Feuille 3 II. Exercice 7 (Formule de Green-Riemann)

Rappelons la formule de Green-Riemann.

- Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, dont le bord Γ est C^1 par morceaux et orienté de sorte que D se trouve toujours à gauche de Γ
- Soit $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \in C^1(D)$ alors

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_\Gamma \langle V, d\gamma \rangle.$$

(1) $D = I = [0,1] \times [0,1]$ et $P \in C^1(I)$

Montrer $$\iint_I \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial I} P\, dx \qquad (*)$$

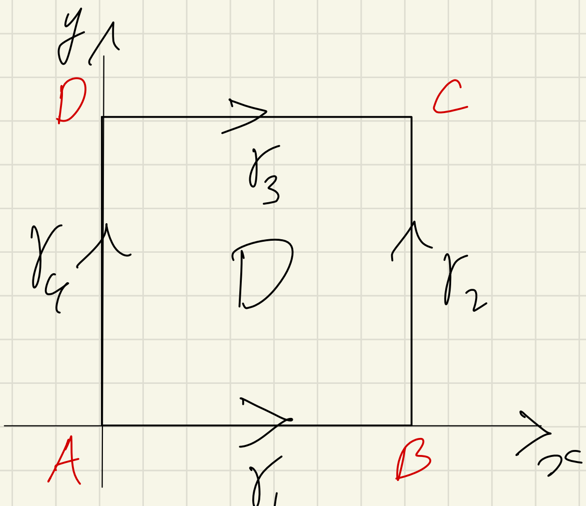
- D'une part, par le théorème de Fubini

$$\iint_I \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 P(x,1)\, dx - \int_0^1 P(x,0)\, dx. \qquad (o)$$

- D'autre part ∂I se décompose en 4 segments orientés $[\vec{AB}], [\vec{BC}], [\vec{CD}], [\vec{DA}]$

où $A = (0,0)$ $B = (1,0)$ $C = (1,1)$, $D = (0,1)$



On paramètre ces segments par :

$\vec{AB}$ $\quad \gamma_1(x) = (x,0) \quad x \in [0,1]$

$\vec{DC}$ $\quad \gamma_3(x) = (x,1) \quad x \in [0,1]$

$\vec{BC}$ $\quad \gamma_2(y) = (1,y) \quad y \in [0,1]$

$\vec{AD}$ $\quad \gamma_4(y) = (0,y) \quad y \in [0,1]$

Remarquer que γ_3 et γ_4 on l'orientation opposée à celle du bord de D.

On a $\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle$ où $V = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \int_{\gamma_1} \langle V, d\gamma_1 \rangle + \int_{\gamma_2} \langle V, d\gamma_2 \rangle - \int_{\gamma_3} \langle V, d\gamma_3 \rangle - \int_{\gamma_4} \langle V, d\gamma_4 \rangle$$

Comme $\gamma_2'(y) = \gamma_4'(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V(\gamma_j) \cdot \gamma_j' = 0$ pour $j = 2, 4$.

Comme $\gamma_1'(x) = \gamma_3'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V(\gamma_j) \cdot \gamma_j' = P(\gamma_j)$ pour $j = 1, 3$.

D'où

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_0^1 P(x,0)\,dx - \int_0^1 P(x,1)\,dx \qquad (00)$$

