M-54 Pr: Bernhard Beckermann

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

Introductions et rappels

1. motivation pour la résolution de systèmes linéaires ; matrices particulières ; normes vectorielles Hölderiennes ($p = 1, 2, \infty$), normes matricielles associées,rayon spectral, norme de Frobenius ; conditionnement d'une matrice ; série de Neumann,sensibilité de la solution d'un système linéaire par rapport aux perturbations des données.

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

1. méthodes d'élimination de Gauss, pivotage, factorisation LU, PA=LU, complexité ; cas particulier des matrices symétriques définies positives, factorisation de Cholesky ; problème des moindres carrés : équation normale et utilité d'une factorisation QR ; factorisation QR : approches de Householder et de Givens.

Calculs numériques de valeurs propres

1. théorème de Bauer-Fike ;méthode de la puissance, convergence ; itération invese ; décomposition en valeurs singulières(SVD) (motivations et applications), existence d'une SVD, calcul numérique, théorème deEckart-Young (meilleure approximation d'une matrice de moindre rang).

M54 - Analyse Numériq Matricielle

- Précision finie ordi $|\alpha - \text{float}(\alpha)| \le \varepsilon|\alpha|$
  où $\varepsilon \approx 10^{-8}$ (resp. pré. double)
- ⚠ exemple de cancellat°

1. Mat, vect^{Rs}

- Transposée : ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
  tq $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$
- Adjointe : $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tq $(A^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$
- Produit Scalaire : $\leftrightarrow$ 2 vect^{Rs} $x, y \in \mathbb{C}^m$:
  $(y,x) = x^* y = \sum_{j=1}^{m} \overline{x_j}\, y_j$
- Inég. de Cauchy Schwarz : $|(x,y)| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2$
- Compliment orthogonal : $K^\perp = \{y \in \mathbb{K}^n : \forall x \in K,$
  $(x,y) = 0\}$.

2. Mat particulières

- symétriq (hermitienne) : $A^* = A$ (resp ${}^tA = A$)
- orthogonale (unitaire) : ${}^tAA = I$ (resp $A^*A = I$)
- normale si $AA^* = A^*A$
- semi-déf ⊕ si $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $(Ax, x) \geq 0$
- déf ⊕ si SDP ET $(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- diagonale : si $a_{j,k} = 0$ pour $j \neq k$.
- ◹ : si $a_{j,k} = 0$ pr $j > k$.
- similaire : à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'$\exists$ mat inv. S tq
  $B = S^{-1}AS$. ("diagonalisable" si siml^{R} à mat diagonale)

3. Val^{Rs} propres

- (λ, x) : él^t propre de A.
- $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$: rayon spectral

TH.1 Mat diagonalisables

(a) $\exists$ mat non diagonalisable.

(b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable tq $B = S^{-1}AS$ diagonale
ssi A admet 1 base de vect^{Rs} donnée p colonnes de S,
tq vp $\langle A \rangle$ n diagonale de B.

(c) si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt n vp distincts $\Rightarrow$ A est diagonalisab

5. Norme.

@ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

→ une mat invers. d^t ê carrée

→ $(AB)^* = B^*A^*$ (resp. transposée)

→ $\det(◹) = \Pi$(élts diagonale)

→ $\det(A) = \det({}^tA)$

→ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, le systm̂
$Ax = b$ admt soluθ y si $b \in \mathrm{Im}(A)$.
Ds ce cas, $\mathcal{S} = \{ y + \ker(A) \}$.

→ Pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: & K sev $K \subset \mathbb{K}^n$:
$rg(A) + \dim(\ker(A)) = n$. $rg(A) = rg(A^*)$
$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A^\perp) = \mathrm{Im}(A^*)$

Th 2 Factorisaθ de Schur

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire & $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sit q $T = U^* A U$.
Si A normale ⇒ T diagonale.

Cor 2.2 Diagonalisaθ mat hermitienne

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire dsq $D = U^* A U$ est diagonale & composé ds vp de A.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L Tte mat normale et ◸ : forcmt diagonale.

→ Mat hermitienne admt base orn̂ée de $\vec{vp}$.

4. Décompositθ en valeurs singulières

L 2.3 $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les vp de A^*A st réelles et +.

NB mat unitaire est inversible. ($Q^*Q = I$ et $Q^{-1} = Q^*$).

L 2.4. soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
alors vp $\neq 0$ de AB & BA st m̂s. (cp multplcté).

Th 2.6. Valr singulière mat normale

Les vs mat normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ st les modules de ses vp.

Th 2.7 Décompoθ en vs, SVD

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ψ r vs + alors $\exists U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ & $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ttes 2 unitaires et $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ("diag")
tq $A = U \Sigma V^*$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$
ep $rg(A) = r \leq \min(m,n)$.

Th 3.6 FF pr normes [nms] usuels

pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: $\|A\|_S = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ (+ gde v.p singulière).

$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum |a_{j,k}|$

$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,m} \sum |a_{j,k}|$

Ptés normes & Rayon Spectral

Cor 3.7 Ptés norme spectrale

a) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \|A^*\|_2 = \|A\|_2$

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ h $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ u $\Rightarrow \|UAV\|_2 = \|A\|_2$.
$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Th 3.8 de Gelfand

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ alors on pt construire [nms] $\|\cdot\|_*$ tq $\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$.

cq $\forall$ [nm] $\|\cdot\|$ & $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Th 3.9 Série de Von Neumann

$\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum_{k=0}^{\infty} E^k$ CV ssi $\rho(E) < 1$.

