int_a^{c}$ (CV)

et $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{c} f(t)\,dt$.

De même, $\int_c^b f(t)\,dt = \int_c^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^b f(t)\,dt$

Donc $\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^b f(t)\,dt$

ⓐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$,

soit $x>0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^x$

$$= \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ CV et vaut $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

4) Pptés :

(P) (Linéarité)

soit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, f, g défi sur $]a, b[$, $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors $\int_a^b (f+g)\,dt$ et $\int_a^b (\lambda f)\,dt$ convergent et on a

$$\int_a^b (f+g)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$$

Preuve :

On supp f st déf sur $[a, b[$, soit $x \in [a, b[$, on a puisq f et g st intégrables sur $[a, x]$:

$$\int_a^x (f+g)(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b^-} \int_a^x (f+g)(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,dt$$

car $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ CV.

$$= \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

De m̂ pour $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt$. idem preuve.

(P) soit $a, b \in \mathbb{R}$, f, g deux fs déf $]a, b[$, $\forall t \in]a, b[$, $f(t) \leq g(t)$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ CV

alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Preuve :

On se place ds le cadre d'une intégrale impropre en b. soit $x \in [a, b[$, on a alors :

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{car} \quad f \leq g.$$

Lorsque $x \longrightarrow b$:

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,dt.$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{car} \quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ CV.}$$

5) Techniques de calculs

ⓐ IPP pour $\int_0^{+\infty} t.e^{-t}\,dt$.

L'int. est impropre en $+\infty$ uniquement.

Soit $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$\int_0^x t.e^{-t}\,dt = \qquad \begin{matrix} u=t & du=1 \\ dv=e^{-t} & v=-e^{-t} \end{matrix}$$

$$= \left[-t.e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = -x.e^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= -x.e^{-x} - e^{-x} + 1.$$

On fait tendre x vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t.e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} -x.e^{-x} - e^{-x} + 1 = 1.$$

ccl $\int_0^{+\infty} t.e^{-t}\,dt$ CV et vaut 1.

ⓐ CDV pour $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$,

cette int est impropre seulement en $+\infty$.

Soit $x \in [0,+\infty[$, on fait CDV : $\varphi = \sqrt{t}$.

$$d\varphi = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$2\varphi.\,d\varphi = dt.$$

$$\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\varphi} \times 2.\varphi\,d\varphi$$

$$= 2.\int_0^{\sqrt{x}} \varphi.e^{-\varphi}\,d\varphi.$$

On fait tendre x vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty} 2\int_0^{\sqrt{x}} \varphi.e^{-\varphi}\,d\varphi$$

$$= \lim_{X\to+\infty} 2.\int_0^X t.e^{-t}\,dt$$

$$= 2 \quad \text{d'après autre ⓐ.}$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ CV et vaut 2.

II / Cas fonctions à valeurs positives

(P) soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction $\nearrow$ alors :

soit F est majorée et $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ existe, $\in \mathbb{R}$.

soit $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = +\infty$.

Preuve :

- Si F est majorée par M, $A = \{F(x) \mid x \in [a, b[\}$ est majoré par M, comme $A \neq \emptyset$, $(F(a) \in A)$ et majoré. A admet une borne supérieure.

On va mq $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = \sup A$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tq $\sup A < F(x_0) + \varepsilon$.

Comme F est $\nearrow$ de $\forall x \in [x_0, b[$, on a :

$F(x_0) \leq F(x)$.

Donc $\sup A - \varepsilon < F(x_0) \leq F(x) \leq \sup A + \varepsilon$.

D'où $|F(x) - \sup A| < \varepsilon$. $\forall x \in [a, b[$.

On a donc $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = \sup A$.

- Si F n'est pas majorée, on mq $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = +\infty$.

soit $M > 0$, comme F n'est pas majorée,

$\exists\, x_0 \in [a, b[$ tq $F(x_0) \geqslant M$.

Comme $F \nearrow$, $\forall x \in [x_0, b[$, on a $F(x) \geqslant F(x_0) \geqslant M$.

Donc $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = +\infty$.

(TH) soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f positive ou nulle sur $]a, b[$ et localement intégrable sur $[a, b[$. (resp $]a, b]$)

Alors : • soit $\exists M$, $\forall x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)\,dt \leq M$ (resp.)

et l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV)

• soit $\int_a^x f(t)\,dt$ n'est pas majorée lorsq $x \in]a, b[$

et $\int_a^b f(t)\,dt$ (DV).

