M32: Éléments de calcul différentiel

Année 2020–2021

Gijs M. Tuynman

Table des matières

Chapitre 1. Topologie et continuité 5
1. Normes 5
2. Convergence et continuité 13
3. Compacité 20
4. Connexité 23

Chapitre 2. Différentiabilité 27
5. Prélude en algèbre linéaire 27
6. La différentielle 30
7. Dérivées d'ordre supérieur 38
8. Extrema 42
9. Inversion locale et fonctions implicites 45

Chapitre 1

Topologie et continuité

1. Normes

1.1 Définitions. • Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$). Alors une application $N : E \to \mathbf{R}$ est appelé *une norme* si elle vérifie les quatre conditions

(i) $\forall x \in E : N(x) \geq 0$ (on aurait pu dire $N : E \to [0, \infty[$),

(ii) $N(x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$,

(iii) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbf{R} : N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$ et

(iv) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (appelée *l'inégalité triangulaire*).

Il est d'habitude de noter une norme, pas par une lettre (ici la lettre N), mais par des doubles barres, c'est-à-dire qu'on écrit $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

• Un *espace vectoriel normé* est un couple $(E, \|\cdot\|)$, où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

• Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La *boule ouverte de rayon r et de centre x (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)*, notée $B_r(x)$, est le sous-ensemble de E défini par

$$B_r(x) = \{ \, y \in E \mid \|y - x\| < r \, \} \ .$$

→ **1.2 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $x, y \in E$ arbitraire. Alors on a l'inégalité*

$$\|x - y\| \geq \big| \ \|x\| - \|y\| \ \big| \ .$$

→ **1.3 Lemme.** *Soit $N : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une norme sur $\mathbf{R}$, alors $\exists r > 0 \ \forall x \in \mathbf{R} : N(x) = r \cdot |x|$.*

→ **1.4 Lemme.** *Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. Alors les applications $N_1, N_2, N_\infty : E_1 \times E_2 \to \mathbf{R}$ définies par*

$$N_1(x, y) = \|x\|_1 + \|y\|_2 \qquad N_2(x, y) = \sqrt{(\|x\|_1)^2 + (\|y\|_2)^2}$$
$$N_\infty(x, y) = \max(\, \|x\|_1 \, , \, \|y\|_2 \,)$$

sont des normes sur $E_1 \times E_2$.

→ **1.5 Lemme.** *Les applications* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ *définies par*

$$\|(x_1,\ldots,x_p)\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i| \qquad \|(x_1,\ldots,x_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i|^2}$$

$$\|(x_1,\ldots,x_p)\|_\infty = \max(\,|x_1|,\ldots,|x_p|\,)$$

sont des normes sur $\mathbf{R}^p$.

Définitions. • Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A\subset E$. On dit que A *est ouvert (pour la norme* $\|\cdot\|$ *sur* E*)* si $\forall x\in A\ \exists\varepsilon>0 : B_\varepsilon(x)\subset A$.

• Un *voisinage ouvert de* $x\in E$ est un ouvert $A\subset E$ contenant x.

→ **1.6 Lemme.** *Soit* $(E,\|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Alors toute boule ouverte* $B_r(x)$ *est un ouvert de* E.

Définition. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2 : E\to\mathbf{R}$ deux normes sur E. On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe $C_1, C_2>0$ tels que

$$\forall x\in E : \|x\|_1 \le C_1\cdot\|x\|_2 \qquad \text{et} \qquad \forall x\in E : \|x\|_2\le C_2\cdot\|x\|_1 \quad .$$

→ **1.7 Lemme.** *Soit* E *un espace vectoriel,* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2 : E\to\mathbf{R}$ *deux normes sur* E *et* $C>0$. *Alors on a l'équivalence*

$$\forall x\in E : \|x\|_2\le C\cdot\|x\|_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_1^{(1)}(0)\subset B_C^{(2)}(0)\quad ,$$

où $B_r^{(i)}(x)$ *désigne la boule ouvert de rayon* r *et de centre* x *par rapport à la norme* $\|\cdot\|_i$.

→ **1.8 Lemme.** *Soit* E *un espace vectoriel et* $\|\cdot\|_i$, $i=1,2,3$ *trois normes sur* E. *Si* $\|\cdot\|_1$ *est équivalente à* $\|\cdot\|_2$ *et si* $\|\cdot\|_2$ *est équivalente à* $\|\cdot\|_3$, *alors* $\|\cdot\|_1$ *est équivalente à* $\|\cdot\|_3$.

→ **1.9 Lemme.** *Les trois normes* $\|\cdot\|_i$, $i=1,2,\infty$ *sur* $\mathbf{R}^p$ *sont équivalentes.*

→ **1.10 Lemme.** *Soit* E *un espace vectoriel et* $\|\cdot\|_i$, $i=1,2$ *deux normes sur* E. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sont équivalentes et*

(ii) *pour tout* $A\subset E$ *on a l'équivalence :* A *un ouvert pour la norme* $\|\cdot\|_1$ *si et seulement si* A *un ouvert pour la norme* $\|\cdot\|_2$.

Définition. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'un sous-ensemble $F\subset E$ est *un fermé* si son complémentaire $E\setminus F$ est un ouvert.

→ **1.11 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-ensemble. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un fermé,*

(ii) *$\forall x \notin F\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset$ et*

(iii) *$\forall x \notin F\ \exists$ voisinage ouvert U de $x : U \cap F = \emptyset$.*

→ **1.12 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x \in E$ un point. Alors l'ensemble $\{x\} \subset E$ est un fermé.*

→ **1.13 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé.*

(i) *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*

(ii) *Si A et B sont deux ouverts de E, alors $A \cap B$ est un ouvert de E.*

(iii) *Si A_i, $i \in I$ est une famille d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de E.*

(iv) *$\emptyset$ et E sont des fermés.*

(v) *Si A et B sont deux fermés de E, alors $A \cup B$ est un fermé de E.*

(vi) *Si A_i, $i \in I$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé de E.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *adhérent à A* si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble de tous les points adhérent à A est appelé *l'adhérence de A* ou *la fermeture de A* et est noté $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{\, x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A \,\} \quad .$$

→ **1.14 Lemme.** *x est adhérent à A si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de x on a $U \cap A \neq \emptyset$.*

→ **1.15 Lemme.** *$A \subset \overline{A}$.*

1.16 Lemme. *$\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$. On dit que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

→ **1.17 Corollaire.** *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *un point d'accumulation de A* si $\forall \varepsilon > 0 : \big(B_\varepsilon(x) \cap A\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

→ **1.18 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.*

(i) *Si $x \in E$ est un point d'accumulation de A, alors x est un point adhérent à A.*

(ii) *Si $x \in E$ est un point adhérent à A, alors de deux choses l'une : soit x est un point d'accumulation de A, soit il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$. Dans le deuxième cas on dit que x* est un point isolé de *A.*

Exercices

→ **1.19 Exercice. Pour se familiariser avec les fonctions de plusieurs variables.** Pour les fonctions f données ci-dessous, déterminer par des équations ou des inéquations le domaine de définition D_f et représenter graphiquement D_f en hachurant les parties du plan et en barrant les parties du bord qui ne sont pas dans D_f.

(i) $f(x,y) = \ln(2x + y - 2)$

(ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln y}$

(iii) $f(x,y) = \ln(y - x) + \dfrac{1}{x}$

(iv) $f(x,y) = \dfrac{\ln(y - x + 1)}{\sqrt{4 - xy}}$

(v) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

(vi) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(vii) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x - y^2)}{\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2}}$

(viii) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \dfrac{y}{x}$

(ix) $f(x,y) = \dfrac{\ln(y - 2x + 3)}{\sqrt{x - y^2}}$

(x) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x + y^2)}{\sqrt{3 - 2x - x^2 - y^2}}$

(xi) $f(x,y) = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$

(xii) $f(x,y) = \sqrt{y - 3x^2 - 6x}$.

→ **1.20 Exercice. Pour se familiariser avec les fonctions de plusieurs variables.** Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les situations suivantes.

(i) $f(x,y) = 2x + 3y$ et $c = -1,\ 1,\ 2$.

(ii) $f(x,y) = y^2$ et $c = -1,\ 1,\ 2,\ 4$.

(iii) $f(x,y) = \ln(x + y)$ et $c = 0,\ 1$.

(iv) $f(x,y) = 4x^2 + 25y^2$ et $c = 100$.

(v) $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^2 - x}{y - y^2}\right)$ et $c = \mathrm{e}$.

(vi) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{8 - x^2y^2}$ et $c = 2$.

→ **1.21 Exercice. Pour se familiariser avec les fonctions de plusieurs variables.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les fonctions partielles $f(x_o, y)$ et $f(x, y_o)$ pour des ponts (x_o, y_o) choisis dans D_f, le domaine de définition de f, et les lignes de niveau $f(x, y) = c$ pour des valeurs de $c \in \mathbf{R}$ choisies. Les représenter graphiquement, puis donner l'allure du graphe des fonctions suivantes.

(i) $f(x, y) = x$
(ii) $f(x, y) = 1 - x - y$
(iii) $f(x, y) = y^2$
(iv) $f(x, y) = y^3$
(v) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(vi) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
(vii) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
(viii) $f(x, y) = y^2 - x^2$
(ix) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(x) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

→ **1.22 Exercice. Pour se familiariser avec les fonctions de plusieurs variables.** Soit $f(x, y) = \varphi(ax + by)$, où φ est une fonction d'une variable et a et b deux réels non simultanément nuls. Montrer que le graphe de f est une réunion de droites. Donner des exemples.

→ **1.23 Exercice. Pour se familiariser avec les fonctions de plusieurs variables.** Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y^2}{4y^2 - x}} \; .$$

Qeul est don domane de définition ? Le représenter graphiquement. Montrer que les courbes de niveau sont des paraboles sauf dans quelques cas que l'on précisera. Les représenter pour les niveaux $c = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1.

→ **1.24 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **1.25 Exercice.** Pour chacune des applications suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, décider s'il s'agit oui ou non d'une norme.

(i) $N(x, y) = |4x + 3y|$.
(ii) $N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$.
(iii) $N(x, y) = \frac{1}{2}\big(|x - 3y| + |3x + y|\big)$.
(iv) $N(x, y) = |x + y| + |2x - y|$.
(v) $N_a(x, y) = \sqrt{|x^2 + 2axy + y^2|}$ (on discutera suivant a).

(vi) $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

(vii) Dans les cas (i) à (iv), dessiner l'ensemble $\{\,(x,y) \mid N(x,y)=1\,\}$.

→ **1.26 Exercice.** Les applications suivantes $N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont-elles des normes ? (On pourra se concentrer sur le cas $n=2$.)

(i) $N(x) = \sum_{i=1}^n x_i$.

(ii) $N(x) = 1$ si $x \neq 0$, 0 sinon.

(iii) $N(x) = |x_1|$, $n > 1$.

→ **1.27 Exercice.** Soit $E = C^0(\,[0,1],\mathbf{R}\,)$ l'ensemble des applications continues définies sur $[0,1]$ (et à valeurs dans $\mathbf{R}$).

(i) Montrer que E est un espace vectoriel.

(ii) Montrer que les applications $N_1, N_2, N_\infty : C^0(\,[0,1],\mathbf{R}\,) \to [0,\infty[$ définies par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad , \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\ \mathrm{d}t} \quad , \quad N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

sont des normes sur $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$.

(iii) Pour chaque $i \neq j \in \{1,2,\infty\}$, trouver des réels $a_{ij} > 0$ (ou montrer qu'ils n'existent pas) tels que pour tout f dans E on a $N_i(f) \leq a_{ij} N_j(f)$.

→ **1.28 Exercice.** Soit c un réel. Pour tout polynôme P à coefficient réels (c'est-à-dire : $P \in \mathbf{R}[X]$) on définit le nombre $N_c(P)$ par

$$N_c(P) = |P(c)| + \int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t \quad .$$

(i) Montrer que N_c est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

(ii) Pour $b > 1$ et $a \neq b$, montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

(iii) Montrer que N_a et N_b sont des normes équivalentes si $a, b \in [0,1]$. (Indication : penser à la formule de Taylor).

