T.D. M54.

Ex1 : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{C})$

a) Mq $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ & $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$

Mq $\ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$:

$<\cdot,\cdot>$ pdt scalaire standard.

a endomorphisme.

$a : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

soit $E^{=\mathbb{C}^m}$ un ensemble,

$\forall x \in E$, $x \in \ker A^*$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $<a^*(x), y> = 0$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $<x, a(y)> = 0$

$\Rightarrow x \in (\operatorname{Im} A)^\perp$

$\Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

$x, y \in \mathbb{C}^n$, $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Mq $(\operatorname{Im} A)^\perp \subset \ker A^*$,

$\boxed{\operatorname{Im} A = \{\forall x \in \mathbb{C}^m, y = Ax, \forall y \in \mathbb{C}^n\}}$

$(\operatorname{Im} A)^\perp = \{y \in \mathbb{C}^m, <y, Ax> = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n\}$

$\{y \in \mathbb{C}^m, \underbrace{<A^*(y), x>}_{A^*y = 0} = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n\}$

$\Leftrightarrow y \in \ker A^*$.

On a bien mqé $\ker A^* \supset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Par double inclusion, on a mqé $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Mq $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$ en utilisant 1° égalité.

$\ker (A^*)^* = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$.

① ① $\ker A = \{x \in \mathbb{C}^n, <x, Ay> = 0, \forall y \in \mathbb{C}^m\}$

b) A, B hermitiennes $\Rightarrow$ A.B hermitiennes.

(S) $A = A^*$ hermitienne)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a bien $A = A^*$, $B = B^*$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 5i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (AB)^* = B^* A^* = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AB \neq (AB)^*$

c) A, B unitaires $\Rightarrow$ AB unitaires.

$AA^* = I = A^*A \qquad BB^* = I = B^*B$.

$$A \cdot B (AB)^* = A\underbrace{BB^*}_{I}A^* = AA^* = I$$

d) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

A inversible $\Rightarrow \exists A^{-1}$, $\det A \neq 0 \neq \det A^{-1}$

$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) . \det(A^{-1})$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$$

e) "A triangulaire $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ de taille n mat."

Dm :

(I) $n = 1$, $\det(A_{11}) = a_{11}$ $\quad P_1$ est initialisé

(H) HDR spps $\exists k \in \mathbb{N}^*$, P_k vraie. $\quad k \in [\![1, n-1]\!]$.

Mq P_{k+1}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,k+1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

d'après HDR $\det(A) = a_{11} \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$

cl $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(R) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det(\mathrm{com}(A_{i,1}))$

A privé de i° ligne & 1° col.

2

f) Mq $A+A^*$ est hermitienne.

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

anti-herm: $A=-A^*$.

A pt ê décomposé en 2 matrices tq

mat carrée

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^*)}_{\text{hermitienne}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^*)}_{\text{anti-hermitienne}}$$

soit $B = A+A^*$,

on a $B^* = (A+A^*)^* = A^* + A$

& $C^* = (A-A^*)^* = A^* - (A^*)^*$

$= A^* - A$

$= -(A-A^*)$

$(A.B)_{jj} = a_{jj}\, b_{jj}$

$(A.B)_{jl} = 0$ si $j=l$

idem écrire $(BA)_{jl}$.

g) $A.B=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; $A.B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

dc $A.B=0 \not\Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A=\begin{pmatrix}2&-i\\2&-i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}i&i\\2&2\end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$A.B=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

h) $A.B=0 \Rightarrow B.A=0$.

---

i) A, B diagonales $\Rightarrow A.B = B.A$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$(A.B)_{j,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl}$$

A est diagonale si $a_{jk}=0$ $\forall j\neq k$ / B diag si $b_{kl}=0$ $\forall k\neq l$

$$(A.B)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl} = \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}\, b_{kl}}_{0} + a_{jj}\, b_{jl}$$

$$= a_{jj}\, b_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq l \\ a_{jj}\, b_{jj} & \text{si } j=l \end{cases}$$

j) A.B triangulaire inf (resp. sup)

$\Rightarrow C = A.B$ triangulaire inf

& $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ pr $1 \leq i \leq n$

A, B triangulaire inf $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

or $a_{ik} \begin{cases} = 0 & \text{si } k < i \\ \neq 0 & \text{si } k \geq i \end{cases}$

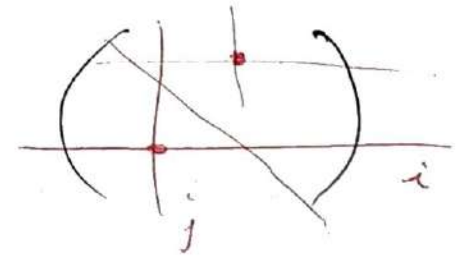
$b_{kj} \begin{cases} = 0 & \text{si } k > j \\ \neq 0 & \text{si } k \leq j \end{cases}$

$$c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj}$$

Pour $i > j \Rightarrow c_{ij} = 0$

Pour $i \leq j \Rightarrow c_{ij} \neq 0$

si $i = j$: $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.



k) A triangulaire ~~supérieure~~ inférieure

$\Rightarrow A^{-1}$ triangul^{re} ~~supérieure~~ inférieure

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$

& $a_{ij} = 0$ si $j > i$

① $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in [\![1,\dots,n]\!]$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}, \quad x_2 = \frac{-a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j^{(1)}}{a_{kk}} \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$$

ⓚ $Ax = e_k$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

Raisonnons par récurrence :

$\underline{j=1}$: $\quad a_{11} x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

$\underline{\text{HDR}}$ Supposons $\exists j \in [\![1, k-2]\!]$ tq $x_1, x_2, \dots, x_j = 0$

Mq $x_{j+1} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{j+1} a_{j+1,i}\, x_i = 0$$

D'après $\underline{\text{HDR}}$, $a_{j+1,j+1} x_{j+1} = 0 \Rightarrow x_{j+1} = 0$

$\underline{\text{cl}}$: –

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ki} x_i = 1 \Rightarrow a_{kk} x_k = 1 \Rightarrow x_k = \frac{1}{a_{kk}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & & 0 \\ & 1/a_{22} & & \\ ? & & \ddots & 0 \\ & & & 1/a_{kk} \end{pmatrix}$$

l) Tte mat de rg 1 pt s'écrire comme $A = xy^*$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $rg(A) = 1$

D'où $A = [\alpha_1 U, \alpha_2 U, \dots, \alpha_i U, \alpha_n U]$

$A = U[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$

$U \in \mathbb{K}^n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $y = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$, $x = U$.

$A = xy^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⚠ $x^* y = \langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}$
$\in \mathbb{K}$.

Ex 2 a) Mq A est diagonalisable ssi elle possède n vect Rs propres lin^t indep.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = SDS^{-1}$ & $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

& $Av_i = \lambda_i v_i$, $i \in [\![1, n]\!]$

e $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$

($\Leftarrow$)

On suppose $v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

alors $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ & $rg(S) = n$.

$\Rightarrow S$ inversible $\Rightarrow S^{-1}$ bien définie.

$\boxed{Av_i = \lambda_i v_i}$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in \mathbb{C}^n$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\boxed{AS = SD}$ alors $ASS^{-1} = SDS^{-1}$

$\neq DS$

$A = SDS^{-1} \Rightarrow A$ est diagonalisable.

($\Rightarrow$) On suppose $A = SDS^{-1}$

où S mat inversible (chgt de base)

D mat diagonale, $D = \text{diag}\{d_{11}, \dots, d_{nn}\}$

$$AS = SDS^{-1}S \Leftrightarrow AS = SD$$

càd $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$Av_i = d_{ii} v_i$ où v_i : la i° colonne de S.

alors $d_{ii} = \lambda_i$: la i° la vl^R propre $\leftrightarrow A$ au vecteur colonne v_i q est le vecteur propre associé à λ_i. $v_i \neq 0$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$rg(A) = n$ car S est inversible.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0 \in \mathbb{C}$

$v_1, \dots, v_n \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

$S = [v_1, \dots, v_n]$ de $rg(S) = n$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

b) Mq si $\forall$ vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ st distincts $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

(H) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ les vp de A.

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_s)^{\alpha_s} \quad \text{où } \alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$$

$$(H) \Rightarrow \chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n).$$

On va mq A possède n vecteurs propres lin^t indep. Grâce à a) $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

?! Supposons par l'absurde que $v_1, v_2, \dots, v_k$ (vp $\leftrightarrow A$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$) st lin^t indep. (HH)

& que $\boxed{v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}$ où $\alpha_i \neq 0$ pr au moins un $i \in [\![1, k]\!]$

lin est dép^t

pr $k \in [\![1, n-1]\!]$

et v_{k+1} vecteur propre de A où $Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (Av_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i}$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i}$$

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} \underbrace{v_i}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0 \Rightarrow v_{k+1}$ est lin^t ind de $v_1, \dots, v_k$ $\boxed{c^{!}c}$ φ (HH)

Vrai $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$.

c) Donner l'exemple d'une mat non diagonalisable.

@ bloc de Jordan $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$Av = \lambda v$

$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + v_2 \\ \lambda v_2 + v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_{n-1} + v_n \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \vdots \\ v_n = 0 \\ v_1 = \beta \end{array}$$

Donc $v = \beta e_1$ (dc et tous lin. indep)

Ex 4 Réducⁿˢ mat particulières.

a) R° Th Schur. (ttes mat)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire $\begin{cases} UU^* = I = U^*U \\ U^* = U^{-1} \end{cases}$

& $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangl^e sup

$\Rightarrow A = UTU^*$.

b) Mq A est normale ssi $\exists U$, D diagonale de vp

tq $A = UDU^*$.

A normale $\iff AA^* = A^*A$.

$$AA^* \overset{\text{Th Schur}}{=} (UTU^*)(UTU^*)^*$$

$$= UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* = UTT^*U^*$$

$$A^*A \overset{\text{Schur}}{=} (UTU^*)^*(UTU^*)$$

$$= UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT^*TU^*$$

A normale $\Rightarrow UTT^*U^* = UT^*TU^*$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$

il faut mq TT^* est diagonale $\Rightarrow$ Par Récurrence.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj}}_{\text{élt } ij \ (TT^*)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{jk}}$$

avec triangl^{re} supérieure.

Ex 4 Réducᵗⁱᵒⁿˢ mat particulières.

A^*A

Ex 6 **SVD** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A^T = A^*$

$A = U \Sigma U^*$

a) calcul VS de A :

$\rightarrow \det(A^T A - \lambda I) = 0$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$2\times3 \times 3\times2$ $\cancel{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

$\cancel{= (1-\lambda)(\lambda-2) - 1 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = (\lambda-1)^2}$

SV from vp of $A^T A$: $\sigma = \sqrt{\lambda}$ $\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = \sqrt{3} \end{cases}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

rg A = 2 car ordre + grde mat carrée inv = 2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

c) **SVD** $A = U \Sigma V^T$

$\vec{vp}$: $\ker(B - I d)$: $\left|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1$ $\left|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_2$

$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $V = [v_1, v_2]$.

$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$u_3 =$

Ex 4 Réduc°s mat particulières.

a) R° (Th) Schur. (thm mat)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire $\begin{cases} UU^* = I = U^*U \\ U^* = U^{-1} \end{cases}$

& $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangl^{re} sup

$\Rightarrow A = UTU^*$.

b) Mq A est normale ssi $\exists U$, D diagonale (up) tq $A = UDU^*$.

($\Rightarrow$)

A normale $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$.

$$AA^* \overset{\text{Th Schur}}{=} (UTU^*)(UTU^*)^* = UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* = UTT^*U^*$$

$$A^*A \overset{\text{Schur}}{=} (UTU^*)^*(UTU^*) = UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT^*TU^*$$

A normale $\Rightarrow UTT^*U^* = UT^*TU^*$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$

il faut mq TT^* est diagonale $\Rightarrow$ Par Récurrence.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj}}_{\text{elt } ij\ (TT^*)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{jk}}$$

une triangl^{re} supérieure.

$\rightarrow$ mq (PR) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$

si $i = j$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{ki} = \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{ik}} = \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |T_{ki}|^2$$

On vt mq $\sum_{k=1}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |T_{ki}|^2$

T tgl sup $T_{ij} = 0$ si $i>j$.

$$\boxed{\sum_{k=i}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{i} |T_{ki}|^2}$$

P_n : T est diagonale, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

si $i=1$: $\sum_{k=1}^{n} |T_{1k}|^2 = |T_{11}|^2$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} |T_{1k}|^2 = 0 \Rightarrow T_{12} = \dots = T_{1n} = 0$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & & \end{pmatrix} \quad l+1$$

HDR : On suppose $\exists\, l \in [\![1, n-1]\!]$ tq $T_{ij} = 0$, $i>j$, $i \in [\![1, l]\!]$,

On a pr $i = l+1$,

$\sum_{k=l+1}^{n} |T_{(l+1)k}|^2 = \sum_{k=1}^{l+1} |T_{k(l+1)}|^2 = |T_{(l+1)(l+1)}|^2$, d'après HDR

$\Rightarrow |T_{(l+1)(l+2)}|^2 + \dots + |T_{(l+1)n}|^2 = 0$

$\Rightarrow T_{(l+1)(l+2)} = \dots = T_{(l+1)n} = 0$

cc de ligne i, de 1 jusqu'à n, la mat T est diagonale lorsq A est mat normale.

($\Leftarrow$) On spps $\exists\, U$ (u), D diag $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $A = UDU^*$ & $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in Sp(A)$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

Calculons $AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*$

$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$

$A^*A = AA^* \Leftrightarrow D^*D = DD^*$

& $D^*D = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$

et $DD^* = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$.

Ainsi A est normale.

(Rq) mat (h) et (u) st cas particuliers de mat (normale).

c) Mq A (h) ssi A est diagonalisable ds base $\vec{vp}$ orthogonale & ssi (vp) st réelles.

($\Rightarrow$) On spps A (h) alors $A^* = A \Rightarrow$ A est normale. d'après (b)

$A = UDU^*$, $A^* = (UDU^*)^* = UD^*U^*$

or A est (h) d'où $UDU^* = UD^*U^*$

$\Leftrightarrow D = D^*$

$\Leftrightarrow \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$

$\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

Dus $A = UDU^* \Leftrightarrow AU = UD$ (u)

$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}(u_{jk})$ $\quad Au_j = \lambda_j u_j$, $j \in [\![1,n]\!]$

U (u) $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$

$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \|u_i\|_2 \|u_j\|_2$ $\begin{cases} \|u_i\| \|u_j\| & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow$ les $\vec{vp}$ st $\perp$.

($\Leftarrow$) On spps A est diagonalisable tq $A = UDU^*$ où U (u) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D (diag) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

et (vp) $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

& $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \|u_i\|_2 \|u_j\|_2$.

$Au_j = \lambda_j u_j$

$AU = UD \Rightarrow (AU)^* = (UD)^*$

$U^*A^* = D^*U^*$

$A^* = UD^*U^*$

$= UDU^* = A$

$\Rightarrow$ A est (h).

NB U (u) $\Leftrightarrow U^*U = I$

$\langle u_i, u_j \rangle = (\overline{u_{i,1}} \ \dots \ \overline{u_{i,n}}) \begin{pmatrix} u_{j,1} \\ \vdots \\ u_{j,n} \end{pmatrix} = \delta_{ij}$

d) Mq A (u) ssi diagonalisable ds base $\vec{vp}$ orthonormée & si (vp) ont pr module 1.

(⇒) A (u) : $A^*A = Id = AA^* \Leftrightarrow A$ normale.

$\Leftrightarrow A = UDU^* \Leftrightarrow A^*A = (UD^*U^*)UDU^*$
$= UD^*DU^*$

$AA^* = UDD^*U^*$

$\Leftrightarrow D^*D = DD^* = I$

$\Leftrightarrow \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = Id$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \ |\lambda_i| = 1.$

Ex 6 Cas concret SVD.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(TW) SVD : $A = U\Sigma V^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \sigma_r \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ } unitaires

$\sigma_i := \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} > 0 \quad i = 1, \dots, r \leq \min(m,n)$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 3 - 1 = 0$$
$= (\lambda-1)(\lambda-3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma_1 = 1, \ \sigma_2 = \sqrt{3}.$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2 = \#(\sigma_i \neq 0)$

$\vec{vp}$ de A^*A $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \left[\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\right]$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On a $\boxed{u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}}$ $\sigma_i \neq 0$

car $A = U\Sigma V^* \Leftrightarrow AV = U\Sigma \Leftrightarrow U\Sigma = AV$

$Av_i = u_i\sigma_i \Leftrightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = 1 \frac{1}{\sqrt{2}} A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$U = [u_1, u_2, u_3]$ & $u_3 \perp u_1, u_2$ & $\|u_3\|_2 = 1$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\{u_1, u_2\}$; $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\{u_3\}$

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1\rangle u_1 + \langle e_i, u_2\rangle u_2 .$$

$$p_G(e_1) = \langle e_1, u_1\rangle u_1 + \langle e_1, u_2\rangle u_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\0\\0\end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} u_2$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{6}\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\0\end{pmatrix}}.$$

$$\cancel{p_G(e_2) = \langle e_2, u_1\rangle u_1 + \langle e_2, u_2\rangle u_2}$$

$$\cancel{= \vec{0}_3 + \begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}}$$

mat des projecθs orthogonales sur $\operatorname{Im}(A)$:

$$\cancel{G = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

$$p_H(e_3) = \langle e_3, u_3\rangle u_3 + \cancel{\langle e_3, u_2\rangle u_2}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

$$G = \begin{pmatrix}2/3 & 0 & 0\\1/3 & 1/2 & 0\\1/3 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$p_G(e_1) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1/3\\0 & 0 & -1/3\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$p_G(e_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$p_H(e_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$x_2\ x \in \operatorname{Ker}(A)$

$U = [u_1, u_2, u_3]$ tq $u_3 \perp u_1, u_2$

On pose $\|u_3\|_2 = 1$

$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \langle u_3, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u_3, u_2 \rangle = 0 \\ \|u_3\|_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \end{cases}$

(2) $\Rightarrow -y = z$

(1) $-2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow u_3 = \mathrm{Vect}\left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\|u_3\|}$

$\Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $U = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

idée : chercher $P_1 = u_1 u_1^* + u_2 u_2^*$ projec° orthg sr Im(A)

$P_2 = u_3 u_3^*$

∃ mat unit^res

$P_1 x \in \mathrm{Im}(A)$

$P_2 z \in \ker(A)$

(13)

d) Déterminer les mat des projec°s orthogonales sr Im(A) & Ker(A).

$$\boxed{A = U \Sigma V^* = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^*}$$

(voir ex 1)

C'est une somme de matrices de rg 1.

On ① ② $\sigma_1 u_1 v_1^*$

$\sigma_2 u_2 v_2^*$

$\mathrm{Im}(A) = \{ y = Ax \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$

$\mathrm{rg}(A) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(A))$

$\dim(\ker(A)) = 1$.

$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ ← de fille 3, lin^t indep

$\ker A = \mathrm{Vect}\{u_3\}$.

En général, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$

$\ker(A) = \mathrm{Vect}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$

On cherche $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$P^2 = P \rightarrow$ project°

$P^* = P \rightarrow$ orthogonale (P hermitienne)

Ex5 $m,n \in \mathbb{N}^*, m \leq n, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
$B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

$AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$
$BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Mq λ vp $\neq 0$ de $AB \Leftrightarrow \lambda$ vp $\neq 0$ de BA.

$\Rightarrow$) $\lambda \neq 0$, $ABv = \lambda v$, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

$ABv = \lambda v \Leftrightarrow BA\underbrace{Bv}_{w} = \lambda \underbrace{Bv}_{w}$

$w = Bv \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

w $\vec{vp}$ à λ vp de BA.

~~[illegible]~~

$\Leftarrow$) $BAu = \lambda u$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

u $\vec{vp}$ $\leftrightarrow$ à $\lambda \neq 0$,

$AB\underbrace{Au}_{z} = \lambda \underbrace{Au}_{z}$.

$ABz = \lambda z$.

b) si AB admet 0 c vp $\Rightarrow BA$ aussi

$\lambda = 0$ vp de AB, $\exists x \neq 0$ tq

$ABx = 0x = 0 \in \mathbb{R}^m$.

b.1) $Bx \neq 0$:

$BA\underbrace{Bx}_{w} = B\vec{0} \leftrightarrow BAw = \vec{0}$ où $w = Bx \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ est une vp de BA.

b.2) $Bx = 0$

$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m, y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$

(i) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ ou (ii) $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)^\perp$.

A correspond à une AL $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
$x \longmapsto a(x) \longleftrightarrow Ax$

$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m \Rightarrow a$ est surjective $\Rightarrow$ donné $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$,
$\exists w \in \mathbb{R}^n$ tq $x = Aw$

$BAw = Bx = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ vp de $BA \Leftrightarrow \vec{vp}$ w.

(ii) $\mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Im}(A)^\perp = \mathbb{R}^m$.

$\mathrm{Im}\, A \subsetneq \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ a n'est pas surjective

Th du rg :

$n = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{< m} + \underbrace{\dim(\ker(A))}_{> n-m > 0}$

$\Rightarrow \ker A \neq \{0\}$

Donc a n'est pas injective.

$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $Ay = 0 \in \mathbb{R}^m$.

$\ker(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

$\Rightarrow BAy = B\vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda = 0$ est vp de $BA \Leftrightarrow \vec{vp}$ $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

si $m < n \Rightarrow Sp(AB) \subsetneq Sp(BA)$

c) $m = 1, n = 2$; $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$AB = a_1b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$BA = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $BAx = \underline{0}$

$\Rightarrow BA \notin GL_m(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \det(BA) = 0$.

$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0 \\ b_1a_1 \cdot b_2a_2 - b_1a_2 \cdot b_2a_1 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$ABx = 1x = \lambda \cdot x$
$\Rightarrow \lambda = 1 \neq 0$.

d) supp $m = n$: ed ens vp AB = ens vp BA.

$m = n$, $\lambda \neq 0$ (a) vp de AB ssi vp BA
$\lambda = 0$ (b) vp $AB \Rightarrow$ vp BA.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\lambda \in Sp(AB) \Rightarrow \lambda \in Sp(BA)$
$Sp(AB) \subset Sp(BA)$

$\#(Sp(AB)) = m$ et $\#(Sp(BA)) = m$ car $m = n$

dc $Sp(AB) = Sp(BA)$

$AB = U_1 \Sigma_1 V_1^* \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$BA = U_2 \Sigma_2 V_2^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$m < n$

$\left.\begin{array}{l} U_1, V_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \\ U_2, V_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right\}$ unitaires

Décomposition en valeurs singulières.

$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_r & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_r & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ex 7 Pptés base SVD.

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. $rg(A) = r \leqslant \overset{\min(m,n)}{\overset{\shortparallel}{p}}$

Soit la SVD de A : $A = U\Sigma V^* \Leftrightarrow U^* A V = \underset{\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_p)}{\overset{\shortparallel}{\Sigma}}$

& $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_r > \underbrace{0 = \dots = 0}_{\underbrace{\mu_{r+1} = \dots = \mu_p}_{p-r}}$

si $m \geqslant n$: $\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_{r} & \\ & & 0 \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}$

i) Mq $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$ & $A^t A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$

$U = [U_1, \dots, U_m]$ & $V = [V_1, \dots, V_n]$

$rg(U_i V_i^*) = 1$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

Mq $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$

soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canoniq de $\mathbb{R}^m$.
$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ " " " de $\mathbb{R}^n$.

