acc $\qquad$ Force

(★) $\boxed{\ddot{y} + \sin y = 0}$
1) (CL) applicable ?
2) Déterminer F, si y solu° (★) alors $\underbrace{F(y)}_{E_p} + \underbrace{\frac{\dot{y}^2}{2}}_{E_c} = ct$

1) Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ où $F(Y) = \begin{pmatrix} z \\ -\sin y \end{pmatrix}$

(★) $\Leftrightarrow \dot{Y} = F(Y)$ (★★) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\sin y \end{cases}$ (SEDO$_I$) de dim 2.
(★★) autonome
(n'est pas linéaire ⚠ sinus)

Or $F \in C^1(\mathbb{R})$, $DF(Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos y & 0 \end{pmatrix}$ Tous les coeff st bornés.

DF est borné sur $\mathbb{R}^2$ donc F est global lipschitzienne.

ie $\forall\ Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\exists !\ Y \in C^1(\mathbb{R})$ solu° du pb de Cauchy

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} + \sin(y) = 0 \\ y(0) = y_0 \text{ et } \dot{y}(0) = z_0 \end{cases}$

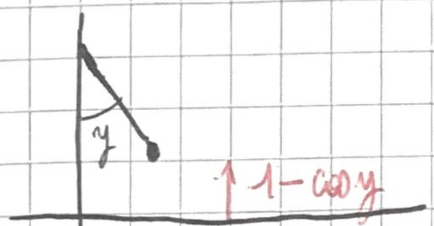
De +, si $\tilde{Y}$ autre solu° déf sur $I \ni 0$, $\begin{cases} \dot{\tilde{Y}} = F(\tilde{Y}) \text{ sur } I \\ \tilde{Y}(0) = Y_0 \end{cases}$ alors $\tilde{Y} = Y|_I$

2) $\ddot{y} + \sin(y) = 0$, soit y solu° de (★) sur $\mathbb{R}$, on multiplie (★★) par $\dot{y}$, on a

$$\ddot{y}\dot{y} + \underbrace{\sin(y)}_{f(y) = F'(y)}\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}[F(y)] = 0.$$

On pt prendre $F(y) = 1 - \cos y$.

D'où $\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}^2}{2} + F(y)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} + F(y) = ct$.



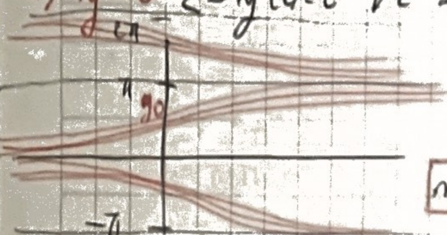
⚠ soit $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g > 0$; (*) $\begin{cases} \dot y = g(y)\sin(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

1) CL ? 2) Sol^{ns} stationnaires ?

3) Monotonie, tps d'∃, limites en f y_0 ?

1) (Th) C-L local s'applique : $\exists!\, y \in [-T_{min}, T_{max}]$

2) $\dot y = 0 \iff y(t) = c \ \forall t$ & $f(c) = 0 \iff y(t) = c$ & $\sin c = 0$
$c = \pi\mathbb{Z}$



En prenant $n \in \mathbb{Z}$ tq $\boxed{n\pi < y_0 < (n+1)\pi}$, comme y cont

∃ TVI, $n\pi < y(t) < (n+1)\pi \ \forall t \in I$,

Dc y est borné sur I, par pe d'explosion, on a $\underline{I = \mathbb{R}}$

Spps $0 < y_0 < \pi$, $\forall t$: $0 < y(t) < \pi$ dc $\sin(y(t)) > 0$, d'où ∃ (*)
$\dot y > 0 \ \forall t$. D+, $n\pi < y < (n+1)\pi$. Dc $\exists\ 0 \le \ell^- < y_0 < \ell^+ \le \pi$
où $\ell^\pm = \lim_{t \to \pm\infty} y(t)$. Dc $\dot y(t) = f(y(t)) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} f(\ell^\pm)$ par cont de f.

Dc $f(\ell^-) = f(\ell^+) = 0 \Rightarrow \ell^-, \ell^+ \in \pi\mathbb{Z} \Rightarrow \ell^- = 0$, $\ell^+ = \pi$.

