

① Suites de f.s.

• CV simple

$\forall \alpha \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon$

• CV uniforme

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall \alpha \in A, |f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\alpha \in A} |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \right) = 0.$$

Exemple étude CV simple & uniforme.

① $f_n(x) = x \cdot \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $A = \mathbb{R}^+$, $n \geq 1$.

Fixons $x \in \mathbb{R}^+$. On doit étudier limite de $f_n(x)$ qd $n \rightarrow \infty$.

Pour $x=0$: $f_n(0) = 0 \cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc $(f_n(0))_{n \geq 1}$ CV vers 0.

Pour $x > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$. D'où par continuité

du logarithme, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) = \ln(x)$

D'où pour $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \cdot \ln(x)$

posons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x \cdot \ln(x) & \text{si } x>0. \end{cases}$$

on a dc démontré sdf $(f_n)_{n \geq 1}$ CV simplement vers f sur \mathbb{R}^+ .

CV uniforme:

Rq $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ est une f cont sur \mathbb{R} , à valeurs ouvertes de $[0, +\infty$. Comme \ln est cont sur $[0, +\infty$, on a que pour $n \geq 1$, la f f_n est cont sur \mathbb{R}^+ .

Qd limite simple est-elle cont?

↳ si elle n'est pas cont $\Rightarrow (f_n)$ CV uniforme.

② TH si $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $A \quad \forall n \geq 1$, et si $(f_n)_{n \geq 1}$ CV uniformément vers f sur A , alors f est cont sur A .

Adit, si $(f_n)_{n \geq 1}$ CV simplement vers f sur A , si $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ cont mais f n'est pas cont alors $(f_n)_{n \geq 1}$ ne CV pas uniformément vers f sur A .

contraposée

↳ M pr mg qu'on n'a pas uniforme.

on montre que pour tout $n \geq 1$, f_n est cont sur A .

\circledast $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f sur A .

\circledast f n'est pas cont sur A .

on peut essayer $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément.

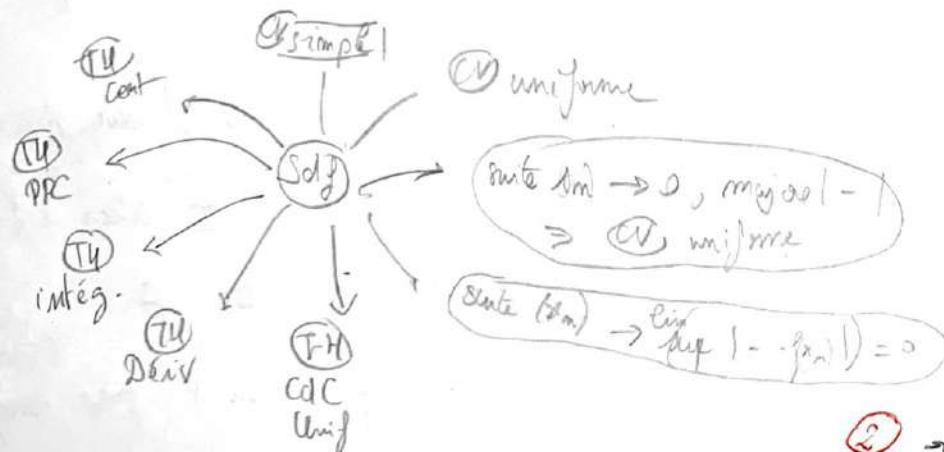
$\text{Ex} : f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est cont sur $[0, +\infty[$.

On ne peut pas conclure sur la convergence uniforme.



Pour étudier la convergence uniforme, on doit étudier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

(soit on le calcule, soit on estime, soit on majorote, soit trouver une suite qui vérifie l'égalité).

Il suffit de trouver une suite $(s_m)_{m \geq 1}$ qui tend vers 0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_{s_m}(x) - f(x)| \leq s_m$.
en effet, $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_{s_m}(x) - f(x)| \leq s_m$.

$$\xrightarrow{\text{T.D.G}} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_{s_m}(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

$$f_m(x) = x \cdot \ln(x + \frac{1}{m}), \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &= \left| x \cdot \ln\left(x + \frac{1}{m}\right) - x \cdot \ln(x) \right|, \\ &= \left| x \left(\ln\left(x + \frac{1}{m}\right) - \ln(x) \right) \right| = \left| x \cdot \ln\left(\frac{x + \frac{1}{m}}{x}\right) \right| \\ &= \left| x \ln\left(1 + \frac{1}{mn}\right) \right| \end{aligned}$$

② → bonnes ffs?

$$1 + \frac{1}{n^x} > 1 \Rightarrow x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$$

R $\forall t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$. (*)

soit, pour démontrer (*), on peut étudier

$$g(t) = t - \ln(1+t), \quad t \geq 0.$$

soit IAF appliquée à $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$

f est cont & dérivable sur $[0, \infty]$

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

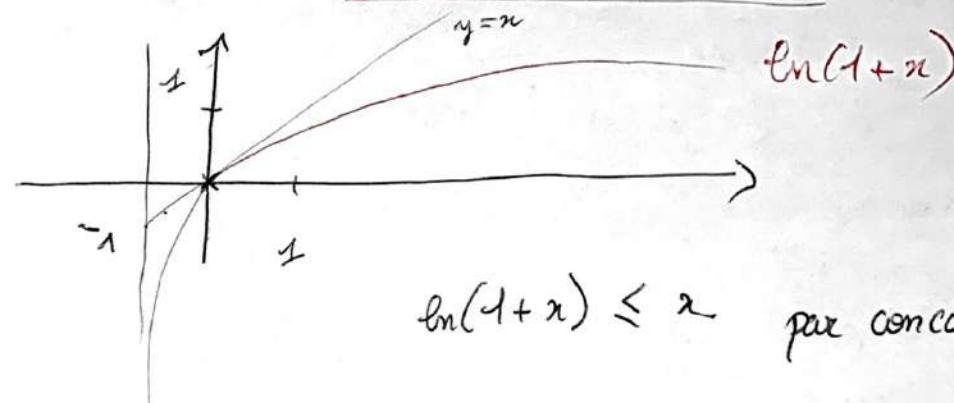
$$\text{D'où } \sup_{t \geq 0} |f'(t)| = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{1+t} = 1$$

$$\boxed{\text{IAF}} \Rightarrow \forall t \geq 0; |f(t) - f(0)| \leq (\sup_{u \geq 0} |f'(u)|)(t-0)$$

$$|\ln(1+t) - \ln(1)| \leq t$$

$$\ln(1+t) \leq t \quad \textcircled{3}$$

soit car concavité de C_n :



$\ln(1+x) \leq x$ par concavité.

Ainsi: $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t \geq 0$. (*)

$$|f_n(x) - f(x)| = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \leq x \cdot \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

(d'après *) et $t = \frac{1}{n^x}$)

D'où $\forall x \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

cette inégalité est vraie pour $x=0$ car $f_n(0)-f(0)=0$

$$\text{Donc } \sup_{n \geq 0} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{TDG} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

de $(f_n)_{n \geq 0}$ uniformément vers f sur $[0, \infty]$

2) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{1+ax}{2+nx^2}$$

(CV) simple: si $x=0$: $f_n(0) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

si $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+ax}{2+nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$.

de son def $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{a} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

on a mqé $(f_n)_{n \geq 0}$ (CV) simplement vers f sur \mathbb{R} .

(U) uniforme

on n'a pas (CV) uniforme de (f_n) vers f sur \mathbb{R} car:

• $\forall n > 0$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est cont sur \mathbb{R} .

• $(f_n)_{n \geq 0}$ (CV) simplement vers f sur \mathbb{R} .

• f n'est pas cont sur \mathbb{R} (car f n'est pas cont en 0):

$$\frac{1+n(x-1)}{2+n(x-1)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{clique}} \frac{1}{a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \pm \infty \neq f(1)$$

Donc (f_n) ne (CV) pas uniforme vers f sur \mathbb{R} .

exercice étudier (CV) uniforme sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$ où $a > 0$.

suite 2) $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_m(x) = \frac{1+mx}{2+mx^2}$$

(f_m) (CV) simplement vers $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$

② ④ (CV) uniforme sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$, $a > 0$? ...

pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$:

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{1+mx}{2+mx^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x-2|}{|x||2+mx^2|}$$

$$\frac{|x-2|}{|x||2+mx^2|} \leq \frac{1}{a} \frac{|x-2|}{|2+mx^2|}$$

$$\rightarrow |2+mx^2| \geq mx^2 - 2 \quad \triangle$$

$$|x| \geq a > 0 \Rightarrow mx^2 - 2 \geq ma^2 - 2 > 0$$

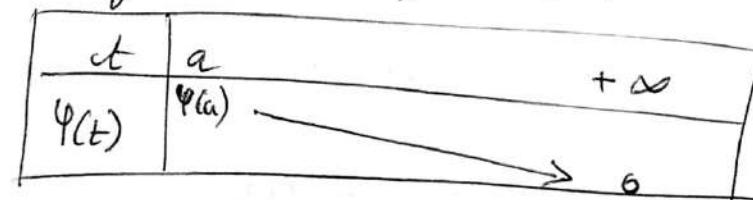
$$\text{si } m > \frac{2}{a^2}$$

$$\text{D'où } |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{|x-2|}{a(mx^2-2)} \leq \frac{|x|+2}{a(mx^2-2)}$$

$$\varphi(t) = \frac{t+2}{mt^2-2}, \quad t \geq a > 0.$$

$$\text{Donc } \sup_{|x| \geq a} |f_m(x) - f(x)| \leq \left(\sup_{t \geq a} \varphi(t) \right) \times \frac{1}{a}$$

on vérifie $\forall t \geq a, \varphi'(t) < 0$.



$$\text{Donc } \sup_{|x| \geq a} |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{a} \varphi(a) = \frac{a+2}{a(ma^2-2)}$$

$$\text{or } \frac{a+2}{a(ma^2-2)} \sim \frac{a}{ma^3} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

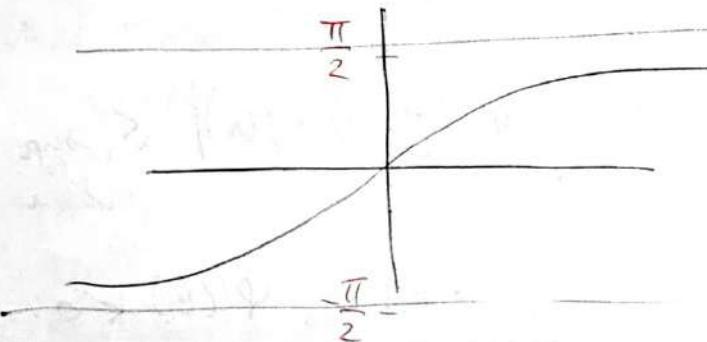
$$\text{D'où } \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq a} |f_m(x) - f(x)| = 0$$

$\Rightarrow (f_m)_m$ (CV) bien uniformément sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$ $\forall a > 0$.

$\triangle \not\Rightarrow (f_m)_m$ (CV) uniformément sur \mathbb{R} .

3) $f_m(n) = \arctan(n\pi n)$, $A = \mathbb{R}$.

CV simple ?



On \mathbb{R}^* si $n > 0$, f_m est cont

sur \mathbb{R} et f_m n'est pas cont sur \mathbb{R} .

De on pt ed $(f_m)_{n>0}$ ne CV pas uniformément sur \mathbb{R} .

► $x=0$: $f_m(0)=0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)=0$

► $x > 0$: $f_m(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} := f(x)$

► $x < 0$: $f_m(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2} := f(x)$

si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

De la suite de foncts $(f_m)_m$ CV uniformément vers f sur \mathbb{R} .

4) $f_m(x) = \sqrt{n} \cdot n \cdot e^{-x \cdot n^2}$, $A = \mathbb{R}^+$

CV simple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot e^{-n^\beta} = 0 \quad , \quad \alpha, \beta \quad (\text{limite croissante comparée})$$

$$f_m(x) = x \sqrt{n} e^{-(n \sqrt{x})^2}$$

Possons $u := n \sqrt{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, $x \neq 0$.

$$f_m(x) = x \left(\frac{u}{\sqrt{x}} \right)^{1/2} \cdot e^{-u^2} = x \cdot u^{1/2} \cdot e^{-u^2} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$$

$$f_m(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(CV) uniforme

car $f(n)=0'$
et $f_m(x) \geq 0$

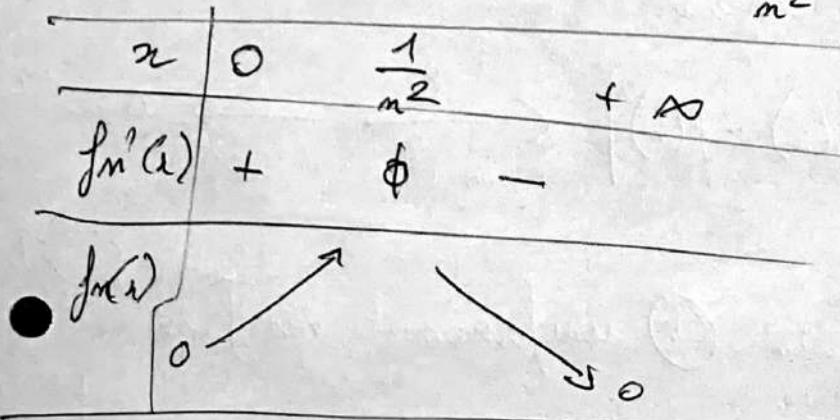
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_m(x) - f(n)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_m(x)$$

• f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot \left[e^{-xn^2} + x(-n^2) e^{-xn^2} \right]$$

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot e^{-xn^2} (1 - n^2), \quad \forall n \geq 0.$$

$$f'_n(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - n^2 x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} > x.$$



$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_m(x) - f(n)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_m(x) = f_m\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot e^{-\frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{e^{-1}}{n^{3/2}}$$

(2)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_m(x) - f(x)| = 0.$$

$\Rightarrow (f_m)_{m \geq 0}$ (CV) uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 2: $f_m(x) = \frac{2n x^2}{n^2 x^4 + 1}, x \in A = \mathbb{R}$.