$U = [U_1, \dots, U_m] =$

$\boxed{U = \sum_{i=1}^{m} U_i e_i^*}$

$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_{2,m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \dots$

$V = [V_1, \dots, V_n] = \sum_{i=1}^{n} V_i \varepsilon_i^*$

$\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\boxed{\Sigma \varepsilon_i = \mu_i e_i} \in \mathbb{R}^m$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

SVD $A = U\Sigma V^*$.

$\Sigma V^* = \Sigma \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \varepsilon_i^* \right)^*$

$= \Sigma \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i^* \right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\Sigma \varepsilon_i V_i^* \right)$

$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i e_i V_i^*$

$A = U\Sigma V^* \Rightarrow A = U\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i e_i V_i^* \right)$

$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \underbrace{U e_i}_{U_i \text{ i-col de } U} V_i^*$

i) (ii) Mq $A^* A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$

$A^* A = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^* \right)^* \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j V_j^* \right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i V_i U_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j V_j^* \right)$

$= \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i \mu_j V_i \underbrace{U_i^* U_j}_{\delta_{ij}} V_j^*$

$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$

~~Co Rus Σ μ U~~

c) Mq $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{U_1, \dots, U_r\}$ et
$\ker(A) = \ker(A^*A) = \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$.

$\mathrm{Im}(A) = \{u = Ax \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n\}$

$\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ car $V_1, \dots, V_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A V_i$ | $U_i = \dfrac{AV_i}{\mu_i}$

$Ax = \sum_{i=1}^{r} x_i \mu_i U_i$

$= \sum_{i=1}^{r} (x_i \mu_i) U_i$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{U_1, \dots, U_r\}$.

R* $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$, $A = U \Sigma V^*$.

$U = [U_1, \dots, U_m]$, $V = [V_1, \dots, V_n]$

$\Sigma = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$\mu_1 > \dots > \mu_r$

$\mu_i U_i = A V_i$ $\quad u_i = \frac{Av_i}{\mu_i}$ $\quad A = U\Sigma V^*$, $AV = U\Sigma$

Mq $\ker(A) = \ker(A^*A)$.

($\subset$) $x \in \ker(A)$, $Ax = 0 \Leftrightarrow A^*Ax = 0$
$\Rightarrow x \in \ker(A^*A)$

($\supset$) $x \in \ker(A^*A) \Rightarrow A^*Ax = 0$

$x^* A^* A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0$.

$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$

Mq $\ker(A) = \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$

$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0$

$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*\right) x = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\mu_i}_{>0} U_i \underbrace{(V_i^* x)}_{\in \mathbb{R}} = 0$ combi. lin. (orthonormée)

$\Rightarrow V_i^* x = 0$ pr $i \in [\![1, r]\!]$.

$\to x \in \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$

si $x = \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k V_k$, on a bien

$V_i^* x = \sum_{k=r+1}^{m} \alpha_k \underbrace{V_i^* V_k}_{\delta_{ik} = 0} = 0$.

R $\Rightarrow \ker A \subset \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$.

$n = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$
$n = (n-r) + r$

Donc pas seulement $\ker(A) \subset \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$ mais on a égalité.

R* n°1 : $\ker A^* = \mathrm{Im}(A)^\perp$ ici $A^* = A^t$
$\mathrm{Im}\, A^* = \ker(A)^\perp$ car $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

d) Mq $\mathrm{Im}(A^t) = \mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_r\}$
$\mathrm{Ker}(A^t) = \mathrm{Vect}\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$.

$\mathrm{Im}(A^*) = \ker(A)^\perp = \left(\mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}\right)^\perp$
$= \mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_r\}$.

$\mathrm{Ker}(A^*) = \mathrm{Im}(A)^\perp = \left(\mathrm{Vect}\{U_1, \dots, U_r\}\right)^\perp$
$= \mathrm{Vect}\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$

e) Déterminer les matrices des projecteurs orthogonaux sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^t)$, $\mathrm{Ker}(A^t)$ à l'aide des $(U_i)_{1 \le i \le m}$ & des $(V_i)_{1 \le i \le n}$.

On a $\mathbb{K}^n = F \oplus F^\perp$, F sev

$P : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$
$x \longmapsto Px$

$Px = x$ si $x \in F$
$Px = 0$ si $x \in F^\perp$

Sinon projecteur : $P^2 = P$ et $\mathrm{Im}(P) = F$.
orthogonale $P = P^*$

$\|U_i\|_2 = 1$ et $\langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij}$

$\boxed{P_i = U_i U_i^*}$: mat de rg 1.

si $x \in \mathrm{Vect}\{U_i\}$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

$x = \alpha U_i$

$P_i x = U_i U_i^* (\alpha U_i) = \alpha U_i = x$

$x \in \mathrm{Vect}\{U_i\}^\perp \Rightarrow \langle U_i, y \rangle = 0$

avec $P_i^* = (U_iU_i^*)^* = U_iU_i^* = P_i$

$P_i^2 = U_i \underbrace{U_i^* U_i}_{1} U_i^* = U_iU_i^* = P_i$

$x \in \text{Vect}\{U_i\}^\perp \Rightarrow \langle U_i, x\rangle = 0$

$\Rightarrow x^* U_i = 0 = U_i^* x$

$P_i x = U_i \underbrace{U_i^* x}_{0} = 0$

$F = \text{Vect}\{U_1,\dots,U_r\} = \text{Im}(A)$

$P = \sum_{i=1}^{r} P_i = \sum_{i=1}^{r} U_iU_i^*$

$P^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} U_iU_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{r} U_jU_j^*\right)$

$= \sum_{i,j=1}^{r} U_i \underbrace{U_i^*U_j}_{\delta_{ij}} U_j^* = \sum U_iU_i^* = P$

$P^* = \left(\sum_{i=1}^{r} U_iU_i^*\right)^* = \sum_{i=1}^{r} U_iU_i^* = P$

P est l'opér. de proj. orthog. sur $\text{Im}(A) = \text{Vect}\{U_1,\dots,U_r\}$

$\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^*) = \text{Vect}\{U_{r+1},\dots,U_m\}$

$P = \sum_{i=r+1}^{m} U_iU_i^* \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

• $P : \mathbb{K}^m \longrightarrow \text{Im} A = F = \text{Vect}\{U_1,\dots,U_r\}$

•• $P' : \mathbb{K}^m \longrightarrow F' = \text{Vect}\{U_{r+1},\dots,U_m\} = (\text{Im} A)^\perp$

$(P')^2 = P'$ oui car $\left(\sum_{i=r+1}^{m} U_iU_i^*\right)\left(\sum_{j=r+1}^{m} U_jU_j^*\right) =$

$= \sum_{i,j=r+1}^{m} U_i \underbrace{U_i^*U_j}_{\delta_{ij}} U_j^* = \sum_{i=r+1}^{m} U_iU_i^* = P'$

••• $P'' : \mathbb{K}^n \longrightarrow F = \text{Ker}(A) = \text{Vect}\{V_{r+1},\dots,V_n\}$

$P'' = \sum_{i=r+1}^{n} V_iV_i^*$ vérifie que $(P'')^2 = P''$ & $(P'')^* = P''$

$P''x = x$ si $x \in F''$

$P''x = 0$ si $x \in F''^\perp$

:: $\tilde{P} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \tilde{F} = \text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A^*)$

$= \text{Vect}\{V_1,\dots,V_r\}$

$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{r} V_iV_i^*$ & vérifie $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$, $\tilde{P}^* = P$

ou $\tilde{P}x = x$ si $x \in \tilde{F}$

$\tilde{P}x = 0$ si $x \in \tilde{F}^\perp$

TD 2 Normes & Conditionnement

Ex 2 Des nouvelles normes matricielles

a) Mq $\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, compatible à les normes vectorielles $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Est-elle une norme subordonnée ?

(R) $\|A\|_F^2 = \sum_i\sum_j |a_{ij}|^2 \neq \|A\|^2$ frobenius

Vérifier que c'est une norme :

1) $\|A\| \geq 0$ car c'est une $\sum$ de termes ⊕ $\Rightarrow \geq 0$

$\|A\| = 0 \Rightarrow$ tous les $|a_{ij}| = 0 \Rightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = \sum_i\sum_j |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_i\sum_j |a_{ij}| = |\lambda|\,\|A\|$

3) $\|A+B\| = \sum_i\sum_j |a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_i\sum_j |a_{ij}| + |b_{ij}|$

$= \underbrace{\sum_i\sum_j |a_{ij}|}_{\|A\|} + \underbrace{\sum_i\sum_j |b_{ij}|}_{\|B\|}$

4) Sous-multiplicativité Mq $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

$A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

$\|AB\| = \sum_i^m\sum_j^n \left|\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right|$

$\leq \sum_i^m\sum_j^n\sum_k^p |a_{ik}|\,|b_{kj}|$

posons $x = (|a_{ik}|)_{k=1}^{p} \in \mathbb{R}^p$ i fixé

$y = (|b_{kj}|)_{k=1}^{p} \in \mathbb{R}^p$ j fixé

$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\,|b_{kj}|$

et CBS $\langle x,y\rangle \leq \|x\|_2\,\|y\|_2$

$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{p} x_k^2$, $\|x\|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|\right)^2$

$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ car $\left(\sum_k |x_k|\right)^2 \geq \sum_k |x_k|^2$

TP.0

→ $\boxed{\text{Numpy}}$ & tabl^x.

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ v = np.array ([1,2,3])

$\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ w = np.arange (4)

len(v) : ...

$M=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}$ M=np.array([[0,1], [2,3], [4,5]])

mat à coeff réels M'=np.array ([[0,1], [2,3], [4,5]], dtype = "float")

→ nbr dimen°s

np.ndim (M)

np.size(M) & np.shape (M)

↳ nbr élt ↳ dimen° M

w[0] # 1° élt w[1] # 2° élt w[-1] # der élt

M[0,1] # élt en ligne 1, colonne 2.

$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ v1 = np.ones(3)

$\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ v2 = np.zeros(3)

$\vec{v_3}=(0\ \ 0{,}1\ \ 0{,}2\ \dots\ 0{,}9)$ v3 = np.arange(0., 1., 0.1)

inclus ↑ ↑ exclus

$\vec{v_4}=(0.\ \ 0{,}11\ \ 0{,}\overline{22}\ \dots\ 0{,}\overline{88}\ \ 1.)$ v4 = np.linspace (0, 1, 10)

10 pts répartis UN entre 0 & 1

A1 = np.ones([3,4]) $A_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

A2 = np.zeros([3,4])

A3 = np.eye (3) $A_3 = I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

x = np.linspace (0, 1, 5) ; y = np.linspace (1, 2, 5)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

$X=\begin{pmatrix}0&0.25&0.5&0.75&1\\0&\vdots&\vdots&\vdots&1\\0&&&&1\\0&&&&1\\0&&&&1\end{pmatrix}$

$Y=\begin{pmatrix}1&&&&1\\1{,}25&&&&\\1{,}5&&&&\\1{,}75&&&&\\2&&\dots&&2\end{pmatrix}$

→ générer des mat aléatoire^t

$M=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&3\\4&-5\end{pmatrix}$

np.min (M)

np.sum (M) M.sum (axis=0)

np.mean(M) # moyenne

Opéra°s usuelles n matrices

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ M = np.array([[1,2,3], [4,5,6], [7,8,9]])

b = 3*M # multiplie chq terme

S = M+b # somma° terme à terme

c = np.dot(M, b) # produit matriciel

^tM = np.transpose(M), M.T # transposée

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v = np.array([1,2,3])

$^t\vec{V} = (1\ 2\ 3)$ v[np.newaxis].T

Résoudre des systèmes linéaires

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

x = np.linalg.solve(A, b) # sol° Ax = b.

vérifica° b = Ax ? np.dot(A, x)

Extraire ss-pties tblo NumPy

t = np.array([1,2,3,4,5,6])
t1 = t[1:3] # de t[1] à t[2]
t4 = [:-1] # tt sauf dernier élt.
t5 = [1:-1] # tt sauf 1° & D° élt.

N = np.array([[0,1,2], [2,3,4], [4,5,6]])
N[0:2, 2]
2 premières lignes & 3° colonne de N.

Masque 4 tblo booléens

a = np.arange(6)**2 ; b = a<15 , c = a[a<15]
[0 1 4 9 16 25]   [True True True True False False]   [0 1 4 9]

Redimensionner les tableaux

A = np.arange(6)   A = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
B = A.reshape(3, 2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Concaténer tableaux

tab1 = np.array([1,2])   tab2 = np.array([3,4])
tab3 = np.concatenate((tab1, tab2))

a = np.array([[1,2],[3,4]]) ; b = np.array([[5,6]])
M1 = np.concatenate((a,b), axis=0) # b est D° ligne
=1) # D° colonne

$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

②

→ on pt facilmt copier scalaires MS pas filt tblx !
b = np.zeros([2,2])
c = b.copy()

Évaluer f en plusieurs points

def f1(var):
    return (var - 2)

x = [0 1/3 2/3 1]
y = [-2 -1,66 -1,33 -1]

n = 4
x = np.linspace(0,1,n) $y_i = f1(x_i)$ $0 \le i \le n-1$
y = f1(x) # y vect^{r} de composantes

Mettre en œuvre fs manière vectorielle

y1 = np.cos(x) * np.exp(-x**2) + 2*(x-1)**2
y1 = [3 1,13.. 0,71 0,33..]

Save tblo Numpy en format texte ou binaire

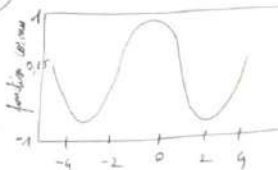
a = np.arange(16).reshape(4,4)
np.savetxt("tblo.txt", a)
c = np.loadtxt("tblo.txt")

pr binaire
tblo.npy

mp.save obligat^{t} pr tblo dim > 3

Matplotlib

x = np.linspace(-5, 5, 100)
plt.plot(x, np.cos x)
plt.ylabel("f cosinus")
plt.xlabel("x")
plt.show() # pr que le plot ne se ferme pas



Options utiles :

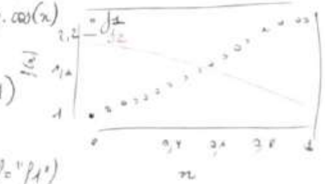
color, line width, linestyle, label, legend, axis, yticks, xtick, title

f contour pr tracer isovaleurs f 2 variables.

def f1(x):
    return np.exp(np.sin(x))

f2 = lambda x: 1 + np.cos(x)
N = 50
X = np.linspace(0,1, N+1)
f1X = f1(X)
f2X = f2(X)
plt.plot(X, f1X, 'b•', label="f1")
f2X 'x'
plt.grid(True, which="both")
plt.xlabel('x') ; plt.ylabel('f(x)')
③ plt.title("..") ; plt.legend() ; plt.show()

Les f f1 & f2



Matplotlib (Research)

SciPy (AL & otrs)

```
M1 = np.array([[1,2], [3,4]])
sl.det(M1)   # Δ(M1)
sl.inv(M1)   # (M1)^-1

la, v = sl.eig(M1)
l1, l2 = la        # vs valrs propres.
v1 = v[:,0]   # vp ↔ vp l1.
v2 = v[:,1]
```

$\|M_1\|_2$ sl.norm(M1) $\|M_1\|_1$ sl.norm(M1, 1)

$\|M_1\|_\infty$ sl.norm(M1, np.inf)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

x = sl.solve(A, b)

y = A.dot(x) - b (teste du résultat).

Donc $\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \overset{CS}{\leq} \|x\|_2 \|y\|_2 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$

$\|x\|_1 \|y\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\right)\left(\sum_{l=1}^{p} |b_{kj}|\right)$

alors $\|AB\| \leq \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\left(\sum_{k}^{p} |a_{ik}|\,|b_{kj}|\right) \leq \sum_i\sum_j \left(\sum_k |a_{ik}|\right)\left(\sum_k |b_{kj}|\right)$

$\leq \underbrace{\left(\sum_i \sum_k |a_{ik}|\right)}_{= \|A\|} \underbrace{\left(\sum_j \sum_k |b_{kj}|\right)}_{= \|B\|}$

5) Compatible avec la norme vectorielle ?

On a $\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|, \ \forall x \in \mathbb{K}^n$.

$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |Ax|_i = \max \left|\sum a_{ij} x_j\right| \ldots ?$

Mq $\|A\|_\infty \leq \|A\|$

$\|A\|_\infty \overset{def}{=} \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$ pr i_0 qui réalise le max sur les i $\leq \sum_i\sum_j |a_{ij}| = \|A\|$ (1)

Alors puisque $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ (ok) $\leq \|A\|\,\|x\|_\infty$

ok compatible av norme vectorielle $\|\cdot\|_\infty$.

→ Même démarche pr $\|\cdot\|_1$.

$\|A\|_1 \leq \|A\|$ mm calculs

$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1 \leq \|A\|\,\|x\|_1$

ok compatible av norme vectorielle $\|\cdot\|_1$.

→ Norme 2 ?

$\|Ax\|_2 \leq \|A\|\,\|x\|_2 \leq \|A\|_S \|x\|_2$

$\boxed{(\|A\|_2 \leq \|A\|_S)}$ cf 1

$\|A\|_S^2 = \sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}|^2$

et $\|A\|^2 = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|\right)^2 \geq \sum\sum |a_{ij}|^2 = \|A\|_S$

ok compatible av norme vectorielle $\|\cdot\|_2$.

a) $\|A\|$ subordonnée ?

$$\|A\| \overset{def}{=} \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$\|I\| = 1$ si $\|A\|$ subordonnée.

Or ici $\|I\| = \sum_i \sum_j |\delta_{ij}| = n \neq 1$. (ici $m=n$)

b) soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv & $\|\cdot\|$ norme vectorielle.

Mq $\|x\|_M = \|Mx\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|x\|_M \overset{def}{=} \|Mx\|$

- $\|x\|_M = 0 \Rightarrow \|Mx\| = 0 \Rightarrow x = 0$ car M inv
- $\|x\|_M \geq 0 = \|Mx\| \geq 0$.
- $\|\lambda x\|_M = \|M(\lambda x)\| = |\lambda| \, \|Mx\| = |\lambda| \, \|x\|_M$
- $\|x+y\|_M = \|M(x+y)\| = \|Mx + My\| \leq \|Mx\| + \|My\|$
  $= \|x\|_M + \|y\|_M$.

Déduire $\|A\|_M = \|MAM^{-1}\|$ pr les normes matr. subordonnées.

$$\|A\|_M \overset{def}{=} \max_{\|x\|_M=1} \|Ax\|_M$$ (p déf norme matr subord).

$$\|A\|_M = \max_{\|x\|_M=1} \|Ax\|_M = \max_{\|Mx\|_M} \|MAx\|_M$$

$$= \max_{\|y\|=1} \|MAM^{-1}y\| = \|MAM^{-1}\|$$

on posant $y = Mx \Rightarrow M^{-1}y = x$.

c) Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ & $\mathbb{K}^m$.

Mq $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ déf. une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ & compatible av $\|\cdot\|$.

(P) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ m ct1 x.

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ (★)

$\Rightarrow \|A\| > 0$ & (★) vrai pr $x = 0$. or $\|Ax\| \geq 0$ (nv)

(H) $\|\lambda A\|$ & (I) $\|A+B\|$ idem

(SM) sous-multiplicativité $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$?

$\|AB\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$, $\|A\underbrace{Bx}_{y}\| \leq \|AB\| \, \|x\|$

$$\Rightarrow \|AB\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \, \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \sup \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \, \|B\|$$

Ex1 Équivalences de normes sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

a) Mq $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_S \leqslant \sqrt{n}\ \|A\|_2$.

$\rightarrow \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j \left(\sum_i a_{ji}^* a_{ij} \right)$

$= \sum_j (A^*A)_{jj} = \underline{tr(A^*A)}$

$|a_{ij}|^2 = \overline{a_{ij}} \cdot a_{ij} = a_{ji}^* a_{ij}$.

$\Rightarrow \|A\|_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ où $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$.

$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \mu_1^2$

$\Rightarrow \|A\|_2 \leqslant \|A\|_S \leqslant \sqrt{n}\ \|A\|_2$

$\hookrightarrow \mu_1^2 \leqslant \sum \mu_i^2 \leqslant n\mu_1^2$

$\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_S^2 \leqslant n\|A\|_2^2$

b) $\|A\|_2 \leqslant \sqrt{mn}\ \max_{i,j} |a_{ij}|$!

$\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j \underbrace{\max_{i,j} |a_{ij}|^2}_{\text{indep. de } i \,\&\, j} = mn \max_{i,j} |a_{ij}|^2$

$\max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant \|A\|_2$?

$\exists\, i_0, j_0$ tq $\max |a_{ij}| = |a_{i_0,j_0}|$

On sait que $\|\cdot\|_2$ est compatible à norme vectorielle.

$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|x\|_2$ car $\underline{mm}$ compatible $\forall x \in \mathbb{K}^n$.

soit $x = e_{j_0}$ où $e_i = (0, \dots, \underset{\uparrow i}{1}, 0, \dots, 0)$ base canoniq de $\mathbb{K}^n$

$\|Ae_{j_0}\| \leqslant \|A\|_2 \cdot 1$

$\|Ae_{j_0}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij_0}|^2 \geqslant \max_i |a_{ij_0}|^2 = |a_{i_0,j_0}|^2$

$|a_{i_0,j_0}| \leqslant \|A\|_2$.

c) $\|A^*\|_1 = \|A\|_\infty$

On a $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j^n |a_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i^m |a_{ij}|$

Or $\|A^*\|_1 = \max_j \sum_i |a^*_{ij}| = \max_j \sum_i |a_{ji}| = \|A\|_\infty$

d) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

D'abord $\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \leq m \sum_{j=1}^m |a_{i_0 j}|^2$

pour i_0 qui réalise le max

$\Rightarrow \|A\|_2^2 \leq m \max_i \sum_j |a_{ij}|^2 \leq m (\max_i \sum_j |a_{ij}|)^2 = m \|A\|_\infty$.

Puis mq $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2$.

$\|\cdot\|_2$ nm compatible 4 mv : ~~$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$~~ nms

$\hookrightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$: prendre x tq $\|x\|_2 = \sqrt{n}$

soit $x_j = \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}$ pr $j = 1, \dots, n$. & $x_j = 0$ si $|a_{ij}| = 0$.

i_0 tq $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|$

$\|x\|_2^2 = \sum_j x_j^2 = \sum_j \left(\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}\right)^2 = n$

$\sum_i \overline{y_i} x_i = \langle x, y \rangle$ $\mathbb{C}$

$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$

$\|Ax\|_2 = \|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\|_2$ ← vecteur dt la i° composante est $\sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i$

car $\bar{z} \cdot z = |z|^2$.

si $\mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$

$\sum \left(\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}\right)^2 = \sum \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} \cdot \frac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|}$

$= \|\sum_j^n a_{ij} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}\|_2$

$= \|\sum_j^n |a_{ij}|\|_2$

$\|Ax\|_2^2 = \sum_i^m (\sum_j^n |a_{ij}|)^2 \geq (\max_i \sum_j |a_{ij}|)^2 = \|A\|_\infty$

$\Rightarrow \|A\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \underbrace{\|x\|_2}_{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2$

c) d) pour A^* & 4 c)

Mq $\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$

(d) 4 $B = A^*$.

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|B\|_\infty \leq \|B\|_2 \leq \sqrt{m} \|B\|_\infty$$

$$\|A\|_1 \qquad \|A\|_2 \qquad \|A\|_1$$

car $\|A\|_2 = \rho(A^*A) = \rho(AA^*) \Rightarrow \|A\|_2 = \|A^*\|_2$

Ex 4 (Th de Eckart-Young) SVD

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $rg(A) = r \leq p = \min(m,n)$.

$A = U\Sigma V^*$, $\begin{cases} U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{cases}$ unit^{res}.

