Feuille 3. Exercice 12 (Changement de variables)

En utilisant le chg^t de variables $(u = x+y,\ v = x-y)$, calculer $Q := \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants

Tout d'abord, $x,y \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \phi(x,y) = (x+y, x-y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de déterminant -2. ϕ définit donc un difféomorphisme de D sur $\phi(D)$ et pour le changement de variable $u,v = \phi(x,y)$ on a $du\,dv = 2\,dx\,dy$ d'où $Q = \frac{1}{2}\iint_{\phi(D)} f(\phi^{-1}(u,v))\,du\,dv$

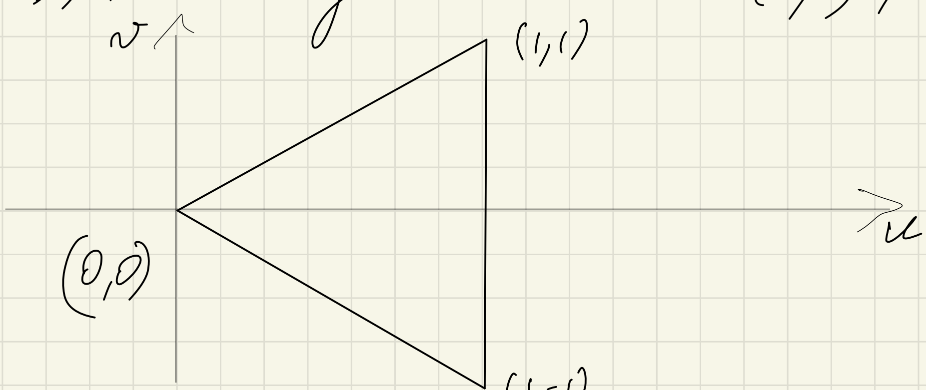
(a) Premier cas $f(x,y) = (x+y)^2 \exp(x^2-y^2)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x+y \leq 1\}$

D est le triangle de sommets $(0,0), (0,1), (1,0)$

donc $\phi(D)$ est le triangle $(0,0), \phi(0,1), \phi(1,0)$

$\phi(D) =$ Triangle de sommets $(0,0), (1,-1), (1,1)$



On voit que $Q = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{-u}^{u} f(\phi^{-1}(u,v))\, dv\right] du$

de plus pour $(x,y) = \phi^{-1}(u,v)$

$$f(x,y) = (x+y)^2 \exp(x^2-y^2) = u^2 \exp(uv)$$

et

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \int_{-u}^{u} e^{uv}\, dv\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u \left[e^{uv}\right]_{v=-u}^{v=u} du$$

$\frac{1}{|\det D\phi|}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u e^{u^2} - u e^{-u^2}\right) du$$

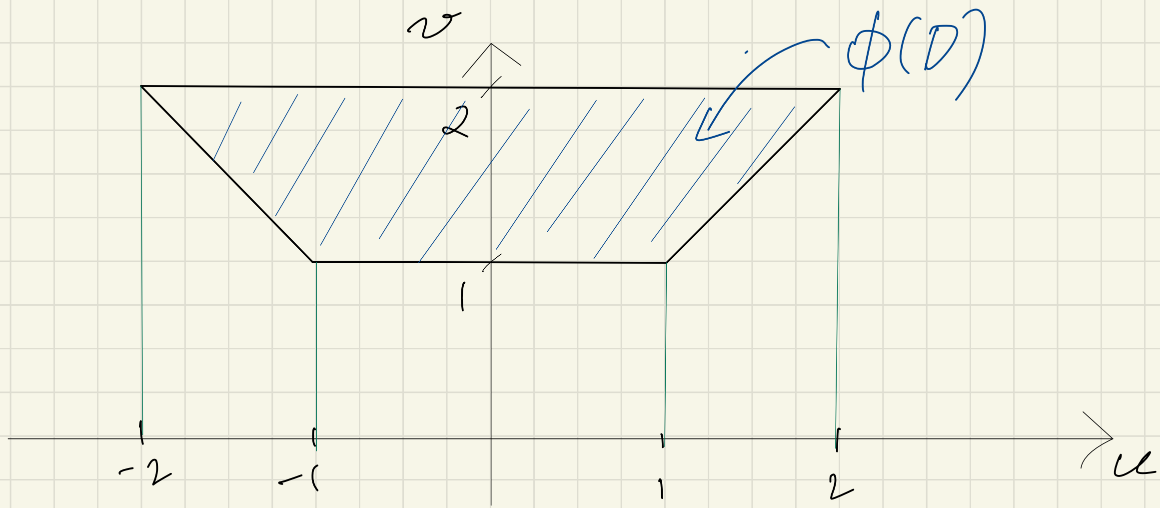
$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{u^2}}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{-u^2}}{2}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(ch(1) - 1\right).$$