Preuve : On considère $F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

ds le cas de $[a, b[$, ou $F :]a, b] \to \mathbb{R}$
$x \to \int_x^b f(t)\,dt$ sur $]a, b]$.

Comme $f \geqslant 0$, F est $\nearrow$,

si $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]a, b[$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leq M$

alors F est majorée et $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ existe,

de l'int impropre en b : $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV).

Idem : autre cas.

2) Théorèmes de comparaison

TH soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g deux f local^t intégrables sur $[a,b[$, (resp $]a,b]$) tq $\forall t \in]a,b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

(i) si $\int_a^b g(t)\,dt$ CV et $0 \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

(ii) si $\int_a^b f(t)\,dt$ DV alors $\int_a^b g(t)\,dt$ DV également.

Preuve : Cas $[a,b[$,

soit $x \in]a,b[$, comme $0 \leq f \leq g$, on a :

$$(0 \leq) \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt. \quad (*)$$

(i) On déduit de $(*)$: $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ car $\int_a^x g \leq \int_a^b g$

Donc $\exists M := \int_a^b g(t)\,dt$ tq $\forall x \in]a,b[$, on ait :

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq M \text{ et } f \geq 0.$$

D'après TH précéd^t, $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

(ii) si $\int_a^b f(t)\,dt$ DV alors $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$ implique que $\lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,dt = +\infty$: $\int_a^b g(t)\,dt$ DV.

@ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\frac{1}{t}}}\,dt$ ⚠ l'exposant n'est pas cte.

Rq : Ce n'est pas intégrale de Riemann car $2 - \frac{1}{t}$ n'est pas une cte.

$\forall t \geq 2$, on a $2 - \frac{1}{t} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

On en déduit que : $0 \leq \dfrac{1}{t^{2-\frac{1}{t}}} \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ $\forall t \in [2, +\infty[$,

Le TH de comparaison implique que

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\frac{1}{t}}}\,dt$ CV car l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2 \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ CV car $\frac{3}{2} > 1$.

Rq : $\int \frac{1}{t^\alpha}$ CV dès que $\alpha > 1$.

D soit f, g deux fonctions déf sur I d'extrémités a et b : $a < b$, soit $x_0 \in I$ ou $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. On dit que f est équivalente à g en x_0 et on note $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ si $\exists$ $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq

(i) $f = g(1 + \varepsilon)$ sur I.

(ii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \varepsilon(x) = 0$.

Rq si $g(x) \neq 0$, pour $x \neq x_0$ au voisinage de x_0,
$f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ ssi $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

TH (comparaison) soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, localement intégrable sur $[a,b[$, on suppose $g \geq 0$ sur $]a,b[$ et $f \underset{x \to b^-}{\sim} g$. (resp $f \underset{x \to a^+}{\sim} g$)

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ st de m̂ nature.

Preuve : (TH comparaison). (cas $[a, b[$).

Il existe $\varepsilon : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} 0$,

et $f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$; comme $\lim\limits_{t \to b^-} \varepsilon(t) = 0$,

$\exists\, t_0 \in [a, b[,\ \forall t \in]t_0, b[,\ |\varepsilon(t)| < \frac{1}{2}$.

On a alors $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < \varepsilon(t) + 1 < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$,

$\Rightarrow\ 0 \leqslant \frac{1}{2} g(t) < g(t)(1 + \varepsilon(t)) = f(t) < \frac{3}{2} g(t)$.

Puisque $0 \leqslant \frac{1}{2} g(t) \leqslant f(t)$ si $\int_a^b f(t)\,dt$ CV

alors $\int_a^b \frac{1}{2} g(t)\,dt$ CV.

Ensuite $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2} g(t)$, si $\int_a^b f(t)\,dt$ DV alors $\int_a^b \frac{3}{2} g(t)\,dt$ DV.

@ $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall t \geqslant 1$, $f(t) \geqslant 0$,

On a $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ car :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^{1+\frac{1}{t}}} = \lim_{t \to +\infty} t^{-(1/t)}$$

$$= \lim_{t \to \infty} e^{-(1/t) \times \ln(t)} = e^0 + 1 \text{ car } \boxed{\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0}$$

comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ DV $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(t)\,dt$ DV.

DD cpt f au point où il y a pb.

