M4L

CI / Dualité

§1: Formes linéaires & l'espace dual

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le corps de base.

soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applicaOs $E \to F$ $\mathbb{K}$-linéaire.

- $\mathcal{L}(E,F)$ est un e.v :

(i) la somme :

$\varphi, \psi : E \to F$ $\mathbb{K}$-linéaire $\rightsquigarrow \varphi + \psi : E \to F$, $x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$

(ii) la multiplicaO par scalaire :

$\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi : E \to F$ $\mathbb{K}$-linéaire $\rightsquigarrow \lambda\varphi : E \to F$, $x \mapsto \lambda\varphi(x)$

(D)$_1$ Lorsque $F = \mathbb{K}^1$, on appelle les élts de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^1)$ formes linéaires sur E, et on appelle $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^1)$ espace dual de E.

- NotaO : $\boxed{\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^1) = E^*}$

→ Lorsque $\dim E = n$, $\dim F = m$, on a : $\dim \mathcal{L}(E,F) = m.n$. En choisissant des bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ dans E, F respectivement.

On pt représenter les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ par des matrices :

l'applicaO :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \end{array}$$

est une bijecO linéaire.

Lorsque $F = \mathbb{K}^1$, $m = \dim F = 1$;

$\mathbb{K}^1$ a la base canonique $1 \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

Donc la matrice de forme linéaire est une ligne, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\forall \varphi \in E^*$

Lors d'un changement de base
$$\mathcal{E} = (e_i) \xrightarrow{T} \mathcal{E}'(e_i'),$$
la matrice d'une forme linéaire se transforme suivant la règle

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi).T}$$

Rq : Dans le cas général de $\mathcal{F}$ qq, la règle de transformaᵒ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$) est

$\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{E}'$, $\mathcal{F} \xrightarrow{S} \mathcal{F}'$

$\rightsquigarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)$

Les hyperplans

(Rd) Un hyperplan de E est un $\mathbb{K}$-e.v de E de dim $n-1$, où $n = \dim E$.

$(P)_1$ - soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul.

(i) Pour tte forme linéaire ℓ non nulle pour E, son noyau $\ker \ell$ est un hyperplan de E.

(ii) Pour tout hyperplan H de E, il existe une forme linéaire ℓ non nulle sur E, unique à un facteur non nul près, tq $\ker \ell = H$.

DM On a pour $\ell \in E^*$: Mq (i)

$\dim \ell + \dim \ker \ell = n = \dim E$

De plus, $\{0\} \subset \mathrm{Im}(\ell) \subset \mathbb{K}^1$,

d'où $\dim \mathrm{Im}\, \ell \in \{0,1\}$. Donc pour $\ell \in E^*$, on a

$\ell \neq 0 \iff \mathrm{Im}\, \ell = \mathbb{K}^1 \iff \dim \mathrm{Im}\, \ell = 1$

$\iff \dim \ker \ell = n-1$

$\iff \ker \ell$ est un hyperplan. (i) dmq'

Mq (ii) soit H un hyperplan. Choisissons une base qq $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H et complétons la à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

Définissons $\varphi : E \to \mathbb{K}^1$ par la matrice $(0, \dots, 0, 1)$:

$$\varphi : x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \mathrm{Mat}(\varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_n .$$

On a bien $\ker \varphi = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$. $\exists$ mqé

soit $\psi \in E^*$ une autre forme linéaire sur E tq $\ker \psi = H$. soit A matrice,

$A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(\psi)$, $A = (a_1, \dots, a_n)$ alors

$$\forall i = 1, \dots, n-1, \quad \psi(e_i) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i = 0$$

②

(car $e_i \in H$ et $H = \ker \psi$),

donc $A = \underbrace{(0,\dots,0,a_n)}_{Mat_{(e_i)}(\psi)} = a_n(0,\dots,0,1)$,

ie $\psi = a_n \cdot \varphi$. enfin $a_n \neq 0$

car $\psi \neq 0$ □

Base duale

(P2) soit E un $\mathbb{K}$ e-v, de dim n, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ où pour chaque $i = 1, \dots, n$

$$e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

est la forme linéaire associant à tout vecteur de E son $\boxed{i\text{-ième}}$ $\boxed{\text{coordonnée}}$ de la base $\mathcal{E}$, est une base de E^*

<u>DM P2</u>: 1) les coordonnées $(x_1, \dots, x_n) = \left([x]_1^{\mathcal{E}}, \dots, [x]_n^{\mathcal{E}}\right)$ d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{E}$ sont déterminées de façon unique, donc les applicat°s $e_i^* : x \longmapsto [x]_i^{\mathcal{E}}$ $(i = 1, \dots, n)$ sont bien définies.

2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, $i = 1, \dots, n$; on a $[\lambda x + y]_i^{\mathcal{E}} = \lambda [x]_i^{\mathcal{E}} + [y]_i^{\mathcal{E}}$ donc les e_i^* sont bien linéaires.

On a montré que $e_1^*, \dots, e_n^* \in E^*$.

<u>Mq c'est une base.</u>

3) $\varphi \in E^*$, $x \in E$,

$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_i [x]_i^{\mathcal{E}} e_i\right) = \sum [x]_i^{\mathcal{E}} \varphi(e_i) = \sum a_i [x_i]_i^{\mathcal{E}}$

où $a_i = \varphi(e_i)$.

$[x_i]_i^{\mathcal{E}}$

Donc $\varphi(x) = \sum_i a_i e_i^*(x)$ $(\forall x \in E)$

Donc $\varphi = \sum a_i e_i^*$.
On a mqé que $E^* = \mathrm{Vect}(e_1^*, \dots, e_n^*)$

4) Pour $\varphi \in E^*$, on a :
$\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Supposons $\varphi = \sum a_i e_i^* = 0$.
Alors $\varphi(e_j) = \sum_i a_i e_i^*(e_j) = \bullet$

$\bullet = \sum_i a_i \underbrace{[e_j]_i^{\mathcal{E}}}_{\delta_{ij}} = a_j = 0$

pour tout $j = 1 \longrightarrow n$.
cela mq l'indépendance linéaire des e_i^*, $i = 1, \dots, n$ □

(D)$_2$. La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ introduite ds Prop 2 s'appelle base duale de $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

(Cor)$_1$ si $\dim E < \infty$, alors $\dim E^* < \infty$ et $\dim E = \dim E^*$.

(D)$_{2'}$ (Def équivalente) d'une base duale.
Une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* est la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ (base de E) (ssi) $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$
(delta de Kronecker ; $i,j = 1, \dots, n = \dim E$)

Base anté-duale

(D$_3$) soit E e-v de dim finie n et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E^*.
Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tq $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i,j = 1, \dots, n$ s'appelle base anté-duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

(P3) Soit E ev de dim finie n. Alors toute base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* admet une unique base anté-duale.

DM Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base qq de E. Posons $\varepsilon_i(f_j) = a_{ij}$ $(i,j = 1, \dots, n)$; $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a alors :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varepsilon_i) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\sum \lambda_i \varepsilon_i) = \sum \lambda_i (a_{i1} \dots a_{in})$.

Pour $\varphi \in E^*$, on a :

$\varphi = 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = 0$,

donc :

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont linéair^t indép^dts

$\iff$ les lignes $(a_{i1} \dots a_{in})$, $i = 1, \dots, n$ sont linéair^t indép^dtes.

$\mathrm{rang}(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Donc $\forall i = 1, \dots, n$, le système linéaire

$$(*) \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \text{ sur la } i\text{-ème place}$$

admet une uniq solu° $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Or ce système exprime l'égalité

$$\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = \delta_{ij},$$

car $\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\varepsilon_j(f_k)}_{a_{jk}}$

$= \sum a_{jk} x_k$.

Notons cette unique solu° e_i.

On a dmqé $\forall i = 1, \dots, n$, $\exists$ un uniq $e_i \in E$ tq $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$.

Il reste à voir pk $e_1, \dots, e_n$ forment une base de E. En effet en notant la solut° uniq $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $(*)$ par $\begin{pmatrix} e_{1i} \\ \vdots \\ e_{ni} \end{pmatrix}$, ns obtenons la matrice $B = (b_{ji})$ tq $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j$ $(i = 1, \dots, n)$. Alors la ppté $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ se réécrit comme $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \delta_{ij}$

ou $AB = Id_n$. Donc B est inversible, et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base liée avec $(f_1, \dots, f_n)$ p la matrice de passage B. $\square$

(P_4) soit E ev de dim finie n, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors pour les matrices de passage on a :

$$P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \right)^{-1}$$

DM Exercice

Exemples : ⓐ$_1$ $E = K^n$ a une base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Donc on pt aussi munir $\mathbb{K}^{n*}$ d'une base canoniq, définie comme la duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de la base canoniq de $\mathbb{K}^n$. Chaque e-v muni d'une base canoniq s'identifie naturellement à $\mathbb{K}^n$. Donc :
$\mathbb{K}^{n*}$ s'identifie naturellement à $\mathbb{K}^n$.
Cette identificat° naturelle est la bijecti° linéaire $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n*}$, $e_1 \mapsto e_1^*, \dots, e_n \mapsto e_n^*$.

@$_2$ Forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$:

Trace : $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \longmapsto Tr(A)$

@$_3$ soit $\mathbb{K}_n[X]$ ev des polynômes de deg $\leq n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^1 \\ \cup & & \cup \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire.

@$_2$ Forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$: !

Trace : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$

@$_3$ soit $\mathbb{K}_n[X]$ ev des polynômes de deg $\leq n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^1 \\ \cup & & \cup \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Le double dual, les annulateurs et la transposée

(Th)^1 soit E un ev sur $\mathbb{K}$. Alors la formule

$$E \longrightarrow E^{**},\ v \longmapsto \left[E^* \longmapsto E^{**},\ \ell \mapsto \ell(v)\right]$$

définit une applicaθ linéaire $\Phi : E \to E^{**}$.

si de plus $\dim E < \infty$ alors Φ est isomorphisme.

DM 1) Pr chaque $v \in E$, la f $E^* \to \mathbb{K}$, $\ell \mapsto \ell(v)$ est linéaire en ℓ, donc est un élément de E^{**}. On définit $\Phi(v)$ égal à cette foncθ ; on a une applicaθ $\Phi : E \to E^{**}$ bien définie en v, dc l'applicaθ $v \mapsto E(v)$ est linéaire, ie $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.

2) soit mtnt $\dim E < \infty$. si $v \in E \setminus \{0\}$, on pt compléter v à une base $(v = e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On pt alors construire une forme linéaire $\ell \in E^*$ q ne s'annule pas par v : par @ on pt choisir $\ell = e_1^*$, le 1° élt de la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $\ell(v) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$

Mais alors $\Phi(v) \neq 0$, car $\Phi(v)$ est une forme linéaire sur E^* q prend une valeur non nulle dans $\ell(v)$ sur ℓ. Donc $\ker \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

3) On a vu que si $\dim E < \infty$, alors $\dim E^* < \infty$ aussi et $\dim E = \dim E^*$ (cor. 1)

Donc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$.

Puisque E est injective, et les dimensions coïncident, Φ est bijective ■

Rq : On appelle l'isomorphisme Φ de (Th 1) isomorphisme canoniq (ou naturel) entre E et E^{**}.

Les annulateurs

(D1) soit E un e.v,

(i) pr sev F de E, on définit l'annulateur de F dans E^*, ou l'orthogonal de F par $F^\perp = \{ l \in E^* \mid \forall v \in F,\ l(v) = 0 \}$

(ii) pr sev G de E^*, on définit l'annulateur (ou l'orthogonal) de G dans E par

$$G^\perp = \{ v \in E \mid \forall l \in G,\ l(v) = 0 \}.$$

(Rq) Autrement dit, $F^\perp$ est l'ensemble des équa°s linéaires de F.

(P1) soit E un ev. et F, G des sev de E ou de E^* alors :

a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

b) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

c) $F \subset F^{\perp\perp}$

d) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

si en plus, $\dim E < \infty$, alors on a :

c') $F = F^{\perp\perp}$

d') $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

e) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

DM a, b, c, d exercice.

Mq e) pour $F \subset E$, soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Complétons la à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors on peut décomposer tout $l \in E^*$ ds la base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

soit $l = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$. Alors

$$l(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = \lambda_i$$

Donc $f \in F^\perp \iff f(e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\iff \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\iff f \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$

Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$

et $\dim F^\perp = n - k$.

- Mq c') par c),

$\dim F^{\perp\perp} = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F)$
$= \dim F.$

Donc $F = F^{\perp\perp}$

Puisque $F \subset F^{\perp\perp}$ par c), et que $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$, on a $F = F^{\perp\perp}$.

- Mq d') notons $f = \dim F$, $g = \dim G$, $s = \dim(F \cap G)$.

Alors $\dim (F \cap G)^\perp = n - s$.

et $\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) = (n-f) - (n-g) - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$

(par e), b)) $= (n-f) + (n-g) - (n - (f+g-s))$
$= n - s.$

Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et les dimensions coïncident $\Rightarrow$ on a l'égalité.

On pt déduire les pptés c') d') e), pour $F, G \in E^*$ de ce qu'on a dmqé pr des ss-espaces de E, en posant $E = A^\perp$, $G = B^\perp$ pr $A, B \subset E$.

(on pose $A = E^\perp$, on a $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp, \dots$) ■

La transposée

(D2) Soit E, F des ev. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit la transposée ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$

par : $\forall f \in F^*, \; {}^t\varphi(f) = f \circ \varphi$.

(P2) (i) soit $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_m)$, $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ des bases de E, F. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right)$$

(ii) $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp} = \ker({}^t\varphi)$

$(\ker\varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}\,{}^t\varphi$

et on en conclut φ surjective $\Leftrightarrow$ ${}^t\varphi$ injective.

φ injective $\Leftrightarrow$ ${}^t\varphi$ surjective.

(iii) $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,{}^t\varphi$.

(iv) si on identifie E à E^{**} et F à F^{**} alors ${}^t({}^t\varphi) = \varphi$.

(v) soit G un 3° ev et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors ${}^t(\psi\circ\varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$.

(vi) si $E=F$, et si $\varphi \in \mathcal{L}(F,E)$ est inversible, alors ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$.

Rq: Une version précise de (iv)

on note $\Phi_E : E \to E^{**}$, $\Phi_F : F \to F^{**}$ les isomorphismes car (TH)1 pour E & pour F, on a le diag de morphismes.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_E"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "\Phi_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^t({}^t\varphi)"'] & F^{**} \end{tikzcd}$$

Par (iv) le diag est commutatif :

$$\boxed{\Phi_F \circ \varphi = {}^t({}^t\varphi) \circ \Phi_E}$$

(M) ev

Ch III : Formes bilinéaires

(D1) 1) Une forme bilinéaire sur e.v E est une applica° $\varphi : E\times E \to K$, linéaire en chacun de ses arguments, ie :

- $\forall x \in E$, l'applica° $\underbrace{E \to K,\ y \mapsto \varphi(x,y)}_{\text{nota° } \varphi(x,\cdot)}$ est une forme linéaire,
- pour tout $y \in E$, l'appli $\underbrace{E \to K,\ x \mapsto \varphi(x,y)}_{\varphi(\cdot,y)}$ est aussi une forme linéaire.