Ds ce cas $I-E$ est inv & la limite de série est

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^k = \frac{1}{I-E}.$$

Si de +, $\|E\| < 1$ pr [nm] $\Rightarrow$ $\|(I-E)^{-1} - I\| \leq \dfrac{\|E\|}{1-\|E\|}$

Conditionnement

(Machine au lieu rsdr $Ax = b \to (A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$

L 3.11 Pire amplificat° erreurs relatives.

$$\|A\|.\|A^{-1}\| = \sup_{b,\Delta b}\left\{ \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} : \begin{array}{l} Ax = b, \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\}$$

D Conditionnem^t

Pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{cond}(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$

(ex $\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$, $p = 1, 2, \infty$).

L Ptés cond

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv alors

a) $\mathrm{cond}(A) \geq 1$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$: $\mathrm{cond}(\lambda A) = \mathrm{cond}(A)$

c) $\mathrm{cond}(A^{-1}) = \mathrm{cond}(A)$

d) $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_1}{\mu_n}$ (4)

e) $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ pr A unit^{re}

A est bien conditionné si $\mathrm{cond}(A) \approx 1$.

(resp $\mathrm{cond}(A) \gg 1$).

(Cor) Distance aux matrices non inversibles

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv :

$$\frac{1}{\operatorname{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A-B\|_2}{\|A\|_2} : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ non inv} \right\}$$

Estimat°s d'erreur pr systèmes perturbés

(Th) 3.15 soit $A, \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; A inv ; $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$
$b, \Delta b \in \mathbb{K}^n$, $b \neq 0$:

$$\begin{cases} Ax = b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Rq 3.16 ⚠ comme $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \dfrac{\operatorname{cond}(A)\,\|\Delta A\|}{\|A\|}$,
cd le système perturbé admet une solu° proche de $Ax=b$ tant que :

$$\operatorname{cond}(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \ll 1 .$$

4. Résolu° de SL $Ax=b$ par élimin de Gauss & décompositio° LU

(Résoudre système n inconnues, n équat°s)

Algo 4.1 EDG & pivotage naturel

Idée : $A = A^{(1)}$, $b = b^{(1)}$ transf pr $k = 1, \dots, n-1$ le syst $A^{(k)}x = b^{(k)}$ en un système $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$, en créant ds $A^{(k+1)}$ ds 0 en colonne k en dssous diagonale.

Pour $k = 1, \dots, n-1$
- Supps hypo pivot $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$
- Pour $i = k+1, \dots, n$
  - Calculer multiplicateur $l_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$
  - soustraire $l_{i,k}$ fois la k° équat° (ligne pivot) de i° équat°.

Forme de $A^{(k)}$ ds cas général

(L) 4.3 Une étape d'éliminat°

Ss hypo pivotage naturel, on a $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$, $b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}$ pr $k = 1, \dots, n-1$

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ & & & -l_{n,k} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & \cdots & & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \; a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

(D) 4.4

$$L := (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Décomposit° LU : ∃ & Unicité

D 4.5 Déf décomp. LU

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt décp LU si $A = LU$

4 $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\triangle$ à diagonale unité, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ∇.

Th 4.6 Unicité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv $\Rightarrow$ décomp LU est unique.

Th 4.7 ∃

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv, ASSE :

a) A admt décomp LU

b) pr $k = 1, \dots, n-1$; la ss-mat principale $[A]_k$ composée ds k lignes & col. de A est inv.

c) l'hypo PN : $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$ pr $k = 1, \dots, n-1$

Rq 4.8 (Utilité décomp LU)

- $Ax = b$ rvt résoudre $Ly = b$ & $Ux = b$.
- calcul efficace $\det(A)$ & A^{-1}.

Pivotage Partiel

si $a^{(k)}_{k,k} = 0$ alors effectuer une permutat°. (avt chq étape)

Stratégie dite pivotage partiel.

Algo 4.9. Éliminat° de Gauss + pivotage partiel.

Pour $k = 1, \dots, n-1$

Chercher l'indice π_k du + grd élt en module parmi les $a^{(k)}_{i,k-i}$, $i = k, \dots, n$

Pour $i = k+1, \dots, n$

Calculer multiplicat^R $l_{i,k} = \dfrac{a^{(k)}_{i,k}}{a^{(k)}_{k,k}}$

Soustraire $l_{i,k}$ la k^o équat° de la i^o équat°.

Notat° : $P^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: mat de transposit° q échange 2 élts d'indice k & π_k : laisse otrs composantes invariantes

Th 4.10 Factorisat° LU & pivotage partiel

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv $\Rightarrow$ A admt décomp LU à permutat° près, ie $PA = LU$ où $P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)}$ est une mat de permutat°

& L,U st ĉ avt à condit°s q l'n permute simultan^t ls lo mltplt°s + ls équat°s

Algo pr calculer $H = Q^T$, $R = EA^{(m)}$

... n, m, $H = I_m$

Pr $k = 1, \dots, m-1$:

calcul $y^{(k)}$ & $Q(y^{(k)})$

$A(k:m, k:n) \leftarrow Q(y^{(k)}) \cdot A(k:m, k:n)$

$H(k:m, 1:m) \leftarrow Q(y^{(k)}) \cdot H(k:m, 1:m)$

$$y^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{pmatrix}$$

$$H^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(y^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{1,1} & \cdots & a^{(k)}_{1,k} & \cdots & a^{(k)}_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & a^{(k)}_{k,k} & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\ 0 & 0 & a^{(k)}_{m,k} & \cdots & a^{(k)}_{m,n} \end{bmatrix}$$

Householder

$\exists$ mat orthg $H(y)$ tq $H(y)\,y$ est multiple e_1.

