M61 TD Probabilités & Intégrales

TD1 : Événem^ts tribus

1. Intégrabilité, limsup, liminf

1) **Ex 1** : Int de Riemann.

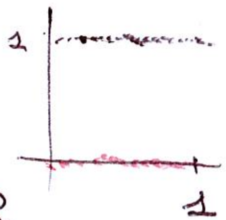
Déf sur $[0,1]$ $\quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

h est une f en escalier.
Dc intégrable au sens de Riemann.

Son intégrale vaut 1.

2) $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$. Mq f n'est pas RI sur $[0,1]$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



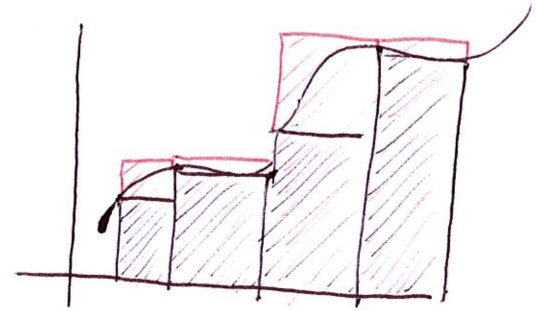
R Somme de Darboux : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$ & $\overline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \quad 0 \leq k \leq n-1$



$\overline{S}(f,\sigma)$

$\underline{S}(f,\sigma)$

f est intég au sens de Riemann si $\sup \underline{S}(f,\sigma) = \inf \overline{S}(f,\sigma)$

Pour tous les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n-1$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) = 0$ car $\forall$ interv d'int non vide contient un irrationnel

$M_k = \sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) = 1$.

$\Rightarrow$ f n'est pas intégrable sur $[0,1]$ de $\forall$ subdiv σ de $[a,b]$: $\underline{S}(f,\sigma) = 0$ & $\overline{S}(f,\sigma) = 1$.

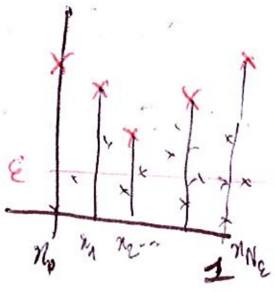
Donc $\sup_\sigma \underline{S}(f,\sigma) = 0 \neq \inf_\sigma \overline{S}(f,\sigma)$.

3) Défini sur $[0,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ \& \ p \wedge q = 1,\ 0 < p \leq q \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Mq g est Riemann intégrable & $f = h \circ g$.

Q pt-on déduire ?



$\underline{S}(g,\sigma) = 0$ de $\sup \underline{S}(g,\sigma) = 0$

Reste à mq $\inf\limits_{\sigma} \overline{S}(g,\sigma) = 0$

ie : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \sigma_\varepsilon$ subdivision de $[0,1]$ tq

$$0 \leq \overline{S}(g, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ $(0<\varepsilon<1)$, il suffit de construire une subdiviθ σ_ε tq $\overline{S}(g, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon$.

$$A_\varepsilon = \{ x \in [0,1] \text{ tq } g(x) \geq \varepsilon \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ x = \frac{p}{q},\ p \wedge q = 1,\ 0 < p \leq q,\ \frac{1}{q} \geq \varepsilon \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ x = \frac{p}{q},\ p \wedge q = 1,\ 0 < p \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon} \}.$$

$\text{card}(A_\varepsilon) < \infty$ $\left(< \frac{1}{\varepsilon^2} \right)$, $1 + N_\varepsilon = \text{card}(A_\varepsilon)$

Notons $A_\varepsilon = \{ x_0, x_1, \dots, x_{N_\varepsilon} \}$ & $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N_\varepsilon} = 1$

$\sigma_\varepsilon = x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N_\varepsilon} = 1$.

$$\overline{S}(g, \sigma_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon - 1} M_k (x_{k+1} - x_k) \leq \varepsilon \times \sum_{k=0}^{N_\varepsilon - 1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon$$

$M_k = \sup\limits_{x \in]x_k, x_{k+1}[} g(x) \leq \varepsilon$ car tous les $\frac{p}{q} \in]x_k, x_{k+1}[$ vérifie $\frac{1}{q} < \varepsilon$.

Puis $f = h \circ g$.

non (RI). Riemann intégrable

4) (RQ) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est dénomb. $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ numérotaθ de cet ens.

$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1, \dots, r_n\}}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f_n est intégrable sur $[0,1]$ car f_n est f en escalier.

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$

5) Mq $(f_n)_n$ CV simplement vers f. Qpond !

$\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

si $x \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0 = f(x)$

si $x \in \mathbb{Q}$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $x = r_{n_0}$

$\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1, \dots, r_{n_0}, \dots, r_n\}}(r_{n_0})$

$= 1 = f(x)$.

<u>Moralité</u> : Une limite simple de fs intégrables au sens de Riemann n'est pas intégrable au sens de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$ pas vrai pr une (a) simple.

(Pr avoir l'égalité, on a besoin (a) <u>UN</u>).

Ex3 Tirer un nbr réel au hasard

tirer hasard réel $x \in [0,1[$ / p pensé & remise / dév décimal où : n° sorti au i° tirage fournissant i° chiffre décimal de x. 0 e $\emptyset$ 0 & oté boule ?

$N_i = \{$ i° chiffre de x après la virgule est 0 $\}$

1) Exprimer p opérats ensemblistes s/ les N_i les évents ; A, D_n, D, E.

U l'ens des numéros présents ds l'urne.

$\mathrm{card}(U) \geq 2$, $0 \in U$.

$\Omega = \{x = 0, a_1 a_2 \ldots a_i \in U, i \in \mathbb{N}^*\} \subset [0,1[$

Ω est en bijectO à $U^{\mathbb{N}^*}$ (infini non dénombrable)

$N_i = \{x = 0, a_1 a_2 \ldots a_i = 0\}$

- $A = \{x < 10^{-4}\} = \Omega \cap [0, 10^{-4}[$

$x < 10^{-4}$ ssi 4 premières décimales de x sont nulles.

car →
→

car → si l'une des 4 premières décimales n'est pas nulles alors $x \geq 10^{-4}$ $\quad \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

→ si les 4 premières décimales st nulles alors

$x = 0{,}0000\, a_5 a_6 \ldots$

$$x = \sum_{i=5}^{\infty} a_i 10^{-i} \leq 8 \sum_{i=5}^{\infty} 10^{-i} = 8\, 10^{-5} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j} = \frac{8}{9} 10^{-4}$$

$a_i \leq 8$ car $9 \notin U$.

$$A = \bigcap_{i=1}^{4} N_i$$

$D_n = \{$ l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des 0 à p rg $n\}$

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} N_k$$

$D = \{x$ nbr décimal$\}$ (à p certain rg, on a que des 0).

$x \in D$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $x \in D_n$.

$$\Leftrightarrow D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

Rq $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite ↗ d'ens : $D_n \subset D_{n+1}$

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} N_k$$

$$D^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} N_k^c$$ $\forall$ rg n, il y a une décimale après $(k \geq n)$ non nulle.

- E = "oté de 0", $x \in E$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k \geq n$ tq $x \in N_k$: "k° décimale nulle"

$x \in E$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k \geq n$ tq $x \in N_k$: "k° décimale nulle"
ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tq $x \in \underbrace{\bigcup_{k \geq n} N_k}_{E_n}$

ssi $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$

$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} N_k = \limsup N_n$ ← inf. qté d'ens réalisés

---

$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} N_k = \liminf N_n$ ← tous sauf ceux qui sont réalisés.

Ex 2 : Limites supérieures & inférieures d'ensemble

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ens Ω, on déf

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p .$$

1) Justifier que $\limsup_{n \to \infty} A_n$ est l'ens des élts de Ω appartenant à une inf. qté de A_n & $\liminf A_n$ est l'ens des élts de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nbr fini.

$x \in \limsup A_n \iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \ x \in \bigcup_{k \geq n} A_k .$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists k \geq n : x \in A_k .$

ie x est dans une inf. qté de $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

ap N_k, $D = \liminf N_k$, $E = \limsup N_k$.

$x \in \liminf A_n \iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$

$\iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n : x \in A_k .$

ie x est dans tous les $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ apr

$\iff$ Dans tous les $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sauf un nbr fini

---

2) Mq si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ↗ pr l'inclusion

$\implies \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n .$

$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} .$

A_n

∘ $\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\bigcap_{k \geq n} A_k = A_n$

car $\bigcap_{k \geq n} A_k \subset A_n$, réciproqt si $x \in A_n$, ĉ la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ↗ $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \subset A_k$ $\forall k \geq n$

$\Rightarrow x \in A_k \ \forall k \geq n \implies x \in \bigcap_{k \geq n}^{\infty} A_k \Rightarrow A_n \subset \bigcap_{k \geq n} A_k .$

Donc $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

- $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{B_n} \overset{\text{objectif}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

$\boxed{\subset}$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

car $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset B_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\boxed{\supset}$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 = n_0(x),$

$x \in A_{n_0}$ comme $A_{n_0} \subset A_k \quad \forall k \geq n_0$

$\Rightarrow x \in A_k \quad \forall k \geq n_0$

& de $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ k = \max(n, n_0)$

tq $x \in A_k$. Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

3) Mq si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↘ pr l'inclusion alors
$\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

4) Calculer $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $(\mathbb{1}_{\limsup A_n}$ & $\mathbb{1}_{\liminf A_n})$
en f des $\mathbb{1}_{A_n}$.

- $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \max_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$

5) i) Mq $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$.

- $(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)^c$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p$.

Le contraire de "$x \in \limsup A_n$" $\Leftrightarrow$ "x est dans une ∞té de A_n"
est "à partir d'un certain rang, x n'est pas dans A_n".
ie "x est dans un nbr fini de A_n".

(ii) Mq $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
(ê ds ts les A_n apcr) $\subset$ (ê ds ∞té de A_n.)

$x \in \liminf A_n$ ssi x est dans tous les (A_n) à partir d'un certain rang
$\Rightarrow x$ est dans une ∞té de A_n de $x \in \limsup A_n$.

⚠ Réciproque fausse : si x est ds une ∞té de A_n, il n'est pas dans tous apcr : $x \in A_{2p}$:
$\forall p \in \mathbb{N}$ alors $x \in \limsup A_n$ mais pas nécessairement à $\liminf A_n$.

Cela veut dire si $x \in \liminf A_n$
alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq n_0$, $x \in A_p$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \geq n$: $p = \max(n, n_0)$: $x \in A_p$.
$\Rightarrow x \in \limsup A_n$.

6) i) $A_n =]-\infty, a_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$; $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$

$\limsup A_n$: ê ds une infté de A_n.

