M42 – Algèbre linéaire/bilinéaires et espaces euclidiens

Maxence Defraiteur

6 mars 2021

§1. *

Table des matières

Ce document évoluera au cours du semestre. De ce fait il n'est pas destiné à une impression. Ce document contient :

- Déf ▶ 41 définitions ;
- Lemme ▶ 3 lemmes ;
- Cor ▶ 8 corollaires ;
- TH ▶ 7 theoremes ;

Prop ▶ 24 propositions ;

▶ .

§2. Dualité

2.1 Formes linéaires et espace dual

Déf 01 ▶ Application bilinéaire $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$
$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \mapsto & Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \end{array}$.

2.2 Hyperplans

Prop 02 ▶ $Mat_{\mathcal{E}'}(\varphi) = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi).T$
$Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1}Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$

Déf 03 ▶ Un **hyperplan** : $\forall x \in E, \varphi(l) = 0$.
Ker(l) est un hyperplan.
$E^* = \mathcal{L}(E,K) \longrightarrow \varphi \in E^*$ signifie $\begin{array}{ccc} \varphi : E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$. (Ainsi $\forall\, x \in E$)

Déf 04 ▶ Le **delta de Kromecker** $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$.

2.3 Base duale et anté-duale

Déf 05 ▶ $(\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n)$ de E^* base duale / $(e_1, \cdots, e_n)$ base anté duale.

2.4 Le double dual

Prop 06 ▶ $P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = ({}^tP_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}$

Cor 07 ▶ AL, $\varphi : E \to E^{**}$ avec $\dim E < \infty \longrightarrow \varphi$ isomorphisme canonique entre E et E^{**}.

2.5 Les annulateurs

Déf 08 ▶ $F^\perp = \{l \in E^* | \forall\, v \in F,\ l(v) = 0\}$

Déf 09 ▶ $G^\perp = \{v \in E | \forall\, l \in G,\ l(v) = 0\}$

Déf 10 ▶ $F^\perp$: ens équations linéaires de F

Prop 11 ▶ $F \subset G \longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$
$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
$F \subset F^{\perp\perp}$
$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp)$
$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

2.6 La transposée

Déf 12 ▶ On def la transposee : ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$: $\forall\, l \in F^*,\ {}^t\varphi(l) = l \circ \varphi$.

Prop 13 ▶ $Mat_{\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t(Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi))$

Prop 14 ▶ $(\mathrm{Im}(\varphi))^\perp = (\mathrm{Ker}(\ t^\varphi))$
$(\mathrm{Ker}\ \varphi)^\perp = \mathrm{Im}(()\ t\varphi)$

Prop 15 ▶ rgφ = rg t^{φ} (si E identifie à E^{**} et vcversa pr F)

Prop 16 ▶ ${}^t(\varphi \circ \psi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$

${}^t\varphi^{-1} = ({}^t\varphi)^{-1}$

Prop 17 ▶ $\varphi_F \circ \varphi = {}^t\,{}^t\varphi \circ \varphi_E$

2.7 Formes bilinéaires

Prop 18 ▶ **Forme bilinéaire**

si $\forall x \in E, \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ $\varphi(x,.)\ est$. **f l**

si $\forall y \in E, \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ $\varphi(.,y)\ est$. **f l**

Prop 19 ▶ $\forall\, x, y \in E$, **f b. symétrique** $\varphi(y,x) = \varphi(x,y$ et **f b. alt.** $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$

Déf 20 ▶ $X = \sum x_i\, e_i,\ \ Y = \sum y_j\, e_j\ \ \varphi(X,Y) = \varphi(\sum x_i\, e_i, \sum x_j\, e_j) = \sum_{1\le i\le j\le n} x_i\, x_j \varphi(e_i, e_j)$

Déf 21 ▶ $\mathrm{mat}(\varphi(e_i\, e_j))_{1\le i\le j\le n} \coloneqq Mat_{\mathcal{E}(\varphi)}$