2) Une forme bilinéaire φ est dite symétriq (resp. alternée) si $\forall x,y \in E$, on a
$\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (resp $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$)

Notons pr les ensembles des formes bilinéaires, resp bilin. sym., bil. alt. soit : $\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$. Ce sont des ev.

$\forall\ \varphi,\psi \in \mathcal{B}(E)\ \forall \lambda \in K$,
$\lambda\varphi + \psi \in \mathcal{B}(E)$, et pareil pour $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$.

Donnée dans une base

Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. alors $\forall\ X,Y \in E$, on pt écrire $X = \sum x_i e_i$, $Y = \sum y_j e_j$,

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i y_j\, \varphi(e_i,e_j).$$

(D2) La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$ s'appelle matrice de la forme bilin. φ dans la base $\mathcal{E}$ et est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$

si on note $a_{ij} = \varphi(e_i,e_j)$, $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$
alors $\forall x,y \in E$ $\varphi(X,Y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\, x_i y_j$,

où (x_i), (y_j) st coord. des vecteurs X, Y ds la base $\mathcal{E}$. On pt aussi écrire :

$$\varphi(X,Y) = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(P-1) soit $E, \varphi, \mathcal{E}, A$ comme ci-dessus.

Alors :

(i) $\varphi \in \mathcal{S}(E) \iff \forall i,j = 1,\dots,n$, $a_{ij} = a_{ji}$ (on dit : la mat A est symétriq),

(ii) $\varphi \in \mathcal{A}(E) \iff \forall i,j = 1,\dots,n$, $a_{ij} = -a_{ji}$ (on dit que A est anti-symétriq);

(iii) $\dim \mathcal{B}(E) = n^2$, $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathcal{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$$

DM (i) $\Rightarrow$ $\varphi \in \mathcal{S}(E) \Rightarrow \forall i,j = 1,\dots,n$, $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) \Rightarrow \forall i,j = 1,\dots,n$, $a_{ij} = a_{ji}$

$\Leftarrow$ si $a_{ij} = a_{ji}$ pr tt i,j alors pour tous $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j e_j$ on a

$$\varphi(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j = \sum a_{ji} y_j x_i = \varphi(y,x)$$

commutativité de multiplicat°

dc $\varphi \in \mathcal{S}(E)$

(ii) Pareil.

(iii) (1) La donnée des formes bilinéaires par des matrices ds une base $(e_1, \dots, e_n)$ définit des biject°s linéaires.

$$\mathcal{B}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_n(K), \quad \varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(K)$$

$\mathcal{S}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^tA = A\}$,

$\mathcal{A}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^tA = -A\}$,

On a $\dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$, $\dim \mathcal{S}_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$

(on pt choisir des coord. sur $\mathcal{S}_n(K)$ des éléments matriciels)

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, $\dim \mathcal{A}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(on pt choisir ε coord de $\mathcal{A}_n(K)$ les élts matriciels

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$; on a $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$

2) soit $\mathcal{B}(E) \stackrel{?}{=} \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$.

soit $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. Alors $\forall x, y \in E$, on a :

$$\varphi(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x))}_{\text{forme symétrique en } x,y} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x))}_{\text{forme alternée en } x,y}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$,

et $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$.

3) soit $\varphi \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E)$. Alors $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$ ce q̇ entraîne $\varphi(x,y) = 0$. Donc $\varphi = 0$.

Donc $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$

et $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

□

P2 soit E un ev dim n, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ des bases de E, $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$

Alors $A' = {}^tP.A.P$.

DM exercice.

Rq si $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, on a ${}^tA = A$,
on pt en déduire que ${}^tA' = A'$:

$${}^t(A') = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP)$$
$$= {}^tPAP = A'.$$

D'ailleurs $\varphi \in \mathcal{S}(E) \iff$
$\iff Mat_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(K)$ pr toutes les bases $\mathcal{E}$.

Forme quadratiques

D3 soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Une fonc° $Q : E \to \mathbb{K}$ s'appelle forme quadratiq si

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in E, Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ et

2) $b_Q : E \times E \to \mathbb{K}, (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$ est une forme linéaire.

On appelle b_Q forme bilinéaire symétriq $\leftrightarrow$ée à Q, ou la forme polaire de Q, ou polaire de Q.

Les formes quadratiqs sur E forment un $\mathbb{K}$-e.v que l'on notera $Q(E)$;

l'applica° $\mathcal{P} : Q(E) \to \mathcal{S}(E)$, $Q \mapsto b_Q$ est linéaire et est appelée polarisa° (morphisme de polarisa°).

L $\mathcal{P}$ est un isom. de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ d'inverse $\mathcal{D} : \mathcal{S}(E) \to Q(E)$, $\varphi \mapsto q_\varphi$, où q_φ est def par $x \mapsto \varphi(x,$

DM 1) $\mathcal{P} \circ \mathcal{D} = id_{\mathcal{S}(E)}$, ie

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(E)$, $b_{q_\varphi} = \varphi$, ce q' suit de la relat° :

$$\underbrace{\varphi(x+y, x+y)}_{q_\varphi(x+y)} = \underbrace{\varphi(x,x)}_{q_\varphi(x)} + \underbrace{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}_{2\varphi(x,y) \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}_E} + \underbrace{\varphi(y,y)}_{q_\varphi(y)}$$

ie $b_{q_\varphi}(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_\varphi(x+y) - q_\varphi(x) - q_\varphi(y)\right)$,

$= \varphi(x,y)$.

2) $\mathcal{D} \circ \mathcal{P} = id_{\mathcal{Q}(E)}$. en effet :

$\forall\, Q \in \mathcal{Q}(E)$,

$q_{b_Q}(x) = b_Q(x,x) = \frac{1}{2}\left(Q(x+x) - Q(x) - Q(x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(Q(2x) - 2\,Q(x)\right) = \frac{1}{2}\left(4Q(x) - 2Q(x)\right)$

$= Q(x)$.

Donc $q_{b_Q} = Q$.

def

NB $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$

D4 pour $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, on appelle $q_\varphi \in \mathcal{Q}(E)$ forme quadratiq ass^{é} à φ.

$\left(q_\varphi = \mathcal{D}(\varphi)\right)$.

D5. La matrice d'une forme quadratiq Q ds une base $\mathcal{E}$ de E est la matrice de la forme polaire de Q :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(b_Q)$$

Écriture d'une forme quadratiq ds une base

soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base,

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = (a_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$.

Alors $a_{ji} = a_{ij}$ $\forall\, i,j = 1, \dots, n$ on a :

$$Q(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\, x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}\, x_i x_j$$

Diagonalisat° des formes quadratiqs

TH1 soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie. Alors tte forme quadratiq (ou bilinéaire symétriq) sr E est diagonalisable ie $\exists$ une base $\mathcal{E}$ de E, ds lqlle la mat de la forme est diagonale.

DM Par $\boxed{\text{H}}$ de Gauss

On choisit une base qq $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ de E ce q ns fournit n foncOs coordonnées

$$x = \sum_{k=1} x_k b_k \xmapsto{b_i^*} x_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

que l'on note (a dm juste x_i), et alors tte forme ~~linéaire~~ quadratiq $Q : E \to \mathbb{K}$ s'écrit ĉ polynôme homog de dg 2 en les x_i :

$$Q(X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\, x_i x_j .$$

Une notat° + rigoureuse serait :

$$Q : \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \longmapsto \sum_{1\leq i\leq j<n} a_{ij} x_i x_j \text{ , ou encore}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i^* b_j^*$$

On démontrera p récurrence sur $p=1,\dots,n$:

(H_p) : soit $f_1,\dots,f_p \in E^*$ lint indépendantes, $(a_{ij}) \in \mathcal{S}_p(K)$ et $h = \sum_{1\leq i\leq j\leq p} a_{ij} f_i f_j \in Q(E)$

alors il existe $l_1,\dots,l_p \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p) \subset E^*$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in K^p$ tq $e_1,\dots,e_p$ st linit indépendantes et $h = \lambda_1 l_1^2 + \dots + \lambda_p l_p^2$.

En appliquant (H_n) à $f_i = b_i^*$, $h = Q$ on trouve une base $\mathcal{L} = (l_1,\dots,l_n)$ de E^* ds laquelle $Q = \lambda_1 l_1^2 + \dots + \lambda_n l_n^2$, et la base anté-duale $\mathcal{E}$ de E est celle dt l'$\exists$ est affirmée par le théorème :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(DM) de (H_p) pour $p=1,\dots,n$

soit $p=1$, on a $h = a_{11} f_1^2$, on pose $\lambda_1 = a_{11}$, $\ell_1 = f_1$ et c'est terminé.

soit $p \in \{2,\dots,n\}$. On suppose (H_p) dès (H_q) pour $q<p$.

• 1° cas $\exists\, i \in \{1,\dots,p\}$ tq $a_{ii} \neq 0$

Quitte à permuter les f_i, on peut supposer que $i=1$, ie $a_{11} \neq 0$. Alors

$$h = a_{11} f_1^2 + 2a_{12} f_1 f_2 + \dots + 2a_{1p} f_1 f_p + \dots + \sum_{2 \leq i \leq j \leq p} a_{ij} f_i f_j =$$

$$= a_{11}\left(f_1^2 + 2 f_1 \frac{a_{12}}{a_{11}} f_2 + \dots + 2 f_1 \frac{a_{1p}}{a_{11}} f_p\right) + \sum_{2 \leq i \leq j \leq p} a_{ij} f_i f_j$$

On pose $\ell_1 = f_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} f_2 + \dots + \frac{a_{1p}}{a_{11}} f_p$

On a $h = a_{11}\ell_1^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} f_2^2 - \dots - \frac{a_{1p}^2}{a_{11}} f_p$

$$- 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{a_{1i} a_{1j}}{a_{11}} f_i f_j + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} f_i f_j$$

$$= a_{11}\ell_1^2 + \underbrace{\sum_{2 \leq i,j \leq p} a'_{ij} f_i . f_j}_{h'},$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1i} a_{1j}}{a_{11}}$$

Donc $h = a_{11}\ell_1^2 + h'$, où h' est un polynôme quadratiq homog en $p-1$ formes linéaires linéairement indépendants $f_2, \dots, f_p$. Par (H_{p-1}) $\exists$ $p-1$ formes linéᵗ indep. $\ell_2, \dots, \ell_p \in \mathrm{Vect}(f_2,\dots,f_p)$ & des ctes $\lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$ tq $h' = \lambda_2 \ell_2^2 + \dots + \lambda_p \ell_p^2$. Alors

$h = \lambda_1 \ell_1^2 + \dots + \lambda_p \ell_p^2$, où $\lambda_1 = a_{11}$

2e cas $\forall i = 1, \dots, p$: $a_{ii} = 0$. si tous les a_{ij} st nuls, alors $h = 0$ & on pt poser $h_i = f_i$, $\lambda_i = 0$ pr $\forall$ $i = 1, \dots, p$. Supposons $\exists$ une paire (i,j), $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq p$ tq $a_{ij} \neq 0$. Quitte à permuter les f_k, on pt supposer que $i = 1, j = 2$: $a_{12} \neq 0$. On pose $f_1 = f_1' - f_2'$. $f_2 = f_1' + f_2'$, $f_j = f_j'$ (pr $j \geq 3$), on obtient une forme $k' = \sum a_{ij}' f_i' f_j'$, pr laquelle $a_{11}' = a_{12}$, $a_{22}' = -a_{12} \neq 0$, $1 \leq i, j \leq p$, on pt appliq le résultat cas 1. $\square$

Bases Orthogonales

(D1) soit E un ev muni d'1 forme bilinéaire symétriq ie pour 2 vecteurs $x, y \in E$, on écrit $x \perp_\varphi y$, on dit "x est φ-orthogonal à y" si $\varphi(x,y) = 0$. Pr la forme quadratiq Q sur E, on écrit aussi $x \perp_Q y$ au lieu de $x \perp_{B_Q} y$.

(Rq) Cette relation est symétriq $x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$. on pt les définir aussi pr tte forme bilin. φ, ~~pas~~ forcément symétriq mais $x \perp_\varphi y$ ne sera + équivalent à $y \perp_\varphi x$.
Un autre cas ou l'orthogonalité des vecteurs est relation symétriq est le cas où φ ~~ε~~ $\in \mathcal{A}(E)$. (φ est form bil. alternée)

(D2) soit E ev dim n, muni forme quadratiq (ou bil. sym). Une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonal si une des pptés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$,
(ii) la mat de la forme ~~A~~ ds la base $\mathcal{E}$ est diagonale

On pt reformuler le résultat du (Th 1)

Cor 1 Toute forme quadr. (ou bili sym) sur un ev de dim finie admet des bases orthogonales.
Convent° pr couvrir le cas $E=\{0\}$. est déclarée d'ê une base orthogonale de $\{0\}$.

Formes quadratiqs positives

soit $K=\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{R}$ ev de dim $n<\infty$.

D3 Une forme quadr. Q (resp. forme bil. symétriq φ) est dite positive si :
$\forall x\in E,\ Q(x)\geq 0$.
(resp $\forall x\in E,\ \varphi(x,x)\geq 0$)

Not-° : $Q\geq 0$ et $\varphi\geq 0$, on dit que Q (resp φ) est bien définie positive, & on écrit $Q>0$ (resp $\varphi>0$) si $Q\geq 0$ et $Q(x)\Rightarrow x=0$ (resp $\varphi\geq 0$ et $\varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0$

De façon similaire, les formes négatives ($Q\leq 0$, $\varphi\leq 0$) et définies ⊖ ($Q<0$, $\varphi<0$). Une forme Q est négative si $-Q$ est positive.

Prop 1 soit $Q\in\mathcal{Q}(E)$.

(i) Q est positive $\Longleftrightarrow$ pr tte base Q-orthogonal $(e_1,\dots,e_n)$ de E, on a $Q(e_i)\geq 0$ pr t $i=1,\dots,n$

(ii) Q est déf positive $\Leftrightarrow$ positive ds base $(e_1,\dots,e_n)$ Q-orthogonale de E, on a $Q(e_i)>0$ $\forall i=1,\dots,n$ $\Longleftrightarrow$ il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ Q-orthogonal de E, pr laquelle $Q(e_i)>0$ pr t $i=1,\dots,n$

(iii) soit F un ss-ens de E. Alors $Q|_F : F\to K$ est une forme quadratiq sur F, $Q|_F\in\mathcal{Q}(F)$, et on a impli: $Q\geq 0\Rightarrow Q|_F\geq 0$ et
$Q>0\Rightarrow Q|_F>0$.

(D4) Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-e.v E de dim. finie muni d'une forme quadr. déf positive Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

(D5) Ds un espace euclidien, une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale & de plus $Q(e_1) = \dots = Q(e_n) = 1$

(Cor 2) Un espace euclidien admet des bases orthonormées.