$Hy = \alpha e_1$

$A^{(1)} = A$, $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$

$E = \mathrm{diag}(\pm 1) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$R = EA^{(n)} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$Q^T = EH^{(m-1)} \dots H^{(1)}$

$\rightarrow A = QR$.

$H = EH^{(m-1)} \dots H^{(1)}$ (a)

$HA = R$, $A = QR$

$Q^T = H$

Mat householder

$$H_w = I_m - \frac{2}{w^T w} w w^T$$

sym, orthg — $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — $\in \mathcal{M}_m$

Élim p mat Householder $w = y - \alpha e_1$

$\alpha = -\|y\|_2$ si $y_1 > 0$, $\|y\|_2$ si $y_1 \leq 0$

$w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$

H vérifie $Hy = \alpha e_1$.

Compl algo Householder

$\frac{4}{3}n^3 + 2(m-n)n^2 + \frac{4}{3}n^3 + 4(m-n)mn + O(mn)$

Complexité calculer $H_w \cdot B = \underbrace{B - w \cdot \beta}_{2lp + O(lp)}$

où $\beta = \frac{2}{w^T w} w^T B$

Pb moindres carrés

$\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$

uniq solu$^\circ$:

$A^T A x = A^T b$

Décomp QR pleine

m,n: $A = QR$

Q : orthgl $\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\triangledown$ diag > 0

Décomp QR éco

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$

$\tilde{Q}$: orthg $\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\tilde{R}$ idem

Solu$^\circ$ pM^2

$\tilde{R} x = \tilde{Q}^T b$

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$

Algo décomp QR éco p (GS)

Pr $k = 1, \dots, n$:

$y = a_k$

Pr $j = 1, \dots, k-1$:

$\tilde{x}_{j,k} = (q_j, y)$; $y = y - \tilde{x}_{j,k} \cdot q_j$

$\tilde{x}_{k,k} = \|y\|_2 > 0$, $q_k = y / \tilde{x}_{k,k}$

Pire amplificats

$\|A\| \, \|A^{-1}\| = \sup_{b, \Delta b} \left\{ \frac{\|\Delta x\| / \|x\|}{\|\Delta b\| / \|b\|} \right\}$ — $Ax = b$, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

$\mathrm{cond}(A) \geq 1$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$

$\mathrm{cond}(A^{-1}) = ?$

$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n}$ — $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ pr A (u)

si A bien condit : $\mathrm{cond}(A) \approx 1$

Distce ax mat non inv

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2}, B \text{ non-inv} \right\}$$

Estimat$^\circ$ d'err pr syst^e perturb

$\|A^{-1} \Delta A\| < 1$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

$Ax = b$

solu$^\circ$ tant que $\mathrm{cond}(A) \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \ll 1$

$Ax = b$ sol$^\circ$ si $b = \mathrm{Im}(A)$

$\mathcal{Y} = \{ y + \ker A \}$

$\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker A) = n$. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$

$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A^\perp) = \mathrm{Im}(A^*)$

Facto Schur

$T = U^* A U$

$\triangledown$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ U unit^{re}

$D = U^* A U$ si A normale ou (h)

$VS = \sqrt{vp}$ de A^*A

M54

$\langle w, w \rangle = w^* w = \sum_{i=1}^{m} \overline{w_i} w_i$

A (d)^{le}, $B = S^{-1} A S$ diag ssi A admt bs vect^{rs} donn p colonnes de S & vp $\Leftrightarrow$ sr diag de B.

A (vp) dist$^{\text{ct}}$ $\Rightarrow$ A diag^{le}

Décomp SVD

$\underset{m,n}{A} = \underset{m,m}{U} \underset{m,n}{\Sigma} \underset{n}{V^*}$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ décroissant

Process

(μ_i^2, v_i) de A^*A

$u_i = \frac{1}{\mu_i} A v_i$

Th Golfant

$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$

Th Eckart Young

$B = U \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$

$B = \sum_{i=1}^{k} u_i \mu_i v_i^*$

$k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$

t comm^{te} k élts pr. de A^*A

Norme compt^t p mv si $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

ss-mlt ou nm si $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

$\|A\| \geq \rho(A)$

Nmd $\|A\| = \max \|Ax\|$, $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\| = 1$

$\|A\|_S = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ — $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\|A^*\|_2 = \|A\|_2$

$\|A\|_2 = \rho(A)$ si A (N)

$\|A\|_1 = \max_k \sum |a_{jk}|$ — $\|A\|_\infty = \max_j \sum |a_{jk}|$

$\|UAV\|_2 = \|A\|_2$

Th Série Von Neumann

$\sum_{k=0}^{\infty} E^k$ (cv) ssi $\rho(E) < 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} E^k = (I - E)^{-1}$

si $\|E\| < 1 \Rightarrow \|(I - E)^{-1} - I\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|E\|}$

Th Front A inv, $A = LU$ — $\mathrm{front}(A) = (j(1), \dots, j(m))$

$\mathrm{front}(A^T) = \mathrm{front}(U^T)$ — $\mathrm{front}(A) = \mathrm{front}(L)$

Idée algo (GS) Rendre a_k orthg à $q_1, \dots, q_{m-1}$ & normaliser pr obtenir q_k.

