

# M44 Géométrie – Plan détaillé

K. Tzanev

22 janvier 2021

**Ce document évoluera au cours du semestre.** De ce fait il n'est pas destiné à une impression. Ce document contient :

Déf ► 81 définitions ;

Prop ► 141 propositions/propriétés ;

► 51 Commentaires/notes/remarques.

## §1. Le plan cartésien

Déf 01 ► On identifie le plan avec  $\mathbb{R}^2$  et on l'appelle **plan cartésien**.

Déf 02 ► Un élément du plan cartésien, c.-à-d. un couple de nombres réels, est appelé **un point**.

03 ► Quand on nomme un point  $(x, y)$ , par exemple  $P$ , au lieu d'écrire  $P := (x, y)$  on écrit souvent simplement  $P(x, y)$ .

04 ► Étant donné un point  $P(x, y)$  on note  $\vec{P}$  le vecteur  $(x, y)$  de l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^2$ , et on l'appelle le *vecteur sous-jacent* à  $P$ .

05 ► À priori on ne peut pas additionner des points, ni les multiplier par des scalaires, par contre on peut effectuer ces opérations sur les vecteurs sous-jacents.

Déf 06 ► Un **vecteur concret** est la donnée d'un couple ordonné de points. Au lieu de noter un tel couple  $(A, B)$ , par exemple, on le note  $\overrightarrow{AB}$ .

Déf 07 ► Le **vecteur (abstrait)** sous-jacent au vecteur concret  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur  $\vec{B} - \vec{A}$ . Et inversement, on dit que  $\overrightarrow{AB}$  est une **réalisation** de  $\vec{u}$  si  $\vec{u}$  est le vecteur abstrait sous-jacent à  $\overrightarrow{AB}$ , c.-à-d. si  $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A}$ .

08 ► Par abus de notation on identifie le vecteur concret  $\overrightarrow{AB}$  et son vecteur abstrait sous-jacent. Ainsi quand on écrit  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  on sous-entend égalité entre les vecteurs abstraits sous-jacents, c.-à-d.  $\vec{B} - \vec{A} = \vec{D} - \vec{C}$ . De même quand on utilise les opérations vectorielles somme est produit par un scalaire, comme  $\lambda \overrightarrow{AB}$  ou  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ , on sous-entend qu'il s'agit des opérations sur les vecteurs abstraits sous-jacents.

Prop 09 ► (règle du parallélogramme)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , et on dit que  $ABCD$  est un **parallélogramme**.

Prop 10 ► (somme de vecteurs concrets)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , cette règle est dite *de Chasles*.

Prop 11 ► Soit  $\Omega$  le point  $(0, 0)$ . Nous avons  $\overrightarrow{\Omega P} = \vec{P}$  pour tout point  $P$ .

12 ► On rappelle que la norme d'un vecteur abstrait  $(x, y)$  est  $\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y) | (x, y) \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$  où  $\langle (x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$  est le produit scalaire entre vecteurs abstraits.

Déf 13 ► La distance  $AB$  entre deux point  $A$  et  $B$  est défini par  $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

Déf 14 ► La distance entre un point  $A$  et un ensemble de points  $\mathcal{M}$  est défini par  $d(A, \mathcal{M}) := \inf_{B \in \mathcal{M}} AB$ .

## §2. Translations

- Déf 01** ► Une **isométrie**  $T$  est une application qui préserve les distances, c.-à-d.  $T(A)T(B) = AB$  pour tous deux points  $A, B$ .
- Prop 02** ► Soient un point  $A$  et un vecteur  $\vec{u}$ . Il existe un unique point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ . On le note  $A + \vec{u} := B$ .
- 03 ► Nous avons  $\overrightarrow{A + \vec{u}} = \vec{A} + \vec{u}$ .
- Prop 04** ► Nous avons les équivalences  $A + \vec{u} = B \iff \forall P, \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB} \iff \exists P, \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$ .
- 05 ► Cette proposition nous indique que la définition de  $A + \vec{u}$  est indépendante de la « position » de  $\Omega(0, 0)$ .
- Déf 06** ► L'application  $T_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$  est appelée **translation** par  $\vec{u}$ .
- Prop 07** ► Nous avons  $T_{\vec{0}} = \text{Id}$ . On appelle cette translation **triviale**.
- Prop 08** ►  $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$ .
- Prop 09** ► Pour  $\forall \vec{u}$  la translation  $T_{\vec{u}}$  est une isométrie avec  $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$ .
- Prop 10** ► Si  $T$  est une translation et  $B = T(A)$ , alors  $T = T_{\overrightarrow{AB}}$ . En particulier si  $\exists A$  tel que  $T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(A)$ , alors  $\vec{u} = \vec{v}$  ( $\iff T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}}$ ).
- Prop 11** ► Si  $T$  est une application telle que  $\exists A, B, \forall \vec{v}, T(A + \vec{v}) = B + \vec{v}$ , alors  $T = T_{\overrightarrow{AB}}$ .
- Prop 12** ► Les translations sont affines, c.-à-d. si  $T$  est une translation,  $A$  et  $B$  deux points, et  $\lambda$  un réel, alors  $T(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda T(A) + (1 - \lambda)T(B)$ .

## §3. Repères affines

- Déf 01** ► Un **repère (affine)** est la donnée d'un triplet  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où  $O$  est un point, et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs (abstraits) indépendants, autrement dit  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ .
- Déf 02** ► Un repère (affine)  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est dit **orthonormé** si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base orthonormée du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ .
- Déf 03** ► Le triplet  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  avec  $\Omega(0, 0)$ ,  $\vec{e}_1(1, 0)$  et  $\vec{e}_2(0, 1)$  est appelé le **repère canonique**.
- 04 ► Le repère canonique est orthonormé.
- Prop 05** ► Si  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère, l'application  $(x, y) \mapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$  est une bijection (isomorphisme affine) de  $\mathbb{R}^2$  dans le plan cartésien. Si de plus le repère est orthonormé c'est une isométrie (affine).
- Déf 06** ► Soit un repère  $\mathcal{R} := (O, \vec{u}, \vec{v})$ . Étant donné un point  $P$  on note  $P(x, y)_{\mathcal{R}}$  et on dit que  $(x, y)_{\mathcal{R}}$  sont les coordonnées de  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}$  si  $P = O + x\vec{u} + y\vec{v}$ .
- Prop 07** ► Soit un repère  $\mathcal{R} := (O, \vec{u}, \vec{v})$  et notons  $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$  la base sous-jacente. Alors pour tout point  $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$  et tout vecteur  $\vec{w}(x_w, y_w)_{\mathcal{B}}$  nous avons la relation  $P + \vec{w} = (x_P + x_w, y_P + y_w)_{\mathcal{R}}$ .