$\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = diag(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$

$\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U_i \mu_i V_i^* = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$$

On pred $B_k = \sum_{i=1}^{k} \mu_i U_i V_i^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

$1 \leq k < r$ la meill^{re} approx de A tq

$\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de $rg(B) = k$.

$$\mu_{k+1} = \|A - B_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$$

a) Mq $rg(B_k) = k$ puis mq $\|A - B_k\|_2 = \mu_{k+1}$

$\overset{\|}{\dim}(\mathrm{Im}(B_k))$

$\mathrm{Im}(B_k) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid y = B_k x \in \mathbb{C}^m\}$

$$B_k x = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i U_i \underbrace{(V_i^* x)}\right)$$

$\langle x, V_i \rangle = \alpha_i \in \mathbb{C}$ à i fixé

$$B_k x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \alpha_i U_i$$

$B_k x$ est une CL des $U_1, \dots, U_k$.

$\Leftrightarrow B_k x \in \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_k)$ car $U_1, \dots, U_k$ orthos.

$\mathrm{Im}(B_k) \subset \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_k)$.

$rg(B_k) \leq k$.

$U_1 V_1^* \neq U_2 V_2^* \neq \dots \neq U_k V_k^*$.

& on n'a pas $U_i V_i^* = U_j V_j^*$ $1 \leq i, j \leq k$.

et $\mu_1 > 0$ car $k < r$,

Donc $rg(B_k) = k$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Vect}\{U_1, \dots, U_k\}$ 26

Puis $A - B_k = \sum_{i=k+1}^{r} \mu_i U_i V_i^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-r})$$

$\Rightarrow A - B_k = U D V^* \Rightarrow$ ce n'est pas une SVD à cause du rgt des VS.

$\|A - B_k\|_2 = \|U D V^*\|_2$

$\|A - B_k\|_2 = \|D\|_2 = \mu_{k+1}$ (rayon spectral) car $\|UC\|_2 = \|C\|_2$, $\|CU\|_2 = \|C\|_2$. unit^{re} ⚠

b) soit $z \in \mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_{k+1}\}$ non nul.

Mq $\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2$.

$z = \sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i$, on calcule Az

$$Az = \sum_{i=1}^{k+1} z_i A V_i$$

$Az = U \Sigma V^* z$

$\|Az\|_2 = \|U \Sigma V^* z\|_2$

$Az = U\Sigma V^* z$

$\|Az\|_2 = \|U\Sigma V^* z\|_2 = \|\Sigma V^* z\|_2$

$V^* z = V^*\left(\sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} z_i \underbrace{V^*}_{\text{mat}} \underbrace{V_i}_{\text{vecteur}}$

$V = [V_1, \dots, V_n]$; $V^* = \begin{bmatrix} V_1^* \\ \vdots \\ V_n^* \end{bmatrix}$

⚠ ce n'est pas $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$V^* V_i = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$ $\quad v_j^T = V_j^* V_i \quad , 1 \leq j \leq n$
$= \delta_{ij}$

$\underbrace{V^* z}_{\text{vecteur}} = \sum_{i=1}^{k+1} z_i e_i$ $\quad$ car $z = \sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i$

$z = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{z}_i e_i$

⚠ $V^* z \neq \sum_{i=1}^{k+1} z_i \in \mathbb{C}$

$\boxed{\|Az\|_2} = \|\Sigma V^* z\|_2$
$= \|\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i z_i e_i\|_2$
$\geq \|\mu_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z_i e_i\|_2$
$= \boxed{\mu_{k+1} \|z\|_2}$ $\Rightarrow \boxed{\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2}$ (*)

$\mu_1 > \dots > \mu_{k+1} > \dots > \mu_n > 0 \dots$ $\quad$ $Vz \in Vect\{V_1, \dots, V_k\}$

c) soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de rg k, $z \in Ker(B)$.
Estimer $\|Az\|_2$ en f $\|A-B\|_2$ puis mq
p l'absurde $\|A - B_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$ afin de conclure

$z \in ker(B)$: $Bz = 0$
$rg(B) = k < r$

$\dim(ker(B)) = \underset{\substack{\| \\ \min(m,n)}}{p} - k > p - r \geq 0$

$\Rightarrow \dim(ker(B)) > 0$, $z \neq 0$ tq $Bz = 0$.
$\|Az\|_2 = \|(A-B)z\|_2 \overset{\text{compatibilité}}{\leq} \|A-B\|_2 \|z\|_2$ $\quad$ (nV) & $\underline{\text{n compat}}$

Mq par l'absurde $\|A - B_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$
On spps p ⊙ $\|A - B\|_2 < \|A - B_k\|_2$ (**)

si $z \in Ker(B)$ alors $\|AZ\|_2 \leq \|A - B\|_2 \|z\|_2$
$\leq \|A - B_k\|_2 \|z\|_2$
$= \mu_{k+1} \|z\|_2$.

(**) $\|Az\|_2 \leq \mu_{k+1} \|z\|_2$

On a si $z \in \mathrm{Ker}(B)$ alors

$$\|Az\|_2 \leq \mu_{k+1} \|z\|_2 .$$

soit $z \in \mathrm{ker}(B) \cap \underbrace{\mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}\}}_{rg = k+1}$

$z \neq 0$?

soit $\mathrm{ker}(B) = \{W_1, \dots, W_\ell\}$, $\ell = p-k > 0$.

z est une cl de $W_1, \dots, W_\ell, V_1, \dots, V_{k+1}$.
(th du rg). $p-k$

Or $\ell + k + 1 > p \Rightarrow$ C'est une famille non-libre.

$$z = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i W_i = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j V_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i W_i - \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j V_j = 0$$

Donc au moins 1 des β_i ou des α_j est non nul. $\Rightarrow z \neq 0$.

Mais $\|Az\|_2 < \mu_{k+1} \|z\|_2$.
est en contradiction de (★)

$$\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{c!!c}$ engendré par (★★)

Ex3 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv, $B \approx A^{-1}$, $X = I - AB$,
sppo $\|X\| < 1$. Mq $\|A^{-1} - B\| \leq \dfrac{\|BX\|}{1 - \|X\|}$

th Von Neumann $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ cv ssi $\rho(A) < 1$
($\|A\| < 1$)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = (I-X)^{-1} \quad \text{car } \|X\| < 1$$

$I - X = AB \iff A^{-1}(I-X) = B$ car A inv.

$$A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right) = B(I + X^2 + \dots + X^n + \dots)$$

$$A^{-1} - B.I = B \sum_{k=1}^{\infty} X^k = B(X + \dots + X^k + \dots)$$

$$= BX(I + X \dots + X^{k-1} + \dots)$$

$$= BX\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)$$

$$\|A^{-1} - B\| \underset{\text{ss-multip}}{\overset{\triangle I}{\leq}} \|BX\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|X^k\|\right) \leq \|BX\| \sum_{k=0}^{\infty} \|X\|^k$$

$$\leq \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}$$

car $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in]0,1[$, $x = \|X\|$

Ex6 Conditionnemt de la mat laplacien

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

intro $\begin{cases} -\partial_{xx} u(x) = f(x) & , x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

$L = -\partial_{xx}$ opérateur linéaire dit de Laplace de dim ∞.

Approx^{on} de L : opérateur linéaire de dim finie

matrice $\leftarrow A$.

a) Calculer $\det(A_n) = n+1$ (PR).

b) $V_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ & $v_i = \sin\left(\frac{k\pi i}{n+1}\right)$

$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$.

Vérifier $Av_k = \lambda_k v_k$, $\forall k, 1 \leq k \leq n$.

écrire ligne par ligne

ff trigo ⚠ 1° & D° ligne.

c) cal rayon spectral A , puis son condit. en $\|\cdot\|_2$.

$\rho(A) = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k| = \|A\|_2$.

→ les vp de A sont réelles car $A^T = A$.

A est déf ⊕ $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\langle Ax, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$.

ici $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$

$\Rightarrow 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

car $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\Rightarrow \lambda_k = 2\underbrace{\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}_{>0} < 1$

$\max \lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$

(29) $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

a) $\det(A_{n+1}) = 2\det(A_n) + 1 \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \\ & 0 & 2 & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2\det(A_n) - \det(A_{n-1})$

$= 2(n+1) - n = n+2$ (PR).

b) $AV_k = \lambda_k V_k$; $V_k = \left(\sin \frac{k\pi i}{n+1}\right)_{i=1,\dots,n}$

$2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$

$i \in [\![2, n-1]\!]$:

$(AV_k - \lambda_k V_k)_i =$

$= -\sin(\overbrace{(i-1)kh}^{\alpha-\beta}) + 2\sin(ikh) - \sin(\overbrace{(i+1)kh}^{\alpha+\beta})$

$- 2(1-\cos(kh))\sin(ikh)$

$\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2} = \sin\alpha \cdot \cos\beta$

$\alpha = ikh$, $\beta = kh$.

$= -2\sin(ikh)\cos(kh) + 2\sin(ikh) - 2\sin(ikh)$
$+ 2\cos kh \sin ikh$

$= 0$

Donc $AV_k = \lambda_k V_k$ $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$

$\underline{i=1}$: $(AV_k - \lambda_k V_k)_1 = 2\sin kh - \sin(2kh)$
$- \cancel{2\sin kh} + 2\cos kh \sin kh$

$\underline{i=n}$ $(AV_k - \lambda_k V_k)_n = -\sin(n-1)kh + 2\sin nkh$
$- \cancel{2\sin nkh} + 2\cos kh \sin(nkh)$

$\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ où $\alpha = nkh$, $\beta = kh$.

c) $\rho(A) = \max_{1\le k\le n} |\lambda_k| = 2\max\left(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$

$= 2\left(1-\underbrace{\cos\frac{n\pi}{n+1}}_{\text{proche } -1}\right)$

$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}\,\|A^{-1}\|_2 = \lambda_n$

$\lambda_n = \lambda_{max}(A)$

$\frac{1}{\lambda_1} = \lambda_{max}(A^{-1}$

$A = SDS^{-1}$ car A est $\underline{\text{sym}}$.

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

S $\underline{\text{inv}}$

$A^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$

$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_n}, \dots, \frac{1}{\lambda_1}\right)$

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$$
$$= \sqrt{\rho(A^*A)} \, \|A^{-1}\|_2$$
$$= \sqrt{\rho(A)^2} \sqrt{\rho(A^{-1})^2}$$
$$= \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$$

A est déf $+$, $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
> 0 si $x \neq 0$.

$\Rightarrow \lambda_k$ st réelles & positives

$h = \frac{\pi}{n+1}$

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{\cancel{2}\left(\cancel{\cos} - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right)}{\cancel{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\right)} = \frac{1-\cos nh}{1-\cos h}$$

or $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$$\frac{1-\cos nh}{1-\cos h} \simeq \frac{(nh)^2}{h^2} = O(n^2)$$

Ex 7 Déterminant & conditionnement

soit $n \geq 2$

$A = \mathrm{diag}(1, 10, \dots, 10)$

a) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq A]. Calculer en f de n le dét & le cond en norme $\|\cdot\|_\infty$ de A.

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = 10.$$

$$\mathrm{cond}_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 10 \times 1 = 10$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 10$$

$$A^{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 1.$$

$$\Rightarrow \mathrm{cond}_\infty(A) = 10 \quad \text{et} \quad \det(A) = 10^{n-1}$$

b) idem à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ déf par :

$$\begin{cases} b_{i,i} = 1 & 1 \leq i \leq n \\ b_{i,i+1} = 2 & 1 \leq i \leq n-1 \\ b_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\det(B_1) = \det([1]) = 1}$$

$$\cancel{\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1}$$

$$\cancel{\det(B_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

B_n ▽ $\Rightarrow \det(B_n) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = 1$

$\| B_n \|_\infty = 3$

$\| B_n^{-1} \|_\infty$

$n=2$

$$B_2^{-1} B_2 = I_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1} B_3 = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $a_{ii} \Rightarrow \frac{1}{a_{ii}}$ μ ▽ $(▽)^{-1}$

$$\Rightarrow B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i \geq 1$

i° diag $= (-1)^i \times 2^i$

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-1)^{n-1} 2^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 4 \\ & 0 & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-1)^{m-1}2^{m-1} \\ \hline & & & & \vdots \\ \emptyset & & & & 4 \\ & & & & -2 \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & c^T \\ \hline 0 & B_{m-1}^{-1} \end{array}\right)$$

(PR) vrai au rg $m-1$.

$$B_m = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_{m-1} \\ 0 & \end{array}\right), \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1}$$

$$I = B_m B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^T \\ \hline \emptyset & B_{m-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & c^T \\ \hline \emptyset & B_{m-1}^{-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_{m-1} \end{array}\right)$$

$c = ?$ $\begin{cases} 1 = 1 \\ c^T + b^T B_{m-1}^{-1} = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$

$$c^T = -b^T B_{m-1}^{-1} = [-2, 0 \dots 0] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{m-2} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 4 \\ & & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T = [-2, 4, -8, \dots, (-2)^{m-1}] \Rightarrow (P_m).$$

ok : vrai $\forall m \geq 2$.

$\| B_m \|_\infty = 3$

$$\| B_m^{-1} \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |b_{ij}^{-1}| = \sum_{j=0}^{m-1} 2^j = \frac{1-2^m}{1-2} = 2^m - 1$$

$$\Rightarrow \text{cond}_\infty(B) = 3(2^m - 1).$$

Ex 8 idée

$$Ax = b$$
$$Ay = b + \delta b$$

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

33 $\det(A) = 10^{-6}$, $\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_2(A) = 10^6$.

Ex 9 Conditionnement du pb de l'inversion d'une matrice

A inv, $B = A + \delta A$.

a) Mq $\dfrac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq Cond(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$B^{-1} - A^{-1} = (A^{-1}A)(B^{-1} - A^{-1})(BB^{-1})$$
$$= A^{-1}(AB^{-1} - I)(BB^{-1})$$
$$= A^{-1}(A-B)B^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|A^{-1}(A-B)B^{-1}\|$$
$$\leq \|A^{-1}\|.\|B^{-1}\| \, \|A-B\|$$

or $A - B = -\delta A$

$$\Rightarrow \frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq con(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

b) si $\|\delta A\| \leq \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|} \Rightarrow A + \delta A$ inv & (d'où $2\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$) $\|A^{-1}\delta A\| \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + 2 cond^2(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)^2$$

$$A + \delta A \overset{inv}{=} A(I + \underbrace{A^{-1}\delta A}_{-X}) = A(I - X)$$

Th de Nm + hyps vérif $\longrightarrow$
$$\|(I-X)^{-1} - I\| \leq \frac{\|+X\|}{1 - \|+X\|} = \frac{\|-A^{-1}\delta A\|}{1 - \|-A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$$

$$= cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} - \frac{1}{\|A^{-1}\delta A\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} - \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}$$

b) A inv, mq $A+\delta A$ inv.

si $\|\delta A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, $A+\delta A = A(I+A^{-1}\delta A)$ $\quad -X$

$\|X\| = \|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \leq \cancel{\|A^{-1}\|} \frac{1}{2\cancel{\|A^{-1}\|}} = \frac{1}{2}$

Th Von Neumann

si $\|X\| < 1 \Rightarrow \sum X^k = (I-X)^{-1} \Rightarrow I-X$ inv

$\Rightarrow A+\delta A$ inv car A & $I-X$ st inv.

$(A+\delta A)^{-1} - A^{-1} \ldots\ldots$

$= (A+\delta A)^{-1}\left[I - (A+\delta A)A^{-1}\right]$

$= (A+\delta A)^{-1}\left[\cancel{I} - \cancel{I} - \delta A.A^{-1}\right]$

$= -(A+\delta A)^{-1}\delta A.A^{-1}$

$\alpha = \frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|(A+\delta A)^{-1}\| \, \|\delta A\|$

$= \|(A(I-X))^{-1}\| \, \|\delta A\|$

$= \|(I-X)^{-1}A^{-1}\| \, \|\delta A\|$

$\leq \|(I-X)^{-1}\| \, \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \cdot \frac{\|A\|}{\|A\|}$

$\leq \|(I-X)^{-1}\| \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Or

$\|X\| \leq \frac{1}{2}$ par Von Neumann.

$\|(I-X)^{-1}\| \overset{V.N}{=} \|\sum_{k\geq 0} X^k\| \leq \sum_{k\geq 0} \|X^k\|$

$\leq \sum_{k\geq 0} \|X\|^k \leq \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\alpha \leq \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(\sum_{k\geq 0}\|X\|^k\right)$

$= \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1 + \sum_{k\geq 1}\|X\|^k\right) = \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1 + \|X\| \sum_{k\geq 0}\|X\|^k\right)$

$\leq \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1 + 2.\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \frac{\|A\|}{\|A\|}\right)$

$= \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + 2\operatorname{cond}^2(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)^2$

TD-3 - M Directes de Résolution de systèmes linéaires

Ex 1

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$A = A^{(1)}$, $b = (b^1)$

b) Résoudre p. M EDG (S) $Ax = b$ m $k \in \{1,2,3\}$

→ préciser $A^{(k+1)}$ & $b^{(k+1)}$ tq $A^{(k+1)} X = b^{(k+1)}$

→ donner $L^{(k)}$ tq $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$

Algo Gauss

Pour $k = 1$ à $n-1$

$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$

$b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}$

soustraire à la (i° équation) la k° équat × l_{ik} ($i = k+1, \dots, n$).

$l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & -l_{ik} & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=1}$

$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -2 & 1 & & \\ +2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$, $b^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=2}$

$l_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \boxed{-1}$

$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, $b^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=3}$

$l_{i3} = \dfrac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = 3$, $L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^{(4)} = U$

$(-1)(-2) - 1 = 1$

$$A^{(4)}X = A^{(4)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b^{(4)}$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$AX = b \quad . \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Pour $i = n-1$ à 1 de pas -1

$$x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right)$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$$

$t = -2$

$z = (-5-t)/3 = 1$

$y =$

$x =$

$$A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)}$$

$$A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)} = L^{(2)}L^{(1)}A^{(1)}$$

$$A^{(4)} = L^{(3)}A^{(3)} = L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A^{(1)}$$

$$U = \underbrace{L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}}_{L^{-1}} A \qquad A = LU \Rightarrow U = L^{-1}A.$$

$$\Rightarrow L = \left(L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}\right)^{-1} = \left(L^{(3)}\right)^{-1}\left(L^{(2)}\right)^{-1}\left(L^{(1)}\right)^{-1}$$

$$\left(L^{(i)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ l_{ki} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 0 & 1 & \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(L^{(i)}\right)^{-1}\left(L^{(j)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & l_{ki} \quad l_{kj} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$i \quad j$

$$A = LU$$

$$\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{1} \cdot \underbrace{\det(U)}_{\prod_{i=1}^{n} u_{ii}} = -6.$$

Ex 3 Complexité calcul déterminant.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad c(n)$: coût calcul de $\det(A)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \underbrace{\mathrm{cof}(i_0, j)}_{(-1)^{i_0+j}}$$

mat à lig^lle où on enlève ligne i_0 & colonne j de A.

a) Mq $c(n) \geq n!$ $\forall n \geq 2$.

$n=2$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - b\cdot c \Rightarrow 2 \times \,\&\, 1 +$

$c(2) = 3 \geq 2!$

Spps vrai $c(n) \geq n!$ pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i_0 j} \underbrace{\mathrm{cof}(i_0, j)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

$c(n+1) \geq (n+1)\, c(n) \geq (n+1)\, n! = (n+1)!$

Donc $\forall n \geq 2$, $c(n) \geq 2$.

b) on suppose ordi effectue 10^9 opé / s ; déterminer minorant tps calcul nécess^re pr calcul det de $n = 20$.

$n = 20$, $c(20) \geq 20!$

$t_\mu \geq 20!\, 10^{-9} \approx 2{,}43 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-9} \approx 77$ années

$\det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

$A = LU \simeq \mathcal{O}(n^3)$ opérations élémentaires

$\frac{2}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ op él.

$c(n) = \frac{2}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2) + n + 1$.

$c(20) = \frac{2}{3}(20^3) \cdot 10^{-9}\,s = \frac{2}{3}\, 8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}\,s \approx 5{,}2 \cdot 10^{-6}\,s$.

Cramer

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad i \in [\![1, n]\!]$$

$(n+1)$ det à calculer $\geq (n+1)!$

$c(n) \geq n!$

Ex4 Étude de complexité algorithmique

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv. $\quad A = LU$

$A^{-1} = [x_1, \dots, x_n]$ où $x_i \in \mathbb{R}^n$.

$AA^{-1} = I \iff Ax_i = e_i \quad i \in [\![1,n]\!]$

↳ base canoniq.

1) Résoudre successivt n systèmes p $\boxed{M}$ PDG

on fais $Ax_i = e_i$.

Gauss $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ pr $Ax = b$.

coût : $n \times \left(\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)\right) = \frac{2}{3}n^4 + O(n^3)$

$n = 1000$ coût : $0{,}66 \cdot 10^{12}$ opé. élémt.

2) Établir décomp LU de A puis s'en servir pr résoudre successivt les n systèmes linéaires.

$A = LU$: coût $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

$\underbrace{Ux_i}_{y_i}$: $LUx_i = e_i$ → 1) $Ly_i = e_i$, 2) $Ux_i = y_i$, $i \in [\![1,n]\!]$

1) $Ly = b$ $\boxed{M}$ de descente $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$y_1 = b_1$ pr $i = 2$ à n.

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

→ i fixe : i opéraOs $\left(\begin{array}{l} i-1 \ \times \\ i \ + \end{array}\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = O(n^2)$$

or $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $Ux = y$

$\begin{pmatrix} \ddots & u_{ij} \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$

pour $i = n-1$ à 1 de pas -1.

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=1+i}^{n} u_{ij} x_j\right) u_{ii}$$

coût pr i fixé

$n - i + 1$ $*$
$n - i$ $+$

| i fixé de n à 1.

$$\sum_{i=1}^{n} 2n-2i+1 = 2n^2 - \frac{2n(n+1)}{2} + n = n^2$$

$A = LU$: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ opé

$A x_i = e_i$ n résol de $n^2 + n^2$ opé.

$$\frac{2}{3}n^3 + 2n^3 + O(n^2) = \frac{8}{3}n^3 + O(n^2) \text{ opés}$$

$n = 1000$ $\quad 2{,}33.10^9$.

Ex 5 Stratégie Résolution $A^2X = b$

1) calculer $A^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$

$a_{ij} = 0$
boucle sur $k = 1$ à n :
$a_{ij} = a_{ij} + a_{ik} a_{kj}$.

n produits
n sommes.

$$\underbrace{n^2}_{\text{nbr coeff}} \underbrace{(2n \cancel{-1})}_{\text{opé par 1 coeff}} = 2n^3$$

2) $A^2 = LU$ coût $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

3) résolution $Ly = b$ + $Ux = y$
coût $2n^2$ opé.

Total $\boxed{\frac{8}{3}n^3} + O(n^2)$ opér.

$\Rightarrow A^{-1}$ on ne la calcule pas.

$\rightarrow$ 1 factorisation $A = LU$: coût $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

$A^2 = LULU$

$A^2 x = b \iff L\underbrace{U\underbrace{L\underbrace{Ux}_{y}}_{z}}_{t} = b$

1) $Lt = b$
2) $Uz = t$
3) $Ly = z$
4) $Ux = y$.

coût : $4n^2$ opérations

Total : $\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 + O(n^2) = \boxed{\frac{2}{3}n^3} + O(n^2)$

↳ coût divisé par 4.

Ex 6 Matrice de permutat°

σ une permutat° de $\{1,\dots,n\}$;

$P = P_\sigma$ la mat de permutat° associée.

