

Analyse complexe

année 2021-2022

Gijs M. Tuynman

Table des matières

Chapitre 1. Quelques préliminaires	5
1. Les courbes qui nous intéressent	5
2. Les 1-formes différentielles et leur intégration	13
3. Des courbes et leurs images	21
Chapitre 2. La scène	27
4. On passe en complexe	27
5. Séries entières	36
6. La fonction exponentielle et fonctions associées	42
7. Variantes de différentiabilité	48
Chapitre 3. Les théorèmes fondamentaux	57
8. La formule de Cauchy	57
9. Quelques conséquences de la formule de Cauchy	60
10. Suites, séries et intégrales de fonctions holomorphes	67
11. Le logarithme complexe ... est dangereux	69
12. L'indice et la formule de Cauchy généralisée	75
13. Homotopie et ouverts simplement connexes	81
Chapitre 4. Singularités	87
14. Séries de Laurent	87
15. Fonctions méromorphes	92
16. Le théorème des résidus	97
17. Application au calcul d'intégrales	102
Chapitre 5. Un peu de géométrie complexe	117
18. La sphère de Riemann	117
19. Fonctions holomorphes sur et vers la sphère de Riemann	125
20. Intermède : la vision géométrique	128
21. Automorphismes	136
Chapitre 6. Appendices	145
22. Quelques rappels de topologie	145
23. Convergence, continuité et plus	150
24. Avec l'intégrale de Lebesgue	157
25. Complexifier ce qui est complexe.	164
Chapitre 7. Les preuves	175
Bibliographie	277
Index	279

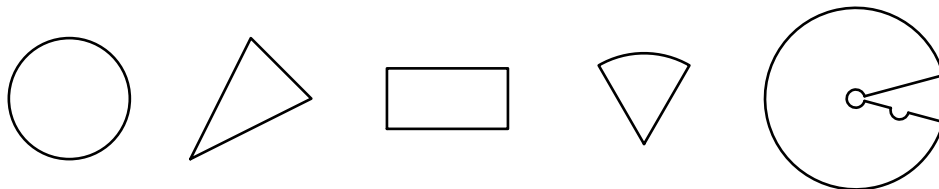
Quelques préliminaires

1. Les courbes qui nous intéressent

Le mot “courbe” prête facilement à confusion, car par cela on entend en général deux choses légèrement différentes. Il y a tout d’abord la notion de ce qu’on devrait appeler une courbe paramétrée, c’est-à-dire une application $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, où $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle dans \mathbf{R} (ou parfois même un sous-ensemble plus général de \mathbf{R}). Mais le mot “courbe” peut aussi désigner l’image $\gamma(I)$ d’une courbe paramétrée. Officiellement, quand on est précis, il n’y a donc pas confusion : le qualificatif “paramétrée” distingue les deux notions. Mais il est fréquent qu’on omet le qualificatif “paramétrée,” auquel cas il y a donc confusion. Pour le spécialiste cela ne pose aucun problème, car il sait quand il s’agit d’une courbe paramétrée, même quand ce n’est pas précisé, et en plus, dans un certain nombre de cas la distinction n’a pas d’importance. Par contre, pour le novice c’est perturbant. Et pour ce novice il n’y a pas de chance : en analyse complexe on peut (plus ou moins) confondre les deux notions. Mais cela nécessite des précisions et des preuves.

Dans ce texte j’adhérerai à l’usage standard en omettant le qualificatif “paramétrée,” mais j’utiliserai le mot “courbe” uniquement dans le sens “courbe paramétrée” ; quand il s’agit de son image, j’utiliserai explicitement le mot “image.” Dans cette première section on va préciser la classe des courbes qui nous intéressent et dans §3 on va montrer sous quelles conditions on peut confondre une telle courbe avec son image.

Pour motiver les définitions qui vont suivre, remarquons qu’en analyse complexe on s’intéresse surtout à des courbes fermées, c’est-à-dire des application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$, qui sont le bord d’une figure géométrique comme un rectangle, un triangle, un disque (dont le bord est un cercle) ou un secteur de disque (dont le bord est formé par deux segments et un arc de cercle).



Ces courbes ont des angles et, bien qu’on peut les décrire par des applications de classe C^∞ , une paramétrisation naturelle ne sera pas différentiable partout. D’autre part, pour les calculs on aura besoin de la dérivée γ' et parfois de la dérivée seconde γ'' . Pour que le tout tienne, il faut donc être précis dans la définition quel type de courbe on considère. C’est le but de ce qui suit.

1.1 Nota Bene. C'est un *résultat avec une preuve* que la différentielle/dérivée d'une application à valeurs dans un espace \mathbf{R}^p se calcule composante par composante : pour $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ avec $U \subset \mathbf{R}^n$, donnée par

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

avec $f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions réelle "ordinaire", la dérivée partielle $(\partial_j f)(x)$ est donnée par

$$(\partial_j f)(x) = ((\partial_j f_1)(x), \dots, (\partial_j f_p)(x)) .$$

D'autre part, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction vectorielle continue définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ avec

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) ,$$

on *définit*¹ son intégrale composante par composante :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left(\int_a^b f_1(t) \, dt, \dots, \int_a^b f_n(t) \, dt \right) .$$

1.2 Définition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application.

- Une *subdivision* de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$.
- On dit que f est de classe C^k , $k \geq 1$ sur $[a, b]$ si f est continue et si les dérivées successives $f^{(\ell)} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ existent et sont continues pour tout $1 \leq \ell \leq k$. Ici on définit les dérivées $f^{(\ell)}$ en un point du bord par récurrence par les dérivées à droite en a et à gauche en b comme

$$f^{(\ell)}(a) = \lim_{t \downarrow a} \frac{f^{(\ell-1)}(t) - f^{(\ell-1)}(a)}{t - a} \quad \text{et} \quad f^{(\ell)}(b) = \lim_{t \uparrow b} \frac{f^{(\ell-1)}(t) - f^{(\ell-1)}(b)}{t - b} .$$

- On dit que f est de classe C^k , $k \geq 0$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq p$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ est de classe C^k et que, pour tout $0 \leq \ell \leq k$, les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n). À noter que les valeurs $f(t_j)$ ne jouent aucun rôle dans cette définition et qu'on ne se prononce pas sur l'existence des dérivées en ces points.

- Quand on écrit que f est continue et C^k par morceaux (avec $k \geq 1$), cela veut dire que f est continue et que f est de classe C^k par morceaux. Cela ne veut pas dire que f est [continue et de classe C^k] par morceaux, car cela contient une information redondante (être de classe C^k , $k \geq 1$ implique la continuité).

→ **1.3 Lemme.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Il existe bien des définitions d'une intégrale de fonctions vectorielles qui ne passent pas par les composantes, mais ces approches sont assez sophistiquées ; on se facilite la plupart du temps la vie en la prenant comme définition, comme ici.

- (i) Si f' admet une limite à droite en a , alors f est dérivable à droite en a avec

$$f'_{\text{dr}}(a) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{t \downarrow a} f'(t) .$$

- (ii) Si f' admet une limite à gauche en b , alors f est dérivable à gauche en b avec

$$f'_{\text{ga}}(b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{t \uparrow a} f'(t) .$$

Ⓟ 1.4 Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est de classe C^k sur $[a, b]$.
- (ii) f est de classe C^k sur $]a, b[$ et pour tout $1 \leq \ell \leq k$ la fonction $f^{(\ell)}$ admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b .
- (iii) Il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$ contenant $[a, b]$ et une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k tels que la restriction de g à l'intervalle fermé $[a, b]$ est égale à f .

Avec [1.4] on voit qu'il y a trois façon différentes pour dire qu'une application continue est de classe C^k sur un intervalle fermé $[a, b]$. À part la définition [1.2] qui exige le recours à des dérivées à droite et à gauche, on peut se contenter avec les dérivées (ordinaires) sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, mais en exigeant que leurs limites existent aux deux points du bord. Ou bien on peut demander que c'est la restriction d'une application de classe C^k définie sur un intervalle ouvert plus grand (de nouveau sans avoir besoin des dérivées à gauche ou à droite).

Ⓟ 1.5 Corollaire. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application.

- (i) Si f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$, alors pour tout $1 \leq \ell \leq k$ la fonction $f^{(\ell)}$ est de classe $C^{k-\ell}$ par morceaux sur $[a, b]$.
- (ii) Si f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$, $k \geq 0$, alors pour tout $0 \leq \ell \leq k$ les fonctions $f^{(\ell)}$ sont bornées (sur l'ensemble où elles sont définies, c'est-à-dire $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points).
- (iii) f est continue et C^k par morceaux sur $[a, b]$, $k \geq 1$ si et seulement s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ telle que la restriction de f à chaque $[t_{j-1}, t_j]$ est de classe C^k **sur** $[t_{j-1}, t_j]$.

1.6 Lemme (admis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application.

- (i) Si f est continue par morceaux, alors l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie.
- (ii) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a l'égalité

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) .$$

Nota Bene. • La condition que f soit continue par morceaux dans [1.6.i] est une condition suffisante pour que l'intégrale de Riemann existe, ce n'est pas une condition nécessaire. Une condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble des points où f n'est pas continue a mesure (de Lebesgue) nulle [Spi65, Thm. 3-8].

• Comme pour [1.6.i], la condition que f soit continue et de classe C^1 par morceaux dans [1.6.ii] est une condition suffisante pour garantir ce résultat. Il est “facile” d'affaiblir cette condition en ne demandant que f soit continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points (donc sans la condition que la dérivée admet des limites en ces points), bien que pour cela il faut passer par l'intégrale de Riemann généralisée. Par contre, on ne peut pas prendre seulement la condition d'être de classe C^1 par morceaux sans exiger que f soit continue. Il suffit de penser à la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{t}{|t|} .$$

Cette fonction est de classe C^1 par morceaux (suffit de prendre la subdivision $t_0 = -1, t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ pour le voir). Pour $t \neq 0$ on a $f'(t) = 0$ et “donc” $\int_{-1}^1 f'(t) dt = 0$, tandis que $f(1) - f(-1) = 2$.

1.7 Définition/Terminologie. Dans ce texte je vais réserver le mot *courbe* pour une application $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, le plus souvent un intervalle fermé et borné. À vrai dire, on aura toujours à faire à des courbes qui sont au moins continues, mais on le précisera quand même. Dans la littérature on utilise de temps en temps d'autres mots, synonymes avec “courbe,” comme *chemin* ou *arc*.²

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une courbe continue. On dit que γ est *fermée* ou que γ est un *lacet* si elle vérifie la condition $\gamma(a) = \gamma(b)$. En analyse complexe on trouve aussi le mot *contour* pour un lacet. Si en plus l'application $\gamma : [a, b[\rightarrow \mathbf{R}^n$ est injective, alors on parle d'une courbe/lacet *simplement fermée*. Et une courbe simplement fermée dans \mathbf{R}^2 est aussi appelée une *courbe de Jordan*.

L'archétype d'une courbe simplement fermée est la courbe (de classe C^∞) simplement fermée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \cong e^{2\pi it} .$$

Son image est le *cercle unité* $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ défini par

$$\mathbf{S}^1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \cong \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \} .$$

Définition de la longueur d'une courbe. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une courbe continue. On dit que γ est *rectifiable sur* $[a, b]$ si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^p \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b \text{ une subdivision} \right\}$$

2. Pour montrer à quel point ce sont des synonymes, on pourrait penser à la définition d'un ensemble topologique qui est “connexe par arcs” si deux points arbitraires peuvent être reliés par un **chemin** continue.

est borné. Si c'est le cas on dit que

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^p \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b \text{ subdivision} \right\}$$

est la *longueur de γ entre a et b* .

1.8 Théorème (admis). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une courbe continue et C^1 par morceaux. Alors γ est rectifiable et sa longueur $L_{[a,b]}(\gamma)$ entre a et b est donnée par

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt .$$

Remarque. On pourrait croire que, dans [1.8] la condition d'être continue et C^1 par morceaux est (légèrement) trop fort et qu'il suffit que γ soit continue sur $[a, b]$ et C^1 sur chaque intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ d'une subdivision. Pour voir que ce n'est pas le cas, il suffit de considérer la courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par

$$\gamma(0) = (0, 0) \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, 1] : \gamma(t) = t \sin(1/t) .$$

C'est une courbe qui est continue sur $[0, 1]$ et C^1 sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas rectifiable et l'intégrale (généralisée!)

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

diverge. D'autre part, on peut bien affaiblir la condition d'être continue et C^1 par morceaux en la condition que γ soit continue sur $[a, b]$ et C^1 sur chaque intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ d'une subdivision avec γ' bornée.

→ **1.9 Lemme.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue et injective. Alors il existe $c < d \in \mathbf{R}$ tels que $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est un homéomorphisme et il n'y a que deux possibilités : f est strictement croissante, auquel cas $f(a) = c$, ou elle est strictement décroissante, auquel cas $f(a) = d$.

