# Licence 2 de mathématiques
# UE M43 Probabilités discrètes - Corrigé du DS blanc des 18-19 mai

**Exercice** 1. **Un gardien de but arrête en moyenne 7 penalties sur 10. Les 6 meilleurs joueurs d'une équipe adverse tirent à tour de rôle un penalty. Appelons $B$ le nombre de penaltys marqués. Quelle est la loi de $B$ ?**

**Réponse : Une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.3$**

On reconnaît que $B$ est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli à $n = 6$ essais avec une probabilité de succès $p = 0.3$.

**Exercice** 2. **Des bulletins et des urnes. Une urne contient 5 bulletins numérotés de 1 à 5. On tire successivement 8 bulletins dans cette urne en remettant à chaque fois le bulletin tiré dans l'urne. Quelle est approximativement la probabilité que, dans ces 8 tirages, on ait tiré au moins une fois le bulletin portant le numéro 1 et au moins une fois le bulletin portant le numéro 2 ?**

**Réponse : $\simeq$ 0,681**

On peut faire la modélisation suivante : $\Omega = \{1, \ldots, 5\}^8$, et $P$ la probabilité uniforme sur $\Omega$. On pose $A$ l'événement "ne jamais tirer le bulletin 1" et $B$ l'événement "ne jamais tirer le bulletin 2". On cherche $P(A^c \cap B^c)$. On a

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)).$$

On calcule ensuite

$$P(A) = P(B) = \frac{4^8}{5^8} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{3^8}{5^8},$$

ce qui donne finalement

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - 2 \times \frac{4^8}{5^8} + \frac{3^8}{5^8} \simeq 0,681.$$

**Exercice** 3.

**Si $A$ et $B$ sont deux événements tels que**

$$P(A \cap B)P(A^c \cap B^c) = P(A^c \cap B)P(A \cap B^c),$$

**alors $A$ et $B$ sont indépendants.**

**Réponse : C'est vrai**

Le membre de gauche se réécrit :

$$\begin{aligned}P(A\cap B)P(A^c\cap B^c) &= P(A\cap B)P((A\cup B)^c)\\ &= P(A\cap B)(1-P(A\cup B)) = P(A\cap B)(1-P((A)-P(B)+P(A\cap B)).\end{aligned}$$

Le membre de droite se réécrit :

$$P(A^c\cap B)P(A\cap B^c) = (P(B)-P(A\cap B))(P(A)-P(A\cap B)).$$

L'égalité de l'énoncé implique donc que

$$P(A\cap B) = P(A)P(B),$$

c'est-à-dire que $A$ et $B$ sont indépendants.

**Exercice** 4.

**Une urne contient 9 boules : 2 bleues, 4 vertes et 3 rouges. On tire simultanément 3 boules dans cette urne. On note $B$ le nombre de boules bleues obtenues et $V$ le nombre de boules vertes obtenues lors de ce tirage de 3 boules. Quelle est la covariance des variables aléatoires $B$ et $V$ ?**

**Réponse :** $-\frac{2}{9}$

On peut faire la modélisation suivante : $\Omega = \mathcal{P}_3(\{1,\dots,9\})$ et $P$ la probabilité uniforme sur $\Omega$. Le cardinal de $\Omega$ est égal à $\frac{9\times 8\times 7}{6} = 3\times 4\times 7$.

La variable aléatoire $B$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $(9,2,3)$ et son espérance est donc $E(B) = 3\times\frac{2}{9} = \frac{2}{3}$. De même, la variable aléatoire $V$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $(9,4,3)$ et son espérance est donc $E(B) = 3\times\frac{4}{9} = \frac{4}{3}$.

Les valeurs possibles du couple $(B,V)$ sont $(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1)$. Pour calculer $E(BV)$, il suffit de s'intéresser aux couples de valeurs dont aucune des deux n'est nulle. On calcule donc

$$P((B,V)=(1,1)) = \frac{2\times 4\times 3}{3\times 4\times 7} = \frac{2}{7},$$

$$P((B,V)=(1,2)) = \frac{2\times\binom{4}{2}}{3\times 4\times 7} = \frac{1}{7},$$

$$P((B,V)=(2,1)) = \frac{1\times 4}{3\times 4\times 7} = \frac{1}{21}.$$

On a finalement

$$\mathrm{cov}(B,V) = E(BV)-E(B)E(V) = 1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{1}{7}+2\times\frac{1}{21}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{3} = -\frac{14}{63} = -\frac{2}{9}.$$