DM Par (Cor 1), $\exists$ une base orthogonale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Posons $\lambda_i = Q(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Alors $\lambda_i > 0$ $\forall i$ car $Q > 0$.

$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\right)$ est alors orthonormé

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Not° : E un $\mathbb{K}$-ev, $n = \dim E < \infty$
Q une forme quad sur E, $\varphi = b_Q \in \mathcal{S}(E)$

(D6) Le noyau de Q (ou de φ) est déf par :
$\ker Q = \ker \varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$

(L1) $\ker Q$ est ss-espace vect. (sev) de E de dim $n - r$, où $r = rg\, Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ pr n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E.

DM Le choix d'une base de E identifie E à $\mathbb{K}^n$ et $\ker \varphi = \ker Q$ au sev des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{K}^n$ t.q.

$$(*) \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j = 0 \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

en écrivant $(*)$ pr les n vecteurs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$

On voit que $x \in \ker Q \iff x$ satisfait à $(\circledast) \implies x$ est solution du système linéaire $(\circledast\circledast)$.
La réciproque est aussi vraie, car :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j = y_1 (a_{11} x_1 + \dots + a_{n1} x_n) + \dots + y_n (a_{1n} x_1 + \dots + a_{nn} x_n).$$

Donc $\ker \varphi$ s'identifie à l'espace des solutions du syst. linéaire $(\circledast\circledast)$ de matrice ${}^tA$. Donc $\dim \ker \varphi = n - \operatorname{rg} A$. $\square$

(Rq) Il en résulte le rg de mat d'une forme quadratique ne dépend pas du choix d'une base

D7 Le rang de Q (ou de φ), noté $\operatorname{rg} Q$ (ou $\operatorname{rg} \varphi$) est le rg de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)$ dans n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E. De façon équivalente.

$$\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} \varphi = n - \dim \ker \varphi.$$

On dit que Q (ou φ) est une forme non-dégénérée si $\operatorname{rg}(Q) = n$, ou de façon équivalente, si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

D8 Deux formes quadr. $Q \in Q(E)$, $Q' \in Q'(E')$ sont dites équivalentes si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiées :

(i) $\exists$ isomorphisme linéaire $h : E' \cong E$ tq $Q' = Q \circ h$.

pg 20 $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{n1} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{1n} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$

(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E'.
(resp $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q')$)

(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp

$\exists\ T \in GL_n(\mathbb{K})$

mat inversible taille n.

tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT.\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q).\,T$

Classificat° sur $\mathbb{C}$

Th 2 Tte forme quadratiq Q sur un $\mathbb{C}$ e-v E de dim $= n$ s'écrit ds une base convenable, p la mat

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$$

où $r = \mathrm{rg}\, Q$

Deux formes quad. complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$ e.v E, E' (resp) st équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$, et $\mathrm{rg}\, Q = \mathrm{rg}\, Q'$.

DM Par Cor 1 $\exists$ une base Q-orthogonale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Posons $\lambda = Q(e_i)$

Alors $\#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\} = \mathrm{rg}\, Q$

$= n - \dim \ker Q$ ne dépend pas alors de base de $\mathcal{E}$, et quitte à permuter les e_i, on pt supposer que $\lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0$;

$\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ où $r = \mathrm{rg}\, Q$.

Dans $\mathbb{C}$, on pt trouver des μ_i tq $\mu_i^2 = \lambda_i$

μ $i = 1, \dots, n$ Alors la mat de Q acquiert la forme (1) ds la base

$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\mu_1} e_1, \dots, \frac{1}{\mu_r} e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\right)$

et l'entier $r = \mathrm{rg}\, Q$ ne dépd pas du choix de la base.

Cor 3 Sur un $\mathbb{C}$ es E de dim n $\exists$ $n+1$ classes d'équivalence de formes quad., distinguées par le rang.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

Th 3) On suppose que $K = \mathbb{R}$, $Q \in Q(E)$
Alors il existe un uniq $p \in \mathbb{N}$
tq Q s'écrit ds une base convenable
$\underline{\text{r}}$ la mat diagonale :

mat identité

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $q = r - p$, $r = rg\, Q$

Déf) Le couple $(p, q) = (p_Q, q_Q)$ est $\Leftrightarrow$ à une forme quad. Q sur un $\mathbb{R}$-ev de dim finie ds énoncé (Th 3) s'appelle signature de Q.

Coro) Deux formes quad. Q, Q' sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dim n st équivlts ssi elles ont m̂ signature.

Thm De classificat° des formes quad. sr $\mathbb{R}$.

~~Déf~~ On suppose $K = \mathbb{R}$, E ev dim finie sur $\mathbb{R}$, $Q \in Q(E)$. Alors $\exists$ uniq $p \in \mathbb{N}$ tq Q s'écrit ds base convenable, par la mat diagonale

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

où $q = r - p$, $r = rg\, Q$.

DM Par le Thm de diagonalisat° des formes quad, $\exists$ base orthogonale $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ tq $Q(e_i) = \lambda_i$, et on pt ordonner les vecteurs de la base de façon $\lambda_i > 0$ pr $i = 1 - p$, $\lambda_i < 0$ pr $i = p+1, \dots, p+q$, $\lambda_i = 0$ pour $i = p+q+1, \dots, n$. Alors la mat de Q acquiert la forme $(*)$ ds la base $\varepsilon' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n\right)$.

Le nombre $p+q$ est déterminé par Q car $p+q$ est le rang de la mat $(*)$ et est de égal à $r = rg\, Q$.
Il reste à mq l'unicité resp.

soit $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$; $\varepsilon' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthogonales tq $Q(e_1) = \dots = Q(e_p) = Q(e'_1) = \dots = Q(e'_{p'}) = 1$
$Q(e_{p+1}) = \dots = Q(e_r) = Q(e'_{p'+1}) = \dots = Q(e'_r) = -1$.
$Q(e_i) = Q(e'_i) = 0$ pour $i = r+1, \dots, r$.
soit $V = Vect(e_1, \dots, e_p)$, $W = Vect(e'_{p+1}, \dots, e'_x)$
Alors $Q(x) > 0 \ \forall x \in V \setminus \{0\}$.
(Q est déf. positive sur V. Puis sur W on a : $Q(x) \leq 0 \ \forall x \in W$. Donc $V \cap W = \{0\}$.
Donc $\dim V + \dim W \leq n$, soit
$p + (n - p') \leq n$, soit $p \leq p'$. Par la symétrie des rôles de p et de p', on a aussi $p' \leq p$ dc $p = p'$. $\square$

(R1) La paire (p,q) s'appelle signature de Q, c'est l'invariant classifiant les formes quad sur ev réel de dim donnée n.

Orthogonalité

On fixe notats E un $\mathbb{K}$ e-v dim finie n sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, $Q=q_\varphi$, $q_\varphi \in Q(E)$. On écrit $\perp$ au lieu de $\perp_q$ ou $\perp_Q$.

(D1) Pour une partie A de E, on définit son orthogonal par :

$$A^\perp = \{x\in E \mid \varphi(x,y)=0 \quad \forall y \in A\}.$$

(P1) (i) $A^\perp$ est un ss-ev et $\ker \varphi \subset A^\perp$.

On a $\emptyset^\perp = \{\emptyset\}^\perp = E$

$E^\perp = \ker \varphi$, $A \subset (A^\perp)^\perp$

(ii) $A\subset B\subset E \Rightarrow \ker\varphi \subset B^\perp \subset A^\perp$.

(iii) si $A\subset E$, $A\neq\emptyset$ alors $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Si $A=\{v_1,\dots,v_k\}$, $F=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$, alors $F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^{k} v_i^\perp$.

(TH) (Sur l'orthogonal) soit F un ss ev de $E \Rightarrow$

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F\cap \ker\varphi)$

(ii) $n \leqslant \dim F + \dim F^\perp \leqslant n + \dim \ker \varphi$.

(iii) $(F^\perp)^\perp = F + \ker\varphi$, on a :

$(F^\perp)^\perp = F \Leftrightarrow \ker\varphi \subset F$.

De plus si φ est non dégénérée (ie $\ker\varphi = \{0\}$), alors

(i)' $\dim F^\perp = n - \dim F$

(iii)' $(F^\perp)^\perp = F$

(iv) on note φ_F la restrict° de φ à $F\times F$;

$\varphi_F : F\times F \to K$, $(x,y)\mapsto \varphi(x,y)$

alors φ_F est aussi une fb sym, $\varphi_F \in \mathcal{S}_F$ et on a :

- $\ker \varphi_F = F\cap F^\perp = \ker \varphi_F^\perp$
- $E = F\oplus F^\perp \Leftrightarrow F\cap F^\perp = \{0\}$

$\Leftrightarrow \varphi_F$ est non-dég.

$\Leftrightarrow \varphi_F^\perp$ est non-dégénérée.

DM (i) Ds cas général est admis, on le dmq ds le cp où $\ker \varphi = \{0\}$, ie on démq (i)'.

Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F, complétons la à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ une base de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i, e_j)$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Pour un vecteur $x = \sum x_i e_i$, on a :

$x \in F^\perp \Leftrightarrow \varphi(e_i, x) = 0$ pr $i = 1, \dots, k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \\ a_{k1} x_1 + \dots a_{kn} x_n = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Puisq $\ker \varphi = \{0\}$, le rang des lignes est max égal à n, dc les lignes est linéairement indépendantes. Donc le rang de (S) est k. Dc son espace de sol° est de dim $n-k$. Donc $\dim F^\perp = n-k$.

(ii) conséq immédiate de (i), vu que

$$0 \leq \dim(F \cap \ker \varphi) \leq \dim \ker \varphi$$

(iii) Il est facile ① ① $F^\perp = (F + \ker \varphi)^\perp$

Dc il suffit de mq égalité $(F^\perp)^\perp = F + \ker \varphi$ ss l'hypothèse que $F = F + \ker \varphi$, ie $\ker \varphi \subset F$. Ds ce cas on a

a) $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x \perp y \Rightarrow F \subset (F^\perp)^\perp$

R4 $A, B \subset E$ $\forall x \in A, \forall y \in B, x \perp y \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$

b) $\dim F^\perp \underset{\uparrow}{=} n - \dim F + \dim \ker \varphi$

par (i) et $\ker \varphi \subset F$.

$\dim (F^\perp)^\perp \underset{\uparrow}{=} n - \dim F^\perp + \dim \ker \varphi$

par (i) et $\ker \varphi \subset F \subset (F^\perp)^\perp$

$n - (n - \dim F + \dim \ker \varphi) + \dim \ker \varphi = \dim F$

ⓐ & ⓑ $\Rightarrow (F^\perp)^\perp = F = F + \ker \varphi$

Projec⊖s orthogonales

R1 : Projec⊖ linéaire

D2 soit $E = K \oplus L$, somme d'ordre de 2 sev. Pr $\forall v \in E$, il existe une uniq paire $(x,y) \in K \times L$ tq $s = x+y$ & la proj- linéaire p_K^L (ou pr_K^L) de S par S sur K parallèlement à L est définie par $p_K^L(v) = x$.

P2 L'applica⊖ $p = p_K^L : E \to E$ satisfait les pptés suivantes :

(i) $p \in \mathcal{L}(E)$, $\ker p = L$, $\operatorname{im} p\, K$, $\underbrace{p|_K}_{\text{restric⊖ de } p \text{ à } K} = id_K$

(ii) $p^2 = p$ (ou $p^2 = p \circ p$)

(iii) soit $q = id_E - p$ alors on a :

$p + q = id_E$, $p^2 = p$, $q^2 = q$, $pq = qp = 0$

Réciproquement : soit p un endomorphisme linéaire : $p \in \mathcal{L}(E)$, tq $p^2 = p$. Alors p est la projec⊖ linéaire p_K^L, où $K = \operatorname{im} p$ et $L = \ker p$.

D3 Une projec⊖ linéaire p_K^L est dite orthogonale ssi $K \perp L$. De façon équivalente, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est une proj. orthogonale ssi $p^2 = p$ et $E = \ker p \oplus^{\perp} \operatorname{im} p$ (somme directe orthogonale)

D4 On dit sev F de E est non-dégénéré si $Q_F = Q|_F$ (ou $\varphi_F = \varphi|_{F \times F}$) est une forme non dégénérée.

Des caractérisa⊖s équivalentes :

F non dégénéré $\iff F \cap F^{\perp} = \{0\}$

$\iff E = F \oplus F^{\perp}$.

P3 soit F un sev de E.

(i) si F est non dégénéré alors $\exists$ uniq projec⊖ orthogonale p d'image F, que l'on notera p_F (ou pr_F)

(ii) si en plus Q est une forme non dégénérée, alors la réciproque est vraie.

p d'image F entraîne la non dégé-
-nérescance de F ($\Leftrightarrow F \cap F^{\perp} = \{0\}$
$\Leftrightarrow F \oplus F^{\perp} = E$)

ⓐ si $Q = 0$, toute project° linéaire
p_F^Q est proj. orthogonale d'image F.

- Rq si $\dim F = 1$, $F = \mathbb{K}v$
$v \in E \setminus \{0\}$ (F une droite
vectorielle alors F non-dégénéré
$\Leftrightarrow Q(v) \neq 0$. On dit qu'un
vecteur non nul v de E & isotrope
si $Q(v) = 0$ & non isotrope
si $Q(v) \neq 0$. Dc on pt dire qu'une
droite vectorielle est non dégénérée
- ssi elle est engendrée p un vecteur
non isotrope.

Calcul de la project° orthogonale

P4 soit F un sev non-deg & $(u_1, \dots, u_k)$ une
base orthogonale de F. Alors $Q(u_i) =$
$= \varphi(u_i, u_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$ est

$$\forall x \in E, \ p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

DM
$\hookrightarrow$ on vérifie aisément que

$$\varphi\left(x - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i, \ u_j\right) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i \in F^{\perp}$

dc $\displaystyle p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$

Groupe Orthogonal

Notations : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ e.v de dim n, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratiq non dégénérée, $\varphi = b_Q$, forme polaire de Q.

(D1) Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal (ou Q-orthogonal, ou φ-orthog.) s'il préserve Q (ou φ) :
$\forall x \in E, \quad Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall x, y \in E$ $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$). On note $O(E)$ (ou $O(E,Q)$, $O(E,\varphi)$, $O(Q)$, $O(\varphi)$) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de (E,Q).

(P1) (i) $f \in O(E) \Rightarrow f$ inversible ;
(ii) $O(E)$ est un groupe.

DM env

@ Symétries orthogonales

(D2) soit F un ss-espace non-dég de E
$\Rightarrow E = F \oplus F^{\perp}$ et les 2 projections orthogonales p_F, $p_{F^\perp}$ st déf, tq $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. On définit la symétrie orth. s_F p.r. à F par :
$\forall v \in E, \exists! (x,y) \in F \times F^{\perp}; \; v = x + y$, et alors on pose $s_F(v) = x - y$
De façon équivalente, on pt définir s_F par une des relations $s_F = p_F - p_{F^\perp}$
$$s_F = id_E - 2p_{F^\perp} = 2p_F - id_E.$$
Lorsq F est un hyperplan, s_F s'appelle réflexion orthogonale.