## §4. Barycentres

- Déf 01** ► Les nombres positifs  $\omega_1, \dots, \omega_n$  forment un **système de poids** (ou plus simplement, sont des **poids**) si  $\omega_1 + \dots + \omega_n \neq 0$ . On appelle  $\omega := \omega_1 + \dots + \omega_n$  le **le poids total**.
- Déf 02** ► On dit qu'un système de poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$  est **normalisé** si le poids total est 1. Ainsi à tout système de poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$  on peut associer les poids normalisés  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  avec  $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega}$ .

- Déf 03** ► Soient  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  et  $n$  poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de poids total  $\omega$ . On appelle **barycentre** de  $(A_1, \dots, A_n)$  avec les poids  $(\omega_1 : \dots : \omega_n)$  l'unique point  $G$  tel que  $\vec{G} = \frac{1}{\omega} \sum \omega_i \vec{A}_i$ . On note  $\sum \bar{\omega}_i A_i := G$  ce barycentre.
- Prop 04** ► Soient  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  et  $n$  poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de poids total  $\omega$ , alors  $G = \sum \bar{\omega}_i A_i \iff \forall P, \omega \vec{PG} = \sum \omega_i \vec{PA}_i \iff \exists P, \omega \vec{PG} = \sum \omega_i \vec{PA}_i$ .
- 05 ► Cette proposition nous indique que la position du barycentre est indépendante de la position de  $\Omega(0, 0)$  par rapport aux points  $A_1, \dots, A_n$ .
- Prop 06** ► Si  $\omega_1, \dots, \omega_n$  n'est pas un système de poids, c.-à-d.  $\omega_1 + \dots + \omega_n = 0$  alors  $\forall P, \sum \omega_i \vec{PA}_i = \sum \omega_i \vec{A}_i$ .
- Déf 07** ► On note le vecteur la proposition précédente  $\sum \omega_i A_i := \sum \omega_i \vec{A}_i$ .
- 08 ► Comme  $1 + (-1) = 0$  le vecteur  $B - A$  est bien défini et nous avons  $B - A = \overrightarrow{AB}$ .
- 09 ► L'expression  $\sum \omega_i A_i$  n'a de sens que dans les deux cas particuliers :
- c'est un point (le barycentre) quand  $\sum \omega_i = 1$  ;
  - c'est un vecteur quand  $\sum \omega_i = 0$ .
- 10 ► Comme la notation le suggère, l'expression  $\sum \omega_i A_i$  est invariable par permutation, c.-à-d.  $\sum \omega_i A_i = \sum \omega_{\sigma(i)} A_{\sigma(i)}$  pour toute permutation  $\sigma$ .
- 11 ► La proposition suivante nous dit qu'on peut remplacer une partie des points par leur barycentre en y mettant la sommes des poids correspondants.
- Prop 12** ► Soient  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  et un système de poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Si  $\omega_1, \dots, \omega_k$  est un sous-système de poids,  $\omega_{1,k}$  son poids total et  $G_{1,k} := \bar{\omega}_1 A_1 + \dots + \bar{\omega}_k A_k$  le barycentre correspondant. Alors le barycentre de  $(A_1, \dots, A_n)$  avec les poids  $(\omega_1 : \dots : \omega_n)$  coïncide avec le barycentre de  $(G_{1,k}, A_{k+1}, \dots, A_n)$  avec les poids  $(\omega_{1,k} : \omega_{k+1} : \dots : \omega_n)$ .
- Prop 13** ► Si  $A_1 = \dots = A_n = A$  alors  $\sum \bar{\omega}_i A_i = A$  pour tout système de poids  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .
- Prop 14** ► Soit  $A, B, C$  trois points *non alignés*, alors pour tout point  $P$  il existe un unique triplet de poids normalisés  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tel que  $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ .
- Déf 15** ► Étant donné  $A, B, C$  trois points non alignés, on dit que  $(A, B, C)$  est une **repère barycentrique** et que les poids (normalisés)  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de la proposition précédente sont des (les) **coordonnées barycentriques** de  $P$  dans cette base.
- Déf 16** ► On dit qu'une application  $F$  est **affine** si elle préserve les barycentres, c.-à-d.  $F(\sum \omega_i A_i) = \sum \omega_i F(A_i)$ .
- Prop 17** ► Si  $F$  est une application vectorielle l'application  $F_A : A + \vec{u} \mapsto A + F(\vec{u})$  est affine. On dit que  $F_A$  est «  $F$  de centre  $A$  ».
- Prop 18** ► Une application  $F$  est affine si et seulement si  $F(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda F(A) + (1 - \lambda)F(B)$  pour tous points  $A$  et  $B$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## §5. Homothéties

- Déf 01** ► Une **similitude**  $H$  de **rapport**  $\lambda$  est une application qui multiplie les distances par  $\lambda$ , c.-à-d.  $T(A)T(B) = \lambda AB$  pour tous deux points  $A, B$ . On dit aussi que c'est une  $\lambda$ -similitude.
- Prop 02** ► Une 0-similitude est une application constante et une 1-similitude est une isométrie.
- Déf 03** ► Soit  $C$  un point et  $\lambda$  un réel. L'application  $H_{C,\lambda} : A \mapsto C + \lambda \overrightarrow{CA}$  est appelée **homothétie** de centre  $C$  et de rapport  $\lambda$ .
- Prop 04** ►  $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$

- Prop 05 ►  $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2} = H_{C,\lambda_2} \circ H_{C,\lambda_1} = H_{C,\lambda_1\lambda_2}$
- Prop 06 ► Les homothéties de rapport non nul sont des bijections, avec  $H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,\frac{1}{\lambda}}$ .
- Prop 07 ►  $H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}$ . Autrement dit  $H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda\vec{u}$ .
- Prop 08 ► Nous avons  $H_{C,1} = \text{Id}$ . On dit pour une telle homothétie qu'elle est **triviale**. Tous point est un centre pour l'homothétie triviale.
- Déf 09 ► Une homothétie de rapport  $-1$  est appelée **symétrie centrale** et elle est notée  $S_C := H_{C,-1}$ .
- Prop 10 ► Une homothétie  $H_{C,\lambda}$  est une  $|\lambda|$ -similitude, c.-à-d.  $H_{C,\lambda}(A)H_{C,\lambda}(B) = |\lambda|AB$ . En particulier une homothétie est une isométrie si et seulement si  $\lambda = \pm 1$ , ainsi les symétries centrales sont les seuls homothéties non triviales qui sont des isométries.
- Prop 11 ► Toute similitude est la composition d'une isométrie et d'une homothétie.
- Prop 12 ► Le centre d'une homothétie non triviale est son unique point fixe, c.-à-d. si  $H$  est une homothétie non triviale et  $H(C) = C$  alors  $C$  est le centre de l'homothétie.
- Prop 13 ► Nous avons  $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2}$  si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , et  $C_1 = C_2$ , dans le cas non trivial.
- Prop 14 ► Les homothéties sont affines.

