M51 - Groupes, Anneaux & Corps

C1 Ensembles, relations équivalences, cardinal, dénombrabilité

1 - Ensembles

- notion ens, ens vide, élt $x \in E$

1.2. Inclusion, intersection, réunion

D1 inclusion, ss-ens

D2 Réunion 2 ss-ens, intersection, produit cartésien, différence ensembliste

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

- D3 ens équipotents. bijection. m cardinal.

D4 ens non vide fini

D4.0 définition des entiers

P1 injection i, E équipotent à $\mathcal{P}(E) \setminus E$, card $E \neq n$

D5 E fini n'est pas infini.

TH1 Cantor - Bernstein injective injective $\Rightarrow$ équipotents

TH2 Cantor : pas surjection entre $E_{(nv)}$ & $\mathcal{P}(E)$.

2.2. Dénombrabilité

D6 ens infini dénombrable si équipotent à $\mathbb{N}$.

P2 ss-ens ∞ d'1 ens dénomb. est dénomb.

M51 - Groupes, Anneaux & Corps

C1 Ensembles, $\leftarrow R \rightarrow$ équivces, cardinal, dénombrabilité

1 - Ensembles

- notⁿ ens, ens vide, élt $x \in E$

1.2. Inclusion, intersecⁿ, réunion

D1 inclusion, ss-ens
D2 Réunion 2 ss-ens, intersecⁿ, produit cartésien, différence ensembliste

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

D3 ens équipotents. bijecⁿ. m̂ cardinal.
D4 ens non vide fini
D4.0 définiⁿ des entiers
P1 injecⁿ i, E équipotent à $P(E) \setminus E$, card $E \neq n$
D5 E fini n'est pas infini.

TH1 Cantor - Bernstein injective injective $\Rightarrow$ équipotents
TH2 Cantor : pas surjecⁿ entre E (nv) & $P(E)$.

2.2. Dénombrabilité

D6 ens infini dénombrable si équipotent à $\mathbb{N}$.
P2 ss-ens ∞ d'1 ens dénomb. est dénomb.
P3 $\exists$ surjⁿ $f : \mathbb{N} \to E \Rightarrow E$ (d) (E ens ∞).
P4 $E \times F$ (d) P5 $\bigcup$ (d) est (d) P6 $\mathbb{R}$ pas (d).

3. Relatⁿˢ d'équivalce

3.1. Def

D6 $\leftarrow R \rightarrow$ binᵉ R. D7 Rlⁿ d'éqvlce $\boxed{\begin{matrix} R \\ S \\ T \end{matrix}}$ D8 $\bar{x}$: classe d'éqlce $= \{y \in E \mid x R y\}$
ens quotᵗ E/R
D9 Partiⁿ de E P7 ens cdE $\rightarrow$ partiⁿ
D10 f compatible de R P8 $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$; $\bar{f} \circ P = f$
NB décomposⁿ canoniq

C2 Groupes

1. Premières def

1.1 Def

D11 Une Opératⁿ D12 Groupe D13 Groupe abélien
D14 Sous-groupe P11 (Sg) si... P12 $\bigcap_{i \in I} H_i$ (sg) de G
D15 $\langle S \rangle$: ss gpe engendré S de G
int° G (sg) de G contntS.

D16 ordre élt

1.3. Morphismes

D17 MDG ; isomorphisme

P14 mdg alors $\varphi(e)=e'$ & $\varphi(a^{-1})=(\varphi(a))^{-1}$

P15 mdg ∘ mdg = mdg

D18 $\ker\varphi = \dots$ & $\mathrm{Im}\,\varphi$

P16 $\ker\varphi$ Sg G & $\mathrm{Im}\,\varphi$ Sg G'

P17 mdg φ I ssi $\ker\varphi=\{e\}$ | mdg φ S si $\mathrm{Im}\,\varphi = G'$

P18 $\mathrm{Aut}(G)$ (isomorph. ds l. m̂)

P19 $\varphi_g : G\to G$, $x\mapsto gxg^{-1}$ est aut. int.

2. Groupe quotient & groupe produit

2.1. Relat°s de congruences

D19 Relat° de congru à droite & à gauche

P21 Tte classe à dte mod H + bijc° à H.

P22 Ens quotients $(G/H)_g$ & $(G/H)_d$ est en bijct°.

D21 $|(G/H)_g| = |(G/H)_d| = [G:H]$
(l'indice de H ds G)

2.2. Th de Lagrange

Th $|H|$ divise $|G|$. Cor 1 $[G:H].|H| = |G|$

Cor 2 $|x|$ divise $|G|$. Cor 3 $x^n = e_G$.

2.3. Sg distingués

D22 H distingué, $H \trianglelefteq G$ si $\forall g \in H, \forall h\in H$, $ghg^{-1}\in H$.

P23 ASSE H distingué ds G. $gHg^{-1}=H$; $gH=Hg$.

@ tt G abélien : tt Sg H est distingué.

@ $\ker\varphi$ distingué ds G. (φ : MDG).

P25 $[G:H]=2 \Rightarrow H\trianglelefteq G$.