1.10 Définitions concernant des classes de courbes. Dans toutes les définitions qui suivent k désigne un entier ou ∞ .

- Dans ce cours on n'aura pas besoin d'autres fonctions et/ou courbes que des courbes "de classe C^k ," $k \geq 0$ ou continues et de classe C^k par morceaux. Pour raccourcir la terminologie on dira qu'une application est *de classe $C^{/k/}$* si elle est continue et de classe C^k par morceaux.³ Et pour raccourcir encore plus, on remplacera le qualificatif "de classe C^k " ou "de classe $C^{/k/}$ " par le préfixe " C^k_- " respectivement " $C^{/k/-}$ ". À noter que la classe $C^{/0/}$ n'est rien d'autre que la classe C^0 , car être continue **et** continue par morceaux se réduit à continue. À noter aussi qu'une application de classe C^k est automatiquement de classe $C^{/k/}$.

- Une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est appelée un *changement de paramètre*⁴ de classe C^k ou $C^{/k/}$ si elle est bijective et de classe C^k respectivement $C^{/k/}$, avec

3. C'est une notation non-standard, inventée pour les besoins de la cause.

4. C'est un nom non-standard, inventé pour les besoins de la cause, comme la notation $C^{/k/}$.

dans le cas $k \geq 1$ la condition supplémentaire que si $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ est une subdivision telle que ϕ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ [1.5.iii], alors ϕ' ne s'annule pas sur $[t_{j-1}, t_j]$ (valeur (non-nulle!) au bord qui peut dépendre de l'intervalle en question).

Selon [1.9] un changement de paramètre $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ (de classe C^k ou $C^{k/}$) est nécessairement strictement monotone. On dira qu'il est *direct* s'il est (strictement) croissant (ce qui, dans le cas $k \geq 1$, revient à la condition que $\phi'(t)$ est strictement positive sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$) et on dira qu'il est *renversant* s'il est (strictement) décroissant (ce qui, dans le cas $k \geq 1$, revient à la condition que $\phi'(t)$ est strictement négative sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$). En particulier, dans le cas $k \geq 1$, le signe de $\phi'(t)$ est bien défini et constant sur $[a, b]$.

• Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux $C^{k/}$ -courbes. Alors on dit que γ_1 est *équivalent par reparamétrage* à γ_2 s'il existe un $C^{k/}$ -changement de paramètre $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Et on dit que γ_1 est *équivalent par reparamétrage direct* à γ_2 si le changement de paramètre est direct.

Ⓟ **1.11 Proposition.** Soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.

- (i) Si $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est un $C^{k/}$ -changement de paramètre, alors $\phi^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est (aussi) un $C^{k/}$ -changement de paramètre. En plus, ϕ^{-1} est *direct* (respectivement *renversant*) si et seulement si ϕ l'est.
- (ii) Soit $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une $C^{k/}$ -courbe et soit $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ un $C^{k/}$ -changement de paramètre. Alors $\gamma \circ \phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est aussi une $C^{k/}$ -courbe.
- (iii) Soit $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ et $\psi : [c, d] \rightarrow [e, f]$ deux $C^{k/}$ -changements de paramètre. Alors $\psi \circ \phi : [a, b] \rightarrow [e, f]$ est aussi un $C^{k/}$ -changement de paramètre.
- (iv) Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une $C^{k/}$ -courbe et soit $[c, d] \subset [a, b]$. Si on note $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de γ à $[c, d]$, alors γ_1 est une $C^{k/}$ -courbe.
- (v) Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une $C^{k/}$ -courbe, $k \geq 1$, alors γ est aussi une $C^{\ell/}$ -courbe pour tout $1 \leq \ell \leq k$.

On a les résultats analogues quand on remplace ci-dessus partout la classe $C^{k/}$ par la classe C^k .

→ **1.12 Proposition.** La relation entre deux courbes de classe C^k ou $C^{k/}$ d'être équivalentes par reparamétrage est une relation d'équivalence, comme être équivalentes par reparamétrage direct.

→ **1.13 Lemme (la longueur est invariante sous reparamétrage).** Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux $C^{1/}$ -courbes qui sont équivalentes par reparamétrage. Alors on a l'égalité

$$L_{[a,b]}(\gamma_1) = L_{[c,d]}(\gamma_2) .$$

Définition d'une courbe parcourue dans le sens opposé. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une $C^{k/}$ -courbe, alors on définit la courbe $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ par

$$\forall t \in [a, b] \quad : \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t) .$$

Quand on interprète la courbe γ comme la position en fonction du temps t d'une personne qui se déplace dans l'espace \mathbf{R}^n , avec donc $\gamma(a)$ son point de départ et $\gamma(b)$ sa destination, alors $\overleftarrow{\gamma}$ représente son parcours quand il fait le chemin inverse en partant de sa destination $\gamma(b)$ pour retourner à son point de départ $\gamma(a)$. Il est immédiat que $\overleftarrow{\gamma}$ est une $C^{k/}$ -courbe qui est équivalente à γ par reparamétrage, simplement parce que l'application $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ définie par $\phi(t) = a + b - t$ est un changement de paramètre (de classe C^∞ , renversant). On déduit directement de [1.12] que si γ est équivalent à une courbe δ (de classe $C^{k/}$) par un changement de paramétrage renversant, alors $\overleftarrow{\gamma}$ sera équivalent à δ par reparamétrage direct (et vice-versa, parce que $\phi \circ \phi = \text{id}_{[a, b]}$).

Mais attention : il reste possible que $\overleftarrow{\gamma}$ et γ sont équivalentes par reparamétrage direct ! Un exemple trivial est une courbe constante. Un exemple un tout petit peu moins trivial est la courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie comme

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t, 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

auquel cas on a l'égalité $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(t)$.⁵

1.14 Définition de la concaténation. Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux courbes telles que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Alors on définit la *concaténation* de γ_1 et γ_2 , notée par $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$, comme la courbe $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par

$$(\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}.$$

C'est la courbe γ_1 suivi de la courbe γ_2 . À noter que l'opération de concaténation n'est pas (du tout) commutative !

Ⓟ **1.15 Proposition.** Soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.

- (i) La concaténation est une opération associative : si $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, 3$ sont trois courbes vérifiant $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ et $\gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3)$, alors on a l'égalité

$$(\gamma_1 \blacksquare \gamma_2) \blacksquare \gamma_3 = \gamma_1 \blacksquare (\gamma_2 \blacksquare \gamma_3)$$

en tant qu'applications $[a_1, b_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3] \rightarrow \mathbf{R}^n$.

- (ii) Si $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ sont deux $C^{k/}$ -courbes vérifiant $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, alors leur concaténation $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ est aussi une $C^{k/}$ -courbe et on a l'égalité

$$(\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)([a, b + d - c]) = \gamma_1([a, b]) \cup \gamma_2([c, d]).$$

- (iii) Soit $\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une $C^{k/}$ -courbe et soit $a < b < c$. Si on note $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de γ à $[a, b]$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de γ à $[b, c]$, alors γ_1 et γ_2 sont des $C^{k/}$ -courbes avec l'égalité $\gamma = \gamma_1 \blacksquare \gamma_2$.

5. On peut probablement montrer que cet exemple est essentiellement le seul pour lequel $\overleftarrow{\gamma}$ et γ peuvent être équivalentes par reparamétrage direct. Je n'ai pas poursuivi ce cas, car cela n'a pas d'incidence pour l'analyse complexe.

- (iv) Soit $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\psi_i : [c_i, d_i] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2$ quatre $C^{k/}$ -courbes. Supposons en plus que γ_i est équivalente par reparamétrage à ψ_i avec changement de paramètre ϕ_i et qu'on a $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.
- (a) Si ϕ_1 et ϕ_2 sont directs, alors $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ et $\psi_1 \sqcup \psi_2$ sont équivalentes par reparamétrage avec un changement de paramètre direct.
- (b) Si ϕ_1 et ϕ_2 sont renversants, alors $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ et $\psi_2 \sqcup \psi_1$ (attention à l'ordre !) sont équivalents par reparamétrage avec un changement de paramètre renversant.
- (v) Toute $C^{k/}$ -courbe est équivalente à une concaténation finie de C^k -courbes par un changement de paramètre direct.
-

EXERCICES

→ **1.16 Exercice.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une $C^{1/}$ -courbe.

- (i) Calculer la longueur d'un segment $[z_1, z_2] \subset \mathbf{C}$ et celle d'un cercle $C(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r .
- (ii) Montrer que le périmètre d'une ellipse de demi-axes de longueurs a et b (avec $a > b$) est

$$4a \int_0^1 \frac{1 - k^2 u^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} du ,$$

où $k^2 = 1 - b^2/a^2$ est le carré de l'excentricité de l'ellipse. À noter qu'on ne peut pas exprimer une primitive de la fonction à intégrer par des fonctions usuelles.

→ **1.17 Exercice.** Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux $C^{k/}$ -courbes vérifiant $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Montrer que pour tout $t \in [a,]$ on a l'égalité

$$(\overleftarrow{\gamma_1 \sqcup \gamma_2})(t) = (\overleftarrow{\gamma_2} \sqcup \overleftarrow{\gamma_1})(c - a + t) .$$

En déduire que $\overleftarrow{\gamma_1} \sqcup \overleftarrow{\gamma_2}$ et $\overleftarrow{\gamma_2} \sqcup \overleftarrow{\gamma_1}$ sont équivalentes par reparamétrage direct.

2. Les 1-formes différentielles et leur intégration

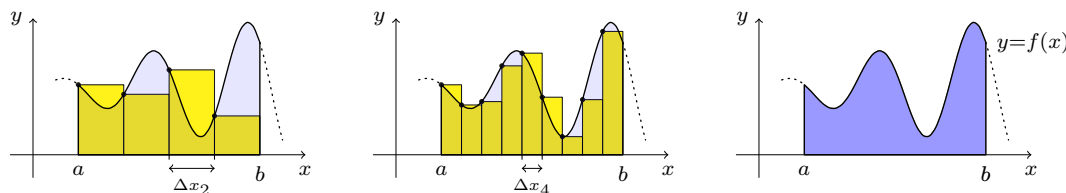
2.1 La notion d'une 1-forme par l'œil d'un physicien. Une des origines de la notion d'une 1-forme et son intégration sur une courbe (ce qu'on appelle aussi des intégrales curvilignes) se trouve dans la physique. Mais pour (encore) mieux comprendre la situation, il faut commencer avec la construction de l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Attention : la discussion qui suit est purement heuristique et certainement pas (très) rigoureuse ! Le but est d'expliquer quelques idées derrière la notion d'une 1-forme.

Pour définir $\int_a^b f(x) dx$, l'aire "en-dessous" du graphe de la fonction f entre $x = a$ et $x = b$, on prend une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, on définit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et on considère la somme (ce qu'on appelle une *somme de Riemann*)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i .$$

Ensuite on montre que, sous des bonnes conditions, quand on fait tendre n vers ∞ de sorte que $\max_i \Delta x_i$ tend vers 0, alors on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_{x=a}^b f(x) dx .$$



À gauche on prend une somme sur des points $x_i \in [a, b]$ du produit $f(x_i)$ fois un (petit) incrément Δx_i , à droite on prend une "somme" (le symbole \int de l'intégrale est la lettre S allongée !) sur "tous" les $x \in [a, b]$ du produit $f(x)$ fois un incrément "infinitésimal" dx .

Considérons maintenant la situation d'un joggeur qui court quand il y a du vent. Quand il a le vent dans le dos, il n'a pas besoin de fournir autant d'effort que quand il a le vent contre. Mais combien ? La physique nous dit que l'effort W (le travail) fourni par le vent est donné par le produit scalaire de la force vectorielle (du vent) avec le vecteur du déplacement. Si la force du vent est donnée par le vecteur F et les positions initiale et finale sont A et B , on aura

$$W = \langle F, B - A \rangle .$$

Il est important à noter que ce résultat ne dépend pas du chemin pris par notre joggeur, seulement de ses positions initiale et finale. S'il fait un aller-retour, il gagne autant qu'il perd. Mais... cette formule n'est valable que si la force est constante. Si elle ne l'est pas, il faut découper le chemin en (petit) morceaux sur lesquels la force est (plus ou moins) constante. On considère donc une "subdivision" $A = Q_0, Q_1, \dots, Q_n = B$ du chemin parcouru par le joggeur de sorte que la force du vent est (à peu près) constante sur chaque trajet entre Q_i et Q_{i+1} . Dans ce cas le travail W fait par le vent est donné par

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \langle F(Q_i), \Delta Q_i \rangle ,$$

où $F(Q_i)$ est le vecteur de la force du vent sur le trajet entre Q_i et Q_{i+1} et où on a défini $\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$. Quand on met des coordonnées on écrira $Q_i = (x_i, y_i)$ et $F(Q) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, où $F(x, y) \in \mathbf{R}^2$ représente le vecteur de force du vent au point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Avec $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ on aura donc

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} F_1(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + F_2(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i .$$

Ici les points $Q_i = (x_i, y_i)$ sont donc les points sur le chemin du joggeur, un chemin qu'on peut voir comme une courbe $C \subset \mathbf{R}^2$ reliant le point initial A au point final B . Et comme pour l'intégrale de Riemann, si la force du vent $F(x, y)$ varie "partout," il faut prendre une limite de points Q_i de plus en plus proche, donc une limite $n \rightarrow \infty$ avec $\max_i \|\Delta Q_i\|$ qui tend vers 0, ce qui donnera, avec les mêmes notations dans la limite que pour l'intégrale de Riemann,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} F_1(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + F_2(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \\ (2.2) \quad &= \int_{(x,y) \in C} F_1(x, y) \, dx + F_2(x, y) \, dy , \end{aligned}$$

où on prend maintenant l'intégrale (la "somme") sur tous les points du chemin C suivi par le joggeur. Bien évidemment ceci n'est pas (du tout) une intégrale sur tous les points x (sur quel intervalle?), ni sur y , ni sur un domaine dans \mathbf{R}^2 (lequel?). Mais comment interpréter cette intégrale si ce n'est pas une intégrale sur x ou y ?