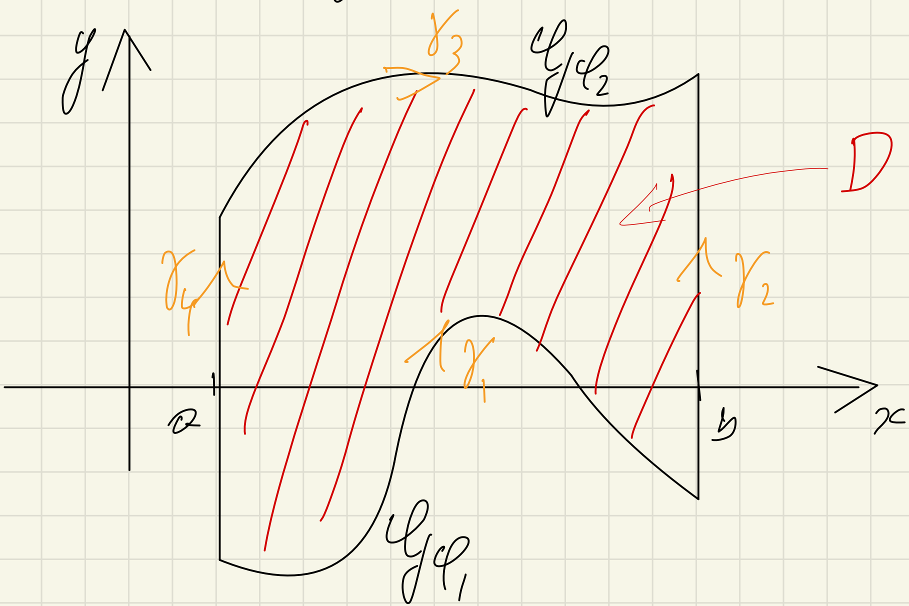
- (0) et (00) montrent $(*)$.

(2) On suppose maintenant

$$D = \{ (x,y) : a \leq x \leq b , \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

où

$$\varphi_j \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \text{ pour } j = 1,2 \text{ et } \varphi_1 \leq \varphi_2 .$$



Montrer que

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \, dx\,dy = - \int_{\partial D} P \, dx . \quad (7)$$

- Le bord de D est formé de 4 courbes C^1 que nous paramétrons de la manière suivante :

$$\gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad x \in [a,b]$$

$$\gamma_3(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad x \in [a,b]$$

$$\gamma_2(y) = \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad y \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad y \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$$

En posant $V = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle$$

$$= \int_{\gamma_1} \langle V, d\gamma_1 \rangle + \int_{\gamma_2} \langle V, d\gamma_2 \rangle - \int_{\gamma_3} \langle V, d\gamma_3 \rangle - \int_{\gamma_4} \langle V, d\gamma_4 \rangle$$

On a, comme en (1), $V(\gamma_j) \cdot \gamma_j' = 0$ pour $j = 2, 4$.

Pour $j = 1$ et $j = 3$ et $x \in [a, b]$, on a

$V(\gamma_1(x)) \cdot \gamma_1'(x) = P(x, \varphi_1(x))$, $V(\gamma_3(x)) \cdot \gamma_3'(x) = P(x, \varphi_2(x))$

d'où

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx \quad (\Delta)$$

- D'autre part, par le théorème de Fubini

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy\, dx$$

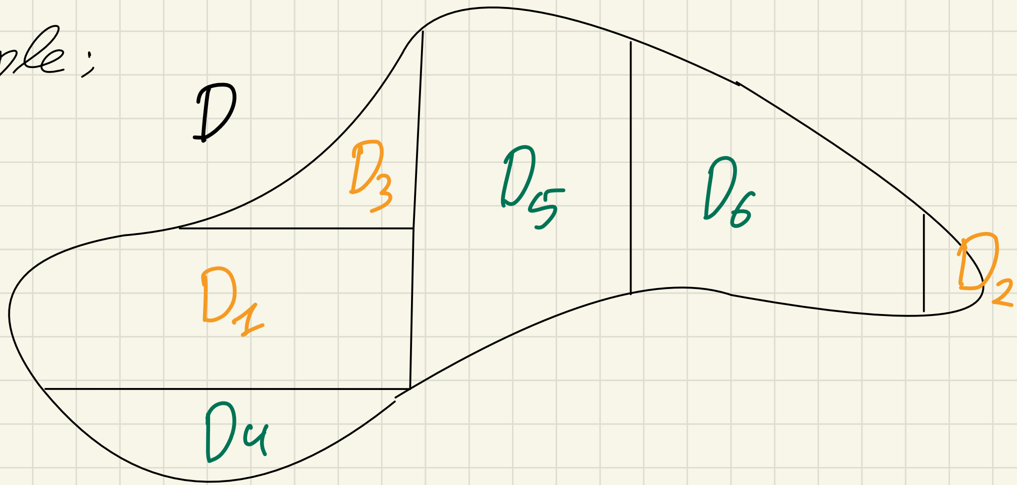
$$= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) - \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx \quad (\Delta\Delta)$$

- De (Δ) et $(\Delta\Delta)$ on déduit $(\neq)$.

