Chapitre 5

SERIES ENTIERES

1 DEFINITION D'UNE SERIE ENTIERE ET DU RAYON DE CONVERGENCE

Les séries entières sont des séries de fonctions dont le terme général a une forme particulière.

DEFINITION 5.1.1

On appelle ***série entière*** *toute série de fonctions* $\sum_n u_n(z)$, *où* $z \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*), telle que* $u_n(z) = a_n z^n$ *avec* $a_n \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*).*

REMARQUES

1. Les polynômes sont des séries entières avec $a_n = 0$, pour tout $n > n_0$, où n_0 est le degré du polynôme .
2. Un intérêt est que lorsque la série $\sum_n u_n(z)$ converge, on en a une approximation par $\sum_{n=0}^{N} u_n(z)$, qui est polynômiale.

THEOREME 5.1.2 (RAYON DE CONVERGENCE)

Soit une série entière $\sum_n a_n z^n$. *Il existe un nombre réel* $R \in [0, +\infty]$ *tel que :*

1. *Si* $|z| < R$ *(R fini ou non) alors la série* $\sum_n a_n z^n$ *converge absolument.*
2. Si $|z| > R$ *(R fini) alors la série* $\sum_n a_n z^n$ *diverge (* $\lim_{n \to +\infty} a_n z^n \neq 0$*).*

*R s'appelle le **rayon de convergence** de la série entière.*

REMARQUE

1. Le rayon de convergence d'une série entière est unique.
2. Si $z \in \mathbb{C}$, $D_{(O,R)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ est appelé le **disque de convergence** de la série entière, ($D_{(O,\infty)} = \mathbb{C}$).
   Si $z \in \mathbb{R}$, $D_{(O,R)} =]-R, R[$, ($D_{(O,\infty)} = \mathbb{R}$).

Pour la démonstration du théorème 5.1.2. on a besoin du lemme suivant :

LEMME 5.1.3 (D'ABEL)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n |a_n z^n|$ est convergente.

Démonstration :
On a
$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$
et comme $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est à dire
$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \geq 0, |a_n z_0^n| \leq M,$$
alors
$$\forall n \geq 0, |a_n z^n| \leq M. \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \text{ avec } \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$
Par le théorème de comparaison sur les séries numériques, $\sum_n |a_n z^n|$ converge.

Démonstration du théorème 5.1.2 :
On note
$$I = \{r \in [0, +\infty[\text{ tels que la suite de terme général } |a_n r^n| \text{ soit bornée}\}.$$
On a $0 \in I$, donc $I \neq \varnothing$.
Si I est majoré, on pose $R = \sup I$.
Si I n'est pas majoré, on pose $R = +\infty$.
Montrons que R vérifie bien les conditions du théorème.

1. Si $|z| < R$, R fini ou non, alors $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$|z| < |z_0| < R$$

et la suite $(|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée avec $r = |z_0|$ (car R est la borne supérieure de I). D'après le lemme 5.1.3, la série $\sum\limits_n |a_n z^n|$ converge.

2. Si $|z| > R$, R est fini, la suite de terme général $|a_n z^n|$ n'est pas bornée (sinon R ne serait pas la borne supérieure de I), donc la série $\sum\limits_n a_n z^n$ ne converge pas $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0)$.

REMARQUES

1. Pour les $z \in \mathbb{C}$; $|z| = R$, on verra sur des exemples que tout peut se produire, la convergence comme la divergence.
2. Si $\sum\limits_n a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geq |z_0|$ (d'après le lemme 5.1.3). Il en résulte que si on a deux séries entières $\sum\limits_n a_n z^n$ et $\sum\limits_n b_n z^n$ telles que, $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|$, alors le rayon de convergence de la première série est supérieur ou égal à celui de la seconde.