## §6. Droites

- Déf 01 ► Soient un point  $A$  et un vecteur **non nul**  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , l'ensemble  $D_{A,\vec{u}} = \{A + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  est appelé une **droite (affine)**. Le vecteur  $\vec{u}$  est dit **directeur** de cette droite. Et on dit que cette droite **passse** par  $A$  et a pour direction  $\vec{u}$ .
- Prop 02 ► L'application  $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} = T_{\lambda\vec{u}}(A)$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $D_{A,\vec{u}}$  appelé **paramétrisation (affine)**.
- Déf 03 ► Pour deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on note  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  si et seulement si  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$  (avec  $\lambda \neq 0$ ). Et sous cette condition on note  $\vec{u} : \vec{v} := \lambda$ .
- Prop 04 ►  $D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$  si et seulement si  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  et  $B \in D_{A,\vec{u}}$  (et/ou  $A \in D_{B,\vec{v}}$ ). Ainsi si  $u$  est un vecteur directeur d'une droite, l'ensemble des vecteurs directeurs de cette même droite est  $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ .
- Prop 05 ► Si une droite contient une autre, alors les deux droites coïncident.
- Prop 06 ► Soient  $A \neq B$  deux points distincts d'une droite  $D$ , alors  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $D$ .
- Prop 07 ► Si  $\vec{u}$  est un vecteur directeur d'une droite  $D$ , alors pour tout point  $A$  nous avons  $D = D_{A,\vec{u}}$ . En particulier si  $A \neq B \in D$ , alors  $D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$ .
- Prop 08 ► Par deux point passe une unique droite, en particulier si  $\#(D_1 \cap D_2) > 1$ , alors  $D_1 = D_2$ .
- Déf 09 ► L'unique droite passant par deux points distincts  $A \neq B$  est noté  $(AB)$ .
- Prop 10 ► Soient  $A \neq B$  deux points distincts d'une droite  $D$ , alors  $D$  est l'ensemble de barycentres  $\{\alpha A + \beta B\}$  de  $A$  et  $B$ .
- Prop 11 ► L'application  $\lambda \mapsto (1 - \lambda)A + \lambda B$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $(AB)$  appelé **paramétrisation barycentrique**.
- Prop 12 ► L'image d'une droite par une application affine est une droite.
- Déf 13 ► Deux droites sont dites **parallèles** si elles possèdent un vecteur directeur en commun (et das ce tous leurs vecteurs directeurs sont communs).

- 14 ► On note  $D_1 \parallel D_2$  si les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles. La relation  $\parallel$  est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont appelées **directions**. Et l'ensemble des directions est ce qu'on appelle *l'espace projectif*.
- Prop 15 ►  $T_{\vec{v}}(D_A, \vec{u}) = D_{T_{\vec{v}}(A), \vec{u}}$ .
- En particulier, l'image par translation d'une droite est une droite parallèle.
  - Une droite est invariante par une translation  $T_{\vec{v}}$  si et seulement si  $\vec{v}$  est un vecteur directeur de cette droite.
- Prop 16 ►  $H_{C, \lambda}(D_A, \vec{u}) = D_{H_{C, \lambda}(A), \vec{u}}$ .
- En particulier, l'image par homothétie d'une droite est une droite parallèle.
  - Une droite est invariante par une homothétie si et seulement si son centre est sur cette droite.
- Prop 17 ► Étant donné une droite  $D$  et un point  $A$ , il existe une unique droite parallèle à  $D$  passant par  $A$ .
- Prop 18 ► Deux droites parallèles sont disjointes ou confondues.
- Déf 19 ► Un vecteur est dit **normal** à une droite  $D$  si et seulement s'il est orthogonal à un (à tout) vecteur directeur de cette droite. Deux droites sont dites **perpendiculaires** si un (tout) vecteur directeur de l'une est un vecteur normal pour l'autre.
- Prop 20 ► Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.
- Prop 21 ► Étant donné une droite  $D$  et un point  $A$ , il existe une unique droite perpendiculaire à  $D$  passant par  $A$ .
- Prop 22 ► Soit  $(a, b, d) \in \mathbb{R}^3$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = d\}$  est une droite de vecteur normal  $(a, b)$  et de vecteur directeur  $(-b, a)$ . L'équation  $ax + by = d$  est dite **équation cartésien** de cette droite.
- 23 ► Par abus de notation on note  $\{ax + by = d\} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = d\}$ .
- Prop 24 ► Deux droites  $\{a_1x + b_1y = d_1\}$  et  $\{a_2x + b_2y = d_2\}$  sont égales (resp. parallèles) si et seulement si  $(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$  (resp.  $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$ ).
- Déf 25 ► On dit que l'équation cartésienne  $ax + by = d$  est **normalisée** si  $\|(a, b)\| = 1$ .
- Prop 26 ► Toute droite possède une infinité d'équations cartésiennes (toutes proportionnelles) dont exactement deux sont normalisées.
- Prop 27 ► Si  $ax + by = d$  est une équation cartésienne normalisée de  $D$  alors  $d(\Omega, D) = |d|$ , où  $\Omega(0, 0)$ .

## §7. Points alignés

- Déf 01 ► On dit que des points sont **alignés** s'ils appartiennent à une même droite. On note  $(ABC \dots)$  si les points  $A, B, C \dots$  sont alignés et s'il y a au moins deux points distincts.
- 02 ► Un ou deux points sont toujours alignés.
- Prop 03 ► Trois points distincts  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ .
- Prop 04 ► Trois points distincts  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si  $(AB) = (AC)$ .
- Prop 05 ► Trois points distincts  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si  $C = H_{A, \lambda}(B)$  pour un certain  $\lambda$ .
- Prop 06 ► Trois points distincts  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si l'un est un barycentre des deux autres.

07 ► On verra plus tard que  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si  $\angle ABC = 0 \pmod{\pi}$  et si et seulement si  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$ .

## §8. Segment et demi-droites

**Prop 01 ►** Pour tout ensemble  $I \subset \mathbb{R}$  nous avons  $\{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in I\} = \{(1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$  et on dit que  $\lambda \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AB}$  est une **paramétrisation (affine)** et que  $\lambda \mapsto (1 - \lambda)A + \lambda B$  est une **paramétrisation barycentrique** de cet ensemble.

**Déf 02 ►** Un ensemble de la forme  $[AB] := \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, 1]\}$  est dit **segment fermé** d'**extrémités**  $A$  et  $B$ . Pour tout point  $C \in [AB]$  on dit que  $C$  est **entre**  $A$  et  $B$ .

