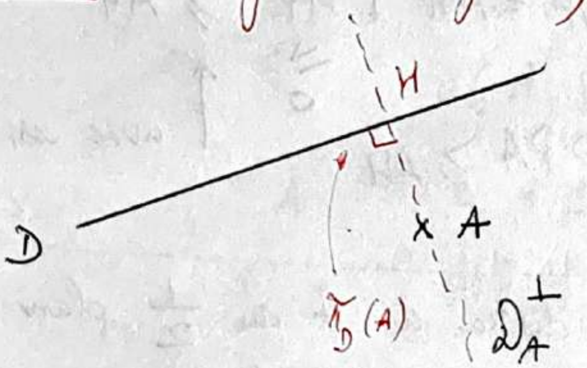
TD M44 TD 1 : Le Plan Euclidien

Ex 1 (Projeté Orthogonal)



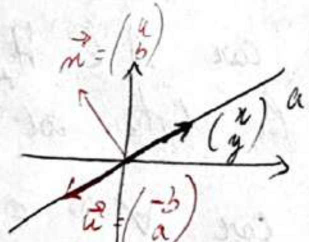
a) coord H en f $A(x_A, y_A)$ et équa° de D.

$\mathcal{D} = \{ax + by = d\}$, $A = (x_A, y_A)$, $H = (x_H, y_H)$.

Indic $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur normal à $\mathcal{D}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur à $\mathcal{D}$

@ si $d = 0$.



$\langle (-b, a) \mid (a, b) \rangle = -ba + ab = 0$

$\Updownarrow$

$(-b, a) \perp (a, b)$

$\boxed{M1}$ on note $\mathcal{D}_A^\perp$, la droite $\perp$ à $\mathcal{D}$ passt par A.

équa° de $\mathcal{D}_A^\perp$: $-bx + ay = \underbrace{-bx_A + ay_A}_{A \in \mathcal{D}_A^\perp}$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{D}_A^\perp$.

et comme c'est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\Leftarrow \Rightarrow$ $\mathcal{D}_A^\perp$.

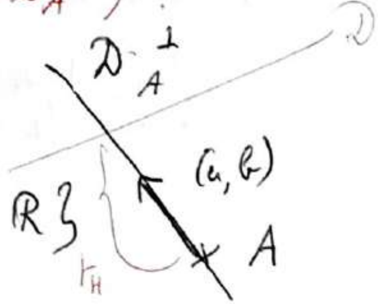
Ainsi le point $H(x_H, y_H)$ doit vérifier

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a x_H + b y_H = d \\ -b x_H + a y_H = -b x_A + a y_A \quad \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} aL_1 - bL_2 = \\ bL_1 + aL_2 = \end{matrix} \begin{cases} (a^2 + b^2) x_H = ad + b^2 x_A - ab\, y_A \\ (a^2 + b^2) y_H = bd - ab\, x_A + a^2 y_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_H, y_H) = \left(\frac{ad + b^2 x_A - ab\, y_A}{a^2 + b^2}, \frac{bd - ab\, x_A + a^2 y_A}{a^2 + b^2} \right)$$

$\boxed{\text{M2}}$ (paramétrisat° de $\mathcal{D}_A^{\perp}$)



$\mathcal{D}_A^{\perp} = \{A + t(a,b) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{D}_A^{\perp} = \{(x_A + t.a,\ y_A + tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$

On cherche ainsi t, tel que $H(x_H, y_H)$

$$(x_H, y_H) = (x_A + t_H \cdot a,\ y_A + t_H \cdot b)$$

$$\Leftrightarrow\ a(x_A + t_H \cdot a) + b(y_A + t_H \cdot b) = d$$

$$\Leftrightarrow\ (a^2 + b^2)\,t_H = d - a x_A - b y_A$$

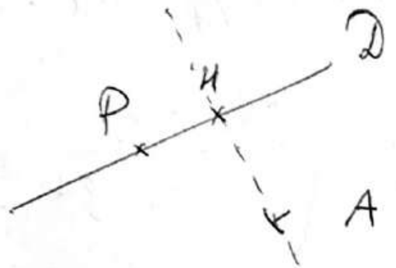
$$\rightsquigarrow\ (x_H, y_H)$$ ■

b) Mq H réalise la distance de A à $\mathcal{D}$.

$d(A, \mathcal{D}) = AH$

$\Updownarrow$

$\forall P \in \mathcal{D} : AP \geqslant AH$



voir démo

comme $(AH) \perp \mathcal{D} \Rightarrow \Delta\ AHP$ est rectangle.

(Pythagore)

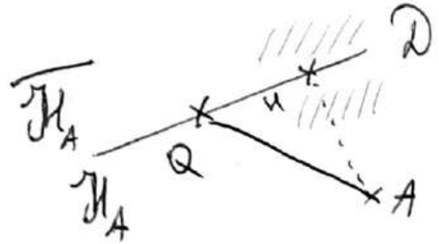
$$\Longrightarrow\ PA^2 = AH^2 + \underbrace{HP^2}_{\geqslant 0} \geqslant AH^2$$

avec ssi $HP = 0$ $\Leftrightarrow H = P$

$$\Leftrightarrow PA \geqslant AH$$

c) Mq H réalise distce de A au $\frac{1}{2}$ plan délimité par $\mathcal{D}$ & ne contenant pas A.

Quel est le point q réalise la distance entre A & autre $\frac{1}{2}$-plan.



$d(A, H_A) = 0$ car $A \in H_A$

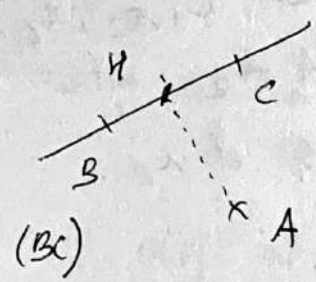
(et la distce est réalisé par A)

$d(A, \overline{\mathcal{H}}_A) = AH$ car $\forall P \in \overline{\mathcal{H}}_A$

soit $Q = [AP] \cap \mathcal{D} \Longrightarrow AP > AQ$ et

d'après b) $AQ \geqslant AH$ ■

d) Q^{le} est le p^t q réalise dist^{ce} de A au segment $[BC]$?

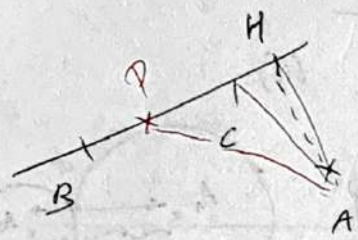


(i) si $H \in [BC]$,

$d(A, [BC]) = AH$.

(ii) si $H \notin [BC]$, $C \in [BH]$

$d(A, [BC]) = AC$



(iii) où H à gauche B ...,

Ex 2 (intersec° droite / cercle).

a) étudier intersec° droite $\mathcal{D}$ & cercle $\mathcal{C}(A, r)$

3 cas :

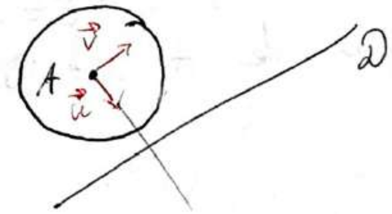
$\# = 0$ $\quad \# = 1$ $\quad \# 2$

soit $d = (A, \mathcal{D})$,

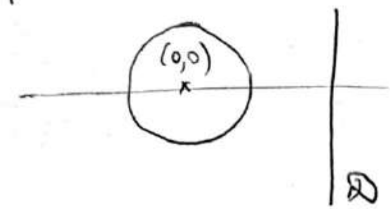
$d > R$ $\quad d = R$ $\quad d < R$.

On p^t simplifier calculs de 2 façons :

- en choisiss^t repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ (RON) tq $\vec{u} \perp \mathcal{D}$ et $\vec{v} \parallel \mathcal{D}$.

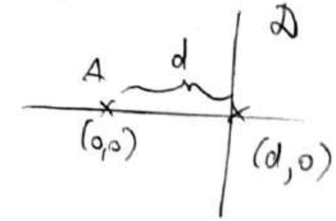


- le pb ne change pas si on translate et si on applique une rota°, dc on p^t supposer $A = \Omega(0,0)$ et $\mathcal{D} \perp Ox$.



→ Dans les 2 cas, on trouve les équa°s :

- $\mathcal{C}(A, R) = \{x^2 + y^2 = R^2\}$
- $\mathcal{D} = \{x = d\}$



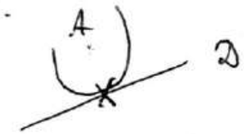
$P(x,y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}(A, R)$ ssi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = d \\ y^2 = R^2 - d^2 \end{cases}$$

Ainsi si $d > R \Rightarrow$ pas de soluθ $(\mathcal{D} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset)$

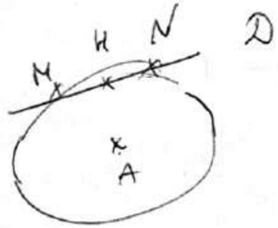
si $d = R \Rightarrow (d, 0)$ uniq soluθ (cas tangent)

de plus dans ce cas, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = (d, 0)$ qui est la projecθ de A sur $\mathcal{D}$.

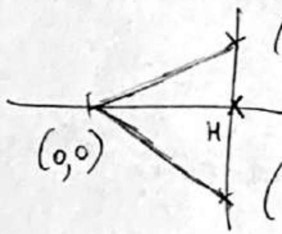


si $d < R \Rightarrow \# \mathcal{D} \cap \mathcal{C} = 2$

$$\underset{M}{\underset{\shortparallel}{\left(d, \sqrt{R^2 - d^2}\right)}}, \underset{N}{\underset{\shortparallel}{\left(d, -\sqrt{R^2 - d^2}\right)}}$$



$$H = (d, 0) = \frac{M + N}{2}$$



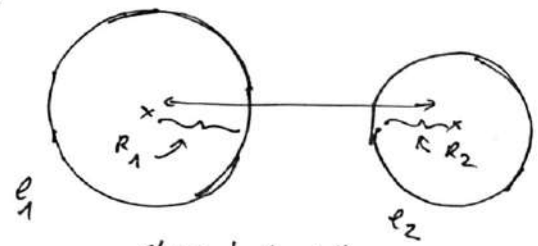
→ on vient de faire a) et b)

Ex4 : (Intersecθ de cercles)

a) Étude intersecθ 2 cercles $\mathcal{C}(A_1, r_1)$, $\mathcal{C}(A_2, r_2)$ en f distance $d := A_1A_2$ entre les centres & 2 rayons r_1 et r_2.

• Configuraθs possibles :

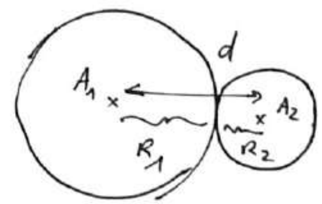
(i)



disjoint "ext"

$d > R_1 + R_2$

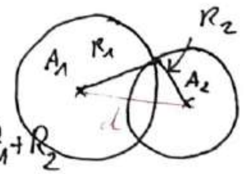
(ii)



tangents ext

$d = R_1 + R_2$

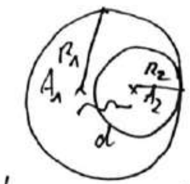
(iii)



$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

sécants

(iv)

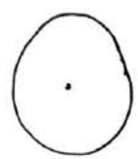


$R_1 > R_2$

tangents "int"

$d = |R_1 - R_2|$

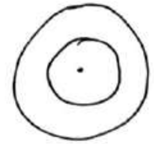
(v)



$R_1 = R_2$
$d = 0$

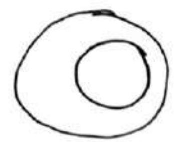
"confondus"

(vi)



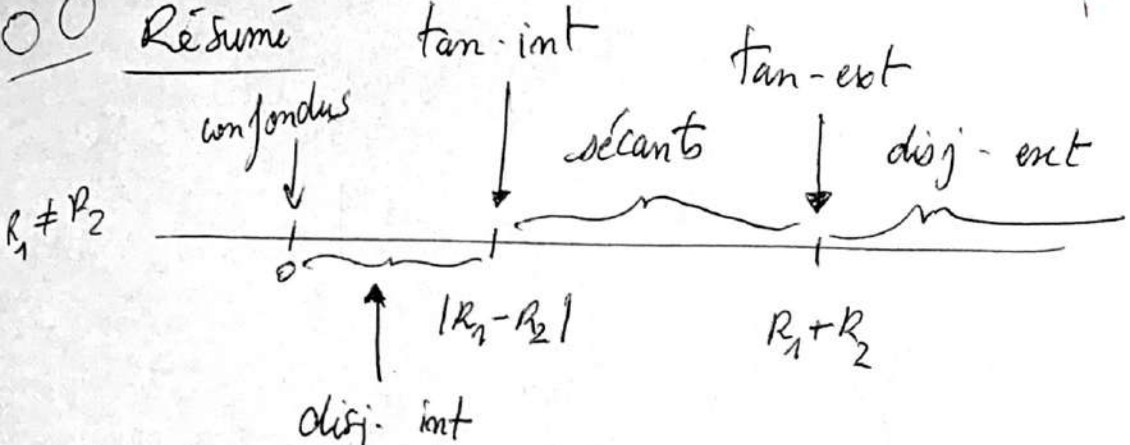
$R_1 \neq R_2$
$d = 0$

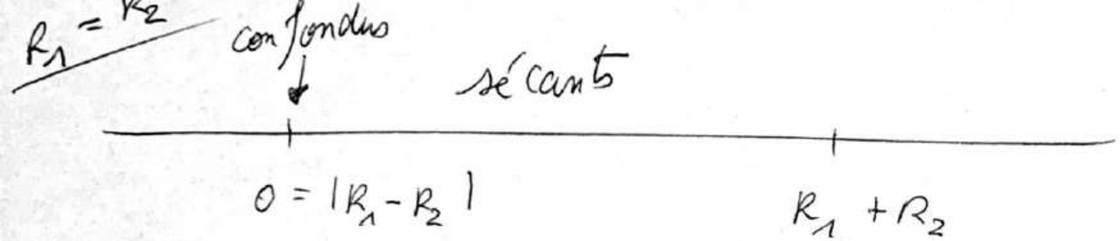
(vii)



$d < |R_1 - R_2|$

Résumé



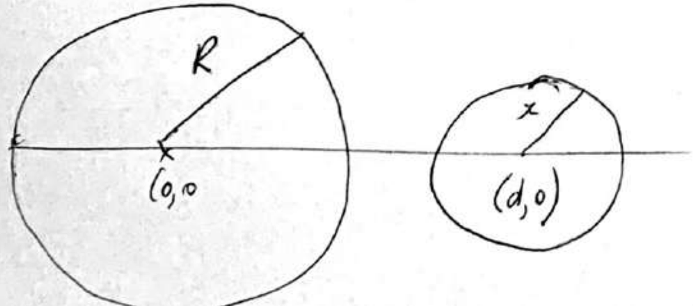


Démonstrat° ($\hat{c}$ ds ex2) on peut

- soit fixé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de façon adéquate
- soit appliquer une translat° & rotat°

p^r se ramener ds le cas : $\left(\begin{array}{l} R = \max(R_1, R_2) \\ r = \min(R_1, R_2) \end{array}\right)$

Rq: $|R_1 - R_2| = R - r$.



$\{x^2 + y^2 = R^2\}$ et $\{(x-d)^2 + y^2 = r^2\}$

Ainsi $P(x,y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ ssi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \dfrac{R^2 - r^2 - d^2}{2d} \end{cases} \qquad d \neq 0.$$

cas $d = 0$, trivial.

$$\Rightarrow y^2 = R^2 - \left(\frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d}\right)^2$$

$$y^2 = \left(R - \frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d}\right)\left(R + \frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d}\right)$$

$$y^2 = \left[\frac{r^2 - (R^2 - 2Rd + d^2)}{2d}\right]\left[\frac{R^2 + 2Rd + d^2 - r^2}{2d}\right]$$

≥ 0 $\quad$ ≥ 0

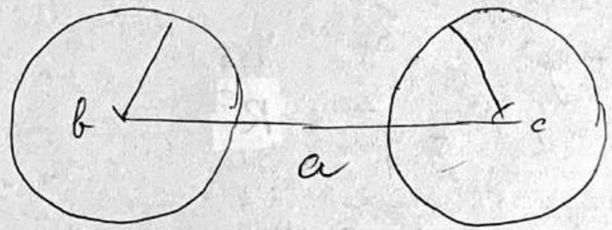
$\Delta > 0$ ssi $r^2 - (R-d)^2 > 0$ deux sol

$\Delta = 0$ $\quad = 0$ 1 sol

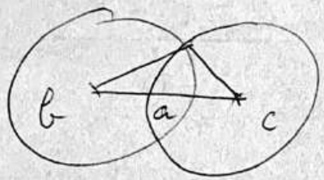
$\Delta < 0$ $\quad < 0$ 0 sol

b) ss quelle condi° a, b, c $\exists$-t-il Δ' dt côtés ont pr longueurs a, b, c.

simplification condi° si $a \leq b$ et $a \leq b \leq c$.



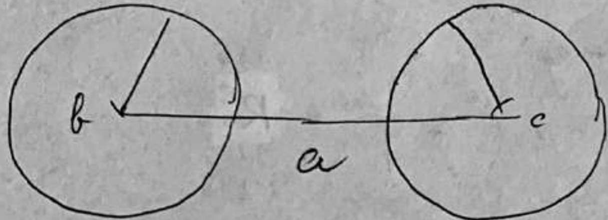
$\cancel{\Leftrightarrow}$



$a \leq b + c$

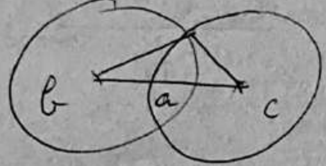
$|b-c| < a < b+c$

b) Sous quelle condition a, b, c ∃-t-il Δ dont côtés ont pour longueur a, b, c.
Simplification condition si $a \leq b$ et $a \leq b \leq c$.



~~⇔~~

$a \leq b + c$



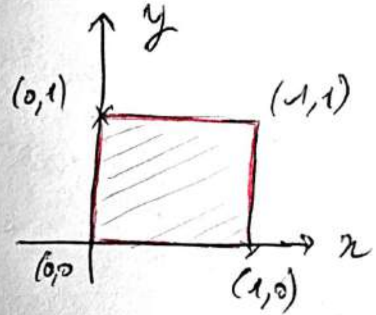
$|b-c| < a < b+c$

Ex 5 (Convexes & inéquations)

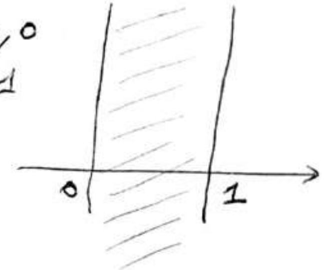
a) Donner un système d'inéquations linéaires dont l'ens de solutions est le carré unité.

b) soit $A(1,2)$, $B(4,1)$, $C(3,4)$ $\in \mathbb{R}^2$, donner syst inéquations linéaires dont solution est l'int ΔABC.

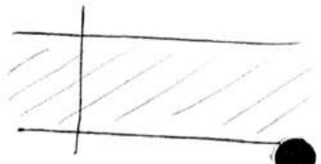
a)



$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

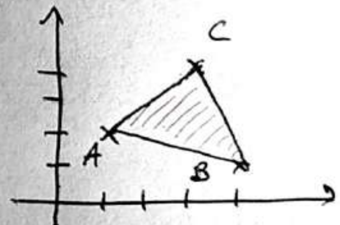


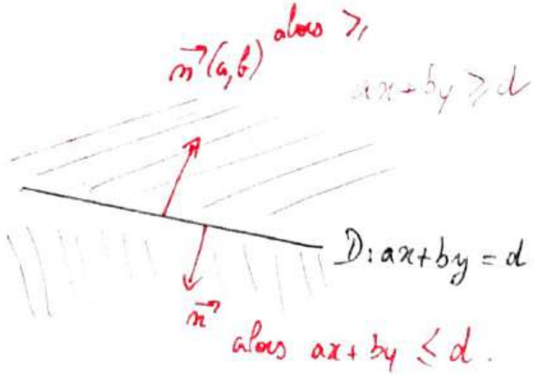
$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$



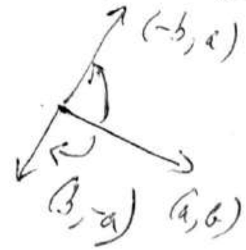
Au final : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1. \end{cases}$

b)





On considère la droite (AB) ayant pour vecteur directeur $\vec{AB}(4-1, 1-2) = (3,-1)$ et pour vecteur normal $(1,3)$



De $D_{AB} : x + 3y = 1 + 3 \times 2 = 7$

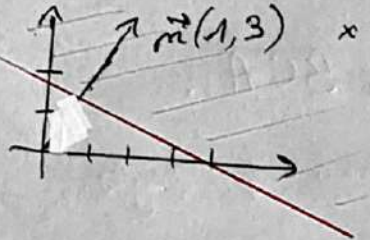
$D_{AB} : x + 3y = 7$

ou $D_{AB} : -x - 3y = -7$.

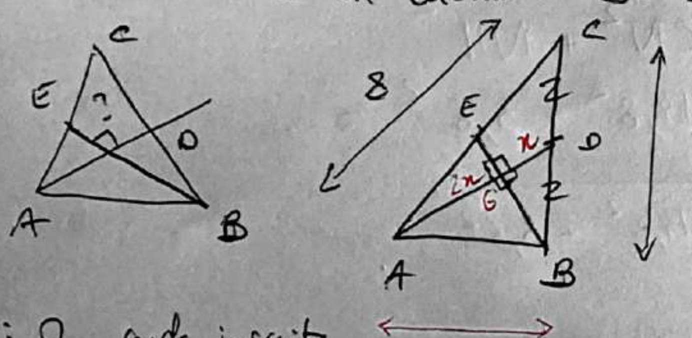
et comme $3+3.4=15>7$ le plan délimité par (AB) devant C a pr inéquat

(coord. de C)

$\{x+3y\geq 7\}$



Ex7 Dans $\triangle ABC$, la médiane AD est perpendiculaire à la médiane BE.
Trouver AB en sachant $BC=6$, $AC=8$.



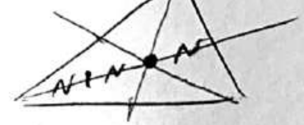
- I : Ω cercle inscrit
- O Ω cercle circonscrit
- H : ∩ 3 hauteurs
- G : Ω de gravité

Rapport $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ médianes

(7)

Pr calculer AB, on cherche BG & AG car $AB^2=BG^2+GA^2$ (Pythagore)

On note $GD=x \Rightarrow AG=2GD=2x$ car le Barycentre qui coupe la médiane AD en rapport $(2:1)$.



Puis $GE=y \Rightarrow GB=2GE=2y$.

Ainsi $AB^2=(2x)^2+(2y)^2 = ? = 4x^2+4y^2 = 4(x^2+y^2)=4\times 5=20$.

- En appliquant Pythagore au $\triangle BGD$

$$x^2+(2y)^2=9$$

- En appliquant Pythagore au $\triangle AGE$,

$$2x^2+y^2=16=4^2$$

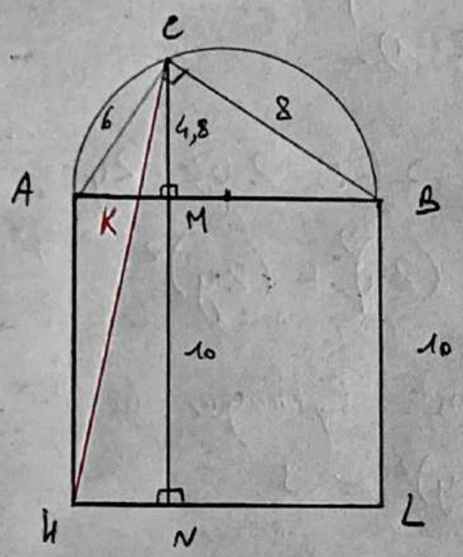
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=9 \\ 4x^2+y^2=16 \end{cases} \oplus \Rightarrow 5(x^2+y^2)=25$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=5$$

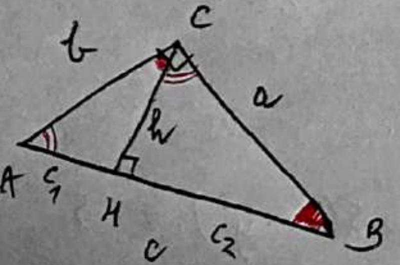
$$AB^2=4(x^2+y^2)=20$$

$$\Rightarrow \boxed{AB=\sqrt{20}}$$

Ex 8 Sur l'hypoténuse AB du ▷ ABC, tracer à l'ext. ▷ le carré ABLH.
En sachant $AC = 6$, $BC = 8$.
Trouver CH.



h ?



$$\Rightarrow h = \frac{ab}{c}$$

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2}$$

$c_1 = ?$ $\boxed{2M}$

M1 $c_1 = \sqrt{b^2 - h^2}$ (Pythagore)

M2 Triangle semblables

$$CM_{\text{hauteur}} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8$$

$$CN = MN + CM = 14,8.$$

c_1 ? M2 triangles semblables.

$$\triangle CMA \sim \triangle BMC \sim \triangle BCA.$$

⚠ au sens lettres → m ordre des sommets ⇔ angles.

$$\Rightarrow \frac{c_1}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow c_1 = \frac{b^2}{c}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6^2}{10} = 3,6.$$

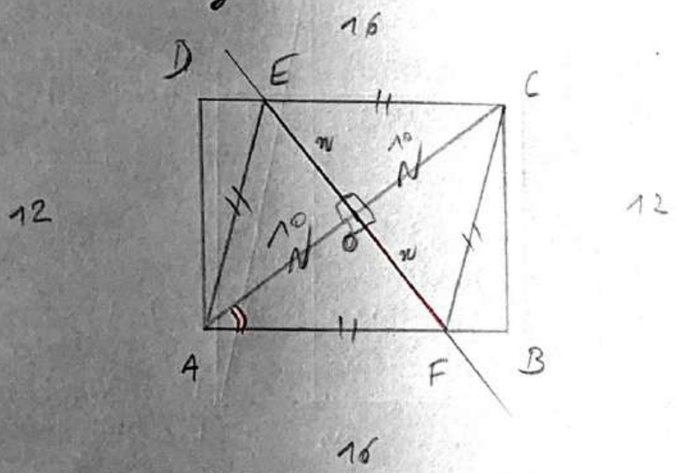
$$\Rightarrow CH^2 = CN^2 + NH^2 = 14,8^2 + 3,6^2 = ..$$

$$CH = \sqrt{14,8^2 + 3,6^2}.$$

Ex 10 Sur côtés AB et DC du rectangle ABCD, les points F & E st choisis pr AFCE soit un losange. si $\begin{cases} AB = 16 \\ BC = 12. \end{cases}$

◦ 4 côtés égaux
◦ diagonales ⊥

Trouvez EF.



$OF = x = \frac{EF}{2}$

on cherche $2x = EF$

△AOF ∼ △ABC

△AOF ∼ △ABC
(rectangles ds ∢A commun)
angle

AO commun

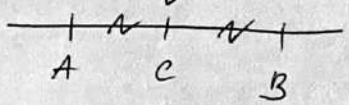
triplet pythagoricien $3^2+4^2=5^2$

9

TD 2 : Barycentre

(R1)

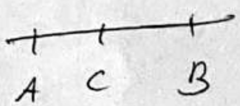
$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \approx \frac{A+B}{2}$



$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\vec{C} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A})$

$= \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$.

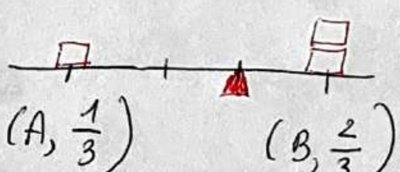


$C = A + \lambda\overrightarrow{AB}$

$\vec{C} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A})$

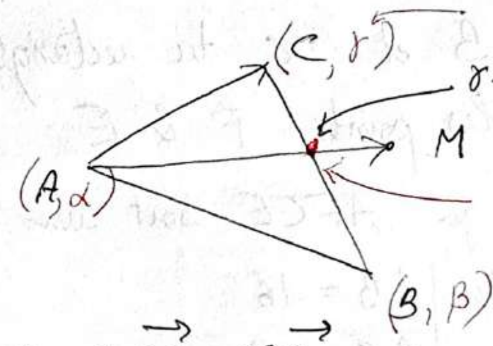
$\vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}$

$C = (1-\lambda)A + \lambda B \rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$



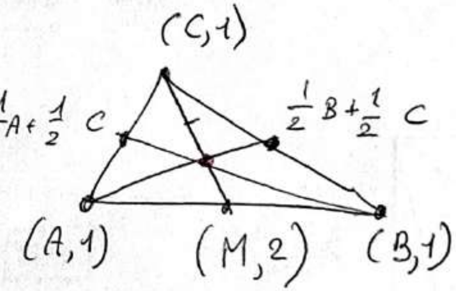
longueur$_1$ × poids$_1$ = long$_2$ × poids$_2$

$\frac{CA}{CB} = \frac{2}{1}$



$\frac{\gamma}{\gamma+\beta}C + \frac{\beta}{\gamma+\beta}B$

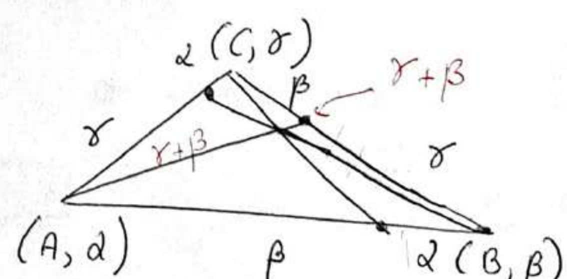
$A + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \underbrace{(1-\beta-\gamma)}_{\alpha}A + \beta B + \gamma C$



$(M,2) = \frac{A+B}{2}$

Tous les rapports sont $[2:1]$.

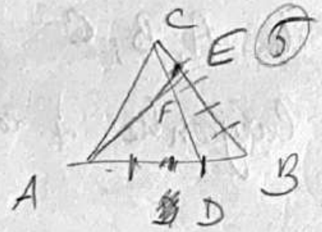
$CG : GM = 2:1$



$\overline{AB}$: longueur algébriq orientée

Ab

1



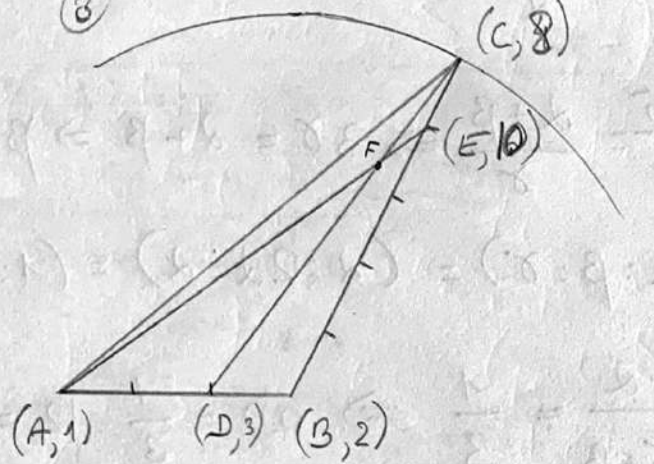
(5) $BD : DA = 1 : 2$

$CE : EB$ $1 : 4$

$CF : FD$?

1,8 : 5,5

(B)



M1

$AF : FE = DF : FC$

on cherche les poids α, β, γ de (A, B, C),

F est le barycentre de

$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

si $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$ car $\frac{DA}{DB} = \frac{\beta}{\alpha} = 2$

$\Rightarrow \gamma = 8$ car $\frac{EB}{EC} = \frac{\gamma}{\beta} = 4$

Ainsi $(\alpha : \beta : \gamma)$ — coord. à un multiple près, rapport proportionnalité entre α, β, γ

$(\alpha : \beta : \gamma) = (1 : 2 : 8)$

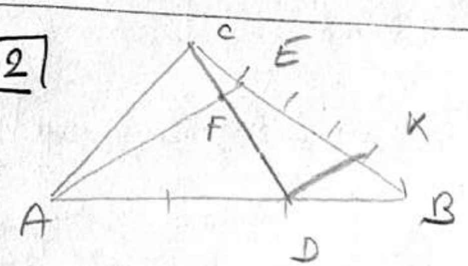
Donc $\boxed{\frac{CF}{FD} = \frac{3}{8}}$

valeur du poids en D

valeur du poids en C

Énoncé en 1

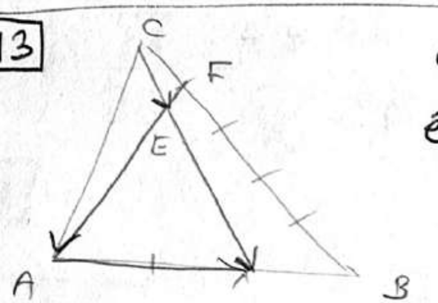
M2



Thalès

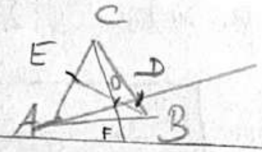
on considère $K \in [BC]$, $DK \parallel AE$, puis thalès

M3

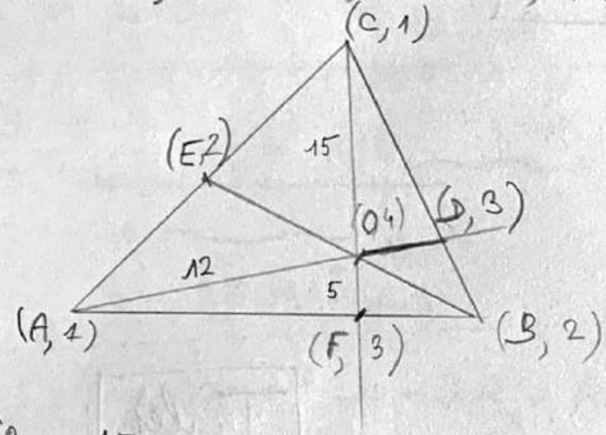


on cherche $\vec{CF} = \lambda \vec{CB}$ en les écrivant ds la base $\vec{CA}, \vec{CB}$.

