# C1 Suites de fonctions

**D1** $(f_n)$ CV **simplement (ou ponctuellement)** vers $f$, si $\forall x \in A$, la suite numériq $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$.

$\rightarrow$ $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

($N$ dépend de $x$ et $\varepsilon$ : $N_{\varepsilon, x}$).

**D2** $(f_n)$ CV **uniformément** vers $f$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left( \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

**P3** soit sdf $(f_n)$ CV simplmt vers $f : A \to \mathbb{R}$
si $\exists$ une suite de nbres $(s_n)_n$ ne dépendant pas de $x$, CV vers 0 tq

$\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq s_n$.

alors la CV de $(f_n)$ vers $f$ est **uniforme**.

**P4** soit sdf $(f_n)$, $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV simplement vers $f$
$f : A \to \mathbb{K}$, si $\exists x_n \in A$,

$\lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$

$\Rightarrow (f_n)$ ne CV pas unif. vers $f$ sur $A$.

**TH5 (Crit. de Cauchy Uniforme)**
soit sdf $(f_n)$, $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$, CV uniform.t vers $f : A \to \mathbb{K}$ ssi

$\forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

⚠ CV uniforme cont pr somme MS pas pr produit.

**TH6 (Continuité)** :
soit sdf $(f_n)$ cont sur $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$ CV uniform. vers $f$ $f : A \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $f$ cont sur $A$.

ie CV unifor. conserve continuité MS pas CV simple.

**P7 (Prolongement)** :
soit $I = [a, b[$ & sdf cont $(f_n)$ sur $[a, b]$ CV uniform. sur $I$ vers $f$ $f : I \to \mathbb{K}$, alors $f$ est prolongeable par continuité à $[a, b]$ & la suite $(f_n)$ CV unif. vers $f$ (prolongée) sr $[a, b]$.

**TH8** soit sdf cont $(f_n)$, $f_n : I = [a, b] \to \mathbb{K}$ CV uniform vers $f$ $f : I \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

**TH9 (Dérivat)** :
soit sdf $(f_n) : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $C^1([a, b])$ tq
(i) $(f_n)$ CV simplmt vers $f$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(ii) $(f_n')$ CV uniform.t vers $g$ $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $g = f'$. D+, $(f_n)$ CV unifm vers $f$.

# C2 Série de foncts

**D1** $(u_n)$ sdf, $u_n : A \to \mathbb{R}$,

- série de f, on note $\sum_n u_n$ CV **simplement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si la Sdf $(f_N)$ ; $(f_N)(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ CV simplement vers f, appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

  $\forall x \in A$, $\lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = 0$.

- La m̂ Sdf sera CV **uniforme** vers f si la ste $(f_n)$ CV uniformément vers f.

  $\lim_{N\to\infty} \left( \sup_{x\in A} |R_N(x)| \right) = 0$.

**TH** (Cauchy Uniforme)

Une série $\sum_n u_n$ CV **uniformément** sur A ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \forall x \in A,$

$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$.

**D2** (Normalement CV)

$\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A, s'$\exists$ une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nbrs réels tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,$

$|u_n(x)| \leq \alpha_n$, série numériq $\sum_n u_n$ CV.

**TH 2**

si série $\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur A alors elle est **uniformément** CV sur A.

# C2 Série de fonctions

**D1** $(u_n)$ sdf, $u_n : A \to \mathbb{R}$,

- série de f, on note $\sum_n u_n$ CV **simplement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si la Sdf $(f_N)$ ; $(f_N)(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ CV simplement vers $f$, appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

  $\forall x \in A$, $\lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = 0$.

- La même Sdf sera CV **uniforme** vers $f$ si la ste $(f_n)$ CV uniformément vers $f$.

  $\lim_{N\to\infty} (\sup_{x\in A} |R_N(x)|) = 0$.

**TH** (**Cauchy Uniforme**)
Une série $\sum_n u_n$ **CV uniformément** sur $A$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$, $\forall x \in A$, $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$.

**D2** (**Normalement CV**)
$\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur $A$, s'$\exists$ une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nbrs réels tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $|u_n(x)| \leq s_n$, série numériq $\sum_n u_n$ CV.

