Feuille 3 II, Exercice 3 (Intégrales curvilignes).

Calculer l'intégrale curviligne $Q := \int_{\Gamma} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle$ dans les cas suivants.

Méthode générale : On paramètre la courbe Γ par une fonction C^0 et C^1 par morceaux

$$\vec{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

où I intervalle fermé. $\vec{\gamma}$ injective $\vec{\gamma}(I) = \Gamma$.

Par définition

$$\int_{\Gamma} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_I \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt$$

Il y a ici une ambiguïté : En effet pour tout changement de variable bijectif et C^1 $u : J \longrightarrow I$

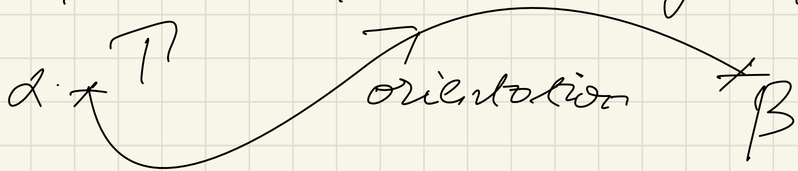
$\tilde{\gamma} := \vec{\gamma} \circ u : J \longrightarrow \Gamma$ est un autre paramétrage de Γ et on a (par formule de chg^t de var.)

$$\int_J \vec{V}(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \tilde{\gamma}'(s)\, ds = \mathcal{E}(u) \int_I \vec{V}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

où $\mathcal{E}(u) = \pm 1$

est le signe de u' (qui est constant sur J)

Pour lever l'ambiguité, il faut préciser une orientation sur Γ : un sens de parcours de Γ par le paramétrage $\vec{\gamma}$.



$$I = [a,b] \qquad \vec{\gamma}(a) = \alpha, \ \vec{\gamma}(b) = \beta$$

Dans le cas d'une courbe fermée, on choisira l'orientation donnée par le sens trigonométrique

(1) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$ Γ courbe $\begin{cases} y = x^2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

parcourue dans le sens des x croissants.

On paramètre Γ en fonction de x par

$$\vec{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad -1 \leq x \leq 2$$

on a

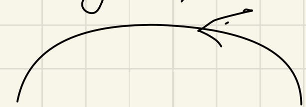
$$Q_1 = \int_{-1}^{2} \begin{pmatrix} x^3 \\ x + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} dx = \int_{-1}^{2} (3x^3 + 2x^2) dx$$

$$= \frac{3}{4}\left(2^4 - 1^4\right) + \frac{2}{3}\left(2^3 + 1^3\right) = \frac{69}{4}.$$

(2) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\quad (x,y) \in \Gamma \iff \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ 0 \leq y. \end{cases}$

Γ est la moitié supérieure $(y \geq 0)$ de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$


Γ

On paramètre Γ par $\vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad \theta \in [0, \pi]$

Donc

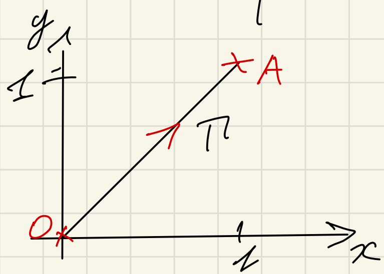
$$Q_2 = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin^2\theta \\ 4\cos^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= -2 \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^3\theta}_{\sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta} \, d\theta + 4 \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^3\theta \, d\theta}_{=0}$$

$$= -2 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = -\frac{8}{3}.$$

(3) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y \sin x \\ x \cos y \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma = [\overrightarrow{OA}]$ avec $A = (1,1)$.

On paramètre $\overrightarrow{OA}$ par $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0,1]$



On a

$$Q_3 = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t \sin t \, dt + \int_0^1 t \cos t \, dt$$

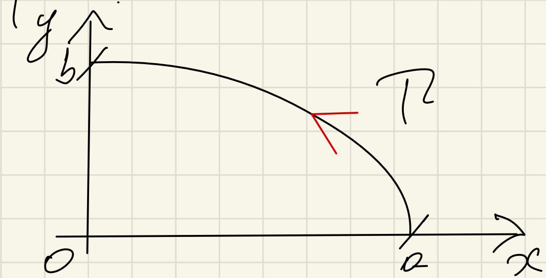
$$\underset{\text{ipp}}{=} \Big[t(-\cos t)\Big]_0^1 + \int_0^1 \cos t \, dt + \Big[t \sin t\Big]_0^1 - \int_0^1 \sin t \, dt$$

$$= -\cos 1 + \sin 1 + \sin 1 + (\cos 1 - 1)$$

$$= 2 \sin 1 - 1.$$

(4) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 ; x,y \geq 0 \right\}$

Γ est un 1/4 d'ellipse qu'on paramètre dans le sens trigonométrique



On utilise le paramétrage

$$\vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Q_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= (b^2 - a^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]'} d\theta = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

