M43

C1 Espaces probabilisés

I/ Evts obs. & opé. ensemblistes

- Ω : ens rés possibles de exp.
- ces résultats : évts élémentaires. si card(ens) = 1.
- évts observables : event où l'on pt dire si produit oui ou non.
- A : event obs d'où $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $A \Rightarrow B$ ie $A \subset B$.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Big| \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- nbr ordres possib pr n objets : $n!$
- nbr façon prdre p objets parmi n : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$
- ens ∞ E dénombrable s'$\exists$ bijecto de $\mathbb{N}^*$ vers E, $E = \{u_1, u_2, \dots\}$.
- FF Binôme de N : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$
- séries géo : ▸ si $x \neq 1$, $\sum_{k=M}^{N} x^k = \dfrac{x^M - x^{N+1}}{1-x}$

  ▸ si $|x|<1$, $\sum_{k=M}^{\infty} x^k = \dfrac{x^M}{1-x}$
- série expo, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

III / Une proba est une f d'ens

- Ω : ens rés poss. de exp
- $\mathcal{F}$: ens evts observables.

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega$ ie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$

⚠ $\mathcal{F}$ n'est pas partie de Ω.

D $\mathcal{F}$ est tribu si :

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$: on st dire si évt cert$_1$ a eu lieu

(ii) si $B \in \mathcal{F}$ alors $B^c \in \mathcal{F}$ (voir evt réalisé ou non)

(iii) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

→ un ens $\mathcal{F}$ 4 pptés s'appelle tribu sur Ω.

→ si Ω est fini, on choisit svt $\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)}$!

D Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une applicaθ σ-additive de masse totale 1 :

$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ et $P(\Omega) = 1$ masse totale

$A \longmapsto P(A)$

- σ-additivité : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ pr tte suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'élts de $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints.

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé. $(\Omega, \mathcal{F})$ espace probabilisable.

Pptés probas : Toute proba P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie :

(i) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$ indépendants.

si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ st 2 à 2 disjts $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

(v) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ généralθ FF Poincaré.

(vi) Continuité séquentielle ↗/↘ :

▸ pr tte suite ↗ evts $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$

▸ pr tte suite ↘ evts $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(C_n)$.

(vii) Pour events qq (m̂ non disjoints)

▸ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

▸ $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ et $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

FF ①

(C2) Probabilité conditionnelles, indépendance

$$P_H(A) = P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad \text{tq} \quad P(H) \neq 0.$$

$P_H = P(\ \mid H)$: $\mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, $A \longmapsto P(A \mid H)$ est une proba sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Règle de conditionnement successif (ou proba composées) :
si les evts $A_1, \dots, A_n$ st tq $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ alors

$$P(A_n \cap \dots \cap A_1) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \times \dots \times P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_1)$$

(D) **Une partitⁿ de Ω** : une famille $(H_i)_{i \in I}$ d'evts non vides ($\forall i \in I$, $H_i \neq \emptyset$) 2 à 2 disjoints ($i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$) et dont l'union est Ω. ($\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$). (un système complet d'evts).

- si $P(H) \neq 0$ et $P(H^c) \neq 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$, $\boxed{P(A) = P(A \mid H).P(H) + P(A \mid H^c).P(H^c)}$
- si $H_1, \dots, H_n$ est une partitⁿ de Ω constituée d'evts tous de proba non-nulle : $\forall A \in \mathcal{F}$: $\boxed{P(A) = P(A \mid H_1).P(H_1) + \dots + P(A \mid H_n).P(H_n)}$
- si $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partitⁿ de Ω, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid H_i).P(H_i)}$$

FF de Bayes : $P(H_j \mid A) = \dfrac{P(A \mid H_j).P(H_j)}{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A \mid H_i).P(H_i)}$ où H_i est une partitⁿ de Ω.

II / Indépdce

- Initialemᵗ si aucune info sur A : $P(A \mid B) = P(A)$.

(D) 2 evts A, B st **indépendants** ss la proba P si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Rq $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A).P(B)$.

Prop si A, B indpdts ss $P \Rightarrow A, B^c$ aussi (resp A^c, B, A^c, B^c)

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

III / Indepdce de + 2 evts

(D) (i) A, B, C st **indépdts** sous P si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, $P(A \cap C) = P(A).P(C)$, $P(B \cap C) = P(B).P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

(ii) n évts st **indpdts** si proba intersecⁿ = produit probabilités

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appelé "**suite évts indpdts**" si $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ st indpdts pr chq chx nbr fini d'indices distincts

- Suites épreuves indép : ds suite xp, ells st **indpts** si tte suite evts $A_1, \dots, A_q, \dots$ où chq A_i ne d'pd q ses prochaine xp, forme suite évts indpts.