(L) $y \xrightarrow{t \to \infty} \ell$, $\dot y \xrightarrow{t \to \infty} L \Rightarrow L = 0$ & si $y(t) = \ell$, $\dot y = f(y) \longrightarrow f(\ell) = 0$ cont

---

(Th) (CL) → local, → global

(Th) d'exploᶿ : si on ne pt pas appliquer (CL) global

sol^n bornée $\Rightarrow \exists!$ sol^n $\forall t$.

Spps $g(y) = 1$, on a tjrs $0 < y_0 < \pi \Rightarrow 0 < y(t) < \pi$.

$$\dot y = \sin y \iff \frac{\dot y}{\sin y} = 1 \iff \int_0^t \frac{\dot y(s)}{\sin(y(s))}\, ds = t \quad \begin{pmatrix} x = y(s) \\ dx = \dot y(s)\, ds \end{pmatrix}$$

$$\iff \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{\sin x} = t,$$ posons $\tau = \tan\frac{x}{2}$, $d\tau = \frac{1}{2}(1 + \tau^2)\,dx$
$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1 + \tau^2}\, d\tau$$

$$\iff \int_{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{d\tau}{\tau} = t \Rightarrow \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)}\right) = t$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^t\right)}$$

16 (SD) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1} \end{cases}$ (SD) deg 1, dim 2

$\dot{Y} = AY + B$

Systm à coeff $\underline{cte}$ & second mb $\quad$ & $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B(t) = \frac{1}{e^t - 1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

def & $\underline{cont}$ sr $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Considérons pb distincts $(*_-)$ $\dot{Y} = AY + B$ sr I^- $(*)_+$ $\dot{Y} = AY + B$ sr I^+

Les soluts maximales de $(*_-)$ (resp $(*_+)$) st def sr I_- (resp I^+)

et forment un espace affine de dim 2. On a

$\boxed{E_- = \{t \mapsto \overline{Y_-}(A + e^{tA} Y_{0-},\ Y_0 \in \mathbb{R}^2\}}$ resp E_+

où $\overline{Y_-}$ (resp $\overline{Y_+}$) est solut° particulière de $(*_-)$ (resp $(*_+)$)

On diagonalise le système, $\det(\lambda Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -6 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)$

A admet 2 vp distinctes 0 et -1, elle est de diagonalisable

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \iff -2y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow \ker A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A + Id) \iff -3y_1 - 2y_2 = 0 \Rightarrow \ker(A + Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculons $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\operatorname{Com} P)^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ où $\operatorname{com}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Faisons le $\underline{CDV}$ d'inconnu $Y = PZ$, $Z = P^{-1}Y$

Y solut° de $(*)$ sr I

$\iff \dot{Z} = P^{-1}\dot{Y} = P^{-1}AY + P^{-1}B$

$= P^{-1}APZ + P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Z + \frac{1}{e^t - 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dc Y solut° de $(*)$ sr I $\iff \begin{cases} \dot{z}_1 = 0 & \text{sr } I \quad (\alpha) \\ \dot{z}_2 + z_2 = \frac{1}{e^t - 1} & \text{sr } I \quad (\beta) \end{cases}$

Les solut°s du pb homog st

$\boxed{z_1(t) = a,\ z_2(t) = be^{-t}}$ pr $a, b \in \mathbb{R}$

On cherche une solut° particulière de (β) sr $I = I^{\pm}$

ss la forme $z_2(t) = b(t)e^{-t}$.

$(\beta) \iff \dot{b}(t)e^{-t} - b(t)e^{-t} + b(t)e^{-t} = \frac{1}{e^t - 1}$

$\dot{b}(t) = \frac{e^t}{e^t - 1}$ sr I. On pt prendre $b(t) = \ln|e^t - 1|$

En résumé les soluts de $(*_-)$ sont $t \in I \mapsto P\begin{pmatrix} a \\ b + \ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$

$\boxed{= a_-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (b_- + \ln(1 - e^{-t}))\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$, $a, b \in \mathbb{R}$

17

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

(Ec) : $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$: -1 racine double

Une base de solut° est (y_1, y_2) où $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = te^{-t}$