EXEMPLES

1. La série $\sum\limits_n z^n$, $(a_n = 1)$, a pour rayon de convergence $R = 1$. Pour $|z| = R = 1$, la série $\sum\limits_n z^n$ diverge, car $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n \neq 0$.
2. La série $\sum\limits_n \frac{z^n}{n!}$, $\left(a_n = \frac{1}{n!}\right)$, a pour rayon de convergence $R = +\infty$. En effet
$$\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$
donc, d'après d'Alembert, $\sum\limits_n \frac{z^n}{n!}$ converge absolument $\forall z \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.
3. La série $\sum\limits_n n! z^n$, $(a_n = n!)$, a pour rayon de convergence $R = 0$. En effet
$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} (n+1)|z| = +\infty,$$
donc la série converge seulement pour $z = 0$, et donc $R = 0$ (le "disque de convergence" est vide).

4. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$, $\left(a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right)$, a pour rayon de convergence $R = 1$. On voit ici que pour $z = 1$, la série converge, mais que pour $z = -1$, la série diverge.

DETERMINATION PRATIQUE DE R

Le plus souvent on obtient le rayon de convergence en appliquant les règles de d'Alembert et de Cauchy :

PROPOSITION 5.1.4

Soit la série entière $\sum\limits_{n} a_n z^n$, alors :

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, alors $R = \frac{1}{l}$.

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors $R = \frac{1}{l}$.

(Par convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).

Démonstration :
On doit étudier la série de fonctions de terme général

$$u_n(z) = a_n z^n.$$

1. $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$, donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = l\,|z|$$

et par conséquent :
si $l\,|z| < 1$ ($|z| < \frac{1}{l}$) la série converge absolument
si $l\,|z| > 1$ ($|z| > \frac{1}{l}$) la série diverge, et on en déduit que $R = \frac{1}{l}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = l\,|z|$, et on conclut comme dans 1.

REMARQUE

Le rayon de convergence existe toujours, alors que les limites de la proposition précédente peuvent ne pas exister.

EXEMPLES

1. La série $\sum_n n^2 z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, (utiliser d'Alembert).

2. La série $\sum_n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} z^n$, a pour rayon de convergence $R = e^2$. En effet par Cauchy on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{2}{n+2})},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{2}{n+2})} = e^{-2},$$

et donc $R = \frac{1}{e^{-2}} = e^2$.

2 OPERATIONS SUR LES SERIES ENTIERES

PROPOSITION 5.2.1 (SOMME ET PRODUIT)

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2. Alors la série somme de terme général $c_n z^n = (a_n + b_n) z^n$ et la série produit de terme général $d_n z^n = (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) z^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_1\ ,\ R_2)$.

De plus, si $|z| < \min(R_1\ ,\ R_2)$, on a

$$\sum_n c_n z^n = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n,$$

et

$$\sum_n d_n z^n = \left(\sum_n a_n z^n\right)\left(\sum_n b_n z^n\right).$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer, pour chaque z, les théorèmes sur la somme et le produit de séries numériques.

REMARQUES

1. Soit R le rayon de convergence de la série somme $\sum_n (a_n + b_n) z^n$, alors

$$R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min(R_1, R_2).$$

En effet supposons, par exemple, $R_1 < R_2$.
On veut prouver que $R_1 = R$. On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $R > R_1$, soit alors z_0 tel que $|z_0| < R_2$ et $|z_0| \in]R_1, R[$. Puisque $|z_0| < R$, la série $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ converge et puisque $|z_0| < R_2$, la série $\sum_n b_n z^n$ converge, d'où on en déduit que $\sum_n a_n z^n$ converge, ce qui est impossible car $|z_0| > R_1$.

2. Dans le cas du produit, $R_1 \neq R_2$ n'implique pas que $R = \min(R_1, R_2)$ (où R est le rayon de convergence de la série produit).
En effet, soit la série $\sum_n z^n, (R_1 = 1)$ et la série $1 - z = \sum_n b_n z^n$ avec $b_0 = 1, b_1 = -1$ et $b_n = 0, \forall n \geq 2$, alors $R_2 = \infty$ et la série produit
$$\sum_n d_n z^n = (1 - z) \sum_n z^n = 1$$
a pour rayon de convergence $R = \infty$, donc $R \neq \min(R_1, R_2)$.

