M 32 - CM - Gijs Tuynman.

Notion de distance - Norme

Espace Vectoriel

(D) Une norme sur E est une applicaθ N à valeurs dans $[0, +\infty[$.

- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (I)

Dans $\mathbb{R}^n$,

- $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (norme euclidienne)
- $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$
- $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

(mq ∀ n, elles st des normes, vérifier 3 condiθs (pr NE pr 2))

(Coro) $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$ et $\|y-x\| \geq \|y\| - \|x\|$

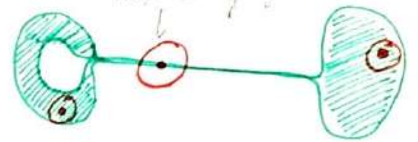
$\hookrightarrow \|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

(I) $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ (1)

$\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

(D) E : (ev),

- $A \subset E$
- A est ouvert.



"On pt gonfler autour d'un point sans sortir de A"

si $\forall a \in A, \exists r > 0, B_r(a) \subset A$ avec $B_r(a)$, la boule ouverte de rayon r et centre a.

$B_r(a) = \{x \in E, \ \text{dist}(x,a) < r\} = \{x \in E, \|x-a\| < r\}$

Rq : $\mathbb{R}$ est (ev), $|x|$ est une norme.
Un $\boxed{\text{ouvert}}$ est une réunion d'intervalles ouverts.

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$, (evn), $A \subset E$, A est ouvert si
$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$.

- Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$, (evn). Toute boule ouverte $B_r(x)$ est un ouvert de E.

(L) N_1 et N_2 st équivalentes si $\exists \ C_1, C_2 > 0$ tq
$\forall x \in E : N_1(x) \leq C_1 \cdot N_2(x)$ et $\forall x \in E : N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x)$.

(P) si N_1 et N_2 st équivalentes.
Si $O \subset E$ est un ouvert pour N_1 alors $O \subset E$ est un ouvert pr N_2

$\leadsto \forall x \in O, \exists \varepsilon > 0 = \{y \in E, N_1(x-y) < \varepsilon\} \subset O$

$\leadsto \forall x \in O, \exists \hat{\varepsilon} > 0 = \{y \in E, N_2(x,y) < \hat{\varepsilon}\} \subset O$.

(D) $(E, \|\cdot\|)$, evn. Un ss-ens $F \subset E$ est un fermé si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

⚠ bcp ens st ni ouvert, ni fermé. pas ouvert $\not\Rightarrow$ fermé.

(Rq) Si F est ouvert, $E \setminus F$ est un fermé.

(D) E : evn, $x \in E$, un voisinage de x est un ouvert O de E tq $x \in O$.

(L) $F \subset E$ est fermé :

$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus F, \exists \varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(x) \subset E \setminus F.$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus F, \exists$ voisinage u de x, $u \subset E \setminus F$.

(L) $B_r(x)$ est un ouvert, $\forall y \in B_r(x), \exists \varepsilon > 0$,

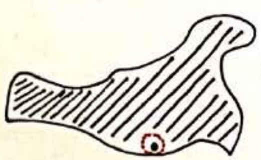
$$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x).$$

(L) $(E, \|\cdot\|)$, evn et $x \in E$. Alors l'ens $\{x\} \subset E$ est un fermé.

(D) $(E, \|\cdot\|)$, evn, $A \subset E$. Un point $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

L'ens de ts les points adhérent à A est appelé l'adhérence de A ou la fermeture de A, noté $\overline{A}$.

$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A\}$.



(P) (i) $A \subset \overline{A}$.

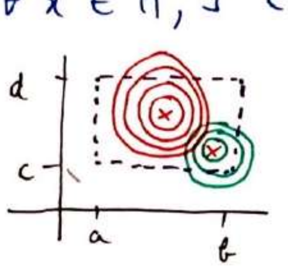
(ii) $\overline{A}$ est fermé.

(iii) si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.

$\rightarrow$ $\overline{A}$ est le plus petit fermé q contient A.

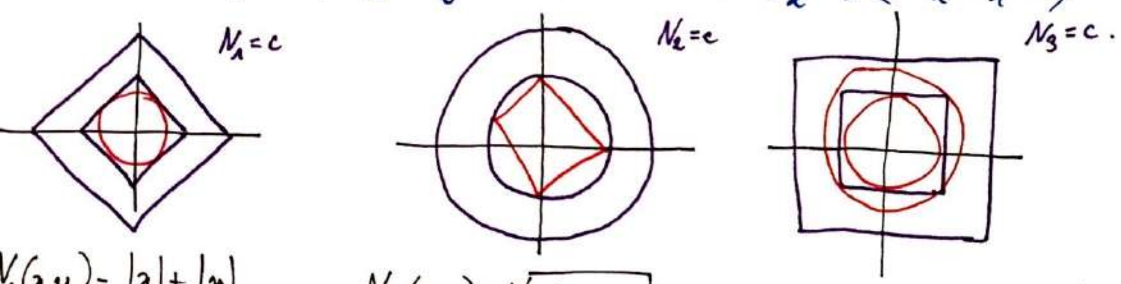
Démonstrations

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$, evn $A \subset E$, A est <u>ouvert</u> si $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$.



ici $\varepsilon = \min(d-y, y-c, x-a, b-x)$

(L) N_1, N_2 st normes équivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E, N_1(x) \leq C_1 \cdot N_2(x)$ et $\forall x \in E : N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x)$

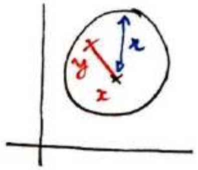


$N_1(x,y) = |x| + |y|$ $\quad N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad N_\infty(x,y) = \max(|x|, |y|)$

(P) si N_2, N_1 st équivalentes,
si $O \subset E$ est un ouvert pr N_1 alors O est un ouvert pr N_2.
$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0 : \{y \in E, N_1(x-y) < \varepsilon\} \subset O$.
$\forall x \in O, \exists \hat{\varepsilon} > 0 : \{y \in E, N_2(x-y) < \hat{\varepsilon}\} \subset O$.

↳ valeur explicite pr $\hat{\varepsilon}$.
→ utiliser équivalences normes
→ choisir $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c_1}$ ou εc_1 ou $\frac{\varepsilon}{c_2}$ ou $\varepsilon \cdot C_2$

(L) $B_r(x)$ est un ouvert, $\forall y \in B_r(x), \exists \varepsilon > 0$,
$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$.



→ ε très petit, q tche le bord
→ $\|y - x\| < r \Rightarrow \varepsilon = r - N(x-y)$.

Prenons $y \in B_r(x)$ arbitraire, trouver $\varepsilon > 0$ q vérifie $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. Valeur explicite pr ε.

(L) $(E, \|\cdot\|)$, evn. $x \in E$. Alors l'ens $\{x\} \subset E$ est un fermé.

(P) (i) $A \subset \overline{A}$. nf.
(ii) $\overline{A}$ est fermé
(iii) si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.

(ii) mq $E \setminus \overline{A}$ est ouvert. le complémentaire.
$E \setminus \overline{A} = \{x \in E \mid x$ n'est pas adhérent à $A\}$ est ouvert.

<u>àmq</u> : $\exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset E \setminus \overline{A}$

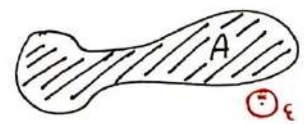
vide ?

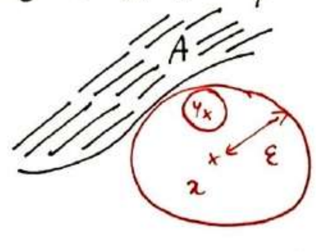
• x n'est pas adhérent à A : $\neg(\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset)$
$= \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

<u>àmq</u> $\exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset E \setminus \overline{A}$. $\quad B_\varepsilon(x) \cap \overline{A} = \emptyset$

pas vide ?

Reste à faire l'implicaθ :
$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap \overline{A} = \emptyset$





Si grde boule $B_\varepsilon(x)$ ne voit pas élts A. Alors petite boule $B_\varepsilon(y)$ ne voit pas élts A.

Prenons $y \in B_\varepsilon(x)$, $N(x-y) < \varepsilon$.

Prenons $\delta = \varepsilon - N(x-y) > 0$

alors $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$.

$$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_\delta(y) \cap A = \emptyset$$

$\Updownarrow$

y n'est pas adhérent à A.

On vient de mq: $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow y$ n'est pas adhérent à A.

$$\Rightarrow y \in E \setminus \overline{A}$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset E \setminus \overline{A}.$$

(D) $(E,\|\cdot\|)$, evn. Un ss-ens $F \subset E$ est un fermé si son complémentaire $E\setminus F$ est un ouvert.

⚠ bcp ens st ni ouvert, ni fermé. pas ouvert $\nRightarrow$ fermé.

(Rq) Si F est ouvert, $E\setminus F$ est un fermé.

(D) E : evn, $x \in E$, un voisinage de x est un ouvert O de E tq $x \in O$.

(L) $F \subset E$ est fermé :

$\Leftrightarrow \forall x \in E\setminus F,\ \exists\, \varepsilon>0,\ B_\varepsilon(x) \subset E\setminus F$.

$\Leftrightarrow \forall x \in E\setminus F$, $\exists$ voisinage u de x, $u \subset E\setminus F$.

(L) $B_r(x)$ est un ouvert, $\forall y \in B_r(x),\ \exists\, \varepsilon>0$,

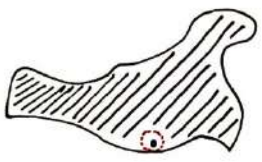
$$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x).$$

(L) $(E,\|\cdot\|)$, evn et $x \in E$. Alors l'ens $\{x\} \subset E$ est un fermé.

(D) $(E,\|\cdot\|)$, evn, $A \subset E$. Un point $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon>0 : B_\varepsilon(x) \wedge A \neq \emptyset$.

L'ens de ts les points adhérent à A est appelé l'adhérence de A ou la fermeture de A, noté $\overline{A}$.