2 Énoncé



$AE : EC = 1$, $CO = 15$, $OF = 5$, $AO = 12$, OD ?



$$\frac{CO}{OF} = \frac{15}{5} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{\alpha}{1} \quad \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\gamma = \frac{AO}{OD} = \frac{12}{OD} \qquad \frac{AO}{OD} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{12}{OD} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad OD = \frac{12}{3} = 4.$$

On cherche $(\alpha : \beta : \gamma)$ poids de A, B, C respectivement, O soit le barycentre de ces poids.

- $\dfrac{EA}{EC} = 1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha.$

- $\dfrac{OC}{OF} = \dfrac{15}{5} = \dfrac{\alpha + \beta}{\gamma} \Rightarrow 3\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$

$$\Rightarrow (\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha : 2\alpha : \alpha) = (1 : 2 : 1)$$

- $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{\alpha}{\gamma + \beta} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OD = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4.$

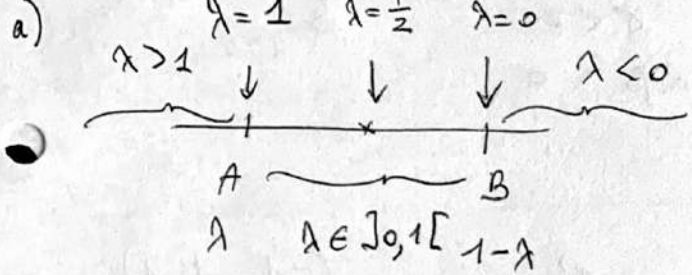
12

$\boxed{4}$ Énoncé soit Δ non dégénéré Δ ABC.

a) discuter posit° $M = \lambda A + (1-\lambda) B$ par rapport à A et B en f $\lambda \in \mathbb{R}$.

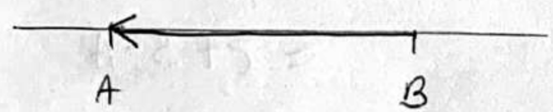
---

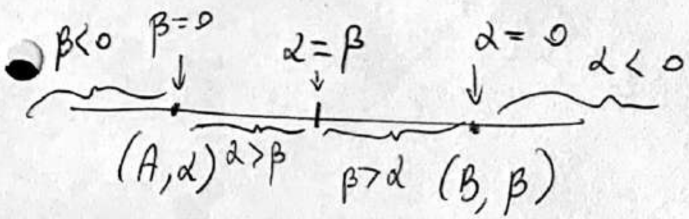
a)



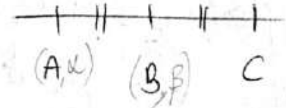
$$\lambda A + (1-\lambda) B = \lambda A - \lambda B + B$$
$$= \lambda \overrightarrow{BA} + B$$

on retrouve ce que l'on avait deviné.





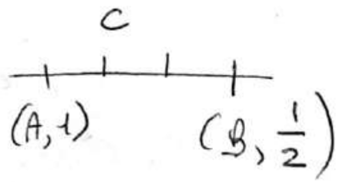
$\alpha + \beta > 0$

Q°: 

C symétriq de A/B.

→ C est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ pour quels $(\alpha : \beta)$

Rq si $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$



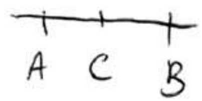
$\boxed{M1}$ $C = B + \overrightarrow{AB} = B + (\vec{B} - \vec{A}) = 2B - A$

$= (2 + (-1) \times 1)$.

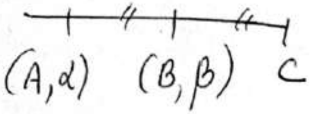
$\Rightarrow (\alpha : \beta) = (-1 : 2)$ convient.

$\boxed{M2}$ $B = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C \Longrightarrow C = 2B - A$

NB $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{-\beta}{\alpha}$



$\boxed{M3}$



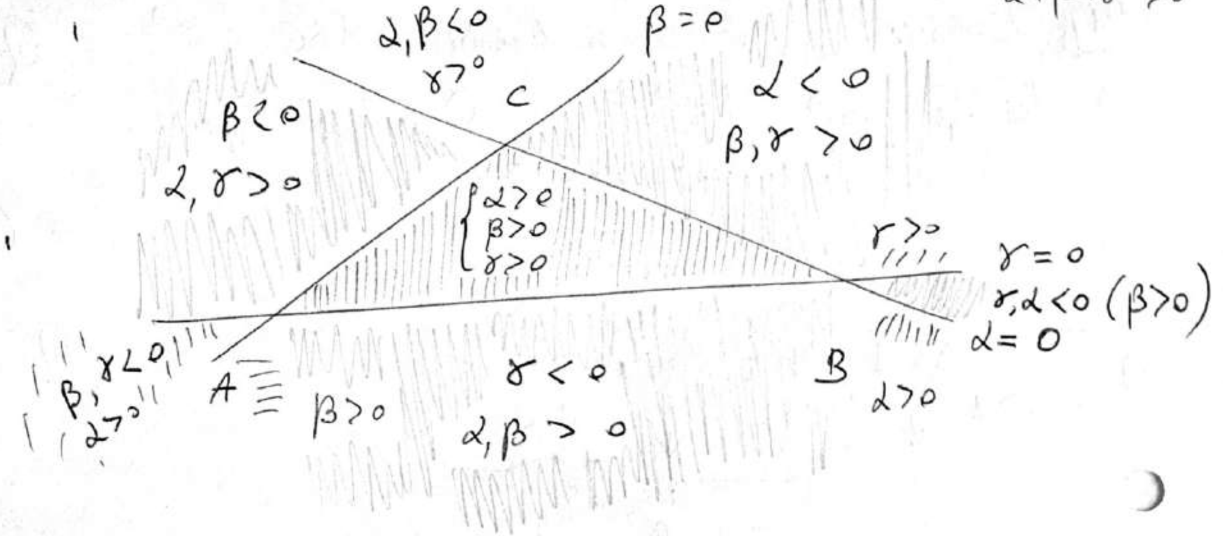
$2 = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = -2\alpha$

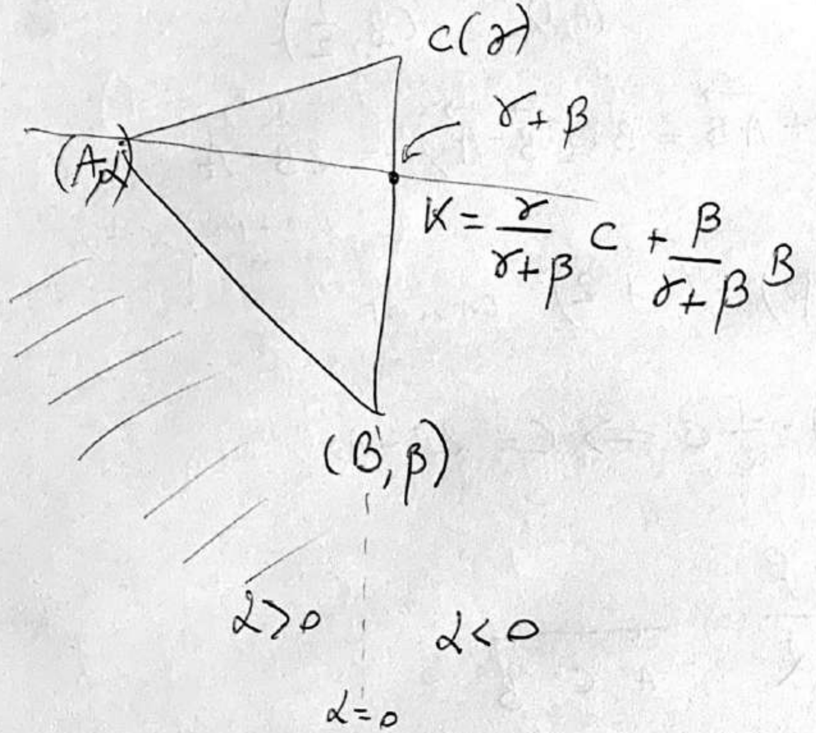
@ $(\alpha : \beta) = (-1, 2)$

b) Discuter posi° M par rapport ΔABC en f signes coord. barycentriqs $[\alpha, \beta, \gamma]$.

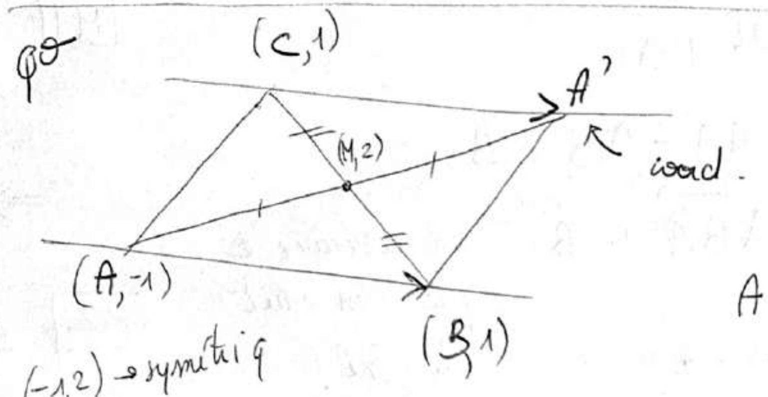
(i) condi° $M \in (BC) \xrightarrow{\text{rep}} \alpha = 0$

(ii) condi° $M \in \frac{1}{2}$ plan (BC) contenant A:





$\underline{\alpha+\beta+\gamma>0}$.



$(-1:1:1)$

$A' = C + \overrightarrow{AB}$
$= C + B - A$

Alignement

Ex 8

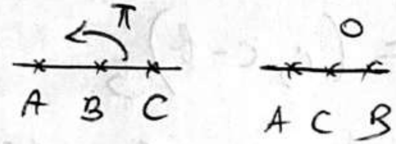
$\boxed{M}$ mq A, B, C alignés :

- → (D) trouver une droite $\mathcal{D}$, $A, B, C \in \mathcal{D}$
- $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$
- $C \in (AB)$

  si $AB = \{ax + by = d\}$, $ax_c + by_c = d$?

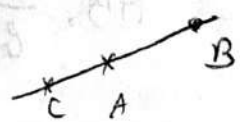
  si $(AB) = \{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ $(x_c, y_c) = A + t\vec{AB}$?

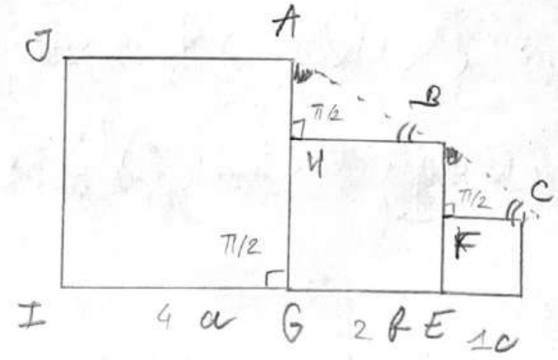
- $\measuredangle ABC = 0\ [\pi]$



- nbr complexes.
- homothéties → $H_{C,\lambda}(A) = B$

  → $H_{O,\lambda}(A) = B$, $H_{O,\lambda}(B) = C$





$a : b = b : c$

$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{2}{1} = 2$

$\boxed{M1}$ (angles)

$$\triangle HBA \sim \triangle FCB \text{ car } \underbrace{\frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC}}_{(*)} \text{ et } \measuredangle H = \measuredangle F = \frac{\pi}{2}$$

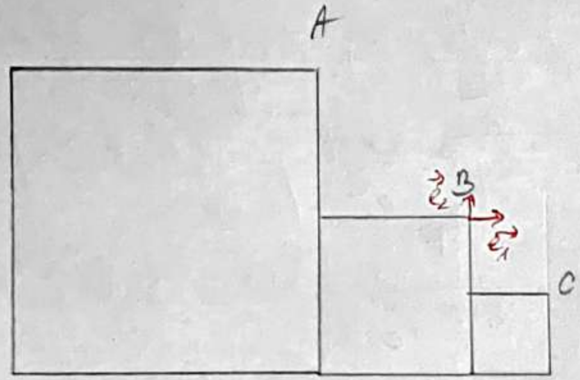
$$(*) \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{c} - 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ok}$$

Ainsi $a : b = b : c$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABH + \measuredangle HBF + \measuredangle FBC = \pi$$

$\triangle$ semb. → $\parallel$ $\measuredangle BCF$ $\quad \parallel \pi/2$ $\measuredangle BFC$ $\quad$ somme des angles de $\triangle BFC$

Donc A, B, C st alignés car $\measuredangle ABC$ angle plat (plat)



$\boxed{M2}$ Équat° d'une droite.

On fixe $\mathcal{R} = (B, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

$\|\vec{e_i}\| = 1$.

$\vec{e_1} \parallel (ID)$ et $\vec{e_2} \parallel (IJ)$

$B = (0,0)_{\mathcal{R}}$ $\quad A = (-b, a-b)_{\mathcal{R}}$, $C = (c, c-b)_{\mathcal{R}}$

$\vec{BA}$ "

$(AB) = \{(a-b)x + by = 0\}$ car $(a-b, b)$ vecteur normal ($\perp \vec{AB}$ directeur)

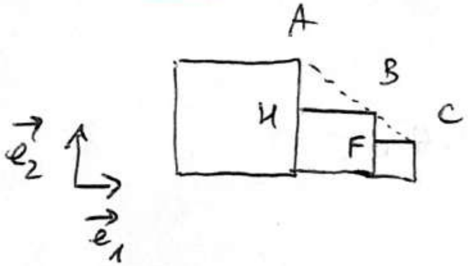
car B est sol° de (AB)

$C \in (A,B) \iff (a-b)c + b(c-b) =$

$= ac - \cancel{bc} + \cancel{bc} - b^2 = ac - b^2 = 0$

car $ac - b^2 = 0 \iff ac - b^2 = 0 \iff \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

$\boxed{M3}$ Vecteurs



on fixe la m̂ base que $\boxed{M2}$.

$\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HF}$

$\vec{AB} = (b-a)\vec{e_2} + b\vec{e_1}$

$\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC} = (c-b)\vec{e_2} + c\vec{e_1}$

$\vec{AB} = (b, b-a)_B$

$\vec{BC} = (c, c-b)_B$

$\vec{AB} \cdot \frac{c}{b} = \left(c, \frac{(b-a)c}{b}\right) = \left(c, \frac{bc-ac}{b}\right)$

$= \left(c, c - \frac{ac}{b}\right) = \left(c, c - \frac{b}{c} \times c\right) = \vec{BC}$

$a : b = b : c$

on échange 2 coord, on ajt – un seul.

$\boxed{\text{M3 bis}}$ vérifier de $\perp$, scalaire

$< \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC}^{\perp} > = 0$

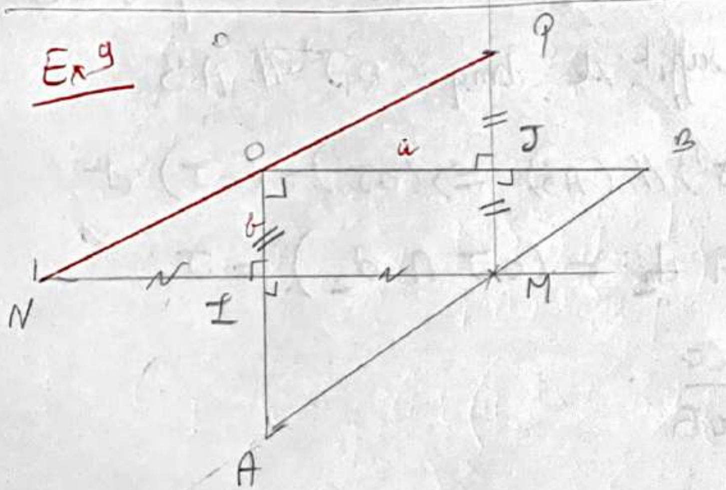
$''$

$< (b, b-a) \mid (b-c, c) > = 0$

$\Leftrightarrow b(b-c) + bc + (b-a)b + (b-a)c = 0$

$\Leftrightarrow b^2 - bc + bc + b^2 - ab + bc - ac = 0$

Ex 9



$\boxed{\text{M1}}$ on se place dans $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

avec $M(a,b)_{\mathcal{R}} \Rightarrow P(a,-b)_{\mathcal{R}}$ et $O(0,0)_{\mathcal{R}}$.

$\Rightarrow N(-a,b)_{\mathcal{R}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = (a,-b) = -(-a,b) = -\overrightarrow{ON}$.

dc $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

Ainsi O, P, N sont alignés.

$\boxed{\text{M2}}$ angles & triangles semblables.

$\underset{\text{symétrie}}{NI} = \underset{\text{OJMI rectangle}}{IM} = OJ$ $\qquad$ $IO = \underset{\text{symétrie}}{MJ} = JP$,

$\Rightarrow \Delta NIO = \Delta OJP$ car rectangles les thatètes (?) st égaux

$\sphericalangle NoP = \sphericalangle NoI + \underbrace{\sphericalangle IoJ}_{\frac{\pi}{2}} + \sphericalangle oJP = \pi$

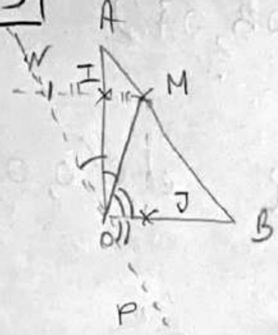
$\sphericalangle IoJ = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle NIo$; $\sphericalangle oJP = \sphericalangle INo$ (Δ égaux)

$\sphericalangle NoP = \sphericalangle NoI + \sphericalangle NIo + \sphericalangle INo$

Ainsi $\sphericalangle NoP$ angle plat. $\qquad$ somme angles un triangle $= \pi$.

Dc N, O, P alignés.

$\boxed{M3}$ (angles, bijectrices, symétrie)



$\measuredangle NOI = \measuredangle IOM$ (par symétrie)

$\measuredangle JOP = \measuredangle JOM$ (par symétrie)

$$\Rightarrow \measuredangle NOP = 2(\measuredangle IOM + \measuredangle MOJ)$$
$$= 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

$\rightarrow$ O est le milieu de $[NP]$.

$\boxed{M1}$ (coordonnées) : $\dfrac{N+P}{2} = \dfrac{(-a,b)+(a,-b)}{2} = (0,0) = O.$

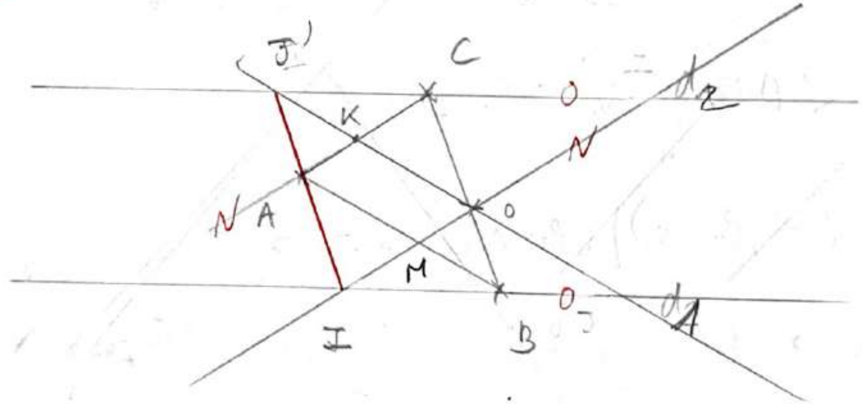
$\boxed{M2}$ (angles & Δ semblables égaux).

$\Delta NOI \approx \Delta OPJ \Rightarrow NO = OP.$

$\boxed{M3}$ (symétrie)

$ON = OM = OP$ (par symétrie)

Ex 10 :



Indic° : soit $(AI) \cap d_2 = J'$, on vt dmq $J' = J$

pr faire ça il suffit de dmq : $OJ' \parallel AB$.

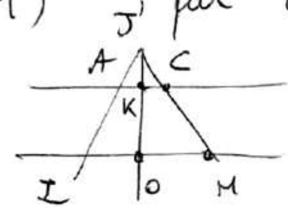
en effet si $(OJ') \parallel (AB) \Rightarrow (OJ') = (OJ)$ et

comme $(OJ') \cap d_2 = (OJ \cap d_2) = J$.

Indic° 2 : $\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{CO}{OB}$

comme $(CA) \parallel (IM)$ par construc° de I

$\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{MO}{OI}$



$\Updownarrow$

$\dfrac{CK}{MO} = \dfrac{J'K}{J'O} = \dfrac{KA}{OI}$ (Thalès)

20

Ainsi $\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{MO}{OI} \overset{?}{=} \dfrac{CO}{OB}$

oui car $d_1 \parallel d_2$.

Pr conclure d'après Thalès dans ΔCAB, la droite $OK \parallel AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$

$\Rightarrow J \in (J'AI) \Rightarrow J, A, I$ alignés.

Ainsi $\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \overset{?}{=} \frac{CO}{OB}$

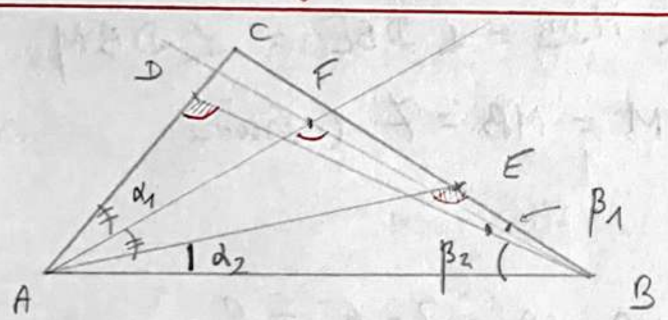
oui car $d_1 // d_2$.

Pr conclure d'après Thalès dans ΔCAB, la droite $OK // AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$

- $\Rightarrow J \in (J'AI) \Rightarrow J, A, I$ alignés.

TD 3 : Angles

Ex1



- Mq $\widehat{AFB} = \frac{\widehat{ADB} + \widehat{AEB}}{2}$

$\measuredangle CAF = \measuredangle FAE = \alpha_1$

$\measuredangle EAB = \alpha_2$

$(\measuredangle \widehat{CAB} = \alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2)$

$\measuredangle \widehat{CBF} = \measuredangle \widehat{FBD} = \beta_1$

$\measuredangle DBA = \beta_2$

$\rightarrow 2\measuredangle AFB = 2(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2))$

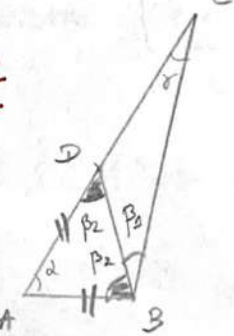
$\measuredangle ADB = \pi - (2\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2$

$\measuredangle AEB = \pi - \alpha_2 - (2\beta_1 + \beta_2)$

$\measuredangle ADB + \measuredangle AFB = 2\pi - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2$

$= 2 \measuredangle AFB$ □

Ex2



$\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 30° = \frac{\pi}{6}$

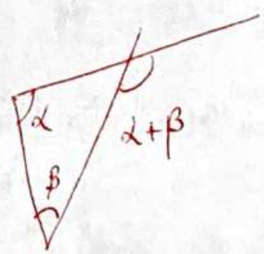
$\beta_1 + \beta_2 - \gamma = \frac{\pi}{6}$

$\beta_1 + \beta_2 - \gamma = \beta_1 + \beta_1 + \gamma - \gamma$

$= 2\beta_1 = 30°$

$\Rightarrow \boxed{\beta_1 = 15°}$

Rq



Ex3 Mq (CD) // (AB)

Ainsi on pourra conclure que $L=M=C \Rightarrow LM = 0$.

comme D intersec° des bissectrices AD & BD, $\Rightarrow$ CD bissectrice $\angle D$ à distance égale des droites (AB), (CB), (CA).

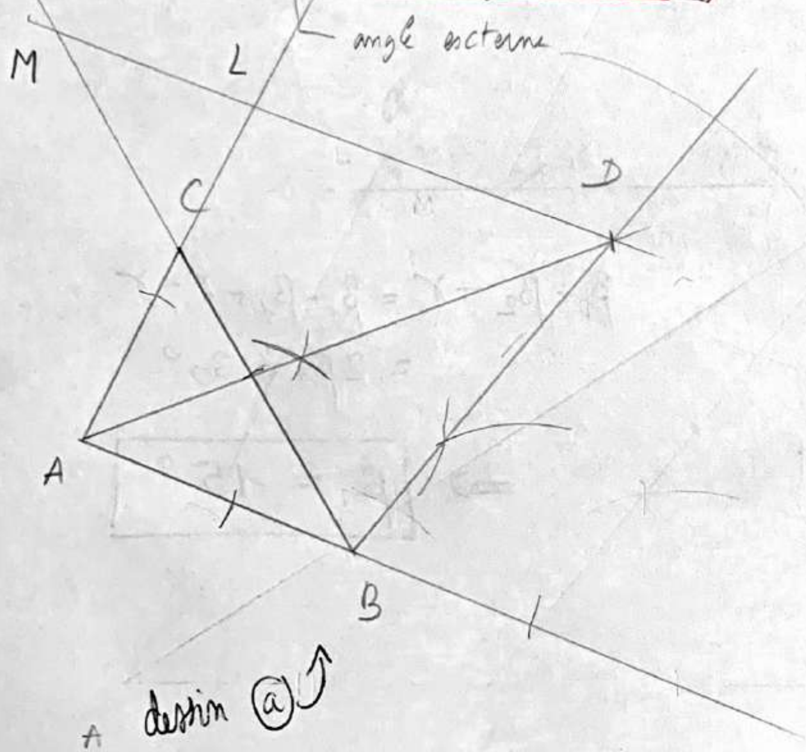
$\Rightarrow \angle DCB = \frac{1}{2}\angle FCB = \frac{1}{2}(\underbrace{\angle CAB + \angle CBA}_{\Delta ABC \text{ isocèle}}) = \angle CBA$

$\Rightarrow (CD) // (AB)$ b□ $\Rightarrow L=M=C \Rightarrow \underline{LM=0}$

tracer bissectrice $\angle A$ ĝ losange

angle externe

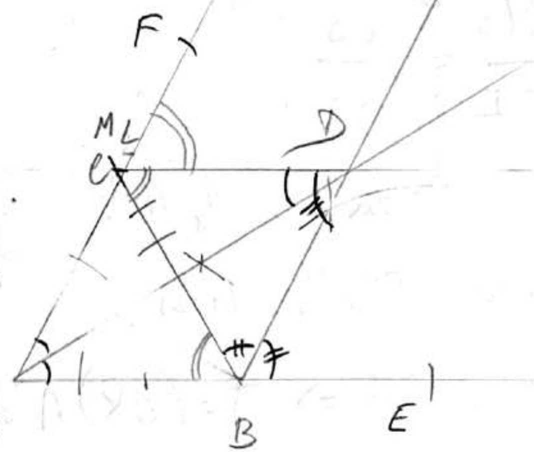
a)



dessin a

b) cas particulier où M coïncident à L.

ΔABC isocèle en C.



dessin b

a) $(DL) // (AB)$

$\Rightarrow \angle LDA = \angle DAB$ (alternes - internes)

$\angle DAB = \angle DAL$ (bissectrice AD)

$\Rightarrow \widehat{LAD} = \widehat{LDA}$

Δ isocèle ALD

$\Rightarrow LD = LA = 5$ (énoncé)

$\angle MDB = \angle DBE = \angle DBM$

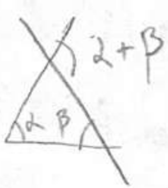
$\Rightarrow DM = MB = 7$ (énoncé

Δ DMB

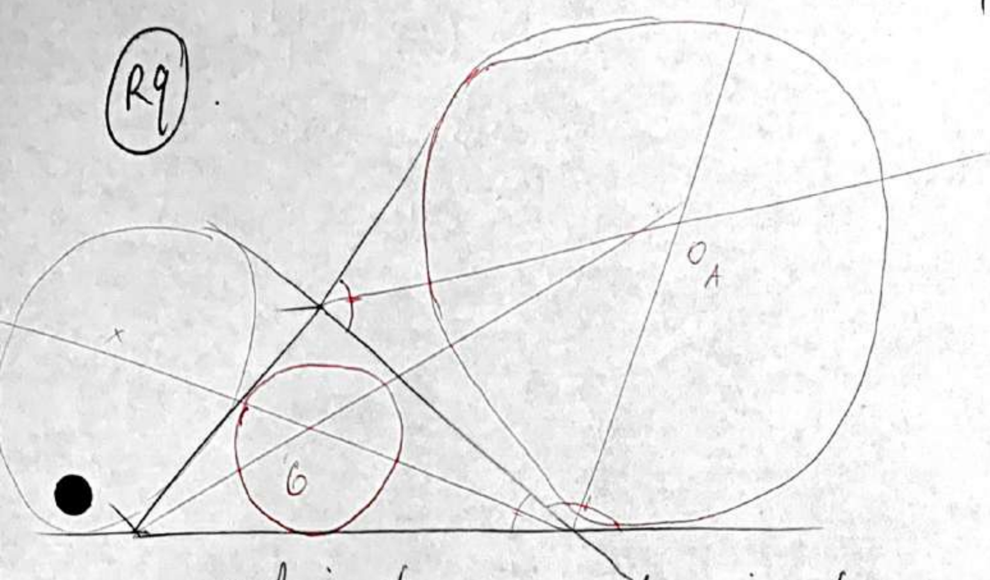
Ainsi $ML = MD - LD = 7 - 5 = 2$.

a□

argument



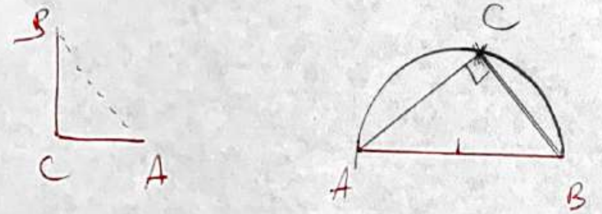
Rq.



cercle inscrit — cercle exinscrit

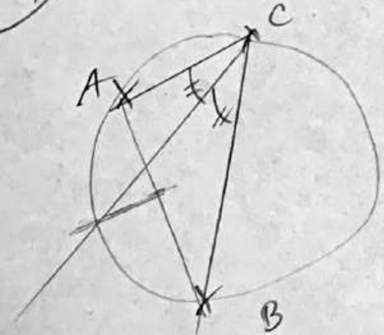
Rq Pr dessiner ABC rectangle en C.

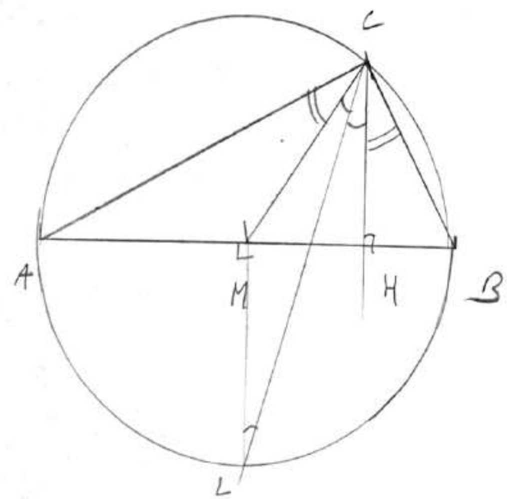
2 choix :



•

Rq Tracer bissectrice de ε (CP)





$\boxed{\text{M I}}$

c) Comme CL bissectrice $\Rightarrow \widehat{AL} = \widehat{LB} \Rightarrow ML$ médiatrice de $[AB]$

$L \in \mathcal{C}$ circonscrit à ΔABC

$ML \parallel CM \Rightarrow \sphericalangle MLC = \sphericalangle LCH$.

