Correctif : $\boxed{\text{Exercice 1}}$ ② (iii)

⚠ La solution présentée dans le corrigé est fausse, même dans la version 2.
Voici donc une correction de la correction de la correction.
– L'exercice s'avère plus difficile que prévu : ne vous inquiétez pas si vous n'avez pas réussi à le faire ! –

• Rappel de la modélisation (la même que l'Exercice 7 de la fiche de TD 1) :
on modélise l'attribution de n boules numérotées dans n urnes numérotées par une permutation de $[\![1,n]\!]$, σ, avec $\sigma(i)=j$ si la boule ⓘ est dans l'urne $\underline{j}$.

• $\{Y=k\}$ revient donc à dire que σ a exactement k points fixes :
il existe $i_1 \ldots i_k \in [\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(i_1)=i_1 \ldots \sigma(i_k)=i_k$ et $\sigma(j)\neq j$ pour $j\in \boxed{E:=[\![1,n]\!]\setminus\{i_1\ldots i_k\}}$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n!}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left|\mathrm{Fix}^{exact}(i_1,\ldots,i_k)\right|$ où $\boxed{\mathrm{Fix}^{exact}(i_1\ldots i_k)}$ est l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont pour seuls points fixes $i_1\ldots i_k$.

avec $n=6$, mais nous traiterons le cas $n>1$ général.

nombre de permutations de n éléments

Pour calculer $|\mathrm{Fix}^{exact}(i_1\ldots i_k)|$, on va s'appuyer sur les ensembles :
$\boxed{\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k)} := \{\sigma\in\mathfrak{S}_n \mid \sigma(i_1)=i_1 \ldots \sigma(i_k)=i_k\}$ des permutations qui fixent $i_1\ldots i_k$ (mais peut être aussi d'autres points).

▷ On a donc : $\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k) = \mathrm{Fix}^{exact}(i_1\ldots i_k) \sqcup \underbrace{\{\sigma\in \mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k) \text{ avec au moins } k+1 \text{ points fixes}\}}_{(*)}$

– On sait calculer $|\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k)|$ (cf. exercice 7, TD1) :
il suffit de spécifier la permutation des $n-k$ éléments de E pour spécifier $\sigma\in \mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k)$, donc $|\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k)| = (n-k)!$

– Pour l'autre ensemble, on voit que $(*) = \bigcup_{i_{k+1}\in E} \mathrm{Fix}(i_1\ldots i_{k+1})$, mais cette réunion n'est pas disjointe (on ne peut donc pas dire que le cardinal est la somme des cardinaux de cette réunion),
~~mais les éléments dans cette inters~~
Après, si σ appartient à deux termes de cette réunion, elle aura au moins $k+2$ points fixes, etc. En prenant le cardinal, on obtient avec la formule du crible (ou Poincaré) :

$$|\mathrm{Fix}^{exact}(i_1\ldots i_k)| = |\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_k)| - \Bigg[\sum_{i_{k+1}\in E} |\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_{k+1})| - \sum_{\substack{i_{k+1},i_{k+2}\in E\\ i_{k+1}<i_{k+2}}} |\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_{k+2})| + \cdots + (-1)^{n-k+1}\sum_{\substack{i_{k+1}\ldots i_n\in E\\ i_{k+1}<\cdots<i_n}} |\mathrm{Fix}(i_1\ldots i_n)|\Bigg]$$

Donc :

$$\left|Fix^{exact}(i_1 .. i_k)\right| = (n-k)! - (n-k-1)! \times \underbrace{\sum_{i_{k+1}\in E} 1}_{= n-k} + (n-k-2)! \underbrace{\sum_{\substack{i_{k+1}, i_{k+2} \in E \\ i_{k+1} < i_{k+2}}} 1}_{= \binom{n-k}{2}} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} (n-k-j)! \binom{n-k}{j} (-1)^j = (n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in [\![1,n]\!] \\ i_1 < \dots < i_k}} |Fix(i_1 .. i_k)|$$

$$= \frac{(n-k)!}{n!} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \right) \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1}_{\binom{n}{k}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}}.$$