Rq : si on DD $\int_a^b f(t)\,dt$ et si $0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$,

$\forall t \in [a, b[$ et si $\int_{a'}^b g(t)\,dt$ DV

$[a', b[$, $a' > a$.

$\Rightarrow$ pas grave alors $\int_a^b f(t)\,dt$ DV. (c'est en b qu'il y a un problème).

car elles et de m nature.

Rq : - si aire ss courbe est finie : $\int$ CV.

- si aire ss courbe est infinie : $\int$ DV.

Int de Riemann :

- $\alpha > 1$: Aire finie @ $\frac{1}{t^2}$
- $\alpha \leqslant 1$: Aire infinie @ $\frac{1}{\sqrt{t}}$

(est-ce f tend assez vite vers 0).

III / Cas fonctions à valeurs réelles qq (ou complexes)

(TH) $F : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ alors

$\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, ssi $\forall (U_n)_n \subset [a,b[$ qui CV vers b alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(U_n)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve : $\boxed{\Longrightarrow}$ soit $(U_n)_n \subset [a,b[$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = b^-$

et soit $\alpha = \lim\limits_{x\to b^-} F(x)$.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, t_0 \in [a,b[, \forall t \in]t_0, b[$,

$|F(t) - \alpha| < \varepsilon$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = b$,

$\exists N, \forall n \geq N, |U_n - b| < b - t_0 = \varepsilon$ en particulier $\varepsilon = b - t_0$.

Donc $\forall n \geq N$, $U_n \in]t_0, b]$ et $|F(U_n) - \alpha| < \varepsilon$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On mq $\lim F(U_n)$ ne dépend pas de $(U_n)_n$.

soit $(U_n)_n, (V_n)_n \subset [a,b[$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} V_n = b$.

soit $(W_n)_n$ définie par $W_{2n} = U_n$ et $W_{2n+1} = V_n$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(W_n) = \ell$ existe.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} F(W_{2n} = U_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} F(W_{2n+1} = V_n) = \ell$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} F(U_n) = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} F(U_n)$

On pose ℓ, la limite commune de toutes ces suites $(F(U_n))_n$. On mq $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = \ell$.

?! Sinon $\exists\, \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists\, x \in]b-\eta, b[$, $|F(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Donc pour $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$\exists\, x_n \in]b - \frac{1}{n}, b[$, $|F(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

Comme $b - \frac{1}{n} < x_n < b$:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b^-$, donc $F((x_n))_n$ CV vers ℓ.

Ce qui contredit $|F(x_n) - \ell| \geq \varepsilon, \forall n$!

Donc $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = \ell$.

Les cas $\ell = \pm\infty$ se font de même.

(D) soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f localement intégrable sur $[a, b[$ (resp $]a, b]$). On dit que f satisfait le critère de Cauchy des intégrales généralisées si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [a, b[$ (resp $]a, b]$), $\forall x, x' \in]x_\varepsilon, b[$, (resp $]a, x_\varepsilon]$), on ait

$$\left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

(TH) soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f localement intégrable s $[a, b[$, (resp $]a, b]$) alors

$\int_a^b f(t)\, dt$ (CV) (ssi) elle vérifie le critère de Cauchy.

<u>Preuve</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ soit $F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ alors $\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \text{ (CV)} \Leftrightarrow \lim_{x \to b^-} F(x) \text{ existe}}$

alors $\forall (U_n)_n \subset [a, b[$ q (CV) vers b, $\lim_{n\to\infty} F(U_n)$ existe.

$\Leftrightarrow \forall (U_n)_n \subset [a, b[$ q (CV) vers b^-, $(F(U_n))_n$ est de Cauchy.

soit $(U_n)_n \subset [a, b[$ q tend vers b^-.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in]a, b[$ tq $\forall x, x'$ dans $]x_\varepsilon, b[$, $\left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$ car $\int_a^b f(t)\, dt$ vérifie le critère de Cauchy.

comme $\lim_{n\to\infty} U_n = b$, $\exists N, \forall n \geq N$, $U_n \in]x_\varepsilon, b[$, ainsi $\forall p, q \geq N$, $U_p, U_q \in]x_\varepsilon, b[$ donc

$$|F(U_p) - F(U_q)| = \left| \int_a^{U_p} f(t)\, dt - \int_a^{U_q} f(t)\, dt \right| = \left| \int_{U_q}^{U_p} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Donc $(F(U_n))_n$ est de Cauchy et $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV).