Comme ΔACB rectangle en $C \Rightarrow M$ centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ΔABC

$\Rightarrow ML = MC \Rightarrow \sphericalangle MCL = \sphericalangle MLC$.

$\Rightarrow \sphericalangle LCM = \sphericalangle MCL \Rightarrow CL$ bissectrice de MCH.

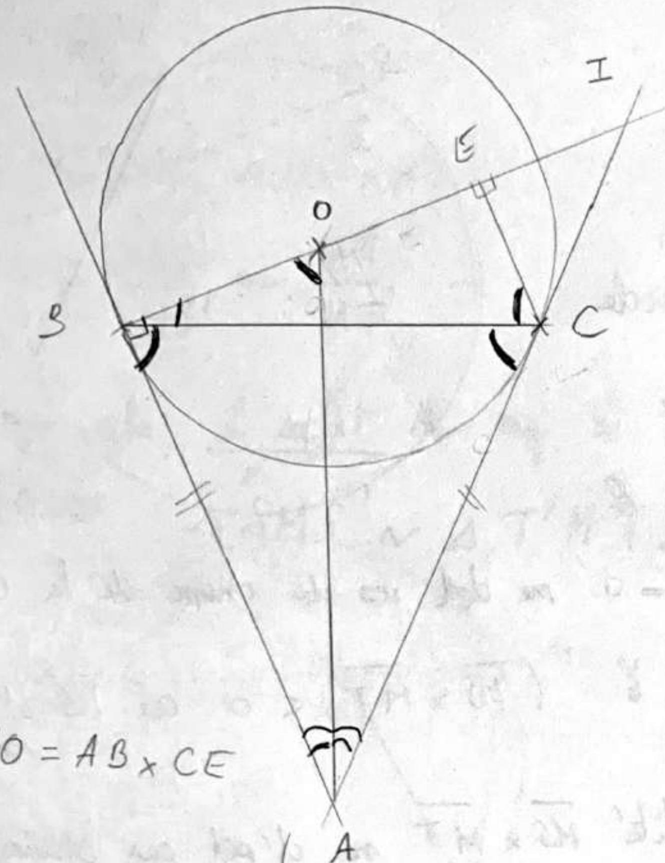
$\boxed{\text{M II}}$ M centre de $C \Rightarrow \sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC \quad (MA = MC = R)$

$\sphericalangle MCA = \sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ABC = \sphericalangle HCB$

ΔABC rectangle ΔHCB

Angles ▸ Cercles

Ex 7



Ainsi ? Thalès ? Sinus ?

mq $BE \times BO = AB \times CE$

Indic $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{OB}$

$\Updownarrow$? car $\sphericalangle BEC = \dfrac{\pi}{2} = \sphericalangle ABO$

$\Delta BEC \sim \Delta ABO$ (triangles rectangles)

$\Updownarrow$

$\sphericalangle EBC = \sphericalangle BAO$

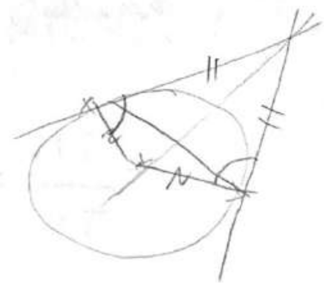
(Th) Δ st semblables ssi

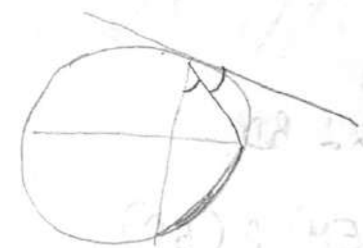
→ $a:b = c:d$ et une mesure angle égales

→ 2 mesures angles égales

→

(Rq)





→ $\sphericalangle AOB = \dfrac{1}{2} \sphericalangle \widehat{BOC} = \dfrac{1}{2} \widehat{BC}$ $\quad$ ($\sphericalangle BOC = \widehat{BC}$)

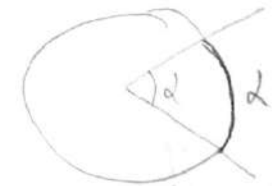
↑ centre

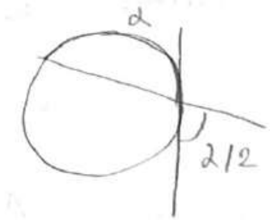
$\sphericalangle ECB = \sphericalangle CBA = \dfrac{1}{2} \widehat{BC}$ car $\mathcal{B}(O, OB)$

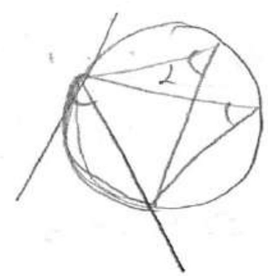
↑ angles alternes / internes

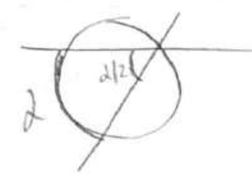
$CE \perp OB \perp AB \Rightarrow CE \parallel AB$

Ainsi $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ECB$ ◁

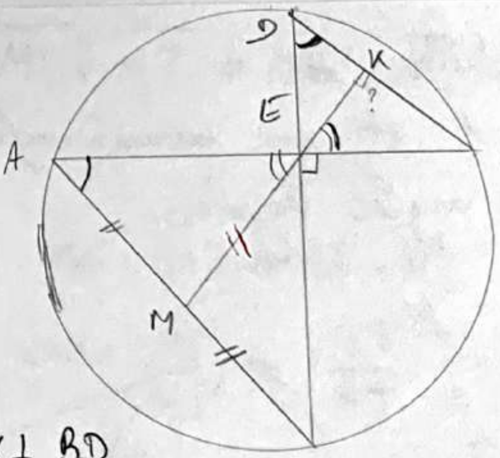








Ex 8



mq EM et EK coïncident.

on cherche à mq $EK \perp BD$.

où $K = (EM) \cap (BD)$

$AM = MC$.

On cherche à dmq $\measuredangle BDE = \measuredangle KEB$

car si c'est le cas $\measuredangle KEB + \measuredangle KBE$

$= \measuredangle BDE + \measuredangle DBE = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs $\measuredangle KEB = \measuredangle AEM$ (opposés)

$\measuredangle BDC = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \measuredangle BAC$

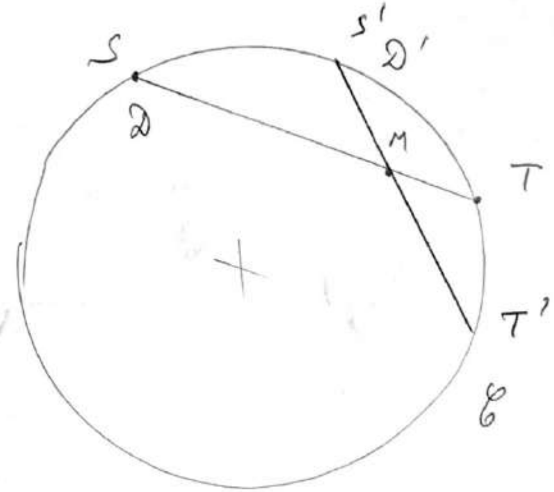
Et comme $\triangle AEC$ (rectangle en E) $\Rightarrow$ M centre du cercle circonscrit de $\triangle AEC \Rightarrow MA = ME$ $(= MC)$

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MEA}$.

(Réciproq : $ACBD$ st cocycliqs)

⚠ Inverser le sens de rédacθ.

Ex 9



a) $\overline{MS} \times \overline{MT}$

(<0 si M ds le cercle

1° cas / M sur $\mathscr{C}$.

$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = 0$ ne dpd pas du choix de la droite $\mathscr{D}$.

2° cas / M dans $\mathscr{C}$. ($\overline{MS} \times \overline{MT} < 0$ car $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{MT}$ de sens opposés)

a) Mq quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dpd pas choix droite $\mathscr{D}$

$\rightarrow$ le principe est de prendre 2 droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$,

$\mathscr{D}, \mathscr{D}' \ni M$, $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{S, T\}$

$\mathscr{D}' \cap \mathscr{C}' = \{S', T'\}$.

$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = \overline{MS'} \times \overline{MT'}$.

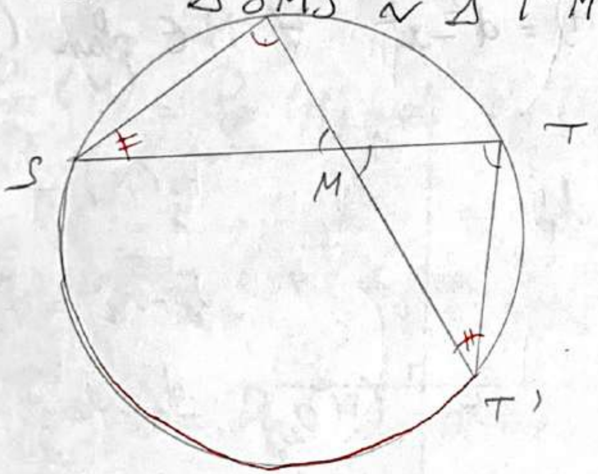
$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = \overline{MS'} \times \overline{MT'} = MS \times MT = MS' \times MT'$

mq $MS \times MT = MS' \times MT'$.

- Aires
- Rapport ↓ Δ semblables

$\Leftrightarrow \dfrac{MS}{MS'} = \dfrac{MT'}{MT}$

- Pr mq cela, il suffit de mq les triangles semblables $\Delta SMS' \sim \Delta T'MT$.



- et il faut car $\measuredangle SMS' = \measuredangle T'MT$ opposés.

De plus comme $\measuredangle SS'T' = \frac{1}{2} \widehat{ST'} = \measuredangle STT'$

$\Rightarrow$ les Δ st semblables.

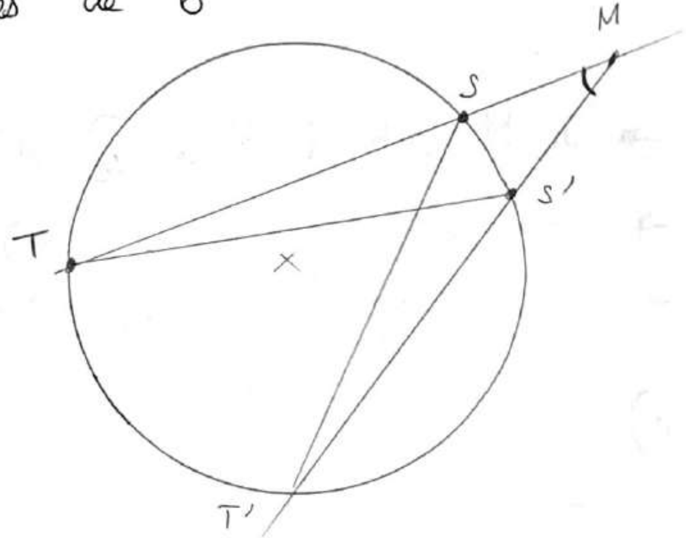
3° cas M hors de $\mathcal{C}$

$\overline{MS} \times \overline{MT} > 0$

$\boxed{M1}$ Il faut que l'on

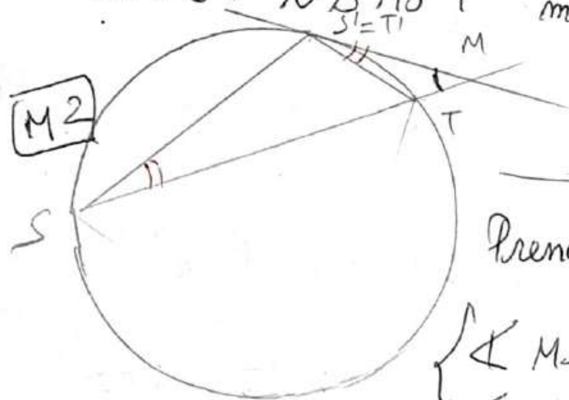
mq $MS \times MT = MS' \times MT'$

$\Leftrightarrow \dfrac{MS}{MS'} = \dfrac{MT'}{MT}$



$\Leftarrow \Delta MST' \sim \Delta MS'T$ mais $\measuredangle SMT' = \measuredangle S'MT$

$\measuredangle MTS' = \frac{1}{2} \widehat{SS'} = \measuredangle MT'S$



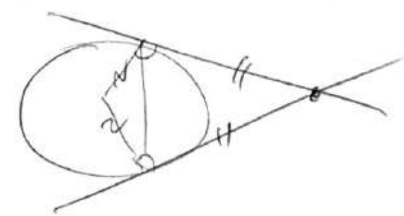
$\boxed{M2}$

Prendre $\mathcal{D}'$ tangente à $S' = T'$

$\begin{cases} \measuredangle MSS' = \frac{1}{2} \widehat{S'T} = \measuredangle MT'T \\ \measuredangle M \text{ commun} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MTT' \sim \Delta MS'S$

R9



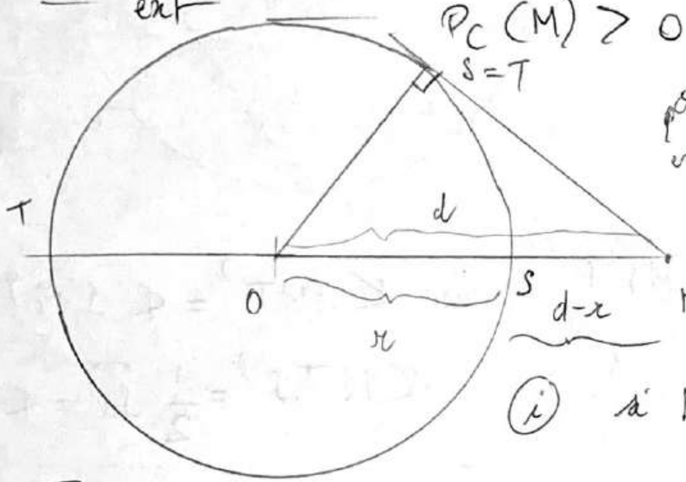
b)

→ Si M int à $\mathcal{C}$ à $P_C(M) < 0$

→ — sur — $P_C(M) = 0$

→ — ext — $P_C(M) > 0$.

c)



p° exprimer en f r & d.

(i) si M ext $\mathcal{C}$.

$\boxed{M1}$ $\overline{MS} \times \overline{MT} = MS.MT = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$

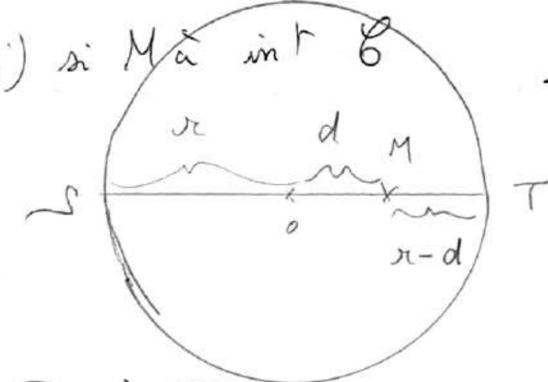
$\boxed{M2}$ soit $\mathcal{D}$ tangente $S=T$, $\overline{MS} \times \overline{MT} = MT^2$

par pythagore $MT^2 = MO^2 - OT^2 = d^2 - r^2$

(ii) si $M \in \mathcal{C}$ $\quad d = r$

$P_C(M) = 0 = d^2 - r^2$.

(iii) si M à int $\mathcal{C}$

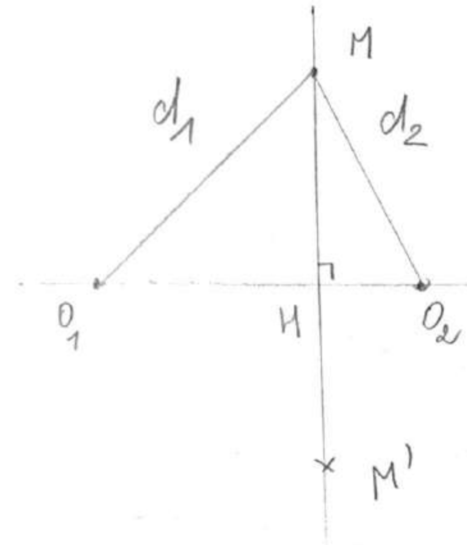


soi $\mathcal{D}$ le diamètre $\mathcal{D} \ni O, M$.

$P_C(M) = \overline{MS} \times \overline{MT} = -MS \times MT = -(r+d)(r-d)$
$= -(r^2 - d^2)$
$= d^2 - r^2$.

Ainsi $P_{\mathcal{C}}(M) = d^2 - r^2 \quad \forall M \in$ plan $(\mathbb{R}^2)$

d)



$P_{\mathcal{C}_1}(M) \overset{?}{=} P_{\mathcal{C}_2}(M)$

$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$

$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = cte$

soit M un point et H la projec° orthogonale de M sur $(O_1 O_2)$.

$$d_1^2 = O_1H^2 + MH^2 = MO_1^2$$

$$d_2^2 = MO_2^2 = MH^2 + O_2H^2$$

$$\Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = HO_1^2 - HO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

$$(HO_1 - HO_2)(HO_1 + HO_2).$$

$\rightarrow$ si $P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M)$ et $P_{\mathcal{C}_1}(M') = P_{\mathcal{C}_2}(M')$

$$\Updownarrow$$

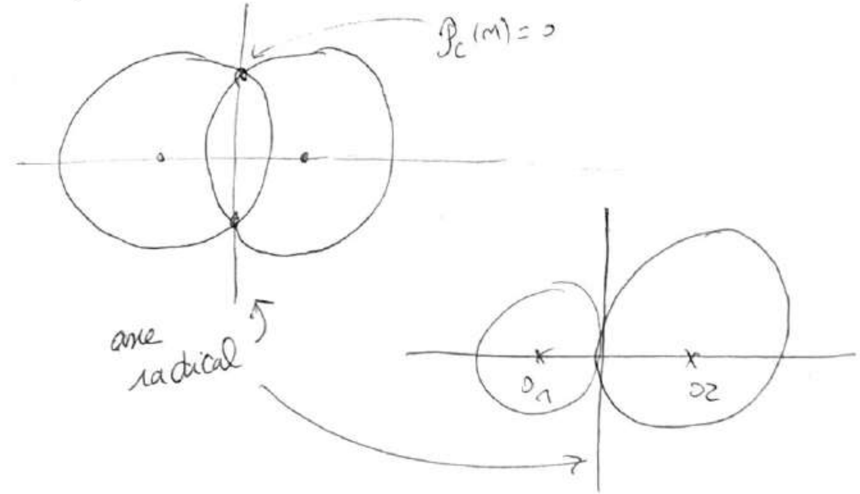
la $proj_{O_1O_2}(M) = proj_{O_1O_2}(M')$

$\Rightarrow P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M) =$ droite $\perp O_1O_2$.

qui passe par un point $H \in O_1O_2$ tq

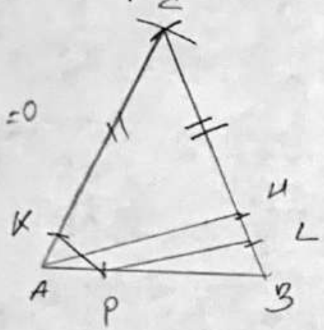
$$HO_1^2 - HO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

e) Rq si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.



TD4

Soit ΔABC isocèle en C, un point $P \in (AB)$. Déterminer longueur AH en f distances PK et PL de P à (CA) et (CB) resp.



1° cas

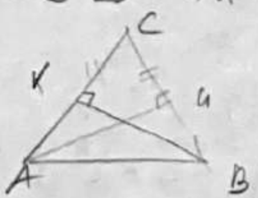
$\Rightarrow AH = PL$,, $AA = 0$

$(\pm PK)$

$(\max\{PL, PK\})$

2° cas

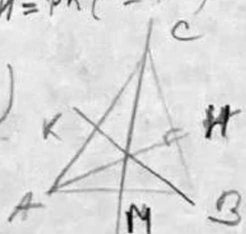
$P = B \Rightarrow PK = BK$ hauteur



$AH = BK$ car BB ''

$AH = PK\ (\pm P)$

$(CA = CB)$



$\boxed{M1}$

CH = médiane
= hauteur
= bissectrice $\hat{C}$
= médiatrice de (AB)
= axe de sym de ΔABC

$S_{CH}(C) = C$

$S_{CH}(A) = B, \quad S_{CH}(B) = A$

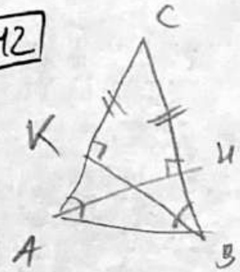
Ainsi car les symétries préservent les angles.

$\Rightarrow$ hauteur de A vers (BC) ie AH

son hauteur de $\underset{\overset{\shortparallel}{B}}{S_{CH}(A)}$ vers $\underset{\overset{\shortparallel}{AC}}{S_{CK}(BC)}$

$\Rightarrow H \xrightarrow{S_{CK}} K$

$\boxed{M2}$



$AC = CB \Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle ABC.$

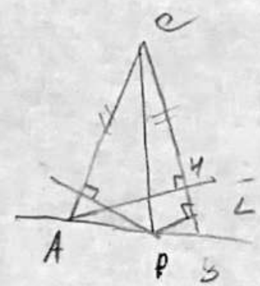
$\Delta ABK = \Delta BAH$ car:

- AB commun
- $\measuredangle K = \measuredangle H = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow BK = AH$
- $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$

$\boxed{M3}$

$BH \cdot \cancel{CA} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = AH \cdot \cancel{CB}$

3° cas



$P \in [AB]$

$\boxed{M1}$ $\mathcal{A}_{CPB} + \mathcal{A}_{CPA} = \mathcal{A}_{ABC}$

$$\frac{PL \cdot CB}{2} + \frac{PK \cdot CA}{2} = \frac{AH \cdot CB}{2} \quad (CA = CB)$$

$$PL + PK = AH.$$

$\boxed{M2}$ • Par Thalès : $\dfrac{PL}{AH} = \dfrac{BP}{PA}$? B.

• $\triangle PBL \sim \triangle PAK$ car rectangles + $\underbrace{\measuredangle A = \measuredangle B}_{\text{car } CA = CB.}$

$\Longrightarrow$ dc semblables.

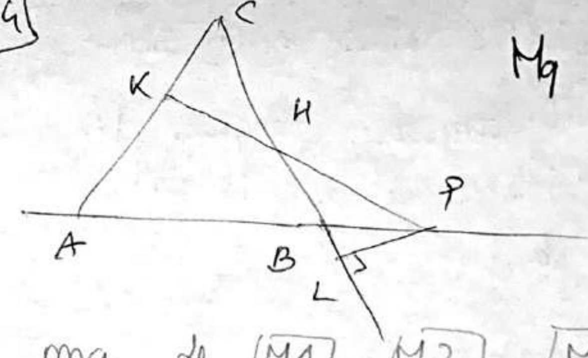
$\Rightarrow \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{PL}{PK}$

$\dfrac{PL}{AH} = \dfrac{PL}{PK}$

et $AH = \dfrac{PA \cdot PL}{BP}$.

$AH = \dfrac{PK \cdot PL}{PL} = PK.$

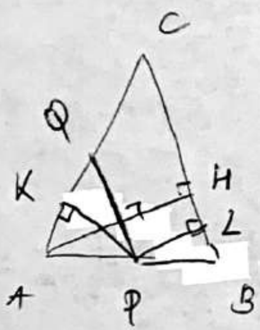
cas 4)



Mq $AH = PK - PL$

mq α $\boxed{M1}$ $\boxed{M2}$ $\boxed{M3}$.

$\boxed{M3}$



$(PQ) \parallel (BC)$

$PL = MH$ (justif)

+ $PK = AM$ (à justif)

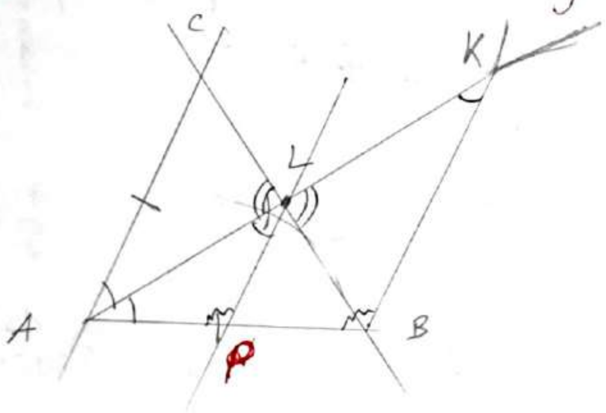
$PL + PK = AM + MH = AH$

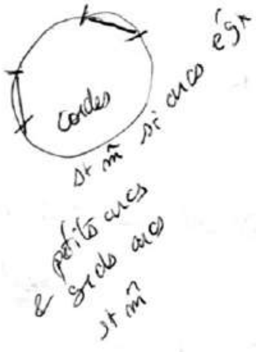
ccl)

$$AH = \begin{cases} PK + PL & \text{si } P \in [AB] \\ PK - PL & \text{si } P \notin [BA) \iff B \in [AP] \\ PL - PK & \text{si } P \notin [AB) \iff A \in [BP] \end{cases}$$

Ex 2 (Bissectrices & longueurs)

Tracer droites //.





a) Mq $AB : AC = LB : LC$.

soit $K \in AL$, $(BK) \parallel (AC)$

$\measuredangle CAK = \measuredangle AKB$ $(*)$

$\measuredangle BAK =$

$\Rightarrow BA = BK$

De plus $\measuredangle BLK = \measuredangle CLA$ (opposé)

$+ (*) \Rightarrow \Delta KLB \sim \Delta ALC$

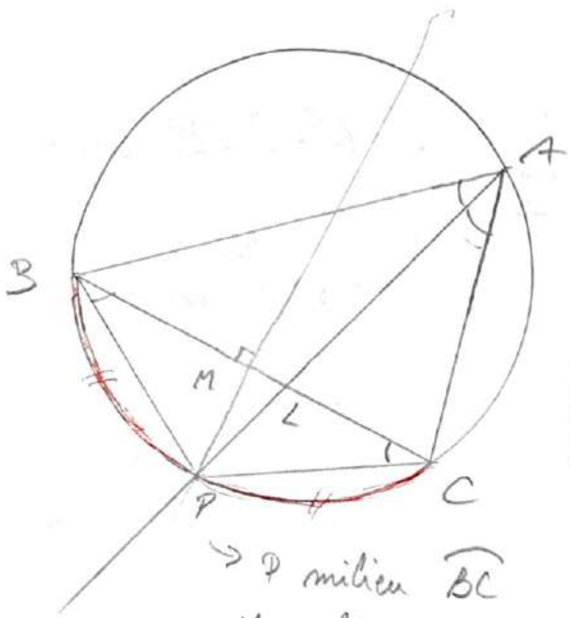
$$\frac{LB}{LC} = \frac{BK}{CA} = AB$$

$\Rightarrow BL : LC = BK : AC$

$LB : LC = AB : AC$

Rq de façon similaire, on pt dmq m̂ chose ~~si~~ $(LP) \parallel (A)$

b) Mq Bissectrice AL coupe cercle circonscrit en un point P q est sr la médiatrice de $[BC]$.



do cercle circonscrit

bissectrice $\cap$ médiatrice

Idée est P $\frac{1}{2}$ de $\overset{\frown}{BC}$

$\in AL$ et $\in$ médiatrice de $[BC]$

$\measuredangle CAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PC} = \measuredangle CBP$.

bissectrice ||

$\measuredangle PAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BP} = \measuredangle PCB$

$\Rightarrow$ P milieu $\overset{\frown}{BC}$

M milieu $[BC]$

⚠ orientaθ des angles. $\Rightarrow \Delta BPC$ isocèle.

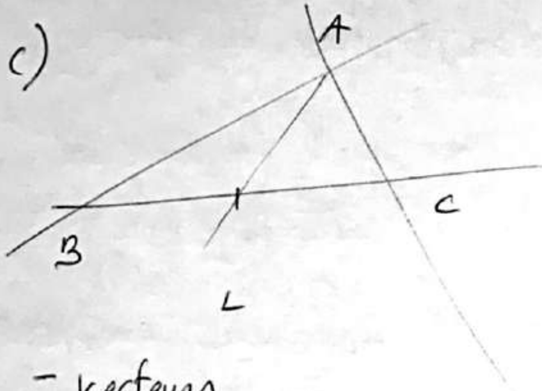
si M milieu de $BC \Rightarrow MP \perp BC$ (car médiane = hauteur = médiatrice = bissectrice)

et MP médiatrice de $[BC] \Rightarrow P$ est le point de l'énoncé.

Par constructiθ $P \in \mathcal{C}_{\Delta ABC}$

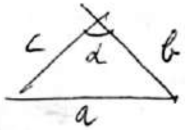
on a pris $P = AL \cap \mathcal{C}_{\Delta ABC}$

1

c) 

à mq

$$\boxed{\begin{aligned} AL^2 &= AB \times AC \\ &- LB \times LC. \end{aligned}}$$

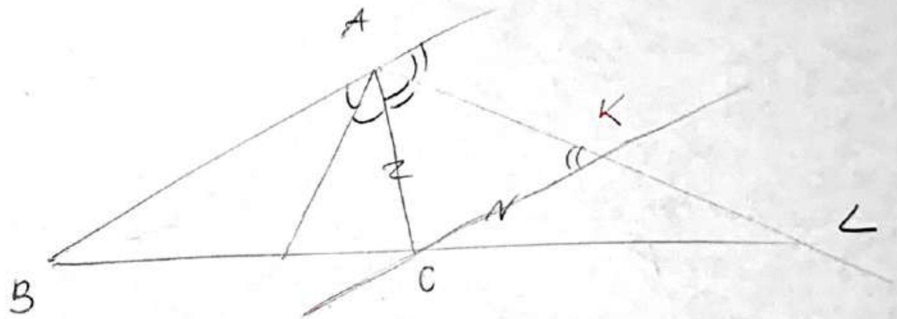
- vecteurs
- Al - Kashi 

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

DM of scalaires
$\vec{c}\cdot\vec{b} = 2bc\cos(\alpha)$.

- rapports ℓ figures a)

d) Mq a) est vrai aussi pr L pied de bissectrice ext. issue de A.



$$\frac{LC}{LB} = \frac{CK}{AB} = \frac{AC}{AB}.$$ car Δ isocèle

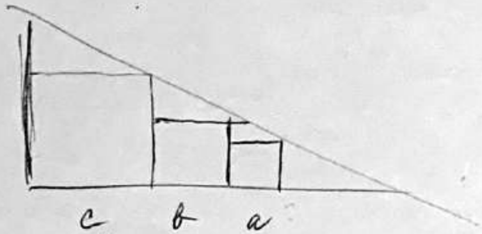
thalès

biss int ⊥ biss ext.

constr° //

in fine

Ex3



à dma

c b a

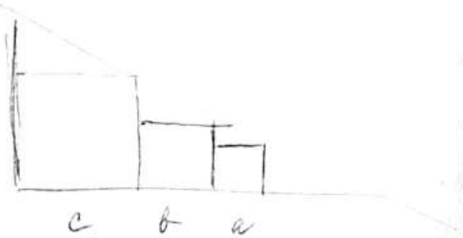
$\overset{\shortparallel}{36}$ $\overset{\shortparallel}{16}$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

homothéties

$$b = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

Ex3



à dma

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$c = 36$ $\quad b \quad$ $a = 16$

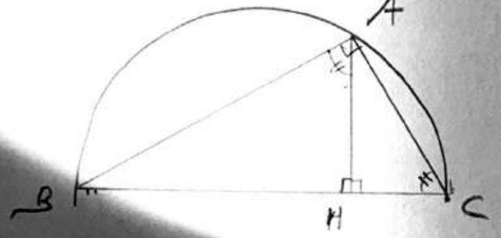
homothéties

$$b = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

$b = \sqrt{a.c}$

Dans un triangle

Ex2



mq $BA^2 = BH.BC$

↳ Aires?