Déf 22 ▶ $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j),\ A = (a_{ij} = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi))$

Déf 23 ▶ $\forall x, y \in E, \varphi(X,Y) = \sum a_{ij}\, x_i\, x_j = (x_1 \cdots x_n)\ A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Prop 24 ▶ $\dim \mathcal{B}(E) = n^2,\ \ \dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2},\ \ \dim \mathcal{A}(E) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Prop 25 ▶ $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

Prop 26 ▶ $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'},\ A = Mat_{\mathcal{E}(\varphi)} \longrightarrow A' = {}^tP.A.P$

2.8 Formes quadratiques

Déf 27 ▶ $Q : E \to K$ **forme quadratique si**

$\bullet Q(\lambda v) = \lambda^2\, Q(v)$

$\begin{array}{rcl} b_Q : E\times E & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \end{array}$ **est f l** .

Déf 28 ▶ b_Q :**f l sym** associé à Q ou **forme polaire**de Q.

Prop 29 ▶ Formes quadratiques sur E : $Q(E)$

$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : Q(E) & \to & \mathcal{S}(E) \\ Q & \mapsto & b_Q \text{ est linéaire} \end{array}$

.

Déf 30 ▶ ($\mathcal{P}$: polarisation ou morphisme depolarisation)

Lemme 31 ▶ $\mathcal{P}$ est un isomorphisme de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ d'inverse

$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} : \mathcal{S}(E) & \to & \mathcal{Q}(E) \\ \varphi & \mapsto & q_\varphi \end{array}$

Déf 32 ▶ $q_\phi \in Q(E)$ forme quad associé à $\varphi(q_{\varphi=\mathcal{D}(\varphi)})$

Prop 33 ▶ $Mat_{\mathcal{E}(Q) \coloneqq Mat_{\mathcal{E}}(b_Q})$

2.9 Ecriture d'une forme quadratique ds une base

Déf 34 ▶ $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n),\ Mat_{\mathcal{E}}(Q) = (a_{ij})_{1\le i\le j\le n},\ a_{ji} = a_{ij}$

$Q(X) = \sum a_{ij} x_i\, x_j = \sum a_{ij}\, x_i^2 + 2\ \sum a_{ij}\, x_i\, x_j$

TH 35 ▶ E dimension finie toute forme quad. diagonalisable.

2.10 Bases Orthogonales

Déf 36 ▶ $x \perp_\varphi y$ si $\varphi(x,y) = 0$ $\quad | \; x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$

Déf 37 ▶ Base $\mathcal{E}$ orthogonal si $e_i \perp e_j \; \forall i \neq j, \; 1 \leq i,j \leq n$, mat forme $\mathcal{E}$ est diagonale.

Cor 38 ▶ Toute forme quad. E, fini, admet des bases orthogonales.

2.11 Formes quadratiques positives

Déf 39 ▶ Forme quad positive si $\forall \; x \; \in \; E, Q(x) \geq 0$

Déf 40 ▶ Forme quad définie (positive) si $\forall x \in E, Q(x) = 0 \implies x = 0$

Prop 41 ▶ Q positive $\iff$ pour toute base Q-orthogonal, $Q(e_i) \geq 0$

Déf 42 ▶ Un **espace euclidien** (E dim finie) avec forme quad. Q, ici b_Q est appelé **produit scalaire**.

Déf 43 ▶ Dans espace euclidien, base $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormée si orthogonale et $Q(e_1) = \cdots = Q(e_n) = 1$

Cor 44 ▶ Un espace euclidien admet bases orthonormées.

2.12 Classification des formes quadratiques dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Déf 45 ▶ $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \varphi = x \in E | \; \forall y \; \in \; E, \varphi(x,y) = 0$

Lemme 46 ▶ $\operatorname{Ker} Q$ sev de E, $\dim Q = n - r$; $r = \text{rang} Mat_{\mathcal{E}}(Q) \; \forall$ base.