**Prop 03 ►**  $[AB] = [BA]$

**Prop 04 ►**  $[AB] = [CD] \iff \{A, B\} = \{C, D\}$ , c.-à-d. un segment n'a que deux extrémités.

**Prop 05 ►**  $[AB] \supset [CD] \iff \{C, D\} \in [AB]$

**Déf 06 ►** Un ensemble de la forme  $]AB[ = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in ]0, 1[ \}$  est dit **segment ouvert**. Pour tout point  $C \in ]AB[$  on dit que  $C$  est **strictement entre**  $A$  et  $B$ .

07 ► Il existe aussi les versions semi-fermés/ouvertes  $]AB]$  ou  $[AB[$ .

08 ► Dans les notations précédentes on peut rajouter une virgule entre les points :  $[A, B]$ ,  $]A, B[ \dots$

**Déf 09 ►** Un ensemble de la forme  $[AB) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[ \}$  est dit **demi-droite fermée** d'extrémité  $A$  et de direction  $\overrightarrow{AB}$ .

**Déf 10 ►** Un ensemble de la forme  $]AB) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in ]0, \infty[ \}$  est dit **demi-droite ouverte**.

**Déf 11 ►** La **demi-droite opposée** à  $[AB)$  est  $-[AB) = \{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[ \}$ , et celle de  $]AB)$  est  $-]AB) = \{A - \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in ]0, \infty[ \}$ .

**Prop 12 ►** La demi-droite opposée à  $[AB)$  est une demi-droite fermée de direction  $\overrightarrow{BA}$ . De plus  $[AB) \cup -[AB) = (AB)$  et  $[AB) \cap -[AB) = \{A\}$ .

**Prop 13 ►** Le complémentaire d'une demi-droite fermé (resp. ouverte) est une demi-droite ouverte (resp. fermé) appelée la **demi-droite complémentaire**.

## §9. Demi-plans

**Déf 01 ►** Pour  $(a, b) \neq (0, 0)$ , un **demi-plan ouvert** (resp. **fermé**) est un ensemble de la forme  $\{ax + by > d\}$  (resp.  $\{ax + by \geq d\}$ ). On dit que la droite  $\{ax + by = d\}$  **délimite** ces demi-plans.

02 ► On peut remplacer  $>$  et  $\geq$  par  $<$  et  $\leq$  dans la définition précédente sans changer son sens.

**Prop 03 ►** Une droite « coupe » un plan en deux demi-plans, autrement dit  $\mathbb{R}^2 = \{ax + by > d\} \sqcup \{ax + by = d\} \sqcup \{ax + by < d\}$ .

**Prop 04 ►** Soient une droite  $D = \{ax + by = d\}$  et un point  $A \in \{ax + by > d\}$  alors :

►  $B \in \{ax + by > d\} \iff [AB] \cap D = \emptyset$ .

►  $B \in \{ax + by < d\} \iff ]AB[ \cap D \neq \emptyset$ .

## §10. Relations métriques

**Prop 01 ►** Soit  $C \in (AB)$ , alors  $C \in [AB]$  (resp.  $C \in ]AB[$ ) si et seulement si  $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{CA} \rangle \geq 0$  (resp.  $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{CA} \rangle > 0$ ).

**Prop 02** ► Soient trois points distincts  $A, B$  et  $C$ , alors  $AB^2 = BC^2 + 2\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{CA} \rangle + CA^2$ .

**Prop 03** ► (Théorème de Pythagore) Étant donnés trois points distincts  $A, B$  et  $C$ , les droites  $(AC)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires si et seulement si  $AB^2 = BC^2 + CA^2$ .

**Prop 04** ► (inégalité triangulaire) Soient trois points distincts  $A, B$  et  $C$ .

1.  $AB \leq BC + CA$ ;

2.  $AB = BC + CA$  si et seulement si  $C \in [AB]$ ;

**Prop 05** ► (Théorème de Thalès) Soient quatre points distincts  $A_1, A_2, B_1, B_2$  et  $O = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$ . Alors on a l'équivalence  $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2) \iff \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}$ . Et si cette condition est vérifiée nous avons aussi l'égalité avec le troisième rapport  $\overrightarrow{A_1B_1} : \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}$ .

## §11. Médiatrices

**Déf 01** ► Soient deux points distincts  $A \neq B$ . La **médiatrice** du segment  $[AB]$  est la droite perpendiculaire à  $(AB)$  qui passe par le milieu de  $[AB]$ .

**Prop 02** ► Soient deux points distincts  $A \neq B$ . L'ensemble  $\{M \mid AM = BM\}$  est la médiatrice, et les deux demi-plans délimités par la médiatrice sont  $\{M \mid AM > BM\}$  et  $\{M \mid AM < BM\}$ .

## §12. Projection orthogonale

**Déf 01** ► Soient  $D$  une droite,  $A$  un point et  $D'$  l'unique droite perpendiculaire à  $D$  passant par  $A$ . On note  $P_D(A) := D \cap D'$ . L'application  $P_D$  ainsi définie est appelée la **projection orthogonale** sur  $D$ .

**Prop 02** ►  $P_D(A) = A \iff A \in D$

**Prop 03** ►  $P_D(A) = B \iff B \in D$  et  $\overrightarrow{AB}$  est nul ou est un vecteur normal à  $D$ .

**Prop 04** ► Soient  $D_{A,\vec{u}}$  une droite et  $\vec{v}$  un de ses vecteurs normaux. Alors  $P_D(A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = A + \lambda\vec{u}$ .

**Prop 05** ► Les projections orthogonales sont des applications affines idempotente, c.-à-d.  $P_D \circ P_D = P_D$ .

**Prop 06** ► Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux droites perpendiculaires sécantes en  $O$  alors  $P_{D_1} \circ P_{D_2} = O = P_{D_2} \circ P_{D_1}$ , où  $O$  désigne aussi l'application constante  $A \mapsto O, \forall A$ .

07 ► La réciproque est aussi vraie : Pour  $D_1 \neq D_2$ ,  $P_{D_1}$  et  $P_{D_2}$  commutent si et seulement si  $D_1 \perp D_2$ .

## §13. Symétries axiales

**Déf 01** ► Soient  $D$  une droite et  $A$  un point. On pose  $S_D(A) := A + 2\overrightarrow{AP_D(A)}$ . L'application  $S_D$  ainsi définie est appelée **symétrie (axiale)** par rapport à  $D$ .

**Prop 02** ►  $S_D(A)$  est l'unique point tel que  $P_D(A)$  soit le milieu de  $[AS_D(A)]$ .

**Prop 03** ►  $S_D(A)$  est l'unique point tel que  $D$  soit la médiatrice de  $[AS_D(A)]$ .

**Prop 04** ► Soient  $D_{A,\vec{u}}$  une droite et  $\vec{v}$  un de ses vecteurs normaux. Alors  $S_D : A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mapsto A + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}$ .