(b) Second cas : $f(x,y) = \exp\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

D trapèze de sommets $(1,0), (2,0), (0,-2), (0,-1)$

$\phi(D)$ est le trapèze de sommets

$\phi(1,0), \phi(2,0), \phi(0,-2), \phi(0,-1) = (1,1), (2,2), (-2,2), (-1,1)$



On a $Q = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[\int_{-v}^{v} f(\phi^{-1}(u,v))\, du\right] dv$

De plus pour $x,y = \phi^{-1}(u,v)$; $f(x,y) = \exp\left(\frac{u}{v}\right)$

d'où

$$Q = \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[v e^{\frac{u}{v}}\right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 v\left(e - \frac{1}{e}\right) dv = \frac{3}{2}\, sh(1).$$

Feuille 3. Exercice 13 (Coordonnées polaires)

En passant en coordonnées polaires, calculer

$Q = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ où

(1) $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

On pose $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad 0 < \theta \leq \pi \quad r > 0$

Avec cette notation $f(x,y) = r^2$ $\quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$D = \{ (x,y) : r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$Q_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta\; r^2\, r\, dr = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $f(x,y) = r$ $\quad D = \{(x,y) : x \geqslant 0 \quad x^2+y^2-2y \leq 0\}$

on pose $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad r>0 \quad \theta \in [-\pi, \pi[$

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x^2+y^2-2y \leq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2\sin\theta \geqslant r \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \theta \in \left[\arcsin\frac{r}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

En coordonnées polaires, le domaine est donc $D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, \arcsin\left(\frac{r}{2}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$Q_2 = \int_0^2 \left(\int_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta\right) r \, dr = \int_0^2 r^2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{r}{2}\right) dr$$

$$Q_2 = \underbrace{\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} 2^3}_{\frac{4\pi}{3}} - \underbrace{\int_0^2 r^2 \arcsin\frac{r}{2}\, dr}_{I_{pp}}$$

$$(r^2) = \left(\frac{r^3}{3}\right)'$$

$$\left(\arcsin\left(\frac{r}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - r^2/4}}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \left[\frac{r^3}{3} \arcsin\frac{r}{2}\right]_{r=0}^{r=2} + \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{r^3}{\sqrt{4 - r^2}}\, dr$$

$$= \underbrace{\frac{4\pi}{3} - \frac{8}{3}\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^2 r^2 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr}_{I_{pp}}$$

$$(r^2)' = 2r$$

$$\left(-\sqrt{4 - r^2}\right)' = \frac{+r}{\sqrt{4 - r^2}}$$

$$Q_2 = \underbrace{\frac{1}{3}\left[-r^2\sqrt{4-r^2}\right]_{r=0}^{r=2}}_{0} + \frac{1}{3}\int_0^2 \underbrace{2r\sqrt{4-r^2}}_{\left(-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\right)'}\,dr$$

$$= \frac{2}{9}\,4^{3/2} = \frac{16}{9}.$$

(3) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

En coordonnées polaires

$$f(x,y) = \ln(r^2) = 2\ln r \qquad D = \{1 \leq r \leq \sqrt{2}\}$$

$$Q_3 = 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} 2\ln r\, r\,dr \underset{ipp}{=} 2\pi\left(\left[r^2\ln r\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\right)$$

$$= 2\pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

(4) $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-1}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2 \leq 1, \; |y| \leq x\}$

