Ex Géométrie Différentielle

§5. Courbes

Courbe Paramétrée

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

t	-1	0	1	2
$f(t)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
$g(t)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$
	$\downarrow$ M_1	$\downarrow$ M_2	$\downarrow$ M_3	$\downarrow$ M_4

Étapes de Résolu

① Symétrie ② TAV_y^x ③ Points doubles

@1. $I = \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$

x et y st $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

① $x(-t) = x(t)$ & $y(-t) = -y(t)$

$M(-t)$ est le symétriq de $M(t)$ p/ axe (Ox).

Étude courbe pr $t \in [0, \infty[$

② $x'(t) = 6t$

$y'(t) = 3(1-t^2)$

$M(0) = (-2, 0)$

$\vec{v}(0) = (0, 3)$

$M(1) = (1, 2)$

$\vec{v}(1) = (6, 0)$

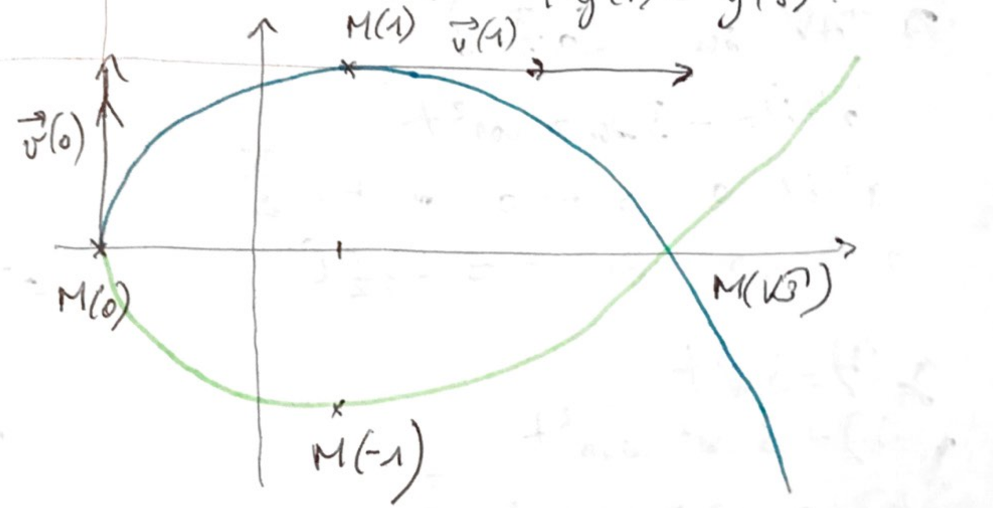
t	0		1		∞
$x'(t)$	0	$+$	6	$+$	
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	
$x(t)$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$y(t) = 0 \Leftrightarrow t(3-t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Point $t = \sqrt{3}$: $x(\sqrt{3}) = 7 = x(-\sqrt{3})$.

$\vec{v}(-t) = (x'(-t), y'(-t)) = (-x'(t), y'(t))$ est le symétriq de $\vec{v}(t)$ p/ (Oy).

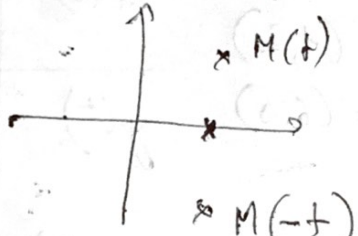
③ Chercher $t \neq s$ tq $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$.



Ⓔ 2 $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ 2π-périodiq

① Domaine d'étude $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$ → Tt support courbe $t\in[-\pi,\pi]$.

$\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$



étude $[0,\pi]$

- $x(\pi - t) = -x(t)$
  $y(\pi - t) = y(t)$ " $t = \frac{\pi}{2} + t$ "

$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = -x(\frac{\pi}{2} + t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = y(\frac{\pi}{2} + t) \end{cases}$ ⇒ δ $[0, \frac{\pi}{2}]$

② TAV sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t$

$x'(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$.

$x'(t) < 0 \iff t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$y(t) = \sin^3 t$

$y'(t) = 3 \cos t \sin^2 t$

$y'(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$

$y'(t) > 0 \iff t \in]0, \pi/2[$.

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$	0
$x(t)$	1	↘	0
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	↗	1

③ Pt particulier $t = \frac{\pi}{4}$,

$M(\frac{\pi}{4}) = (x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

tgte en ce pt: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \to \vec{v}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -3\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ Pts singuliers sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ $\quad M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$ pts singuliers

Tangente en $M(0)$: $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{\sin^3 t - 0}{\cos^3 t - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^3 - 1}$

$= \dfrac{t^3}{\cancel{1} - \frac{3}{2}t^2 + o(t^2) - \cancel{1}} = \dfrac{t^3}{-3/2\, t^2 + o(t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

Tangente en $M(0)$ de pente nulle : de tgt horizontale

② — $M(\frac{\pi}{2})$ verticale.

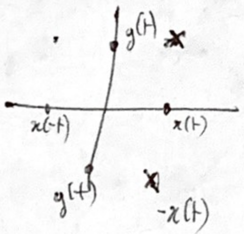
(ii) $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ $\quad$ $M(0) = (0,0)$ $\quad$ $M(\frac{\pi}{2}) = (1,0)$

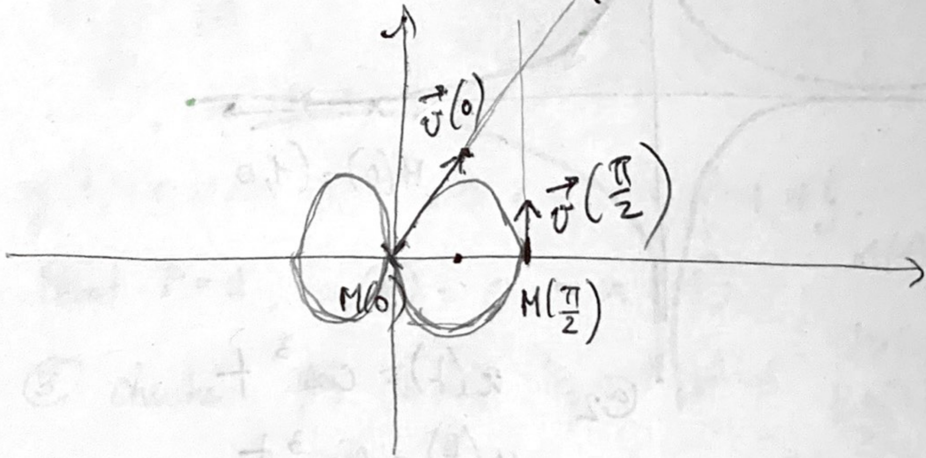
$\vec{v}(0) = (1,2)$ $\quad$ $\vec{v}(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{\pi}{4})$

$I = \mathbb{R}$. $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ $\quad C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2π-périodique

$\begin{cases} -x(t) = x(-t) \\ -y(t) = y(-t) \end{cases}$





$\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ $\quad$ x $[0, \frac{\pi}{2}]$.

TAV^x_y

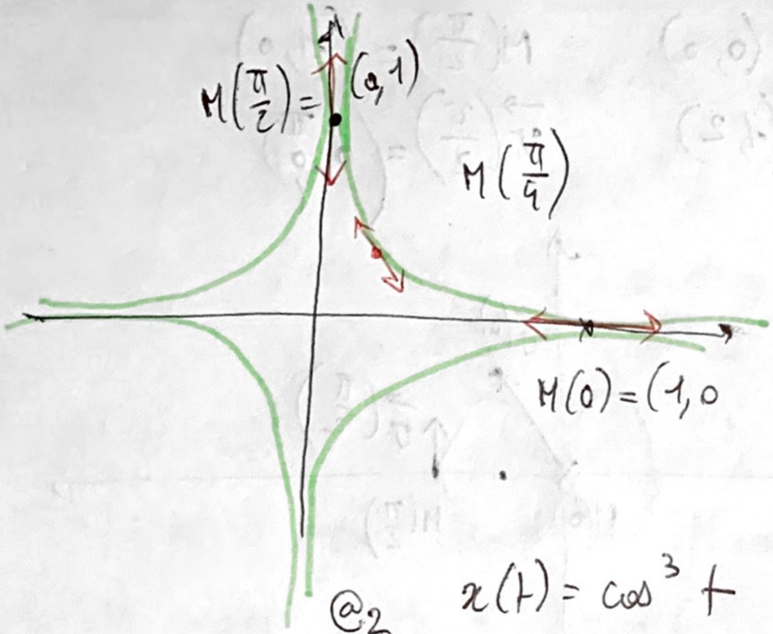
$x'(t) = \cos t$

$x'(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ | $x'(t) > 0$ s $[0, \frac{\pi}{2}]$

$y'(t) = 2\cos(2t) \iff t = \frac{\pi}{4}$

$y'(t) = 0$ $\quad$ $y'(t) > 0$ s $[0, \frac{\pi}{2}]$

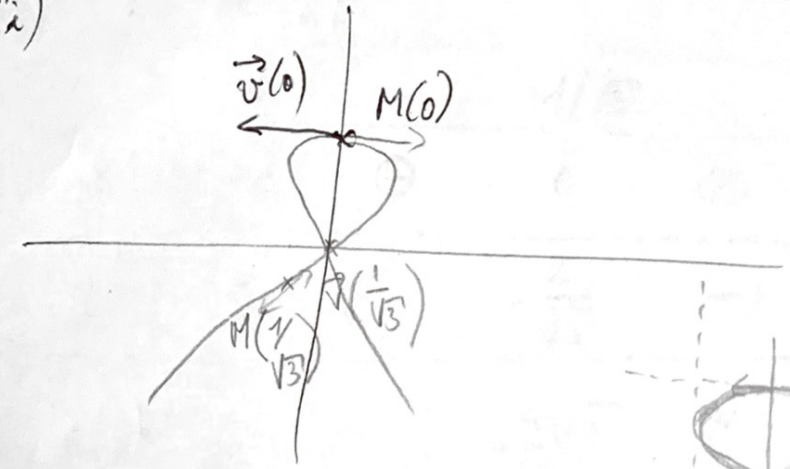
t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	1	$+$	0
$y'(t)$	2	$+$	$\frac{\pi}{4}$
$x(t)$	0	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	0

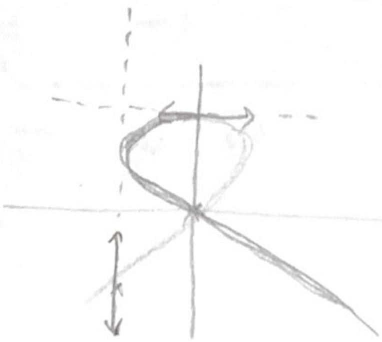


$\mathscr{C}_2$ $x(t) = \cos^3 t$

$y(t) = \sin^3 t$

(ii)





5.2 ~~(I)~~ Tracer des plan $\mathbb{R}^2$ courbes

(i) $\gamma(t) = (t^3 - t, 1 - t^2)$

$I = \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$ x et y st $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

① $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$

$M(-t)$ est le sym. de $M(t)$ ~~p~~ axe (Oy).