→ **1.29 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|\,)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r \in\,]0,\infty[$. Montrer qu'on a l'égalité

$$\overline{B_r(x)} = \{\, y \in E \mid \|y-x\| \leq r \,\} \quad .$$

→ **1.30 Exercice.** $\mathbf{Q}$ est-t-il un ouvert de $\mathbf{R}$? Est-il un fermé ? $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbf{R}^2$?

→ **1.31 Exercice.** Trouver des suites d'ouverts A_n de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}^2$ telles que (a) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ est un ouvert, (b) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ est un fermé, et (c) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ est ni un ouvert ni un fermé.

→ **1.32 Exercice.** Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.

(i) Montrer que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

(ii) Montrer que $A \subset B$ entraîne $\overline{A} \subset \overline{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

(iii) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. S'il n'y a pas (toujours) égalité, donner un exemple où ces ensembles sont différents. S'il y a toujours égalité, le montrer.

(iv) Même question pour $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

→ **1.33 Exercice.** Soit $M(n, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées de taille n et soit $N : M(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$N(A) = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \ \ ,$$

où les A_{ij}, $1 \le i, j \le n$ désignent les éléments de la matrice A (avec i l'indice des lignes et j l'indice des colonnes).

(i) Montrer que N est une norme sur $M(n, \mathbf{R})$.

(ii) Calculer $N(I)$, où I désigne la matrice identité.

(iii) Montrer que pour tout $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ on a l'inégalité $N(A \cdot B) \le N(A) \cdot N(B)$.

→ **1.34 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On définit, pour tout $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble

$$S_r(a) = \{ x \in E \mid \|x - a\| = r \} \ \ ,$$

la sphére de rayon r et de centre a. Soient $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$ tels que $S_r(a) = S_{r'}(a')$.

(i) Montrer que pour tout $v \in E$ vérifiant $\|v\| = 1$ on a $a + rv \in S_{r'}(a')$.

(ii) En appliquant la question précédente à un vecteur v judicieusement choisi, montrer que si $a \neq a'$, alors $\|a - a'\| = r - r'$.

(iii) De même, montrer que si $a \neq a'$, alors $\|a' - a\| = r' - r$.

(iv) En déduire qu'on a $r = r'$ et $a = a'$.

→ **1.35 Exercice.** Parmi les ensembles suivants, préciser (en justifiant soigneusement) ceux qui sont ouverts et ceux qui sont fermés.

(i) $]-2, 1[\times [0, 3]$, $[0, 1] \times \{9\}$.

(ii) $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \}$, $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x^3 > 0 \}$.

(iii) $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy < 1 \}$, $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a < x < b \}$.

(iv) $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 \ge 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2 \}$, $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \}$.

(v) $\mathbf{R}^2 \setminus \{ (x, 0) \mid x \le 0 \}$.

→ **1.36 Exercice.** Déterminer les points adhérents, les points d'accumulations et les points isolés des sous-ensembles A de $\mathbf{R}$ suivants en justifiant avec soin vos réponses.

(i) $A = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{Q}$, $A = \mathbf{Z}$, $A = [0, 1]$, $A = [0, 1[$, $A =]-\infty, 1]$, $A = [1, \infty[$.

(ii) $A = \,]0,1[\, \cup \,]1,2]$.

(iii) $A = \{\, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \,\}$, $A = \{\, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \,\} \cup \{0\}$.

(iv) $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{\, (x,0) \mid x \leq 0 \,\}$.

→ **1.37 Exercice.** Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble fini. Montrer que A est fermé et ne contient aucune boule ouverte.

→ **1.38 Exercice.** Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un sous-espace vectoriel non trivial ($E \neq \mathbf{R}^n$). Montrer que E est fermé et ne contient aucune boule ouverte.

→ **1.39 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $r > 0$ et $a \in E$. On définit *la boule fermée $B_r^f(a)$ de centre a et de rayon r* par

$$B_r^f(a) = \{\, x \in E \mid \|x - a\| \leq r \,\} \ .$$

(i) Montrer que $B_r(a)$ n'est pas un fermé et que $B_r^f(a)$ n'est pas un ouvert.

(ii) Montrer que $B_r^f(a)$ est un fermé et qu'on a l'égalité $B_r^f(a) = \overline{B_r(a)}$.

→ **1.40 Exercice.** Soit $O \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $A \subset \mathbf{R}^n$ quelconque. Montrer qu'on a l'inclusion $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$ et que cette inclusion est fausse si on ne suppose pas que O est un ouvert.

2. Convergence et continuité

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que *la suite x_n converge vers ℓ (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)*, qu'on note $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, si on a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbf{N} \; \forall n \geq N : \|x_n - \ell\| < \varepsilon \quad .$$

→ **2.1 Lemme.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $\ell \in E$. Alors on a l'équivalence*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|x_n - \ell\| = 0 \quad .$$

→ **2.2 Lemme.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $\ell_1, \ell_2 \in E$. Si on a $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_2$, alors on a $\ell_1 = \ell_2$.*

2.3 Lemme. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $\ell \in E$. Alors on a $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si et seulement si on a la propriété*

$$\forall \text{ voisinage ouvert } O \text{ de } \ell \; \exists N \in \mathbf{N} \; \forall n \geq N : x_n \in O \quad .$$

2.4 Lemme. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.*

(i) *$x \in \overline{A}$ si et seulement si $\exists a_n \in A : \lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

(ii) *x est un point d'accumulation de A si et seulement si $\exists a_n \in A \setminus \{x\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

2.5 Proposition. *Soit $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^p) \in \mathbf{R}^p$ une suite et $\ell = (\ell^1, \ldots, \ell^p)$, alors on a l'équivalence*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i = 1, \ldots, p : \lim_{n\to\infty} x_n^i = \ell^i \quad .$$

→ **2.6 Lemme.** *Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, alors x_n est bornée : $\exists R > 0 \; \forall n : \|x_n\| \leq R$.*

2.7 Définition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \subset E \to F$ une application, $\ell \in F$ et a un point d'accumulation de A, alors on dit que *f tend vers ℓ quand x tend vers a*, qu'on note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : 0 < \|x - a\|_E < \delta \; \Rightarrow \; \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon \quad .$$

→ **2.8 Lemme.** *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans [2.7], on a l'équivalence*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \|f(x) - \ell\|_F = 0 \quad .$$

→ **2.9 Lemme.** *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans [2.7], les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\delta(a) \cap A \setminus \{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$ *et*

(iii) $\forall O$ *voisinage ouvert de* ℓ $\exists U$ *voisinage ouvert de* a : $x \in U \cap A \setminus \{a\} \ \Rightarrow\ f(x) \in O$.

(iv) $\forall O$ *voisinage ouvert de* ℓ $\exists U$ *voisinage ouvert de* a : $U \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$.

→ **2.10 Lemme.** *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f, g : A \subset E \to F$ *deux applications,* $\ell, m \in F$ *et* a *un point d'accumulation de* A. *Si on a* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = m$, *alors on a* $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \ell + m$.

2.11 Lemme. *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f : A \to \mathbf{R}$ *et* $g : A \subset E \to F$ *deux applications,* $\ell \in \mathbf{R}$, $m \in F$ *et* a *un point d'accumulation de* A. *Si on a* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = m$, *alors on a* $\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \ell \cdot m$.

2.12 Lemme. *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* $A \subset E$, $f : A \to \mathbf{R}$ *une application,* $\ell \in \mathbf{R}^*$ *et* a *un point d'accumulation de* A. *Si on a* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, *alors on a* $\lim_{x\to a}\big(1/f(x)\big) = 1/\ell$.

→ **2.13 Lemme.** *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f : A \to F$ *une application,* a *un point d'accumulation de* A, $\ell \in F$ *et* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. *Alors, si* $a_n \in A \setminus \{a\}$ *est une suite dans* A *(excepté le point* a *le cas échéant) telle que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *alors* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

2.14 Proposition. *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *trois espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \to F$ *et* $g : B \to G$ *deux applications,* a *un point d'accumulation de* A, b *un point d'accumulation de* B *et* $\ell \in G$. *Si les trois hypothèses*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,

(ii) $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$ *et*

(iii) *il existe un voisinage ouvert* U *de* a *tel que* $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset B \setminus \{b\}$

sont vérifiées, alors on a $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \ell$.

2.15 Définition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \subset E \to F$ une application et $a \in A$. Alors on dit que f *est continue en* $a \in A$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A : \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon \ .$$

Et on dit que f est continue (sur A) si pour tout $a \in A$ la fonction f est continue en a.

$\rightarrow$ **2.16 Lemme.** *Avec les mêmes notations que dans [2.15], si a est un point d'accumulation de A, alors on a l'équivalence*

$$f \text{ continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad .$$

$\rightarrow$ **2.17 Lemme.** *Avec les mêmes notations que dans [2.15], si a est un point isolé de A, alors f est continue en a.*

2.18 Corollaire. *Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ une fonction, alors f est continue.*

$\rightarrow$ **2.19 Lemme.** *Avec les mêmes notations que dans [2.15], les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a,*

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon\big(f(a)\big)$,

(iii) *$\forall O$ voisinage ouvert de $f(a)$ $\exists U$ voisinage ouvert de $a : f(U \cap A) \subset O$,*

(iv) *$\forall O$ voisinage ouvert de $f(a)$ $\exists U$ voisinage ouvert de $a : U \cap A \subset f^{-1}(O)$.*

2.20 Lemme. *Soit $f : A \subset E \to F$ une application, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f continue (sur A),*

(ii) *$\forall O$ ouvert de F $\exists U$ ouvert de $E : f^{-1}(O) = A \cap U$ et*

(iii) *$\forall W$ fermé de F $\exists V$ fermé de $E : f^{-1}(W) = A \cap V$.*

$\rightarrow$ **2.21 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$, $f : A \to \mathbf{R}$ continue et $b \in \mathbf{R}$. Alors il existe un fermé V de E tel que*

$$f^{-1}(\,]-\infty, b]\,) \equiv \{\, x \in A \mid f(x) \leq b \,\} = A \cap V \quad .$$

$\rightarrow$ **2.22 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ continue et $b \in F$. Alors il existe un fermé V de E tel que*

$$f^{-1}(\{b\}) \equiv \{\, x \in A \mid f(x) = b \,\} = A \cap V \quad .$$

$\rightarrow$ **2.23 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|\,)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ est continue :*

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in E : \|y - x\| < \delta \ \Rightarrow \ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| < \varepsilon \quad .$$

2.24 Lemme. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$, $f : A \to \mathbf{R}^q$ une application, a un point d'accumulation de A et $\ell \in \mathbf{R}^q$. Si on écrit*

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_q) \in \mathbf{R}^q \qquad \textit{et} \qquad f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_q(x)\big) \in \mathbf{R}^q \ ,$$

alors on a l'équivalence $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *si et seulement si* $\forall 1 \le i \le q : \lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$.

→ **2.25 Corollaire.** $f : A \to \mathbf{R}^q$ *est continue (en $a \in A$) si et seulement si toutes les composantes $f_i : A \to \mathbf{R}$ sont continues (en $a \in A$).*

→ **2.26 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ un sous-ensemble et $a \in A$ un point.*

(i) *Si $f, g : A \to F$ sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a*

(ii) *Si $f : A \to \mathbf{R}$ et $g : A \to F$ sont continues en a, alors $f \cdot g$ est continue en a.*

(iii) *Si $f : A \to \mathbf{R}^*$ est continue en a, alors $1/f$ est continue en a.*

→ **2.27 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications et $f(A) \subset B$. Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f : A \to G$ est continue en a.*

→ **2.28 Lemme.** *Soit $f : A \to F$ continue en $a \in A$, $a_n \in A$ une suite dans A telle que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *alors* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

2.29 Théorème. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Si pour* **toute** *suite $a_n \in A \backslash \{a\}$ vérifiant* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *on a* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$, *alors on a* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exercices

→ **2.30 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **2.31 Exercice.** Montrer que les applications suivantes sont continues :

(i) Le produit (de toutes les coordonnées) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

(ii) Les applications polynômiales en plusieurs variables.