Cmplxté algo GS QR éco $\sum(4km) + 2mn^2 + O(mn)$ oe

Algo sol$^\circ$ $Ax = b$ p décomp LU

Pr $k = 1, \dots, m-1$:

spps $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$

Pr $i = k+1, \dots, m$:

$l_{i,k} = a^{(k)}_{i,k} / a^{(k)}_{k,k}$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l_{i,k} a^{(k)}_{k,j}$

$L = (L^{(1)})^{-1} \dots (L^{(m-1)})^{-1}$

Décomp $A = LU$

inv

$b^{(k+1)}_i = b^{(k)}_i - l_{i,k} b^{(k)}_k$

Algo élim Gauss p piv partiel

Pr $k = 1, \dots, m-1$:

chercher indice π_k + grd élt en module parmi $a^{(k)}_{i,k-i}$

Pr $i = k+1, \dots, m$:

$l_{i,k} = a^{(k)}_{i,k} / a^{(k)}_{k,k}$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l_{i,k} a^{(k)}_{k,j}$

$P^{(k)}$: mat permuta$^\circ$ $k \leftrightarrow \pi_k$

A inv $\Rightarrow PA = LU$ où $P = P^{(m-1)} \dots P^{(1)}$

A inv $\Rightarrow$ A admt dcp LU (i)

(ii) pr $k = 1, \dots, m-1$ $[A]_k$ inv

(iii) $a^{(k)}_{k,k} \neq 0$

$Ax = b$ — $Ly = b$, $Ux = y$

Algo descente / remontée :

$O(m^2)$ espace mémoire

Descte : $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ oe

Rmtée : $n^2 + O(n)$ oe

Th Dcp de Crout

$A = LDL^*$

inv, (h) — diag. réelle

Dcp de Cholesky

$A = CC^*$

(h), déf (+) — $\triangle$ diag > 0

Stockage en place & vectorisation

5.1 Rq $a_{i,j}^{(k+1)}$ calculé, + bs1 $a_{i,j}^{(k)}$. On stock $a_{i,j}^{(k+1)}$ à sa place.

Tbleau $M \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{K})$: $\boxed{M = [A, b]}$

On stocke $l_{i,k}$ à position (i,k) de M.

($\simeq$ la place 0 ds $A^{(k+1)}$).

5.2 Rq Vectorisation

$\forall\, i,j > k.$

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - l_{i,k}\, a_{k,j}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{i,k}\, b_k^{(k)}$$

deviennent ff vectorisées :

& pr $i \in [k+1, n]$.

$M[k+1:n, k] = M[k+1:n]/M[k,k]$

$M[i, k+1:n+1] = M[i, k+1:n+1] - M[i,k] * M[k, k+1:n+1]$

Triangulation de Gauss

Algo 5.3 TDG, descente, pivotage partiel

$M = [A, b]$, n = ordre de A

Pr $k = 1, \dots, n-1$

Chercher $\pi_k \in [k:n]$ tq $|M[\pi_k, k]| = \max(M[k:n,k])$

Permuter lignes k & π_k de M.

$M[k+1:n, k] = M[k+1:n, k] / M[k,k]$

Pr $i = k+1, \dots, n$

$M[i, k+1:n+1] = M[i, k+1:n+1] - M[i,k] * M[k, k+1:n+1]$

On pt suppr boucle de i si on calcule directement :

$M[k+1:n, k+1:n+1] = M[k+1, k+1:n+1] -$
$- M[k+1:n, k] * M[k, k+1:n+1]$

→ de M & tbleau π en sortie, on a facto $PA = LU$ & $Lb^{(n)} = Pb$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ m_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n,1} & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{n,n} \end{bmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{bmatrix} m_{1,n+1} \\ \vdots \\ m_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Remontée & Complexité

Algo 5.4 Remontée pr solution $Ax = b$

initialisation M sortie A.5.3, n = nbr lignes M

Pr $i = n, n-1, \dots, 1$

$x[i] = \big(M[i, n+1] - M[i, i+1:n] * x[i+1:n]\big)/M[i,i]$

np.dot(.,.)

Th 5.5 Complexité algo de Gauss

A.5.3/5.4 nécessitent $\mathcal{O}(n^2)$ espaces mémoire.

TDG 5.3 nécessite $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ opérations élémentaires

Rtée 5.4 nécessite $n^2 + \mathcal{O}(n)$ op. e.

Preuve !!!

L'algo de Gauss en précision finie

(Th) 6.6 soit $\hat{L}, \hat{U}, \hat{P}$ calculés sur ordi de précision machine ε

alors $\| \hat{P}A - \hat{L}\hat{U} \|_\infty \leq 2 \varepsilon m^2 \gamma(A)$.