Étude courbe pr $t \in [0, \infty[$.

② $x'(t) = 3t^2 - 1 = 3(t^2 - \frac{1}{3})$

$y'(t) = -2t$

t	0		$1/\sqrt{3}$		∞
$x'(t)$	-1	$-$	0	$+$	
$y'(t)$	0	$-$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	∞
$y(t)$	1	$\searrow$	$-1/3$	$\searrow$	$-\infty$

③

~~$M(0) = (-1, 0)$~~ $M(0) = (0,1)$

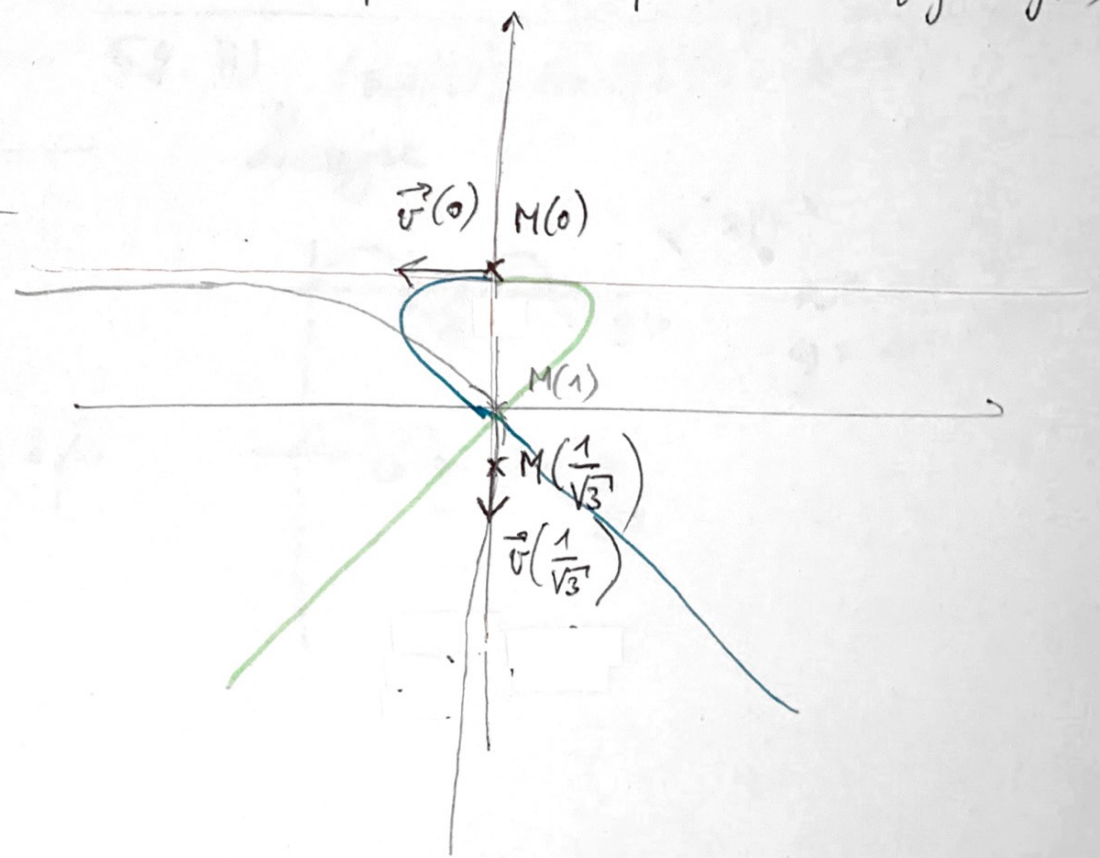
$\vec{v}(0) = (-1, 0)$

$M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

$y(t) = 0 \iff 1 - t^2 = 0 \iff t \in \{-1, 1\}$.

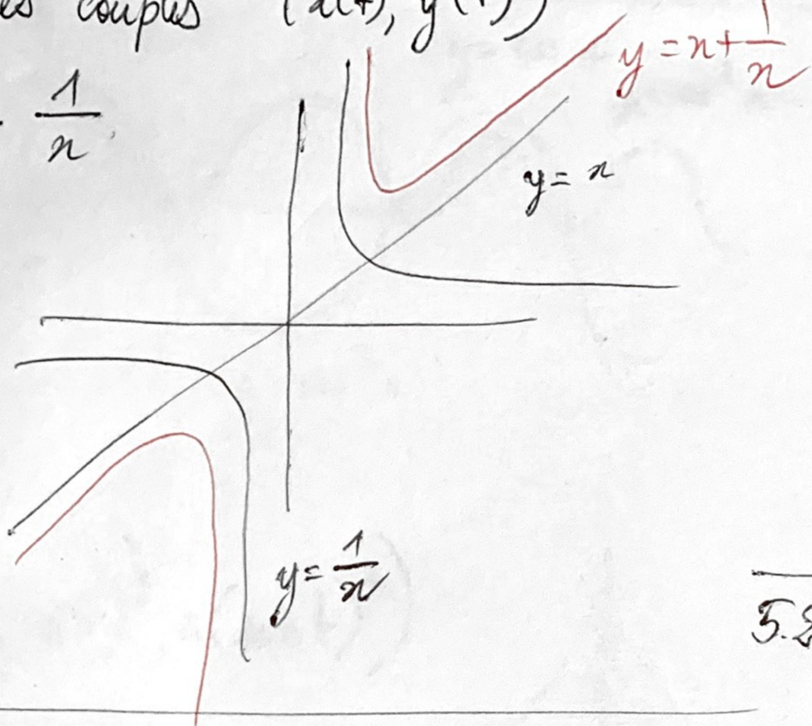
Point $t = 1$, $x(1) = 0 = x(-1)$ $M(1) = (0,0)$

③ chercher pts doubles tq $t \neq s$, $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$



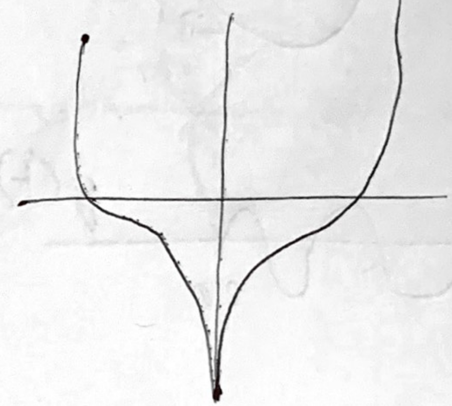
1° Placer des couples $(x(t), y(t))$

$y(x) = x + \frac{1}{x}$

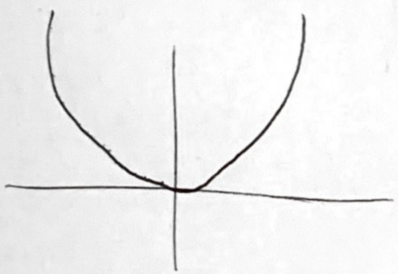


La tractrice

$\gamma(t) = \left(\sin(t), \cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$



La chaînette $\gamma(t) = (t, \cosh t)$



Corde attachée à 2 pts

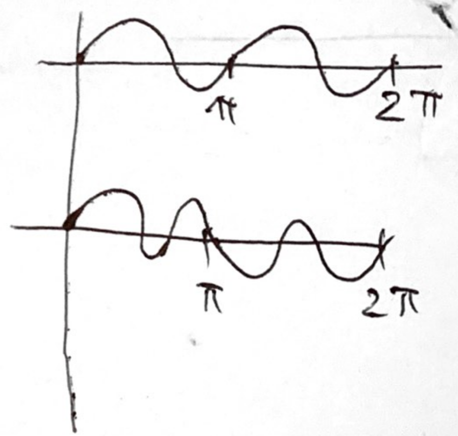
5.2. ii) $(\sin(at), \sin(bt)) = \gamma(t)$