Pour obtenir une idée de réponse on imagine que le chemin parcouru par le joggeur est l'image d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ et qu'on a une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que $Q_i = \gamma(t_i)$. En introduisant deux fonctions $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

on aura donc approximativement

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx x'(t_i) \cdot \Delta t_i \\ \Delta y_i &= y(t_{i+1}) - y(t_i) \approx y'(t_i) \cdot \Delta t_i \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i ,$$

ce qui donne (approximativement)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} F_1(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + F_2(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(F_1(x(t_i), y(t_i)) \cdot x'(t_i) + F_2(x(t_i), y(t_i)) \cdot y'(t_i) \right) \Delta t_i . \end{aligned}$$

En prenant la limite $n \rightarrow \infty$ avec $\max_i \Delta t_i$ qui tend vers 0, on aura donc (toujours heuristiquement)

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(F_1(x(t_i), y(t_i)) \cdot x'(t_i) + F_2(x(t_i), y(t_i)) \cdot y'(t_i) \right) \Delta t_i \\ &= \int_{t=a}^b \left(F_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) dt . \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est une bona-fide intégrale de Riemann. Ceci nous donne donc l'interprétation suivante pour (2.2) (qu'on peut donc prendre comme sa définition)

$$\int_{(x,y) \in C} F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{t=a}^b \left(F_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) dt ,$$

où la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ décrit le chemin parcouru par le joggeur. Bien que cette dérivation est heuristique, il y a une cohérence avec le théorème de changement de variable dans l'intégrale de Riemann : dans le changement de variable $t \mapsto x(t)$ on remplace (dans l'expression à intégrer) dx par $x'(t) dt$. Et c'est exactement ce qui se passe dans la formule ci-dessus, sauf qu'on a au départ deux variables x et y qu'on exprime chacune dans la variable t .

Résumons la situation : on a un joggeur qui court sur un chemin donné par une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$. Il y a du vent qui par endroit est dans son dos et par endroit en face. La force du vent est donnée par l'application $F : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ et l'aide (énergétique, positif ou négatif) W du vent sur la performance du joggeur est donnée par (avec deux façons différentes d'écriture)

$$\begin{aligned} W &= \int_{(x,y) \in C} F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy \\ &= \int_{t=a}^b \left(F_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) dt . \end{aligned}$$

Dans la première façon d'écrire W on voit une séparation claire et nette entre les deux aspects de la situation : on a d'un côté le "domaine d'intégration" $(x,y) \in C = \gamma([a, b])$ qui décrit le parcours, mais qui ne contient aucune information sur le vent, et de l'autre côté l'expression

$$(2.3) \quad F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy ,$$

qui contient la force du vent, mais qui ne fait pas du tout référence au parcours du joggeur. La deuxième façon d'exprimer W donne alors l'interprétation de la première sous forme d'une intégrale (de Riemann) ordinaire. Et c'est l'expression (2.3) qu'on appelle une 1-forme.

Dans un certain sens naïf une 1-forme n'est rien d'autre qu'une fonction vectorielle $F : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$: la force du vent à chaque endroit de l'espace U . Mais on la déguise sous une autre forme en mettant des symboles d'incrément infinitésimaux dx et dy pour distinguer les différentes composantes de cette fonction vectorielle. Et la définition officielle rajoute une couche en passant par l'espace dual.

2.4 Définitions. • Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Une 1-forme (différentielle) sur U est une application $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^* \equiv \text{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, c'est-à-dire une application à valeurs dans l'espace des application linéaires de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} (qu'on appelle l'espace dual de \mathbf{R}^n).

• Soit $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ la base canonique de \mathbf{R}^n et soit $e_1^*, \dots, e_n^* \in \text{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ la base duale :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Alors pour une combinaison linéaire α des e_i^* : $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \in \text{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et pour $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$ un élément de \mathbf{R}^n on a l'égalité

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Dans le cadre des 1-formes, si on note les coordonnées sur $U \subset \mathbf{R}^n$ par x_1, \dots, x_n , alors il est d'usage de noter la base duale e_i^* de $(\mathbf{R}^n)^*$ par dx_i :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*.$$

Avec cette notation, une 1-forme α sur U est déterminée par n fonctions $\alpha_i : U \rightarrow \mathbf{R}$ comme

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i \in (\mathbf{R}^n)^*.$$

• On dit que la 1-forme α est *exacte* s'il existe une fonction différentiable $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\alpha_i(x) = (\partial_i F)(x).$$

Si c'est le cas on note $\alpha = dF$ et on appelle dF la *dérivée extérieure* de F . On trouve aussi le nom *dérivée totale* pour dF . On a donc l'écriture "magique"

$$(2.5) \quad dF = \sum_{i=1}^n (\partial_i F) dx_i \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

• On dit que α est *fermée* si les fonctions α_i sont différentiables et si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a l'égalité

$$\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i.$$

Nota Bene. Il faut être bien conscient que le x_i qui paraît dans le nom dx_i pour l'élément e_i^* de la base canonique duale est directement lié au fait qu'on note les coordonnées de \mathbf{R}^n par x_1, \dots, x_n . Quand on change les noms des variables sur l'espace de départ, les noms pour les éléments de la base duale e_i^* changent aussi. Par exemple, les trois expressions suivantes désignent toutes la même 1-forme α sur \mathbf{R}^3 :

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 dx_1 + \sin(x_2 x_3) dx_2 - (e^{x_3} - x_2^3) dx_3 \\ \alpha(x, y, z) &= x^2 dx + \sin(yz) dy - (e^z - y^3) dz \\ \alpha(u, v, w) &= u^2 du + \sin(vw) dv - (e^w - v^3) dw. \end{aligned}$$

Nota Bene. Malgré le fait que cette notation est très suggestive et que ça collera parfaitement avec la notion d'intégration d'une 1-forme qu'on va définir plus loin, l'écriture dx_i pour l'élément $e_i^* \in (\mathbf{R}^n)^*$ est purement formelle !

→ **2.6 Lemme.** Soit $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une 1-forme de classe C^1 exacte. Alors elle est fermée.

2.7 Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une 1-forme continue et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe dans U . Alors on définit l'intégrale de α sur γ , notée $\int_\gamma \alpha$, par⁶

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt .$$

Si α et γ sont données en termes de leurs coordonnées par rapport aux bases canonique par

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \, dx_i \quad \text{et} \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) ,$$

alors $\int_\gamma \alpha$ est donnée par la formule

$$(2.8) \quad \int_\gamma \alpha \equiv \int_\gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \, dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) \, dt .$$

À noter que cette intégrale est bien définie : α et γ sont continues, donc la composée $t \mapsto \alpha_i(\gamma(t))$ est continue. Et si γ est de classe $C^{1/}$, alors sa dérivée est continue par morceaux, c'est-à-dire que les fonctions $\gamma'_i(t)$ (les composantes de γ') sont continues par morceaux. Et donc le produit $(\alpha_i \circ \gamma) \cdot \gamma'_i$ est bien une fonction continue par morceaux, ce qui permet d'appliquer [1.6.i].

Remarque. On reconnaît dans la définition (2.8) de $\int_\gamma \alpha$ une autre instance d'une écriture “magique” qu'on connaît du théorème de changement de variables dans une intégrale (déjà signalé dans [2.1]) : quand on change la variable d'intégration u en t définie par $u = \phi(t)$, alors on remplace le symbole du dans l'intégrale par $\phi'(t) \, dt$. Mais j'insiste : pour nous ce ne sont que des formules “magiques” formelles. Pour les mettre dans un contexte plus large, il faut se lancer dans la théorie des formes différentielles, l'algèbre extérieure et la dérivée extérieure. Une théorie indispensable en géométrie différentielle, mais dont on n'a pas besoin ici et qui prendra (beaucoup) trop de temps pour mettre en place.

→ **2.9 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une 1-forme continue exacte et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe. Si $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ est telle que $\alpha = dF$, alors on a l'égalité

$$\int_\gamma \alpha \equiv \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

6. On peut sans aucun problème définir $\int_\gamma \alpha$ pour des courbes plus générales. On n'en a pas besoin, donc on se contente de la définir pour des $C^{1/}$ -courbes.

Remarque. Le résultat [2.9] est la généralisation directe de la formule bien connue du calcul des primitives de fonctions réelles :

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a) ,$$

une formule qu'on utilise presque toujours pour calculer la valeur d'une intégrale. Avec l'écriture des 1-formes sur \mathbf{R} , on reconnaît la 1-forme $f'(x) \, dx = df$.

→ **2.10 Lemme (la relation de Chasles).** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une 1-forme continue et soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ deux $C^{1/}$ -courbes vérifiant $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Alors on a l'égalité

$$\int_{\gamma_1 \mathbin{\cdot} \gamma_2} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha .$$

Remarque. Que le résultat [2.10] est bien une généralisation de la relation de Chasles connue du calcul des intégrales de fonctions réelles se voit facilement comme suit. Soit $\alpha(x) = f(x) \, dx$ une 1 forme sur \mathbf{R} et soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbf{R}$ les “courbes” définies par

$$\gamma_i(t) = t .$$

La définition de la concaténation nous donne immédiatement la formule

$$(\gamma_1 \mathbin{\cdot} \gamma_2) : [a, c] \rightarrow \mathbf{R} \quad , \quad t \mapsto t .$$

Dans les trois cas la dérivée de la courbe vaut 1 et le résultat de [2.10] se transforme avec la définition [2.7] en la relation de Chasles classique

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt .$$

→ **2.11 Lemme (invariance sous reparamétrage).** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une 1-forme continue, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe et soit $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un C^1 -changement de paramètre. Alors on a l'égalité

$$\int_{\gamma \circ \phi} \alpha = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\gamma} \alpha & \text{si } \phi \text{ est direct} \\ - \int_{\gamma} \alpha & \text{si } \phi \text{ est renversant} \end{array} \right\} \stackrel{[1.10]}{=} \text{signe}(\phi') \cdot \int_{\gamma} \alpha .$$

En particulier on a l'égalité $\int_{\overleftarrow{\gamma}} \alpha = - \int_{\gamma} \alpha$.

Remarque pour le lecteur curieux : un début de la topologie algébrique. Quand on réunit [1.15], [1.17], [2.10] et [2.11], on obtient un faisceau de résultats avec une interprétation suggestive. Commençons avec [1.15.i] et [1.17] : les deux opérations de concaténation et d'inverser le sens de parcours peuvent être interprétées comme des opérations internes sur l'ensemble de toutes les $C^{k/}$ -courbes (à valeur dans un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$). [1.15.i] dit que l'opération de concaténation est une opération

associative et [1.17] dit plus ou moins que l'opération d'inverser le sens de parcours a les propriétés d'une inverse. Tout cela fait penser à la structure d'un groupe, sauf qu'on n'a pas d'élément neutre et que [1.17] ne donne la propriété d'une inverse qu'à reparamétrage direct près. Mais on peut améliorer la situation avec [1.15.iv] (et un résultat analogue pour l'inversion du sens de parcours), car cette propriété dit que l'opération de concaténation passe à l'ensemble quotient des classes d'équivalences de $C^{k/}$ -courbes pour la relation "équivalente par reparamétrage direct" [1.12] (avec un résultat analogue pour l'inversion du sens de parcours). Sur cet ensemble (des classes d'équivalence de $C^{k/}$ -courbes équivalentes par reparamétrage direct) on aura donc deux opérations : de concaténation et d'inversion de parcours qui ont des propriétés qui ressemblent beaucoup aux propriétés d'une opération interne d'un groupe et l'opération de prendre l'inverse (dans ce groupe). Sauf qu'on n'a toujours pas un élément neutre !

Mais oublions ce "détail" d'un élément neutre et passons aux résultats [2.11] et [2.10]. Le premier dit que l'application de prendre l'intégrale d'une 1-forme α , a priori définie sur l'ensemble de toutes les $C^{k/}$ -courbes dans l'ouvert U , passe au quotient des classes d'équivalences (par reparamétrage direct) : l'image de deux courbes équivalentes par reparamétrage direct est le même. Et ensuite la relation de Chasles [2.10] nous dit que cette application (de prendre l'intégrale d'une 1-forme α) est un "homomorphisme" : la concaténation est transformée en addition dans \mathbf{R} . Et en revenant à [2.11] on voit que l'opération d'inverser le sens de parcours se transforme sous cette application en l'opération de multiplier par -1 . Autrement dit, on a toutes les propriétés d'un homomorphisme défini sur le soi-disant groupe de classes d'équivalence de $C^{k/}$ -courbes vers le groupe additif des réels. La construction du groupe d'homologie et d'homotopie en topologie algébrique sont deux façons d'introduire un élément neutre et de mettre ces résultats suggestives sur un pied plus rigoureux.