P26 $\mathrm{Int}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$ D23 Le centre $Z(G)$ d'1 G

D24 G simple

2.4. Groupe Quotient

P27 $H\trianglelefteq G$, loi déf ds G/H p cc' donne à G/H une S^re de G.
La surjc° canoniq $\begin{aligned} G &\longrightarrow G/H \\ x &\longmapsto s(x)=xH \end{aligned}$ est $\boxed{MDG}$.

P28 $H\trianglelefteq G$ ssi c'est le ker de morphisme.

2.5. TH d'Isomorphisme

Cor 4 1° Thi : $\varphi = \bar\varphi\circ s$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\bar\varphi$, $\ker\bar\varphi = \ker\varphi/H$, si $H=\ker\varphi$: $G/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$

Th5 2° Thi : $HK/K \simeq H/H\cap K$

Th6 3° Thi : $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$

Th7 Th correspdce : Bijectivité entre appli $\mathcal{H}$...

2.6. Groupe Produit

$H \times K = \{(h,k), h \in H, k \in K\}$; $(h,k)(h',k') = (hh', kk')$

Prop 34 : G isom $H \times K$ ssi $H \triangleleft G, K \triangleleft G, H \cap K = \{e_G\}, G = HK$.

3. Groupe Cycliq

3.1. Définitions

(D) Groupe monog (D) Groupe cycliq

(R) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle = G$

n ordre de a ssi $a^n = 1$ & $\forall k \in \mathbb{Z}, a^k = 1 \iff n/k$.

(P) $\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi k premier à n

(P) cycliq $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $|$cycliq$| = n$

(P) p premier, $|G| = p \Rightarrow G$ cycliq

(P) H cycliq $\to kx \in H \Rightarrow |H| = \frac{n}{k}$

si $d/n \Rightarrow G$ possède ! ordre d engendré p $\frac{n}{d} x$

3.4. (Sg) & produits

(P) $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(\frac{n}{k})\mathbb{Z}$

(P) m, n pee $\Rightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4. Action de groupe

4.1. Défs

(D) Une action

(D) Stabilisateur & Fixateur

(D) X/orbite

(P) G (g) opérant s sur X ⇒ orbites de l'action de X forment partition de X.

4.2. Formule des classes

(P44) $\Omega_x \simeq G/\mathrm{Stab}(x)$

(P45) $\mathrm{card}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}$

4.3. Action par conjugaison

(D) Action p conjugaison + classe de conjugaison

(P47) p-(g)

5. Groupes symétriqs

(D) permutation, cycle, support, transposition

(P48) $|\mathfrak{S}_n| = n!$

5.2. Décomposition en cycles

(Thm) Tte permutation se décompose de manière ! en produit de cycles à supports disjoints.

(L) Support d'1 permutation stable

(L2) k-cycle ; $\langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

3 (P49) 2 cycles à supports disjoints commutent.

R9 $< \sigma >$

E support permut° stable ...

P50 $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$

Th8 cycles à supports disjoints

L $\Omega = \{\sigma^{\ell}(i), \ell \in \mathbb{Z}\}$

Cor6 S_n engendré p transposit°.

Cor7 2 permut° conjug ssi

Prop51 ppcm

5.3. Signature

D34 $\varepsilon(\sigma) = \dfrac{\prod (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod (j - i)}$

P52 $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ MDG

D $\ker \varepsilon$

(Rq) $<\sigma>$

(L) support permt° stable ...

(P86) $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$

(Th8) cycles à supports disjoints

(L) $\Omega = \{\sigma^l(i), l \in \mathbb{Z}\}$

(Cor6) S_n engendré p transposits.

(Cor7) 2 permt° conjug ssi

(Prop51) ppcm

5.3. Signature

(D34) $$\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod (j-i)}$$

(P52) $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ MDG

(D) $\ker \varepsilon$

(P) $A_n \triangleleft S_n$, $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

(P) A_n engendré p 3 cycles

(L) τ_i engendrent S_n (L) $(ik)(ij) = (ijk)$

(Th) Galois A_n est simple.

1

C2 : Anneaux

(D) @ $(A, +, \cdot)$ (D) @ (i) (D) @ (c)

(L) absorbant (P) FFN (D) @ (i)

(D) élt inversible (P) corps (c) (P) (sa)

(D) @ produit

II / idéaux

(D) idéal (Th) A/I (P) $I = A \Leftrightarrow$ (D) $I+J$, IJ

(P) $I+J$, IJ (P) idéal engendré (D) (i) (pl) (P) (i) premier

(D) I premier ssi (P) normal (P) maximal (P) maximal $\Rightarrow$ premier

III / MDA

(D) MDA (P) $\ker \phi$, $\operatorname{Im} \phi$, $\phi^{-1}(J)$, $\phi(I)$ ... surj° ?...

(Th) isomorphisme Correspdce (Th) bijct° $\simeq$

IV / Corps fracts @ (i)

(P) $Fr(A)$

V / Ann x ppx

(D) @ (cf) (pl) (D) $a | b$ (D) irréductible

(P) A @ (pl) ASSE

V.II Décomp en $\prod$ élts irréductibles

(D) $(x) = (y)$ (Th) $x = u \prod_{i \in I} x_i^{n_i}$

Syst représts d' élt irréd.

(q)