Lissajou

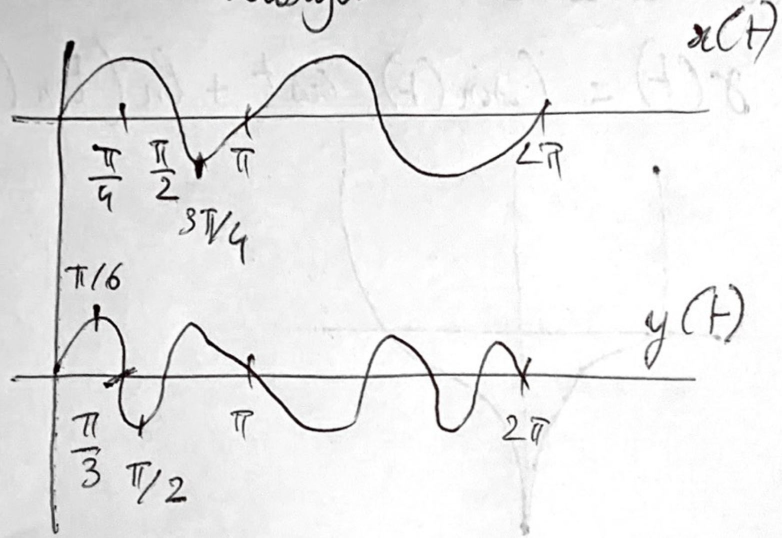
$x(t)$

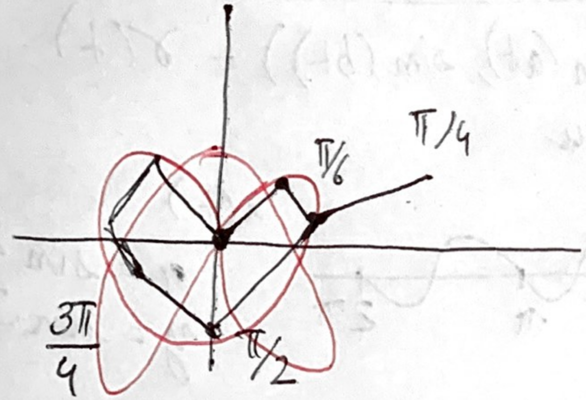
$x = \sin 2t$

$y = \sin 3t$

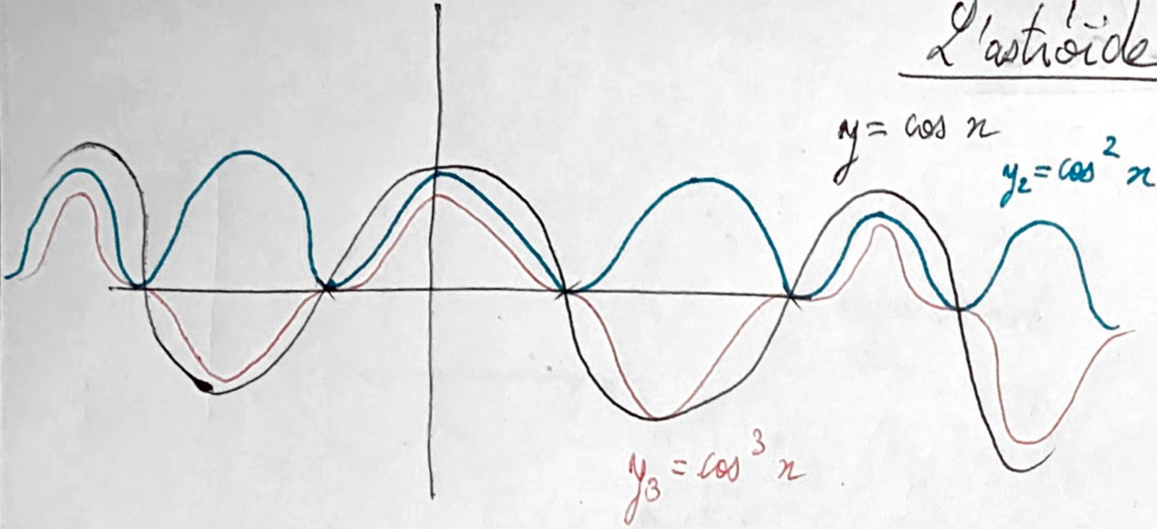


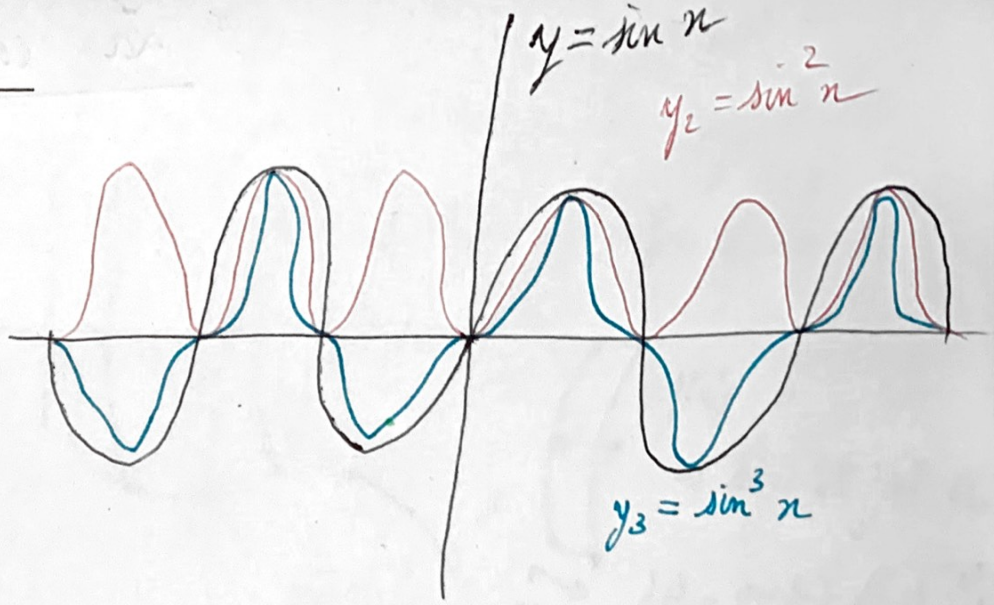
Courbe de Lissajou





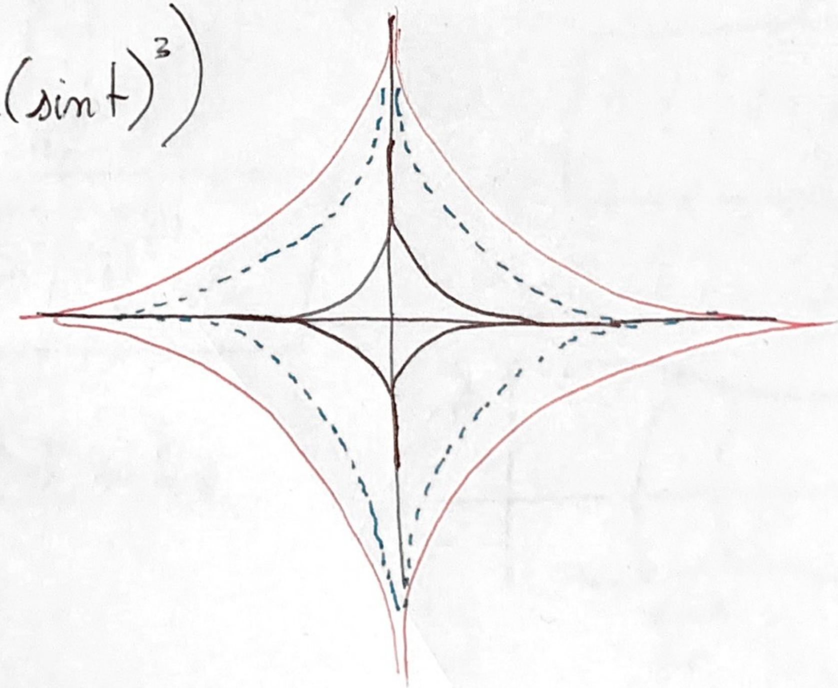
L'astroïde



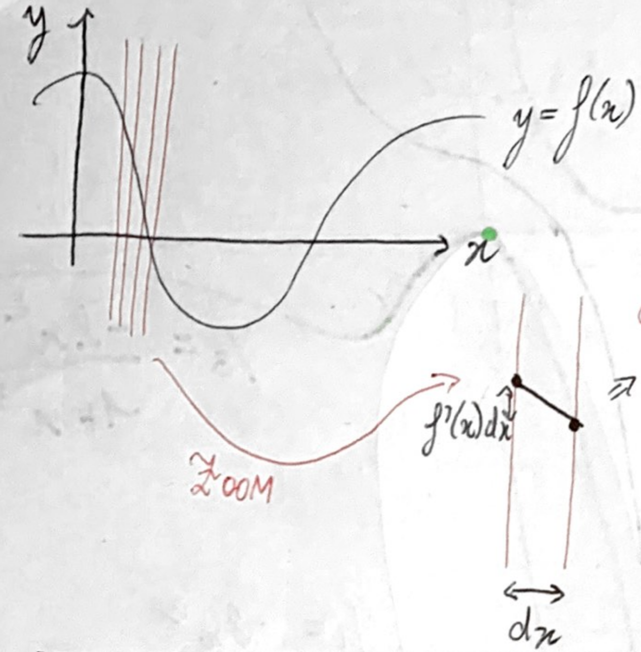


$$\gamma(t) = \left(a(\cos t)^3, a(\sin t)^3\right)$$

$a > 0$.



Longueur d'une courbe



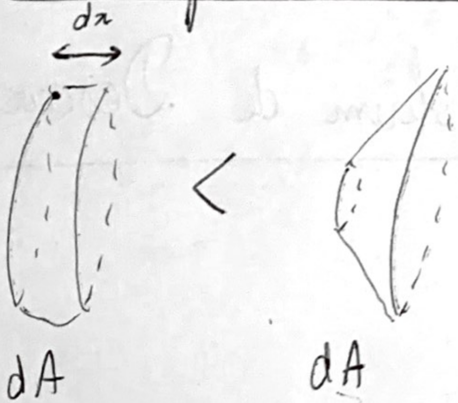
Élt de longueur infinitésimal

$$dL = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

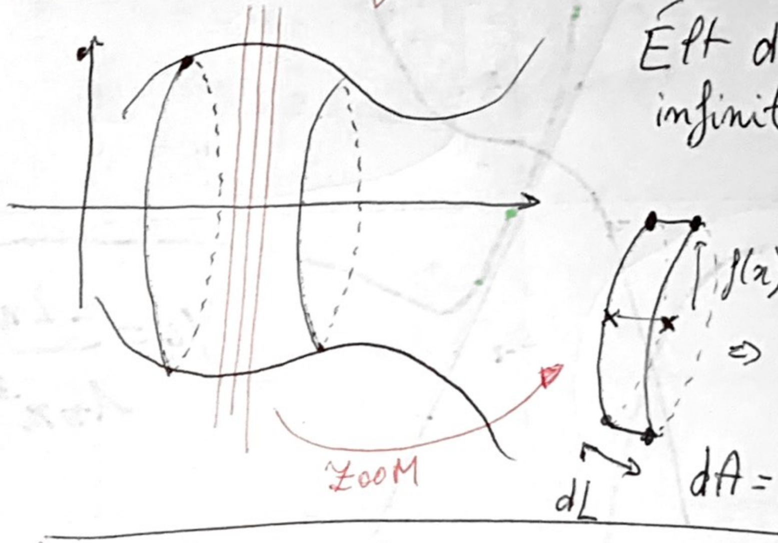
(par Pythagore)

$$\boxed{L = \int dL = \int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Erreur par le calcul de surface



Aire d'une surface de révolut°



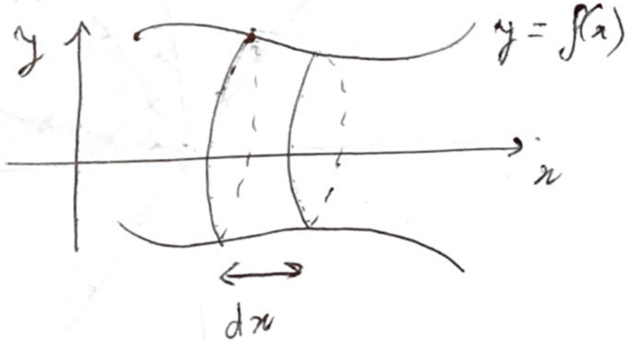
Élt d'aire infinitésimal

$$\Rightarrow dA = 2\pi\, f(x) \cdot dL$$

$$dA = 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$\boxed{A = \int dA = \int 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