(iii) Le déterminant d'une matrice carrée.

→ **2.32 Exercice.** Les sous-ensembles suivants de $M(n, \mathbf{R})$ (l'ensemble de toutes les matrices carrées de taille n) sont-ils ouverts ? sont-ils fermés ?

(i) $GL_n(\mathbf{R})$ (les matrices inversibles).
(ii) Les matrices non-inversibles.
(iii) Les matrices de rang r fixé.
(iv) Les matrices de rang $< r$.

→ **2.33 Exercice.** Écrire les définitions de

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y) = 5 \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,\infty)} f(x,y) = 5^+$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,2^-)} f(x,y) = -\infty \qquad \lim_{(x,y)\to(1^+,2)} f(x,y) = 3 \ .$$

→ **2.34 Exercice.** Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ un sous-ensemble, $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction et (x_o, y_o) un point d'accumulation de D.

(i) Montrer qu'on a l'implication
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = |L| \ .$$
(ii) Montrer qu'en général on n'a pas l'implication
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = |L| \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L \ ,$$
sauf si $L = 0$ (au quel cas on *a* cette implication).

→ **2.35 Exercice.** Étudier l'existence et la valeur de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} \ .$$

→ **2.36 Exercice.** Les fonctions suivantes admettent-elles une limite quand $(x, y) \to (0, 0)$?

$$f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy} \quad , \quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad , \quad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y} \ .$$

→ **2.37 Exercice.** Soit $f(x, y) = (x^2 + y^2)/(y^2)$.

(i) Représenter sur un même graphique le domaine de définition de f, les courbes de niveau 1 et 5, notées respectivement I_1 et I_5 et la droite D d'équation $y = x$.
(ii) Étudier les limites de f quand $(x, y) \to (0, 0)$ en restant sur I_1, sur I_5, sur D.
(iii) Étudier la limite de f quand $(x, y) \to (0, 0)$.
(iv) Par la même méthode, étudier la limite de $f(x, y) = (x^2 + y)/(x + y^2)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$.

→ **2.38 Exercice.** Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans lui-même. Montrer que son graphe est fermé. La réciproque est-elle vraie ? (Indication : penser à $1/x$).

→ **2.39 Exercice.** Déterminer si oui ou non les limites suivantes existent et, dans le cas d'existence, donner sa valeur.

(i) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+1}$$ (ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

(iii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2+1)\,\sin x}{x}$$ (iv) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+1}{x^2+y^2}$$

→ **2.40 Exercice.** On définit l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$f(0,0)=0 \qquad \text{et} \qquad (x,y)\neq(0,0) \;\Rightarrow\; f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad .$$

(i) Montrer que les applications partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont continues (pour y respectivement x fixé).

(ii) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

(iii) Est-ce que f est continue en $(0,0)$?

→ **2.41 Exercice.** On définit l'application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$g(0,0)=0 \qquad \text{et} \qquad (x,y)\neq(0,0) \;\Rightarrow\; g(x,y)=|xy|^{3/2}\cdot\Big(\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\Big) \quad .$$

(i) Montrer que les applications partielles sont continues.

(ii) Si a et b sont des réels positifs, montrer l'inégalité $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

(iii) g est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$?

→ **2.42 Exercice.** Soit f l'application dépendant de quatre variables définie par

$$f(w,x,y,z)=\Bigg(\frac{wz+xy}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}}\;,\; wxyz\;\sin\Big(\frac{1}{(|x|+|y|+|z|+|w|)^8}\Big)\Bigg) \quad .$$

(i) Déterminer le domaine de définition de f (dans $\mathbf{R}^4$).

(ii) f est-elle continue sur son domaine de définition ?

(iii) Peut-elle être prolongée en une application continue sur $\mathbf{R}^4$?

→ **2.43 Exercice.** Soit a et b deux réels strictement positifs et soit l'application $g_{a,b} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$g_{a,b}(0,0)=0 \qquad \text{et} \qquad (x,y)\neq(0,0) \;\Rightarrow\; g_{a,b}(x,y)=\frac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad .$$

(i) Montrer que les applications partielles sont continues.

(ii) À quelle condition sur a et b la restriction de $g_{a,b}$ à toute droite est-elle continue ?

(iii) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $g_{a,b}$ soit continue sur $\mathbf{R}^2$.

→ **2.44 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

(i) Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un (autre) espace vectoriel normé et soit $f : F \to E$ une application linéaire. Montrer que f est continue si et seulement f est continue en $0 \in E$.

(ii) Montrer que toute application linéaire $f : \mathbf{R} \to E$ est continue (où $\mathbf{R}$ et muni de la norme $|\cdot|$).

(iii) Montrer que toute application linéaire $f : \mathbf{R}^n \to E$ est continue quand $\mathbf{R}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

3. Compacité

Définitions. Dans ce qui suit, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un sous-ensemble.

• Soit x_n une suite dans un ensemble X (pour tout $n \in \mathbf{N} : x_n \in X$). Une suite y_n dans X est appelée une *sous-suite de x_n* ou une *suite extraite de x_n* s'il existe une application strictement croissante $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle qu'on ait $y_n = x_{k(n)}$. Il est d'habitude de noter, dans ce contexte, la valeur $k(n)$ comme k_n et d'écrire $y_n = x_{k_n}$, ou de parler simplement de la sous-suite x_{k_n}.

• On dit que A *est borné (par rapport à la norme $\|\cdot\|$)* s'il existe $R \in \mathbf{R}$ tel que $A \subset B_R(0)$, ce qui revient à dire que pour tout $x \in A$ on a $\|x\| < R$.

• On dit qu'une suite x_n dans E est *bornée (par rapport à la norme $\|\cdot\|$)* si l'ensemble $\{ x_n \mid n \in \mathbf{N} \} \subset E$ est borné (par rapport à la norme $\|\cdot\|$), ce qui revient à l'existence d'un $R \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\|x_n\| < R$.

• Plus généralement, si X est un ensemble et $f : X \to E$ une fonction, on dit que f *est bornée (par rapport à la norme $\|\cdot\|$)* si l'ensemble $\{ f(x) \mid x \in X \}$ est borné (par rapport à la norme $\|\cdot\|$), ce qui revient à l'existence d'un $R \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on a $\|f(x)\| < R$.

• On dit que A *est compact* si toute suite dans A admet une sous-suite convergente **dans** A.

→ **3.1 Lemme.** *Soit $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a l'inégalité $k(n) \geq n$.*

→ **3.2 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel, $A \subset E$ un sous-ensemble et $N_1, N_2 : E \to \mathbf{R}$ deux normes sur E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors A est borné par rapport à la norme N_1 si et seulement s'il est borné par rapport à la norme N_2.*

3.3 Théorème. *$A \subset \mathbf{R}^p$ est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

3.4 Théorème. *Soit $f : A \subset E \to F$ continue et A compact, alors $f(A)$ est compact.*

3.5 Proposition. *Soit $A \subset E$ compact et $f : A \to \mathbf{R}$ continue, alors $\exists x_m, x_M \in A\ \forall y \in A : f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.*

3.6 Proposition. *Soit N une norme sur $\mathbf{R}^p$, alors $N : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

3.7 Théorème. *Si N est une norme sur $\mathbf{R}^p$, alors N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.*

→ **3.8 Corollaire.** *Soit $N_1, N_2 : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ deux normes, alors N_1 et N_2 sont équivalentes.*

Exercices

→ **3.9 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **3.10 Exercice.** Déterminer si les ensembles suivants sont oui ou non compacts :

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 1 \,\} \qquad B = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^5 \leq 1 \,\}$$
$$C_a = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x^2 + 2axy + y^2| \leq 1 \,\} \ .$$

→ **3.11 Exercice.**

(i) Montrer, à l'aide de la définition, que $]0,1[\subset \mathbf{R}$ n'est pas compact.

(ii) Montrer que toute suite dans $]0,1[$ admet une sous-suite convergente. Ce résultat, contredit-il que $]0,1[$ n'est pas compact ?

(iii) Montrer qu'il existe des suites dans $]0,1[$ qui admettent des sous-suites convergentes dans $]0,1[$.

→ **3.12 Exercice.** Si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé, on définit $A+B$ par

$$A + B = \{\, a + b \mid a \in A, b \in B \,\} \ .$$

(i) Si A et B sont ouverts, $A+B$ est-il ouvert ?

(ii) Si A et B sont compacts, $A+B$ est-il compact ?

(iii) Si A et B sont bornés, $A+B$ est-il borné ?

(iv) Si A et B sont fermés, $A+B$ est-il fermé ?

(v) Si A est compact et B est fermé, $A+B$ est-il fermé ?

→ **3.13 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to [0,\infty[$ une fonction continue qui vérifie la condition $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \|(x,y)\| > R \ \Rightarrow \ |f(x,y)| < \varepsilon \ .$$

Montrer que f atteint sa borne supérieure sur $\mathbf{R}^2$. A-t-on le même résultat pour la borne inférieure ?

→ **3.14 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, une application continue. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall M > 0 \ \exists R > 0 \ \forall x \in \mathbf{R}^n : \|x\| > R \ \Rightarrow \ |f(x)| > M$,

(ii) $\forall B$ partie bornée de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbf{R}^n$ et

(iii) $\forall K$ partie compacte de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

→ **3.15 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $X \subset E$ un sous-ensemble compact et $f : X \to X$ une application. On suppose que pour tout $x, y \in X, x \neq y$ on a l'inégalité $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe. (Indication : étudier la fonctions $g(x) = \|f(x) - x\|$.)

→ **3.16 Exercice.** Soit $N : \mathbf{R}[X] \to [0, \infty[$ l'application définie par

$$N(a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d) = \sum_{i=0}^{d} |a_i| \quad .$$

(i) Montrer que N est une norme.

(ii) Calculer la norme de X^k.

(iii) La boule $B_1(0) = \{ P \in \mathbf{R}[X] \mid N(P) \leq 1 \}$ est-elle fermée ? bornée ? compacte ?

→ **3.17 Exercice.** Montrer que $\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \subset \mathbf{R}^3$ et $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ sont compact et donner des exemples de fonctions $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ telles que

(i) f et g n'admettent ni maximum ni minimum,

(ii) f et g admettent un maximum mais pas un minimum.

Ces exemples, contredisent-ils la compacité de $[0, 1]$ ou de $\mathbf{S}^2$?

4. Connexité

Définition. Un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}$ est un *intervalle* si $\forall x, y \in A,\ x \leq y : [x, y] \subset A$.

→ **4.1 Lemme.** *Les intervalles existent en 9 "types"*

$]-\infty, \infty[$	$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$
$[a, \infty[$	$[a, b]$	$[a, b[$
$]a, \infty[$	$]a, b]$	$]a, b[$

Quatre sont ouverts, quatre sont fermés, un est ouvert et fermé, deux sont ni fermés ni ouverts, cinq sont non-bornés, quatre sont bornés, six sont majorés et six sont minorés.

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $A \subset E$ est *connexe* si pour tout deux ouverts $O, U \subset E$ on a l'implication

$$A = (A \cap O) \cup (A \cap U) \quad \text{et} \quad (A \cap O) \cap (A \cap U) = \emptyset \\ \implies \quad A \cap O = \emptyset \quad \text{ou} \quad A \cap U = \emptyset\ .$$

On dit en mots qu'un ensemble A est connexe si on ne peut pas le couper en deux (vrais) morceaux par des ouverts.

4.2 Lemme. *Soit $A \subset \mathbf{R}$, alors A est connexe si et seulement si A est un intervalle.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $A \subset E$ est *connexe par arcs* si pour tout $x, y \in A$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to A$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

4.3 Lemme. *Si $A \subset E$ est connexe par arcs, alors A est connexe.*

→ **4.4 Lemme.** *Soit $A \subset E$ connexe et $f : A \to F$ continue, alors $f(A)$ est connexe.*

→ **4.5 Lemme.** *Si $A \subset E$ est connexe par arcs et $f : A \to F$ continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

→ **4.6 Corollaire (théorème de la valeur intermédiaire).** *Soit $A \subset E$ connexe et $f : A \to \mathbf{R}$ continue, alors $f(A)$ est un intervalle.*

Exercices

→ **4.7 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **4.8 Exercice.** Montrer qu'une application continue définie sur un connexe et à valeurs dans $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ est constante.

