Sommaire MATHÉMATIQUES

Chap 5 Suites numériques

2 façons générer suites : • 1ère : formule explicite (U_n donné en f n)
• 2ème : formule de récurrence (1 terme donné en f 1 ou plusieurs préc.)

Suites arithmétiques

$\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$ ceci $\forall n \in \mathbb{N}$

Sont prouvé l c'est suite arithm.
Sont prouvé p CONTR-EX

› Propriétés $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$ $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

$\boxed{U_n = U_0 + nr}$

› S termes consécutifs ste arithm.

Lemme : $0+1+2+\dots+n = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

3 propriétés : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = \boxed{(n+1) \cdot \dfrac{U_0 + U_n}{2}}$
$= \boxed{\text{nbr termes} \cdot \overline{\text{terme m}}}$

Suites géométriques

$\boxed{U_{n+1} = U_n \cdot q}$ $\forall n$

Sont prv ste géom
Sont prv p CONTRE-EX

1) $\boxed{U_n = U_0 \cdot q^n}$

P2) $\boxed{U_n = U_p \cdot q^{n-p}}$

Lemme : $1+q+q^2+\dots+q^n = \boxed{\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$\boxed{\dfrac{1-q^{\text{nbr termes}}}{1-q}}$

Propriété

$\boxed{U_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

II / Raisnm p r'cunce

(Astce p démo q : $V_{n+1} = \ldots$ $V_{n+1} = V_n . q$ / ⚠ NON $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$.)

I / Initialisat° : N vérifie $\mathcal{P}(0)$ ᵗ vraie.

II / Hérédité : N sppse q proposit° $\mathcal{P}(k)$ ᵗ vraie p ct$_1$ rang k & ss cᵗᵉ hypt, n mq $\mathcal{P}(k+1)$ ᵗ vraie.

III / Conclut° : Si hyps I & II st vérifiées, n cndut q $\mathcal{P}(n)$ ᵗ vraie $\forall n$.

[C] Vr in'glt' Bernoulli

III / Cmptmt glbl s-te

1) Sts monotones

- (U_n) ᵗ ↗ lsq $\forall n : U_n \leq U_{n+1}$.
- (U_n) ᵗ ↘ lsq $\forall n : U_n \geq U_{n+1}$.
- (U_n) ᵗ **monotone** lsq ᵉˡˡ ne chnge jms ns° : ᵉˡˡ ᵗ s° ᵗ ↗ s° ᵗ ↘.

Méthode : étdir mo ns° s-te

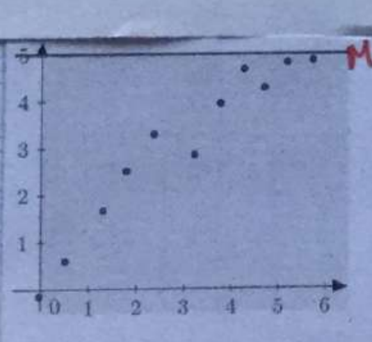
- Etdir signe $U_{n+1} - U_n$.
- Si (U_n) ᵗ du type $U_n = f(n)$, n pt étdr ns° f n $[0, +\infty[$. (Dérivée
- Cnjctr p's DEMO p r'cunce.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$, n cmpre $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

S'tes mjr'es, S'tes m'mr'es

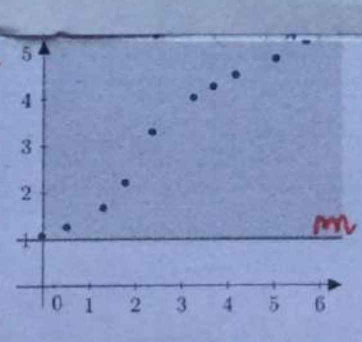
Déf : So^t (U_n) d'f.nie nb r'els :

- s'te ^t majorée lsq'il $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$.
- s'te ^t minorée lsq'il $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq m$.
- s'te ^t bornée lsq'elle ^t à f.s mjr'e & m'mr'e.

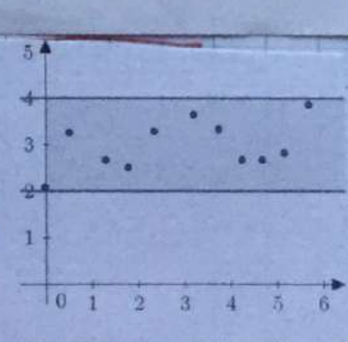
2



Représentation graphique d'une suite majorée



Représentation graphique d'une suite minorée



Représentation graphique d'une suite bornée

Rq : 1) Lorsq on a 1 majorant (M), on pt en trouver 1 sorte d'infinité, Ex : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq 3 \leq 4 \leq 8 \ldots$

2) $\exists$ stes ni majorée, ni bornée, ni minorée.

Ex 1° : Pr $n \geq 1$, on définie la ste (u_n) p $U_n = 1 + \frac{2}{n}$

Mq (U_n) est bornée.

↳ Après observations de la def, on va mq $\forall n \geq 1$,

$$\underbrace{1 \leq U_n \leq 3}.$$

- $\frac{2}{n} > 0$, dc $1 + \frac{2}{n} \geq 1$

$\Rightarrow$ 1 est minorant de (U_n).

- $n \geq 1$

$\Leftrightarrow 1/n \leq 1$ ⚠ car f inverse est décroiste ds $]0;+\infty[$ dc renverse l'ordre.

$\Leftrightarrow 2/n \leq 2$

$\Leftrightarrow \boxed{1 + 2/n \leq 3}$.

1 tjrs d'aut

x | 0
↘ | ↗

MS q mth ⊖s & ⊕s

forme f(x) ... $n \geq 0$

x | 0 | 5 | $+\infty$
f(x) | ↘ | −22 | ↗

Ex 2 : Etudier bornes éventuelles de ste définie p $U_n = n^2 - 10n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

$-22 \leq U_n \leq +\infty$

$f(x) = x^2 - 10x + 3$

x	0	5	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘	−22	↗

$a = 1 > 0 \Leftrightarrow$ parabole vers haut.

- Dc, $U_n = f(n)$, on déduit du tableau de variation de $f(x)$, q $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{U_n \geq -22}}$.

Ex 3 : $V_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

D'après calculatrice, mq $\forall n \in \mathbb{N}$ graphe : $0 \leq U_n \leq 3$.

- Pr V_n, $3n^2 \geq 0$ et $n^2 + 1 \geq 0$, dc $V_n \geq 0 \; \forall n$.

- $V_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$

$\rightarrow V_n \leq 3$

$\Leftrightarrow V_n - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3n^2 - 3(n^2+1)}{n^2+1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3n^2 - 3n^2 - 3}{n^2+1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-3}{n^2+1} \leq 0$

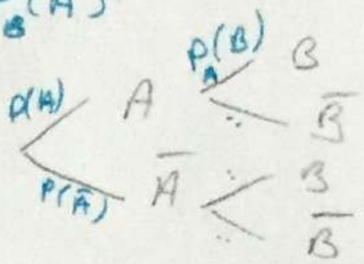
Quotient ⊖, dc signe ⊕

Ainsi ste (V_n) est bornée p $0 \leq U_n \leq 3$

C6 : Probabilités

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$ car $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ P(B) sachant A. ⚠ Ω change.

  $P_A(B) \neq P_B(A)$



- $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)}$

⚠ Ne ps confdr $P_A(B)$ & $P(A \cap B)$.

→ Loi de proba X.

→ $\sigma(X)$: dispe° vls.

Def : Des events $A_1, A_2, \ldots A_n$ forment partition Ω signifie :
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$.

TR : Formule probas totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment partition Ω alors ∀ event B,

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$ ∪ $P(B) = P_{A_1}(B) . P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(B) . P(A_n)$

Def : • Pr fois event A ne modifie PS B : $P(B) = P_A(B)$; A & B st indépendts.

Def : indépdts lorsq $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$.

⚠ NE ps confdr indépdt & incompatibilité → $A \cap B = \emptyset$.

Loi Binomiale : $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}}$ avec p : succès
$q = 1 - p$: échec.

$X \sim B(n;p)$.

Ps | Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ de $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$:

$\boxed{E(X) = n.p}$ $\boxed{V(X) = n.p.q}$ $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$

Ex : $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$:

- Répondre au hasard à 1 Q° QCM constitue épreuve Bernoulli (proba S : $p = \frac{1}{4}$).
- N répétée de façon identique & indépendante cette épreuve $n = 10$ fois.
- X compte nbr succès à l'issue de ce $\boxed{S}$.

∘ $P(X \geq 5) = 1 - \underbrace{P(X \leq 4)}_{\text{Binom F Rép.}}$

C9 : Primitives

I/ Primitive 1 f.

$F \xrightarrow{\text{dérivé}} f$, $f \xrightarrow{\text{intégré}} F$

1) No° de primitive

Déf : S.t f f déf sr stv^el I.
N appelle primitive de f sr I, tte f F déf & dérivbl sr I tq $F' = f$.

Prop : f admt 1 ∞té de primitives, de forme $G(x) = F(x) + C$, C : cste $\in \mathbb{R}$.

Prop : S.t $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. ∃ uniq primitive G de f tq $G(x_0) = y_0$.

Exple : Déterminer la primitive F q s'annl en 0 de la f f déf sr R p $f(x) = (-x+3).e^{-x}$.
1- Vérifier q f $F(x)$ déf sr $\mathbb{R}$ p $F(x) = (x-2).e^{-x}$ + primitive f.

$$\rightarrow F'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-2) = e^{-x}(-x+3).$$

2- S.t G la primitive de f s'annl^t en 0 d'aps th préc'dt.

$$G(x) = F(x) + c \quad , \text{ac } c \in \mathbb{R}.$$

N. check c tq $G(0) = 0$; $G(0) = 0 \Leftrightarrow (0-2).e^{-0} + c = 0 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow G(x) = (x-2)e^{-x} + 2$.

C_5 : Nbrs Complexes

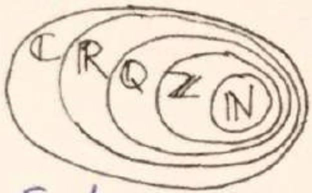
I / Corps nbrs complexes

1) $\mathbb{C}$?

$\boxed{\text{Def}}$ Nb s'écriv^t ss form $a+ib$ où $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. \to \in \mathbb{R}$ & i : nbr imaginaire tq $i^2=-1$ st appelés nbrs complexes.

- $z = a+ib$, $\in \mathbb{C}$.

Rq :



$\to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Ecriture $a+ib$ uniq, Ad^t $a+ib = a'+ib'$ Alrs $a=a'$ & $b=b'$.

$\boxed{\text{Def}}$
- $z=a+ib$ ^t forme algébriq.
- a : partie réelle de z $Re(z)=a$ & b : partie imaginaire de z : $Im(z)=b$.

Rq :
- Nb complx z ^t réel qd $Im(z)=0$.
- Nb complx z d^t $Re(z)=0$ ^t imaginaire pur.

Ex : $z_1 = 4-3i$, $Re(z_1)=4$, $Im(z_1)=-3$
$z_2 = 2i\sqrt{3}$, $Re(z_2)=0$, $Im(z_2)=2\sqrt{3}$
$z_3=-5$, $Re(z_3)=-5$, $Im(z_3)=0$

2) Additionner, soustraire & multiplier

→ $\boxed{\text{Ps}}$ opérations ds $\mathbb{R}$ st $\Leftrightarrow$ ds $\mathbb{C}$.

Ex :
- $z \cdot z' = (2-4i)(5-2i) = 10-24i-8 = 2-24i$; $8i^2=-8$.
  $z+z' = 2-4i+5-2i = 7-6i$.
- $$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=4q \\ i & \text{si } n=4q+1 \\ -1 & \text{si } n=4q+2 \\ -i & \text{si } n=4q+3 \end{cases}$$

3) Conjuguer pr ÷ser

« ÷ser, c'est multiplier p l'inverse ».

$\boxed{Q^{H'} \text{ Conjugué}}$

$\boxed{\text{Def}}$ Ex z & z' ds $\mathbb{C}$, avec $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Ex : $(1+2i) \times \dfrac{1}{5}(1-2i) = \dfrac{1}{5}(1-(-4)) = \dfrac{1}{5} \times 5 = 1$.

M ÷ 2 nbr complexes, mltiplie numérateur p/ dénominateur par le conjugué du dénomtr

Ex : $\frac{5+2i}{3-4i} = \frac{(5+2i)\times(3+4i)}{(3-4i)\times(3+4i)} = \frac{15+26i-8}{9-(-16)} = \frac{7+26i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{26i}{25}$.

• $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$

→ Résoudre ds $\mathbb{C}$:
$5z + 2i = (1+i)z - 3$
$\Leftrightarrow 5z - (1+i)z = -3-2i$
$\Leftrightarrow z(4-i) = -3-2i$
$\Leftrightarrow z = \frac{(-3-2i)}{(4-i)} \times \frac{(4+i)}{(4+i)}$
$\Leftrightarrow z = \frac{-10-11i}{17}$.

4) Le conjugué vu de + près

Déf On appelle conjugué du nbr $\boxed{z = a+ib}$, nbr complexe $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

Ex : Résoudre ds $\mathbb{C}$: $2z + i.\bar{z} = 3$,

Idée : Remplacer $z = a+ib$ & $\bar{z} = a - ib$.

$2(a+ib) + i(a-ib) = 3$
$\Leftrightarrow 2a + 2ib + a.i + b = 3$
$\Leftrightarrow \underbrace{2a+b}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(2b+a).i}_{\in \mathbb{C}} = 3 + i\times 0.$

Par unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a :

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{2a+b}_{\in \mathbb{R}} = 3 \\ \underbrace{2b+a}_{\in \mathbb{C}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$.

$S = \boxed{z = 2 - i}$.

P° $\boxed{z.\bar{z} = a^2 + b^2}$

P° $\forall z \in \mathbb{C}$, • $z + \bar{z} = 2 \times Re(z)$
• $z - \bar{z} = 2 \times i \times Im(z)$.

Corollaire • $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
• $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

P° (Caractérisation nbr réels & imaginaires purs). Soit $z \in \mathbb{C}$,

• z réel $\Leftrightarrow \boxed{z = \bar{z}}$

• z imaginaire pur $\Leftrightarrow \boxed{z = -\bar{z}}$.

P₃ 1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ 2) $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$ 3) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

4) $\overline{(\bar{z})} = z$ 5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

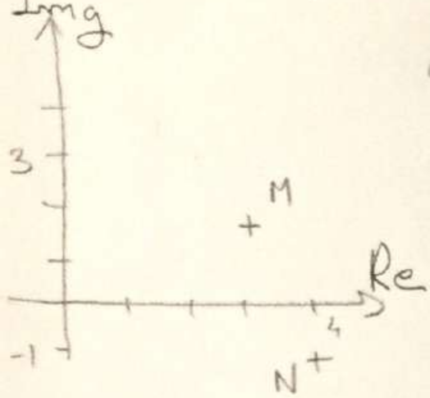
III / Represent° géo

1) Affixe d'1 p^t

Def : · Pln cmplxe : RON $(O, \vec{u}, \vec{v})$

· À tt nbr cmplxe $z = a+ib$ ⟵ A ⟶ p^t $M(a,b)$.

· M ^t p^t image de z & z ^t affixe de M.



Ex : · Le p^t M d'affixe $3+2$ a pr c — $(3,2)$

· Le p^t N d'affixe $4-1$ a pr — $(4,-1)$

⟶ Détrminr ens E ds p^ts d'affixes z, tq $z_2 = \dfrac{i}{z+1}$ s^t réel.

M1 : z ^r Réel ⟺ $z = \bar{z}$.

$\boxed{M_2}$: z ^r réel ⟺ $\text{Img}(z) = 0$.

$z = a+ib$, $\dfrac{i}{a+ib+1} = \dfrac{i}{a+1+ib} \times \dfrac{(a+1-ib)}{(a+1-ib)} = \dfrac{(a+1)i + b}{(a+1)^2 + b} = \dfrac{b}{(a+1)^2+b} + \dfrac{(a+1)}{(a+1)^2+b} \times i$.

$\dfrac{i}{z+1} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{(a+1)}{(a+1)^2+b} = 0$

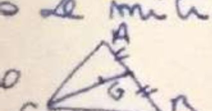
$a+1 = 0$
$a = -1$ $\Rightarrow z = -1 + bi \in \mathbb{R}$.

ccl : Pr $z_2 = -1 + bi$, $b \in \mathbb{R}$, on a $z_2 = \dfrac{i}{z+1}$ réel

⇒ c^t l'ens p^ts images M de drte $x = -1$.

$\boxed{P}$ (Affixe 1 milieu).

· Le milieu I de [AB] a pr affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

·  a pr affixe $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{2}$.

2) Affixe vecteur

Def : A tt nbr complxe, $z = a + i.b$, ←A→ vct $\vec{w}\binom{a}{b}$.
N dit q $\vec{w}$ ᵗ vct img de z, & z ᵗ affixe du vct.

P · S.ᵗ A, B, 2 pᵗˢ d'affixe respct ive z_A & z_B. Vct $\vec{AB}$ a pr affixe $z_B - z_A$
· Vct $k.\vec{w}$ a pr affixe $k.z$.
· Vct $\vec{w} + \vec{w}'$ a pr affixe $z + z'$.

III/ Résolu° 2nd ° ds $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0$ | * Si $\Delta > 0$: 2 racines : z_1 & z_2
* Si $\Delta = 0$: 1 racine : z_0
* Si $\Delta < 0$: ∅ racine ds $\mathbb{R}$

pss'de 2 racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \& \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Démo connaîtr

→ Résolu° ‹q° z^n → racines, factorisa° PS résolu° 2nd °.
R• Si $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0$

IV/ Ce q perd $\mathbb{C}$

* Ds $\mathbb{C}$, il n'y a PS rela° d'ordres : Impo compter 2 nbr complxs n G.P. : $2 + 3i \geq \leq 3 + 2i$
* De ce fᵗ, n ne pᵗ ps d'finir no° signe (⊕ ou ⊖) pr nbr complxe.
* $\sqrt{a}$ ᵗ nbr positif dᵗ carr' fᵗ a ds $\mathbb{R}$.
• N ne pᵗ ps d'finir f $\sqrt{a}$ ds $\mathbb{C}$. (car nbr complxe a ᵗ 2 racines carr's.

Cmplxs ds rctis : Cal distces.

Déf : S.t $z = x + iy$ dp $M(x, y)$ sn p.t imge. Module de z : $|z|$.

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

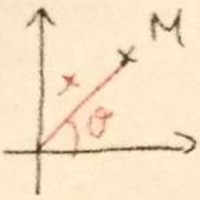
Ps

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$ (z & $\bar{z}$ p.ts imgs symétqs p/ $x'x$)
- $|z| = |-z|$ (z & $-z$ p.ts imgs symétqs p/ $y'y$).

opposé & conjugué.

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ (pr $z \neq 0$).
- $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ Inégalité triangulaire.
- Cal distcs pln complexe : $\boxed{AB = |z_B - z_A|}$

C_{10} "Rtr ∂ pys imaginaire" : Cmplxe PART 2.



$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bullet \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases} \end{array}}$$

$$\boxed{\bullet\ z = r\,(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)}$$

Frme trigonométrique

- r : module de z $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- θ : argument de z. $\quad \arg(z)$.

Ex : Frme trigo ?

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ | $\boxed{M_1}$ $\quad |z_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\bullet\ x = r \cdot \cos\theta$ $\quad$ & $\quad \bullet\ y = r \cdot \sin\theta$

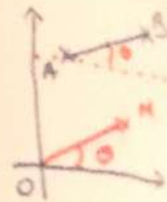
$\Leftrightarrow 1 = 2 \cdot \cos\theta$ $\quad\quad \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

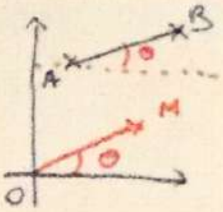
$\boxed{P_5}$ • $AB = z_B - z_A$

• Si $A \neq B$ distincts $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad (2\pi)$.



P5

- $AB = z_B - z_A$
- Si A ^{t} dist$_{a}$ B : $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad (2\pi)$.



Corollaire

- $\boxed{\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{CD}{AB}}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{CD})}$

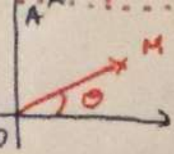
M^x Synthèse

• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Img}(z) = 0$	• $z \in \mathbb{C}$ im pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	• z im pur $\Leftrightarrow -z = \bar{z}$
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = 0$ ou $z = 0$	• z im pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $z = 0$

2

5 • $AB = z_B - z_A$

• Si A ≠ distinct B : $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \ (2\pi)$.