EXERCICES

→ **2.12 Exercice.** Calculer $\int_{\gamma} (x + 2y) \, dx + (y - 2x) \, dy$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(\theta) = (4 \cos \theta, 3 \sin \theta)$.

→ **2.13 Exercice.** On vous tend un piège. Soit $r, R > 0$.

(i) Déterminer une primitive de la fonction

$$t \mapsto \frac{r + R \cos t}{R^2 + r^2 + 2rR \cos t} .$$

Indication : un changement de variable $u = \tan(t/2)$ est recommandé.

(ii) Calculer explicitement

$$\int_0^{2\pi} \frac{r + R \cos t}{R^2 + r^2 + 2rR \cos t} \, dt .$$

(iii) Soit $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, soit α la 1-forme sur U définie par

$$\alpha(x, y) = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} ,$$

et soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (R + r \cos t, r \sin t)$. Dédurre de ce qui précède qu'on a

$$\int_{\gamma} \alpha = \begin{cases} 2\pi & \text{si } R < r \\ 0 & \text{si } R > r. \end{cases}$$

- (iv) Dans l'interprétation d'une 1-forme comme la force du vent sur le chemin d'un joggeur [2.1], la 1-forme α ci-dessus représente la force $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ donnée par

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Faire un dessin de cette “force du vent” et l'interpréter comme l'œil d'un cyclone. Donner ensuite une explication du résultat (iii) en termes de “vent contre” et “vent dans le dos.”

→ **2.14 Exercice.** Soit θ la fonction définie par

$$\theta(x, y) = \arctan(y/x).$$

- (i) Déterminer le domaine de définition $V \subset \mathbf{R}^2$ de cette fonction θ .
- (ii) Déterminer $d\theta$ et comparer le résultat avec la 1-forme α donnée dans [2.13.iii].
- (iii) En vu de la réponse à (ii), expliquer pourquoi il n'y a pas une contradiction entre [2.9] et [2.13.iii].

3. Des courbes et leurs images

Le but de cette section est de définir une classe de courbes (à savoir celles qui sont régulières et injectives ou simplement fermées) avec la propriété suivante. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ appartient à cette classe et si on définit $C = \gamma([a, b]) \subset \mathbf{R}^n$ son image, alors toute autre courbe $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ dans cette classe avec le même image $C = \delta([c, d])$ est équivalente par reparamétrage à γ (c'est [3.3] et [3.7]). Quand on y rajoute la notion de “sens de parcours” [3.8], [3.10] qui permet de distinguer/regrouper les courbes dans une telle classe qui sont équivalentes par reparamétrage direct, alors donner l'image $C \subset \mathbf{R}^n$ et un sens de parcours suffit pour pouvoir calculer $\int_\gamma \alpha$ pour n'importe quelle 1-forme α sur \mathbf{R}^n . Car tous les choix différents pour la courbe γ dans notre classe avec le même sens de parcours donneront la même valeur. Ce qui nous permet de parler de $\int_C \alpha$, l'intégrale de α sur $C \subset \mathbf{R}^n$, plutôt que de $\int_\gamma \alpha$ qui fait intervenir une courbe (paramétrée).

Ⓟ **3.1 Lemme.** *Soit $B \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble compact et soit $f : B \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue injective. Alors $f : B \rightarrow f(B) = C$ est un homéomorphisme quand on munit C de la topologie induite.*

3.2 Définition. On dira qu'une $C^{k/}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est *régulière* si elle vérifie la condition supplémentaire que si $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ est une subdivision telle que γ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ [1.5.iii], alors $\|\gamma'\|$ ne s'annule pas sur $[t_{j-1}, t_j]$ (valeur (non-nulle!) au bord qui peut dépendre de l'intervalle en question).

Remarque. On pourrait voir la notion de changement de paramètre (de classe $C^{k/}$ ou C^k) [1.10] comme un cas particulier d'une courbe régulière : un changement de paramètre est une courbe régulière et injective $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Ⓟ **3.3 Proposition.** *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux $C^{k/}$ -courbes régulières injectives et soit $C = \gamma([a, b]) \subset \mathbf{R}^n$ l'image de γ .*

- (i) $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ est un homéomorphisme quand on munit C de la topologie induite.
- (ii) γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage si et seulement si leurs images coïncident : $\psi([c, d]) = C \equiv \gamma([a, b])$. Si c'est le cas, le changement de paramètre $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est direct si et seulement si $\gamma(a) = \psi(c)$.

Ⓟ **3.4 Proposition.** *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une courbe continue simplement fermée et soit $C = \gamma([a, b])$ son image. Alors l'application $\bar{\gamma} : \mathbf{S}^1 \rightarrow C$ définie par*

$$\forall s \in [0, 1[: \bar{\gamma}(e^{2\pi i s}) = \gamma(a + s(b - a))$$

est un homéomorphisme quand on munit C de la topologie induite.

→ **3.5 Lemme.** Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ l'image d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continue et simplement fermée. Alors elle ne peut pas être l'image d'une courbe $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continue et injective.

→ **3.6 Lemme (déplacer le point de départ dans un lacet).** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ un $C^{/k/}$ -lacet, $k \geq 0$ et soit $c \in]a, b[$. Soit $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de γ à $[a, c] \subset [a, b]$ et soit $\gamma_2 : [c, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de γ à $[c, b] \subset [a, b]$. Alors $\gamma_2 \cdot \gamma_1 : [c, c + b - a] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est un $C^{/k/}$ -lacet avec le même image que γ . Si γ est simplement fermé, alors $\gamma_2 \cdot \gamma_1$ l'est aussi.

Ⓟ **3.7 Proposition.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux $C^{/k/}$ -courbes régulières simplement fermées vérifiant $\gamma(a) = \psi(c)$.

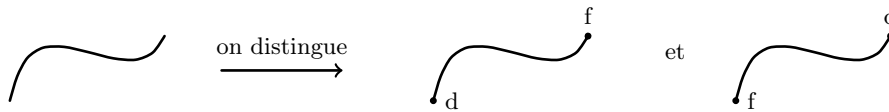
- (i) γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage si et seulement si les images coïncident : $\gamma([a, b]) = \psi([c, d]) = C$.
- (ii) Soit $a' \in]a, b[$ arbitraire et supposons que γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage. Alors il existe un unique $c' \in]c, d[$ tel que $\gamma(a') = \psi(c')$ et il n'y a que deux possibilités : $\gamma(]a, a'[) = \psi(]c, c'[)$ ou $\gamma(]a, a'[) = \psi(]c', d[)$. Dans le premier cas le changement de paramètre est direct et dans le deuxième cas il est renversant.

3.8 Sens de parcours d'une courbe. Avec [3.3] et [3.7] on a presque atteint notre but. On a montré que (pour une 1-forme continue α sur $U \subset \mathbf{R}^n$) si $C \subset U$ est un sous-ensemble pour lequel il existe une $C^{/k/}$ -courbe régulière $\gamma = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ qui est soit injective soit simplement fermée et qui a C comme image, alors selon [2.11] la valeur de $\int_\gamma \alpha$ sera, **au signe près**, indépendant du choix d'un tel γ . La seule donnée de C ne suffit donc pas pour pouvoir déterminer $\int_\gamma \alpha$. Sachant que pour une courbe γ on a l'égalité

$$(3.9) \quad \int_{\overleftarrow{\gamma}} \alpha = - \int_\gamma \alpha ,$$

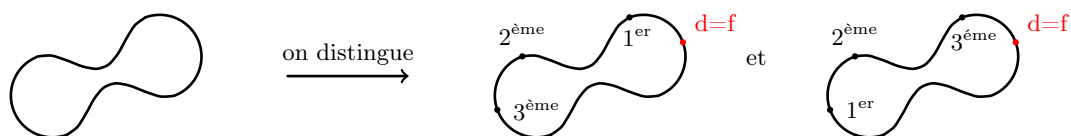
ce qui nous manque est un moyen de distinguer γ de $\overleftarrow{\gamma}$: on commence avec C , on détermine une $C^{/k/}$ -courbe γ avec image C et on fait notre choix entre γ et $\overleftarrow{\gamma}$ pour calculer "l'intégrale de α sur C ."

Quand C n'est pas (l'image d') un lacet (et selon [3.5] on peut distinguer les deux cas), alors une information simple qui permet de choisir entre γ et $\overleftarrow{\gamma}$ consiste à donner un indice d et f aux deux extrémités de C pour indiquer quel point est le début (c'est-à-dire le point $\gamma(a)$) et lequel est la fin (c'est-à-dire le point $\gamma(b)$).



Malheureusement cette solution simple ne marche pas pour un lacet. Mais on peut améliorer cette idée pour un lacet : quand on donne trois points distincts $x, y, z \in C$, ces points sont les images de trois éléments $r, s, t \in [a, b]$: $x = \gamma(r)$, $y = \gamma(s)$ et $z = \gamma(t)$. Il suffit donc de donner l'ordre de ces trois éléments de $[a, b]$ pour pouvoir

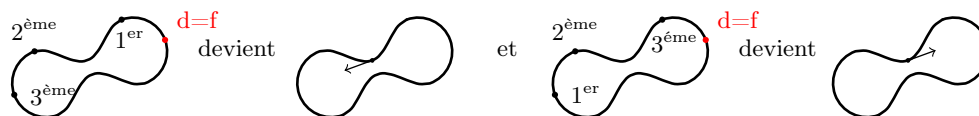
distinguer γ de $\bar{\gamma}$ (car passer de γ à $\bar{\gamma}$ change l'ordre de ces trois points).



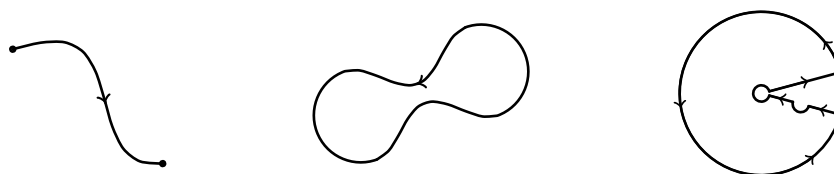
Mais ce n'est pas cette solution qu'on adopte en général, ni pour les lacet, ni pour les courbes non-fermées. En général on utilise un vecteur tangent à la courbe pour distinguer γ de $\bar{\gamma}$. Voici l'idée : si $t \in]a, b[$ est tel que $\gamma'(t) \neq 0$ (ce qui pour une courbe régulière sera toujours le cas avec l'exception d'un nombre fini de valeurs), alors pour $\bar{\gamma}$ on aura les propriétés

$$\bar{\gamma}(a + b - t) = \gamma(t) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}'(a + b - t) = -\gamma'(t).$$

Les vecteurs tangents au point $\gamma(t) \in C$ de la courbe γ respectivement $\bar{\gamma}$ pointent donc dans des directions opposées. Pour distinguer γ de $\bar{\gamma}$ on donne un vecteur tangent $v \neq 0$ à la courbe C au point $c \in C$. Si les vecteurs v et $\gamma'(t)$ pour $\gamma(t) = c$ pointent dans la même direction, il faut choisir γ et s'ils pointent dans des directions opposées, il faut choisir $\bar{\gamma}$. Dans [3.10] on donnera la formulation précise de tout cela. Continuons ici avec un aspect pratique : quand on “dessine” le sous-ensemble $C \subset \mathbf{R}^n$, on peut indiquer le point $c \in C$ par exemple par un disque un petit peu plus épais que le trait qui trace C . Et on peut indiquer le vecteur tangent v comme le segment de droite entre c et $c + v$ avec une pointe de flèche au point $c + v$.



Mais remplacer v par λv avec $\lambda > 0$ ne changera rien, car dans ce cas v et λv pointent dans la même direction. Vient donc la question : quoi choisir comme longueur pour ce vecteur v ? Le choix est libre, mais l'usage veut qu'on prend une longueur tellement petite qu'on ne peut pas voir ce segment, seulement la pointe de la flèche.⁷ Et parfois, parce qu'on pense que c'est plus clair, on met plusieurs de telles flèches dans un même lacet.



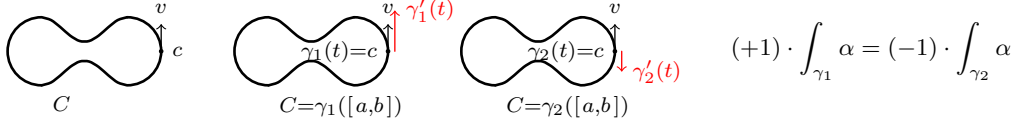
3.10 Lemme (une seule flèche suffit pour préciser le sens du parcours).
Supposons qu'on est dans la situation suivante.

- (i) On dispose d'une 1-forme continue α sur $U \subset \mathbf{R}^n$, d'un sous-ensemble $C \subset U$, un point $c \in C$ et un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$, $v \neq 0$.

7. Petit détail “technique” : ces pointes de flèches qu'on trouve dans un certain nombre de dessins dans ce texte sont faites de cette façon ! Les commandes qui permettent de mettre des flèches ne le font qu'à l'extrémité d'une courbe, là où je voulais les avoir au milieu. J'aurais pu couper ces courbes en deux parties et mettre la flèche au bout de la première et de continuer avec la deuxième. Mais cette solution a des désavantages. J'ai donc d'abord dessiné la courbe dans son entièreté, pour ensuite dessiner un tout petit segment (qu'on ne peut pas distinguer de la courbe) avec une flèche à l'endroit voulu.

