

Feuille 5 : Logique du premier ordre

Exercice 1 : Vérification de formule sur un modèle

Nous utilisons le vocabulaire logique suivant :

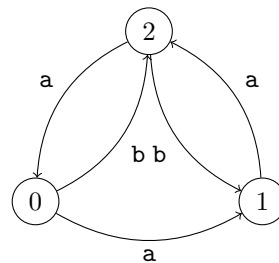
— Les prédicats binaires suivants :

— **a** et **b**

Nous prenons le modèle ayant pour domaine $\{0, 1, 2\}$ et avec les interprétations suivantes de **a** et **b**

$$\begin{aligned}
 \llbracket \mathbf{a} \rrbracket &= \{(0, 1), \\
 &\quad (1, 2), \\
 &\quad (2, 0)\} \\
 \llbracket \mathbf{b} \rrbracket &= \{(0, 2), \\
 &\quad (2, 1)\}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons représenter ce modèle graphiquement en reliant les éléments (i, j) des relations par une flèche allant de i à j et étiquetée par le nom de la relation :



Q 1.1 Vérifier que la formule $\forall x. \neg \mathbf{a}(x, x)$ est vraie dans le modèle. Donner un modèle dans lequel cette formule est fausse.

Q 1.2 Vérifier que la formule $\forall x. \forall y. \mathbf{b}(x, y) \Rightarrow \mathbf{a}(y, x)$ est vraie dans le modèle. Donner un modèle dans lequel cette formule est fausse.

Q 1.3 Donner une formule qui n'est vraie que dans le modèle proposé (modulo isomorphisme). On pourra utiliser l'égalité.

Q 1.4 Comment modifier le modèle pour que la formule $\forall x. \forall y. \forall z. \mathbf{b}(x, y) \wedge \mathbf{b}(y, z) \Rightarrow \mathbf{b}(x, z)$?

Q 1.5 Donner une formule $\varphi(x)$ qui n'est vraie dans le modèle que pour les valuations $x = 0$ et $x = 1$.

Q 1.6 Donner une formule $\varphi(x, y)$ qui n'est vraie dans le modèle que pour les valuations $x = 0, y = 1$ et $x = 0, y = 2$.