→ **4.9 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to E$ deux applications continues. On définit l'application $\gamma : [0,1] \to E$ par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases} .$$

Montrer que γ est continue si et seulement si $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

→ **4.10 Exercice.** Soit $A_i \subset E$, $i \in I$ une famille de sous-ensembles connexes respectivement connexes par arcs et supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $a \in A_i$ pour tout $i \in I$. Montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est connexe respectivement connexe par arcs.

→ **4.11 Exercice.** Soit $A \subset E$ un sous-ensemble connexe et soit $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe.

→ **4.12 Exercice.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$ un sous-ensemble et $a \in A$. On définit $\mathcal{C}_a$ comme la collection de tous les ensembles connexes contenant a et contenu dans A :

$$\mathcal{C}_a = \{\, B \subset A \mid a \in B \text{ et } B \text{ connexe} \,\} .$$

(i) Déduire de l'exercice 4.10 que la réunion de tous les éléments de $\mathcal{C}_a$ est le plus grand connexe contenant a et contenu dans A. On le note comme $C_A(a)$ et on l'appelle *la composante connexe de A contenant a.*

(ii) Déduire de l'exercice 4.11 qu'il existe un fermé $F \subset E$ tel que $C_A(a) = A \cap F$.

(iii) Montrer que pour $a, b \in A$ on a soit $C_A(a) = C_A(b)$, soit $C_A(a) \cap C_A(b) = \emptyset$.

(iv) Soit F un espace vectoriel normé, $D \subset F$ un connexe et $f : D \to A$ une application continue. Montrer qu'il existe $a \in A : f(D) \subset C_A(a)$.

→ **4.13 Exercice.** Montrer que $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas une application continue et bijective $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

→ **4.14 Exercice.** On rappelle qu'un hyperplan d'un espace vectoriel E est le noyau d'une application linéaire non nulle $f : E \to \mathbf{R}$.

(i) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, H un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus H$ n'est pas connexe.

(ii) Soit F sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n-1$. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs. (Indication : on choisit une base $e_1, ..., e_p$ de F qu'on complète en une base $e_1, ..., e_p, ..., e_{n-1}, e_n$ de E et on montre que tout point de $E \setminus F$ peut être joint par un segment de droite contenu dans $E \setminus F$ à un point non-nul dans le sous-espace engendré par les vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$.)

→ **4.15 Exercice.** Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbf{R}$ une application dérivable et $A \subset \mathbf{R}^2$ l'ensemble

$$A = \{\, (x,y) \in I \times I \mid x < y \,\} \quad .$$

(i) Montrer que A est connexe.

(ii) Soit l'application g définie sur A par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

(iii) En déduire le théorème de Darboux : $f'(I)$ est un intervalle.

→ **4.16 Exercice.** Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ le sous-ensemble défini par

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } \exists n \in \mathbf{N}^* : y = x/n \,\} \quad .$$

(i) Montrer que A est connexe par arcs.

(ii) Montrer que $(1,0) \in \overline{A}$.

(iii) Déduire à l'aide de l'exercice 4.11 que $A \cup \{(1,0)\}$ est connexe.

(iv) Montrer que $A \cup \{(1,0)\}$ n'est pas connexe par arcs. (Indication : si $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ est une courbe continue qui relie $(1,0)$ à $(1,1)$, considérer le quotient $y(t)/x(t)$.)

Chapitre 2

Différentiabilité

5. Prélude en algèbre linéaire

Définitions et conventions. Pour $m, n \in \mathbf{N}^*$ on définit $M(m \times n, \mathbf{R})$ comme l'ensemble de toutes les matrices à coefficients dans $\mathbf{R}$ et de taille $m \times n$, c'est-à-dire à m lignes et n colonnes. Muni de l'addition de matrices et la multiplication d'une matrice par un réel, c'est un espace vectoriel réel de dimension nm. Dans le cas $m = n$ on note l'espace $M(n \times n, \mathbf{R})$ aussi par $M(n, \mathbf{R})$. Pour $A \in M(m \times n, \mathbf{R})$, on note les éléments de matrice par A_{ij}, où la première indice i indique la ligne et va de 1 à m et où la deuxième indice j indique la colonne et va de 1 à n.

La multiplication matricielle est une opération qui part d'une matrice A de taille $m \times n$ et une matrice B de taille $n \times p$ et qui en fabrique une matrice C de taille $m \times p$. Autrement dit, pour tout $m, n, p \in \mathbf{N}^*$ on a une application

$$(m \times n, \mathbf{R}) \times M(n \times p, \mathbf{R}) \to M(m \times p, \mathbf{R}) \quad .$$

Selon l'habitude, on note cette matrice C soit par $C = AB$, soit par $C = A \cdot B$. En termes des éléments de matrice A_{ij} de A et B_{jk} de B, la multiplication matricielle est donnée par

$$C_{ik} \equiv (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \quad .$$

Dans le cas particulier de $M(m \times 1, \mathbf{R})$, c'est-à-dire des matrices à une seule colonne, on parle de *vecteur (colonne) (de taille m)* plutôt que de matrice, et dans le cas de $M(1 \times n, \mathbf{R})$, c'est-à-dire des matrices à une seule ligne, on parle plutôt de *vecteur en ligne (de taille n)*. À part quelques exceptions, les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont considérés comme des vecteurs (colonnes), c'est-à-dire comme des matrices de taille $n \times 1$. Autrement dit, on identifie l'élément $(x_1, \ldots, x_n)$ avec la matrice d'éléments $x_{i1} = x_i$ (et dans le cas où on les voit comme des vecteurs en lignes, on l'identifie avec la matrice $x_{1i} = x_i$).

Avec l'identification d'un vecteur avec une matrice, la multiplication matricielle s'applique à la multiplication d'une matrice de taille $m \times n$ avec un vecteur colonne de taille n (matrice de taille $n \times 1$) avec comme résultat un vecteur colonne de taille m (une matrice de taille $m \times 1$). C'est l'opération standard de l'application d'une matrice sur un vecteur colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 53 \\ 83 \end{pmatrix} \quad .$$

Mais la multiplication matricielle s'applique aussi à la multiplication d'un vecteur en ligne de taille m avec une matrice de taille $m \times n$ avec comme résultat un vecteur en ligne de taille n.

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 \\ 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 100 \end{pmatrix} \quad .$$

À part ces opérations classiques concernant un vecteur et une matrice, il faut signaler qu'on peut aussi multiplier des vecteurs ! On peut multiplier un vecteur en ligne de taille m avec un vecteur colonne de taille n, mais seulement quand $m = n$, au quel cas le résultat sera un nombre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = 32 \quad .$$

Par contre, on peut multiplier tout vecteur colonne de taille m avec tout vecteur en ligne n avec une matrice de taille $m \times n$ comme résultat !

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension m (sur $\mathbf{R}$), F un espace vectoriel de dimension n et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Si $e_1, \ldots, e_m \in E$ est une base de E et $f_1, \ldots, f_n$ une base de F, alors on associe une matrice $A \in M(n \times m, \mathbf{R})$ à l'application linéaire φ par l'égalité

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, f_j \quad , \tag{5.1}$$

ce qui exprime simplement le fait que le vecteur $\varphi(e_i)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base $f_1, \ldots, f_n$ de F. Alors pour un vecteur arbitraire $v = \sum_{i=1}^{m} x_i\, e_i$ de E on obtient, par linéarité de φ, l'égalité

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, f_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} A_{ji}\, x_i \Big) f_j \quad .$$

Si on note les coefficients du vecteur $\varphi(v)$ par rapport à la base $f_1, \ldots, f_n$ par y_j, c'est-à-dire $\varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} y_j\, f_j$, alors on a l'égalité

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ji}\, x_i \quad . \tag{5.2}$$

Autrement dit, les coefficients du vecteur image $\varphi(v)$ s'obtiennent par la multiplication matricielle de la matrice A avec les coefficients du vecteur v. Mais **attention à l'ordre des indices** dans ces formules ! Il est différent dans (5.1) et (5.2).

Il y a donc un lien direct entre l'évaluation d'une application linéaire sur un élément d'un espace vectoriel d'une part et la multiplication matricielle d'une matrice avec un vecteur colonne d'autre part. Ce lien s'étend à la composition de deux applications linéaires dans le sens suivant. Soit G un troisième espace vectoriel de dimension p, $g_1, \ldots, g_p$ une base de G et $\psi : F \to G$ une application linéaire. Alors comme pour φ on associe à ψ une matrice B de taille $p \times n$ par la formule

$$\psi(f_j) = \sum_{k=1}^{p} B_{kj}\, g_k$$

et à l'application composée $\psi \circ \varphi : E \to G$ on associe une matrice C de taille $p \times m$ par la formule

$$(\psi \circ \varphi)(e_i) = \sum_{k=1}^{p} C_{ki}\, g_k \quad .$$

Alors C s'obtient comme la multiplication matricielle de la matrice B avec la matrice A :

$$C_{ki} = \sum_{j=1}^{n} B_{kj}\, A_{ji} \quad .$$

Si on poursuit ce raisonnement un petit peu plus loin, on arrive à la conclusion que l'algèbre linéaire des espace de dimension finies se réduit au calcul matricielle avec la multiplication matricielle, bien que, sous-jacent il y a toujours le choix d'une base pour chaque espace vectoriel concerné. Dans ce qui va suivre, on se contentera avec le calcul matericielle sans faire appel aux applications linéaires abstraites.

EXERCICES

→ **5.3 Exercice.** Soit $A \in M(n \times m, \mathbf{R})$ une matrice et soit $\varphi_A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par la formule

$$\varphi_A(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{avec} \qquad y_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ji}\, x_i \quad .$$

Montrer que φ_A est linéaire.

→ **5.4 Exercice.** Soit $\mathrm{End}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble (espace vectoriel) de toutes les applications linéaires de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ (on parle des endomorphismes de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$). Montrer que l'application $I : M(n \times m, \mathbf{R}) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ définie par

$$I(A) = \varphi_A \quad ,$$

où φ_A est l'application linéaire définie dans [5.3], est une bijection.

6. La différentielle

→ **6.1 Lemme.** *Soit $A \in M(p \times n, \mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n$. Alors on a les inégalités*

$$\|Ax\|_1 \leq p \cdot \|A\|_\infty \cdot \|x\|_1 \qquad et \qquad \|Ax\|_\infty \leq n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty \ .$$

→ **6.2 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $A \in M(p \times n, \mathbf{R})$. Soit $N_{(n)}, N'_{(n)} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ deux normes équivalentes sur $\mathbf{R}^n$ et $N_{(p)}, N'_{(p)} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ deux normes équivalentes sur $\mathbf{R}^p$. Alors on a l'implication*

$$\lim_{h\to 0} \frac{N_{(p)}\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N_{(n)}(h)} = 0$$
$$\implies \qquad \lim_{h\to 0} \frac{N'_{(p)}\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N'_{(n)}(h)} = 0 \ .$$

6.3 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $A, B \in M(p \times n, \mathbf{R})$. Si on a les deux égalités*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Bh\|}{\|h\|} \ ,$$

alors $A = B$.

Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application. On dit que f *est différentiable en a* s'il existe une matrice $A \in M(p \times n, \mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \ ,$$

ce qu'on écrit aussi comme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \ .$$

Si f est différentiable en a, on dit que la matrice A est *la différentielle de f en a* ou que A est *la matrice Jacobienne de f en a* et on écrit $A = (Df)(a)$. On trouve aussi les notations $A = f'(a)$, $A = df_a$ ou $A = T_a f$.

