TD2 : Barycentres, alignement

Barycentres

Exercice 1

Soient un triangle $\triangle ABC$, D est un point sur le côté $[BA]$ tel que $BD : DA = 1 : 2$, E est un point du côté $[CB]$ tel que $CE : EB = 1 : 4$. Les segments DC et AE se coupent en F. Déterminer $CF : FD$.

Exercice 2

Soient un triangle $\triangle ABC$, E le milieu de $[AC]$, O un point de $[BE]$. La droite (AO) rencontre $[BC]$ en D. La droite (CO) rencontre $[BA]$ en F. Si $CO = 15$, $OF = 5$ et $AO = 12$, trouvez la mesure de OD.

Exercice 3

Dans le parallélogramme $ABCD$, les points E et F sont choisis sur la diagonale AC de sorte que $AE = FC$. Si (BE)rencontre $[AD]$ en H, et (BF) rencontre $[DC]$ en G, démontrer que (HG) est parallèle à (AC).

Exercice 4

Soient un triangle non dégénéré $\triangle ABC$.

a) Discuter la position du point $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$ par rapport à A et B en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Discuter la position d'un point M par rapport au triangle ABC, en fonction des signes de ses coordonnées barycentriques $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Exercice 5 (Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés)

Soient un triangle $\triangle ABC$ dont les milieux des côtés sont notés A', B', C', et M un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

a) Chercher les coordonnées barycentriques de P, Q, R symétriques de M par rapport aux points A', B', C'.

b) Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.

c) Montrer que N est le milieu de $[A, P]$, $[B, Q]$, $[C, R]$.

d) Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Exercice 6 (théorème de Ceva)

(d'après Giovanni Ceva, 1678, même si ce théorème était connu à la fin du XI^e siècle de Yusuf Al-Mu'taman ibn Hűd, géomètre et roi de Saragosse)

Soient $\triangle ABC$ un triangle et A', B', C' trois points de (BC), (AC) et (AB).

a) Si (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point M intérieur au triangle $\triangle ABC$, alors on a la relation de Gergonne

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1.$$

Indication : Interpréter les rapports comme des rapports d'aires.

b) Les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si la relation, dite *de Céva*, suivante est vérifiée

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 7 (théorème de Ménélaüs)

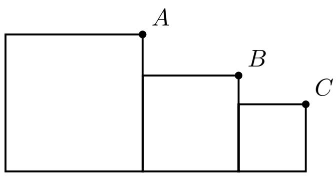
(d'après Ménélaüs d'Alexandrie, I^er et II^e siècle après J.-C.)

Si D, E et F sont trois points des côtés (BC), (AC) et (AB) d'un triangle non dégénéré ABC (et distincts des sommets), alors D, E et F sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$.

Alignement

Exercice 8

On considère la figure ci-contre formée de 3 carrés dont les longueurs des côtés sont respectivement a, b, c. En sachant qu'on a l'égalité des rapports $a : b = b : c$, les points A, B et C sont-ils nécessairement alignés ?



Exercice 9

AOB est un triangle rectangle en O ; M un point du segment $[AB]$, distinct de A et B. On trace le symétrique N de M par rapport à (AO), et le symétrique P de M par rapport à (BO). Montrer que N, O et P sont alignées. Préciser la position de O sur $[NP]$.

Exercice 10

ABC est un triangle ; O un point de (BC). Par B et C, on trace respectivement deux droites parallèles d_1 et d_2. La parallèle à (AC) passant par O coupe d_1 en I, et la parallèle à (AB) passant par O coupe d_2 en J. Montrer que A, I et J sont alignés. *On peut se restreindre au cas où A est entre d_1 et d_2.*

Exercice 11

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 13$ et $BC = 11$. Soit $FBDE$ un carré de côté 6, avec $F \in [AB]$ et $D \in [BC]$. Le point E appartient-il au segment $[AC]$?

Exercice 12 (Première Olympiade Internationale de Mathématiques – Bucarest 1959)

On considère deux carrés $ABCD$ et $BEFG$, extérieurs l'un à l'autre, avec $G \in [BC]$. Soit I le point d'intersection des deux segments $[CE]$ et $[DF]$. Montrer que les points A, G et I sont alignés : les droites (CE), (DF) et (AG) sont concourantes en I.

Exercice 13

Soient $ABCD$ un rectangle avec $E, F \in [AB]$ et $G, H \in [CD]$ avec $AEHD$, $EFGH$ et $FBCG$ des carrés. Soit $I = (AC) \cap (EH)$. Montrer que F, I et le centre J du carré $AEHD$ sont alignés.

Exercice 14

Soient $ABCD$ un parallélogramme, M le milieu de $[AB]$ et $K \in DM$ tel que $DK = 2KM$. Montrer que A, K et C sont alignés.

Exercice 15

Soient $ABEFG$ un pentagone régulier, $ABCD$ un carré extérieur au pentagone, et EFH un triangle équilatéral extérieur au pentagone. Est-ce que H, E et C sont alignés ?

Exercice 16

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercle qui se coupent en deux points districts A et B. Soit $[AM]$ (resp. $[AM']$) le diamètre de $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{C}'$). Montrer que B, M et M' sont alignés.

Exercice 17

Soient $ABCD$ un carré, $\triangle ABE$ un triangle équilatéral intérieur au carré et $\triangle BCF$ un triangle équilatéral extérieur au carré. Montrer que D, E et F sont alignés.