Feuille 3. Exercice 3

<u>Énoncé</u> : Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

on appelle oscillation de f sur $D \subset E$ la quantité
$$\omega(f, D) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in D \}$$
L'oscillation de f au point $x \in E$ est définie par
$$\omega(f, x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \omega(f, U_{\delta,x} \cap E)$$
$U_{\delta,x}$ est un voisinage de x de diamètre $\delta > 0$.

(1) Montrer que $\omega(f,x)$ est bien définie

- On commence par le cas plus simple $U_{\delta,x} = B(x, \frac{\delta}{2})$.

Pour $r>0$, posons $\Omega(r) := \omega(f, B(x,r) \cap E)$ pour $r>0$. Pour $0 < r_1 < r_2$ on a $\Omega(r_1) \leq \Omega(r_2)$

$$\left(\begin{array}{l} \text{En effet } B(x,r_1) \subset B(x,r_2) \text{ entraîne} \\ \Omega(r_1) = \sup \{ |f(y)-f(z)| : y,z \in B(x,r_1) \cap E \} \\ \qquad \leq \sup \{ |f(y)-f(z)| : y,z \in B(x,r_2) \cap E \} = \Omega(r_2) \end{array} \right)$$

De plus $\Omega(r) \geq 0$ $\forall r$ donc $\exists\, \Omega^* \geq 0$ tq

$$\Omega^* = \inf_{r>0} \Omega(r) = \lim_{r \downarrow 0} \Omega(r).$$

- Dans le cas général,

(a) pour $\delta > 0$, $U_{\delta,x}$ est un voisinage de x donc $\exists\, r > 0$ tq $B(x,r) \subset U_\delta$

Ce qui entraîne

$$\Omega(r) = \omega(x, B(x,r) \cap E) \leq \omega(x, U_{\delta,x} \cap E)$$

Comme $\Omega(r) \geq \Omega^*$, on a :

$$\forall \delta > 0 \quad \omega(x, U_{\delta,x} \cap E) \geq \Omega^* \qquad (*)$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ $\exists\, r_\varepsilon > 0$ tq $\Omega(r_\varepsilon) \leq \Omega^* + \varepsilon$

Pour $0 < \delta < r_\varepsilon$ $U_{\delta,x}$ est de diamètre δ et $x \in U_\delta$ donc $\forall y \in U_{\delta,x}$ $d(x,y) \leq \delta < r_\varepsilon$

i.e : $U_\delta \subset B(x, r_\varepsilon)$

On en déduit

$$\omega(x, U_{\delta,x} \cap E) \leq \omega(x, B(x, r_\varepsilon) \cap E) = \Omega(r_\varepsilon) \leq \Omega^* + \varepsilon$$

Donc $\exists\ r_\varepsilon > 0$ tq $\forall\ 0 < \delta < r_\varepsilon$

$$\Omega^* \underset{(*)}{\leq} \omega(x, U_{\delta,x} \cap E) \leq \Omega^* + \varepsilon.$$

Donc $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega(x, U_{\delta,x} \cap E)$ existe et vaut Ω^*.

---

(2) Montrer que f est continue au point x si et seulement si $\omega(f, x) = 0$

Rq : on utilise la notation $\Omega^* = \omega(f, x)$ comme plus haut.

(a) $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est continue au point x, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists r_\varepsilon$ tq $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B(x, r_\varepsilon) \cap E.$

En particulier, par inégalité triangulaire

$$\forall y, z \in B(x, r_\varepsilon) \cap E \quad |f(y) - f(z)| \leq 2\varepsilon$$

i.e : $\Omega(r_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$

Comme Ω est croissante, on a

$$\Omega^* = \lim_{r \downarrow 0} \Omega(r) \leq \Omega(r_\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire et $\Omega^* \geq 0$

on en déduit $\underline{\Omega^* = 0}$

(b) $\boxed{\Leftarrow}$ Si $\Omega^* = \lim_{r \downarrow 0} \Omega(r) = 0$ alors

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_\varepsilon > 0$ tq $\Omega(r) \leq \varepsilon$ pour $0 < r \leq r_\varepsilon$

Par définition de $\Omega(r)$ on a en particulier

pour $y \in B(x, r_\varepsilon) \cap E \quad |f(y) - f(x)| \leq \Omega(r_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

En conclusion

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_\varepsilon > 0$ tq $\forall y \in B(x, r_\varepsilon) \cap E \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$

c'est à dire que <u>f est continue au point x.</u>

---

(3) Si D est compact on a l'équivalence de :

(α) f continue en tout point de D.

(β) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in D : \omega(U_{\delta, x}) < \varepsilon$

(a) L'implication $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ est évidente comme conséquence de la question (2).

(b) Pour montrer $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ on suppose que (α) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$. Par (2), pour tout $x \in D$ il existe un ouvert U_x contenant x tq $\omega(f, U_x \cap E) < \varepsilon$

Les U_x forment un recouvrement de D par des ouverts et comme D est compact, on peut en extraire un recouvrement fini:

$U_1, \ldots, U_J$.

Donc $D \subset U_1 \cup \dots \cup U_J$ avec U_j ouvert et $\omega(f, U_j \cap E) < \varepsilon$ pour $j \in \{1, \dots, J\}$ (Δ)

Pour $x \in D$ et $j \in \{1, \dots, J\}$ on note

$$r_x(j) = \begin{cases} \sup \{ r > 0 : B(x,r) \subset U_j \} & \text{si } x \in U_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note r_x, j_x tq $r_x = \max_j r_x(j) = r_x(j_x)$.

Supposons par contradiction que

$$\inf \{ r_x ; x \in D \} = 0.$$

Alors il existe $(x_n) \subset D$ tq $r_{x_n} \to 0$ $n \to +\infty$

Par compacité de D, on peut supposer que (x_n) converge vers un point $x \in D$.

Comme $r_x > 0$ et $x_n \to x$, on a pour n assez grand,

$$B\left(x_n, \frac{r_x}{2}\right) \subset B(x, r_x) \subset U_{j_x}$$

donc

$$r_{x_n} \geq \frac{r_x}{2} \quad \text{ce qui contredit } r_{x_n} \to 0.$$

Ainsi $\delta := \inf \{ r_x : x \in D \} > 0.$

On vérifie maintenant que pour $x \in D$

$$U_{\delta,x} \subset B(x,\delta) \subset U_{j(x)}$$ donc par $(\triangle)$

$$\omega(f, U_{\delta,x}) \leq \omega(f, U_{j(x)}) < \varepsilon. \qquad \square$$