↳ Thalès? Δ semblables?

$$BA^2 = BH.BC \iff \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$$

$\Leftarrow \Delta ABH \sim \Delta CBA$

$$\Leftarrow \begin{cases} \sphericalangle ABH = \sphericalangle ABC & \text{commun} \\ \sphericalangle AHB = \sphericalangle CAB = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

kathète^2 = pie$_1$ sgm^t au pied haut^r $\times$ pie$_2$ sgm^t au pied haut^r

mq $CA^2 = CH.CB$.

comme B et C jouent m̂ rôle

$\Rightarrow$ (cf m̂ $\boxed{M}$ en échangeant B et C)

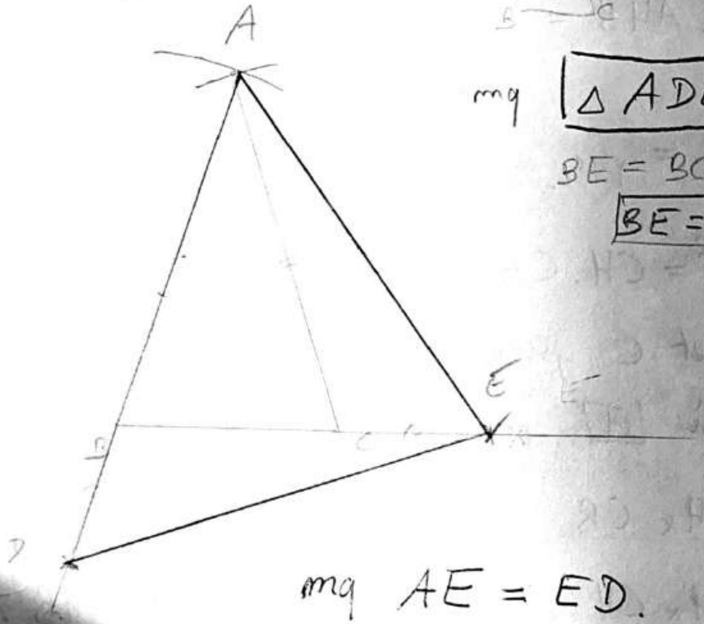
$CA^2 = CH \times CB$

$$AH^2 = BH \times CH \iff \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \iff \Delta AHB \sim \Delta CHA$$

$$\Leftarrow \sphericalangle AHB = \sphericalangle CHA = \frac{\pi}{2}$$

De plus $\underbrace{\sphericalangle ACH = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}}_{\Delta ABC} = \underbrace{\sphericalangle BAH}_{\Delta AHB}$

<u>Ex 10</u> Triangle isocèle



mq $\boxed{\Delta\, ADE \text{ isocèle}}$

$BE = BC + AB - BC$

$\boxed{BE = AB}$

mq $AE = ED$.

$\boxed{M}$ dmq Δ isocèle $\rightarrow$ 2 triangles égaux ?

$\Delta\, DBE \cong \Delta\, ECA$ car $BD = CE$ (d'après énoncé)

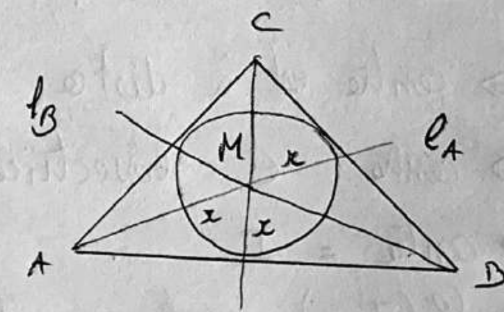
$\underset{®}{BE} = AB \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isocèle } \Delta ABC}}{=} CA$

angles & 2 côtés adjacents idtqs

$\measuredangle\, DBE = \pi - \widehat{ABC} = \pi - \widehat{ACB} = \measuredangle\, ACE$

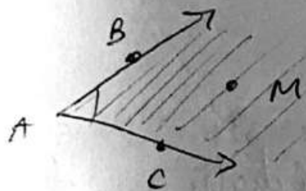
Ex 11 (Pts remarquables de la triangle) a) Mq 3 bissectrices st concourantes.

soit $\triangle ABC$ non dégénéré.



$M = I$
intérieur

Lemme $M \in \sphericalangle([AB), [AC))$



soit l_A la bissectrice int $\sphericalangle A$
l_B $\sphericalangle B$
l_C $\sphericalangle C$

$d(M, (AB)) = d(M, (AC))$ ssi $M \in$ bissectrice de $\sphericalangle BAC$.

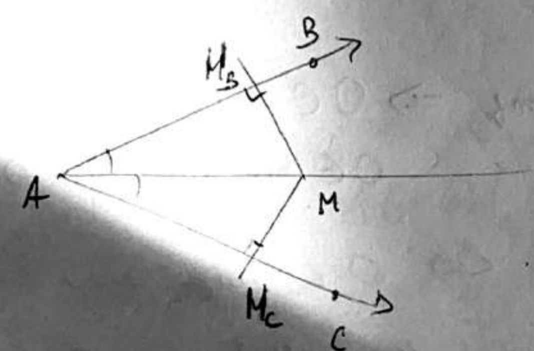
soit $M = l_A \cap l_B \Rightarrow d(M, (AB)) = d(M, AC))$

$d(M, (AB)) = d(M, (BC))$ $= (M \in l_B)$ $(M \in l_A)$

$\Rightarrow d(M, (AC)) = d(M, (BC))$ et comme

$M \in$ int. du $\triangle ABC$

$\Rightarrow M \in \sphericalangle ACB \Rightarrow M \in l_C$.



- $\triangle AMH_B$ & $\triangle AMH_C$ st rectangles 4 m̂ hypothénuses AM..

Ainsi $l_A \cap l_B \cap l_C = \{M\}$ et $\mathcal{C}(M, r)$ tangent aux côtés

Ainsi $\triangle AMH_B = \triangle AMH_C$

$\Updownarrow$

$\sphericalangle H_BM = \sphericalangle MAH_C$
(2 angles + 1 longueur les m̂s)

$MH_B = MH_C$
(par pythagore $AH_C = AH_B$)

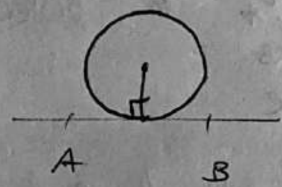
7

si $\mathcal{C}$ un cercle à l'int de ABC q est tangent ax côtés $\Rightarrow$ centre est à dist° égale des côtés $\Rightarrow$ centre $\in$ bissectrices

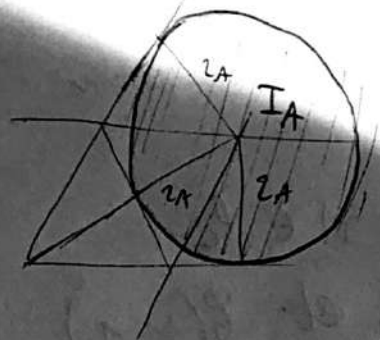
$\Rightarrow$ centre $= I$

$\Rightarrow \mathcal{C}(I, r)$ cercle en q°

car $r = d(I,(AB))$



b)

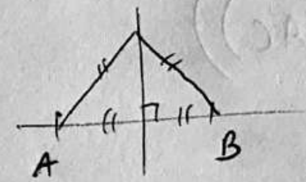


$\boxed{\text{cercle exinscrit}}$

m̂ démo a) HS 4 $I_A = \ell_B^{ext} \cap \ell_C^{ext}$

c) 3 médiatrices s st concourantes.

Lemme $MA = MB \iff M \in$ médiatrice de $[AB]$



soit m_a la médiatrice de $[BC]$

m_b ———— $[AC]$

m_c ———— $[AB]$

soit $O = m_a \cap m_b \Rightarrow O \in m_a \iff OB = OC$

$O \in m_b \iff OA = OC$

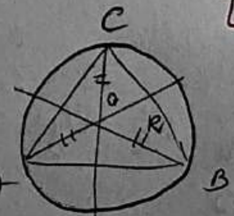
$\Rightarrow OA = OB \iff O \in m_c$.

Ainsi m_a, m_b, m_c se coupent en O (uniq) point à distance égale de A, B et C.

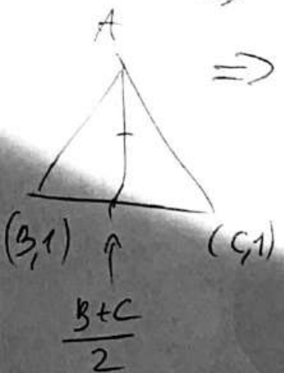
$R = OA = OB = OC$

Ainsi $\mathcal{C}(O, R) \supset A, B, C$

↑ cercle circonscrit



d) Mq médianes st concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle centre de gravité ou barycentre le point d'intersect°.



si G barycentre de $(A,1), (B,1), (C,1)$

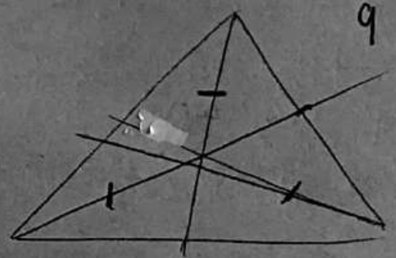
$\Rightarrow$ G Barycentre de $(A,1)$ et $\left(\frac{B+C}{2}, 2\right)$

$\Rightarrow$ G médiane issue de A

et en plus $AG : GH_A = 2 : 1$.

de m̂ pr 2 autres médianes.

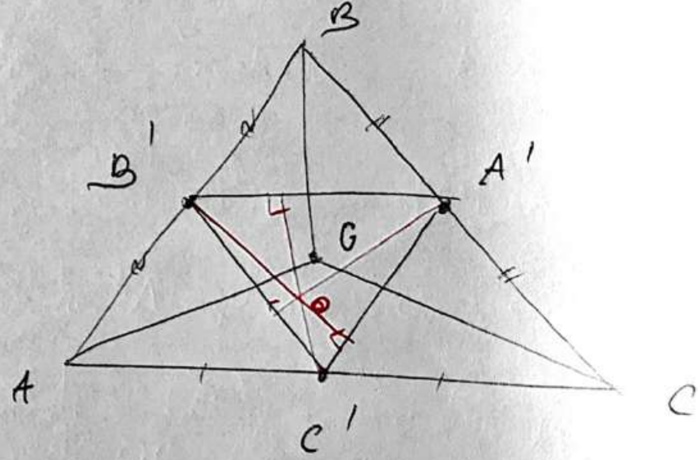
$\Rightarrow$ les 3 médianes se rencontrent q̄ les coupent en rapport 2 : 1 du sommet.



e) Mq 3 hauteurs st concourantes. On appelle orthocentre le point d'intersect°.

f) Mq centre cercle circonscrit, l'orthocentre & le centre de gravité st alignés.

droite passt 3 pts : droite d'Euler.



les médiatrices de ABC st les hauteurs $A'B'C'$

car $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \perp m_A$ passant par A'

$\Rightarrow$ comme $h_{G,-2}(A'B'C') = ABC \Rightarrow$ les hauteurs de $A'B'C'$ s'envoient s les hauteurs de $ABC \Rightarrow$ e) + f)

bissectrices distances égales côtés

médiane sommet

barycentre 2:1, médianes

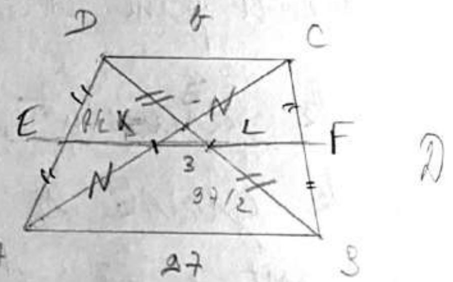
orthocentre

droite Euler

Ex 16
FF de Héron ? $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Quadrilatères

$p=\frac{a+b+c}{2}$



$A = (B+h)\times 2h$

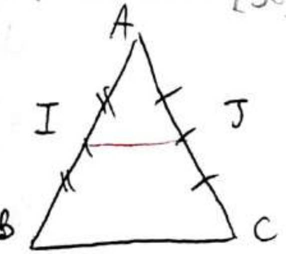
$\frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}DB$

→ fournt points alignés sur droite

$\mathcal{D} = (KL)$: K $\frac{1}{2}$ de $[AC]$
L $[BD]$.

Mq $\underbrace{\mathcal{D} \,//\, (AB) \,//\, (DC)}_{\text{trapèze ?}}$ et $\mathcal{D} \cap (AD) = E$ milieu de $[AD]$
$\mathcal{D} \cap (BC) = F$ —— $[BC]$

→ trouver droite milieu.



(TH) des milieux
Si un segment joint les milieux de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3° côté et sa longueur est égale à la $\frac{1}{2}$ de celle 3° côté.

c) Trouver longueur KL.

soit E, K, L, F les milieux de l'indication

| EK // DC (Thalès / réciproq / TH des milieux) ΔACD
| KF // AB —— ΔACB.

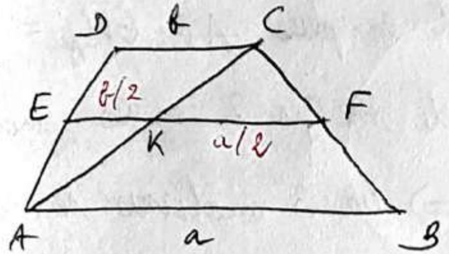
$\Longrightarrow EK \,//\, KF$ $\underbrace{(//AB//DC)}_{\text{trapèze}}$ $\Rightarrow$ E, K, F alignés $(EK)=(KF)$

$(FL) \,//\, (DC)$ ds ΔDBC $\Rightarrow (FL) \,//\, (EKF)$

$\Longrightarrow (FL) = (EKF)$.

Ainsi E, K, L, F alignés sur droite $\mathcal{D} \,//\, AB \,//\, CD$

Indication



EK = ?
KF = ?

D'après Thalès / TH des milieux :

$EK = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}b$ ds ΔDAC

$KF\ \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ ΔACB

$EF = \frac{b}{2} + 3 + LF$

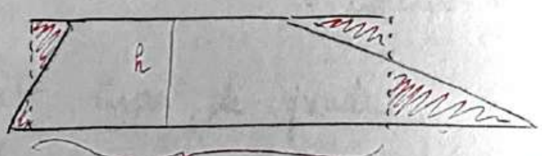
Ainsi $EK = \frac{1}{2} b$, $FL = \frac{1}{2} b$ (dans $\triangle BCD$).

$KL = KF - FL = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \boxed{\frac{a-b}{2}}$

$EF = \frac{a+b}{2}$

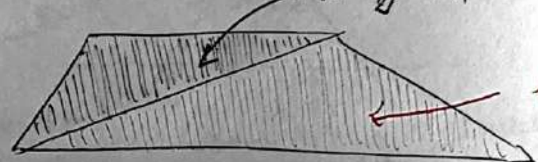
$\Rightarrow b = 97 - 2 \times 3 = \underline{91}$.

$EF = \frac{91+97}{2} = 94$.



$\frac{a+b}{2}$ $\quad A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$

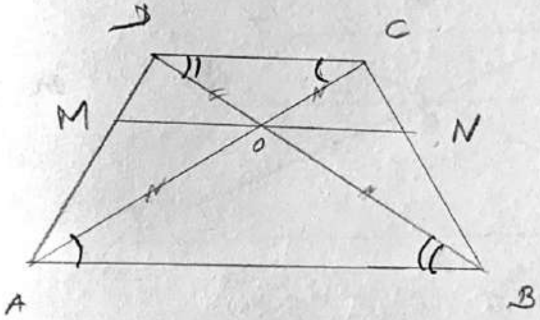
$h \frac{b}{2} = A_1$



$h \frac{a}{2} = A_2$

$A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Ex 17



1) Mq O milieu [MN].

on sait que $(MN) \parallel (AB) \parallel (DC)$

$MO = DC \times \frac{AO}{AC}$ (Thalès ds $\triangle ACD$)

$ON = DC \times \frac{BO}{BD}$

Ainsi $\boxed{MO = ON}$ ssi $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{BD}{BO}$

$\Leftrightarrow \frac{AO+OC}{AO} = \frac{BO+OD}{BO} \Leftrightarrow 1 + \frac{OC}{AO} = 1 + \frac{OD}{BO}$

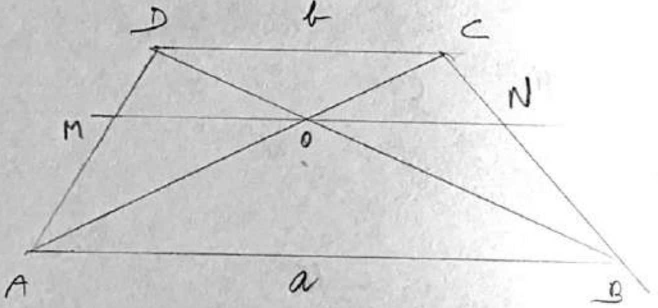
D'après Thalès, on a $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (angles id(q))

Rq $(\overline{AB} : \overline{BC}) = (\overline{A'B'} : \overline{B'C'}) \Leftrightarrow (\overline{AB} : \overline{AC}) = (\overline{A'B'} : \overline{A'C'})$

A B C A' B' C' $\quad \Leftrightarrow (\overline{AC} : \overline{BC}) = (\overline{A'C'} : \overline{B'C'})$

b) Indice : Déterminer longueur $OM = ON' = \frac{1}{2} MN$

c) Somme max ? $d(O,(AD)) + d(O,(CB))$



en f a, b

$$OM = b \cdot \frac{AO}{AC} \quad \text{et comme} \quad \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$$

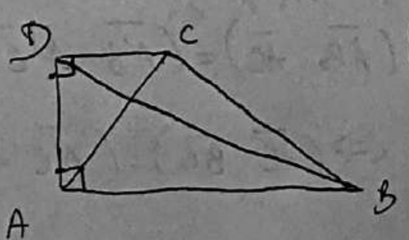
car Thalès ou $\Delta OAB \sim \Delta OCD$.

$$OM = b \frac{1}{\frac{AC}{AO}} = b \cdot \frac{1}{\frac{AO+OC}{AO}} = b \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\rightarrow MN = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$$ ← produit des bases ← segment des milieux

q°: $d_{max}(O,(AD))$?

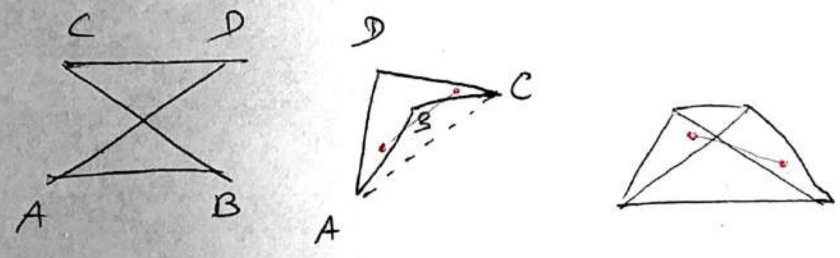
$$d(O,(AD)) \leq OM = \frac{ab}{a+b}$$ ssi $OM \perp (AD)$ $\parallel$ AB $\parallel$ CD



trapèze rectangle.

Ex 19 (Parallélogrammes)

a) quadrilatère ABCD est convexe

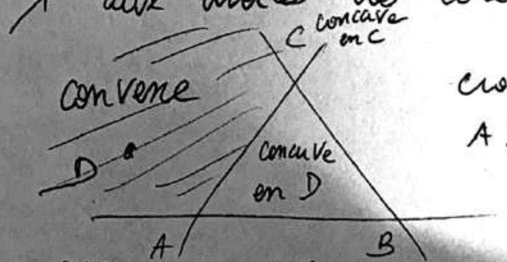


croisé

A non convexe ("concave en B")

convexe

décrit type de quadril. en f posit° de D p/r aux droites des côtés de ABC.



croisé
$AD \cap BC \neq \emptyset$

concave en A

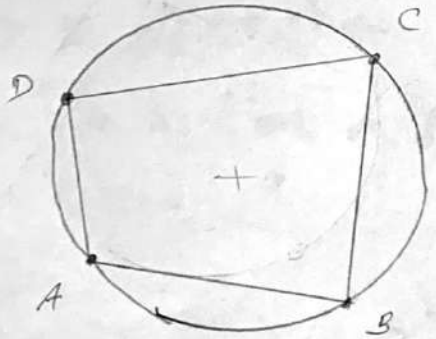
croisé
$CD \cap AB \neq \emptyset$

concave en B

si D dans /// : $DB \cap CA = \emptyset$

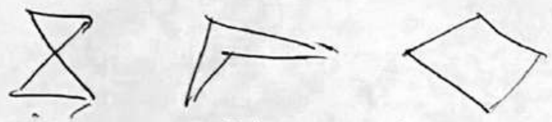
Ex 20

soit ABCD un quadri non croisé,



a) Mq si ABCD est inscrit ds cercle => ABCD est convexe. (et ses diag. se coupent en un point)

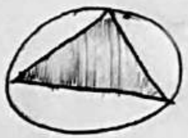
$\exists$ 3 types quad.



croisés — concave — convexe <=> diago se croisent.

croisés : exclus d'après l'énoncé

concave : ne pt pas ê inscrit car le cercle circonscrit d'un triangle n'a pas de point à l'intérieur du triangle.

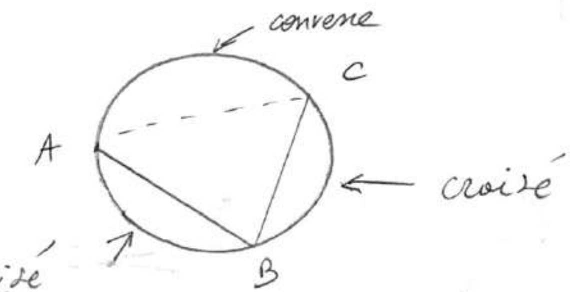


dc le 4° point ne pt pas ê à l'int du triangle & sur le cercle en m̂ tps.

(34)

Ceci termine la q° car si ABCD non croisé, non concave => convexe <=> diag se coupent.

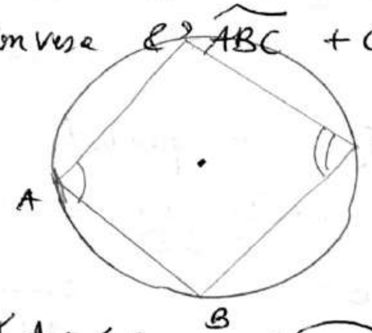
Observat°



b) Mq ASSE.

(i) ABCD inscrit ds cercle

(ii) ABCD convexe & $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ (resp)



Mq (i) => (ii)

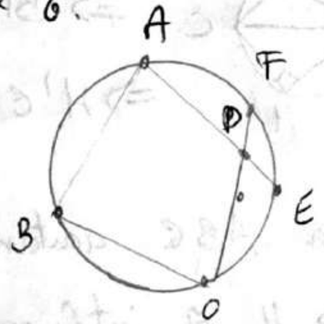
$$\left.\begin{aligned} \measuredangle A &= \frac{1}{2}\,\widehat{BCD} \\ \measuredangle C &= \frac{1}{2}\,\widehat{BAD} \end{aligned}\right\} \quad \measuredangle A + \measuredangle C = \frac{1}{2}\left(\widehat{BCD} + \widehat{BAB}\right) = \frac{1}{2}\,2\pi = \pi$$

Mq (ii) => (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

si $D \notin \mathscr{C}(A,B,C) \leftarrow$ cercle q passe par A, B, C.

<u>1° cas</u> : D à l'int. de $\mathscr{C}$.



$\measuredangle B + \measuredangle D =$

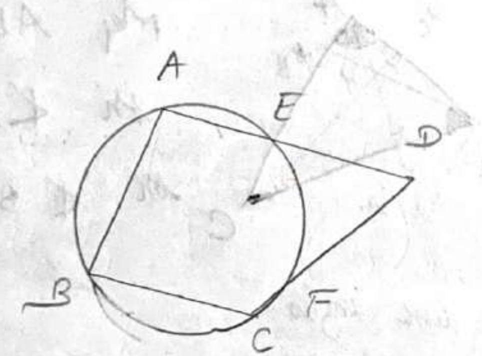
$= \frac{1}{2} \widehat{CEA}$

$+ \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{EF})$.

$= \frac{1}{2} (\underbrace{\widehat{CEA} + \widehat{ABC}}_{2\pi}) + \frac{1}{2} \widehat{EF} > \pi$

rentre do cercle

augmentat° q



<u>2° cas</u>

$\measuredangle B + \measuredangle D$

$= \frac{1}{2} (\widehat{CEA}) + \frac{1}{2} (\widehat{ABC} - \widehat{EF})$

2π

$= \pi - \frac{1}{2} \widehat{EF} < \pi$

ccl $D \in \mathscr{C}$

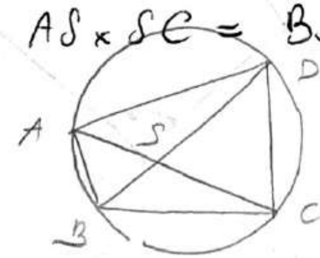
$\Leftrightarrow \measuredangle B + \measuredangle D = \pi$

$(\Leftrightarrow \measuredangle \quad)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et

$AS \times SC = BS \times SD$



On p le refaire mais aussi voir cas de la puissance d'un point par rapport cercle.

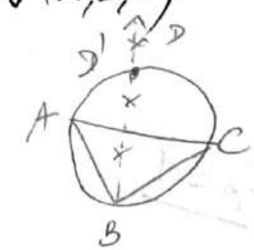
$\Rightarrow AS.SC$ ne dépd pas du choix de la corde $[AC] \ni S$.

non i) $\Rightarrow$ non (iii) si $D \notin \mathscr{C}(A,B,C)$

soit $D' \in [SD) \cap \mathscr{C}$

$\Rightarrow AS.SC = BS.SD'$

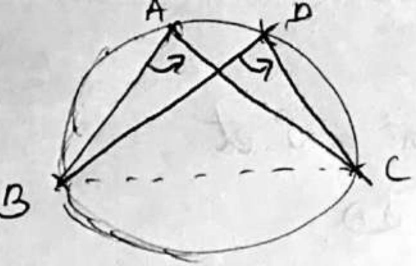
$\Rightarrow SD \neq SD' = \dfrac{AS.SC}{BS}$



Ainsi (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

Rq

croisé



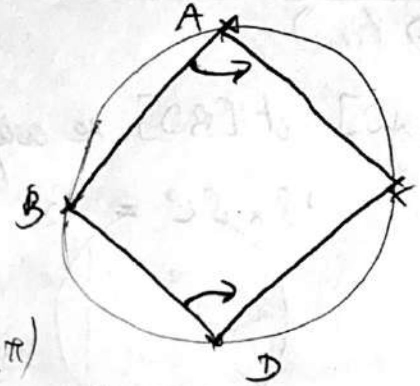
⇓

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (mod π)

↑

orienté

convexe



$\widehat{BAC} - \widehat{BDC} = \pm\pi$

orienté

$\widehat{BAC} = \pm\pi + \widehat{BDC}$

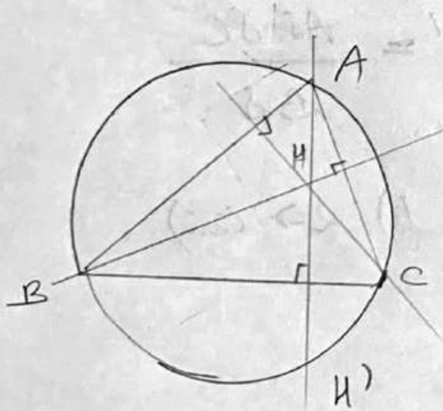
$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (mod π).

→ si 4 pts cycliqs.

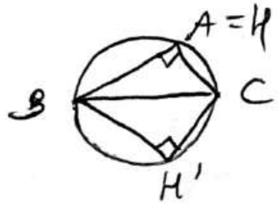
on prd 2 pts → m̂ côté : égx

→ somme = π, égx (mod π)

Ex 21



1er cas : si ABC rectangle en A $\Rightarrow H = A$, BC diamètre.



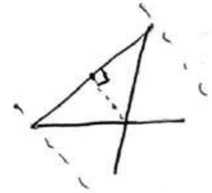
$\Rightarrow \widehat{BH'C} = \widehat{BHC} = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow H' \in \mathcal{C}$ (diam $[BC]$).

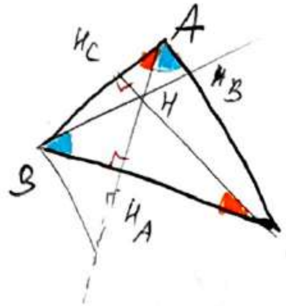
2e cas : si ABC acutangle ($\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C < \frac{\pi}{2}$)

$\Leftrightarrow$ H $\in$ intérieur $\triangle ABC$

($\Leftrightarrow$ les 3 hauteurs st à l'int)



chasse aux Angles



Mq ABH'C st cocycliqs

ssi $\measuredangle ABH' + \measuredangle ACH' = \pi$

ssi $\measuredangle BAC + \measuredangle BH'C = \pi$

$\measuredangle BH'C = \measuredangle BHC$

chasse aux angles

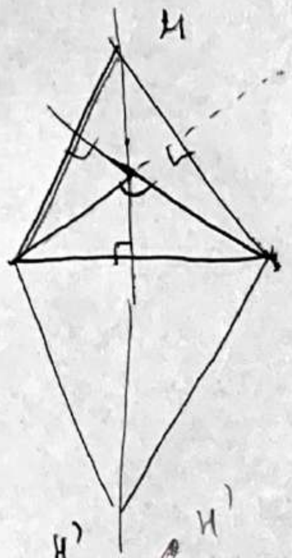
$\underbrace{\widehat{BAH}}_{\widehat{HCH_A}} + \underbrace{\widehat{HAC}}_{\widehat{HBH_A}} + \widehat{BHH_B} + \widehat{H_AH_C}$ $\pi/2$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\pi | + 2$

(36) Voir $\triangle HH_CA \sim \triangle HH_AC$

3° cas $\sphericalangle A > \frac{\pi}{2}$



identiq au cas 2)
& H et A échangés.

$H' \in \mathcal{C}(B,C,A)$

ssi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BH'C$

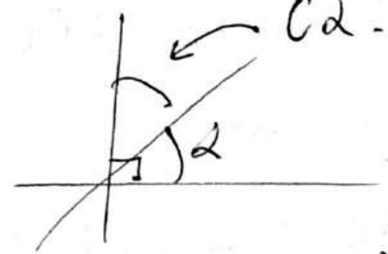
$\sphericalangle BHC$ // ← sym

complémentaire à $\sphericalangle ACH$.

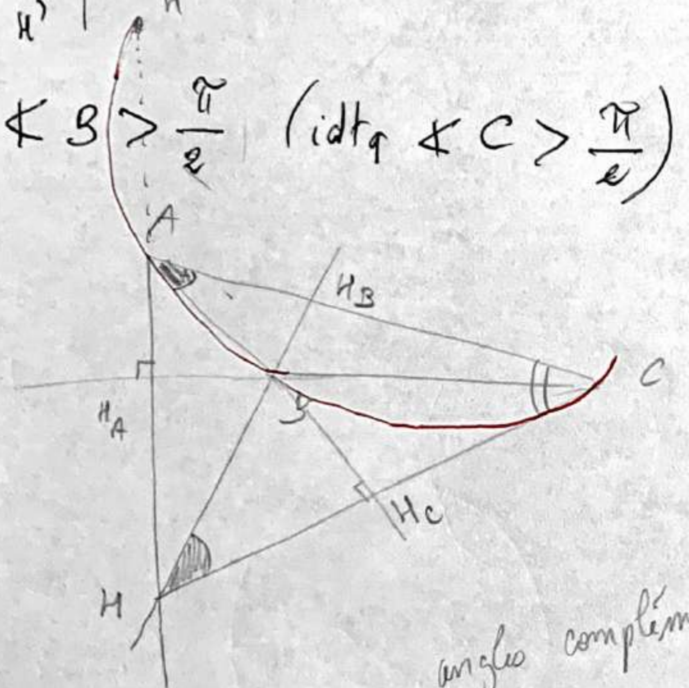
dc "="

somme $\frac{\pi}{2}$

complément $C\alpha$.