Dans le cas particulier $p = 1$, c'est-à-dire une fonction réelle définie sur U, la différentielle est une matrice de taille $1 \times n$, autrement dit, un vecteur en ligne. Dans ce cas on remplace parfois le mot *différentielle* par le mot *gradient* et la notation $(Df)(a)$ par $\mathrm{grad}(f)(a)$ ou $(\nabla f)(a)$. On a donc les égalités (par définition)

$$(\mathrm{grad}\, f)(a) \equiv (\nabla f)(a) \equiv (Df)(a)$$

où cet objet représente un vecteur en ligne.

6.4 Lemme. *Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est différentiable en $a \in U \subset \mathbf{R}^n$, alors f est continue en a.*

6.5 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si on écrit $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$, alors f est différentiable en a si et seulement si toutes les fonctions f_i, $i = 1, \dots, p$ sont différentiables en a. En plus, on a l'égalité*

$$(Df)(a) = \begin{pmatrix} (Df_1)(a) \\ \vdots \\ (Df_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

→ **6.6 Lemme.** *Soit $f, g : U \to \mathbf{R}^p$ deux fonctions et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f+g$ est différentiable en a avec $\big(D(f+g)\big)(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$.*

6.7 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ et $g : U \to \mathbf{R}^p$ deux applications et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f \cdot g$ est différentiable en a avec*

$$\big(D(fg)\big)(a) = f(a) \cdot (Dg)(a) + g(a) \cdot (Df)(a) \quad ,$$

ce qui a bien un sens, car $g(a)$ peut être vu comme une matrice de taille $p \times 1$ (p lignes et 1 colonne), qu'on peut multiplier à droite par une matrice de taille $1 \times n$, pour obtenir une matrice de taille $p \times n$.

6.8 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ et $g : V \to \mathbf{R}^q$ deux applications, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $b = f(a) \in f(U) \subset V \subset \mathbf{R}^p$. Si f est différentiable en a et g différentiable en b, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a*

$$\big(D(g \circ f)\big)(a) = (Dg)(b) \cdot (Df)(a) \quad ,$$

où le produit $(Dg)(b) \cdot (Df)(a)$ est le produit matricielle.

Définition. Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $v \in \mathbf{R}^n$. Alors *la dérivée directionnelle de f au point a dans la direction v*, notée $(D_v f)(a)$ est le vecteur dans $\mathbf{R}^p$ définie comme

$$(D_v f)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \quad .$$

Pour $i = 1, \dots, n$ on définit *les dérivées partielles $(\partial_i f)(a)$ au point a* par

$$(\partial_i f)(a) = (D_{e_i} f)(a) \quad ,$$

où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, …, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Les dérivées partielles sont donc un cas particulier d'une dérivée directionnelle et elles sont données par

$$(\partial_i f)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h} \quad .$$

On les notes aussi comme

$$(\partial_i f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad ,$$

surtout quand on a exprimé la fonction f par une formule de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = \dots$.

→ **6.9 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $v \in \mathbf{R}^n$. Si f est différentiable en a, alors la dérivée directionnelle en a dans la direction v existe et est donnée par*

$$(D_v f)(a) = (Df)(a)\, v \quad .$$

→ **6.10 Corollaire.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si f est différentiable en a, alors les dérivées partielles $(\partial_i f)(a)$ existent et on a l'égalité*

$$(Df)(a) = \big(\, (\partial_1 f)(a)\ (\partial_2 f)(a)\ \ldots\ (\partial_n f)(a)\, \big) \quad .$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice de la dérivée sont les dérivées partielles. Ou encore, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ on a

$$(Df)(a)h = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)\, h_i \quad .$$

Ou encore, si on note $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$ les composantes de la fonction f, alors les éléments de la matrice Jacobienne sont les nombres $(\partial_i f_j)(a)$ avec $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$. Mais attention, c'est l'indice i qui indique la colonne et j celle de la ligne :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (Df)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & \cdots & (\partial_n f_1)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_1 f_p)(a) & \cdots & (\partial_n f_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Autrement dit :

$$\big((Df)(a)\big)_{ji} = (\partial_i f_j)(a)$$

ou encore

$$\big((Df)(a)h\big)_j = \sum_{i=1}^{n} \big((Df)(a)\big)_{ji}\, h_i = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_j)(a) h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\, h_i \quad .$$

→ **6.11 Corollaire.** *Avec les hypothèses de [6.8] et en décomposant les fonctions f et g en composantes comme $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$ et $g(y) = \big(g_1(y), \ldots, g_q(y)\big)$, les dérivées partielles $\big(\partial_i (g \circ f)\big)(a)$ sont données par les formules*

$$\big(\partial_i (g \circ f)\big)(a) = (Dg)(b) \cdot (\partial_i f)(a) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g)(b) \cdot (\partial_i f_j)(a) \quad .$$

Ou encore, en notant $h = g \circ f$, et pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, q$:

$$(\partial_i h_k)(a) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g_k)(b) \cdot (\partial_i f_j)(a)$$

ou

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}\big(f(a)\big) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad .$$

6.12 Proposition. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset U$ un voisinage ouvert de a. Si les dérivées partielles de f existent pour tout point $x \in V$ et si elles sont continues en a, alors f est différentiable en a et on a l'égalité*

$$(Df)(a) = \big((\partial_1 f)(a) \ (\partial_2 f)(a) \ \ldots \ (\partial_n f)(a) \big) \quad .$$

Définition. Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ avec $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Alors on dit que f *est différentiable sur U* si elle est différentiable en chaque point $a \in U$. On dit que f *est de classe C^1* si elle est différentiable (sur U) et si l'application $Df : U \to M(p\times n, \mathbf{R})$, $a \mapsto (Df)(a)$ est continue.

→ **6.13 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ avec $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Alors f est de classe C^1 si et seulement si toutes les fonctions/dérivées partielles $(\partial_i f_j) : U \to \mathbf{R}$ sont continues.*

Définition. Soit E un espace vectoriel. Pour tout $x, y \in E$ on définit le segment de droite $[x, y]$ entre x et y par

$$[x, y] = \{ \, tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1] \, \} \quad .$$

6.14 Lemme (l'égalité des accroissements finis). *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une application différentiable et $a, b \in U \subset \mathbf{R}^n$ tels que le segment $[a, b]$ est contenu dans U. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel qu'on a l'égalité*

$$f(b) - f(a) = (Df)\big(a + \theta(b-a)\big) \cdot (b-a) \quad .$$

6.15 Lemme (l'inégalité des accroissements finis). *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable, $a, b \in U \subset \mathbf{R}^n$ et soit $V \subset U$ un sous-ensemble (pas forcément ouvert!) contenant le segment $[a, b]$. Alors on a l'inégalité*

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \le n \cdot \sup_{x \in V} \|(Df)(x)\|_\infty \cdot \|b - a\|_\infty \quad .$$

6.16 Corollaire. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert convexe (mais connexité suffit) et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable. Alors f est constante si et seulement si $(Df)(a) = 0$ pour tout $a \in U$.*

Exercices

→ **6.17 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **6.18 Exercice.** Soit $A \in M(p \times n, \mathbf{R})$ une matrice et soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ l'application linéaire associée définie par

$$f(x) = Ax \quad .$$

Montrer que f est différentiable et qu'on a $(Df)(a) = A$ pour tout $a \in \mathbf{R}^n$.

→ **6.19 Exercice.** Déterminer les dérivées partielles $\partial_i f$ des fonctions suivantes.

(i) $f(x,y) = (y+2)^{x+2}$,

(ii) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2/y} \cos(y)$,

(iii) $f(x,y) = \sqrt[5]{\cos(x^2 y)}$,

(iv) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$,

(v) $f(x,y) = \arctan(y/x)$.

→ **6.20 Exercice.** Soit $f(x,y) = \exp\bigl((x^2+y^2)/(xy)\bigr)$. Montrer que pour tout (x,y) dans le domaine de définition de f on a l'égalité

$$x \cdot (\partial_1 f)(x,y) + y \cdot (\partial_2 f)(x,y) = 0 \quad .$$

Remarque : on écrit cette égalité aussi sous la forme $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

→ **6.21 Exercice.** Justifier la différentiabilité et calculer la différentielle en un point de l'ensemble de départ de :

(i) $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ définie par $f(a,b,c,d) = ad - bc$.

(ii) $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $g(x,y) = \sin(x+y)$.

(iii) $h : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ définie par $h(z) = \frac{1}{z}$.

(iv) $i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $i(u,v) = (u+v, u-v)$.

(v) $g \circ i$.

→ **6.22 Exercice.** Déterminer les dérivées partielles et la différentielle des fonctions suivantes.

(i) $f(x,y) = \bigl(\sin(x\cos y), \cos(y \sin x)\bigr)$.

(ii) $f(x,y,z) = \bigl(\mathrm{e}^{z\cos x} - y, \sinh(\cosh y + \cosh z) + x\bigr)$.

(iii) $f(x,y,z) = \ln\bigl(x(\ln y)(\ln\ln z)\bigr)$.

(iv) $f(x) = (\ln x, \ln\ln x, \ln\ln\ln x)$.

(v) $f(x,y) = \dfrac{x - \sinh y}{\cosh x + y^2}$.

(vi) $f(x,y,z) = \Bigl(\dfrac{\sin(xy) + \mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{xy} + \cos z}, \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln y}}{z^2+z+1}\Bigr)$.

→ **6.23 Exercice.** Déterminer une valeur approchée des nombres suivants :

$$1,9987 \times 3,0008 \ , \quad \mathrm{e}^{0,1} \cdot \ln(0,9) \ , \quad (16,1)^{1/4} \cdot (3,9)^{1/2} \ , \quad \sqrt[4]{(1,9)^3 + (2,1)^3} \quad .$$

→ **6.24 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application $f(x,y) = x^2 + (y/x)$ et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ l'application $g(t) = \bigl(\mathrm{e}^t + t\,,\, \sin(t^2)\bigr)$. Déterminer la différentielle de f et de g et en déduire la différentielle de la fonction composée $h(t) = f\big(g(t)\big)$. Vérifier votre résultat par un calcul direct.

Même questions pour les fonctions $f(x, y) = x^3 + (y^2/x)$ et $g(t) = \big(e^{5t}, \sin^2(t)\big)$.

→ **6.25 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application $f(x, y) = \sin(x^2y)$ et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application $g(r, s) = \big(r^2 + s\,,\ s - r\big)$. Déterminer la différentielle de f et de g et en déduire la différentielle de la fonction composée $h(r, s) = f\big(g(r, s)\big)$.

→ **6.26 Exercice.** Soit $f, k, \ell : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ des applications différentiables. Exprimer les dérivées partielles/la différentielle des fonctions F_i en termes des dérivées (partielles) des fonctions f, g, h, k, ℓ.

(i) $F_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F_1(x) = f(x^2, \cos x)$.

(ii) $F_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F_2(x) = f\big(g(x), h(x)\big)$.

(iii) $F_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F_3(x, y) = f\big(g(x), h(y)\big)$.

(iv) $F_4 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F_4(x, y) = f\big(k(x, y), \ell(x, y)\big)$.

(v) $F_5 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F_5(x, y) = g\big(k(x, y)\big)$.

(vi) $F_6 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F_6(x, y) = f\big(k(x, y), g(x)\big)$.

→ **6.27 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f(x - y)$. Montrer qu'on a pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ l'égalité

$$(\partial_1 g)(x, y) = -(\partial_2 g)(x, y) \ .$$

Remarque : on écrit cette égalité aussi sous la forme $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

→ **6.28 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable et soit $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer qu'on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ l'égalité

$$(\partial_1 g)(x, y, z) + (\partial_2 g)(x, y, z) + (\partial_3 g)(x, y, z) = 0 \ .$$

Remarque : on écrit cette égalité aussi sous la forme $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$.

→ **6.29 Exercice.** On munit $M(n, \mathbf{R})$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.

(i) Vérifier que pour toutes matrices $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ on a l'inégalité $\|AB\|_\infty \leq n\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty$. Connaissez vous une norme sur $M(n, \mathbf{R})$ telle que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$?