Mq $\limsup A_n \overset{?}{=}]-\infty, 1]$

$a_2 \notin A_4$ $\quad \notin A_{2p+1}$ $\forall p$
$\notin A_6$
$\notin A_{2p}$

si $x \in]-\infty, 1]$, si $x \leq 1$ alors $x \leq 1 + \frac{1}{2p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$
cad $x \in A_{2p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, ce q implique que
x ~~est~~ ds une infinité de (A_n) cad $x \in \limsup A_n$.
Donc $]-\infty, 1] \subset \limsup A_n$.

• Pour mq la réciproque $\limsup A_n \subset]-\infty, 1]$
par contraposée si $x > 1$.
$\exists p \in \mathbb{N}$, $x > 1 + \frac{1}{2p} \Rightarrow x \notin A_{2p}$
et $p' \geq p$: $A_{2p'} \subset A_{2p}$.
Donc $x \notin A_{2p'}$, $\forall p' \geq p$.
D+ $x > -1 - \frac{1}{2p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $x \notin A_{2p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x \notin A_n$ $\forall n \geq 2p'$. ($x \in \liminf A_n^c$)
$\Rightarrow x \notin \limsup A_n$.

On a $]-\infty, -2] = \bigcap_{n \geq 1} A_n$.

Et $\liminf A_n =]-\infty, -1[$ Par double inclusion.

2. Rappels : indépendance, conditionnement

Ex 4 Quiz

R1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad A \in \mathcal{F}, \; B \in \mathcal{F}$

- A et B indépendants si
  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,P(B).$$
- A et B st incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.
  $\iff$ A et B disjoints.

1) si A et B st 2 évents indépendants et incompatibles alors l'un des 2 évents au moins est de proba nulle.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ car A & B incompatibles

A et B indépdts impliq $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B)$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

2) si l'un des événements A ou B est de proba nulle alors A et B st indépendants & incompatibles.

si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0$.

si $P(A) = 0$, $A \cap B \subset A$

Rq $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right\} P(A \cap B) \leq \min\big(P(A), P(B)\big)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0 = P(A).\,P(B)$ de A & B indépdts

A ∩ B n'est pas nécessairement vide.

$A = B$, $\quad P(A) = P(B) = 0$ mais $A \neq \emptyset$; $A \cap B = A$.

@ pile face infini : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

$\forall \omega \in \Omega, \; \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0 \quad$ @ $\mathbb{P}(\{(1, \dots, 1, \dots)\}) = 0$

"on obtient que des piles"

E_i = "pile au i° lancer"

$$\boxed{A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} E_i = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i \right)}$$

les A_N sont décroissants

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} A_N\Big) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(A_N) \qquad \boxed{A_N = \bigcap_{i=1}^{N} E_i}$$

$$A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} E_i = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} A_N$$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(E_i) = \lim_{N \to \infty} p^N = 0$$

$\mathbb{P}(A) = 0$ mais $A \neq \emptyset$.

3) si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

@ si des ens finis. On doit vérifier d'abord

$$P(A \cap B) = P(A).\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A).\,P(C).$$

Soit une expérience de lancer de dé & $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ sous $\mathbb{P}$ équiproba. On prend $A = \{1,4\}$; $B = \{1,2,3\}$
$C = \{4,5,6\}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Puis $P(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ mais $P(A).P(B \cup C) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tq $C \subset B \Rightarrow$ A est indépendant de C.

On prend $C = \{2\}$ & $A = \{1,4\}$ et $B = \{1,2,3\}$.

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$P(A \cap C) = P(A).P(C) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$P(A \cap (B \cup C)) = P(A).P(B \cup C) \Leftrightarrow P(A).P(B \cup C) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

et $P(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

Ex 5 : Une inégalité injustement méconnue.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note A un évent qq & B un évent tq $0 < P(B) < 1$.

1) Mq $|P(A \cap B) - P(A).P(B)| \leq \frac{1}{4} |P(A|B) - P(A|B^c)|$

Indic : exprimer $P(A|B) - P(A|B^c)$ en f seules probas $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

(R) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P(A) = P(B).P(A|B) + P(A|B^c).P(B^c)$

$$P(A|B) - P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(B)P(A|B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{(1-P(B))(P(A \cap B)) - P(B)(P(A) - P(A \cap B))}{P(B)[(1-P(B))]}$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P(A).P(B)}{P(B)[1 - P(B)]}$$

Puis $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| = P(B)(1 - P(B))\,|P(A|B) - P(A|B^c)|$

$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4} |P(A|B) - P(A|B^c)|$

2) $A \subset B$? $A \cap B = A$ & $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$, $P(A|B^c) =$

$P(A)[1 - P(B)] \leq \frac{1}{4} \frac{P(A)}{P(B)}$ si $P(A) \neq 0$: $P(B)[1-P(B)] \leq$

3) si égalité : si $P(B) = \frac{1}{2}$.

Ex6 : Indépendance

Peut-il exister n événements indépendants de même proba p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

$(E_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendants de proba p.

$\mathbb{P}(E_i)=p \quad \forall\, i\in\{1,\dots,n\}$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i=\Omega$

on ne peut pas proba union.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(\Omega^c)}_{=0}=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(E_i^c)=(1-p)^n.$$

indépendance des $(E_i)_{1\leq i\leq n}$.

alors $p=1$.

Rq : si A & B sont de proba 1.

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\underbrace{\mathbb{P}(A\cup B)}_{=1}=1$$

ou bien

$$=1-\mathbb{P}(A^c\cup B^c)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cup B^c)\leq \mathbb{P}(A^c)+\mathbb{P}(B^c)=0.$$

Marche pour une suite dénombrable d'événements de proba 1

$\Rightarrow$ indépendants.

Cas trivial $E_i=\Omega$.

E_1 E_2 $\mathbb{P}(E_1)=\mathbb{P}(E_2)=1$, $\Omega=E_1\cup E_2$

$E_1=\Omega\setminus\{1,\dots,1,\dots\}$; $E_2=\Omega\setminus\{0,\dots,0,\dots\}$.

Ex9

1) On lance un dé à 4 faces. Écrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

$$\Omega=\{1,2,3,4\}$$

2) Une personne lance le dé & nous annonce le résultat tiré. Écrire la tribu $\mathcal{F}_2$ de tous les événements observables par nous.

$\mathcal{F}_2=\{\emptyset,\Omega,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$
$=\mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\Omega))=2^{\mathrm{card}(\Omega)}$ ici $|\mathcal{F}_2|=2^4$

3) La personne lance le dé & nous annonce seulement "pair" ou "impair". Écrire $\mathcal{F}_1$.

$$\mathcal{F}_1=\{\emptyset,\Omega,\{1,3\},\{2,4\}\}$$

4) La personne lance le dé & n'annonce rien. Écrire $\mathcal{F}_0$.

$$\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$$

5) On dit que $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En q est-elle ↗ ! Qu'est-ce q ↗ intuitivement, le long de cette suite ?.

Ds $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que représente la tribu $\mathcal{F}$?

L'info ↗ le long de cette suite.

Dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des événements auxquels on attribue une probabilité.

6) La modélisat° mtq des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils st munis de tribus $\mathcal{F}_t$ indexées p la date & contenant tous les events observables de l'Φ jsq'à la date t. L'affirmat°

$\mathcal{F}_{2 \text{ janv } 2020} \subset \mathcal{F}_{31 \text{ mars } 2022}$ est considéré p les quants ĉ une évidence. Pk ?

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ← tous les événements observables jusqu'à la date t.

Ex 8 Union & Intersect° de tribus.

1) soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

(i) identifier tribu $\mathcal{F}_1$, engendrée p $\{1\}$ & $\mathcal{F}_2$ engendré par $\{2\}$.

↳ tribu engendrée p $\mathcal{C}$, $\sigma(\mathcal{C})$: + petite tribu q̂ contient $\mathcal{C}$.

$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \underbrace{\{2,3,4\}}_{\text{le complément}}\}$

$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{2\}) = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3,4\}\}$

(ii) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$ n'est pas une tribu.

Rq $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ tribu tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{F}} \mathcal{F}$

2) soit Ω ens qq & $\mathcal{C}_1$ & $\mathcal{C}_2$ des collections d'ens de Ω.

Donc $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) Mq $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2}$

On doit mq $\sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \subset \underbrace{\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)}$

↳ il suffit de mq $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$

On veut mq $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$

En effet, si $C \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$,

alors $C \in \mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow C \in \sigma(\mathcal{C}_1)$.

$C \in \mathcal{C}_2 \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow C \in \sigma(\mathcal{C}_2)$.

donc $C \in \sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$.

• De + $\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu

de $\sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$

(ii) Mq qu'il n'est pas tjrs vrai que $\mathcal{F}^l_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}^l_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}$.

Ca : il faut avoir $\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2) \supset \sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$.

$\mathcal{C}_1 = \{\{1,4\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{2,3\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$ et $\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_1)$

$= \{\emptyset, \Omega, \{1,4\}, \{2,3\}\}$.

Puis $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, $\sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \{\emptyset, \Omega\}$.

3) soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

(i) soit $C^c = \mathcal{P}(\Omega) \setminus C$. Est-il vrai que $\mathcal{F}^l_C \cap \mathcal{F}^l_{C^c} = \emptyset$?

Est-il vrai que $\mathcal{F}^l_C = \mathcal{F}^l_{C^c}$?

$\{\emptyset, \Omega\}$ est tjrs ds l'intersect° de 2 tribus.

Donc on n'a pas $\mathcal{F}^l_C \cap \mathcal{F}^l_{C^c} = \emptyset$.

$\mathcal{F}^l_C = \mathcal{F}^l_{C^c}$?

$C = \{\{1\}\}$, $C^c = \mathcal{P}(\Omega) \setminus C = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\{1\}\}$

$\sigma(C) = \sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3,4\}\}$

$\sigma(C^c) = \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$, soit $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A^c \in C\}$

Est-il vrai que $\mathcal{F}^l_C = \mathcal{F}^l_{\mathcal{D}}$?

En prenant $\mathcal{C} = \{\{1\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{2,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3,4\}\}$.

En prenant $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \Omega, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$

Vrai : • $\sigma(\mathcal{C})$ $\sigma(\mathcal{D})$ il suffit de mq $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{D})$.

soit $C \in \mathcal{C}$ alors $C^c \in \mathcal{D} \Rightarrow C^c \in \sigma(\mathcal{D})$

$\Rightarrow C = (C^c)^c \in \sigma(\mathcal{D})$.

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

idem pr inclusion inverse.

Ex 10 Une tribu sur les entiers

soit $\Omega = \mathbb{Z}$. on considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée p les ens. $S_n = \{n, n+1, n+2\}$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\{n\} \in \mathcal{T}$.

$\Omega = \mathbb{Z}$, $S_n = \{n, n+1, n+2\}$, $\mathcal{T} = \sigma(S_n, n \in \mathbb{Z})$.

$\{n\} = S_n \cap S_{n-2}$; cp S_n et S_{n-2} sont ds $\mathcal{T}$

de $S_n \cap S_{n-2} \in \mathcal{T}$.