Fait : Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

[R9] Lorsq $F \subsetneq E$, p_F, la proj. orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal (car $\ker p_F = F^{\perp} \neq \{0\}$ donc p_F n'est pas inversible).

Caractérisat° de $f \in O(E)$ p matrices

Soit $\mathcal{E}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)$. Alors

$f \in O(E) \iff {}^tAGA = G$.

$\left(\iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j)\ \forall i,j = 1,\dots,n\right.$ où $\left.\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)\right)$.

Dans le cas particulier où $G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, et (E, Q) est dc un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{E}$, on a :

$f \in O(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA$.

$\iff A$ est une matrice orthogonale.

@ Le plan hyperboliq standard H est l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratiq Q de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $Q(x, y) = 2xy$

On a $O(H) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*} \cup \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$

(ces mat st ttes les solut° de l'équat° ${}^tA \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Exercice : 1) Dénombrer cet énoncé

2) identifier les réflexions orthogonales dans $O(H)$

Indic : Les valeurs propres des réflexions orthogonales en dim 2 sont 1 et -1 ; la trace est nulle.

Th Cartan-Dieudonné

Tout élément de $O(Q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonales.

Orthogonalisat° de Gram-Schmidt

Notat° : K, E, n, $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $\varphi = b_Q$ mais on ne suppose plus que Q est non-dégénérée.

Th (d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E tq $\forall i = 1, \dots, n-1$; $E_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$ est non-dégénérée. Alors les n vecteurs

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_1 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1 ,$$

$\dots$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i .$$

$(k = 1, \dots, n)$ st bien définis et forment une base orthogonale $U = (u_1, \dots, u_n)$ de E. Dans cette base, Q s'écrit par

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 ,$$

où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = \mathrm{Mat}_{(v_1, \dots, v_k)}\left(Q|_{F_k}\right)$ $(\varphi(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq k}$

Rq. U s'appelle orthogonalisée de G-S

- $Q|_{F_{n-1}}$ non-dégénérée $\Rightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}\, Q = n-1$ ou n ; on ne suppose pas que $\Delta_n \neq 0$

DM Par récurrence sur $k = 1, \dots, n$ on mq :

(H_k) $\begin{cases} 1)\ (u_1, \dots, u_k) \text{ est une base orthogonale de } F_k. \\ 2)\ \text{la mat de passage } P_k = P_{(v_1, \dots, v_k) \to (u_1, \dots, u_k)} \text{ est de la forme } P_k = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

- (H_1) : $u_1 = v_1$, $P_1 = 1$, évidentes assertions
- $(H_{k-1}) \Rightarrow (H_k)$ pr $k > 1$: on suppose (H_{k-1}) vérifie alors

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

a) cette somme est bien déf car $(u_1, \dots, u_{k-1})$ est une base orthogonale de F_{k-1}, ss-espace non dégénéré, et de la mat de $Q|_{F_{k-1}}$,

$$\begin{pmatrix} \varphi(u_1,u_1) & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \varphi(u_{k-1},u_{k-1}) \end{pmatrix}$$

- les élts diagonx st non nuls,

b) cette somme donne le vecteur $pr_{F_{k-1}}(v_k)$ (par $\boxed{M}$ des calcul des projOs orthogonales).

on a de $u_k = v_k - pr_{F_{k-1}}(v_k) = pr_{F_{k-1}^\perp}(v_k)$

car $pr_{F_k} + pr_{F_k^\perp} = id_E$.

- Donc $u_k \perp F_{k-1}$, d'où $u_k \perp u_i$ $\forall i = 1, \dots, k-1$

De plus, $Vect(u_1, \dots, u_k) = Vect(u_1, \dots, u_{k-1}, v_k)$

$= \underbrace{Vect(u_1, \dots, u_{k-1})}_{F_{k-1}} + K v_k = F_{k-1} + K v_k = F_k$

Donc $(u_1, \dots, u_k)$ est une base orthogonale de F_k.

De plus, $\exists\, p_{ik} \in K$ tq

$$u_k = v_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_{ik} v_i \;; \quad \text{car}$$

$$u_k - v_k = - pr_{F_{k-1}}(v_k) \in F_{k-1} = Vect(v_1, \dots, v_{k-1})$$

Donc

$$P_k = \left(\begin{array}{ccc|c} & P_{k-1} & & \begin{matrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{k-1,k} \end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ on a déduit (H_k) de (H_{k-1}). Par le principe de récurrence, (H_k) est vérifié $\forall\, k = 1, \dots, n$.

---

soit $Mat_{(u_1, \dots, u_k)}\left(Q|_{F_k}\right) = B_k$.

Alors

$$B_k = \begin{pmatrix} \varphi(u_1,u_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(u_k,u_k) \end{pmatrix} = {}^t P_k A_k P_k$$

det $P_k = 1$, donc

det $B_k = \varphi(u_1,u_1)\dots\varphi(u_k,u_k) = \det A_k = \Delta_k$;

$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k = 1,\dots,n-1$.

D'où ff:

$\varphi(u_1,u_1) = \Delta_1$; $\varphi(u_2,u_2) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ...

$\varphi(u_n,u_n) = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$

Cor 1 Critère de Sylvester

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim n, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ($\varphi = b_Q$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$), $(v_1,\dots,v_n)$ une base de E, $a_{ij} = \varphi(v_i,v_j)$ pr $1 \leq i,j \leq n$,

$F_k = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$

$A_k = \mathrm{Mat}_{(v_1,\dots,v_k)}(Q|_{F_k})$, $\Delta_k = \det A_k$

Alors : (1) φ (ou Q) est déf positive $\iff \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

(2) Supposons $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ et notons $\Delta_0 = 1$. Alors l'indice négatif q de Q (c'est la deuxième composante de la signature (p,q) de Q) est le nbr de changements de signe de la suite $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ (on dit que la suit (Δ_i) présente un chgt de signe au rang i si $\Delta_i \Delta_{i-1} < 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$)

où rg $Q = n$

3. φ est déf négative $\iff \forall i = 1,\dots,n$, $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & & A_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $\Delta_k = \det A_k$ s'appellent mineurs principaux dominant.

(3) Espaces Euclidiens.

§ 1. Norme, dista, angles, volumes

Un $\mathbb{R}$-eV E muni FB sym φ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ & φ def positive.

- φ est alors appelé **produit scalaire**.

$$\langle x | y \rangle := \varphi(x,y) \quad \forall x,y \in E$$

ℓ def, $\forall x \in E$, $\langle x|x \rangle \geq 0$ & $\langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$.

On note $\sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$.

On a $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

- **Prop 1** $\forall x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$

cp si $x \perp y$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Th Pyth)

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (idté ▱)

(iv) $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

l'égalité étant réalisée ssi x,y st colinéaires ($\iff \exists a \in \mathbb{R}$, $x = ay$ ou $y = ax$

(v) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski)

l'égalité étant réalisée ssi $\exists a \geq 0$ tq $x = ay$ ou $y = ax$

DM (i), (iii) immédiat.

Mq (iv)

si $y = 0$, les 2 mbres de inégalité st nuls, l'inégalité (non stricte) est dc vérifiée. Supposons dc $y \neq 0$ & considérons f $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|x+ty\|^2$

On a : $h(t) = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x|y\rangle t + \|x\|^2$, $\|y\|^2 > 0$

Puisq $h(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, le discriminant de ce polyn. quadratiq ne pt pas ê ⊕ :

$$D = 4(\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2) \leq 0.$$

cela donne $\langle x|y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

soit $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

→ inégalité de Cauchy Schwartz dmgé

Si on suppose l'égalité réalisée alors $h(t)$ a une racine double

$$t_0 = -\frac{\langle x|y\rangle}{\|y\|^2}, \text{ dc } h(t_0) = \|x+t_0y\|^2 = 0$$

et $x+t_0y=0$. On a mqé le cas de l'égalité, lorsq $y\neq 0$, ne se réalise que si $\exists\, t_0 \in \mathbb{R} \mid x = -t_0 y$

et si $y=0$, y est colinéaire à ts les vecteurs de E car $\forall x \in E$, $y = 0.x$. (iv □)

Mq (v)

On déduit l'inégalité de Minkowski de celle de Cauchy Schwarz. $\forall x,y \in E$,

on a $|\langle x|y\rangle| \underset{=}{\leq} \|x\|\,\|y\|$

$\Rightarrow \langle x|y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$

$\Leftrightarrow 2\langle x|y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 2\|x\|\,\|y\| + \|x\|^2 + \|y\|^2$

(*) $\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \underset{=}{\leq} (\|x\|+\|y\|)^2$

$\Leftrightarrow \|x+y\| \underset{=}{\leq} \|x\|+\|y\|$

2

Mtn on suppose que l'égalité est vérifiée : $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. Si $x=0$ ou $y=0$, on a bien une des relatiōs $x=ay$ ou $y=ax$ & $a=0$. Supposons que $x\neq 0$ & $y\neq 0$.

Alors la chaîne d'équivalces (*) & les signes "$\leq$" remplacés p "$=$", mq

$$\langle x|y\rangle = \|x\|\,\|y\|,$$ dc p (iv)

$\exists\, a \in \mathbb{R}^*$, $y = ax$. De plus,

$0 < \|x\|\,\|y\| = \langle x|ax\rangle = a\|x\|^2$,

d'où $a = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} > 0$.

□

D1 Soit V un $\mathbb{K}$ ev. On appelle norme sur V tte applicaº $N : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ homogénéité

(ii) $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ séparaº

(iii) $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$ ss-additivité.

D'après (P1), $x \mapsto \|x\|$ est norme sur E.

(D2) Soit X ens $\neq \emptyset$. On appelle distance (ou métriq) sur X tte f $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq :

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (séparation)

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^3$,
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

Un espace métriq est un ens muni d'une métriq. D'après (P1), la f $E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance.

(D3) Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace euclidien.
La f $E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \|x\|$ s'appelle norme euclidienne sur E & la f $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ s'appelle distce euclidienne sur E.

$\boxed{\text{Rq}}$ Tt espace euclidien possède une base orthonormée & est dc isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard :

- $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Les inégalités :

$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$
(Cauchy-Schwarz),

$\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + \dots + y_n^2}$
(Minkowski).

Angles

$\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, ℓ Cauchy-Schwarz.

$$\left| \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \right| \leq 1 .$$

(Déf) L'angle $(\widehat{x,y})$ entre 2 vect^rs non nuls de E est déf $\in$ uniq réel $\theta \in [0, \pi]$ tq

$$\cos \theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

on pt écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \dfrac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$

(arccos désigne la val^r principale de arccos, comprise entre 0 & π).

$\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

on déf ai les angles entre 2 ss-espaces vectoriels $F_1, F_2 \neq 0$ de E:

$$(\widehat{F_1, F_2}) = \inf \left\{ (\widehat{v_1, v_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1 \in F_1 \setminus \{0\}, \\ v_2 \in F_2 \setminus \{0\} \end{array} \right\}$$

(4)

et l'angle entre un vecteur non nul v & ss-ev $\neq 0$ de F:

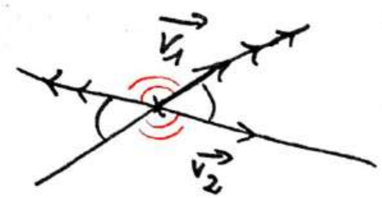
$$(\widehat{v, F}) = \inf \{ (\widehat{v, w}) \mid w \in F \setminus \{0\} \}.$$

Par Exemple, l'angle entre 2 droites F_1, F_2, de vect^rs direct^rs v_1, v_2

(ie $F_1 = \mathbb{R} v_1$, $F = \mathbb{R} v_2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$),

$$(\widehat{F_1, F_2}) = \min \{ (\widehat{v_1, v_2}), (\widehat{v_1, -v_2}) \}$$

$$= \min \{ \theta, \pi - \theta \} \quad \text{si } \theta = (\widehat{v_1, v_2})$$



Volumes

Ds ce cours, ns donnons la déf° du volume parallélépipède & la déf° de parties + complexes de E est tâche calcul intégral.

(D5) (i) Pr une famille $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_k)$ de vecteurs de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est déf p :

$$\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k \right\}$$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est déf p :

1) si $\mathcal{V}$ est liée, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=0$

2) si $\mathcal{V}$ est libre, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=|\det P_{\mathcal{E}_F\to v}|$

où $\mathcal{E}_F$ est une base orthonormée qq de F, $F=\mathrm{Vect}(v)$ et $P_{\mathcal{E}_F\to v}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à v.

$P_{\mathcal{E}_F\to v}=(p_{ij})_{1\le i,j\le k}$ $\quad \forall j=1,\dots,k,\ v_j=\sum_{i=1}^{k} p_{ij}\, e_i$

(L) (cohérence déf vol_k)

$|\det P_{\mathcal{E}_F\to v}|$ ne dépd pas choix de $\mathcal{E}_F$.

DM soit $\mathcal{E}_F'=(e_1',\dots,e_k')$ une autre base orthonorm. de F, $\mathcal{E}_F=(e_1,\dots,e_k)$.

Notons $P=P_{\mathcal{E}_F\to v}$, $P'=P_{\mathcal{E}_F'\to v}$, $A=P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{E}_F'}$ alors $P=AP'$.

On a à mq $|\det P|=|\det P'|$. Puisq les 2 déterminants st non nuls, cette égalité est équivalente à $|\det A|=1$.

A est la mat de passage entre 2 bases orthon., dc par la mat du produit scalaire on a :

$$\mathbb{1}_k=\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_F'}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F)={}^tA\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_F}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F)A$$
$$={}^tA\,\mathbb{1}_k\,A$$
$$={}^tA A$$

dc $1=\det\mathbb{1}_k=\det({}^tAA)=(\det A)^2$

& det $A = \pm 1$. Dc $|\det A| = 1$,

& le lemme est démqé □.

Cor de la dém (L).

La mat de passage A entre 2 bases ortho. est une mat orthogonale :
A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prendre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Soit E un (ee) dim n. On note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthogonaux de E.

$$O(E) = O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}.$$

C'est un groupe. L'ens. des mat orthogonales de taille n est déf p :

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\}$$
$$\subset GL(n, \mathbb{R}),$$ un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille n.

Volumes

Ds ce cours, ns donnons la déf$^{\circ}$ du volume parallélépipède & la déf$^{\circ}$ de parties + complexes de E est tâche calcul intégral.

D5 (i) Pr une famille $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est déf p :

$$\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \;\middle|\; (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k \right\}$$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est déf p :

1) si $\mathcal{V}$ est liée, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=0$

2) si $\mathcal{V}$ est libre, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=|\det P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}|$

où $\mathcal{E}_F$ est une base orthonormée qq de F, $F=Vect(\mathcal{V})$ et $P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à $\mathcal{V}$.