(3) On suppose maintenant que D peut être décomposé en un nombre fini de rectangles curvilignes (selon x ou y). Montrer la formule de Green-Riemann.

$D = \bigcup_{j=1}^{J} D_j$ où les D_j sont des rectangles curvilignes avec $|D_j \cap D_{j'}| = 0$ si $j \neq j'$.

Exemple :



D_1, D_2 et D_3 sont de la forme $\{a \leq y \leq b,\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$

D_4, D_5 et D_6 sont de la forme $\{a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

Soit $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^2)$, on a d'après la question précédente

$$\mathcal{Q} := \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\, dy - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \right) = \sum_{j=1}^{J} \iint_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\, dy - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \right)$$

$$= \sum_{j \in J} \int_{\partial D_j} \langle V ; d\gamma_j \rangle$$ où γ_j paramétrage C^1 par morceaux et positif de ∂D_j

Pour tout j, on écrit

$$\partial D_j = \bigcup_{j' \neq j} \Gamma_{jj'} \cup \Gamma_j$$

où on a posé $\forall j j' \quad \Gamma_{jj'} = \partial D_j \cap \partial D_{j'}$

et $\Gamma_j := \partial D_j \cap \partial D$.

Si $j' \neq j''$ $\quad \Gamma_{jj''} \cap \Gamma_{jj''}$ contient au + 2 points

de même que $\Gamma_j \cap \Gamma_{jj'}$

On a donc, en utilisant la relation de Charles établie à l'exercice 6.

$$\int_{\partial D_j} \langle V, d\gamma_j \rangle = \sum_{j' \neq j} \int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle + \int_{\Gamma_j} \langle V, d\gamma_j \rangle$$

En sommant sur j, on a

$$Q = \underbrace{\sum_j \sum_{j' \neq j} \int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_j \int_{\Gamma_j} \langle V, d\gamma_j \rangle}_{\mathrm{II}}$$

- Étudions le terme II. $\forall j$ $\Gamma_j = \partial D_j \cap \partial D$

et on voit que $\partial D = \cup \, \Gamma_j$

où $\Gamma_j \cap \Gamma_{j'}$ contient au plus deux points

De plus γ_j a la bonne orientation Γ_j : il laisse D sur la gauche.

Par l'exercice 6. $\mathrm{II} = \int_{\partial D} \langle V, d\gamma \rangle$ $(\diamond)$

Il reste à montrer que I est nul. On réorganise la somme en séparant $j<j'$ et $j'>j$. On a :

$$I = \sum_{1\leq j'<j\leq J} \int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle + \sum_{1\leq j<j'\leq J} \int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle$$

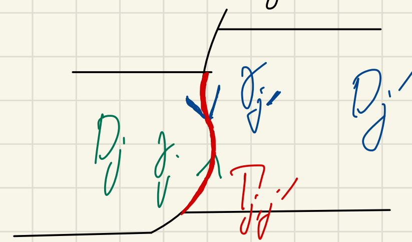
En échangeant les rôles de j et j' dans la seconde somme, on a :

$$I = \sum_{1\leq j'<j\leq J} \left(\int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle + \int_{\Gamma_{j'j}} \langle V, d\gamma_{j'} \rangle \right)$$

Montrons que chacun des termes entre parenthèses est nul.

En effet $\Gamma_{jj'} = \partial D_j \cap \partial D_{j'} = \Gamma_{j'j}$

et γ_j est un paramétrage de $\Gamma_{jj'}$ laissant D_j à gauche tandis que $\gamma_{j'}$ est un paramétrage de la même courbe laissant $D_{j'}$ à gauche (et donc D_j à droite car $j \neq j'$).



Ces paramétrages sont donc d'orientations opposées et

$$\forall j \neq j' \quad \int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_{j'} \rangle = -\int_{\Gamma_{jj'}} \langle V, d\gamma_j \rangle$$

Donc $I = 0$ et l'identité de Green-Riemann découle de $(\diamond)$. $\square$