σ bijec°, c'est une applicat°

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$e_i \longmapsto g(e_i) = e_j \text{ où } j = \sigma(i)$$

P_σ : la matrice de permutat° associée à σ.

$$P_\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$e_i \longmapsto e_{\sigma(i)} \quad (= e_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\{1,2,3\} \underset{\sigma^{-1}}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} \{2,3,1\}$$

$\sigma(\{1,2,3\}) = \{2,3,1\}$; $\sigma^{-1}(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\displaystyle (P_\sigma)^{-1}}{\overset{\shortparallel}{P_{\sigma^{-1}}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_\sigma^T$$

$$AP_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$ on permute les colonnes de A selon σ.

$$P_{\sigma^{-1}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ on permute les lignes de A selon σ^{-1}

a) Mq P est orthogonale et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$, $\det P \in \{\pm 1\}$

P_σ orthogonale ? $P_\sigma P_\sigma^T = I = P_\sigma^T P_\sigma$

$$(P_\sigma^T)_{ij} = (P_\sigma)_{ji} = \delta_{j\,\sigma(i)} \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ pour $i, j \in [\![1,n]\!]$.

$$(P_\sigma P_\sigma^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{ik}(P_\sigma^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{i,\sigma(k)}}_{=1 \text{ si } i=\sigma(k)} \underbrace{\delta_{j,\sigma(k)}}_{=1 \text{ si } j=\sigma(k)}$$

$\Rightarrow i = j = \sigma(k)$.

Donc $P_\sigma P_\sigma^T = I$.

De m pr $P_\sigma^T P_\sigma = I$.

Donc P_σ est orthogonale.

P_σ inversible ? oui

$1 = \det(I) = \det(P_\sigma P_\sigma^T) = \det(P_\sigma)\det(P_\sigma^T)$

car $\det(A)=\det(A^T)$

$= \det(P_\sigma)^2$

$\Rightarrow \det P_\sigma \neq 0 \Rightarrow \det(P_\sigma) = \{1, -1\}$.

Mq $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

On a vu que $(P_\sigma)^{-1} = P_\sigma^T$ car P_σ orthogonale.

$(P_\sigma^T)_{ij} = (P_\sigma)_{ji} = (e_{\sigma(i)})_j = \delta_{j,\sigma(i)}$

$(P_\sigma^{-1})_{ij} = (P_\sigma^T)_{ij}$

$P_{\sigma^{-1}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$e_i \longmapsto e_{\sigma^{-1}(i)}$

$(P_{\sigma^{-1}})_{ij} = (e_{\sigma^{-1}(j)})_i = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}$ $\begin{cases} 1 \text{ si } i=\sigma^{-1}(j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$(P_\sigma^{-1}) = \delta \quad = \delta_{\sigma^{-1}(j), i} = (P_{\sigma^{-1}})$.

Donc $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

$j = \sigma(i)$

$\sigma^{-1}(j) = i$.

b) pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner les élts P^TA & AP.

$(AP_\sigma)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . \underbrace{\delta_{k,\sigma(j)}}_{=1 \text{ si } k=\sigma(j)}$

$= a_{i,\sigma(j)}$ car k est uniq, on n'a plus la $\sum_k$.

On a permuté les colonnes de A selon σ.

$(P_\sigma^T A)_{ij} = (P_{\sigma^{-1}} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P_{\sigma^{-1}})_{ik} A_{kj}$

$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{i,\sigma^{-1}(k)}}_{\substack{=1 \text{ si } i=\sigma^{-1}(k) \\ \sigma(i)=k}} a_{kj} = \quad \tau$

~~$= a_{\sigma^{-1}(i)\, j}$~~

$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma^{-1}(k),i} A_{kj}$ $\quad \sigma^{-1}(k)=i \Leftrightarrow k=\sigma(i)$

$= A_{\sigma(i),j}$

Ex 7 Inverse mat triangulaires

a) soit $A = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$

& $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

1) Mq $\det(A) = \det(B) . \det(C)$.

$\boxed{M1}$ Raust PR 1° colonne de B.

$\boxed{M2}$ LU, LDR.

$$\begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)}_{\text{diagonale p bloc}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & I \end{array}\right)}_{\triangleright \text{ p bloc}}.$$

$\det\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)$ (réc. triviale sur lignes de I)

$\det\begin{pmatrix} B & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(B)$ (réc triviale sur D° ligne de I).

à écrire

2) ad A est inv ssi B & C st inv ds ce cas

Mq $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1}XC^{-1} \\ \hline & C^{-1} \end{array}\right)$

$\det(A) \neq 0$ ssi $\det(B) . \det(C) \neq 0$ ssi $\begin{cases} \det(B) \neq 0 \\ \det(C) \neq 0 \end{cases}$

$$A^{-1} . A = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1}XC^{-1} \\ \hline & C^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B^{-1}X - B^{-1}XC^{-1}C \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

$AA^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

c) Mq inverse mat $\triangleright$ est aussi mat $\triangleright$.

dévelppt en isolant 1 colonne de la mat. récurr sur $n = 1$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} a & x^T \\ \hline 0 & A_{m+n-1} \end{array}\right)$ $\quad a \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $A_{m+n-1} \in \mathcal{M}_{m+n-1}(\mathbb{R})$

$$A^{-1}_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} & -a^{-1}x^T A^{-1}_{m+n-1} \\ \hline 0 & A^{-1}_{m+n-1} \end{array}\right)$$

43 p formule a.2

n-1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 26 & 41 & 49 \\ 5 & 40 & 107 & 135 \end{pmatrix}$. $\quad A = LU$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad b = Ax$ $\quad b = Ay$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

i $\quad j$

$i = 2$, $j = 1$ $\quad i > j$ $\quad i \leq j$

1 seule boucle

→ sélectionner lignes / colonnes matrice

$A[k:, k:]$

np.outer

$A = LU$

$Ax = b \Rightarrow$ 1) $Ly = b$
$LUx = b$ $\quad$ 2) $Ux = y$.

pr $i, j \in [\![k+1, n]\!]$

$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}$

$A =$ np.zer

$A[k, k]$

① $l_{ik} = \dfrac{A[k+1:, k]}{A[k, k]} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ ← pivot

$\begin{pmatrix} \boxed{x} & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & ? & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$A[k+1:, k]$

i équat + lin

~~for i in range(k~~

```
for k in range(n-1):
    for i in range(k+1, n):
```

② $A[i, k+1:] += \underbrace{-A[i, k]}_{\text{multiplicateur}} * A[k, k+1:]$

a vecteurs lignes

Descente & Remontée

1) $y_1 = b_1$

for $i = 2$ à n

$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$ → $A[i, :i] @ y[:i]$

2) $x_n = y_n / u_{nn}$

for $i = n-1$ à 1 de pas -1.

$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) / u_{ii}$ → $\dfrac{A[i, i+1:] @ x[i+1:]}{A[i, i]}$

→

$A[k+1:, k] = \dfrac{A[k+1:, k]}{A[k, k]}$

(ii)

vect

$n \times 1 \times 1 \times n$ $\quad$ ( ) ( )

Par ∞_1 TD1 : A_{n-1} ▽ $\Longrightarrow$ A^{-1}_{n-1} ▽ ← oui

~~$\Longrightarrow A^{-1}$ ▽~~

~~A_{m+n-1} ▽ par bloc HDR sur taille $n+m-1$ $\Longrightarrow$ A^{-1}_{n+m-1} est ▽ par bloc.~~

~~$\Rightarrow A_{n+m}$ est ▽ par bloc~~

2b) Mq

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline X & C \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline X & C \end{array}\right)$$

$$I = A^{-1}A = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline \underset{=-C^{-1}XB^{-1}}{M} & C^{-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} B & 0 \\ X & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$MB + C^{-1}X = 0$$

$$MB = -C^{-1}X$$

$$\Rightarrow M = -C^{-1}XB^{-1}$$

Ex 8 Décomposition LU d'1 mat particulière.

a) soit $A = LU$ la décomposition LU d'une mat $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $|l_{i,j}| \leq 1$. soit a_i^T & u_i^T les lignes i de A & U respectivement.

Mq $u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$

& que $\|U\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$.

$A = LU$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{\text{ligne k de U}}$

$a_i^T = (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})^T$, $u_i^T = (\underbrace{0 \dots 0}_{i-1}\ u_{ii} \dots u_{in})^T$

$j \geq i$ fixé $\underbrace{a_{ij}}_{\text{ligne i de A}} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} = 1 \times \underbrace{u_{ij}}_{\text{ligne i de U}}$ $\quad j \in [\![i, n]\!]$

Rq $\|U\|_\infty = \max_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|}_{\|u_i^T\|_1}$ $\left\{ a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_k^T = u_i^T \right.$

$$\|A\|_\infty = \max_i \|a_i^T\|_1 \quad \& \quad \|U\|_\infty = \max_i \|u_i^T\|_1$$

Par récurrence sur les lignes $i \in [\![1, n]\!]$

<u>$i=1$.</u> $\quad \|u_1^T\|_1 = \|a_1^T\|_1 \overset{(*)}{\leqslant} \|A\|_\infty$

<u>$i=2$</u> $\quad \|u_2^T\|_1 = \|a_2^T - \ell_{21} u_1^T\|_1$

$$\leqslant \|a_2^T\| + \underbrace{|\ell_{21}|}_{\leqslant 1} \|u_1^T\|_1$$

$$\leqslant \|A\|_\infty + \|A\|_\infty = 2\|A\|_\infty.$$

<u>étape k</u> (H.R)

$$\|u_k^T\|_1 \leqslant 2^{k-1} \|A\|_\infty$$

$\|A\|_\infty = \max_i \|a_i^T\|_1$ & $\|U\|_\infty = \max_i \|u_i^T\|_1$

Par récurrence sur les lignes $i \in [\![1, n]\!]$.

$\underline{i=1}$. $\|u_1^T\|_1 = \|a_1^T\|_1 \overset{(*)}{\leq} \|A\|_\infty$

$\underline{i=2}$ $\|u_2^T\|_1 = \|a_2^T - l_{21} u_1^T\|_1$

$$\leq \|a_2^T\| + \underbrace{|l_{21}|}_{\leq 1} \|u_1^T\|_1$$

$$\leq \|A\|_\infty + \|A\|_\infty = 2\|A\|_\infty.$$

étape k (H.R)

$$\|u_k^T\|_1 \leq 2^{k-1} \|A\|_\infty$$

$$\|u_{k+1}^T\|_1 = \|a_{k+1}^T - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j} u_j^T\|_1$$

$$\leq \|a_{k+1}^T\|_1 + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|l_{k+1\,j}|}_{\leq 1} \|u_j^T\|_1$$

$$\leq \|a_{k+1}^T\|_1 + \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\right) \|A\|_\infty$$

$$\leq \|A\|_\infty \underbrace{\left(1 + \frac{1-2^k}{1-2}\right)}_{2^k}$$

ok étape $\underline{k+1}$

de ok $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

(25) max lignes

$\|A\|_\infty = \max \|a_i^T\|_1$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq k \leq n} \|u_k^T\|_1 \leq \max_{1 \leq k \leq n} 2^{k-1} \|A\|_\infty$$

$$\|U\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty.$$

b) soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \text{ ou } j=n \\ -1 & \text{si } i>j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mq A a décomp LU de $|l_{ij}| \leq 1$

& $u_{nn} = 2^{n-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$\underline{1° \text{ étape } LU}$

$$l_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 1. \quad i \geq 2$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + l_{i1} a_{1j}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)} \qquad i,j \in [\![2, n]\!].$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 1 & & 2 \\ \vdots & -1 & \ddots & 2 \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \\ \vdots & 0 & \ddots \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = A^{(1)} L^{(1)}$$

$\underline{2° \text{ étape } LU}$

$$l_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = 1.$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & & 2 \\ & 0 & 1 & & 4 \\ & & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \phi \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 1 & \phi & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & & & 2 \\ & 0 & 1 & & & & 2^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & & & 2^{k-2} \\ & & & & \ddots & & 2^{k-1} \\ & & & & & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

k-1 colonnes, n

Étape k : $l_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} = 1$ pr $\underline{i > k}$.

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj} \qquad i,j \in [\![k+1, n]\!]$$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & 1 & & & 2^2 \\ & & & & & \vdots \\ & 0 & 1 & 1 & & 2^{k-1} \\ & & 0 & & \ddots & 2^k \\ & & 0 & -1 & 1 & 2^k \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & \ddots \\ & & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$$

à étape n-1 :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & & 2 \\ & & & 2^2 \\ & 0 & & \vdots \\ & & 1 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad 2^{n-1} = u_{nn}$$

$$U = A^{(n)} = \underbrace{L^{(n-1)} L^{(n-2)} \cdots L^{(1)}}_{L^{-1}} A^{(1)} \qquad |l_{ij}| = 1 \Uparrow$$

$$A = LU, \quad L = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Prendre l'inverse de la matrice L : c'est changer le signe.

Ex 9 Matrice flèche, soit $n \geq 2$,
$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$
$c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, matrice flèche $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_1} & & & & b_1 \\ & a_2 & & \emptyset & \vdots \\ & \emptyset & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

on sppse $(n-1)$ premiers coeff de a st $\neq 0$.

$a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \neq 0 \Rightarrow$ ts min^rs principx de A de $k-1$ à $k = n-1$ st $\underline{\text{inv}}$. (car mat diagonale).

A $\underline{\text{inv}}$?

a) Détermnr facto LU de A.

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ -\frac{c_1}{a_1} & & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & \boxed{a_2} & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & c_{n-1} & a_n - b_1 \frac{c_1}{a_1} \end{pmatrix}$$

46 front$(A) = (1, 2, \dots, n-1, 1)$ si $c_1 \neq 0$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \emptyset \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & -\frac{c_2}{a_2} & \emptyset & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{L^{(2)}A^{(2)}}{\overset{\shortparallel}{A^{(3)}}} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ 0 & a_2 & & & b_2 \\ & & a_3 & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots \; c_{n-1} & a^{(3)}_{nn} \end{pmatrix}$$

où $a^{(3)}_{nn} = \left(a_n - b_1 \frac{c_1}{a_1}\right) - \frac{c_2}{a_2} b_2$.

écrire étape k ; à la fin $(n-1)^{\text{ème}}$ étape

$$A^{(n)} = L^{(n-1)} \underbrace{L^{(n-2)} \cdots L^{(1)} A^{(1)}}_{A^{(n-1)}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & & 0 & a^{(n)}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{où } a^{(n)}_{nn} = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{c_i}{a_i}$$

2) cd° n. q$^{\text{le}}$ condi° A est inv

CNS (condi° nécess$^{\text{re}}$ suffis$^{\text{te}}$) A soit inv est $a^{(n)}_{nn} \neq 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \frac{c_1}{a_1} \; \frac{c_2}{a_2} & \cdots \; \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{ki} & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(i)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -l_{ki} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$$

c) supp. $b = c$. Mq $A = LDL^T$ (L : triangle unité)

(Th) inv $\Rightarrow \exists !\; A = LU$.

$b = c \Rightarrow A$ symétriq, $A = LU = LDR$

$D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale.

$R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangle à diagonale unité.

$$LDR = A = A^T = R^T D^T L^T = R^T D L^T$$

$$\Longrightarrow R = L^T, \quad A = LDL^T.$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \bigcirc \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & a_{n-1} & \\ \bigcirc & & & a^{(n)}_{nn} \end{pmatrix}$$

front(A) = front(L)
front(A) = front(U^T).

Exo 11 Mat à diag S^T dominante p col.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(*) $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j \in [\![1, n]\!]$

Mq A admet décomp LU & L dsdpc.

1° étape LU

$$A = A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & w^T \\ \hline v & B \end{array}\right) \quad \& \ \alpha \in \mathbb{R}, \ v, w \in \mathbb{R}^{n-1}, \ B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i| \Rightarrow \alpha \neq 0 \\ |b_{jj}| > |w_j| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |b_{ij}| \quad \text{pr } j \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}$$

$$A^{(2)} = L^{(1)} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ -\frac{v}{\alpha} & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right) \quad -\frac{v}{\alpha} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

et $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{v_i}{\alpha}\right| < 1$ par (*).

$l_{11} = 1, \ l_{i+1,1} = -\frac{v_i}{\alpha}, \ i \in [\![1, n]\!]$

$$A^{(2)} = L^{(1)} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & w^T \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad \text{où } C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

$$\boxed{c_{ij} = b_{ij} - w_j \frac{v_i}{\alpha}}, \quad i,j \in [\![1, n-1]\!]$$

→ On va mq C est S^T dominante p colonnes.

si c'est vrai alors on réapplique facto LU à C.

$C' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ & on pt conclure que pr chaq étape i de la factorisat° $L^{(i)}$ est △ à diag unité & S^T dominante p colonne

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left|(L^{(i)})_{ki}\right| < 1.$$

Exo11 Mat à diag S^T dominante p col.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*) $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j \in [\![1,n]\!]$.

Mq A admet décomp LU & L : dsdpc ?.

1° étape LU

$$A = A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & w^T \\ \hline v & B \end{array}\right)$$ & $\alpha \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

(*) $\Rightarrow \begin{cases} |\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i| \quad \Rightarrow \alpha \neq 0 \\ (\dagger)\ |b_{jj}| > |w_j| + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |b_{ij}| \quad \text{pr } j \in [\![1,n-1]\!]. \end{cases}$

$$L^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ -\frac{v}{\alpha} & & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$-\frac{v}{\alpha} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{v_i}{\alpha}\right| < 1$ par (*).

$l_{11} = 1$, $l_{i+1,1} = -\frac{v_i}{\alpha}$, $i \in [\![1,n]\!]$. (48)

$$A^{(2)} = L^{(1)} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & w^T \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

$\boxed{c_{ij} = b_{ij} - w_j \frac{v_i}{\alpha}}$, $i,j \in [\![1,n-1]\!]$.

→ On va mq C est S^T dominante p colonnes.

si c'est vrai alors on réapplique facto LU à C.

$C' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & c \end{array}\right)$ & on pt conclure que pr chaq étape i de la factorisat° $L^{(i)}$ est ◺ à diag unité & S^T dominante p colonne

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left| (L^{(i)})_{ki} \right| < 1.$$

ok pr 1° colonne $\sum_i \frac{|v_i|}{|\alpha|} < 1$ par (*)

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |c_{ij}| = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left|b_{ij} - w_j \frac{v_i}{\alpha}\right| \overset{\triangle I}{\leq} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left(|b_{ij}| + \left|\frac{v_i}{\alpha}\right| |w_j|\right)$$

par $(\dagger)$ $< (|b_{jj}| - |w_j|) + \left|\frac{w_j}{\alpha}\right| \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i|}_{\sum_{i=1}^{n-1} |v_i| - |v_j|}$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} |v_i|}_{< |\alpha|} - |v_j|$

$\triangle I$ hyp inég

$(\dagger)$ $< (|b_{jj}| - |w_j|) + \frac{|w_j|}{|\alpha|} (|\alpha| - |v_j|)$

$= |b_{jj}| - |w_j| + |w_j| - \frac{|w_j v_j|}{|\alpha|}$

Puis ($\bigstar\bigstar$ $||a| - |b|| \leq |a-b|$.)

$\overset{(\bigstar\bigstar)}{\leq} |b_{jj} - \frac{w_j v_j}{\alpha}| = |e_{jj}|$

Donc C est diag. S^T dominante p colonnes. car Ppté

(PR) si la taille de A ($n \searrow$).

On obtient

$$A^{(n)} = L^{(n-1)} A^{(n-1)} = \underbrace{L^{(n-1)} \dots L^{(1)}}_{L^{-1}} A^{(1)}$$

$L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(n-1)}$ st à diag S^T dominante par colonne.

$$L = \prod_{i=1}^{n-1} L^{(i)^{-1}}, \quad L^{(i)} = \begin{array}{c} \quad\; (i) \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -l_{ki} & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

& $l_{ki} < 1$ (49)

$$(L^{(i)})^{-1} = \begin{array}{c} \quad\quad (i) \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{ki} & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ à diag S^T dom. p colonne.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ l_{k1} & l_{k2} & & 1 & \\ & & & l_{ki} & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le produit est aussi à diag S^T. dom. p colonne.

$$(L^{(i)})^{-1} (L^{(j)})^{-1} = \begin{array}{c} \quad\quad i \quad\quad\quad j \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & l_{ki} & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & l_{kj} & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$(i < j)$

$L^{(i)} = I + l_i e_i^T$, $l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -l_{i+1,i} \\ \vdots \\ -l_{n,i} \end{pmatrix}$

$(L^{(i)})^{-1} = I - l_i e_i^T$

e_i = i^e vect$^{\text{r}}$ base canoniq.

$\Rightarrow$ prouver $(L^{(i)})(L^{(i)})^{-1} = I$ & $(L^{(i)^{-1}})(L^{(j)})^{-1} = I - l_i e_i^T - l_j e_j^T$.

$$\boxed{L(l_i)^{-1} = L(-l_i)}$$

Exo Mat tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 2+c_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

$c_i \geq 0$
$i \in [\![1,n]\!]$

- $A = A^*$ trivial.

A def pos ? ssi $\begin{cases} \langle Ax, x \rangle \geq 0 \\ \langle Ax, x\rangle = 0 \iff x = 0 \end{cases}$

a) $v \in \mathbb{R}^n$, Mq

$$v^T A v = \sum_{i=1}^n c_i v_i^2 + v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^n (v_i - v_{i-1})^2 = \langle Av, v\rangle$$

soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$v^T A v = (v_1\ v_2 \cdots v_n) \begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2+c_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & -1 \\ 0 & & -1 & 2+c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = v^T u$$

Pr $i \in [\![2, n-1]\!]$ $(Av)_i = -v_{i-1} + (2+c_i) v_i - v_{i+1}$.

$i = 1$: $(Av)_1 = (2+c_1) v_1 - v_2$.

$i = n$: $(Av)_n = (2+c_n) v_n - v_{n-1}$.

$$v^T A v = \sum_{i=1}^n v_i (Av)_i = v_1 \left[(2+c_1) v_1 - v_2 \right] + \sum_{i=2}^{n-1} v_i \left(-v_{i-1} + (2+c_i) v_i - v_{i+1}\right) + v_n \left[(2+c_n) v_n - v_{n-1} \right]$$

$(0\,0\,0)$

$$= \sum_{i=1}^n (2+c_i) v_i^2 - v_1 v_2 - \sum_{i=2}^{n-1} v_i v_{i-1} - \sum_{i=2}^{n-1} v_i v_{i+1} - v_n \cdot v_{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i v_i^2 + v_1^2 + v_n^2 \left(+ v_1^2 + v_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1} - \sum_{i=2}^{n} v_i v_{i-1} + \sum_{i=2}^{n-1} 2 v_i^2 \right)$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1}}_{\text{double produit}} \qquad \sum_{i=2}^{n-1} (v_i^2 + v_i^2)$$

$$(v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2) + (v_2^2 - 2 v_2 v_3 + v_3^2) \ldots + (v_{n-1}^2 - 2 v_{n-1} v_n + v_n^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i v_i^2 + v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (v_i - v_{i+1})^2 \geq 0$$

& $v = 0 \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow v^T A v = 0$.