$\overline{A} = \{x \in E \mid x$ point adhérent à $A\}$.



(P) (i) $A \subset \overline{A}$.

(ii) $\overline{A}$ est fermé.

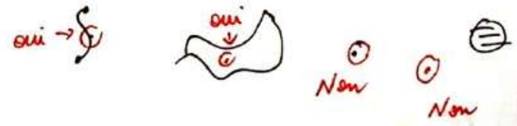
(iii) si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.

$\rightarrow$ $\overline{A}$ est le plus petit fermé q contient A.

(D) $A \subset E$ un sous-ens,

$x \in E$ est un point d'accumulaθ de A.

si $\forall \varepsilon>0,\ \exists\, a \in A,\ a \neq x,\ a \in B_\varepsilon(x)$.



(L) $A \subset E$, $x \in \overline{A}$ alors il y a 2 possibilités :

1) x est un point d'accumulaθ.

2) $x \in A$ et $\exists\, \varepsilon>0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$.

↳ on dit que x est un point isolé de A.

Convergence & Continuité : C_2

(D) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, une suite dans E.

$x : \mathbb{N} \to E$, $\ell \in E$.

On dit que la suite x_n admet ℓ comme limite qd $n \to +\infty$.

si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$n \geq N \Rightarrow \underline{\|x_n - \ell\| < \varepsilon}$.

(R) : $y_n \in \mathbb{R}$, $\lim y_n = x \iff \begin{array}{l}\forall \varepsilon>0,\\ \exists N\in\mathbb{N},\\ \forall n\geq N,\end{array} |y_n - x| < \varepsilon$.

(L) Une suite dans E, $\ell \in E$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0$

(L) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

Preuve : (?!) Par l'absurde, on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.

On sait $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$.

On sait $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \|x_n - \ell\| < \varepsilon$

et $\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \hat{N}, \forall \hat{n} \geq \hat{N}, \|x_{\hat{n}} - \ell\| < \hat{\varepsilon}$.

Posons $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\|\ell_1 - \ell_2\| > 0$.

On sait qq chose pr tt $\varepsilon > 0$, dc ep $\varepsilon = \varepsilon_1$.

On trouve N tq $\forall n \geq N$, $\|x_n - \ell_1\| < \varepsilon_1$.

On s. aussi qc pr tt $\hat{\varepsilon} > 0$, ep pr $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$ $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\|\ell_1 - \ell_2\|$

On trouve $\hat{N}$ tq $\forall \hat{n} \geq \hat{N}$: $\|x_{\hat{n}} - \ell_2\| < \varepsilon_1$.

Choisissons $n_1 = \max(N, \hat{N})$:

on sait qq chose $\forall n \geq N$, ep pour $n_1 \geq N$,

à savoir $\|x_{n_1} - \ell_1\| < \varepsilon_1$.

On s aussi qqc pr tt $\hat{n} \geq \hat{N}$, ep pr $n_1 \geq \hat{N}$,

à savoir $\|x_{n_1} - \ell_2\| < \varepsilon_1$.

Calcul : $\|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - x_{n_1} + x_{n_1} - \ell_2\|$

$\leq \|\ell_1 - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - \ell_2\| = \|x_{n_1} - \ell_1\| + \|x_{n_1} - \ell_2\|$

$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1$

$= \frac{2}{3}\|\ell_1 - \ell_2\|$ (?!)

(L) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \iff \forall$ O voisinage ouvert de ℓ $\exists N$,

$\forall n \geq N : x_n \in O$.

(R) : pour $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\ell) = O$ est un voisinage.

(4) A sous-ens, $x \in E$.

1) $x \in \bar{A} \iff \exists\, a_n$ suite de A, $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$

2) x point d'accumulation de $A \iff \exists\, a_n$ suite de $A\setminus\{x\}$ tq $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$

On sait $x \in \bar{A}$, on cherche une suite $a_n \in A$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.

On sait $\forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A : a \in B_\varepsilon(x)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A : \|a - x\| < \varepsilon$.

On cherche $a_n \in A$, $\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists N, \forall n \geq N, \|a_n - x\| < \hat{\varepsilon}$.

On sait pr tout $\varepsilon > 0$, ex pr $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

il existe $a_n \in A$ tq $\underbrace{\|a_n - x\|}_{\to 0} < \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$, TH gendarmes

$\boxed{\Leftarrow}$ à mq $\forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

on sait $\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists N\, \forall n \geq N, \|a_n - x\| < \hat{\varepsilon}$.

ex pour $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\exists N$ tq $\|a_n - x\| < \hat{\varepsilon} - \varepsilon$

$a_N \in B_\varepsilon(x) \cap A$.

Prop x_n suite dans $\mathbb{R}^p$,

$x_0 \in \mathbb{R}^p$, $x_1 \in \mathbb{R}^p, \dots, x_n = (x_{n_1}^1, x_{n_2}^2, \dots, x_n^p)$

$\ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell = (\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^p)$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \iff$ pour $1 \leq i \leq p$.

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell^i$.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ on sait $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N$,

$\|x_n - \ell\|_2 < \varepsilon$, on vt mq $\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \hat{N}, \forall \hat{n} \geq \hat{N}$,

Pour i fixé $\cancel{\|x_n^i - \ell^i\| < \hat{\varepsilon}}$ $\xrightarrow{\text{nbs réels}}$ $|x_n^i - \ell^i| < \hat{\varepsilon}$

$$|x_n^i - \ell^i| = \sqrt{(x_n^i - \ell^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_n^i - \ell^i)^2} = \|x_n - \ell\|_2.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\|x_n - \ell_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_n^i - \ell^i)^2}$

$\leq \sqrt{p \max_{j=1,\dots,p} |x_n^j - \ell^j|^2}$

$= \sqrt{p} \max_{j=1,\dots,p} |x_n^j - \ell^j|$

$|x_n^i - \ell^i| \leq \max_{j=1,\dots,p} |x_n^j - \ell^j|$

$\Rightarrow |x_n^i - \ell^i|^2 \leq \max_{j=1,\dots,p} |x_n^j - \ell^j|^2$

(L) si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ alors $\exists R>0, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_R(0)$.

(ie : $\|a_n - \ell\| < \varepsilon$).

("ts élts suite ss excepθ st ds boule apcr").

Preuve :

On sait $\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N : \|a_n - \ell\| < \varepsilon$,

ep pour $\varepsilon = \pi$, $\exists N, \forall n \geqslant N : \|a_n - \ell\| < \pi$.

$\Rightarrow \forall n \geqslant N : \|a_n\| < \pi + \|\ell\|$.

On pose $R = \max(\|a_1\|, \dots, \|a_N\|, \pi + \|\ell\|)$. □

("qd nbr fini, on pt choisir + grd : max si ∞ : sup ")

(D) (lim pour fonction) :

$f : A \subset E \longrightarrow F$, a point d'accumulaθ de A.

$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in A,$

$0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

$x \neq a$

"pac : coté points proche de a".

(L) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a} \|f(x) - \ell\| = 0$

f à valeurs vectoriel de — réel $\mathbb{R}$

f = à un vecteur ℓ.

(L) ASSE :

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

$0 < \|x-a\| < \delta$.

(ii) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in B_\delta(a) \wedge A\setminus\{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$

(iii) $\forall O$ voisinage de ℓ, $\exists u$ voisinage de a,

$\forall x \in u \wedge A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in O$.

(iv) $\forall O$ voisinage de ℓ, $\exists u$ voisinage de a, $U \wedge A\{a\} \subset f^{-1}(O)$.

(L) $f, g : A \subset E \longrightarrow F$, a point accumulaθ de A,

$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a} g(x) = m \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \ell + m$.

(L) $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in F$ vecteurs, $\lim_{x\to a} g(x) = m \in \mathbb{R}$

alors $\lim_{x\to a}(g(x).f(x)) = m.\ell$

(L) si $m \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$

Preuve : (Produit) MODE BROUILLON

On sait $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in A,$

$$0 < \|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon_1 .$$

On sait $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in A,$

$$0 < \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_2 .$$

On vt mq $\forall \varepsilon_3 > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in A,$

$$0 < \|x-a\| < \delta_3 \Rightarrow \|g(x).f(x) - m\ell\| < \varepsilon_3 .$$

"le δ_3 : c'est lui, varie de ε_3".

Prenons $\varepsilon_3 > 0$, à trouver $\delta_3 > 0$,

"on cherche $\|g(x).f(x) - m\ell\| < \varepsilon_3$"

on calcule $\|g(x).f(x) - m\ell\| = \|(g(x) - m + m)(f(x) - \ell + \ell) - m\ell\|$

$= \|(g(x)-m).\ell + m(f(x)-\ell) + (g(x)-m)(f(x)-\ell)\|$

$\leq \|\ell\|.|g(x)-m| + |m|.\|f(x)-\ell\| + |g(x)-m|.\|f(x)-\ell\|$

$< \|\ell\|.\varepsilon_2 + |m|.\varepsilon_1 + \varepsilon_1.\varepsilon_2 < \varepsilon_3$

"on veut"

On va adapter ε_1 et ε_2 suffisamment petit pour $< \varepsilon_3$.

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$? $\varepsilon_1(\|\ell\| + |m| + \varepsilon_1) < \varepsilon_3$? on veut.

$\Rightarrow$ f quadratiq : résoluble mais forme diff.

Si $\varepsilon_1 < 1$,

$$\varepsilon_1(\|\ell\| + |m| + \varepsilon_1) < \varepsilon_1(\|\ell\| + |m| + 1) < \varepsilon_3 .$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_3}{\|\ell\| + |m| + 1}}$$

3 conditions :

- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
- $\varepsilon_1 < 1$
- $\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon_3}{\|\ell\| + |m| + 1}$.

FIN DU MODE BROUILLON.

Preuve (produit)

Prenons $\varepsilon_3 > 0$,

posons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon_3 \times \frac{1}{2}}{\|\ell\| + |m| + 1}\right)$.