- (ii) On suppose qu'il existe une $C^{1/}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ régulière qui est soit injective soit simplement fermée telle que
- (a) l'image de γ est $C : \gamma([a, b]) = C$,
 - (b) il existe $t \in]a, b[$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tels que γ est différentiable dans un voisinage de t avec $\gamma(t) = c$ et $\gamma'(t) = \lambda v$.

Alors le nombre $\text{signe}(\lambda) \cdot \int_{\gamma} \alpha$ ne dépend pas du choix de la courbe γ (de classe $C^{1/}$, régulière, injective ou simplement fermée).



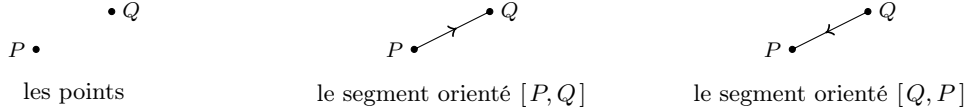
3.11 Définition (le segment orienté $[P, Q]$). Définissons pour $P, Q \in \mathbf{R}^n$ deux points arbitraires la $C^{/\infty/}$ -courbe $\gamma_{P,Q} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ par

$$\gamma_{P,Q}(t) = P + t(Q - P) .$$

Son image est le *segment orienté* $[P, Q] \subset \mathbf{R}^n$:

$$[P, Q] = \gamma_{P,Q}([0, 1]) = \{ P + t(Q - P) \in \mathbf{R}^n \mid t \in [0, 1] \} \subset \mathbf{R}^n .$$

Pour indiquer un sens de parcours du sous-ensemble $[P, Q]$, on peut choisir arbitrairement $c \in [P, Q]$ et utiliser le vecteur $v = Q - P$ pour indiquer la direction (bien évidemment en supposant qu'on a $P \neq Q$, sinon l'image n'est qu'un seul point). Mais on peut aussi utiliser l'idée d'indiquer le début et la fin, ce qui sont les points P pour le début et Q pour la fin. De cette façon, l'écriture $[P, Q]$ contient déjà cette information : le premier point est le début et le deuxième est la fin.



Pour le calcul d'une intégrale d'une 1-forme α , l'écriture $\int_{[P,Q]} \alpha$ est donc sans ambiguïtés :

$$\int_{[P,Q]} \alpha = \int_{\gamma_{P,Q}} \alpha .$$

C'est cette absence d'ambiguïté qui permet l'abus de notation qui consiste à confondre l'application $\gamma_{P,Q}$ avec son image $[P, Q]$. Dans la suite on utilisera parfois la notation $[P, Q]$ pour désigner l'application, en particulier quand il s'agit d'une *ligne brisée*, ce qui est une concaténation d'un nombre fini de segments. Plus précisément, quand P_0, P_1, \dots, P_q sont $q+1$ points dans \mathbf{R}^n , alors la ligne brisée γ qui rejoint P_0 à P_q est la concaténation des segments $[P_{i-1}, P_i]$:

$$(3.12) \quad \gamma = [P_0, P_1] \cdot [P_1, P_2] \cdot \dots \cdot [P_{q-1}, P_q] ,$$

ce qui désigne "donc" la $C^{/\infty/}$ -courbe $\gamma : [0, q] \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par

$$t \in [i, i+1] \Rightarrow \gamma(t) = P_i + (t - i) \cdot P_{i+1} .$$

J'espère que le lecteur sera d'accord que la notation (3.12) est plus suggestive que la notation

$$\gamma = \gamma_{P_0, P_1} \cdot \gamma_{P_1, P_2} \cdot \dots \cdot \gamma_{P_{q-1}, P_q}$$

pour cette courbe paramétrée.

Une petite vérification montre qu'on a l'égalité

$$\overleftarrow{\gamma}_{P,Q} = \gamma_{Q,P} \quad \text{ou encore} \quad \overleftarrow{[P,Q]} = [Q,P] .$$

Les segments orientés $[P,Q]$ et $[Q,P]$ sont donc les mêmes en tant que sous-ensembles de \mathbf{R}^n , mais leurs sens de parcours sont opposés.

Nota Bene. La définition d'un segment orienté s'applique sans problèmes au cas $n = 1$. Dans le cas $p, q \in \mathbf{R}$, $p < q$ le segment orienté $[p,q]$ sera exactement l'intervalle fermé entre p et q . Par contre, comme on a vu, le segment orienté $[q,p]$ désigne ce même intervalle, mais parcouru en sens inverse. Bien qu'il est vrai qu'il est parfois utile d'autoriser la notation d'un intervalle dans \mathbf{R} de cette manière, avec le premier nombre plus grand que le deuxième, on ne le fera pas, pour ne pas perturber le lecteur dans ces habitudes, mais aussi pour pouvoir écrire (sans avoir besoin de distinguer des cas) des inégalités entre un élément de l'intervalle et un point du bord.

→ **3.13 Lemme.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Alors U est connexe si et seulement si pour tout couple de points $A, B \in U$ il existe une ligne brisée*

$$\gamma = [P_0, P_1] \cdot [P_1, P_2] \cdot \dots \cdot [P_{q-1}, P_q]$$

contenue dans U (c'est-à-dire $\gamma([0,q]) \subset U$) avec $A = P_0$ et $B = P_q$.

La scène

4. On passe en complexe

4.1 Définition du corps des nombres complexes. Quand on muni l'espace vectoriel \mathbf{R}^2 de l'opération interne (de multiplication) $m : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par

$$(4.2) \quad m((x, y), (u, v)) = (xu - yv, xv + yu) ,$$

cela transforme \mathbf{R}^2 en un corps qu'on note \mathbf{C} où l'opération interne m de multiplication se note par un point :

$$m((x, y), (u, v)) \equiv (x, y) \cdot (u, v) .$$

Soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ la base canonique de \mathbf{R}^2 . Alors il est facile de vérifier que e_1 est l'élément neutre pour la multiplication dans \mathbf{C} . Il est donc justifié de changer son nom en posant $1_{\mathbf{C}} = e_1$. Si en même temps on change le nom de e_2 en $i = e_2$, alors tout élément de $z \in \mathbf{C}$ s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire de $1_{\mathbf{C}}$ et de i :

$$\forall z \in \mathbf{C} \exists ! x, y \in \mathbf{R} : z = x \cdot 1_{\mathbf{C}} + y \cdot i .$$

Mais attention : la multiplication qu'on utilise dans cette formule n'est pas l'opération interne définie en (4.2), mais la multiplication d'un vecteur par un scalaire dans l'espace vectoriel réel \mathbf{R}^2 .

On vérifie facilement que l'application $\iota : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $\iota(x) = (x, 0) = x \cdot 1_{\mathbf{C}}$ est un morphisme de corps injectif qu'on appelle *l'injection canonique*. Il est d'habitude d'identifier \mathbf{R} avec son image $\iota(\mathbf{R}) \subset \mathbf{C}$ et de dire que \mathbf{R} est un sous-corps de \mathbf{C} . Autrement dit, pour un réel $x \in \mathbf{R}$ on note $\iota(x) \in \mathbf{C}$ simplement par x . Ceci est bien un abus de notation, mais très commode et (presque) sans danger. Pour $z = (x, y) \in \mathbf{C}$ on écrit donc

$$(4.3) \quad z = (x, y) = x \cdot 1_{\mathbf{C}} + y \cdot i = \iota(x) + \iota(y) \cdot i \equiv x + y \cdot i .$$

Et finalement il est d'habitude de ne pas écrire le point de la multiplication et d'écrire simplement $z = x + iy$ pour $z \in \mathbf{C}$ et $x, y \in \mathbf{R}$.

4.4 Définition de la partie réelle et imaginaire. Les deux composantes x et y d'un nombre complexe (un vecteur dans \mathbf{R}^2) $z = x + iy = (x, y)$ s'appellent la *partie réelle* respectivement la *partie imaginaire* de z et on les note comme

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im} z .$$

L'opération de *conjugaison complexe* définie par

$$\bar{z} \equiv \overline{(x, y)} \stackrel{\text{déf.}}{=} (x, -y) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{x + iy} = x - iy ,$$

permet d'exprimer les opérations de partie réelle/imaginaire comme

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2} i (z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) .$$

Une application $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie sur un ensemble U arbitraire s'écrit aussi en termes des coordonnées :

$$f(u) = (f_1(u), f_2(u)) \in \mathbf{C} ,$$

pour des fonctions $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbf{R}$. Avec l'abus de notation introduit en (4.3) on a donc

$$f(u) = f_1(u) + i f_2(u) .$$

Comme pour les nombres complexes, on appelle les deux fonctions f_1, f_2 la partie réelle et la partie imaginaire de f , noté $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$. Elles sont définies par

$$(\operatorname{Re} f)(u) = \operatorname{Re}(f(u)) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im} f)(u) = \operatorname{Im}(f(u)) .$$

4.5 Définition de la norme/valeur absolue. Quand on muni l'espace vectoriel \mathbf{R}^2 de la norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, alors on obtient un espace vectoriel normé. Cette norme s'exprime à l'aide de la conjugaison complexe comme

$$\|z\| \equiv \|x + iy\| \equiv \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}} \quad \Longleftrightarrow \quad \|z\|^2 = z \bar{z} .$$

Quand on voit l'espace vectoriel \mathbf{R}^2 comme le corps des nombres complexes \mathbf{C} , il est d'habitude de noter cette norme par des simples barres : $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$, pas de doubles, et de parler de la valeur absolue du nombre complexe z au lieu de l'appeler sa norme.

Associé à la valeur absolue/norme $|\cdot|$ on définit le *disque ouvert* $D_r(z)$ de centre $z \in \mathbf{C}$ et de rayon $r \in [0, \infty[$ comme l'ensemble

$$D_r(z) = \{ w \in \mathbf{C} \mid |w - z| < r \} .$$

Le cas particulier du disque unité $D_1(0)$ est souvent noté comme $\mathbf{D} = D_1(0)$.

Définition des 1-formes complexes. Dans [2.4] on a défini une 1-forme sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ comme une application $\alpha : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^* \equiv \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. La généralisation vers une 1-forme complexe sur U devient simple : c'est une application $\alpha : U \rightarrow \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \equiv \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^2)$. Mais si $\alpha(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$ est une application linéaire, ses deux composantes $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ sont des application linéaires $\alpha_1(x), \alpha_2(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Autrement dit, $\operatorname{Re} \alpha$ et $\operatorname{Im} \alpha$ sont des 1-formes différentielles comme définies dans [2.4] et on peut écrire

$$(4.6) \quad \alpha(x) = (\operatorname{Re} \alpha)(x) + i (\operatorname{Im} \alpha)(x) .$$

Si (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées sur $U \subset \mathbf{R}^n$ il existent donc $2n$ fonctions $\operatorname{Re} \alpha_j, \operatorname{Im} \alpha_j : U \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\alpha(x) = \left(\sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} \alpha_j)(x) dx_j \right) + i \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\operatorname{Im} \alpha_j)(x) dx_j \right) ,$$

qu'on peut écrire autrement, en réarrangeant les termes, comme

$$(4.7) \quad \alpha(x) = \sum_{j=1}^n ((\operatorname{Re} \alpha_j)(x) + i (\operatorname{Im} \alpha_j)(x)) dx_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j ,$$

où on a introduit les fonction complexes $\alpha_j : U \rightarrow \mathbf{C}$ par $\alpha_j = \operatorname{Re} \alpha_j + i \operatorname{Im} \alpha_j$. Quand on voit $\alpha(x) \in \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^2)$ comme une matrice à n colonnes et 2 lignes, on aura

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} \alpha_1)(x) & (\operatorname{Re} \alpha_2)(x) & \dots & (\operatorname{Re} \alpha_n)(x) \\ (\operatorname{Im} \alpha_1)(x) & (\operatorname{Im} \alpha_2)(x) & \dots & (\operatorname{Im} \alpha_n)(x) \end{pmatrix}.$$

Dans l'écriture (4.6) on a séparé les deux lignes, tandis que dans l'écriture (4.7) on a séparé les n colonnes. La conclusion est donc qu'une 1-forme complexe sur $U \subset \mathbf{R}^n$ est décrite, soit par deux 1-formes réelles $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Im} \alpha$ sur U , soit par n fonction complexes $\alpha_j : U \rightarrow \mathbf{C}$.

Définition de l'intégration d'une 1-forme complexe. Comme dit dans [1.1], l'intégration d'une application vectorielle se fait composante par composante. Pour une 1-forme complexe $\alpha : U \rightarrow \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ continue et une $C^{1/}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ on définit "donc" l'intégrale de α sur la courbe γ par

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \operatorname{Re} \alpha + i \cdot \int_{\gamma} \operatorname{Im} \alpha \equiv \left(\int_{\gamma} \operatorname{Re} \alpha, \int_{\gamma} \operatorname{Im} \alpha \right),$$

où $\int_{\gamma} \operatorname{Re} \alpha$ et $\int_{\gamma} \operatorname{Im} \alpha$ sont définies par [2.7]. Quand on écrit α sous la forme (4.7) et la courbe γ en composantes $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ on obtient l'expression

$$(4.8) \quad \int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt,$$

où ce sont d'intégrales de fonctions complexes, donc à deux composantes : la partie réelle et la partie imaginaire.