EXEMPLE

le rayon de converge de la série somme de deux séries peut être strictement supérieur à $\min(R_1, R_2)$. Soient, par exemple, les séries $\sum_n 2^n z^n$ et $\sum_n (1 - 2^n) z^n$, alors $R_1 = \frac{1}{2}$ et $R_2 = \frac{1}{2}$, par contre $R = 1$.

PROPOSITION 5.2.2 (DERIVATION ET INTEGRATION D'UNE SERIE ENTIERE)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors les séries $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont aussi pour rayon de convergence R.

Démonstration :
Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < r < R$, alors, pour "n assez grand", $n \leq \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$, puisque $\frac{r}{|z|} > 1$. Donc, on a
$$n \leq \left(\frac{r}{|z|}\right)^n \Rightarrow n |z|^n \leq r^n \Rightarrow n |a_n| |z|^n \leq |a_n| r^n.$$
Et, comme $r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge, ce qui implique, d'après le théorème de comparaison, la convergence de $\sum_{n\geq 1} n a_n z^n$

et par conséquent $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ converge. Donc, si on note R' le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$, on a $R' \geq R$.
D'autre part, dès que $n \geq 1$,

$$|a_n z^n| \leq n\,|a_n|\,|z|^n = |z|\left(n\,|a_n|\,|z|^{n-1}\right),$$

d'où $R \geq R'$ et par conséquent $R = R'$.
Pour la série primitive, on pose pour $n \geq 0$, $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, l'application de ce qui précède à la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^{n+1}$, donne le résultat annoncé.

3 PROPRIETES DE LA SOMME D'UNE SERIE ENTIERE DE LA VARIABLE REELLE

Les proprietes de continuité, intégration et dérivation des séries de fonctions s'appliquent ici, sachant que la convergence est uniforme sur $[-r, r]$, $\forall r \in \mathbb{R}, r < R$, R étant le rayon de converge de la série considérée.

THEOREME 5.3.1

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, $a_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $x \in \mathbb{R}$, de rayon de convergence R. Soit $f(x)$ sa somme, définie pour $x \in]-R, R[$. Alors f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme les séries entières successives. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, on a

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration :
Puisque

$$]-R, R[= \bigcup_{0<r<R} [-r, r],$$

$\forall\ x \in]-R, R[$, $\exists r < R$ tel que $x \in [-r, r]$, et comme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$, $f(x)$ est continue sur $]-R, R[$.
D'autre part, $u_n(x) = a_n x^n \in C^1(\mathbb{R})$ et $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ converge uniformément sur $[-r, r]$, $f(x)$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on recommence en dérivant successivement, ce qui montre que

$f \in C^\infty(]-R, R[)$. Finalement, en appliquant le théorème d'intégration sur les séries de fonctions, on obtient

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \int_0^x f(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

REMARQUE

Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ alors, $\forall\, x \in]-R, R[$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{0\leq j\leq k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k} = \sum_{n\geq 0} \left(\prod_{1\leq j\leq k} (n+j) \right) a_{n+k} x^n.$$

(La démonstration se fait par récurrence sur k).

4 DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE

On s'intéresse maintenant au problème inverse : Etant donné une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un point $x_0 \in I$, existe-t-il une série $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ convergeant sur un voisinage de x_0 et telle que sa somme soit égale à $f(x)$?

On suppose que I est un intervelle ouvert ($I =]-R, R[$).

DEFINITION 5.4.1

La fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ***développable en série entière*** *au voisinage du point $x_0 \in I$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et une suite $(a_n)_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ converge et a pour somme $f(x)$.*

PROPOSITION 5.4.2 (CONDITION NECESSAIRE)

Pour que la fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit développable en série entière au voisinage de x_0, il ***faut*** *que :*

1. $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Démonstration :

1. $f \in C^\infty(]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)$ est une conséquence du théorème 5.3.1.