On sait qqc pr tt ε_1 et ε_2, ep pour $\mathcal{F}$,

on obtient $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tq

$0 < \|x-a\| < \delta_1 \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon_1$.

$0 < \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_2$.

On pose $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$,

alors on calcule pour $a \in A$, $0 < \|x-a\| < \delta_3$,

$$\|g(x).f(x) - m\ell\| \leqslant \|\ell\|.|g(x)-m| + |m|.\|f(x)-\ell\| + |g(x)-m|.\|f(x)-\ell\|$$

$$< \|\ell\| + \varepsilon_2 + |m|.\varepsilon_1 + \varepsilon_1.\varepsilon_2 = \varepsilon_1(\|\ell\| + |m| + \varepsilon_1)$$

car on sait que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon_3 \times \frac{1}{2}}{\|\ell\| + |m| + 1}\right)$

$$\leqslant \varepsilon_1(\|\ell\| + |m| + \ell) \quad \text{car } \varepsilon_1 \leqslant 1.$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_3 \times \frac{1}{2}}{\|\ell\| + |m| + 1} \times (\|\ell\| + |m| + 1) = \varepsilon_3 \times \frac{1}{2} < \varepsilon_3$$

□

(P) $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \longrightarrow G$, $h = g \circ f$,

a point d'accumulaθ de A,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \lim_{y \to \ell} g(y) = m \Rightarrow \lim g(f(x)) = m.$$

Il existe un voisinage u de a, $f(u \cap A \setminus \{a\}) \subset B \setminus \{\ell\}$.

(D) $f : A \subset E \longrightarrow F$. $a \in A$,

f est continue en a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,$
$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Si a point accumulaθ de A alors :

f continue en a $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(Rq) Une f est tjrs continue ds P. isolé d'un ens.

(L) ASSE,

(i) f continue en a.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

(iii) $\forall O$ voisinage de $f(a)$, $\exists u$ voisinage de a, tq $f(U \cap A) \subset O$.

(iv) $\forall O$ voisinage de $f(a)$, $\exists u$ voisinage de a, $U \cap A \subset f(O)$.

(D) $f : A \longrightarrow F$,

f est continue (sur A) si f est continue en chaque point $a \in A$.

(L) ASSE :

2.20 (i) f continue sur A.

(ii) $\forall$ O ouvert de F, $\exists$ u ouvert de E, $f^{-1}(O) = A \cap U$ ~> $f(U \cap A) \subset O$.

(iii) $\forall$ W fermé de F, $\exists$ v fermé de E, $f^{-1}(W) = A \cap V$.

(P) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $b \in \mathbb{R}$,

- $\{x \in A \mid f(x) < b\} = A \cap U$ pr un ouvert $U \subset E$.
- $\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = A \cap V$ pr un fermé $V \subset E$.
- $\{x \in A \mid f(x) = b\} = A \cap V$ pr un fermé $V \subset E$.

Preuve :

$]-\infty, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

f continue $\Rightarrow f^{-1}(]-\infty, b[) = A \cap U$, U ouvert.

$]-\infty, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

$\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = f^{-1}(]-\infty, b])$

$\{b\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $\square$

@ Mq ouvert ? $\{(x,y) \mid x \neq y^2\}$

$f(x,y) = y^2 - x$ $\quad$ f continue.

$f(x,y) = 0$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow$ ouvert $\Leftrightarrow f(x,y) \neq 0 \Rightarrow$ fermé.

Prémice des preuves :

- $\forall x \in A$ hihihi signifie $\begin{cases} \forall x : \text{si } x \in A \text{ alors hihihi} \\ \forall x : (x \in A) \Rightarrow (\text{hihihi}) \end{cases}$

Pr tt objet x, si $(x \in A)$, alors (hihihi).

- $\exists x : (x \in A)$ et (hihihi) : il existe un objet x tq $(x \in A)$ et (x vérifie hihihi)

$[\text{non}(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \text{ et } (\text{non } B)]$

(D) (Image réciproque d'un ens ss applicaθ).

Si $f : A \longrightarrow B$ est une applicaθ entre deux ens et si $X \subset B$ est un sous-ens, alors on définit son image réciproque $f^{-1}(X)$ comme le sous-ens de A :

$$f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}.$$

→ cette image réciproque $\exists$ pr tte applicaθ.

⚠ à ne pas confondre ac l'applicaθ réciproq $f^{-1} : B \to A$ q n'$\exists$ q si f est bijective.

Preuve 2.9

Définition ASIE, l'on vt mq :

(i) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in A : 0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} : f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$

(iii) $\forall$ O voisinage de ℓ, $\exists$ U voisinage de a $\forall x : x\in U\cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x)\in O$

(iv) ——— : $U\cap A\setminus\{a\} \subset f^{-1}(O)$

Equivalence logique pr implicat° :

$\forall x\in A :\ 0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x : x\in A \Rightarrow [0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon]$

$\Leftrightarrow \forall x : [x\in A \text{ et } 0<\|x-a\|<\delta] \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$.

Définit° boule :

$\|f(x)-\ell\|<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$

et $\|x-a\|<\delta \Leftrightarrow x\in B_\delta(a)$.

Puis la condit° $0<\|x-a\| \Leftrightarrow x\neq a$ (car ppté $\|\cdot\|$, $\|z\|=0\Rightarrow z=0$)

Dmq (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$\forall x\in A : 0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x : x\in A \Rightarrow [0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon]$.

$\Leftrightarrow \forall x : [x\in A \text{ et } 0<\|x-a\|<\delta] \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x : [x\in A \text{ et } x\neq a \text{ et } x\in B_\delta(a)] \Rightarrow f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$

$\Leftrightarrow \forall x : [x\in A\setminus\{a\}\cap B_\delta(a)] \Rightarrow f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$

Equivalences logiques :

$U\cap A\setminus\{a\} \subset f^{-1}(O)$

déf° inclusion $\Leftrightarrow \forall x : x\in U\cap A\setminus\{a\} \Rightarrow x\in f^{-1}(O)$

$\Leftrightarrow \forall x : x\in U\cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x)\in O$.

Rq : Une boule est un voisinage ouvert de son centre et qu'un voisinage ouvert contient des petites boules putt p déf° d'un ouvert.

Dmq (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

- On sait $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B_\delta(a)\cap A\setminus\{a\} : f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$

on vt qd $\forall$ O voisinage de ℓ $\exists$ U voisinage de a

$\forall x : x\in U\cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x)\in O$.

A^{dt}, pr un voisinage (ouvert) arbitraire O de ℓ, il faut trouver explicitement un voisinage ouvert U de a ayant ppté. (cel : $f(x)\in$ boule).

Si par chance cette boule est $\subset$ dans O ? gagné !

Q° : Y-a-t-il une telle boule incluse dans O ?

Par définit° d'un ouvert appliqué à O, il existe, pr $\ell\in O$, un $\varepsilon>0$, $B_\varepsilon(\ell)\subset O$.

On sait qqc valable pr $\forall\ \varepsilon>0$, $B_\varepsilon(\ell)\subset O$

Pour notre $\varepsilon>0$: $\exists \delta>0\ \forall x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\}$: $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$.
Mais si δ est positive, alors $B_\delta(a)$ est un voisinage ouvert,
soit $U = B_\delta(a)$: ie R
Pour notre $\varepsilon>0$: $\exists U = B_\delta(a)$ voisinage de a : $\forall x \in U \cap A\{a\}$: $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$.
On avait choisi ε dsq $B_\varepsilon(\ell) \subset O$, càd : $\forall O$, on a trouvé U.

Arguments en bref :
$$O \Rightarrow \exists \varepsilon>0\ [B_\varepsilon(\ell) \subset O] \xRightarrow{(ii)} \exists \delta>0 \Rightarrow \exists U = B_\delta(a).$$

• Pr (iii) ⇒ (ii) :
on sait $\forall\ O$ voisinage de ℓ $\exists U$ voisinage de a $\forall x$:
$$x \in U \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in O\ ;$$
on vt ed $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$.
Pr $\varepsilon>0$ arbitraire, il faut trouver $\delta>0$ vérifiant condiθ.
①① ce q'on sait, la (c1) dit que $f(x) \in$ à un voisinage ouvert de ℓ.
Mais $B_\varepsilon(\ell)$ est un voisinage ouvert de ℓ.
Hyp (ii) ac choix $O = B_\varepsilon(\ell)$, cela ns donne $\exists$ voisinage ouvert U de a vérif ppté
$$\forall x : x \in U \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in O.$$
On vt trouver $\delta>0$ tq
$$\forall x : x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell) = O.$$
On a un voisinage ouvert U MS on cherche une boule.
Q° : si boule ⊂ dans U ? gagné !

• U étant un ouvert contenant a, $\exists \delta>0$, $B_\delta(a) \subset U$. On a dc trouvé un $\delta>0$ tq :
$$x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow x \in U \cap A\{a\} \Rightarrow f(x) \in O = B_\varepsilon(\ell)$$

Arguments en bref :
$$\varepsilon \Rightarrow O = B_\varepsilon(\ell) \xRightarrow{(iii)} \exists U \Rightarrow \exists \delta>0\ [B_\delta(a) \subset U]$$
V

Preuve 2.9. (vers° poly)
(i) ⇔ (ii) : transcripθ boule ac déf° limite $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,
$\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall x : [x \in A$ et $0<\|x-a\|<\delta] \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \varepsilon$.
$\Leftrightarrow \forall x : [x \in A$ et $x \neq a$ et $x \in B_\delta(a)] \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$
$\Leftrightarrow \forall x : [x \in A \wedge B_\delta(a)\setminus\{a\}] \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$
(iii) ⇔ (iv) : transcpθ image réciproq déf C
$U \cap A\setminus\{a\} \subset f^{-1}(O) \Leftrightarrow \forall x : x \in U \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow x \in f^{-1}(O)$
$\Leftrightarrow \forall x : x \in U \cap A\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in O.$ déf f^{-1}
(ii) ⇒ (iii) : Prenons O un voisinage ouvert de ℓ. Pce q c't ouvert q contient ℓ, $\exists \varepsilon>0$ tq $B_\varepsilon(\ell) \subset O$. En prenant $\varepsilon>0$ ds (ii), on trve $\delta>0$ vérif : $\forall x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(\ell) \subset O$.
Mais $B_\delta(a)$ est un voisinage ouvert de a qu'on pt prendre pr U.
(iii) ⇒ (ii) : On prend $\varepsilon>0$ arbitraire, il s'ensuit que la boule $B_\varepsilon(\ell)$ est un voisinage ouvert de ℓ qu'ont pt prendre pour O ds (iii). Par cette ppté, $\exists$ dc un voisinage ouvert U de a vérifiant $\forall x \in U \cap A\setminus\{a\} : f(x) \in O = B_\varepsilon(\ell)$.
Mais U est un ouvert contenant a, dc p déf° d'un ouvert, $\exists \delta>0$ tq $B_\delta(a) \subset U$. Dc a fortiori
$B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} \subset U \cap A\setminus\{a\}$.
ed : $\forall x \in B_\delta(a) \cap A\setminus\{a\} : f(x) \in O = B_\varepsilon(\ell)$. ■

Preuve 2.12

Rq. · ⚠ prérég : $\forall x \in A \cap O \setminus \{a\} : f(x) \neq 0$.