Un intermezzo sur Pythagore et Cauchy-Schwarz. Soit $y \in \mathbf{R}^n$ un vecteur non-nul et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n défini par

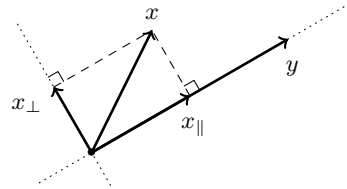
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

ce qui permet d'exprimer la norme euclidienne sur \mathbf{R}^n comme $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle$. Alors pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ il existe une (unique) décomposition de x de la forme $x = x_{\perp} + x_{\parallel}$ avec x_{\parallel} et y colinéaire et $\langle x_{\perp}, y \rangle = 0$. Cette décomposition est donnée par

$$x = x_{\perp} + x_{\parallel}$$

avec

$$x_{\parallel} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y \text{ et } x_{\perp} = x - x_{\parallel}.$$



Dans ce contexte, le théorème de Pythagore s'énonce comme l'égalité

$$\|x\|^2 = \|x_{\perp}\|^2 + \|x_{\parallel}\|^2.$$

On en déduit directement l'énoncé suivant :

$$\|x_{\parallel}\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } x \text{ et } y \text{ colinéaire.}$$

Quand on substitue dans cet énoncé l'expression pour x_{\parallel} , on trouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } x \text{ et } y \text{ colinéaire.}$$

Vu de cette manière, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une variante faible du théorème de Pythagore !

(P) 4.9 Proposition (une majoration classique). Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $\alpha : U \rightarrow \text{Lin}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ une 1-forme complexe continue sur U et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe. Alors on a la majoration

$$\left| \int_{\gamma} \alpha \right| \equiv \left| \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \right| \leq \left(\sup_{s \in [a, b]} \|\alpha(\gamma(s))\| \right) \cdot L(\gamma) .$$

où $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ est la longueur de la courbe γ et où $\|\alpha(\gamma(s))\|$ désigne la norme dans \mathbf{C}^n du vecteur $(\alpha_1(\gamma(s)), \dots, \alpha_n(\gamma(s))) \in \mathbf{C}^n$.

Les 1-formes complexes sur \mathbf{C} . Passons maintenant au cas particulier $U \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$. Au lieu de noter les coordonnées sur $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ par (x_1, x_2) on les note par (x, y) , un point qu'on note aussi par $(x, y) = x + iy = z$. Une 1-forme complexe α sur $U \subset \mathbf{C}$ est donc déterminée par deux fonctions complexes $\alpha_1, \alpha_2 : U \rightarrow \mathbf{C}$ comme

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \alpha_1(z) dx + \alpha_2(z) dy \\ &= ((\text{Re } \alpha_1)(z) dx + (\text{Re } \alpha_2)(z) dy) + i \cdot ((\text{Im } \alpha_1)(z) dx + (\text{Im } \alpha_2)(z) dy) \\ &\equiv (\text{Re } \alpha)(z) + i (\text{Im } \alpha)(z) . \end{aligned}$$

Il se peut que les deux 1-formes $\text{Re } \alpha$ et $\text{Im } \alpha$ sont exactes, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $f_r, f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\text{Re } \alpha = df_r \quad \text{et} \quad \text{Im } \alpha = df_i .$$

On peut résumer cela dans une fonction complexe $f = f_r + i f_i : U \rightarrow \mathbf{C}$ en écrivant

$$\begin{aligned} \alpha &= df = (df_r) + i(df_i) \\ &= ((\partial_1 f_r) dx + (\partial_2 f_r) dy) + i((\partial_1 f_i) dx + (\partial_2 f_i) dy) \\ &= (\partial_1 f) dx + (\partial_2 f) dy . \end{aligned}$$

Deux cas particuliers importants sont donnés par les fonctions complexes $f(z) = z = x + iy$ et $f(z) = \bar{z} = x - iy$, ce qui donne les 1-formes complexes

$$(4.10) \quad dz = dx + i dy \quad \text{et} \quad d\bar{z} = dx - i dy .$$

Sachant que toute 1-forme complexe α sur U s'écrit (d'une façon unique) comme une combinaison linéaire des 1-formes dx et dy avec des fonctions complexes comme coefficients, c'est un exercice élémentaire (de changement de base) de montrer que toute 1 forme complexe s'écrit aussi (d'une façon unique) comme une combinaison linéaire des 1-formes dz et $d\bar{z}$ avec des fonctions complexes comme coefficients. Plus précisément, si $\alpha(z) = f(z) dx + g(z) dy$ pour deux fonctions complexes f et g , on a l'égalité

$$f(z) dx + g(z) dy = \frac{1}{2}(f(z) - i g(z)) dz + \frac{1}{2}(f(z) + i g(z)) d\bar{z} ,$$

ou encore pour deux fonctions complexes h et k :

$$h(z) dz + k(z) d\bar{z} = (h(z) + k(z)) dx + i(h(z) - k(z)) dy .$$

→ **4.11 Corollaire.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue, $\alpha = f(z) dz$ la 1-forme complexe sur U associée à f et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe. Alors on a l'égalité

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt ,$$

et on a la majoration

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left(\sup_{s \in [a, b]} |f(\gamma(s))| \right) \cdot L(\gamma) \equiv \left(\sup_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)| \right) \cdot L(\gamma) .$$

Nota Bene. La majoration dans [4.11] n'est pas une simple transcription de la majoration dans [4.9] ! Une application directe de [4.9] aurait donné la majoration

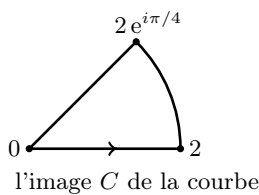
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 2 \cdot \left(\sup_{s \in [a, b]} |f(\gamma(s))| \right) \cdot L(\gamma) ,$$

où le facteur 2 vient du fait qu'on prend la norme dans \mathbf{C}^2 du vecteur $(f(z), if(z))$, une conséquence de la 1-forme complexe dans \mathbf{R}^2

$$\alpha = f(z) dz = f(z) dx + if(z) dy ,$$

associée aux deux 1-formes indépendantes dx et dy . C'est le fait qu'on a comme coefficients $f(z)$ et $if(z)$ qui fait qu'on peut l'écrire comme un seul terme. Dans un certain sens ceci reflète le fait qu'on peut décrire une 1-forme complexe sur \mathbf{C} soit en termes des deux 1-formes de base dx, dy , soit en termes des deux 1-formes $dz, d\bar{z}$. Et donc dans l'écriture $f(z) dz$ il n'y a qu'un seul de ces deux 1-formes de base qui intervient, pas deux.

Les courbes en analyse complexe. En analyse complexe, les résultats importants qui font intervenir une courbe ont besoin qu'elle soit de classe $C^{1/}$. Par contre, dans les applications explicites on n'utilise guère d'autre courbes que des C^{∞} -courbes régulières $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ qui sont injectives sur $[a, b[$. Autrement dit, des courbes pour lesquelles il suffit d'indiquer leur image et un sens de parcours pour pouvoir calculer l'intégrale d'une 1-forme continue [3.8], [3.10]. En général on ne se prive pas de cette possibilité : au lieu de donner une expression explicite pour une courbe, on dessine son image $C \subset \mathbf{C}$ et on indique un sens de parcours en mettant une flèche en un point de la courbe indiquant la direction du vecteur tangent en ce point [3.8].



$$\gamma_1 : [0, 4 + \frac{1}{4}\pi] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_1(t) = \begin{cases} t & t \leq 2 \\ 2e^{i(t-2)} & 2 \leq t \leq 2 + \frac{1}{4}\pi \\ (4 + \frac{1}{4}\pi - t) e^{i\pi/4} & t \geq 2 + \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

deux paramétrisations compatibles

$$\gamma_2 : [0, \frac{9}{8}] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} 2(1-t) e^{i\pi/4} & t \leq 1 \\ 2(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \\ 2e^{2\pi it} & t \geq 2 \end{cases}$$

Pour les courbes $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ (régulières, de classe $C^{1/\infty}$) qui sont injectives sur $[a, b]$, l'histoire s'arrête là : soit on donne l'application γ , soit on ne donne que l'image $C = \gamma([a, b])$ et un sens de parcours. Pour les autres courbes (régulières, de classe $C^{1/\infty}$) qui sont (donc) simplement fermées ($\gamma(a) = \gamma(b)$), on peut parfois aller “plus loin.” Cela commence avec l'idée que dans $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ le bord d'une figure simple (comme un triangle, un rectangle, un cercle) est d'une façon naturelle le bord d'un compact (le triangle plein, le rectangle plein, un disque). Ensuite on généralise et on considère un compact $K \subset \mathbf{C}$ et on suppose que son bord topologique C (définition à suivre) est l'image d'une $C^{1/}$ -courbe régulière simplement fermée. Le théorème (de séparation) de Jordan dira qu'avec cela on aura le cas général : l'image de toute courbe continue simplement fermée dans \mathbf{R}^2 (pas seulement celles qui sont régulières) est le bord topologique d'un compact. Rappelons donc la définition : pour $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit son *bord topologique*, noté ∂A par

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \equiv \overline{A} \cap \overline{\mathbf{R}^n \setminus A},$$

c'est-à-dire l'adhérence \overline{A} de A (le plus petit fermé contenant A) privé de son intérieur $\overset{\circ}{A}$ (le plus grand ouvert contenu dans A) — ou bien l'intersection de l'adhérence de A avec l'adhérence du complémentaire de A . On part donc d'un compact K ou un ouvert borné O et on suppose que son bord ∂K respectivement ∂O est l'image d'une $C^{1/}$ -courbe régulière et simplement fermée $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. Le théorème de Jordan affirme (en plus de généralité) que c'est le cas pour toutes les courbes continues et simplement fermées.

4.12 Théorème (de séparation de Jordan, admis)¹. *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une courbe continue et simplement fermée et soit $C = \gamma([a, b])$ son image. Alors $\mathbf{C} \setminus C$ a exactement deux composantes connexes (non vides) :*

$$\mathbf{C} \setminus C = O_1 \cup O_2$$

avec O_1 et O_2 deux ouverts connexes disjoints dont un est borné et l'autre ne l'est pas et vérifiant $\partial O_1 = \partial O_2 = C$. La composante (connexe) bornée est appelé l'intérieur de la courbe de Jordan $C = \gamma([a, b])$ et la composante non-bornée l'extérieur.

Selon le théorème de Jordan [4.12], si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est une courbe continue et simplement fermée, alors son image est automatiquement le bord d'un ouvert borné O (son intérieur) ou d'un compact K (l'adhérence de son intérieur). En analyse complexe on part donc d'un compact $K \subset U$ (ou d'un ouvert borné O) et on suppose que son bord $\partial K \subset U$ (respectivement $\partial O \subset U$) est l'image d'une $C^{1/}$ -courbe simplement fermée. Mais pour pouvoir définir l'intégrale d'une 1-forme α sur cette courbe ∂K , il nous manque un sens de parcours.

1. C'est la première partie sur la séparation en exactement deux composantes connexes qu'a énoncé (Maire Ennemond) Camille Jordan (1838-1922) en 1887 dans [Jor87] (ou dans la deuxième édition de 1893). On trouve une preuve relativement simple dans [Dug66, Ch.XVII] et dans [Hal07] on trouve plus de détails sur l'histoire de ce théorème.

4.13 Définition (sens de parcours d'un bord). Soit $O \subset \mathbf{C}$ un ouvert borné et $K = \overline{O}$ son adhérence vérifiant l'hypothèse que $\partial O = K \setminus O$ est l'image d'une $C^{1/}$ -courbe régulière et simplement fermée. Pour définir un sens de parcours de ∂O il faut dessiner quelque part une flèche sur cette courbe ∂O (représentant la direction d'un vecteur tangent à la courbe voir [3.8] et [3.10]). Bien évidemment il y a deux choix possibles qu'on appelle *le sens positif* et *le sens négatif*. Intuitivement la définition est simple : on s'imagine que la flèche du vecteur tangent représente un cycliste avec le guidon la pointe de la flèche. Alors on parcourt la courbe dans le sens positif si l'ouvert O (l'intérieur de la courbe de Jordan) se trouve à gauche du cycliste. Et si l'intérieur se trouve à droite, on parcourt la courbe dans le sens négatif.