On écrit $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $r > 0$ $\theta \in [-\pi, \pi[$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ |y| \leq x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r \leq 1 \\ |\sin\theta| \leq \cos\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r \leq 1 \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{array}\right.$$

$$Q_4 = \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+r^2}\, d\theta\right] r\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{r\,dr}{1+r^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\ln(1+r^2)\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

(5) $f(x,y) = x/y^2$ $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \; y \geq |x|\}$

En coordonnées polaires

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad r>0 \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

et $$f(x,y) = \frac{1}{r} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$Q_5 = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{r} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \, d\theta \, r\,dr = \int_1^2 \left[\frac{-1}{\sin\theta} \right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} dr$$

$$= 0.$$

(6) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad D = \{(x,y) \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 4\}$

En coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$(x,y) \in D \iff 0 < r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

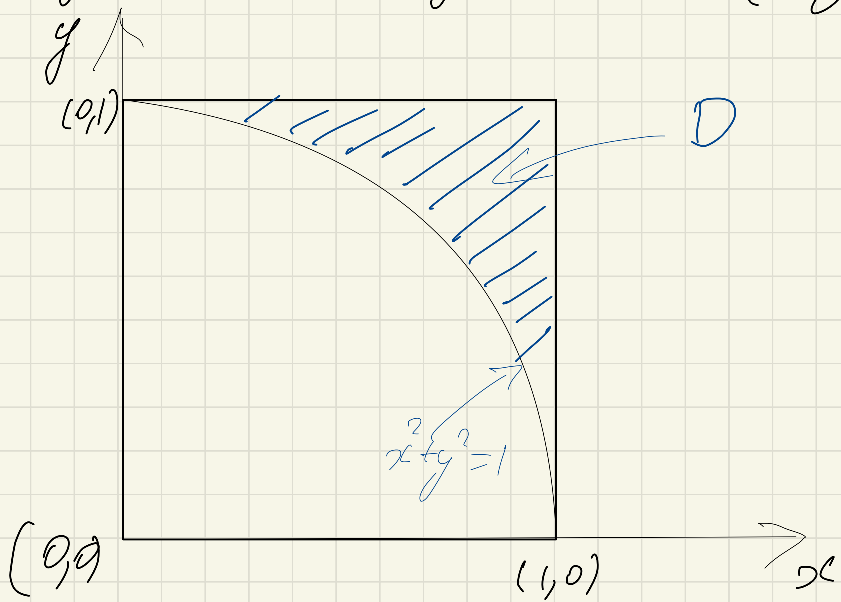
et $f(x,y) = \exp(-r^2)$

d'où

$$Q_6 = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} d\theta \, r \, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=2} = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-4} \right).$$

(7) $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-2}$ $\qquad D = \{(x,y) \in [0,1]^2 : 1 \leq x^2+y^2\}$



en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$r > 0 \qquad \theta \in [-\pi, \pi[$

on a

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 1 \leq r \leq \sqrt{2} \ , \quad \theta \geq 0 \\ \cos\theta \leq \frac{1}{r} \ , \ \sin\theta \leq \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \theta \in \left[\arccos \frac{1}{r} \ , \ \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{r}\right] \end{cases}$$

et $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+r^2)^2}$

$$Q_7 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{(1+r^2)^2} \left(\int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{r}} d\theta \right) dr$$

$$Q_7 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{(1+r^2)^2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{r}\right) dr$$

$$\underset{ipp}{=} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{(1+r^2)^{-1}}{2}\right)\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1\ dr}{2r\sqrt{r^2-1}\,(1+r^2)}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{r^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}} = \frac{-1}{r\sqrt{r^2-1}}$$

$$\left(-\frac{(1+r^2)^{-1}}{2}\right)' = \frac{r}{(1+r^2)^2}$$

$$\frac{ds}{r^2(1+s^2)} \qquad s^2+1=r^2$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}\,(1+r^2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chang}^t \text{ de var} \\ s = \sqrt{r^2-1} \quad ds = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}dr \end{array}\right.$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{(1+s^2)(2+s^2)}$$