Déf 47 ▶ rang $Q =$rang $Mat_\epsilon(Q)$ $\quad$ et rang $Q =$rang $\varphi = n - \dim \operatorname{Ker} \varphi$

Déf 48 ▶ Q est une forme **non-dégénérée** si rang$(Q) = n$ ou si $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

Déf 49 ▶ Q et Q' sont équivalents si $\exists$ isomorphisme $h : E' = E, Q' = Q \circ h$
$\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}', Mat_{\mathcal{E}}(Q) = Mat_{\mathcal{E}'}(Q)$
$\forall$ bases $Mat_{\mathcal{E}'}(Q') = \; {}^tT.Mat_{\mathcal{E}}(Q).T$

2.12.1 Classification sur $\mathbb{C}$

TH 50 ▶ Toute forme quad. sur $\mathbb{C}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où $r =$ rang Q)

Cor 51 ▶ 2 formes quadratiques sont équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et rang $Q =$ rang Q'

Prop 52 ▶ Sur $\mathbb{C}, \exists \; n+1$ classes d'équivalences de forme quad. distinguées par rang

2.12.2 Classification sur $\mathbb{R}$

TH 53 ▶ Sur $\mathbb{R}, \exists$ unique mat diagonale $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $q = r - p, r =$ rang Q

Prop 54 ▶ $(p,q) = (p_Q, q_Q)$ signature de Q

Cor 55 ▶ 2 formes quad. sont équivalentes ssi même signature.

Déf 56 ▶ $(p,q) = (p_Q, q_Q)$: **signature de Q** (invariant classifiant les formes quad sur ev réel $\dim n$

Prop 57 ▶ 2 formes quad. sont équivalentes ssi même signature

2.13 Orthogonalite

Déf 58 ▶ soit E sur $\mathbb{K}$ ev, $\varphi\ \mathcal{S}(E), Q = q_\varphi, q_\varphi \in Q(E)$
pour $A \subset E, A^\perp = \{x \in E | \varphi(x,y) = 0, \forall\, y \in A\}$

TH 59 ▶ $(i) A^\perp$ sev , $\operatorname{Ker}\varphi \subset A^\perp : \varnothing^\perp = \{\varnothing\}^\perp = E,\ \ E^\perp = \operatorname{Ker}\varphi, A \subset (A^\perp)^\perp$
$(ii)\ A \subset B \subset E \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi\ B^\perp \subset A^\perp$
$(iii)\ A \subset E, A \neq \varnothing \longrightarrow A^\perp = \operatorname{Vect}(A)^\perp$,
$si A = \{v_1, \cdots, v_k\}, F = \operatorname{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\} \longrightarrow F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^k v_i^k$

TH 60 ▶ Sur orthogonal, F sev de E, $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F \wedge \operatorname{Ker}\varphi)$
$(ii) n \leq \dim F + \dim F^\perp \leq n + \dim \operatorname{Ker}\varphi$
$(iii)(F^\perp)^\perp = F + \operatorname{Ker}\varphi, (F^\perp)^\perp \iff \operatorname{Ker}\varphi \subset F$
De plus si φ non-dégénéré ie $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \longrightarrow$
$(i) \dim F^\perp = n - \dim F$
$(iii)\ (F^\perp)^\perp = F$
$(iv)\ \varphi_F$: restriction de φ à $F \times F$, $\varphi_F : \begin{array}{rcl} \varphi_F = F \times F & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \longrightarrow \varphi_F$: aussi forme linéaire symétriq
$\varphi_F \in \mathcal{S}_F : \bullet \operatorname{Ker}\varphi_F = F \wedge F^\perp = \operatorname{Ker}\varphi^\perp$
$\bullet\ E = F \oplus F^\perp \iff^{F\wedge F^\perp} \iff \{0\} \iff \varphi_F$ non dégénéré $\iff \varphi_F^\perp$ non-dégénéré.