(ii) Montrer que l'application $C : M(n, \mathbf{R}) \to M(n, \mathbf{R})$ définie par $C(M) = M^2$ est différentiable et calculer sa différentielle en une matrice M. Le résultat dépend-t-il de la norme choisie ?

→ **6.30 Exercice.** Soit E un espace vectoriel normé et f une application de E dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout x de E on ait : $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en ce point.

→ **6.31 Exercice.**

(i) En quels points l'application de $\mathbf{R}$ dans lui-même : $x \to |x|$ est-elle différentiable ?

(ii) En quels points l'application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$: $x \to \|x\|_2^2$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle en ces points.

(iii) Même question pour l'application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$: $x \to \|x\|_2$.

(iv) Même question pour l'application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$: $x \to \|x\|_1$.

→ **6.32 Exercice.** Soit f une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans lui même telle que pour tout réel λ et tout $x \in \mathbf{R}^n$ on ait : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

→ **6.33 Exercice.** On définit les applications $f, g, h, i, k : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par la valeur 0 en $(0,0)$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$ respectivement par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4} \quad , \quad g(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^4} \quad , \quad h(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$i(x,y) = |xy|^{3/2}\left(\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4}\right) \quad , \quad k(x,y) = xy\,\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) \ .$$

Pour chacune de ces fonctions dire si oui ou non (et justifier !)

(i) les applications partielles sont continues,

(ii) elle est continue sur $\mathbf{R}^2$,

(iii) ses dérivées partielles existent sur $\mathbf{R}^2$,

(iv) ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbf{R}^2$,

(v) elle est différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

→ **6.34 Exercice.** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. On considère l'application $g : I \times I \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Pour $x_o \in I$ fixé et $u \in I \setminus \{x_o\}$ on définit les fonctions ε et φ par

$$\varepsilon(u) = \frac{f'(u)-f'(x_o)}{u-x_o} - f''(x_o)$$
$$\varphi(u) = f(u) - u \cdot f'(x_o) - \tfrac{1}{2}\,(u-x_o)^2 \cdot f''(x_o) \ .$$

(i) Montrer que g est différentiable en tout point $(x_o, y_o) \in I \times I$ avec $x_o \neq y_o$ et déterminer sa différentielle en ce point.

(ii) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction φ, montre que pour tous $x, y \in I$ avec $x < y$ on a

$$\Big|\ g(x,y) - g(x_o,x_o) - \tfrac{1}{2} \cdot f''(x_o) \cdot (x - x_o + y - y_o)\ \Big| \leq \max_{u \in [x,y]} \ |u - x_o| \cdot |\varepsilon(u)| \ .$$

(iii) Montrer que g est différentiable en (x_o, x_o) et déterminer $(Dg)(x_o, x_o)$, sa différentielle en ce point.

→ **6.35 Exercice.** Soit l'application $\ell : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $\ell(x, y) = \min(x^2, y^2)$. Préciser en quels points elle est différentiable.

→ **6.36 Exercice.**

(i) Montrer que toute matrice de $M(n, \mathbf{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

(ii) Justifier le fait que l'application déterminant de $M(n, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ est infiniment différentiable.

(iii) Soit $\phi = (D \det)(I_n)$ la différentielle du déterminant au point l'identité. Vérifier qu'en toute matrice élémentaire $E_{i,j}$ on a : $\phi(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(E_{i,j})$ (on note tr l'application trace qui a une matrice associe la somme de ses termes diagonaux). Calculer ϕ.

(iv) Calculer $(D \det)(M)$ en toute matrice inversible M, puis en toute matrice de $M(n, \mathbf{R})$. Pouvait-on trouver ce résultat directement ?

7. Dérivées d'ordre supérieur

Définitions. Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application, $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $k \in \mathbf{N}^*$.

• On dit que f *est deux fois différentiable en* a si f est différentiable dans un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et que l'application $Df : V \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{pn}$ est différentiable en a. On note la différentielle de Df en a comme $(D^2f)(a) = \big(D(Df)\big)(a)$ et on dit que c'est *la différentielle d'ordre* 2 *de* f *en* a.

• Par récurrence on dit que f *est* $k+1$ *fois différentiable en* a *avec* $k+1^{\text{ième}}$ *dérivée* $(D^{k+1})(a)$ si f est k fois différentiable sur un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et que l'application $D^kf : U \to \mathbf{R}^{pn^k}$ est différentiable en a, au quel cas on note $\big(D(D^kf)\big)(a) = (D^{k+1}f)(a) \in M(pn^k \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{pn^{k+1}}$.

• On dit que f *est* k *fois différentiable sur* U si elle est k fois différentiable en chaque point $a \in U$.

• On dit que f *est de classe* C^k *(sur* U*)* si f est k fois différentiable sur U et que la $k^{\text{ième}}$ différentielle $D^kf : U \to \mathbf{R}^{pn^k}$ est continue.

Remarque. Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application 2 fois différentiable avec différentielle seconde D^2f, soit $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ et $v, w \in \mathbf{R}^n$. Par définition $(D^2f)(a) = \big(D(Df)\big)(a)$, ce qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{pn} \cong M(p \times n, \mathbf{R})$. En particulier, avec notre $v \in \mathbf{R}^n$,

$$(D^2f)(a)v = \big(D(Df)\big)(a)v \in M(p \times n, \mathbf{R})$$

est une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, qu'on peut appliquer à $w \in \mathbf{R}^n$ pour obtenir

$$\big((D^2f)(a)v\big)w \in \mathbf{R}^p \quad .$$

Si on veut regarder ce qui se passe en termes des coefficients et dérivées partielles, on commence avec la remarque que, selon [6.10], les coefficients de $(Df)(a)$ sont les éléments de matrice $\big((Df)(a)\big)_{ji} = (\partial_i f_j)(a)$, en nombre np. En considérant le couple (ji) comme une seule indice, les éléments de matrice de la dérivée $\big(D(Df)\big)(a)$ sont donnés, de nouveau selon [6.10], par

$$\big((D^2f)(a)\big)_{(ji)k} = \Big(\big(D(Df)\big)(a)\Big)_{(ji)k} = \big(\partial_k(Df)_{ji}\big)(a) = \big(\partial_k(\partial_i f_j)\big)(a) \quad .$$

Si on applique cette "matrice" au vecteur v, on trouve les coefficients de l'image par

$$\big((D^2f)(a)v\,\big)_{ji} = \sum_{k=1}^n \big((D^2f)(a)\big)_{(ji)k}\, v_k = \sum_{k=1}^n \big(\partial_k(\partial_i f_j)\big)(a)\, v_k \quad .$$

Il s'ensuit que le vecteur $\big((D^2f)(a)v\,\big)w$ est donné par

$$\Big(\big((D^2f)(a)v\big)w\,\Big)_j = \sum_{i=1}^n \big((D^2f)(a)v\big)_{ji}\, w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \big(\partial_k(\partial_i f_j)\big)(a)\, v_k\, w_i \quad .$$

Si f est trois fois différentiable en a avec différentielle d'ordre 3 $(D^3f)(a)$, on peut répéter cette procédure avec trois vecteur $u, v, w \in \mathbf{R}^n$. On a $(D^3f)(a) = \big(D(D^2f)\big)(a)$ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{pn^2} \cong M(n \times pn, \mathbf{R})$. Le résultat $(D^3f)(a)u$ appartient donc à cet espace :

$$(D^3f)(a)u \in \mathbf{R}^{pn^2} \cong M(n \times pn, \mathbf{R}) \qquad \Longleftrightarrow$$
$$(D^3f)(a)u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{pn} \text{ une application linéaire.}$$

On peut "donc" l'appliquer au vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ pour obtenir une image dans l'espace $\mathbf{R}^{pn} \cong M(p \times n, \mathbf{R})$:

$$\big((D^3 f)(a)u\big)v \in \mathbf{R}^{pn} \cong M(p \times n, \mathbf{R}) \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\big((D^3 f)(a)u\big)v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p \text{ une application linéaire.}$$

En appliquant ce dernier résultat au vecteur $w \in \mathbf{R}^n$ on obtient un vecteur dans $\mathbf{R}^p$:

$$\Big(\big((D^3 f)(a)u\big)v\Big)w \in \mathbf{R}^p \ .$$

Selon l'analyse précédente, les coefficients de $(D^2 f)(a)$ dans l'espace $\mathbf{R}^{pn^2}$ sont donnés par $\big((D^2 f)(a)\big)_{(ji)k} = \big(\partial_k(\partial_i f_j)\big)(a)$. Si on considère le triplet $(ji)k$ comme une seule indice, les éléments de la matrice $(D^3 f)(a) = \big(D(D^2 f)\big)(a)$ dont donnés par

$$\begin{aligned}\big((D^3 f)(a)\big)_{((ji)k)\ell} &= \Big(\big(D(D^2 f)\big)(a)\Big)_{((ji)k)\ell} = \Big(\partial_\ell (D^2 f)_{(ji)k}\Big)(a) \\ &= \Big(\partial_\ell\big(\partial_k(\partial_i f_j)\big)\Big)(a) \ .\end{aligned}$$

Selon le même schéma que pour la dérivée seconde, on trouve pour le vecteur $\Big(\big((D^3 f)(a)u\big)v\Big)w \in \mathbf{R}^p$ l'expression

$$\bigg(\Big(\big((D^3 f)(a)u\big)v\Big)w\bigg)_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \Big(\partial_\ell\big(\partial_k(\partial_i f)\big)\Big)(a)\, u_\ell\, v_k\, w_i \ .$$

Poursuivant ces calculs, on montre que la dérivée $k^{\text{ième}}$ $(D^k f)(a)$ a comme coefficients les nombres

$$(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} f_j)(a) \ ,$$

avec $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$ et $1 \le j \le p$, et qu'on peut appliquer $(D^k f)(a)$ itérativement à k vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$ avec résultat

$$\bigg(\Big((D^k f)(a)\Big)(v_1, \dots, v_k)\bigg)_j = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n (\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} f_j)(a)\,(v_1)_{i_1}\cdots(v_k)_{i_k} \ .$$

→ **7.1 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ k fois différentiable au point $a \in U$. Alors l'application*

$$(D^k f)(a) : \big(\mathbf{R}^n\big)^k \to \mathbf{R}^p \qquad , \qquad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \big((D^k f)(a)\big)(v_1, \dots, v_k)$$

est k-linéaire.

→ **7.2 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application avec $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$. Alors f est k fois différentiable au point $a \in U \subset \mathbf{R}^n$ si et seulement si toutes les fonctions $f_i : U \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le p$ sont k fois différentiables au point a.*

→ **7.3 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application. Alors f est de classe C^k si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre k $\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} f : U \to \mathbf{R}^p$ existent et sont continues.*

7.4 Théorème de Schwarz. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si f est deux fois différentiable en a, alors pour $1 \leq i < j \leq n$ fixés on a l'égalité*

$$\big(\partial_i(\partial_j f)\big)(a) = \big(\partial_j(\partial_i f)\big)(a) \quad .$$

→ **7.5 Corollaire.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ de classe C^k et $a \in U$. Alors $(D^k f)(a)$, la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f au point a, est (peut être vu comme) une application k-linéaire **symétrique** $(D^k f)(a) : (\mathbf{R}^n)^k \to \mathbf{R}^p$.*

7.6 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application qui est deux fois différentiable au point $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Alors on a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - (Df)(a)h - \frac{1}{2}(D^2 f)(a)(h,h)\|}{\|h\|^2} = 0 \quad .$$

Exercices

→ **7.7 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **7.8 Exercice.** Déterminer les dérivées partielles d'ordre deux $\partial_j\partial_i f$ des fonctions suivantes.

(i) $f(x,y) = (y+2)^{x+2}$,

(ii) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2/y}\cos(y)$,

(iii) $f(x,y) = \sqrt[5]{\cos(x^2 y)}$,

(iv) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$,

(v) $f(x,y) = \arctan(y/x)$.