1) (CV) simple?

$$f_m(x) = \frac{2n x^2}{n^2 (x^4 + \frac{1}{n^2})} = \frac{2x^2}{n (x^4 + \frac{1}{n^2})}$$

si $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} n (x^4 + \frac{1}{n^2}) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x) = 0$

si $x = 0$: $f_m(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(cel) $(f_m)_{m \geq 0}$ (CV) simplement vers la f étant nulle.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$

2) \textcircled{v} uniforme sur \mathbb{R} ?

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_m(x)$$

$$x > a, f_m(x) = \frac{2m^2}{m^2 x^4 + 1} \leq \frac{2m^2}{m^2 x^4}$$

car $m^2 x^4 + 1 \geq m^2 x^4 > 0$

- M1**
- calcule $f_m'(x)$
 - tab de variat

2) où $0 \leq f_m(x) \leq \frac{2}{m^2 x^2}$

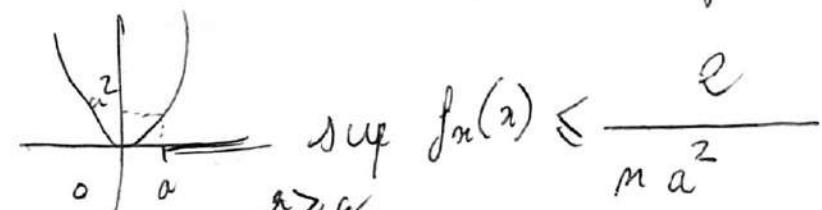
M2

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \geq f_m\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

$$x > a > 0 \Rightarrow x^2 > a^2 \Rightarrow 0 \leq f_m(x) \leq \frac{2}{m a^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\frac{\frac{2 \times m}{m} \frac{1}{m}}{m^2 \times \frac{1}{m^2} + 1} = 1$$



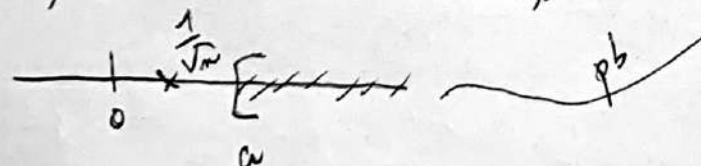
$\Rightarrow (f_n)_n$ ne \textcircled{v} pas uniformément sur \mathbb{R} .

$$\sup_{x > a} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{m a^2} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

3) \textcircled{v} uniforme sur $[a, +\infty[$, $a > 0$

\triangleleft ici on ne peut pas écrire que:

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} f_m(x) \geq f_m\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$



Donc $(f_n)_n$ \textcircled{v} uniformément vers f sur $[a, +\infty[$

M2 $f'_m(x) =$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{m}}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	-	
$f_m(x)$	\nearrow	\downarrow	\nearrow

(8)

comme $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{m}} = 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$,

$$m > m_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} < \alpha.$$

$$\sup_{n > m} |f_m(n) - f(n)| = f_m(\omega) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

• (R9) si $(f_m) \xrightarrow{\text{uniform}} f$ sur A_1 et A_2
alors $(f_m) \xrightarrow{\text{uniform}} \text{vew } f|_{A_1 \cup A_2}$.

(9)

comme $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{m}} = 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$,

$$n > m_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \alpha.$$

$$\sup_{x \sim a} |f_m(x) - f(a)| = f_m(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Rq si (f_m) uniforme $\rightarrow f$ sur A_1 et A_2
alors (f_m) uniforme vers f sur $A_1 \cup A_2$.

Ex 3 $f_m(x) = \frac{mx}{nx+1}, x \in A = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$

1) **cv simple sur A**

$$\forall x=0, f_m(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall x > 0: f_m(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{mx}{nx} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc $(f_m)_m$ **cv** simplement sur \mathbb{R}^+ .

2) **cv uniforme sur $[0, 1]$?**

on Rq que f n'est pas cont sur $[0, 1]$,
 f n'est pas cont en 0 & 1 les f_n st cont
sur $[0, 1]$, on ne pt pas avoir **cv** uniforme sur $[0, 1]$.

cv uniforme sur $[1, \infty[$

A On ne pt pas écrire que $\sup_{x \in [1, \infty[} |f_m(x) - f(x)| \geq |f_m(\frac{1}{m}) - f(\frac{1}{m})|$
car $\frac{1}{m} \notin [1, \infty[$.

$$\text{Pour } x \geq 1, |f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{mx}{mx+1} - 1 \right| = \frac{1}{mx+1}$$

$$x \mapsto \frac{1}{mx+1} \text{ est } \nearrow x \in [1, \infty[$$

(comme inverse d'une $f \nearrow$).

$$\text{Donc } \sup_{x \geq 1} |f_m(x) - f(x)| = |f_m(1) - f(1)| = \frac{1}{1+m}$$

comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn+1} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, \infty[} |f_m(x) - f(x)| = 0$

$(f_m)_m$ **cv** uniformément sur $[1, \infty[$.

$$3) F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt, x \in [0,1]$$

D'où $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

a) CV simple de (F_n)

$$\text{Pur } x \in [0,1], F_n(x) = \int_0^x \frac{nt}{nt+1} dt$$

Possons $u = nt+1, da = n dt, dt = \frac{da}{n}$

$$\text{D'où } F_n(x) = \frac{1}{n} \int_1^{mn+1} \frac{u-1}{u} du$$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} \int_1^{mn+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{n} \left[u - \ln(u) \right]_1^{mn+1} \\ &= \frac{1}{n} (mn+1 - \ln(mn+1) - 1) \end{aligned}$$

$$F_n(x) = x - \frac{\ln(mn+1)}{n} \quad \text{sur } [0,1]$$

par croissance comparée $\frac{\ln(mn+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\frac{\ln n + \ln(n + \frac{1}{n})}{n}$$

i.e. $(F_n)_n$ CV simplement sur $[0,1]$ vers la f $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto F(x) = x$.

Dien qu'on n'est pas CV uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$, on a qd m

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt - \int_0^x f_m(t) dt.$$

CV uniforme de $(F_n)_n$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| x - \frac{1}{n} \ln(1+mn) - x \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln(1+mn), x \in [0,1] \end{aligned}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln(1+mn)$ est croissante sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sup_{x \in [0,1]} |F_n(x) - F(x)| &= |F_n(1) - F(1)| \\ &= \frac{1}{n} \ln(1+n) \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a bien $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$

$$\text{D'où } f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in [0, 1[\\ 0 & , x \geq 1 \end{cases}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |F_n(x) - F(x)| = 0$ et

$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[0, 1]$.

Ex 4 $f_n(x) = (1-x) \cdot \exp(-x^n)$, $A = \mathbb{R}^+$
 $= [0, \infty[$

Réponse: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & si x \in [0, 1[\\ 1 & si x = 1 \\ \infty & si x > 1 \end{cases}$

Par composition de l'exponentielle (& la continuité de l'exponentielle sur \mathbb{R} et l'existence de la limite de l'exponentielle en $-\infty$), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x^n} = \begin{cases} 1 & si x \in [0, 1[\\ e^{-1} & si x = 1 \\ 0 & si x > 1 \end{cases}$$

en posant $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in [0, 1[\\ e^{-1}(1-x) & , x = 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$

on obtient $\circ (f_n)_n \circ$ simplement vers f sur \mathbb{R}^+ .

8) a) \circ uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$:

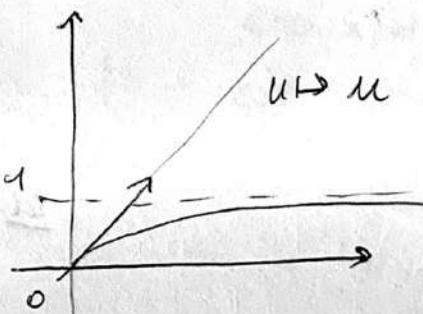
$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |(1-x)e^{-x^n} - (1-x)|$$

$$= \sup_{x \in [0, 1]} (1-x) |e^{-x^n} - 1| \quad car \quad x \in [0, 1]$$

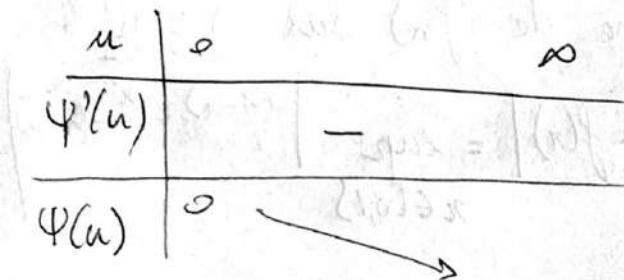
$$-x^n \leq 0 \Rightarrow e^{-x^n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} (1-x)(1-e^{-x^n})$$

$$\Phi(u) = 1 - e^{-u}$$



Posons $\Psi(u) = 1 - e^{-u} - u$, $u \geq 0$,
 La f Ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et
 on a : $\Psi'(u) = e^{-u} - 1 \leq 0$ au $u \geq 0$
 $\Rightarrow e^{-u} \leq 1$.

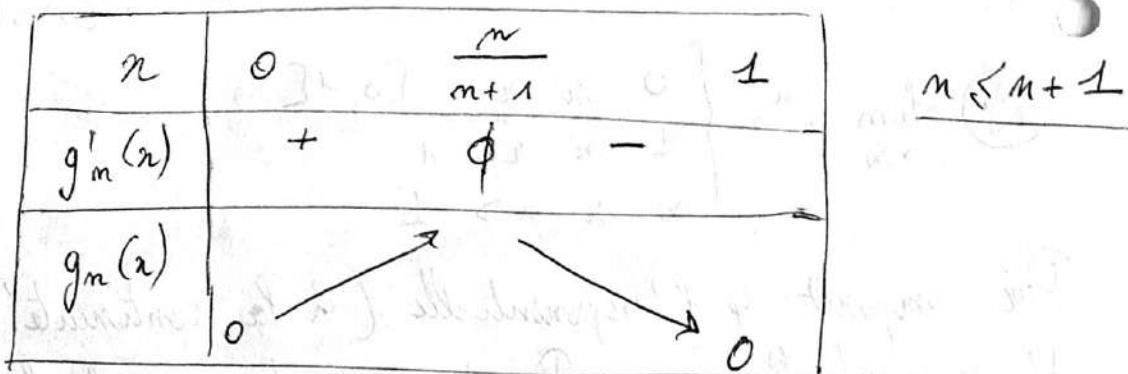


De $\forall u \geq 0$, $\Psi(u) \leq 0$, de $1 - e^{-u} \leq u$.

En utilisant cette inégalité, on a

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} (1-x) \frac{u}{n^m}$$

Posons $g_m(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$
 La f g_m est dérivable et on a :
 $g_m'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$
 $g_m'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - (n+1)x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq x$.



$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} g_m(x) = g_m\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } g_m\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\stackrel{cl}{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\beta_n(x) - f(x)| = 0$$

ac $(f_n)_n$ ac uniformément vers f sur $[0,1]$.

⑥ a) uniforme sur $[1, \infty]$

$$x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \Rightarrow x^n e^{-x^n} < \frac{1}{e}$$

Indicat: $\forall t \geq 1, t \cdot e^{-t} \leq \frac{1}{e}$. (1)

Mq (1) Posons $\Psi(t) = t \cdot e^{-t}, t \geq 1$.