2) cd $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

TD 2 : Applicatns Mesurables

Ex 1 Tribu grossière triviale.

Quelles st applis mesurables h de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsq $\mathcal{T}$ est la tribu grossière ? lorsq $\mathcal{T}$ est la tribu triviale ?

Applicat mesurable (D) $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E', \mathcal{T}')$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}'$ mesurable si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$

(va) $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{F}$

$h : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

- $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(B) \in \{\emptyset, E\}$

$B = \{b\}$ $b \in \mathbb{R}$.

$h^{-1}(\{b\}) = \{x \in E, h(x) = b\} = \begin{cases} \emptyset \\ E \end{cases}$

h est cte :

- $E = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} h^{-1}(\{b\})$ or si $b \neq b'$,
- $h^{-1}(\{b\}) \cap h^{-1}(\{b'\}) = \emptyset$
- $\forall b \in \mathbb{R}$, $h^{-1}(\{b\}) \in \{\emptyset, E\}$

$\Rightarrow \exists! \, b_0 \in \mathbb{R}$ tq $h^{-1}(\{b_0\}) = E$.

$\Rightarrow \forall x \in E$, $h(x) = b_0$.

- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, tte f est mesurable.

Ex3 Parties & fs mesurables.

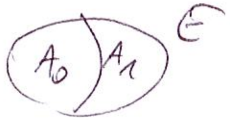
soit $(A_n)_{n\in I}$ une partie d'un ens E où $I \subset \mathbb{N}$

1) Caractériser les élts de la tribu $\mathcal{T} := \sigma(\{A_n : n \in I\})$ lorsq $I=\{0\}$, $I=\{0,1\}$, $I=\{0,1,2\}$, $I=\mathbb{N}$.

$$\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in I)$$

- $I=\{0\}$, $A_0 = E$, $\mathcal{T}=\{\emptyset, E\}$
- $I=\{0,1\}$, $A_0 \cup A_1 = E$ et $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

$$\mathcal{T} = \sigma(A_0, A_1) = \{\emptyset, E, A_0, A_1\}$$



- $I=\{0,1,2\}$.

$$\mathcal{T} = \sigma(A_0, A_1, A_2) = \{\emptyset, E, A_0, A_1, A_2, \underbrace{A_0 \cup A_1}_{A_2^c}, \underbrace{A_1 \cup A_2}_{A_0^c}, \underbrace{A_0 \cup A_2}_{A_1^c}\}$$

$I=\mathbb{N}$

$$\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in \mathbb{N}) = \{\emptyset, E, \underbrace{\bigcup_{j\in J} A_j}, J \subset \mathbb{N}\}$$

← les singletons A_j st dedans

2) soit f f mesurable de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Mq f est cte sr chq A_n : cd la forme générale des applications mesurables pr I ĉ ds la qℓ a).

$$f : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

$$E = \bigcup_{b\in\mathbb{R}} \underbrace{h^{-1}(b)}_{\text{ens disjoints}}, \quad \forall b \in \mathbb{R},$$

$$\exists J \subset I \text{ tq } h^{-1}(\{b\}) = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

→ si h est cte sr les $(A_n)_{n\in I}$, $\forall n \in I$,
$\exists\, b_n \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in A_n$, $h(x) = b_n$.

@ $E =]0,1]$, $A_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

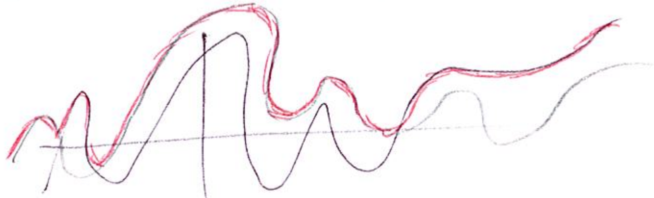
Ex4 Résultats essentiels à retenir.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sdf mesurables d'un espace mesurable $(E,\mathcal{T})$ à valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la tribu borélienne. Mq pptés :

1) En considérant les images réciproques de $]-\infty,a]$ pr $a\in\mathbb{R}$, mq $\sup_n(f_n)$ est mesurable.

$f_n : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable.

$g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \quad , \quad g(x) = \sup\{f_n(x),\ n\in\mathbb{N}\}$



g est mesurable ie $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ g^{-1}(B)\in\mathcal{T}$.

il suffit de le faire pour $B =]-\infty,a]$, $a\in\mathbb{R}$.

$\forall a\in\mathbb{R},\ g^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$?

$g^{-1}(]-\infty,a]) = \{x\in E,\ g(x)\leq a\} = \{x\in E,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\leq a\}$

$= \{x\in E : \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)\leq a\}$

$x\in g^{-1}(]-\infty,a])$ ssi $\forall n\in\mathbb{N} : x\in f_n^{-1}(]-\infty,a])$

ssi $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty,a])$

$g^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty,a])$,

$f_n^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$ car f_n mesurable.

$\Rightarrow g^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$ comme intersect° dénombrable d'élts de $\mathcal{T}$.

2) Mq $\inf_n(f_n)$ est mesurable.

$\boxed{M1}$ m̂ type de raisonnem^t.

$\boxed{M2}$ ou bien on se ramène au sup

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$$

3) si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv simplement vers f, mq $\forall a\in\mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}\left(\left]-\infty,a+\frac{1}{p}\right]\right)$$

et f est mesurable.

$\forall x \in E,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$\left(f^{-1}(]-\infty,a])\right) = \{x \in E,\ f(x) \le a\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $1/p$

$\boxed{\supset}$ soit $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}])$

ie $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n ;\ x \in f_k^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}])$:

$f_k(x) \leq a + \frac{1}{p}$.

$\forall k \geq n : f_k(x) \leq a + \frac{1}{p} \Rightarrow f(x) \leq a + \frac{1}{p}$.

Donc x vérifie $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \leq a + \frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow f(x) \leq a$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(]-\infty, a])$

$\boxed{C}$ soit $x \in f^{-1}(]-\infty, a])$ alors $f(x) \leq a$

alors $\forall p \in \mathbb{N}^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$,

$f_n(x) \leq f(x) + \frac{1}{p} \leq a + \frac{1}{p}$.

alors $\forall . \exists . \forall .$ $x \in f_n^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}]) \Rightarrow x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}])$

, et f est mesurable.

inters° ouverts mesurables, union ° ⇒ mesurables.

D'où $f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$.

Ex 8 Mesurabilité de limites de f mesurables

Soit (E,d) un espace métriq et $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applicat° de E dans E q sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurables.

1) Spps ds cette q° que $(f_n)_n$ CV simplement vers une applicat° de f. Mq f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable.

$f_n : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,d)$

$x \longmapsto f_n(x)$

f_n CV simplement vers f. On vt mq f est mesurable.
F est muni de $\mathcal{B}(F)$: + petite tribu q contient les ouverts de F.

soit $A \in \mathcal{B}(F)$, $A =]-\infty, a]$,

$f^{-1}(A) = \{ x \in E, f(x) \in A \}$.

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \underbrace{f_k^{-1}\left(]-\infty, a+\frac{1}{p}]\right)}_{\in \mathcal{T} \text{ car } f_k \text{ est mesurable}}$$

si $F = \mathbb{R}$,

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ = tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

= tribu engendrée par $\{]a,b[, a<b \}$

$\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R} \}$

$]-\infty, a+\frac{1}{p}]$, $A_{\frac{1}{p}} = \{ x \in F : d(x,A) \leq \frac{1}{p} \}$

TD 3 : Mesures & mesure de Lebesgue

Ex 1 La mesure de comptage.

soit X ens (nv). Pr $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) = \mathrm{card}(A).$$

Mq c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sr X.

$A \in \mathcal{P}(X)$, $c(A) = \mathrm{card}(A)$

(Rq si A est infini, $c(A) = \infty$),

c'est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

- $c(\emptyset) = 0$.
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évents 2 à 2 disjts

$$c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \overset{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n).$$

→ si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq A_n est infini

$\Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est ∞, $c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \infty$

et $c(A_{n_0}) = \infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n) = \infty$.

→ Il y a une qté de A_n (nv),

$\exists I \subset \mathbb{N}^*$, I ∞ tq $\forall i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) \geq 1$

$\Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \supset \bigsqcup_{i \in I} A_i$ ∞ $\Rightarrow c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \infty$.

et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n) \geq \sum_{i \in I} c(A_i) = \infty$

→ il y a un nbr fini de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (nv) et finis.

$\exists I \subset \mathbb{N}^*$, I fini tq $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$ et A_i fini

et si $i \notin I$; $A_i = \emptyset$.

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigsqcup_{i\in I} A_i$

$$c\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} c(A_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c(A_n)$$

$$\shortparallel$$

$c\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)$ union finie d'ens finis

Ex 2 Mq applicat est une mesure.

soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.
Ds chacun des cas, mq l'applicat donnée est une mesure.

1) Pr $a \in E$ fixé, δ_a est l'applicat déf par $\forall A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a)$.

$a \in E$, $\forall A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

▷ $\delta_a(\emptyset) = 0$ car $a \notin \emptyset$.

▷ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'élts de $\mathcal{T}$ 2 à 2 disjoints

Avons-nous $\delta_a\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) \overset{?}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta_a(A_n)$.

→ soit $\delta_a\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 1 \iff a \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

$\Rightarrow \underbrace{\exists!}_{\text{car les } (A_n) \text{ st 2à2 disjts}} n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $a \in A_{n_0}$

$\Rightarrow \delta_a(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_a(A_n) = 0$ si $n \neq n_0$

$\Rightarrow \sum \delta_a(A_n) = \delta_a(A_{n_0}) + \sum_{n\neq n_0} \delta_a(A_n) = 1$.

→ soit $\delta_a\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$,

$a \notin \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \iff a \notin A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \delta_a(A_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta_a(A_n) = 0.$$

2) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } A^c \text{ dénomb}\}$

$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ dénomb} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

↪ $\mathcal{T}$ est bien une tribu car

* $\emptyset \in \mathcal{T}$.
* stabilité p passage au complémentaire
* stabilité p réunion dénombrable

2) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A$ ou A^c est dénombrable$\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

Mq stabilité par réunion dénomb :

↳ si tous les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ st dénomb alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est dénombrable de ds $\mathcal{T}$

• $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $A_{n_0}^c$ dénomb.

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n^c \subset A_{n_0}^c \text{ dénomb} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}.$$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ est une tribu (c'est la plus petite tribu q contient tous les ens dénombr. de $\mathbb{R}$).

• μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$

* $\mu(\emptyset) = 0$

* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'élts de $\mathcal{T}$ 2 à 2 disjoints : $\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n)$

car ▸ si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ A_n est dénomb

$\Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est dénombrables $\Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$

et comme $\mu(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n) = 0.$$

▸ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $A_{n_0}^c$ est dénomb.

$$\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n^c \subset A_{n_0}^c \text{ dénomb}$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = 1$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n) = 1$ car $\mu(A_{n_0}) = 1$

et $\mu(A_n) = 0$ si $n \neq n_0$

car $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = A_{n_0} \cup \underbrace{\bigsqcup_{n \neq n_0} A_n}$

A_n dénomb si $n \neq n_0$.