Corollaire

• $\boxed{\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{CD}{AB}}$ • $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{CD})}$

M^x Synthèse

• $Z \in \mathbb{R} \iff \text{Img}(Z) = 0$

• $Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$

• $Z \in \mathbb{R} \iff \arg Z = 0$ ou $z = 0$

• $Z \in \mathbb{C}$ im pur $\iff \text{Re}(Z) = 0$

• Z im pur $\iff -Z = \overline{Z}$

• Z im pur $\iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $Z = 0$

Notation exponentielle :

• $|e^{i\theta}| = 1$; $\arg(e^{i\theta}) = \theta$.

• $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

• $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.

• $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

• Pr $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ Formule de Moivre

Formule Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$

Def : $\boxed{z = r \cdot e^{i\theta}}$ où $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$.

Lois normales

I/ La loi normale centrée & réduite

1) Approximation loi binomiale

Lorsque variable X d'espérance μ & σ, varabile $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ a pr espérance 0.

• Z : *variable centrée réduite associée à* X.

Th: Moivre-Laplace

$\forall\ n \varepsilon N,\ X_n$: *variable aléatoire*, $X \sim \beta(n, p)$ & $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$.

Alors $\forall\ a$ & $b \varepsilon R,\ a < b,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\ e^{\frac{-1}{2}x^2}\ dx$

2) Loi normale $N(0, 1)$

Propriété fonction de Gauss:

•Fonction continue, dérivable & strictement positive sur R

•Aire totale ss courbe vaut 1

•Fonction paire, donc courbe représentative est symétrique par rapport axe ordonnées

Propriété (espérance & variance): pr $N(0, 1)$

Si Z est une variable aléatoire qui suit loi $N(0, 1)$ alors:

• $E(Z) = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 x.\,f(x)\ dx\ +\ \lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a x.\,f(x)\ dx\ = 0$

• Variance donc $\sigma = 1$.

II/ Loi normale G. $N(\mu,\ \sigma^2)$

1) $N(\mu,\ \sigma)$

Def: Dire variable aléatoire suit $N\ (\mu,\ \sigma^2)$ signifie que variable centrée & réduite associée:

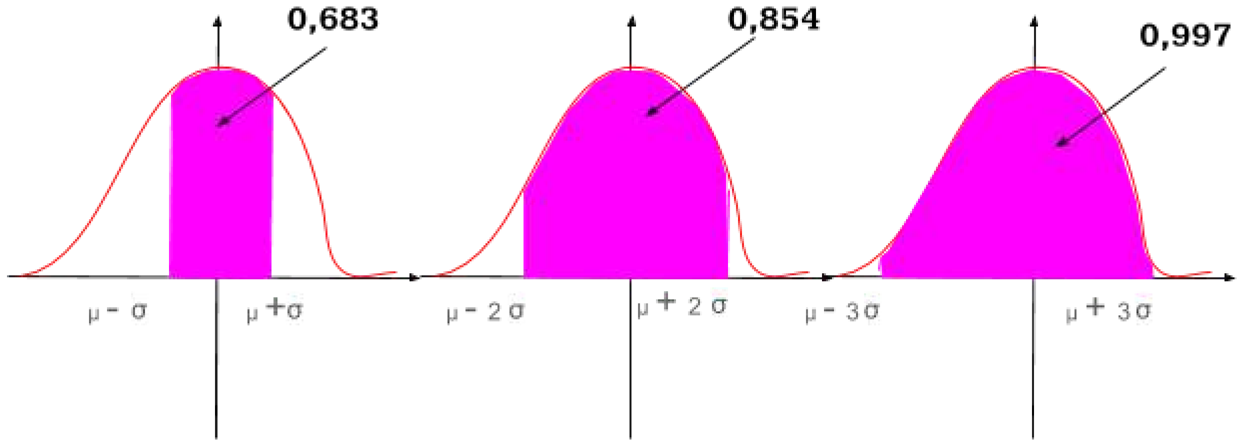
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}\ \sim\ N(0, 1)$$

Propriété

Si variable aléatoire suit loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ alors:

- espérance μ
- écart-type σ

Propriété



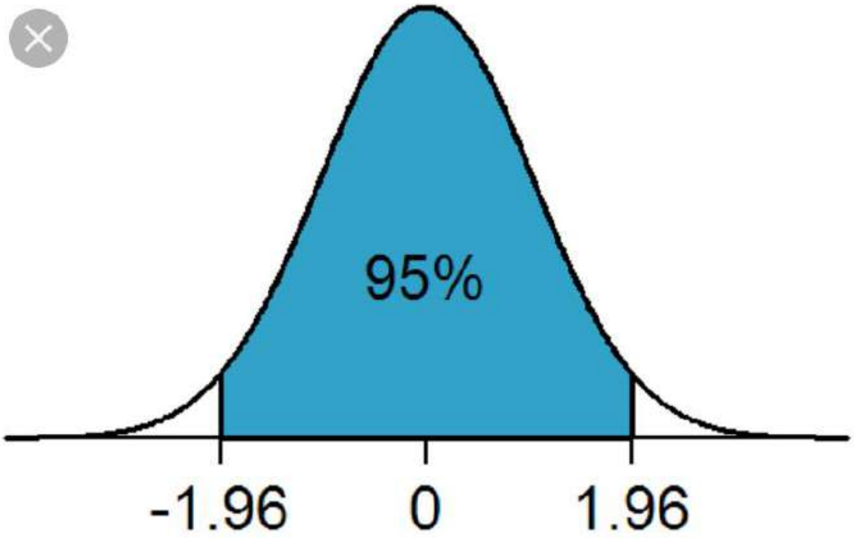
III/ Inverser Loi normale

Th: voir DEMO

- Soit Z variable aléatoire suivant loi $N(0, 1)$, étant donné nbr $\alpha \in [0, 1]$,

$\exists$ *unique* nbr u_α ($u_\alpha > 0$), $\quad P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

calculatrice : Normal Frép OU FracNnormale


95%
-1.96
0
1.96

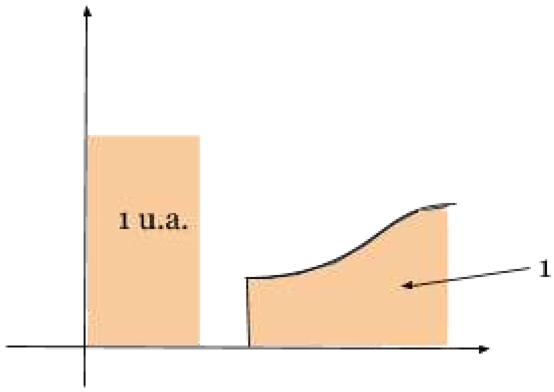
LOIS DE PROBAS À DENSITÉ

I/ Lois à densité des lois continues

Définition 1: Densité de probabilité

On appelle ***densité de probabilité*** sur I toute fonction f définie sur I tq:

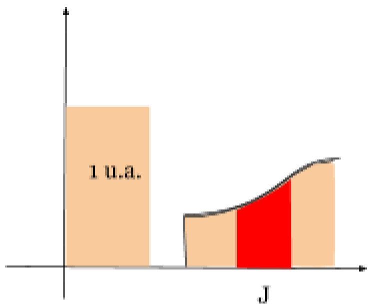
- f est continue sur I
- f est positive sur I
- $\int_I f(x)\ dx = 1$



Définition 2.

Soit f une densité de probabilité sur I. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f *sur* I signifie qu'à tout intervalle I, on associe la probabilité:

$$P(X \varepsilon J) = \int_J f(x)\ dx$$



Définition 3: Espérance mathématiques

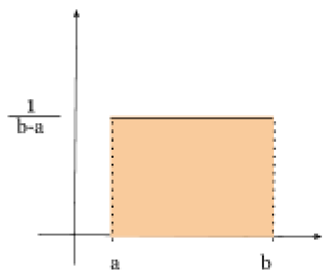
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de densité f *sur* I.
L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, est définie par:

$$E(x) = \int_I x \times f(x)\ dx$$

Définition 4.

Soient a & b, 2 réels tq $a < b$. On dit que la variable aléatoire X suit la ***loi uniforme*** sur l'intervalle $[\,a, b\,]$ si elle admet pr densité de probabilité, la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Définition 6.

Soient X : *variable aléatoire* qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$, l'espérance mathématiques vaut :

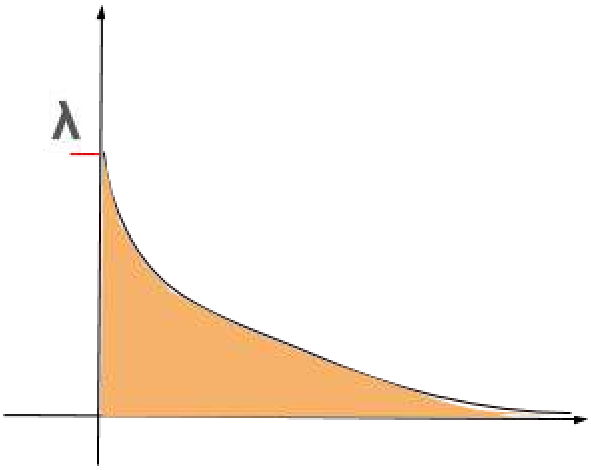
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

II/ Loi exponentielle

Définition 7 : Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire $X \sim \xi(\lambda)$, pour $\lambda > 0$, si elle admet pour densité la fonction f :

$$f(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}$$



Définition 8:

$X \sim \xi(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, α & β ε $\mathbb{R}$ & $\alpha \leq \beta$

- $P(X \leq \alpha) = 1 - e^{-\lambda.\alpha}$
- $P(X \geq \alpha) = e^{-\lambda.\alpha}$
- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = e^{-\lambda.\alpha} - e^{-\lambda.\beta}$

Définition 9: 📌

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ & t, $h > 0$

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit alors qu'une loi exponentielle est une loi de vie sans vieillissement.

Définition 10: 📌📌

$X \sim \xi(\lambda)$ **pour** $\lambda > 0$**,**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

DEMO: P_9 📌

- $P_{X\geq t}(X \geq t+h) = \dfrac{P((X\geq t) \wedge (X\geq t+h))}{P(X\geq t)}$
- $P_{X\geq t}(X \geq t+h) = \dfrac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda.t}}$
- $P_{X\geq t}(X \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)+\lambda.t} = e^{-\lambda.h} = P(X \geq h)$

Preuve: 📌📌 $E(X)$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x.f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x.\lambda.e^{-\lambda.x}\ dx$$

Primitive de $(ax+b).e^{-\lambda x} = G(x)$

$G'(x) = g(x)$ | $G'(x) = a.e^{-\lambda x} + (ax+b)(-\lambda e^{-\lambda x})$

$G'(x) = a.e^{-\lambda x} - (ax+b)(\lambda.e^{-\lambda x})$

$G'(x) = -ax\lambda.e^{-\lambda x} + (a-\lambda b).e^{-\lambda x}$

Par identification: (a,b) = $\left(-1, \frac{-1}{\lambda}\right)$ $\Rightarrow G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right).e^{-\lambda x}$

Donc $\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right).e^{-\lambda x}\right]_0^M$

$$\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left(-M - \frac{1}{\lambda}\right).e^{-\lambda M} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right).e^0$$

$$\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -M.e^{-\lambda M} - \frac{e^{-\lambda M}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

Ch : Logarithme Népérien

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

• Déf : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y>0}$)

• f expon & loga st réciproqs.

• Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$

② $e^{\ln x} = x$

③ $\ln(1) = 0$

④ $\ln(e) = 1$

⑤ $\ln(e^x) = x$.

• Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

• $\boxed{P_s}$ alg-liqs :

• Rela° fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

(!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

C11 : Logarithme Népérien.

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow \boxed{y>0}$)
- f expn & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

$\boxed{P_s}$ alg-liqs :

- Rela° fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

! $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Ch : Logarithme Népérien

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciprogs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- $\boxed{P_s}$ alg-h·q.s :
  - Rela° fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n.\ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

! $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

- $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
- $\log(10^n) = n$. & $\log(10) = 1$.
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Ch 11 : Logarithme Népérien

- Déf : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow \boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- [Ps] alg-liqs :
- Relaᵒ fondmtl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.
  ① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
  ② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
  ③ $\ln(a^n) = n.\ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.
  ④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

(!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

- $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
- $\log(10^n) = n$ & $\log(10) = 1$.
- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
- $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0^-$

1

C11 : Logarithme Népérien

- **Prop** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow \boxed{y > 0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- **Prop** : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

- Ps algébriqs :
- Relat° fondmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n . \ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

(!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

C11 : Logarithme Népérien.

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow \boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Ps alg-liqs :

- Rela° fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n.\ln a \quad , n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

(!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

C11 : Logarithme Népérien.

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0,+\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y>0}$)
- f expon & loga st réciprogs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- $\boxed{P_s}$ alg-liqs :
  - Relaᵒ fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

  ① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

  ② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

  ③ $\ln(a^n) = n.\ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

  ④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

  (!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

- $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
- $\log(10^n) = n$ & $\log(10) = 1$.
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

C11 : Logarithme Népérien

- Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]0, +\infty[$, $\exists$ uniq $y \in \mathbb{R}$, $e^y = x$. Alors $y = \ln x$. ($\Leftrightarrow$ $\boxed{y > 0}$)
- f expon & loga st réciproqs.
- Prop : ① $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
  ② $e^{\ln x} = x$
  ③ $\ln(1) = 0$
  ④ $\ln(e) = 1$
  ⑤ $\ln(e^x) = x$.
- Prop ① $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  ② $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

- $\boxed{P_S}$ alg-liq :

- Rela° fndmntl : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

① $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

③ $\ln(a^n) = n . \ln a$, $n \in \mathbb{Z}$.

④ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

(!) $\ln a^n \neq \ln^n a$.

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

- $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
- $\log(10^n) = n$. & $\log(10) = 1$.
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x . \ln x = 0^-$

C4 : Limites des Suites

P $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n = +\infty}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \quad \alpha \in \mathbb{N}^*}$

Def : Dire s.te (U_n) de r.els ↦ $-\infty$ ⟺ tt intv^{l} du type $]-\infty, 0[$ cont.t ts tms de s.te à p at$_1$ N° N.

Def : D.r s.te (U_n) de r.els ↦ r.el l ⟺ tt intv^{l} **ouvert** cont.t l ts tms s.te p N° N.

"intv^{l} ouvert" ⟺ "intv^{l} cent.r m l" c.à.d $]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$.

P $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \alpha \in \mathbb{N}^*}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0}$

Def : 1 s.te ↦ vs r.l l fini d.t **converg.te** vs l, s.inn^{l} t **d.vg.te**.

- **D.vgte** : • Si $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$ $(U_n = n^2)$
  • ∅ lim $(U_n = (-1)^n)$.

- **Op.r.n° s/ limites** :

Lim Somme

$\lim_{n\to+\infty} U_n$	$\lim_{n\to+\infty} V_n$	$\lim_{n\to+\infty} U_n + V_n$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Lim Produit

$\lim_{n\to+\infty} U_n$	$\lim_{n\to+\infty} V_n$	$\lim_{n\to+\infty} U_n \times \lim_{n\to+\infty} V_n$
l	l'	$l.l'$
$l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$+\infty$	F.I.
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Lim Quotient

$\lim_{n\to+\infty} U_n$	$\lim_{n\to+\infty} V_n$	$\frac{\lim_{n\to+\infty} U_n}{\lim_{n\to+\infty} V_n}$
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
$l\neq 0$	0	$\pm\infty$
0	0	F.I.
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.
$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$

→ Lev'e Indéterminaθ

∘ Factorisaθ ℓ terme + hᵗ ⁰, $U_n = 1000n - n^2 = n^2\left(\frac{1000}{n} - 1\right)$ (lim ↓, lim ↓)

Relaθ Conjugu'e, $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$= \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

II / Th$_s$ compar'son

Th: Soi^t (U_n) & (V_n) 2 s.tes de r'els.

Si : 1) $U_n \geqslant V_n$ (à ℓ at$_{rs}$ N°) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

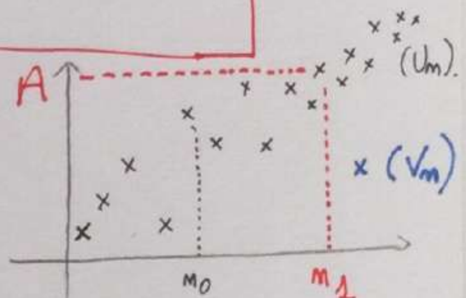
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

DEMO

• ∃ N° n_0 à ℓ dqℓ pr $n \geqslant n_0$. $U_n \geqslant V_n$

• Soi^t $A \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, dc ∃ N° n_1 tq pr $n \geqslant n_1$, $V_n > A$.



Dc pr $N = \max(n_0, n_1)$; on a $U_n \geqslant V_n > A$ pr $n \geqslant N$.

Dc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Th$_2$: Soi^t (U_n) & (V_n) 2 suites de r'els.

Si : 1) $U_n \leqslant V_n$ (à ℓ at$_1$ N°). $\Rightarrow \lim U_n = -\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

Ex $U_n = \underbrace{\sqrt{n^2+3n+8}}_{\oplus} + \underbrace{3n}_{+\infty} \geqslant 3n$; ℓ comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

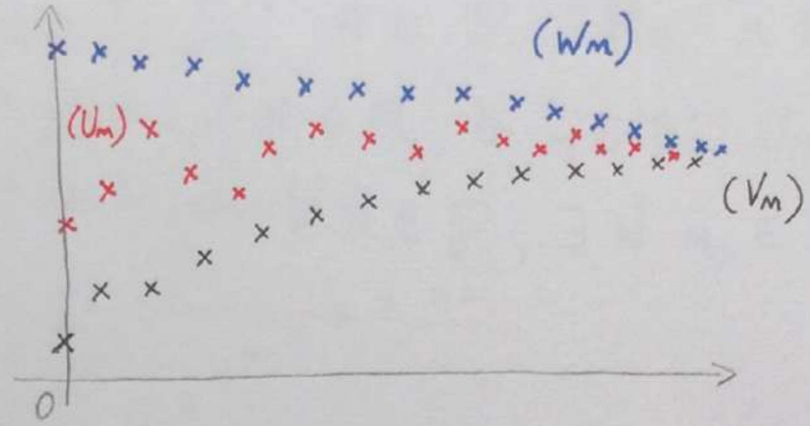
Th gendarmes : Soi^t U_n, V_n, W_n, 3 s.t$_s$ de r'els,

Si (ℓ at$_1$ N°), on a $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ & (V_n) & (W_n) converg^t vrs lim finie ℓ.

1) (U_n) converg =ℓ^t

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

2



Th des gendarmes

Ex : • $U_n = \cos(n) + n$; $-1 \leq \cos(n) \leq 1$; $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{n-1 \leq \cos(n)+n} \leq n+1$$

P comparaison

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$

• $n-1 \leq \cos(n)+n$

$\Big\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

• $T_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 3$; $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n}+3 \leq \frac{(-1)^n}{n}+3 \leq \underbrace{\frac{1}{n}+3}_{\to 3}$$

∘ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+3 = 3$

∘ $-\dfrac{1}{n}+3 \leq \dfrac{(-1)^n}{n}+3 \leq \dfrac{1}{n}+3$

$\Big\}$ P th gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 3$

$$\boxed{\begin{gathered} -1 \leq \cos n \leq 1 \\ -1 \leq \sin n \leq 1 \\ -1 \leq (-1)^n \leq 1 \end{gathered}}$$

III / Cas suites monotones

Th : lim monotone : ① Si s^te (U_n) ↗ & majorée alors elle converge.

② Si s^te (U_n) ↘ & minorée alors elle converge.

(on ne s^t pas d'av^t établir limite)

Th : ① Si s^te ↗ & non-majorée alors elle tend vers $+\infty$.

② Si s^te ↘ & non-minorée alors elle tend vers $-\infty$.

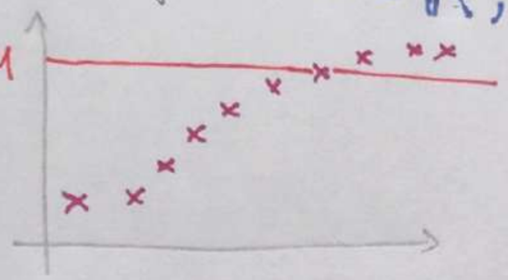
(VR DEMO)

Th : Si (U_n) ↗ & si elle converge vers réel ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:
$U_n \leq \ell$

DEMO ANNEXE

DEMO ♥ : Soit $A \in \mathbb{R}$, Mq $\exists$ N° $N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N$, $U_n > A$.