Pour une définition mathématique on procède comme suit. On prend $t \in]a, b[$ où $\gamma'(t)$ existe (et est forcément non-nul par définition d'une courbe régulière). On calcule $R_{\pi/2}\gamma'(t)$, la rotation d'angle $\pi/2$ du vecteur $\gamma'(t)$:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad R_{\pi/2}\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

ou encore

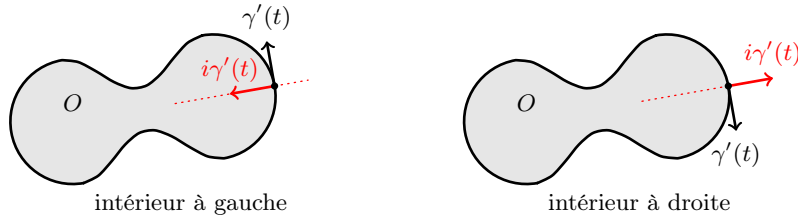
$$\gamma'(t) = u + iv \quad \Longrightarrow \quad R_{\pi/2}\gamma'(t) = -v + iu = i\gamma'(t) .$$

Et on dit que O (l'intérieur de la courbe) se trouve à gauche, ce qui veut dire par définition qu'on parcourt γ dans le sens positif, s'il existe $\varepsilon > 0$ avec la propriété

$$\forall 0 < \lambda < \varepsilon : \gamma(t) + i\lambda\gamma'(t) \in O .$$

Autrement dit : un petit bout de la droite passant par $\gamma(t)$ et orthogonal à $\gamma'(t)$ proche de $\gamma(t)$ (le bras gauche du cycliste) appartient à O . Et on dit que O se trouve à droite (on parcourt γ dans le sens négatif) si on a la propriété

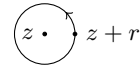
$$\forall 0 < \lambda < \varepsilon : \gamma(t) - i\lambda\gamma'(t) \in O .$$



Dans [12.8] on montrera qu'il existe toujours $\varepsilon > 0$ tel qu'une des deux propriétés soit vraie et dans [12.9] on donnera une autre façon de distinguer ces deux cas. Attention : il est coutume de parcourir le bord ∂O presque toujours dans le sens positif. Autrement dit, quand on ne précise rien, le parcours dans le sens positif est sous-entendu.

4.14 Exemples. Il y a deux exemples qu'on rencontre très souvent : le bord d'un disque (ouvert ou fermé) et le bord d'un triangle (fermé). Pour un disque $D_r(z)$ le bord est le cercle de centre $z \in \mathbf{C}$ et de rayon r . Une C^∞ -paramétrisation qui parcourt ce cercle $\partial D_r(z)$ dans le sens positif est donnée par

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial D_r(z) \quad : \quad \gamma(t) = z + r e^{2\pi i t}$$



et pour le parcours dans le sens négatif on a

$$\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \partial D_r(z) \quad : \quad \gamma(t) = z + r e^{-it} .$$



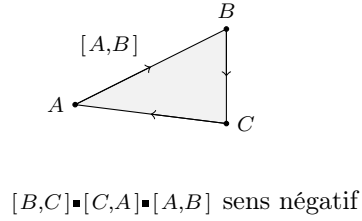
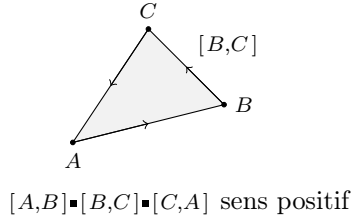
Pour un triangle (fermé!) ΔABC avec $A, B, C \in \mathbf{C}$ trois points dans le plan complexe, son bord consiste des trois segments orientés $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$. Ou avec les extrémités mis dans un autre sens. En utilisant la concaténation, il n'est pas difficile de voir que la C^∞ -courbe régulière simplement fermée définie comme (voir [3.11])

$$[A, B] \cdot [B, C] \cdot [C, A]$$

est une C^∞ -paramétrisation de $\partial\Delta ABC$, et que la courbe

$$[A, C] \cdot [C, B] \cdot [B, A]$$

est une autre C^∞ -paramétrisation qui parcourt $\partial\Delta ABC$ dans le opposée. Laquelle est compatible avec le sens positif dépend des positions relatives des trois points A , B et C .



EXERCICES

→ **4.15 Exercice.** Soient $\phi_g, \phi_d : \mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2 \rightarrow M(2, \mathbf{R})$ définies par

$$\phi_g(x + iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_d(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

- (i) En interprétant $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C}$ comme un corps, montrer que ϕ_g et ϕ_d sont des morphismes d'anneaux injectives. Autrement dit, ce sont deux façons différentes d'interpréter \mathbf{C} comme un sous-anneau de l'anneau $M(2, \mathbf{R})$ des matrices réelles de taille 2×2 .
- (ii) Montrer que pour $z = x + iy$ et $w = u + iv$ on a

$$zw = \phi_g(z) \cdot w = {}^t z \cdot \phi_d(w),$$

où zw désigne le produit dans le corps \mathbf{C} , où l'opération t désigne la transposée (ici d'un vecteur) et où l'opération \cdot désigne la multiplication matricielle.

→ **4.16 Exercice.** Dans la liste ci-dessous on vous donne une intégrale curviligne sur un chemin dans \mathbf{C} . Dans chacun des cas, dessiner le chemin, exprimer l'intégrale curviligne sous forme $\int_a^b F(t) dt$ pour une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ qu'on donne explicitement et (finalement) calculer cette intégrale.

- (i) $I_1 = \int_\gamma x dz$ et $I_2 = \int_\gamma y dz$ avec γ (a) le segment de 0 à $2 + i$; (b) le demi-cercle $|z| = R$ avec $y \geq 0$ parcouru dans le sens positif.
- (ii) $\int_C \operatorname{Re}(z) dz$ avec C (a) le (bord du) carré (fermé) de sommets 0, 1, $1 + i$, i (parcouru dans le sens positif); (b) le demi-cercle unité supérieur $C(0, 1)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ parcouru dans le sens direct.

- (iii) $\int_C \bar{z} \, dz$ avec C (a) le cercle $C(2, 3)$; (b) le carré (fermé) de sommets 0 , 2 , $2i$ et $2 + 2i$; (c) l'arc de parabole $\gamma(t) = 1 + it + t^2$, $t \in [0, 1]$; (d) l'ellipse $|z - 3| + |z + 3| = 10$.
- (iv) $\int_\gamma \bar{z}^n \, dz$, $n \in \mathbf{Z}$ avec γ le cercle $C(0, R)$ parcouru dans le sens direct.
- (v) $\int_\gamma |z|^2 \, dz$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ le chemin $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$.
- (vi) $\int_\gamma |z| \, dz$ avec γ le polygone (fermé) de sommets i , $-i$, $-i + 1$, $i + 1$ parcouru dans le sens direct.

→ **4.17 Exercice.** Soit $\ell, h > 0$ deux réels strictement positifs et soit $A, B, C, D \in \mathbf{C}$ définis comme

$$A = -\ell - ih, \quad B = \ell - ih, \quad C = \ell + ih, \quad D = -\ell + ih.$$

Ces quatre points forment donc un rectangle avec l'origine au centre. Calculer

$$\int_{[A,B] \cup [B,C] \cup [C,D] \cup [D,A]} \frac{dz}{z}.$$

5. Séries entières

5.1 Définition. La droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ est la droite réelle \mathbf{R} à laquelle on ajoute deux éléments ∞ et $-\infty$: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. On prolonge l'ordre sur \mathbf{R} en un ordre sur $\overline{\mathbf{R}}$ en posant

$$\forall x \in \mathbf{R} : -\infty < x < \infty .$$

Attention quand même : il faut considérer $-\infty$ comme un seul symbole, pas comme le négatif du symbole ∞ , car on n'a pas prolongé les opérations d'addition et/ou de soustraction sur $\overline{\mathbf{R}}$.

Si $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ n'est pas vide, on dit que $b \in \overline{\mathbf{R}}$ est une borne supérieure pour A si b vérifie les conditions

$$\forall a \in A : a \leq b \quad \text{et} \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}} : (x < b \Rightarrow \exists a \in A : x < a) .$$

En toutes lettres : b est un majorant de A et tout élément plus petit que b n'est pas un majorant ; ou encore : b est le plus petit majorant de A . De la même manière on définit une borne inférieure b par les conditions

$$\forall a \in A : b \leq a \quad \text{et} \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}} : (b < x \Rightarrow \exists a \in A : a < x) ,$$

c'est-à-dire : un minorant tel que tout élément plus grand n'est pas un minorant ; ou encore : le plus grand minorant. L'existence et unicité d'une borne supérieure/inférieure sont assurés par [5.2].

→ **5.2 Lemme/Définition.** Tout ensemble non vide $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ possède une unique borne inférieure et une unique borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$; on les note comme $\inf A$ et $\sup A$.

→ **5.3 Lemme.** Soit $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ non vide et soit $M \in \overline{\mathbf{R}}$ un majorant de A , c'est-à-dire :

$$\forall a \in A : a \leq M .$$

Alors on a l'inégalité $\sup A \leq M$. De même, si M est un minorant de A , alors on a $M \leq \inf A$.

Définition. Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite. On la notera au choix aussi par $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ou simplement par a_n , avec le sous-entendu qu'on a l'égalité $a(n) \equiv a_n$. On dit que la limite de cette suite pour $n \rightarrow \infty$ vaut ∞ , qu'on note $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, si elle vérifie la condition

$$\forall M \in \mathbf{R} \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N : a_n > M .$$

À noter que M appartient à \mathbf{R} et est donc forcément différent de ∞ .

De la même façon on définit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ par

$$\forall M \in \mathbf{R} \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N : a_n < M .$$

Nota Bene. La condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ est plus forte que la condition pour la suite de ne pas être bornée : si on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ alors la suite a_n n'est pas bornée, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

→ **5.4 Corollaire.** Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite décroissante. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$ et est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \} .$$

De la même façon, si a est une suite croissante, sa limite existe dans $\overline{\mathbf{R}}$ et est donnée par $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \}$.

Définition. Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite de réels (aussi notée comme $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ou simplement par a_n). Alors on définit la *limite supérieure*, notée $\limsup a_n$, par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \equiv \inf \left\{ \sup_{k \geq n} \{ a_k \mid k \geq n \} \mid n \in \mathbf{N} \right\} .$$

À noter que, malgré le petit espace, le symbole “lim sup” est indivisible et ne se sépare pas en deux mots “lim” et “sup”. De la même façon on définit la *limite inférieure*, notée $\liminf a_n$, par

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right) \equiv \sup \left\{ \inf_{k \geq n} \{ a_k \mid k \geq n \} \mid n \in \mathbf{N} \right\} .$$

→ **5.5 Corollaire.** Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite. Alors la suite $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$ est une suite décroissante dans $\overline{\mathbf{R}}$ et on a les égalités

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) .$$

À noter la différence entre l'expression à gauche et l'expression à droite : à gauche on ne parle que de l'indice n et on note a_n , tandis que à droite on utilise deux indices n et k et on note a_k . De même, la suite $c_n = \inf_{k \geq n} a_k$ est croissante et on a l'égalité

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right) .$$

→ **5.6 Corollaire.** Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors on a les égalités

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

5.7 Définition. Une *série entière* est une expression/fonction de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec $c_n \in \mathbf{C}$. On le voit comme une série de fonctions définies sur $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ avec “donc” en particulier

$$\begin{aligned} (x + iy)^n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} i^k y^k x^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \frac{(-1)^{k/2} n!}{k! (n-k)!} y^k x^{n-k} + i \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \frac{(-1)^{(k-1)/2} n!}{k! (n-k)!} y^k x^{n-k} \\ &\cong \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \frac{(-1)^{k/2} n!}{k! (n-k)!} y^k x^{n-k} , \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \frac{(-1)^{(k-1)/2} n!}{k! (n-k)!} y^k x^{n-k} \right) . \end{aligned}$$

→ **5.8 Lemme (Abel).** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière et $r \in [0, \infty[$ un réel tel que la suite numérique $|c_n| r^n$ est majorée. Alors pour tout $|z| < r$ la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolument.

Ⓟ **5.9 Proposition.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière et soit $\rho \in [0, \infty]$ défini par

$$\rho = \sup \{ r \in [0, \infty[\mid \exists M \in]0, \infty[\forall n \in \mathbf{N} : |c_n| r^n \leq M \} .$$

Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout $|z| < \rho$ la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolument.
- (ii) Pour tout $|z| > \rho$ la suite numérique $|c_n z^n|$ n'est pas majorée (et donc la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ diverge).

5.10 Définition. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière. Alors le nombre $\rho \in [0, \infty]$ défini dans [5.9] est appelé le *rayon de convergence de la série entière* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ et le disque $D_\rho(0)$ est appelé le *disque de convergence* de la série.

Ⓟ **5.11 Le théorème de Cauchy-Hadamard.**

- (i) Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente si $L < 1$ et divergente si $L > 1$.
- (ii) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence ρ est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} ,$$

avec la convention que si le membre de droite vaut 0, on a $\rho = \infty = 1/0$ et si le membre de droite vaut ∞ , alors $\rho = 0 = 1/\infty$.

→ **5.12 Lemme.** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors pour tout $0 < r < \rho$ la série est normalement convergente sur $\overline{D_r(0)}$. En particulier la série est normalement convergente sur tout compact de $D_\rho(0)$ (voir §23).

Ⓟ **5.13 Lemme.** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ . Alors le rayon de convergence des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1} z^n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

est également ρ .

→ **5.14 Lemme.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors la fonction $f : D_\rho(0) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par (voir [5.7])

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + iy)^n$$

est de classe C^∞ avec

$$(\partial_1 f)(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x + iy)^{n-1} \quad \text{et} \quad (\partial_2 f)(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} i n c_n (x + iy)^{n-1}.$$

5.15 Définition (produit (de Cauchy) de deux séries). À deux séries numériques $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ on associe une troisième série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ définie par

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p},$$

qu'on appelle le *produit de Cauchy des deux séries (numériques)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. La justification de ce nom se trouve dans [5.16]. Pour deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ on définit la série entière $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ de la même façon par

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$$

et on l'appelle le *produit de Cauchy des deux séries entières* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. La justification de ce nom se trouve dans [5.17].