On cherche une sol° part. sous la forme :

$y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}$ où $\dot{a}_1(t)e^{-t} + \dot{a}_2(t)te^{-t} = 0$

On a $\dot{y}(t) = a_1(t)(e^{-t})' + a_2(t)(te^{-t})'$

$\ddot{y}(t) = a_1'(t)(e^{-t}) + a_2'(t)(te^{-t})' + a_1(t)(e^{-t})'' + a_2(t)(te^{-t})''$

On a $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \sum a_i(t)[\underbrace{y_i'' + 2y_i' + y_i}_{=0}]$

$+ a_1'(t)(-e^{-t}) + a_2'(t)(1-t)e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

D'où $\begin{cases} -a_1' + (1-t)a_2' = e^t/\sqrt{t} \\ a_1' + ta_2' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2' = e^t/\sqrt{t} \\ a_1' = -\sqrt{t}\,e^t \end{cases}$

On pose $a_1(t) = -\int_0^t \sqrt{s}\,e^s\,ds$, $a_2(t) = \int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{s}}\,ds$

$y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}$ est $C^1([0,\infty[)$

Vérifions $y \in C^1([0,\infty[)$, on a $y \in C([0,\infty[)$ et $y(0) = 0$.

Pr $t > 0$, $\dot{y}(t) = -\sqrt{t} + e^{-t}\int_0^t \sqrt{s}\,e^s\,ds + \sqrt{t} + (1-t)e^{-t}\int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{s}}\,ds$

$\dot{y}(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2\sqrt{t}$ & $y \in C^1([0,\infty[)$ et $\dot{y}(0) = 0$

mais $\frac{\dot{y}(t) - \dot{y}(0)}{t - 0} \sim \frac{2}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \infty$ y pas 2 fois dériv en 0

14 11

4 $\begin{cases} x' = 2x + z + 1 \\ y' = 2y - z \\ z' = x - y - z \end{cases}$ $X' = AX + B(t)$

$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Diagonaliser ou trigonaliser A.

$A = PDP^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Se Ramener (SD) + simple & le Résoudre

$X' = AX + B(t) \iff X' = PDP^{-1}X + B(t)$

$\underbrace{P^{-1}X'}_{Y'} = DP^{-1}X + P^{-1}B(t) \iff Y' = DY + B_1(t)$ $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\iff \begin{cases} y_1'(t) = 1/6 \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + 1/2 \\ y_3'(t) = 3y_3(t) + 1/3 \end{cases}$

$y_2 : t \mapsto \mu e^{2t} + y_p = -\frac{1}{4}$ (MVC) ; $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} t/6 + \lambda \\ \mu e^{2t} - 1/4 \\ \alpha e^{3t} - 1/9 \end{pmatrix}$

$Y = P^{-1}X \iff X = PY$

$X : t \mapsto \begin{pmatrix} t/6 + \lambda + \mu e^{2t} - \frac{1}{4} + \alpha e^{3t} - 1/9 \\ -t/6 - \lambda + \mu e^{2t} - \frac{1}{4} - \alpha e^{3t} + 1/9 \\ -2\left(\frac{t}{6} + \lambda\right) + \alpha e^{3t} - 1/9 \end{pmatrix}$

14

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^t \\ \dot{y} = x + y - e^t \end{cases}$$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Ens solu° eq. h $e^{-tA} Y_0$, on calcule $e^{-tA} Y_0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

On est $A^n = \frac{1}{2} 2^n A$

$$e^{-tA} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tA)^n}{n!} = I + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2t)^n}{n!}\right] A$$

$$= I + \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) A = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}+1}{2} & \frac{e^{-2t}-1}{2} \\ \frac{e^{-2t}-1}{2} & \frac{e^{-2t}+1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{E}_h = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}+1}{2} & \frac{e^{-2t}-1}{2} \\ \frac{e^{-2t}-1}{2} & \frac{e^{-2t}+1}{2} \end{pmatrix} Y_0$.

$\quad\ \ \shortparallel$

$\quad\ \ Y_h$

Puis $\overline{Y}$ sol° particulière évidente $\overline{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

$$\mathcal{E} = \{\overline{Y} + Y_h\}.$$