$\subset A_{n_0}^c \Rightarrow$ dénomb

Ex 3 Ens de mesure positive

soit $f : (E, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une f mesurable. soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{T})$.

1. Mq si $\mu(E) \neq 0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tq f soit bornée sur A.

$\mu(E) \neq 0$.

$\exists A \in \mathcal{T}$, $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\mu(A) \neq 0$.

et $\forall x \in A$, $|f(x)| \leq M$.

idée : $A_M = \{x \in E, |f(x)| \leq M\}$

$= \underbrace{f^{-1}([-M, M]) \in \mathcal{T}}_{\text{car } f \text{ est mesurable}}$

Mq $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\mu(A_M) \neq 0$.

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\} = E$

$\circ\ \mu(A_M) = 0 \quad \forall M \in \mathbb{R}_+$,

$E = A_M \cup f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \Rightarrow \mu(E) = \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-M, M]))$

(ou $\mu(E) \leq \sum \mu(A_M)$)

$\bigsqcup_{M \in \mathbb{N}} A_M = E$, $\mu(E) = \lim_{M \to \infty} \mu(A_M) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$, $\lim_{M \to \infty} \mu(A_M) \neq 0$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$, $\mu(A_M) > 0$

2) Justifier $\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$.

$\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$ car $f^{-1}(\{0\})^c = f^{-1}(\mathbb{R}^*) \in \mathcal{T}$.

3) Mq si $\mu(f \neq 0) \Rightarrow \exists A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tq $|f|$ est minorée sur A par une cte $s^t > 0$.

$A_M = \{x \in E, |f(x)| > \frac{1}{M}\}$, $M \in \mathbb{N}^*$

$\{f \neq 0\} = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} A_M$

Union croissante : $\Rightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \lim_{M \to \infty} \mu(A_M) > 0$

de $\exists M \in \mathbb{N}^*$ tq $\mu(A_M) > 0$

Autre rédact° possible :

$$\mu(\{f \neq 0\}) \leq \sum_{M \in \mathbb{N}^*} \mu(A_M)$$

$$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \mu(A_M) > 0.$$

(sinon la série serait nulle)

2. Autour de la mesure de Lebesgue

Ex 9 : Lebesgue nulle et intérieur

Mq tt ss-ens mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

$$E \subset \mathbb{R}^d, \ \lambda(E) = 0 \Rightarrow \mathring{E} = \emptyset$$

Rq : $\mathring{E} \subset E \Rightarrow \lambda(\mathring{E}) = 0$.

Par contraposée, si E n'est pas d'intérieur vide, $\exists$ un ouvert O (nv) tq $O \subset E$.

O un intervalle / pavé ouvert (nv).

$$0 < \lambda(O) \leq \lambda(E) \Rightarrow \lambda(E) \neq 0.$$

$$O = \prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k[\qquad \lambda(O) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) \neq 0$$

! (ca) μ $q \Rightarrow p$ réciproque : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

d'intérieur vide mais de mesure de Lebesgue non-nulle : car $\lambda(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \lambda(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq 0$.

(ca) Ens de Cantor.

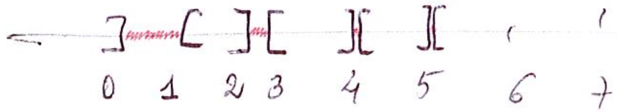
Ex 10 : Un calcul sp la mesure de Lebesgue

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.

Pour $n \geq 0$, on pose $A_n =]n, n + 2^{-n}[$.

1. Justifier $\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$A_n =]n, n + 2^{-n}[$



$\forall n \geq 0$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A_n est un intervalle ou A_n est un ouvert. (m s'il avait été fermé : on explicite le complément, mq ouvert).

Rq : $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les intervalles de $\mathbb{R}$.

2. soit $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

→ Calculer $\lambda(A)$.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ c̃ union dénombrable d'élts de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\lambda(A) \overset{\text{union disjointe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

3) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessRt borné ?

A un exemple de borélien non borné de mesure finie non-nulle.

III / BOREL-CANTELLI 1.

Ex 14 : L'armée des singes dactylographes.

Mq ds le jeu de pile ou face infini, la séquence pffp apparaît psq sûrement une ∞té de fois. Généraliser.

$\Omega = \{p,f\}^{\mathbb{N}^*}$, $A =$ "pfffp apparaît une ∞té de fois"

Objectif : $\mathbb{P}(A) = 1$

$A_n = \{\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \Omega : \omega_n = p, \omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \omega_{n+3} = f, \omega_{n+4} = p\}$.

$$\begin{array}{ccccc} p & f & f & f & p \\ n & & & & n+4 \end{array}$$

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\geq n} A_p$$

$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^5}$, $\underline{BC\,I}_{II}$ $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

A_n & A_{n+5} st indépend.

$$\tilde{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\geq n} A_{5p}$$

les $(A_{5p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ st indépendants,

BCI_{II} $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_{5p}) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{A}) = 1$

$1 = \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(\tilde{A})$

Ex13 Continuité & nott de presq partout

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (i.e. la restricto à $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une f cont & sppo f est nulle sr un borélien de mesure 1, ie $\lambda(f^{-1}(0))=1$. Mq f est iid nulle.

Le résultat subsiste-t-il si on remplace cont par mesurable ?

$f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ cont

On sppo $\exists\, E\in\mathcal{B}([0,1])$ tq $\lambda(E)=1$

et $f(x)=0\quad\forall x\in E$

$\Leftrightarrow\ \lambda(f^{-1}(\{0\}))=1$ car $E\subset f^{-1}(\{0\})$

→ Par contraposée : si f n'est pas iid nulle alors $\exists\, x\in[0,1]$ tq $f(x)\neq 0$

Comme f est cont $\Rightarrow\ \exists$ un intervalle ouvert (nv) I_x contenant x slq $f(x)>0\ \forall x\in I_x$. (21)

$0<\lambda(I_x)\leq\lambda(f^{-1}(\{0\})^c)$

$I_x\subset f^{-1}(\{0\})^c$

Donc $\lambda(f^{-1}(\{0\})^c)>0$

or $\lambda(f^{-1}(\{0\}))+\underbrace{\lambda(f^{-1}(\{0\})^c)}_{>0}=\lambda([0,1])=1$.

Contradₒ $\quad \overset{\shortparallel}{1}$

TD - 4 - Variables aléatoires discrètes

1/ Événements, calculs de probas

Ex1 : Calculs de probas

18 f, 12 h ; 21 d ($\boxed{15 f}$) 6h

proba gaucher ? } client
gauchère ? } au hasard
h au hasard ?

→ Expérience aléatoire : Choisir un client au hasard

→ Modélisat° : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- $\Omega = \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ = ens des clients $= \{1, \dots, 30\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ équiproba.

$\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{30}$.

F : "le client est une femme"

H : " — h "

D : "droitier", G : "gaucher"

⚠ A|B n'est pas évent

$\mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15}$

$\mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{21}{30}$

$\mathbb{P}(D \cap F) = \frac{15}{30}$.

$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(D^c) = \frac{9}{30}$

$\mathbb{P}(G|H) = \frac{\mathbb{P}(G \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{6/30}{12/30} = \frac{1}{2}$

or

$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D \cap H)$

$= \mathbb{P}(H) - (\mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(D \cap F))$

$= \frac{12}{30} - \left(\frac{21}{30} - \frac{15}{30}\right) = \frac{6}{30}$

Ex2 Chats de Shrödinger

Soit Xp pensée : 20 chats ds boîte ;
- 10 boîtes vides, - 5 b. + 3g @, - 5 b + 10g arsenic

Au bout 1h, $\mathbb{P}$(chat en vie) = 1 ; 0,6 (3g) ; 0,2 (10g)
b=vie

→ on choisit une des 20 b. au hasard.

1) Q^{elle} est la proba que le chat q s'y trouve soit encore en vie au bout d'1h ?

2) Le chat est en vie. Q^{elle} est la proba que la boîte ait été vide qd on l'y a placé ?

Si on voulait décrire l'espace de proba :

$\Omega = \underbrace{\{1, \dots, 20\}}_{\text{n° boîte}} \times \underbrace{\{0,1\}}_{\text{chat en vie ou non au bout d'1h.}}$

ici pas d'équiproba.

→ on se contente ici de travailler 4 events

$V =$ " chat en vie ", B_0 : " boîte vide ", B_3 : " 3g arsenic ds b ", B_{10} " 10 ——— "

$P(B_0) = \frac{10}{20}$, $P(B_3) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = P(B_{10})$

$\mathbb{P}(V|B_0) = 1$, $\mathbb{P}(V|B_3) = 0{,}6$; $\mathbb{P}(V|B_{10}) = 0{,}2$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(V) = \underbrace{\mathbb{P}(V|B_0) \times \mathbb{P}(B_0)}_{\mathbb{P}(V \cap B_0)} + \mathbb{P}(V|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(V|B_{10}) \cdot \mathbb{P}(B_{10})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0{,}6 + \frac{1}{4} \times 0{,}2 = 0{,}7$.

$\mathbb{P}(B_0|V) = \frac{\mathbb{P}(B_0 \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V|B_0) \cdot \mathbb{P}(B_0)}{\mathbb{P}(V)}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{7}$

Ex 3 Un pb de transit → Ch. de Gaulle

Avions A & B, $n_A = 20$, $n_B = 40$ pssg^rs

1° vient Séoul, chq pssgr à proba $p_A = 0{,}01$ d'ê infecté p COVID.

2nd Houston → $p_B = 0{,}2$ d'ê infecté. pssg^rs indép.

1) X_A, X_B nbr pssgr inf ds avions.

(i) loi de X_A & X_B. → corrspd nbr de " succès " ds suite de n_A épreuves indep.

$X_A \sim \mathcal{B}in(20; 0{,}01)$; indep $X_B \sim \mathcal{B}in(40; 0{,}2)$

(ii) Espérance nbr total de passagers inf.

$\mathbb{E}(X_A) = 20 \times 0{,}01 = 0{,}2$, $\mathbb{E}(X_B) = 40 \times 0{,}2 = 8$

(iii) si 2 ou + p. inf. → $\boxed{A}$ scelle & tt p. mis en quarantaine. Proba pas nécessr ?