La f est dérivable sur $[1, \infty]$
et on a :

$$\Psi'(t) = e^{-t} + t(-e^{-t}) = e^{-t}(1-t) \leq 0$$

car $t \geq 1$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \stackrel{(1)}{\leq} \sup_{x \geq 1} \left(\frac{1}{e} \frac{x-1}{x^n} \right)$$

$$\leq \sup_{n \geq 1} (n-1) e^{-x^n} \leq \sup_{x \geq 1} \left(\frac{1}{e} \frac{n-1}{x^n} \right)$$

t	1	∞
$\Psi(t)$	e^{-1}	-

$$\Rightarrow \forall t \geq 1, \Psi(t) \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\sup_{n \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} |(1-x) e^{-x^n} - 0|$$

$$= \sup_{x \geq 1} (x-1) e^{-x^n} \leq$$

$$\text{Posons } h_m(x) = \frac{x-1}{x^m}, x \geq 1,$$

La f h_m est dérivable sur $[1, \infty]$,

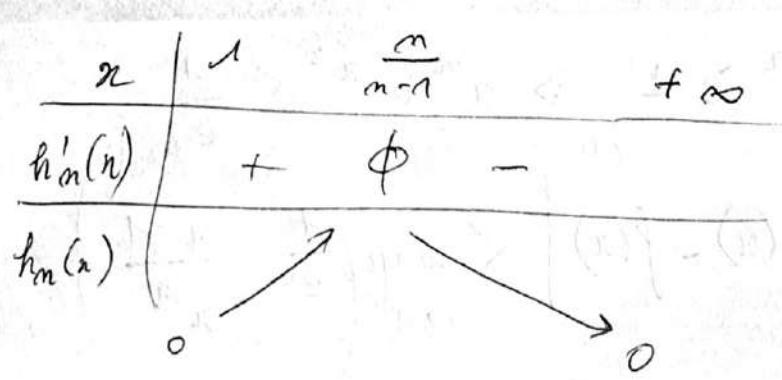
$$h'_m(x) = \frac{x^m - m x^{m-1} (x-1)}{x^{2m}} = \frac{(x-m)(x-1)}{x^{m+1}}$$

$$h'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - m(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x - mx + m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-m) + m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq (m-1)x \Leftrightarrow \frac{m}{m-1} \geq x.$$



$$\Rightarrow \sup_{x \geq 1} h_n(x) = h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$\text{Done } \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e} \cdot h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \frac{\frac{n}{n-1} - 1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$\leq \frac{1}{e} \left(\frac{n}{n-1} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{de } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

de (f_n) (cv) uniformément sur $[1, \infty[$

3) calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, où $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

D'après a), $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.U.}} f$ sur $[0, 1]$

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.U.}} f$ sur $[1, \infty[$.

Done $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.U.}} f$ sur $[0, \infty[$.

En effet, par (*): $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $(n \geq n_0, x \in [0, 1]) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

par (**): $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $(n \geq n_1, x \in [1, \infty[) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'où $n \geq \max(n_0, n_1)$, $n \geq 0$.

* soit $x \in [0, 1]$ et on a bien $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

* soit $x \in [1, \infty[$, de $\forall n \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ de $n \geq \min(n_0, n_1) \Rightarrow \sup_{n \geq 0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow{\text{CV U.}} f$ sur $[0, +\infty[$.

dc le (Th) d'intégration implique que :

D'après le TH,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 (1-t) dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2^n} (1-t)^{2^n} dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

on $\int_1^2 (1-t) dt = 0$.

Ex 5 $f(x) = \begin{cases} mx(1-nx), & x \in [0, \frac{1}{m}] \\ 0 & ; x \in [\frac{1}{m}, 1]. \end{cases}$

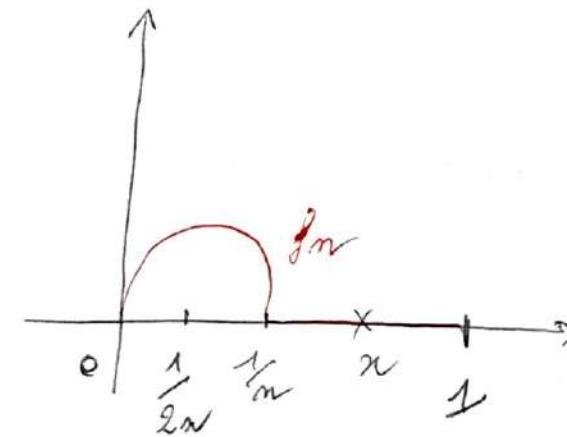
• $\forall n \geq 1$, f_m est cont sur $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{m}\}$.

$$\text{et } \lim_{\substack{n \rightarrow 1 \\ n < \frac{1}{m}}} = m^2 \times \frac{1}{m} \left(1 - m \times \frac{1}{m}\right) = 0 = \lim_{\substack{n \rightarrow 1 \\ n > \frac{1}{m}}} f(x) = f\left(\frac{1}{m}\right).$$

$\Rightarrow f_m$ est cont sur $[0, 1]$

• Q simple sur $[0, 1]$?

$$\begin{aligned} \psi_m(n) &= n^2 n - n^3 n^2 \\ \psi'_m(n) &= n^2 - 2n^3 n \\ &= n^2(1-2na) \end{aligned}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

pr $n \in [0, 1]$,
 $\exists N, n \geq N$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < n.$$

$$\frac{1}{n} < n \Rightarrow f_m(n) = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(n) = 0$$

De plus $f_m(0) = 0 \longrightarrow 0$

$\Rightarrow (f_m)$ CV simple sur $[0, 1]$

• $\forall x \in [0, 1]$ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$

2) Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^{1/n} f_n(x) dx + \int_{1/n}^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 (n^2 x - n^3 x^3) dx \\ &= \left[n^2 \frac{x^2}{2} - n^3 \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= n^2 \times \frac{1}{2} - n^3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3) CV u.v sur $[0,1]$

(TH) n $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.u.}} f$ sur $[a,b]$ &
 $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow f$ est cont

& $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

$\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{6}$ et $\int_0^1 f(x) dx = 0$

dc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx.$

et dc $(f_n)_n$ \textcircled{C} pas UN sur $[0,1]$

Ex 6 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) \textcircled{C} UN de $(f_n)_n$ vers f .

CV simple $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 + \frac{1}{n^2}) = x^2$ et par continuité

de V . sur \mathbb{R}_+ , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

dc $(f_n)_n$ \textcircled{C} simplement sur \mathbb{R} vers $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|$.

CV U.N.

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} - |x| \right|$$

Conjuguer ...

$$|a-b| = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{m^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} + |x|} = \frac{\frac{1}{m^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} + |x|}$$

• $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + \frac{1}{m^2} \geq \frac{1}{m^2}$, par croissance de f racine sur \mathbb{R}^+ ,

$$\text{on a } \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{m}$$

$$\text{D'où } \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} + |x| \geq \frac{1}{m}, \quad f_m'(0) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{de } \frac{\frac{1}{m^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} + |x|} \leq \frac{1/m^2}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$$

$$\text{on a } \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = 0$$

(17)

! dc on a bien CV.U.N.

Ex7

$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{\sqrt{m}}$$

2) ex6

Pb on ne pt pas avoir $f_m'(x) \rightarrow f'(x)$ $m \rightarrow \infty$

Pb ici car f n'est pas dérivable en 0.

CV de (f'_m) ?

f_m est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f_m'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}}}$$

$$\text{, } f_m'(0) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\bullet x > 0 : f_m'(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\bullet x < 0 : f_m'(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{-x} = -1$$

dc (f'_m) CV simplement sur \mathbb{R}

$$\text{vus } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pu t m >= 1, f_m est cont mais g n'est pas cont en 0 & dc (f_m) ne pt pas @ U.N vers g

Rq Supposons (f_m') CV U.N vers g. Comme $(f_m)_n$ CV S. vers f. D'après TH (Dérivée) $\Rightarrow f$ est dérivable & $f' = g$. Absurde.

dc (f_m') ne @ pas U.N.

$$\underline{\text{Ex 7}} \quad f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{\sqrt{m}}, \quad x \in \mathbb{R}, m \geq 1.$$

1) on a $|f_m(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$ (car $|\sin(mx)| \leq 1$)

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

dc $f_m \xrightarrow{CV \text{ U.N.}} 0$

2) f_m est dérivable & $f_m \in \mathbb{R}, \forall m \geq 1$
 $f_m'(x) = \frac{\cos(mx) \cdot m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \cdot \cos(mx)$

s'it $x \in \mathbb{R}$, supposons P l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\sqrt{m} \cdot \cos(mx) \xrightarrow{} \ell$. or $\cos(2mx) = \ell \cos^2(mx) - 1$.

$$\sqrt{m} \cdot \cos(mx) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \ell \Rightarrow \cos(mx) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt{m}}$$

(X) et (O) (I) ↑

$$\hat{e} \quad \frac{\ell}{\sqrt{m}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{dc } \cos(mx) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{dc } \cos(2mx) = \ell \cos^2(mx) - 1 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} -1$$

$$\text{dc } \sqrt{m} \cdot \cos(2mx) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} -\infty$$

or $(\sqrt{m} \cdot \cos(2mx))_n$ est une sous-suite de $(\sqrt{m} \cdot \cos(mx))_n$ & dt CV vers ℓ . Absurde
 $\Rightarrow (f_m'(n))$ ne @ pas.

TD2

Séries de fonctions

Méthodes

• (CV) simple

• (CV) normale

• (CV) conj.

Dc $\left(\sum u_m \right)$ simplement sur \mathbb{R}^* ?(CV) normale $\sum u_m$?

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_m(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} e^{-x^2 \sqrt{m}} = 1$$

$$\cancel{\sup_{n > 0} |u_n|} = \sup_{n > 0} e^{-n^2 \sqrt{m}} = 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}, \forall n \geq 0$$

Ex⁴ (1) Etude (CV) (sim, normale, conj). $\sum u_n$.

$$(CV)? \quad \sum u_n = \sum_n e^{-n^2 \sqrt{n}} \quad \text{à partir de}$$

Par croissante comparée, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot e^{-n^2 \sqrt{n}} = 0$ Dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$

$$\Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot e^{-n^2 \sqrt{n}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-n^2 \sqrt{n}} \leq \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\text{signe const}}$$

C^o $\sum \frac{1}{n^2}$ (SIR) (CV) de $\sum e^{-n^2 \sqrt{n}} \leq \sum \frac{1}{n^2}$ de m^{me} manière de $\sum e^{-n^2 \sqrt{n}}$ (CV) $u_n \in \mathbb{R}$. (1)

$$\text{Dc } \sum_m \sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_m(x)| \quad (\text{CV})$$

 $\Rightarrow \text{PAS (CV) normale.}$

TD2

Séries de fonctions

Méthodes

- \textcircled{CV} simple
- \textcircled{CV} normal
- \textcircled{CV} crois.

Ex⁺ (1) Etude \textcircled{CV} (sim, normal, crois) $\sum u_n$.

$$\textcircled{CV} \text{? } \sum u_n = \sum e^{-x^2 \sqrt{n}}$$

$\xrightarrow{\text{à finir ici}}$

Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot e^{-x^2 \sqrt{n}} = 0$

de $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$

$$\Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot e^{-x^2 \sqrt{n}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2 \sqrt{n}} \leq \left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ signe cte} //$$

$$\textcircled{C} \sum \frac{1}{n^2} \quad \textcircled{SDR} \quad \textcircled{CV} \text{ de } \sum e^{-x^2 \sqrt{n}} \text{ et } \sum \frac{1}{n^2}$$

de où majoration de $\sum e^{-x^2 \sqrt{n}}$ $\textcircled{CV} u_n \in \mathbb{R}^*$ \textcircled{ig}

Dc $\left[\sum u_n \textcircled{CV} \text{ simplement sur } \mathbb{R}^* \right]$ \textcircled{CV} normale $\sum u_n$?

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} e^{-x^2 \sqrt{n}} = 1$$

$$\overline{u_n \text{ paire}} = \sup_{n \geq 0} e^{-x^2 \sqrt{n}} = 1 \quad d_n \xrightarrow{\text{dans }} 10, \infty$$

$$\text{Dc } \sum_n \sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n(x)| \quad \textcircled{CV}$$

\Rightarrow PAS \textcircled{CV} normale.

\textcircled{RxD} $\left[\begin{array}{l} \text{1. } \sum u_n \text{ est Rf q } \textcircled{CV} \text{ si } n \in \mathbb{I} \\ \Rightarrow \sum u_n \text{ CVUN sur } (R_m)_m \text{ et CV} \\ \text{verso } n \in \mathbb{I} \text{ où } R_m = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \end{array} \right]$

$\text{ie } \left[\sum u_n \textcircled{CV} \text{ si } \forall N \in \mathbb{I} \text{ on } \sup_{n \in \mathbb{I}} |R_n(n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right]$

$$R_m(x) = \sum_{k=1}^m e^{-x^2/k^2} > e^{-x^2/m+1}$$

$$\text{Donc } \sup_{n \in \mathbb{N}} |R_m(n)| \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2/m} = 1$$

D'où $(R_m)_m$ pas U.N vers 0 sur \mathbb{R} .

$$\text{Dc } \sum u_n \text{ ne } \textcircled{V} \text{ pas U.N.}$$

$$\text{2) Ainsi } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rq. si $\forall n \geq 0, u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est cont.

$$\sum_m u_n \text{ } \textcircled{V} \text{ U.N sur } I$$

$$\text{Alors si } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad x \in I.$$

On a que f est cont sur I .