$A \begin{cases} \textcircled{h} \\ \text{def} \oplus \end{cases} \overset{\text{Th Cholesky}}{\Rightarrow} \exists!\ B \underset{\text{diag} > 0}{\triangle}$ tq $\boxed{A = BB^T}$,

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} (b_{kj})^T}$$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Pr la colonne $j \in [\![1, n]\!]$,

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \ddots & 0 \end{array}\right)$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} (b_{kj})^T$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk} + b_{ii} b_{ji} \quad (a) \quad i \leq j$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} + b_{ij} b_{jj} \quad (b) \quad i > j.$$

(a) pr $i = j \Rightarrow b_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2$

$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2} > 0 \quad \text{car } A \text{ vérif (Cholesky)}$$

(b) pr $i > j \Rightarrow b_{ij} = \dfrac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}\right)}{b_{jj}}$

$j = 1$

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1+1}{1}}$$

$$b_{21} = (a_{21} - 0) / b_{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+1}}$$

$i > 2$: $b_{i1} = 0 / b_{11} = 0$. OK pr $j = 1$

Récurrence (PR): Pr j fixé, $1 \leq j < n$, on a

$$b_{jj} = \sqrt{\frac{j+1}{j}} \quad \& \quad b_{j+1,j} = -\sqrt{\frac{j}{j+1}} \quad H_R$$

On mq la relat° pr $j+1$:

$$b_{j+1,j+1} = \sqrt{a_{j+1,j+1} - \sum_{k=1}^{j} b_{jk}^2}$$

$$= \sqrt{2 - \left(-\sqrt{\frac{j}{j+1}}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{j}{(j+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(j+1) - j}{j+1}} = \sqrt{\frac{j+2}{j+1}} \quad \text{ok}$$

$$b_{j+2,j+1} = \Big(a_{j+2,j+1} - \sum_{k=2}^{j} \underbrace{b_{j+2,k}}_{0 \text{ si } k \leq j} b_{j+1,k}\Big) / b_{j+1,j+1}$$

$$= \frac{-1}{b_{j+1,j+1}} = -\sqrt{\frac{j+1}{j+2}}$$

$c_i = 0$, $i \in [\![1, n]\!]$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = LU = LDL^T$

$B = L\Delta$

$\Delta^2 = D$.

$\Rightarrow$ (TU) fnt ansi vrai pr Cholesky

(a) & def (+).

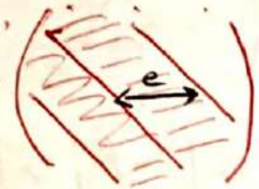
(51)

$i > j+1$: $b_{i,j+1} = \dfrac{0}{b_{j+1,j+1}}$ $\Rightarrow$ HDR vrai pour $j+1$! $\Rightarrow$ Vrai $\forall j \in [\![1,n]\!]$.

$i,j \in [\![k+1,n]\!]$ $\boxed{a^{(k+1)}_{i,k} = 0 \quad \text{si} \quad i > k.}$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l^{(k)}_{i,k}\, a^{(k)}_{k,j}$ & $l^{(k)}_{i,k} = \dfrac{a^{(k)}_{i,k}}{a^{(k)}_{k,k}}$

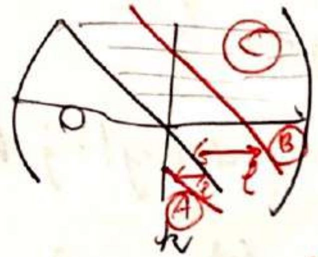
Ex 12 : Mat bandes : $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\ell = 1$



$2\ell+1$ diagonales non-nulles   HDR   mat bande de $\frac{1}{2}$ largeur ℓ.

Mq si A possède facto LU $\Rightarrow L$ & U st mat bandes de $\frac{1}{2}$ larg^r ℓ.

B) $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$, $k = 1, \dots, n-1$

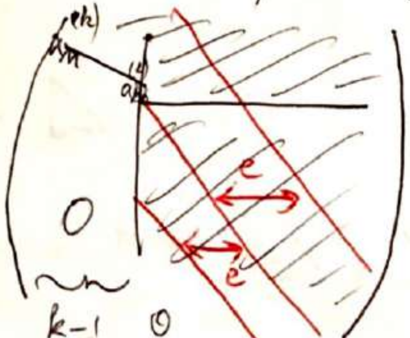


Zone C : $a^{(k+1)}_{ij} = a^{(k)}_{ij}$

$i \in [\![1,k]\!]$

$|i-j| > \ell \Rightarrow a^{(k)}_{ij} = 0$ HDR pr $A^{(k)}$ bande

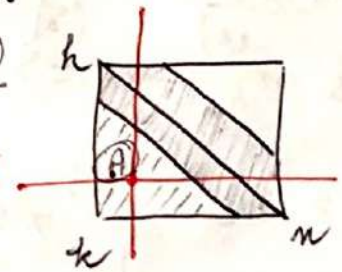
$A^{(k)} =$



HDR

Zone A

$B^{(k)} =$

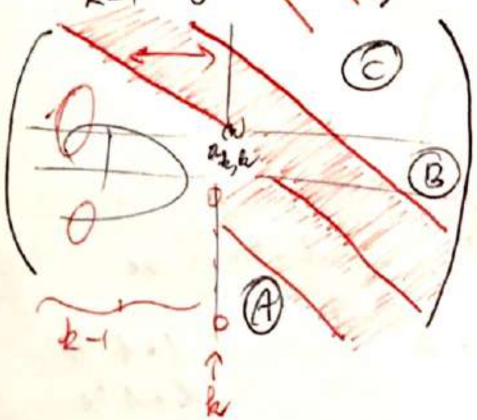


$|i-j| \leq \ell$

$|i-j| > \ell \Rightarrow i-j > \ell$

car A ds

$A^{(k+1)} =$



Zone D : $a^{k+1}_{ij} = 0$ p Gauss

A, B, C les coeff st $= 0$?

si $i-j > \ell$: $a^{(k)}_{ij} = 0$ (HDR)

où $i,j \in [\![k+1,n]\!]$ car $a^{(k+1)}_{ik} = 0$ par Gauss.

$a^{(k+1)}_{kj} = a^{(k)}_{kj}$.

pour ℓ: C est bande de $\frac{1}{2}$ larg$^r = \ell$

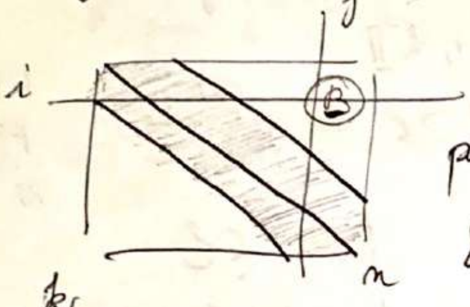
$C_{ij} = 0$ si $|i-j| > \ell$.

et aussi $a^{(k)}_{ik} = 0$, $i-k > \ell$.

zone A $= \{(i,j) \mid k+l < i \leq n,\ k \leq j < n-l\}$.

$$\left.\begin{array}{l} a^{(k)}_{i,k} = 0 \\ a^{(k)}_{i,j} = 0 \end{array}\right\} \text{HR} \Longrightarrow a^{(k+1)}_{ij} = 0.$$

zone B $= \left\{(i,j) \mid \begin{array}{l} k \leq i < n-l \\ k+l < j < n \end{array}\right\}$.



$a^{(k)}_{ij} = 0$ et $|i-j| = j-i > l$

par HR & $a^{(k)}_{kj} = 0 \overset{(\star)}{\Longrightarrow} a^{(k+1)}_{ij} = 0$.

k

$\boxed{\text{si } j-i = l}$ $a^{(k)}_{ij} \neq 0 \Rightarrow a^{(k+1)}_{ij} \neq 0$

sauf si la combinaison linéaire crée un 0.

$\boxed{\text{si } i-j = l}$ $a^{(k)}_{ij} \neq 0 \Rightarrow a^{(k+1)}_{ij} \neq 0$.

$\Rightarrow$ la $\frac{1}{2}$ largeur de bande est tjs l.

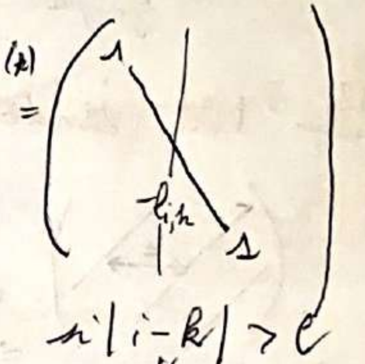
$A^{(k)}$ bande, $\frac{1}{2}$ largeur $l \Rightarrow A^{(k+1)}$ bande, $\frac{1}{2}$ largeur l

$\Rightarrow$ vrai $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - l^{(k)}_{i,k} a^{(k)}_{k,j}$ $\quad l^{(k)}_{i,k} = \frac{a^{(k)}_{i,k}}{a^{(k)}_{k,k}}$.

$\Rightarrow U$ ▽ & bande de $\frac{1}{2}$ largeur l.

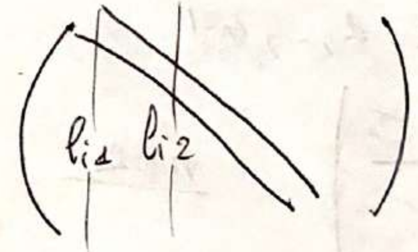
$L = \prod_{k=1}^{n-1} \left(L^{(k)}\right)^{-1}$, $L^{(k)} =$



$l^{(k)}_{ik} = \frac{a^{(k)}_{ik}}{a^{(k)}_{kk}}$

et $l_{ik} = 0$ car $a^{(k)}_{ik} = 0$ si $|i-k| > l$

$i-k > l$. car $i > k$.



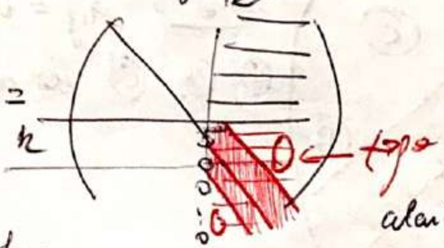
$\Rightarrow L$ ◺ de $\frac{1}{2}$ larg^r l.

c) Complexité

$< O(n^3)$ mat A (banque).

cb opéra° de bloc t→fé.

$A^{(k+1)} =$



calcul $(n-k)^2$ se.

$i = k+1$: $l(l+1)+1$: $l+1$ + ; $l+1$ × ; 1 :

$i = k+2$: $2(l+2)+1$

$\vdots$

$i = k+l$: $l(l+l)+1$

$\underline{i = k+l}$ $\quad 2(l+l+1)+1$

$\underline{i > k+l}$ $\quad 2(2l+1)+1$

coût total $\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{l} 2(l+i)+1 + \sum_{i=k+l+1}^{n} 2(2l+1)+1 \right]$

$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left[l(4l+1) + (n-k-l)(4l+3) \right]$

$\leq \sum_{k=1}^{n-1} (4l+3)(n-k) = (4l+3)\frac{n(n-1)}{2}$

$\mathcal{O}(n^2 l)$ et pas $\mathcal{O}(n^3)$ ok.

---

d) Cholesky ok car Facto LU ok.

$A = LU = LDL^T$

$A = BB^T$ $\quad B = L\Delta$, $\Delta^2 = D$

$A = (L\Delta)(\Delta L^T) = BB^T$.

$U = DR$

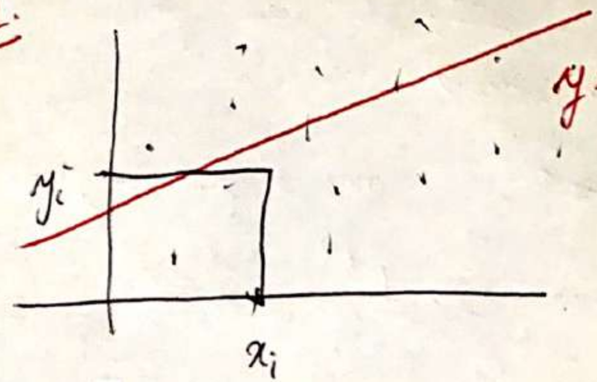
$LU = LDR = A^T = R^T D^T L^T \Rightarrow R = L^T$.

59 | lower upper

$\boxed{LCDMC}$ rist

TD 4. Moindres carrés discrets

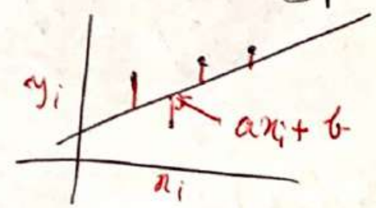
Ex 1.



$y = ax + b$ droite de régression linéaire.

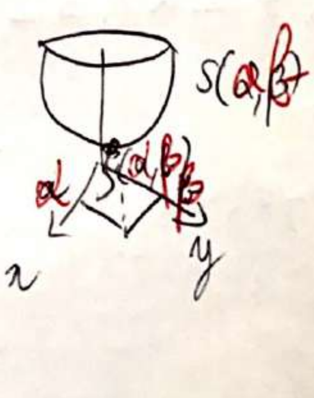
$y_i = f(x_i) \quad i \in [\![1, n]\!]$.

$f = ?$ $f(x)$ approchée p polynôme du type $p(x) = ax + b$.



a) à l'aide 1 figure, représenter qtté que l'on cherche à minimiser.

$S(a,b) = \sum_{i=0}^{m} (y_i - ax_i - b)^2$



$= \sum_{i=0}^{m} \| f(x_i) - (ax_i + b) \|^2$

$= \| f(x) - (ax+b) \|_2^2$

si $x \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Université de Lille

LICENCE MATHÉMATIQUES 3e ANNÉE
2021–2022

M54 : Analyse Numérique Matricielle

$\sum y_i x_i \le \sqrt{\sum x_i^2 \sum y_j^2}$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_k |a_{kj}|$

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE (M54)
DEVOIR SURVEILLÉ - 20 NOVEMBRE 2021

$\|A\|_\infty = \max_k \sum_j |a_{kj}|$

$\langle x,y \rangle \le \|x\| \|y\|$

$\|y\|_2 = \sqrt{\sum y_i^2}$

Durée : 2 heures

Documents de cours, calculatrices, tablettes et téléphones sont strictement prohibés. Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies. Le baréme donné est indicatif.

Exercice 1 Questions de cours (2 points)

a) Énoncer le théorème de Schur pour une matrice générale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et sa forme simplifiée pour une matrice hermitienne A.

b) Rappeler la définition d'une décomposition LU. A-t-on toujours existence ? Unicité ? Justifier.

Exercice 2 Relations entre normes matricielles subordonnées (5 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\|A^*\|_1 = \|A\|_\infty$.

b) Soit (μ, y) un élément propre de A^*A. Montrer que $\mu \le \|A^*A\|_1$. En déduire que $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$.

c) Soit $y \in \mathbb{C}^\ell$. Vérifier que $\|y\|_\infty \le \|y\|_2 \le \sqrt{\ell}\,\|y\|_\infty$. En déduire que $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$.

d) Conclure que $\sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty} \le (mn)^{1/4}\|A\|_2$.

Exercice 3 La SVD et une formule remarquable (6 points)

Soit donné une SVD $A = U\Sigma V^*$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, des matrices unitaires $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et finalement

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \quad D = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_r),$$

avec valeurs singulières $\mu_1 \ge ... \ge \mu_r > 0 = \mu_{r+1} = ... = \mu_n$. On notera la j-ième colonne de U (et de V) par u_j (et par v_j, respectivement). Aussi, pour un s.e.v. $E \subset \mathbb{C}^n$, on notera par $E^\perp = \{y \in \mathbb{C}^n : \forall x \in E, y^*x = 0\}$.

$U = \left(\quad u_j \quad \right)$

a) Calculer Av_j pour $j > r$. En déduire que $\mathrm{vect}(v_{r+1}, ..., v_n) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

b) Vérifier que $A^* u_j = \mu_j v_j$ pour $j \leq r$. En déduire que $\mathrm{vect}(v_1, ..., v_r) \subset \mathrm{Im}(A^*)$.

c) Soient $E \subset F \subset \mathbb{C}^n$ des s.e.v.. Montrer que $\boxed{F^\perp \subset E^\perp}$

d) En déduire que

$$\mathrm{Im}(A^*)^\perp \subset \mathrm{vect}(v_1, ..., v_r)^\perp = \mathrm{vect}(v_{r+1}, ..., v_n) \subset \mathrm{Ker}(A).$$

e) Conclure que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A^*)^\perp$.

Exercice 4 Grossissement de coefficients dans l'algorithme de Gauss (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique $\boxed{\text{définie positive}}$ dont on sait que, d'après le cours, on peut appliquer l'algorithme de Gauss avec pivotage naturel. On note par $A^{(1)}, ..., A^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les différentes matrices rencontrées dans l'élimination de Gauss avec pivotage naturel, et par $\ell_{j,k}$ les multiplicateurs associés, Finalement, on note

$$\widetilde{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k+1}(\mathbb{R})$$

et on note par γ_k l'élément en module le plus grand dans $\boxed{\widetilde{A}^{(k)}}$.

a) Soit $V \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p. Montrer que $B = V^T A V$ est symétrique définie positive.

b) Par des produits par blocs, montrer que $\boxed{(V^{(k)})^T \widetilde{A}^{(k)} = (\underline{0}, \widetilde{A}^{(k+1)})}$ où $\underline{0}$ est le vecteur zéro dans $\mathbb{R}^{n-k}$, et

$$(V^{(k)})^T = \begin{bmatrix} -\ell_{k+1,k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\ell_{k+2,k} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k+1}(\mathbb{R}),$$

et montrer que $\widetilde{A}^{(k+1)} = (V^{(k)})^T \widetilde{A}^{(k)} V^{(k)}$.

c) En déduire que $\widetilde{A}^{(k)}$ est symétrique définie positive pour $k = 1, ..., n$, avec des éléments positifs sur la diagonale.

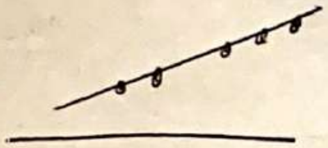
d) Soit $j > i \geq k$. Montrer que $\begin{bmatrix} a_{i,i}^{(k)} & a_{i,j}^{(k)} \\ a_{j,i}^{(k)} & a_{j,j}^{(k)} \end{bmatrix}$ est symétrique définie positive. En déduire que

$$a_{i,j}^{(k)} a_{j,i}^{(k)} \leq a_{i,i}^{(k)} a_{j,j}^{(k)}, \quad |a_{i,j}^{(k)}| = |a_{j,i}^{(k)}| \leq \max\{a_{i,i}^{(k)}, a_{j,j}^{(k)}\},$$

et alors $\gamma_k = \max\{a_{j,j}^{(k)} : j = k, k+1, ..., n\}$.

e) (hors barème) Soit $j > k$. Montrer que $a_{j,j}^{(k+1)} = a_{j,j}^{(k)} - \ell_{j,k} a_{k,j}^{(k)} \leq a_{j,j}^{(k)}$. En déduire que $\gamma_{k+1} \leq \gamma_k$, et alors $\gamma_k \leq \gamma_1$. Justifier pourquoi le module de chaque élément du facteur U de la decomposition LU d'une matrice A symétrique définie positive est borné par $\|A\|_\infty$.

b) Donner un cas simple où sans calcul, on a $\nexists$, $\exists!$ sol° pb. Donner la solu°.



$m+1$ pts alignés $\Rightarrow \exists!$ droite.

c) Mq $x(a,b)$ est solu° du pb alors (a,b) est solu° d'un SL.

$$\nabla_{a,b} S(\alpha,\beta) = \left(\frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial b}\right)(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^{m} 2(y_i - a x_i - b)(-x_i)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} -2x_i y_i + 2\alpha x_i^2 + 2\beta x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^{m} 2(y_i - a x_i - \beta)(-1)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}} =$$

(α,β) minimum de $S(a,b)$ est un pt critiq (C.N) $\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a}(\alpha,\beta) = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b}(\alpha,\beta) = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} 2x_i^2 & \sum_{i=0}^{m} \cancel{2}x_i \\ \sum_{i=0}^{m} 2x_i & \sum_{i=0}^{m} +\cancel{2}\,1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{2}\sum_{i=0}^{m} x_i y_i \\ \cancel{2}\sum_{i=0}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{m} x_i^2 (m+1) - \left(\sum_{i=0}^{m} x_i\right)^2 \neq 0 \ ?$$

$$\sum_{i=0}^{m} x_i \cdot 1 = \langle x, 1 \rangle \overset{CBS}{\leq} \|x\|_2 \, \|1\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{m} 1\right)^{1/2}$$

où $x = (x_0, \dots, x_m)^T$

$1 = (1, \dots, 1)^T$

$$\Rightarrow \det(A) \geq \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^2\right)(m+1) - \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^2\right)(m+1) = 0.$$

Développons: $\det(A) = m\sum_{i=0}^{m} x_i^2 + \sum_{i=0}^{m} x_i^2 - \sum_{i=0}^{m} x_i^2 - 2\sum_{0\leq i<j\leq m} x_i x_j$

$$\det(A) \overset{(\star)}{=} \sum_{0\leq i<j\leq m} (x_i - x_j)^2$$

$$\det(A) = m\left(\sum x_i^2\right) - 2\sum_{0\le i\le j\le m} x_i x_j$$

$$\overset{(\bigstar)}{=} \sum_{0\le i\le j\le m} (x_i - x_j)^2$$

Mq ($\bigstar$) est vraie. (PR)

$\underline{m=1}$ $\quad (x_0^2 + x_1^2) - 2x_0x_1 = (x_0 - x_1)^2$

Sppls vraie pr m :

$$(m+1)\sum_{i=0}^{m+1} x_i^2 - 2\sum_{0\le i\le j\le m+1} x_i x_j =$$

$$= m\sum_{i=0}^{m+1} x_i^2 + \sum_{i=0}^{m+1} x_i^2 - 2\sum_{0\le i\le j\le m} x_i x_j - 2\sum_{i=0}^{m} x_i x_{m+1}$$

$$\overset{*}{=} \boxed{m\sum_{i=0}^{m} x_i^2} + \underline{m\, x_{m+1}^2} + \boxed{\sum_{i=0}^{m} x_i^2} + x_{m+1}^2 \boxed{-2\sum_{0\le i\le j\le m} x_i x_j} - 2\sum_{i=0}^{m} x_i x_{m+1}$$

$$= \boxed{\sum_{0\le i\le j\le m} (x_i - x_j)^2} + \sum_{i=0}^{m} \underline{(x_i - x_{m+1})^2} = \sum_{0\le i\le j\le m+1} (x_i - x_j)^2 \quad \square$$

rouge : HDR

$$\cancel{\overset{*}{=} m\sum_{i=0}^{m} x_i^2 + (m+2)x_{m+1}^2 + \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + x_{m+1}^2 - 2\sum_{0\le i\le j\le m} x_i x_j - 2\sum_{i=0}^{m} x_i x_{m+1} - 2x_{m+1}^2}$$

NB : $$\sum_{i=0}^{m} (x_i - x_{m+1})^2 = \sum_{i=0}^{m} (x_i^2 + x_{m+1}^2 - 2x_i x_{m+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + (m+1)x_{m+1}^2 - 2\sum_{i=0}^{m} x_i x_{m+1}$$

$\Rightarrow$ Vrai $\forall\, m \geq 1$.

$$\det(A) = \sum_{0\le i\le j\le m} (x_i - x_j)^2 > 0 \qquad x_i \neq x_j \quad \forall\, i,j$$

$\Longrightarrow \det(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible.

Développement de Taylor de $S(a,b)$ $\quad a = \alpha + h$, $b = \beta + k$, $0 < h, k \ll 1$.

$$S(\alpha+h, \beta+k) = S(\alpha,\beta) + \cancel{\frac{\partial S}{\partial a}(\alpha,\beta)h} + \cancel{\frac{\partial S}{\partial b}(\alpha,\beta)k} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(\alpha,\beta)h^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial b^2}(\alpha,\beta)k^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial a\partial b}(\alpha,\beta)hk\right)}$$

$$+\,0 \quad \text{car } \frac{\partial^n S}{\partial a^i \partial b^{n-i}}(\alpha,\beta) = 0$$

car S est de degré en a & b.