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_A) + \mathbb{E}(X_B) = 8{,}2$

$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X_A = X_B = 0) + \mathbb{P}(X_A = 0, X_B = 1) + \mathbb{P}(X_A = 1, X_B = 0)$

Comme X_A & X_B sont indépdtes.

comme X_A, X_B ind $\Rightarrow P(X_A=k_1, X_B=k_2) = P(X_A=k_1).\mathbb{P}(X_B=k_2)$
$\forall k_1 \in \{0,\dots,n_A\}, \forall k_2 \in \{0,\dots,n_B\}$.

$$\mathbb{P}(X\leq 1) = \mathbb{P}(X_A=0)\,\mathbb{P}(X_B=0) + \mathbb{P}(X_A=0)\,\mathbb{P}(X_B=1) + \mathbb{P}(X_A=1)\,\mathbb{P}(X_B=0).$$

$$= (1-p_A)^{n_A}(1-p_B)^{n_B} + (1-p_A)^{n_A}.n_B.p_B(1-p_B)^{n_B-1} + (1-p_B)^{n_B}.n_A p_A(1-p_A)^{n_A-1}.$$

$$= 1{,}22.10^{-3}.$$

2) Bus attd passgrs Houston ( B) mais p. pas autorisée si covid. Dans bus $Y_B \leq 40$: p. saine.

p. inf. Repère caméra thermiq fièvre : 95%.

p. saine : 20%

i) Spps $X_B = 10$. Q^{le} est la distribut° (→ loi) du nbr de passagers sains / infectés q a pu monter ds bus ?

$X_B = 10$ infectés

$n_B - X_B = 30$ sains

• Loi nbr passgrs sains q a pu monter ds bus : $Bin(30; 0{,}8)$

• " infectés : $Bin(10; 0{,}05)$

Rq Y_B^S : nbr passagers sains q montent ds le bus & la loi conditionnelle de Y_B^S sachant $Y_B = 10$ est $Bin(30; 0{,}8)$

(ii) Spps tjrs $X_B = 10$, on choisit une personne au hasard / ds groupe de Houston, quelle est la proba p_E qu'elle soit autorisée à monter ds le bus ?

$\hat{M}$ q° si $X_B = k \in \{0,\dots,40\}$.

$p_E = \mathbb{P}(E)$, E : "monter ds le bus"

E : "pas de fièvre détectée"

I : "infecté", S : "sain"

$$\mathbb{P}(E|I) = 0{,}05, \quad \mathbb{P}(E|S) = 0{,}8$$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|I)\times\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(E|S)\times\mathbb{P}(S)$$

$$= 0{,}05 + \frac{10}{40} + 0{,}8\times\frac{30}{40} = 0{,}612.$$

$\mathbb{P}(E \mid X_B = 10) = 0{,}612$ 1 3)

$\mathbb{P}(E \mid X_B = k) = 0{,}05 \times \frac{k}{40} + 0{,}8 \times \frac{40-k}{40}$

$\forall k \in \{0, \dots, 40\}$

(iii) On ne sppose plus rien sur X_B. On choisit au hasard un des passagers en provenance de Houston, calculer p_E.

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{40} \mathbb{P}(E \mid X_B = k) \cdot \mathbb{P}(X_B = k).$$

$$= \sum_{k=0}^{40} \left(0{,}05 \times \frac{k}{40} + 0{,}8 \times \frac{40-k}{40}\right) \cdot \underbrace{C_{n_B}^{k} p_B^{k} (1-p_B)^{n_B - k}}_{\alpha_k = \mathbb{P}(X_B = k)}$$

$$\sum_{k=0}^{40} \alpha_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{40} k \alpha_k = \sum_{k=0}^{40} k \cdot \mathbb{P}(X_B = k) = \mathbb{E}(X_B) = n_B p_B.$$

$$\mathbb{P}(E) = \left(\sum_{k=0}^{40} k \alpha_k\right)\left(\frac{0{,}05 - 0{,}8}{40}\right) + \left(\sum_{k=0}^{40} \alpha_k\right)\frac{0{,}8}{40}$$

$\mathbb{P}(E) = 0{,}65$

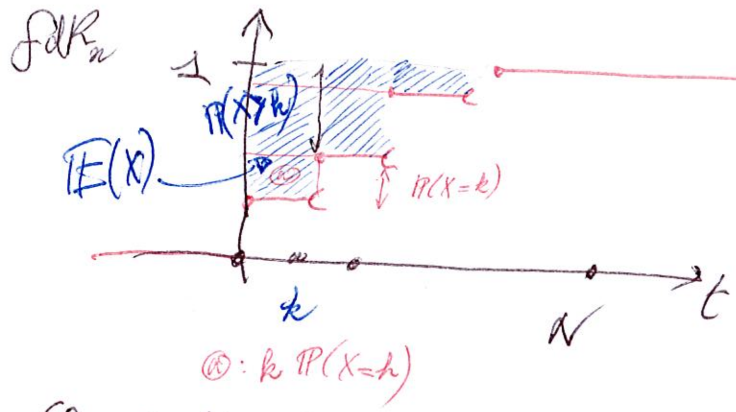
Ex 9 : Une autre ff pour l'espérance

Soit X va d'espace d'états $\{0, \dots, N\}$.

Mq $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$.

Que peut-on dire si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ tout entier ?

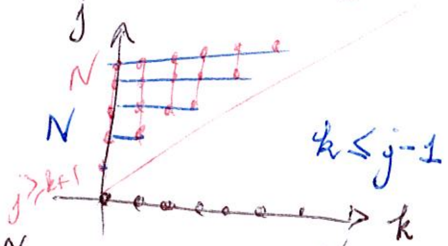
Puis visualiser l'espérance sur le graphe de la fdR de X.



$t \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X>k) = \sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X=j)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X=j) \right)$$



$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{N} j\,\mathbb{P}(X=j).$$

ou $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \dots + \mathbb{P}(X=N)$

$+ \mathbb{P}(X=2) + \dots + \mathbb{P}(X=N)$

$+ \mathbb{P}(X=3) + \dots + \mathbb{P}(X=N)$

$= \mathbb{P}(X=1) + 2\,\mathbb{P}(X=2) + 3\,\mathbb{P}(X=3) + \dots + N\,\mathbb{P}(X=N)$

$=$

Généralisation

→ si X est une va positive :

fdR X

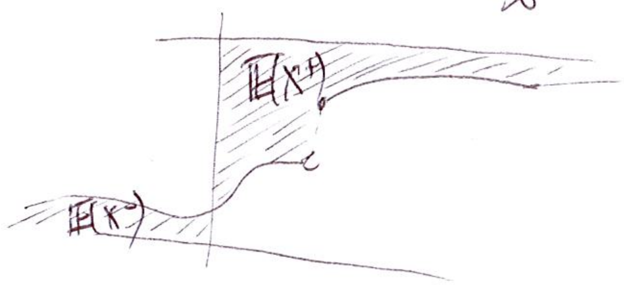
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X>t)\,dt = \int_0^{\infty} (1 - F(t))\,dt$$

→ si X n'est pas positive.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1-F(t))\,dt - \int_{-\infty}^{0} F(t)\,dt$$

si $\mathbb{E}(X^+) < \infty$

$\mathbb{E}(X^-) < \infty$



Ex 4 : Contrôleur contre fraudeur

1 ticket 1€   1° ⚡ 20 €, 2° ⚡ : 40 €, 3° ⚡ : 400 €.

Proba p pr voyageur d'ê cont. (constante.)

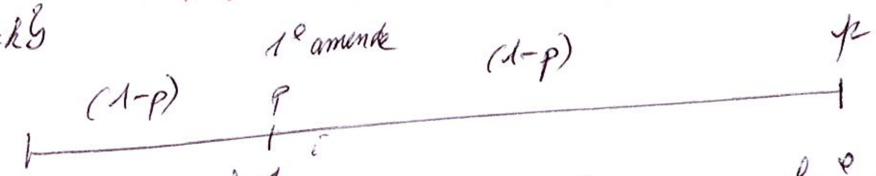
→ prd métro jsq 2° A ⚡ ⇒ s'arrête.

T : nbr trajets eff jsq 2° A ⚡.   ($q = 1-p$) j^e trajet sans contrôle.

1) Mq loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T=k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

$\{T=k\}$



$$\{T=k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{T=k, T_0=i\}$$

$$\mathbb{P}(T=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(T=k, T_0=i) = \sum_{i=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2}$$

$$= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \quad \text{loi } 2^e \text{ succès.}$$

2) Pr $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.

Indic : Chercher FF pr $f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1}$, puis pr sa dérivée terme à terme.

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{x^n}{1-x} \qquad \text{pr } |x| < 1$$

$$f'(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)\, x^{k-2} = \frac{nx^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n-1} - (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$\mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = p^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2}$$

$$= p^2\, \frac{n(1-p)^{n-1} - (n-1)(1-p)^n}{p^2}$$

$$= (1-p)^{n-1}\big(n - (n-1)(1-p)\big)$$

$$= (1-p)^{n-1}(pn - 1 + p)$$

3) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T>60)$.
(Pk s'intéresse-t-on à cette qté ?) lorsq $\begin{cases} p=1/10 \\ p=1/20 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(T>60)=\begin{cases} 0{,}01 & \text{si } p=\frac{1}{10} \\ 0{,}05 & \text{si } p=\frac{1}{20} \end{cases}$$

II/ Va discrètes & ptés des lois classiqs

Ex5 Si la loi uniforme.

Soit X, Y 2 va indep. suivant la loi Unif sur $\{1,..,n\}$.

1) Déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{n} \quad \forall k\in\{1,..,n\}.$$

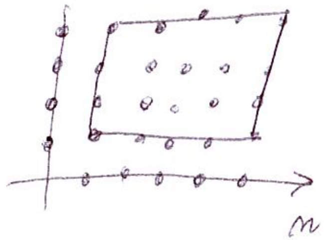
Interdit $\exists k\in\{1,..,n\}$ tq $\{X=Y\}=\{X=Y=k\}$

Mais si $\omega\in\Omega$ tq $X(\omega)=Y(\omega)$ alors $\exists k\in\{1,..,n\}$ (q dépd de ω)

$$\{X=Y\}=\bigcup_{k=1}^{n}\{X=Y=k\}$$

$$\boxed{\{X=Y\}=\bigsqcup_{k=1}^{n}\left(\{X=k\}\cap\{Y=k\}\right)}$$

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}\left(\{X=k\}\cap\{Y=k\}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=k\})=n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k)$$



(X,Y) vect^R aléatoire sur $\{1,n\}^2$.

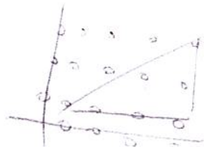
$\forall (i,j)\in\{1,..,n\}^2$, $\mathbb{P}((X,Y)=(i,j))=$
$=\mathbb{P}(X=i,\ Y=j)$
$=\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{n^2}$.

2) $\mathbb{P}(X\geq Y)$?