$P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}} = (p_{ij})_{1\le i,j\le k}$ $\quad \forall j=1,\dots,k,\; v_j=\sum_{i=1}^{k} p_{ij}\, e_i$

L (cohérence déf vol_k)

$|\det P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}|$ ne dépd pas chx de $\mathcal{E}_F$.

DM soit $\mathcal{E}_F'=(e_1',\dots,e_k')$ une autre base orthonorm. de F, $\mathcal{E}_F=(e_1,\dots,e_k)$.

Notons $P=P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}$, $P'=P_{\mathcal{E}_F'\to\mathcal{V}}$,

$A=P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{E}_F'}$ alors $P=AP'$.

On a à mq $|\det P|=|\det P'|$. Puisq les 2 déterminants st non nuls, cette égalité est équivalente à $|\det A|=1$.

A est la mat de passage entre 2 bases orthon., dc px la mat du produit scalaire on a :

$$\mathbb{1}_k = Mat_{\mathcal{E}_F'}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F) = {}^tA\, Mat_{\mathcal{E}_F}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F)\, A = {}^tA\, \mathbb{1}_k\, A = {}^tA A$$

dc $1=\det \mathbb{1}_k = \det({}^tAA) = (\det A)^2$

& $\det A = \pm 1$. Dc $|\det A| = 1$,

& le lemme est démqé □.

Cor de la dém ①.

La mat de passage A entre 2 bases ortho. est une mat orthogonale :
A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prendre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

soit E un ee dim n. on note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthogx de E.

$O(E) = O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) =$
$= \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}$.

C'est un groupe. L'ens. des mat orthogonales de taille n est déf p :

$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\}$
$\subset GL(n, \mathbb{R})$, un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille n.

→ E ee dim $n \geq 1$, soit $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_n)$ base on. alors

$$\begin{array}{ccc} O(E) & \longrightarrow & O(n) \\ \cup & & \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \end{array}$$

est **un isom. de groupes**. Dc $\forall$ chq $n \geq 1$, on a un seul groupe orth. euclidien, à isomop. près. On identifie $O(n)$ à $O(\mathbb{R}^n, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, le groupe orthogonal de l'ee $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

On introduit les groupes spécix orthognx :

$$\left\| \begin{array}{l} SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\} \\ SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} . \end{array} \right.$$

On a vu $\forall A \in O(n)$, $\det = \pm 1$.

Dc $\left\| \begin{array}{l} O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E) \\ O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n) \end{array} \right.$

où $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = -1$

$O^-(n) = \{u \in O(n) \mid \det u = -1\}$

Rq : $SO(E) \subset O(E)$ est un ss-groupe, $O^-(E)$ n'est pas ss-groupe, mais une classe à gauche (ou à droite) de $O(E)$ modulo $SO(E)$: $\forall \tau \in O^-(E)$,

$O^-(E) = \tau\, SO(E) = SO(E)\, \tau$

Le groupe quotient $O(E)/SO(E)$ est isomorphe au groupe d'ordre 2

$\mu_2 = \{\pm 1\}$; $O(E)/SO(E) \simeq \{\pm 1\}$

Cela suit du (TH) d'isomorphisme pr le groupe quotient : on considère le morphisme du déterminant,

$$\det : O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$u \longmapsto \det u$$

son image est $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

Donc $O(E) / \ker(\det) \simeq \mu_2$.

Or $\ker(\det) = SO(E)$

∴ Le cas $n = 1$: $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) \simeq O(1) = \{\lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mu_2$;

mat taille 1

$A(\lambda)$ tq ${}^tAA = 1_n$

$SO(1) = \{1\}$, le groupe trivial q se réduit à l'Elt neutre.

Cas $n=2$:

P1 Soit E plan eucl., $\mathcal{E}=(e_1,e_2)$ une base o.n de E, $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{E}}(u) \in M_2(\mathbb{R}) \text{ alors:}$$

(1) $u \in SO(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $u \in O^-(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

DM $u \in O(E) \Leftrightarrow {}^tAA = \mathbb{1}_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a^2+b^2=1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ (a,b)=(\cos\theta, \sin\theta)$
- Puisq $a^2+b^2=c^2+d^2=1\neq 0$, les 2 vecteurs (a,b), (c,d) st non nuls.

$$ac+bd=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (a,b), (d,-c)$ st colinéaires.

Dc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (d,-c)+\alpha(a,b)=0$,

ie $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\alpha\sin\theta \\ \sin\theta & \alpha\cos\theta \end{pmatrix}$

De plus $\det A = \pm 1$,

$\det A = \alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \alpha$

dc $\alpha = \pm 1$ & on a :

$\alpha = 1 \Leftrightarrow u \in SO(E)$,

$\alpha = -1 \Leftrightarrow u \in O^-(E)$.

No : $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de la rot° d'angle θ ds plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Q° La représentat° d'un élt $u \in SO(E)$ p une mat R^θ est-elle uniq, si on prend θ mod 2π ?

Rép : La matrice de passage entre 2 bases o.n $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ est orthogonale :

$$P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \in O(2) \Rightarrow$$

$$\exists \varphi \in \mathbb{R} \mid \underbrace{P = R^{\varphi}}_{1^{\circ} \text{ cas}} \text{ ou } R^{\varphi} T, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = R^{\vartheta}$, alors

$$Mat_{\mathcal{E}'}(u) = P^{-1} R^{\vartheta} P = \begin{cases} (R^{\varphi})^{-1} R^{\vartheta} R^{\varphi} & \text{ds } 1^{\circ} \text{ cas} \\ T^{-1} (R^{\varphi})^{-1} R^{\vartheta} R^{\varphi} T & \text{ds } 2^{\circ} \text{ cas} \end{cases}$$

P calcul direct on mq :

$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $R^{\varphi} . R^{\psi} = R^{\varphi+\psi}$, $(R^{\varphi})^{-1} = R^{-\varphi}$,

$T^{-1} = T$, $T^2 = \mathbb{1}_2$; $T^{-1} R^{\vartheta} T = T R^{\vartheta} T = R^{-\vartheta}$.

on a $Mat_{\mathcal{E}'}(u) = \begin{cases} R^{-\varphi+\vartheta+\varphi} = R^{\vartheta} & \text{ds } 1^{\circ} \text{ cas} \\ R^{-(\varphi+\vartheta+\varphi)} = R^{-\vartheta} \end{cases}$

On a dmé :

P2 soit E un plan euclidien, un élt $u \in SO(E)$ est donné p la m̂ matrice R^{ϑ} ds 2 bases o.n. liées p une mat de passage o.n tq $\det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = -1$ & si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = R^{\vartheta}$, $Mat_{\mathcal{E}'}(u) = R^{\theta'}$, alors $\vartheta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ & $R^{\theta'} = (R^{\theta})^{-1} = R^{-\vartheta}$.

Orientaθ

soit V un e.v de dim finie.
On p^t diviser l'ens $\mathcal{B}(V)$ de toutes les bases de V en 2 parties disjointes, classe d'équivalence p la relaθ d'équivalce suivante :

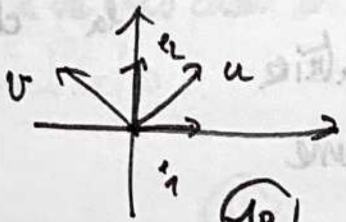
$$\forall\, \mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathcal{B}(V), \quad \mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \Leftrightarrow \det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} > 0.$$

Df Munir V d'une orientaθ c'est choisir laq^{lle} de 2 classes on appelle classe des **bases directes**, l'autre étant la classe des bases indirectes.

On pt donner une orientaθ en précisant une base directe.

Cor (Prop 2) soit E plan euclidien orienté. On a alors un isomorphisme canoniq $x : SO(E) \longrightarrow SO(2)$ q associe à chq élt $u \in SO(E)$ sa matrice R^{θ} ds n'importe q^lle base o.n directe ; l'angle de rotaθ θ (mod 2π) ne dépend pas choix base o.n directe.

Rq : L'orientaθ standard du plan euclidien standard $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ pt ê décrit ĉ suit : une base (u,v) de $\mathbb{R}^2$ est directe si v s'obtient p la rotaθ de u d'angle 90° ds le sens contraires des aiguilles d'une montre.



Sens géométriq ds élts de $O^-(E)$ (cas dim 2)

L1 Tt élt u de $O^-(E)$ a $\{1,-1\}$ pr spectre, dc s'écrit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

DM Le polynôm car $u \in \mathcal{L}(E)$ est

$P_u(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(u)\lambda + \det(u) = 0.$

La trace et det de u pvt ê calculés ds la matrice de u dans n'importe q^lle base de E. De prop on a :

$u \in O^-(E) \Rightarrow \mathrm{tr}(u) = 0,\ \det(u) = -1$

dc $P_u(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$.

Dc u est diagonalisable de spectre $\{1,-1\}$.

On pt mq facilmt sep E_1 & E_{-1} de u st perpendicul^r ss calculs (cours)

(L2) Les vct^rs propres unit^rs (= de norme 1) de la mat $A = R^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ de prop 1 (2) st :

- $v_1 = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ de (vp 1) &
  $v_2 = \pm\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ de (vp −1).

DM en

(Prop 3) soit E un plan euclidien. Les élts de $O^-(E)$ st les réflexions orthogonales.
- Pr tt $u \in O^-(E)$, il y a exactmt 4 bases o.n. de E ds lqls u s'écrit p la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  Si E est orienté, 2 de ces bases st directes, 2 autres indirectes

Espaces euclidiens de dim 3

Produit Vectoriel

Soit E un espace euclidien de dim 3 muni d'une orientaθ.

Notaθ :

$$\underset{\forall \text{ bases}}{\mathbb{B}(E)} \supset \underset{\text{bases o.n}}{\mathbb{B}_{on}(E)} = \underset{\text{b.o.n directes}}{\mathbb{B}^+_{on}(E)} \sqcup \underset{\text{b.o.n indirectes}}{\mathbb{B}^-_{on}(E)}$$

$$\mathbb{B}(E) = \mathbb{B}^+(E) \sqcup \mathbb{B}^-(E)$$

(D1) soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de 3 vect^rs de E. Le réel $\det_\varepsilon(\mathcal{U})$, le det de la mat formée des colonnes ds coord. des vect^rs de $\mathcal{U}$ ds une base $\varepsilon \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$, ne dépd pas de ε & est appelé produit mixte de $\mathcal{U}$.

Notaθ : $[\mathcal{U}] = [u, v, w]$

Ex Démq l'indépdce de $\det_{\mathcal{E}} \mathcal{U}$ du choix de $\mathcal{E} \in \mathcal{B}_{om}^{+}(E)$.

Prop 4 (Ptés pdt mixte)

Le produit mixte $\mathcal{P} : E^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v,w) \mapsto [u,v,w]$ est trilinéaire & antisymétriq. Pr $\mathcal{U} \in E^3$, on a :

a) $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 0 \iff \mathcal{U}$ est lié.

b) $\mathcal{P}(\sigma(\mathcal{U})) = \varepsilon(\sigma)\,\mathcal{P}(\mathcal{U})$ pr tte permutaθ $\sigma \in S_3$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature d'une permutaθ.

ep $\mathcal{P}(u,v,w) = -\mathcal{P}(v,u,w) = -\mathcal{P}(w,v,u)$

c) $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_{om}^{+}(E) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \pm 1$.

DM (a) (b) st conséqces immédiates pptés du det. Pr c), on rq que transfoθ $(u,v,w) \to (u,v,-w)$ pmt de passer d'une base directe o.n à une base directe o.n & det

$$\det P_{(u,v,w) \to (u,v,-w)} = -1.$$

Dc si $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_{om}^{+}(E)$, on a par défθ.

$$[\mathcal{U}] = \det(\mathcal{U}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

Produit Vectoriel ds ee orienté de dim 3

(L1) soit V un ee alors l'appli $\Psi : V \to V^*$, $x \mapsto \langle x | \cdot \rangle$ est un isom. canoniq de V sur V^*.

DM $\mathcal{P}$ la déf° d'une FB (le produit scalaire est FB), $\forall x \in V$, l'applic° $\ell_x : V \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \langle x | y \rangle$ ($\ell_x = \langle x | \cdot \rangle$) est une forme linéaire.

Dc l'appli° $\Psi : V \to V^*$ est bien déf.

$\mathcal{P}$ m̂ déf, $\langle x | y \rangle$ est aussi linéaire en x, dc l'appli $\Psi : x \mapsto \ell_x$ est linéaire, ie $\Psi \in \mathcal{L}(V, V^*)$.

· $\ker \Psi = \{ x \in V \mid \ell_x = 0 \} = \{ x \in V \mid \forall y \in V, \ell_x(y) = 0 \}$

$= \{ x \in V \mid \forall y \in V, \langle x | y \rangle = 0 \}$

$= \ker \langle \cdot | \cdot \rangle$,

(13)

le noyau de la FB $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Ce dernier est trivial $\mathcal{P}$ D° du produit scalaire. Dc Ψ est injective. Puisque $\dim V^* = \dim V$, l'injectivité entraîne la bijectivité. Ψ est canoniq car est déterminé par $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ uniquement. □

(D1) soit E un ee orienté de dim 3. Le produit vectoriel de 2 vect^{rs} $u, v \in E$ est l'uniq vecteur de E, noté $u \wedge v$, tq $\forall w \in E$, $[u, v, w] = \langle u \wedge v | w \rangle$

En utilisant l'isom. canon. $\Psi : E \xrightarrow{\sim} E^*$ du (L1) : on pt écrire :

$$u \wedge v = \Psi^{-1} ([u, v, \cdot])$$

où $[u, v, \cdot] \in E^*$ est la forme linéaire $E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto [u, v, w]$.

(P1) (pptés prdt vectoriel)

soit E un espace euclidien orienté de dim 3.

1. L'appli $E \times E \longrightarrow E$, $(u,v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire & antisymétriq ($\forall\, u,v \in E$, $u \wedge v = -v \wedge u$).

2. $\forall u,v \in E$, $u \wedge v = 0 \iff u, v$ st colinéaires.

3. $\forall\, u,v \in E$, $u \wedge v \perp u$, $u \wedge v \perp v$.

4. si u,v ne st pas colinéaires alors $(u, v, u \wedge v) \in \mathbb{B}^+(E)$.
($\mathbb{B}^+(E)$: ens bases directes de E)
si de + (u,v) est une famille orthonormée (ie $\|u\| = \|v\| = 1$, $u \perp v$) alors $(u, v, u \wedge v) \in \mathbb{B}^+_{om}(E)$.

5. si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}^+_{om}(E)$, alors $\forall i,j \in \{1,2,3\}$:

$$e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \varepsilon_{ijk} & \text{où } \{i,j,k\} = \{1,2,3\}, \end{cases}$$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ est la signature d'une permutaO.

6. si $\mathcal{E} = \mathbb{B}_{om}(E)$

$$[u \wedge v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

DM TD.

Endomorphismes orthogonaux ds un (ee) E de dim 3

(L2) Un endom. orthogonal d'un (ee) E de dim 3 a tjrs une (vp) réelle ± 1, égale à son déterminant.