(5) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \end{pmatrix}$

Γ est le bord du domaine

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \leq 0 \quad x^2+y^2-2y \leq 0 \}$

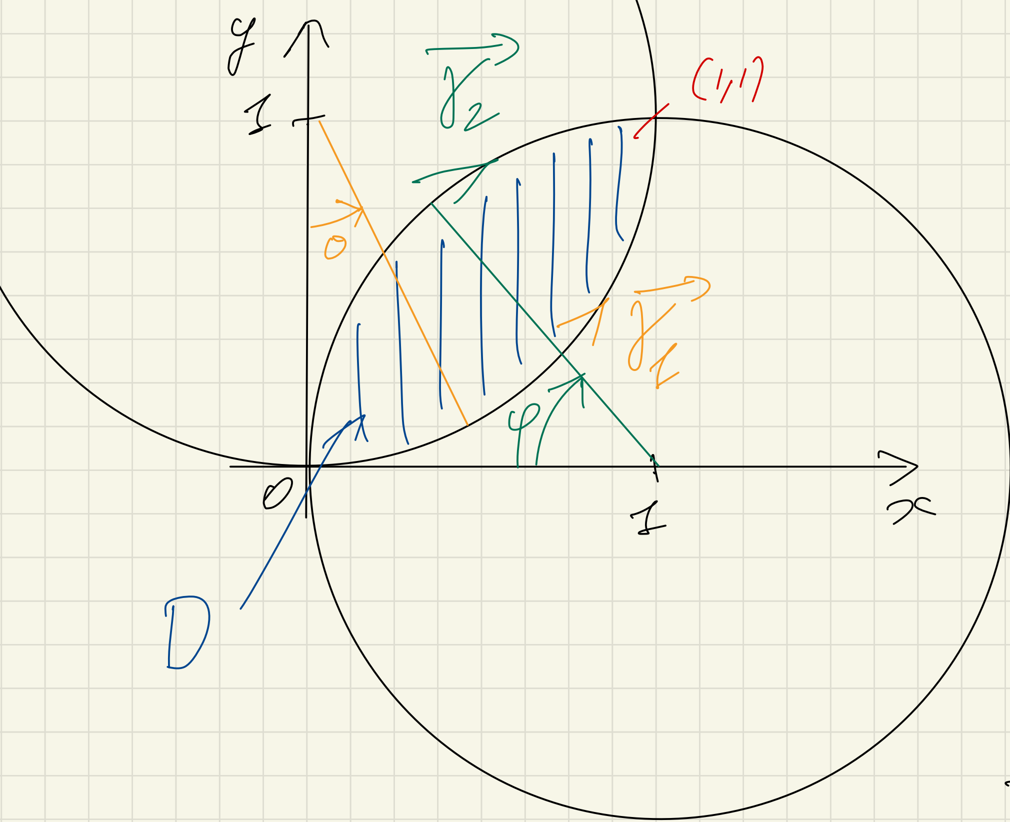
parcouru dans le sens trigonométrique.

Tout d'abord, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$x^2+y^2-2x \leq 0 \iff (x-1)^2+y^2 \leq 1$

$x^2+y^2-2y \leq 0 \iff x^2+(y-1)^2 \leq 1$

D est donc l'intersection de deux disques



Γ est formé de deux $\frac{1}{4}$ de cercles qu'on paramètre respectivement par

$$\vec{\gamma}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

et

$$\vec{\gamma}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1-\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

On a :

$$Q_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{V}(\vec{\gamma_1}(\theta)) \cdot \vec{\gamma_1}'(\theta)\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{V}(\vec{\gamma_2}(\varphi)) \cdot \vec{\gamma_2}'(\varphi)\, d\varphi$$

Le signe moins vient du fait que $\vec{\gamma_2}$ n'a pas la bonne orientation.

$$Q_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 2-2\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\underline{\cos\theta} - \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - \sin^2\theta - \underline{2\cos\theta} + 2\cos^2\theta \right) d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\cos\theta}\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

Exercice 4 (Voir énoncé sur la feuille)

(1) Par définition

$$Q := \int_{\Gamma} \langle V , d\gamma \rangle = \int_0^1 V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