2 écritures

$$\{X\geq Y\}\overset{①}{=}\bigcup_{\substack{(i,j)\in\{1,..,n\}^2\\ i\geq j}}\{X=i,\ Y=j\}\overset{②}{=}\bigcup_{k=1}^{n}\left(\{X=k\}\cap\{Y\leq k\}\right)$$

$$\mathbb{P}(X\geq Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y\leq k\})$$
$$=\sum\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y\leq k)=\sum\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$$



$\frac{n(n+1)}{2}$

$$\mathbb{P}(X=Y) \overset{@}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(X=i)\, \mathbb{P}(Y=j)$$

3) Déterminer la loi de ~~$\mathbb{P}$~~ $(X+Y)$.

- Loi discrète à valeurs ds $\{2, \dots, 2n\}$.
- $\forall k \in \{2, \dots, 2n\}$;

Rq : $\sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(X+Y=k) = 1$.

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{\ell=1}^{k-1} (\{X=\ell\} \cap \{Y=k-\ell\})$$

$$= \bigcup_{\ell=\ell_-(k)}^{\ell_+(k)} \{X=\ell\} \cap \{Y=k-\ell\}$$

car $\left.\begin{array}{l} 1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k-\ell \leq n \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 1 \leq \ell \leq n \\ k-n \leq \ell \leq k-1 \end{array}\right\}$ max

$\Leftrightarrow \underbrace{\max\{1, k-n\}}_{\ell_-(k)} \leq \ell \leq \overbrace{\min\{k-1, n\}}^{\ell_+(k)}$

NB : Réduct° pr loi à densité : si $Z = \varphi(X, Y)$.

$$\mathbb{E}(h(Z)) = \int_{\mathbb{R}} h(z) f_Z(z)\, dz \qquad h \text{ bornée mesurable.}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{\ell_+(k) - \ell_-(k) + 1}{n^2}$$

$$= \frac{\min\{k-1, n\} - \max\{1, k-n\} + 1}{n^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leq n+1 \\[2ex] \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k > n+1. \end{cases}$$

Ex6 D'après CCP 1998.

Soit 2 variables X & Y à valeurs ds $\mathbb{N}$, en spps

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 : \mathbb{P}(X=j, Y=k) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

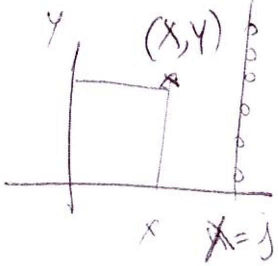
Cette qté est la loi jointe du couple de va (X,Y) dont X & Y st les marginales.

1) C ff, déterminer loi de X & loi de Y. Les variables X & Y st elles indép ?

$$\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

→ loi de X, loi discrète à val^{rs} ds $\mathbb{N}$

Calculer $\mathbb{P}(X=j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$.



$$\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{X=j, Y=k\}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!} = \frac{(1/2)^j}{e\, j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{e\, j!}\left[j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{(1/2)^j}{e\, j!}\left[j e^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

$$= \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!}\left(j + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X=j)$$

Vérificat°. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j) = 1 = \sum_{j=\cancel{0}\,1}^{\infty} j \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$= \frac{(1/2)^k}{e^{1/2}\, k!}\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Mq X & Y st indépendantes.

si $\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \mathbb{P}(X=j)\, \mathbb{P}(Y=k)$

$$\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{e^{\frac{1}{2}}\, j!}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{e^{\frac{1}{2}}\, k!}$$

$j+k = \left(j+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) \quad \forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$ FAUX.

2) Mq $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right] < \infty$, & la calculer.

(R) • X est discrète à val^{rs} ds $\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g(k)\, \mathbb{P}(X=k)$$

si (X,Y) est discrète à v^{rs} ds $\mathbb{N}^2$

$$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} h(j,k)\, \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} h(j,k)\, \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$h(X,Y) = 2^{X+Y}$ h mesurable positive.

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)}{e\, j!\, k!} = \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j}{j!\,k!} + \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty}\frac{k}{j!\,k!}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{j}{j!}e + \frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = 2e$$

NB : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e.$

- Z est intégrable ssi $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$
- si Z est $\oplus$, $\mathbb{E}(Z)$ a un sens ds $\overline{\mathbb{R}}_+$

Ex 7 : Minimum de lois géométriques

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ & $p \in]0,1[$, on considère N variables indépendantes $X_1, \dots, X_N$ chacune de loi géom de param p.

1) soit $i \in \{1,\dots,N\}$ & $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.

$N \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{G}éo(p)$ indép $1 \leq i \leq N$

$$\mathbb{P}(X_i = n) = p(1-p)^{k-1}$$

$$\{X_i \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n}\{X_i = k\}.$$

1ᵉ terme

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_i=k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \times 1 \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$

$$= 1-(1-p)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_i > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X_i = k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= (1-p)^n$$

2) On déf (va) $Y = \min\limits_{1\leq i\leq N} X_i$,

ie $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\{X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)\}$.

(i) $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y>n)$.

<u>ed</u> $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y=n)$

$$\mathbb{P}(Y>n) = \mathbb{P}\left(\min_{1\leq i\leq N} X_i > n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} \{X_i > n\}\right)$$

$= \prod\limits_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i > n)$ car les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ st indep

$$= \left[(1-p)^n\right]^N = (1-p)^{Nn}.$$

<u>ed</u> $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y=n)$

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Y>n) = 1-(1-p)^{Nn}$$

$$\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(Y\leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n-1)$$

$$= 1-(1-p)^{Nn} - (1-(1-p)^{N(n-1)}$$

$$= -(1-p)^{Nn} + (1-p)^{Nn-N}$$

<u>NB</u> : si $X \sim \mathcal{G}eo(p)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $\underbrace{\mathbb{P}(X>n)}_{\text{f de survie}} = (1-p)^n$

(ii) Y admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

Y admet une espérance finie.

$0 \leq Y = \min\limits_{1\leq i\leq N} X_i \leq X_1$ & X_1 est intégrable

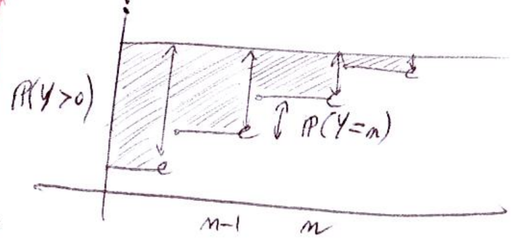
$\Rightarrow$ Y est intégrable.

<u>NB</u> : $\mathbb{P}(Y>n) = \left[(1-p)^N\right]^n = \left[1-(1-(1-p)^N)\right]^n$

f de survie qui détermine la loi $= (1-q)^n$

$Y \sim \mathcal{G}eo(q)$ $\quad q = 1-(1-p)^N$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y>n)}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^N\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)^N} = \frac{1}{q}$$

III / Borel-Cantelli

(X_n) suite var ind tq $\mathbb{P}(X_i=+1)=p$

$\mathbb{P}(X_i=-1)=1-p=q$

$0<p<1$ $\quad p\neq\frac{1}{2}$.

retour à 0.

On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\quad A_n=\{S_n=0\}$.

A = "on repasse une infinité de fois en 0".

Prouver $P(A)=0$.

$\Leftrightarrow$ 4 proba 1, $\complement$ d'un certain rg, on ne repasse pas en 0.

$\longrightarrow$ Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

- $\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(S_n=0)$
- n impair : $A_n=\emptyset$, $\mathbb{P}(A_n)=0$
- n pair : $n=2k$ $\quad\mathbb{P}(A_{2k})=\mathbb{P}(S_{2k}=0)$

$$\{S_{2k}=0\}=\bigcup_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq 2k}\{X_{i_j}=1\ \ 1\leq j\leq k,$$

$$X_i=-1,\ i\in\{1,\dots,2k\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}\}$$

$$=\bigcup_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}}\{X_i=1,\ i\in I \text{ et } X_j=-1,\ j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I\}$$

$$\mathbb{P}(A_{2k})=\mathbb{P}(S_{2k}=0)$$

$$=\sum_{I\subset\{1,\dots,2k\}}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i=1\}\cap\bigcap_{j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I}\{X_j=-1\}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}}\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=1)\times\prod_{j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I}\mathbb{P}(X_j=-1)$$

$$=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}}p^{\mathrm{card}(I)}q^{2k-\mathrm{card}(I)}=C_{2k}^{k}p^kq^k$$

$$=\frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(p(1-p)\right)^k$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ → crit de d'Alembert → FF de Sterling $\left(n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \right)$

Crit de d'Alembert

$$u_{2k} = \frac{(2k)!}{k!^2}\left(p(1-p)\right)^k, \quad \frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} = \frac{\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}\left[p(1-p)\right]^{k+1}}{\frac{(2k)!}{k!^2}\left[p(1-p)\right]^k}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{2k!} \times (2k+1)(2k+2)}{\cancel{k!^2}\,(k+1)^2}}{\frac{\cancel{2k!}}{\cancel{k!^2}}} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \cdot (p)(1-p) \xrightarrow[k\to\infty]{} 4p(1-p) < 1$$

sinon $= 1$ si $p = \frac{1}{2}$ or $p \neq \frac{1}{2}$

$$u_{2k} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2k}}{(\sqrt{2\pi k})^2} \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\left(\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^2} p(1-p)^k$$

$$= \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}\left(p(1-p)\right)^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\underbrace{\left[4p(1-p)\right]^k}_{<1}$$

terme général d'une série CV pour $p \neq \frac{1}{2}$

BC1 $\sum_{n=1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0$ & proba 1, à partir d'un certain rang, on ne repasse plus par l'origine.

NB si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \geq 0$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ & $\sum_{n\geq 1} v_n$ sont de même nature.

Ex 11 : soit $\alpha > 0$, considérons suite de va indép. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$$

1) Mq $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$

$(X_n) \sim \mathcal{B}ern\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

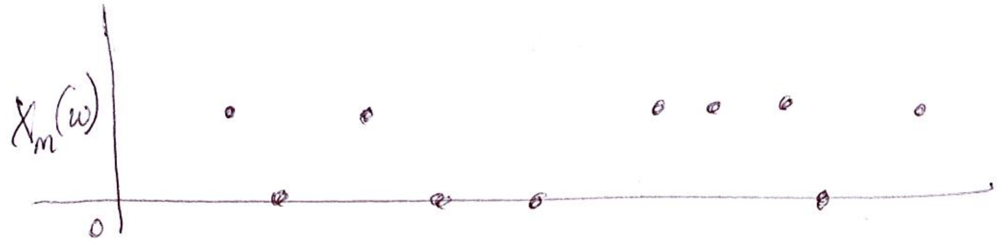
$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV p.s $\to X$ si $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

Étudier CV ps de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rq : $X = \lim\limits_{m\to\infty} X_m \iff X(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV p.s. vers X si $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$



Indic° : $A_n = \{X_n = 1\} = \{\omega\in\Omega : X_n(\omega) = 1\}$

• $\alpha > 1$: $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.

BCI : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{m\geq n} A_m\right) = 0$

$\iff \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap\limits_{m\geq n} A_m^c\right) = 1$ or $A_m^c = \{X_m = 0\}$.