$\gamma(A) = \max_{i,j,k} | A^{(k)}_{i,j} |$: facteur de grossissement.

a) sans pivotage, $\gamma(A)$ arbitrairement + grand $\|A\|_\infty$

b) pivotage partiel, $\gamma(A) \leq 2^{m-1} \|A\|_\infty$

c) si A (h) déf ⊕ $\Longrightarrow \gamma(A) \leq \|A\|_\infty$.

Exploiter la symétrie

(Th) 6.1 Décompositio de Crout

si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inv & (h) admet déc. $A = LU$

alors elle admet uniq. décomp $A = L D L^*$
diagonale réelle.

(Th) 6.3 Décompositio de Cholesky

si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ (h) déf ⊕ ssi elle admet uniq

décomp $A = CC^*$. (avec C : Δ, élts diag > 0)

(Rq) C3.

$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} l_{i,k} \, d_{k,k} \, \overline{l_{j,k}}$ $\qquad l_{i,i} = l_{j,j} = 1$

en parcourant (i,j), on peut résoudre sle inconnue $d_{i,i}$ si $i = j$
si $i > j$ (déjà calculées).

→ besoin $\boxed{\frac{m^3}{3} + \Theta(m^2)}$ op. él. → $\frac{1}{2}$ TD6 !

Exploiter des 0 dans A

(Th) 6.4. du front

soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inv admettant $A = LU$, notons

$\text{front}(A) = (j(1), j(2), \dots, j(m))$

avec $j(i)$ l'indice colonne du 1° élt non nul de la ligne i de A.

Alors $\text{front}(L) = \text{front}(A)$, $\text{front}(U^T) = \text{front}(A^T)$

(si mat tridiagonale : $\text{front}(A) = (1, 1, 2, 3, \dots, m-1) = \text{front}(A^T)$)

7. Le pb des moindres carrés & la décompositio QR

Positio du pb des moindres carrés

(N) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $rg(A) = n \leq m$, $b \in \mathbb{R}^m$

(D) 7.1 Pb moindres carrés

Trouver $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $\|A\underline{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

∃ & ! solutio

L'uniq solutio $\underline{x}$ pb moindres carrés est l'uniq solutio $\underline{x}$ du système des équatios normales : $A^T A x \overset{!}{=} A^T b$.

(Déf) (Décompositio QR pleine ou économiq)

On dit $A = QR$ est une décompositio (QR) si $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthog,

$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ avec $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ◸ à diag > 0.

On dit $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ est décompo économiq si $\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec

$\tilde{Q}^T \tilde{Q} = I_n$ ($\tilde{Q}$ est colonnes orthonormées), $\tilde{R}$ idem ci-avant.

Ⓛ 7.5 ∃ 1 & 1 sle décompo QR économiq $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

Ⓡⓠ 7.6 Ds def décompo QR écon ou pleinepm doit prendre Q la mat formée ℓ 1°s colonnes n de Q. Ms Ø tes colonnes ne st pas uniqs.

Résoluθ ℓ décompo QR économiq

Ⓒⓞ 7.7 La solθ $\underline{x}$ du pb ds moindres carrés est l'uniq soluθ $\underline{x}$ du système $\tilde{R}\underline{x} = \tilde{Q}^T b$ ∀ $\underline{A = \tilde{Q}\tilde{R}}$ une décompoθ QR économiq.

Ⓡⓠ 7.8 Passage décomp. QR éco est préférable à résoluθ système équatθ normale car

$$\mathrm{cond}_2(A^T A) = \mathrm{cond}_2(\tilde{R}^T\tilde{R})$$
$$= (\mathrm{cond}_2(\tilde{R}))^2 \gg \mathrm{cond}_2(\tilde{R})$$

L'algorithme de Gram-Schmidt

$rg(A) = n$, $d_{QR_{éco}}$: $A = \tilde{Q}\tilde{R} \Rightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\tilde{Q})$.

Notons $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de A libres ($\text{car } rg(A) = n$)

Notons $q^1, \dots, q^m \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de $\tilde{Q}$.

$$\mathrm{Im}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\} \underset{\text{bijco}}{\overset{x = R^{-1}y}{=}} \{A\tilde{R}^{-1}y,\ y \in \mathbb{R}^m\}$$
$$\overset{\text{décomp}}{=} \{Ry,\ y \in \mathbb{R}^m\} = \mathrm{Im}(\tilde{Q}).$$

Passage de A à $\tilde{Q}$: passage d'une base de $\mathrm{Im}(A)$ à base ornée de $\mathrm{Im}(A)$.

Idée Rendre a_k orthogonale à $q_1, \dots, q_{m-1}$ & normaliser pr obtenir q_k.

$$\forall k,\ \tilde{r}_{k,k} \cdot q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{r}_{jk}\, q_j$$

$$\Leftrightarrow \forall k,\ a_k = \sum_{j=1}^{k} r_{jk}\, q_j \quad \Leftrightarrow A = \tilde{Q}\tilde{R}.$$

$$\text{tq } \tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{n,1} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & \tilde{r}_{nn} \end{bmatrix}$$

Algo 7.9 (Décompo QR éco ℓ GS)

Ob : ∀ $A = (a_1, \dots, a_n)$; construire $\tilde{Q} = (q_1, \dots, q_n)$ à colonnes q_j orthno. ainsi élts ≠ 0 de $\tilde{R}$ d'une décompoiθ QR économiq $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