- **Schéma de Bernoulli** : suite xp indép ttes m̂ proba p succès, $1-p$ échec.
- $A_i = \{\text{succès } i^{e} \text{ épreuve}\}$, $D_n = \{1^{er} \text{ succès arrive à } n^{e} \text{ épreuve}\}$; A_i indpdts

$$P(D_n) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) = P(A_1^c) \times \dots \times P(A_n)$$

$$P(D_n) = (1-p)^{n-1}.p$$

- $G_{n,k} = \{k \text{ succès } \& \ n-k \text{ échecs parmi } n \text{ épreuves}\}$

$$P(G_{n,k}) = P\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \mathrm{card}(I) = k}}}_{\text{2 à 2 disjts}} \Big((\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{\substack{j \notin I \\ j \leq n}} A_j^c) \Big)\Big)$$

$$= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} P\big((\cap A_i) \cap (\cap A_j^c)\big) \qquad A_i \text{ indpdts}$$

$$= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \prod P(A_i).\prod P(A_j^c) = C_n^k\, p^k.(1-p)^{n-k}$$

Loi binomiale.

◦ Loi de Murphy : "Tout ce q pt mal tourner finira par mal tourner" bes1 hyp de evts indpdts

C3 Variable Aléatoire & Lois

D Une VA discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appli $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$

tq $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ → ens fini ou dénomb

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

• $\forall x_k \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x_k\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\{x_k\}) \overset{not}{=} \{X = x_k\}$. image réciproq

Notat° : $\{X \leq t\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\} = X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$.

$\{a \leq X \leq b\} = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\} = X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.

• Pour X vad, on note $p_k = P(X = x_k)$ pr chq $x_k \in X(\Omega)$

$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$

$B \longmapsto P_X(B) = \sum_{x_k \in B} p_k = \sum_{x_k \in B} P(x = x_k) = P(X \in B)$

• P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée loi de X.

◦ Loi de Murphy : "Tout ce q pt mal tourner finira par mal tourner" bes1 type evts indpdts

C3 Variable Aléatoire & Lois

(D) Une (va) discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appli $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$

tq $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ → ens fini ou dénomb

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

• $\forall x_k \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x_k\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\{x_k\}) \underset{=}{\text{not}} \{X = x_k\}$. image réciproq

Notat° : $\{X \leqslant t\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant t\} = X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$.

$\{a \leqslant X \leqslant b\} = \{\omega \in \Omega, a \leqslant X(\omega) \leqslant b\} = X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.

• Pour X (vad), on note $p_k = P(X = x_k)$ pr chq $x_k \in X(\Omega)$

$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$

$B \longmapsto P_X(B) = \sum_{x_k \in B} p_k = \sum_{x_k \in B} P(x = x_k) = P(X \in B)$

• P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée **loi de X**.

(D) La f de répartit° de (va) X est f, $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F_X(t)$

$F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leqslant t) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant t} P(X = x_k)$

$\boxed{\text{Rq}}$ L'indicatrice evt A : $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$.

(*) (si $n \geqslant 100$, $np \leqslant 10$ → ue Pois(n, p) que Bin(n,p).

• Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $X \sim \text{Ber}(p)$ si $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

• Loi uniforme sr ens fini $\{x_1, \dots, x_n\}$: $X \sim \text{Unif}(\{x_1, \dots, x_n\})$ si $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$ ie P_X équiproba.

• Loi Binomiale de param n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$) : $X \sim \text{Bin}(n,p)$ si $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ où $\sum C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$

si evts $A_1, \dots, A_n$ indpdts proba p : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \sim \text{Bin}(n,p)$

• Loi Hypergéométriq de param N, M, n : $X \sim \text{Hypergéom}(N,M,n)$

si $P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant M,\ 0 \leqslant n-k \leqslant N-M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

@ ampoules grillées

• Loi géométriq param p : $X \sim \text{Géom}(p)$ si $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

• Loi de Poisson param λ, $\lambda \in]0,\infty[$: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ si $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

(va déterministe)

• Mesure de Dirac en $c \in \mathbb{R}$: $X \sim \delta_c$ si $P(X=c) = 1$.

(D)
- La loi Bin(n,p) est loi nbr "succès" obtenus en n expériences aléat. indépendantes q ont ttes m̂ proba p de "succès".
- La loi Hypergeom (N, M, n) est loi nbr objts remarquables tirés qd on tire au hasard sans remise ds tas N objets dont M st remarquables.
- La loi Géom (p) est loi nbr tentatives nécessa pr obtenir 1° "succès" ds suite de tentatives indpdtes q ont toutes m̂ proba p de succès.

Th Converge des binomiales vers les Poisson.

si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $[0,1]$ tq

$$\lim_{n\to\infty} n P_n = \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(Y=k)$ si

$X_n \sim Bin(n, p_n)$ et $Y \sim Pois(\lambda)$.