Ici V est un gradient $V(x,y) = \nabla f(x,y)$ et par la règle de différentiation des fonctions composées

$$\frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

d'où

$$Q = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(x) - f(x_0)$$

---

(2) Clairement Q ne dépend que de x_0 et x et pas de γ :

Si $\tilde{\gamma}$ est un autre arc de classe C^1 x_0 à x, on a par (1)

$$\int_{\tilde{\gamma}} \langle V, d\tilde{\gamma} \rangle = f(x) - f(x_0) = \int_{\gamma} \langle V, d\gamma \rangle .$$

---

(3) Si γ est une courbe fermée, alors $\gamma(1) = \gamma(0)$ donc par (1)

$$\int_\gamma \langle V, d\gamma \rangle = \underbrace{f(\underbrace{\gamma(1)}_{=\gamma(0)})}_{=f(\gamma(0))} - f(\gamma(0)) = 0.$$

---

(4) On va écrire les intégrales sous la forme $Q = \int_\Gamma \langle V, d\gamma \rangle$ avec $V \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

on va voir que dans chaque cas, $V = \nabla f$ pour un certain potentiel f.

Par (1) $\quad Q = f(B) - f(A)$

(a) $V_a(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $V_a \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $V_a(x,y) = \nabla f_a(x,y)$ où $f_a(x,y) = xy$

On a par (1) $Q_a = f_a(B) - f_a(A)$

$= 4 - (-3) = 7$

(b) $V_b(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ $V_b \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et $V_b = \nabla f_b$

avec $f_b(x,y) = x^2 y$, on a par (1)

$Q_b = f_b(B) - f_b(A) = -4 - 0 = -4$

(c) $V_c(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+2xy-y^2 \\ x^2-2xy-y^2 \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$

et $V_c = \nabla f_c$ avec $f_c(x,y) = x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3}$

$$Q_c = f_c(B) - f_c(A) = 3^3 - \left(\frac{-(-3)^3}{3}\right)$$

$$= 3^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 18$$

Exercice 5 Soit D le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

D est troué : on dit qu'il n'est pas simplement connexe (notion de topologie)

On pose $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ avec

$\forall x,y \in D \quad P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(1) Montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sur D.

C'est un calcul direct : on a pour $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y^2)} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\|$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) Démontrer que $\int_{C^+} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = 2\pi$ où C^+ est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique

Utilisons le paramétrage de C^+ $\vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$\vec{\gamma}'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\vec{V}(\gamma(\theta)) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

d'où

$$\int_{C^+} \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(\theta)) \cdot \vec{\gamma}'(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1$$

$$= 2\pi.$$

(3) Peut-on affirmer que $\vec{V}(x,y)$ est un champ de gradient sur D ?

D'après l'exercice 4.(3) si $\vec{V}$ était de la forme ∇f dans D, alors on aurait pour toute courbe de classe C^1 fermée $\gamma : [0,1] \to D$ ($\gamma(0) = \gamma(1)$)

$$\int_\gamma \langle \vec{V}, d\gamma \rangle = 0$$

Or ce n'est pas vrai pour C^+

on peut utiliser le changement de variable

$$u : [0,1] \longrightarrow [0, 2\pi]$$
$$t \longmapsto 2\pi t$$

pour obtenir un chemin fermé γ = pour

de $[0,1]$ sur C^+

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

On a $\displaystyle\int_{C^+} \langle V, d\gamma \rangle = 2\pi \neq 0.$

On remarque que si $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est C^1 et satisfait les relations de Poincaré

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

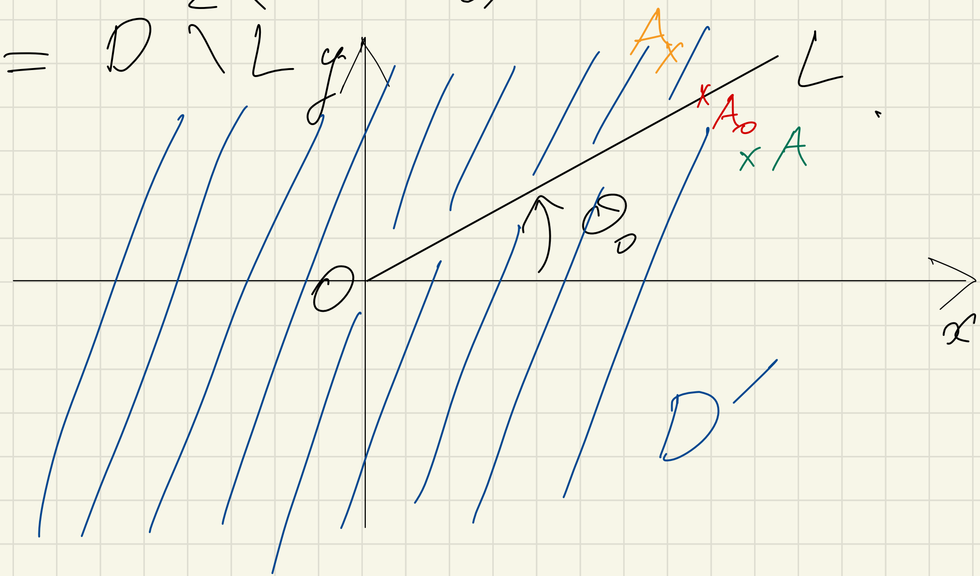
ce n'est pas suffisant pour que V soit un champ de gradient.