- Majorée : $\exists M \in \mathbb{R}$, tq $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.
- Non-majorée : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists$ N° $n_0 \in \mathbb{N}$, tq $U_{n_0} > M$.



Dc + $(U_n) \nearrow$, $\forall n \geq n_0$: $U_n > M$.

Dc pr $M = A$, & $N = n_0$, on a bien $U_n > A$.

IV / Cas s·tes arithm·t·qs & géo

P (s·te arithm·tq)

Soit (U_n) s·te arithm·tq de $\begin{cases} \text{raison } r \\ 1^\circ \text{ terme } U_0 \end{cases}$:

- Si $r > 0$ alrs $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alrs $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alrs U_n cte : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$

Annexe ex 18p75

P (s·te géo)

Ex 5

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } q > 1. \\ 1, & \text{si } q = 1. \\ 0, & \text{si } -1 < q < 1. \\ \text{n'adm}^t \text{ ps lim}, & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

DEMO ♥ Pr $q > 1$, ats cas admis.

DEMO ♥

Use in'g^{lt} de Bernoulli : $x \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $(1+x)^n \geq 1 + n.x$.

- ĉ $q > 1$, $\exists\, a > 0$, tq $q = 1 + a$.
- N appl. q^t in'g^{lt} Bernoulli, $q^n = (1+a)^n \geq 1 + n.a$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ (car $a > 0$), & comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Csqces lim t s·te géométrique :

- Déterminer lim s·t géo ($V_n = V_0 . q^n$, $n \in \mathbb{N}$) : th précédent, en tenant compte signe V_0.

$\boxed{18}$ p 73

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_0 = 75 \\ U_{n+1} = 0{,}6\,U_n + 50. \end{cases}$ $\quad U_n < U_{n+1} < 125$

b) m.q s^te u converge vers ℓ.

D'après $U_n < U_{n+1} < 125$, (U_n) $\nearrow$. majorée par 125 } converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

c) M.q ℓ soluᵒ $x = 0{,}6x + 50$

$U_{n+1} = 0{,}6\,U_n + 50$

* $\lim_{n \to +\infty} 0{,}6\,U_n + 50 = 0{,}6\,\ell + 50$ car $\lim U_n = \ell$

* $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$

ℓ unicité de la limite, on a $\ell = 0{,}6\,\ell + 50$

$\ell = \frac{50}{0{,}4} = 125.$

Rq 1) Soit $\boxed{V_n = U_n - 125}$

V_n s^te géo de raison $\begin{cases} q = 0{,}6 \\ V_0 = -50 \end{cases}$

2) $V_n = V_0 \cdot q^n$

$V_n = 50.(0{,}6)^n$

3) $U_n = -50\underbrace{(0{,}6)^n}_{\to 0} + 125$ car $-1 < 0{,}6 < 1$

4) N m d'd^t $\lim_{n \to +\infty} U_n = 125$

bornées

... aux exercices

16 Exercice résolu Étudier une suite récurrente

u est la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = 1{,}4u_n - 0{,}05u_n^2$$

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.
Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 8$.

c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Solution

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1x$.
Sur $[0\,;8]$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $[0\,;8]$.

- $1{,}4 - 0{,}1x > 0$ pour $x < 14$.

b) **1^re étape** (initialisation) :
$u_0 = 6$ et $u_1 = 1{,}4 \times 6 - 0{,}05 \times 6^2 = 6{,}6$ donc $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 8$.

2^e étape (hérédité) :
On considère un nombre entier naturel k pour lequel $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 8$ (hypothèse de récurrence) et on montre qu'alors $0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 8$.
f est strictement croissante sur $[0\,;8]$, donc de $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 8$ on déduit que $f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(8)$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 8$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Donc $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$. De plus $f(0) = 0$ et $f(8) = 8$.

Conclusion : Pour tout nombre entier naturel n, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 8$.

c) D'après **b)** la suite u est croissante et majorée par 8, donc elle converge vers un nombre réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 8$.
Or $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} (1{,}4u_n - 0{,}05u_n^2) = 1{,}4\ell - 0{,}05\ell^2$ donc on en déduit par unicité de la limite d'une suite que $\ell = 1{,}4\ell - 0{,}05\ell^2$.
Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 8$.
De plus u est croissante donc ℓ est un majorant de la suite.
Donc $\ell = 8$ et la suite u converge vers 8.

- On a résolu l'équation $0{,}05x^2 - 0{,}4x = 0$, $x(0{,}05x - 0{,}4) = 0$ d'où $x = 0$ ou $x = \frac{0{,}4}{0{,}05} = 8$.

17 Exercice résolu Démontrer une propriété des suites non majorées

u est une suite croissante et non majorée.
Démontrer que la suite u a pour limite $+\infty$.

Solution

- u est non majorée, c'est-à-dire que **pour tout nombre réel A, il existe un rang n_0 pour lequel $u_{n_0} > A$.**
- u est croissante, donc pour tout nombre entier naturel $n \geqslant n_0$,

$$u_n \geqslant u_{n_0} > A$$

- Donc, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les u_n à partir du rang n_0.
Ceci pour tout intervalle $]A\,;+\infty[$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Logique
- Noter la négation de « u est majorée ».

Pour s'exercer

18 u est la suite définie par $u_0 = 75$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 50$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_n < u_{n+1} \leqslant 125$.

b) En déduire que la suite u converge vers un nombre réel ℓ.

c) Expliquer pourquoi ℓ est solution de l'équation $x = 0{,}6x + 50$. En déduire la limite de la suite u.

19 u est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

a) Démontrer que pour tout n, $u_n > 0$ et en déduire que la suite u est croissante.

b) Montrer que si u est majorée, alors elle converge vers un nombre réel négatif.

c) Montrer que u n'est pas majorée et déterminer sa limite.

$\mathcal{E}_x$ 5 :

1- $U_n = 5(\sqrt{2})^n$

▸ $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \quad (5 > 0).$

2- $U_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$-1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$

$U_n = 5(-2)^n$

$-2 < -1 \Rightarrow \lim (-2)^n = \times$

n'admt pas lim

$\Rightarrow (U_n)$ n'admt pas de limite.

$\mathcal{E}_x$ 7 $(U_n), n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{2}{7}\right)^p = \left(\frac{2}{7}\right)^0 + \left(\frac{2}{7}\right)^1 + \left(\frac{2}{7}\right)^n.$

$= 1 + q^1 + \dots + q^n$

$\rightsquigarrow$ converge ? $\lim_{n \to +\infty} U_n$?

$\boxed{= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

$= \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}}$

$= \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \cdot \frac{7}{5}.$

$\cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} = 0 \quad \left(\text{car } -1 < \frac{2}{7} < 1\right)$

Dc $\lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} = 1.$

Dc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{7}{5} \quad$ (opéra° limites).

C_1 Limites de suites

I/ Lim d'1 suite

1) Lim ∞ie

Ex intro : $U_n = -n^2 + 1000n$.

Il semble q

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.
$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 999 \\ U_2 = 1996 \\ U_{10} = 9900 \\ U_{50} = 47\,500 \\ U_{500} = 250\,000 \end{cases}$

semble q

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.
$\begin{cases} U_{501} = 249\,999 \\ U_{900} = 90\,000 \\ U_{10k} = -90M. \end{cases}$

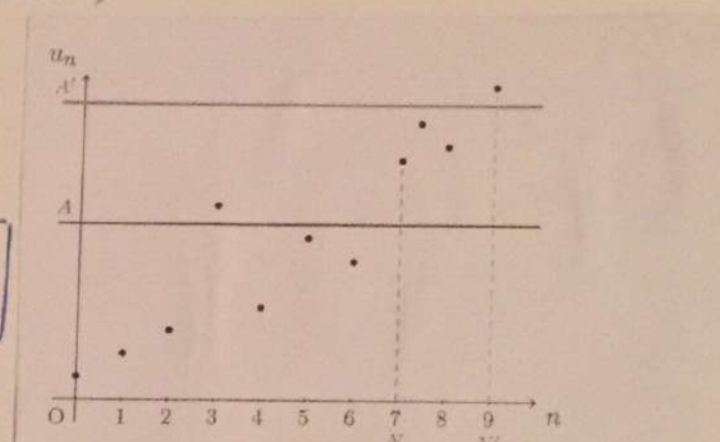
Déf : Dire s-te de r'el $(U_n) \mapsto +\infty$ <=> ∀ intervalle du type $]A, +\infty[$ contient ts termes de la s-te (U_n) à partir certain rang N.

Ad-t : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists$ rg N à parti duquel $U_n > A$.

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n > A$

Notations : On dira q $(U_n) \mapsto +\infty$ lorsq $n \mapsto +\infty$, on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.}$$



Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

1. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?
2. Qu'affiche l'algorithme lorsque l'on saisit en entrée :
   - $A = 10^8$?
   - $A = 10^{20}$?
3. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Algorithme

Entrée :
Saisir la valeur de A
Initialisation :
u prend la valeur 0
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que $u \leqslant A$
  n prend la valeur $n+1$
  u prend la valeur n^2
Fin Tantque
Sortie :
Afficher n

1- $U_n = n^2$

$0 \to U$; $0 \to N$ $\to U_0$

T- q $U < A$
| $n \to n+1$
| $u \to n^2$

→ L'algorithme demande nb A à user & renvoie le + pt $N \in \mathbb{N}$ n_0 tq $U_{n_0} > A$.

(Ds ct Algo, n'est pas si U_n s-vte, $\forall n \geq n_0$ st r aussi > A.

1) $A = 10^3 \to 32$; $A = 10^6 \to 1001$

3) • Dmo $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Mq $\forall A \in \mathbb{R}^*$, on pt tvr N tq $U_n > A$, $\forall n \geq N$.

• Sot $A > 0$:

Sot N, le 1° ntr $> \sqrt{A}$.

Pour $n > A \geq \sqrt{A}$, a f x^2 ↑ s $[0, +\infty[$.

Gn a $n^2 > A$

$U_n > A$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

• A cnntre lim qq stes de réfs.

P

- $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty}$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

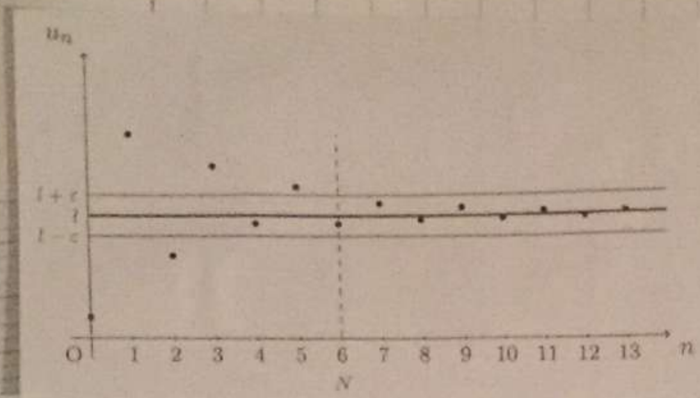
Def : Dire ste (U_n) de r'els ↦ $-\infty$ $\Leftrightarrow$ tt itvll du type $]-\infty; ...$ contient ts tms de la suite à ptr ct1 N° N.

2) Lim finie

Def : Di ste (U_n) de r'els ↦ r'el ℓ $\Leftrightarrow$ tt itvll ouvrt contnt ℓ ts tms ste à ptr ct1 N° N.

Rq : N pt rmplcr "itvll ouvrt" p "intvll cntr s ℓ", ctd $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$.

1sn coste



<u>Notations</u> :

Pr dire q $(U_n) \mapsto$ vers réel ℓ,
n note :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} U_n = \ell.$$

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |U_n - \ell| < \varepsilon.$

Exercice 2

Considérons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

1. Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Démontrer ou infirmer cette conjecture.
3. Écrire un algorithme qui, pour une valeur r entrée par l'utilisateur ($r \in \mathbb{R}^{+*}$), trouve le plus petit entier N à partir duquel (u_n) se fait emprisonner dans l'intervalle de centre 1 et de rayon r.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \dfrac{n+1}{n}$

1- <u>Cnjctre</u> Il smbl (U_n) tende vers 1

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ 1er tube

2- Soit $\varepsilon > 0$ qlcq,

$$1 - \varepsilon < U_n < 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (0 <) \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{car } n > 0.$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{car } \frac{1}{x} \searrow \text{ s }]0, +\infty[$$

En notant $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, n vérifie déf.

$\boxed{P}$ (lim "réf/∞")

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

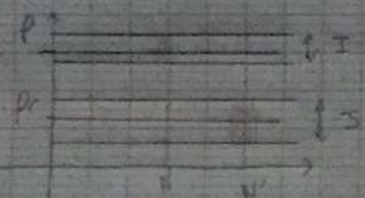
3) (Conv & div)ergences

Déf : 1 s^te q^i ↦ vrs 1 réel ℓ fini ^t d^t convergente vers ℓ.
S^inon, ^elle ^est divergente.

⇒ 2 types s^tes div^gtes : * c^elles q^i ^ont limite ∞ $(U_n = n^2)$
* c^elles q^i n'^ont PS limite. $(U_n = (-1)^n)$

Th : Si 1 s^te converge, alors sa lim ^est $\boxed{\text{unique}}$.

$\boxed{\text{DEMO}}$ P absurde, supposons q (U_n) adm^ette 2 limites distinctes ℓ & ℓ'.



- $\ell \neq \ell'$, ∩ choisit 2 intervalles I & J contenant respect^ivement ℓ & ℓ', t.q. $I \cap J = \emptyset$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$: dc $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N$, $U_n \in I$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell'$: $\exists\, N' \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N'$, $U_n \in J$.

⇒ Impossible car $I \cap J = \emptyset$ (vu schéma)

Exo : • Mq (U_n) converge ^r tend ...
• R^c pq ... vraie ?

II / Opérations sur limites

Théorème 1 (Limite d'une somme)

LIMITE D'UNE SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

$+\infty - \infty$ Indéterminé

Ex : $U_n = n^2 + \frac{1}{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

P S, $\lim U_n = +\infty$.

Théorème 3 (Limite d'un produit)

LIMITE D'UN PRODUIT

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ on applique la règle des signes
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ on applique la règle des signes

Ex : $U_n = e^n\left(\frac{1}{n} - 2\right)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2$ car $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ (produit)

Exo : • Mq (U_n) cvge r bnée
• R'c pq "..." vraie ?

II / Opéraθs de limites

Théorème 1 (Limite d'une somme).

LIMITE D'UNE SOMME		
$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FORME INDÉTERMINÉE

Ex : $U_n = n^2 + \frac{1}{n}$.

• $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

P S, $\lim U_n = +\infty$.

Théorème 2 (Limite d'un produit).

LIMITE D'UN PRODUIT		
$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$
l	l'	$l\times l'$
$l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (en respectant la règle des signes)
0	$\pm\infty$	FORME INDÉTERMINÉE
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (en respectant la règle des signes)

Ex : $U_n = e^n\left(\frac{1}{n} - 2\right)$

• $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2$ car $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dc : $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ (produit)

Théorème 3 (Limite d'un quotient).

Limite d'un quotient		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	0	$\pm\infty$ (en respectant la règle des signes)
0	0	Forme Indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme Indéterminée
$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$ (en respectant la règle des signes)

Ex :

$U_n = \frac{-4}{n^2+n}$;

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 = -4$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$.

dc d'ap. r. sr limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Exercice 1

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites définies ci-dessous sur $\mathbb{N}$:

1. $u_n = n^2 + 3\sqrt{n} - 60$;
2. $v_n = \frac{-5}{2n+7}$;
3. $w_n = 1000n - n^2$;
4. $s_n = \frac{5+2n}{3+n^2}$;
5. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
6. $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$
7. $y_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n+2}$.

Cex : ... $\lim_{n\to 0}$ ... $\lim_{n\to+\infty}$

$U_n = \frac{1}{n} \to 0 \mid V_n = n \to +\infty$

$U_n \cdot V_n = \frac{1}{n} \times n = 1 \to 1$.

⇝ Levée d'indétermination

• $\boxed{\text{Factoriser}}$ le terme de + haut degré.

Factorisation

Méthode 1

$U_n = 1000n - n^2 = n^2\left(\frac{1000}{n} - 1\right)$

• $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{1000}{n} - 1 = -1$ Dc $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1k}{n} - 1\right) = -\infty$

car $\frac{1k}{n} \to 0$ & opération sur limites

Méthode 2

Relation Conjuguée.

$S_n = \frac{2n+5}{n^2+3}$ ⊃

• $\lim_{n\to\infty} 2n+5 = +\infty$

• $\lim_{n\to\infty} n^2+3 = +\infty$

] & opération sur les limites

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+5}{n^2+3} = FI$.

$\boxed{\text{Factoriser}}$ $S_n = \frac{2n+5}{n^2+3} = \frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\frac{5}{n}+2}{n\left(\frac{3}{n^2}+1\right)}$

$\frac{5}{n}+2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

$\frac{3}{n^2}+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$n \to +\infty$

& opération sur limites.

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{+\infty} \to 0$.

F.I.

Méthode

Rel° conjuguée

$$t_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$t_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$t(n) = \frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$t(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$

$\Big\}$ Rg opéra° limites $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

Preuve : ... | raison : x ,

$$U_n = U_0 + nx \ , \ n \in \mathbb{N}$$

→ On conclue fct° ... signe de x.

2) Suite géométrique

Propr :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} \underline{+\infty} & , \text{ si } q > 1. \\ 1 & , \text{ si } q = 1.. \\ \underline{0} & , \text{ si } -1 < q < 1. \\ \text{n'admet pas de limite} & , \text{ si } q \leqslant -1. \end{cases}$$

Démo : ♥ Pr $q > 1$, autres cas admis.

N use inégalité de Bernoulli :) Démo p. l'exercice C_2.

$\forall x > 0$ ($\in \mathbb{R}$), $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$).

- Comme $q > 1$, $\exists\, a > 0$ tq $\underline{q = 1 + a}$.
- N appliquant inégalité Bernoulli, on a : $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$, dc p. comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Conséquences : (limites suite géométrique).

- Pr déterminer lim suite géométrique du type $V_n = V_0 \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}$, on use th précédent, n tenant compte signe V_0.

II / Th$_s$ de comparaison

Th : Soit (U_n) & (V_n) 2 suites de réels.

Si : 1) $U_n \geq V_n$ (à p^{tir} ct$_{ss}$ rang)

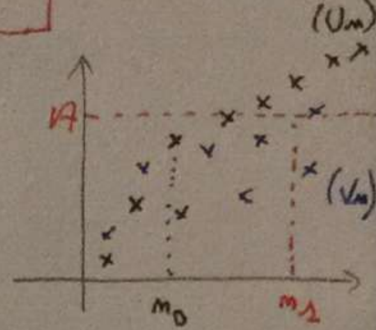
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$

Demo • $\exists$ N° n_0 à p duq^l p^r $n \geq n_0$, $U_n \geq V_n$.

• Soit $A \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, dc $\exists$ N° n_1 t$_q$ p^r $n \geq n_1$, $V_n > A$.



Dc p^r $N = \max(n_0, n_1)$; on a $U_n \geq V_n > A$ p^r $n \geq N$

Dc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Th 2 : Soit (U_n) & (V_n) 2 suites de réels.

Si : 1) $U_n \leq V_n$ (à p ct$_1$ N°)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty}$

Exos : 53, 54, 55 p52.

$\boxed{53}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \underbrace{\sqrt{n^2+3n+8}}_{+} + 3n \geq 3n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ Dc p comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

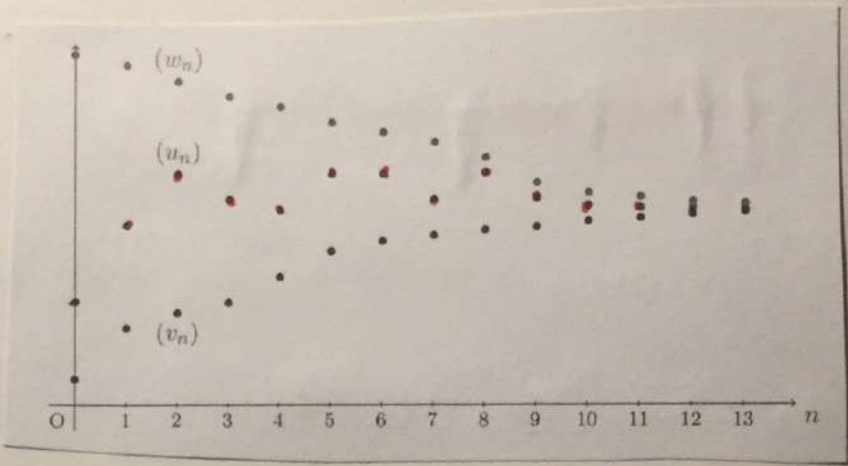
Th gendarmes : Soit U_n, V_n, W_n, 3 s^{tes} de réels

Si (à p ct$_1$ N°), on a $\boxed{V_n} \leq U_n \leq \boxed{W_n}$ & (V_n) & (W_n) converg^t vers m̂ lim finie ℓ,

alors 1) (U_n) converge $=^{\text{et}}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Th gendarmes : Soit U_n, V_n, W_n, 3 suites de réels,
Si (P ct N°), on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ & (V_n) & (W_n) convergent vers même limite
Alors 1) (U_n) converge $= \ell$.
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \ell$.