Donc presque sûrement à partir d'un certain rang, les X_n sont tous nuls $\Rightarrow \mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV ps vers 0.

• si $\alpha \leq 1$, $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ + indépdce des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{m\geq n} A_m\right) = 1$, les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prennent ∞t la valeur 1 de proba 1 mais $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne pt pas CV ps vers 1 car sinon $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = 1$ par Th CV Dominée.

TD-5 Variables à densité

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

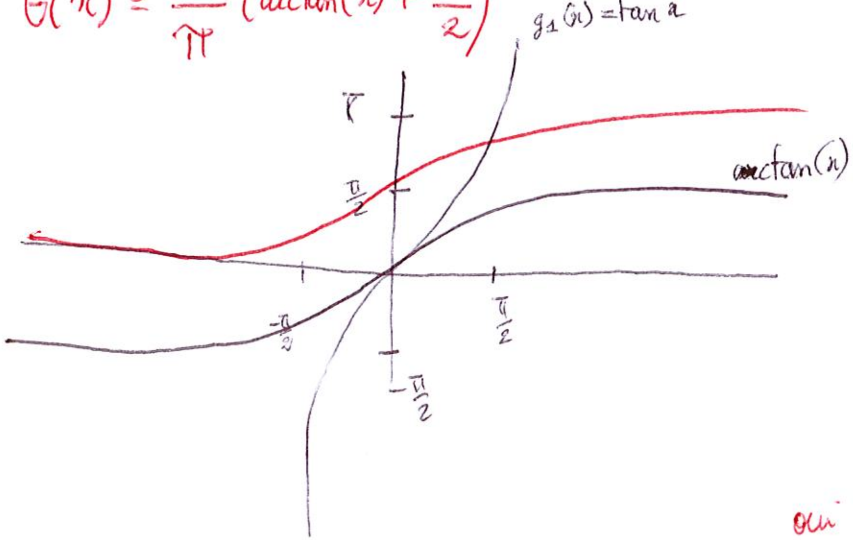
1/ Autour de la f de répartiΘ

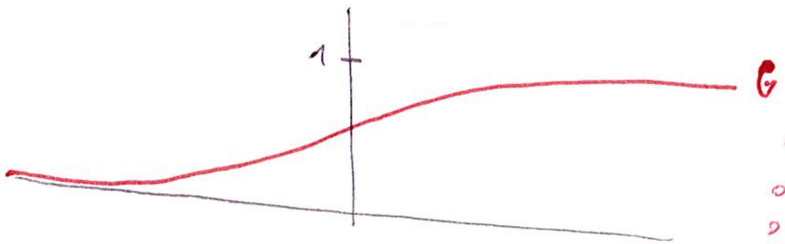
⚠ Les fs suivantes st-elles ds fs de répartiΘ d'une var

$F(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pas du tout.

N'est pas f positive, ni ↗.

$G(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$





oui $\frac{\text{FdR}}{\text{f de répartiΘ.}}$

∘ ↗

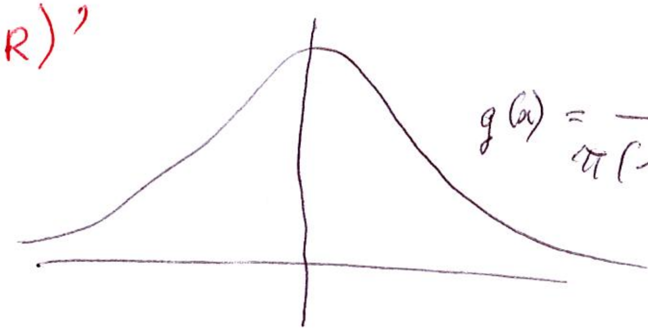
∘ ≥ 0

∘ $\lim_{-\infty} G = 0$

∘ $\lim G = 1$

densité = (FdR)'

densité de G

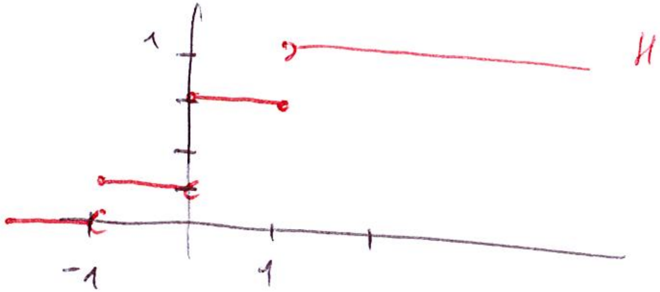


$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

N'a pas d'espérance car $\int g(x) = \infty$

(cont à droite, limite à gauche ⟺ mesure de proba).

$H(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,0[}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)$.



n'est pas FdR car n'est pas continue à droite en 1.

Ex2 : X var, $X \sim \mathrm{Unif}([0,1])$

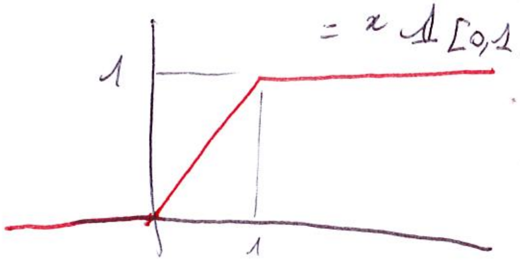
1) Qu'est la f de Répartitiø de X.

(R*) $X \sim \mathrm{Unif}([0,1])$, $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{P}(X \in B) = \lambda(B \cap [0,1])$ où λ : mesure de Lebesgue.

(R*) Sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
$X \sim \mathrm{Unif}(D)$ si $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

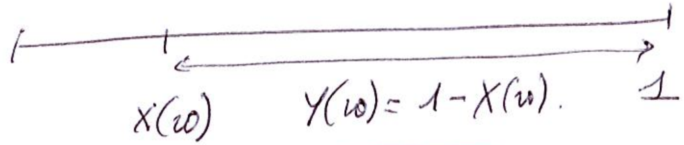
$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{\lambda_d(B \cap D)}{\lambda_d(D)}.$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \lambda(]-\infty, x] \cap [0,1])$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$
$$= x\, \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$$



Densité : $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$

2) Déterminer loi $Y = 1 - X$.



$\boxed{\text{Loi var ?} \longleftarrow \text{Déterminer fd R}^{\theta}}$

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(1 - X \le x) = \mathbb{P}(X \ge 1 - x)$$
$$= \lambda([1-x, \infty[\cap [0,1]) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1-x \le 0 \quad \overset{"}{=} 1 - F_X^-(1-x) \\ x & \text{si } 0 < 1-x \le 1 \quad \overset{"}{=} 1 - F_X(1-x) \\ 0 & \text{si } 1-x > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 \le x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

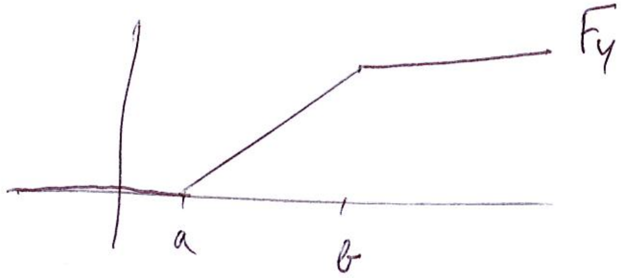
$\Rightarrow \boxed{F_Y(x) = F_X(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

NB $\mathbb{P}(X \ge 1-t) = 1 - \mathbb{P}(X < 1-t) = 1 - F_X^-(1-t)$
$= 1 - F_X(1-t)$
$$= \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } 1-t < 0 \\ 1 - (1-t) & \text{si } 0 \le 1-t < 1 \\ 1 - 1 & \text{si } 1-t \ge 1. \end{cases}$$

ii) $Y = a + (b-a)X$, $a < b$.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

$Y \sim \mathcal{U}nif([a,b])$.



Ex3 : X var de fdr F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où $c \in \mathbb{R}$.

1) Calculer FdR de Z

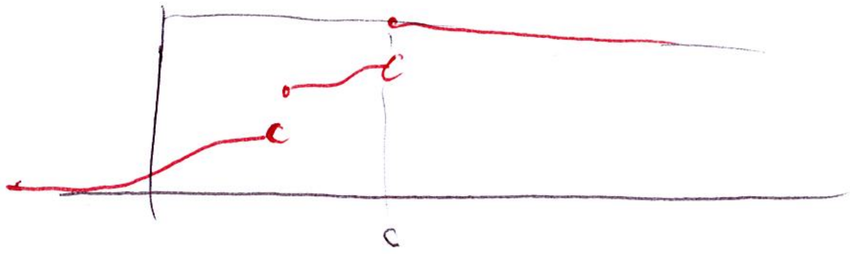
$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\min(X,c) \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X \leq c\})$$
$$+ \mathbb{P}(\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\})$$

si $c \leq x$: $\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\} = \{X > c\}$

si $c > x$ $\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\} = \emptyset$.

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq x) & \text{si } x < c \\ \mathbb{P}(X \leq c) + \mathbb{P}(X > c) = 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

$Z(\omega) \leq c$ $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(Z \leq c) = 1$.



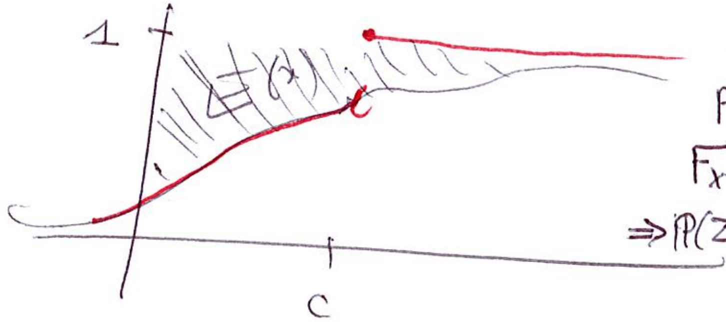
$\mathbb{P}(Z = c) = \mathbb{P}(\min(X,c) = c) = \mathbb{P}(X \geq c)$.

lire la limite à gauche.

2) si la loi de X a μ densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

si $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)}$

$= F_X(x) - F_X^-(x) = 0$ si F_X est cont.



Dc Z n'est pas à densité si $F_X(c) < 1$

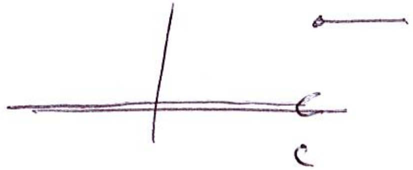
$\Rightarrow \mathbb{P}(Z = c) = \mathbb{P}(X \geq c) > 0$

si $F_X(c) = 1$, $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, $Z = X$ ps.

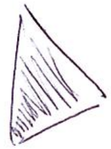
La loi de Z n'est pas une loi discrète si !