(α,β) réalise le minimum de S. $\quad$ ⊛ condit° nécess^{n} de pt critiq

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(\alpha,\beta) = 2\sum_{i=0}^{m} x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}(\alpha,\beta) = 2\sum_{i=0}^{m} 1 = 2(m+1).$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b}(\alpha,\beta) = 2\sum_{i=0}^{m} x_i$$

Mat Hessienne $= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b} & \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} \end{pmatrix}$

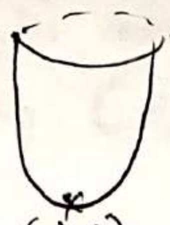
$$H = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \sum_{i=0}^{m} x_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & m+1 \end{pmatrix} = A$$

H est $\boxed{\text{symétriq, déf positive}}$?

si oui, alors

$$S(\alpha+h, \beta+k) = S(\alpha,\beta) + \underbrace{\frac{1}{2}(h,k)\,H\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{>0} > S(\alpha,\beta)$$

$\boxed{dp \iff vp > 0.}$



$S(a,b)$

(α,β)

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$0 = \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \det(A)$$

λ_1, λ_2 et racines de $\chi_A(\lambda)$:

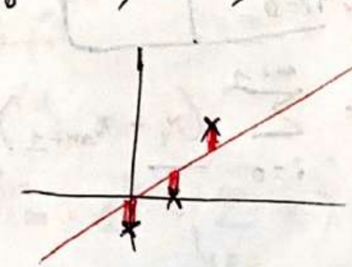
$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) > 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + m + 1 > 0$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow H$ est dp.

Applicat°s faire calculs

$m = 2$, $A_0 = (0,-1)$, $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (2,2)$



$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = \frac{-7}{6}$$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{6}.}$ droite de régression linéaire.

57

Ex 2 : Généralisat° en 1

on cherche $m > n$

On cherche $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

Considérons $(m+1)$ pts du plan $A_i = (x_i, y_i)$ et $0 \le i \le m$, $m \ge 1$.
les x_i st 2 à 2 distincts, $n \in \mathbb{N}^*$.

en 1 : $S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} (y_i - a_0 x_i - a_1)^2$

en 2 : $S(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} (y_i - p(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{m} \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2$

a) Mq $X = (a_0, \dots, a_n)^T$ est nécessairement solu° SL de $(n+1)$ équat° à $(n+1)$ inconnues.

$a_0, \dots, a_n = n+1$ inconnues

$n+1$ équat°s = ? $\quad \frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, \dots, a_n) = 0, \ 0 \le k \le n.$

condit° nécessaire.
CN $(a_0, \dots, a_n)$ soit point critiq de S.

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} 2\left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)(-x_i^k)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{m} y_i x_i^k \quad \text{pr } 0 \le k \le n.$$

$k = 0$: $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{m} y_i$

$k = 1$: $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^{j+1} = \sum_{i=0}^{m} y_i x_i$

$\vdots$

$k = n$: $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^{j+n} = \sum_{i=0}^{m} y_i x_i^n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} x_i^0 & \sum_{i=0}^{m} x_i^1 & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^1 & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \sum_{i=0}^{m} x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & & \dots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{pmatrix}}_{B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n y_i \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n+1}}$$

(x_i, y_i) donnés

(S') : $BX = C$.

b) Soit (S) $p(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq m$, où les inconnues et coeffs $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ du polynôme p. Préciser mat A & second mbr b de (S).

c) Mq (S) correspond $A^TAX = A^Tb$.

(S') : $BX = c$

(S) : $AX = b$.

Mq $(S') \iff A^TAX = A^Tb$?

↳ L'interpolaθ polynômiale : $p(x_i) = y_i$, $i \in [\![0,m]\!]$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = y_i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ x_1^1 & x_1^1 & & \cdots & x_1^m \\ & & & & \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & & x_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_m \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{R})$ $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ $b \in \mathbb{R}^{m+1}$

$$\underline{AX = b.}$$

(Th 7.3) X^σ soluθ du pb de minimum $\|b-AX\|_2$

$$\|b - AX^\sigma\|_2^2 = \min_{X \in \mathbb{R}^{n+1}} \|b - AX\|_2^2 \text{ si } X^\sigma$$

est soluθ des équaθs normales.

$$\underline{A^TAX = A^Tb.}$$

qθ : $A^TA = B$

$$(A^TA)_{ij} = \sum_{k=0}^{m} A^T_{ik} A_{kj} = \sum_{k=0}^{m} A_{ki} A_{kj}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} x_k^i x_k^j = \sum_{k=0}^{m} x_k^{i+j}$$

$\forall i,j \in [\![0,m]\!]$

$$(A^Tb)_i = \sum_{j=0}^{m} A^T_{ij} b_j = \sum_{j=0}^{m} A_{ji} b_j = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^m y_i \end{pmatrix} = B_{ij}$$

d) Mq le (S') admet une uniq solut° si $m > n$. Que se passe-t-il ds les cas $m = n$ & $m < n$?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\|Ax - b\|_2^2}_{J(x)} = \|Ax - b\|_2^2 \iff A^T A x = A^T b.$$

$$A \in \mathcal{M}_{m+1, m+1}(\mathbb{R}) \qquad \underset{S(a_0, \dots, a_m)}{\overset{\|}{}}$$

$m > n \Rightarrow \exists$ de la sol°. unicité f $J(x)$ convexe.

$\ker(A) = \ker(A^T A)$ TD1.

(Th) du rg $\Rightarrow rg(A) = rg(A^T A) = n+1$.

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=0}^{m} A^T_{ik} A_{kj} = \sum_{k=0}^{m} x_k^{i+j}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1, n}(\mathbb{R})$$

matrice de Vandermonde

si $m = n$, $\det(A) = \prod_{0 \leq i \leq j \leq n} (x_i - x_j)$ (PR).

$\det(A) \neq 0$ ssi $x_i \neq x_j$ $\forall\ 0 \leq i < j \leq n$

si $m < n$

$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 0$, $A^T A X = A^T b_{=0}$

si $b = 0 \Rightarrow X = 0$,

si $m < n$, on a $\|AX_1 - b\|_2^2 = \min_x \|Ax - b\|_2^2 = \|AX_2 - b\|_2^2$.

$$= \begin{cases} A^T A X_1 = A^T b \\ A^T A X_2 = A^T b \end{cases} \rightarrow A^T A X_1 - A^T A X_2 = 0$$

$$A^T A (X_1 - X_2) = 0$$

$\rightarrow X_1 - X_2 \in \ker(A)$

$\Rightarrow X_1 = X_2 + \ker(A)$.

On n'a plus l'unicité du minimum.

Ex3 Autour équat° normales

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\underbrace{w}_{\text{poids}} \in \mathbb{R}^m$

$w_i > 0$, $i \in [\![1, m]\!]$

$D = \mathrm{diag}(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Ecrire à l'aide A & D & vct^R b le système des équat° ρ^r le pb :

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\sum w_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2 \right]$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^{m} w_i (Ax - b)_i^2 \right]$$

or $DA = \left[w_1 a_1^T \quad w_2 a_2^T \dots w_m a_m^T \right]$

où a_i = la i° colonne de A.
a_i^T = la i° ligne de A.

ⓔ $DA = \begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & 10\end{pmatrix}$ $\quad AD = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\end{pmatrix}$

$AD = \left[w_1 a_1 \quad w_2 a_2 \dots w_m a_m \right]$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{m} w_i (Ax - b)_i^2 \right) = ★$$

$\boxed{\|y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$ $= \sum_{i=1}^{m} y_i^2$ soit $\Delta = \sqrt{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_m})$

$$★ = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\Delta(AX - b)\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\underbrace{(\Delta A)}_{M} x - \underbrace{\Delta b}_{c}\|_2^2$$

$\iff M^T M x = M^T c$

$\iff A^T \underbrace{\Delta^T \Delta}_{D} A x = A^T \underbrace{\Delta^T \Delta}_{D} b$

$\iff \underbrace{A^T D A}_{} x = A^T D b$

$(A^T D A)^T = A^T D A$

But réduire : $\mathrm{cond}(A^T A)$ $\quad \mathrm{cond}_2(A)^2$ ‖

On choisit $w_1, \dots, w_m$ tq $\mathrm{cond}_2(A^T D A) \ll \mathrm{cond}_2(A^T A)$

(si $A^T D A$ inversible $\Rightarrow x = (A^T D A)^{-1} A^T D b$.) stop si $m \neq n$.

si $D = I$, $A^T A x = A^T b \iff x = (A^T A)^{-1} A b$ ssi $A^T A$ inversible

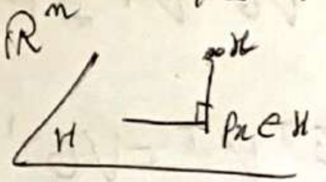
si $m = n$ est A est inversible.

$x = A^{-1} D^{-1} \underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{I} D b \iff x = A^{-1} b$.

Ex4 Projection orthogonale sur sev de $\mathbb{R}^n$

Soit $n \geq 1$, $1 \leq r \leq n$, $\{v_i\}_{1 \leq i \leq r}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On note $H = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_r\}$ sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par ces vecteurs.



$H^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n, \langle z, h \rangle = 0, \forall h \in H\}$

$$p_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto y = p_H(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

$V = [v_1, v_2, \dots, v_r] \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ ds base canoniq

a) Mq mat $G = V^T V$ est inversible

$V^T V x = 0 \Rightarrow x = 0$? (noyau réduit au vecteur nul)

$$V^T V x = 0 \iff x^T V^T V x = 0$$
$$\iff \langle Vx, Vx \rangle = 0$$
$$\iff \|Vx\|_2^2 = 0$$
$$\iff Vx = 0$$
$$\iff \sum_{i=1}^{r} x_i v_i = 0 \Rightarrow x_i = 0, \ i \in [\![1, r]\!]$$

car la famille est libre

$\Longrightarrow G$ inversible.

b) Mq les α_i vérifient $Ga = V^T x$, où $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^T$

On a $p_H(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = y$

$\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$, $\quad \tilde{z} \in H^\perp$,
$x = y + \tilde{z}$

$\tilde{z} = x - y \Rightarrow \langle x - y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in H$.

$\langle x - y, z \rangle = 0$

$$\boxed{\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = 0} \text{ pr } j \in [\![1, r]\!].$$

car $0 = \langle x - y, z \rangle = \left\langle x - y, \sum_{j=1}^{r} z_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{r} \underset{\neq 0}{z_j} \underset{= 0}{\langle x - y, v_j \rangle}$

$$\sum_{l=1}^{n} x_l \underset{\substack{= \text{ car } \mathbb{R} \\ \langle v_j, e_l \rangle}}{\langle e_l, v_j \rangle} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \underset{\substack{= \\ \langle v_j, v_i \rangle}}{\langle v_i, v_j \rangle}, \quad j \in [\![1, r]\!]$$

$$\sum_{l=1}^{n} (e_l^T v_j) x_l = \sum_{i=1}^{r} (v_i^T v_j) \alpha_i, \quad j \in [\![1, r]\!]$$

$$V^T x = \underbrace{V^T V}_{G} a$$

Comme G est inversible :

$V^T x = Ga$

$V^T x = V^T V a \iff a = \underbrace{(V^T V)^{-1}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} V^T x \in \mathbb{R}^n$

c) cd $y = Px$ et $P = VG^{-1}V^T$ (P est de la mat de la projec orthogonale de $\mathbb{R}^m$ sur H)

$$P = VG^{-1}V^T.$$

$$P_H x = y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = Va = V(V^TV)^{-1}V^T x = \underbrace{VG^{-1}V^T}_{P} x.$$

$P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

P project : $P^2 = P$.

P orthogonale : $P^T = P$.

$$P^2 = (VG^{-1}V^T)(VG^{-1}V^T) = VG^{-1}\underbrace{V^TV}_{G}G^{-1}V^T = \underbrace{\quad}_{I} = VG^{-1}V^T = P.$$

$$P^T = (VG^{-1}V^T)^T = VG^{-T}V^T = VG^{-1}V^T = P.$$

$\cancel{a \quad G = V^TV \to G^{-1} = V^{-1}V^{-T}}$

$\cancel{G^{-T} = V^{-1}V^{-T} = G^{-1}}$

$V \in \mathcal{M}_{m,n}$: $\cancel{V^{-1}\,?}$

$$(G^{-1})^T = (G^T)^{-1} = G^{-1}$$

d) si

$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$(V^TV)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow V^TV = I.$

$\Rightarrow P = VV^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ⓒ Appliant Résultat.

$$V = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$V^T V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(V^T V)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = G^{-1}$$

- $$P = V G^{-1} V^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = Px = 2v_1 + 0v_2.$$

Ex5 : Algo de Gram-Schmidt.

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

$$rg(A) = n.$$

$$A = QR \rightarrow Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

G.S $[q_1, q_2, \dots, q_n] = \tilde{Q} \Rightarrow$ unicité.

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}{m-n} \quad \text{où } \tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A = \tilde{Q}\tilde{R}$$

$$[a_1, a_2, \dots a_n] = [q_1, \dots, q_n] \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_1 = r_{11} \cdot q_1$$

$$a_2 = r_{12} \cdot q_1 + r_{22} q_2$$

$$\boxed{a_k = \sum_{i=0}^{k} q_i r_{ik}} \quad \text{pr } k \in [\![1, n]\!]$$

a) On note $R = (r_{i,j})_{1 \le i \le j \le n}$.

Mq $\forall\, 1 \le j \le n$: $q_j = \frac{1}{r_{jj}}\left(a_j - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj} q_k\right)$

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} q_i r_{ik} \iff a_j = \sum_{k=1}^{j} q_k r_{kj} \quad \text{pr } j \in [\![1, n]\!]$$

$$a_j - \sum_{k=1}^{j-1} q_k r_{kj} = q_j r_{jj} \quad \begin{pmatrix}\text{on sort le dernier} \\ \text{elt de la somme}\end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{1}{r_{jj}}\left(a_j - \sum_{k=1}^{j-1} q_k r_{kj}\right) = q_j \quad \begin{pmatrix}\text{car } r_{jj} > 0 \\ \text{car il est norme.}\end{pmatrix}$$

(6.4) (R1)
$$q_j = \frac{a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle q_k, a_j \rangle q_k}{\| \quad \|_2} \quad \begin{matrix} \leftarrow r_{kj} \\ \leftarrow r_{jj} \end{matrix}$$

b) cd $\quad \mathrm{Im}\,A = \mathrm{Vect}\{q_1, \dots, q_n\}$ → on veut ⓐ de q.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,A = \{ y \in \mathbb{R}^m ,\ y = Ax ,\ x \in \mathbb{R}^n \}}$$

$y = Ax$

$i \in [\![1, m]\!]$, $\quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_j$$

combi linéaires coeff colonne de a_j

j° composant de $x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ j° colonne de $A \in \mathbb{R}^m$

$$y = Ax \iff y = \tilde{Q}\underbrace{\tilde{R}x}_{z} = \tilde{Q}z \quad 4 \quad z = \tilde{R}x.$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{j} q_k\, r_{kj} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} r_{kj}\, q_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, r_{kj} \right)}_{\in \mathbb{R}} q_k = \sum_{k=1}^{n} z_k\, q_k .$$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Vect}\{q_1, \dots, q_n\}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A) \subset \underbrace{\mathrm{Vect}\{q_1, \dots, q_n\}}$.

Puis $\underline{\mathrm{rg}(A) = n}$ $\qquad$ $\dim \mathrm{Vect}\{q_1, \dots, q_n\} = n$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{q_1, \dots, q_n\} \subset \mathbb{R}^m$.

Appli

$\varepsilon \in (0,1)$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\varepsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

→ QR p GS

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad q_2 = \frac{a_2 - \overbrace{\langle a_2, q_1 \rangle}^{r_{12}} q_1}{\| a_2 - \langle a_2, q_1 \rangle q_1 \|_2}$$

$$\langle a_2, q_1 \rangle = q_1^T a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$q_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{\| \cdot \|_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1-\varepsilon - \frac{2-\varepsilon}{2} \\ 1 - \frac{2-\varepsilon}{2} \end{pmatrix}}{\| \cdot \|_2}$$

← norme de ce vecteur

$$= \frac{\begin{pmatrix} -\varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 \end{pmatrix}}{\| \cdot \|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

car $\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

⇒ mauv si $\varepsilon < 10^{-8}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

→ QR p Householder

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \ni H_1 = 1 - 2uu^T$, $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$.

- (★★) $H_1 a = \alpha b$ si a, b non-colinéaires, $\exists\, \alpha$ tq α

$H_1 \underset{\substack{\uparrow \\ 1^\circ \text{ colonne de } A}}{a_1} = \alpha e_1$ et $|\alpha| = \|a_1\|_2 = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{signe}\,(a_1^T e_1) = \text{signe}(\alpha)}$ pr q°s de stabilité de l'algo.

$-\text{signe}\,(a_{11}) = \text{signe}\,(\alpha)$

- On calcule $\beta = \alpha^2 - \alpha$, $a_{11} = 2 - (\sqrt{2})\,1 = 2 + \sqrt{2}$

$v = a_{11} - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$H_1 = 1 - \dfrac{vv^T}{\beta} \Rightarrow \dfrac{v}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{2}\, u.$

$\|v\|_2^2 = \cancel{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1}} = \cancel{\sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2}}}_{\beta} \Rightarrow \beta = \dfrac{\|v\|_2^2}{2}.$

$\Rightarrow \dfrac{vv^T}{\beta} = \dfrac{2vv^T}{\|v\|\,\|v\|} = 2 \underbrace{\left(\dfrac{v}{\|v\|}\right)}_{u} \underbrace{\left(\dfrac{v^T}{\|v\|}\right)}_{u^T}$

$\Rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} & \frac{-1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$A^{(1)} = A$, $A^{(2)} = H_1 A^{(1)} = R$

$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1 + (1+\sqrt{2})^2}{2+\sqrt{2}}(1-\varepsilon) \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$A_{21} = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{2+\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{-1-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} = 0$

<u>TP4</u> : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $\quad Ax = b$

1) $A^T A x = A^T b$, pb $cond(A^TA) >> cond(A)$

2) $A = QR$ + $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ orthogonale : $Q^TQ = I$.

où $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\triangledown$ $\quad R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

a) Gram-Schmidt $\Rightarrow n$ premières colonnes de $Q \Rightarrow \tilde{Q} = [q_1, q_2, \cdots q_n]$

b) Householder (déjà programmé pr $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

GS lɔ $\quad A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \to \tilde{Q}$, $\quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} & & r_{jk} \\ & \diagdown & \\ \emptyset & & \end{pmatrix}$ $\quad j \geq k$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2}$$

Pour $j = 1, 2, \cdots, n$:

$$q_j = \frac{a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle a_j, q_k \rangle q_k}{\left\| a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j, q_k) q_k \right\|_2}$$

$r_{kj} = \langle a_j, q_k \rangle$ (np. dot).

$\rightarrow$ il faut orthogonaliser les vecteurs ?

Pour $j = 0$ à $n-1$:

$y = a_j$

Pour $k = 1$ à $j-1$: (k in range(j)).

$r_{kj} = \langle y, q_k \rangle$ (y @ q_k).

$y = y - r_{kj} q_k$

$r_{jj} = \|y\|_2$

$q_j = \frac{1}{r_{jj}} y$

à programmer

$\hookrightarrow$ tous les vecteurs st orthogonaux (théoriqt) (numériquemt, on pt légèrement la perdre)

$\hookrightarrow$ Vérifier $\|I_n - \tilde{Q}^T\tilde{Q}\|_2 \overset{?}{=} 0$ ($\approx 10^{-15}$ erreur machine)

vraie ou pas?

$\hookrightarrow$ ds l'applicat°, GS ne f mal, HH f mieux.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$ 2 9 n

j in range $\Rightarrow j \in [\![0, m-1]\!]$

M54 DS Ex 1

a) Mq $\|A\| = \underset{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}{\overset{\text{max}}{m.}} |a_{ij}|$ est nm̃ s $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ compatible à nv $\|\cdot\|_1$.
Est-elle norme subordonnée ?

b) soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv & $\|\cdot\|$ nv.
Mq $\|x\|_M = \|Mx\|$ est une norme s $\mathbb{K}^n$.
Déduire $\|A\|_M = \|MAM\|^{-1}$ pr nms.

Ex 2 a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

1) si $x \in \mathbb{R}^n$ est vect^r qq, mq
$$x^T A x = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_n)^2$$

2) ed ttes ss-mat principales d'ordre $k \in [\![1, n-1]\!]$ dp puis a^t sa facto $A = LU$.

b) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv et $A = LU$. On note front$(A) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, le vct^r d'entiers tq $j_i = \min\{j \in [\![1,n]\!] : a_{ij} \neq 0\}$ pr $i \in [\![1,n]\!]$.
cela signifie 1er élt non-nul ligne i est a_{i,j_i}.

(R) algo Gauss s'écrit $A^{(1)} = A$, $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$ pr $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\forall\, k+1 \le i, j \le n$;
$$l_{i,k}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + l_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}.$$

1) vérifier pr A de a), on a front$(A) = (1, 1, 2, \dots, n-2, 1)$

2) Posons front$(A) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$.
Mq (PR) sur k que $\forall\, i \geq k$ & $\forall\, k \le j \le j_i$;
$$a_{i,j}^{(k)} = a_{ij}$$

3) ed front(L) = front(A).

c) Mq si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diag S^T dominante p lignes $\Rightarrow$ elle est inv.
((Rq) A est à diag. S^T dominante p lignes si $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pr $i \in [\![1,n]\!]$

d) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv admettant $A = LU$ & $D = \mathrm{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$

1) Vérifier D est inv & décompo LU de A^T est donné p $(D^{-1}U)^T (LD)^T$.

2) ed front(U^T) = front(A^T)

3) donner forme mat L & U pr mat A ds c)

Ex 3 soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv. Mq $\exists$ couple $(Q;R)$ tq $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale & $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ▽ à diag S^T positive tq $A = QR$. Mq $\exists!$ de cette facto.

Ex 4 (R) (1) $H = I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} v v^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$

a) Mq H est sym & orthog.

b) soit $x, e_1 \in \mathbb{R}^n$, si on choisit $v = x - \sigma \|x\|_2 e_1$ tq $\sigma \in \{+1, -1\}$, Mq $Hx = \sigma \|x\|_2 e_1$.

c) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ & $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & H^{(n-1)} \\ 0 & \end{pmatrix}$

tq $H^{(n-1)} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ mat Householder $\Leftrightarrow$ vct^r $\tilde{v} = x - \sigma \|x\|_2 e_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tq $x = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ (les $(n-1)$ derniers élts 1° colonne de A), $e_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$

1) Mq H est MDH $\Leftrightarrow$ à vct^R $\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ e s'écrit (1) (tq $\hat{v}$ au lieu de v)

2) Mq $\hat{A} = HA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \alpha & \\ 0 & \\ \vdots & \hat{A}^{(n-1)} \\ 0 & \end{pmatrix}$ ← $\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

Déterminer valeur α.

3) soit A sym, calculer $\tilde{A} = HAH$. donner coeff 1° ligne & 1° colonne de $\tilde{A}$. A-t-on $\tilde{A}$ sym ?

ff pdt p ble (+)

Ex 1

a) Mq $\|A\| = m \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|$ est nm

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

si $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ compatible & nv $\|\cdot\|_1$.

Est-elle norme subordonnée ?

* Mq $\|A\|$ est une norme. $|a_{ij}| \geq 0 \Rightarrow \|A\| \geq 0$, vers nulle. $\|\alpha A\|$

2 axiomes facile ≥ 0, α.