· a : pt Acc de ↗ ?

· $\lim_{x \to a}$: proche de a, we don't care of far points from a.

Trad° limite : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in A ; 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$; et on vt q° :

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists \delta' > 0, \forall y \in A : 0 < \|y - a\| < \delta' \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \varepsilon'$.

On prd dc $\varepsilon' > 0$ arbitraire, on cherche δ' adéquat.
On vt arriver à ccl° la différence $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}$.
On sait qqc la différence $f(x) - \ell$:

⚠ il ft de chercher à relier ces deux Qttés.

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - f(x)}{\ell \cdot f(x)} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|\ell| \cdot |f(x)|} < \varepsilon$$

On cherche à majorer cela par ε'
Mq dénominat^R ne pt pas devenir petit.

Idée : si $\lim f(x) = \ell \neq 0$ alors pour x proche de ℓ, $f(x)$ sera proche de ℓ & pas proche de 0.

En partant déf° $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Cas particulier : $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |\ell|$, pr obtenir $\delta_0 > 0$, vérifiant : $\forall x \in A : 0 < \|x - a\| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$

Pour $0 < \|x-a\| < \delta$, on a a dc

$$|\ell| \leq |\ell - f(x)| + |f(x)| < \frac{1}{2}|\ell| + f(x) \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{2}|\ell|$$

· $0 < \|x - a\| < \delta_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|\ell| \cdot |f(x)|} < \frac{|f(x) - \ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2}$

on sait $\frac{|f(x) - \ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2} < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}|\ell|^2}$; on veut $\frac{|f(x) - \ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2} < \varepsilon'$.

Avons-nous $\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}|\ell|^2} \leq \varepsilon'$? gagné   oui

On sait qqc POUR TOUT $\varepsilon > 0$, dc on sait qqc en particulier pour $\varepsilon = \varepsilon' \cdot \frac{1}{2}|\ell|^2$, à savoir $\exists\ \delta > 0$:

$\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = \varepsilon' \cdot \frac{1}{2}|\ell|^2$.

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{|f(x) - \ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2} < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}|\ell|^2} = \frac{\varepsilon' \cdot \frac{1}{2}|\ell|^2}{\frac{1}{2}|\ell|^2} = \varepsilon'$$

Majorat° fonctionne sur 2 condit°s :
$0 < \|x - a\| < \delta_0$ et $0 < \|x - a\| < \delta$.

Donc pr majorat° soit vraie : exiger : $0 < \|x - a\| < \min(\delta_0, \delta)$

On pose $\delta' = \min(\delta_0, \delta)$

On a bien la ppté :
$\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta' \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{|f(x)-\ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2} < \frac{\varepsilon' . \frac{1}{2}|\ell|^2}{\frac{1}{2}|\ell|^2} = \varepsilon'$.

Mq a est bien (PAcc) de l'ens $A \cap D_{\delta_0}(a) \setminus \{a\}$, l'ens où on est sûr $f(x)$ $\exists$ & vérifie $|f(x)| > \frac{1}{2}|\ell| > 0$:

<u>on sait</u> : $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap A \setminus \{a\} \neq 0$.

<u>on veut</u> : $\forall \varepsilon' > 0 : B_{\varepsilon'}(a) \cap (A \cap D_{\delta_0} \setminus \{a\} \setminus \{a\} \neq \phi$.

Mais on a $B_{\varepsilon'}(a) \cap (A \cap D_{\delta_0} \setminus \{a\}) \setminus \{a\}$
$= B_{\varepsilon'}(a) \cap B_{\delta_0}(a) \cap A \setminus \{a\} = B_{\min(\varepsilon', \delta_0)}(a) \cap A \setminus \{a\}$.

Soit dc $\varepsilon' > 0$ arbitraire alors on est <u>qqc</u> μ # $\varepsilon > 0$, ep pour $\varepsilon = \min(\varepsilon', \delta_0)$:

$\emptyset \neq B_\varepsilon(a) \cap A \setminus \{a\} = B_{\varepsilon'}(a) \cap (A \cap D_{\delta_0} \setminus \{a\}) \setminus \{a\}$

Preuve 2.12 : Poly

On sait $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$,
on vt $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall y \in A : 0 < \|y-a\| < \delta' \Rightarrow \|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\| < \varepsilon'$.

Calcul : $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|\ell| . |f(x)|}$; on invoque d'abord $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$, ce q donne $\delta_0 > 0$ vérifiant :

$\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$.

ep $\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{2}|\ell|$.

Puis on prend $\varepsilon' > 0$ arbitraire μ lql on cherche $\delta' > 0$. On invoque $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|^2 . \varepsilon'$, ce q ns donne $\delta > 0$: $\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow$ $|f(x) - \ell| < \varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|^2 . \varepsilon'$. On pose $\delta' = \min(\delta_0, \delta)$, on f^t raisn^t pour $0 < \|x-a\| < \delta'$:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{|f(x)-\ell|}{\frac{1}{2}|\ell|^2} < \frac{\varepsilon' . \frac{1}{2}|\ell|^2}{\frac{1}{2}|\ell|^2} = \varepsilon'$$

■

Preuve 2.19 : Ressemblance 2.19 $\leftrightarrow$ 2.9.

2.19. (i) dit f continue en a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, cf 2.9(i), <u>ie</u> <u>$\ell = f(a)$</u>.

Mais a exclut ds 2.9, pas ds 2.19. illusoire car :

$\forall x \in B_\delta(a) \cap A \setminus \{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$
$\Leftrightarrow [\forall x \in B_\delta(a) \cap A \setminus \{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))]$ et $f(a) \in B_\varepsilon(f(a))$
$\Leftrightarrow \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

D'où rajouter a ne chge pas.

Puis, sachant que O est un voisinage de $f(a)$ et U un voisinage de a : $\forall x : x \in U \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in O$.
$\Leftrightarrow f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset O$
$\Leftrightarrow f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset O$ et $f(a) \in O$
$\Leftrightarrow f(U \cap A) \subset O \Leftrightarrow U \cap A \subset f^{-1}(O)$. ■

Preuve 2.20 :

Transcrip° (i) de 1.2.19 :

f cont sur $A \iff \forall a \in A$: f cont en a.

$\iff \forall a \in A\ \forall\ O$ voisinage de $f(a)$

$\exists\ U$ voisinage de a : $U \cap A \subset f^{-1}(O)$ $(*)$

Mq $(ii) \iff (*)$: 1) $(ii) \Rightarrow (*)$:

On prend $a \in A$, O voisinage de a arbitraire, on cherche un voisinage U de a tq $U \cap A \subset f^{-1}(O)$.

Mais O est ep un ouvert q contient $f(a)$. ppté (ii) invqus qqc q marche pr tt ouvert O de F, dc ep notre O q contient $f(a)$. Selon (ii), $\exists$ un ouvert U de E tq $f^{-1}(O) = U \cap A$.

D'up : $U \cap U \subset f^{-1}(O)$ car $f(a) \in O$, on a forcét $a \in f^{-1}(O) = U \cap A$ et dc $a \in U$. D'où U est bien un voisinage de a.

2) $(*) \Rightarrow (ii)$:

On prend un ouvert O de F arbitraire & on cherche un ouvert U de E tq $f^{-1}(O) = U \cap A$. Pr le trouver, utilise $(*)$, $\forall a \in A$, ep pr $a \in f^{-1}(O)$. On a $f(a) \in O$, d'où O est un voisinage de $f(a)$. invqus$^{(*)}$ pour ce point a et ce voisinage O de $f(a)$: ccl $\exists$ un voisinage U_a de a vérifiant $U_a \cap A \subset f^{-1}(O)$:

calcul $\{a\} \subset U_a \cap A \subset f^{-1}(O)$

$$\Rightarrow f^{-1}(O) = \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} \{a\} \subset \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} (U_a \cap A) \subset f^{-1}(O)$$

Un ens est la réunion de ses points, $\Rightarrow$ 1° égalité.

Qd on réunit plsrs fois m̂ ens, cela ne chg rien, on a tjrs $f^{-1}(O)$

Les inclusions st dc des égalités.

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} (U_a \cap A) = \Big(\bigcup_{a \in f^{-1}(O)} U_a \Big) \cap A.$$

invqus 1.13. iii : $\boxed{\text{La réunion (arbitraire) d'ouverts est de nouveau un ouvert.}}$

La réunion $U = \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} U_a$ est dc un ouvert.

(chaque U_a est un ouvert q contient a).

3) $(ii) \iff (iii)$ Manip° complément^{rs}.

4) $(ii) \Rightarrow (iii)$: On prd un fermé $W \subset F$ arbitraire, pr lql il ft trouver un fermé $V \subset E$ tq $f^{-1}(W) = A \cap V$.