(Th) Convergence des binomiales vers les Poisson.

si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $[0,1]$ tq

$\lim_{n\to\infty} n\, p_n = \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $\lim_{n\to\infty} P(X_n=k) = P(Y=k)$ si

$X_n \sim \mathcal{B}in(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$.

(Th) CVce des hypergéométriqs vers les binomiales

si $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = p \in [0,1] \Rightarrow \forall k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M(N)}{k} \cdot \binom{N-M(N)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

ie $\lim_{N\to\infty} P(X_n=k) = P(Y=k)$ si $\begin{cases} X_n \sim Hyperg(N, M(N), n) \\ Y \sim \mathcal{B}in(n,p). \end{cases}$

(si taille N objts tr's grd ⇒ tirer n objts AVEC ou SANS remise ne chge pas grd chose.

IV / Vecteurs aléatoires discrets

(D) soit $X_1, X_2, \dots, X_m$ des (va) def sr m̂ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
On appelle vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ l'applicatᵒ :

$\Omega \to \mathbb{R}^m$

$w \mapsto (X_1(w), X_2(w), \dots, X_m(w))$

Sa loi est la proba $P_{X_1,\dots,X_m}$ def sr $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ par :

$\forall B \subset \mathbb{R}^m$, $P_{X_1,\dots,X_m}(B) = P(\{w \in \Omega, (X_1(w), \dots, X_m(w)) \in B\})$

Elle est caractérisée p/ $P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right)$
p/ ttes vlRs x_1 de $X_1(\Omega)$, ... etc.

si $m=2$: couple aléatoire, la (va) X_i est iè marginale du vectr aléatr, sa loi P_{X_i} est iè loi marginale.

(Rq) loi → lois marginales. Mais $l_m \not\to l$. (déducᵒ)

Astuce si (X,Y) couple aléatoire $\forall x \in X(\Omega)$,

$$P(X=x) = P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)$$

car $\{X=x\} = \bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{X=x \text{ et } Y=y\}$.

(D) • 2 (va) discrètes X & Y def sr 1 m̂ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ st indpdtes si $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $P(X\in A, Y \in B) = P(X \in A) . P(Y \in B)$.

• les 2 (va)d. $X_1, \dots, X_m$ def sr $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ st indpdtes si les evts $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ st indptes p/ ttes parties de $A_1, \dots, A_m$ de $\mathbb{R}$.

• suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de (vad) indp. si tt ss-suite indp.

(P) $X_1, \dots, X_m$ (vad) indp si $\forall x_1 \in X_1(\Omega) \dots \forall x_m \in X_m(\Omega)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^m P(X_i = x_i)$$

(P) si $X_1, \dots, X_m$ st (vad) indpd & si $f_1, \dots, f_m$ st des applis def resp sr $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ st indpts.

on note : $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

Loi multinomiale de param $n, p_1, p_2, \dots, p_n$

- $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r \in [0,1]$ tq $p_1 + \dots + p_r = 1$.
- n espaces indp. ont chacune r résultats possibles de probabilit. resp $p_1, \dots, p_r$.

On note X_1 le nbr fois où on a res type 1, …, X_r nbr … type r.

- $(X_1, \dots, X_r) \sim \mathcal{M}ult(n, p_1, \dots, p_r)$; $\forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{k_i}) \quad \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{r} k_i = n}$$

Rq : $\binom{k_1}{n} \binom{k_2}{n-k_1} \binom{k_3}{n-k_1-k_2} \cdots \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)}$

@ $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \sim \mathcal{M}ult(n, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ dé lancer 1000 fois.

Rq : $X \sim \mathcal{B}in(n, p) \iff (X, n-X) \sim \mathcal{M}ult(n, p, 1-p)$.

C1 Espérance, Variance, Inégalités de Mapkob & de Чебышев.

I/ Espérance

@ $\frac{\sum_{i=0}^{20} i\, n_i}{n} = \sum_{i=0}^{20} i \frac{n_i}{n} = \sum_{i \in X(\Omega)} i\, P(X=i)$

1) Def

→ une va discrète X est intégrable si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < \infty$$

→ Une espérance alors $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$

→ si $X(\Omega)$ finie ou bornée : $|x_k| \leq M \Rightarrow X$ est intégrable.

→ 2 va q ont m̂ loi ⇒ ont m̂ espérance.

@ $X \sim \mathcal{U}nif(\{1,2,3,4,5,6\})$; $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i\, P(X=i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7}{2} \times \frac{1}{6} = 3{,}5$.

→ l'espérance n'est pas une v^{R} très probable. | X pt ne pas avoir d'espérance.

2) Pptés

soit X, Y 2 vad intégrables.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
- si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$; si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.
- si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intég.