Ex 2

1- $V_n = \cos(n) + n$, $n \in \mathbb{N}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. $\big)+n$

$$\boxed{n-1 \leq \cos(n)+n} \leq n+1 .$$

P comparaison,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$
- $-1+n \leq \cos(n)+n$

$\Big\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2- $V_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

On a

$$-1 \leq \sin(\cdot) \leq 1$$
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$
$\big) \div n,\ n > 0$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$
- $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

$\Big\}$ P th des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

3- $T_n = \frac{(-1)^n}{n} + 3$, $n \in \mathbb{N}^*$

G_n a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \div n \text{ car } n > 0$$
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
$$-\frac{1}{n} + 3 \leq \frac{(-1)^n}{n} + 3 \leq \frac{1}{n} + 3.$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} + 3 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} + 3 = 3.$
- $\frac{1}{n} + 3 \leq \frac{(-1)^n}{n} + 3 \leq \frac{1}{n} + 3$

D'aps th gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 3.$

A Retenir :

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$
$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$
$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

r. ~ ex.

III / Les suites monotones

Th. (lim monotone) : 1) Si s. te (U_n) ↗ & majorée alrs elle converge.

2) Si s. te (U_n) ↘ & minorée alrs elle converge.

Rq : Ds ces situaθs, on ne sait ps d. ict. établir la limite.

Ex 4 : (U_n), $n \in \mathbb{N}^*$; concaténaθ nb premiers

nb Erdös

$U_1 = 0,2$
$U_2 = 0,23$
$U_3 = 0,235$
$U_4 = 0,2357$
$U_5 = 0,235711$
$U_6 = 0,23571113$

→ U_n converge

- On constate $U_n \leq U_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n$ ↗
- De façon évidente, on a bien que $U_n \leq 0,3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dc elle est majorée.

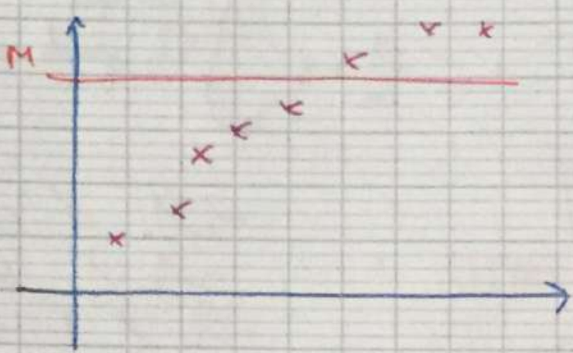
U_n { • ↗ • majorée $\Rightarrow U_n$ converge.

• **Th** : S· s.te $\nearrow$ & non-majorée, alors elle td vers $+\infty$.

Déf lim $+\infty$. (**Démo** : ♥ Soit $A \in \mathbb{R}$,
Mq $\exists$ N° $N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N$, $U_n > A$.

▸ Majorée : $\exists M \in \mathbb{R}$, tq $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.

▸ Non-majorée : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists$ N° $n_0 \in \mathbb{N}$, tq $U_{n_0} > M$.



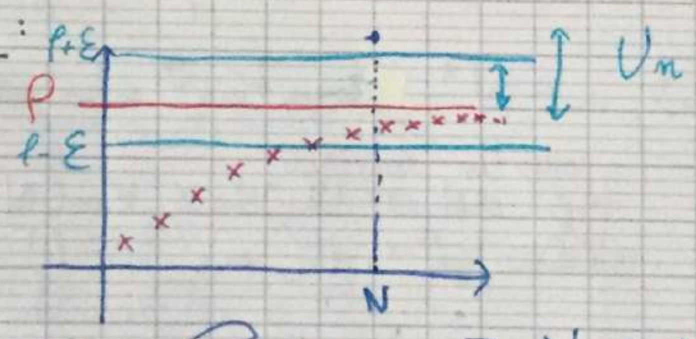
Dc +, $(U_n) \nearrow$, $\forall n \geq n_0$, $U_n > M$.

Dc pr $M = A$, & $N = n_0$, on a bien $U_n > A$.

→ Th similaire : • **Th** : S· s.te $\searrow$ non minorée, alors elle td vers $-\infty$.

• **Th** : Si $(U_n) \nearrow$, & si elle converge vers réel ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:
$U_n \leq \ell$ (ts termes s.te st + pt, ℓ).

Démo :



$\varepsilon = \frac{U_n - \ell}{2}$.

Raisonnt p absurde : Supposons $\exists N \in \mathbb{N}$, tq $U_n > \ell$.

∘ Px $\varepsilon = \frac{U_m - \ell}{2}$, Mq$_{\wedge}$ $U_m \notin \left]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon\right[$.
pr $m \geq N$

▸ Mq $U_m > \ell + \varepsilon$ pr $m \geq N$.

$\Leftrightarrow U_m > \ell + \frac{U_m - \ell}{2}$

$\Leftrightarrow U_m > \frac{U_m}{2} + \frac{\ell}{2} > \ell$.

On sait $U_m > \ell$

$\Leftrightarrow \frac{U_m}{2} > \frac{\ell}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{U_m}{2} + \frac{\ell}{2} > \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{U_m}{2} + \frac{\ell}{2} > \ell$.

Or, $U_m \nearrow$ dc pr $m \geq N$

$U_m \geq U_N > \ell$ $\blacksquare$

$\Rightarrow$ Cela contredit def CV.

IV / Cas S-tes arithm-tqs & géo

1) S-te arithm-tq

$\boxed{P}$ Soit (U_m) s-te arithm-tq de raison r, 1° terme U_0 :

∘ Si $r > 0$ alors $\lim_{m \to +\infty} U_m = +\infty$

∘ Si $r < 0$ alors $\lim_{m \to +\infty} U_m = -\infty$

∘ Si $r = 0$ (U_m) cste ($\lim U_m = U_0$).

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n+3}$,

Sachant que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$$n - 1 \leq \cos(n) + n \leq n + 1$$

$$\frac{n-1}{n+3} \geq \frac{\cos(n) + n}{n+3} \geq \frac{n+1}{n+3}$$

car $\frac{1}{x}$ est ↘ sur $]0, +\infty[$.

Idem

$\frac{n+1}{n+3}$

$n+3 > 0$.

0,7/

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n-1}{n+3}$ est une forme indéterminée.

$\dfrac{n+1}{n+3} = \dfrac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\cancel{n}\left(\frac{3}{n} + 1\right)}$; soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \cancel{n}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = +\cancel{\infty}$ 1

$\lim\limits_{n \to +\infty} \cancel{n}\left(\frac{3}{n} + 1\right) = +\cancel{\infty}$ 1

Vérifie à la calculatrice !

Cohérent ?

Par le théorème des gendarmes,

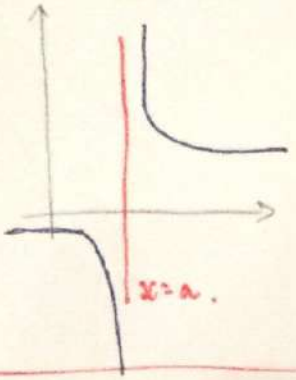
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n) + n}{n+3} = +\cancel{\infty}$ 1 !

C_7 : Limites de $f^{\circ}s$

- Id règles lim suites. (Vi Th compa & gendarmes).

- $D : y = \ell$ ᵗ asymptote horiz^tle à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ lsq $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$.

Déf : $a \in \mathbb{R}$,
$D : x = a$ ᵗ asymptote verti^cle à $\mathcal{C}_f$, lsq $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ∪ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



- Levée FI :
  - Factoriser ℓ terme + haut°
  - Q^té conjuguée
  - Nbr d'riv' : tx d'accroiss^t.

- Lim f composée : Si^t v : f déf sur J, s^t u : f déf sur I, $\forall x \in J$, $u(x) \in J$.
Si a, b, c 3 réels ou $\pm\infty$.

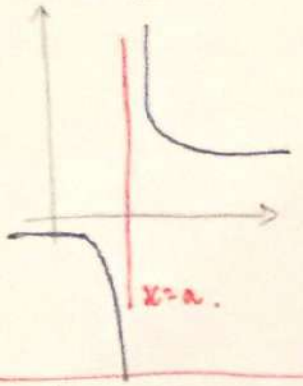
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x \to a} \overbrace{u(x)}^{X} = b \\ \text{Si } \lim\limits_{X \to b} v(X) = c \end{array}\right\} \text{ alors } \lim_{x \to a} v(u(x)) = c \ \cup \ \lim_{x \to a} v \circ u(x) = c .$$

C_7 : Limites de f^s

- $\cong$ règles lim suites. (V_r Th compa & gendarmes).

- $D : y = \ell$ ^{t} asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ lsq $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$.

Déf : $a \in \mathbb{R}$,
$D : x = a$ ^{t} asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$, lsq $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\cup$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



- Levée FI : • Factoriser $_\ell$ terme + haut $°$
  • $Q^{té}$ conjuguée
  • Nbr d'rivé : tx d'accroisst.

- Lim f composée : Si ^{t} v : f def sur J, si ^{t} u : f def sur I, $\forall x \in J$, $u(x) \in J$.
Si a, b, c 3 réels ou $\pm\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x \to a} u(x) = b \quad (X) \\ \text{Si } \lim\limits_{X \to b} v(X) = c \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c \quad \cup \quad \lim\limits_{x \to a} v \circ u\,(x) = c.$$

- Lim f xponent^{ll} :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} x . e^x = 0$.

DEMO

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

$\boxed{\text{DEMO}}$ ⇒ Idée : comparer $\frac{e^x}{x}$ à f bien choisie pour utiliser th comparaison.

Soit g def $[0,+\infty[$, $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$.

$g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\times 2x$

$g'(x)=e^x-x$.

• Vu précédemment, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$, dc $g'(x)>0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	1 ↗	

• $g(0)=1$ & g ↗ sur $[0,+\infty[$ dc $x\in[0,+\infty[$,
$g(x)\geq 1>0$.

dc $e^x-\frac{1}{2}x^2>0$
$\Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2}x^2$
$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x}>\frac{1}{2}x$, $x\in]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$, dc p th de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

$\boxed{\text{DEMO}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = ?$

Idée : changement de variable.

On pose $X=-x$, dc $x=-X$, $x.e^x=-X.e^{-X}=\frac{-X}{e^X}=\frac{1}{\frac{e^X}{X}}$

• Si $x\to-\infty$ alors $X\to+\infty$ (car $X=-x$).

• Or $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=0$ dc $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0$

DEMO : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=?$

Idée : Tx accroissement.

$\frac{e^x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

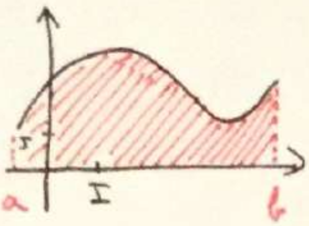
or $f(x)=e^x$ dc $f'(0)=1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

DEMO

C12 : Intégration

Déf : Soit f continue et positive sur $[a, b]$. L'intégrale de f de a à b est l'aire (en u.a) du domaine D délimité par $\mathcal{C}_f$, axe des abscisses, $x=a$, $x=b$.



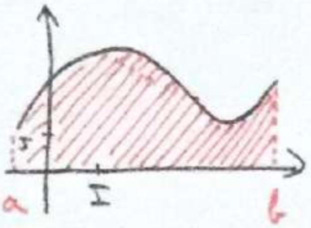
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} = \int_a^b f(t)\,dt.$$

• Dérivabilité fonction "aire" :

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}.$$

C12 : Intégration

Déf : Soit f continue & positive sur $[a, b]$. L'intégrale de f de a à b est l'aire (en u.a) du domaine D délimité par $\mathcal{C}_f$, axe des abscisses, $x=a$, $x=b$.



$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} = \int_a^b f(t)\,dt.$$

- **Dérivabilité f "aire"** : $$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

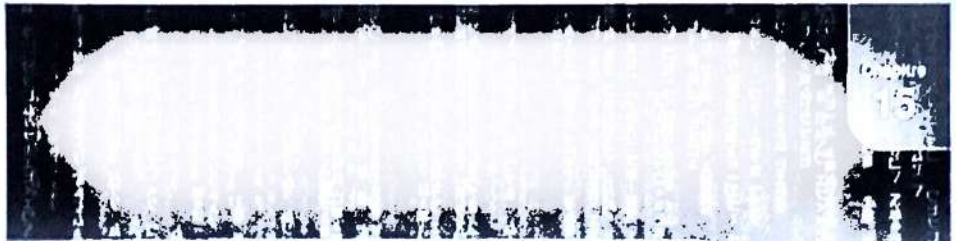
- **Th** : Soit f continue & positive sur $[a, b]$ alors f def $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, f dérivable sur $[a, b]$.
$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

- **Th** : Toute f continue sur I admet des primitives.

- **Prop** : Soit f continue & positive sur $[a, b]$ & F primitive de f. $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Déf : Soit f continue sur I, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $\in I$. L'intégrale de a à b est $F(b) - F(a)$ où F primitive de f.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b}$$



GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

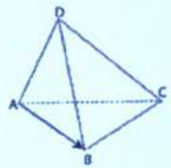
1 VECTEURS DE L'ESPACE

1.1 Notion de vecteurs

Définition 1 (Vecteur).

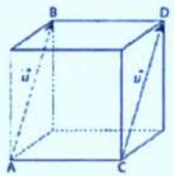
On étend à l'espace la notion de vecteur vue dans le plan.

- À toute couple $(A\,;\,B)$ de points de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la *translation* qui transforme A en B.
- Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.



Propriété 2 (Égalité de deux vecteurs).

- Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les *représentants* d'un même vecteur que l'on peut noter $\vec{u}$.
- Pour tout point E de l'espace et tout vecteur $\vec{v}$, il existe un unique point F tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{v}$.

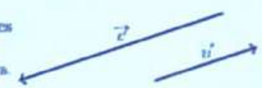


Les propriétés vues pour les vecteurs dans le plan (addition, multiplication par un réel, relation de Chasles...) restent valables pour les vecteurs de l'espace.

1.2 Vecteurs colinéaires

Définition 3 (Vecteurs colinéaires).

- Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel t tel que $\vec{u} = t\vec{v}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

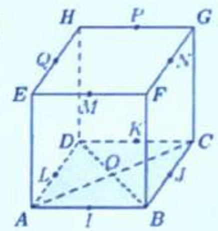


- Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.
- Si $\vec{u} = t\vec{v}$ avec $t > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de *même sens*.
- Si $\vec{u} = t\vec{v}$ avec $t < 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de *sens contraire*.

Exercice 1

On considère un cube $ABCDEFGH$. Les points marqués sur les arêtes du cube sont les milieux de celles-ci. O est le centre de la face $ABCD$.

Compléter les égalités suivantes avec les points de la figure.

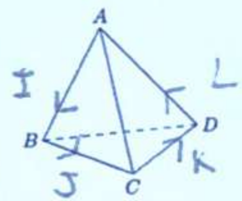


1. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN}$
4. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$
5. $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
6. $\overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{LO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{AE}$

Exercice 2

On considère un tétraèdre $ABCD$. On appelle I, J, K et L les points définis respectivement par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$



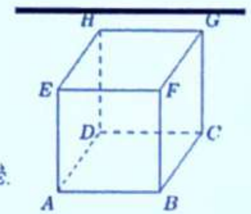
1. Placer I, J, K et L sur la figure ci-contre.
2. a. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.
3. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan $(IJKL)$.

Exercice 3

Soient le cube $ABCDEFGH$ et J le centre de la face $DCGH$.

Soient P et Q définis par :

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$



Soient I et K les milieux respectifs de $[AE]$ et de $[PQ]$.

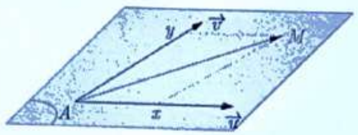
1. Compléter la figure ci-contre.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ puis $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

2 Caractérisation d'un plan - Vecteurs coplanaires

2.1 Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires

Théorème 4.

Soit A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires*.
L'ensemble des points M de l'espace tels que
$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et de *vecteurs directeurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



- On dit que $\overrightarrow{AM}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de ce plan.
- Un plan est totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

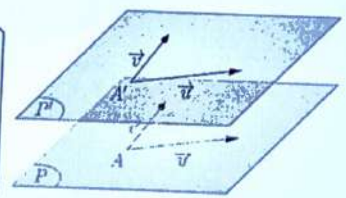
Preuve

Soit P le plan passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est donc un repère de P.
  Si M est un point du plan P alors il a des coordonnées dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Notons $M(x; y)$.
  Par définition des coordonnées de M, on a alors $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Réciproquement, soit M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
  Soit le point N du plan P de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Par définition des coordonnées, on a $\overrightarrow{AN} = x\vec{u} + y\vec{v}$. D'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$.
  Il s'en suit que $M = N$ et donc que M appartient au plan P.

Propriété 5.

Soient A et A' deux points de l'espace et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Le plan P passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le plan P' passant par A' et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *parallèles*.



Preuve

Indication : Soient d_1 la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, d_2 la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$, d'_1 la droite passant par A' et de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'_2 la droite passant par A' et de vecteur directeur $\vec{v}$.
Utiliser un théorème du cours « Droites et plans de l'espace ».

Exercice 4

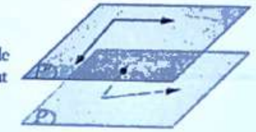
On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1. Démontrer que les points A, E et F ne sont pas alignés.

2. a. i. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   ii. En déduire que $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur directeur du plan (BCD).
   b. Prouver de la même manière que $\overrightarrow{AF}$ est aussi un vecteur directeur du plan (BCD).
   c. Démontrer que les plans (BCD) et (AEF) sont parallèles.

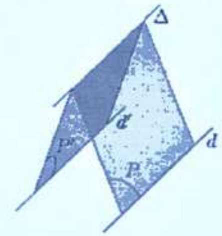
Si deux plans ne sont pas définis à partir du même couple de vecteurs directeurs, on ne peut pas en déduire qu'ils ne sont pas parallèles.



Exercice 5 *Démonstration du théorème du toit*

Théorème 6 (du toit).

Soient deux droites d et d' parallèles. Soient P un plan contenant d et P' un plan contenant d'. Si P et P' sont sécants en Δ alors la droite Δ est parallèle à d et à d'.



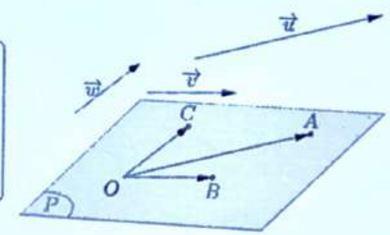
Preuve

1. Justifier que si d et d' sont confondues alors $d = d' = \Delta$.
2. On suppose que d et d' ne sont pas confondues.
   Soit A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d.
   Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ.
   a. En supposant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, justifier que P est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b. En déduire que P et P' sont parallèles.
   c. En conclure que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   d. Terminer la démonstration.

2.2 Vecteurs coplanaires

Définition 7 (Vecteurs coplanaires).

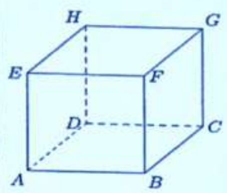
Dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



7 Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan

Exercice 6
On considère un cube $ABCDEFGH$.

Questions	Réponses
1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?	☐ V ☐ F
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ?	☐ V ☐ F
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont-ils coplanaires ?	☐ V ☐ F
4. Les vecteurs $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont-ils coplanaires ?	☐ V ☐ F



Théorème 8.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

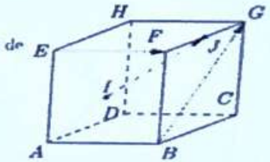
Preuve

Soit O un point quelconque de l'espace.
Soient A, B et C les points définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.
D'après la définition 7, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, A, B et C sont coplanaires ce qui revient à C appartient au plan (OAB).
D'après le théorème 4, C appartient à (OAB) si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ c'est-à-dire $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Vocabulaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires alors on dit que $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ est une famille de vecteurs liés ou dépendants. Sinon on dit que la famille de vecteurs est libre.