Fixons $a > 0$ & équations cont sur $[a, \infty[$.

$$\text{on } \forall k \geq m+1, \quad e^{-x^2/k^2} > e^{-x^2/m+1}$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2/m+1} = 1$$

$$\text{car } f : \quad x \mapsto e^{-x^2/m} \quad \downarrow \quad x \geq 0, \text{ et }$$

$$\sum e^{-a^2/n} \text{ } \textcircled{C} \text{ (car on sait que)}$$

$$\sum u_n \text{ } \textcircled{C} \text{ simplement sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{Dc } \sum_m \sup_{x \geq a} |u_m(x)| \text{ } \textcircled{Q} \text{ & on a } \text{ } \sum_m u_m \text{ } \textcircled{C} \text{ normalement dc U.N sur } [a, \infty[.$$

$$\text{Q'après Th (continuité) on peut dire que } f \text{ est cont sur } [a, \infty[$$

Car Rq que $\forall n \geq 0$, u_n est paire & dc

$$f \text{ est aussi paire. (car } f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

dc on peut étudier tout & dérivabilité de f sur $[0, \infty[$.

par partie, f est cont sur \mathbb{R} .

$$\int_a^x$$

$$0 \leq x$$

soit $x > 0$. alors $\exists a, \quad 0 < a < x$.

Q'après q précise, f est cont sur $[a, \infty[$

et dc f est cont sur \mathbb{R} . Qc $\forall x > 0$, f est cont sur $[x, \infty[$

$$\text{par la } \textcircled{B}.$$

et dc f est cont sur \mathbb{R} .

Dérivabilité de f sur \mathbb{R}^*

(resp C^1)

R^o $\exists n \cdot \forall m \geq 0, u_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

$\Leftrightarrow \sum_n u_n$ EV s. sur I

$\Leftrightarrow \sum u'_n$ CV sur I

et n $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), x \in I$, alors

f est dérivable sur I et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u'_m(x)$$

$\Rightarrow u_m(x) = e^{-x^2 \sqrt{m}}$, $m \geq 0$, sur \mathbb{R} que
 u_m est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
 $u'_m(x) = -2x \sqrt{m} \cdot e^{-x^2 \sqrt{m}}$

$\Leftrightarrow \sum u'_m$ CV sur \mathbb{R}^*

\Leftrightarrow on étudie CV normale de $\sum u'_m$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u'_m(x)| = \sup_{n \in \mathbb{R}^*} \sqrt{m} \cdot |x| \cdot e^{-x^2 \sqrt{m}}$$

$$= \sup_{n > 0} (2x \cdot e^{-x^2 \sqrt{m}})$$

(21)

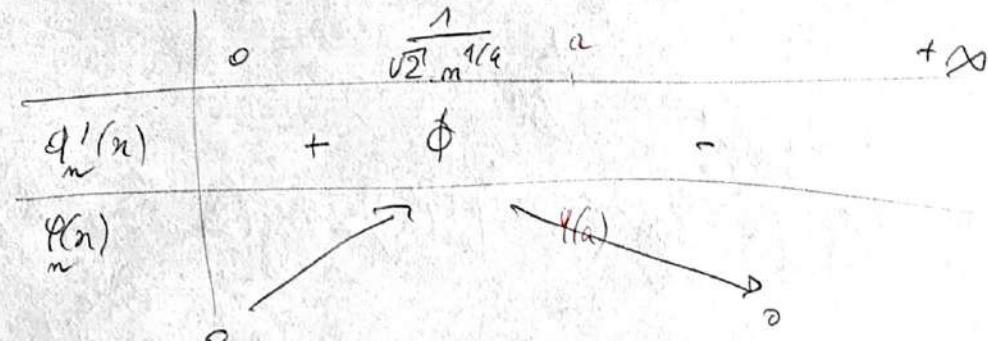
Posons $\Psi_m(n) = \ln \sqrt{m} \cdot e^{-x^2 \sqrt{m}}$, $n > 0$ et étudions les variations de Ψ . La f et Ψ est dérivable sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \Psi'_m(n) &= 2\sqrt{m} \left(e^{-x^2 \sqrt{m}} - 2x^2 \sqrt{m} e^{-x^2 \sqrt{m}} \right) \\ &= 2\sqrt{m} (1 - 2x^2 \sqrt{m} (e^{-x^2 \sqrt{m}})) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \Psi'_m(n) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \sqrt{m} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot m^{1/4}}$$



$$\text{sup} (2x \sqrt{m} \cdot e^{-x^2 \sqrt{m}}) = \Psi \left(\sqrt{\frac{1}{2} \cdot m^{1/4}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{m^{1/4}} \cdot e^{-2\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}}$$

$$= \text{cte. } m^{1/4} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \infty$$

de $\sum_m \text{sup} |u'_m(n)|$ (Dv) grossier +
 (car $\sup_{n \in \mathbb{R}^*} |u'_m(n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$)

Alors, $\sum u_m'$ ne est pas normalement convergente sur \mathbb{R} .

Finons $a > 0$ & étudions (a) normale sur $[a, \infty]$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^{1/a}}} = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$

$$n \geq N \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{n^{1/a}}} < a} \text{ et dc d'après (d) TAV}$$

ce qui montre $\sup_{x \in [a, \infty]} |u_m'(x)| = \sup_{x \in [a, \infty]} (\Psi(x)) = \Psi(a)$

$$\Psi_m(a) = 2a\sqrt{n!} \cdot e^{-a^2\sqrt{n}}$$

On Rq que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \Psi_m(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a \cdot n^{3/2} \cdot e^{-a^2\sqrt{n}})$
 $= 0$ (par comparaison)

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$,

D'où $\sum \sup_{x \in [a, \infty]} |u_m'(x)|$ (c)

Alors $\sum u_m'$ (a) normalement sur $[a, \infty]$.

D'après (TH), si $a > 0$, f est dérivable sur $[a, \infty]$ & de f est dérivable sur $[0, \infty]$.

Ex 2) $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Etude (c) simple de la série $\sum u_n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, si $n \geq 1$, on a :

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^3} \text{ dc } \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$$

↳ signifie

or $\sum \frac{1}{n^3}$ soit (a). On a $\sum u_n$ (c) normalement.

(dc (a) UN & simplement) sur \mathbb{R} .

Etude cont & dérivabilité de la somme

• $\forall n \geq 1$, u_n cont sur \mathbb{R} .

• $\sum u_n$ (c) normalement sur \mathbb{R} .

D'après (TH) continuité si $f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(n)$,
 on a f est cont sur \mathbb{R} .

De t, $\forall n \geq 1$, u_n est dérivable sur \mathbb{R} &

$$u_n'(x) = \frac{n \cos(nx)}{n^3} = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum u_n'$$

(a) UN de (a) UN
 $\Rightarrow f$ est dérivable sur \mathbb{R} .

E.A.3) $\sum u_n$, où $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(a) simple: $Ry u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$

$$\text{ou } v_n(x) = \frac{1}{n+x^2};$$

• suite $(v_n)(x) \searrow$; $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = 0$

D'après CSA, si $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ (c)

dc $\sum u_n$ (a) simplement.

(b) uniforme: CSA \Rightarrow si $R_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k(x)$,
on a $\forall n \geq 1$,

$$|R_m(x)| \leq |U_{m+1}(x)| = \frac{1}{m+1+x^2}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |R_m(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{m+1+x^2} \leq \frac{1}{m+1}$$

$$\text{comme } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{de } \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |R_m(x)| = 0$$

dc (R_m) tend unif. vers 0 sur \mathbb{R} .

donc $\sum u_n$ (b). U.N sur \mathbb{R} .

[M2] par Th d'Abel Uniforme:

Par suite ns, on doit mq $\frac{1}{m+x^2}$ (c). U.N sur \mathbb{R}

(a) normale:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{n+x^2} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n+x^2} \stackrel{x \rightarrow \infty}{\uparrow} \frac{1}{n}$$

On $\sum \frac{1}{n}$ (d) de

$\sum u_n$ ne (c) pas normalement
sur \mathbb{R} .

en $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$

$$\text{en } 0, \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$$

Continuité & Dérivabilité de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

• $\forall n \geq 1$, u_n est cont sur \mathbb{R}

• La série $\sum u_n$ (c) uniforme sur \mathbb{R} . De d'après Th du cours,
on a f est cont sur \mathbb{R} .

[Th Définition]

• u_n définit sur I , $\sum u_n \xrightarrow{\text{C.V.S.}}$ f sur I , $\sum u'_n \xrightarrow{\text{C.V.U.V.}}$ g sur I ,
 f classe C^1 , $f' = g$, $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$ a $\sum u'_n$ (c) U.N sur I

{ on sait déjà que $\sum u_n$ (c). s. & U.N sur \mathbb{R} .
Vérifions que $\sum u'_n$ (c). U.N sur \mathbb{R} .

u'_n dérivable \Leftrightarrow fonction rationnelle dt dénom. ne s'annule pas.
(car n fixe au dessus)

$\forall n \geq 1, \forall a \in \mathbb{R}$, on a

$$U_n'(a) = (-1)^n \frac{-\ln}{(m+n^2)^2} = \frac{\ell(-1)^{n+1}}{(m+n^2)^2} a$$

Idee $|U_n'(a)| = \frac{2|a|}{(m+n^2)^2}$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $m+n^2 \geq m > 0$ et par
croissance de $t \mapsto t^2$ sur $[0, \infty[$

$$\text{on a } (m+n^2)^2 \geq m^2$$

$$\text{de } |U_n'(a)| \leq \frac{2|a|}{m^2}.$$

Fixons $a > 0$, on a que

$$\sup_{x \in [-a, a]} |U_n'(x)| \leq \frac{2a}{m^2}.$$

comme $\sum_n \frac{2a}{m^2}$ (CV), on a que

$\sum U_n'$ (CV) normalement dc U.N
sur $[-a, a]$.

Par th, on obtient $\forall a > 0$, f est dérivable
sur $[-a, a]$.

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} .

(car si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists a > 0$ tq $x_0 \in]-a, a[$
et dc f sera dérivable en x_0).

autre M calcul $\sup |U_n'(x)|$ de TAV.

$$\text{de } t \mapsto \frac{\ell t}{(m+t^2)^2} \text{ a } [0, \infty[$$

4) $\sum \frac{\arctan(mn)}{n^2}$

$$\sup |U_m(n)| \leq \frac{\pi/2}{m^2}$$

$\hat{c} \sum \frac{1}{m^2}$ (CV), on a que $\sum U_m$ (CV) normalt
en \mathbb{R} .

$\forall n \geq 1$, U_n cont a \mathbb{R} (\arctan cont a \mathbb{R})

on a que par th. si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est cont a \mathbb{R}

(2)

Dérivabilité de f

* $\forall n \geq 1$, u_n est classe C^1 sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } u_n'(x) = \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)}$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$\Rightarrow \sum u_n$ converge sur \mathbb{R} (par la u.v)

• \textcircled{v} U.V de $\sum u_n'$ sur \mathbb{R} .

\textcircled{v} Normale sur \mathbb{R} ?

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

La $f: x \mapsto \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ est paire et ≥ 0

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \sup_{x \in [0, \infty[} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$

comme de plus, f_m est \downarrow , on ad que

$$\sup_n \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = f_m(0) = \frac{1}{m}$$

d'où $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n'(x)| = \frac{1}{m}$

Sachant, $\sum \frac{1}{m}$ \textcircled{v} .

Fixons $a > 0$.

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \geq a} |u_n'(x)| &= \sup_{|x| \geq a} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \sup \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \\ &= \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{par décreasing de } f_n \\ x \mapsto \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{n+n^3a^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{n^3} \text{ et } \sum \frac{1}{n^3} \textcircled{v}.$$

Donc $\sum u_n'$ \textcircled{v} Normalement sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$

Donc $\forall a > 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a] =]-\infty, -a[\cup]a, \infty[$.

On obtient que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Q.F dérivation en 0.

$$\begin{aligned} \frac{f(n) - f(0)}{n} &= \frac{1}{n} f(x) \text{ car } f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2x} \end{aligned}$$

[minoration pour obtenir limite finie]

Fixons $N \geq 1$, $x > 0$. On a alors

$\forall n \geq 1$, $\frac{\arctan(mn)}{m^2 n} \geq 0$ et de

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{\arctan(mn)}{m^2 n}$$

De plus, $\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ \geq}} \frac{\arctan(mn)}{m^2 n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{mn}{m^2 n} = \frac{1}{m}$

car $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$

D'où $\liminf_{n \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{n} \right) \geq \liminf_{n \rightarrow 0} \sum_{m=1}^N \frac{\arctan(mx)}{m^2 n}$

Comme c'est $\forall N \geq 1$,
on obtient en faisant
tendre $N \rightarrow \infty$ que

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \geq}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{n} \right) = \infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2-3-9

Ex2

$$u_m(x) = \frac{\sin(2^m x)}{m^n}, \quad m \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Mq ① normale

on a $\forall n \geq 1, x \in \mathbb{R}$ $|u_m(x)| \leq \frac{1}{m^n}$,

de plus, $\forall n \geq 1, m \geq 2^n > 0$,

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$, on a

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

or $\sum_m \frac{1}{2^n}$ ②, suite géométrique de raison $1/2$.