Puis $\triangle$ $\|A+B\| = m \max |a_{ij} + b_{ij}| \leq m\max|a_{ij}| + \max|b_{ij}|$

$= m\|A\| + \|B\|$

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$

* nm ?

$\|AB\| = m \max_{ik} \left|\sum^{n} a_{ij} b_{jk}\right| \leq m \max_{ik} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||b_{jk}| \leq \|A\| \cdot n \times \frac{1}{m}\|B\|$ $\left(\frac{1}{m}\|A\|, \frac{1}{n}\|B\|\right)$

~~$\leq m\max|a_{ij}|\, m \max|b_{ij}|$~~

~~$= \|A\|\,\|B\|$.~~

⚠

* comp & nv $\|\cdot\|_1$?

On veut $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|_1$, $x \in \mathbb{K}^n$.

$\|Ax\| = m \max |x \cdot a_{ij}| = |x| m \max |a_{ij}| \overset{\leq}{=} \|x\|_1 \|A\|$

* ns ?

déf ns $\|A\| := \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1} \|Ax\|$. et $\|I\| = 1$?? ~~ssi~~

$\|A\| = m \max |a_{ij}| \underset{\uparrow}{=} \|x\|_1 \|A\| = \underset{\uparrow m}{\|Ax\|} = m \max \|Ax\|$

car $\|x\|_1 = 1$.

Ex 3 soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv, Mq $\exists$ couple ! (Q, R) tq $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale & $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ◸ à diag $S^T > 0$ tq $A = QR$.

Mq $\exists$ de cette factor.

$A = Q_1R_1$ et $A = Q_2R_2 \Rightarrow Q_1R_1 = Q'R'$

$Q_2^T Q_1 R = R'$ car Q' est orthogonale : $Q'^T Q' = I$.

$\Rightarrow Q_2 R_2 = I_n$; R_1, R_2 ◸ élts diag > 0.

$\Rightarrow \underbrace{A^T A}_{\text{sdp}} = R_1^T Q_1^T Q_1 R_1 = R_1^T R_1 = R_2^T R_2$

$R_1 = C$ ◺ élts diag > 0

$\xRightarrow{\text{unicité}}$ du Th de $\boxed{\text{Cholesky}}$ $\Rightarrow R_1^T = R_2^T$

$AR_1 = Q_1 = AR_2 = Q_2 \Rightarrow$ unicité de R & Q.

$A^T A$ sdf $\Rightarrow C$ ◺ élts diag > 0 tq $A^T A = CC^T \Rightarrow$ posons $R = C^T \Rightarrow$ ◸ inv de diag > 0

$\xRightarrow{\text{pose}} Q = AR^{-1} \Rightarrow Q^T Q = R^{-T} \underbrace{A^T A}_{R^T R} R^{-1} = I_n$.

Ex 4 : $H = I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n$

a) Mq H est sym & orthog.

$H = H^T$ $\quad$ $H^T H = I$.

sym ?

$$H^T = \left(I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T = H$$

$$H^T H \overset{\text{car sym}}{=} HH = \left(I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T\right)^2 = I_n^2 - \frac{4}{\|v\|_2^2} vv^T + \frac{4}{\|v\|_2^2} vv^2$$

$$= I_n^2 = I_n.$$

$\Rightarrow$ pas $\boxed{M}^{QR}$ vp.

$\boxed{M}^{QR} \neq$ décomp QR

$(\ )(\ ) = (\ )(\ )$

b) soit $x, e_1 \in \mathbb{R}^n$, si $v = x - \sigma \|x\|_2 e_1$ & $\sigma \in \{1, -1\}$.

Mq $\underline{Hx = \sigma \|x\|_2 e_1}$.

$$Hx = \left(I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} v v^T\right) x$$

Correct°

Ex 1 $\|Ax\|_1 \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{m} |(Ax)_j| \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|a_{j,k}|}_{\leq \frac{1}{m}\|A\|} |x_k|$

$\leq \frac{1}{m} \|A\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|A\| . \|x\|_1$.

$\|.\|$ sous-multi ? ssi $\|I_n\| = 1$

Non car $\|I_n\| = n - 1 + 1$.

---

ed ff $\|A\|_M = \|MAM\|^{-1}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_M \overset{def}{=} \max\{\|Ax\|_M, \|x\|_M = 1\}$

$\overset{TD}{=} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_M} = \max_{x \neq 0} \frac{\|MAx\|}{\underbrace{\|Mx\|}_{y}}$

bijecO

$y = Mx$

$= \max_{y \neq 0} \frac{\|MAM^{-1}y\|}{\|y\|} = \|MAM^{-1}\|$.

Ex3 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv

Mots clés : Cholesky mat sym déf pos.

Posons $M = A^T A$ & mq M est sdp.

$M^T = (A^T A)^T = A A^T = M$ dc M est symm.

→ Mq M est déf pos : $\begin{cases} \cdot \forall x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x \rangle \geq 0 \\ \quad x^T A x \geq 0 \end{cases}$

$\cdot x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$

ici $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T M x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

et $x^T M x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \overset{A\ inv}{\Rightarrow} x = 0$

D'après TH de Choleski,

$\exists!\ R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triang sup, à élts diag > 0 tq $M = R^T R$.

Posons $Q = AR^{-1}$ (R inv)

- Mq $A = Q.R$ ✓
- Mq Q est orthogonal : $Q^T Q = R^{-T} A^T A R^{-1} = R^{-T} M R^{-1}$
$= R^{-T} R^T R R^{-1} = I_n$.

→ ∃ décomp° QR (pleine = économiq) de A.

30° soit $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$.

Deux décompo QR $\Rightarrow A^T A = R_1^T R_1 = R_2^T R_2$

M 2 décomposit° de Cholesky pr M

mais les facteurs ~~diag~~ triq^{le} sup ds Cholesky est unique. Dc $R_1 = R_2$.

→ soit R_1 inv, $Q_1 = A R_1^{-1} = A R_2^{-1} = Q_2$

$\Rightarrow \exists$ & 30° des 2 fct^{rs} Q & R ds décompo QR.

Ex2 a) $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & \emptyset & 1 \\ -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ \emptyset & & -1 & 3 & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & n-1 \end{pmatrix}$

1) $x \in \mathbb{R}^n$,

Mq $x^T A x = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_n)^2$

2) ed ss-mat ppl d'ordre $k \in [\![1, n-1]\!]$ dp puis cl $A = LU$.

$\forall x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $x^T [A]_k x$

$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \underset{x_{k+1} = \cdots = x_n = 0}{=} x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_n)^2$

comme son dét ≥ 0 & $x^T A x = 0$

$\Leftrightarrow$ chacun de ses termes ≥ 0 vaut 0

$\Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0$

cl pr $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $[A]_k$ est sym dp

$\Rightarrow \det([A]_k) > 0$

$\Rightarrow$ p Th cours $\Rightarrow$ A admet décomp LU

---

b) on introduit Gauss, Th pivot, $A = LU$

Calcul du pivot$(A) = (1, 1, 2, \dots, n-2, \ \ 1)$
$i = 2, \dots, n-1$

2) Posons $\mathrm{front}(A) = (j_1, j_2, \dots, j_n)$

Mq (PR) $\underline{\text{n } k}$ que $\forall i \geq k$ & $\forall k \leq j \leq j_i$;

$a_{i,j}^{(k)} = a_{ij}$

$\underline{k=1}$ Comme $A^{(1)} = A$, $\forall i,j \geq 1 = k$, $a_{i,j}^{(1)} = a_{ij}$

$\underline{k \Rightarrow k+1}$ $\underline{HDR}$ $\forall i \geq k$, $\forall k \leq j \leq j_i$: $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$

De p l'indice $\underline{k+1}$:

$\forall i \geq k+1$, $\forall j \geq k+1$, $j \leq j_i$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

& p $\underline{HDR}$ $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$ (le couple (i,j) est permis $\forall$ p HDR)

et $a_{ik}^{(k)}$ et $j_i \geq j \geq k+1 \Rightarrow a_{ik}^{(k)} = a_{ik}$

de plus $j_i \geq k+1 \iff k \leq j_i - 1 \overset{\text{def}}{\underset{\text{front}}{\Longrightarrow}} a_{ik} = 0$

$$\text{d'où } a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \overset{HDR}{=} a_{ij}$$

3) ed $\mathrm{front}(L) = \mathrm{front}(A)$

$\mathrm{front}(A) = (j_1, \dots, j_n)$, $\mathrm{front}(L) = (\tilde{j_1}, \dots, \tilde{j_n})$

Ex 8 $\boxed{M}$ de Givens

$\circled{R}$ $A = QR$ ⊙/orthog ▽ $\circled{GS}$ } rectang. $A = LU$ carré

$A = QR$ Householder

$$\begin{cases} H_1 = I_n - 2uu^T \\ H_1 = I_n - \dfrac{vv^T}{\beta} \end{cases} \quad \& \quad \beta = \frac{\|v\|_2^2}{2}$$

$H_1 a_1 = \alpha e_1$ (car si a, b non-colinéaires $Ha = \alpha b$)

On détermine α & u.

$A_1 = A = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n]$

$$A_2 = H_1 A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) ; \quad A_3 = H_2 A_2 = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & 0 & \\ 0 & \alpha_2 & \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

où
$$H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & I_{n-1} - \dfrac{\tilde v \tilde v^T}{\beta} \end{array}\right), \quad \tilde v \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$H_2 = I_n - \frac{vv^T}{\beta}, \quad v = (0, \tilde v^T)$$

$$A_4 = H_3 A_3 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 & \alpha_2 & & \\ 0 & & \alpha_3 & \\ \hline \vdots & 0 & 0 & \\ 0 & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$R = A_n = H_{n-1} A_{n-1} = H_{n-1} H_{n-2} A_{n-2}$$

◺ $\vdots$ $= \underbrace{H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1}_{Q^T = Q^{-1} \text{ orthogonale}} A_1$

$R = Q^{-1} A \iff QR = A.$

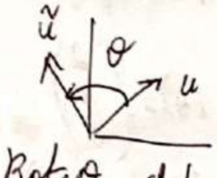
$$H_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & \\ \hline & I - \dfrac{\tilde w \tilde w^T}{\beta} \end{array}\right), \quad \tilde w \in \mathbb{R}^{n-k+1}$$

$$w = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \tilde w^T) \in \mathbb{R}^n$$

$\boxed{M}$ Givens : idée annuler 1 coeff à la fois

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \boxed{2} & 3 & \cdots \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$



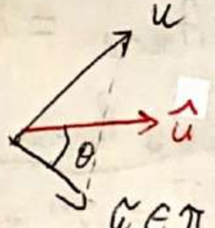
Rotaθ d'angle θ

$$G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\tilde u = Gu$

$\mathbb{R}^n$

$\Pi = \mathrm{Vect}\,\{e_q, e_p\}$, $p > q$



$\hat{u} \in \Pi$, $\tilde{u} \in \Pi$

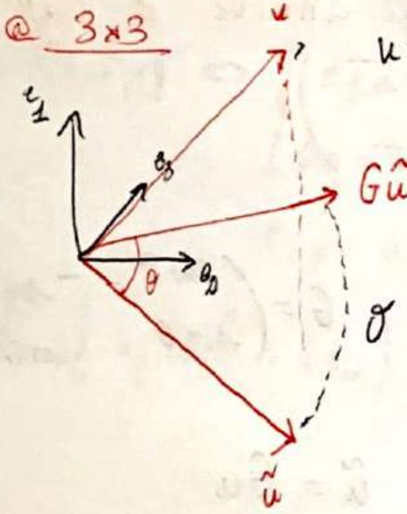
a) Représenter $G_{p,q}(\theta)$ & en donner interprétation géométrique.

$$G_{p,q}(\theta) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & & -\sin\theta & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ q \\ \\ p \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad q \quad\quad\quad p \end{array}$$

$u \in \mathbb{R}^n$,

$$G_{pq}(\theta)u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ \boxed{\cos\theta\, u_1 - \sin\theta\, u_p} \\ u_{q+1} \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ \boxed{\sin\theta\, u_q + \cos\theta\, u_p} \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ q \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

@ 3×3



$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$p = 3,\ q = 2$

$$\sigma = G_{3,2}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \cos\theta\,\beta - \sin\theta\,\gamma \\ \sin\theta\,\beta + \cos\theta\,\gamma \end{pmatrix}$$

c) $G_{32}(\theta) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c\,a_{21} - s\,a_{22} & & \\ & & \text{etc} \end{pmatrix}$

CL lignes p & q de A.

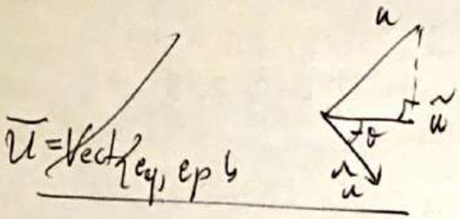
$$A \cdot G_{32}(\theta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \underbrace{c\,a_{12} + s\,a_{13} \quad \cdot}_{\text{CL colonnes } p \text{ \& } q \text{ de } A} \\ a_{21} & \text{etc} \\ a_{31} & \end{pmatrix}$$

c) Décrire mat $B = G_{pq}(\theta) A$ & $C = A\, G_{p,q}(\theta)$ & donner interprétation géométrique résultat de ces multipl. sur mat A.

b) Mq $G_{p,q}(\theta)$ est une mat orthogonale

$G_{p,q}(\theta)^T \Rightarrow$ rotat° d'angle θ ou rotat° horaire d'angle θ.

$\overline{u} = \mathrm{Vect}\{e_q, e_p\}$



$$= G_{p,q}^T(\theta) \cdot G_{p,q}(\theta) u = u$$

$$= G_{p,q}(\theta) \cdot G_{p,q}^T(\theta) = Id$$

$$\Rightarrow G_{p,q}^T(\theta) = G_{p,q}^{-1}(\theta) \Rightarrow G \text{ orthogonale.}$$

c) Pr matrice complète,

$$B = G_{p,q} A \Rightarrow \begin{cases} b_{ij} = a_{ij} & \text{si } i,j \neq p,q \ , \ 1 \leq i,j \leq n \\ b_{qj} = \cos\theta \, a_{qj} - \sin a_{pj} & 1 \leq j \leq n \\ b_{pj} = \sin\theta \, a_{qj} + \cos\theta \, a_{pj} \end{cases}$$

$$C = A G_{pq} \Rightarrow \begin{cases} c_{ij} = a_{ij} & \text{si } i,j \neq p,q \quad 1 \leq i,j \leq n \\ c_{iq} = \cos\theta \, a_{iq} - \sin\theta \, a_{ip} & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c_{ip} = \sin a_{iq} + \cos\theta \, a_{ip} \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n] \ ; \ A^T = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$$

d) But annuler un coeff à la fois en-dessous de la diagonale.

1) $p > 1$ $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ \boxed{1} & \\ 0 & \end{array} \right)$ $q = 1$

On vt annuler $a_{pq} \neq 0$ si $p > q$.

$$\Rightarrow B = G_{pq} A \text{ si } b_{pq} = 0.$$

$$\begin{cases} \boxed{b_{pq} = \sin\theta \, a_{qq} + \cos\theta \, a_{pq} = 0} \ (\star) \text{ si } j = q. \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \end{cases} \Rightarrow \theta ?$$

$$\sin\theta \, a_{qq} = -\cos\theta \, a_{pq}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-a_{pq}}{a_{qq}} \quad \triangle \ a_{qq} \neq 0.$$

$$t = \tan\theta \ , \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-a_{pq}}{a_{qq}}\right)^2}} = \frac{a_{qq}}{\sqrt{a_{qq}^2 + a_{pq}^2}} = \alpha$$

(i)

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \dots - \frac{a_{pq}}{\sqrt{a_{qq}^2 + a_{pq}^2}} = \beta$$

ou sinon $\begin{cases} \cos\theta = -\alpha \\ \sin\theta = -\beta \end{cases}$ (ii). $\Rightarrow b_{pq} = 0.$

$(\star)$ $b_{qq} = \alpha a_{qq} - \beta a_{pq}$

choix (i) $\quad b_{qq} = \dfrac{a_{qq}^2 + a_{pq}^2}{\sqrt{a_{qq}^2 + a_{pq}^2}} \geq 0$

choix (ii) $\Rightarrow b_{qq} < 0$

2) ~~Ch~~ Comment choisir p & q ?

si $a_{21} \neq 0$, $p = 2, q = 1$.

$$B = G_{21} A = G_{21} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \\ b_{31} & \cdots \\ \vdots & \\ b_{m1} & \cdots \end{pmatrix}$$

si $b_{31} \neq 0$, je veux l'annuler $p = 3, q = 1$,

$$B^{(2)} = G_{3,1} B^{(1)} = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ * & \cdots \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $c_{31} = 0$ car

$$\cos\theta = \frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

$$\sin\theta = -\frac{b_{31}}{\sqrt{b_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

si tous les coeff 1° colonne de $A \neq 0$,

$$B^{(1)} = G_{21} A = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

$$B^{(2)} = G_{31}(G_{21} A) = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ \boxed{0} & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{matrix} q=1 \\ p=3 \end{matrix}$$

$$G_{41}(G_{31}(G_{21} A)) = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ * & \cdots \end{pmatrix}$$

on a annulé la 1° colonne $\Rightarrow$

$$B^{(m,1)} = G_{m1}(\ldots) = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \cdots \\ 0 & \boxed{*} & \cdots \\ \vdots & & \\ 0 & & \cdots \end{pmatrix} \quad p=3, q=2$$

$$B^{(3,2)} = G_{32} B^{(m,1)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots \\ 0 & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \boxed{*} & \cdots \end{pmatrix} p$$

$q = 2$

$G_{p2} B^{(3,2)}$

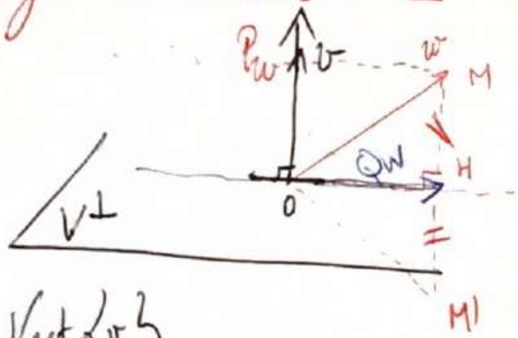
$$\tilde{A} = \underbrace{G_{m,m-1} G_{m,m-2} G_{m-1,m-2} \cdots}_{Q^T = \text{orthogonale}} \underbrace{G_{m,1} G_{m-1,1} \cdots G_{2,1} A}_{B^{(m,1)}}$$

$\tilde{A} = R$

$\Rightarrow A = QR$

Ex7 Mat de Householder

a) $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$ Mq $H_v = I_n - 2vv^T$ représente une symétrie p/ sev p vect^{rs} orthognx ⊗ vecteur v. cd $\det H_v = -1$.



$\|MH\| = \|M'H\|$

$\boxed{H_v \vec{OM} = \vec{OM'}}$

$V = \text{Vect}\{v\}$

$w' = H_v w$ est le vecteur symétriq à w p/ à $V^\perp$.

Preuve : $\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{MM'}$

$\vec{OM'} = \vec{OM} + 2\vec{MH}$ $\quad \|\vec{MH}\| = \alpha$ car $\|\vec{v}\|_2 = 1$ $\Rightarrow$

$\vec{MH} // \vec{v} \iff \vec{MH} = -\alpha \vec{v}$ & $\alpha > 0$

$w' = \vec{OM'} = w - 2\alpha v$ où $\alpha = \langle w, v \rangle$
$\alpha = v^T w$.

$= w - 2vv^T w$

$= (Id - 2vv^T) w$

$V = \text{Vect}\{v\}$, lien avec exo 4

$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ projecteur orthogonale sur V

$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V^T$ ——— sur $V^\perp$

$Q = I - P$, $\mathbb{R}^n \ni x = x_1 + x_2 = Px + Qx$

$= Px + (I - P)x$

$G = V^T V = [v]^T [v] = v^T v = 1$ car vect ①.

$\hookrightarrow \in \mathbb{R}, \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

$V = [v_1 | v_2 | \dots | v_r]$

$P = VG^{-1}V^T = VV^T = vv^T$ mat de rang 1 $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

soit $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq v$,

$Pw = vv^T w = \langle w, v \rangle v = \alpha v \in V$

$Qw = (I - P)w = w - vv^T w = (I - vv^T) w$

$\neq H_v$.

$\rightarrow H_v^T = (I - 2vv^T)^T = I - 2vv^T$ est symétriq.

$H_v = SDS^{-1}$ & $S = [v_1\ v_2 \dots v_n]$

$v_i = \vec{vp} \longleftrightarrow$ à λ_i

$H_v v_i = \lambda_i v_i$

H_v orthogonale $\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$, $|\lambda_i| = 1$, $\lambda_i = \pm 1$.

$D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \pm 1$.

$H_v v = (I - 2vv^T)v = v - 2v = -v$

-1 vp.

$Qw = (I - P)w \in V^\top$

$$H_v(Qw) = (I - 2vv^T)(I - vv^T)w$$
$$= w - 3vv^Tw + 2v(v^Tv)v^Tw$$
$$= w - vv^Tw = Qw.$$

soit $z = Qw \in V^\top$,

$H_v z = z \Rightarrow \lambda = 1$ est vp de multp. $n-1$

$$\det(H_v) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{n-1} \times (-1) = -1.$$

b) Mq Tte mat orthogonale de taille n est le $\prod$ d'au plus n mat de Householder.

ed interprétat° géométriq mat orthogonales.

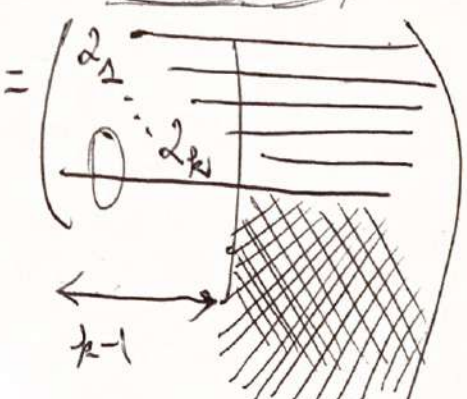
A_1 orthogonale, $A = QR$ par Householder

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & * \end{pmatrix}; \quad A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$A_n = H_{n-1} A_{n-1}$

$$R = A_n = H_{n-1} H_{n-2} A_{n-2} = \dots = H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1 A_1.$$

$$H_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \boxed{I_{n-k} - 2\tilde{v}\tilde{v}^T} \end{pmatrix} \quad \tilde{v} \in \mathbb{R}^{n-k}$$

$A_k =$ 

$\in \mathcal{O}_{n-k+1}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A_{k+1} = H_k A_k$, $H_k = (I_n - 2vv^T)$ où $v = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \tilde{v}^T)^T$

si A est orthogonale,

$$\cancel{A_2 = H_1 A_1}$$

$$R = A_n = \underbrace{\overbrace{H_{n-1} \dots H_1}^{Q^T}}_{\text{orthogonale}} A$$

hypothèse: ici orthogonale par

$\Rightarrow R$ ▽ & orthogonale

on applique H_n

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

si $r_{nn} = -1$

$H_n = I_n - 2 e_n e_n^T$

$A = QR$

A orthog $\Rightarrow R$ orthogonale (Π matrices orthogonale)

lien + unicité de QR si $R_{ii} > 0$ (GS)

T.D. 3 : Calcul numérique de vp

Ex 1 : $\boxed{M}$ de la puissance, calculs explicites

ici $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

a) On note $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$, 1) calculer éléments propres de A. 2) Calculer suite (q_k) d'approximants d'un $\vec{vp}$ de A, construite p $\boxed{M}$ de la puissance:

$$q_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}, \quad z_{k+1} = A q_k$$

en partant de $z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 10, \lambda_2 = -1$ car $\triangle$.