Exercice 7



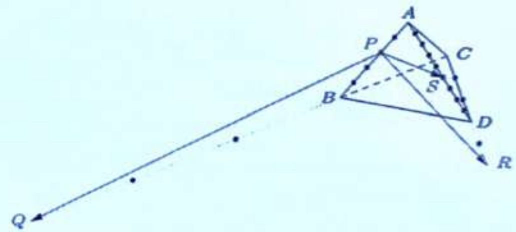
Soit $ABCDEFGH$ un cube. I et J sont les milieux respectifs de $[EB]$ et $[FG]$.

1. Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8
$ABCD$ un tétraèdre. Les points P, Q, R et S sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CR} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DS} = \frac{4}{9}\overrightarrow{DA}$$

1. Exprimer $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Prouver que $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ sont coplanaires.



3 Repérage dans l'espace

3.1 Décomposition d'un vecteur dans une base

Théorème 9 (Caractérisation).

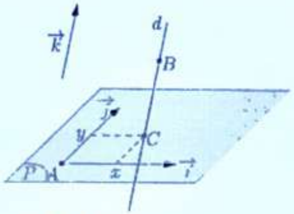
Soient $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que :

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

Preuve

- *Pour l'existence* .
  Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$. Soit P le plan de repère $\left(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
  Si B appartient à P alors, d'après le théorème 4, $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

En revanche, si B n'appartient pas P, on définit la droite d passant par B et de vecteur directeur $\vec{k}$. Terminer la démonstration.



- *Pour l'unicité :* Faire un raisonnement par l'absurde.

Définition 10 (Coordonnées d'un vecteur).

On dit que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forme *une base* de l'espace et on dit que, dans cette base, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$.

On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Lorsque trois vecteurs forment une base (c'est-à-dire s'ils ne sont pas coplanaires), on peut écrire tout vecteur de l'espace comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Voilà pourquoi on dit que, dans l'espace, on travaille en trois dimensions.
- Dans l'espace une famille de quatre vecteurs est forcément liée.

3.2 Repérage et coordonnées

Définition 11 (Repère de l'espace).

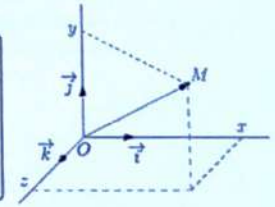
Choisir un repère de l'espace, c'est se donner un point O (origine du repère) et un triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires (base du repère). On note $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ le repère ainsi constitué.

- Lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux, on dit que le repère est *orthogonal*.
- Lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et ont pour norme 1, on dit que le repère est *orthonormé*.

Théorème 12.

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Preuve

Indication : Utiliser le théorème 9.

Définition 13 (Coordonnées d'un point).

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
x est l'abscisse de M, y l'ordonnée de M et z la cote de M.

Tous les résultats de géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée.

Propriété 14.

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :
   - pour tout réel k, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.
   - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.
   - les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles c'est-à-dire $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Si A et B ont pour coordonnées $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors :
   - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
   - Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Propriété 15.

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *orthonormé* :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Exercice 9

On considère $A(-1;3;-5)$, $B(-7;7;-7)$ et $C(2;1;-4)$.
Les points A, B et M sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 10

On donne les points $A(1;1;\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.

1. Déterminer les coordonnées de C symétrique de A par rapport à O.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Exercice 11

On considère un tétraèdre $ABCD$ avec $A(1;2;3)$, $B(4;-5;6)$, $C(0;0;3)$ et $D(7;8;-9)$.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.

1. Déterminer les coordonnées de E et F tels que $IACE$ et $IBDF$ soient des parallélogrammes.
2. Montrer que J est le milieu de $[EF]$.

Exercice 12

On considère $A(-4;5;-1)$, $B(-1;5;-4)$, $C(-2;12;4)$ et $D(4;12;-2)$.
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

3.3 Représentations paramétriques d'une droite

Dans toute la suite, $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ désigne un repère de l'espace.

Théorème 16.

La droite d passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_A+\alpha t\\ y = y_A+\beta t\\ z = z_A+\gamma t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Preuve

À faire.

Définition 17.

Le système $\begin{cases} x = x_A+\alpha t\\ y = y_A+\beta t\\ z = z_A+\gamma t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de la droite d. t est appelé le paramètre de d.

Une droite possède une infinité de représentations paramétriques.

Exercice 13

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+3t\\ y = 4-t\\ z = 2t-1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

1. Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de d.
2. Les points $B(-2;6;-5)$ et $C(-1;5;-3)$ appartiennent-ils à d ? Justifier.
3. Déterminer les coordonnées du point E de d de paramètre 2.

Exercice 14

L'algorithme ci-dessous teste l'appartenance d'un point à une droite définie par un point et un vecteur directeur (dont aucune des coordonnées n'est nulle).
Compléter cet algorithme dont certaines parties ont été effacées.

Algorithme

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE LISTE
  u EST_DU_TYPE LISTE
  M EST_DU_TYPE LISTE
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Coordonnées du point A :"
  LIRE A[1]
  LIRE A[2]
  LIRE A[3]
  AFFICHER "Coordonnées du vecteur u :"
  LIRE u[1]
  LIRE u[2]
  LIRE u[3]
  AFFICHER "Coordonnées du point M :"
  LIRE M[1]
  LIRE M[2]
  LIRE M[3]
  SI . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur u."
    AFFICHER "C'est le point de paramètre "
    t PREND_LA_VALEUR . . . . . . . . . . . .
    AFFICHER t
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "M n'appartient pas à la droite passant par A et de vecteur directeur u."
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 15

Soient M et N les points de coordonnées respectives $(-1\,;2\,;0)$ et $(2\,;-1\,;3)$.

1. Déterminer un système d'équation paramétrique de la droite (MN).
2. Soit P le point de coordonnées $(-2\,;3\,;-1)$.
   Les points M, N et P sont-ils alignés ? Justifier.
3. Le système $\begin{cases} x = 8 + k \\ y = -7 - k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 9 + k \end{cases}$ est-il une représentation paramétrique de la droite (MN) ? Justifier.

Exercice 16 *Prise d'initiative*

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 6 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - t \end{cases}$ et $A(2\,;5\,;-3)$.

Déterminer la distance de A à d.

Méthode 18.

Pour étudier la position relative de deux droites d et d' définies par leurs représentations paramétriques $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = x_{A'} + \alpha' k \\ y = y_{A'} + \beta' k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = z_{A'} + \gamma' k \end{cases}$

Étape 1 : On donne les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ respectivement des droites d et d'. S'ils sont colinéaires alors d et d' sont *parallèles*. Sinon...

Étape 2 : On résout le système formé par les deux systèmes paramétriques de d et d' ci-dessous (En fait on cherche l'éventuelle intersection de d et de d.) :

$$\begin{cases} x_A + \alpha t = x_{A'} + \alpha' k \\ y_A + \beta t = y_{A'} + \beta' k \\ z_A + \gamma t = z_{A'} + \gamma' k \end{cases}$$

Ce système est un système de trois équations à deux inconnues. Deux équations permettent de déterminer t et k.

Puis on remplace t et k dans la dernière équation, si elle n'est pas vérifiée, les droites d et d' n'ont pas de point d'intersection, elles sont donc *non coplanaires*. Sinon d et d' sont *sécantes* en le point de paramètre t trouvé de d ou le point de paramètre k de d'.

Le paramètre n'a pas nécessairement la même valeur pour les deux droites ; il faut donc veiller à le nommer différemment (par exemple t et k, ou t et t', ...).

Exercice 17

Étudier la position relative des droites d et d' dans chacun des cas suivants :

1. d et d' ont respectivement pour représentations paramétriques les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 6t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -6 + 2k \end{cases}$$
2. d et d' ont respectivement pour représentations paramétriques les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = -1 + k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 2 - k \end{cases}$$

3.4 Représentations paramétriques d'un plan

Théorème 19.

Le plan P passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' k \\ y = y_A + \beta t + \beta' k \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R} \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' k \end{cases}$.

Preuve

Utiliser le théorème 4.

Définition 20.

Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' k \\ y = y_A + \beta t + \beta' k \quad (t \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' k \end{cases}$ est appelé représentation paramétrique du plan P. t et k sont les deux paramètres.

Un plan possède une infinité de représentations paramétriques.

Exercice 18

Soit P le plan passant par $A(1\,;1\,;-2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Écrire un système d'équation paramétrique de P.
2. Le point $E(3\,;1\,;4)$ appartient-il à P ? Justifier.
3. Déterminer la cote du point L de P tel que $x_L = y_L = 0$.

Chapitre 16

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Dans toute ce chapitre, la notation $\left(O : \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ désignera toujours un repère orthonormé.

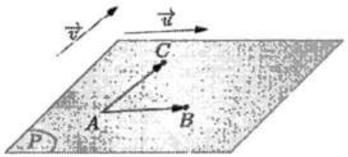
1 EXTENSION DU PRODUIT SCALAIRE À L'ESPACE

1.1 Définition

Définition 1.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Il existe alors au moins un plan P contenant A, B et C.

Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace, que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est par définition égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.



On peut alors étendre directement à l'espace les expressions et propriétés du produit scalaire valables dans le plan travaillées en classe de Première :

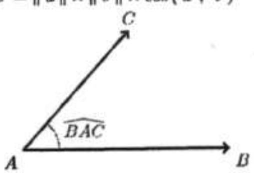
- **Avec les normes :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

On au aussi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 - AC^2 - BC^2\right)$.

- **Avec le cosinus :** si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

Autrement dit, si $A \neq B$ et $A \neq C$,

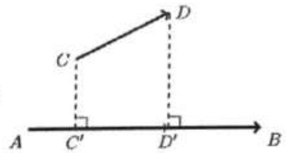
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$



- **Avec le projeté orthogonal :**

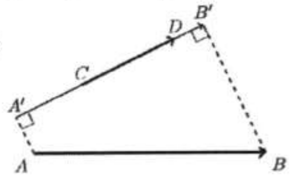
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs.
Soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



Ou soient A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur (CD). On a alors :

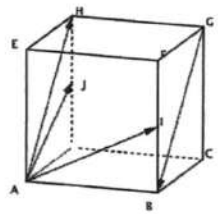
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$$



Exercice 1 --- *Calculs de produits scalaires*

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point I est le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[DH]$

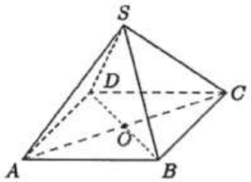
1. Calculer les produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BF}$ (on pourra utiliser deux méthodes).
   b. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GB}$.
2. On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.



Exercice 2 --- *Calculs de produits scalaires (2)*

$SABCD$ est une pyramide régulière, $ABCD$ est un carré de centre O. Toutes les arêtes ont pour longueur a. Calculer, en fonction de a :

1. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$ 2. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$ 3. $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$



- **Avec les coordonnées :**

Propriété 2 (Expression analytique du produit scalaire).

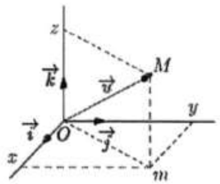
Dans un repère **orthonormé**, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

⚠ Pour cette expression, il est indispensable que le repère soit orthonormé.

Preuve

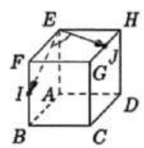
1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et m le projeté de M dans le plan défini par $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.
   a. Montrer que $OM^2 = Om^2 + mM^2$.
   b. Exprimer Om^2 et mM^2 en fonction de x, y et z.
   c. En déduire que $OM^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
2. À l'aide de l'expression du produit scalaire avec les normes, montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.



Exercice 3 – *Produit scalaire et mesure d'angle*

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[BF]$ et $[GH]$. On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EJ}$.
2. En déduire la valeur de $\widehat{IEJ}$ arrondie au degré près.



1.2 Propriétés

Propriété 3 (Norme d'un vecteur et carré scalaire).

- Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- On note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ le *carré scalaire* de $\vec{u}$. Ainsi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété 4 (Propriétés algébriques).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, et pour tout réel k on a :

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
6. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve

Indication : Utiliser les différentes expressions du produit scalaire.

1.3 Vecteurs orthogonaux

Définition 5.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non nuls* de l'espace.
Soient A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* lorsque les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. Par convention, le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Théorème 6.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire vaut 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Preuve

Indication : Utiliser l'expression du produit scalaire avec l'angle.

Exercice 4

Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{5}{4} ; \frac{-3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{-2}{5} ; 2 ; 3\right)$ sont-ils orthogonaux ? Justifier.

Exercice 5

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques respectives :

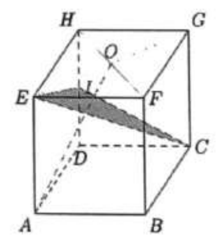
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 1 + 3k \\ z = -3 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

1. Démontrer que d et d' sont orthogonales.
2. Sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

Exercice 6

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. Le point I est le milieu de $[HD]$ et O est le centre de la face $EFGH$. On se propose de démontrer que (AO) est perpendiculaire (ECI).

1. a. Calculer $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$ (on pensera à écrire $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}$).
   b. Calculer $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EI}$.
   c. Conclure.
2. Refaire l'exercice à l'aide de coordonnées en travaillant dans le repère $\left(D ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH} ; \overrightarrow{DA}\right)$.

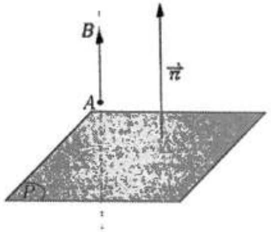


2 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

2.1 Vecteur normal à un plan

Définition 7.

Dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *non nul* est normal au plan P signifie que la droite (AB) est perpendiculaire au plan P.



Tout vecteur $\vec{n}$ *non nul* colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal de P.

Théorème 8.

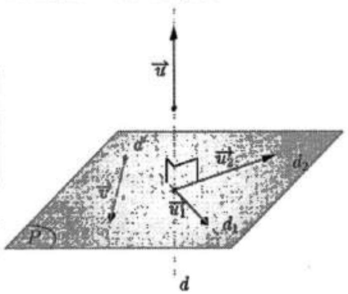
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.

Ce théorème est la version vectorielle de celui du chapitre « Droites et plans ».

Théorème.

Une droite d et un plan P sont orthogonaux si et seulement si d est orthogonale à deux droites sécantes de P.

Grâce au produit scalaire, il est assez facile maintenant d'en proposer une démonstration.



Preuve

• L'implication est immédiate puisque la droite est orthogonale à toute droite du plan, donc en particulier à deux droites sécantes.

• Pour la réciproque : on suppose que d est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d. Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs directeurs respectifs des droites d_1 et d_2. Soit d' une droite de P de vecteur directeur $\vec{v}$. Nous devons prouver que d et d' sont orthogonales :

1. Que dire des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$?
2. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
3. Conclure.

Exercice 7 — *Vecteur normal*

On donne $A(1;-1;3)$, $B(0;3;1)$, $C(2;1;3)$, $D(4;-6;2)$ et $E(6;-7;-1)$.
Démontrer que les points A, B et C définissent un plan P de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$.

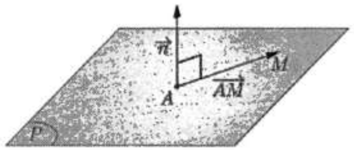
Exercice 8 — *Vecteur normal (2)*

Soient $A(1;2;-2)$, $B(-1;3;1)$ et $C(2;0;-2)$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

2.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 9 (Caractérisation d'un plan).

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Un point M appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.



Preuve

Si M est un point de P alors la droite (AM) est incluse dans P. Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal de P alors la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à (AM). D'où $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\quad 0$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur P. En utilisant la relation de Chasles, prouver que M et H sont confondus. Puis conclure.

Théorème 10.

Dans un repère orthonormé

• Si $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à P, alors P admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. On dit que c'est une *équation cartésienne* de P.

• *Réciproquement*, a, b, c et d étant quatre réels donnés, avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Preuve

• Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P. On a $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \dots$

• Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tel que $ax+by+cz+d=0$. Comme a, b et c sont non tous nuls, l'un au moins des réels a, b ou c est différent de 0.

1. Soit $A\left(\frac{-d}{a};0;0\right)$ si $a\neq 0$. Prouver que $A\in\mathcal{E}$. (Si $b\neq 0$ ou $c\neq 0$ alors on pose respectivement $A\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$ ou $A\left(0;0;\frac{-d}{c}\right)$)
2. Démontrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\quad 0$ où $\vec{n}(a;b;c)$.
3. Conclure en utilisant la caractérisation d'un plan.

Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes. On passe de l'une à l'autre en multipliant ou divisant l'équation par un réel non nul.

Exercice 9

Soit P le plan passant par le point $A(2\,;-1\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Les points $B(0\,;-1\,;3)$ et $C(-1\,;3\,;-1)$ appartiennent-ils à P ?

Exercice 10

Soient $A(0:2\,;3)$, $B(-1\,;3\,;4)$ et $C(2\,;5:-2)$.

1. Justifier que A, B et C définissent un plan P.
2. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de P.
3. En déduire une équation cartésienne de P.

Exercice 11

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Questions	Réponses
1. $4x-3y+2z=0$ est l'équation d'un plan passant par l'origine.	☐ V ☐ F
2. $x+3z-2y-5=0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.	☐ V ☐ F
3. $4x-6y+2z-1=0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.	☐ V ☐ F

Exercice 12 - *Appartenance d'un point à un plan*

1. On considère le plan P d'équation cartésienne $2x-3y-1=0$.
   Donner un vecteur normal à P.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan R parallèle à P et passant par le point $B(2\,;0\,;0)$

3 Positions relatives

3.1 Position relative de deux plans

Méthode 11 (Pour déterminer la position relative de deux plans).

Soient P et P' deux plans d'équations respectives :

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{et} \quad a'x+b'y+c'z+d'=0.$$

► On donne les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ normaux respectivement aux plans P et P'.

- Si les vecteurs sont colinéaires alors P et P' sont *parallèles*.
- Sinon P et P' sont *sécants*.

► Dans le cas où ils sont sécants, on peut déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$$

Pour résoudre ce système de deux équations à trois inconnues, l'une des inconnues joue le rôle de paramètre (on pose alors $x=t$ ou $y=t$ ou $z=t$).

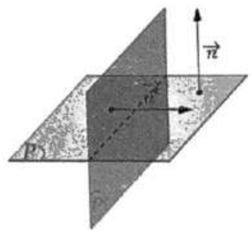
Exercice 13

Dans un repère orthonormé, on considère les plans P et P' d'équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.

1. Prouver que P et P' sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

Propriété 12.

Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Exercice 14

Soient P et P' les plans d'équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$. Démontrer que P et P' sont perpendiculaires.

3.2 Position relative d'une droite et d'un plan

Méthode 13 (Pour déterminer la position relative d'une droite et d'un plan).

Soient P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

► On donne un vecteur normal $\vec{n}$ de P et un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux alors P et d sont parallèles.
- Sinon P et d sont sécants.

► Dans le cas où ils sont sécants, on peut déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en remplaçant x, y et z respectivement par $x_A + \alpha t$, $y_A + \beta t$ et $z_A + \gamma t$ dans l'équation du plan P. On trouve alors t. Le point d'intersection est le point de d de paramètre t trouvé.

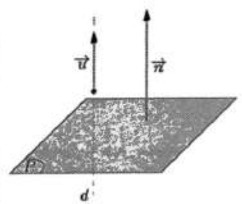
Exercice 15

Soient $A\,(1 : 2\,; -3)$ et $B\,(-1\,; 2\,; 0)$.
Soit P le plan d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

1. Démontrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants.
2. Déterminer leur point d'intersection.

Propriété 14.

Soient P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.
P et d sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal $\vec{n}$ de P est colinéaire à un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



Exercice 16

Soient A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,; 4\,; 3)$, $(4\,; -2\,; 3)$, $(1\,; -1\,; 1)$ et $(3 : 3 : 3)$.

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite d passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
3. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de D sur (ABC).

Fluctuation d'échantillonnage

Intervalle fluctuation d'échantillonnage asymptotique

Th: Soit X_n variable aléatoire qui suit $\beta(n,p)$ & $F_n = \frac{X_n}{n}$ donnant "fréquence nbr succès".

- $$\lim_{n \to +\infty} P(F_n \,\varepsilon\, I_n) = 1 - \alpha \quad \& \quad Z \sim N(0,1)$$

où $$I_n = [p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; \; p + u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,]$$

• Intervalle I_n est **intervalle fluctuation asymptotique** de variable F_n, au seuil $1 - \alpha$.

Conditions Application:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

Cas particutiers:

• Au seuil de $95\ \%$,

$$I = [p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; \; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,]$$

• Au seuil de $99\ \%$,

$$I = [p - 2,58 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; \; p + 2,58 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,]$$

Méthode: Vérifier les conditions & identifier si la fréquence appartient à l'intervalle.