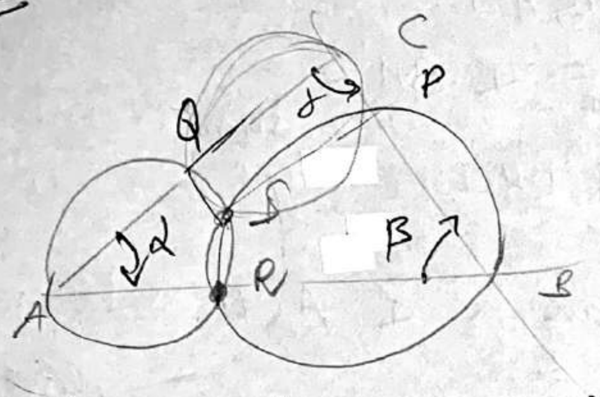


4° cas $\sphericalangle B > \frac{\pi}{2}$ (idtq $\sphericalangle C > \frac{\pi}{2}$)



5° cas $\sphericalangle B = \frac{\pi}{2}$ (resp C) $\Rightarrow$ $H = B = H' \in \mathcal{C}(A,B,C)$

Ex 22



soit $\mathscr{C}(A,R,Q) \cap \mathscr{C}(B,R,P) = \{R,S\}$
(non tangent)

angles orientés

$$\measuredangle QAR = \measuredangle QSR \quad (\pi)$$
$$+ \quad \measuredangle RBP = \measuredangle RSP \quad (\pi)$$

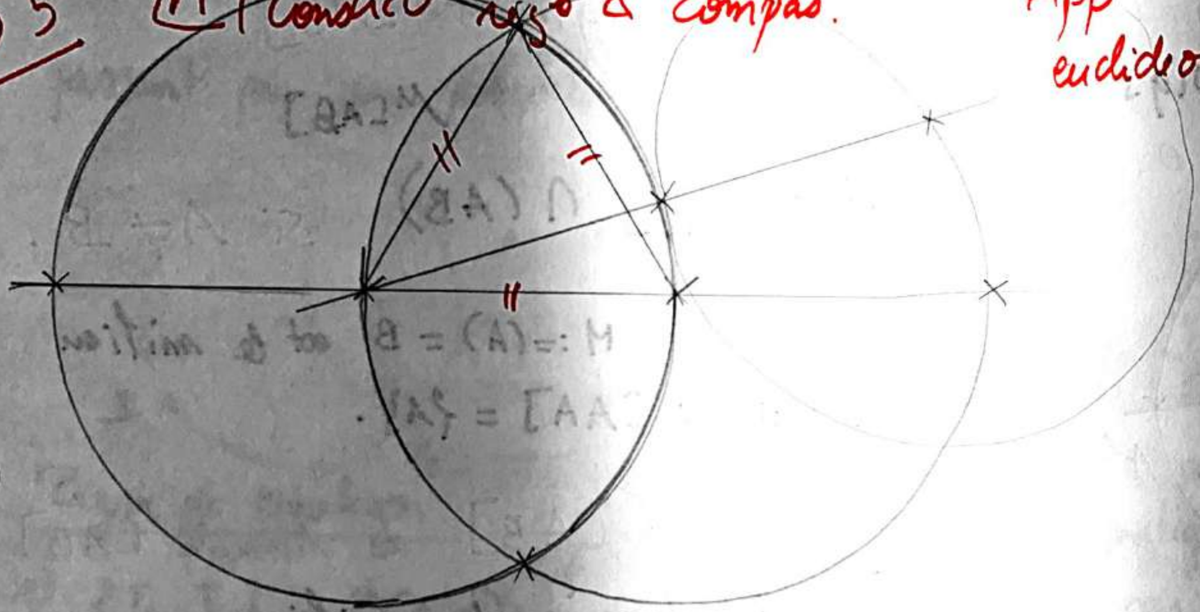
$$\measuredangle QCP = \measuredangle QSP \quad (\pi)$$

$\Rightarrow$ Q, C, S, P cocycliqs

cas où 2 cercles st tangents.

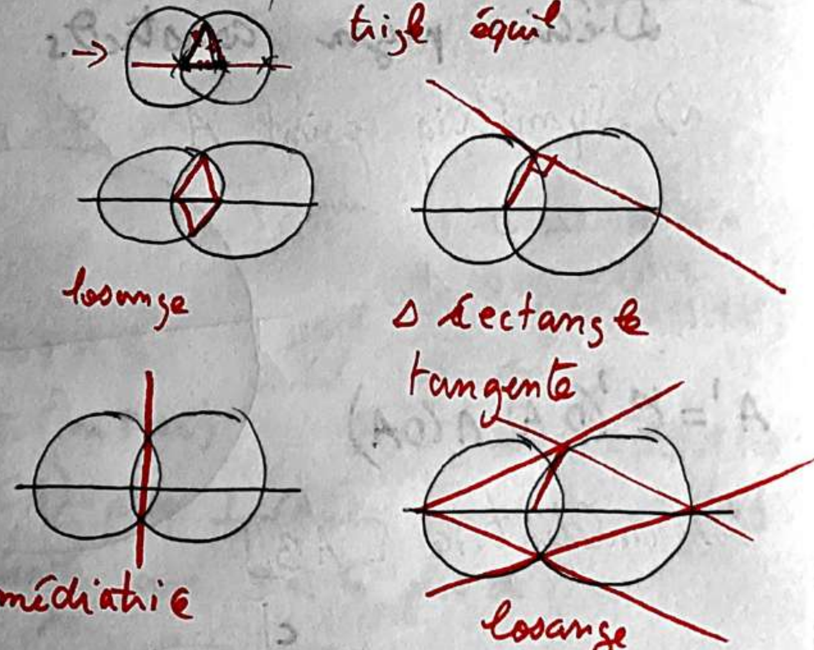
TD 5

$\boxed{M}$ Constrct° règle & compas. ' App euclidien



-> "analyse"
-> "pgm de constrct°"
-> "justif pgm constrct°".

-> bcp points const



triglé équil

losange

△ rectangle tangente

médiatrice

losange

Ex 1 (Construct° classiqs).

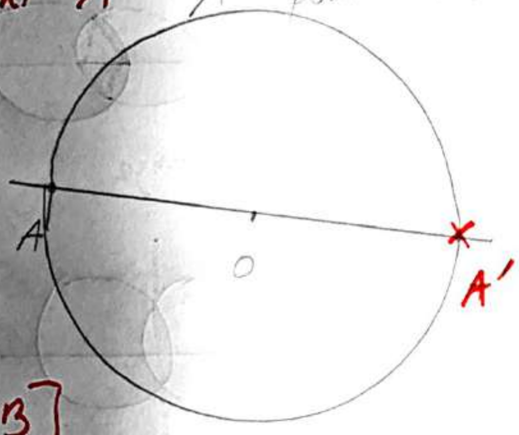
Décrire prgm construct°s classiqs :

a) Symétriq point A ~~/~~ point O

→ cercle Ω O.

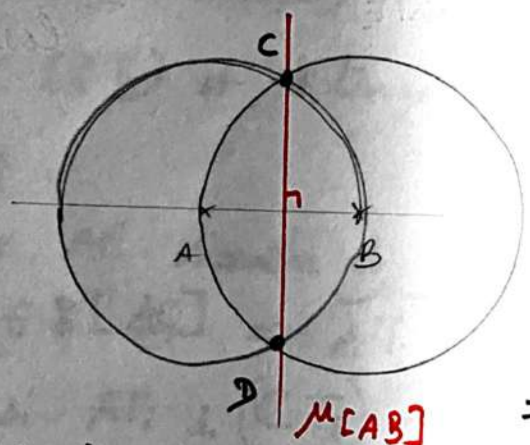
→ cercle passe p A

→



$A' = \mathscr{C}'(O, A) \cap (OA)$

b) médiatrice [AB]



2 cercles m̂ rayons

→ p construct°

→ $AB = AC$

→ $BA = BC$

⇒ $CA = CB = AB$

dc C est pt médiat

D est pt médiat

$C, D := \mathscr{C}(A,B) \cap \mathscr{C}(B,A)$

(CD) est média [AB]

c) milieu segment [AB]

4 b), construire $\mu_{[AB]}$

$M := \mu_{[AB]} \cap (AB)$ Si $A \neq B$.

Si $A = B$, $M := (A) = B$ est le milieu de $[AB] = [AA] = \{A\}$.

(1)

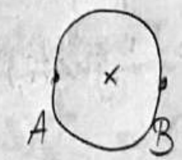
d) cercle $\mathscr{C}[AB]$ de diamètre [AB]

↳ besoin du milieu

soit M milieu de [AB]

$\mathscr{C}(M, A) = \mathscr{C}[AB]$

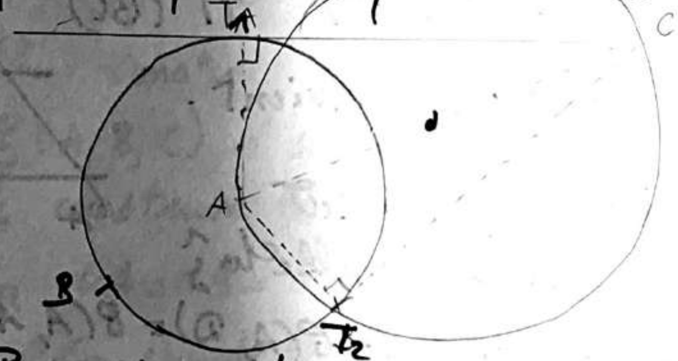
est le cercle de diamètre [AB]



ne pas confondre $\mathscr{C}(A, B)$ et $\mathscr{C}[AB]$

autre point ∈ $\mathscr{C}$ — diamètre

e) les tangentes au cercle $\mathcal{C}(A,B)$ passant par un point ext C.



Progm de construct° :

1) $\{T_1, T_2\} = \mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}[AC]$ ← d'après d)

(CT_1) (CT_2) st 2 tangentes recherchées :

Justif :

comme AC diamètre de $\mathcal{C}[AC]$ &

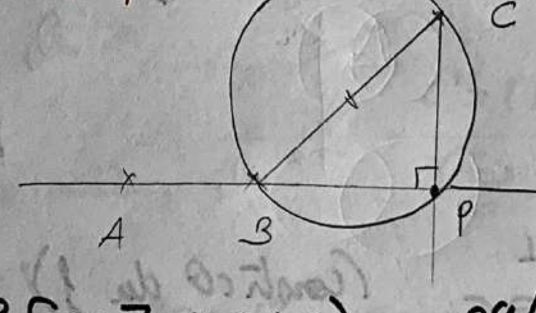
∘ $T_i \in \mathcal{C}[AC] \Rightarrow \widehat{AT_iC} = \frac{\pi}{2}$, $i=1,2$

∘ Ainsi $AT_i \perp (CT_i) \Rightarrow (CT_i)$ est tangente $\mathcal{C}(A,T_i) = \mathcal{C}(A,B)$

car $T_i \in \mathcal{C}(A,B)$.

f) La perpendiculaire à (AB) passᵗ p pᵗ C.

f si $C \notin (AB)$



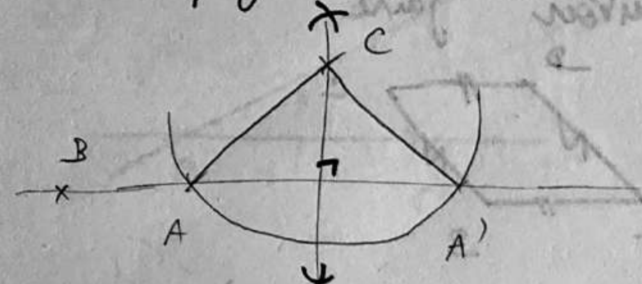
M1| $\{P, A\} := \mathcal{C}[CA] \cap (AB)$

(CP) convient. (car $P \neq C$)

Rq/ Si $(CA) \perp (AB)$ ds ce cas $P = A$ et $\mathcal{C}[CA] \cap (AB) = \{A\}$.

pb pratiq si (CA) presq $\perp (AB)$ ds ce cas préférable user B à la place de A.

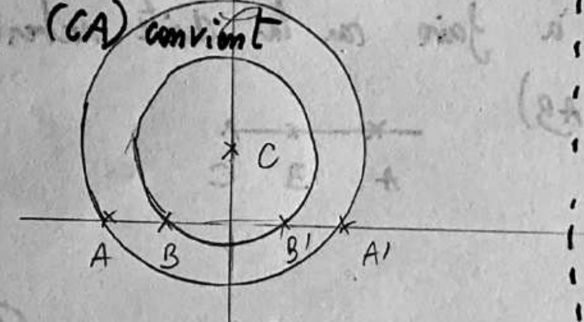
M2|



1) $\{A', A\} := \mathcal{C}(CA) \cap (AB)$

2) si $A \neq A'$ $\mu_{[AA']}$ convient

sinon (CA) convient



$\mu_{[AA']} = \mu_{[BB']}$

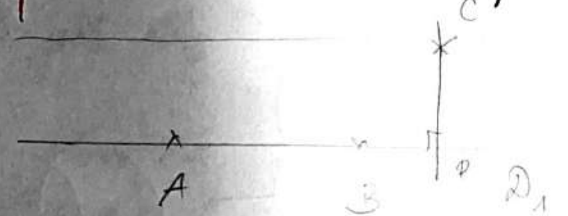
f tjrs

Notat° :

$(AB)^{\perp}_{\ni C} = (AB)^{\perp C}$

est la droite $\perp$ à (AB) passant par C.

g) La parallèle à (AB) passant par C.



Notation

$(AB)^{\parallel}_{\ni C}$

$\parallel$

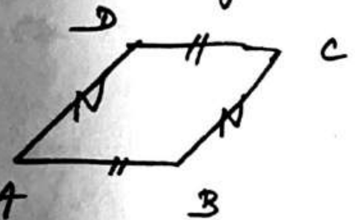
$(AB)^{\parallel C}$

1) $\mathcal{D}_1 := (AB)^{\perp}_{\ni C}$ (constructio du f).

2) $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1{}^{\perp}_{\ni C}$ convient

Rq : Qd on va pouvoir construire $\mathcal{C}(A, BC)$

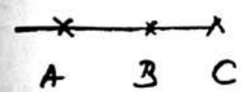
on va pouvoir faire



$D = \mathcal{C}(A, BC) \cap \mathcal{C}(C, AB) \Rightarrow (DC)$ convient.

↳ si $C \notin (AB)$

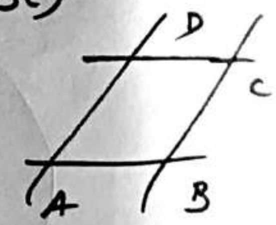
sinon rien à faire car la droite recherchée est (AB)



h) Le cercle $\mathcal{C}(A, BC)$ centre A, rayon BC.

1) $D = (AB)^{\parallel C} \cap (BC)^{\parallel A}$

$\mathcal{C}(A, D)$ convient.



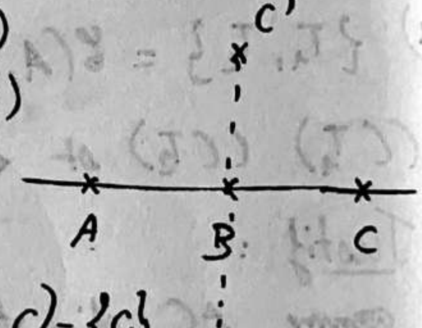
justif : par constructio $ABCD$ parallélogramme

$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \mathcal{C}(A, D) = \mathcal{C}(A, AD)$
$= \mathcal{C}(A, BC)$.

→ si $C \in (AB)$

si $C = B \Rightarrow \mathcal{C}(A, A)$

si $C \neq B$

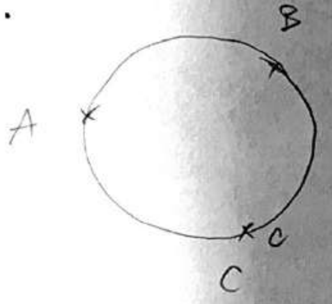


1) $(AB)^{\perp B} \cap \mathcal{C}(B, C) = \{C\}$

ainsi $BC = BC'$ et $C' \notin (AB)$

on appliq constructio précédente à C' à la place de C.

(i) cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$ q' passant p 3 pts alig A, B, C.



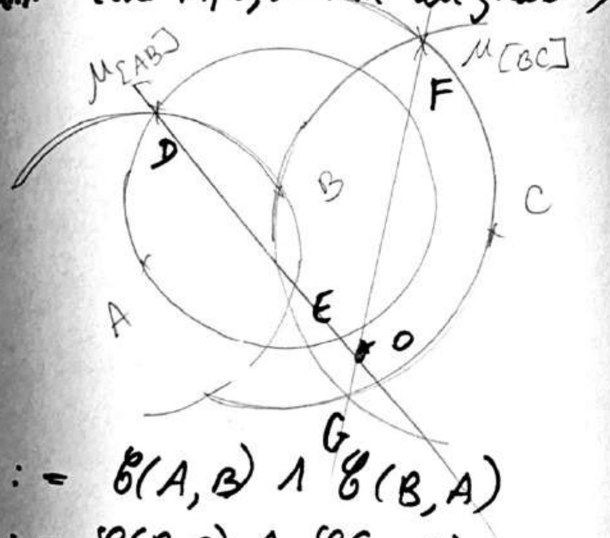
Pr construire $\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit de construire le centre O tq $OA = OB = OC$

- $\mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B) = \mathcal{C}(O, C) = \mathcal{C}(A, B, C)$

1) $\mu_{[AB]} \cap \mu_{[BC]} =: \{O\}$

(un point car A, B, C non alignés)

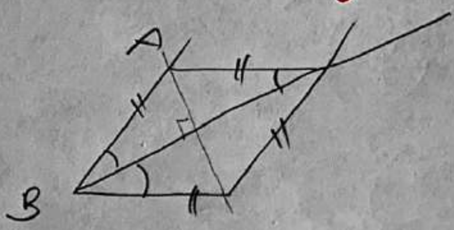
c.q.f.d



-

1) $\{D, E\} := \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(B, A)$
2) $\{F, G\} := \mathcal{C}(B, C) \cap \mathcal{C}(C, B)$
3) $O = (DE) \cap (FG)$
4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

j) bissectrice angle $\widehat{BAC}$ → (losange)



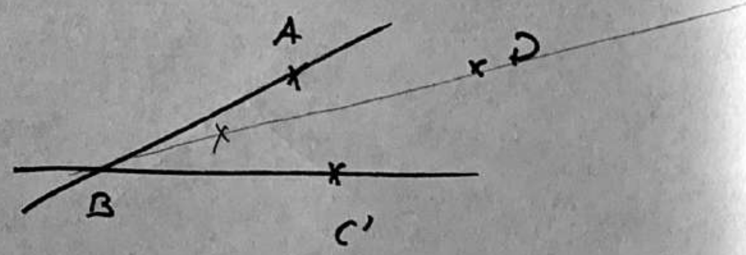
$C' = (BC) \cap \mathcal{C}(B, A)$

($\Leftrightarrow$ $BC' = BA$).

M I) $\mu_{[AC']}$ convient

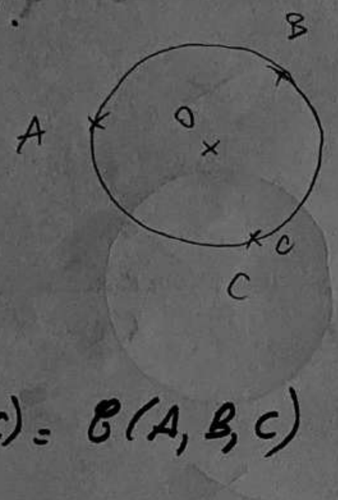
M II) $D = \mathcal{C}(C', B) \cap \mathcal{C}(A, B) = D$

(BD) convient



(i) cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$ qui passant par 3 pts alig A, B, C.

Pr construire $\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit de construire le centre O tq $OA = OB = OC$

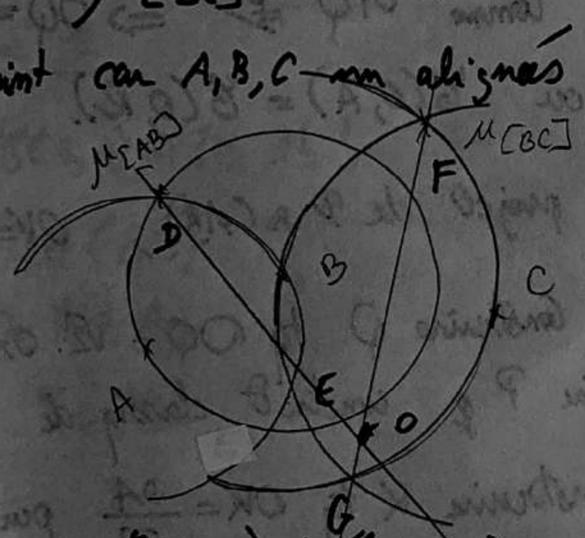


- $\mathcal{C}(O,A) = \mathcal{C}(O,B) = \mathcal{C}(O,C) = \mathcal{C}(A,B,C)$

1) $\mu_{[AB]} \cap \mu_{[BC]} =: \{O\}$

(un point car A, B, C non alignés)

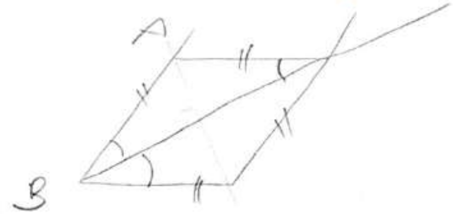
c.q.f.d



-

1) $\{D,E\} := \mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(B,A)$
2) $\{F,G\} := \mathcal{C}(B,C) \cap \mathcal{C}(C,B)$
3) $O = (DE) \cap (FG)$
4) $\mathcal{C}(O,A)$ convient

j) bissectrice angle $\widehat{BAC}$ → (losange)



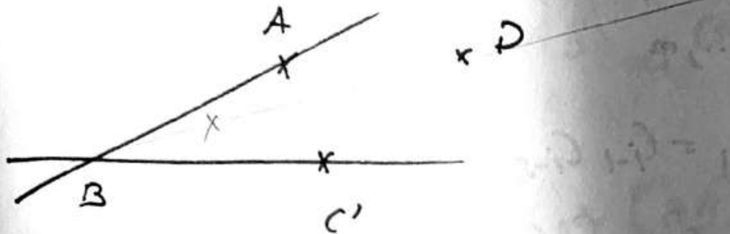
$C' = (BC) \cap \mathcal{C}(B,A)$

$(\Rightarrow BC' = BA)$.

M I) $\mu_{[AC']}$ convient

M II) $D = \mathcal{C}(C',B) \cap \mathcal{C}(A,B) = D$

(BD) convient



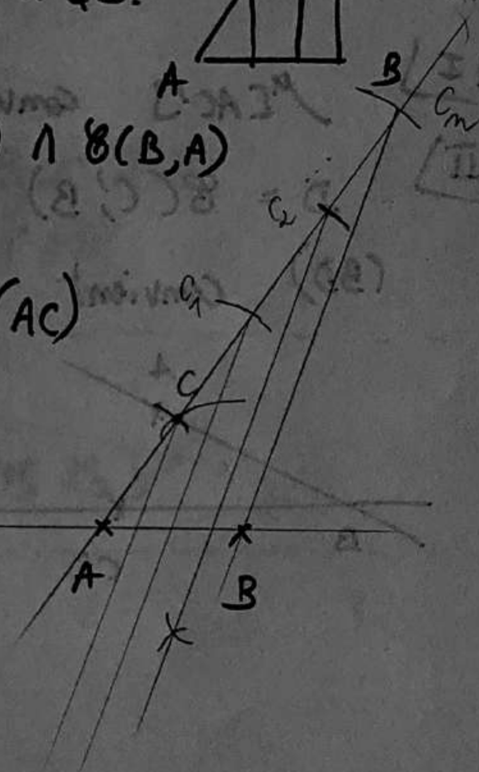
k) Le partage d'un segment [AB] en n segments de m long^e. (Thalès)

si $\exists$ C non aligné à A & B. on pt l'aser, sinon $\{C,*\} = \mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(B,A)$

1) $C_1 = C$, $C_0 = A$
2) $C_i = \mathcal{C}^*(C_{i-1}, C_{i-2}) \cap (AC)$
   $i = 2, \dots, n$

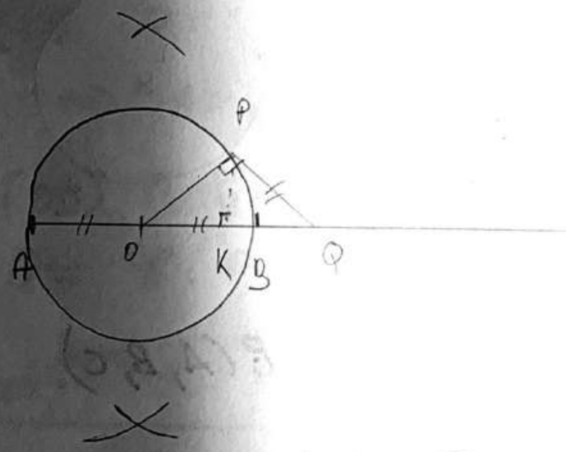
(ainsi $C_i C_{i-1} = C_{i-1} C_{i-2}$ dc $C_1, \dots, C_{n-1}$ coupe $[AC_n]$ les n-pies égales)

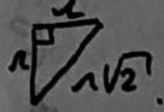
3) $\forall\, i = 1, \dots, n-1$
   $\mathcal{D}_i = (BC_n)^{/\!/ C_i}$



(Rq) → si milieu (mi diatrice)
→ si ... (milieu du milieu)

Ex 2 A, B donnés, $\mathcal{C}(O,[AB])$. construire $P \in \mathcal{C}$ et $Q \in [AB)$ tq (PQ) tangent à $\mathcal{C}$ & $2PQ = AB$.



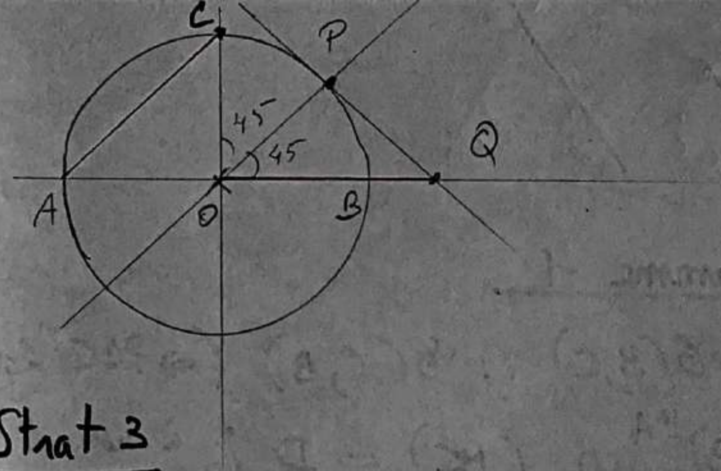


Analyse : Comme OPQ $\Rightarrow OQ = \sqrt{2}\,.\,OP = \sqrt{2}\,.\,R$ où $\mathcal{C}(O,A) = \mathcal{C}(O,R)$.

K projeté de P s/ (AB), $OK = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Strat 1 : Construire Q tq $OQ = \sqrt{2}\,.\,OA$. puis construire P q construct° classiq de tangente

Strat 2 : Construire K tq $OK = \frac{OA}{\sqrt{2}}$ puis soit Q
$Q = \mathcal{C}(K,O) \cap AB$.
$P = (AB)^{\perp K} \cap \mathcal{C}$.

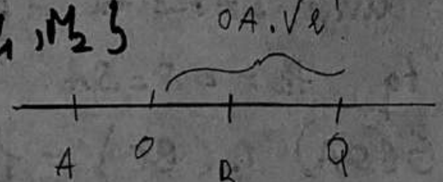


Strat 3

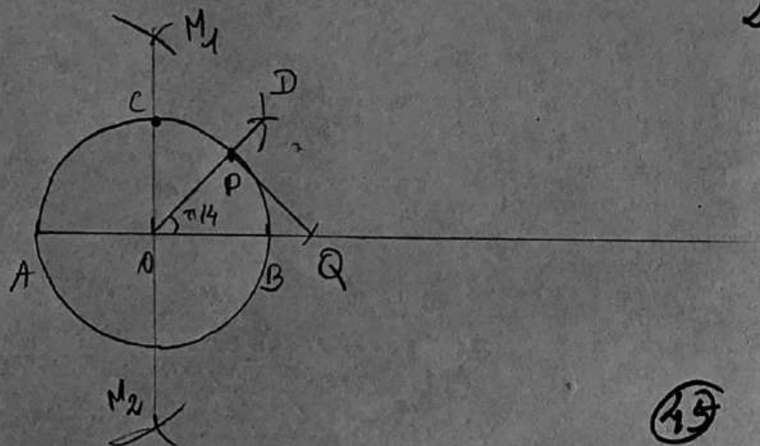
- $P =$ bissectrice $BOC \cap \mathcal{C}$
  où $(CO) \perp (AB)$

Programme 1 :

1) $\mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(B,A) =: \{M_1, M_2\}$
2) $O = (M_1M_2) \cap (AB)$
3) $C = (M_1M_2) \cap \mathcal{C}(O,A)$
   $\overset{''}{\mathcal{C}}[AB]$



idéa
m tb pgm



bissectrice ← carré

4) $D = \mathcal{C}(C,O) \cap \mathcal{C}(B,O)$
   $(\Rightarrow CO = CD = OB = BD \Rightarrow$ losange $OBDC$
   $\Rightarrow OD$ bissectrice $)$
5) $(OD) \cap \mathcal{C}(O,A) = P$
6) $Q = \mathcal{C}(P,O) \cap (AB)$

Justif° du pgm 1

1) Par constr° $AM_1 = BM_1 = AB$, $AM_2 = BM_2 = AB$ $\Rightarrow$ (M_1M_2) médiatrice de $[AB]$
2) aussi O milieu de $[AB]$ car $\in [AB]$ & $\in$ la médiatrice.
3) $\measuredangle BOC = \frac{\pi}{2}$ car $(OC) = (M_1M_2)$ la médiatrice
   $OC = OB$ car $C \in \mathcal{C}(O,A) = \mathcal{C}(O,B)$
4) $D \in \mathcal{C}(C,O) \Rightarrow CO = CD$
   $D \in \mathcal{C}(B,O) \Rightarrow BO = BD$
   $\Rightarrow CD = CO = BO$, BD
   $\Rightarrow OBDC$ losange
   $\Rightarrow OD$ bissectrice de COB
   $\Rightarrow \measuredangle DOB = \pi/4$

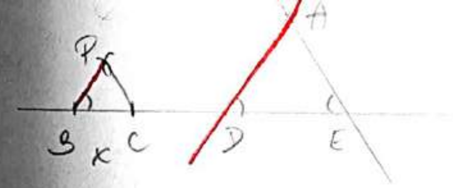
5) $OP = OA = OB$, $\measuredangle POB = \pi/4$.

6) $Q \in \mathcal{C}(P, O) \Rightarrow PO = PQ \Rightarrow \triangle OQP$ isocèle

$\Rightarrow \measuredangle OQP = \measuredangle QOP = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \measuredangle OPQ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ • QP tangente au $\mathcal{C}(O, B)$

• $PQ = PO = \frac{1}{2} AB$



Programme 1

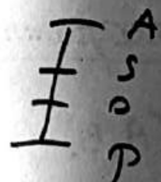
1) $P = \mathcal{C}(B, C) \cap \mathcal{C}(C, B)$ ($\Rightarrow PBC$ équilatéral)

2) $(PB)^{\parallel A} \cap (BC) = D$
$(PC)^{\parallel A} \cap (BC) = E$ } à voir & rappel constru dans $\mathcal{D}^{\parallel A}$

Programme 2

1) $(BC)^{\perp A} \cap (BC) = P$

2) divise $[AP]$ en 3 pts égales tq $PO = OS = SA$



3) $\mathcal{C}(OA) \cap (BC) = \{D, E\}$

Prgm 2 : on construit Q tq $OQ = AC$ puis P (directement où $\mathcal{C}$ de K).

Prgm 3 : on construit K tq $OK = \frac{1}{2} AC$ puis P & Q.

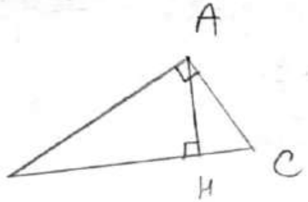
Ex 3. soit A, B, C non alignés.
Construire D & E ∈ (BC) tq $\triangle ADE$ équilatéral.

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

TD5

cf TD4 ex 4.