$Av = 10v$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$Aw = w \to w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Donné q_0, $\|q_0\|_\infty = 1$

Pour $k = 0, 1, \dots$

$z_{k+1} = A q_k$

$\gamma_k = z_{k+1}(i)$ tq $|z_{k+1}(i)| = \|z_{k+1}\|_\infty$

$q_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\gamma_k}$.

(Th) si q_0 n'est pas orthogonale au sous espace engendré par le vecteur propre à gauche ~~de A~~ à λ_1, alors

$$q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha v_1 \quad \text{où } \underline{A v_1 = \lambda_1 v_1}$$

$\uparrow$ vp à droite.

$$\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$$

$$w_1^* A = \lambda_1 w_1^* \quad \Leftrightarrow A^* w_1 = \overline{\lambda_1} w_1$$

$\uparrow$ vp à gauche

$$\underline{\underline{\langle q_0, w_1 \rangle \neq 0}}$$

$$z_1 = A q_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -17/20 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -117/20 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -197/200 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1997/200 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1997}{2000} \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Sp(B) = \{4, -2\}$; $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = q_0$, $z_1 = B q_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z_2 = B q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

!!!!!!!!

ne f pas car $\langle z_0, v_1 \rangle = 0$!!!!!!!

de ça on CV vers $\vec{vp}$.

(iii) si q_0 n'est pas orthogonale au ss espace engendré par le vecteur propre à gauche de A associé à λ_1, alors

$$q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha v_1 \quad \text{où} \quad \underline{A v_1 = \lambda_1 v_1}$$

vp à droite.

$$\gamma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$$

$$w_1^* A = \lambda_1 w_1^* \iff A^* w_1 = \overline{\lambda_1}\, w_1$$

vp à gauche

$$\langle q_0, w_1 \rangle \neq 0$$

$$z_1 = A q_0 = \begin{pmatrix}10 & 0\\ -9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}20\\ -17\end{pmatrix}$$

$$q_1 = \begin{pmatrix}1\\ -17/20\end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix}10\\ -117/20\end{pmatrix} \qquad q_2 = \begin{pmatrix}1\\ -197/200\end{pmatrix}$$

$$z_3 = \begin{pmatrix}10\\ -1997/200\end{pmatrix} \qquad q_3 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1997}{2000}\end{pmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

TB

b) $B = \begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

$Sp(B) = \{4, -2\}$; $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$z_0 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = q_0$, $z_1 = Bq_0 = \begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$, $q_1 = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$

$z_2 = Bq_1 = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$; $q_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

!!!!!!!!

ne f pas car $\langle z_0, v_1 \rangle = 0$

de ça ne CV vers $\vec{vp}$.

c) $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$P_C = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ $\qquad Sp(C) = \{1, -1\}$

Rq : $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

$$q_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|} = \frac{1}{\max\{|x|, |y|\}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$z_1 = Cq_0 = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}, \quad q_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|_\infty} = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix} \text{ car } \|z_1\|_\infty = \max\left\{\frac{|y|}{K}, \frac{|x|}{K}\right\} = \frac{1}{K}\max\{|y|, |x|\} = 1$$

$$z_2 = Cq_1 = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} ; \|z_1\|_\infty = 1.$$

$$q_2 = z_2 = q_0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{2k} = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \\ q_{2k+1} = \frac{1}{K}\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \text{la suite ne CV pas.}$$

(Th) Soit A tq $\underbrace{|\lambda_1| < |\lambda_2| = \dots = |\lambda_m|}$ $> |\lambda_{m+1}| \geq \dots |\lambda_n|$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ multiplicité $m \geq$ de λ_1

(ie la + gde val^{r} propre est uniq)

$P_A(X) = (X-\lambda_1)^m (X-\lambda_{m+1}) \cdot (X-\lambda_n)$

ici $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ mais $P_A(x) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$
& $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

d)

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|v\|_\infty = 1$; $q_0 = z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ $0 < y < 1$,
$\|z_0\|_\infty = 1$

$z_1 = E z_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2y \end{pmatrix}$, $\|z_1\|_\infty = 2+y$

$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{2+y} \end{pmatrix}$, $z_2 = E q_1 = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2y}{2+y} \\ \frac{4}{2+y} \end{pmatrix} = \frac{2}{2+y}\begin{pmatrix} 2+2y \\ 2y \end{pmatrix}$

$\|z_2\|_\infty = \frac{2}{2+y}(2+y)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ y/1+\frac{y}{2} \end{pmatrix}$ "

$q_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|_\infty} = \begin{pmatrix} \frac{2+2y}{2+y} \\ \frac{2y}{2+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{2+y} \cdot \frac{2+y}{2+2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{1+y} \end{pmatrix}$

$z_3 = E q_2 = \begin{pmatrix} 2 + \frac{y}{1+y} \\ \frac{2y}{1+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+3y}{1+y} \\ \frac{2y}{1+y} \end{pmatrix}$, $z_3 / \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{2+3y} \end{pmatrix}$

$q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{1+\frac{3}{2}y} \end{pmatrix}$

$z_4 = E q_3 = \begin{pmatrix} 2 + \frac{y}{1+\frac{3}{2}y} \\ \frac{2y}{1+\frac{3}{2}y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+3y+y}{1+\frac{3}{2}y} \\ \frac{2y}{1+\frac{2}{3}y} \end{pmatrix}$

$q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{2+4y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{1+2y} \end{pmatrix}$

$q_{2k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{1+ky} \end{pmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{1+(k+\frac{1}{2})y} \end{pmatrix}$

& vitesse de cvce $\frac{y}{1+ky} = O\left(\frac{1}{k}\right) = g\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+k}\right)$

$\left\|q_k - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \frac{y}{1+ky}$ si k pair

$= \frac{1}{1+(k+\frac{1}{2})y}$ si k impair.

λ_1 de multiplicité $m=1$.

$$\|q_k - v_1\|_\infty = O\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right), \quad |\lambda_1|>|\lambda_2|>\dots>|\lambda_m|$$

si $m>1$, $$\|q_k - v_1\|_\infty = O\left(\frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_1|}\right)$$

Ex2 [M] de la puissance pr mat normale

ici $\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$, $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

$AA^* = A^*A$; $(e_i)_{1\le i\le n}$ base orné de vp de A $\Leftrightarrow$ vp $(\lambda_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{C}^n$.

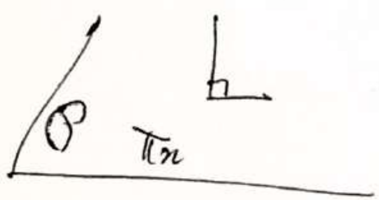
Spps $\exists\ 1\le k_0\le n-1$ tq

$$\rho(A)=|\lambda_1|=\dots=|\lambda_{k_0}| \boxed{>} |\lambda_{k_0+1}|\geq\dots|\lambda_n|$$

On introduit la $\overset{P(A)}{\text{projec}}$

$$\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i$$

$x\in\mathbb{C}^n$.



$\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_{k_0}\}$

a) Mq $\forall z\in\mathbb{C}^n$,
$$\|z\|^2 = \|\pi z\|^2 + \|(I_n-\pi)z\|^2.$$

$\rightarrow$ TD$_1$: exo4 : A normale $\Leftrightarrow A=UDU^*$, (u), $U=[e_1|\dots|e_n]$

$\mathbb{C}^n \ni z = \pi z + (I-\pi)z$ car $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_{k_0}\}\oplus \mathrm{Vect}\{e_{k_0+1},\dots,e_n\}$.

$$\|z\|^2 = \langle z,z\rangle$$
$$= \langle \pi z + (I-\pi)z, \pi z + (I-\pi)z\rangle$$
$$\overset{\text{Pythagore}}{=} \|\pi z\|^2 + \|(I-\pi)z\|^2 + \underbrace{\langle \pi z, (I-\pi)z\rangle + \langle (I-\pi)z, \pi z\rangle}_{=0 \text{ car } \pi z \in \mathcal{P},\ (I-\pi)z = \mathcal{P}}$$

b) Mq si $z\in\mathbb{C}^n$ tq $\pi z\neq 0$
$\Rightarrow \pi A z \neq 0$ & dc $Az\neq 0$.

$$Az = A\left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i \lambda_i e_i \in \mathbb{C}^n.$$

$$\pi A z = \sum_{i=1}^{k_0} z_i \lambda_i e_i.$$

<u>Astuce</u> Pr voir $\Pi A_3 \neq 0$, Regardons

$$\|\Pi A_3\|_2^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k_0} z_i \lambda_i e_i , \sum_{i=1}^{k_0} z_i \lambda_i e_i \right\rangle$$

$$\overset{(e_i, e_j) = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^{k_0} |z_i \lambda_i|^2 = \underset{\neq 0}{|\lambda_1|^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{k_0} |z_i|^2}_{\neq 0 \text{ car } \Pi_3 \neq 0.}$$

$\Rightarrow \|\Pi A_3\|_2^2 > 0 \Rightarrow \Pi A_3 \neq 0.$

$\|A_3\|^2 = \langle A_3, A_3 \rangle \overset{\text{Py th.}}{\underset{a)}{=}} \underbrace{\|\Pi A_3\|^2}_{b)\ >0} + \underbrace{\|(I-\Pi) A_3\|^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow A_3 \neq 0.$

c) soit $x \in \mathbb{C}^n$ tq $\Pi x \neq 0$

1) Mq l'on pt déf PR (z_k) vérifiant

$$\left[z_0 = \frac{x}{\|x\|} \quad \& \quad \forall k \in \mathbb{N}, z_{k+1} = \frac{A z_k}{\|A z_k\|} \right]$$

$\boxed{M}$ puissance $\quad q_0 = \frac{x}{\|x\|_2}$

Pr $k = 0, 1, \dots$

$x_{k+1} = A q_k$

$\lambda^{(k+1)} = \frac{x_{k+1}(j)}{q_k(j)}$ pr un $j \in [\![1, n]\!]$ tq

$q_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$

Indéfiniment.

2) Mq $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k = \frac{A^k x}{\|A^k x\|}$ (☆)

$k = 0$

$z_0 = \frac{A^0 x}{\|A^0 x\|} = \frac{x}{\|x\|}$ <u>ok</u>

soit $k > 0$, (☆ vraie pr k)

$$z_{k+1} \overset{\text{déf}}{=} \frac{A z_k}{\|A z_k\|} = \frac{A \frac{A^k x}{\|A^k x\|}}{\left\| A \frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right\|} = \frac{A^{k+1} x}{\cancel{\|A^k x\|}} \cdot \frac{\cancel{\|A^k x\|}}{\|A^{k+1} x\|}$$

<u>ok</u> (☆ pr $k+1$ $\Rightarrow$ Vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.

3) Mq $k \to \infty$, on a

$$\frac{\|A^k x\|}{\rho(A)^k} \longrightarrow \|\Pi x\|, \quad (I_n - \Pi) z_k \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|A z_k\| \longrightarrow \rho(A).$$

$$\|A^k x\|^2 = \left\|A^k \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|^2 \overset{Ae_i = \lambda_i^k e_i}{=} \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i\right\|^2$$

$$\overset{ⓐ}{=} \left\|\sum_{i=1}^{k_0} x_i \lambda_i^k e_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i\right\|^2$$

Donc

$$\frac{\|A^k x\|^2}{\rho(A)^{2k}} = \underbrace{\underbrace{\frac{|\lambda_1|^{2k}}{\rho(A)^{2k}}}_{=1} \left\|\sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i\right\|^2}_{\frac{\|\Pi A^k x\|^2}{\rho(A)^{2k}}} + \underbrace{\left\|\sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \Big(\underbrace{\frac{\lambda_i}{\rho(A)}}_{<1}\Big)^k e_i\right\|^2}_{\frac{\|(I-\Pi)A^k x\|^2}{\rho(A)^{2k}}}$$

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$$= \sum_{i=1}^{k_0} |x_i|^2 + \sum_{i=k_0+1}^{n} |x_i|^2 \underbrace{\left|\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right|^{2k}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|\Pi x\|^2$$

car $\Pi x = \sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i$

$$(I-\Pi) z_k = (I-\Pi)\frac{A^k x}{\|A^k x\|}$$

$$\|(I-\Pi) z_k\|^2 = \left\|\sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k e_i\right\|^2 \rho(A)^{2k} \frac{1}{\|A^k x\|^2}$$

$\frac{1}{\|\Pi x\|^2}$

$$= \frac{1}{\|\Pi x\|^2} \sum_{i=k_0+1}^{n} |x_i|^2 \underbrace{\left|\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right|^{2k}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}$$

$$\|A z_k\| = \left\|A \frac{A^k x}{\|A^k x\|}\right\| = \frac{\|A^{k+1} x\|}{\|A^k x\|} = \underbrace{\frac{\|A^{k+1} x\|}{\rho(A)^{k+1}}}_{\to \|\Pi x\|} \frac{\rho(A)^{k+1}}{\|A^k x\|}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \|\Pi x\| \, \rho(A) \frac{1}{\|\Pi x\|} = \rho(A)$$

4) Q pt on dire sur CV de $(z_k)_k$ & $(z_{2k})_k$ qd A est ⓗ ? $\in$ cas $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k_0}$?

Si A ⓗ ie $A = A^* \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda_1 = -\lambda_2$

(Raisonner sur suite des vecteurs d'indices pair / impair).

Paraphe

A S $\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$ (et pas $\lambda_i > 0$ slt pr dp).

$\rho(A) = |\lambda_1|$, $\lambda_1 = -\lambda_2$

λ_2 0 λ_1

$$z_k = \frac{A^k x}{\|A^k x\|} = \frac{1}{\|A^k x\|} A^k\left(\sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i + \sum_{i=k_0+1}^{n} x_i e_i\right)$$

$A e_i = \lambda_i e_i$ pr $i \in [\![1, n]\!]$

$A^k e_i = \lambda_i^k e_i$

$$z_k = \frac{1}{\|A^k x\|}\left(\sum_{i=1}^{k_0} x_i \lambda_i^k e_i + \sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i\right)$$

$|\lambda_i| = \rho(A)$ si $i \in [\![1, k_0]\!]$

$$z_k = \frac{\rho(A)^k}{\|A^k x\|}\left(\sum_{i=1}^{k_0} \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k x_i e_i + \sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k e_i\right)$$

$\frac{\lambda_i}{\rho(A)} = \pm 1$ pr $i \in [\![1, k_0]\!]$.

$\left|\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right| < 1$ pr $i \in [\![k_0+1, n]\!]$.

$$z_k = \frac{\rho(A)^k}{\|A^k x\|}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{tq } \lambda_i<0}}^{k_0} x_i (-1)^k e_i + \sum_{i=1}^{k_0} x_i (-1)^k e_i + \sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k e_i\right)$$

81

suite rangs paires

$$z_{2k} = \frac{\rho(A)^{2k}}{\|A^{2k} x\|}\left(\sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i + \underbrace{\sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k e_i}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\right)$$

$$z_{2k+1} = \frac{\rho(A)^{2k+1}}{\|A^{2k+1} x\|}\left(-\sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i<0}}^{k_0} x_i e_i + \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i>0}}^{k_0} x_i e_i + \underbrace{\sum_{i=k_0+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^{2k+1} e_i}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ car } \frac{\lambda_i}{\rho(A)} \in]-1,1[}\right)$$

<u>cl</u> $(z_k)_{k\geq 0}$ ne CV pas.

mais $(z_{2k})_{k\geq 0}$ CV

ex $k_0 = 2$, $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\lambda_1 > 0$.

$z_{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\|\Pi x\|}(x_1 e_1 + x_2 e_2)$; $z_{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\|\Pi x\|}(x_1 e_1 - x_2 e_2)$

<u>Idée</u> : $(z_{2k})_k \xrightarrow{k\to\infty} v_1$ tq $A v_1 = \lambda_1 v_1$

$(z_{2k+1})_k \xrightarrow{k\to\infty} v_2$ tq $A v_2 = \lambda_2 v_2$ si $\lambda_1 = -\lambda_2$

x donné pr ε donné

$z_0 = \frac{x}{\|x\|_\infty}$, $\lambda^{(-1)} = 0$, $\lambda^{(0)} = 1$.

Pour $k \geq 0$ jusqu'à $\frac{|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda^{(k)}|} < \varepsilon$.

$x = A z_k$

$\lambda^{(k)} = x(i_0)$ tq $|x(i_0)| = \|x\|_\infty$.

$z_k = \frac{x}{\|x\|_\infty}$

(Th) $\lambda^{(k)} \longrightarrow \lambda_1$ tq $|\lambda_1| = \rho(A)$

$z_k \longrightarrow c\, v_1$ tq $A v_1 = \lambda_1 v_1$.

◦ Si $\lambda_1 = \lambda_{\dots} = \lambda_{k_0}$ $\Rightarrow$ CVce de l'Algo $\forall k \geq 0$.

◦ si $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k} > 0$, $z_k \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i\right) \frac{1}{\|\Pi x\|}$

(Th) si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

* λ_1 racine simple de $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_n)$
* λ_1 racine multiple $(X-\lambda_1)^m (X-\lambda_2)\dots$

exo2, q3 $\|z_k\| = \left\| \frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right\| \longrightarrow \|\Pi x\|$

$(I - \Pi) z_k = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k e_i \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \in \mathbb{R}^n$.

si z_k CV $\Rightarrow z_k \xrightarrow[\text{signe}(\lambda_1)]{} \pm \sum_{i=1}^{k_0} x_i e_i$ selon le signe des $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k_0}$

⚠ Voir Preuve (Th) & exo.

(si algo ne CV pas, une des solutions est de changer la valeur initiale ou sinon considérer une stratégie de distinguer les cas paires et impaires.) sinon soucis de multiplicité.

Ex3 $\boxed{M}$ de déflation

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une mat tq vp $\lambda_i \in \mathbb{C}$ vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

a) Mq λ est vp de A ssi $\bar{\lambda}$ vp de A^*.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \overline{\det(A - \lambda I)} = \det(A - \lambda I)^* = \det(A^* - \bar{\lambda} I)$$

λ vp de A.

~~Rq~~ $Av = \lambda v$ $\quad v$ vp ssi A

$(Av)^* = (\lambda v)^* \rightarrow v^* A^* = \bar{\lambda} v^* \Rightarrow$ | v^* est vp à gauche ssi à $\bar{\lambda}$.

On veut $A^* w = \bar{\lambda} w$, w vp à droite

b) Mq A & A^* st diagonalisable. (TD 1)

Si A est diagonalisable alors $\exists$ S inversible, D diagonale tq $A = SDS^{-1}$.

On a $S = [u_1 | u_2 | \dots | u_n]$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

→ A-t-on S inversible ?

si $k < n$ tq $u_1, \dots, u_k$ st lin-indépendts

& $u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \neq 0$.

$$A u_{k+1} = A\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u_i$$

$$\lambda_{k+1} u_{k+1} = \lambda_{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} \underbrace{u_i}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i \in [\![1, k]\!]$$

absurde.

$\Rightarrow u_{k+1}$ est lin. indépdt. Vrai $\forall k < n$.

S inversible $\Rightarrow A = SDS^{-1}$ ok

$A^* = (SDS^{-1})^* = S^{-*} D^* S^*$, $D^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$

& S^* inversible.

$$A = SDS^{-1} \Leftrightarrow AS = SD \quad \text{pr } i \in [\![1, n]\!].$$
$$Au_i = \lambda u_i$$

On sait $\underline{A^* v_i = \bar{\lambda}_i v_i}$, $i \in [\![1, n]\!]$

$$A^* \tilde{S} = \tilde{S} D^* \Leftrightarrow A^* = \tilde{S} D^* \tilde{S}^{-1}$$

$\tilde{S} = [v_1 | \dots | v_n]$

Relation entre $\tilde{S}$ et S : $\tilde{S} = S^{-*}$

c) Soit $1 \leq i,j \leq n$.

Mq $v_i^* u_j = 0$ si $i \neq j$ & $v_i^* u_i \neq 0$.

$i \neq j$, $A u_j = \lambda_j u_j \leftarrow \vec{vp}$ à droite de A.

$v_i^* A = \overline{\lambda_i}\, v_i^* \iff A^* v_i = \overline{\lambda_i}\, v_i$ à droite $\vec{vp}$ de A^*.

$v_i^* \times \begin{cases} A u_j = \lambda_j u_j \\ A^* v_i = \overline{\lambda_i}\, v_i \end{cases}$ $u_j^* \times$

(a) $v_i^* A u_j = \lambda_j v_i^* u_j$

$u_j^* A^* v_i = \overline{\lambda_i}\, u_j^* v_i \iff$ On prend l'adjoint

(b) $v_i^* A u_j = \lambda_i v_i^* u_j$

$\Rightarrow$ (a)-(b) $\Rightarrow v_i^* u_j \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0 \text{ (car on module st } \neq) \text{ si } i \neq j} = 0$

$\iff v_i^* u_j = 0 \iff u_j \perp v_i$.

si $i = j$ $\Rightarrow v_i^* u_j = 0 \iff u_j \perp v_i$

si $i = j$ $v_i^* u_i \neq 0$

2 $\vec{vp}$ à gauche & à droite $\leftarrow A \rightarrow$ à 2 vp distinctes st orthogonaux. Les $\vec{vp}_s$ à gauche & à droite $\leftarrow A \rightarrow$ à la même vp ne st pas orthogonaux.

d) On considère $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B_1 = A - \lambda_1 \dfrac{u_1 v_1^*}{v_1^* u_1}$

Mq $Sp(B_1) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Pour A, (λ_1, u_1) élt propre à droite

(λ_1, v_1) —— gauche

$B = A - \lambda_1 \dfrac{u_1 v_1^*}{v_1^* u_1}$ $u_1 v_1^*$

$\lambda = 0 \in Sp(B)$

$B u_1 = A u_1 - \dfrac{\lambda_1}{\cancel{(v_1^* u_1)}} u_1 \cancel{(v_1^* u_1)} = A u_1 - \lambda_1 u_1 = 0$

$i \neq 1$, $B u_i = A u_i - \dfrac{\lambda_1}{v_1^* u_1} u_1 \underbrace{(v_1^* u_i)}_{= 0} = A u_i = \lambda_i u_i$

$Sp(B) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

e) Proposer algo qui calcule approx λp & vp de A, basé sur $\boxed{M}$ de puissance

$$B_2 = B_1 - \frac{\lambda_2}{V_2^* u_2} u_2 V_2^*$$

& $Bu_2 = \dots = 0$, $Bu_i = \dots = \lambda_i u_i$ pr $i > 2$

$A = A_1$
(λ_1, u_1) p $\boxed{M}$ de la puissance sr A
(λ_1, v_1) ——— sr A^*

puissance inverse sr $(A^* - \lambda_1 I)^*$

On forme $B_1 = A_1 - \dfrac{\lambda_1 u_1 v_1^*}{v_1^* u_1}$ & on itère

$B_0 = A$

Pour $i = 1$ à m:

Calcul de λ_i, u_i, v_i p 2 algos $\boxed{M}$ puissance

Former $B_i = B_{i-1} - \dfrac{\lambda_i}{v_i^* u_i} u_i v_i^*$

f) si mat A (h)

$\Rightarrow$ vp à droite $=$ vp à gauche.

idem e) sauf 1 seul algo $\boxed{M}$ puissance

$\boxed{M}$ de Jacobi.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Jacobi

$$G_{21} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & & & \\ 0 & \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

+ Rapide facto QR.

$$\Rightarrow G_{21} A G_{21} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{a}}_1 & 0 & & & \\ 0 & \tilde{\tilde{a}}_2 & \tilde{\tilde{b}}_2 & & \\ & b_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Faire ex 5