Mais si W est un fermé, alors son complémentaire $O = F \setminus W$ est un ouvert & on a $W = F \setminus O$.

calcul : $f^{-1}(W) = f^{-1}(F \setminus O) = A \setminus f^{-1}(O) = A \cap (E \setminus f^{-1}(O))$

Par (ii), si $O \subset F$ est un ouvert, $\exists$ un ouvert $U \subset E$ tq $f^{-1}(O) = U \cap A$.

calcul $f^{-1}(W) = A \setminus f^{-1}(O) = A \setminus (U \cap A) = A \setminus U = A \cap (E \setminus U)$

Mais si U est un ouvert alors $V = E \setminus U$ est un fermé.

5) $(iii) \Rightarrow (ii)$: otre sens analogue, pour un ouvert $O \subset F$, l'ens $W = F \setminus O$ est un fermé & :

$f^{-1}(O) = f^{-1}(F \setminus W) = A \setminus f^{-1}(W) \overset{(iii)}{=} A \setminus (V \cap A) = A \cap (E \setminus V)$

Pr le fermé $W \subset F$, $\exists$ selon (iii) un fermé $V \subset E$ & dc $U = E \setminus V$ est un ouvert vérifiant condi° (ii) ∎

(D) $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$;

- x_n dans ss-ens X, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \in X$.
Une suite y_n ds X est appelée sous-suite de x_n ou suite extraite de x_n si $\exists$ A ST $\nearrow$ $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq on ait $y_n = x_{k(n)}$.
Valeur $k(n)$ comme k_n, écrire $y_n = x_{k_n}$ ou x_{2n} ss-suite

- A est borné (p/ $\|\cdot\|$) si $\exists$ $R \in \mathbb{R}$ tq $A \subset B_R(0)$
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, on a $\|x\| < R$.

- Une suite x_n dans E est borné (p/ $\|\cdot\|$) ce q revient $\exists$ $R \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\|x_n\| < R$.

- si X est un ens et $f : X \to E$, f est fonction bornée si l'ens $\{f(x) \mid x \in X\}$ est borné, on a $\|f(x)\| < R$.

- A est compact si tt suite ds A admt une ss-suite cv dans A.

(L) 3.1 soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ A: ST $\nearrow$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $k(n) \geq n$.

(C) 3.2 E ev, $A \subset E$ ss-ens, $N_1, N_2 : E \to \mathbb{R}$ deux normes sur E. Si N_1, N_2 st équivalentes alors A est borné p/ à norme N_1 ssi il est borné p/ à N_2.

(T) 3.3 $A \subset \mathbb{R}^p$ est COMPACT ssi A est fermé & borné.

(T) 3.4 soit $f : A \subset E \to F$ continue & A compact alors $f(A)$ est compact.

(P) 3.5 soit $A \subset E$ compact et $f : A \to \mathbb{R}$ cont alors
$\exists$ $x_m, x_M \in A$, $\forall y \in A$: $f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

(P) 3.6 soit N une norme sur $\mathbb{R}^p$, alors $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est cont p/ norme $\|\cdot\|_\infty$.

(T) 3.7 si N est norme sur $\mathbb{R}^p$, alors N est équivalte à $\|\cdot\|_\infty$

(C) 3.8 soit $N_1, N_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux normes alors $N_1 N_2$ st équivltes

(Rq) f cont $\Leftrightarrow \forall\, O$ ouvert : $f^{-1}(O)$ ouvert

où $f^{-1}(O) = U \cap A$
↑
ouvert.

f cont $\Leftrightarrow \forall\, F$ fermé : $f^{-1}(F)$ fermé.

$f^{-1}(F) = U \cap A$.

(Rq) $\{b\} \subset \mathbb{R}$ fermé, $]-\infty, b]$, $[b, +\infty[$ fermé

$]-\infty, b[$, $]b, +\infty[$ ouvert.

Fonctions cont à valeurs ds réelles :

- $f^{-1}(b) = \{x \mid f(x) = b\}$.
- $f^{-1}(]-\infty, b]) = \{x \mid f(x) \leqslant b\}$.
- $f^{-1}([b, +\infty[) = \{x \mid f(x) \geqslant b\}$.
- $f^{-1}(]-\infty, b[) = \{x \mid f(x) < b\}$.
- $f^{-1}(]b, +\infty[) = \{x \mid f(x) > b\}$.

$\boxed{M}$ Si fermé ou ouvert sous cette forme.

→ justifier f cont
→ ⊕ ⊕ $\mathcal{D}f$, si $\mathcal{D}f$ → ouvert / → fermé.
→ invoquer Lemme.

Mq fonc° cont :

$\Pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ est continue.

→ produit, somme, quotient, composée de f cont est cont
↳ ⚠ non-nul au dénom.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \Leftrightarrow \forall\, i = 1, \ldots, p : f_i$ cont.

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$

↳ f vectorielle à plus composantes.

Mq f n'est pas cont :

(L) $f : A \to \mathbb{R}$ cont en $a \in A$, alors si a_n suite dans A tq $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$ alors $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)}$.

↳ pas utile pr mq cont ; @ $a_n = a$, $b_n = b$; $f(\ldots) = f(a) \neq f(b)$

↳ si on arrive ∀ TOUTE suite, on a m̂ limite alors f cont en a.
(inimaginable trouver TOUTES SUITES).

Mq fonc° cont

Mq f cont
→ def° : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \ldots$ (on veut valeur δ)
→ (TH) invoquer : $\Pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$
→ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \ldots$

PDN: Compacité : C_3

∘ A compact, $A \subset E$

$\Leftrightarrow \forall a_n$ suite dans A alors $\exists$ suite extraite $a_{k(n)}$ et $a \in A$ tq $\lim_{n\to\infty} a_{k(n)} = a$.

@ non-compact : $]0,1[$: ouvert.

· $\frac{1}{n}$ suite ds int. ouvert.

· $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ de suite CV mais $0 \notin]0,1[$.

· Donc $]0,1[$ n'est pas compact car il y a une suite q n'admet pas ss-suite CV ds l'ens.

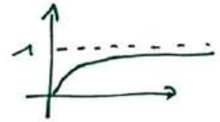
TH $A \subset \mathbb{R}^n$ compact $\Leftrightarrow$ fermé et borné.

⚠ ev dim FINIE : À SIGNALER.

⚠ dim ∞ : c'est faux.

@ non-compact $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x}{x+1}$



← pas valeur maximale

↳ pas borné, pas compact.

↳ on veut f cont, COMPACT ATTEINT ses bornes.

(16)

∘ I : ensemble, $\forall i \in I$; A_i un ensemble.

$\bigcup_{i\in I} A_i$ ens déf p $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i$

· $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \cdot x \in A_i$.

@ · $10\times\infty - 1\times\infty \doteq 9\times\infty$

· $\infty - \infty = 0$ FI obtenir ce q l'on vt balle ping-pong.

II 3.B : Connexité.

(D) Un s-ens $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si $\forall x,y \in A,\ x \leq y : [x,y] \subset A$.

(L) Les intervalles existent en 9 types.

$]-\infty, \infty[\quad]-\infty, b]\quad]-\infty, b[$

$[a, +\infty[\quad [a, b]\quad [a, b[$

$]a, \infty[\quad]a, b]\quad]a, b[$.

4 st ouverts, 4 st fermés, 1 est ouvert & fermé, 2 st ni ouverts ni fermés, 5 st non-bornés, 4 st bornés, 6 st majorés, 6 st minorés.

(D) soit E, evn, un s-ens $A \subset E$ est connexe si pour tout deux ouverts $O, U \subset E$, on a l'implica° :

$A = (A \cap O) \cup (A \cap U)$ et $\emptyset = (A \cap O) \cap (A \cap U)$

$\Rightarrow A \cap O = \emptyset$ ou $A \cap U = \emptyset$.

ie. un ens A est connexe si on ne pt pas le couper en 2 (vrais) morceaux ouverts.

(L) soit $A \subset \mathbb{R}$, alors A est connexe si A est un intervalle.

(D) E : evn. Un s-ens $A \subset E$ est connexe par arcs si $\forall x,y \in A$, il existe appli cont :

$\gamma : [0,1] \to A$ tq $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

(L) si $A \subset E$ est connexe par arcs, alors A est connexe.

(L) soit $A \subset E$ connexe et $f : A \to F$ cont alors $f(A)$ est connexe.

(L) si $A \subset E$ est connexe par arcs et $f : A \to F$ cont, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

(C) (TH valeur intermédiaire) :

soit $A \subset E$ connexe et $f : A \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(A)$ est un intervalle.

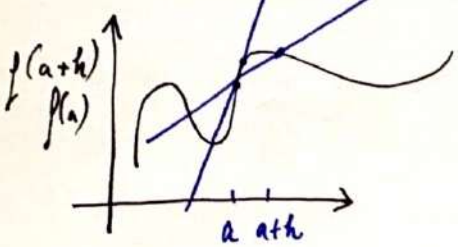
CT 4 : Différentiabilité

Intro & Motivat°

Dérivée : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\uparrow$ copie $\mathbb{R}$

f dérivable en $a \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ $\exists$.

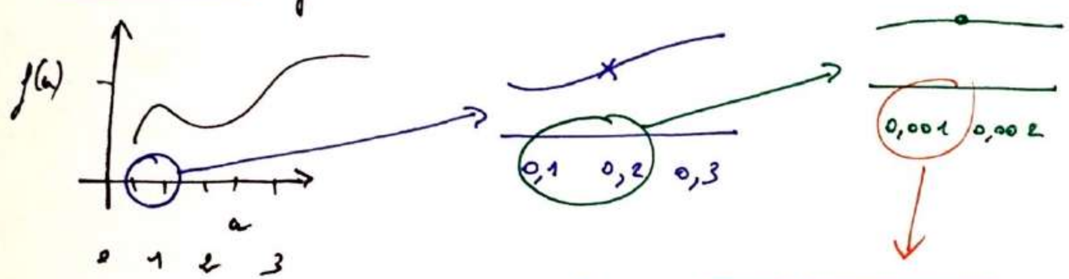


$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; dérivée ? $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $\nexists$

$\in \mathbb{R}^2$ $\in \mathbb{R}^2$

on ne pt pas diviser par un vecteur.