RA 1 :



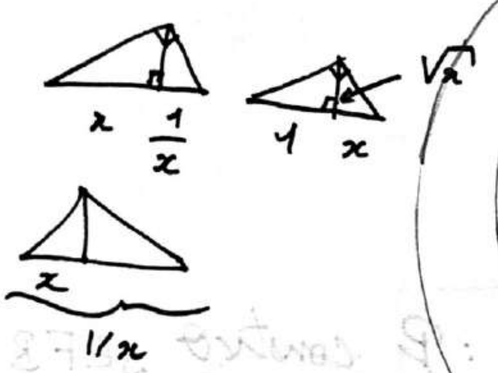
ABC rect^gle en ∢A

$AH \perp BC$

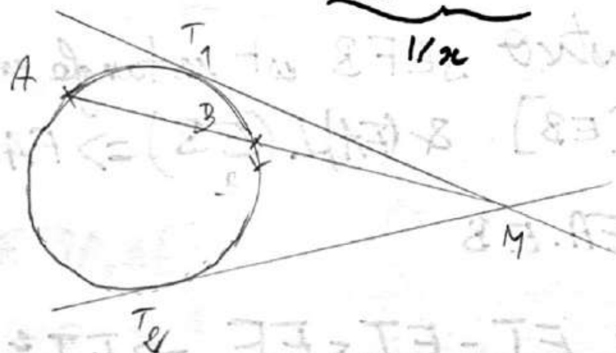
$$\boxed{AH^2 = HB.HC}$$

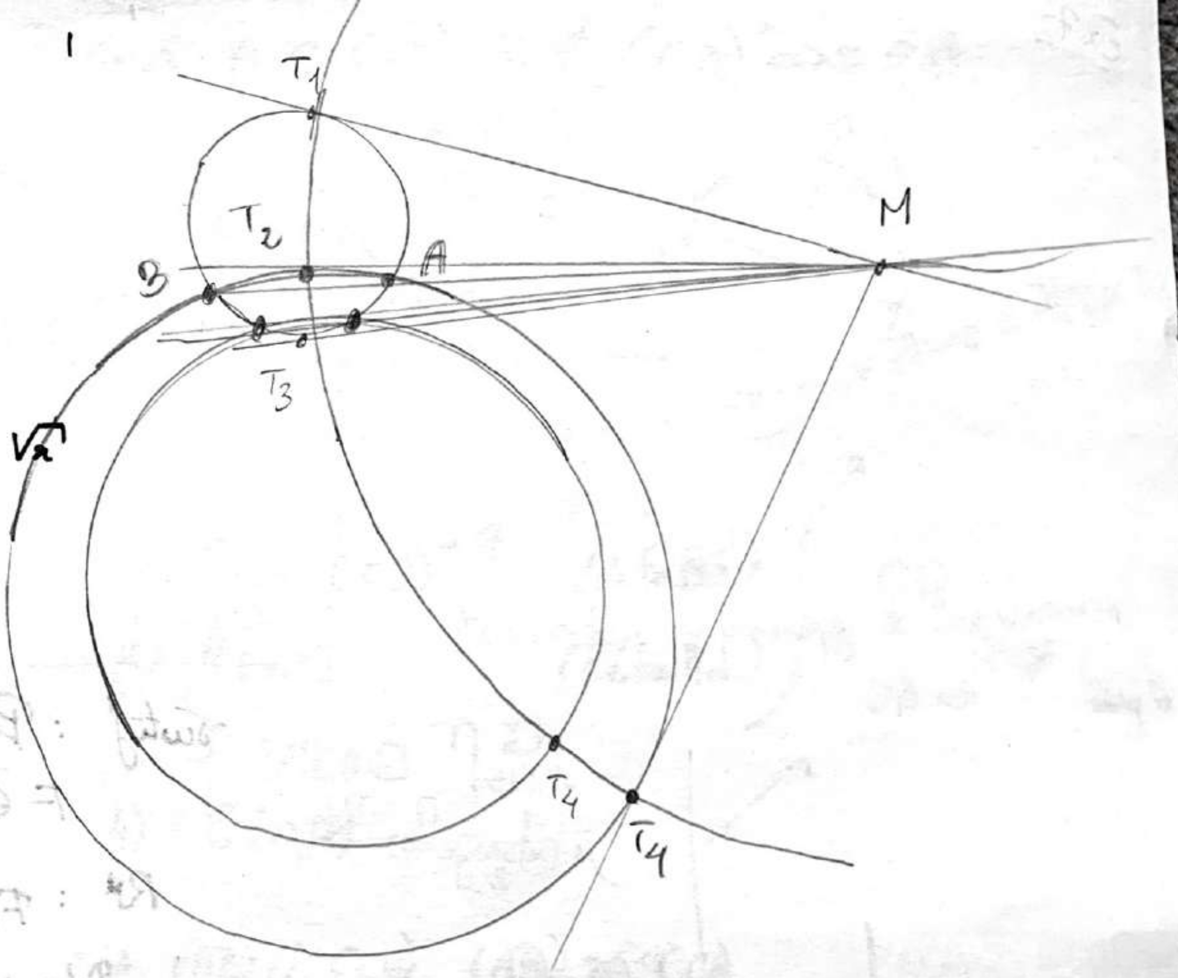
$AB^2 = BH.BC$

$AC^2 = CH.CB$



RA 2 :

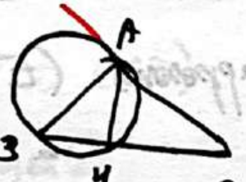




$$\boxed{MB.\ MA = MT_1^2 = MT_2^2}$$

Puissce M p/ $\mathcal{C}$

$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$

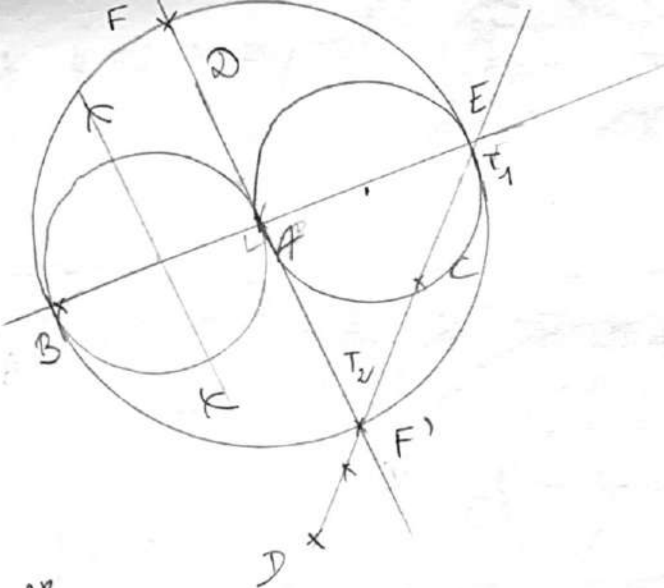


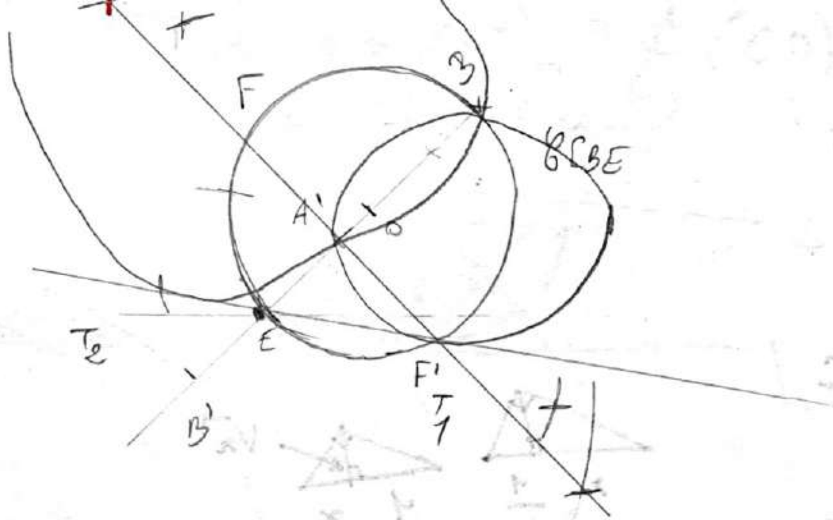
$CA^2 = CH.CB$

$MT_i^2 = MA.MB$

$$\boxed{MT_i^2 = MA.MB}$$

Ex 7





perpendicul^{r} → symétriq → cercle → médiat

$ET_1^2 = EA.EB$

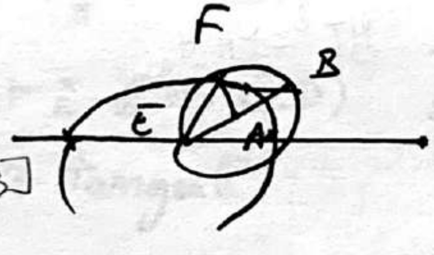
Justif : P constr° ΔEFB est rectangle en F car $F \in \mathcal{C}[EB]$ & $(FA) \perp (EB) \Rightarrow FA$ hauteur.

$\mu[AB]$
$\cap \Rightarrow O_2$
$\mu[BT_2]$

$\mathcal{C}(O_2, A)$

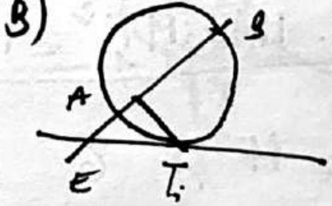
RM : $FE^2 = EA.EB$

D'après (iv) $ET_1 = ET_2 = EF \to ET_i^2 = EA.EB$



→ $\mu[T_1B]$

Supposons $(ET_1) \cap \mathcal{C}(A,T,B) = \{T_1, T_1'\}$

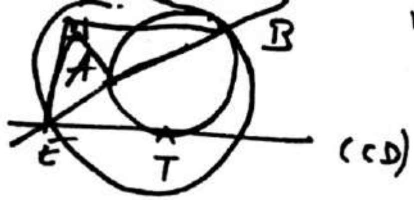


$\Rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(E) = EA.EB$

$= ET_1 . ET_1' \Rightarrow ET_1' = ET_1 \Rightarrow T_1 = T_1' \Rightarrow$ cqfd (ET_1) tang^t à $\mathcal{C}$

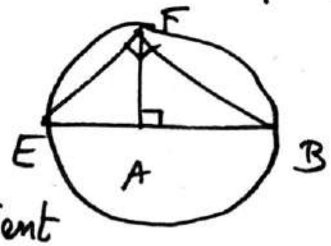
② de m̂ ET_2

L'analyse q ns manquait



1) Pr construire le cercle cherché, il suffit de trouver posi° de T.

2) $ET^2 = EA.EB \Rightarrow$ il suffit de construire un pt (E) tq $EF^2 = EA.EB$

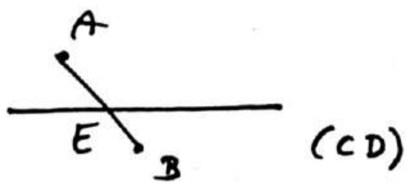


3) $\mathcal{C}[EB] \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

4) Autres PDC où tel cercle $\exists$.

- si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A,E[$
  idtq cas a)

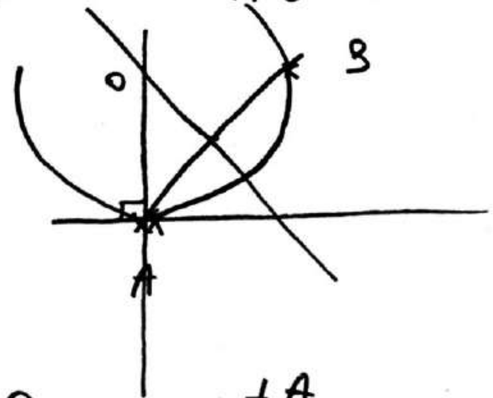
- si $E \in]A,B[$
  un tel cercle n'$\exists$



→ si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow E$ point int à $\mathcal{C} \Rightarrow (CD)$ coupe $\mathcal{C} \Rightarrow$ ne pt pas ê tangente

→ si $A, B \in (CD) \Rightarrow \exists$

- si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$
  (de m̂ de A et B)



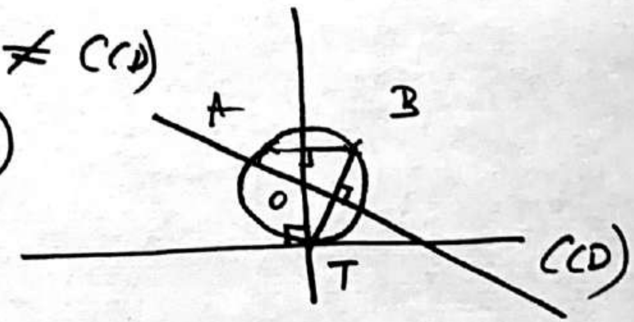
1) $\mathcal{D} := (CD)^{\perp A}$ (détaillez)
2) $\mu_{[AB]}$ (détaillez)
3) $O := \mu_{[AB]} \cap \mathcal{D}$
4) $\mathcal{C}(O,A)$ convient

$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{C}(O,A)$

$(CD) \perp OA \Rightarrow (CD)$ tangte

- si $(AB) // (CD)$ $(AB) \neq (CD)$

1) $T := \mu_{[AB]} \cap (CD)$
2) $\mathcal{C}(A,B,T)$ convient



$\mathcal{C}$ passe p A & B (PC).
Ple T tang^t à (CD) en T.

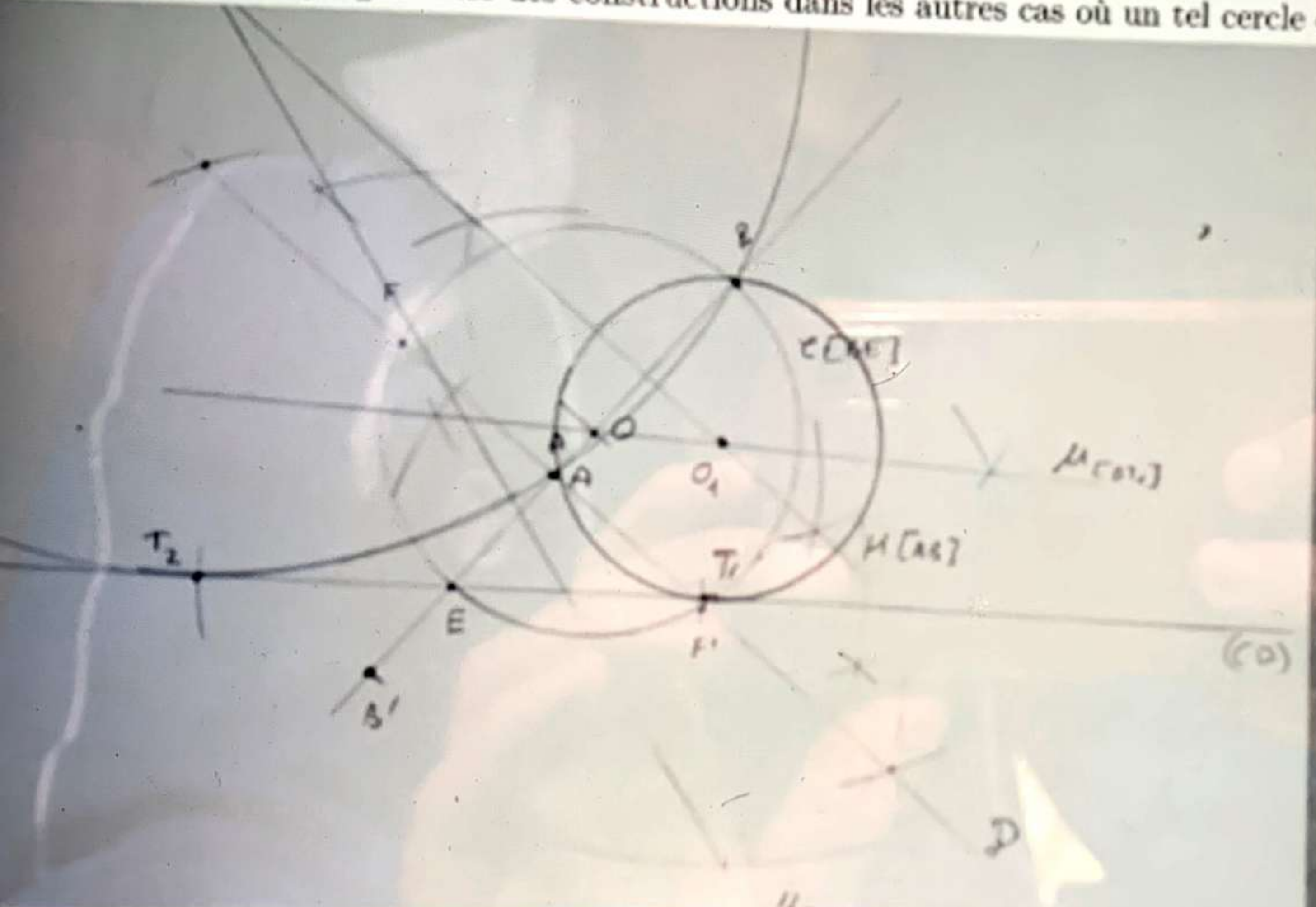
$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{C}$; $\Rightarrow$ T tangent à $\mathcal{C}$.

(iii) $\{F, F'\} := D \cap \mathcal{C}[EB]$;

(iv) $\{T_1, T_2\} := \mathcal{C}(E, F) \cap (CD)$;

(v) Les deux cercles qui passent par A, B et T_i, $i = 1, 2$, conviennent.

b) Donner les programmes des constructions dans les autres cas où un tel cercle existe.



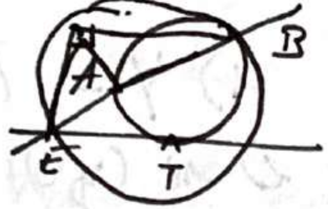
Oui

Kroum Tzanev

Maxence Defraiteur

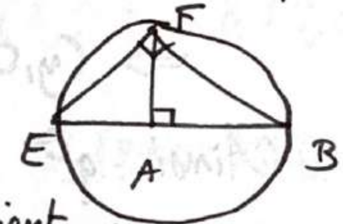
pourriez vous excpliquer le (v) svp ?

L'analyse q nous manquait



1) Pr construire le cercle cherché, il suffit de trouver posit° de T.

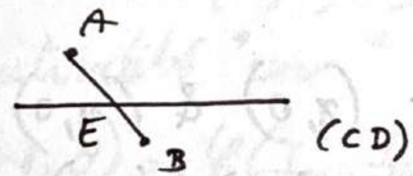
2) $ET^2 = EA.EB \Rightarrow$ il suffit de construire un pt (E) tq $EF^2 = EA.EB$



3) $\mathcal{C}[EB] \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

4) Autres PDC où tel cercle $\exists$.

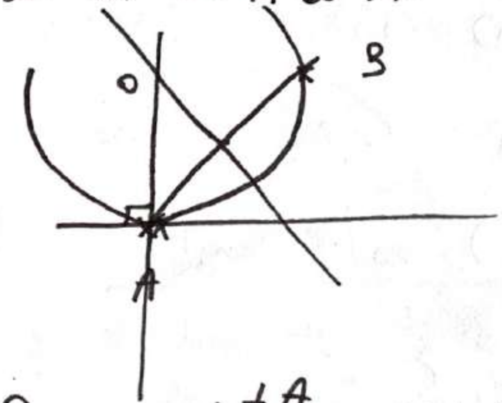
- si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A, E[$ idtq cas a)
- si $E \in]A,B[$ un tel cercle $\nexists$



→ si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow E$ point int^r à $\mathcal{C} \Rightarrow (CD)$ coupe $\mathcal{C} \Rightarrow$ ne pt pas ê tangente

→ si $A, B \in (CD) \Rightarrow \nexists$

- si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$ (de m̂ de A et B)



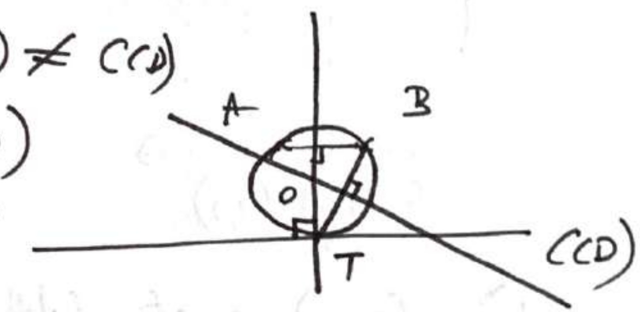
1) $\mathcal{D} := (CD)^{\perp A}$ (détaillez)
2) $\mu_{[AB]}$ (détaillez)
3) $O := \mu_{[AB]} \cap \mathcal{D}$
4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{C}(O,A)$

$(CD) \perp OA \Rightarrow (CD)$ tang^{te}

- si $(AB) \,//\, (CD)$ $(AB) \neq (CD)$

1) $T := \mu_{[AB]} \cap (CD)$
2) $\mathcal{C}(A, B, T)$ convient



$\mathcal{C}$ passe p A & B (PC).

Pe T tang^t à (CD) en T.

$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{C}$; $\Rightarrow T$ tangent à $\mathcal{C}$.

Ex 13 (Nombres constructibles)

Acceptat° constrct° classq.

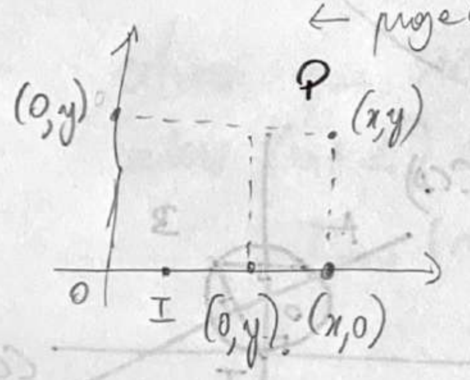
→ PC $\mathcal{C}$ $O=(0,0)$, $I=(1,0)$

→ x const. si $(x,0)$ const

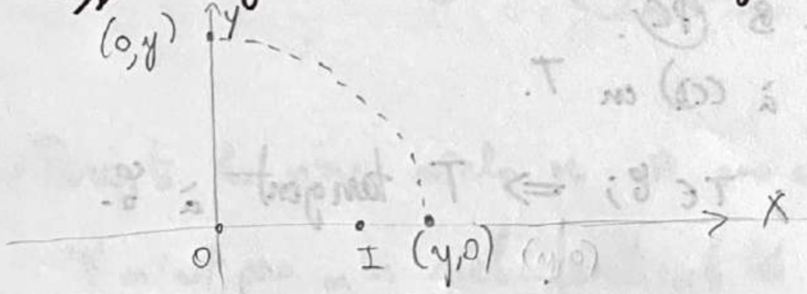
a) Mq (x,y) est const
$\iff$ x & y st const.

x const : $(x,0)$ const &
y const : $(y,0)$ const

← projecto° orthogonales const.



(L) $(0,y)$ constructible ssi $(y,0)$ constructible.



Md^t comme V.T

50

1) $Y = (OI)^{\perp O}$, $X = (OI)$

2) si $(y,0)$ contructible
$(0,y) = \mathcal{C}(O,(y,0)) \cap Y$
$\Rightarrow$ constructible, si $(0,y)$ constructible
$\Rightarrow (y,0) = \mathcal{C}(O,(0,y)) \cap X$ constructible

Ainsi q° a) devient
(x,y) constructibles ssi $(x,0)$ & $(0,y)$ constructibles.

(L0) Les axes X & Y st constructibles.

- si $(x,0)$ & $(y,0)$ construit alors
$P = (OI)^{\perp (x,0)} \cap Y^{\perp (0,y)}$
$\Rightarrow P(x,y)$ constructible.

$Q = Y^{\parallel (x,y)} \cap X \Rightarrow Q(x,0)$ est constructible

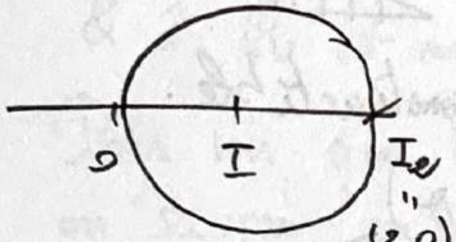
$R = X^{\parallel (x,y)} \cap Y \Rightarrow R(0,y)$ est constructible.

b) Mq ∀ point $\mathbb{Z}^2$ constructible

→ $\mathbb{Z}^2$ constructible ssi $\forall n \in \mathbb{Z}$ constructible.

En effet $\forall n \in \mathbb{N}$ est constructible :

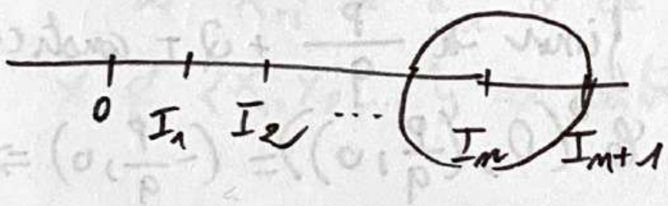
2 constructible car $(2,0) = \mathcal{C}(I,0) \cap (OI)$



$I_3(3,0) = \mathcal{C}(I_2, I_1) \cap (OI)$

Ainsi par récurrence si $\{1,\dots,n\}$ construit alors $(n+1)$ constructible* car * par récurrence.

$I_{n+1}(n+1,0) = \mathcal{C}(I_n, I_{n+1}) \cap (OI)$

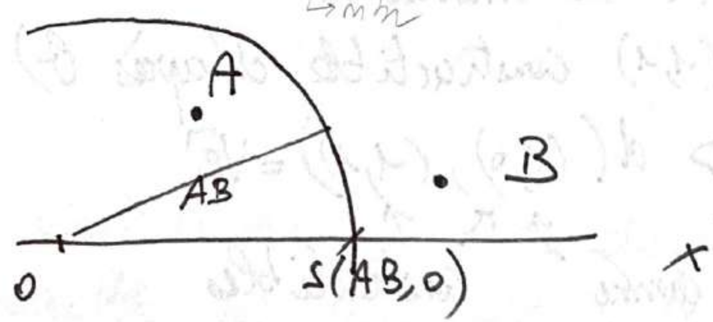


& $\forall n \in -\mathbb{N}$, $\mathcal{C}(0,(n,0)) \cap (0,I) = (n,0)$

→ Puisq ts les nbrs réels ne st pas construct.

π n'est pas nbr réel constructible.

c) Mq A & B st constructibles ⇒ distance AB constructible



dist AB constructible car

$S = [OX) \cap \mathcal{C}(O,AB)$ car A est constible, B est constible

constrᵒ classq

$\Rightarrow S(AB,0)$

d) Mq $\sqrt{2}$ constructible.

$\sqrt{2}$ est constructible car $(1,1)$ constructible d'après b)

$\Rightarrow d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2}$

donné constructibles

→ $\sqrt{3}$ est constructible car $(\sqrt{2},1)$ constructible d'après a) + $\sqrt{2}$ est constructible.

$\Rightarrow d((0,0),(\sqrt{2},1)) = \sqrt{\sqrt{2}^2+1^2} = \sqrt{3}$ est constructible

---

Par récurrence « H_n : "$\sqrt{n}$ est constructible" »

H_0, H_1, H_2, H_3 déjà vérifiés. On suppose données H_n vrai & ainsi

$(\sqrt{n},1)$ est constructible

$\Rightarrow d((0,0),(\sqrt{n},1)) = \sqrt{n+1}$ ainsi $\Leftrightarrow H_{n+1}$

e) Mq $\forall p,q \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q},0)$ est constr.

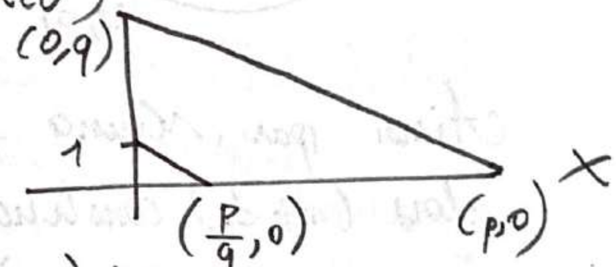
Mq $\forall p,q \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q},0)$ est constr.

$\boxed{M1}$ soit $J_1, J_2, \dots, J_{q-1}$ les points q partagt le sgmt $[(0,0)(p,0)]$ en q parties égales.

(constru classiq 

$\Rightarrow J_1(\frac{p}{q},0)$ constructible.

$\boxed{M2}$ (Détailler constrct°)



$(p/q,0) = ((p,0),(0,q))^{//(0,1)} \cap X$ + Thalès.

Et pr finir si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ constructible alors

$X \cap \mathcal{C}^*(0,(\frac{p}{q},0)) = (-\frac{p}{q},0) \Rightarrow -\frac{p}{q}$ constructible

Rq : L'ens des nbrs constructibles est **Dénombrable** comme réunion dénombrable

$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ & K_i les nbrs constructibles à i pas.

- & $\hat{c}$ $\mathbb{R}$ est non dénombrable $\Rightarrow \mathbb{R} \neq K$.

Pour voir que $\mathbb{R}$ est non dénombrable, on suppose qu'il l'est :

$$\mathbb{R} = \{ \cancel{x_0}, x_1, x_2, \dots, x_n \}.$$

$x_i = a_n^i \dots a_0^i, a_{-1}^i, a_{-2}^i, \dots$ l'écrit décimale réduite

Posons $X = 0, X_{-1} X_{-2} \dots$

de $X_{-i} \neq a_{-1}^i$ & de $\exists \Rightarrow \cancel{X} \neq X_i \ \forall i$

- $X \notin \{X_1, X_2, \dots\} \Rightarrow$ contradiction $\boxed{c?!c}$

Ex 14 (S^{te} ens nbr constic)

Mq ens nbrs réels const. n'est pas $\mathbb{R}$ & qu'il est stable par : - somm, diff
- mlt, inverse
- $\sqrt{\cdot}$.

On vient de voir que l'ens des nbrs constictibles est dénombrable $\neq \mathbb{R}$ non dénombrable.

▶ x, y constictble $\Rightarrow$

$= (OI) \cap \mathcal{C}((x,0), |y|)$

$= \{(x+|y|, 0), (x-|y|, 0)$

$d((0,0), (y,0))$

constructible

$\Rightarrow x \pm |y|$ constictble

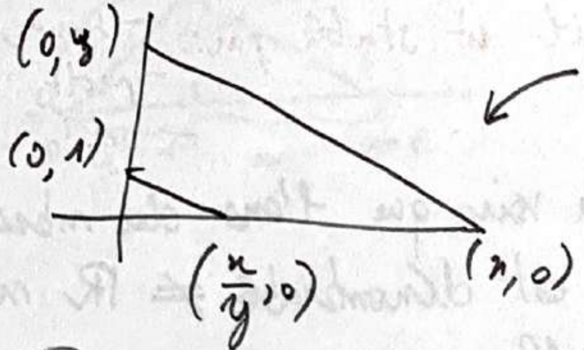
$\Rightarrow x \pm y$ constictble. (même mth

$0,\overline{99} = 1$

· **Produit, inverse ?**

Inverse

x, y constructible & $y \neq 0 \Rightarrow$



Thalès $\Rightarrow \left(\frac{x}{y}, 0\right)$ constructible

$\left(\frac{x}{y}, 0\right) = ((0,y)(x,0)) \cap (OI)$

(R4) . α constructible ssi $-\alpha$ constructible

. α constructible ssi $|\alpha|$ constructible

x, y constructible $y \neq 0 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|}$ constructible

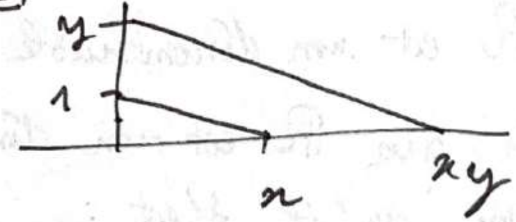
$\Rightarrow \frac{x}{y}$ constructible

Produit . $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x, y$ constructible car

$\boxed{M1}$ $\frac{1}{y}$ constructible d'après q° précédente

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{y}} = x.y$ constructible.

$\boxed{M2}$



Pr conclure si x, y constructible

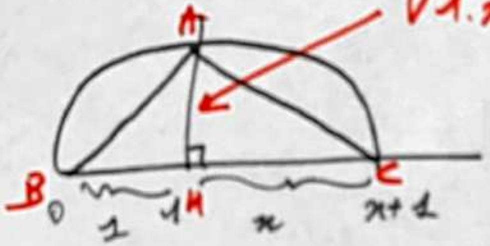
$\Rightarrow |x|$ et $|y|$ le sont

$\Rightarrow |x||y| = |xy|$ l'est

$\Rightarrow xy$ l'est.

Racine carrée

$\sqrt{1.x} = \sqrt{x}$



$AH^2 = BH.HC$

13^4

M44 TD

TD1

→ projeté orthogonal, droites, $\frac{1}{2}$ plan, paramétrisat° droite, distance, convexité, inéquat°s

→ médiane du trigle 2:1

→ $S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2} \Rightarrow$ haut^{r} = $\frac{\text{prdt kathêtes}}{\text{hypothénuse}}$

→ (A, 2) —— (C, 7) —— (B, 5) $\vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda \vec{B}$

$C = (1-\lambda)A + \lambda B$.

TD2

$\frac{CB}{CA} = \frac{\alpha}{\beta}$.

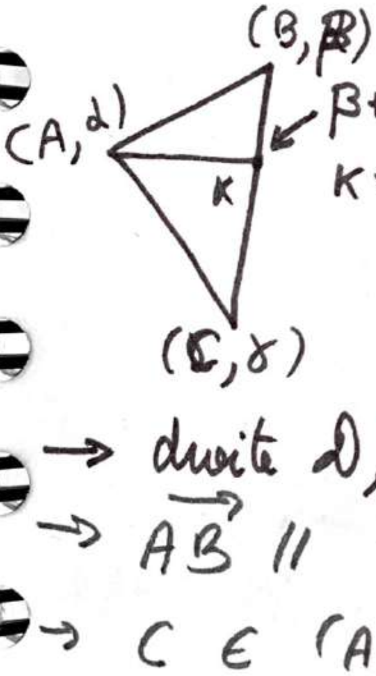
→ coord. barycentiqs $(\alpha : \beta : \gamma)$

→ Thalès : droites //, rapport de mesure

@ $(\alpha : 2\alpha : \alpha) = (1:2:1)$ (A, 1) —— C —— (B, $\frac{1}{2}$) $1 - \frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C$

pr $\lambda = \frac{1}{2}$.



$K = \frac{\gamma}{\gamma+\beta} C + \frac{\beta}{\beta+\gamma} B$

Alignement

→ droite $\mathcal{D}$, Pts A, B, C $\in \mathcal{D}$

→ $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$

→ $C \in (AB)$
- → si $AB = \{ax + by = d\}$, $ax_c + by_c = d$?
- → $(AB) = \{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ $(x_c, y_c) = A + t\vec{AB}$?