Lien avec l'Intervalle

$$\left[p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p + u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

P: Soit X_n variable aléatoire qui suit $\beta(n,p)$ & $F_n = \frac{X_n}{n}$ donnant "fréquence nbr succès".

$\forall\ p\ \varepsilon[0, 1],\ \exists\ n_0\ \varepsilon\ N\ tq\ \ n \geq\ n_0$,

$$P(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 95\%$$

Estimation

P: Soit X_n variable aléatoire qui suit $\beta(n,p)$ & $F_n = \frac{X_n}{n}$ donnant "fréquence nbr succès".

$p\ \varepsilon\ [F_n\ -\ \frac{1}{\sqrt{n}};\ F_n\ +\ \frac{1}{\sqrt{n}}]\ \ avec\, proba\ \geq 0,95$

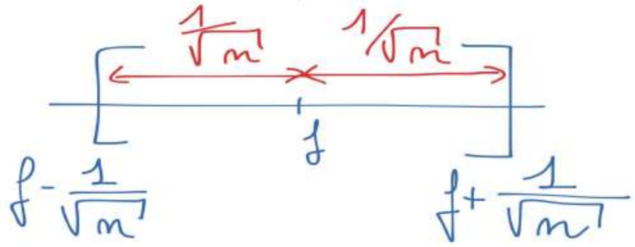
L'intervalle

$[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$: $intervalle\ de\ confiance$

(au niveau de 0,95) .

Rq: On parle de fourchette de sondage, assez grand signifie $n \geq 30$.

Amplitude : $\frac{2}{\sqrt{n}}$



C3 : f exponent.elle

I/ Déf & Ps

1) Déf f expo

· Rsltt préliminaire : Si $\exists$ f dérivable sur $\mathbb{R}$ tq $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Alors $\forall x$ $\mathbb{R}$, $f(-x) \cdot f(x) = 1$ & f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit φ f définie sur $\mathbb{R}$ p

$$\varphi(x) = f(x) \cdot f(-x)$$

Idée : Dériver φ.

· φ est forme uv avec $u(x) = f(x) \Rightarrow u'(x) = f'(x)$
$v(x) = f(-x) \Rightarrow v'(x) = -f'(-x)$

· $\varphi'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$\varphi'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - f'(-x) \cdot f(x)$ $\downarrow f' = f$
$\varphi'(x) = f(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot f(-x)$
$\varphi'(x) = 0$.

[· $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$.
$\Rightarrow \varphi$ est cste.]

$\Rightarrow$ on peut chs $\varphi(x) = \varphi(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

· $\varphi(0) = f(0) \cdot f(-0) = f(0) \cdot f(0) = 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(x) = 1$ $\forall x$ $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = 1$ —//

* P absurde, supposons $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, tq $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{f(x_0)}_{0} \cdot f(-x_0) = 0$ $\longrightarrow f(x) \neq 0$

Impossible (en contradiction avec $f(x) \cdot f(-x) = 1$). $\forall x$ $\mathbb{R}$.

Th. & déf : $\exists$ 1 unique f f dérivable sur $\mathbb{R}$ tq $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f' = f \end{cases}$

$\hookrightarrow$ f est appelée $\boxed{\text{f exponent.elle}}$, notée exp.

Preuve : ⚠ Supposons q' $\exists$ 2 autres f g dérivable, , vérifiant $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g' = g \end{cases}$

Notons ψ f définie p $\boxed{\psi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}}$. $\rightarrow \neq 0$ vu th. préc.dt

· $\psi'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}$ $\downarrow$ car $f' = f$, $g' = g$

$\psi'(x) = \dfrac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2}$

$\psi'(x) = 0$ $\longrightarrow$ ψ est cste.

$\rightarrow$ De +, $\psi(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$

$\Rightarrow \psi(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ —//
$\Leftrightarrow g(x) = f(x)$.

$\Rightarrow$ Conclu : f est unique.

* $\exists$: admise.

2/ Ps exponent.elle

· Csqces immédiates :

- f expont.elle $x \mapsto \exp(x)$ est définie & dérivable sur $\mathbb{R}$ & $\exp(0) = 1$ & $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

P : Relaθ fondamentale :

$\forall x$ & $y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) . \exp(y)}$

Preuve : (ind. caθ).

Soit y réel qlcq fixé, soit ϕ f définie p $\phi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

Dériver ϕ ⇒ mq ϕ cste ⇒ la ? ⇒ Conclure.

P : Conséquences : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

1) $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$.

2) $\boxed{\exp(nx) = \exp(x)^n}$

3) $\boxed{\exp(x) > 0.}$

Preuves : Indicaθ

1) $\exp(x-y) = \exp(x + (-y))$

Ps on use Ps précédtes

2) N procède on 2 tps : • Si $n \geq 0$, on procède p récurrence (à faire)

• Si $n \leq 0$, on pose $m = \underbrace{-n}_{\in \mathbb{N}}$ ⇔ $n = \underbrace{-m}_{\in \mathbb{N}}$.

$\exp(nx) = \exp(\underbrace{-mx}_{\geq 0}) = \dfrac{1}{\exp(mx)} = \dfrac{1}{\exp(x)^m} = \exp(x)^{-m} = \exp(x)^n$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$

$\exp(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}x\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$

Ex $\exp(n \times 1) = \exp(1)^n$

$\exp(1) = e$

$\exp(n) = e^n$

$e \approx 2,718$

$\exp(2) = e^2$

II. / Nb e & notaθ puissance

Info historiq : D'après relaθ 2 précédte,

$\exp(n) = \exp(1)^n$

N° 1728, Euler note e^1 pr $\exp(1)$

nbe Euler $e \approx 2,718$.

N a dc $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$, on étend notaθ à tt réel x

Notaθ : Pr tt réel x, on note $\exp(x) = e^x$.

P (Réécriture Ps précédtes)

• $e^0 = 1$ $e^1 = e$

• Pr $x, y \in \mathbb{R}$,

$\boxed{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$; $\boxed{e^{x+y} = e^x . e^y}$

$\boxed{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}}$ $e^{nx} = (e^x)^n$.

Ex 1

1- $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ 2- Simplifier $\dfrac{e^2\sqrt{e}}{e^{-3}}$

1- $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 . e^x . e^{-x} + (e^{-x})^2 - (e^x)^2 + 2e^x . e^{-x} - (e^{-x})^2$

$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4 e^x . e^{-x}$

$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4 e^{x-x} = 4 e^0 = 4$

2- $\dfrac{e^2\sqrt{e}}{e^{-3}} = \dfrac{e^2 e^{\frac{1}{2}}}{e^{-3}} = \dfrac{e^{2+\frac{1}{2}}}{e^{-3}} = \dfrac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{-3}} = e^{\frac{5}{2}+3} = e^{11/2} = \sqrt{e^{11}}$

$g(x) = e^{2x} - 1$

$g(x) = (e^x)^2 - 1^2$

$g(x) = (e^x + 1)(e^x - 1)$

$$\frac{e^x \times (e^x + e^{-x})}{e^x \times (e^x - e^{-x})}$$

III / Étude f exponentielle

1) Dérivée & variation

$\boxed{P}$ • $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$

• Pr tte f° u dérivable sur intervalle I, f° e^u est dérivable sur I & dérivée $\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$

Ex 4

$f(x) = (2x-1)e^x$

forme uv $\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit 2 f° dérivables)

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x$

$f'(x) = e^x(2 + 2x - 1)$

$f'(x) = e^x(2x+1)$

$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

forme e^u $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{x} \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$ $\mathbb{R}^*$

• Si u est dérivable alors e^u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

• $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$g'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

$h(x) = e^{2x^2 - 3x + 4}$

forme e^u $\begin{cases} u(x) = 2x^2 - 3x + 4 \\ u'(x) = 4x - 3 \end{cases}$

polynôme

• Si u est dérivable alors e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = u' e^u$

$h'(x) = (4x-3)\, e^{2x^2 - 3x + 4}$

$i(x) = (-2x+3)e^{2x}$

forme uv $\begin{cases} u(x) = -2x+3 \\ u'(x) = -2 \\ v(x) = e^{2x} \\ v'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$

• $i'(x) = -2e^{2x} + (3-2x)\, 2e^{2x}$

$i'(x) = 2e^{2x}(-2x+2)$

$j(x) = \frac{e^x}{x-1} = e^x(x-1)^{-1}$

forme $\frac{u}{v}$ $\begin{cases} u(x) = e^x \\ u'(x) = e^x \\ v(x) = x-1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

• j dérivable $= \mathbb{R} - \{1\}$ (quotient de f° dérivables) sur $\mathbb{R}$ ($x - 1 = 0$, $x = 1$)

$j'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-1-1)}{v^2} = \frac{e^x(x-2)}{v^2}$

$k(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1} = e^{3x} - 1\, (e^{3x} + 1)^{-1}$

forme $\frac{u}{v}$ $\begin{cases} u(x) = e^{3x} - 1 \\ u'(x) = 3e^{3x} \\ v(x) = e^{3x} + 1 \\ v'(x) = 3e^{3x} \end{cases}$

$e^{3x} + 1 \neq 0$

$k'(x) = \frac{3e^{3x} \cdot (e^{3x} + 1) - 3e^{3x} \cdot (e^{3x} - 1)}{(e^{3x}+1)^2}$

$k'(x) = \frac{3e^{6x} + 3e^{3x} - 3e^{6x} + 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

$k'(x) = \frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

$\boxed{P}$ f exponentielle strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $(e^x)' = e^x > 0$.

N dérivée f° exponentielle $\boxed{P}$ suivante : Conséquences : $\forall\ a\ \&\ b \in \mathbb{R}$:

- $e^a = e^b \iff a = b$.
- $e^a > e^b \iff a > b$.
- $e^a \geqslant e^b \iff a \geqslant b$.

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
e^x	$\nearrow$	e^a	e^b	$\nearrow$

1) $e^{2x+1} = 1$

$\Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

4) $e^{3x} \geqslant 1$

$e^{3x} \geqslant e^0$

$3x \geqslant 0$

$x \geqslant 0$

$\Rightarrow 4X^2 - X - 3 = 0$

$X = e^x$

$X_1 = -0{,}75$

$X_2 = 1$

Impossible

$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{x} = 1$

2) Limites

$e^x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow e^x > e^0$

$\Leftrightarrow x > 0$

Lemme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x > x}$

Preuve :

$e^x > x$

$\Leftrightarrow e^x - x > 0$

Mq $e^x - x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Idée : Soit f, f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

$\Rightarrow$ variations de f

$\Rightarrow f'$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$\Rightarrow$ D'après [tableau], 1 est min de f sur $\mathbb{R}$,

CQFD $\Rightarrow f(x) \geqslant 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc e^x peut dépasser n'importe quelle valeur $A > 0$, aussi grand soit-il, il suffit d'après le lemme que $x > A$.

P : f exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

P : f exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Preuve : $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ | Lorsque $x \mapsto -\infty$

$-x \mapsto +\infty$

$\Rightarrow e^{x} \mapsto +\infty$

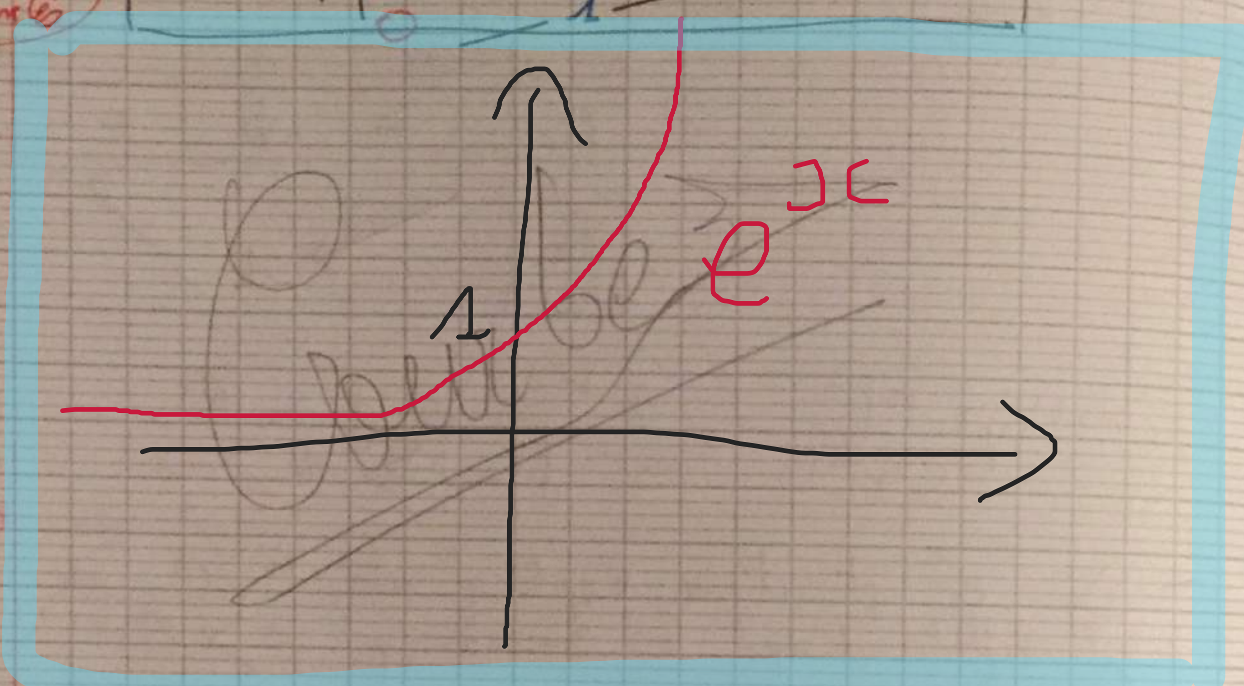
$\Rightarrow \frac{1}{\cdots} \mapsto 0$

Rq : N dit que l'axe $x'x$ d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

3) Tableau variation & courbe représentative

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Sign f'		+		
var exp	0	1	e	$+\infty$

N rappel : les limites



Exo Mq équation de tangente à courbe f expo au pt $a = 0$ est $T : y = x+1$

$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$T : y = x + 1$

Rq : Graphiquement, courbe f expo est toujours au-dessus de sa tangente $\forall$ sa tangente.

↳ fait que f convexe.

4 Deux familles de fonctions

4.1 Les fonctions $\boxed{f_k : x \longmapsto e^{-kx}}$

$k > 0$.

Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{-kx}$ où k est un réel strictement positif.

Proposition 1.

Pour tout réel $k > 0$, le tableau de variation de f_k est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de f_k'		$-$	
Variation de f_k	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

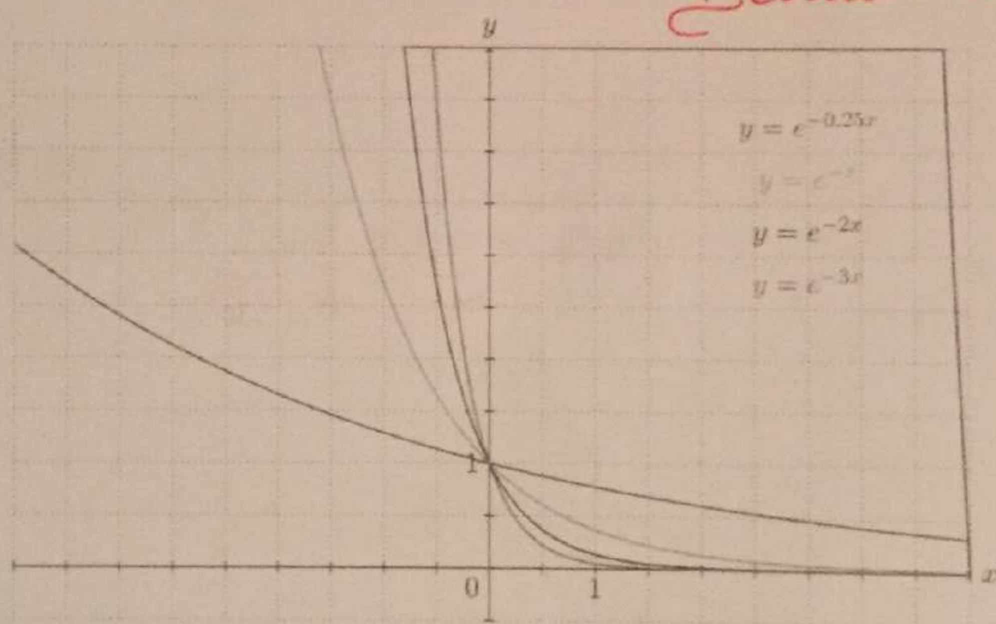
$f_k'(x) = -k.e^{-kx} < 0$

Preuve

Laissée en exercice.

Les courbes des fonctions f_k sont :

"Décroissance exponentielle"



2

Exercice 1

En été, un cyclotouriste mesure une pression atmosphérique de 909 hPa (hPa = hectopascal) au sommet d'un col. On considère qu'à une température constante T, en degré Kelvin, pour des altitudes z pas trop grandes, la pression $P(z)$ est donnée en fonction de l'altitude z, en mètres, par :

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

où $P(0) = 1013$ hPa est la pression au niveau de la mer, $M = 28,97.10^{-3}$ kg.mol^{-1}, $R = 8,31$ J.mol^{-1}.K^{-1}.
On prendra $g = 9,81$ m.s^{-1} et $T = 293$ K.

1. Comment varie la pression en fonction de l'altitude z ? Justifier.
2. Estimer au mètre près l'altitude de ce col. (On pourra utiliser $e^{-0,1083} \approx \dfrac{909}{1013}$.)

4.2 Les fonctions $\boxed{g_k : x \longmapsto e^{-kx^2}}$

$k > 0$

Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = e^{-kx^2}$ où k est un réel strictement positif.

Proposition 2.

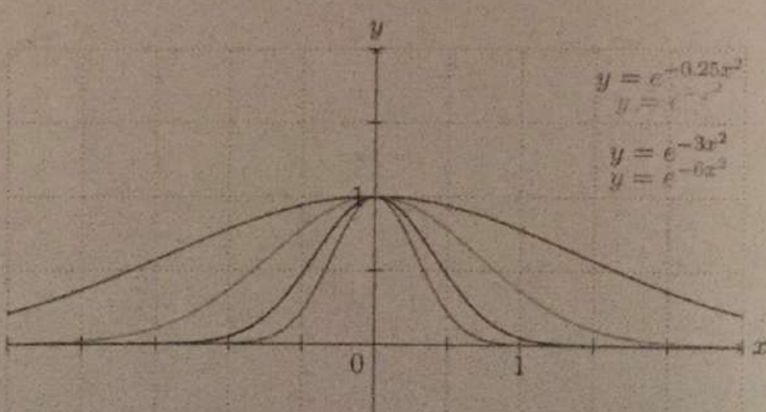
Pour tout réel $k > 0$, le tableau de variation de g_k est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de g'_k		$+$	0	$-$	
Variation de g_k	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$g'_k(x) = \underbrace{-2x}_{-}\ \underbrace{k}_{+}\ \underbrace{e^{-2kx^2}}_{+}$$

Preuve

Laissée en exercice.



Courbe en cloche, Courbe de Gauss

8

Les courbes de telles fonctions sont dites « des courbes en cloche » ou « des courbes de Gauss ». Nous verrons leur utilité en probabilités.

Exercice 2

Dans cet exercice, on va mettre en évidence quelques propriétés des courbes de Gauss.
Dans tout l'exercice h et k désignent deux réels strictement positifs.

1. a. Prouver que pour tout réel x, on a $g_k(-x) = g_k(x)$.
   (g_k est dite paire.)

   b. Quelle propriété vient-on de prouver ?

2. Démontrer que, sur $\mathbb{R}$, on a :

$$h \leqslant k \iff g_h \geqslant g_k$$

3. a. Déterminer g_k'' en fonction de k.

   b. Résoudre $g_k''(x) = 0$.

   c. Pour $k = \dfrac{1}{2}$.

      i. Quelle est la solution α de l'équation $g_k''(x) = 0$?

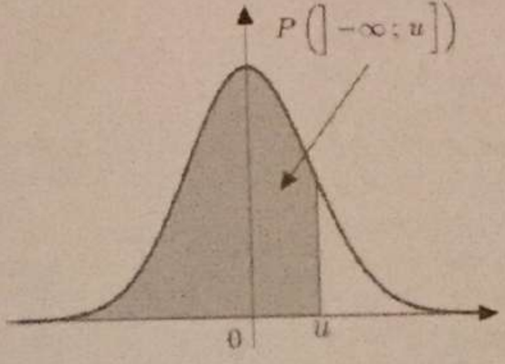
      ii. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $C_{\frac{1}{2}}$ de la fonction $g_{\frac{1}{2}}$ au point d'abscisse α.

      iii. Tracer dans un repère $C_{\frac{1}{2}}$ et Δ.
      On constate que la courbe $C_{\frac{1}{2}}$ traverse la tangente Δ au point d'abscisse α. On dit que ce point est un *point d'inflexion*.

   d. On admet que toutes les courbes de Gauss possèdent deux points d'inflexion dont les abscisses sont les solutions de l'équation $g_k''(x) = 0$.
   Prouver que tous ces points sont sur la droite d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 3

Ci-dessous est représentée une courbe de Gauss.
On admet que l'aire délimité par la courbe et l'axe des abscisses vaut 1.