We write $\dfrac{1}{1+s^2}\,\dfrac{1}{2+s^2} = \dfrac{1}{1+s^2} - \dfrac{1}{2+s^2}$

$$Q_7 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{1+s^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{2+s^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{ds/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

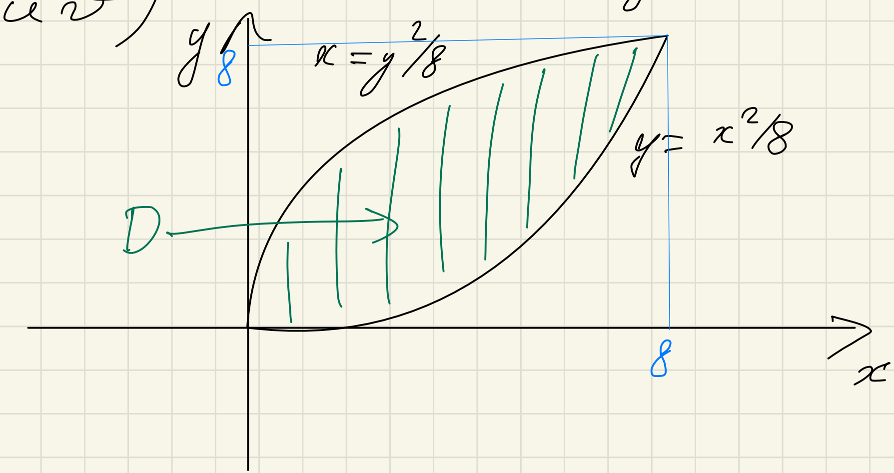
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\,\pi$$

Exercice 14. En utilisant le changement de variable indiqué, calculer $Q := \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants.

(i) $f(x,y) = \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$ $\quad D = \{(x,y) : x^2 - 8y \leq 0,\ y^2 - 8x \leq 0\}$

$(x,y) = (u^2 v, u v^2)$



On considère l'application $\phi(u,v) = (u^2v, uv^2)$

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

$\det(D\phi(u,v)) = 3u^2v^2 > 0$ sur $]0,+\infty[^2$

ϕ est donc localement inversible sur $]0,+\infty[^2$.

De plus $\phi(]0,+\infty[^2) \subset]0,+\infty[^2$

Réciproquement si $(x,y) \in]0,+\infty[^2$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(u,v) = (x,y) \\ u,v>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^2v = x \\ uv^2 = y \\ u,v>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{y} = u^4 \\ \dfrac{y^2}{x} = v^4 \\ u,v>0 \end{array}\right.$$

On a donc $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\exists ! (u,v) \in]0,+\infty[^2$

tq $\phi(u,v) = (x,y)$ et $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y^{1/4}}$ $v = \dfrac{\sqrt{y}}{x^{1/4}}$

ϕ est donc un difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

On a pour $x,y > 0$ et $(u,v) = \phi^{-1}(x,y)$

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{u^6 v^3 + u^3 v^6}{u^3 v^3}\right) = \exp(u^3 + v^3)$$

et $Q = \displaystyle\int_{\phi^{-1}(D)} \det(D\phi(u,v))\, f(\phi(u,v))\, du\, dv$

$$Q = \int_{\phi^{-1}(D)} 3u^2v^2 \exp(u^3+v^3)\,du\,dv.$$

Il reste à déterminer $\phi^{-1}(D)$.