$\boxed{\Rightarrow}$ soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_a^b f(t)\, dt$ (CV), $\lim_{x \to b^-} F(x) = \ell$ existe,

$\exists x_\varepsilon \in [a, b[$, $\forall x \in]x_\varepsilon, b[$, $|F(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x, x' \in]x_\varepsilon, b[$, on a:

$$\left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| = |F(x) - F(x')| = |F(x) - \ell - (F(x') - \ell)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc le critère de Cauchy et vérifiée.

$|a - b| \leq |a| + |-b| \leq |a| + |b|$

2) Convergence absolue

D $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f loc^t int, sur $[a, b[$ & ctis.

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ CV absolument si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV

• si $\int_a^b f(t)\,dt$ CV mais ne CV pas absolument.
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente.

TH Si $\int_a^b f(t)\,dt$ CV absolument alors elle CV.

Preuve : On applique le critère de Cauchy,
soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV dc
$\exists\ x_\varepsilon \in]a, b[\ \forall\ x \leq x' \in]x_\varepsilon, b[$, on a $\left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right| < \varepsilon$

Alors $\left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \underbrace{\int_x^{x'} |f(t)|\,dt}_{\geq 0}$

$$= \left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right| < \varepsilon.$$

Donc $\int_a^b f(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy,
donc $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

2) Convergence absolue

(D) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f loc^t int, sur $[a,b[$ & ots.

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) absolument si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ (CV)

- si $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) mais ne (CV) pas absolument.

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente.

(TH) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) absolument alors elle (CV).

Preuve : On applique le critère de Cauchy,

soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_a^b |f(t)|\,dt$ (CV) dc

$\exists\, x_\varepsilon \in]a,b[\ \forall\, x \leq x' \in]x_\varepsilon, b[$, on

a $\left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right| < \varepsilon$

Alors $\left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \underbrace{\int_x^{x'} |f(t)|\,dt}_{\geq 0}$

$= \left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right| < \varepsilon.$

Donc $\int_a^b f(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy,

donc $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV).

@ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$ est généralisée en ∞.

On a $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\frac{-1}{1+t^2} \leq \frac{\sin t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

$\boxed{\text{NON}}$ au (TH) de comparaison car besoin $f \geq 0$.

Malgré ça, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \left| \frac{\sin t}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$

Comme $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (CV), $\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{1+t^2}\,dt$ (CV) aussi

d'après (TH) de comparaison.

Et donc $\int_0^\infty \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$ (CV) absolument dc elle (CV).

3) Cas d'une fonction bornée sur un int. borné

(Prop) $-\infty < a < b < +\infty$, f loc. intégrable sur $]a,b[$ et $\boxed{\text{bornée}}$ sur $]a,b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV).

Preuve : (cas (ig) en b)

$\exists\, M > 0$, $\forall\, t \in]a,b[$, $0 \leq |f(t)| \leq M$.

Comme $-\infty < a$ et comme $b < +\infty$,

$\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ (CV). Dc $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) abslt dc (CV).

@ $f : t \to \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est bornée sur $]0,1]$ dc $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ (CV).

Coro $-\infty < a < b < +\infty$, f cont sur $[a,b[$, (resp $]a,b]$) et si se prolonge par continuité en b (resp a) alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

Preuve :

Notons $\tilde{f}$ le PPC de f en b. Alors $\tilde{f}$ est cont sur $[a,b]$. (compact $\Rightarrow$ fermée & bornée), donc $\tilde{f}$ est bornée.

$\exists M>0, \forall t \in [a,b], |\tilde{f}(t)| \leq M$.

Donc f est bornée et $\int_a^b f(t)\,dt$ CV d'après prop. précdte.

@ $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ est ig en 0.

comme $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-1}{t} = 1$ dc $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $t \to \frac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0.

En posant $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$t \to \begin{cases} f(t) & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0. \end{cases}$$

Donc $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ CV.

4) Technique d'Abel pr certaines intégrales

Technique à appliquer pour $\int_a^\infty f(t)\,g(t)\,dt$ si :

* f admet une primitive bornée.
* $g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

@ $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$, $\alpha>0$ est ig en $+\infty$; soit $x_0 \geq 1$,

$$\int_1^{x_0} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \left[-\cos t \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}\right]_1^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{\alpha \cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

$u = \sin t \quad du = \cos t$

$dv = \frac{1}{t^\alpha} \quad v = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$

$$= \frac{\alpha.\cos x_0}{x_0^{\alpha+1}} + \cos(1) - \int_1^{x_0} \frac{\alpha \cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

On a $\lim_{x_0\to\infty} \frac{-\cos x_0}{x_0^{\alpha+1}} + \cos(1) = \cos(1)$

comme $\forall t \geq 1$, $0 \leq \left|\frac{\alpha \cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et

comme $\int_1^\infty \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt$ CV car $\alpha+1>1$,

$\int_1^\infty \frac{\alpha.\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ CV absolument dc CV.

