TD3 : ANGLES

Dans un triangle

Exercice 1

Soient le triangle $\triangle ABC$, et trois points $D \in [AC]$, $E \in [BC]$, et F tel que FA et FB soient les bisectrices (intérieures) de $\measuredangle DAE$ et $\measuredangle DBE$ respectivement. Montrer que :

$$\widehat{AFB} = \frac{\widehat{ADB} + \widehat{AEB}}{2}.$$

Exercice 2

Soient un triangle $\triangle ABC$ et point un point $D \in [AC]$ tel que $AB = AD$. En sachant que $\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 30°$, trouver $\widehat{CBD}$.

Exercice 3

Soit un triangle $\triangle ABC$. La bissectrice intérieure de $\measuredangle A$, et la bissectrice extérieure de $\measuredangle B$ se se coupent en D. La droite parallèle à (AB) passant par D coupe les droites (AC) et (BC) en L et M respectivement.

a) En sachant que les côtés LA et MB du trapèze $ABML$ sont respectivement de 5 et 7, trouvent la mesure de la petite base LM.

b) En sachant que le triangle $\triangle ABC$ est isocèle en C, trouvent la mesure de LM.

Exercice 4

Soient un triangle $\triangle ABC$ rectangle en C, H le pied de la hauteur issue de C et M le milieu de AB. Montrer que la bisectrice de $\measuredangle ACB$ est aussi bisectrice de $\measuredangle MCH$. Est-ce encore vrai pour un triangle qui n'est pas rectangle en C ?

Exercice 5

Soit $\triangle ABC$ un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit, de centre O. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$. La hauteur (AH) issue de A du triangle $\triangle ABC$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point D.

Montrer que la droite (DA') est parallèle à (BC).

Exercice 6

Soit $[AB]$ un segment et M, N deux points appartenant au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$. On suppose que les droites (MB) et (AN) (respectivement (NB) et (AM)) s'intersectent en P (respectivement en Q). Déterminer l'angle formé par les droites (AB) et (PQ).

Dans un cercle

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient B et C deux points de $\mathcal{C}$, et A l'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points B et C. On note E la projection orthogonale de C sur (OB).

Montrer que $BE \times BO = AB \times CE$.

Exercice 8

Soit AB et CD deux cordes perpendiculaires qui se coupe en E. Montrer que la médiane issue de E dans AEC et la heuteur issue de E dans BED coïncident.

Formuler et démontrer une proposition réciproque.

Exercice 9 (Puissance d'un point)

Soient M un point et $\mathcal{C}$ un cercle. On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par P et qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points (pas forcément distincts) S et T.

a) Montrer que la quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dépend pas du choix de la droite $\mathcal{D}$.

Pour la suite on note cette quantité $P_{\mathcal{C}}(M)$ *et on l'appelle* puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$.

b) Étant donné un cercle $\mathcal{C}$, déterminer le signe de $P_{\mathcal{C}}(M)$ en fonction de la position de M.

c) Montrer que l'ensemble des points à égale puissance par rapport à deux cercles non concentriques donnés est une droite (appelée *axe radical* de ces deux cercles).

d) Déterminer l'axe radical dans le cas de deux cercles distincts qui s'intersectent.

e) Quelle droite « connue » généralise l'axe radical.

f) Étant donnés deux cercles non concentriques, construire à la règle et compas l'axe radical.

Exercice 10

Soient A,B et P trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que la distance de P à (AB) est la moyenne géométrique des distances de P aux tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B.

Exercice 11

Soient $ABCD$ un carré de côté 1 inscrit dans un cercle et E un point de ce cercle. Cacluler $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$.

Généraliser ce résultat pour un rectangle.

Exercice 12 (Angle entre deux cercles)

Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 qui se rencontrent en un point S. On définit (la mesure de) l'angle entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comme étant égale à $\widehat{O_1MO_2}$.

a) Quelle est l'angle entre deux cercles tangents extérieurement ?

b) Quelle est l'angle entre deux cercles tangents intérieurement ?

c) Soient un cercle $\mathcal{C}$ et un point M extérieur à $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un cercle de centre M qui est orthogonal[1] à $\mathcal{C}$.

d) Étant donnés deux cercles, déterminer l'ensemble des centres des cercles orthogonaux à ces deux cercles.

e) Étant donnés trois cercles en position générale, montrer qu'il existe un unique cercle qui est orthogonal aux trois.

1. Qui fait un angle de $\pi/2$ avec $\mathcal{C}$.