$$\left.\begin{array}{l}\phi(u,v) \in D \\ u,v>0\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} u^4v^2 - 8uv^2 \leq 0 \\ u^2v^4 - 8vu^2 \leq 0 \\ u,v>0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 0<u\leq 2 \\ 0<v\leq 2 \end{array}\right.$$

d'où

$$Q = 3\int_0^2\int_0^2 u^2v^2 \exp(u^3+v^3)\,du\,dv$$

$$= 3\left(\int_0^2 u^2 \exp u^3\,du\right)^2 = 3\left(\left[\frac{\exp u^3}{3}\right]_0^2\right)^2$$

$$= (e^8-1)^2/3.$$

(ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 \leq 3x-2\}$ $\quad f(x,y) = y$

$(x,y) = (1 + r\cos\theta, r\sin\theta)$

$(x,y) \in D \iff x^2 - 3x + 2 + y^2 \leq 0$

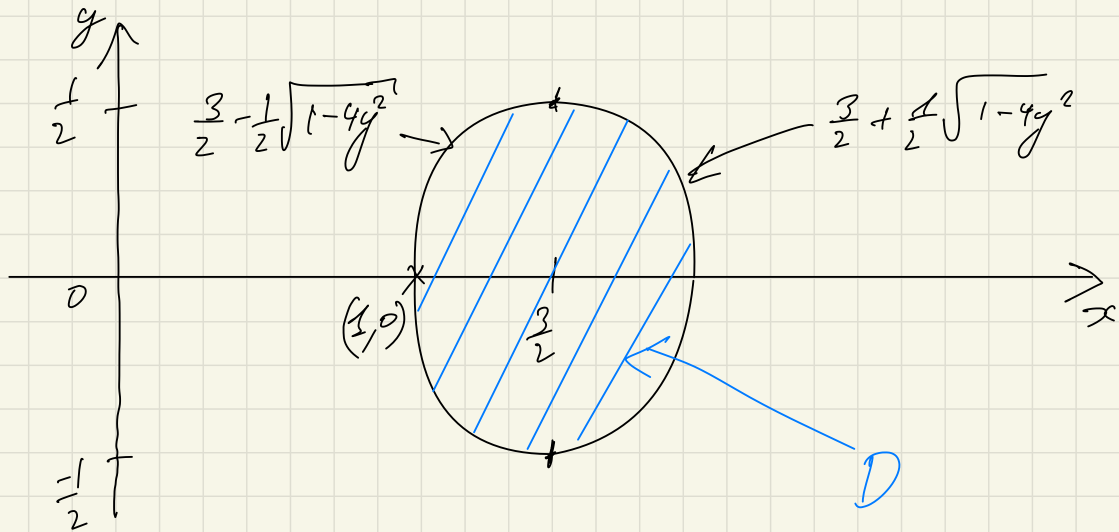
Résolvons en x.

$X^2 - 3X + 2 + y^2$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4y^2$

Donc si $|y| > \frac{1}{2}$, $\left(x^2 - 3x + 2 + y^2 \leq 0 \right.$ n'a pas de solutions

et pour $|y| \leq \frac{1}{2}$

$$x^3 - 3x + 2 + y^2 \leq 0 \iff \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4y^2} \leq x \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4y^2}$$



Le changement de variable proposé correspond à un passage en coordonnées polaires autour du point $(1,0)$.

Pour $r>0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$(x,y) \in D \iff r^2 - r\cos\theta \leq 0$