Pour $k = 1, \dots, n$:
- Poser $y = a_k$
- Pour $j = 1, \dots, k-1$:
  - $\tilde{r}_{j,k} = (q_j, y)$, $y = y - r_{j,k}\, q_j$ (rendre y orthogonal à q_j)
- $\tilde{r}_{k,k} = \|y\|_2 > 0$, normaliser $q_k = y / \tilde{r}_{k,k}$

Ⓡⓠ 7.10 a) Pr k fixe, on doit calculer k produits scalaire & k−1 Ⓒⓛ ds $\mathbb{R}^m$, de au total nbr opé arithmétiqs de

$$\sum_k (4km) + O(n) = 2mn^2 + O(mn)$$

b) M̂ si $\tilde{r}_{k,k} \neq 0$ pt ê petit. $\dfrac{|\tilde{r}_{k,k}|}{\|\tilde{R}\|_2} \geq \dfrac{1}{\mathrm{cond}_2(\tilde{R})}$

c) Algo Ⓖⓢ modifié, en préciθ fini : ↘ perte d'orthogonalité $\|I_n - \tilde{Q}^T\tilde{Q}\|_2$: On pose $q_j = a_j$ pr $j = 1, \dots, n$ & pr $k = 1, \dots, n$, on normalise q_k & on rend $q_{k+1}, \dots, q_n$ orthogonal à q_k.

8) Calcul de la décompo QR pleine par Householder & Givens

Sppo $m \geq 2$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\exists$ mat orthog $H(y) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ tq $H(y)y$ est multiple du 1° vct^{r} canoniq e_1 de $\mathbb{R}^m$.

Th 8.1 Une étape d'éliminat° de 1 facto QR pleine.

Avec mat orthglo $H^{(k)}$, posons $A^{(1)} = A$, $A^{(k+1)} = H^{(k)}A^{(k)}$ p $k = 1, \dots, n-1$. Alors $A^{(k)}$ aura la forme

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{k,k} \\ a^{(k)}_{k+1,k} \\ \vdots \\ a^{(k)}_{m,k} \end{bmatrix}, \quad H^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H(y^{(k)}) \end{array}\right], \quad A^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{1,1} & \cdots & a^{(k)}_{1,k} & \cdots & a^{(k)}_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 \cdots & 0 & a^{(k)}_{k,k} & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & a^{(k)}_{m,k} & \cdots & a^{(k)}_{m,n} \end{bmatrix}$$

ap $E = \operatorname{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ appropriée,
$R = EA^{(n)} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ & $Q^T = EH^{(n-1)} \dots H^{(1)}$:
on obtient $A = QR$. $H = E.H^{(n-1)} \dots H^{(1)}$ unit^{r} (orthog^{le})

NB : Les premières $k-1$ lignes de $A^{(k)}$ & $A^{(k+1)}$ st m̂s (possibilités de stockage en place).

cl $HA = R$, $A = QR$, $Q^T = H$.

Algo p calculer $H = Q^T$, $R = EA^{(n)}$ + stockage en $A^{(k)}$ de A

Initial° n, m, $H = I_m$.

Pour $k = 1, \dots, n-1$

Calculer $y^{(k)}$ & $Q(y^{(k)})$

$A(k{:}m, k{:}n) \longleftarrow Q(y^{(k)}).A(k{:}m, k{:}n)$

$H(k{:}m, 1{:}m) \longleftarrow Q(y^{(k)}).H(k{:}m, 1{:}m)$

Trouver $E = \operatorname{diag}(\pm 1) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ approprié
$R = EA$, $H = EH$, $Q^T = H$.

(exigence $Q(y)$: produit $Q(y).B$ pas cher).

Matrices de Householder

D 8.2 $w \in \mathbb{R}^e \setminus \{0\}$, mat de Householder $H = H_w$ est déf p

$$H_w = I_m - \underbrace{\frac{2}{w^T w}}_{\text{scalaire}} \underbrace{w w^T}_{\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})}$$

P 8.3 Ptés mat de Householder

Une mdH est symétriq & orthogonale.

H représente mat de sym p hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^m, (x, w) = 0\}$.

→ besoin | 3

Ⓛ 8.4 Élim de mat de Householder

soit $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\begin{cases} \alpha = -\|y\|_2 & \text{si } y_1 > 0 \\ \alpha = \|y\|_2 & \text{si } y_1 \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow w = y - \alpha e_1$ tq $w^T w = 2\alpha(\alpha - y_1)$

est de sorte que mdl $H = H_w$ vérifie $Hy = \alpha e_1$.

Rq 8.5

$w \in \mathbb{R}^\ell$ ĉ art, $B \in \mathcal{M}_{\ell,p}(\mathbb{R})$;

complexité de calculer $H_W \cdot B =$

$= \underbrace{B - w.\beta}_{\ell.p.2 + O(\ell p)}$ où $\beta = \underbrace{\frac{2}{w^T w}}_{2\ell + O(1)} \underbrace{w^T B}_{2\ell.p + O(\ell + p)}$

Algo 8.6 (Décomp QR pleine $A = QR$ tq algo de Householder)

Object : $H = Q^T$, $R = A^{(n)}$

Poser $(m;n)$ = taille de A, $H = I_m$.