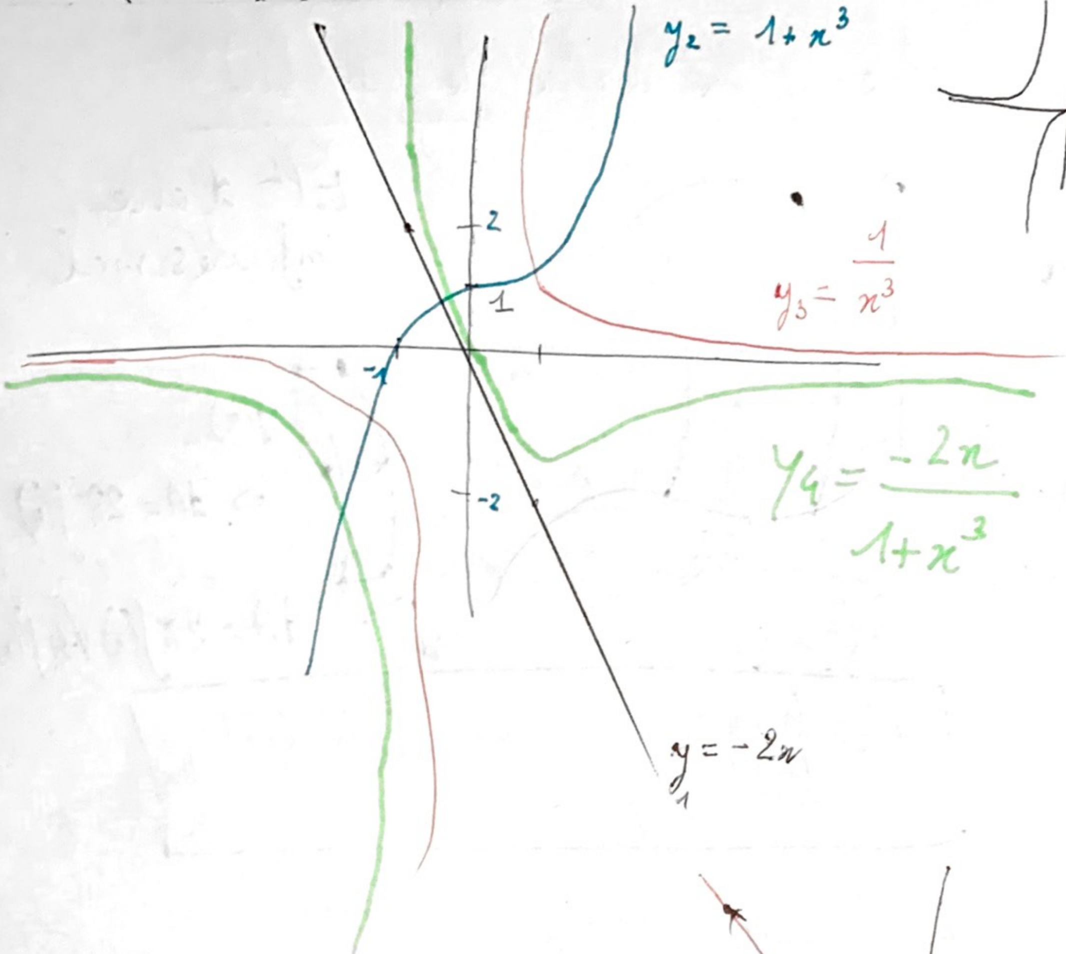
Volume d'un solide de révolut°

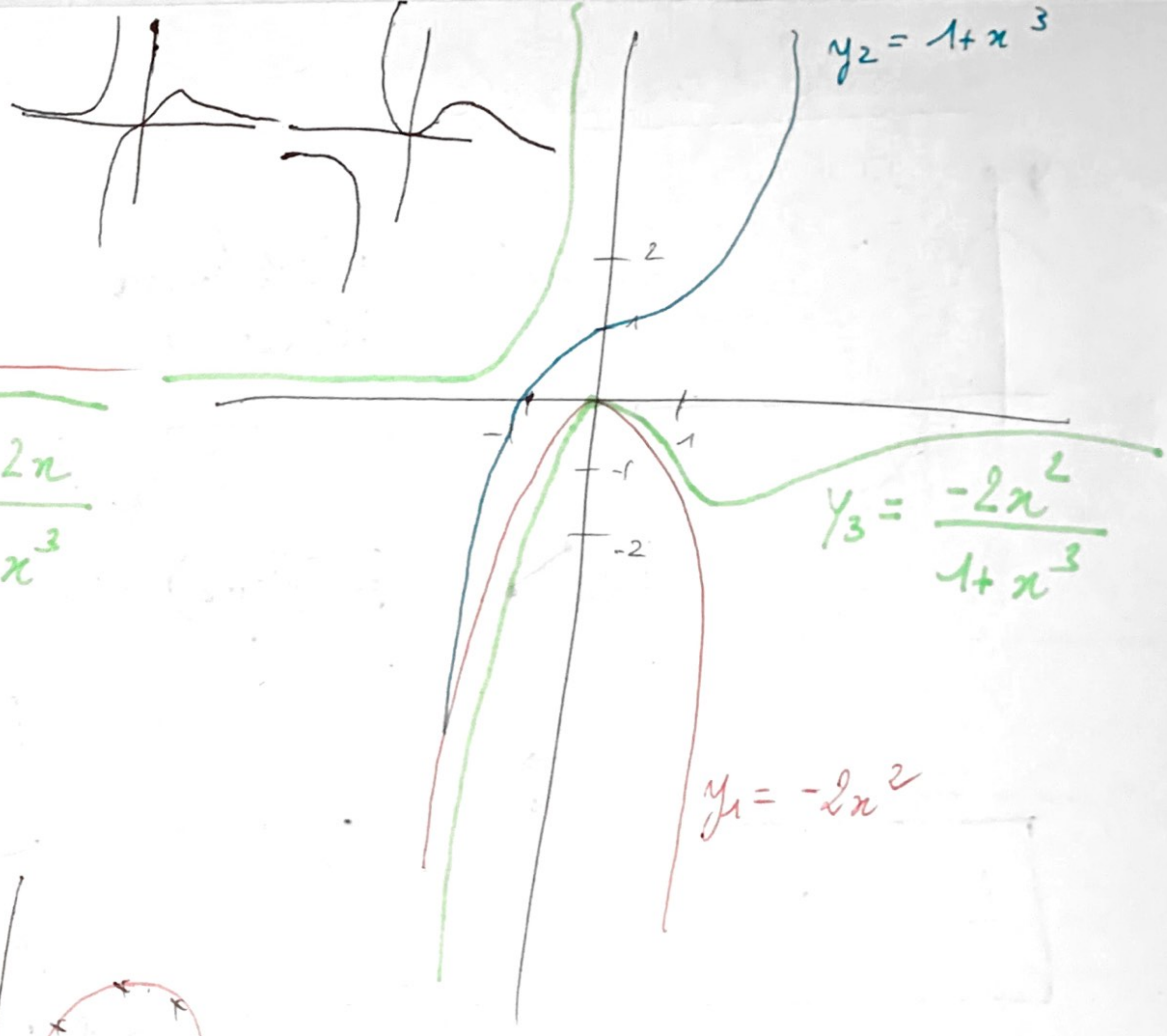


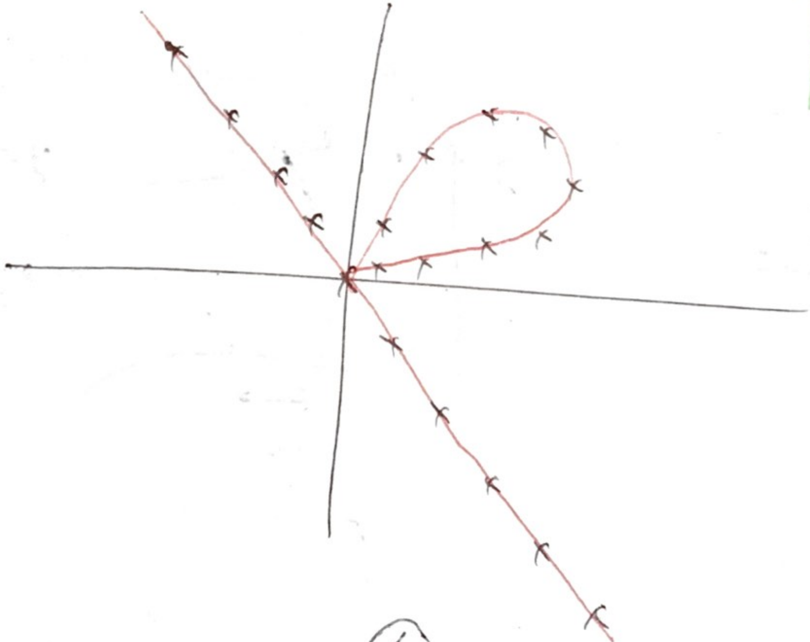
Élt de volume infinitésimal :

$$dV = \pi f(x)^2\,dx$$

$$\boxed{V = \int dV = \int \pi f(x)^2\,dx}$$







$$\gamma(t) = \left(\frac{+2x}{1+x^3}, \frac{+2x^2}{1+x^3}\right)$$

le folium de Descartes

(vi) Le folium de Descartes.

$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^3}, \frac{2t^2}{1+t^3} \right)$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{2t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

ni paire ni impaire.

Étude sur ~~[illegible]~~ $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,\infty[$.

$$x'(t) = \frac{2t(3t^2) - 2(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{\cancel{-2t^3}\ 4t^3 - 2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{2(2t^3-1)}{(1+t^3)^2}$$

$x'(t) = 0 \iff 2t^3 - 1 = 0$

$t^3 = \frac{1}{2} \iff \boxed{t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \approx 0{,}79$

$$y'(t) = \frac{2t^2(3t^2) - 8t(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{-2t^4 - 8t}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{-2t(t^3+4)}{(1+t^3)^2}$$