2.13.1 Projections orthogonales

Déf 61 ▶ $E = K \oplus L, \forall v \in E, \exists\, (x,y) \in E\ K \times L | s = x + y$ et proj-linéaire p_K^L ou pr_K^L de S par S sur K parallèlement à $L : p_K^L(v) = x$.

Prop 62 ▶ $p = p_K^L : E \longrightarrow E$ satisfait : $(i)\ p \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Ker} p = L, \operatorname{Im}(K), p_K = id_K$ (restriction de p à K $(ii) p^2 = p (p^2 = p \circ p))$
$(iii)\ q = id_E - p \longrightarrow p + q = id_E, p^2 = p, q^2 = q, pq = qp = 0$
Réciproquement : p endormophisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p \longrightarrow p$ est projection linéaire p_K^L où $K = \operatorname{Im}(p)$ et $L = \operatorname{Ker} p$

Déf 63 ▶ Une projection linéaire p_K^L est orthogonale $\iff K \perp L$. De façon équivalente, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est proj. orthogonale $\iff p^2 = p$ et $E = \operatorname{Ker} p \oplus^\perp \operatorname{Im}(p)$ (somme directe orthogonale)

Déf 64 ▶ F sev de E est non dégénéré si $Q_F = Q_{|F}$ (ou $\varphi_F = \varphi_{|F \times F}$) est forme non dégénéré.
F non dégénéré $\iff F \wedge F^\perp = \{0\} \iff E = F \oplus F^\perp$

Prop 65 ▶ F sev de E, $(i) si F$ non-deg $\longrightarrow \exists!$ proj. orhtogonale p d'image $F \underset{not}{:=} p_F (ou p_F^R$
(ii)si en plus$Q$est forme non-deg $\longrightarrow$ réciproque est vraie

2.13.2 Calcul projection orthogonale

Prop 66 ▶ F sev non-deg, $(a_1, \cdots, a_k)$ base orhtogonale de F. Alors $Q(\omega_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0\ \ \forall i = 1, \cdots, k$ est $\forall x \in E, p_F^r(x) = \sum_{i=1}^k \dfrac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i}$

2.14 Groupe orthogonal

Déf 67 ▶ Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, est def **orthogonal** (ou Q-orthogonal ou φorthogonal) s'il préserve Q ou (φ) :
$\forall x \in E, Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall\, x, y \in E, \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. On note $\mathcal{O}(E)$ ou $\mathcal{O}(E,Q), \mathcal{O}(E,\varphi), \mathcal{O}(\varphi)$, **l'ens des endom. orthogonaux** de (E, Q)

Prop 68 ▶ $(i)\ f \in \mathcal{O}(E) \longrightarrow f$ inversible
$(ii)\mathcal{O}(E)$ est un groupe.

Déf 69 ▶ soit F un ss-espace non-deg de E $\longrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$ et les 2 projections orthogonales $p_F, p_{F^\perp}$ sont def, tq $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. On def la **symétrie orthogonale** s_F par : $\forall v, \in E, \exists\,!\,(x,y) \in F \times F^{\perp}, v = x + y$ et on pose $s_F(v) = x - y$

70 ▶ $s_F = p_F - p_{F^\perp} = id_E - 2p_{F^\perp} = 2p_F - id_E$
Lorsque F est un **hyperplan**, s_F :réflexion orthogonale
Toute symétrie orthogonale est un endom. orthogonal
Quand $F \subsetneqq E, p_F$ proj orthogonale n'est pas endom orthog.