Donc $\lim_{x_0\to\infty} \int_1^{x_0} \frac{\alpha.\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ existe et vaut $\int_1^\infty \frac{\alpha.\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

D'où $\lim_{x_0\to\infty} \int_1^{x_0} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\alpha.\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

Et donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV.

CT3 : Séries Numériques

I/ Généralités

1) Définitions

(D) On appelle suite des sommes partielles de la suite $(u_n)_n$ la suite $(s_n)_n$ donnée par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n .$$

Le nbre s_n est somme partielle d'ordre n.
La suite (s_n) est noté $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on parle de la série de termes général u_n.

(Rq) Si $(u_n)_n$ est déf à partir d'un rg n_0, série notée $\sum_{n\geq n_0}$.

(Rq) Les séries ne sont pas cas particuliers de suite, ce sont TOUTES les suites.
soit $(u_n)_n$ une suite.
On pose $U_0 = u_0$ et $\forall n > 0$, $U_n = u_n - u_{n-1}$
Alors $U_0 + U_1 + \dots + U_n = u_0 + u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1}$
$= u_n$
Donc la suite des $\sum_{n\geq 0} U_n$ est la suite $(u_n)_n$.

2) Convergence d'une série

(D) Si la suite des sommes partielles $(s_n)_n$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ (CV) $s \in \mathbb{R}$, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ (CV).

On appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ le nombre s.

(ie) $\left[s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right]$

si $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne (CV) pas, on dit (DV).

Lorsque $\sum_{n\geq 0} u_n$ (CV), on appelle reste d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} u_n$ le nombre $r_n = s - s_n$.

ep $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

(Rq) $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et r_n le reste d'ordre n n'ont de sens que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ (CV).

Prop : soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries

et on suppose qu'elles ne diffèrent que d'un nbr fini de termes ($\exists N, \forall n\geq N, u_n = v_n$)

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de m̂ nature.

Preuve : $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$. $(T_n)_n$ lsdsp $\sum_{n\geq 0} v_n$.

$N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = v_n$.

Pour $n \geq N$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots + u_n$.

$$S_n = u_0 + \dots + u_{N-1} + v_N + v_{N+1} + \dots + v_n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k - \sum_{k=0}^{N-1} v_k + T_n .$$

si $\sum_n v_n$ CV alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k - \sum_{k=0}^{N-1} v_k + \lim_{n\to\infty} T_n$

donc $\sum_n u_n$ CV.

Réciproquement, si $\sum_n u_n$ CV, $\sum_n v_n$ CV aussi.

RQ • La nature ne change pas, mais la valeur (limite) de la somme change.

RQ si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV alors $\forall k$,

$\sum_{n\geq k} u_n$ CV aussi et : $r_n = s - s_n$.

$$r_n = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k\right) - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$r_n = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

$$r_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \text{ car } \sum_{k\geq n+1} u_k \text{ CV}.$$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

@ Série géométrique : $U_n = a \cdot q^n$, $a \neq 0$, $q \in \mathbb{K}$. La somme partielle d'ordre n :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = a(q^0 + q^1 + \dots + q^n)$$

$$S_n = a \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$S_n = a(n+1) \quad \text{si } q = 1.$$

alors $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe (dans $\mathbb{K}$) ssi $|q| < 1$.

Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \boxed{\frac{a}{1-q}}$

et $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV ssi $|q| < 1$.

@ Série télescopique : Une série télés. est une série dont le terme général u_n pt s'écrire ss la forme $u_n = V_n - V_{n-1}$ où $(V_n)_n$ est une suite qq.

soit $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. DES ↳ $u_n = \frac{n-n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$

alors $u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$
$= 1 - \frac{1}{n}$.

comme $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ dc $\sum_{n\geq 2} u_n$ CV et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1$

Prop : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série CV, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Preuve : soit s la somme de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles. Alors $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s - s = 0$

⚠ La réciproque est FAUSSE. @ ex. F1.