(en) En tte dimenθ, les (vp) réelles d'un endom. orthogon. d'un (ee), st égales à 1 ou à -1.

DM a) soit $u \in O(E)$, $\dim E = 3$, $P_u(\lambda)$ le poly. carac de u. Puisq $\deg P_u$ est impair, P_u a au moins une racine réelle, dc u possède une (vp) réelle, & l'en, cette (vp) est 1 ou -1.

b) si ttes les (vp) de u st réelles alors à l'ordre près les 3 (vp) de u sont $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$.

on voit que $\det u$ est tjrs parmi les (vp) ds ce cas.

c) si u possède une (vp) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors $\overline{\lambda}$ est aussi une (vp), et si $\mu = \{\pm 1\}$ est la val. réelle, alors $\det u = \mu . \lambda . \overline{\lambda}$.

Puisq $\lambda\overline{\lambda} > 0$, $\det u$ & μ st m̂ signe.

Dc psq $\det u, \mu \in \{\pm 1\}$, on a $\det u = \mu$, dc det & parmi les (vp) de u ds ce cas aussi.

□.

(Rq) La DM entraîne les (vp) complexes de u st aussi de valr abs 1 & les (vp) réelles.

en effet, ds la relatθ $\det u = \mu\lambda\overline{\lambda}$, on a:

$$\det u = \mu = \pm 1 \ \& \text{ dc } \lambda\overline{\lambda} = 1.$$

Prop 2 soit E un ee orienté de dim 3, $u \in O(E)$, $\lambda = \det(u) = \{\pm 1\}$. Alors $\exists$ une base $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^+_{om}(E)$ & un réel $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R^ϑ}} \\ 0 & & \end{array}\right), \text{ où}$$

$$R^\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Le spectre de u est $(\lambda, e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta})$.

DM Par L2, λ est vp de u.

soit e_1 un Vp unitaire de vp λ, et (e_2, e_3) une base orthonormée du plan $H = e_1^\perp$. Quitte à remplacer e_1 par $-e_1$, on pt supposer que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{B}^+_{om}(E)$

soit $x \in H$ alors on a :

$<e_1 | x> = 0 \Rightarrow <u(e_1) | u(x)> = 0$

$\Rightarrow \lambda <e_1 | u(x)> = 0 \Rightarrow u(x) \in H.$

dc $u(H) \subset H$.

Puisq $\ker u = \{0\}$, la restrict° $u|_H : H \to H$ est injective, et dc bijective.

De plus, $\forall x, y \in H$, $<u(x) | u(y)> = <x|y>$

dc $u \in O(H)$. Par la prop de classificat° des endomorphismes orthogonaux en dim 2, $\exists \vartheta \in \mathbb{R}$ tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

où $A = R^\vartheta$ ou $A = R^\vartheta . T$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

or $\det u = \lambda = \lambda \det A$, dc $\det A = 1$ et $A = R^\vartheta$.

(D2) (i) Un axe de E est une droite vectorielle orientée ds E. Tt axe est dirigé p un uniq vecteur unitaire.

(ii) L'elt $u \in SO(E)$ de matrice

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R^{\theta}} \end{array}\right)$$

ds une base o.n directe $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ de E s'appelle rotaθ d'angle θ autour de l'axe dirigé par e_1.

Notaθ : $u = R_v^{\theta}$ ∀ vecteur v dirigeant l'axe (ie $v = \alpha.e, \alpha > 0$).

(Cor 1) soit $u \in SO(E)$, $u \neq id_E$ alors u possède 2 axes de rotaθ, ayant pour support la m̂ droite vectorielle $\mathbb{R}v \subset E$ ou, ou v est un vecteur non-nul : l'un est dirigé par v, l'autre par $-v$.

L'axe & l'angle $[2\pi]$ st les elts caractéristiqs d'une rotaθ de E.

Déterminaθ pratiq des elts caractqs d'une rotaθ ds un ee orienté E de

on est donné $u \in SO(E)$, $u \neq id_E$.

(1.) on trouve un vectr p. v de u de vp $1 = \det u$, solθ de $u(v) = v$.

(2.) on détermine $\cos\theta$ p $tr(u) = 1 + 2\cos\theta$.

(3). on détermine le signe de $\sin\theta$, q coïncide av signe $[x, u(x), v]$ $\forall x \in E \setminus \mathbb{R}v$, q $\Leftrightarrow$:

$[x, u(x), v] = \|v\| (\beta^2 + \gamma^2) \sin\theta$, où $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$; $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base o.n directe de E tq $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$.

Avec ce choix, $u = R_v^{\theta}$.

Ex Dmq (*)

Rq : Parmi les rotat°s R_v^θ de spectre réel et les renversements, de mat $\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$; elles correspondent à l'angle $\theta = \pi$.

Pour $\theta = \pi$, la direct° de l'axe n'est pas importante : $R_v^\pi = R_{-v}^\pi$.

De façon + générale, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$R_v^\theta = R_{-v}^{-\theta}.$$

Endomorphismes orthogonaux ds un ee de dim qq

TH 1 Soit E un ee de dim ≥ 1 alors $\exists$ une base o.n. de E ds lq^{elle} u s'écrit p la mat

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & R^{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R^{\theta_r} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R}$,

$$R^{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

Cor 2 Ttes les vp de $u \in O(E)$ ds $\mathbb{C}$ st de valeurs abs 1.

DM ~~si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ds lq^{elle} u s'écrit p la mat A de la forme (1), on définit la base~~

On munit E d'une base o.n. $\mathcal{E}' = (e_1', \dots, e_n')$ ds lq^{elle} u s'écrit p la mat A de la forme (1) & on considère l'endomorphisme u_A de $\mathbb{R}^n$ donné par la mat A ds la base standard $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

soit $\tilde{u}_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, donné dans la base standard de $\mathbb{C}^n$ par la même matrice A. On passe à la nouvelle base dans $\mathbb{C}^n$:

$$\varepsilon_j = e_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-2r,$$

$$\varepsilon_j = e_j + i e_{j+1}, \quad \varepsilon_{j+1} = e_j - i e_{j+1}$$

pour $j = n-2r, n-2r+2, \dots, n$.

On vérifie aisément que tous les vecteurs ε_j sont vecteurs propres de $\tilde{u}_A$. Dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, $\tilde{u}_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ s'écrit par la mat diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & e^{i\vartheta_1} & & & \\ & & & & & & & e^{-i\vartheta_1} & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & e^{i\vartheta_r} \\ & & & & & & & & & & e^{-i\vartheta_r} \end{pmatrix}$$

(9)

Le spectre de $\tilde{u}_A$ est donc le spectre de u est $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, e^{i\vartheta_1}, e^{-i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_r}, e^{-i\vartheta_r})$ donc toutes les vp de u sont de valeur abs. 1.

soit $\tilde{u}_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, donné ds la base standard de $\mathbb{C}^n$ par la m̂ matrice A. On passe à la nouvelle base dans $\mathbb{C}^n$:

$$\varepsilon_j = e_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-2r,$$

$$\varepsilon_j = e_j + i e_{j+1}, \quad \varepsilon_{j+1} = e_j - i e_{j+1}$$

pour $j = n-2r, n-2r+2, \dots, n$.

On vérifie aisément que ts les vect^{rs} ε_j st vect^{rs} propres de $\tilde{u}_A$. Ds la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, $\tilde{u}_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ s'écrit p la mat diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & e^{i\vartheta_1} & & & \\ & & & & & & & e^{-i\vartheta_1} & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & e^{i\vartheta_r} \\ & & & & & & & & & & e^{-i\vartheta_r} \end{pmatrix}$$

(19)

Le spectre de $\tilde{u}_A$ est dc le spectre de u est

$$(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, e^{i\vartheta_1}, e^{-i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_r}, e^{-i\vartheta_r})$$

dc ttes les vp de u st de val^r abs. 1.

DM Th 1 cas n°2 sr RédcO endom. orthogonaux à une forme normale.

L1 soit E ee de dim $n \geq 1$, $u \in O(E)$, $F \subset E$ un ss es stable par u : $u(F) \subset F$. Alors $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$.

DM 1) $u(F) \subset F \to u$ induit un endom $u_F \in \mathcal{L}(F)$, restricO de u :

$$\forall x \in F, \quad u_F(x) = u(x).$$

Puisq u est inversible, $\ker u = \{0\}$, dc $\ker u_F = \{0\}$ & u_F est bijectif.

Dc $u(F) = u_F(F) = F$.

2) $\forall x \in F, y \in F^\perp$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle = 0$

dc $u(y) \in (u(F))^\perp = F^\perp$. □

(L2) soit V un $\mathbb{R}$-ev de dim $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(V)$ alors u a un ss-e.v de dim 1 ou 2.

DM On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. soit $A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$, $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endom de $\mathbb{R}^n$ de matrice A. Il suffit de mq u_A admet un ss-ev F stable de dim 1 ou 2.

En effet, si on note $S : \mathbb{R}^n \to E$,
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$ alors S est un isomorphisme d'ev tq $u = S\, u_A\, S^{-1}$ et F est stable par u_A ssi $S(F)$ est stable par u.

On cherchera dc un ss-ev de $\mathbb{R}^n$ stable par u_A, de dim 1 ou 2. soit P_A le polynôme carac. de A (& dc de u & u_A). Par le Th fondamtl d'Algèbre, P_A possède une racine complexe λ; les racines de P_A st les vp de A (& de u & de u_A).

► cas 1 : $\lambda \in \mathbb{R}$, alors u_A admet un vecteur propre $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $u_A(v) = \lambda v$. On pose $F = \mathbb{R} v$ alors $\dim F = 1$, $u_A(F) \subset F$, & c'est terminé.

► cas 2 : $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on note $\tilde{u}_A$ l'endom de $\mathbb{C}^n$ de matrice A, $\tilde{u}_A$ admet un vecteur propre $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$: $\tilde{u}_A(v) = \lambda . v$.

On note $x = \mathrm{Re}(v)$; $y = \mathrm{Im}(v)$; $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$; $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$; $\beta \neq 0$; on note X, Y, Z, les mat colonnes des vecteurs x, y, v respt ds la base standard de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$.

On a :
$$AZ = A(X + iY) = AX + iAY$$
$$= \lambda Z = (\alpha + i\beta)(X + iY)$$
$$= \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

Puisq A est mat réelle & l'identifiant des parties réelles & imaginaires ; on obtient :
$$AX = \alpha X - \beta Y \ ; \ AY = \beta X + \alpha Y.$$

$AX = \alpha X - \beta Y$, $AY = \beta X + \alpha Y$.

ie $u_A(x) = \alpha x - \beta y$, $u_A(y) = \beta x + \alpha y$.

Donc $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x,y) = F$ est u_A-stable.

→ Mq $\dim F = 2$, en effet, $v = x+iy \neq 0$, dc $x \neq 0$ ou $y = 0$ & $F \neq \{0\}$.

Supposons $\dim F = 1$, ie $x \parallel y$ alors tt vecteur de $F \setminus \{0\}$ est propre de m̂ valeur propre réelle μ. Cela entraîne que $\tilde{u}_A(x+iy) = \mu(x+iy)$ ie $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$, ce q est absurde. Dc F est un sev de stable de u_A de dim 2.

□

L3 Soit E un ⓔ, $u \in O(E)$ alors E est une somme directe orthogonale de ss-ev stables pour u de dim 1 ou 2.

DM Par récurrence, sur $n = \dim E$.

Rien à démontrer si $n = 0, 1$ ou 2.

Soit $n \geq 3$, par lemme 2, u a un ss espace stable F de dim 1 ou 2. Par (L1), $F^\perp$ est stable par u, et en appliquant l'HDR à $u_{F^\perp} \in O(F^\perp)$, on trouve une décomposition
$$F^\perp = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_m$$
en somme directe orthogonale de sev stables par u tq $\dim F_i \in \{1,2\}$ pr $i = 1, \dots, m$. Il reste à poser $F_{m+1} = F$, alors
$$E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_{m+1}$$
est une décomposition voulue de E □.

Rq Th 1 : Re énoncé : soit E un espace euclidien de dim $n \geq 1$ alors $\exists$ base o.n. de E ds lq^{elle} u s'écrit par la matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & \\ & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \cos\theta_r \; -\sin\theta_r \\ & & & & & & \sin\theta_r \; \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

pr des réels $\theta_1, \dots, \theta_2$ convenables.

DM Pr (L3), E est une somme directe orthogonale de ss-espaces stables de dim 1 ou 2 : $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$; $F_i \perp F_j$ si $i \neq j$, $u(F_i) = F_i$, $\dim F_i \in \{1, 2\}$, pr $i = 1, \dots, r$. On pt supposer que les F_i st des ss-esp. stables minimaux. En effet, si un F_i, de dim 2, contient une droite stable, alors F_i se décompose en somme directe de 2 droites stables orthogonales, $F_i = F_i' \oplus F_i''$, $F_i' \perp F_i''$, $\dim F_i' = \dim F_i'' = 1$, et on pt remplacer F_i par $F_i' \oplus F_i''$ ds la décomposit°.

Alors cette hypothèse (tous les F_i st u-stables minimaux), il n'y a pas de F_i de dim 2 pr lequel $u|_{F_i}$ soit une réflexion, et de $u|_{F_i} \in SO(F_i)$ $\forall$ F_i de dim 2.

Le résultat suit mtn des cas $n = 1$, $n = 2$ □

Endomorphismes adjoints & symétriqs

P/D Soit E (ee) & $u \in \mathcal{L}(E)$ Alors :

1. Il existe un uniq $v \in \mathcal{L}(E)$ tq
(*) $\forall x \in E, \forall y \in E, \; \langle u(x) | y \rangle = \langle x | v(y) \rangle$
L'endom v ainsi défini s'appelle adjoint de u & est noté u^*.

2. si $\mathcal{E}$ est une base orné de E alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$$

DM soit $\mathcal{E}$ une base ormée de E.

On note $A = Mat_{\mathcal{E}}(u)$. soit $v \in \mathcal{L}(E)$, $B = Mat_{\mathcal{E}}(v)$ pr ~~2 ... de~~ vecteurs qq x, y de F, de matrices X, Y ($\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) ds la base $\mathcal{E}$, on a :

$\langle v(x) | y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tA\,Y$;

$\langle x | vy \rangle = {}^tX(BY) = {}^tXBY$.

on voit que la ppté (*) sera satisfaite si on définit v comme l'endomorphisme de E donné p la matrice ${}^tA$ ds la base $\mathcal{E}$. On a mqé l'∃ de v.

Mq ∃!, soit $v, v' \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes satisfaisant à (*) alors $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\langle x | v(y) \rangle = \langle x | v'(y) \rangle$. Fixons $y \in E$; alors : $\forall x \in E$, $\langle x | v(y) - v'(y) \rangle = 0$ cela signifie que $v(y) - v'(y) \in E^{\perp}$.

Or $E^{\perp} = \{0\}$.