2.15 Caractérisation de $f \in \mathcal{O}(E)$ par matrices

71 ▶ $\mathcal{E}$, *base* $f \in \mathcal{L}(E), G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ alors $f \in \mathcal{O}(E) \iff {}^tAGA = G \iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j)\ \ \forall i, j = 1, \cdots, n, \mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$
Cas particulier : $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & . & O \\ . & \ddots & . \\ O & . & 1 \end{pmatrix}$, (E, Q) est un espace euclidien muni base orthornormée
$\mathcal{E}$, on a $f \in \mathcal{O}(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA \iff A$*mat orthogonale*

TH 72 ▶ (Cartau-Dieudonné)
Tout élément de $\mathcal{O}(Q)$ est produit d'au plus n **réflexions orthogonales**

TH 73 ▶ (Orthogonalisation de Graur-Schmidt)
$(v_1, \cdots, v_n)$ base de E, $\forall i = 1, \cdots, n-1, E_i = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_i)$ est **non-dégénéré** alors les n vecteurs :
$u_1 = v_1,\ u_2 = v_1 - \dfrac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1, \cdots, u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\varphi(u_1, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$ sont bien def et forment **base orthogonale**.
$\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_k)$ de E, dans cette base Q s'écrit :
$Q(\sum_{i=1}^{n}) = \Delta_1 x_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \cdots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$, où $\Delta_k = det\ A_k,\ A_k = Mat_{(v_1, \cdots, v_k)}(Q|_{F_k}$.

74 ▶ $\mathcal{U}$ s'apelle **orthogonalisée** $G - S$

75 ▶ $Q|_{F_{n-1}}$ non-dég $\longrightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1 \longrightarrow \mathrm{Rang}\, Q = n-1$ ou n, on ne suppose pas que $\Delta \neq 0$

Cor 76 ▶ (Critère de Sylvester)
$E, \mathbb{K} - ev, \dim E = n, \varphi \in\in \mathcal{L}(E), \varphi = b_Q, Q \in Q(E), (v_1, \cdots, v_n)$ base de $E, a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n, F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k), A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, A_k = Mat_{(v_1, \cdots, v_k)}(Q|_{F_k}), \Delta_k = det A_k$ alors :
$1)\varphi(ouQ)$ est def **positive** $\iff \Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$
Supposons $\Delta_1 \neq 0, \cdots, \Delta_{n-1} \neq 0, \Delta_0 = 1$ alors : l'indice négatif q de Q (c'est la 2° composante de la signature $(p,q) deQ$ est le **nbr de changements de signe** dans la suite $\Delta_0, \cdots, \Delta_n$ (on dit (Δ_i) possède un changement de signe au rang i si $\Delta_i . \Delta_{i-1} < 0$
3) φ est def **négative** $\iff \forall i = 1, \cdots, n, \Delta_i = (-1)^i | \Delta_i \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ les $A_k = detA_k$ s'appellent **mineurs principaux dominant.**

§3. Espaces euclidiens

3.1 Norme, distance, angles, volumes

Déf 01 ▶ Un $\mathbb{R}$ ev-E muni FB sym φ est appelé **espace euclidien** si dim $E < \infty$ et φ def positive. φ est appelé **produit scalaire.** $\langle x|y\rangle := \varphi(x, y)\ \forall x, y \in E$.
Par def, $\forall x \in E, \langle x, x| \geq \rangle 0$ et $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$. On note $\sqrt{\langle x|x\rangle} = ||x||$. On a $\forall x \in E, ||x|| = 0 \iff x = 0$

Prop 02 ▶ $\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$,on a :
$(i)||\lambda x|| = |\lambda|||x||$
$(ii)||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x|y\rangle + ||y||^2$
(si $x \perp y \longrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (TH de Pythagore)
$(iii)||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (inégalité du parallélogramme)
$(iv)|\langle x|y\rangle)| \leq ||x||||y||$ (Inégalité de Cauchy-Scwhartz)
$(v)||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité de Minkowski)

Déf 03 ▶ Norme classique $N(x)$

Déf 04 ▶ soit $X \neq$. On appelle **distance (ou métrique)** sur X toute fonction $d : X \times X \longrightarrow R \geq 0$ tq :
$(i)\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
$(ii)d(x, y) = 0 \iff x = y$
$(iii)\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace métrique est un ens. muni d'une métrique. La fonction $E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \geq 0, (x, y) \longrightarrow ||x - y||$ est une **distance**.