2. On utilise la remarque qui suit le théorème 5.3.1, on a

$$\forall\, x \in \left]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right[, \forall k \geq 1, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{1 \leq j \leq k} (n+j) \right) a_{n+k} \left(x - x_0\right)^n .$$

En particulier, pour $x = x_0$, on trouve

$$\forall k \geq 1, \quad f^{(k)}(x_0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (j)\, a_k = k! a_k,$$

donc $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
Ce résultat est vrai aussi pour $k = 0$ $(f(x_0) = a_0)$.

REMARQUES

1. Ces conditions ne sont pas suffisantes.
2. Le développement limité, quand il existe, est unique (car $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$).
3. La question d'existence du développement en série entière d'une fonction f peut être posée de la façon suivante :
   (a) Etant donnée une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \left(x - x_0\right)^n$ converge-t-elle?
   (b) Si elle converge, converge-t-elle vers $f(x)$?

   La réponse à ces deux questions n'est pas toujours positive :
   (a) Il existe $f \neq 0$ de classe C^∞ telle que la série associée ait un rayon de convergence nul.
   (b) Il peut arriver que la série associée converge vers autre chose que f.

EXEMPLE

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

On montre par récurrence que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

où P_n un polynôme en $\frac{1}{x}$ de degré $3n$, alors la série de Taylor est nulle, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, donc $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x)^n = 0$, alors que $f \neq 0$.

DEFINITION 5.4.3

Une fonction développable en série entière au voisinage d'un point x_0 est dite **analytique en x_0**.

PROPOSITION 5.4.4

Une condition suffisante pour qu'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(I)$ soit analytique au voisinage de x_0 est qu'il existe un réel α tel que, $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x - x_0|^n}{n!} M_n \right) = 0, \quad \text{où } M_n = \sup_{x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[} \left| f^{(n)}(x) \right|.$$

Démonstration :

Ecrivons Taylor-Lagrange au voinage de x_0, on peut développer aussi loin qu'on veut si $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$. On a alors

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p \right| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} M_n,$$

donc si le mojorant tend vers zéro, alors la série converge vers f.

PRATIQUE DU DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE

1. La formule de Taylor permet de :
   (a) donner le terme général de la série,
   (b) montrer que le reste de Lagrange tend vers zéro.
2. A partir de développements connus, par opérations licites sur les séries (addition, multiplication, intégration, dérivation, changement de variable).

EXEMPLES

1. Par la formule de Taylor on obtient

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R=\infty.\\ \sin(x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R=\infty.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad R=1.$$

2. Par intégration de la dernière égalité on obtient

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad R=1.$$

3. Par le changement de variable $x \to x^2$ dans 1. on a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad R=1.$$

4. Par intégration de l'égalité précédente on obtient

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad R=1.$$

5. Par la formule de Taylor on obtient

$$e^x = 1 + x + x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad R=\infty.$$

6. Par addition des développements de e^x et e^{-x} on a

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R=\infty.\\ \sinh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R=\infty.\end{aligned}$$

5 APPLICATION DES SERIES ENTIERES

5.1 EXPONENTIELLE COMPLEXE

DEFINITION 5.5.1.1

On définit, en généralisant la définition de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$, l'exponentielle complexe par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

PROPOSITION 5.5.1.2

On a , $\forall z, \forall z' \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}.$$

Démonstration :
on pose

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} a_n$$

et

$$e^{z'} = \sum_{n \geq 0} \frac{z'^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} b_n,$$

ces séries convergeant absolument, on peut donc faire le produit de e^z par $e^{z'}$, la série produit aura pour terme général

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\ &= \sum_{\substack{p+q=n \\ 0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n}} a_p b_q = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{z^q}{q!}, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{z^p z^q}{p! q!}.$$

Par ailleurs, on a, avec la formule du binôme de Newton

$$e^{z+z'} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{z^p (z')^{n-p}}{n!},$$

et, en posant $q = n - p$,

$$e^{z+z'} = \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p! q!} z^p z'^q = \sum_{n \geq 0} c_n = e^z e^{z'}.$$

PROPOSITION 5.5.1.3

Soit z imaginaire pur, $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ |e^{iy}| = 1 \end{cases}.$$

Démonstration :

Dans le développement en série de e^{iy}, regroupons les termes réels et imaginaire purs

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} + \cdots \\ &\quad + iy - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots + (-1)^p i \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots, \end{aligned}$$

et on reconnait les développements de $\cos y$ et $\sin y$, donc

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

d'où

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

On déduit de ce résultat que

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} = \cosh(iy) \\ \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(iy) \end{cases}.$$

Pour un complexe quelconque, $z = x + iy$, on a

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

d'où

$$\begin{cases} |e^z| = e^x \\ y = Arg(e^z) \end{cases}.$$

REMARQUES

1.