On note $P(]-\infty\,;u])$ l'aire colorée et on admet qu'elle vaut 0,7.
Donner :

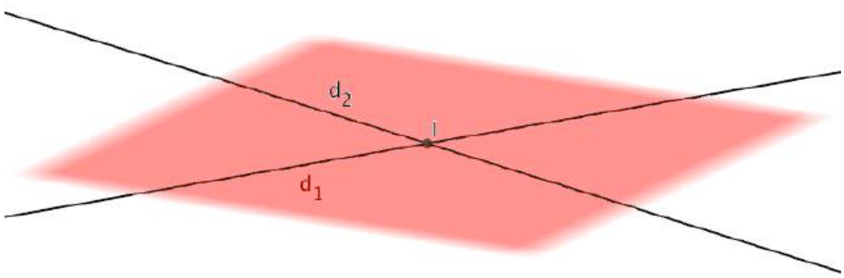
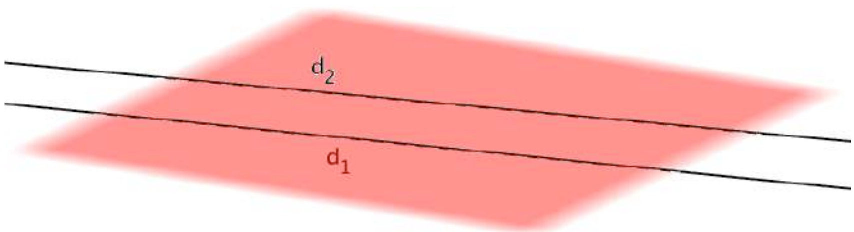
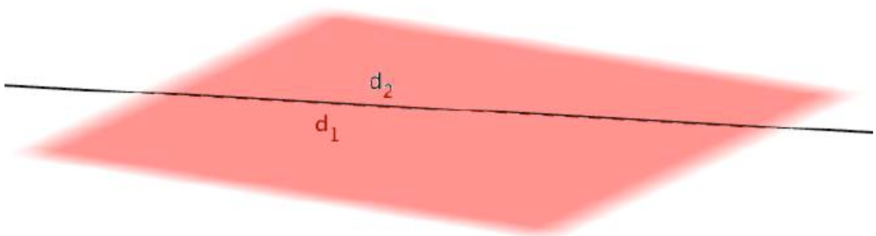
$$P([u;+\infty[) \quad ; \quad P([0;u]) \quad ; \quad P([-u;+\infty[) \quad ; \quad P([-u;u])$$

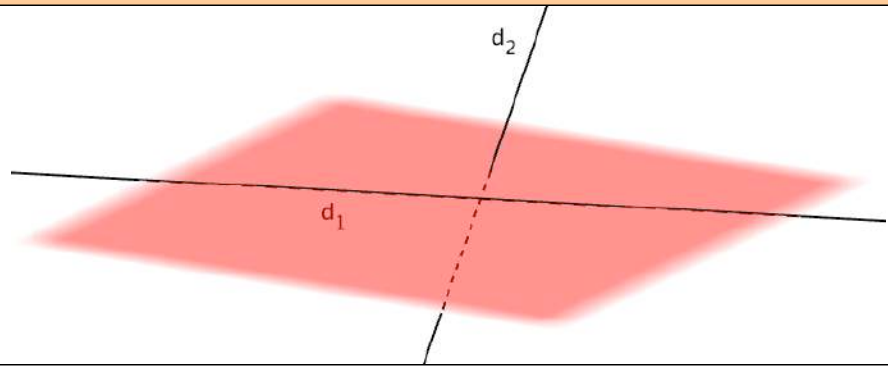
DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I. Positions relatives de droites et de plans

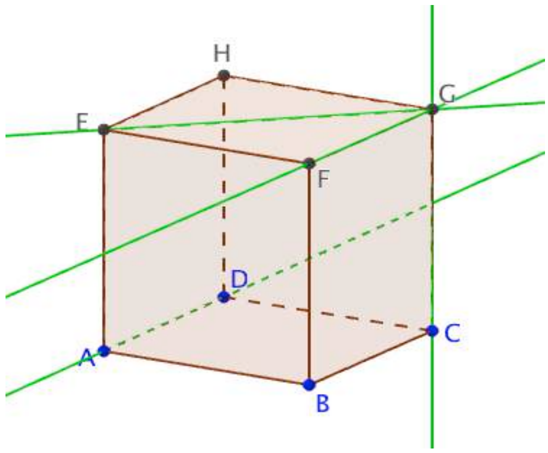
1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

d_1 et d_2 sont coplanaires	
d_1 et d_2 sont sécantes	
d_1 et d_2 sont parallèles	 d_1 et d_2 sont strictement parallèles
	 d_1 et d_2 sont confondus

d_1 et d_2 sont non coplanaires


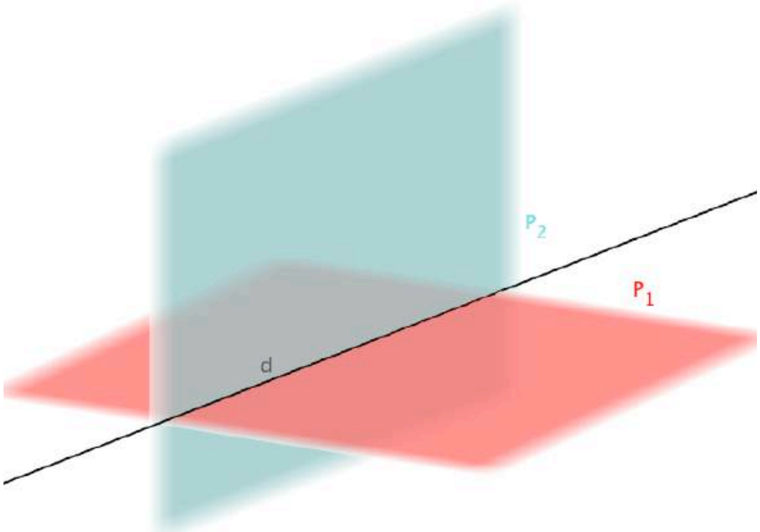
<u>Exemple :</u>

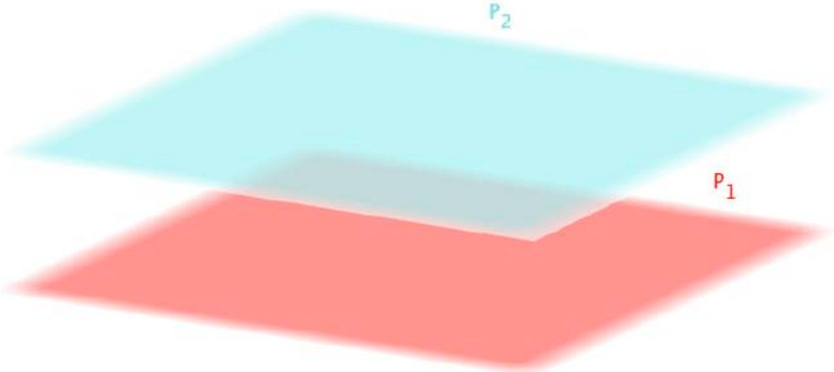


ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.

2) <u>Positions relatives de deux plans</u>

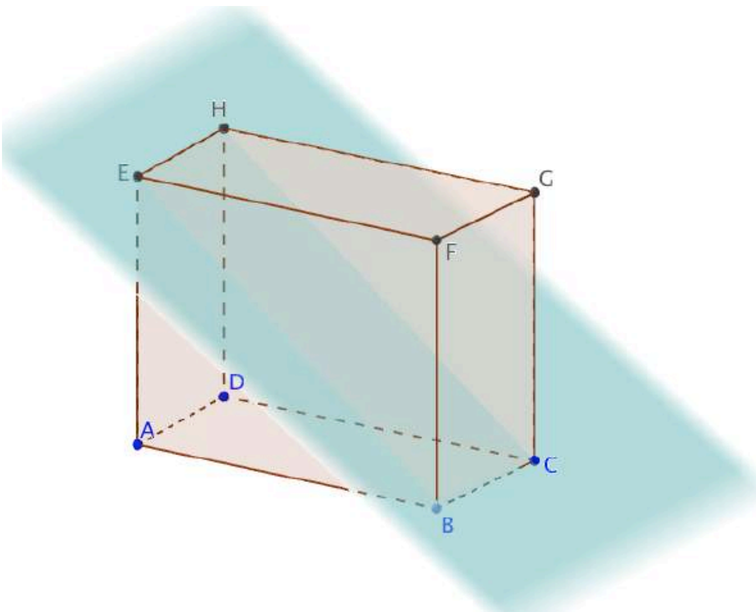
<u>Propriété :</u> Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants
 P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles
 P_1 et P_2 sont strictement parallèles
 P_1 et P_2 sont confondus

Exemple :

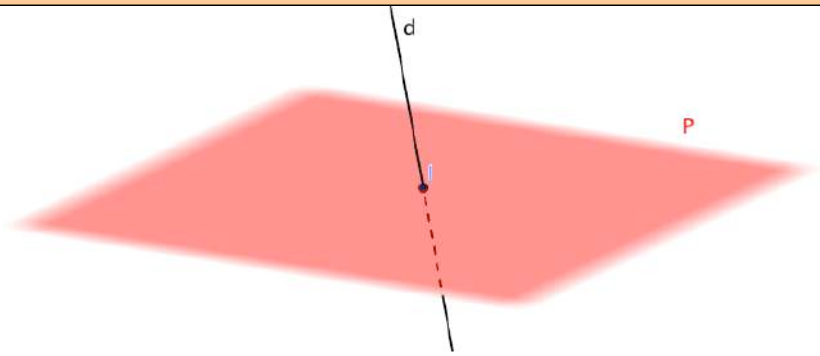
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

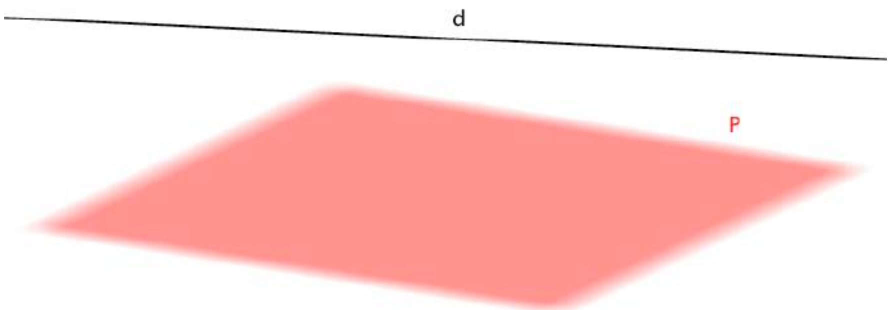
d et P sont sécants



d et P sont sécants en un point I

d et P sont parallèles

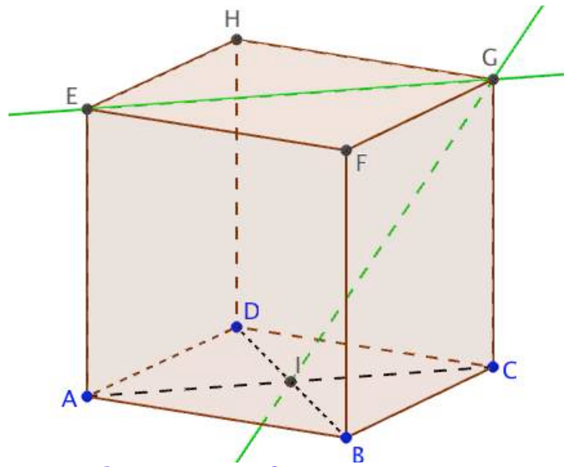
d est incluse dans P



d et P sont strictement parallèles

<u>Exemple :</u>

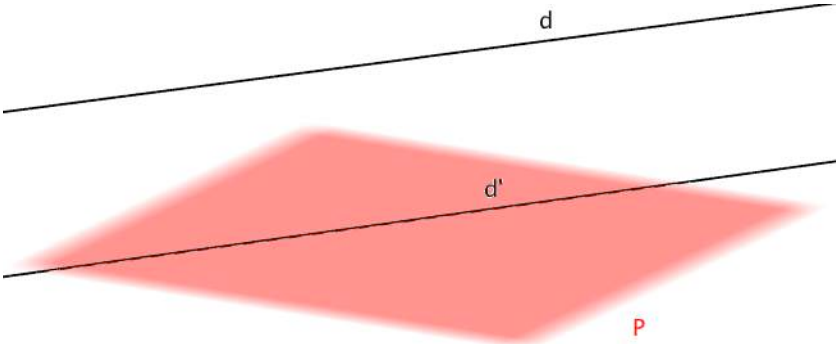
ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



II. Parallélisme

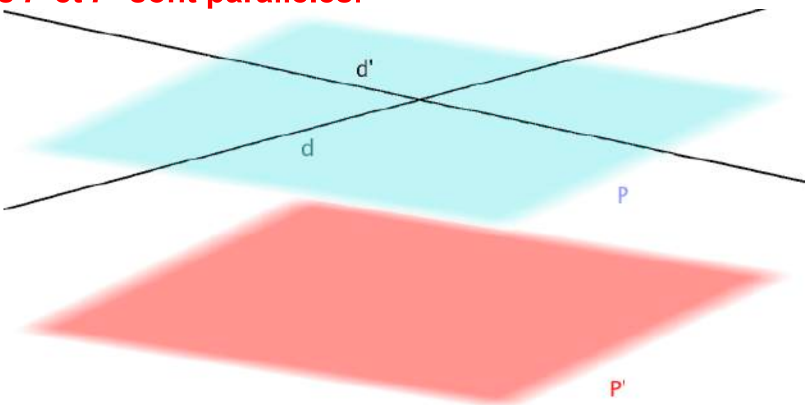
1) Parallélisme d'une droite avec un plan

Propriété : **Une droite *d* est parallèle à un plan *P*** s'il existe une droite *d'* de *P* parallèle à *d*.



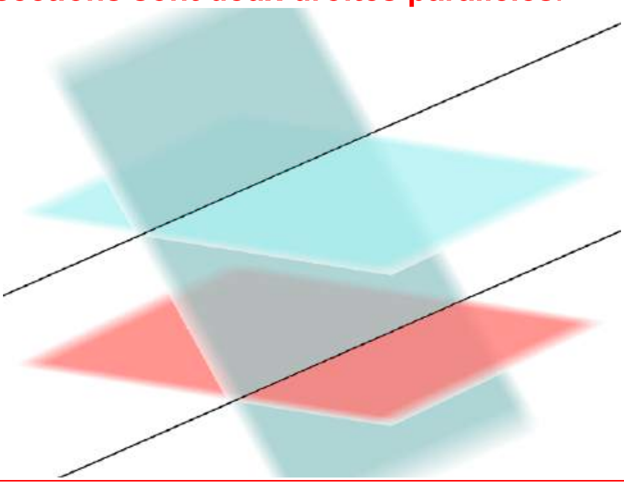
2) Parallélisme de deux plans

Propriété : Si un plan *P* contient deux droites sécantes *d* et *d'* parallèles à un plan *P'* alors **les plans *P* et *P'* sont parallèles**.



2) Parallélisme de deux droites

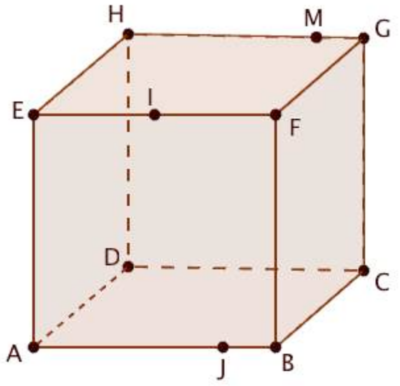
Propriété : Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et **leurs intersections sont deux droites parallèles**.



Méthode : Tracer l'intersection de deux plans

Vidéo https://youtu.be/4y00KbuCpsc

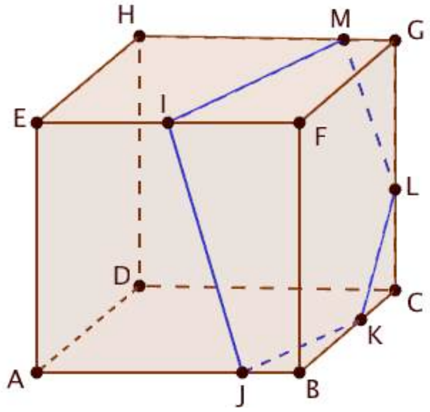
Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.



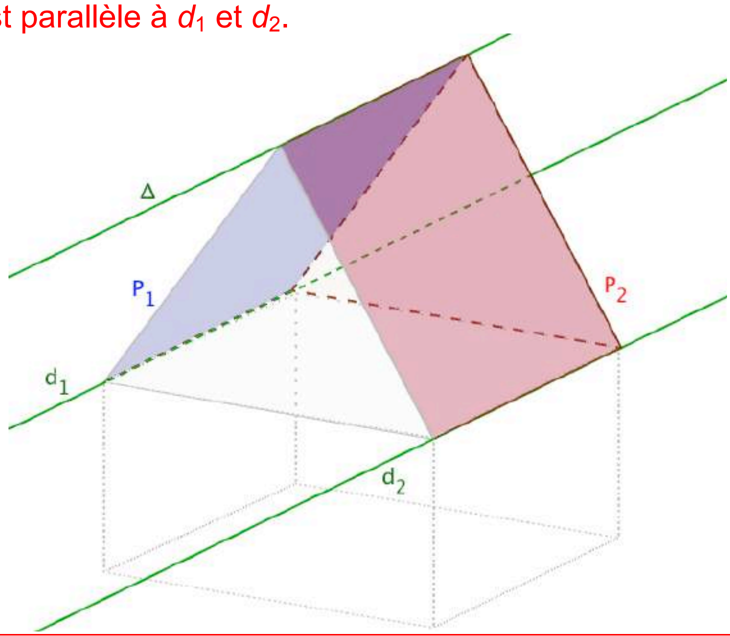
On construit la parallèle à (IJ) passant par M.
En effet, les faces ABFE et DCGH sont parallèles donc le plan (IMJ) sécant à la face ABFE coupe la face DCGH en une droite parallèle à (IJ).

De même, on trace la parallèle à (IM) passant par J.

On obtient les points K et L et ainsi l'intersection cherchée.



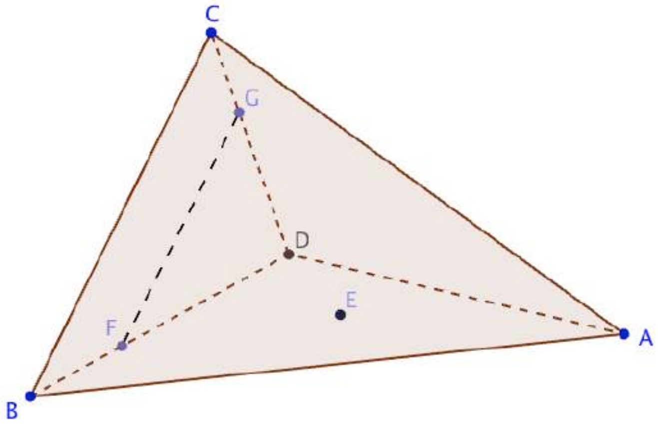
Théorème du toit : P_1 et P_2 sont deux plans sécants.
Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.



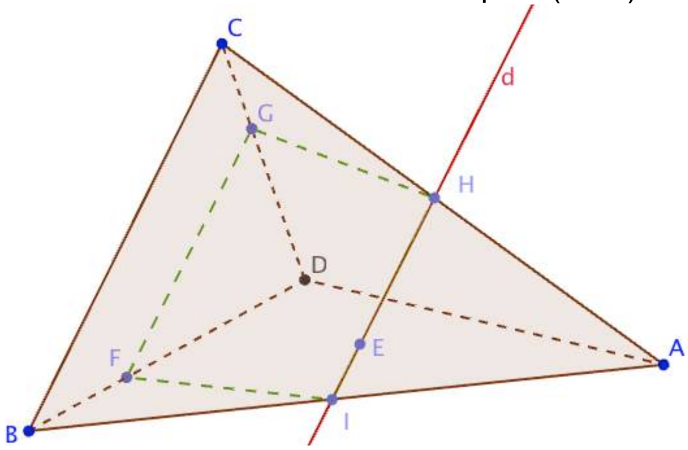
Méthode : Appliquer le théorème du toit

Vidéo https://youtu.be/TG-bVLDmAX4

ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC].
E est un point du plan (ABC).
Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.