De la série $\sum_m u_m$

③ $\sum \frac{1}{m^n}$ ④ ? Cd Cauchy $\left(\frac{1}{n^m}\right)^{1/m} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

D'après CdC, $\sum \frac{1}{m^n}$ ⑤.

$$(ii) f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Mq f est dérivable sur \mathbb{R}

• $\sum u_m$ av.s sur \mathbb{R} Normt.

• $u_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable (\sin dérivable)

• $\sum u_m'$ ⑥ UN sur \mathbb{R} car ⑦ Normt sur \mathbb{R}

car $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_m'(x)| \leq \frac{2^m}{m^n}$.

De plus, si $v_m = \frac{2^m}{m^n}$, on a :

$$|v_m|^{1/n} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 < 1$$

D'après le crit de Cauchy,

$\sum v_m$ ⑧.

on a bien ⑨ uniforme de $\sum u_m'$ sur \mathbb{R} .

si ⑩ Abel $|\sum \cos(2^k x)| \leq (\sum |\cos(2^k x)|)$. Δ \sum $\overset{k \leq m}{\text{indep}}$

D'après ⑪ de Déivat, f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m \cos(2^m x)}{m^n}$$

EQ3 $u_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n^3}$, $n \geq 1$, $x \geq 0$

① Comme $n^2 x + n^3 \geq n^3 > 1$ (car $x \geq 0$)

de u_n indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^+ .

C'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{De plus, } u_n'(x) = \frac{-n^2}{(n^2 x + n^3)^2} = \frac{-1}{n^2 (x+n)^2}$$

Mais par récurrence si $k \geq 1$, $\forall n \geq 0$,

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^k (x+n)^{k+1}} \quad (\text{H}_k)$$

(H_k) vraie d'après ce qui précède.

Supposons que (H_k) est vraie pour certains $k \geq 1$

$$\text{Par la D.R., on a } u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^k (x+n)^{k+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$u_n^{(k)}(x)$ est dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^k} \times \frac{-(k+1)(x+n)^{k+1}}{(x+n)^{2(k+1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{n^2} \times \frac{1}{(x+n)^{k+2}} \quad \text{②}$$

Donc (H_{k+1}) est vraie.

Par récurrence, on a prouvé (H_k) vraie. $\forall k$.

2) Montrons que f est dérivable.

$$\text{Moy } \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\sum \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$$

④ normalement
sur \mathbb{R} .

$$\left| \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^2 (x+n)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{n^2 \cdot n^{k+1}}$$

car $x \geq 0$
 $\Rightarrow x+n \geq n$.
 $(x+n)^{k+1} \geq n^{k+1}$

$$\text{Ainsi } |u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{n^{k+3}}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k+3 \geq 3 > 1$ & de

$$\sum_n \frac{1}{n^{k+3}} \quad \text{⑤} \quad \text{(Série de Riemann)}$$

Donc $\sum_n u_n^{(k)}$ ⑤ normable sur \mathbb{R}^+ .

D'où f est dérivable sur \mathbb{R}^+ .

$$\text{Ex 4} \quad u_n(x) = \frac{x \cdot e^{-nx}}{\ln(n)}, n \geq 2, x \geq 0$$

$$1) \quad x \geq 0 \quad \left| \sum_{k=1}^N e^{-nk} \right| \leq \sum_{k=1}^N (e^{-n})^k = \frac{1 - e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-n}}$$

Rq $u_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\& \text{m}^2 \cdot u_m(x) = x \cdot \frac{m^2 \cdot e^{-mn}}{\ln(m)}$$

casse
or
compte

$$\begin{cases} m^2 \cdot e^{-mn} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{\ln(m)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \end{cases}$$

D'où pour $x > 0$, $m^2 \cdot u_m(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

et pour $x = 0$, on a

$$\text{de } \forall x > 0, \text{ on a } u_m(x) = o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$\& \sum \frac{1}{m^2} \text{ @v.}$$

D'où on en conclut $\sum_m u_m(x)$ @. simptx

2) $\forall x > 0$

$$0 \leq R_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k(x)$$

(3)

$$R_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x \cdot e^{-kx}}{\ln(k)} \leq \frac{x}{\ln(m+1)} \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-kx}$$

$$k \geq m+1 \Rightarrow \ln(k) \geq \ln(m+1)$$

$$\leq \frac{x}{\ln(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$$

$$\text{D'où } 0 \leq R_m(x) \leq \frac{x}{\ln(m+1)} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{\ln(m+1)} \times \frac{1}{e^x(1 - e^{-x})}$$

$$= \frac{x}{\ln(m+1)} \cdot \frac{n}{e^x - 1} \leq 1$$

car $e^x - 1 \geq x$ pour $x \geq 0$. (TAV) $e^x - 1 - x$.

D'où $\forall x > 0, 0 \leq R_m(x) \leq \frac{1}{\ln(m+1)}$

$x = 0, R_m(0) = 0$ & de on a aussi

$$0 \leq R_m(0) \leq \frac{1}{\ln(m+1)}$$

cd $\forall x \geq 0, 0 \leq R_m(x) \leq \frac{1}{\ln(m+1)}$

ed f est cont sur \mathbb{R}^+ .

D'après \textcircled{D}_5 on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_m(x)| \leq \frac{1}{\ln(m+1)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

dc (R_m) \textcircled{cv} u.n vers 0.

Adit, $\sum u_m$ \textcircled{cv} u.n sur \mathbb{R}^+ .

et les u_m et cont sur \mathbb{R}^+ , f est cont sur \mathbb{R}^+ .

$$\text{cd} \quad \forall x \geq 0, 0 \leq R_m(x) \leq \frac{1}{\ln(m+1)}$$

ed f est cont sur \mathbb{R}^+

D'après \textcircled{D}_5 on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_m(x)| \leq \frac{1}{\ln(m+1)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

dc (R_m) \textcircled{a} u.n vers 0.

Adit, $\sum u_m$ cv. u.n sur \mathbb{R}^+ .

2) les u_m st cont sur \mathbb{R}^+ , f est cont sur \mathbb{R}^+ .

1) Moq $\sum \frac{x \cdot e^{-mx}}{\ln(m)}$ ne \textcircled{CD} pas normalement.

$$\rightarrow \text{mq} \quad \sup |u_m(x)| = \frac{e^{-x}}{\ln(m) \cdot m}$$

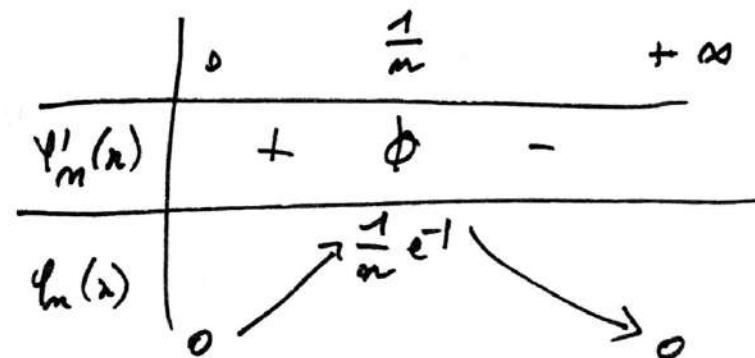
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u_m(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{x \cdot e^{-mx}}{\ln m} \right)$$

$$\text{soit } \Psi_m(x) = x \cdot e^{-mx}, x \geq 0, m \geq 2$$

f dérivable sur \mathbb{R}^+ .

$$\Psi'(x) = e^{-mx}(1-mx)$$

$$\text{Donc } \Psi' \geq 0 \Leftrightarrow 1-mx \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{m}.$$



$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \Psi_m(x) = \Psi_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} e^{-1}$$

$$\text{Donc } \sup_{x \geq 0} |u_m(x)| = \frac{e^{-1}}{m \cdot \ln(m)}$$

$$On \quad \sum \frac{1}{n \ln(n)}$$

$\textcircled{RP} \quad \text{Sd B}$

\textcircled{Dv} car série de Bertrand.
ici $\alpha=1, \beta=1$ de \textcircled{Dv}

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \textcircled{Cv} \iff \alpha > 1$$

ou $\alpha=1 \& \beta > 1$

Rq: si $a > 0$, $\sup |U_m(x)| = U_m(a)$. 1) Mg f cont a R.

$x \geq a$, or $\sum U_m$ (cv) simplement si \mathbb{R}^+ , on sait $\sum U_m(a)$ (cv).

Donc $\sum U_m$ (cv) normalement sur $[a, \infty]$.

De f est cont sur $[a, \infty]$, $\forall a > 0$.

D'où f cont sur $[0, \infty[$.

* * * $\forall m \geq 1$, U_m cont sur \mathbb{R} (à fraction rationnelle dt le dénominateur ne s'annule pas car $m^2 + x^2 \geq m^2 \geq 1$).

* * sait $a > 0$,

$$\sup_{x \in [-a, a]} |U_m(x)| = \sup_{x \in [-a, a]} \frac{|x|}{m^2 + x^2} \leq \frac{a}{m^2}$$

Ex 5 $U_m(x) = \frac{x}{m^2 + x^2}$, $m \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$

or $\sum \frac{1}{m^2}$ (cv) de la série $\sum \sup |U_m(x)|$ (cv),

o) Mg $\sum U_m$ (cv) simplement sur R.

$\forall x \neq 0$, $U_m(x) \sim \frac{x}{m^2}$ pasoubienben

i.e. $\sum U_m$ (cv) normalement sur $[-a, a]$.

D'où (Th) (Continuité) f est cont sur $[-a, a]$, $\forall a > 0$.
De f cont sur R.

De série $\sum \frac{1}{m^2}$ (cv) & de $\sum U_m(x)$

(cv) abs de (cv) & pr x=0,

$U_m(0) = 0$ & de $\sum U_m(0)$ (cv) aussi.

De $\sum U_m$ (cv) simpt.

en effet si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon > 0$ tq $x_0 \in]-a, a[$.

De f cont en x_0 .

⚠ une équival^e nécessite avoir
série termes positifs.

2) Mg $\forall n > 0$ & $m \geq 1$, on a

$$\int_m^{m+1} \frac{x}{t^2 + x^2} dt \leq \int_{m-1}^m \frac{x}{t^2 + x^2} dt$$

on a obtenu que :

$$\int_m^{m+1} \frac{x}{t^2 + x^2} dt \leq \frac{x}{m^2 + x^2} \leq \int_{m-1}^m \frac{x}{t^2 + x^2} dt.$$

$t \mapsto \frac{x}{t^2 + x^2}$ est de croissante sur $[0, \infty]$.

De plus $\forall t \in [m, m+1]$, on a :

$$\frac{x}{t^2 + x^2} \leq \frac{x}{m^2 + x^2}$$

$$\text{d'où } \int_m^{m+1} \frac{x}{t^2 + x^2} dt \leq \int_m^{m+1} \frac{x}{m^2 + x^2} dt = \frac{x}{m^2 + x^2}$$

De plus $\forall t \in [m-1, m]$,

$$\frac{x}{m^2 + x^2} \leq \frac{x}{t^2 + x^2}$$

$$\text{d'où } \frac{x}{m^2 + x^2} \leq \int_{m-1}^m \frac{x}{t^2 + x^2} dt$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{m^2 + x^2} = f(x)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{t^2 + x^2} dt \leq f(x)$$

$$\frac{1}{x} \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} dt \leq f(x)$$

$$\text{d'où } \int_{1/x}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \leq f(x)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\arctan u \right]_{u=\frac{1}{x}}^{u=\infty} \leq f(x)$$

$$u = \frac{t}{x}$$

$$du = dt/x.$$

(ii) De $m \geq 1$, on obtient

$$f(x) \leq \int_0^\infty \frac{x}{t^2 + x^2} dt = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \left[\arctan u \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\forall x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$

De d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\pi}{2}.$$

E6 $u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} (x^{2m} - x^{2m+1})$, $m \geq 1$
 $x \in [0, 1]$.

1) CV simple sur $[0, 1]$

M1 d'Alembert M2 R² de Cauchy

M3 $\forall x \in [0, 1]$, $|u_m(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} (x^{2m} + x^{2m+1})$
 $\leq x^{2m} + x^{2m+1}$

& $\sum x^{2m}$ & $\sum x^{2m+1}$ séries géométriques
 $\forall n < 1$.

De $\sum k u_m(x)$ CV abs de CV pour $x \in [0, 1]$.

& $\sum u_m(1)$ CV car $\forall m \geq 1$, $u_m(1) = 0$

CV normale sur $[0, 1]$: $\sup |u_m(x)|$
inégalités astuce... majorer, CV

(ii) De $m \geq 1$, on obtient

$$f(x) \leq \int_0^\infty \frac{x}{t^2 + x^2} dt = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$$

$$= [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Dès que $\forall x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

De d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Ex 6 $u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} (x^{2m} - x^{2m+1})$, $m \geq 1$
 $x \in [0, 1]$.