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z' = z + 2ik\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

En effet, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors

$$e^z = e^{z'} \Rightarrow |e^z| = \left|e^{z'}\right| = e^x = e^{x'} \Rightarrow x = x',$$

et

$$\cos y + i\sin y = \cos y' + i\sin y' \Rightarrow y' = y + 2k\pi,$$

donc

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = x + i\,(y + 2k\pi) \\ &= x + iy + 2ik\pi \\ &= z + 2ik\pi. \end{aligned}$$

2. Il n'existe pas de complexe z tel que $e^z = 0$, mais

$$\forall t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \exists z \in \mathbb{C} \text{ tel que } e^z = t.$$

En effet

$$e^z = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = 0 \Leftrightarrow \cos y = \sin y = 0,$$

ce qui est impossible, mais si $t = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors il suffit de choisir $z = \ln(\rho) + i\theta$ pour avoir $e^z = t$ (car $t \neq o \Rightarrow \rho > 0$).

5.2 CALCUL D'INTEGRALES

Bien que l'on sache calculer plus d'intégrales que de sommes, il est parfois intéressant d'exprimer une intégrale sous forme d'une série pour en donner une valeur approchée ou exacte, par exemples :

1. Valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,n!} + R_N, \end{aligned}$$

avec

$$R_N \leq \frac{1}{(2N+3)\,(N+1)!},$$

d'après le théorème sur les séries alternées.

2. Calcul de l'intégrale $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)dx$:
La fonction $f(x) = \ln x \ln(1-x)$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$

en posant $f(0) = f(1) = 0$. En considérant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, $\forall x \in [0,1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

et après avoir vérifié que la série de fonctions définie par

$$\begin{cases} u_n(x) = \frac{(\ln x)x^n}{n}, \text{ pour } 0 < x \leq 1 \\ u_n(0) = 0 \end{cases},$$

converge normalement sur $[0,1]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \ln(1-x)dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 -\frac{x^n}{n} \ln x dx \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^1 x^n \ln x dx \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}, \end{aligned}$$

par une intégration par parties de $\int_0^1 x^n \ln x dx$.
La somme de la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)^2}$ se calcule en posant

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

et en utilisant la somme de la série de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a alors

$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

5.3 RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Une application importante est la recherche de solutions d'équations différentielles sous la forme de séries entières.

Par exemple, cherchons une solution de l'équation différentielle

$$xy'' = y$$

sous la forme : $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$

On manipule comme si tout convergeait pour trouver quelle forme doivent avoir les a_n. Une fois trouvés les coefficients, on regarde si la série obtenue converge et, là où elle converge, si sa somme est solution.

On a

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} xy'' &= 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-1} + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & a_0 = 0 \\ & a_1 = 2a_2 \\ & \vdots \\ & a_{n-1} = n(n-1) a_n \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & a_0 = 0 \\ & a_2 = \tfrac{1}{2} a_1 \\ & \vdots \\ & a_n = \tfrac{a_{n-1}}{n(n-1)} = \tfrac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \tfrac{n}{(n!)^2} a_1 \end{aligned}$$

avec a_1 quelconque.

La dernière égalité se démontre par récurrence :

Pour $n = 2$, $a_2 = \frac{2}{2^2} a_1 = \frac{1}{2} a_1$.

Supposons que $a_n = \frac{n}{(n!)^2} a_1$.