→ **7.9 Exercice.** Soit $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Montrer qu'on a l'égalité

$$(\partial_1\partial_1 f)(x,y) + (\partial_2\partial_2 f)(x,y) = 0 \quad .$$

Remarque : on écrit cette égalité aussi sous la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

→ **7.10 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$x + y \neq 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) = \frac{xy^2}{x+y} \qquad \text{et} \qquad f(x,-x) = 0 \quad .$$

(i) Calculer les dérivées partielles $(\partial_1 f)(0,y)$ et $(\partial_2 f)(x,0)$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$.

(ii) En déduire les valeurs des dérivées secondes mixtes

$$\big(\partial_2(\partial_1 f)\big)(0,0) \qquad \text{et} \qquad \big(\partial_1(\partial_2 f)\big)(0,0) \quad .$$

(iii) Conclure que $(D^2 f)(0,0)$, la dérivée seconde de f au point $(0,0)$, n'existe pas.

(iv) Pouvait-on obtenir ce résultat plus rapidement ?

→ **7.11 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par (Peano 1884)

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$, que les dérivées partielles secondes

$$\big(\partial_1(\partial_2 f)\big)(0,0) \qquad \text{et} \qquad \big(\partial_2(\partial_1 f)\big)(0,0)$$

existent, mais qu'elles sont différentes.

8. Extrema

Définition. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. On dit que *$a$ est un maximum local* s'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a tel que

$$\forall x \in V : f(x) \leq f(a) \quad .$$

Et on dit que *a est un maximum global* si on a

$$\forall x \in U : f(x) \leq f(a) \quad .$$

Pour la définition d'un *minimum local ou global* on change l'inégalité en $f(x) \geq f(a)$.

8.1 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in U$. Si f est différentiable en a et si a est un maximum ou minimum local, alors $(Df)(a) = 0$.*

Définition. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. On dit que *$a$ est un point critique* si $(Df)(a) = 0$.

8.2 Proposition (rappel). *Soit $A \in M(n, \mathbf{R})$ une matrice carrée symétrique. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres. En particulier toutes les valeurs propres de A sont réelles.*

8.3 Lemme. *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois différentiable (sur U), soit $a \in U$ un point critique et soit H la matrice (de taille $n \times n$, symétrique) $H_{ij} = (\partial_i \partial_j f)(a)$ (qu'on appelle le* Hessien de f au point a*).*

(i) *Si toutes les valeurs propres de H sont strictement positives (on dit que H est* définie positive*), alors a est un minimum local.*

(ii) *Si toutes les valeurs propres de H sont strictement négatives (on dit que H est* définie négative*), alors a est un maximum local.*

(iii) *Si H a des valeurs propres strictement positives et strictement négatives, alors a n'est pas un minimum local, ni un maximum local. Dans le cas $n = 2$ on parle d'un* point selle.

Nota Bene. Le résultat de [8.3] ne couvre pas le cas où il y a des valeurs propres nulles et où les autres valeurs propres ont toutes le même signe. Dans ce cas, la détermination de la nature d'un point critique est plus compliquée.

8.4 Proposition (le critère de Sylvester). *Soit $H \in M(n, \mathbf{R})$ une matrice carrée symétrique et soit $M_1, \ldots, M_n$ les* mineurs principaux dominants *de la matrice $(H_{ij})_{i,j=1}^n$ définis comme*

$$M_k = \det\big((H_{ij})_{i,j=1}^k\big) \quad .$$

(i) *H est définie positive si et seulement si $M_k > 0$ pour tout k.*

(ii) *H est définie négative si et seulement si $(-1)^k M_k > 0$ pour tout k.*

8.5 Proposition (la règle des signes de Descartes). *Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ on note par $z_+(P)$ et $z_-(P)$ le nombre de racines strictement positives respectivement négatives de P comptées avec multiplicité et on note par $z_o(P)$ l'ordre de 0 comme racine de P. On définit aussi $\sigma(P)$ comme le nombre de changements de signes parmi les coefficients non-nuls consécutifs de P. Plus précisément, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ il existe des entiers $0 \leq d_0 < d_1 < \cdots < d_n$ et des réels **non-nuls** $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^{d_i} \quad .$$

Le nombre $\sigma(P)$ est alors le nombre de -1 dans la suite $s_1, \ldots, s_n$ définie par $s_i = \mathrm{signe}(a_{i-1}\, a_i)$. Avec ces notations on a les résultats suivants.

(i) $z_+(P) \leq \sigma(P)$.

(ii) *Si on note $P_-(X) = P(-X)$, alors $z_-(P) = z_+(P_-) \leq \sigma(P_-)$.*

(iii) $\sigma(P) + \sigma(P_-) \leq \deg(P) - z_o(P) \equiv d_n - d_0$.

(iv) *Si P a toutes ses racines dans $\mathbf{R}$, alors $z_+(P) = \sigma(P)$ et (en conséquence) $z_-(P) = \sigma(P_-) = \deg(P) - z_+(P) - z_o(P)$.*

8.6 Théorème des extréma liés. *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ et $g : U \to \mathbf{R}^p$ deux applications de classe C^1 et soit $A = \{\, x \in U \mid g(x) = 0 \,\}$. Si la restriction de la fonction f à A présente un maximum ou un minimum local en $a \in A$ et si $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}^p$ tel que*

$$(Df)(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (Dg_j)(a) \quad .$$

*Les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ s'appellent des **multiplicateurs de Lagrange**.*

Cette propriété est équivalente à l'affirmation que le couple $(a, \lambda) \in U \times \mathbf{R}^p$ est un point critique de la fonction $F : U \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x) \quad .$$

Remarque. On peut remplacer, dans [8.6], la condition que $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ par la condition que $\mathrm{rang}(Dg)$ est constant dans un voisinage ouvert de a. Dans ce cadre plus général on peut remarquer que si $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$, alors $\mathrm{rang}\big(Dg(x)\big) = p$ pour x dans un voisinage ouvert de a.

Exercices

→ **8.7 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(i) Trouver les points critiques.

(ii) Décider si ce sont des extrema locaux ou globaux.

→ **8.8 Exercice.** Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Déterminer les éventuels extrema et préciser s'ils sont locaux ou globaux.

→ **8.9 Exercice.** Soit $K = [0,1]^2$ et $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$h(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \quad .$$

(i) Trouver les points critiques de h.

(ii) Déterminer les extrema locaux et globaux de h sur K.

→ **8.10 Exercice.** Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$.

→ **8.11 Exercice.** Soit $D = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y = 1\,\}$. Pour tout $q > 0$ fixé, trouver le minimum sur D de $x^q + y^q$.

→ **8.12 Exercice.**

(i) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe sous forme algébrique, montrer l'égalité $|\sin(z)|^2 = \frac{1}{2}\big(\cosh(2y) - \cos(2x)\big)$.

(ii) Montrer que $\max\limits_{|z|\leq 1} |\sin(z)|$ est atteint sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

(iii) Trouver ce maximum.

→ **8.13 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction (de classe C^2 sur un voisinage de 0) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $F(x,y) = f(x)\cdot f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0,0)$.

→ **8.14 Exercice.**

(i) Montrer que -1 est la seule racine de l'équation

$$x = \ln(\,|x|\,) + \frac{1}{x}$$

et en déduire que c'est la seule racine de l'équation $\mathrm{e}^x = -x\ \mathrm{e}^{1/x}$.

(ii) Déterminer les extrema relatifs de la fonction $f(x,y) = x\ \mathrm{e}^y + y\ \mathrm{e}^x$.

→ **8.15 Exercice.**

(i) Trouver les points critiques de $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2$ et montrer qu'ils constituent tous un minimum global qu'on déterminera.

(ii) Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ on a $\big(\sum_{i=1}^n x_i\big)^2 \leq n\big(\sum_{1=i}^n x_i^2\big)$ et donner tous les cas d'égalité.

9. Inversion locale et fonctions implicites

→ **9.1 Lemme.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ deux ouverts et soit $f : U \to V$ une application bijective. Si f est différentiable en $a \in U$ et si $f^{-1} : V \to U$ est différentiable en $b = f(a)$, alors $n = p$ et on a l'égalité*

$$\big(D(f^{-1})\big)(b) = \big((Df)(a)\big)^{-1} \ .$$

Définition. Soit $U, V \subset \mathbf{R}^n$ deux ouverts et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un C^k *difféomorphisme (entre U et V)* si f est de classe C^k, qu'elle est bijective et que $f^{-1} : V \to U$ est aussi de classe C^k.

9.2 Théorème de l'inversion locale. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^k, $k \geq 1$ et $a \in U \subset \mathbf{R}^n$. Si la matrice $(Df)(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{R}^n$ de $b = f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un C^k difféomorphisme.*

9.3 Théorème des fonctions implicites. *Soit $U \subset \mathbf{R}^{p+n}$ un ouvert, $a \in \mathbf{R}^n$ et $b \in \mathbf{R}^p$ tels que $(a, b) \in U$ et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction de classe C^k, $k \geq 1$ telle que $f(a, b) = c \in \mathbf{R}^p$. Si la matrice carrée de taille $p \times p$ formée par les p dernières colonnes de la matrice $(Df)(a, b)$ est inversible, alors il existe deux ouverts $V_n \subset \mathbf{R}^n$, $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et une unique fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k tels que*

(i) *$(a, b) \in V_n \times V_p \subset U$ et*

(ii) *$\forall (x, y) \in V_n \times V_p \quad : \quad f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x)$.*

→ **9.4 Corollaire.** *Avec les mêmes hypothèses que dans [9.3], si on distingue les premières n coordonnées $x \in \mathbf{R}^n$ des p dernières $y \in \mathbf{R}^p$, on obtient l'expression explicite pour la différentielle de g comme*

$$(Dg)(x) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big) \Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big) \Big) \ .$$

9.5 Théorème des fonctions implicites (variante pour usage pratique). *Soit $U \subset \mathbf{R}^{p+n}$ un ouvert, $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction de classe C^k, $k \geq 1$ telle que $f(a) = c \in \mathbf{R}^p$. On suppose qu'on a partagé l'ensemble $\{1, \ldots, n+p\}$ en deux parties I et J :*

$$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \quad , \quad J = \{j_1, \ldots, j_p\} \qquad \textit{avec} \qquad I \cup J = \{1, \ldots, n+p\} \ ,$$

tel que la matrice A (de taille $p \times p$) donnée par

$$A_{k\ell} = (\partial_{j_\ell} f_k)(a) \qquad , \qquad 1 \leq k, \ell \leq p$$

est inversible.

Alors il existe deux ouverts $V_n \subset \mathbf{R}^n$, $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et une unique fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k avec les propriétés suivantes.

(i) *On a $a \in W \subset U$, où $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est l'ensemble défini comme*

$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in V_n \text{ et } (x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}) \in V_p \,\} \ .$$

(ii)
$$\forall x \in W \quad : \quad f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad (x_i)_{i\in J} = g\big((x)_{i\in I}\big) \quad ,$$
où la dernière égalité veut dire qu'on a
$$\forall 1 \le k \le p : x_{j_k} = g_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \quad .$$

(iii) *Si on note par B la matrice (de taille $p \times n$, à ne pas confondre avec la matrice A) donnée par*
$$B_{k\ell} = (\partial_{i_\ell} f_k)(a) \qquad , \qquad 1 \le k \le p \quad \text{et} \quad 1 \le \ell \le n \quad ,$$
alors la dérivée de g au point $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ est donnée par
$$(Dg)(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = -\, A^{-1} \cdot B \quad . \tag{9.6}$$

Remarque. Si on rajoute les indices à la formule (9.6), on obtient, pour tout $1 \le k \le p$ et tout $1 \le m \le n$, l'égalité
$$(\partial_m g_k)(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) = -\sum_{\ell=1}^{p} (A^{-1})_{k\ell}\ (\partial_{i_m} f_\ell)(a)$$
ou encore (en multipliant par la matrice A)
$$\sum_{\ell=1}^{p} (\partial_m g_\ell)(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})\ (\partial_{j_\ell} f_k)(a) = -\,(\partial_{i_m} f_k)(a) \quad .$$

Définition. Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un sous-ensemble. On dit que M est une *sous-variété (de dimension n et de classe C^k, $k \ge 1$)* si pour tout $m \in M$ il existe un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ de m, un ouvert $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ et un difféomorphisme $f : U \to W$ de classe C^k tels que
$$M \cap W = f(U \cap Z) \quad ,$$
où $Z \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est l'ensemble
$$Z = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid x_{n+1} = \cdots = x_{n+p} = 0 \,\} \quad .$$

9.7 Théorème. *Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un sous-ensemble. Alors M est une sous-variété (de dimension n et de classe C^k, $k \ge 1$) si et seulement si pour tout $m \in M$ on peut trouver deux ouverts $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et $V_n \subset \mathbf{R}^n$, une fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k, et une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n+p\}$ en deux parties I et J :*
$$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \quad , \quad J = \{j_1, \ldots, j_p\} \qquad \text{avec} \qquad I \cup J = \{1, \ldots, n+p\} \quad ,$$
tels que
$$W \cap M = \{\, x \in W \mid (x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}) = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \,\} \quad ,$$
où $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est défini par
$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in V_n \ \text{et}\ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}) \in V_p \,\} \quad .$$

Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable. On dit que $c \in \mathbf{R}^p$ est une *valeur régulière pour f* si pour tout $x \in f^{-1}(c)$ l'application linéaire $(Df)(x) : \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}^p$ est surjective. Cette condition est équivalente à la condition que le rang de la matrice $(Df)(x)$ est égal à p.