CE $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ dc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV

mais $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Coro Si $(U_n)_n$ ne tend pas vers 0, $\sum_n U_n$ DV.
On dit q'elle DV grossièrement.

TH Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ CV vers s et t et si $\sum_{n\geq 0} w_n$ DV alors :

(i) $\sum_{n\geq 0} (u_n+v_n)$ CV vers $s+t$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n)$ CV vers λs.

(iii) $\sum_{n\geq 0} (u_n+w_n)$ DV.

Preuve : conséquence de la limite d'une somme.

D (CdC) :

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p>q\geq N, \left|\sum_{k=q}^{p} u_k\right| < \varepsilon$$

TH $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV ssi $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy.

Preuve : On note $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Par définition, $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV ssi $(S_n)_n$ CV.

$(S_n)_n$ CV ssi $(S_n)_n$ est de Cauchy. (pr une suite)

Donc ssi $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p>q\geq N,$

$|S_p - S_q| < \varepsilon$.

Comme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ donc :

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right|.$$

$$|S_p - S_{q-1}| = \left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q-1} u_k\right| = \left|\sum_{k=q}^{p} u_k\right|.$$

Ainsi $\forall p>q>N$, $|S_p - S_{q-1}| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{k=q}^{p} u_k\right| < \varepsilon$

Ainsi $(S_n)_n$ est de Cauchy ssi $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy.

V/ Séries à termes positifs

D $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite à termes positifs si $u_n \geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$

Rq Pr appliquer les théorèmes, il suffit que $u_n\geq 0$ apcr.

Prop Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs. Alors la série CV ssi $\exists M / \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

Preuve : soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles ! $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV ssi $(S_n)_n$ CV. Or $(S_n)_n$ est $\nearrow$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0$$

car $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs.

Comme $(S_n)_n$ est $\nearrow$, soit $(S_n)_n$ est majorée et elle CV, soit $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV ssi $\exists M /\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

TH (Comparaison) :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs,

$\forall n$, $0 \leq u_n \leq v_n$: Alors :

(i) si $\sum_{n\geq 0} v_n$ CV, $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

(ii) si $\sum_{n\geq 0} v_n$ DV, $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV.

Preuve : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sum_{n=0}^{k} u_k \leq \sum_{n=0}^{k} v_k$

(i) si $\sum_{n\geq 0} v_n$ CV, alors $\forall n$, on a $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k}$

et alors : $0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} v_k}_{\text{constante}}$.

Donc $\exists M, \forall n, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$. La proposition précédente implique que $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV.

(ii) si $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ et donc

$\sum_{n\geq 0} v_n$ n'est pas majorée car $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$

Donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ DV. □

ⓔ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. On a $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV. (série télescopique).

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

TH $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries à termes positifs tq $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n}$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ st de $\hat{m}$ nature.

Si dans le cas où l'une d'elle CV,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k.$$

Preuve : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_n)_n$ tq

- $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\cdot \forall n, u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N$, on ait $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \geq N$:

$$1-\frac{1}{2} \leq 1+\varepsilon_n \leq 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi $\forall n \geq N$:

car $v_n \geq 0$.
$$\underbrace{\frac{1}{2} v_n}_{\alpha} \leq u_n = v_n(1+\varepsilon_n) \leq \overbrace{\frac{3}{2} v_n}^{\beta}$$

Alors si $\sum_{n\geq 0} v_n$ DV, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} v_n$ DV et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV. $\hat{g}$ α

si $\sum_{n\geq 0} v_n$ CV, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{2} v_n$ CV et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV $\hat{g}$ β.

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k \Leftrightarrow \exists (\varepsilon'_n)_n \text{ tq } \cdot \lim_{n\to\infty} \varepsilon'_n = 0$$

$$\cdot \forall n, \sum_{k=n}^{\infty} u_k = \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)(1+\varepsilon'_n).$$

On doit donc avoir : $\varepsilon'_n = \dfrac{\sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n}^{\infty} v_k}{\sum_{k=n}^{\infty} v_k}$

si $\sum_{k=n}^{\infty} v_k = 0$ alors $v_k = 0$, $\forall k \geq n$ ($v_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$)
et il n'y a rien à faire car $\sum_{k=n}^{\infty} v_k = 0$.
$\forall n' \geq n$ et $\varepsilon'_n = 0$ convient.