**Prop 05** ► Les symétries axiales sont des isométries affines qui sont leur propre inverse.

**Prop 06** ► L'ensemble des points fixes de  $S_D$  est  $D$ , c.-à-d.  $S_D(A) = A \iff A \in D$ .



Prop 07 ► Nous avons l'équivalence  $D_1 = D_2 \iff S_{D_1} = S_{D_2}$ .

Prop 08 ► Soit  $\theta \pmod{\pi}$  l'angle orienté entre deux droites  $D_1$  et  $D_2$  sécantes en  $A$ , alors  $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{A, 2\theta}$ .

Prop 09 ► Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites parallèles avec  $D_2 = D_1 + \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est un vecteur normal aux deux droites, alors  $S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{2\vec{v}}$ .

## §14. Cercles

Déf 01 ► Étant donné un point  $O$  et un réel positif  $R > 0$  nous considérons les ensembles suivants :

- $C(O, R) = \{A \mid OA = R\}$ , le **cercle** de **centre**  $O$  et de **rayon**  $R$ .
- $D(O, R) = \{A \mid OA \leq R\}$ , le **disque (fermé)** de **centre**  $O$  et de **rayon**  $R$ .
- $\{A \mid OA < R\}$ , l'**intérieur du cercle**  $C(O, R)$ , dit aussi le **disque ouvert**.
- $\{A \mid OA > R\}$ , l'**extérieur du cercle**  $C(O, R)$ .

Déf 02 ► On dit qu'un ensemble est **à l'intérieur** (resp. **à l'extérieur**) d'un cercle s'il est contenu dans son intérieur (resp. extérieur).

Prop 03 ► Soit  $A$  un point et  $M$  un ensemble de points, alors  $d(A, M) \geq R$  si et seulement si  $M$  n'a pas de points à l'intérieur du cercle  $C(A, R)$ .

Prop 04 ► Soit  $C$  un cercle,  $A$  un point intérieure à  $C$  et  $B$  un point extérieur à  $C$ , alors  $C \cap ]AB[ \neq \emptyset$ .

05 ► On va voir en TD que dans ce cas  $\#(C \cap ]AB[) = 1$ .

Prop 06 ► Soit  $C$  un cercle,  $A$  un point intérieure à  $C$ . Pour tout  $B \neq A$  nous avons  $C \cap ]AB) \neq \emptyset$ .

07 ► On va voir en TD que dans ce cas  $\#(C \cap ]AB)) = 1$ .

Déf 08 ► Des points sont dit **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle.

09 ► Trois points, ou moins, sont toujours cocycliques. Et on verra des critères pour que quatre points le soient.

## §15. Courbes paramétrées

Déf 01 ► On appelle **courbe (paramétrée)**, toute application  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $\Gamma := \gamma(I)$  s'appelle le **support** de  $\gamma$ .

02 ► Ne pas confondre la courbe  $\gamma$  avec son support  $\Gamma$ .

03 ► Plus généralement on peut avoir  $I$  une réunion d'intervalles deux-à-deux disjoints et  $\mathbb{R}^n$  à la place de  $\mathbb{R}^2$ .

04 ► Comme une courbe est une application on peut parler de courbes  $C^1$ ,  $C^\infty$ , analytiques, polynomiales... Pour nous dans ce cours les courbes seront de régularité au moins  $C^1$ , et si nécessaire plus.

05 ► Quand on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  on parle de courbes complexes.

Déf 06 ► On dit que  $\gamma_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un **reparamétrage** de  $\gamma_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  s'il existe un difféomorphisme (de la même régularité que  $\gamma_0$ )  $\phi : J \rightarrow I$  tel que  $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$ .

Prop 07 ► « est un reparamétrage de » est une relation d'équivalence, dont les classe d'équivalence sont appelés **courbes géométriques**, et le support d'une courbe géométrique est bien défini.

08 ► Quand on se limite aux reparamétrages croissants on parle de **courbes géométriques orientées**.



**Déf 09** ► Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite **régulière** en  $t \in I$  si  $\gamma'(t) \neq 0$ . Dans ce cas, la droite passant par  $\gamma(t)$  et de vecteur directeur  $\gamma'(t)$  est appelée la **tangente** de la courbe paramétrée  $\gamma$  en  $t$ . Si de plus  $\gamma$  est injective, on parle de la tangente en  $\gamma(t)$ .

**Déf 10** ► Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite **singulière** en  $t \in I$  si elle n'y est pas régulière, c.-à-d. si  $\gamma'(t) = 0$ .

**Déf 11** ► Une courbe est dite **régulière** si elle est régulière en toute valeur du paramètre.

**Prop 12** ► Les notions précédentes de *régularité* et de *tangente* sont bien définies pour les courbes géométriques.

13 ► Même si la courbe n'a pas de tangente en  $t$  le support  $\Gamma$  peut avoir une tangente en  $\gamma(t)$  dans un autre sens.

14 ► On ne discutera pas ici les différents types de points : *ordinaire*, *d'inflexion*, *de rebroussement*. Ni les branches infinies. Ni d'angle entre deux courbes sécantes.

## §16. Longueur d'une courbe paramétrée

**Déf 01** ► Soit  $I = [a, b]$  et  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe  $C^1$ . La **longueur** de  $\gamma$  est le nombre positif  $|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .

**Déf 02** ► L'**abscisse curviligne** est la fonction  $s \mapsto \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt$  qui mesure la distance parcourue entre le départ  $a$  et  $s$ .

**Déf 03** ► On dit qu'une courbe  $\gamma$  est **paramétrée par la longueur d'arc** (ou *par l'abscisse curviligne*) si pour tout  $t$  on a  $\|\gamma'(t)\| = 1$ .

**Prop 04** ► Toute courbe régulière possède un reparamétrage par longueur d'arc.

**Prop 05** ► La longueur d'une courbe géométrique est bien définie, car la longueur d'un courbe est invariante par reparamétrage.

06 ► On ne discutera pas ici les notions de *géodésique*, ni de *courbure*.

## §17. Arcs et leurs mesures

**Déf 01** ► Soient deux points (distincts)  $A, B \in \mathcal{C}$  d'un cercle de centre  $O$ . Le segment  $[AB]$  est appelé une **corde** du cercle. Les deux morceaux de part et d'autre de la droite  $(AB)$  sont appelés des **arcs**. La **grande arc** est celle qui est du côté du centre  $O$ , et la **petite arc** est l'autre. Ces arcs sont souvent nommés  $\widehat{AB}$ .

02 ► La notation  $\widehat{AB}$  est ambiguë, car on ne sait pas si on parle de la petite ou de la grande arc. Souvent on sous-entend qu'on parle de la petite, mais si nécessaire on peut le préciser, ou utiliser un troisième point  $P$  appartenant à l'arc en question et noter l'arc  $\widehat{APB}$ . De plus quand  $[AB]$  est diamètre il n'y a pas de grande et de petite arc, car les deux arcs sont des demi-cercles.