1) W simple sur $[0, 1]$

M1 d'Alembert M2 R¹ de Cauchy

M3 $\forall n \in [0, 1]$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} + x^{2n+1})$
 $\leq x^{2n} + x^{2n+1}$

& $\sum x^{2n}$ & $\sum x^{2n+1}$ séries géométriques
 $\forall x < 1$.

De $\sum \mathbb{R} u_m(x)$ abs dc CV si $x \in [0, 1]$.

$\leftarrow \sum u_m(1)$ car $\forall m \geq 1$, $u_m(1) = 0$

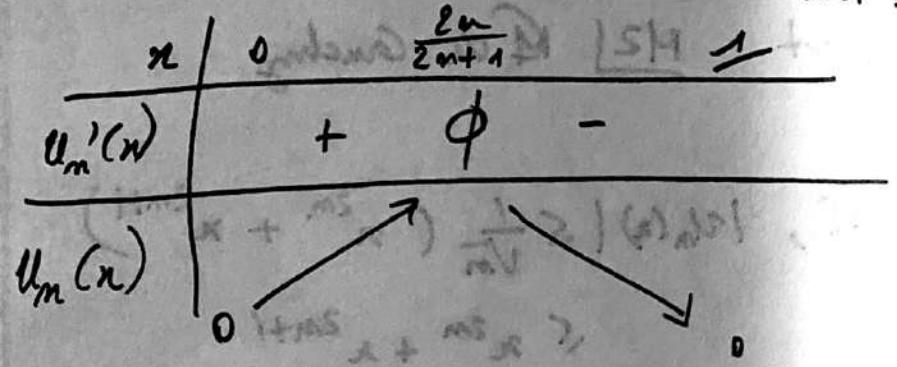
CV normale sur $[0, 1]$: $\sup |u_n(x)|$
 similitude astuce... majorer, abs

+ dérivable sur $[0, 1]$

$$u'_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} (2m \cdot x^{2m-1} - (2m+1)x^{2m})$$

$$= \frac{x^{2m-1}}{\sqrt{m}} (2m - (2m+1)x)$$

$$\text{D'où } u_m'(n) \geq 0 \Leftrightarrow \ln - (2m+1)n \geq 0 \\ \Leftrightarrow n \leq \frac{2m}{2m+1}$$



Pour conséq., $\sup |u_m(n)| = u_m\left(\frac{2m}{2m+1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{2m} - \left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{2m+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{2m} \left(1 - \frac{2m}{2m+1} \right)$$

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{2m} \frac{1}{2m+1} \geq m \Leftrightarrow \frac{1}{2m+1} \leq \frac{1}{m}$$

$$0 \leq v_m \leq \frac{1}{m^{3/2}}$$

$$\alpha \sum \frac{1}{m^{3/2}} \text{ SDR } \textcircled{C}, \frac{3}{2} > 1$$

(^{ancien} ^M_{Cauchy, d'Alembert})

Dès \textcircled{C}_1 normalement dc \textcircled{C}_1 uniformément.

$$\sum_m u_m = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

2) $\forall m \geq 1$, u_m cont en $[0,1]$
série $\sum u_m$ \textcircled{C}_1 U.N $[0,1]$
dc d'après \textcircled{T}_6 cont, f est cont sur $[0,1]$

$$\frac{\pi}{2} \geq (\pi) \geq \left(\frac{1}{x}\right) \text{ alors } -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{x}\right) \text{ alors } -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = (x)$$

Ex 7 soit $U_m(x) = x(1-x)^m$, $x \in [0,1]$ * $U_m(0) = U_m(1) = 0 \Rightarrow \sum U_m(0)$ & $\sum U_m(1)$ (CV).

$$f(x) = \sum_{m \geq 0} U_m(x)$$

1) (CV) simple $\sum_m U_m$?

si $x \in [0,1] \setminus \{1\}$:

$$\frac{|U_{m+1}(x)|}{|U_m(x)|} = \frac{x|1-x|^{m+1}}{x|1-x|^m} = |1-x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{m+1}(x)|}{|U_m(x)|} = |1-x|$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < 1-x < 1$$

$$\Rightarrow |1-x| < 1$$

d'Hambert

soit $\sum_n U_m$ (a)

$$\Rightarrow \sum (1+x), x > 0 \quad (\text{DV})$$

* $U_m(2) = 2(-1)^m$, $m \geq 1$

$$U_m(2) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{de } \sum U_m(2) \quad (\text{DV})$$

\Rightarrow Ainsi $\sum U_m$ (a) d. sur $[0,1]$.

2) (CV) U.N sur $[0,1]$?

on devine que (a) pas normé, au (b) pas U.N et
on fixe $m \geq 0$, pour $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} R_m(x) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} U_k(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} x(1-x)^k \\ &= x \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-x)^k \\ &= x \frac{(1-x)^{m+1}}{1-(1-x)} = (1-x)^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |R_m(x)| &\geq \sup_{x \in [0,1]} |R_m(x)| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} |1-x|^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1^{\text{er}} \text{ forme}}{1 - \text{racine}} &= 1 \end{aligned}$$

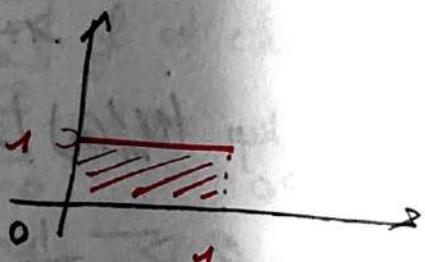
$$2) \sup_{x \in [0, 2]} |P_m(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

& de $\sum_n U_m(n)$ pas U.N à $[0, 2]$.

3) calculer $\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_m(n) dx \right)$ & $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int U_m(n) dx \right)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(n) = \sum_{m=0}^{\infty} n(1-n)^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(0) = 0$$



$$\int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} U_m(n) dx = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^1 U_m(n) dx \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 n(1-n)^m dx$$

$$U_m(n) = n \Rightarrow U'(n) = 1$$

$$U_m(n) = -\frac{(1-n)^{m+1}}{m+1} \quad U_m'(n) = (1-n)^m$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 n(1-n)^m dx &= - \left[n \left(\frac{(1-n)^{m+1}}{m+1} \right) \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-n)^{m+1} dx \\ &= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[- (1-n)^{m+2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 U_m(n) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

DES

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 \quad \&$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x u_n(u) du = 1$$

Rq si $u_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont

$$\text{si } \sum_m u_m \text{ (cv) U.N } [a, b] \Rightarrow \int_a^b \sum_m u_m(u) du = \sum_m \int_a^b u_m(u) du.$$

Ex & $u_m(x) = \frac{\exp(-mx)}{1+m^2}, m \geq 0, f(x) = \sum_{m \geq 0} u_m(x)$

1) Ng f (cv) Norm. l^t sur \mathbb{R}^+ .

$$\sup_{x \geq 0} |u_m(x)| = \sup_{x \geq 0} \left(\frac{1}{1+m^2} e^{-mx} \right) = \frac{1}{1+m^2}$$

car $x \mapsto e^{-mx}$ est \downarrow sur $[0, \infty[$

$$\sum_m \frac{1}{1+m^2} \quad (\text{cv}) \quad \text{d'où } \sum u_m \text{ (cv) Normalt}$$

2) Ng $\sum u_m'$, $\sum u_m''$ (cv) norm. l^t sur $[a, \infty[, \forall a > 0$.

f u_m derivable: $\forall a > 0$

$$u_m'(x) = \frac{-m}{1+m^2} e^{-mx}$$

$$\& u_m''(x) = \frac{m^2}{1+m^2} e^{-mx}$$

$$\begin{aligned} \sup |u_m'(x)| &= \sup_{x \geq 0} \left(\frac{-m}{1+m^2} e^{-mx} \right) \\ &= \frac{m}{1+m^2} e^{-ma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rq} \quad \sup_{x \geq 0} |u_m'(x)| &= \frac{m}{1+m^2} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{m} \\ &\& \sum \frac{1}{m} \quad (\text{cv}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \exists N \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq N, \frac{m}{1+m^2} e^{-ma} < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N, \frac{m}{1+m^2} e^{-ma} \leq \frac{1}{m^2}$$

$$\sum \frac{1}{m^2} \quad (\text{cv})$$

$$\text{de } \sum \frac{1}{m^2} \quad (\text{cv})$$

$$\text{de } \sum u_m' \quad (\text{cv}) \text{ Normalt}$$

De m $\sum_m U_m''$ (CV) normale de $[a, \infty]$, sol.

3) Mg f est sol de $y'' + y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x > 0$

$\rightarrow U_m$ est C^2 à $[0, \infty]$

$\rightarrow \sum U_m'$ (CV) somme de deux
series de termes impairs de $[a, \infty]$.

$\rightarrow \sum U_m'$ (CV) N. de U.N à $[a, \infty]$.

Le TH du point \Leftrightarrow f est classe C^2 à $[a, \infty]$

$$\& f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m''(x)$$

(TH)
f est classe C^1 $f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m'(x) dx$
à $[a, \infty]$.

$\rightarrow \sum U_m''$ (CV) somme de U.N à $[a, \infty]$.

TH $\Rightarrow f'$ est C^1 à $[a, \infty]$ et $\forall x \geq a$,

$$(f')'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m'''(x)$$

i.e. f classe C^2 à $[a, \infty]$

$$\& f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m''(x), x \geq a$$

D'où f est classe C^2 à $[0, \infty]$

$$\& \forall x > 0, f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m''(x)$$

$$\text{mg } f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

De m $\sum_m u_m''$ (CV) Normale de $[a, \infty]$, soit.
i.e. f classe C^2 sur $[a, \infty]$
& $f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m''(x)$, $x \geq a$

3) Mg f est sol de $y'' + y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x > 0$

$\rightarrow u_m$ est C^2 sur $[a, \infty]$

$\rightarrow \sum u_m'$ (CV) somme de normale
ment somme de normale
ment

$\rightarrow \sum u_m'$ (CV) N. de U.V sur $[a, \infty]$.

D'où f est classe C^2 sur $[0, \infty]$
& $\forall x > 0$, $f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m''(x)$

Mg $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x > 0$.

Le TH du point \textcircled{ed} f est classe C^2 sur $[a, \infty]$
& $f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m''(x)$

(TH) f est classe C^1 $f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m'(x)$
et $x \in [a, \infty]$.
 $f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2} \right) e^{-nx}$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-nx}$ Somme série géométrique
de raison $e^{-x} \in [0, 1]$.

$\rightarrow \sum u_m''$ (CV) normale de U.V sur $[a, \infty]$. D'où $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$

(TH) $\Rightarrow f'$ est C^1 sur $[a, \infty]$ et $\forall x \geq a$,

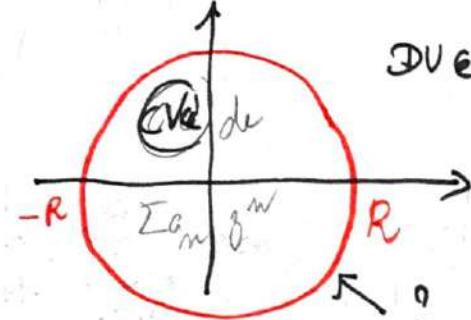
$$(f')'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m'''(x)$$

TD3

Séries entières

(R) Série entière $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$.

Rayon de convergence $R \in [0, \infty]$



Disk of convergence $\sum a_n z^n$

Ex 1 Rayon de convergence ?

$$\text{1) } \sum_n \frac{m^m}{m!} z^m \quad \text{on pose } a_m = \frac{m^m}{m!}, m \geq 0$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(1+m)^{m+1}}{(m+1)!} \times \frac{m!}{m^m} = (m+1)^m \times \frac{1}{m^m}$$

$$= \left(\frac{m+1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

$$= e^{m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = e^{m\left(\frac{1}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right)}$$

$$= e^{1+o(1)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} e$$

On obtient $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = e$ et par la règle d'Ambroise, on a $R = \frac{1}{e}$.

De la série $\sum \frac{m^m}{m!} z^m$ (IV)

sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, (DV) grossier
sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\}$.

Étude en $x = \pm \frac{1}{e}$

$$x = \frac{1}{e}, \sum_n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} \text{ CV ou DV ?}$$

$$U_n := \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

FF de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\begin{aligned} U_n &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{n \ln n - n}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e^{n \ln n - n + \ln\left(\frac{n}{e}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n + n \ln(e)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \end{aligned}$$

$$U_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

(U_n) est une suite positive.

$$\sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \text{ DV d'après le crit de Riemann.}$$

Dès $\sum U_n$ DV pr $x = \frac{1}{e}$.