En effet aucun vecteur non nul z de E ne pt ê orthogonal à E tout entier, car $\langle z | z \rangle = \|z\|^2 > 0$. On obtient dc : $v(y) - v'(y) = 0$. on a mqé cela $\forall y \in E$ qq. Dc $v = v'$.

Le point 2) suit de la preuve de l'∃, on a construit $v = u^*$ en la définissant par la matrice ${}^tA$ ds une base o.n $\mathcal{E}$ ds lq^{lle} $A = Mat_{\mathcal{E}}(u)$.

P1 soit E un ep. e. & $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors on a :

1) $(f^*)^* = f$

2) $(f+g)^* = f^* + g^*$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda f)^* = \lambda f^*$

4) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

ex.

D1 soit E un (e) $u \in \mathcal{L}(E)$. on dit que u est symétriq, ou auto-adjoint, si $u = u^*$. De façon équivalente, u est symétriq $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$

(Cor) (prop 1) soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est symétriq ssi une des 2 pptés équivalnts est vrai

1) $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ est sym $\forall$ base o.n $\mathcal{E}$ de E.

2) $\exists$ une base o.n $\mathcal{E}$ de E tq $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ soit sym.

ex

(R1) Une matrice A est dite symétriq si ${}^tA = A$.

@1 Une project° orthogonale est symétriq (ex.)

@2 Toute symétrie orthogonale est symetriq.

(Cor2) soit E (ee), $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in O(E)$ $\Leftrightarrow u$ est inversible & $u^* = u^{-1}$ $\Leftrightarrow u^*u = uu^* = id_E$.

DM $u \in O(E) \Leftrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E,$
$\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle \Leftrightarrow$
$\forall x \in E, \forall y \in E, \ \langle x | u^*u(y) \rangle = \langle x|y \rangle \Leftrightarrow$
$\forall y \in E, \ u^*u(y) - y \in E^\perp \Leftrightarrow$
$\forall y \in E, \ u^*u(y) - y = 0 \Leftrightarrow u^*u = id_E.$ □

Notat°s : $\mathcal{S}_E = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u = u^*\}$,
$\mathcal{S}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = A\}$

on a si $\mathcal{E}$ est une base o.n de E alors
$u \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prop 2 soit E (ee) & $u \in \mathcal{S}_E$. Si F est sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

DM soit $x \in F^\perp$ qq $\Rightarrow \forall y \in F,$
$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | \underset{\in F}{u(y)} \rangle = 0$
dc $\forall x \in F^\perp, u(x) \in F^\perp$

ie $F^\perp$ est stable par u.

Par prop 1., $F^\perp$ est aussi u-stable.
Par la Rg, $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}_{F^\perp}$. On a
$0 < \dim F^\perp < n$, dc p HDR,
$\exists$ une décompo° $F^\perp = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r$
tq $u(F_i) \subset F_i$, $\dim F_i \in \{1,2\}$
pr $i = 1, \dots, r$. On pose $F_{r+1} = F_r$
& alors :
$$E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_{r+1}$$
est une décompo° de E en une somme directe orthogonale de ss-espaces u-stables de dim 1 ou 2.

<u>2e étape</u> : Étant donné une décompo° de E en une somme directe orthogonale de ss-espaces u-stables de dim 1 ou 2, on raffine cette décompo° en remplaçant chq facteur de dim 2 par une somme directe orthogonale de 2 droites vectorielles u-stables. Comme résultat, on obtient une décompo° $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r$, $\dim F_i = 1$, $u(F_i) \subset F_i$; $i = 1, \dots, n$.

Soit $F \subset E$ un ss. e.v u-stable de dim 2. Par la Rg, $u_F \in \mathcal{S}_F$. Choisissons une base o.n.c.e. (e_1, e_2) de F. La mat $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_F)$ est symétriq :
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, on calcule le poly. car : & son discriminant
$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$
$$\mathcal{D} = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2.$$
Donc $\mathcal{D} \geq 0$ & 2 cas :

a) $\mathcal{D} = 0 \Rightarrow a = c$ & $b = 0$,
ie $u_F = c \cdot id_F$. On pt choisir $F' = \mathbb{R}e_1$, $F'' = \mathbb{R}e_2$ alors
$F = F' \overset{\perp}{\oplus} F''$, où F', F'' st des droites orthogonales u-stables.

b) $\mathcal{D} > 0$, alors P_A a 2 racines réelles distinctes & on définit F', F'' c̄ les 2 droites engendrées p les vecteurs propres respectifs.

On a dmé :

(P1) soit E (ee), $u \in \mathcal{S}(E)$, $F \subset E$ sev E stable par $u \Rightarrow F^{\perp}$ stable par u.

Rq : si $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$ s.e.v stable par u, on note u_F la restricθ de u à F vue c un automorphisme de F,

$u_F \in \mathcal{L}(F)$, $\forall x \in F$, $u_F(x) = u(x)$ & $u \in \mathcal{S}(E) \Rightarrow u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Ici F est muni de s^ce d'un ee, au produit scal^R obtenu p la restricθ du celui de E :

(*) $u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle x | uy \rangle = \langle ux | y \rangle$

Evidemment (*) entraîne que :

$\forall x, y \in F, \langle x | u_F y \rangle = \langle u_F x | y \rangle$, ce q dmq l'implicaθ 1.

(P2) soit E (ee), $u \in \mathcal{S}_E$ & $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 2 (vp) réelles distinctes de u. soit E_{λ_1}, E_{λ_2} les sep de u Alors $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.

(Th. 1) Diagonalisaθ des endom. sym en base orthonormée.

soit E un (ee) & $u \in \mathcal{S}_E$ alors :

1) Ttes (vp) complexes de u st réelles : $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}$

2) $\exists$ base ornée $\mathcal{E}$ de E tq la matrice $M_{\mathcal{E}}(u)$ soit diagonale.

DM On dmq d'abord (PR) sur $n = \dim E$ la dim de E, qu'il existe une décompositθ de E en une somme directe orthogonale de ss espaces de dim 1 ou 2 stables par u.

Si $n \leq 2$, rien à dmq, soit $n \geq 3$ p (L2) du cours 1, tt endomorphisme d'un (ev) réel de dim > 0 a un ss-espace stable de dim 1 ou 2. soit $F \subset E$ un tel ss-espace pr u : $u(F) \subset F$, dim $F = 1$ ou 2.

... (page 1.), $F^\perp$ est aussi u-stable.
Par la Rq, $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}_{F^\perp}$. On a $0 < \dim F^\perp < n$, dc p HDR, $\exists$ une décomposi° $F^\perp = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_r$ tq $u(F_i) \subset F_i$, $\dim F_i \in \{1,2\}$ pr $i = 1, \dots, r$. On pose $F_{r+1} = F$ & alors:

$$E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_{r+1}$$

est une décomposi° de E en une somme directe orthogonale de ss-espaces u-stables de dim 1 ou 2.

2e étape: Étant donné une décomposi° de E en une somme directe orthogonale de ss-espaces u-stables de dim 1 ou 2, on raffine cette décomposi° en remplaçant chq facteur de dim 2 par une somme directe orthogonale de 2 droites vectorielles u-stables. Comme résultat, on obtient une décomposi° $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_n$, $\boxed{26}$

$\dim F_i = 1$, $u(F_i) \subset F_i$; $i = 1, \dots, n$.
soit $F \subset E$ un ss.e.v u-stable de dim 2. Par la Rq, $u_F \in \mathcal{S}_F$.
Choisissons une base o.n.c.e. (e_1, e_2) de F.
La mat $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_F)$ est symétriq :
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, on calcule le poly. car :
$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$ & son discriminant
$\mathcal{D} = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2$.
Donc $\mathcal{D} \geq 0$ & 2 cas :

a) $\mathcal{D} = 0 \Rightarrow a = c$ & $b = 0$, ie $u_F = c \cdot \mathrm{id}_F$. On pt choisir $F' = \mathbb{R}e_1$, $F'' = \mathbb{R}e_2$ alors $F = F' \overset{\perp}{\oplus} F''$, où F', F'' st des droites orthogonales u-stables.

b) $\mathcal{D} > 0$, alors P_A a 2 racines réelles distinctes & on définit F', F'' c les 2 droites engendrées p les vecteurs propres respectifs.

Par prop 2, $F' \perp F''$ dc
$F = F' \overset{\perp}{\oplus} F''$, somme directe orth. de 2 droites u-stables.

On pt dc représenter E ĉ une somme directe $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_n$ de n droites 2 à 2 orthogonales. Choisissons pr chq $i = 1, \dots, n$ un vecteur unitaire e_i générateur de F_i. Cela donne une base o.n $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ pr tq elle $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, dc $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, & la matrice de u ds la base $\mathcal{E}$ est diagonale, égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Cor Si $u \in \mathcal{S}_E$ & $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, de λ_i distincts alors
$$E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r}$$
où E_λ dénote le ss esp. propre de u de vp λ.

Cor 2 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il $\exists$ $P \in O(n)$ tq la mat
$$D = {}^tPAP = P^{-1}AP \quad (2)$$
soit diagonale.

DM On appliq (Th 1) à l'endomorphisme symétriq $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donné pr la mat A ds base standard ; P est alors la mat de passage de la base standard à la base $\mathcal{E}$ construite ds DM (Th 1).

Rq: Pr ḡḡ (2), on rappelle que $P \in O(n)$
(3) $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$

La ff (3) est un analogue matriciel de prop du cours 9 affirmant que ds ⓔ E, (4) $O(E)=\{u\in\mathcal{L}(E) \mid uu^*=id_E\}$

Lorsqu'on choisit une base o.n $\mathcal{E}$ de E & on représente u par sa matrice $M=Mat_{\mathcal{E}}(u)$, (4) se réécrit par 3.

Endomorphismes symétriqs & formes bilinéaires symétriqs

Nota°: E un ⓔ de dim n : On a une correspondce bijective naturelle :

$$\mathcal{S}_E=\left\{\begin{matrix}\text{endom.}\\ \text{symétriq de } E\end{matrix}\right\} \underset{H^{-1}}{\overset{H}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}(E)=\left\{\begin{matrix}\text{formes bil}\\ \text{sym de } E\end{matrix}\right\}$$

Constructo de H

$u\in\mathcal{S}_E \mapsto H(u)=\varphi\in\mathcal{S}(E)$,
$\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\langle x \mid u(y)\rangle$.
La bilinéarité de φ est évidente.

La symétrie : par bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\varphi(y,x)=\langle y \mid u(x)\rangle=\langle u(x)\mid y\rangle$$
$$\underset{\text{car } u\in\mathcal{S}_E}{=}\langle x \mid u(y)\rangle\underset{\text{déf° de } H}{=}\varphi(x,y)$$

Existence de H^{-1} :

H est bijective car ds base o.n. mee, u & H(u) ont la m̂ matrice.

En effet, soit $\mathcal{E}$ une base o.n. & $A=Mat_{\mathcal{E}}(u)$. On représente des vecteurs x, y de E par les vecteurs colonnes, $X=Mat_{\mathcal{E}}(x)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y=Mat_{\mathcal{E}}(y)$. Alors la matrice de u(y) n'est autre que AY & on a $\langle x, u(y)\rangle={}^tXAY$.

C'est la représentatO de la forme bilinéaire φ de mat A en coordonnées.

(P3) Tte forme bilinéaire sym $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise ds une base o.n de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$.

DM soit $\mathcal{E}$ une base $\langle\cdot|\cdot\rangle$ o.n.ée, & soit $A = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi)$ alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

- & dc $u_A \in \mathcal{S}_E$, où on a noté $u_A = \Theta^{-1}(\varphi)$, l'endomorphisme de E ayant A pr matrice ds la base $\mathcal{E}$. Par Th1., $\exists$ une base o.m. $\mathcal{E}'$ tq $Mat_{\mathcal{E}'}(u_A) = D$ soit diagonale, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = Spec\, u_A \subset \mathbb{R}$.

  Si $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ alors $D = P^{-1}AP$.

- Puisq $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ st des bases o.n, $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \in O(n)$. Donc $P^{-1} = {}^tP$.

& $D = {}^tP.A.P = Mat_{\mathcal{E}'}(\varphi)$.

Donc φ se diagonalise ds la base o.n. $\mathcal{E}'$ que u_A. Cette base est orthogonale à la fois pr $\langle\cdot|\cdot\rangle$ & pr φ, elle est de plus orthonormée pr $\langle\cdot|\cdot\rangle$. D.

RQ 2: On pt voir cette prop. č réduct° à une forme normale d'une paire d'une forme bil. sym. dont une est définie positive. Il existe une base $\mathcal{E}$ ds laquelle les 2 formes soient diagonales, & d+ celle q' est déf⊕, soit donnée par mat Identité.

$$\left(Mat_{\mathcal{E}}(\varphi_1), Mat_{\mathcal{E}}(\varphi_2)\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$$

(D2) Un endom. sym. $u \in \mathcal{S}_E$ est dit ⊕ (notat°: $u \in \mathcal{S}_E^+$) si la forme bilinéaire symétriq $\Leftrightarrow$ $\Theta(u)$ est ⊕ : $\Theta(u) \geq 0$. De façon équiv:

$$u \in \mathcal{S}_E^+ \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}_E \ \& \ \forall x \in E, \ \langle x, u(x)\rangle \geq 0$$

De façon simil^R, on défit S_E^{++} les endomorphismes sym. définis ⊕ :

$u \in S_E^{++} \iff (H)(u) > 0 \iff u \in S_E$ & $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, u(x) \rangle > 0$.

Prop 4 Soit $u \in S_E$. Alors on a :

1) $u \in S_E^+ \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^+$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

2) $u \in S_E^{++} \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^{>0}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Notat° : $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid Spec A \subset \mathbb{R}^+\}$

$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid Spec(A) \subset \mathbb{R}^{>0}\}$.

Cor 3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ base o.n. Alors : $A = Mat_{\mathcal{E}}(u)$ alors :

$u \in S_E \iff A \in S_n(\mathbb{R})$,

$u \in S_E^+ \iff A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$u \in S_E^{++} \iff A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Th 2 Soit $u \in S_E^+$, alors $\exists !$ $v \in S_E^+$ tq $v^2 = u$.

(ici $v \circ v = u$)

DM $\exists$: $\exists$ base o.n. $\mathcal{E}$ tq

$Mat_{\mathcal{E}}(u) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On définit v par la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = D_1$ de la base $\mathcal{E}$.

- $u \in S_E^+ \Rightarrow \lambda_i \geq 0$
  $\Rightarrow D_1$ est bien déf
- D_1 est diagonale $\Rightarrow$ symétriq.

$\mathcal{E}$ est une base o.n $\Rightarrow v$ est symétriq.

On a $D_1^2 = D \Rightarrow v^2 = u$.

RA (Th) (Sur la racine carrée d'un endomorphisme symétriq $\oplus$) Soit E un (ee) $u \in \mathcal{S}^+(E)$

Alors $\exists$ uniq $v \in \mathcal{S}^+(E)$, $v^2 = u$.

DM $\triangle$ ✓ DS.

important : - base o.n

$\lambda_i \geq 0 \iff Spec(u) \geq 0$

· $\mathcal{E}$ base o.n $\Rightarrow V$ symétriq.