Pour $k = 1, \dots, n-1$:

$y = A[k:m, k]$, $\alpha = \text{signe}(-y_1)\|y\|$, $\gamma = \frac{1}{\alpha(\alpha - y_1)}$

$w = y - \alpha e_1$, $A[k,k] = \alpha$, $A[k+1:m, k] = 0$

$\beta = \gamma w^T A[k:m, k+1:n]$, $A[k:m, k+1:n] = A[k:m, k+1:n] - w\beta$

$\beta = \gamma w^T H[k:m, 1:m]$

$H[k:m, 1:m] = H[k:m, 1:m] - w\beta$

Ⓛ 8.7 Complexité de l'algo de Householder

Pr k fixe : $2(m-k) + O(1)$ oa pr calcul w & sa norme, $4(n-k)(m-k) + O(m)$ oa pr A, $4m(m-k) + O(m)$ oa pr H : in fine

$\underbrace{\frac{4}{3}n^3 + 2(m-n)n^2}_{\text{calcul de } R} + \underbrace{\frac{4}{3}m^3 + 4(m-n)mn}_{\text{calcul } Q} + O(mn)$ oa + n racines

Simplificat°s

Rq pb moindres carrés : no need Q, ms R & $b^{(n)} = Q^* b$. $\begin{cases} b^{(1)} = b \\ b^{(k+1)} = H^{(k)} b^{(k)} \end{cases}$ pr $k = 1, \dots, n-1$ de A

Rq Spl. Hessenberg si $m = n$, ↓ ca. QR.

Rq Sp. mat tridiag : ie $a_{j,k} = 0$ pr $k > j+1$: mq $A^{(k)}$ contient au + 3 élts $\neq 0$ k^e ligne.

Rotat°s de Givens

(variante mat orthog ⟷ variante algo Householder)

Ⓟ 8.11 Rotat° ds $\mathbb{R}^2$

$\forall y = [y_1, y_2]^T$, $\exists$ angle θ tq $Gy = \begin{bmatrix} \|y\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$G = G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ⓓ 8.12 Rotat° de Givens

soit $1 \leq i \leq j \leq m$, rotat° de Givens $G^{(i,j)} = G^{(i,j)}(\theta) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ est obtenue en part^t I_m où on remplace ss-mat à indices lignes / colonnes i, j p rotat° $G(\theta)$ ĉ art.

$$G^{(i,j)}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos(\theta) & & -\sin(\theta) & & \\ & & & 1 \ddots 1 & & & \\ & & \sin(\theta) & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Rq Produit RdG est mat orthogonale.

$(6m + \mathcal{O}(1)$ oa$)$

Créer des zéros ac rotatℴs de Givens

soit $y \in \mathbb{R}^m$, on pt trvr angles α :

$$\|y\| e_1 = G^{(1,2)} \dots G^{(m-2,m-1)} G^{(m-1,m)}$$

Cor 2.14 $\forall A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\exists Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthog. (produit de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ rotatℴ de Givens) dsque $Q^T A Q$ soit mat de Hessenberg, en complexité $\mathcal{O}(m^3)$.

$$G^{(i,j)}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \cos(\theta) & & -\sin(\theta) & \\ & & 1 & & \\ & \sin(\theta) & & \cos\theta & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(Rq) Produit RdG est mat orthogonale.

($6m + O(1)$ oa)

Créer des zéros de rotaθs de Givens

soit $y \in \mathbb{R}^m$, on pt trvr angles θ :

$$\|y\| e_1 = G^{(1,2)} \dots G^{(m-2,m-1)} G^{(m-1,m)}$$

(Cor) 8.14 $\forall A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\exists Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthog.
(produit de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ rotaθ de Givens) d sque $Q^T A Q$ soit mat de Hessenberg, en complexité $O(m^3)$.

9/ Calcul numériq vp

Élts propres & 1re utilité

$A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ couple $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ est dit élt propre (à droite) de A si $v \neq 0$ & $Av = \lambda v$ (& élt propre à gauche si $(\bar{\lambda}, v)$ est élt propre de A^*).

NB $1 = |1| \leq \rho(A) \leq \|A^T\|_\infty = 1$.

Stabilité vp ss perturbaθs

@ bloc de Jordan, perturbé, $\varepsilon > 0$; $A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ \varepsilon & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

px $m = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

(L) $a, b \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow \|ab^*\|_2 = \|a\| \|b\|$

(Th) 9.5 (Bauer - Fike)
soit $A, B, V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ & $D = V^{-1}AV$ diagonal $\Rightarrow \forall \mu \in Sp(B), \exists \lambda \in Sp(A)$,

$$|\lambda - \mu| \leq \mathrm{cond}_2(V) \|B - A\|_2$$

(Th) Résidu
Pr $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, on déf le résidu $r(\lambda, y) = \lambda y - Ay$

$\Rightarrow \arg\min \{ \|r(\lambda,y)\|_2 : \lambda \in \mathbb{C} \} = \frac{y^* A y}{y^* y} = R_A(y)$ dit quotient de Rayleigh

De +, si $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ & $D = V^{-1}AV$ diagonal alors

$$\mathrm{dist}(\lambda, Sp(A)) \leq \mathrm{cond}_2(V) \frac{\|r(\lambda,y)\|_2}{\|y\|_2}$$

X / La $\boxed{M}$ de la puissance

Calculer $x_{k+1} = A x_k$; $x_k = A^k x_0$. k° vect^{r} d'une suite.