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

$$x = -\frac{1}{e}, \sum_n (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$$

$$\sum v_n = \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

série alternée

$$\circ v_n = (-1)^n w_n ; w_n = \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} > 0$$

$$\circ w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\circ \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}} \frac{n!}{n^n} e^n$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{e} - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{TAF}} \text{TAV...}$$

$$\forall n \geq 1, \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$$

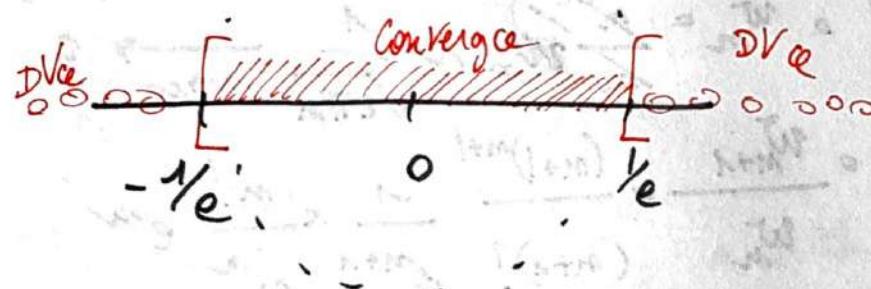
$$n \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$$

on a $\frac{w_{m+1}}{w_m} \leq 1$ & de $(w_m)_m$ \downarrow soit $b_m = \frac{m^n}{m!} \cdot \frac{1}{e^m}$, $c_m = e^{im\theta}$, $m \geq 0$.

D'après CSA, $\sum v_m = \sum (-1)^n w_m$ \textcircled{CV} la suite $(b_m)_m$ positive, \downarrow vers 0

Adt $\sum v_m$ \textcircled{CV} $m \alpha = -\frac{1}{e}$.

D_n Résumé:



[M] j'écrit, $z = \frac{1}{e} e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\theta \mapsto \sum \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e} e^{in\theta} \text{ } \textcircled{CV}$$

me Règle d'Abel surt

$$a_n: \downarrow, \rightarrow 0$$

$b_m: e^{im\theta}$: sommes partielles, $m \geq 0$ θ : bornés

On cherche $C > 0$ tq $\forall N \geq 0$,

$$\left| \sum_{m=0}^N c_m \right| \leq C.$$

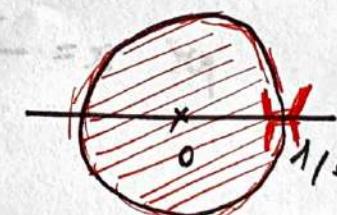
$$\text{ici } \sum_{m=0}^N c_m = \sum_{m=0}^N e^{im\theta} = \sum_{m=0}^N (e^{i\theta})^m = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$\text{D'où } \left| \sum_{m=0}^N c_m \right| \leq \frac{|1 - e^{i(N+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{e}{|1 - e^{i\theta}|}$$

D'après le Crit d'Abel, on a que

$$\sum_m b_m \cdot c_m = \sum_m \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} e^{in\theta} \text{ } \textcircled{CV} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Finalement $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ \textcircled{CV} si $C(0, \frac{1}{e}) \setminus \{\frac{1}{e}\}$



$$B \in \overline{D(0, \frac{1}{e})} \setminus \{\frac{1}{e}\}$$

$$2) \sum_n n^2 x^{2n+1} = \sum_m a_m x^m$$

D'où le rayon de convergence est $R=1$

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ k^2 & \text{si } m \text{ impair, } m = 2k+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_n n^2 x^{2n+1} &= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ &\quad + 2^2 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 3^2 \cdot x^7 \end{aligned}$$

$\frac{a_{m+1}}{a_m}$ n'est pas bien définie.

on pose $\alpha_m(x) := n^2 x^{2n+1}$, $n \geq 1, x \neq 0$

$$\frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} = \frac{(m+1)^2}{m^2} \cdot \frac{|x|^{2m+3}}{|x|^{2m+1}} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 |x|^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} \right| = |x|^2$$

d'après crit
de d'Alembert.

si $|x| < 1$, $\sum_n \alpha_m(x)$ CV

$$2) \sum_n n^2 x^{2n+1} = \sum_m a_m x^m$$

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ k^2 & \text{si } m \text{ impair, } m=2k+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_n n^2 x^{2n+1} &= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ &\quad + 2^2 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 3^2 \cdot x^7 \end{aligned}$$

$\frac{a_{m+1}}{a_m}$ n'est pas bien définie.

on pose $\alpha_m(x) := n^2 x^{2n+1}$, $n \geq 1, x \neq 0$

$$\frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} = \frac{(m+1)^2}{m^2} \frac{|x|^{2m+3}}{|x|^{2m+1}} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 |x|^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} \right| = |x|^2$$

d'après crit
de d'Alembert.

$$\text{si } |x| < 1, \sum_n \alpha_m(n) \text{ CV}$$

$x \neq 0$

Dès le rayon de CV est $R=1$.

CV DV en -1 & 1 ?

$$2) \sum_n n^2 z^{2n+1}, z \in \mathbb{C},$$

Étudier CV de $\sum n^2 z^{2n+1}$ pr $|z|=1$.
on R/V pr $|z|=1$, on a :

$$\left| n^2 z^{2n+1} \right| = n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

et la série $\sum n^2 z^{2n+1}$ DV grossièrement
 $\forall z, |z|=1$.

al Le domaine de CV de $\sum n^2 z^{2n+1}$
est $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

$$3) \sum_m \ln(m) \cdot x^m$$

calcul du Rayon de Cva.

$$a_m = \ln(m), m \geq 2.$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\ln(m+1)}{\ln(m)} = \frac{\ln\left(m\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)}{\ln(m)}$$

$$= \frac{\ln(m) + \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(m)}$$

$$\leq 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(m)}$$

$$\text{or } \lim_{m \rightarrow \infty} \ln\left(1+\frac{1}{m}\right) = 0 \quad \& \quad \lim(\ln(m)) = \infty$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$$

D'après le Cd d'Olembat, on a $R=1$.

Domaine de Cva.

si $|z|=1$, on a $|\ln(m) \cdot z^m| = |\ln(m)| \cdot m^m$

dc $\sum \ln(m) \cdot z^m$ (Cv) grossnit & $|z|=1$

Le domaine de (Cv) de $\sum \ln(m) \cdot z^m$

est $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$$4) \sum_m m^{(-1)^m} z^m !$$

Rayon de Cva) on pose $a_m = m^{(-1)^m}$.

$$|a_m|^{1/m} = e^{\frac{(-1)^m}{m} \ln(m)}$$

$$\text{or } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(m)}{m} = 0 \quad \text{P comparée}$$

$$\text{dc } \lim_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} = 1$$

D'après le Cd Cauchy, on a

Rayon de Cva est $R=1$.

Domaine de \textcircled{CV}_a $\mu \sum_n (-1)^n z^n$: or $\frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$

si $|z| = 1$, on a:

$$|a_{2n} z^{2n}| = 2n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

dc $\sum_n (-1)^n z^n$ \textcircled{DV} grossièrt.

ainsi domaine de \textcircled{CV} de $\sum_n (-1)^n z^n$
est $\underline{\mathcal{D}(0,1)} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$.

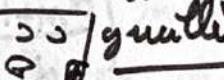
5) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{3^n} z^{2n}$?

trous pu coeffs z^{2m+1} .

$$\lambda_m(z) = \frac{n^2 + 1}{3^n} z^{2n}$$

$$\left| \frac{\lambda_{m+1}(z)}{\lambda_m(z)} \right| = \frac{(m+1)^2 + 1}{3^{m+1}} z^{2m+2} \frac{3^m}{m^2 + 1} \frac{1}{z^{2m}}$$

$$= \frac{(m+1)^2 + 1}{3(m^2 + 1)} |z|^2$$

suite Gondar

puisque $\frac{u_{m+1}}{u_m}$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{m+1}(z)}{\lambda_m(z)} \right| = \frac{1}{3} |z|^2$

D'après le crit de D'Alembert,

si $|z| < \sqrt{3}$, série $\sum \lambda_m(z)$ \textcircled{CV} .

si $|z| > \sqrt{3}$, série $\sum \lambda_m(z)$ \textcircled{DV} .

dc le Rayon de \textcircled{CV}_a est $\sqrt{3}$

→ Comportement de la série pr $|z| = \sqrt{3}$:

si $|z| = \sqrt{3}$:

$$\left| \frac{n^2 + 1}{3^n} z^{2n} \right| = n^2 + 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

dc la série $\sum \lambda_m(z)$ \textcircled{DV} (grossièrt)

$\forall z, |z| = \sqrt{3}$. Thimb!, le domaine de \textcircled{CV}_a

est $\mathcal{D}(0, \sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < \sqrt{3}\}$.

$$6. \sum_{n \geq 0} n! z^{n^2} : \frac{s(n+n)}{n+ns}$$

Rayon de convergence :

$$\alpha_m(z) = m! z^{m^2} - z \neq 0.$$

$$\left| \frac{\alpha_{m+1}(z)}{\alpha_m(z)} \right| = \left| \frac{(m+1)! z^{(m+1)^2}}{m! z^{m^2}} \right| =$$

$$= (m+1) \frac{|z|^{(m+1)^2}}{|z|^{m^2}} = (m+1) \frac{|z|^{m^2}}{|z|^{m^2}} |z|^{2m+1} = (m+1) |z|^{2m+1}$$

$$\text{si } |z| < 1, |z|^{2m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$(m+1) |z|^{2m+1} = e^{\ln(m+1)} e^{(2m+1) \ln |z|} \\ = e^{(2m+1) [\ln |z| + \frac{\ln(m+1)}{2m+1}]}$$

$$\text{or } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(m+1)}{2m+1} = 0 \quad P$$

croissance comparée
46

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow \infty} (2m+1) \left[\ln |z| + \frac{\ln(m+1)}{2m+1} \right] = -\infty$$

$$\text{ainsi } \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) |z|^{2m+1} = 0 \quad \text{on } |z| < 1$$

de plus $|z| < 1, z \neq 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{m+1}(z)}{\alpha_m(z)} \right| = 0 < 1.$$

Donc si $|z| \geq 1$:

$$\left| \frac{\alpha_{m+1}(z)}{\alpha_m(z)} \right| = (m+1) |z|^{2m+1} \geq (m+1) \rightarrow \infty$$

$$\text{ainsi } \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{m+1}(z)}{\alpha_m(z)} \right| = \infty$$

d'après le critère d'Alembert, on ait
que si $|z| \geq 1, \sum \alpha_m(z)$ (C)

Si $|z| \geq 1, \sum \alpha_m(z)$ (D)

$\alpha R=1$ & $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

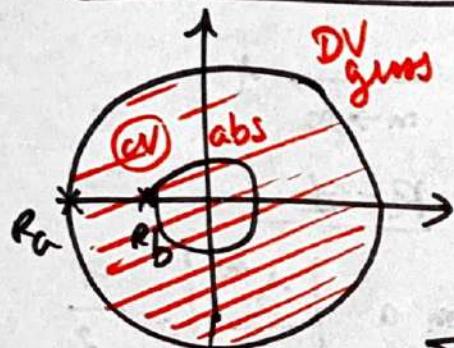
$$7) \sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$$

Rayon de (cv)

($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sim x$)

$$\text{Si } a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^m}.$$

$$\text{d'où } |a_m z^m| \sim \left(\frac{|z|^1}{2}\right)^m$$



DV gars $a_n, b_n \neq 0$ tq $|a_m| \sim |b_m|$

$\sum a_n z^n$ & $\sum b_n z^n$
ont m Rayon de (cv)

$$\sum a_n \cdot z^n \text{ cv. Abs. si: } \sum b_n \cdot z^n$$

$$\text{or } \sum_n \left(\frac{|z|}{2}\right)^n \text{ (cv) si: } |z| < 2$$

$$\text{de } \sum a_n \cdot z^n \text{ (cv) abs. si: } |z| < 2.$$

De Rayon de (cv) est $R=2$

si on mq $\sum a_m \cdot z^m$ (cv abs)

si $|z| < R_0 \Rightarrow$ le rayon de

(cv) e est $\geq R_0$

$$\text{si: } |z|=2 \Rightarrow |a_m \cdot z^m| \sim \left(\frac{|z|}{2}\right)^m = 1$$

& de $\sum a_n z^n$ (DV) gross.

Le domaine de (cv) est $D(0,2) = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$.

$$2) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n z^n$$

de domaine de CVa est dc $D(0, 1)$

$$\text{soit } a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\left| a_n \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

d'après CdCauchy, on a $R=1$

domaine de CVa ?

$$\text{si } |z|=1, \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n z^n \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= e^{n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)} = e^{-n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} = e^{-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$\& \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \quad \triangleleft \quad \left[\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \right]$$

$$\text{de } \lim \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n z^n \right| = \frac{1}{e} \quad \forall |z|=1$$

dc la série $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^n z^n$ DV gross $|z| = 2$ $\text{DF} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$

@ SE q A) en tt pt appartenant au bord du disq de CVa .