**Déf 03** ► Un arc **orienté** est un arc dont l'une des extrémités est considérée comme début, l'autre comme fin. Autrement dit dont les extrémités forment un couple ordonné. Et on dit que l'arc est **positivement orienté** (resp. **négativement orienté**) si le « sens du parcours » du début vers la fin de l'arc est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. dans le sens direct des aiguilles d'une montre).

04 ► La longueur  $\ell(\widehat{AB})$  d'un arc de cercle  $\widehat{AB}$  est la longueur d'une courbe régulière qui la paramètre. C'est aussi la limite de la longueur des lignes brisées dont le pas tends vers 0.

**Déf 05** ► La **mesure** en radian d'un arc  $\widehat{AB}$  d'un cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  est la longueur de l'arc divisé par le rayon, c.-à-d.  $\widehat{AB} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R}$ .

**Déf 06** ► La **mesure algébrique** d'un arc est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'arc et le signe est positif (resp. négatif) si l'arc est positivement (resp. négativement) orienté.

07 ► Par abus de notation un arc, sa longueur et sa longueur algébrique sont notés de la même façon. Par exemple on note  $\widehat{AB} = -\pi$ , dans le cas où  $\widehat{AB}$  est un demi-cercle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre. En cas d'ambiguïté il faut préciser la notation utilisée.

08 ► Ce qui est pratique avec les mesures algébriques est qu'elles respectent la règle de Chasles modulo  $2\pi$ , c.-à-d.  $\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC} \pmod{2\pi}$ .

**Prop 09** ► La petite et la grande arc d'une même corde ont la même mesure algébrique modulo  $2\pi$ .

**Prop 10** ► Soient  $[AB]$  et  $[CD]$  deux cordes dans le même cercle. Alors si on note  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{CD}$  les deux petites (resp. grandes) arcs, nous avons les équivalences :

- $AB = CD \iff \widehat{AB} = \widehat{CD}$ ;
- $AB > CD \iff \widehat{AB} > \widehat{CD}$  (resp.  $AB < CD \iff \widehat{AB} < \widehat{CD}$ ).

## §18. Angles

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points (non alignés). Soient  $H_A$  le demi-plan délimité par  $(BC)$  qui contient  $A$  et  $H_B$  le demi-plan délimité par  $(BA)$  qui contient  $C$ . Nous appelons :

**Déf 01** ► L'**angle (saillant)**  $\angle ABC := H_A \cap H_C$  est la zone (convexe) « bordée » par les demi-droites  $[BA]$  et  $[BC]$  ;

02 ► Un angle est appelé aussi **secteur angulaire** et on le note aussi  $\widehat{ABC}$ .

**Déf 03** ► Le complémentaire d'un angle saillant est dit **angle rentrant**, et il est aussi « bordé » par les demi-droites  $[BA]$  et  $[BC]$  (mais il n'est pas convexe) ;

04 ► Les sens de « complémentaire » utilisé dans la définition précédente n'est pas celui habituellement utilisé au collège.

**Déf 05** ► Quand  $B \in [AC]$  l'angle  $\angle ABC$  est l'un des deux demi-plans délimités par  $(AC)$  et on dit qu'il est **plat**. Un angle plat est à la fois saillant et rentrant.

**Déf 06** ► Le point  $B$  est le sommet de l'angle  $\angle ABC$  ; les demi-droites  $[BA]$  et  $[BC]$  qui **bordent** l'angle  $\angle ABC$  sont ses **côtés**.

**Déf 07** ► L'angle dont les côtés sont les demi-droites opposées  $-[BA]$  et  $-[BC]$  est dit l'angle **opposé** à  $\angle ABC$ .

**Déf 08** ► Les angles dont l'un des côtés est identique  $[BA]$  (resp.  $[BC]$ ) et l'autre est l'opposée  $-[BC]$  (resp.  $-[BA]$ ) sont dit **supplémentaires** à  $\angle ABC$ .

**Prop 09** ► Deux droites sécantes coupent le plan en 4 angles, deux à deux opposés et deux à deux supplémentaires.

**Déf 10** ► Un angle dont les deux côtés sont perpendiculaires est dit **droit**.

**Prop 11** ► Le supplémentaire et l'opposé d'un angle droit sont des angles droits.

**Déf 12** ► Un **angle orienté** est un angle dont un des côtés est considéré comme *début* et l'autre comme *fin*.

13 ► La notation d'un angle orienté est identique à celle d'un angle non orienté, par exemple  $\angle ABC$ . Et dans cette notation  $[BA]$  est considéré comme début et  $[BC]$  comme fin.