**TH2**
si série $\sum_n u_n$ est **normalement** CV sur $A$ alors elle est **uniformément** CV sur $A$.

**TH** (**Abel Uniforme**) soit sdf $(u_n)$, $(v_n)$ sur $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$, $v_n : A \to K$ si

(i) $\forall x \in A$, suite $(u_n(x))_n > 0$ et ↘

(ii) $u_n$ CV U.N $\longrightarrow 0$ sur $A$

(iii) $\exists M > 0 \mid \forall x \in A, \forall n, m \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{p=n}^{m} v_p(x)\right| \leq M$.

$\Rightarrow \sum_n u_n . v_n$ CV U.N sur $A$ et $|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x).v_n(x)\right| \leq M |u_{N+1}(x)|$

**Coro** sdf $(v_n)$, $v_n : A \to K$, ste de réels $(\alpha_n)_n$ si $\forall x \in A$, $u_n(x) = \alpha_n . v_n(x)$ &

(i) suite $(\alpha_n)_n \geq 0$, ↘, CV vers 0.

(ii) $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$, $|v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV U.N. sur $A$.

**TH** (**Continuité**) $(u_n)$ sdf, $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{K}$,
si $\sum_n u_n$ CV U.N sur $A \Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ **cont** sur $A$.

**TH** (**Intégration**) $(u_n)$ sdf cont, $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
si $\sum_n u_n$ CV U.N sur $[a,b] \Rightarrow \sum_n \int_a^b u_n(x)\,dx$ CV
et donc $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\,dx$.

**TH** (**Dérivation**) soit sdf $(u_n)$ : $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C^1([a,b])$,

(i) $\sum_n u_n \xrightarrow{\text{CV S.}}$ sur $[a,b]$

(ii) $\sum_n u_n' \xrightarrow{\text{CV U.N}}$ sur $[a,b]$ $\Rightarrow f(x) = \sum u_n(x)$ est classe $C^1([a,b])$

et $\left(\sum u_n(x)\right)' = \sum u_n'(x)$ et de +, $\sum u_n$ CV U.N sur $[a,b]$.

# C3 Séries Entières.

## I/ D SE & Rayon CV

D Série entière : $\sum_n u_n(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$),
$u_n(z) = a_n \cdot z^n$ & $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ : $\sum a_n \cdot z^n$.

(NB : les polynômes st SE & $a_n = 0$

Th (Rayon de CV)
soit SE $\sum a_n \cdot z^n$, $\exists R \in [0, \infty[$ tq

1) si $|z| < R$ (R fini ou non) $\Rightarrow \sum a_n \cdot z^n$ CV abslmt
$\Leftrightarrow \sum |a_n| |z|^n$ CV.

2) si $|z| > R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV $\left( \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n z^n \neq 0 \right)$

→ RDC uniq
→ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ : disq de CV de SE.
→ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) = ]-R, R[$.

L (d'Abel)
soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n \cdot z^n$ CV.

## Déterminat° de R (svt Cauchy ou d'Alembert)

P soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$
2. si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

(convent° $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$). ⚠ si $a_n z^{2n}$, ① ① $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n} \right|$.

## C3 Séries entières.

### I/ D SE & Rayon CV

**D** Série entière : $\sum_n u_n(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$),

$u_n(z) = a_n \cdot z^n$ et $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ : $\sum a_n \cdot z^n$.

(NB : les polynômes st SE et $a_n = 0$

**Th** (Rayon de CV)

soit SE $\sum a_n \cdot z^n$, $\exists R \in [0, \infty[$ tq

1) si $|z| < R$ (R fini ou non) $\Rightarrow \sum a_n \cdot z^n$ CV absolmt

$\Leftrightarrow \sum |a_n||z|^n$ CV.

2) si $|z| > R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV $\left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0\right)$

→ RDC uniq

→ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ : disq de CV de SE.

→ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) = ]-R, R[$.

**L** (d'Abel)

soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n \cdot z^n$ CV.

### Déterminat° de R (svt Cauchy ou d'Alembert)

**P** soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

2. si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

(convent° $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$). ⚠ si $a_n z^{2n}$, D D $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n}\right|$.

**P** soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE et $R_a$, $\sum b_n \cdot z^n$ SE et $R_b$ Alors

(i) $\forall n \geq 0$, $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

(ii) $a_n = O(b_n) \Leftrightarrow \exists M > 0, \underline{|a_n| \leq M \cdot |b_n|} \Rightarrow R_a \geq R_b$

(iii) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$.