Déf 05 ▶ soit $(E, \langle .|.\rangle$, un **espace euclidien**, la fonction $E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \longrightarrow ||x||$ s'appelle **norme euclidienne** sur E et la fonction $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, (x, y) \longrightarrow ||x - y||$ s'appelle **distance euclidienne** sur E.

06 ▶ Tout espace euclidien possède une base orthonormée et est donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son porduit scalaire standard

3.2 Angles

Cor 07 ▶ $\forall x, y \in E\backslash\{0\}$ par Cauchy-Schwarz, $| \dfrac{\langle x|y\rangle}{||x||||y||} | \leq 1$

Déf 08 ▶ **L'angle** $(\widehat{x, y})$ entre deux vecteurs non nuls de E est def comme unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tq $\cos\theta = \dfrac{\langle x|y\rangle}{||x||||y||}$. On peut écrire $(\widehat{x, y}) = \arccos \dfrac{\langle x|y\rangle}{||x||||y||}$ (arccos désigne la valeur principale de arccos comprise entre 0 et π).
$\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On def aussi les angles entre 2 sous-espaces vectoriels $F_1, F_2 \neq 0$ de E :

$(\widehat{F_1, F_2}) = \inf\{(\widehat{v_1, v_2}|\ v_1 \in F_1\backslash\{0\}, v_2 \in F_2\backslash\{0\}\}$ et l'angle entre un vecteur non nul est un sous-espace vectoriel de F : $(\widehat{v, F}) = \inf\{(\widehat{v, w})\ |w\ \in F\backslash 0\}$

09 ▶ Par exemple, l'angle entre 2 droites F_1, F_2 de vecteurs directeurs v_1, v_2 :
$(\widehat{F_1, F_2}) = \min\{(\widehat{v_1, v_2}), (\widehat{v_1, -v_2})\} = \min\{\theta, \pi - \theta\}\ \ o\theta = (\widehat{v_1, v_2})$

3.3 Volumes

Déf 10 ▶ (i)Pour une famille $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs de E, le parallélépipède engendré par v est def par :
$\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \{\sum_{i=1}^{k}\ t_i v_i \mid (t_1, \cdots, t_\alpha)\ \in [0,1]^\alpha\}$
(ii)Le k-volume $v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est def par :
1) si $\mathcal{V}$est **liée** ,$v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V})) = 0$
2) si $\mathcal{V}$ est **libre**,$v \circ l_k(\Pi(\mathcal{V})) =\mid \det P_{\mathcal{E}_{F\longrightarrow v}} \mid$ où $\mathcal{E}_F$ est base orthonormée qq de $F = \mathrm{Vect}(v)$ et $P_{\mathcal{E}_{F\longrightarrow v}}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à v.
$P_{\mathcal{E}_{F\longrightarrow v}} = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \forall j = 1, \cdots, k,\ v_j = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} e_i$

Lemme 11 ▶ $\mid \det P_{\mathcal{E}_{F\longrightarrow v}} \mid$ ne dépend pas choix de $\mathcal{E}_F$

Cor 12 ▶ (de la démo du lemme)
La mat de passage A entre 2 bases orthorn. est une mat **orthogonale** : A est **inversible** et $A^{-1} = {}^tA$. Le **déterminant d'une mat orthogonale** ne peut prendre que deux valeurs : 1 et -1.

3.4 Groupe orhtogonale d'un espace euclidien

Déf 13 ▶ soit E un ee $\dim E = n$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ens des endomorphismes orthogonaux de E.
$\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E, \langle .|. \rangle) = \{x \in \mathcal{L}(E)\ |(x, y) \in E \times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y \rangle\}$. C'est un groupe.
L'ens des mat orhtogonales de taille n est def par : $\mathcal{O}(n) = \{A\ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille n.