## §19. Mesures d'angles

- Déf 01** ► Soit  $O$  le centre d'un cercle  $\mathcal{C}$  et  $A, B \in \mathcal{C}$  deux points de ce cercle. On note  $\widehat{AB}$  l'arc compris dans l'angle  $\angle AOB$ . Et on dit que  $\angle AOB$  est un angle **centrale** qui **éclaire** l'arc  $\widehat{AB}$ . Si l'angle  $\angle AOB$  est orienté on oriente l'arc  $\widehat{AB}$  dans le même sens.
- Déf 02** ► La **mesure** (resp. la **mesure algébrique**) d'un angle en radians est la mesure (resp. la mesure algébrique) d'un arc qu'il éclaire du centre.
- Prop 03** ► Cette définition ne dépend pas du cercle choisi.
- 04 ► Quand on dit que deux angles sont égaux on sous-entend que leurs mesures sont égales.
- Prop 05** ► Un angle est égal à son opposé, c.-à-d. ont la même mesure orientée.
- 06 ► La mesure d'un angle droit est  $\frac{\pi}{2}$  et d'un angle plat est  $\pi$ .
- 07 ► Par abus de notation, un angle, sa mesure et sa mesure algébrique sont notés de la même façon. Par exemple on note  $\angle ABC = -\frac{\pi}{3}$ . En cas d'ambiguïté il faut préciser la notation utilisée.
- 08 ► Comme dans le cas des arcs, les mesures algébriques respectent la règle de Chasles modulo  $2\pi$ , c.-à-d.  $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \pmod{2\pi}$ .
- Prop 09** ► Si la mesure orientée d'un angle est  $\alpha \pmod{2\pi}$  la mesure orientée de son angle supplémentaire est  $\alpha - \pi \pmod{2\pi}$ . Ainsi un angle et son opposé ont la même mesure algébrique modulo  $\pi$ .
- Déf 10** ► La mesure d'angle orienté entre deux droites est défini modulo  $\pi$  comme suit  $\angle(D_1, D_2) = \angle AOB \pmod{\pi}$  si  $D_1 = (OA)$  et  $D_2 = (OB)$ .
- 11 ► Ce-ci est bien une définition, autrement dit elle ne dépend pas du choix des points  $A \in D_1$  et  $B \in D_2$  d'après les propositions §19.05 et §19.09.
- Prop 12** ► Si  $D_1 \parallel D'_1$  et  $D_2 \parallel D'_2$  alors  $\angle(D_1, D_2) = \angle(D'_1, D'_2)$ .
- Prop 13** ► Les points distincts  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si  $\angle ABC = 0 \pmod{\pi}$ .
- Déf 14** ► Soit  $A, B, C$  trois points d'un cercle  $\mathcal{C}$ . On dit que l'angle (orienté)  $\angle ABC$  est **inscrit** dans le  $\mathcal{C}$  et qu'il **éclaire** l'arc (orienté)  $\widehat{AC}$ .
- Prop 15** ► Soit un angle (orienté) inscrit  $\angle ABC$  qui éclaire l'arc (orienté)  $\widehat{AC}$ , alors  $\angle ABC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ .
- Prop 16** ► La somme des angles dans un triangle est  $\pi$ .
- 17 ► Soit  $X$  un point d'un cercle  $\mathcal{C}$ . Dans la proposition suivante  $(XX)$  désigne la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $X$ .
- Prop 18** ► Soit 4 points  $A, B, C$  et  $D$  d'un cercle  $\mathcal{C}$ . Nous avons l'égalité entre mesures **orientés**  $\angle((AB), (CD)) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$ .
- Prop 19** ► Quatre points distincts  $A, B, C$  et  $D$  sont cocycles si et seulement si on a l'égalité entre angles orientés  $\angle ABC = \angle ADC \pmod{\pi}$ .
- Déf 20** ► (*fait sur dessins*) Deux droites parallèles et une droite sécante forment 8 angles. Il y a 4 paires d'angles **correspondant**, 2 paires d'angles **alternes-internes** et 2 paires d'angles **alternes-externes**.
- Prop 21** ► Deux angles correspondants ont la même mesure. La somme de deux angles alternes est  $\pi$ .
- Déf 22** ► La **bissectrice (intérieure)** d'un angle  $\angle AOB$  est la (demi-)droite  $[BC)$  telle qu'on ait l'égalité des angles orientés  $\angle AOC = \angle COB$ .
- Déf 23** ► La **bissectrice extérieure** d'un angle est la droite perpendiculaire à la bissectrice et qui passe par le sommet de l'angle.

- Prop 24 ► La bissectrice extérieure est la bissectrice intérieure de l'angle supplémentaire.
- Prop 25 ► Un point à l'intérieur d'un angle est sur la bissectrice si et seulement s'il est à distances égales des deux côtés de l'angle.
- Prop 26 ► Le bissectrice est l'ensemble des centres des cercles tangents aux deux côtés de l'angle.

## §20. Rotations

- Déf 01 ► L'application linéaire dont la matrice est  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est appelé la **rotation (linéaire)** d'angle  $\theta \pmod{2\pi}$ .
- Prop 02 ►  $R_0 = \text{Id}$  et on l'appelle la rotation (linéaire) **triviale**.
- Prop 03 ►  $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$
- Prop 04 ►  $R_\theta^t = R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$  et donc les rotations sont des isométries linéaires.
- Prop 05 ►  $R_\theta(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} = \vec{0}$  ou  $\theta = 0$ . Autrement dit l'unique vecteur fixe d'une rotation non triviale est  $\vec{0}$ .
- Déf 06 ► L'application  $R_{A,\theta} : B \mapsto A + R_\theta(\overrightarrow{AB})$  est appelé la **rotation (affine)** de centre  $A$  et d'angle  $\theta \pmod{2\pi}$ .
- Prop 07 ►  $R_{A,\theta}(A + \vec{u}) = A + R_\theta(\vec{u})$
- Prop 08 ► Les rotations affines sont des applications affines.
- Prop 09 ►  $R_{A,0} = \text{Id}$ , et on l'appelle la rotation (affine) **triviale**. Tout point est un centre de la rotation triviale.
- Prop 10 ►  $R_{A,\pi} = S_A$  est la symétrie centrale de centre  $A$ .
- Prop 11 ►  $R_{A,\theta}(B) = B \iff A = B$  ou  $\theta = 0$ . Autrement dit l'unique point fixe d'une rotation non triviale est son centre.
- Prop 12 ► Un cercle est invariant par les rotations du même centre que ce cercle.
- Prop 13 ►  $R_{A,\theta} \circ H_{A,\lambda} = H_{A,\lambda} \circ R_{A,\theta}$
- Prop 14 ►  $R_{A,\theta}(B + \vec{u}) = R_{A,\theta}(B) + R_\theta(\vec{u})$ , et donc  $R_{A,\theta} \circ T_{\vec{u}} = T_{R_\theta(\vec{u})} \circ R_{A,\theta}$ .
- Prop 15 ►  $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_1 + \theta_2}$
- Prop 16 ►  $R_{A_1,\theta} \circ R_{A_2,-\theta}$  est une translation.
- Prop 17 ► Si  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ , alors  $R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2} = R_{A_3,\theta_1 + \theta_2}$ , mais l'expression de  $A_3$  en fonction de  $A_1, A_2, \theta_1$  et  $\theta_2$  n'est pas simple.
- Prop 18 ► Nous avons la caractérisation de la mesure algébrique modulo  $2\pi$  suivante  $\angle ABC = \theta \pmod{2\pi} \iff R_\theta(\overrightarrow{BA}) \parallel \overrightarrow{BC} \iff R_{B,\theta}(A) \in [BC]$ .

## §21. Triangles

- Déf 01 ► Un **triangle** (non dégénéré) est la donnée d'un triplet de points (non alignés) appelés les **sommets** du triangle. On note  $\triangle ABC$  le triangle dont les sommets sont  $(A, B, C)$ . Les **côtés** de ce triangle sont les segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ , et ses *droites des côtés* sont  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$ .
- Déf 02 ► Deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle A'B'C'$  sont dit **égaux**, et on note  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ , si et seulement si  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  et  $CA = C'A'$ .
- 03 ► Attention, dans la définition précédente l'ordre des sommets compte.
- 04 ► On note égalité aussi avec les symboles  $\cong$ ,  $\simeq$  ou  $\triangleq$ .

**Prop 05** ► Si  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  alors on a les égalités des angles non orientés  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$  et  $\angle C = \angle C'$ .

**Prop 06** ► Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$
- $AB = A'B'$  ainsi que (deux des égalités)  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$  et  $\angle C = \angle C'$ .
- $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  et  $\angle A = \angle A'$ .
- $\triangle A'B'C'$  est l'image par une isométrie de  $\triangle ABC$ .