Continuité : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont en a.

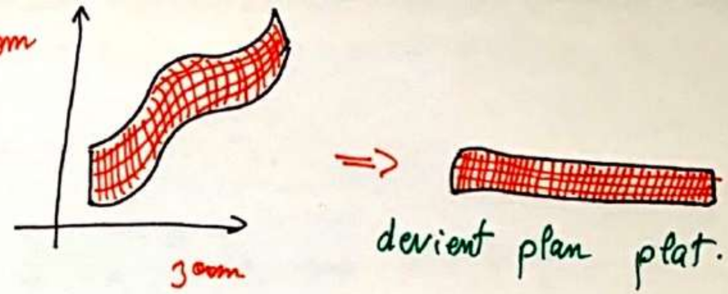


droite horizontale.

$\updownarrow$

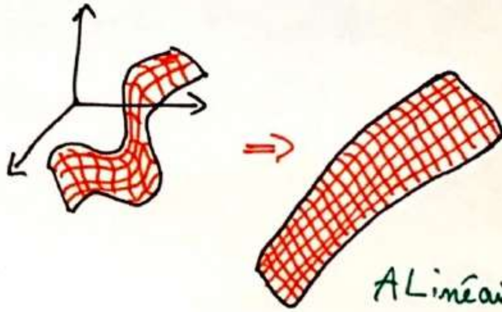
continuité.

$\mathbb{R}^2$: zoom



$\Rightarrow$ devient plan plat.

$\mathbb{R}^3$



$\Rightarrow$ Dans l'espace, devient plan incliné.

Différentiable.

A Linéaire qd on passe p origine
Sinon ajout vecteur.

- 1 seule variable : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - f'(a).h}{h} = 0$ limite nul ssi |lim| nul.

$\iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|f(a+h) - f(a) - f'(a).h|}{|h|} = 0$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| \overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\mathbb{R}^p} - \overbrace{f'(a).h}^{\in \mathbb{R}^p} \|}{\|h\|} = 0 \quad \leftarrow \mathbb{R}^n$$

$\to f'(a)$ est AL de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

- $f'(a)h \in \mathbb{R}^p$.

(L.1) $A \in M(p\times n, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\|Ax\|_1 \leq p.\|A\|_\infty.\|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|Ax\|_\infty \leq n.\|A\|_\infty.\|x\|_\infty$$

(L.2) $f: U \to \mathbb{R}^p$ une applicaᵗ, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $A \in M(p\times n, \mathbb{R})$.
soit $N_{(n)}, N'_{(n)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ et $N_{(p)}, N'_{(p)}$: .... sur $\mathbb{R}^p$ alors implicaᵗ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{N_{(p)}\left(f(a+h) - f(a) - A.h\right)}{N_{(n)}(h)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{N'_{(p)}\left(f(a+h) - f(a) - A.h\right)}{N'_{(n)}(h)} = 0$$

(L.3) $f: U \to \mathbb{R}^p$ une applicaᵗ, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $A, B \in M(p\times n, \mathbb{R})$; si on a 2 égalités

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Bh\|}{\|h\|}$$

alors $A = B$.

(D) soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^p$ une appli. On dit que f est différentiable en a si $\exists$ mat $A \in M(p\times n, \mathbb{R})$ tq

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

(ie) $$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A.h\|}{\|h\|} = 0.$$

→ si f est différentiable en a, on dit que la mat (A) est la différentielle de f en a ou que A est la matrice jacobienne de f en a,
on écrit $A = (Df)(a)$.
(autres écritures $A = f'(a)$, $A = df_a$, $A = T_a f$)

→ Dans cas particulier $p = 1$, ie fonc$^{\text{ᵗ}}$ réelle déf sur U, la différentielle est mat $\underline{1\times n}$, ie un <u>vecteur ligne</u>.
Dans ce cas mot différentielle = mot $\boxed{\text{gradient}}$
et notaᵗ $(Df)(a) = \text{grad}(f)(a)$ ou $(\nabla f)(a)$.

→ Par définiᵗ :

$$(\text{grad}\, f)(a) \equiv (\nabla f)(a) \equiv (Df)(a)$$

où cet objet représente <u>vecteur ligne</u>.

(L.4) si $f: U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, $a \in U \subset \mathbb{R}^m$, alors f est cont en a.

(L.5) $f: U \to \mathbb{R}^p$ une appli et $a \in U \subset \mathbb{R}^m$. Si on écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ alors f est différentiable en a ssi ttes les f f_i, $i = 1, \dots p$ sont différentiables en a. En plus, on a l'égalité :

$$(Df)(a) = \begin{pmatrix} (Df_1)(a) \\ \vdots \\ (Df_p)(a) \end{pmatrix}$$

(L.6) soit $f, g: U \to \mathbb{R}^p$ deux f_j et $a \in U \subset \mathbb{R}^m$. si f et g st différentiables en a alors $f+g$ est différentiable en a & $(D(f+g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$.

(L.7) soit $f: U \to \mathbb{R}$ et $g: U \to \mathbb{R}^p$ deux appli, $a \in U \subset \mathbb{R}^m$. Si f et g st différentiables alors $f \cdot g$ est différentiable en a &

$$(D(fg))(a) = f(a).(Dg)(a) + g(a)(Df)(a)$$

$\rightarrow g(a)$ pt ê vu ĉ une matrice taille $1 \times m$ pr obtenir mat taille $p \times m$.

(L.8) soit $f: U \to \mathbb{R}^p$ et $g: V \to \mathbb{R}^q$ deux appli, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $b = f(a) \in f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en a et g différentiable en b, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$(D(g \circ f))(a) = (Dg)(b) . (Df)(a)$$

où le produit $(Dg)(b).(Df)(a)$ est produit matricielle.

(D) soit $f: U \to \mathbb{R}^p$ et $a \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $v \in \mathbb{R}^m$. Alors la dérivée directionnelle de f au point a dans la direction v, notée $(D_v f)(a)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ def ĉ :

$$(D_v f)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, m$; on définit les dérivées partielles : $(\partial_i f)(a)$ au point a par : $(\partial_i f)(a) = (D_{e_i} f)(a)$,

où e_i st les vecteurs de base canoniq de $\mathbb{R}^m$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$. Les dérivées partielles st dc un cas particulier d'une dérivée directionnelle et elles st données par :

$$(\partial_i f)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a)}{h}$$

On les note : $(\partial_i f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

surtt qd on a exprimé fonction f par une ff de la forme $f(x_1, \dots, x_m) = \dots$

(C.9) soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en a, alors la dérivée directionnelle en a dans la direction v $\exists$ et est :

$$(D_v f)(a) = (Df)(a)\, v .$$

(C.10) soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli et $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable en a, alors les dérivées partielles $(\partial_i f)(a)$ existent et on a l'égalité

$$(Df)(a) = \big((\partial_1 f)(a) \; (\partial_2 f)(a) \dots (\partial_m f)(a) \big).$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice de la dérivée st les dérivées partielles. Ou encore $\forall\, h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(Df)(a) h = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(a)\, h_i .$$

Ou encore, si on note $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, les composantes de la fonction f, alors les élts de la matrice Jacobienne st les nombres $(\partial_i f_j)(a)$ $\forall\, i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$.
Mais ⚠ i désigne colonne / j désigne ligne :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \Rightarrow (Df)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & \cdots & (\partial_m f_1)(a) \\ & & \\ (\partial_1 f_p)(a) & \cdots & (\partial_m f_p)(a) \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\big((Df)(a)\big)_{ji} = (\partial_i f_j)(a)$

Ou encore

$$\big((Df)(a)\, h\big)_j = \sum_{i=1}^{m} \big((Df)(a)\big)_{ji}\, h_i = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)\, h_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

(C.11) Hypo X8, décompose f et g ds les composantes, f selon x, g selon y. Les dérivées partielles $(\partial_i (g \circ f))(a)$ st :

$$(\partial_i (g \circ f))(a) = (Dg)(b) \cdot (\partial_i f)(a) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g)(b) \cdot (\partial_i f_j)(a).$$

Ou encore, en notant $h = g \circ f$; $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, q$:

$$(\partial_i h_k)(a) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g_k)(b) \cdot (\partial_i f_j)(a).$$

ou

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

(P.12) soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset U$ un voisinage ouvert de a. Si les dérivées partielles de f existent pr tt point $x \in V$ et si elles st cont en a, alors f est différentiable en a et on a l'égalité :

$$(Df)(a) = \big((\partial_1 f)(a) \; (\partial_2 f)(a) \dots (\partial_m f)(a) \big).$$

(D) soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Alors on dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en chaq point $a \in U$.
On dit que f est de classe C^1 si elle est différentiable (sur U) et si l'appli $Df : U \to M$, $M(p\times n, \mathbb{R})$; $a \mapsto (Df)(a)$ est cont.

(L.13) soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Alors f est de $\boxed{\text{classe } C^1}$ ssi ttes les foncOs / dérivées partielles $(\partial_i f_j) : U \to \mathbb{R}$ st continues.

(D) soit E (ev), $\forall x, y \in E$, on définit le segment de droite $[x,y]$ entre x et y par :
$[x,y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$.

(L.14) Égalité des accroissements finis :
soit $f : U \to \mathbb{R}$ une applicaO différentiable et $a, b \in U \subset \mathbb{R}^n$ tq segment $[a,b]$ est contenu dans U. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tq on a l'égalité :
$f(b) - f(a) = (Df)(a + \theta(b-a)).(b-a)$

(L.15) Inégalité accroissements finis :
soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une applicaO différentiable, $a, b \in U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $V \subset U$ un sous-ens (pas forcément ouvert) contenant segment $[a,b]$. Alors :
$$\| f(b) - f(a) \|_\infty \leq n . \sup_{x \in V} \| (Df)(x) \|_\infty . \| b-a \|_\infty$$

(C.16) soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe (mais connexité suffit)
et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une applicaO différentiable.
Alors f est cte (ssi) $(Df)(a) = 0 \quad \forall a \in U$.