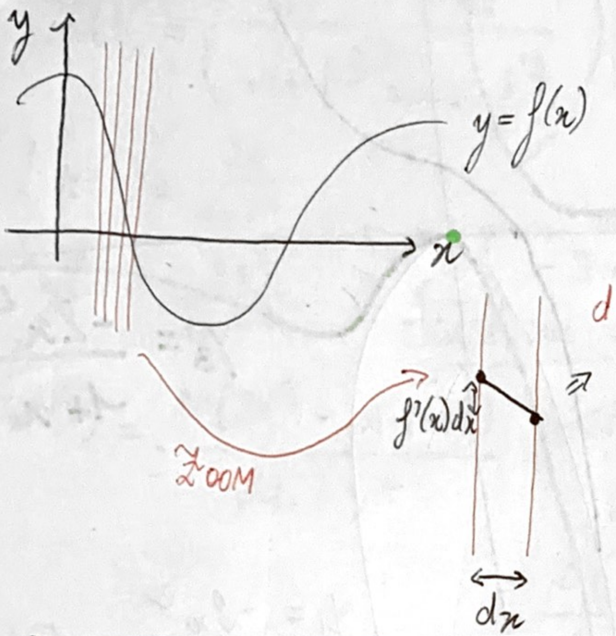
$y'(t) = 0 \iff -2t^4 - 8t = 0$

$\iff -2t(t^3+4) = 0$

$\iff t = 0$ ou $t = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$

t	
$x'(t)$	
$y'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	

Longueur d'une courbe



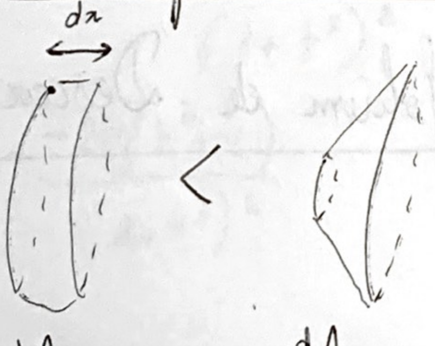
Élt de longueur infinitésimal

$dL = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

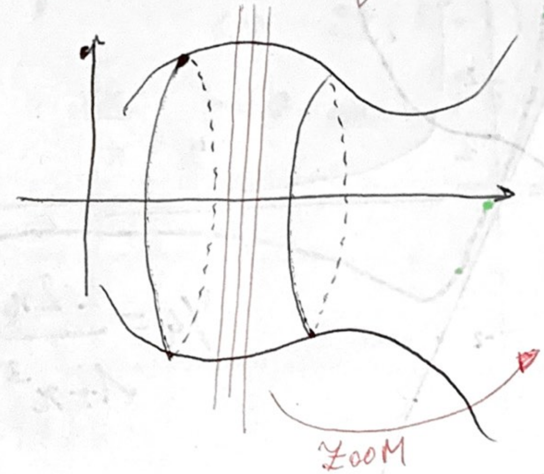
(par Pythagore)

$$\boxed{L = \int dL = \int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Erreur par le calcul de surface



Aire d'une surface de révolut°



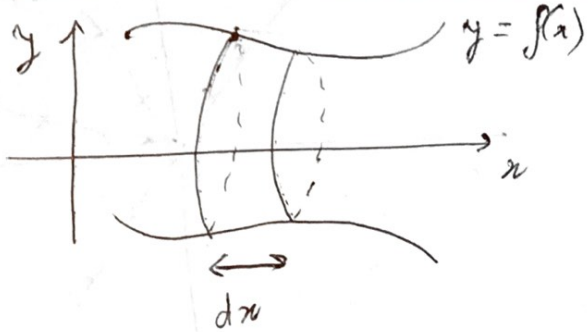
Élt d'aire infinitésimal

$\Rightarrow dA = 2\pi\, f(x).\, dL$

$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$$\boxed{A = \int dA = \int 2\pi\, f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Volume d'un solide de révolut°



Élt de volume infinitésimal :

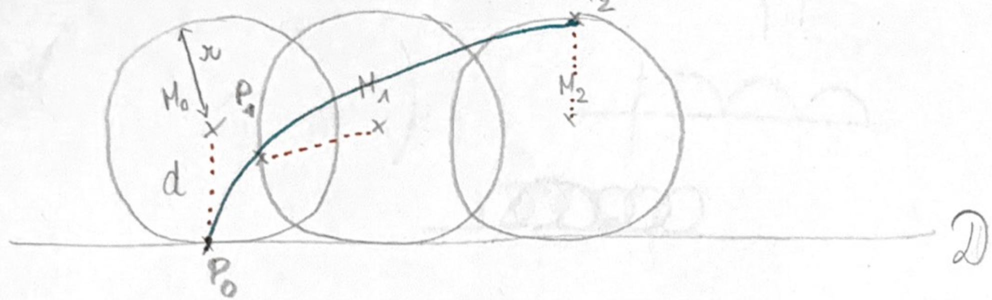
$dV = \pi\, f(x)^2\,dx$

$$\boxed{V = \int dV = \int \pi\, f(x)^2\,dx}$$

5.4 Cycloïde

$\gamma(t) = (\quad , \quad)$

$\mathcal{D}_f =$



$\mathcal{D} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$

rayon roue r ; point à distance d du centre de la roue

→ mvt de ce point f d, r

si $d = r$: cycloïde

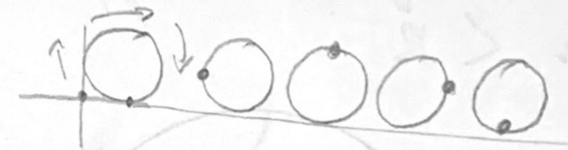
$\boxed{?}$ 2° schéma : pk 2° cercle ne touche pas le rail (la droite $\mathcal{D}$).

$\gamma_1 = (r.\cos(t) + 1, r.\sin(t) + 1)$

$\gamma_2 = (r.\cos(t) + 2, r.\sin(t) + 1)$

$\gamma_3 = (r.\cos(t) + 3, r.\sin(t) + 1)$

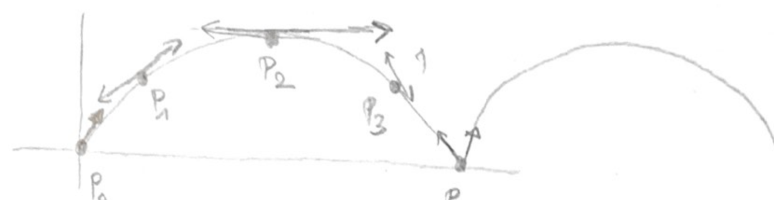
$a > 1$, $\gamma_a = (r.\cos(t) + a, r\sin(t) + 1)$



$$\begin{cases} x(t) = rt - r\sin t \\ y(t) = r - r\cos t \end{cases}$$

$\gamma_r = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$

$\gamma_d = (r(d - \sin d), r(1 - \cos d))$

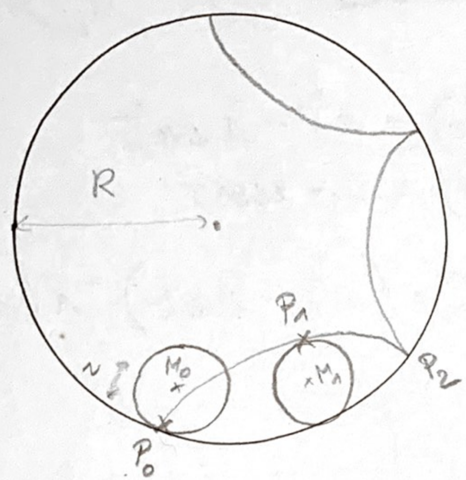


$$\frac{x}{R} = \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sin\left(\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right)\right)$$
$$= \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{\frac{2y}{R} - \frac{y^2}{R^2}}$$

$\boxed{\text{Ex 1}}$ a

55 : Spirographe : hypotrochoïde

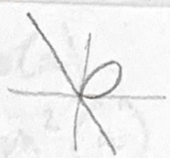
$r < R$

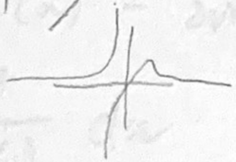


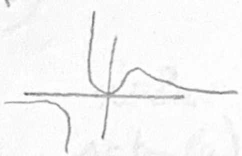
$\gamma_a = \left(r \sin(at+\pi) + (x-a)^2 + (y-r)^2, \right.$?
$\left. r\cos(at+\pi) + 1 \right)$

cercle de rayon $R \to \infty$
ou si $R \to \infty$; $\Rightarrow$ droite $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
$\boxed{Ex2}$ résultat de 5.4 .

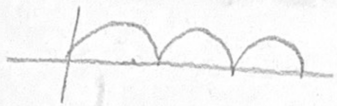
$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^3}, \frac{2t^2}{1+t^3}\right)$$







$$\gamma(t) = (\quad , \quad)$$



$\cos x$

$\cos 2x$

$$\Rightarrow \gamma_a(t) = (r.\sin(at+\pi)+at,\ r\cos(at+\pi)+1)$$

$$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$P_a = (\sin(a+\pi)+a,\ \cos(a+\pi)+1)$$

$\boxed{\text{Ex 1}}$, 6

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

M1 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$$I = \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx \qquad x = 2u \quad s = \tan(u)$$

$$I = -\ln|1-s| + \ln|1+s| + c_2$$

$$I = \ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$$

M2 chgt de $\cos(x) = u$, $\sin(x) = u$, $\tan(x) = u$

M3 $+1-1$

M4 IPP

$y = f(x)$

$\cancel{y} \; f^{-1}(y) = x$

$y = \sinh(x)$

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .... poly fred deg

$x e^{x}$ ...

$\operatorname{arcsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$

Longueurs de courbe

Calculer les longueurs des courbes suivantes :

(i) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ entre $t=0$ et $t=T$

$$I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \text{IPP} \quad x = \tan(u)$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right)}\right| + c$$

6. La longueur d'une courbe

(D) $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $[a,b] \subset I$

- subdivision $[a,b]$ ens fini $\Delta \subset [a,b]$.

→ Δ contient $m+1$ élts

→ $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b\}$

- Taille : $T(\Delta) = \max_{i=1,\dots,m} (t_i - t_{i-1})$
- longueur : $L(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|$

- Courbe rectifiable (sur $[a,b]$)

↳ $\{L(\Delta) \mid \Delta$ une subdivision de $[a,b]\}$ est borné.

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \sup \{ L(\Delta) \mid \Delta \text{ une subdivision de } [a,b] \}$$

⚠ N'est pas rectifiable si $L_{[a,b]}(\gamma) = \infty$.

@ La courbe continue $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ déf par $\gamma(0) = (0,0)$ & $\gamma(t) = (t, t \cdot \cos(\frac{1}{t}))$ si $t \neq 0$ n'est pas rectifiable sur $[0,1]$ | Prep2 |

(TH) soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ens fermé & borné (un compact) & $f : D \to \mathbb{R}$ une f cont.