**Déf 07** ► Deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle A'B'C'$  sont dit **similaire**, et on note  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , si et seulement si nous avons les égalités des angles non orientés  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$  et  $\angle C = \angle C'$ .

08 ► On note la similitude entre triangles aussi avec le symbole  $\approx$ .

09 ► Il suffit de vérifier l'égalité de deux des angles, la troisième s'en déduit.

**Prop 10** ► Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
- $(AB : BC) = (A'B' : B'C')$  et  $\angle B = \angle B'$ .
- $(AB : BC : CA) = (A'B' : B'C' : C'A')$ .
- $\triangle A'B'C'$  est l'image par une similitude de  $\triangle ABC$ .

**Déf 11** ► Le triangle  $\triangle ABC$  est dit **équilatérale** si  $AB = BC = CA$ .

**Déf 12** ► Le triangle  $\triangle ABC$  est dit **isocèle** de base  $AB$  si  $BC = CA$ .

**Déf 13** ► Le triangle  $\triangle ABC$  est dit **rectangle** en  $C$  si  $\angle C = \frac{\pi}{2}$ . Et dans ce cas on appelle le côté opposé à l'angle droit  $[AB]$  l'**hypoténuse**, et les deux côtés adjacents à l'angle droit  $[CA]$  et  $[CB]$  les **cathètes**.

**Déf 14** ► Le triangle  $\triangle ABC$  est dit **acutangle** si les trois angles sont aigus.

**Déf 15** ► Le triangle  $\triangle ABC$  est dit **obtusangle** si l'un des angles est obtus.

**Déf 16** ► Une **médiane** dans un triangle est une droite qui passe par l'un des sommets et par le milieu du côté opposé.

**Déf 17** ► Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point, appelé **barycentre** du triangle.

**Prop 18** ► Les trois médiatrices des côtés se coupent dans le **centre du cercle circonscrit** du triangle.

**Prop 19** ► Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

**Déf 20** ► Une **hauteur** dans un triangle est une droite qui passe par un des sommets et qui est perpendiculaire au côté opposé. La projection orthogonale d'un sommet sur le côté opposé est appelé **pied de la hauteur**.

**Prop 21** ► Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

**Prop 22** ► Les trois hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre** du triangle.

**Prop 23** ► Dans un triangle rectangle l'orthocentre coïncide avec le sommet de l'angle droit.

**Prop 24** ► L'orthocentre est à l'intérieur du triangle si et seulement si le triangle est acutangle.

**Prop 25** ► (droite d'Euler) Soient  $O$ ,  $G$  et  $H$  le centre du cercle circonscrit, le barycentre et l'orthocentre respectivement d'un triangle. Alors les trois points sont alignés dans cet ordre  $O, G, H$  avec le rapport des longueurs  $(OG : GH) = (1 : 2)$ , c.-à-d.  $G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H$ .

**Prop 26** ► Il existe un unique cercle intérieur au triangle et qui touche les trois côtés. Il est appelé **cercle inscrit** et son centre est l'intersection des trois bissectrices intérieures.

**Prop 27** ► Il existe trois cercle extérieurs au triangle et qui touche les trois côtés. Ils sont appelés les **cercle exinscrits** et leur centres sont les intersections d'une bissectrice intérieure avec deux bissectrices extérieures.

## §22. Nombres complexes

**Déf 01** ► Étant donné un point  $P(x, y)$  (resp. un vecteur  $\vec{u}(x, y)$ ) on appelle le nombre complexe  $z := x + iy$  l'**affixe** de  $P$  (resp. de  $\vec{u}$ ) et on note  $P(z)$  (resp.  $\vec{u}(z)$ ).

02 ► Souvent on note  $z_P$  l'affixe d'un point  $P$  et  $z_u$  l'affixe d'un vecteur  $\vec{u}$ .

**Prop 03** ► Soient  $z_A, z_u$  et  $z_B$  les affixes respectifs d'un point  $A$  d'un vecteur  $\vec{u}$  et du point  $B := A + \vec{u}$ . Alors nous avons  $z_B = z_A + z_u$ .

**Prop 04** ► Soient  $z_u$  et  $z_v$  les affixes respectifs de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Nous avons l'égalité  $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \operatorname{Re}(z_u \overline{z_v}) = \frac{1}{2}(z_u \overline{z_v} + \overline{z_u} z_v)$ .

**Prop 05** ► Soient  $z_u$  et  $z_v$  les affixes respectifs de deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Nous avons  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff z_u \overline{z_v} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_u}{z_v} \in i\mathbb{R}$ .

**Prop 06** ► Soient  $D_{O, \vec{u}}$  une droite et  $\xi$  l'affixe du vecteur directeur  $\vec{u}$ . Soit la projection orthogonale  $B := P_D(A)$  d'un point  $A$  sur  $D$ . Alors les affixes  $z$  et  $z'$  des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  respectivement, vérifient  $z' = \frac{z\xi + \overline{z}\overline{\xi}}{2\xi}$ .

**Prop 07** ► Soient  $D_{O, \vec{u}}$  une droite et  $\xi$  l'affixe du vecteur directeur  $\vec{u}$ . Soit le point symétrique  $B := S_D(A)$  d'un point  $A$  par rapport  $D$ . Alors les affixes  $z$  et  $z'$  des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  respectivement, vérifient  $z'\overline{\xi} = \overline{z}\xi$ .

**Prop 08** ► Soient  $z_O, z_A$  et  $z_B$  les affixes respectifs des points  $O, A, B$  où  $B = H_{O, \lambda}(A)$  est l'image de  $A$  par l'homothétie  $H_{O, \lambda}$ . Alors nous avons  $z_B = z_O + \lambda(z_A - z_O)$ .

**Prop 09** ► Soient  $z_O, z_A$  et  $z_B$  les affixes respectifs des points  $O, A, B$  où  $B = R_{O, \theta}(A)$  est l'image de  $A$  par la rotation  $R_{O, \theta}$ . Alors nous avons  $z_B = z_O + e^{i\theta}(z_A - z_O)$ .

10 ► D'après ce qui précède  $z_{\overrightarrow{OB}} = \xi z_{\overrightarrow{OA}}$  si et seulement si  $B$  est l'image de  $A$  par la similitude  $H_{O, \rho} \circ R_{O, \theta}$  où  $\rho := |\xi|$  est le module de  $\xi$ , et  $\theta$  est son argument, c.-à-d. si  $\xi = \rho e^{i\theta}$ .

**Prop 11** ► Trois points distincts  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si leurs affixes vérifient  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ . De plus  $C \in [AB]$  si et seulement si  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}_+$ .

## §23. Formes quadratiques

*Quelques rappels à mettre ici.*

## §24. Coniques

*Partie à compléter.*