Calculons

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{(n+1)n} = \frac{n}{(n!)^2 (n+1)n} a_1 \\ &= \frac{(n+1)}{(n!)^2 (n+1)^2} a_1 = \frac{(n+1)}{((n+1)!)^2} a_1 \end{aligned}$$

d'où la relation annoncée.

Donc les seules séries entières qui peuvent être solutions sont

$$a_1 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n!)^2} x^n,$$

où a_1 est une constante arbitraire.

Calculons le rayon de convergence de cette série, par d'Alembert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)^2\,n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\,n}=0\end{aligned}$$

et donc $R=\infty$.

6 EXERCICES

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{(a)}: \sum \frac{n^n}{n!}x^n, \quad \text{(b)}: \sum n^2 x^{2n+1}, \quad \text{(c)}: \sum \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} x^n,$$
$$\text{(d)}: \sum n^{(-1)^n} x^n, \quad \text{(e)}: \sum \frac{n^2+1}{3^n} x^{2n}, \quad \text{(f)}: \sum n! x^{n^2}.$$

2. Soit les séries entières

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} x^n \quad .$$

   (a) Etudier la convergence de ces séries en un point du cercle de convergence.

   (b) Soit $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ la somme de ces séries pour $x \in]-1,+1[$; déterminer $g(x)$ et $h(x)$, puis $f(x)$ sous forme d'intégrale. Que se passe-t-il lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ou vers -1 par valeurs supérieures?

3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif; on suppose la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ convergente.

   (a) En utilisant le théorème d'Abel, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n R^n) \left(\frac{x}{R}\right)^n$ converge uniformément sur $[0, R]$.

   (b) En déduire :
$$\sum_{n\geq 0} a_n R^n = \lim_{x\to R_-} (\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$$

   (c) Appliquer ce résultat au développement en série entière de
$$\ln(1+x), \arctan(x) \text{ et } \sqrt{1+x} \text{ au voisinage de } 0.$$

   (d) En considérant l'exemple $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$, montrer que la limite: $\lim_{x\to R_-} (\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$ peut exister sans que la série $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ soit convergente.

4. Etudier la convergence des séries entières:

$$\sum_{n\geq 1} n^2 x^n \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n$$

et calculer leur somme.

5. Soit
$$S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)}.$$

   (a) Montrer que $S(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Trouver une relation entre S et S'.

   (b) En déduire l'expression de $S(x)$ sous forme d'intégrale.

   (c) En utilisant le développement de $e^{-\frac{t^2}{2}}$ en série entière de t, prouver l'égalité
$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1.3.5...(2n+1)}=\sqrt{e}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

6. Développer $f(x)=\sin(x)\sinh(x)$ en série entière en utilisant d'une part le produit de séries et d'autre part l'exponentielle complexe. Comparer les résultats.

7. Soit α un complexe non nul, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière vérifiant
$$\forall n\geq 2, a_n=2\alpha a_{n-1}-\alpha^2 a_{n-2}, \quad (a).$$

   (a) Déterminer le rayon de convergence d'une telle série, et sa somme dans le disque de convergence.

   (b) Que se passe-t-il lorsque (a) est valable seulement pour $n\geq N$, $N\in\mathbb{N}$ donné?

8. Soit (E_α) l'équation différentielle
$$xy''+\alpha y'+xy=0 \quad (\alpha\in\mathbb{R}^{+*} \text{ donné}).$$

   (a) Chercher les solutions de $(E\alpha)$ développables en série entière au voisinage de 0; préciser le rayon de convergence.

   (b) Déterminer une équation différentielle satisfaite par la fonction $z=x^\beta y$ lorsque y est solution de (E_α) et $\beta\in\mathbb{R}$ donné.

9. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sa somme pour $|z|<R$; soit $r, 0<r<R$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$ est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$ et en déduire

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta.$$

(b) Montrer que la série produit $\left(\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \bar{a}_n\, r^n e^{-in\theta}\right)$ est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$ et en déduire

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

(c) Expliciter l'égalité pour les exemples :

$$f(z) = e^z, \quad r = \frac{1}{2}; \quad f(z) = \frac{1}{1-z}; \quad f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$