Alors (i) f est bornée :

$\exists M > 0, \forall x \in D : |f(x)| \leq M$ — f bornée

(ii) f UN cont :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \forall x, y \in D$:

$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\sqrt{1-t^2} \to t = \sin(u)$

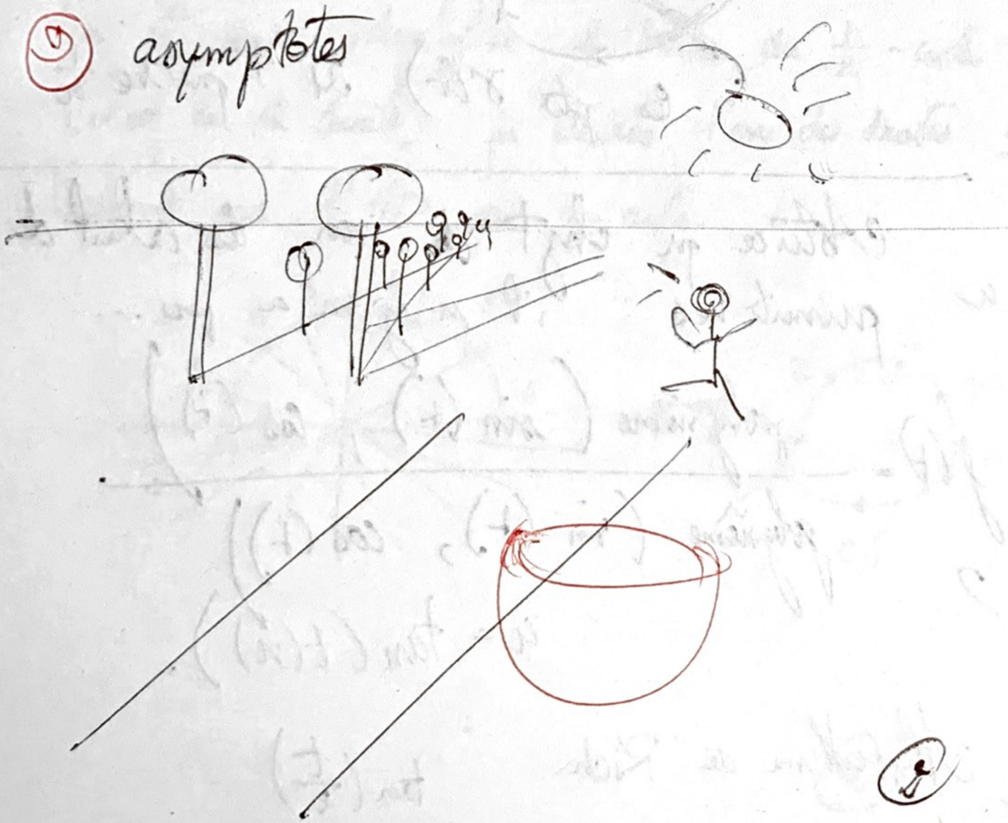
si modules ↔ adapter l'intervalle des intégrales.

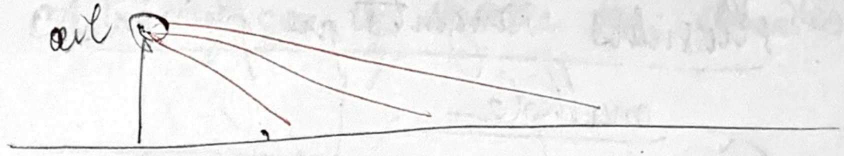
$\sqrt{1+t^2} \to t = \sinh(u)$

§ 8 : Branches infinies : asymptotes ∞

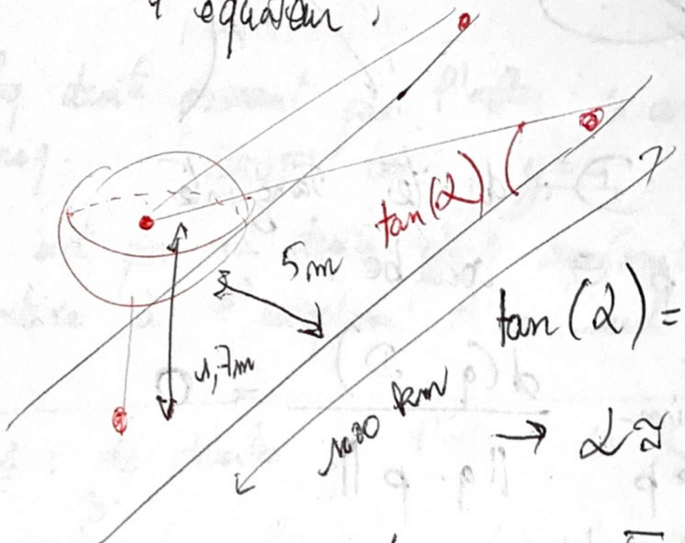
① branches ∞

② asymptotes





le point à l'" ∞ " coupe les sphères sur l'équateur.



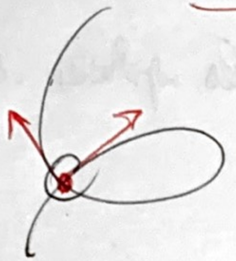
$\tan(\alpha) = \frac{1,7}{10^6} \simeq 0$

$\to \alpha \simeq 0$

$\tan\beta \simeq \frac{5\,m}{1000\,km}$

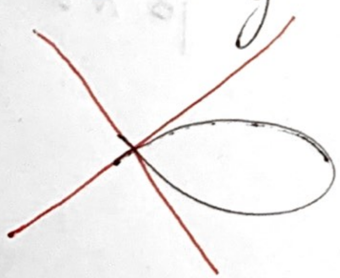
$\beta \simeq 0$.

Plusieurs tangentes pr point multiple



- D : droite tangente.
- $p \in$ courbe.
- $$\lim_{\substack{q \to p \\ q \in \text{courbe}}} \frac{d(q, D)}{\|q - p\|} = 0$$

Alors ds un point double, il n'y aura pas de tangente.



Autre Def : lié à un reparamétrage

D est droite tangte au pt $P = \gamma(t_0)$

si $$\lim_{t \to t_0} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - p\|} = 0$$

pr un pt double il y aura t_0 & t_1

$p = \gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

pts $\gamma(t)$ de t proche de t_0.

les pts $\gamma(t)$ de t proche t_0

Astuce pr chgt de var. ds calcul de primitives : il n'y en a pas...

$$f(t) = \frac{\text{polynôme}(\sin(t), \cos(t))}{\text{polynôme}(\sin(t), \cos(t))}$$

$u = \tan(t(x))$.

fonct° rationnelle ⇐ décomposé en élts simples

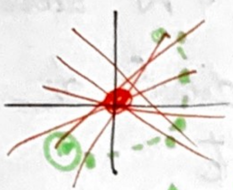
Algorithme de Rich

$\tan\left(\frac{t}{2}\right)$

~~Branches ∞ Paraboliques~~

→ Géom. Projective : Géom des droites ds $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>simple</u> : <u>$n = 1$</u> <u>SEV</u> dim 1 ds $\mathbb{R}^2$.

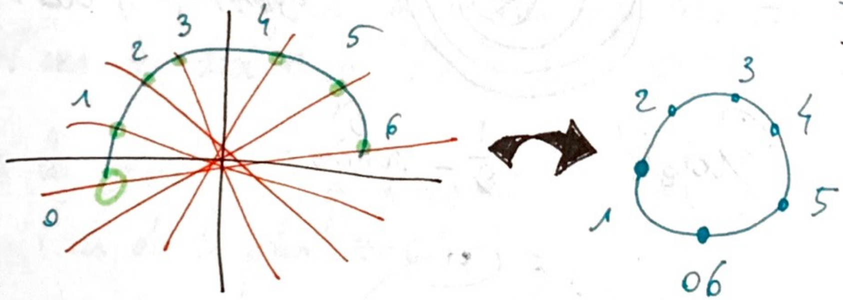


L'ens de ces droites :

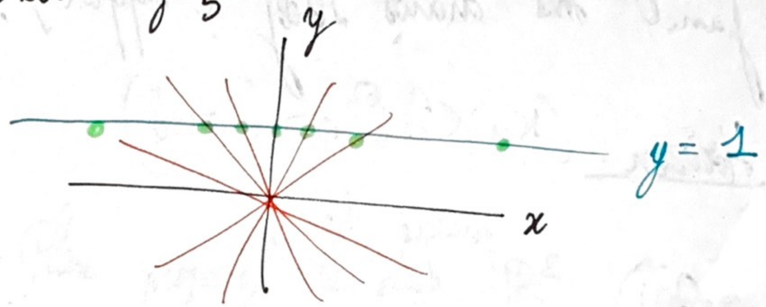
on pt décrire par $\frac{1}{2}$-cercle

m̂ droite ↳ bord inclus & un bord exclus.

On pt aussi identifier 2 bords du $\frac{1}{2}$-cercle (c'est la m̂ droite) pr décrire l'ens des droites passant par l'O par un cercle.



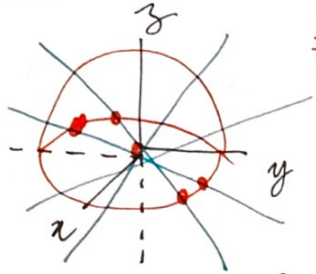
Autre façon de décrire les droites :



chq droite passant par l'O ds un point uniq. SAUF UNE : <u>$y = 0$</u>.

On dit que la droite $y = 0$ représente la droite projective à l'exception d'un seul "point".

<u>$n = 2$</u> : les droites passant par l'O ds $\mathbb{R}^3$.



$\frac{1}{2}$ sphère ($r = 1$)

chq droite coupe a $\frac{1}{2}$-sphère en un pt uniq.

SAUF les droites ds le plan $z = 0$.

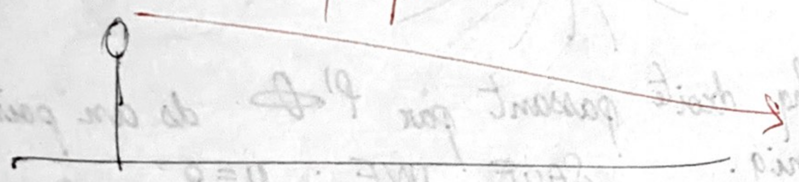
↳ coupent en 2 pts l'équateur.

$\frac{1}{2}$ sphère bas/sud la moitié de l'équat^{r} : chq droite est représentée exactement 1 fois.

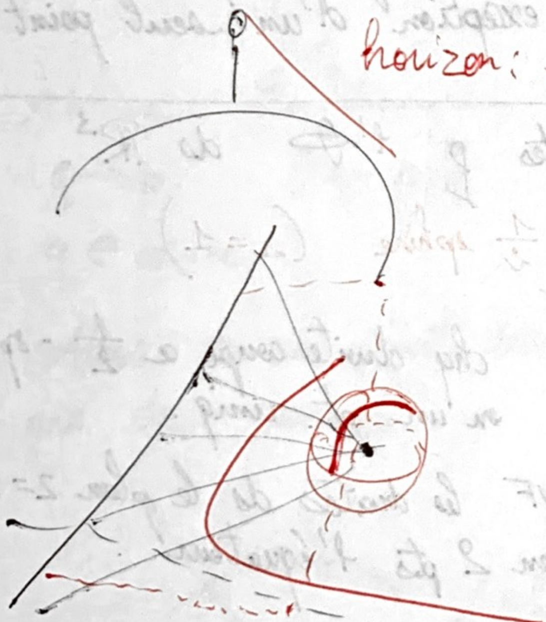
→ fonct° that draws itself (Tupper).