DM 3-t

(L1) soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $fg = gf$ alors :

1) tout sep de f est stable par g.

2) si les polynômes caractqs de f, g st ttlmt scindés sur $\mathbb{R}$ alors ils ont un (vp) commun.

DM soit $\lambda \in Spec(f)$. Alors $E = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sev de E non nul.

$\forall x \in F$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$

ie $g(x) \in F$. Dc $g(F) \subset F$.

Cela démontre 1).

Puisq F est stable par g, la restric° $g_F = g|_F$ est un endom. de F.

Son polynôme caractéristiq divise celui de g, dc est totalement scindé sur $\mathbb{R}$.

Dc g_F a une racine réelle, (vp) de g_F, et g_F possède un (vp) :

$\exists \mu \in \mathbb{R}, \exists x \in F \setminus \{0\}, g_F(x) = g(x) = \mu x$.

Ce vectR propre de g est un (vp) commun de f & de g car :

$x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$, $g(x) = \mu x$ $\square$

(L2) soit $f, g \in \mathcal{S}(E)$, $fg = gf$. Alors f, g admettent une diagonalisa° simultanée ds base O.n :

$\exists \mathcal{E} \in \mathbb{B}_{on}(E)$, $Mat_{\mathcal{E}}(f), Mat_{\mathcal{E}}(g)$ soient diagonales.

(3/7)

DM (PR) sur $n = \dim E$. Le cas $n=1$
(L2) est évident. Soit $n > 1$, alors f, g st diagonalisables par (Th)$_1$ cours 10. de l^es polynômes car. st tot^{lt} scindés
Dc par (L1), f, g ont (vp) :
$\exists \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$, $\exists x \in E \setminus \{0\}$,
$f(x) = \lambda x$, $g(x) = \mu x$.
Alors $F = \mathbb{C}\cdot x$ est stable par f, g.
Puisq $f, g \in \mathcal{S}(E)$, $F^\perp$ est aussi stable p f, g. Dc les restricOs
$f_{F^\perp}$, $g_{F^\perp}$ st endomorphismes symétriqs de $F^\perp$, sbev de E de dim $n-1$,
$f_{F^\perp}$, $g_{F^\perp}$ commutent dc p HDR,
$\exists \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et une base o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ tq
$\forall i = 2, \dots, n$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$, $g(e_i) = \mu_i e_i$.

On a $F \oplus F^\perp = E$, dc en rajoutant $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$, on obtient une base o.n de E,
$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{B}_{on}(E)$ ds laq^{lle}
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \mu_n \end{pmatrix}$$
□

DM 3^{té} (Th 2).
Soit $v \in \mathcal{S}_E^+$ tq $v^2 = u$ alors $vu = uv = v^3$
dc p (L2), $\exists \mathcal{E} \in \mathcal{B}_{on}(E)$ ds laq^{lle} u, v s'écrivent par les mat diagonales aux élts diagonx λ_i pour u, μ_i pour v, (comm 2 à 2).
Puisq $u \geq 0$, $v \geq 0$; on a $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$
$\forall i = 1, \dots, n$. Soit $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ & soit $i_1, \dots, i_k$ tous les indices $i \in \{1, \dots, n\}$ p^r lesquels $\lambda_i = \lambda$. Alors
$$\mathrm{Vect}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\} = V_\lambda(u)$$
est le sep de u de (vp) λ :
$$V_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Puisq $u = v^2$, $\forall i \in \{i_1, \dots, i_k\}$,

$u(e_i) = \lambda_i e_i = v(v(e_i)) = \mu_i^2 e_i$,

soit $\lambda_i = \mu_i^2$. Puisq $\mu_i \geq 0$, on a

$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda}$ $\forall i \in \{i_1, \dots, i_k\}$.

Dc $v|_{V_\lambda(u)} = \sqrt{\lambda}\, \mathrm{Id}_{V_{\sqrt{\lambda}}(u)}$. (***)

- Puisq $E = \bigoplus_{\lambda \in Spec(u)} V_{\sqrt{\lambda}}(u)$ chq vect^R $x \in E$ a une uniq représentat° de la forme $x = \sum_{\lambda \in Spec(u)} x_\lambda$, et $v(x)$ est déterminé par la ff

$v(x) = \sum_{\lambda \in Spec(u)} \sqrt{\lambda}\, x_\lambda$. qi suit de (**)

$\square$

- **Th 2** (Décomposit° polaire)

soit E ee, $u \in GL(E)$ alors $\exists$ uniq paire $(w, p) \in O(E) \times \mathcal{S}_E^{++}$ tq $u = wp$.

Exercice

Ex : Mq $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $f^* f \in \mathcal{S}_E^+$, et si d+, f est inversible alors $f^* f \in \mathcal{S}_E^{++}$.

Indic : $\langle f^* f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle$

DM Th par l'ex., $u^* u \in \mathcal{S}^{++}$

Dc $\exists\, p \in \mathcal{S}^+$ tq $p^2 = u^* u$. Puisq $Spec(u^* u) \subset \mathbb{R}_{>0}$ & les vp de p st les racines carrées des vp de $u^* u$,

$Spec(p) \subset \mathbb{R}_{>0}$, dc $p \in \mathcal{S}^{++}$.

Posons $w = up^{-1}$, alors on a :

$ww^* = up^{-1}(p^{-1})^* u^* = up^{-1}(p^*)^{-1} u^*$

$= u(p^* p)^{-1} u^* = u(p^2)^{-1} u^* =$ ($p = p^*$)

$= u(u^* u)^{-1} u^* = u u^{-1} (u^*)^{-1} u^* = id_E$

dc $w \in O(E)$.

Δ

DM 3.ξ Soit $u = wp = \tilde{w}\tilde{p}$ 2 décomposit°s de ce type. On a :

$u^*u = (wp)^* = p^* \underbrace{w^* w}_{} p = p^* \, id_E \, p$

$= p^* p = p^2$ $\quad$ id_E car $w \in O(E)$

On a m̂ cal pour $\tilde{p}$: $u^*u = p^2 = \tilde{p}^2$.

Puisq $p, \tilde{p} \in \mathcal{S}_E^+$, par l'unicité du

(Th 1) $p = \tilde{p}$ alors $\tilde{w} = u\tilde{p}^{-1} = up^{-1} = w$

dc $(\tilde{w}, \tilde{p}) = (w, p)$. □

(Cor 1) (Versi° matricielle)

1) $\forall \; A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \exists! \; B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = B^2$.

2) $\forall \; M \in GL(n, \mathbb{R})$ (resp $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$) $\exists$ une uniq paire $(\Omega, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $(\Omega, S) \in SO(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = \Omega S$.

34

Une applicat° de la décomposit° polaire.

(P). $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs, ie $\forall A, B \in GL^+(n, \mathbb{R})$, $\exists \; \varphi : [a, b] \to GL^+(n, \mathbb{R})$ cont tq $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$.

non-connexe.

(P) $O(n)$ est un ss-groupe compact maximal de $GL(n, \mathbb{R})$.

Compact : on a une norme ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ et p. cette norme $O(n)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n^2}$, ie un compact. Puis la maximalité signifie : si K est un ss-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ contenant $O(n)$ et si K est compact, alors $K = O(n)$.

$(f \circ g)^* = f^* g^*$

Ds base on : ${}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$

appliq^d à $B = A^{-1}$, $AB = I_n$.

on a ${}^t(A^{-1}) \, {}^tA =$

Autres décompositions

Th 3 (Décomposition d'Iwasawa)

soit $K = SO(n)$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \ \& \ \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = 1 \right\}$,

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SL(n, \mathbb{R}) =$

$= \{ M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$.

Alors $\forall$ matrice $M \in SL(n, \mathbb{R})$:

$\exists!$ triplet $(k, t, n) \in K \times T \times N$

tq $M = ktn$. $\quad \left(\lambda_n = \dfrac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} \right)$

N paramétré par $\mathbb{R}^{\frac{(n-1)n}{2}}$

@ de calcul de décomposition polaire

Trouver la décomposition polaire de $M \in \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) $^tMM = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) Calcul de la racine carrée: trouver $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ définie positive ($a>0$, $ac-b^2>0$)

tq $S^2 = {}^tMM$

$S^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ ab+bc = -1 \\ \cancel{ab+bc=-1} \\ b^2+c^2 = 2 \end{cases}$

(1) - (3) : $a^2 - c^2 = -1$ $\begin{cases} (a-c)(a+c) = -1 \\ -\frac{1}{b}(a-c) = -1 \end{cases}$

(2) $a+c = \frac{1}{b}$

$\begin{cases} a+c = -\frac{1}{b} \\ a-c = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ c = -\frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) \end{cases}$ $b = a-c$.

On substitue (4) dans (1) :

$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4b^2} + b^2 = 1.$

$\frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4b^2} = 1$

$5b^4 - 6b^2 + 1 = 0$, $t = b^2$

$5t^4 - 6t^2 + 1 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16.$ $t_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{10}$

$t_1 = 1$ $t_2 = \frac{1}{5}.$

• si $t = 1$, $b = \pm 1 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$ | $\neq 0$ n'est pas déf ⊕) ne convient pas.

• $b^2 = \frac{1}{5}$, $b = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$,

si $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ alors $a = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right)$

$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right) < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \not> 0$,

pas une solu°.

si $b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$c = a - b = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(iii) Détermina° de la mat orthogonale.

$\Omega = M S^{-1}$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Omega = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 12-7 & 4-14 \\ 9-1 & 3+2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposi° polaire de M est de :

$$M = \Omega S.$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Omega \in O(2)$, $S \in \mathcal{S}_2^{++}$

Réduc° de coniq à une forme normale

Soit $\mathbb{E}$ plan euclidien. Une coniq de $\mathbb{E}$ est l'ens des zéros de $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ de la forme $f = q + l + c$ où $q \in Q(E)\setminus\{0\}$, $l \in E^*$ (ℓ), $c \in \mathbb{R}$.

En coordonnées (x,y) correspondant à une base ornée (e_1, e_2), une coniq est l'ens des zéros d'un polynôme de deg 2 en x, y.

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c$$

$$C = \{ x e_1 + y e_2 \in E \mid f(x,y) = 0 \}.$$

1.ii

Le pb de classificat° métriq : ramener l'équat° de C à une forme normale par une isométrie affine.

La forme générale d'une isométrie affine est :

- $\varphi : E \to E$, $x \mapsto ux + v$, $u \in O(E)$, $v \in E$ (*)

en coord., si on identifie E à $\mathbb{R}^2$ (par un choix d'une base orn), (*) devient

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

$P \in O(2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Étapes de réduct°

- 1) on diagonalise la forme quadratiq.

$$q = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, par une transformat° orthogonale $P \in O(2)$: ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, st vp de A.

soit (e_1', e_2') la base orné donnée par la mat de passage $P = P_{(e_1,e_2) \to (e_1', e_2')}$.

et (x', y') les coord. associées.

On a : $f = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1' x + b_2' y + c$

FF $\to$ ° fl.

$$(b_1' \ b_2') = (b_1 \ b_2) P.$$

où $(b_1 \ b_2) = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\ell)$

2) On élimine le max de termes de deg 1 en (x', y') par une translat°.

$$x'' = x' + \alpha, \quad y'' = y' + \beta \qquad (\alpha, \beta \text{ cte})$$

Plus précisément, si $\lambda_1 \neq 0$, on transforme (**) c suit :

$$\lambda_1 x'^2 + b_1' x' = \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1'}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{b_1'^2}{4\lambda_1}$$

Si $\lambda_2 \neq 0$, pareil pour y' : on pose $y'' = y' + \frac{b_2'}{2\lambda_2}$. Quitte à multiplier l'équat° par un facteur cte, on arrive à une des formes normales suivantes :

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, une ellipse aux $\frac{1}{2}$ axes $a > 0$, $b > 0$.

(ii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, une hyperbole

(vp signes opposés)

$a > 0$, $b > 0$; si on a $+1$ au second membre, a est appelé $\frac{1}{2}$ axe réel, b : $\frac{1}{2}$ axe imaginaire.

→ si on a -1 au 2^{nd} membre, c'est à l'envers : a imaginaire, b réel.

(iii) $2py = x^2$ ou $2px = y^2$, une parabole de param focal $p > 0$ (on fait un chgt $x \leftrightarrow -x$ ou $y \leftrightarrow -y$ le cas échéant).

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, la coniq associée est l'ens. vide, on dit "une ellipse imaginaire"

(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; une paire de droites concourantes $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

(vi) $x^2 = a^2$, une paire de droites $//$, $x = \pm a$.

(vii) $x^2 = 0$ ou $y^2 = 0$, une droite double.

(viii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ $(a > 0, b > 0)$, une paire de droites concourantes imaginaires (en tant que ss-ens. de $\mathbb{R}^2$, la coniq se réduit à 1 sl point $x = y = 0$).

(ix) $x^2 = -a^2$ ou $y^2 = -b^2$ $(a>0,\ b>0)$ une paire de droites parallèles imaginaires

---

ⓐ Réduire à une forme normale par une isométrie affine, en coniq de $\mathbb{R}^2$ d'équat°,

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

(i) $q = 5x^2 + 4xy + 8y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},\quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-9)$$

$\boxed{\text{pdts racines : 36} \quad \text{somme racines : 13}}$

(SP) FF Biens.

$\vec{vp}$? $E_{\lambda_4} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_9} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ de vp 4.

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ de vp 9.

$\exists$ base orné formée vp $\Rightarrow$ P mat orthogonale.

(ii) $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$
$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$

$$f = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + e_1' x' + e_2' y' + c.$$

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$

$$(b_1'\ b_2') = (b_1\ b_2)P = (-32\ \ -56)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-64 + 56 \quad -32 - 112)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-8 \quad -144)$$

$$\Rightarrow f = 4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80.$$

(v)

Rq : On pourrait arriver à la relat° précédente par la substitut° directe de (#) ds l'express° de f :

$$f = 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y') + 8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y')\right)^2$$

$$-32 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y') - 56 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y')$$

$$+80 = \dots$$

- On élimine mtn les termes linéaires en x', y' :

$$f = 4x'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + 9y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80.$$

$$= 4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5}$$

$$+ 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5}\right) - \frac{9 \cdot 64}{5} + 80$$

$$f = 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{580}{5} + 80 = 0$$

$$f = 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Une ellipse à $\frac{1}{2}$ axes $a = 3$, $b = 2$.

L'Θ du nv° système de coord. :

$$\tilde{x} = \tilde{y} = 0.$$

$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$x' = \tilde{x} + 1/\sqrt{5}, \quad y' = \tilde{y} + 8/\sqrt{5}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \tilde{y} + \frac{8}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\tilde{x} + \tilde{y} \right) + 2 .$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\tilde{y} + \frac{16}{\sqrt{5}} \right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tilde{x} + 2\tilde{y} \right) + 3 .$$

Ds le centre de cette ellipse est au point $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$, soit $(x,y) = (2,3)$.