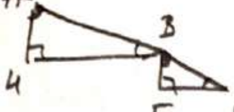
→ $\measuredangle ABC = 0 \ [\pi]$

→ nbrs complexes

→ homothéties → $H_{C,\lambda}(A) = B$ C A B

$H_{O,\lambda}(A) = B$, $H_{O,\lambda}(B) = C$.

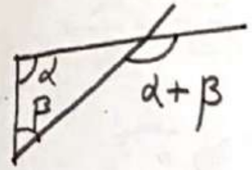
→ triangles semblables



$\Delta HBA \sim \Delta FCB$ car $\frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC}$ & $\measuredangle H = \measuredangle F = \frac{\pi}{2}$

utile : $\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \iff \frac{CK}{MO} = \frac{KA}{OI}$

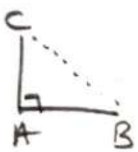
→ Thalès (//, rapport, $\frac{p}{q}$, pq constructible, $\hat{m}$ coupures de segment)

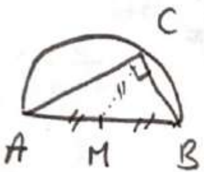
→ 

TD3 : Angles

cercle inscrit   cercle exinscrit

→ tracer triangle rectgle



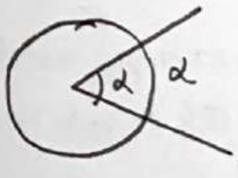


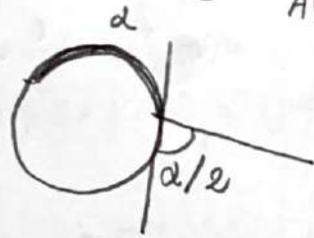
cercle circonscrit

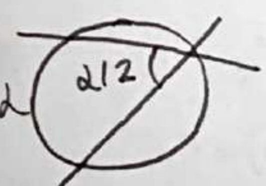
→ bissectrice → $\hat{m}$ arcs → médiatrice

→ $BE \times BO = AB \times CE \iff \frac{BE}{CE} = \frac{BO}{AB} \iff \Delta BEC \sim \Delta ABO$ ↓ + $\measuredangle E = \measuredangle B = \frac{\pi}{2}$

$\iff \measuredangle EBC = \measuredangle BAO$

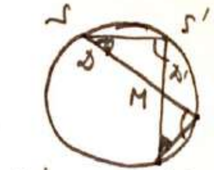
→ 





Puissance d'un point :

$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{S, T\}$, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{C} = \{S', T'\}$



$\overline{MS}.\overline{MT} = \overline{MS'}.\overline{MT'}$

$\overline{MS}.\overline{MT} = \overline{MS'}.\overline{MT'} = MS.MT = MS'.MT'$ ⇒ mq $\frac{MS}{MS'} = \frac{MT}{MT'}$

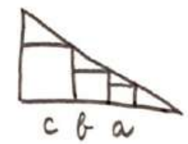
Mq $\Delta SMS' \sim \Delta TMT'$

$\measuredangle SMS' = \measuredangle T'MT$ & $\measuredangle SS'T = \frac{1}{2} \widehat{ST} = \measuredangle STT'$ □

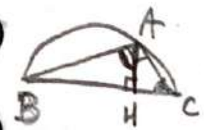
→ si M int $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$; M sur $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$; M ext $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$

→ triangles longs aire, angle, Thalès ; bissectrices

TD4



$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. & homothéties.



mq $BA^2 = BH.BC \iff \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$

$\iff \Delta ABH \sim \Delta CBA$.

$\begin{cases} \measuredangle ABH = \measuredangle ABC \text{ commun} \\ \measuredangle AHB = \measuredangle CAB = \pi/2 \end{cases}$

: $\text{kathète}^2 = \text{pie}_1 \text{ h}^{te} \times \text{pie}_2 \text{ h}^{te}$

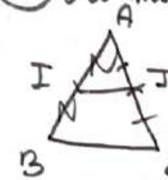
→ mq 3 bissectrices st concourantes (p36, ex 11)

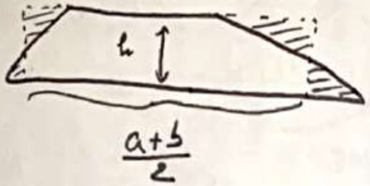
→ médiatrices, médianes, hauteurs ← orthocentre

← barycentre, centre de gravité

$A_{\text{trapèze}} = (B+b).2h$

→ TH des milieux : si un segment joint les milix de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3° côté & sa longueur est égale à la MOITIÉ de celle 3° côté.





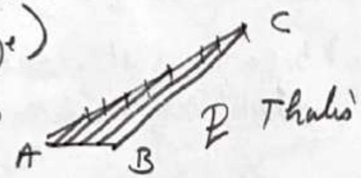
$A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$

croisé — non convexe (“concave”) — convexe

→ somme angles de quadri convexe : 2π.
→ points cocycliques.

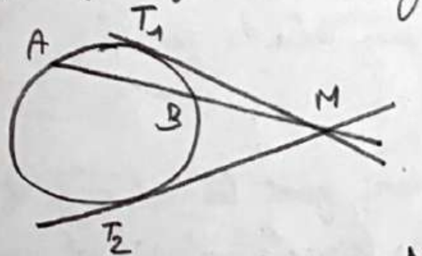
Construct° Règle & compas
TD 5

→ analyse, prgm construct°, justif
→ symétrie / pt, médiat [AB], milieu [AB], $\mathcal{C}[AB]$
→ tangte à $\mathcal{C}(A,B)^c$, perpendicul^{re} à $(AB)^c$ ← besoin milieu
→ parallèle à $(AB)^c$, $\mathcal{C}(A, BC)$, cercle $\mathcal{C}(A,B,C)$
→ bissectrice $\widehat{BAC}$ (4 losange)
→ partage segmts en n segments



P Thalès

→



$MB.MA = MT_1^2 = MT_2^2$

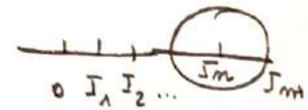
Puissa M / $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_\mathcal{C}(M)$

$MT_i^2 = MA.MB$

④

→ Nombres constructibles
↳ pc $O(0,0)$, $I = (1,0)$; x const si $(x,0)$ const

→ ∀ pts $\mathbb{Z}^2$ const.

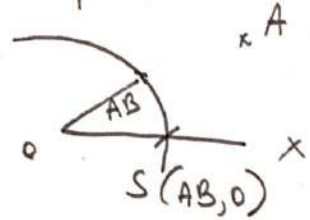


$\forall n \in -\mathbb{N}$

$\mathcal{C}(0,(n,0)) \cap (OI)$!! $(n,0)$

$I_{n+1}(n+1,0) = \mathcal{C}(I_n, I_{n+1}) \cap (OI)$

→ mq A, B st const. ⇒ dista AB constr.



$S = [OX) \cap \mathcal{C}(0, AB)$

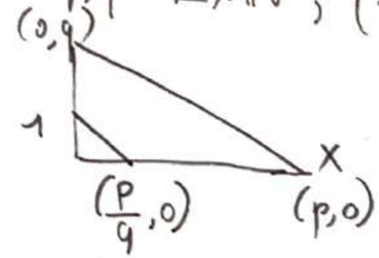
⇒ $S(AB, 0)$

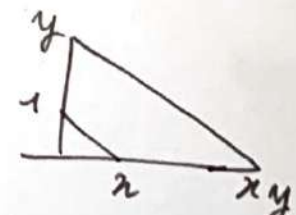
→ mq $\sqrt{2}$ constructible ; $d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2}$ (uni, constr é)

→ $\sqrt{3}$ $d((0,0),(\sqrt{2},1)) = \sqrt{3}$

Par récur $\sqrt{n}$ — ; $d((0,0),(\sqrt{n},1)) = \sqrt{n+1}$

→ mq ∀ $p,q \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $\left(\frac{p}{q},0\right)$ const. Thalès

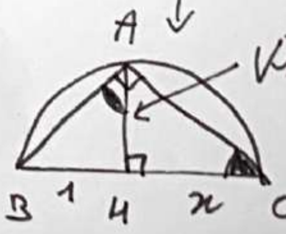




→ mq ens nbres réels n'est pas const ds $\mathbb{R}$ & stable p somme, diff^{ce}, prdt, inverse, $\sqrt{\ }$

↓

haut$^{r\,2}$ = pie$_1$ ht^r × pie$_2$ ht^r.

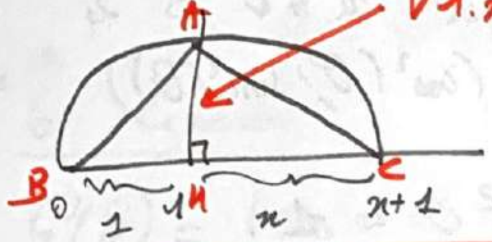


$\sqrt{1.x} = \sqrt{x}$

⑤

Racine carrée

$\sqrt{1.x} = \sqrt{x}$



$AH^2 = BH.HC$

TD 6 : Courbes paramétrées

Ex 1 Paramétrisa° barycentriq.

A, B, C non alignés.

a) Mq $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une paramétrisa° ~~de~~ régulière de (AB).

$\boxed{M}$ détaillée :

$$\gamma'(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\gamma(\lambda+\varepsilon) - \gamma(\lambda)}{\varepsilon}}_{\text{vect}^{x}}$$

pts

$$\gamma : \lambda \to (1-\lambda)A + \lambda B = A - \lambda A + \lambda B$$
$$= A + \lambda \overrightarrow{AB}.$$

$$\gamma'(\lambda) = \frac{(\lambda + \varepsilon - \lambda)\overrightarrow{AB}}{\varepsilon} = \overrightarrow{AB}.$$

$\boxed{M}$ normale :

$$\gamma(\lambda) = \underset{\text{cte}}{A} + \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \gamma'(\lambda) = 0 + 1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

or A, B, C non alignés $\Rightarrow A \neq B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ la courbe est paramétrée.

b) Ss q^elle^ condi° c^te^ paramétisa° est "par longueur d'arc" ?

↳ c'est une paramétrisa° p/ longueurs d'arcs ssi $\forall \lambda$, $\|\gamma'(\lambda)\| = 1$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 1 \Leftrightarrow AB = 1.$

c) donner une paramétrisa° p/ longueur d'arc de (AB).

↳ soit $\gamma_1(\lambda) = \gamma\left(\frac{\lambda}{AB}\right)$ $(AB \neq 0)$

Dans ce cas γ_1 est une représentat° de γ

$$\left(\phi(s) = \frac{s}{AB} \right).$$

$$\gamma_1'(\lambda) = \left[\gamma\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \right]' = \gamma'\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{AB}\right)'$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{AB}$$

ainsi $\|(\gamma_1'(\lambda)\| = \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right\| = 1.$

d) Donner une paramétrisat° du segment $[AB]$ & de $[BA)$.

- $\gamma|_{[0,1]}$ est une paramétrisat° de $[AB]$.

$$[AB] = \{ A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0,1] \}$$

- $\gamma|_{]-\infty,1]}$ - - - - - - $[BA)$

$\lambda < 0$ $\quad 1 \quad$ $\lambda > 1$

A $\quad$ B

e) étudier courbe $G : \theta \mapsto G_\theta$, où G_θ est barycentre de A & B à poids respectifs $(\cos^2(\theta), \sin^2(\theta))$

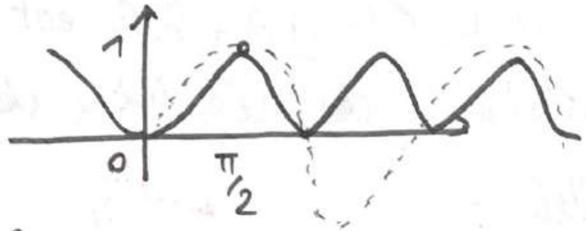
Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$$G(\gamma) = (1 - \sin^2\theta) A + \sin^2\theta\, B$$

$$G(\gamma) = \gamma(\sin^2\theta)$$

Or $\sin^2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

π-périodiq



- $\sin^2$ est :
  - π-périodiq
  - $\nearrow$ $[0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,1]$ (bijc°)
  - $\searrow$ $[\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow [0,1]$ (bijc°).

Ainsi G oscille entre A & B en partant de A à B pr $\theta \in [0, \pi/2]$, puis de B à A pr $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ & ainsi de suite.

9° : La courbe de G est régulière ? par longueur d'arc ?

courbe de G régulière ?

$$G'(\theta) = (\sin^2\theta)'\,\vec{AB} = 2\cos\theta\sin\theta\,\vec{AB}$$
$$= \sin(2\theta)\,\vec{AB}$$

- M1) $\left[\cos^2\theta\, A + \sin^2\theta\, B\right]' =$

$= (\cos^2\theta)' A + (\sin^2\theta)' B$

$= 2\cos\theta(-\sin\theta) A + 2\sin\theta.\cos\theta\, B$

M2) $G(\theta) = \gamma(\sin^2\theta)$

$G'(\theta) = \gamma'(\sin^2\theta).\,[\sin^2\theta]'$

- $= \vec{AB}\,\underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} = \sin 2\theta.\,\vec{AB}$

ccl G n'est pas une paramétrisation régulière sur $\mathbb{R}$ car $G'(\theta) = 0$ si $\theta \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$

dérivée $= 0$

& c $\|\sin 2\theta.\,\vec{AB}\| \neq 1$, elle n'est pas par longueur d'arcs m̂ sur $]k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}[$ là où elle est régulière

f) soit $I := [\theta_A, \theta_B]$, G est injective sur cet intervalle tq $G_{\theta_A} = A$, $G_{\theta_B} = B$.

→ Mq long^{r} de $G|_I$ ne dépd pas du choix de J. calculer la.

· comme $I = [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$

$$|G|_I| = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \|\underbrace{\sin 2\theta}_{>0}.\,\vec{AB}\|$$

$$= \|\vec{AB}\| \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = AB$$

on pouvait conclure que $|G|_I| = AB$ en utilisant que $G|_{]0,\frac{\pi}{2}[}$ est une reparamétrisation de $\gamma_{]0,1[}$; est une repar de $\gamma\left(\frac{t}{AB}\right)\Big|_{]0,AB[}$

$$\Rightarrow \left| \gamma|_{]0,\frac{\pi}{2}[} \right| = \left| \gamma_{[0,1]}|_{]0,1[} \right|$$
$$= \left| \gamma_{[0,AB]}\left(\frac{t}{AB}\right) \right|$$
$$= \left| [0,AB] \right| = AB.$$

Cercle

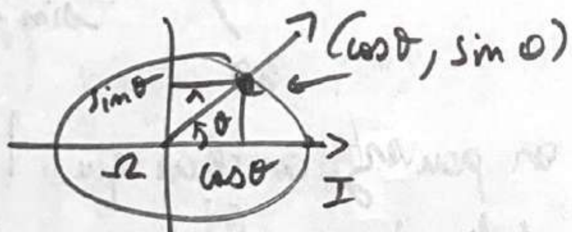
Ex2 Paramétrisation standards.

→ courbe paramétrée $\mathcal{C} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} a + r\cos(\theta) \\ b + r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

a) Mq qu'il s'agit d'une paramᵗᵒ du $\mathcal{C}(O,r)$ & $O(a,b)$ ← centre.

M1 Par déf° de $\cos\theta$ & $\sin\theta$.

$\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ est une paramétrisation du cercle unité $\mathcal{C}(\Omega, 1)$ $\Omega(0,0)$



Ainsi $\in T_{\vec{\Omega O}}\left(H_{\Omega,r}\left(\mathcal{C}(\Omega,1)\right)\right)$

$$\parallel$$

$$T_{\vec{\Omega O}}\left(\mathcal{C}(\Omega,r)\right) = \mathcal{C}(O,r)$$

$$\underbrace{T_{\vec{\Omega O}}}_{(a,b)} \circ H_{\Omega,r} \circ \underbrace{\gamma}_{(\cos\theta,\, \sin\theta)} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(O,r)$$

$$r\cos\theta,\ r.\sin\theta$$

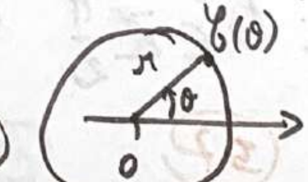
$$(a + r.\cos\theta + b + r.\sin\theta) = \mathcal{C}(\theta)$$

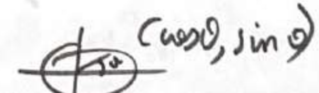
M2 $\mathcal{C}(\theta) \in \mathcal{C}(O,r)$

$$\iff O\mathcal{C}(\theta) = r \iff \frac{\|\overrightarrow{O\mathcal{C}(\theta)}\|}{r} = 1$$

$$\iff \|(\cos\theta, \sin\theta)\| = 1$$

$$\frac{\overrightarrow{O\mathcal{C}(\theta)}}{r} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}(\theta) - O) = \frac{1}{2}\left[(a + r.\cos\theta, b + r\sin\theta) - (a,b)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$





b) Si qu'il conclut cette paramétrisation est "par longueur d'arc".

$$\mathcal{C}'(\theta) = \left[(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)\right]'$$

$$\mathcal{C}'(\theta) = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

$$\|\mathcal{C}'(\theta)\| = r\,\underbrace{\|(-\sin\theta, \cos\theta)\|}_{=1} = r$$

ainsi $\mathcal{C}$ est régulière (si $r \neq 0$

$\iff$ $\mathcal{C}(0,r)$ cercle non-dégénéré en un point).

→ Elle est par longueur d'arc ssi $r=1$.

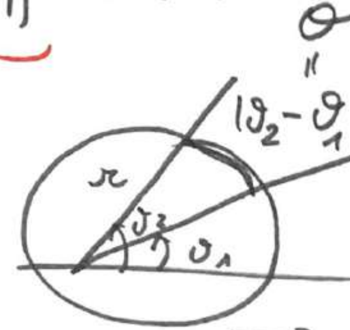
c) Donner une paramétrisation par longueur d'arc de $\mathcal{C}(0,r)$.

$\mathcal{C}_1(\theta) = \mathcal{C}\left(\frac{\theta}{r}\right)$ vérifie $\mathcal{C}_1'(\theta) = \mathcal{C}'\left(\frac{\theta}{r}\right)\cdot\left(\frac{\theta}{r}\right)'$

$$\Rightarrow \|\mathcal{C}_1'(\theta)\| = \left\|\mathcal{C}'\left(\frac{\theta}{r}\right)\right\|\cdot\frac{1}{r} = r\cdot\frac{1}{r} = 1.$$

Rq $\left|\mathcal{C}_{|[0,2\pi]}\right| = \int_0^{2\pi} \underbrace{\|\mathcal{C}'(\theta)\|}_{r} = 2\pi r$

$$\left|\mathcal{C}_{[\theta_1,\theta_2]}\right| = |\theta_2 - \theta_1|\cdot r$$



d) Mq tangente au point $\mathcal{C}(t)$ est $\perp$ à $\overrightarrow{O\mathcal{C}(t)}$

$\mathcal{C}(\theta)$

courbe régulière $\Rightarrow$ tangente.

$T_{\mathcal{C}(\theta)} = D_{\mathcal{C}(\theta),\,\mathcal{C}'(\theta)}$ $\perp (O\mathcal{C}(\theta))$?

$\Updownarrow$

$$\mathcal{C}'(\theta) \perp \overrightarrow{O\mathcal{C}(\theta)} \iff \langle \mathcal{C}'(\theta) \,|\, O\mathcal{C}(\theta)\rangle = 0$$

$\langle \sim | \cdots \rangle = \langle r(-\sin\theta, \cos\theta) \,|\, r(\cos\theta, \sin\theta)\rangle$

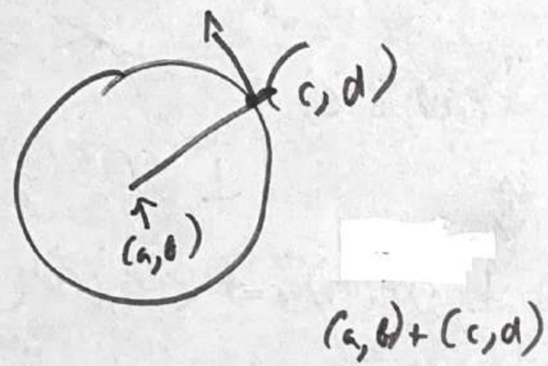
$= -r^2\sin\theta\cdot\cos\theta + r^2\cos\theta\sin\theta = 0$

e) Donner une paramétrisaθ de la tangente au point $\mathscr{C}(\theta)$.

$t \mapsto \mathscr{C}(\theta) + t\, \mathscr{C}'(\theta)$ est une paramétrisaθ de $D_{\mathscr{C}(\theta), \mathscr{C}'(\theta)}$

$t \mapsto (a + r(\cos\theta - t \sin\theta), b + r(\sin\theta + t\cos\theta))$

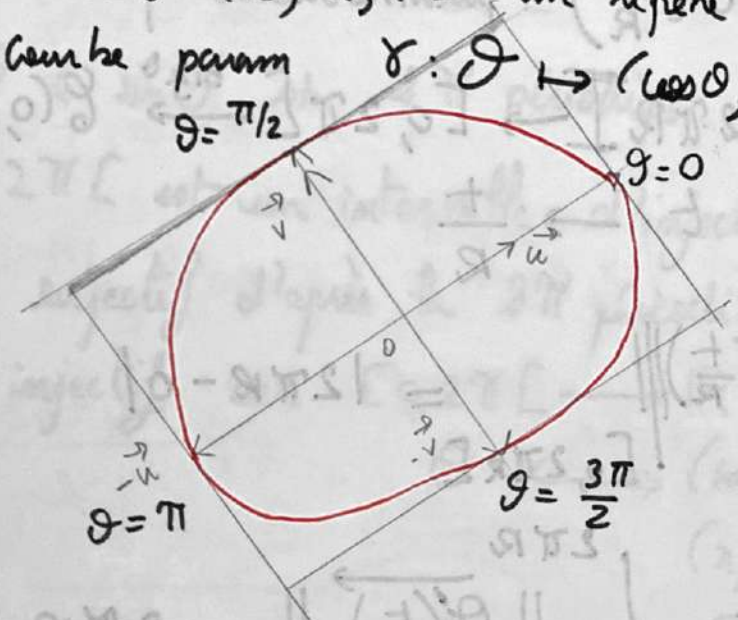
f) Donner



Ex5 Ellipse

soit $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthog.

Courbe param $\gamma : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)_{\mathcal{R}}$



$\gamma(\theta) = M_\theta$

la courbe est contenue ds $[-1,1]^2_{\mathcal{R}}$.

$O \to (\cos\theta, \sin\theta)_{\mathcal{R}} = O + \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{v} \} M_\theta$

$\underline{\theta = 0}$ $\quad O + 1.\vec{u} + 0.\vec{v} = O + \vec{u}$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad O + 0.\vec{u} + 1.\vec{v} = O + \vec{v}$.

a) $\mathcal{C}$ est un cercle ssi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \equiv \mathcal{C}(0, \|\vec{u}\|)$

si $\|\vec{u}\| \neq \|\vec{v}\|$:

$$OM_\theta = \sqrt{\cos^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \sin^2(\theta)\, \|\vec{v}\|^2}$$

car $\overrightarrow{OM_\theta} = \cos\theta\, \|\vec{u}\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta . \|\vec{v}\| . \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ainsi OM_θ oscille entre $\min(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$ et $\max(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$.

b) Mq qu'il s'agit d'une paramétrisaθ régulière.

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}}$ $\qquad \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$

$= -\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v}$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta\, \|\vec{v}\|^2} \geqslant$

$\geqslant \min(\|u\|, \|v\|)\, \underbrace{\sqrt{\sin^2 + \cos^2}}_{1}$

> 0

$\Rightarrow$ la courbe est régulière car $\gamma'(\theta) \neq 0 \quad \forall\, \theta$.

c) Si q^{lle} condition cette paramétrisation est "par longueur d'arc" ?

γ est paramétré par longueur d'arc si $\forall \theta \quad \|\gamma'(\theta)\| = 1$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2\theta \,\|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta \,\|\vec{v}\|^2} = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta \,\|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta \,\|\vec{v}\|^2 = 1$

$\Rightarrow (\theta = 0) \quad \|v\| = 1, \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right), \|u\| = 1$

et si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ ($\Leftrightarrow$ repère orthonormé)

$\Rightarrow \|\gamma'(\theta)\| = 1$

Dans ce cas l'ellipse est $\mathcal{C}(0,1)$.

(Parenthèse) Périmètre du cercle. ex2

- $t \mapsto \theta\left(\frac{t}{R}\right)$ paramétrisation par longueur d'arcs
- $[0, 2\pi R[\longrightarrow [0, 2\pi[\xrightarrow{\text{bij}^\circ} \mathcal{C}(0,R)$.

$t \longrightarrow \frac{t}{R}$

périm $\mathcal{C}(0,R)$

$\| \quad \left\|\theta\left(\frac{t}{R}\right)\right\|_{[0,2\pi R[} = |2\pi R - 0|$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi R} \underbrace{\left\|\overrightarrow{\theta'\left(\frac{t}{R}\right)}\right\|}_{1} = 2\pi R.$

e) Déterminer un intervalle maximal d'injectivité
$I = [\theta_{min}, \theta_{max}[$.

$\cos\theta$ & $\sin\theta$ st 2π périodiqs.

$[0,2\pi[$ est un intervalle d'injectivité max car surjectif d'après la 2π périodicité.

et injectif car

$$[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \hookrightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \xrightarrow[\text{Bij}]{\simeq} \underset{\mathbb{R}}{(x,y)_{\mathbb{R}}}$$

la composée est injective.

Notaᵗ: $\hookrightarrow$: injectif
$\simeq$: bijectif.

---

on dmq q ça reste vrai pr

$$\mu_1 f(x_1)+\mu_2 f(x_2)+\dots+\mu_n f(x_n) \le f(\mu_1 x_1+\dots+\mu_n x_n)$$

si $\sum \mu_i = 1$ (st des barycentres)

soit Γ la courbe géom. de $\gamma|_I$. on note $r_1 = \|\vec u\|$ et $\|\vec v\| = r_2$. Le support $\gamma(I)$ de γ est appelée ellipses de rayons r_1 et r_2, on note E.

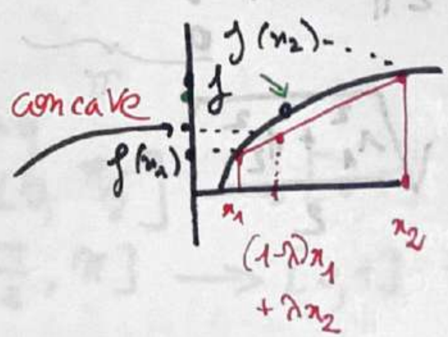
E le périmètre de la longueur $|\Gamma|$.

f) Mq $2\pi\frac{r_1+r_2}{2} \le |\Gamma| \le 2\pi\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{\sqrt{2}}$

Il faut q'on dmq que

$$2\pi\frac{r_1+r_2}{2} \le \int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta\, r_1^2+\cos^2\theta\, r_2^2}\,d\theta \le 2\pi\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{\sqrt{2}}$$

(R) si f est concave



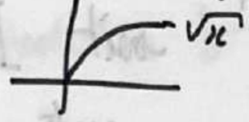
$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

$\to f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)$

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2) \le f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)$$

et $\int_I f(t)\,\underset{\mu(t)}{dt} \le f\left(\int_I \mu(t)\,dt\right)$ si $\int_I \mu(t)\,dt =$

Dans notre cas, $\sqrt{\cdot}$ est concave



$$\sqrt{\sin^2\vartheta\, r_1^2+\cos^2\vartheta\, r_2^2} \geqslant \sin^2\theta\sqrt{x_1^2}+\cos^2\theta\sqrt{r_2^2} = \sin^2\vartheta\, r_1+\cos^2\vartheta\, r_2$$

$$|\Gamma| \geqslant \int_0^{2\pi} r_1 \sin^2\vartheta\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} r_2 \cdot \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \pi(r_1+r_2) = 2\pi\,\frac{r_1+r_2}{2}.$$

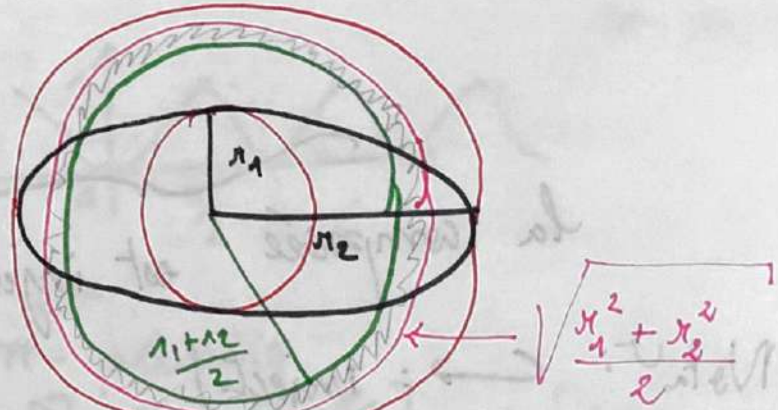
$$2\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\vartheta\, x_1^2+\cos^2\vartheta\, r_2^2}\times\frac{1}{2\pi}\,d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, r_1^2+\sin^2\vartheta\, r_2\ d\vartheta}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, r_1^2\, d\vartheta + 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\sin^2\vartheta\, r_2^2\, d\vartheta}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[r_1^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta}_{\pi} + r_2^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, d\vartheta}_{\pi}\right.}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$$



$r_1 < r_2$

$$r_1 \leqslant \frac{r_1+r_2}{2} \leqslant |\Gamma| \leqslant \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} \leqslant r_2$$

g) Mq $\exists !$ unique couple de pts $\{M_1, M_2\}$ tq $(M_1, M_2) = \max\limits_{A,B \in E} (AB)$

$AB \leq M_1 M_2$

$A, B \in \Gamma$.

$AB \leq AO + OB$

si $A = \gamma(\theta_\theta)$, $B = \gamma(\theta_B)$

$$OA = \sqrt{\cos^2\theta_A\, r_1^2 + \sin^2\theta_A\, r_2^2} \underset{\uparrow}{\overset{=}{\leq}} r_1$$

si $\cos\theta_A = 1$, $\theta_A = 0\ [\pi]$
ssi $\theta_A = 0$.

$$OB = \sqrt{\quad \theta_B \quad \theta_B \quad} \leq r_1$$

$$AB \leq OA + OB \leq 2r_1$$

$=$ ↑ $O \in [AB]$ ⇓ $A \neq B$

$\theta_A \equiv 0\ [\pi] \leftrightarrow \theta_A \in \{0, \pi\}$

$\theta_A \equiv 0\ [\pi] \leftrightarrow \theta_B \in \{0, \pi\}$

$\Rightarrow \{\theta_A, \theta_B\} = \{0, \pi\}$.

ainsi $AB \leq M_1 M_2$ si $M_1 = \gamma(0)$, $M_2 = \gamma(\pi)$.

h) cd qu'il n'y a que 2 symétries orthogonales q préservent cette ellipse.

si S une isométrie $\Rightarrow M_1' M_2' = M_1 M_2$

$S(\Gamma) = \Gamma$

$S(M_1) = M_1' \in \Gamma$

$S(M_2) = M_2' \in \Gamma$

$\Rightarrow M_1' M_2' = \max\limits_{A,B \in \Gamma} AB$

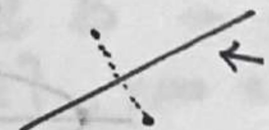
$\Rightarrow \{M_1', M_2'\} = \{M_1, M_2\} \Leftrightarrow M_1 = M_1'$ ou $M_1' = M_2$, $M_2' = M_1$

si S- symétrie:

et $M_1 = M_1'$ ($\Rightarrow M_2 = M_2'$)

$\Rightarrow M_1$ et $M_2 \in$ axe de symétrie

et si $M_1' = M_2$
et $M_2' = M_1$.