Th 10 (Cv^{ce} $\boxed{M}$ de la puissance)

soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ diagonalisable de vp λ_j vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$. Notons par v_1 $\vec{vp}$ à droite, u_1 un $\vec{vp}$ à gauche de A $\leftrightarrow A$' vp λ_1. On choisit x_0, $y \in \mathbb{C}^m$ de sorte que $u_1^* x_0 \neq 0$ & $y^* v_1 \neq 0$ Alors

$$\frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k \to \infty},$$

$$\frac{x_k}{y^* x_k} = \frac{v_1}{y^* v_1} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)_{k \to \infty}.$$

Si d+ A est mat normale $\Rightarrow R_A(x_k) = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)_{k \to \infty}$

Variantes de $\boxed{M}$ de la puissance

Algo ($\boxed{M}$ puissance normalisée)

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$

$$q_k = z_k / \|z_k\|$$

$$z_{k+1} = A q_k$$

Sortie:

Complexité : $2m^2 + \mathcal{O}(m)$

Appliquer $\boxed{M}$ de puissance pr mat $(A - \mu I)^{-1}$

Algo 10.3 ($\boxed{M}$ puissance inverse à paramètre fixe)

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$

$q_k = \dfrac{z_k}{\|z_k\|}$, résoudre pr z_{k+1} le systm $(A - \mu I) z_{k+1} = q_k$

Sortie

Complexité : $2m^2 + \mathcal{O}(m)$ + décomp $A - \mu I = LU$

$\boxed{M}$ puissance inverse

Algo 10.4. $\boxed{M}$ psce inverse à paramètre variable

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$ jsq $\|z_k\|_2$ "grd"

$q_k = \dfrac{z_k}{\|z_k\|}$, $\mu_k = R_A(q_k)$, résoudre pr z_{k+1} le système $(A - \mu_k I) z_{k+1} = q_k$.

X / La $\boxed{M}$ de la puissance

Calculer $x_{k+1} = A x_k$; $x_k = A^k x_0$. k° vect d'une suite.

Th 10 (Cvce $\boxed{M}$ de la puissance)

Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ diagonalisable & vp λ_j vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$. Notons par v_1 $\vec{vp}$ à droite, u_1 un $\vec{vp}$ à gauche de A associé à vp λ_1. On choisit x_0, $y \in \mathbb{C}^m$ de sorte que $u_1^* x_0 \neq 0$ & $y^* v_1 \neq 0$. Alors

$$\frac{y^* x_{k+1}}{y^* x_k} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)_{k\to\infty},$$

$$\frac{x_k}{y^* x_k} = \frac{v_1}{y^* v_1} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)_{k\to\infty}.$$

Si de + A est mat normale $\Rightarrow R_A(x_k) = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)_{k\to\infty}$

Variations de $\boxed{M}$ de la puissance

Algo ($\boxed{M}$ puissance normalisée)

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$

$$q_k = z_k / \|z_k\|$$
$$z_{k+1} = A q_k$$

Sortie :

Complexité : $2m^2 + \mathcal{O}(m)$

Appliquer $\boxed{M}$ de puissance pr mat $(A - \mu I)^{-1}$

Algo 10.3 ($\boxed{M}$ puissce inverse à paramètre fixe)

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$

$q_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$, résoudre pr z_{k+1} le système $(A - \mu I) z_{k+1} = q_k$

Sortie

Complexité : $2m^2 + \mathcal{O}(m)$ & décomp $A - \mu I = LU$

$\boxed{M}$ puissance inverse

Algo 10.4. $\boxed{M}$ pssce inverse à paramètre variable

choisir $z_0 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, pr $k = 0, 1, 2, \dots$ jsq $\|z_k\|_2$ "grd"

$q_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$, $\mu_k = R_A(q_k)$, résoudre pr z_{k+1} le système $(A - \mu_k I) z_{k+1} = q_k$

10 / $\boxed{M}$ QR

Algo 11.1 ($\boxed{M}$ QR & shift)

① $A_0 = Q_0^T A Q_0$ & Q_0 orthog, A_0 de forme Hessenberg

Pr $k = 0, 1, 2, \dots$

On se donne un shift $\mu_k \in \mathbb{R}$

Calculer décompo QR de $A_k - \mu_k I = Q_{k+1} R_{k+1}$

Calculer $A_{k+1} = \mu_k I + R_{k+1} Q_{k+1}$

NB : $A_{k+1} = Q_{k+1}^T A_k Q_{k+1}$ dc A & A_k st semblables.

L 11.2

a) Q_{k+1} & A_{k+1} st de forme Hessenberg, + précisémt Q_{k+1} pt s'écrire ĉ produit de $m-1$ rotations de Givens.

b) Si de plus A est sym, $\Rightarrow \forall$ mat A_k est sym & tridiagonale.

& R_{k+1} ne contient que élts non-nuls sr la diagonale pple, ainsi que sr 1° & 2° super-diagonale.

L.11.4

Posons $W_k = Q_0 Q_1 \dots Q_k$ mat orthog, alors

$$A W_k = W_k A_k, \quad (A - \mu_k I) W_k = W_{k+1} R_{k+1}$$

$$(A^T - \mu_k I)^{-1} W_k = W_{k+1} R_{k+1}^{-T}.$$