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2} \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

RDC est $R=1$.

$$\text{si } |z|=1, \text{ on a } \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

$$\& \text{dc } \sum \frac{z^n}{n^2} \text{ @ abs}$$

de A) $\forall |z|=1$.

de domaine de CVa est dc

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} n^n$$

$$\text{Mq } \frac{1}{m \cdot \ln(m)} \leq \frac{1}{\ln(m!)} \leq \frac{1}{\ln(m)}, m \geq 2.$$

$$\ln(m!) = \ln\left(\prod_{k=1}^m k\right) = \sum_{k=1}^m \ln(k)$$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\forall k \geq 1, \ln(k) \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \ln(k) \geq \ln(m)$$

$$\forall k \leq m, \ln(k) \leq \ln(m) \Rightarrow \sum_{k=1}^m \ln(k) \leq m \cdot \ln(m)$$

$$\ln(m) \leq \ln(m!) \leq m \cdot \ln(m)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m \cdot \ln(m)} \leq \frac{1}{\ln(m!)} \leq \frac{1}{\ln(m)}$$

$$a_m = \frac{1}{\ln(m!)} \quad \begin{array}{l} \text{d'après l'inclusion, on a un} \\ \text{encadrement} \end{array}$$

$$\frac{1}{m \cdot \ln(m)} \leq a_m \leq \frac{1}{\ln(m)}$$

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{m}} \ln^{\frac{1}{m}}} \leq a_m^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{1}{\ln(m)}\right)^{1/m}$$

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{m}} \ln^{\frac{1}{m}}} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ln(m)} < 1$$

$$m^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \ln(m)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{car} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(m)}{m} = 0$$

$$\ln(m)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \ln(\ln(m))} = e^{\frac{\ln m}{m} \times \frac{\ln(\ln(m))}{\ln(m)}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\text{Par TDG } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{\frac{1}{m}} = 1$$

Le Cdc implique donc le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{\ln(m!)} z^m$ est $R = 1$.

Domaine de convergence :

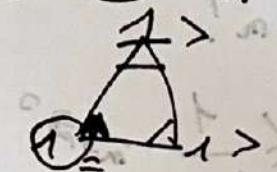
$$\sum_m \frac{1}{\ln(m!)} z^m$$

SdB \checkmark

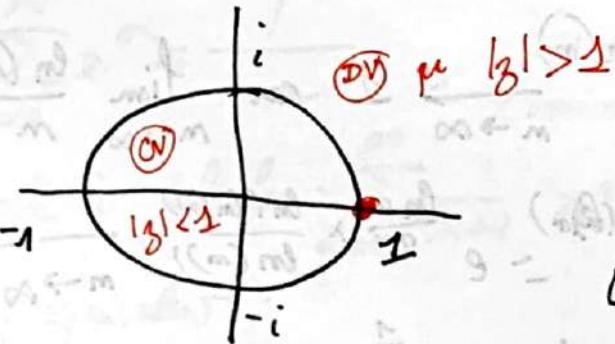
$$\circ \text{ si } z = 1, \text{ on a } \frac{1}{\ln(m!)} z^m = \frac{1}{\ln(m!)} > \frac{1}{m \ln(m)}$$

$$\sum_m \frac{1}{m \cdot \ln(m)} \quad \text{Sd Bertrand} \quad \text{DVB}$$

(SdB \checkmark si $\alpha \geq 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta \geq 1$).



$$\Rightarrow \sum_m \frac{1}{\ln(m!)} z^m \quad \text{DVB} \quad \text{en } z = 1$$



si $|z|=1$ & $z \neq 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$.

$$\text{étudions } \sum \frac{1}{\ln(m!)} e^{im\theta} \text{ si } \theta \in]0, 2\pi[.$$

Th d'Abel:

$$\text{Si } u_m = \frac{1}{\ln(m!)} \text{ , } m \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{on a } \ln((n+1)!) &= \ln((n+1)m!) \\ &= \ln(n+1) + \ln(m!) \end{aligned}$$

Parenthèse

$$\left| \frac{1}{\ln(m!)} z^m \right| = \frac{1}{\ln m!}$$

$$\text{et } \frac{1}{m \ln(m)} \leq \frac{1}{\ln m!} \leq \frac{1}{\ln m}$$

$$m! \approx \sqrt{2\pi m} \cdot e^{-m}$$

on ne peut pas conclure sur la (CV) de la série sauf que la série DV abs $\mu |z|^m = 1$

$$\text{D'où } \ln((m+1)!) \geq \ln(m!)$$

$$u_{m+1} \leq u_m$$

alors $(u_m)_m$ est décroissante et $u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$
car $0 \leq \dots \leq -$ & $u_m \geq 0$.

Mq u_m bornée par M.

$$\left| \sum_{m=0}^N e^{im\theta} \right| = \left| \sum_{m=0}^N (e^{i\theta})^m \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|$$

$$\leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} \quad \leftarrow \text{cte M}$$

$$\text{inégalité de } n, \exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{m=0}^N e^{im\theta} \right| \leq M$$

d'après Th d'Abel

$$\sum_m u_m e^{im\theta} \text{ (CV) } \forall \theta \in]0, 2\pi[.$$

La $\sum \left(\frac{1}{m!} \right) z^m$ (C) n'implément

ssi $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

Bonne idée (T) Ainsi qd $a_m \searrow \& \rightarrow 0$.

Ex 3

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{m+1} x^n$$

$$a_n = \frac{n}{m+1}, n \geq 0.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \text{ dc d'après le crit de}$$

d'Alembert, le rayon de (C) vaut 1.

$$2) \text{ pr } x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{m+1} x^n$$

mq $f(0) = 0$ & pr $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

mais $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f(0) = a_0 = 0$.

si $n \neq 0$, $x \in]-1,1[$, on a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{m+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+1-1}{m+1} x^n$$

$$\text{d'où } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) x^n$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\text{(C)}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} x^n}_{\text{(C)}}$$

or $\sum x^n$ est (C) car $|x| < 1$

$$\text{et } \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) x^n = x^n - \frac{1}{m+1} x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1} x^n = x^n - \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) x^n$$

TG & or

TG série (C)

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1} x^n: \text{TG s(C)}$$

(Terme Général)
série (C)

Ainsi on peut écrire:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} x^n$$

$$\text{or } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1 \quad (\text{converge si } |x| < 1).$$

$$Il \text{ reste à calculer } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

et q équivaut :

$$-\ln(1-x) = + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ |x| < 1 \end{matrix}$$

et q donne

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

ou on a multiplié les 2 équations par $\frac{1}{x}$.

Soit $g(x) = -\ln(1-x)$. g est dérivable

$$\text{sur }]-1, 1[\text{ et } g'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

D'après TH 5.3.1 du cours, on a $\forall x \in]-1, 1[$:

$$\int_0^x g'(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x t^m dt$$

$$g(x) - g(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\text{or } g(0) = -\ln(1) = 0.$$

Donc $\forall x \in]-1, 1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} = (x)f$$

Ex 3 $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2}$ CV

étude CV en $x=1$ & $x=-1$?

Pour $x=1$ ou $x=-1$, on a :

$$\left| \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2} \right| = \frac{1}{(m+1)(2m+1)} \sim \frac{1}{2m^2}$$

$$\text{ou } \sum \frac{1}{m^2} \text{ (CV), dc } \sum \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2}$$

CV abs dc CV en $x=1$ & en $x=-1$.

2) Mg V $x \in]-1, 1[$, $f''(x) = \frac{x}{1-x^2}$

$$\text{vu } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2}$$

|| C'est le Rayon de CV est $R=1$, la f f est de classe $C^\infty(I-1, 1[)$ et $\forall x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(2m+1)} (2m+2) x^{2m+1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(m+1)(2m+1)} \frac{2(m+1)}{(2m+2)(2m+1)} x^{2m}$$

$$= 2 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \frac{2}{1-x^2}$$

1) Rayon de CV = R de JE

$$\alpha_m(x) := \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2} \neq 0 \text{ si } x \neq 0.$$

D'alembert : $\frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} = \frac{x^{2m+3}}{(m+2)(2m+3)} \times \frac{(m+1)(2m+1)}{x^{2m+2}}$

$$\frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2m^2}{2m^2} x^2 = x^2$$

on a $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{m+1}(x)}{\alpha_m(x)} = x^2$

2) où si $|x| < 1$, la série $\sum \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2}$

CV et si $|x| > 1$, la série DV,

d'après le crit de d'Alembert.

cel Le rayon de CV de la série entière

$$\sum \frac{1}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+2} \text{ est } \underline{R=1}.$$

3) et $f(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$ DM On appliq R $\overset{\alpha}{\rightarrow}$ $f'(x)$ & $g'(x)$

[M1] on introduit

$$g(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2), x \in]-1, 1[$$

Mq g est 2 fois dérivable & que
 $\forall x \in]-1, 1[$.

R $\overset{\alpha}{\rightarrow}$: si f, g : I $\rightarrow \mathbb{R}$ intervalle
 dérivable sur I.

si $\forall x \in I, f'(x) = g'(x)$ alors $\exists c \in \mathbb{R} |$

$$\forall x \in I, f(x) = g(x) + c.$$

(cor) Si f & g st 2 fois dérivables sur I
 & tq $\forall x \in I, f''(x) = g''(x)$
 Alors $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I,$
 $f(x) = g(x) = c_1 x + c_2$

$$f'(x) = g'(x) + c_1 = h'(x)$$

$$\text{où } h(x) := g(x) + c_1 x, x \in I.$$

2) après le R $\overset{\alpha}{\rightarrow}$, $\exists c_2 \in \mathbb{R} |$
 $\forall x \in I, f(x) = h(x) + c_2$

$$= g(x) + c_1 x + c_2$$

Général & possible pour un polynôme p,
 de degré ≤ 1 tq $\forall x \in I, f(x) = g(x) + p(x)$.

$$\text{pu } f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n =$$

M1 $g(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$, $x \in]-1, 1[$.

$\forall x \in]-1, 1[, 1-x^2$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

& g est 2 fois dérivable par composition de f & \ln fais dériv. D+, $\forall x \in]-1, 1[$, on a $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x \frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{2x}{1-x^2}$

$$g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x}{1-x^2}$$

$$g''(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Finalement, $\forall x \in]-1, 1[, f''(x) = g''(x)$.

on a $\exists 2$ cte $c_1, c_2 > 0$ | $\forall x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = g(x) + c_1 x + c_2$$

Po $x=0$: $f(0) = g(0) + c_2$

en $f(0)=0$ & $g(0)=0$. $\ln(1) + \ln(1) = 0$

de $c_2 = 0$

55

On sait que $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = g'(x) + c_1$ en $x=0$, on a $f'(0) = g'(0) + c_1$ ou $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, d'où $g'(0) = \ln(1) = 0$ & $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2)}{(m+1)(2m+1)} x^{2m+1}$ on a $f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

de $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = g(x)$.

M2 On intègre l'équation différentielle.

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

d'où $f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt$

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

or $f'(0) = 0$ d'où

$$f'(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$\text{d'où } f'(x) = \left[\ln(1+x) - \ln(1-x) \right]_0^x \Rightarrow \text{soit } \forall x \in]-1, 1[$$

$$f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\text{on a } f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x (\ln(1+t) - \ln(1-t)) dt$$

$$v(t) = \ln(1+t) - \ln(1-t)$$

$$v'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

$$u'(t) = 1, \quad u(t) = t$$

$$f(x) = \left[t(\ln(1+t) - \ln(1-t)) \right]_0^x - \int_0^x \left(\frac{t}{1+t} + \frac{t}{1-t} \right) dt$$

$$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(\frac{(t+1)-1}{1+t} - \frac{(1-t)-1}{1-t} \right) dt$$

$$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

$$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left[-\ln(1+t) - \ln(1-t) \right]_0^x$$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$$

$$4) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = 2 \ln(2)$$

$$\text{on sait que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \quad (CV)$$

en $x=1$ & vaut de $f(1)$.

qd pt-on affirmer $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) !?$

RP



soit $\sum a_n z^n$ SE
de rayon de CV_a
égal à R

si $\sum a_n \cdot 3^n$ CV alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

$$\text{Ry: } \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \right| =$$

$$= \sup_{|x| \leq 1} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} |x|^{2n+2} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$$

dc fa $\sum_n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ (CV) normalement
sur $[-1,1]$.

dc Uniformément

& \hat{c} $x \mapsto \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ est cont n $[-1,1]$,

on obtient que f est cont a $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} \text{et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} &= f(1) = \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow 1^-} n \ln\left(\frac{1+n}{1-n}\right) + \ln(1-n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a: } & n \ln\left(\frac{1+n}{1-n}\right) + \ln(1-n^2) = \\ &= \underbrace{n \ln(1+n)}_{n \rightarrow 1} - n \ln(1-n) + \underbrace{\ln(1+n)}_{n \rightarrow 1} + \ln(1-n) \end{aligned}$$

$$\text{D, } -n \ln(1-n) + \ln(1-n) = (1-n) \ln(1-n)$$

$$\text{or } \lim_{u \rightarrow 0} u \ln(u) = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} (1-n) \ln(1-n) = 0$$

$$\text{Ainsi } f(1) = 2 \ln(2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$