Remarque. Cela peut paraître bizarre, mais si $c \in \mathbf{R}^p$ n'appartient pas à l'image de f, alors c est une valeur régulière de f !

9.8 Proposition. *Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geq 1$, $c \in \mathbf{R}^p$ et $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ le sous-ensemble défini par*

$$M = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid f(x) = c \,\} \quad .$$

Si c est une valeur régulière pour f, alors M est une sous-variété (de dimension n et de classe C^k) de $\mathbf{R}^{n+p}$.

9.9 Théorème. *Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une sous-variété de dimension n (et de classe C^k, $k \geq 1$). Alors pour tout $m \in M$ il existe un unique sous-espace vectoriel $T \subset \mathbf{R}^{n+p}$ de dimension n tel que*

$$\lim_{\substack{x \to m \\ x \in M}} \frac{d(x-m, T)}{\|x-m\|} = 0 \quad ,$$

où $d(y, T)$ désigne la distance du point y au sous-espace vectoriel T définie par

$$d(y, T) = \inf_{z \in T} \|y - z\| \quad .$$

Définition. Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une sous-variété de dimension n (et de classe C^k, $k \geq 1$) et $m \in M$. Alors l'unique sous-espace vectoriel T (de dimension n) donné par [9.9] est appelé *l'espace tangent à M au point m*. Pour bien indiquer que ce sous-espace dépend de la sous-variété M et du point m, on le note comme $T_m M$.

9.10 Proposition. *Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geq 1$, $c \in \mathbf{R}^p$ une valeur régulière pour f et $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ la sous-variété [9.8] définie par*

$$M = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid f(x) = c \,\} \quad .$$

Alors pour $m \in M$ l'espace tangent $T_m M$ à M au point m est donné par

$$T_m M = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid (Df)(m)(x) = 0 \,\} \equiv \ker\big((Df)(m)\big) \quad .$$

Exercices

→ **9.11 Exercice.** Démontrer les lemmes indiqués par une flèche →.

→ **9.12 Exercice.** La relation entre x et y

$$\frac{y-4}{y+2x} = x - 3$$

définit-elle implicitement y en fonction de x ? x en fonction de y ? Dans les deux cas on justifiera sa réponse.

→ **9.13 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (y - x^2)^2$, soit $(a,b) = (0,0) \in \mathbf{R}^2$ et soit $c = f(a,b) = 0$.

(i) Montrer que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas à ces données.

(ii) Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant l'équivalence

$$f(x,y) = f(0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = g(x) \ .$$

→ **9.14 Exercice.** Soit $p, q \in \mathbf{N}$ et soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^p - y^q$.

(i) Déterminer les points $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(a,b) = 0$ et $(\partial_2 f)(a,b) \neq 0$.

(ii) Montrer qu'en chacun de ces points il existe des voisinages ouverts I_1 de a et I_2 de b et une unique application $g : I_1 \to I_2$ vérifiant $f\big(x, g(x)\big) = 0$.

(iii) Calculer $g'(a)$ via les dérivées partielles de f.

→ **9.15 Exercice.** Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18 \ .$$

(i) Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts $I, J \subset \mathbf{R}$ et une application $\phi : I \to J$ infiniment différentiable tels que $2 \in I$, $1 \in J$ et tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$ on a l'équivalence $y = \phi(x) \ \Leftrightarrow\ g(x,y) = 0$.

(ii) Calculer $\phi'(2)$.

→ **9.16 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}\times\,]0,\infty[\, \times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \big(x + y^2 + zx + \log(y), z - xy + xyz\big) \ .$$

Montrer que l'équation $f(x,y,z) = (1,0)$ permet, pour (y,z) dans un voisinage de $(1,0)$, d'exprimer y et z en fonction de x.

→ **9.17 Exercice.** Soit $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad y(x) \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{y(x)} \cdot \sin(x) = 0 \ .$$

Déterminer $y(0)$, justifier que y est de classe C^1 et déterminer un équivalent de $y(x)$ au voisinage de $x = 0$.

→ **9.18 Exercice.** Soit $z : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. Exprimer $(\partial_1 z)(x,y)$ et $(\partial_2 z)(x,y)$ en fonction de x, y et $z(x,y)$ quand z est solution des équations suivantes :

(i) $x - yz + z\cos(y) = 0$,

(ii) $z^3 + z\,\mathrm{e}^y + x + 2y = 0$,

(iii) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{2}$.

→ **9.19 Exercice.**

(i) Montrer que pour $|t| < 1/\sqrt{2}$, l'équation

$$\sqrt{2}\cos\big(tx - \frac{\pi}{4}\big) = x$$

admet une unique solution $x = \phi(t)$. (On pourra montrer que l'application $x \mapsto \sqrt{2}\cos\big(tx - \frac{\pi}{4}\big)$ est contractante et appliquer le résultat de 3.15.)

(ii) Démontrer alors que ϕ est infiniment différentiable et calculer $\phi(0), \phi'(0), \phi''(0)$.

→ **9.20 Exercice.** Soit $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et l'application $f : U \to f(U)$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad .$$

(i) Montrer que f est un C^1 difféomorphisme local en chaque point de U.

(ii) Est-ce que f est un C^1 difféomorphisme global ?

→ **9.21 Exercice.** Soit $g : \mathbf{R}^2 \to g(\mathbf{R}^2)$ définie par $g(x,y) = (\mathrm{e}^x\cos(y), \mathrm{e}^x\sin(y))$. Est-ce un difféomorphisme local ? global ?

→ **9.22 Exercice.** Soit $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $h(x,y) = (x+y, xy)$.

a) Déterminer l'image de h.

b) Trouver un ouvert connexe maximal sur lequel h définisse un difféomorphisme.

→ **9.23 Exercice.** Pour $f(x,y)$, c et m_o donnés ci-dessous, donner l'équation du sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$ (une courbe) $M = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\,\}$ (la courbe de niveau c de la fonction f) ainsi que celle de la droite tangente D (à ne pas confondre avec l'espace tangent !) à M au point m_o.

(i) $f(x,y) = \ln(y - x^2)$, $c = 0$ et $m_o = (-1, 2)$,

(ii) $f(x,y) = 2xy - 3x + y + 3$, $c = 6$ et $m_o = (1, 2)$,

(iii) $f(x,y)y^2 + 2 - x$, $c = -2$ et $m_o = (5, 1)$.

→ **9.24 Exercice.** Pour chacun des sous-ensembles M ci-dessous, justifier qu'il s'agit d'une sous-variété (de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$) et donner l'équation de la droite tangente au point indiqué.

(i) $M = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 - 3x^2y + y^2 = 5\,\}$ et $m_o = (1, -1)$,

(ii) $M = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exp(x^2y) = 2\,\}$ et $m_o = (1, \ln 2)$.

→ **9.25 Exercice.** Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y - x^2}} \quad .$$

Déterminer son domaine de définition ainsi que les courbes de niveau 1 et 2. Justifier que ce sont des sous-variétés (de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$) et les représenter graphiquement. Déterminer les équations des droites tangentes à ces courbes aux points $A = (1,1)$ et $B = (-2,4)$ respectivement.

→ **9.26 Exercice.** Soit $z(x,y)$ la fonction définie par

$$z^2 = x^2 + 2x + y^2 - 4 \qquad \text{et} \qquad z \geq 0 \ .$$

(i) Calculer les dérivées partielles $\partial_1 z$ et $\partial_2 z$ de z.

(ii) Représenter sur un même graphique les courbes de niveau 0 et 2 (notées M_0 et M_2 respectivement).

(iii) Justifier que M_0 et M_2 sont des sous-variétés (de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$).

(iv) Donner les équations de la droite tangente à M_0 (resp. M_2) au point $(0,0)$ (resp. $(2,2)$). Reporter ces droites sur le graphique.

→ **9.27 Exercice.** Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^x - (x+2)y$.

(i) Montrer que l'ensemble $M = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = 0\,\}$ est une sous-variété (de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$). Est-ce que M est le graphe d'une fonction $y(x)$ de x ? Si oui, calculer $y'(x)$.

(ii) Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe de niveau -1 (n'oubliez pas de montrer que c'est une sous-variété) au point $(0,1)$?

(iii) Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0,1,-1)$?

→ **9.28 Exercice.** Soit $C \subset \mathbf{R}^2$ la courbe plane d'équation

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \ .$$

Justifier que C est une sous-variété (de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$). Donner l'équation de la droite tangente D à C au point $(-1,0)$. Trouver les points de C où la droite tangente est orthogonale à D.

→ **9.29 Exercice.** Pour chacun des sous-ensembles $S \subset \mathbf{R}^3$ suivants, montrer que c'est une sous-variété (de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$) et donner l'équation du plan tangent au point indiqué.

(i) $S = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1\,\}$ et $m_o = (0,0,-4)$,

(ii) $S = \left\{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2} = z\,\right\}$ et $m_o = (-1,-1,1)$.

→ **9.30 Exercice.** Pour chacune des fonctions suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface d'équation $z = f(x,y)$, c'est-à-dire, le graphe de f. Déterminer le point (ou les points) où le plan tangent de S est parallèle au plan $z = 0$. Etudier, en chacun de ces cas, la position de S par rapport au plan tangent.

(i) $f(x,y) = x^3 + 6x^2 - 12xy + 9x + 3y^2$;

(ii) $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

→ **9.31 Exercice.** Soit $f(x,y) = x^3 - 2y^2$. Déterminer l'équation du plan tangent P au graphe de f au point $(1,2,-7)$. Trouver les points du graphe de f où le plan tangent est parallèle à P.

→ **9.32 Exercice.** Écrire l'équation cartésienne du plan tangent en A à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ (justifier que c'est bien une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$) dans les cas suivants :

(i) $f(x,y,z) = x\sin z - y\cos z, \quad A=(1,1,\frac{\pi}{4})$;

(ii) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2) - z, \quad A=(1,1,\ln 2)$.

→ **9.33 Exercice.** Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface d'équation

$$-8x^2+y^2+z^2+4=0$$

et $f(x,y) = 2x^2$. Justifier que S est une sous-variété (de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$) et montrer que le point $P=(-1,0,2)$ est sur S et sur le graphe de f. Comparer les plans tangents à S et au graphe de f au point P.

→ **9.34 Exercice.** Soient $a>0, b>0, c>0$.

(i) Écrire l'équation cartésienne de la surface S paramétrée par

$$x=a\cos\theta\cos\varphi, \quad y=b\cos\theta\sin\varphi, \quad z=c\sin\theta, \quad -\pi<\varphi<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\ .$$

(ii) Déterminer la partie de S où le plan tangent est parallèle à l'axe Oz, c'est-à-dire contient une droite parallèle à cet axe.