@ $f(x) = \sum e^{\cos(n)} |x|^n$ ; étude $\sum e^1 \cdot |x|^n$

**P** (Somme & Produit)

soit $\sum a_n \cdot z^n$, $\sum b_n \cdot z^n$, $R_1, R_2$ $\begin{cases} \to c_n \cdot z^n = (a_n + b_n) z^n \\ \to d_n \cdot z^n = (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) z^n \end{cases}$

ont ces séries RDC $\geq \min(R_1, R_2)$.

⇒ D+, si $|z| < \min(R_1, R_2)$ : → $\sum c_n \cdot z^n = \sum a_n \cdot z^n + \sum b_n \cdot z^n$

→ $\sum d_n \cdot z^n = \left(\sum a_n \cdot z^n\right)\left(\sum b_n \cdot z^n\right)$.

(si $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min(R_1, R_2)$ ; si $R_1 = R_2 \Rightarrow R > \min(R_1, R_2)$)

**P** (Dérivat° & Intg°)

soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE et R $\begin{cases} \xrightarrow{\text{dér}°} \sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1} \\ \xrightarrow{\text{int}°} \sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ ont m̂ R.

### Ppt° Var Réelle

**Th** soit $\sum a_n \cdot x^n$ SE, $a_n \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{R}$, RDC R ; soit $f(x)$ sa somme,

$\mathcal{D}f(x) = ]-R, R[ \Rightarrow f$ de $C^\infty(]-R, R[)$ & ses dérivées

s'obtiennt en dérivant terme à terme SE successives.

D+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$ :

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

# Développement en SE :

**D** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en SE au $\mathcal{V}_{x_0} \in I$

si $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ & $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \mid \forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$,

$\sum a_n (x-x_0)^n$ CV & a pr somme $f(x)$.

**P** (condi° nécessR mais pas suffisante)

Pour que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$, il faut que :

(i) $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Rq : $f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \Big(\prod_{0\le j\le k-1}(n-j)\Big) a_n \cdot x^{n-k} = \sum_{n\geq 0} \Big(\prod_{1\le j\le k}(n+j)\Big) a_{n+k}\, x^n$

⚠ Dev SE ?

$\to \sum \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ CV ? $\to$ CV-t-elle vers $f(x)$ ?

contre @ Cauchy (1822) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

PR $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$, $\deg\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3n \Rightarrow$ Série Taylor nulle car

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ dc $\sum_{n\geq 0} a_n (x)^n = 0$ or $f \neq 0$.

**D** Une $f$ dev en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$ : analytiq en $x_0$.

**P** (Condi° suffis^te) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty(I)$ soit analytiq $\mathcal{V}_{x_0}$

ssi $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ = J$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-x_0|^n}{n!} M_n\right) = 0 \quad \text{où} \quad M_n = \sup_{x\in J} \left|f^{(n)}(x)\right|$$

# Pratiq du DL en SE :

1. FF Taylor pt $\to$ av^e terme Gén^l de série ; $\to$ mq reste de Lagrange $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. ∁ dev connus, op. connus, $+, \times, \div, \int, (\cdot)'$, CDV.

@

- $\cos x = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\sin x = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$ par ff Taylor
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$, $R = 1$ par ff Taylor
- $\int \dfrac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$, $R = 1$ par Intég°
- $x \mapsto x^2$, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$ par CDV
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $R = 1$ par intégra°
- $e^x = 1 + x + x^2 + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $R = \infty$ par FF Taylor.
- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$ $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$
- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ $\forall x \in ]-1, 1[$ • $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum (-x)^n = \sum (-1)^n x^n$
- $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$, • $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum x^{2n}$

## Th d'Abel :

soit $f(x) = \sum a_n x^n$ , $R > 0$ ; supposons $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ CV

$\Rightarrow \lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$.

(si $x = -R$, $\sum a_n (-R)^n = \sum (-1)^n a_n R^n$ CV $\Rightarrow \lim_{x \to -R^+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n$.

Appli

- $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ ; $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV p série altern

Th $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} -\ln(2) = \sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ , $R = 1$ ,

$x = 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} \underbrace{\arctan(1)}_{= \pi/4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

⚠ Réciproq fausse : @ $f(x) = \sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ mais $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ DV.