<u>C'est pourtant presque vrai :</u>

- Revenons à l'exemple de l'exercice.

Posons $L = \{(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0), r > 0\}$

et $D' = D \setminus L$



Pour $(x,y) \in D'$ on peut écrire de manière unique

$$(x,y) = \left(r(x,y)\cos(\theta(x,y)) , r(x,y)\sin(\theta(x,y)) \right)$$

avec $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} > 0$

et $\theta(x,y) \in \left] \theta_0 , \theta_0 + 2\pi \right[$.

θ_0 peut être définie explicitement à l'aide des fonctions trigonométriques arctan et arccotan. On a en effet

$$\begin{cases} \tan(\theta(x,y)) = y/x & \text{si } x \neq 0 \\ \text{cotan}(\theta(x,y)) = x/y & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

De la sorte, on voit que θ est de classe C^∞.

On calcule ds la région $x \neq 0$, d'une part :

$$\frac{\partial}{\partial x} \tan(\theta(x,y)) = \frac{1}{\cos^2(\theta(x,y))} \frac{\partial}{\partial x}\theta(x,y)$$

d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tan(\theta(x,y))\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2}$$

On a donc si $x \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\theta(x,y) = \frac{-y}{x^2}\cos^2(\theta(x,y)) = \frac{-y}{x^2+y^2} = P(x,y).$$

On vérifie de même $\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$

De même si $y \neq 0$ on a les mêmes formules, on a donc

$$V(x,y) = \nabla \theta(x,y) \text{ ds } D'.$$

Ainsi V est bien un champ de gradient dans D'. Par contre θ ne se prolonge pas de manière continue dans D : on a pour $A_0 \in L$

$$\lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} > 0}} \theta(A) = \theta_0 \neq \lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} < 0}} \theta(A) = \theta_0 + 2\pi$$

(Voir figure)

Le résultat général est le suivant.
Si D est un domaine régulier simplement connexe (homéomorphe au disque unité) et si $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur D et satisfait les relations de Poincaré

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{dans } D$$

Alors V est un champ de gradient dans D.

Exercice 6 (Voir énoncé sur la feuille)

(1). On écrit $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ (dans l'énoncé $Q = 0$ mais nous traitons ici le cas général)

$$\int_\alpha \langle V \cdot d\alpha \rangle = \int_0^1 V(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} V(\alpha_1(2t)) \cdot 2\alpha_1'(2t)\, dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 V(\alpha_2(2t-1)) \cdot 2\alpha_2'(2t-1)\, dt$$

On fait le changement de variable

$$2t = s \qquad 2dt = ds$$

dans la première intégrale et

$$2t-1 = r \qquad 2dt = dr$$

dans la seconde. On a

$$\int_\alpha \langle V, d\alpha \rangle = \int_0^1 V(\alpha_1(s)) \cdot \alpha_1'(s)\, ds + \int_0^1 V(\alpha_2(r)) \cdot \alpha_2'(r)\, dr$$

$$= \int_{\alpha_1} \langle V, d\alpha_1 \rangle + \int_{\alpha_2} \langle V, d\alpha_2 \rangle .$$

$\square$

(2)

$$\int_{\alpha^*} \langle V, d\alpha^* \rangle = \int_0^1 V(\alpha^*(t)) \cdot (\alpha^*)'(t)\, dt$$

$$= -\int_0^1 V(\alpha(1-t)) \cdot \alpha'(1-t)\, dt$$

$$\underset{s=1-t}{=} -\int_0^1 V(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\, ds$$

$$= -\int_\alpha \langle V, d\alpha \rangle .$$

$\square$