$F_X(c) > 0$, si $\mathbb{P}(X<c) = 0$, $Z=c$ ps

si $F_X(c) \in]0,1[$



alors la loi de Z n'est ni discrète ni à densité. (@ tps d'attente de bus, je pars au bout de 5 min si pas là).



Ex 4 : soit X va, $X \sim Unif([0,1])$.

$$Y(w) = \begin{cases} X(w) & \text{si } X(w) \in [0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4},1] \\ 1-X(w) & \text{si } X(w) \in]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[\end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

$x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$

$= \mathbb{P}(\{Y \leq x\} \cap \{X \in [0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4},1]\})$

$+ \mathbb{P}(\{Y \leq x\} \cap \{X \in]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[\})$

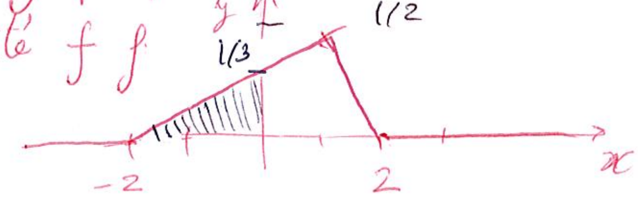
$f_X(x) = -\frac{1}{2}(x-2)$ pr $x \in [1,\infty[$.

(Ø)

Ex 5 : Variables aléatoires à densité

Interprétation du graphique d'une densité

La va X a pr densité f.



1) En exploitant les infos, donner v^rs des probas :

$\mathbb{P}(X \leq -2) = 0$ $\quad \mathbb{P}(X=-1) = 0$ $\quad \mathbb{P}(X \in [-2,0])$

$\mathbb{P}(X > 1)$ $\quad \mathbb{P}(X \geq 1)$ $\quad \mathbb{P}(|X| > 1)$

$\mathbb{P}(X \in [-2,0]) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$. $= \mathbb{P}(X \geq 1)$.

$\mathbb{P}(|X| \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(X \leq -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

2) Déterminer f de répartition de X.

$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ $\quad$ si $t < -2$, $F_X(t) = 0$

si $t \geq 2$, $F_X(t) = 1$

$f_X(x) = \frac{1}{6}(x+2)$ pr $x \in [-2,1]$, $f_X(x) = 0$ si $x < -2$

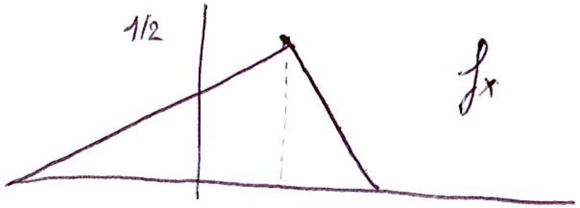
$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{6}(x+2)\,dx = \int_{-2}^{t} \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\,dx$

ou $= \frac{1}{2}(t+2) \times \frac{1}{6}(t+2) = \frac{1}{12}(t+2)^2$

Pour $t \in [1,2[$,

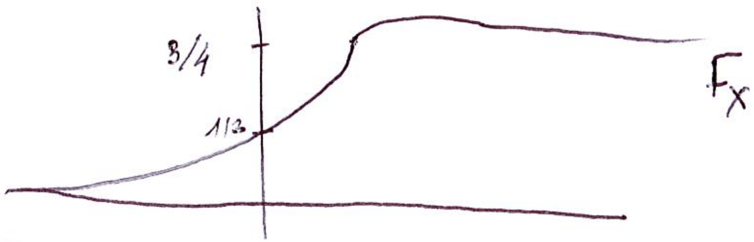
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-2}^{t} f_X(x)\,dx = \frac{3}{4} + \int_{1}^{t} f_X(x)\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2-t)\times\frac{1}{2}(2-t) = 1 - \frac{1}{4}(2-t)^2.$$



$F_X(0) = \frac{1}{3}$

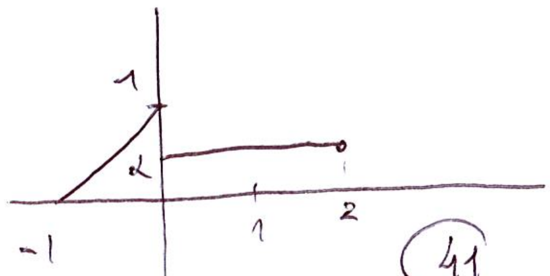
$F_X(1) = \frac{3}{4}$.



Ex 6 : X vaR f.d.R° F donnée p

$\forall u \in \mathbb{R}$, $F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt$, $f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si } t \in]0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Représenter f



1) $F_X(t) = 0$ si $t < -1$.

$F_X(t) = \int_{-1}^{t} (1+x)\,dx$ si $t \in [-1,0[$

$= \frac{1}{2}(1+t)^2$

$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ si $t \in [0,2[$

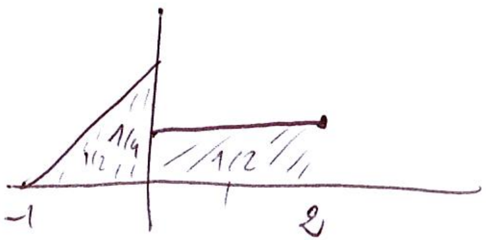
$= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \alpha t$ si $t \in [0,2[$

$F_X(t) = 1$ si $t \geq 2$.

$F_X(t)$ est cont car X est à densité.

$\Rightarrow F_X(2) = \frac{1}{2} + 2\alpha = 1$.

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$



TD 6 - Ex 8 Calculer $\lim_{n\to\infty}$ de $\begin{cases} \to \text{TCD} \\ \to \text{CV monotone} \end{cases}$ Par le $\boxed{\text{T. CD}}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$a_n = \int_{[-n,n]} \frac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \qquad = \frac{\pi}{4}\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi^2}{4}.$$

↳ TH de CVce dominée.

- si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{simple}} f$
- si $|f_n| \leq g$ & g intégrable :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Prenons $f_n(x) = \frac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2}\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$.

- CVce simple : si $x\in\mathbb{R}$, pr n assez grand ($n>\lceil |x| \rceil$)

$$f_n(x) = \frac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

- $|f_n(x)| \leq \frac{\pi/2}{1+x^2} = g(x)$ & g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$b_n = \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,dx = \int_{[0,1]} g_n(x)\,dx$$

$g_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

- Si $x\in\,]0,1]$, $0 \leq \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \underset{n\geq 2}{\leq} \frac{1+nx^2}{1+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $x\neq 0$.

- $\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = (1+nx^2)\,e^{-n\ln(1+x^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

g_n CV simplement sur $[0,1]$ vers g où

$$g(x) = 1 - \mathbb{1}_{]0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$|g_n(x)| \leq 1 \quad \forall x\in[0,1]$

← intégrable sur $[0,1]$

$\boxed{\text{TCD}}$ $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

$$c_n = \int_{[0,\infty[} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}\, dx, \quad h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}} \quad x \in [0,\infty[$$

$$(1+x^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^n)} \begin{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ = e^{\frac{1}{n}\ln x^n + \frac{1}{n}(\ln(1+\frac{1}{x^n}))} \xrightarrow[n\to\infty]{} x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x(1+x^2)} \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)$$

$\forall x \in [0,\infty[,\quad h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(x)$

- Dominat : $0 \leq h_n(x) \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $[0,\infty[$.

$\boxed{TCD}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n(x)\,dx = \int_0^\infty h(x)\,dx.$$

$$\int_0^\infty h(x)\,dx = ?$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

racine   pas racines réelles.

$$\int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \left[\ln x\right]_1^A - \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_1^A$$

$$= \ln A - \frac{1}{2}\ln(1+A^2) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{1}{2}\ln 2 \xrightarrow[A\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^\infty h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$d_n = \int_{[a,\infty[} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx \quad , \qquad a>0$$

- CVce simple : $k_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- Dominat° : $0 \leq k_n(x) \leq \dfrac{n}{n^2x^2} \leq \dfrac{1}{nx^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$

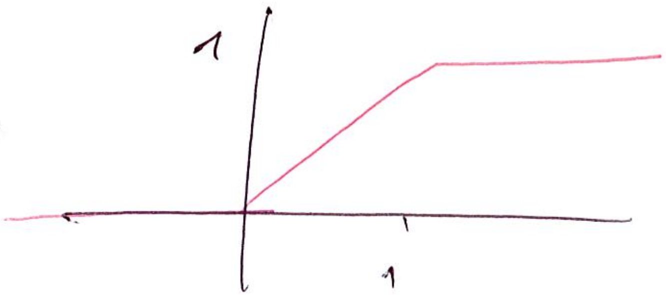
intégrable sur $[a,\infty[$.

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

Ex 8 loi de Rayleigh

soit U var, $U \sim Unif([0,1])$, soit σ un réel st positif, on déf nouvelle var X p $X = \sigma\sqrt{-2\ln U}$.

1) Rappeler f de R° F_U de U.



$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

2) Calculer fdR de X, F_X. $\forall t \in \mathbb{R}$.

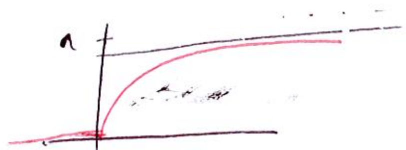
$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\sigma\sqrt{-2\ln U} \leq t)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{-2\ln U} \leq \frac{t}{\sigma}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \mathbb{P}\left(-2\ln U \leq \dfrac{t^2}{\sigma^2}\right) & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

si $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(U \geq e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}\right) = 1 - e^{-t^2/2\sigma^2}$

$e^{-t^2/2\sigma^2}$ 0 1

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$



⚠ si pas cont $\Rightarrow$ pas à densité !

F_X est cont & F_X est dérivable sauf en un nbr fini de pts $\Rightarrow$ X est à densité & sa densité est

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$$

4) ed sans calcul $\displaystyle\int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx$

$$\sigma^2 \underbrace{\int_0^\infty f_X(x)\,dx}_{1} = \sigma^2$$

3. Loi normale

Ex 10 : Notes contrôle de proba ~ loi normale.

$$\mathcal{N}\left(\frac{17}{2}, 4\right) = \mathcal{N}(8,5 ; 4).$$

1) Qu'est la proba pr étudiant d'avoir la moyenne ?

$\mathbb{P}(X \geq 10)$ où $m = 8,5$, $\sigma^2 = 4$.

$$\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = \mathbb{P}\left(\frac{X-8,5}{2} \geq \frac{10-8,5}{2}\right) =$$

$Z \sim \frac{X-8,5}{2}$

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \frac{3}{4}\right) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0,75)$$

$$= 1 - 0,7733\ 7.$$

2) On vt améliorer les notes à l'aide d'une transformat° affine $Y = aX + b$. Déterminer a & b pr qu'un étudiant ait la moyenne av une proba de $\frac{1}{2}$ & une note supérieure à 8 av proba $\frac{3}{4}$.

$Y = aX + b$

$\mathbb{P}(Y \geq 10) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(Y \geq 8) = \frac{3}{4}$