(L.3.2) E, (ev), $A \subset E$ s.e., $N_1, N_2 : E \to \mathbb{R}$, si
si N_1, N_2 équivalents,
A est borné p/ N_1 (ssi) A est borné p/ N_2.

Preuve 3.2

On sait N_1, N_2 équivalents, d'où il existe $C_1, C_2 > 0$,

(0.1) $\quad N_1(x) \leq C_1 \cdot N_2(x)$ et $N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x)$.

On vtmq l'équivalence :

$\exists R_1\ \forall x \in A : N_1(x) < R_1 \iff \exists R_2\ \forall x \in A : N_2(x) < R_2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On sait $\exists R_1\ \forall x \in A,\ N_1(x) < R_1$.
On vt ed $\exists R_2\ \forall x \in A,\ N_2(x) < R_2$.

→ On doit trouver explicitement R_2.

On a $N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x) \leq \underbrace{C_2 \cdot R_1}_{= R_2}$ idée

---

Rédact° : Supposons N_1, N_2 équivalentes, ie vérifient (0.1).
Soit $A \subset E$ ens borné p/ N_1 ie $\exists R_1$ tq $N_1(x) < R_1$ $\forall x \in A$. Alors on pose $R_2 = C_2 \cdot R_1$ et on prétend qu'on $N_2(x) < R_2$ $\forall x \in A$:

$x \in A \Rightarrow N_1(x) < R_1 \Rightarrow N_2(x) < C_2 \cdot N_1(x) < C_2 \cdot R_1 = R_2$.

Pour mq l'implicat° réciproque, on suppose $\exists R_2 > 0$, $N_2(x) < R_2$ $\forall x \in A$. Si on pose $R_1 = C_1 \cdot R_2$:

$x \in A \Rightarrow N_2(x) < R_2 \Rightarrow N_1(x) < C_1 N_2(x) < C_1 R_2 = R_1$

Ce q mq A est borné p/ N_1. M1 □

(TH. 3.3) $A \subset \mathbb{R}^p$ compact ssi fermé & borné.
(⚠ dimension FINIE).

$\boxed{\Rightarrow}$ "compact ⇒ fermé et borné", on suppose $A \subset \mathbb{R}^p$ est compact et on vt en déduire qu'il est fermé et borné.

On sait $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \Rightarrow \exists k_n\ \exists a \in A : \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a$

On vt $\begin{cases} \exists R > 0\ \forall a \in A : \|a\| < R & \text{et} \\ A \text{ est fermé.} \end{cases}$

"A est fermé", on use $A \subset \overline{A}$ et A est fermé (ssi) $A = \overline{A}$. (résultat cours) On doit avoir aussi $\overline{A} \subset A$.

$\overline{A} \subset A \iff x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$
$\iff$ x adhérent à A $\Rightarrow x \in A$.

Selon (2.4), on a $x \in \overline{A}$ ssi $\exists$ suite de A q (CV) vers x.

On vt $\begin{cases} \exists R > 0,\ \forall a \in A : \|a\| < R & \text{et} \\ \forall x \in E,\ \forall a_n \in A : \lim_{n\to\infty} a_n = x \Rightarrow x \in A. \end{cases}$ ||

Il faut mq 2 choses :

• pr trouver le R : [2M] → explicitement $R > 0$
→ Absurde (?!) suppose R $\nexists$.

Mq par l'absurde qu'un tel $R>0$ $\nexists$,
cf les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ne conviennent pas,
dc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il y a au moins un élt de A,
appelons le $a_n \in A$ q ne vérifie pas $\|a_n\| < n$.
On a dc l'inégalité $\|a_n\| \geq n$.
Mais A est compact, dc $\exists$ ss-suite a_{k_n} q CV
vers un élt $b \in A$:

$$\lim_{n \to \infty} a_{k_n} = b.$$

Selon (2.6), on ed ∞ ss-suite a_{k_n} est bornée,
$\exists R>0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|a_{k_n}\| \leq R$. c?!c
Mais par (3.1), on pt écrire : $n \leq k_n \leq \|a_{k_n}\| \leq R$.
Ce q est absurde car il y aura certainement un entier
n plus grand que R. Dc on a mq A est borné.

Mq A est fermé :
On prend $x \in E$ et $a_n \in A$ arbitraire, on suppose
qu'on a $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ et on vt $x \in A$.
De nouveau, A est compact, $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = b$ MS la
suite CV vers x. (résultat L_d) : toute sous-suite CV
vers la MÊME limite. On doit dc avoir $b = x$.
Ce q mq qu'on a bien $x \in A$.
Donc A est aussi fermé.

Rédact courte : Si A n'est pas borné, $\exists$ suite $a_n \in A$
tq $\|a_n\| \geq n$ $\forall n$. A étant compact, $\exists$ sous-suite
CV. Mais aucune ss-suite de notre suite a_n est bornée.
Donc une telle sous-suite ne peut pas CV. Par l'absurde,
on en déduit que A doit ê borné.
Soit mtn $a_n \in A$ une suite CV vers $x \in E$.
A étant compact, il existe sous-suite CV vers un point de
A. Mais toute ss-suite d'une suite CV^{te} CV vers m̂ lim
Et dc x doit appartenir à A, ce q mq A est fermé.

$\boxed{\Leftarrow}$ Il faut mq A est fermé et borné, alors pr toute suite
$a_n \in A$ ds A admet une sous-suite q CV vers un
point de A.
Hypothèse CV $\mathbb{R}^p$ dim finie, ns permet de faire
la preuve par récurrence.

*$p=1$: On a ss-ens $A \subset \mathbb{R}$ q vérifie :
A est fermé et $\exists R>0, \forall x \in A : |x| \leq R$.
On vt : pr tte suite $a_n \in A$ admet sous-suite CV ds A.
Prenons dc une suite $a_n \in A$ pr laquelle il faut trouver une
sous-suite a_{k_n} q admet une limite ds A,
ie il ft mq pr notre ss-suite $\exists b \in A$ tq $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = b$

Idée démo : On construit par récurrence, b_m et h_m ($m \in \mathbb{N}$) de réels. ($\begin{smallmatrix}\text{bas : } b \\ \text{haut : } h\end{smallmatrix}$) tq :

(i) $b_m \nearrow$ et $h_m \searrow$.

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, on a $b_m < h_m$ et $h_{m+1} - b_{m+1} = \frac{1}{2}(h_m - b_m)$

(iii) l'int $[b_m, h_m]$ contient ∞té élts de la suite $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, ie l'ensemble :

$$I_m = \{\ell \in \mathbb{N} \mid a_\ell \in [b_m, h_m]\} = \{\ell \in \mathbb{N} \mid b_m \leq a_\ell \leq h_m\}$$

est un ens ∞ d'entiers.

Ensuite on va puiser ds les ens I_m pr trouver un indice $k_m \in I_m$ q ns convient. On mq b_m et h_m CV vers m̂ limite, TH Bond pr conclure ss-suite a_{k_m} CV aussi vers cette limite.

Pr terminer on invoque : A est fermé d'où cette limite appartient à A.

Commençons construct° p récurrence suites b_m & h_m ; on pose $b_0 = -R$ et $h_0 = R$.

où R est le majorant de la suite : $\forall x \in A : -R \leq x \leq R$.

On a $b_0 < h_0$ et par définit° de R, l'ens I_0 est

$$I_0 = \{\ell \in \mathbb{N} \mid b_0 \leq a_\ell \leq h_0\} = \{\ell \in \mathbb{N} \mid -R \leq a_\ell \leq R\} = \mathbb{N}.$$

↳ ce q contient bien ∞té d'élts.

Supposons ensuite qu'on a construit notre suite jusqu'au rang m vérifit (i) et (iii). On sait $I_m = \{\ell \in \mathbb{N} \mid b_m \leq a_\ell \leq h_m\}$ contient ∞té élts. MS on pt couper en deux ens :

$$I_m = \{\ell \in \mathbb{N} \mid b_m \leq a_\ell \leq \tfrac{1}{2}(b_m + h_m)\} \cup \{\ell \in \mathbb{N} \mid \tfrac{1}{2}(b_m + h_m) \leq a_\ell \leq h_m\}$$

D'où $(b_{m+1}, h_{m+1}) = \begin{cases} (b_m, \frac{1}{2}(b_m + h_m)) & \text{si } I_m^- \text{ contient ∞ élts.} \\ (\frac{1}{2}(b_m + h_m), h_m) & \text{sinon} \end{cases}$

Rq : la réunion de 2 ens finis ne pt pas ê ∞ :

$I_m^- = \{\ell \in \mathbb{N} \mid b_m \leq a_\ell \leq \frac{1}{2}(b_m + h_m)\}$ et $I_m^+ = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2}(b_m + h_m) \leq a_\ell \leq h_m\}$

↳ au moins un contient ∞té élts car leur réunion en contient une ∞té.

4 cette définit°, on a bien la ppté :

$b_{m+1} \geq b_m$, $h_{m+1} \leq h_m$, $b_{m+1} < h_{m+1}$, $h_{m+1} - b_{m+1} = \frac{1}{2}(b_m + h_m)$

Puis $I_{m+1} = \begin{cases} I_m^- & \text{si } I_m^- \text{ contient ∞ élts.} \\ I_m^+ & \text{sinon} \end{cases}$

Et si I_m^- ne contient pas ∞ élts alors I_m^+ le fait.

Ainsi se termine la construct° des suites b_m et h_m (i) (iii).

On dmq de (ii) qu'on doit avoir

$h_m - b_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot (h_0 - b_0) = 2^{1-m} \cdot R$.

D'où $\lim\limits_{m\to\infty} h_m - b_m = 0$ mais aussi

$-R = b_0 \leq b_m < h_m$ et $b_m < h_m \leq h_0 = R$

ce q mq $h_m \searrow$ et minorée par $-R$.

