D'épartement de Mathématiques

M41 - Devoir

22 mai 2020 - Durée 3 heure

La durée de l'épreuve est de 3h et vous avez 30 minutes pour scanner et déposer votre sujet. Aucune copie ne sera acceptée au delà de 17h30 s'il n'y pas eu de tentative de rendu sur moodle avant cette heure.

Vous choisissez 4 exercices parmi les 5 exercices proposés

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $n \geq 0$. $x \in \mathbb{R}$.
(1) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
(2) (i) Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$.
(ii) Etudier la convergence uniforme de la la suite $(f_n)_n$ sur $]0, +\infty[$.
(On pourra considérer la suite $x_n = \frac{\pi}{2n}$ $n \geq 1$).
(3) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\, dx.$$

Exercice 2. Soit

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3},\ n \geq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x).$$

(1) Etudier la convergence de cette série et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
(2) (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$, $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^2(x+n)^{k+1}}.$$

(b) En déduire que f appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 3. Soit la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} x^n$.
(1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier la convergence en $x = -R$ et $x = R$. En déduire que f est continue sur $[-R, R]$.
(2) (a) Calculer $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$.
(b) Montrer que pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \int_0^x -\ln(1-t)\frac{dt}{t}.$$

(3) (a) Calculer $\lim_{t\to 0^+} \ln(t)\ \ln(1-t)$.

(b) Montrer que si $0 < x < 1$, alors on a

$$f(x) + f(1-x) = f(1) - \ln(x)\,\ln(1-x).$$

(On pourra, utiliser une intégration par partie, puis un changement de variable).
(4) En déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-2^{1-n}}{n^2} = (\ln(2))^2.$$

Exercice 4. Soit $0 < a < \pi$ et soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}(a-|x|) & \text{si } \ |x| < a \\ 0 & \text{si } \ a \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(1) (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
(2) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n)}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2}(1-|x|) - \frac{1}{4}.$$

(3) Montrer que pour tout $a \in]0,\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(na)}{n^2} = a(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}).$$

(4) En déduire que

$$\pi = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2.$$

Exercice 5.

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= & x+z \\ y' &= & x+2y-2z \\ z' &= & -2x-2y+z \end{cases}$$

(1) Calculer la solution générale de ce système.
(2) Calculer la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = -1;\ \ y(0) = -2;\ \ z(0) = 0$.