$\iff r \leq \cos\theta \iff |\theta| \leq \arccos r$

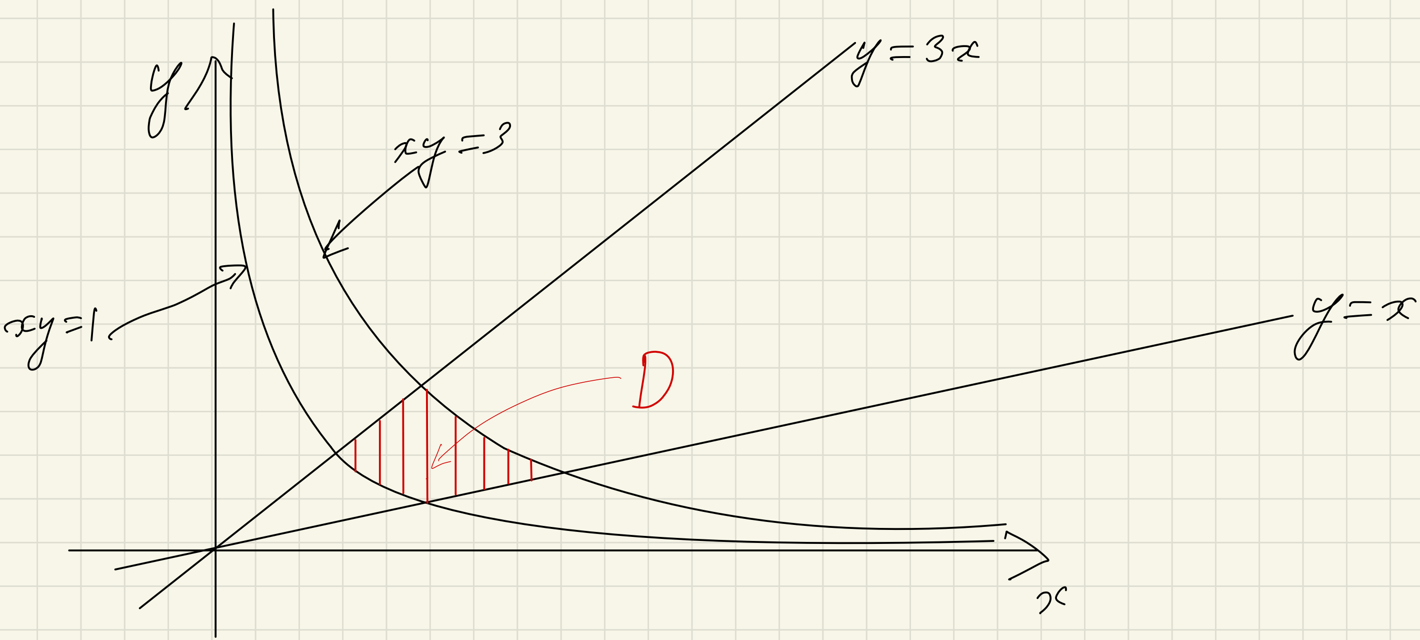
On a donc

$$Q = \int_0^1 \int_{-\arccos r}^{\arccos r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 r^2 \underbrace{\left(\int_{-\arccos r}^{\arccos r} \sin\theta \, d\theta \right)}_{0} dr = 0$$

(iii) $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : \ x \leq y \leq 3x, \quad 1 \leq xy \leq 3\}$

$f(x,y) = xy$ et $(x,y) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$



On pose $\phi(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$

ϕ est une bijection de $]0,+\infty[^2$ sur $]0,+\infty[^2$

et on a pour $u,v>0$

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det\left(D\phi(u,v)\right) = \frac{1}{v} > 0$$

ϕ est donc un difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

On a par la formule de changement de variable (et comme $D \subset]0,+\infty[^2$)

$$Q = \iint_{\phi^{-1}(D)} f(\phi(u,v))\, |\det(D\phi(u,v))|\, du\, dv$$

- On a vu $\det D\phi(u,v) = \dfrac{1}{v}$
- $f(\phi(u,v)) = u$
- Il faut déterminer $\phi^{-1}(D)$. Pour $u,v>0$

$$(u,v) \in \phi^{-1}(D) \iff \frac{u}{v} \leq v \leq \frac{3u}{v} \quad \text{et} \quad 1 \leq u \leq 3$$

$$\iff \sqrt{u} \leq v \leq \sqrt{3}\sqrt{u} \quad \text{et} \quad 1 \leq u \leq 3$$

$D/\sigma\bar{u}$

$$Q = \int_0^3 \left[\int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3}\sqrt{u}} \frac{u}{v}\, dv \right] du = \int_0^3 u \Big[\ln v \Big]_{v=\sqrt{u}}^{v=\sqrt{3u}} du$$

$$= \int_0^3 u \left(\ln \sqrt{3} \right) du = \frac{9}{4} \ln 3 .$$