## TH d'Abel :

soit $f(x) = \sum a_n x^n$, $R > 0$ ; supposons $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ CV

$\Rightarrow \lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$.

(si $x = -R$, $\sum a_n (-R)^n = \sum (-1)^n a_n R^n$ CV $\Rightarrow \lim_{x \to -R+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n$.

### Appli

- $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ ; $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV p séries altern

TH $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} -\ln(2) = \sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$,

$x = 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\overset{\text{Abel}}{\Longrightarrow} \underbrace{\arctan(1)}_{= \pi/4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

⚠ Réciproq fausse : @ $f(x) = \sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ mais $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ DV.

## Exponentielle complexe.

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$
- $e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$
- si $z = iy$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ |e^{iy}| = 1 \end{cases}$

- $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cosh(iy)$
- $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh(iy)$

$\begin{cases} |e^z| = e^x \\ y = \operatorname{Arg}(e^z) \end{cases}$

- $e^z = e^{z'} \iff z' = z + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{R}$.
- $\nexists$ complexe tq $e^z = 0$ mais $\forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists z \in \mathbb{C}$, $e^z = t$.

si $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}] = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

## TH Fondamental de l'Algèbre (Gauss - D'Alembert)

$\forall P \in \mathbb{C}[X]$ polyn non-cte, $\exists$ tjrs $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$.

- **Appli Calcul d'intégrales**

- $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1) n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1) n!} + R_N$ $\quad R_N \leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}$

- **Appli 4 Equa diff**

- $xy'' - y = 0$ ? $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ; $y'$ ?, $y''$ ? $xy'' = \dots = \dots \to$ identificaθ $a_0 = \dots$, $a_1 = \dots$, $\vdots$, $a_{n-1} = \dots$ ; $a_n = \dots$ (PR)

$\Rightarrow$ dc (SE) sol$^{\circ}$ $\sum a_n x^n$.

## FF de Cauchy

soit $f(z) = \sum a_n z^n$, $R > 0$, $0 < r < R$ alors $\forall n \geq 0$ :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

**TH** <u>Liouville</u> soit $f(z)=\sum a_n z^n$ SE de $R=\infty$

si $f(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z)=a_0$ est cte.

**TH** (Polyn m̂ deg) soit $f(z)=\sum a_n z^n$, $R=+\infty$,

supposons $\exists\ P\in\mathbb{C}[X]$ un poly deg $P\leq d$, $\forall z\in\mathbb{C}$,

$|f(z)|\leq|P(z)| \Rightarrow f$ est un polym. de m̂ deg $P$.

<u>NB</u> : ces TH st appli de ff Cauchy.

**TH** (Identité de Parseval) soit $f(z)=\sum a_n z^n$, SE, $R>0$,

soit $0<r<R \Rightarrow \sum |a_n|^2 r^{2n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$

**TH** (Polynôme, borné : appli id Pars.)

soit $f(z)=\sum a_n z^n$ de $R\geq 1$, supp $a_n\in\mathbb{Z}$ & $f$ bornée

p disq unité (ie $\exists\ M>0$, $\forall z, |z|\leq 1$, $|f(z)|\leq M$

$\Rightarrow f$ est un polynôme.

---

HS

**TH** (Principe du zéro isolé)

soit $f(z)=\sum a_n z^n$ une SE de $R>0$,

supp $\exists\ z_n\in D(0,R)$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ & $f(z_n)=0\ \forall n\geq 0$

$\Rightarrow f=0$ (ie $a_n=0\ \forall n\geq 0$).

**TH** (Principe de maximum)

soit $f(z)=\sum a_n z^n$ une SE de $R>0$.

Notons $D_R=\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$, supposons $f$ est cont sur

$\overline{D_R}=\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq R\}$ alors si $\exists\ z_0\in D_R$ (ie $|z_0|<R$)

tq $|f(z_0)|=\max\limits_{z\in\overline{D_R}}|f(z)| \Rightarrow f$ est cte.

**Cor** $f(z)=\sum a_n z^n$ de $R>0$, cont sur $\overline{D_R}=\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq R\}$

$\Rightarrow$ si $f$ n'est pas cte alors $\exists\ z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0|=R$ tq

$\max\limits_{z\in\overline{D_R}}|f(z)|=|f(z_0)|$.