Horizon: (KμKλθσ ... cercle)

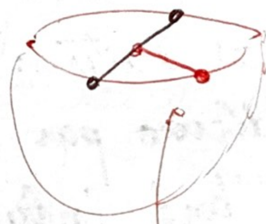
presque ho



n'est plus à
horizon: l'horizontal

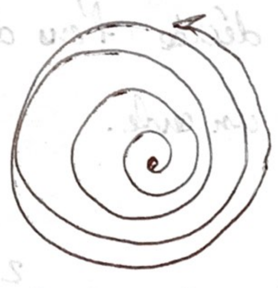


hyperbole: à l'∞ le m̂ point que son asymptote.



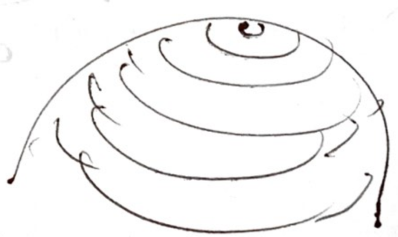
2 pts à l'∞ associé à la direct° de l'asymptote.

direct° de l'ombre asymptote de l'hyperbole.

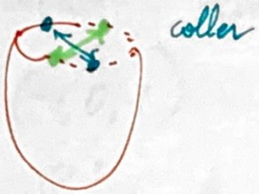


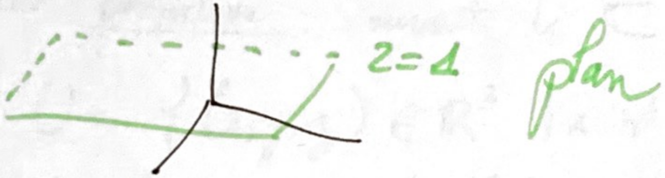
branche infinie
($t \sin t$, $t \cos t$)

Projeté s/ $\frac{1}{2}$ - sphère:



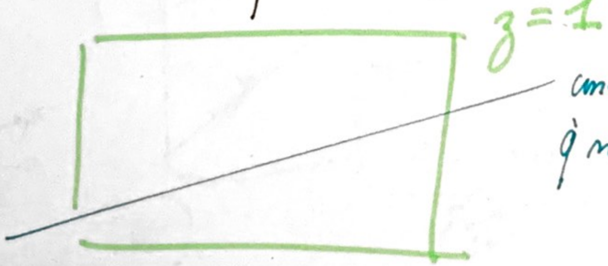
Si on induit ++ l'équateur, il faut identifier
coller des points sur l'équateur l'un sur l'autre.



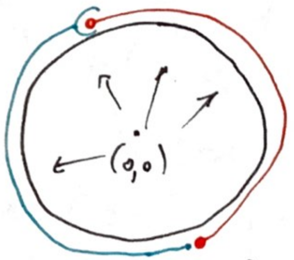


chq droite (passant p l'O) coupe le plan $z=1$ ds un pt uniq. SAUF les droites contenues ds le plan $z=0$. Il manque un "cercle" de droites. Il manque la droite projective = l'ens des droites p l'O ds $\mathbb{R}^2$.

Dans le plan vert qui manquent et // à ce plan $z=1$. (ou ds le plan $z=0$).



Plan projectif : le plan $\mathbb{R}^2$ (isomorphe à $z=1$) + la droite à l'∞ : ttes les directions "horizontales" vers l'horizon en identifiant des pts opposés.



NB : les coordonnées projectifs ?

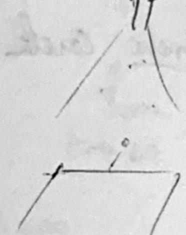
Ex. 8.10   EHE $x \neq -1$

indic (ii) : l'image $\mathcal{C}_p$ par f est un cercle.
→ user ~~desmos~~. Peintre.

soit $P = (-1,0,1)$: oeil obser.

$V \subset \mathbb{R}^3$: plan tableau.

Applicat° perspective : ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$:



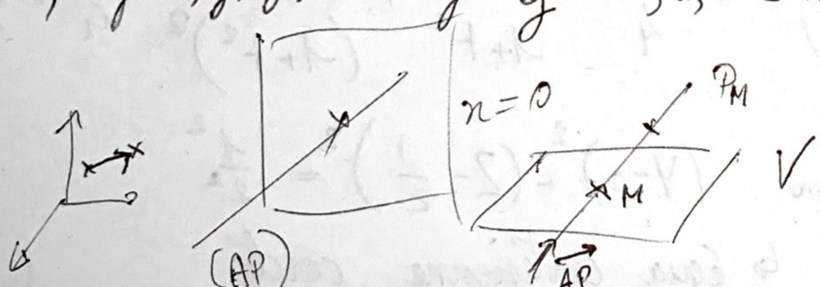
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq -1\}$$

$$V = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

U à valeur dans V, chq pt $A \in U$ ⟷ pt intersect° droite passant p A & P av plan V.

(i) expres° explicite coord. $f : U \longrightarrow V$, $x,y,z \longmapsto f(x,y,z)$

$$\forall x \neq -1,\ f(x,y,z) = ay + bz \quad , a,b \in \mathbb{R}$$



$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = x_p$

X : (x_p) vect^R nul ou pas

(droite) $= (x_p) = \{a + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\vec{u} = \vec{AP}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_{\vec u} \\ y_{\vec u} \\ z_{\vec u} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$x = 0$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x_a + tx + t = 0 \\ y_a + ty = 0 \\ z_a + tz - t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-x_a - t}{t} \\ y = \dfrac{-y_a}{t} \\ z = \dfrac{z_a + t}{t} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_a = -t \\ y = \end{cases}$$

$(AP) = \{ P + \overrightarrow{AP} . t , t \in \mathbb{R} \}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \\ z_A - 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t(x_A + 1) \\ y = t . y_A \\ z = 1 + t(z_A - 1) \\ x = 0 \end{cases}$

$\underline{NB}$: $Rg = 2$ $\overset{\shortparallel}{3-1}$

$\underline{\mathbb{R}^3}$: 3

$t \to 1$

$\updownarrow$ libre

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = t x_A + t \to \dfrac{1}{x_A + 1} = t \quad (t(x_A+1)) \\ \cancel{\dfrac{y}{y_A} = t} \quad y = \dfrac{y_A}{x_A + 1} \\ z = 1 + \dfrac{z_A - 1}{x_A + 1} = \dfrac{x_A + 1 + z_A - 1}{x_A + 1} \\ z = \dfrac{x_A + z_A}{x_A + 1} \end{cases}$

$f : U \longrightarrow V$

$(x,y,z) \mapsto \left(0, \dfrac{y}{x+1}, \dfrac{x+z}{x+1} \right)$

(ii) $\mathbb{R}^3$, $G_p \subset \mathbb{R}^3$

$G_p = \{ (t^2, t, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Déterminer image de G_p par f.

$\underline{\text{indic}}$ cercle.

$f(t^2, t, 0) = \left(0, \dfrac{t}{t^2+1}, \dfrac{t^2}{t^2+1} \right)$

$\to \left(\dfrac{t}{1+t^2} \right)^2 + \left(\left(1 - \dfrac{1}{1+t^2} \right) - \dfrac{1}{2} \right)^2$

$= \left(\dfrac{t}{1+t^2} \right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+t^2} \right)^2$

$= \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}5^2$

De la forme $(Y-0)^2 + (Z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}^2$

2 $\hookrightarrow$ équa cartésienne cercle.

$f: U \to V,\ (x,y,z) \mapsto \left(0, \frac{y}{x+1}, \frac{x+z}{x+1}\right)$

(iv) $G_h \subset \mathbb{R}^3$ (hyperbole)

$G_h = \{(\sqrt{t^2+1}, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

l'image de G_h par f.

(iii). mq limites st égales pr $\lim_{t \to \pm\infty} f(t^2, t, 0)$

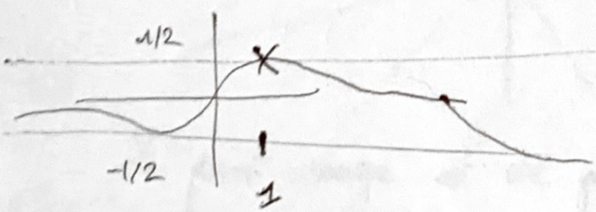
- déterminer droite tangente à courbe image $f(G_p)$ en ce point.

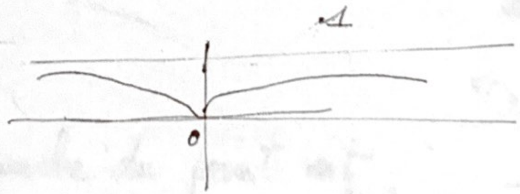
$$f(t^2, t, 0) = \left(0, \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2+1}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(0, \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2+1}\right)$$ f paires impaires.

$t \to \infty$

<u>RdH</u>: $\left(0, \frac{1}{2t}, \frac{2t}{2t}\right) \to (0, 0, 1)$

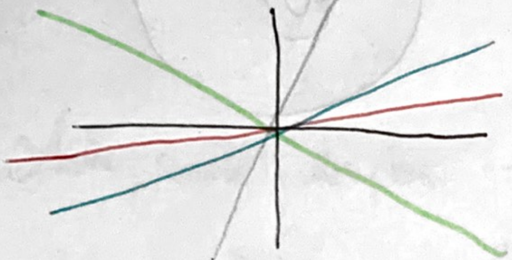




$y : f'(a)(x-a) + f(a)$

Image Espace Projectif

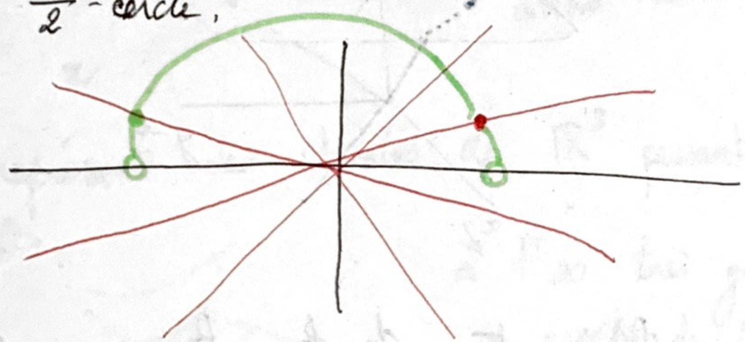
$\mathbb{R}^2$ les droites ds $\mathbb{R}^2$



droite bleue est proche de la droite rouge.

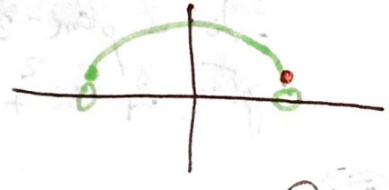
La droite rge est proche de la droite verte.