$b_m \nearrow$ majorée R.

Dc $b_{lim} = \lim\limits_{m\to\infty} b_m$ et $h_{lim} = \lim\limits_{m\to\infty} h_m$.

Mais on a $\lim\limits_{m\to\infty} h_m - b_m = 0$ dc $b_{lim} = h_{lim}$.

Pr finaliser, on va définir suite $S^T \nearrow k_m$, vérifiant $k_m \in I_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. On choisit $k_0 = 0 \in I_0$, ce q est possible car $I_0 = \mathbb{N}$.

Supposons mtn on a construit entiers $k_0 < k_1 < \ldots < k_m$ vérifiant $k_i \in I$ alors on kq :

$$I^{inf}_{m+1} = \{ l \in \mathbb{N} \mid b_m \leq a_l \leq h_m \text{ et } l > k_m \}$$

ne peut pas ê vide : I_{m+1} contient ∞té entiers et il n'y a qu'un nbe fini d'entiers q st plus petits ou égal à k_m.

On choisit dc k_{m+1} dans I^{inf}_{m+1}.

Par construct° $k_{m+1} > k_m$ et $k_{m+1} \in I_{m+1}$.

La suite k_m est de bien $S^T \nearrow$ & vérifie $k_m \in I_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

On pt dc conclure que la ss-suite a_{k_m} est bien une ss-suite CV de limite ds A.

On a : $k_m \in I_m \implies b_m \leq a_{k_m} \leq h_m$.

On appliq $\boxed{\text{TDG}}$ & $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = \lim\limits_{m\to\infty} h_m = b_{lim}$.

Ce q implique on doit avoir $\lim\limits_{m\to\infty} a_{k_m} = b_{lim}$, cad que la sous-suite a_{k_m} est CV. Pour finir on invoque (2.4) pr dire $b_{lim} \in \overline{A}$ et (1.17), on a bien $\lim\limits_{m\to\infty} a_{k_m} = b_{lim} \in A$.

Ainsi, on a mq ∀ ss-ens borné & fermé de $\mathbb{R}$ est compact. Ce q est l'initialisat° de la $\boxed{\text{PPR}}$.

Supposons mtn on sait que c'est vrai en dimension p et prenons $A \subset \mathbb{R}^{p+1}$ un ss-ens fermé & borné.

On a $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^1$ (produit cartésien).

Sachant que A est borné, $\exists\, R > 0$ tq :

$\forall\, (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in A : \|(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})\| \leq R$.

On choisit $\|\cdot\|_2$, on kq pr ∀ $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in A$:

$$|x_{p+1}| = \sqrt{x_{p+1}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2} = \|(x_1, \ldots, x_{p+1})\|_2 \leq R$$

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2} = \|(x_1, \ldots, x_{p+1})\|_2 \leq R.$$

(3.2)

soit $m \mapsto a_m$ une suite dans A. Pour trouver une sous-suite q CV dans A, on considère d'abord $b_m \in \mathbb{R}$:

$$a_m = (x_1, \dots, x_{p+1}) \Rightarrow b_m = x_{p+1}.$$

Selon (0.2), cette suite b_m est bornée.

b_m est contenu ds l'intervalle fermé et borné $[-R, R]$, ce q est dc un compact selon l'partie.

$\exists$ dc une suite $S^T \nearrow k_m \in \mathbb{N}$ tq

$$\lim_{m \to \infty} b_{k_m} = y \in \mathbb{R}$$

Alors la suite k_m d'entiers on définit une deuxième suite associée $c_m \in \mathbb{R}^p$ par

$$a_{k_m} = (x_1, \dots, x_{p+1}) \Rightarrow c_m = (x_1, \dots, x_p).$$

Selon (0.2), cette suite est bornée, elle est contenue ds la boule $\overline{B_R(0)}$, a q est un ss-ens fermé & borné de $\mathbb{R}^p$. Par $\boxed{\text{HDR}}$, $\exists$ dc une ss-suite CV, disons $\lim_{m\to\infty} c_{l_m} = z \in \mathbb{R}^p$ pr une suite $S^T \nearrow l_m \in \mathbb{N}$.

On note $k_m : k(m)$, $l_m = l(m)$.

$$a_{k(l(m))} = (x_1, \dots, x_{p+1}) \Rightarrow \begin{cases} c_{l(m)} = (x_1, \dots, x_p) \\ b_{k(l(m))} = x_{p+1} \end{cases}$$

ou encore $a_{k(l(m))} = (c_{l(m)}, b_{k(l(m))})$.

MS on sait que suite $c_{l(m)}$ CV vers $z \in \mathbb{R}^p$ et la suite $b_{k(l(m))}$ est une sous-suite de la suite $b_{k(m)}$, ce q est suite CV vers $y \in \mathbb{R}$. Et toute ss-suite d'une suite CV est aussi CV, de m̂ limite.

La suite $b_{k(l(m))}$ CV dc aussi vers $y \in \mathbb{R}$.

Et dc par (2.5) la suite $a_{k(l(m))}$ CV dans $\mathbb{R}^{p+1}$ vers (z, y).

On termine en rappelant A est fermé, dc p, (2,9) le point $(z, y) \in$ à A & par (1.17) $\in$ à A.

Ainsi on a mq! $\exists$ ss-suite q CV dans A.

Donc $\boxed{\text{PR}}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a ppté un ss-ens $A \subset \mathbb{R}^p$ est compact ssi A est fermé & borné.

$\square$

(L. 3.4) $f : A \subset E \to F$, A compact,
f est continue alors $f(A)$ compact.

Preuve 3.4 : soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, evn, $A \subset E$, $f : A \to F$ appli cont.
On vt mq $f(A)$ est un ss-ens compact de F.

On sait : f cont et $\forall a_n \in A, \exists k_n^{\in \mathbb{N}} \exists b \in A : \lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = b$.

On veut : $\forall b_n \in f(A) \; \exists \ell(n) \; \exists y \in f(A) : \lim\limits_{n\to\infty} b_{\ell_n} = y$.

Pr le mq, on prd de une suite $b_n \in f(A)$ et on cherche à trouver sous-suite CV dans $f(A)$.

Si $b_n \in$ à l'image $f(A)$, par définiθ $\exists a_n \in A$, $f(a_n) = b_n$. Ainsi on obtient une suite de A.

Parce qu'on sait $\exists$ suite $S^T \nearrow k_n$ et un élt $b \in A$ q vérifie cela. Ensuite on use la continuité de f et (2.28) pr avoir : $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(b)$.

Mais $y = f(b) \in f(A)$ par définiθ & $f(a_{k_n}) = b_{k_n}$.

De $\lim\limits_{n\to\infty} b_{k_n} = y \in f(A)$ comme voulu.

On en déduit que la sous-suite b_{k_n} satisfait à nos exigences et de $f(A)$ est bien compact.

Prémices & R* avant preuve 3.5.

Si $A \subset \mathbb{R}$: aucune garantie $\exists$ plus grd élt de A.
@ $I =]0,1[$: $1 \notin I$. Donc introdc sup.

$M = \sup A$: $\begin{cases} \forall a \in A : a \leq M & M \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a & M-\varepsilon \text{ n'est pas majorant de } A. \end{cases}$

$M = \sup A$ est le plus petit des majorants.
MS cela ne vt pas dire qu'il existe !....

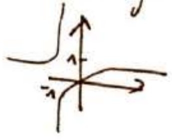
TH si A est majorée alors sup A existe.
↳ ppté de l'ens nbr réels. pas vrai pr ens nbres rationnels
↳ preuve ĵ définiθ e.m.n. Si elle $\exists$ alors elle est uniq.

Ds $I =]0,1[$, on a bien $\sup(]0,1[) = 1$.

∘ côté élts : svt faire appel sup

∘ svt maxime f ? $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in A : f(y) \leq f(x)$
↳ dérivée, zéros de dérivée ... Un tel point x existe ?

@ $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x+1}$: réponse NON.



asymptote $y = 1$, reste en-dessous.

[Prédire d'avance qu'un tel point existe, but du Th 3.5].

(L.35) $A \subset E$ compact, $f: A \to \mathbb{R}$ cont,
$\exists\, x_m, x_M \in A : \forall y \in A :$
$f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

Preuve 3.5 :

soit $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$ compact et
$f: A \to \mathbb{R}$ appli cont. On dt mq $\exists\, x_m, x_M \in A$,
$\forall y \in A : f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

ie f présente un maximum (global/absolu) en x_M.
minimum x_m.

On commence by appli° 3.4 q ns dit que
$f(A) \subset \mathbb{R}$ est compact. Ensuite Th. 3.3 q
dit que $f(A) \subset \mathbb{R}$ est fermé & borné.
Si $f(A)$ est borné, Th ci-dessus dit que
sa BS existe : $M = \sup(f(A))$.

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in f(A) : M - \varepsilon < b \leq M$.
Si c'est vrai $\forall \varepsilon > 0$, c't autmt vrai $\forall \varepsilon = \frac{1}{n}$,
ou encore $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists b_n \in f(A) = M - \frac{1}{n} < b_n \leq M$.

Par $\boxed{TDG}$, on en déduit b_n CV tq
$\lim_{n\to\infty} b_n = M$. Mais $f(A)$ est fermé,
dc par (2.4), (1.17) on pt conclure $M \in f(A)$,
a q vt dire $\exists\, x_M \in A$ tq $f(x_M) = M$.
Et mcq on a : $\forall b \in f(A) = b \leq M$.
On ed $\forall y \in A : f(y) = b \leq M = f(x_M)$.

L'argmt p trouver x_m : analogue.
L'ens $f(A)$ minoré dc BI $\exists$, soit $m = BI/$[illegible]
Par définit° BI, $\exists$ suite dans $f(A)$
q CV vers borne inf m.
Parc q $f(A)$ est fermé, $m \in f(A)$.
Dc $\exists\, x_m \in A$ tq $f(x_m) = m = \inf(A)$.

□