Sinon On suppose que $\sum_{k=n}^{\infty} v_k > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $N > n$. On a :

$$\left|\sum_{k=n}^{N} u_k - \sum_{k=n}^{N} v_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{N} (1+\varepsilon_k) v_k - \sum_{k=n}^{N} v_k\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{N} \varepsilon_k v_k\right| \leq \sum_{k=n}^{N} |\varepsilon_k|\,|v_k|$$

$$\leq \sup_{k\geq n} |\varepsilon_k| \sum_{k=n}^{N} v_k \quad (|v_k| = v_k \text{ car } v_k > 0).$$

Lorsque $N \to \infty$, on obtient, comme $\sum_{k\geq n} u_k$ et $\sum_{k\geq n} v_k$ CV

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n}^{\infty} v_k\right| \leq \sup_{k\geq n} |\varepsilon_k| . \sum_{k=n}^{\infty} v_k .$$

D'où

$$|\varepsilon_n'| = \frac{\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n}^{\infty} v_k\right|}{\sum_{k=n}^{\infty} v_k} \leq \sup_{k\geq n} |\varepsilon_k|$$

comme $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall k \geq N$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. Donc $\forall n \geq N$, $\forall k \geq n$, on a : $|\varepsilon_k| < \varepsilon$ donc $\sup_{k\geq n} |\varepsilon_k| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \geq N$, $|\varepsilon_n'| < \varepsilon$: $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n' = 0$.

□

Ⓐ
- $\frac{n^2+1}{n^4+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^2} \geq 0$, $\frac{n^2+1}{n^4+1} \geq 0$,

  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV dc $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n^4+1}$ CV aussi.

- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \geq 0$ dc $\sin\frac{1}{n} \geq 0$ apcr.

  Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV dc $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ DV.

TH Règle de d'Alembert :

soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ série à termes strictement positifs,

1) si $\exists \lambda \in]0,1[$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ apcr

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV. (le cas si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).

2) si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ apcr alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV grossièrement.

(si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$).

<u>Preuve</u> : (1) On suppose $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$. Alors $\forall n \geq N$,

$0 \leq u_n \leq (\lambda)^{n-N} . u_N$.

$\boxed{\text{APR}}$ * vrai pour <u>$n = N$</u> : $u_N = \lambda^0 . u_N$.

* si $u_n \leq \lambda^{n-N} u_N$ alors $u_{n+1} \leq \lambda u_n \leq \lambda . \lambda^{n-N} u_N = \lambda^{n+1-N} u_N$

Par récurrence, $\forall n \geq N$, on a : $0 \leq u_n \leq (\lambda)^{n-N} u_N$.

Comme $\lambda \in]0,1[$, dc $\sum_{n\geq 0} \lambda^{n-N} u_N$ CV.

Le TH de comparaison implique $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV

(R8) si $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $\lambda = \frac{l+1}{2} \in]0,1[$.

comme $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$,

on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$.

Preuve (2) : on suit $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$.

Donc $\forall n \geq N$, $u_{n+1} \geq u_n \geq u_N > 0$.

Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV.

(R9) si $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

⚠ si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on pt avoir $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

et la règle ne permet pas de conclure.

@ RNCP :

- $u_n = \frac{1}{n}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV

- $v_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

(CP) On ne peut pas conclure de règle de D'Alembert si la $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

@ Applicat° Règle (!!) de $n!$ et n^α.

@ $u_n = \frac{(3n)!}{5^n (n!)^3}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3(n+1))!}{5^{n+1}((n+1)!)^3} \times \frac{5^n (n!)^3}{(3n)!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \times \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n!)}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{(n+1)^3 (n!)^3}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{27}{5} > 1$$

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV.

(TH) (Critère de Cauchy).

soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs,

(i) $\exists \lambda \in]0,1[$ tq apcr ; $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV. (cf $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$).

(ii) si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ apcr alors $\sum_{n\geq 0}$ DV grossièrement.

Preuve : (i) on suppose $\exists N \,/\, \forall n \geq N,\ \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$.

Alors $\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq \lambda^n$ et comme $\lambda \in \,]0,1[$,

$\sum \lambda^n$ CV donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV par comparaison.

si $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, alors pour $\lambda = \frac{\ell+1}{2}$,

$\lambda > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N,\ \sqrt[n]{u_n} < \lambda$

et la règle s'applique.

(ii) $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$

et $\sum_n u_n$ DV grossièrement.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ alors $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ apcr.

et la règle s'applique.