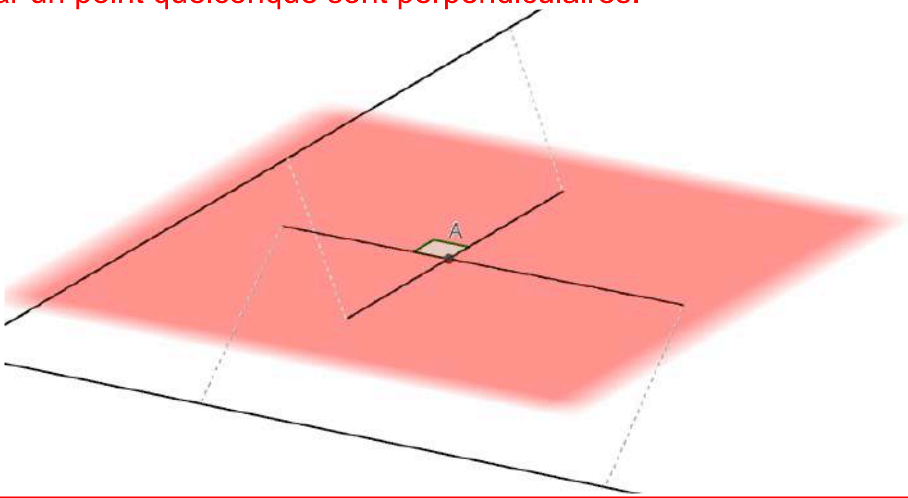
(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).
Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite *d* passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.
Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

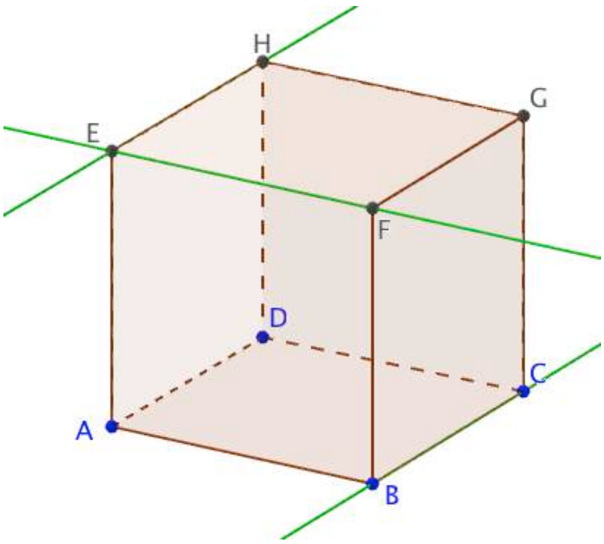


III. Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.





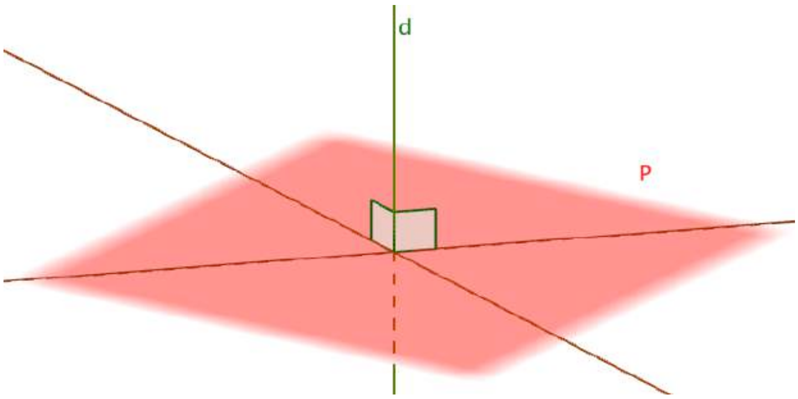
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarques :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

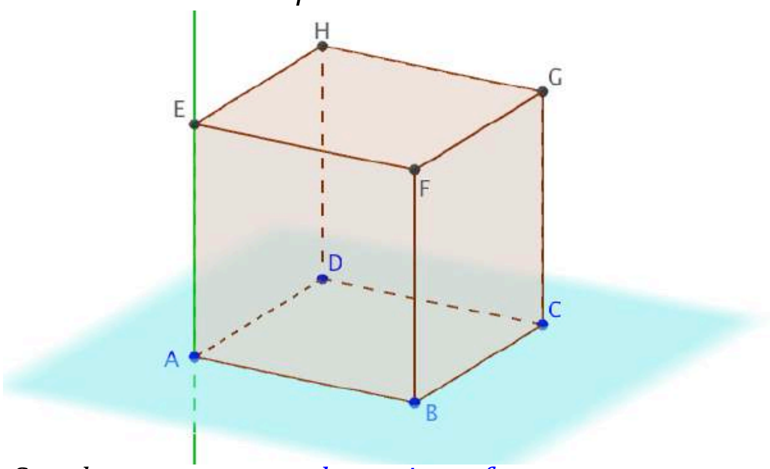
2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite *d* est orthogonale à un plan *P* si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.



Propriété : Si une droite *d* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.

Démonstrations (exigible BAC) : Ces deux propriétés seront démontrées avec les outils vectoriels dans le chapitre "*Produit scalaire dans l'espace*".

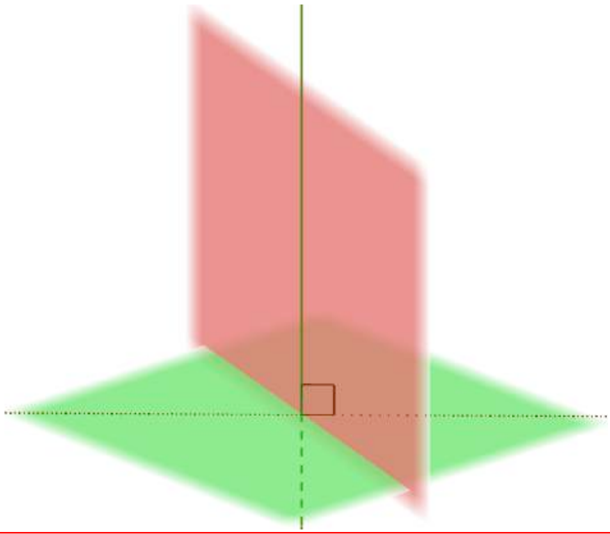


Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

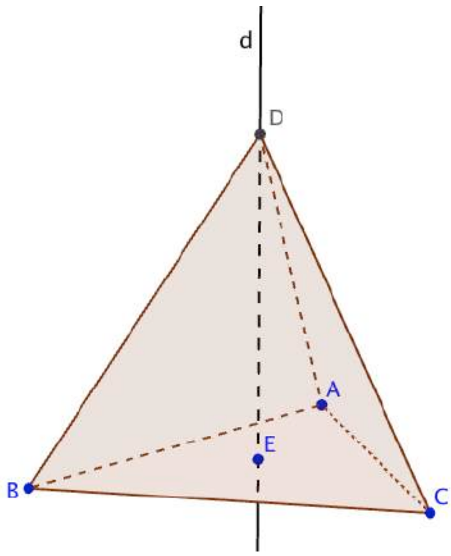
3) Orthogonalité de deux plans

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

Vidéo https://youtu.be/qKWghhaQJUs



ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite *d* passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite *d*.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

La droite *d* est orthogonale au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et *d*.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD).

II / Fonctions dérivation

1) Fonctions Premières (v. tableau)

2) Qq nvlles fonctions

P1 Si u fonction dérivable sur I, avec $u(x) > 0$ pr $x \in I$ alors : • $\sqrt{u}$ est dérivable sur I

• $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

P2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$: • $n \geq 1$: Si u fonction dérivable sur I, alors u^n est dérivable sur I.

• $n \leq 1$: Si u fonction dérivable sur I & qui ne s'annule pas sur I, alors u^n dérivable sur I.

$$\boxed{(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}}$$

Ex

P3 Soit a & b, 2 réels, $a \neq 0$, f fonction dérivable sur I. Soit J intervalle, si $\forall x \in J$, $ax+b \in J$ alors f :

$x \longmapsto f(ax+b)$ dérivable sur J

$$g'(x) = a \cdot f'(ax+b).$$

Théorème : Si u fonction dérivable sur J, & f fonction dérivable sur I, & si, $\forall x \in J$, $u(x) \in I$ alors fonction $g : x \longmapsto f(u(x))$ dérivable sur J & on a :

(généralise 3 P)

$$\boxed{g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x)).}$$

$x \mapsto u(x) \mapsto f(u(x))$.
$\in J \quad \in I$

f	f dérivée
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
$f(ax+b)$	$a \cdot f'(ax+b)$
$f(u(x))$	$u'(x) \cdot f'(u(x))$

C2 : Dérivation (Compléments)

I/ Rappels de Dérivation

1) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre $\in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

Déf Dire que f est dérivable en a signifie que le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a, et est notée $f'(a)$.

Notations : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Rq : En posant $x = a+h$, on peut écrire de façon équivalente : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Déf On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de l'intervalle I.

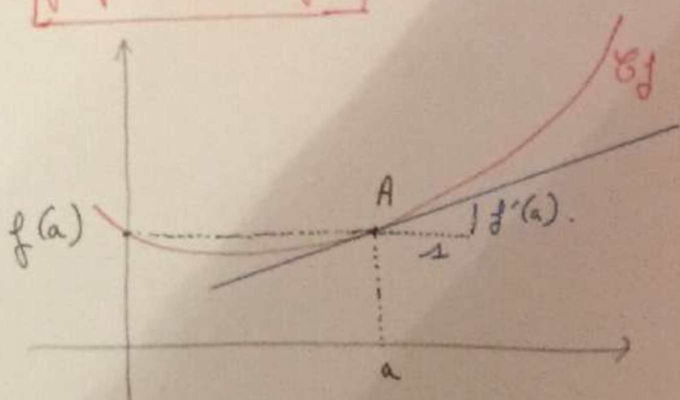
On peut alors définir la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Cette fonction est la fonction dérivée de f.

2) Tangente à la courbe d'une fonction

Déf Graphiquement, lorsque la fonction f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente.

- Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(a)$.
- Équation tangente $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$



Rq : D'un point de vue numérique, on peut approximer $f(x)$ en lisant l'ordonnée à l'aide de la tangente :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a).$$

1.3 Signe de dérivée & sens de variation

TH 4 Soit f fonction dérivable sur I.
- Si $f' \geq 0$ sur I, alors $f \nearrow$ sur I.
- Si $f' \leq 0$ sur I, alors $f \searrow$ sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors $f \rightarrow$ sur I.

1.4. Dérivée & extremum local

P5 (Condition nécessaire d'extremum local - admise)

Soit f fonction dérivable sur intervalle ouvert I & x_0 réel de I.
Si $f(x_0)$ est extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.

P6 (Condition suffisante d'extremum local - admise)

Soit f fonction dérivable sur intervalle I & $x_0 \in I$ n'étant pas une extrémité.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est extremum local.

x		x_0	
Signe f'	$-$	0	$+$
variation f	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

x		x_0	
Signe f'	$+$		$-$
variation f	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

x_0 extremum $\Rightarrow f'(x_0)=0$

C8 : Continuité & Équations

Th. TVI : Th. vls Intermédiaires.

Soit a & b $\in \mathbb{R}$ (tq a < b), f une f continue sur intervalle [a, b].
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ compris entre f(a) & f(b) l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins 1 solution sur [a, b]. (λ une vlr intermédiaire).

Th de la bijection :

Soit a & b $\in \mathbb{R}$ (tq a < b), f une f continue & strictement monotone sur intervalle [a, b].
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ compris entre f(a) & f(b), l'équation $f(x) = \lambda$ admet 1 unique solution sur [a, b].

Idée : ∘ Jct f. ... (dérivée ; tblo ... ; vr lim).
Sur l'intervalle [a, b] ; f est continue car (polynomiale) & strictement croissante.
De +, f(a) = A & f(b) = B & 0 compris entre a & b
=> Dc d'après th de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet 1 unique solution α sur [a, b].

Déterminer vlr α par méthode par balayage U dichotomie (algo).
(calculatrice)

Proposition 1.

Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ & $x = b$.

• si $f \geq 0$ sur I, alors l'aire $\mathcal{D} = \int_a^b f(x)\ dx$

• si $f \leq 0$ sur I, alors l'aire $\mathcal{D} = -\int_a^b f(x)\ dx$

Proposition 2 (Aire entre deux courbes)

Si $f \leq g$ sur I, alors l'aire comprise entre C_1 & C_2 et les droites d'équations $x = a$ & $x = b$:

$$\mathcal{D} = \int_a^b g(x) - f(x)\ dx\ \ u.a.$$

Proposition 3 (Linéarité)

• $\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

• $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$

Proposition 4 (Parité & Périodicité)

• **Si** f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2 \times \int_0^a f(x)\ dx$

• Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

• Si f est T-périodique alors $\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{0}^{T} f(x)\ dx$

Proposition 5 (Relation de Chasles)

$$\int_{a}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{b} f(x)\ dx = \int_{a}^{c} f(x)\ dx$$

2) Intégrales & Inégalités

P: Positivité

- Si pr $x\ \varepsilon\ [a\ ;\ b],\ f(x) \geq 0\ alors\ \int_{a}^{b} f(x)\ dx\ \geq 0$
- Si pr $x\ \varepsilon\ [a\ ;\ b],\ f(x)\ \leq 0\ alors\ \int_{a}^{b} f(x)\ dx\ \leq\ 0$.

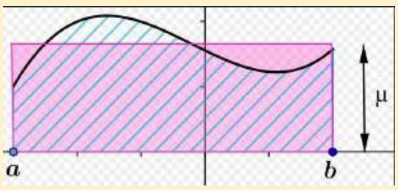
P: Ordre

- Si pr $x\ \varepsilon\ [a\ ;\ b],\ f(x)\ \leq g(x)\ alors\ \int_{a}^{b} f(x)\ dx\ \leq\ \int_{a}^{b} g(x)\ dx$

⚠ **Les réciproques sont FAUSSES.** ⚠

NB: On peut trouver un majorant plus facilement en cherchant le maximum.

3. Valeur moyenne : μ



Def: $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_{a}^{b} f(t)\ dt$

Rq: Les aires $D_1\ \&\ D_2\ sont\ \acute{e}gales.$

Prop: Si m & M st 2 réels tq

$m \leq f(t) \leq M$ pr t ε $[a, b]$ $alors$ $m \leq \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,dt \leq M$

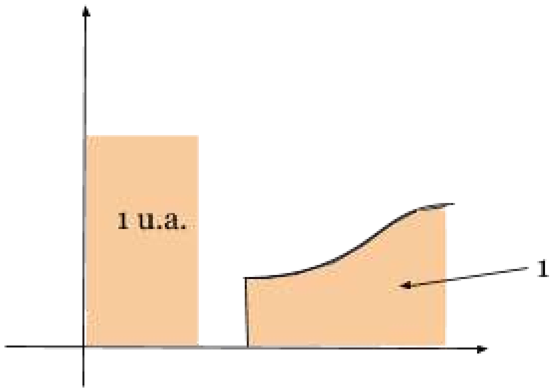
Lois de probas à densité

I/ Lois à densité des lois continues

Définition 1: Densité de probabilité

On appelle ***densité de probabilité*** sur I toute fonction f définie sur I tq:

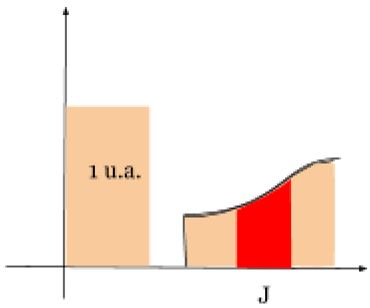
- f est continue sur I
- f est positive sur I
- $\int_I f(x)\ dx = 1$



Définition 2.

Soit f une densité de probabilité sur I. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f *sur* I signifie qu'à tout intervalle I, on associe la probabilité:

$$P(X \varepsilon J) = \int_J f(x)\ dx$$



Définition 3: Espérance mathématiques

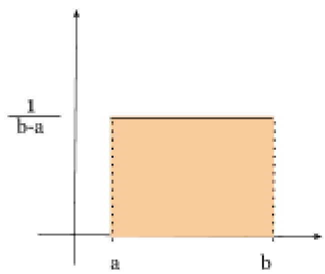
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de densité f *sur* I.
L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, est définie par:

$$E(x) = \int_I x \times f(x)\ dx$$

Définition 4.

Soient a & b, 2 réels tq $a < b$. On dit que la variable aléatoire X suit la ***loi uniforme*** sur l'intervalle $[\,a, b\,]$ si elle admet pr densité de probabilité, la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Définition 6.

Soient X : *variable aléatoire* **qui suit la loi uniforme sur** $[a,b]$**, l'espérance mathématiques vaut :**

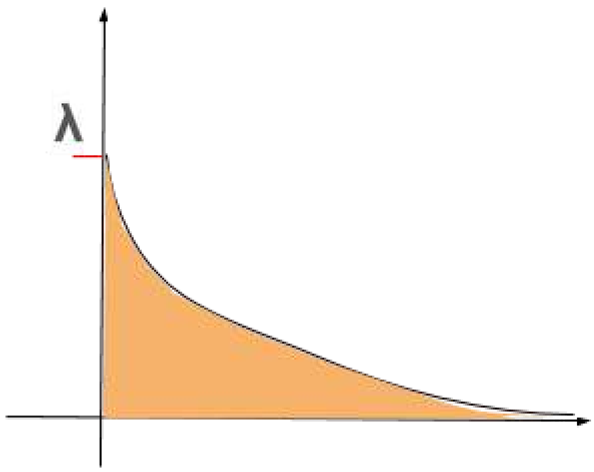
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

II/ Loi exponentielle

Définition 7 : Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire $X \sim \xi(\lambda)$**, pour** $\lambda > 0$**, si elle admet pour densité la fonction** f **:**

$$f(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}$$



Définition 8:

$X \sim \xi(\lambda)$ **pour** $\lambda > 0$**,** α & β ε $\mathbb{R}$ **&** $\alpha \leq \beta$

- $P(X \leq \alpha) = 1 - e^{-\lambda.\alpha}$
- $P(X \geq \alpha) = e^{-\lambda.\alpha}$
- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = e^{-\lambda.\alpha} - e^{-\lambda.\beta}$

Définition 9: 📌

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ & $t, \ h > 0$

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit alors qu'une loi exponentielle est une loi de vie sans vieillissement.

Définition 10: 📌📌

$X \sim \xi\,(\lambda)$ **pour** $\lambda > 0$**,**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

DEMO: P_9 📌

- $P_{X \geq t}\,(X \geq\ t + h) = \dfrac{P\,(\,(X \geq t\,)\ \wedge\ (X \geq t + h)\,)}{P\,(X \geq t\,)}$
- $P_{X \geq t}\,(X \geq\ t + h) = \dfrac{P\,(X \geq t + h\,)}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda\,(\,t+h)}}{e^{-\lambda.t}}$
- $P_{X \geq t}\,(X \geq\ t + h) = e^{-\lambda\,(t+h) + \lambda.t} = e^{-\lambda.h} = P(X \geq h)$

Preuve: 📌📌 $E(X)$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x.f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x.\,\lambda.e^{-\lambda.x}\ dx$$

Primitive de $(ax + b).\ e^{-\lambda x} = G(x)$

$G'(x) = g(x)\ \mid\ G'(x) = a.e^{-\lambda x} + (ax + b)(\,-\lambda e^{-\lambda x})$

$G'(x) = a.e^{-\lambda x} - (ax + b)(\lambda.\ e^{-\lambda x})$

$G'(x) = - ax\lambda.e^{-\lambda x} + (a - \lambda b).e^{-\lambda x}$

Par identification: (a,b) = $(\,-1,\ \frac{-1}{\lambda}\,)$ $\Rightarrow G(x) = (-x - \frac{1}{\lambda}).\ e^{-\lambda x}$

Donc $\displaystyle\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\ dx = [\,(-x - \tfrac{1}{\lambda}).e^{-\lambda x}\,]_0^M$

$$\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\,dx = (-M - \tfrac{1}{\lambda}).\ e^{-\lambda M} - (-0 - \tfrac{1}{\lambda}).e^0$$

$$\int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -M.e^{-\lambda M} - \frac{e^{-\lambda M}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M x.\lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$