Quand on représente les droites par un point sur $\frac{1}{2}$-cercle.



Le point rouge est dc proche du point vert

Les pts rge & vert st très proche.
(ms ≠ 2 droites)



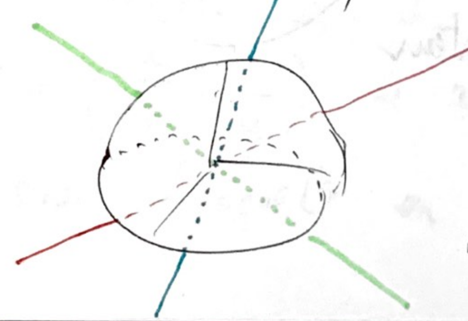
Pr représenter cette not de proximité, on forme le $\frac{1}{2}$ cercle en identifiant / collant les 2 extrémités du $\frac{1}{2}$-cercle.

C'est une procédure d'espace quotient.

1° ens de départ : $\frac{1}{2}$-cercle & les 2 extrémités

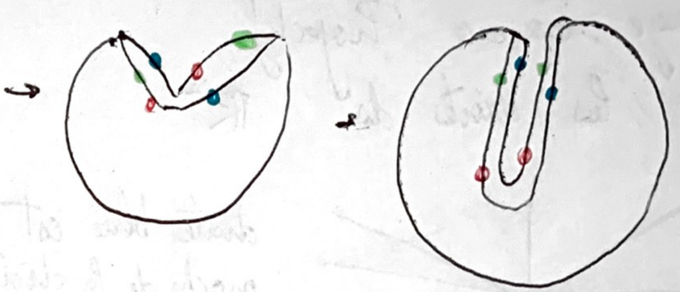
2° on met les 2 extrémités ds m̂ boîte.
On voit ces 2 extrémités qu'un seul élt de l'ens des droites (par l'origine).

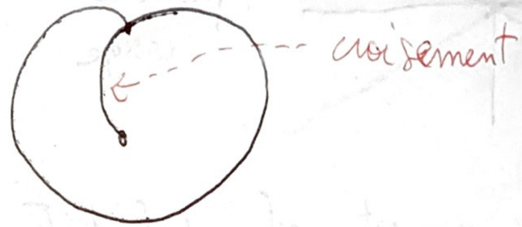
Dans $\mathbb{R}^3$: les droites p l'origine :
→ on peut les représenter comme des points sr un $\frac{1}{2}$ sphère.

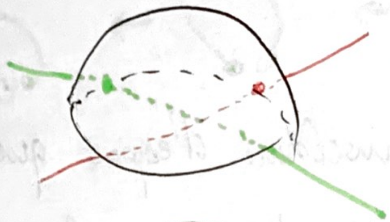


L'équateur représente plusieurs fois la m̂ droite.

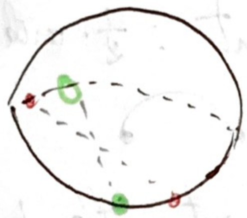
Plus précisément : 2 pts si l'équateur représente la m̂ droite.
On a la m̂ idée de proximité



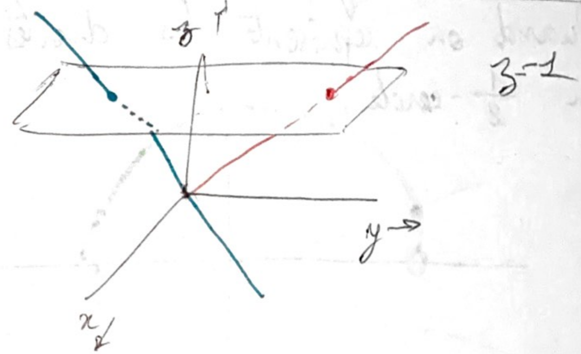




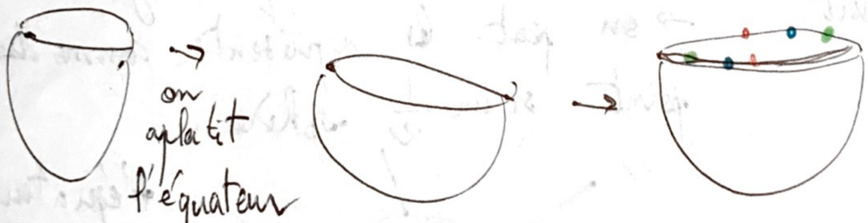
rge & vert st proches,



rge & vert st proches.

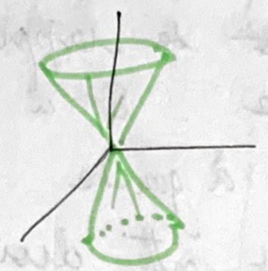


Pr rapprocher ces pts (cô on a fait ds le $\frac{1}{2}$-cercle qu'on a fermé en cercle) on va "plier" la $\frac{1}{2}$-sphère.



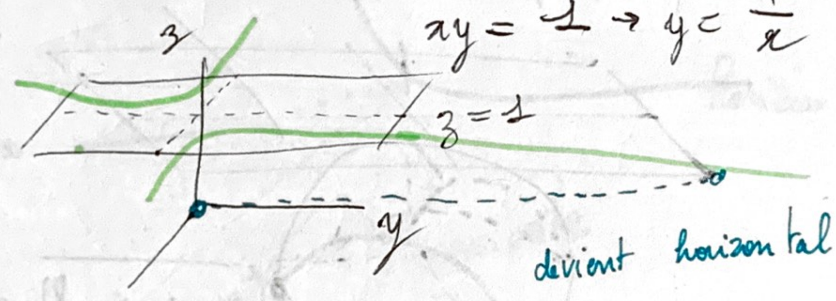
Chq pt de le plan $z=1$ représente une sle droite mais il y a des droites q manquent.

Ds le plan $z=1$, on a l'ens des pts ds $x^2+y^2=1$.



Autre courbe ds plan $z = 1$

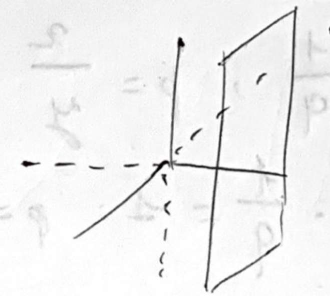
$xy = 1 \to y = \frac{1}{x}$



cela représente des droites ds $\mathbb{R}^3$ passant par l'O.

à l'∞ très grd
x proche de 0
→ la droite est presque horizontal.

Pr représenter les droites horizontales, on va ⊕ ⊕ les représentants ds le plan.



q°: à la surface des droites q passent par l'hyperbole $xy = 1$ ds $z = 1$

devient quoi dc le plan $y = 1$?

$(x, y, 1)$ représente la droite $\mathbb{R}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$

→ cette droite coupe $(y = 1)$:

pt ds la droite $\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda\end{pmatrix} \to P = (y = 1)$

$\iff \lambda y = 1$

$\lambda = 1/y$.

→ pt d'interse° $\begin{pmatrix}x/y\\1\\1/y\end{pmatrix}$: si on oublie $y = 1$, on a le pt $\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ où (x, y) le pt ds l'hyperbole $xy = 1$ ds le plan $z = 1$.

$(p, q) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ et $xy = 1$

c'est quoi l'équa° en p & q ?

$q = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{q}$, $p = \frac{x}{y} \leftrightarrow x = py = \frac{p}{q}$

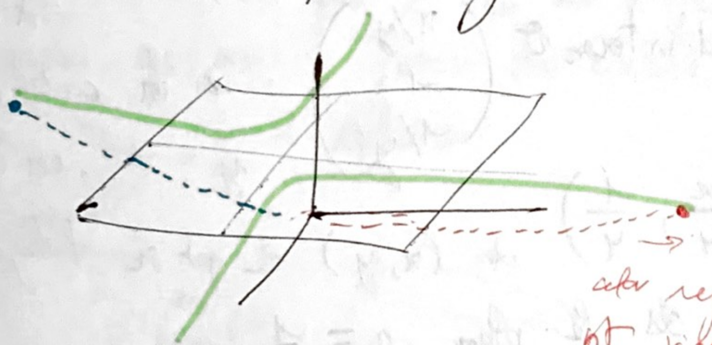
$xy = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q} = 1$: $p = q^2$: parabole.

Procédure : ① hyperbole ds plan "$z = 1$".

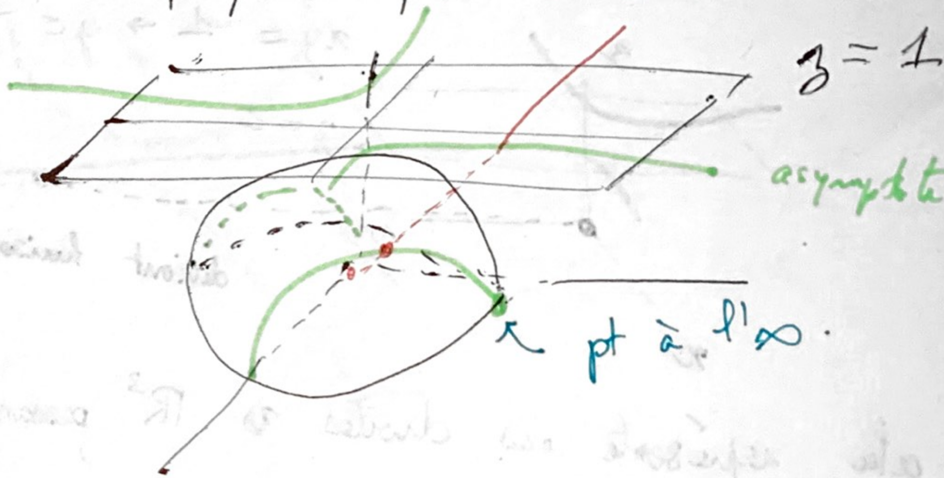
② on forme l'ens des droites q passent par cet hyperbole.

③ on ①① l'intersectO de cet ens de droites & le plan "$y = 1$".

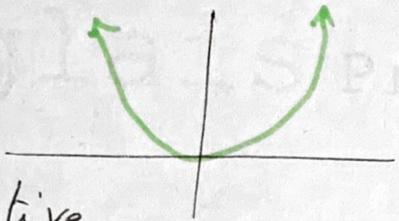
④ on constate que cela forme une parabole.



~~violet~~ & ~~jaune~~ se rapprochent qd on
bleu rouge
& à droite, la droite va vers l'∞ à gauche horizontal
$\mathbb{R}(0,1,0)$ est cette droite limite q ne coupe pas le plan $z = 1$.



8.10. Parabole q̇ devient en perspective
au cercle :



ces 2 branches se représent+ à l'∞.

en perspective.