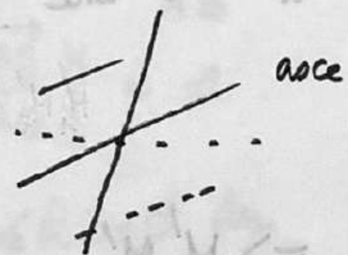
si $M_1' = M_2$ et $M_2' = M_1$ alors $\forall P$ tq

$$M_1 P = M_2 P.$$

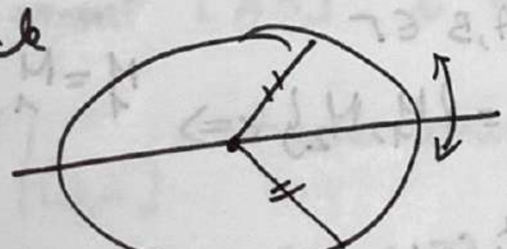
$$\Rightarrow M_1' P' = M_2' P' \quad \left(\text{ou } P' = S(P) \text{ car } S\text{-isométrie}\right)$$

$$\Rightarrow S\left(\mu_{[M_1,M_2]}\right) = \mu_{[M_1,M_2]}$$

$$\Rightarrow S = S_{\mu_{[M_1,M_2]}}$$

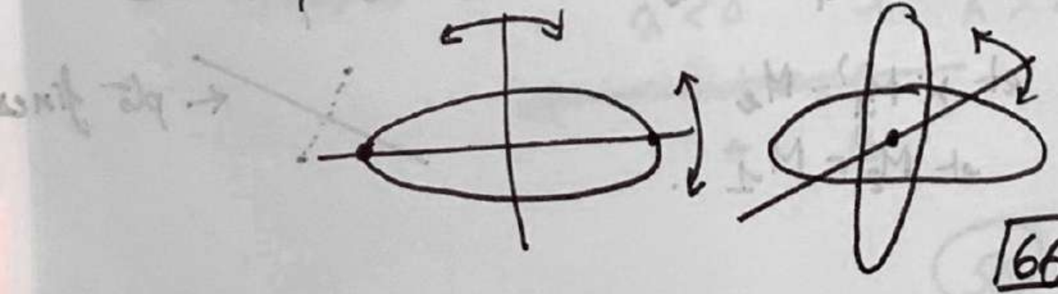


<u>NB</u> cercle



Un cercle a une qté d'axes de symétrie.

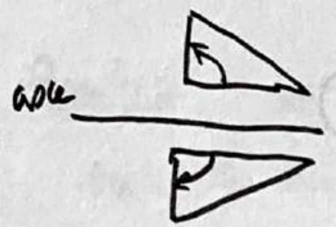
Une ellipse (non cercle) a seulement 2.

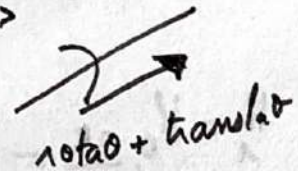


TD : 7 TRANSFORMATIONS & ISOMETRIES DU PLAN

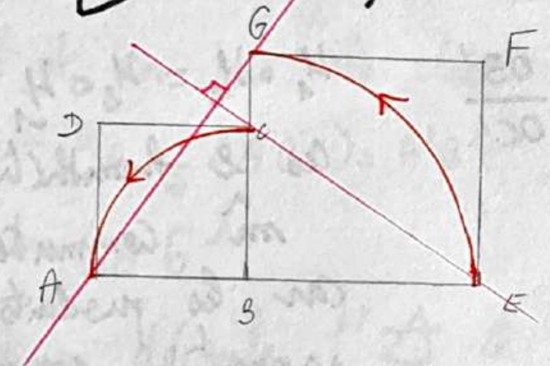
Ex 1 Isométrie du plan

↳ symétrie axiale, glissée, centrale
→ translaθ, rotaθ, réflexions





$R_{O,\pi} = H_{O,-1}$; $H_{O,1} = Id$



MI/ (analytiq)

- on se place repère @ $(B, \vec{BE}, \vec{BG})$
  on exprime ds ce repère, équa droites

MII/ Pr dmq 2 droites st $\perp$, ĝ ax rotaθs :

- mq qu'elles st images de 2 autres droites $\perp$
- $R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) = D_2$
- $R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) \,//\, D_2$

$\left.\begin{array}{l} R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) = D_2 \\ R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) \,//\, D_2 \end{array}\right\} D_1 \perp D_2$.

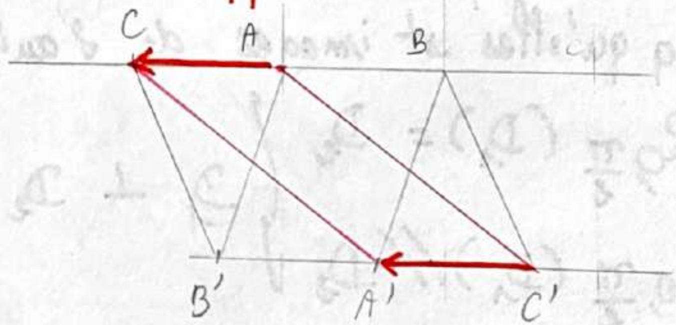
soit $R_{B,\frac{\pi}{2}} = R$ alors $\left.\begin{array}{l} R(E) = G \\ R(C) = A \end{array}\right\} \Rightarrow R((EC)) = (GA)$

$\Rightarrow (EC) \perp (GA)$ car l'une est l'image par rotaθ de $\frac{\pi}{2}$.

Ex 2 (TH de Pappus)

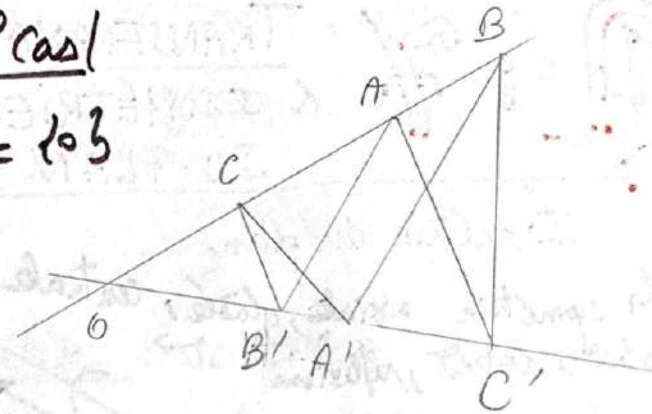
1° cas

$D // D'$



2° cas

si $D \cap D' = \{O\}$



Rq : On ne pt pas partir du principe que A, B, C & A', B', C' st disposés exact comme sur l'image. Mq $(AC') // (A'C)$.

$T_{\vec{AB}} = T_{\vec{B'A'}}$ car $ABA'B'$ ▱ $(\vec{AB} = \vec{B'A'})$

$T_{\vec{BC}} = T_{\vec{C'B'}}$ car $BCB'C'$ parallélog

On aimerait savoir $T_{\vec{AC}} = T_{\vec{C'A'}} \Rightarrow (AC') // (CA')$

∃ cette translatθ.

et ĉ $T_{\vec{AC}} = T_{\vec{BC}} \circ T_{\vec{AB}}$ et $T_{\vec{C'A'}} = T_{\vec{B'A'}} \circ T_{\vec{C'B'}}$

les translatθs commutent

$$T_{\vec{BC}+\vec{AB}} \qquad\qquad T_{\vec{B'A'}+\vec{C'B'}}$$

$$T_{\vec{AB}+\vec{BC}} = T_{\vec{AB}} \circ T_{\vec{BC}} = T_{\vec{B'A'}} \circ T_{\vec{C'B'}}$$

$H_1 = H_{O, \frac{OB}{OA}} = H_{O, \frac{OA'}{OB'}}$ (Thalès)

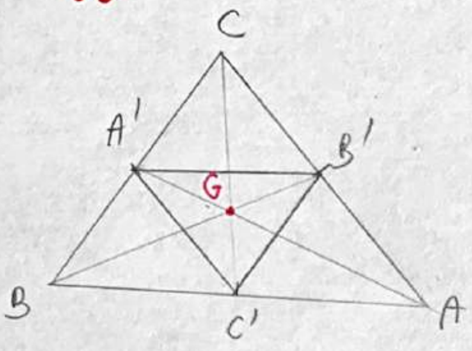
$H_2 = H_{O, \frac{OC}{OB}} = H_{O, \frac{OB'}{OC'}}$

$H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ ces 2 homothéties de m̂ centre commutent car les produits des rapports commutent.

On termine le cas 2 de m̂ façon que cas 1 ∆ H_1 & H_2 à la place de T_1 & T_2.

Ex 3 Polygone des milieux

a)



Analyse : si ABC existe, alors $A'B'C'$ sera le triangle des milieux de ABC.

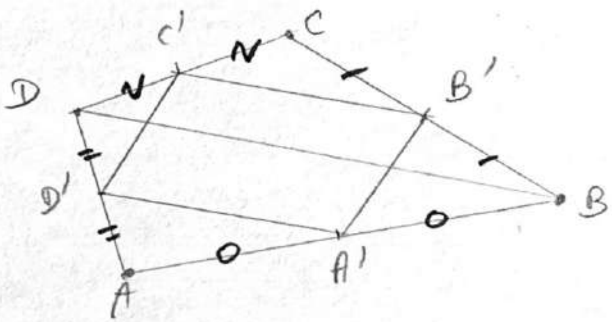
Et dc on sait les choses suivantes :

- $H_{G,-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C'$; $H_{G,-2}(A'B'C') = ABC$
- $G = G'$

Ainsi découle l'∃ & l'unicité de $ABC = H_{G,-2}(A'B'C')$

Une autre façon de voir les choses est que (CA) est l'uniq droite // $(A'C)$ q passe par B' et de m̂ pr les 2 autres.

b)



Analyse : si $ABCD$ existe.

Mq ce qu'on observe sr la fig, $A'B'C'D'$ parallélog.

En effet d'après TH des milieux (Thalès)

$\underbrace{\overrightarrow{D'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}_{\triangle ABD} = \overrightarrow{C'B'}$ ⇒ $A'B'C'D'$ paralléloĝ.

$\triangle CDB$

Ainsi on pt conclure directement que si $A'B'C'D'$ n'est pas un paralléloĝ alors $ABCD$ n'existe pas.

on pt mq si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_{A'}(A)$, $C = S_{D'}(B)$, $D' = S_{C'}(C)$ alors $S_{D'}(D) = A$

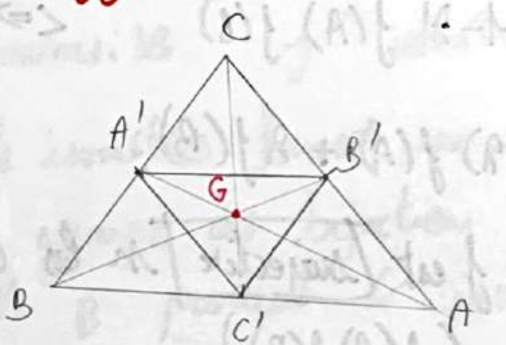
⇒ ∀ A, le $ABCD$ construit convient.

nbr impair pts ⇒ tjrs n gones tq ce n gones soit le $\frac{1}{2}$.

la m̂ chose fonne pr $2n$ points si condi° $\sum \overrightarrow{B_i B_{2i}} = 0$

Ex 3 Polygone des milieux

a)



Analyse : si ABC existe, alors A'B'C' sera le triangle des milieux de ABC.

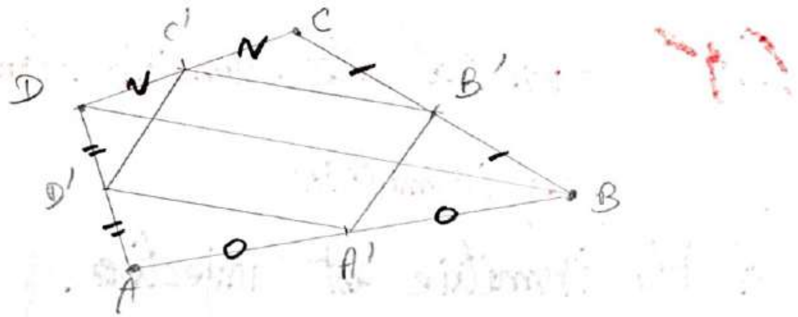
Et dc on sait les choses suivantes :

- $H_{G,-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C'$; $H_{G,-2}(A'B'C') = ABC$
- $G = G'$

Ainsi découle l'∃ & l'unicité de $ABC = H_{G,-2}(A'B'C')$

Une autre façon de voir les choses est que (CA) est l'uniq droite // (A'C') q passe par B' et de m̂ pr les 2 autres.

b)



Analyse : si ABCD existe, Mq ce qu'on observe sr la fig, A'B'C'D' parallélog.

En effet d'après TH des milieux (Thalès)

$$\underbrace{\overrightarrow{D'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}_{\triangle ABD} = \underbrace{\overrightarrow{C'B'}}_{\triangle CDB} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ paralléloĝ.}$$

Ainsi on pt conclure directement que si A'B'C'D' n'est pas un paralléloĝ alors ABCD n'existe pas.

on pt mq si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_{A'}(A)$, $C = S_{D'}(B)$, $D' = S_{C'}(C)$ alors $S_{D'}(D) = A$

$\Rightarrow \forall A$, le ABCD construit convient.

nbr impair pts ⇒ tjrs m gones tq ce m gones soit le $\frac{1}{2}$.

la m̂ chose fnne pr 2n points ss condi° $\sum \overrightarrow{B_i B_{i+1}} = 0$

Classificat° des isométries planes

Ex 6 Ppté isométries

a) Mq isométrie est injective.

on suppose $f(A) = f(B) \iff f(A)f(B) = 0 \iff \overset{\shortparallel}{AB} \iff A = B$.

si 2 images m̂ ⇒ 2 pts départ st m̂s. $\iff$ injective.

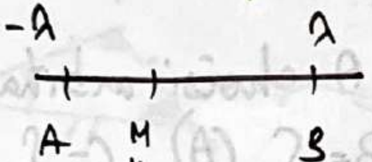
b) Mq isom f conserve l'alignement & l'ordre sr les droites.

$B \in [AC] \iff AB + BC = AC$

$\iff f(A)f(B) + f(B)f(C) = f(A)f(C)$

$\iff f(B) \in [f(A), f(C)]$.

c) Mq isom f préserve barycentres.



$M = (1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda AB$

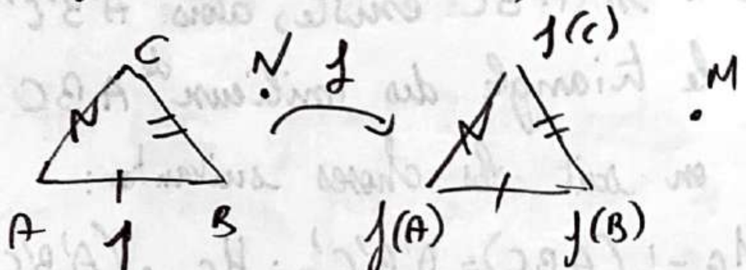
$\iff \begin{cases} AM = |\lambda|\, AB \\ BM = |1-\lambda|\, AB \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f(A)f(M) = |\lambda|\, f(A)f(B) \\ f(B)f(M) = |1-\lambda|\, f(A)f(B) \end{cases} \iff f$ affine.

$\iff f(M) = (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$.

d) d'après c) f est $\boxed{\text{surjective}}$ sr les droites.

$f((AB)) = (f(A)f(B))$



A, B, C base affine

⇕

A, B, C Vérifient les 3 inégalités triangulaires strictes $\iff f(A), f(B), f(C)$ base affine

$\forall M \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu, \nu,\ \lambda + \mu + \nu = 1$

$M \in \operatorname{Im} f$

$\iff M = \lambda f(A) + \mu f(B) + \nu f(C)$

$= f(\lambda A + \mu B + \nu C) = \cancel{f}$

symétries, ens. axiales, 3 Rotations, la néglige

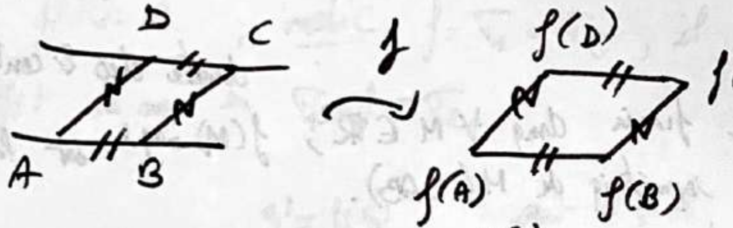
78

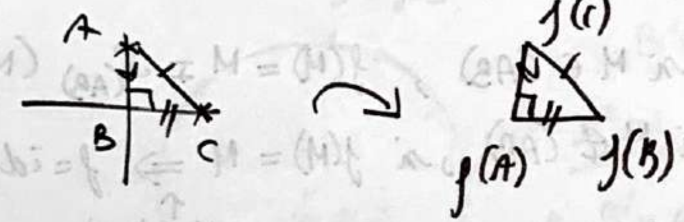
Vu en cours f, g isom si f & g le sont

f inversible f^{-1} isométrie.

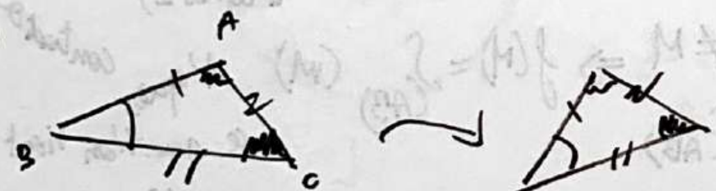
$\Rightarrow$ les isométries forment un ss-groupe du groupe des bijections (car ss-ens stable p produit & inverse.

e) Mq isom conserve parallélisme & $\perp$ té droites.





Pythagore.



Rq : les isométries préservent $\angle$ angles

p. affine angles bijective

Ex 7

a) Mq isom fixant 2 pts distincts A et B fixe les points de (AB).

soit $f(A) = A$, $f(B) = B$, soit $M \in (AB)$

$\Rightarrow \exists \lambda,\ M = (1-\lambda)A + \lambda B$

$\Rightarrow f(M) = (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$

$f(M) = (1-\lambda) A + \lambda B = M$.

b) Mq isom fixant 3 pts nalig = id.

soit $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$ & A, B, C non-alignés & soit $M \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \lambda, \mu, v$; $\lambda + \mu + v = 1$.

A, B, C base affine

$M = \lambda A + \mu B + vC \Rightarrow f(M) = \lambda f(A) + \mu f(B) + v f(C)$

$= \lambda A + \mu B + vC = M$

c) Mq isom fixant 2 pts distincts est l'idté ou une réflexion et on précisera l'axe.

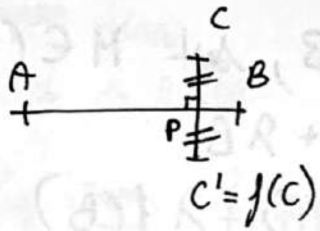
$f(A) = A$, $f(B) = B$, soit C non aligné à A & B

1° cas si $f(C) = C \overset{b}{\Rightarrow} f = \mathrm{Id}$

2° cas si $f(C) \neq C$ (indic 1) Mq $f(C) = C'$ sym $C/(AB)$
2) Mq $f = S_{AB}$

Mq si $f(C) \neq C$ alors $f(C)$ & C st symétiqs p/ $(AB) \Leftrightarrow (AB)$ médiatrice de $[Cf(C)]$

M1

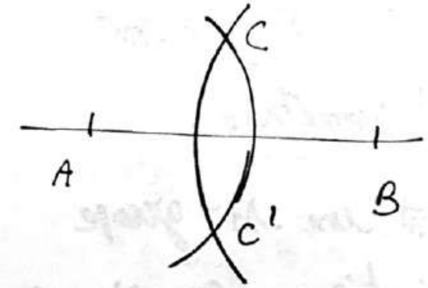


soit $D \ni C$, $D \perp AB$,
$P := D \cap (AB)$

D'après a), $f(P) = P \Rightarrow f(D) \ni P$ et
comme $D \perp (AB) \Rightarrow f(D) \perp f(AB) = (AB)$
$\Rightarrow f(D)$ est la droite $\perp (AB)$ si p $P \Rightarrow f(D) = D$
$\Rightarrow f(C) \in D$ (car $f(C) \in f(D) = D$)

et comme $CP = f(C)f(P) = f(C)P$ et ĉ $C \neq f(C)$
$\Rightarrow P$ milieu de $[C\underbrace{f(C)}_{C'}] \Rightarrow (AB) \perp D = (CC')$
et $(AB) \ni P$ milieu de $[CC']$
$\Rightarrow (AB)$ médiatrice de $[CC']$.

M2



2 cercles q se coupt en 2 pts
CC' est médiatrice de (AB).
$\Rightarrow C$ sym $/(AB)$ C'.

$\rightarrow$ $C \in \mathcal{C}(A, AC) \cap \mathcal{C}(B, BC)$ et comme
$f(C)A = CA$
$f(C)B = CB$
$\Rightarrow C' \in \mathcal{C}(A, AC) \cap \mathcal{C}(B, BC)$
$\Rightarrow$ si $C' \neq C \Rightarrow C'$ symétiq $C/(AB)$
droite des 2 centres de cercle.

Pr finir dmq $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $f(M) = M$) est la symétriq de $M/(AB)$.

M1 si $M \in (AB)$, $f(M) = M = S_{(AB)}(M)$
si $M \notin (AB)$, si $f(M) = M \Rightarrow f = id \Rightarrow f(C) = C$!!
d'après 1)

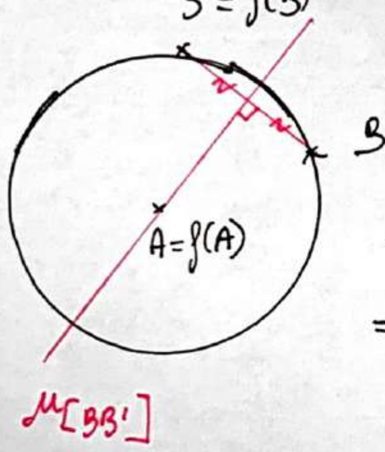
$\Rightarrow f(M) \neq M \Rightarrow f(M) = S_{(AB)}(M)$ d'après ce que l'on vient de voir pr C. contradiction
$\Rightarrow f = S_{(AB)}$

[N°2] $S_{(AB)} \circ f : \begin{cases} A \to A \\ B \to B \\ C \to C \end{cases} \Rightarrow S_{(AB)} \circ f = Id$

* on compose $S_{(AB)}$ à gauche des 2 côtés $\Rightarrow f = S_{(AB)}$

d) Mq isom fixant un point comme produit d'au plus 2 réflexions.

soit $f(A) = A$; indic $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$, il suffit de mq $\sigma_1 \circ f = \sigma_2$



soit $B \neq A$, $B' = f(B)$

1° cas

si $B' = B$ $\Rightarrow f = Id$ (produit de 0 ou 2 fois m̂ réflexion)

2° cas si $B' \neq B$, soit $D = \mu_{[BB']}$ la médiat de $[BB']$

• $S_D(A) = A$ car $A \in D$ car $AB = AB'$ car $AB = f(A)f(B)$ (f isométrie)

$S_D(B') = B$ car $D = \mu\,[BB']$. ▲

▲ $\Rightarrow S_D \circ f(A) = A$

$S_D \circ f(B) = B$

$S_D \circ f$ est une isométrie. (comme la composée de 2 isométries)

$\overset{c)}{\Longrightarrow} S_D \circ f = \begin{cases} Id \\ \sigma \text{ - réflexion} \end{cases} \Leftrightarrow f = \begin{cases} f = S_D \ * \\ f = S_D \circ \sigma \ ** \end{cases}$

* produit de 1 réflexion

** produit de 2 réflexions.

e) Conclure que tte isom est produit d'au plus 3 réflexions.

si $f(A) = A'$ si $A = A' \to$ cqfd d'après d)

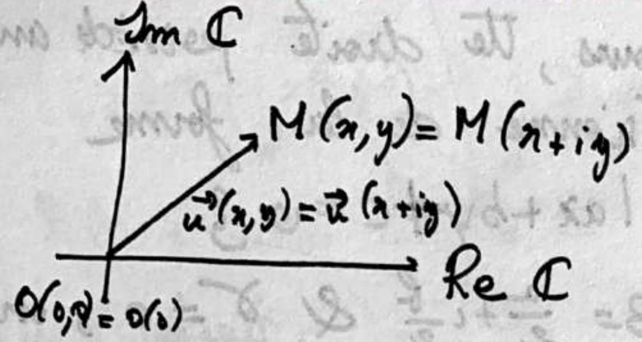
si $f(A) \neq A'$ $\underbrace{S_{\mu[AA']} \circ f}_{\text{isométrie q fixe un point} \Rightarrow \text{produit d'au plus 2 isom}}(A) = A$

$\Leftrightarrow \sigma_1 \circ f = \sigma_2 \circ \sigma_3 \Leftrightarrow f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$

Toute isométrie est la composée d'au plus 3 réflexions.

TD8 : Nombres Complexes

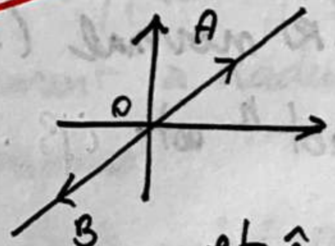
(R1)



$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$\in \mathbb{R}^2$ $\in \mathbb{C}$

Ex1 (Droites)



O, A, B alignés

$\Updownarrow$

$\vec{OA} \parallel \vec{OB}$

et c' $\vec{OA}(a-0) = \vec{OA}(a)$

$\vec{OB}(b-0) = \vec{OB}(b)$

$\vec{OA} \parallel \vec{OB}$

$\Updownarrow$ $\Leftrightarrow a = \lambda b \ (\lambda \in \mathbb{R})$

(si $B \neq 0$) $\vec{OA} = \lambda \vec{OB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

(si $B = 0$) pas de condit°

R4 : $\vec{OA}$ & $\vec{OB}$ m̂ sens si $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

si $B \neq 0$, A, O, B alignés (ds cet ordre)

ssi $a = \lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp. $\lambda \in \mathbb{R}^+$)

si "$\int^t$" entre A & B.

$a = \lambda b \iff a\bar{b} = \lambda \underbrace{b\bar{b}}_{|b|^2 > 0}$ (resp $\in \mathbb{R}^*$

si $B = 0$ $(b = 0)$

A, O, B st alignés (& O entre A & B, mais pas "$\int^t$")

et ds ce cas $a\bar{b} = 0 \in \mathbb{R}, \in \mathbb{R}_+$ & $\notin \mathbb{R}_+^*$.

en ccl A, O, B alignés ssi $a\bar{b} \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}$+, A, O, B ds cette ordre ssi $a\bar{b} \in \mathbb{R}_-$

& $O \in]A, B[$ ssi

Son pur

$\vec{u} \times e^{i\theta}$ $\Rightarrow$ rotaθ

$\vec{u} \times$ réel $\Rightarrow$ homothétie.

$\boxed{70}$

2) Mq

<u>Indic</u> : soit $\beta = a+ib$, $z = x+iy$,
$a, b, x, y, \gamma \in \mathbb{R}$.

Qᵉ est l'ens $\{\bar\beta z + \beta\bar z + \gamma = 0\}$?

Qᵉ est lien entre $\bar\beta z$ & $\beta\bar z$?

<u>Répn:</u> $\overline{\bar\beta z} = \bar{\bar\beta}\,\bar z = \beta\bar z$.

$$\bar\beta z + \beta\bar z = 2.\,\mathrm{Re}(\bar\beta z).$$

$$\to \bar\beta z + \beta\bar z = 2\,\mathrm{Re}(\bar\beta z)$$
$$= 2\,\mathrm{Re}((a-ib)(x+iy))$$
$$= 2\,[\underbrace{ax+by}_{\text{produit scalaire}}]$$

produit scalaire ,, $\mathrm{Re}(\bar\beta z)$

$$ax+by = \frac{\bar\beta z + \beta\bar z}{2} = \langle \vec u, \vec v \rangle$$

$\{\bar\beta z + \beta\bar z + \gamma = 0\} = \{(x,y) \mid 2ax+2by+\gamma=0\}$

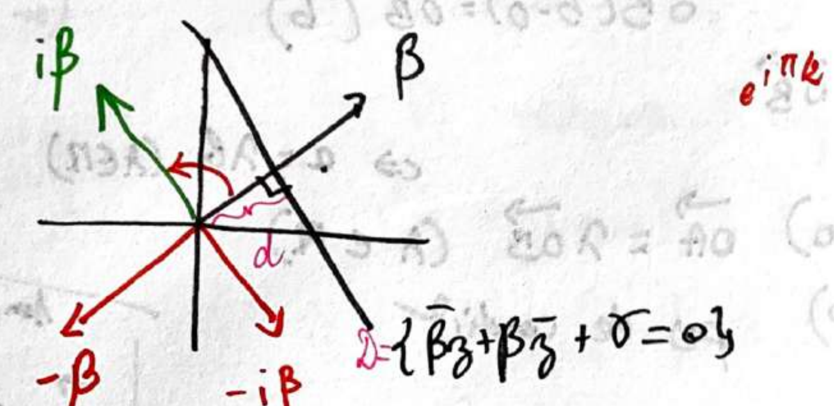
D'après le cours, tte droite possède une équat° cartésienne de la forme

$$\{(x,y) \mid ax+by+c=0\}$$

en posant $\beta = \frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$ & $\gamma = c$, on trouve ~~que~~ d'après (*) que $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar\beta z + \beta\bar z + \gamma = 0\}$ est une équat° complexe de cette m̂ droite.

Rq : β est l'affixe d'un vectʳ normal $(2(a,b))$ & l'affixe d'un vectʳ directⁿ est $i\beta$.

La distce $d(0, \mathcal{D}) =$



16

$\bar z = a - ib$ conjugué de z

c) $\{\overline{\beta_1} z + \beta_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0\} \parallel \{\overline{\beta_2} z + \beta_2 \bar{z} + \gamma_2 = 0\}$

ssi $\beta_1 \overline{\beta_2} \in \mathbb{R}$ (q a) ex 1)

($\Leftrightarrow \overline{\beta_1} \beta_2 \in \mathbb{R}$)

($\Leftrightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbb{R}$)

Rq $\{\overline{\beta_1} z + \beta_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0\} = \{\overline{\beta_2} z + \beta_2 \bar{z} + \gamma_2 = 0\}$

ssi $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Leftrightarrow \beta_1 \gamma_2 = \beta_2 \gamma_1 \Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$

soit $\mathcal{D}: x + 2y = 1$

d) Équa° complexe de $\mathcal{D}$:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\frac{1}{2} + i)\bar{z}$

$+ (\frac{1}{2} - i) z - 1 = 0$

$a, b \rightarrow \frac{a}{2} + i \frac{b}{2}$

e) Déterm. ttes équa°s complexes q définissent la m̃ droite $\mathcal{D}$. où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$\{z \in \mathbb{C} \mid (\frac{\lambda}{2} + \lambda i)\bar{z} + (\frac{\lambda}{2} - \lambda i) z - \lambda = 0\}$

f) Det ttes équa°s compl q déf droite // à $\mathcal{D}$

$\{z \in \mathbb{C} \mid (\frac{1}{2} + i)\bar{z} + (\frac{1}{2} - i) z + \gamma = 0\}$ $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

g) Dét. $\vec{\mathcal{D}}$, // à $\mathcal{D}$ q passe par O.

$\vec{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\frac{1}{2} + i)\bar{z} + (\frac{1}{2} - i) z = 0\}$

cas $\gamma = 0$

h) Dét Éq comp. q Défin // à $\mathcal{D}$ & passe par $A = (2,1)$ et

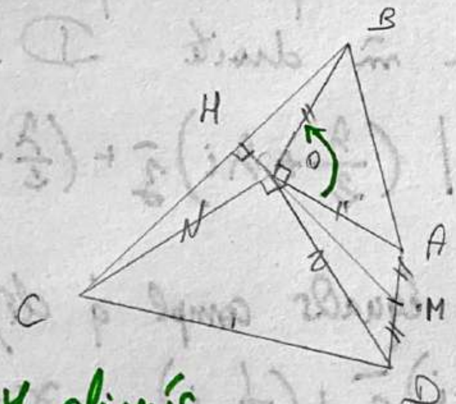
$\{z \in \mathbb{C} \mid (\frac{1}{2} + i)\bar{z} + (\frac{1}{2} - i) z =$

$= (\frac{1}{2} + i)(\overline{2+i}) + (\frac{1}{2} - i)(2+i)$

$= 4$

i) 

Ex 2 :



a) Mq M, O, H alignés.

Indic on note a, b, c, d les affixes des pts, A, .., H

en supposant $O = 0$ (zéro)

comment se traduit l'énoncé en termes d'équats complexes ?

Δ AOB rectgl isocèle en O $\iff b = ia$ (resp. $b = -ia$ si l'orientat° inverse.)

Δ COD ——————— $\iff d = ic$ ($d = -ic$)

M milieu de [AD] $\iff m = \frac{a+d}{2}$

$OH \perp CB \iff \pm ih\,(\overline{c-b}) \in \mathbb{R}$

$\iff h\,(\overline{c-b}) \in i\mathbb{R}$

Ainsi si $b = ia$, $d = ic$; $-ib = a$

$\Rightarrow m = \frac{a+d}{2} = \frac{i(-b+c)}{2} = i\,\frac{c-b}{2}$

Ainsi $\overrightarrow{OM}(m) \perp \frac{\overrightarrow{BC}}{2}\left(\frac{c-b}{2}\right)$

$\iff (OM) \perp (BC)$

ccl $(OH) = (OM)$ car $(OH) \perp (BC)$

cqfd.

RQ m̂ chose + signe "−" pr $b = -ia$, $d = ic$.