Ⓟ **5.16 Lemme.** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries numériques absolument convergentes. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, est absolument convergente et on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

→ **5.17 Corollaire.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence ρ_f respectivement ρ_g . Alors la série $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, produit de Cauchy des deux séries f et g , a un rayon de convergence $\rho_h \geq \min(\rho_f, \rho_g)$ et pour tout $|z| < \min(\rho_f, \rho_g)$ on a l'égalité

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

→ **5.18 Lemme (le principe des zéros isolés, première version).** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. S'il existe une suite $z_n \in D_\rho(0) \setminus \{0\}$ vérifiant $f(z_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, alors $c_n = 0$ pour tout n , c'est-à-dire que f est la fonction nulle.

→ **5.19 Corollaire (unicité des coefficients).** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ deux séries entières de rayon $\rho_f > 0$ et $\rho_g > 0$. S'il existe $0 < r < \min(\rho_f, \rho_g)$ tel que f et g coïncident sur $D_r(0)$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $c_n = d_n$.

EXERCICES

→ **5.20 Exercice. Manipulation du limsup.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de réels.

(i) Etablir les propositions suivantes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n$$

$$(\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n .$$

Donner un exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

(ii) On suppose maintenant que ces deux suites sont constituées de réels positifs et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite (éventuellement ∞). Montrer que si le produit

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right) \cdot \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$$

n'est pas une forme indéterminée ($0 \cdot \infty$ ou $\infty \cdot 0$), alors on a l'égalité

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n \cdot a_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right) \cdot \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) .$$

Donner des exemples où on n'a pas cette égalité quand on laisse tomber une des hypothèses (positivité de v_n ou forme indéterminée).

→ **5.21 Exercice. Des séries à trous.** Soit $d : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une suite strictement croissante (d'exposants) et soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ une suite de nombres complexes. Avec ces deux suites on considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{d_n}$. Montrer que son rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[d_n]{|a_n|} .$$

→ **5.22 Exercice.**

- (i) Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ en z définit une série entière. Quel est son rayon de convergence ?
- (ii) Quel est le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} z^k$? Montrer que sa somme se prolonge holomorphiquement à $\mathbf{C} \setminus \{1\}$. Peut-on en déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}$?
- (iii) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} / 2^k$? Montrer que sa somme f se prolonge en une fonction infiniment dérivable sur \mathbf{R} , puis sur $\mathbf{C} \setminus \{\pm i\sqrt{2}\}$.

- (iv) Calculer le rayon de convergence et étudier la convergence sur le cercle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants :

$$a_n = a^n \ (a \in \mathbf{C}) , \quad a_n = \frac{1}{n} , \quad a_n = n , \quad a_n = n! , \quad a_n = \frac{1}{n^2} ,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} , \quad a_n = a^{\sqrt{n}} \ (a > 0) , \quad a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) .$$

- (v) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$?

→ **5.23 Exercice.** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière pour laquelle les coefficients a_n vérifient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation $a_{n+3} = (2n+3)a_n/(n+1)$. Que pouvez-vous dire de son rayon de convergence ?

→ **5.24 Exercice.** Le principe des zéros isolés est faux en C^∞ . Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 . \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbf{R} et en particulier qu'on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire que le principe des zéros isolés n'est pas vrai (en général) pour les fonctions de classe C^∞ .

6. La fonction exponentielle et fonctions associées

Définition. La *fonction exponentielle* \exp est la série entière définie par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Son rayon de convergence est ∞ , ce qui veut dire que le domaine de définition de \exp est le plan complexe entier : $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Il est d'usage de noter (si la place le permet) $\exp(z)$ aussi avec un exposant comme

$$e^z \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp(z) .$$

Associées à la fonction exponentielle on définit quatre autres fonctions sur \mathbf{C} par

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} , \end{aligned}$$

qu'on appelle respectivement le *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique*, *cosinus* et *sinus*.

→ 6.1 Quelques propriétés de ces fonctions.

(i) *Les fonctions \cos et \cosh sont des fonctions paires :*

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad = \quad \cos(-z) = \cos(z) \quad \text{et} \quad \cosh(-z) = \cosh(z) .$$

Les fonctions \sin et \sinh sont impaires :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad = \quad \sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{et} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) .$$

(ii) *Les fonctions \cosh , \sinh , \cos et \sin sont aussi représentées par des séries entières :*

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} & \sinh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} . \end{aligned}$$

(iii) *Entre les fonctions (co)sinus et les fonctions (co)sinus hyperboliques on a les liens suivants :*

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \cosh(z) & \sin(iz) &= i \sinh(z) \\ \cosh(iz) &= \cos(z) & \sinh(iz) &= i \sin(z) . \end{aligned}$$

(iv) *Pour tout $z, w \in \mathbf{C}$ on a les formules dites d'addition*

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z \cdot e^w \\ \cosh(z+w) &= \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w) \\ \sinh(z+w) &= \sinh(z) \cdot \cosh(w) + \cosh(z) \cdot \sinh(w) \\ \cos(z+w) &= \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w) \\ \sin(z+w) &= \sin(z) \cdot \cos(w) + \cos(z) \cdot \sin(w) . \end{aligned}$$

(v) *Pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$, et $(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$.*

(vi) Pour tout $x, y \in \mathbf{C}$ (sic !) on a la formule dite d'Euler

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) .$$

(vii) La restriction de chacune des cinq fonctions \exp , \cosh , \sinh , \cos , \sin à la droite réelle est une fonction à valeurs réelles. En tant que telles, elles sont de classe C^∞ sur \mathbf{R} avec dérivées données par les formules bien connues

$$\exp' = \exp , \quad \sinh' = \cosh , \quad \cosh' = \sinh , \quad \sin' = \cos , \quad \cos' = -\sin .$$

(viii) La fonction $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est strictement croissante avec $\exp(\mathbf{R}) =]0, \infty[$.

(ix) Pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a les égalités $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Nota Bene. Comme signalé dans la preuve, l'écriture \exp' (et de même pour les quatre fonctions \sin , \cos , \sinh et \cosh) dans [6.1.vii] est un abus de notation. La fonction \exp est une fonction de deux variables réelles et en tant que telle elle admet deux dérivées partielles $\partial_1 \exp$ et $\partial_2 \exp$. Parler de la dérivée \exp' n'a donc pas de sens, l'écriture correcte serait $\partial_1 \exp = \exp$ et $\partial_2 \exp = i \exp$. Par contre, sa restriction à la droite réelle est bien une fonction d'une seule variable réelle et admet donc une dérivée "ordinaire," notée avec le symbole $'$. Bien que ..., on prévient le lecteur d'ores et déjà qu'il y aura une autre interprétation du symbole $'$ à partir de [7.2], voir aussi [7.8]. À partir de ce moment, il faut donc être vigilant sur la signification/utilisation de ce symbole.

Nota Bene. Les fonctions \sin et \cos ne sont pas bornées sur \mathbf{C} !

La définition du nombre π . On définit le nombre $\pi \in \mathbf{R}$ par

$$\pi = 2 \cdot \inf \{ x \in]0, \infty[\mid \cos(x) = 0 \} .$$

Ⓟ **6.2 Proposition.** L'ensemble $\{ x \in]0, \infty[\mid \cos(x) = 0 \}$ n'est pas vide (donc π existe) et on a $1 < \frac{1}{2}\pi < 2$.

Ⓟ **6.3 Quelques propriétés classiques.**

(i) On a

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi) = 0 = \sin(\pi) \quad \text{et} \quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi) = 1$$

et ce sont les plus petites valeurs strictement positives pour lesquelles ces égalités ont lieu. En particulier pour tout $|x| < \frac{1}{2}\pi$ on a $\cos(x) > 0$.

(ii) Les fonctions $\sin, \cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sont périodiques et la plus petite période est 2π .

(iii) Pour tout $z = x + iy \in \mathbf{S}^1$ [1.7] il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ vérifiant

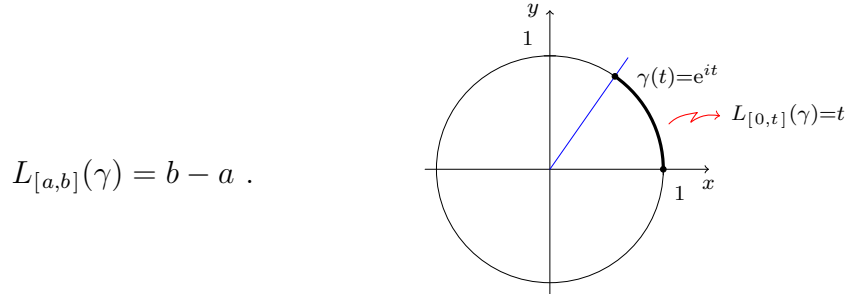
$$z = e^{it} \quad \text{ou ce qui est équivalent} \quad x = \cos t \text{ et } y = \sin t .$$

Ⓟ **6.4 Corollaire.**

(i) Pour $z \in \mathbf{C}$ on a $e^z = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = 2k\pi i$.

(ii) Pour tout $z \in \mathbf{C}$ il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z| e^{it}$.

- (iii) L'image de l'application $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$ est \mathbf{C}^* .
- (iv) La longueur de la courbe (de classe C^∞) $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ entre a et b vaut $b - a$:



Remarques. • On peut résumer les résultats [6.1.iv], [6.4.i] et [6.4.iii] en disant que l'application $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ vers le groupe multiplicatif (\mathbf{C}^*, \cdot) avec noyau égale à $2\pi i\mathbf{Z}$.

• Avec [6.4.iv] on retrouve une définition classique de la mesure d'un angle : c'est la longueur de l'arc de cercle sur le cercle unité entre les deux demi-droites qui forment l'angle.

• On énonce le résultat [6.4.iv] souvent en disant que la courbe γ est *paramétrée par longueur d'arc*. Mais attention : ici (encore une fois) il faut bien distinguer une courbe de son image. Car, bien que la longueur de cette courbe entre 0 et 4π vaut 4π , la circonférence du cercle unité reste 2π . Il ne faut donc pas confondre la longueur d'une courbe avec la longueur "intuitive" de son image, car une courbe peut parcourir son image plusieurs fois.

L'adjectif hyperbolique. Les fonctions sinus et cosinus sont assez connues, tandis que les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique le sont moins. Et on peut légitimement se poser la question de l'origine de ces noms avec l'adjectif hyperbolique. L'explication commence avec la comparaison entre les (co)sinus ordinaires et les (co)sinus hyperboliques. Pour le premier on a pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'égalité

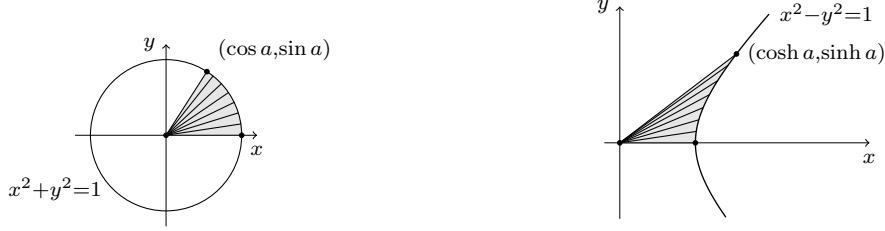
$$(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1 .$$

Autrement dit, la courbe $\gamma_C : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma_C(t) = (\cos(t), \sin(t))$ décrit le cercle unité $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. D'autre part, pour le deuxième on a pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'égalité

$$(\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1 ,$$

ce qui dit que la courbe $\gamma_H : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma_H(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ décrit l'hyperbole $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

Regardons maintenant les figures (des régions du plan \mathbf{R}^2) qu'on obtient quand on réunit les segments entre $(0, 0)$ et $\gamma_{C/H}(t)$ quand t parcourt un intervalle $[0, a]$.



Formellement on obtient donc les deux régions $R_C, R_H \subset \mathbf{R}^2$ définies par

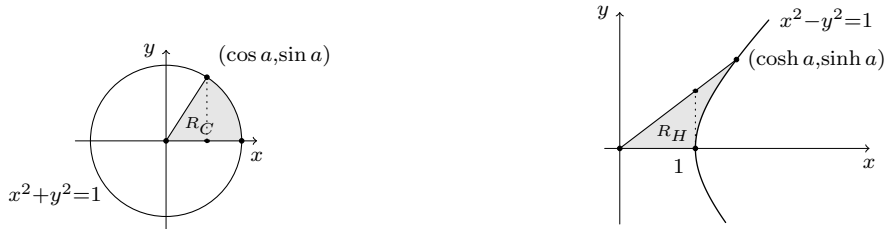
$$R_C = \{ (s \cos(t), s \sin(t)) \mid s \in [0, 1], t \in [0, a] \}$$

$$R_H = \{ (s \cosh(t), s \sinh(t)) \mid s \in [0, 1], t \in [0, a] \}.$$

Quand on calcule l'aire de ces régions, on trouve pour R_C (avec $a \leq \frac{1}{2}\pi$) :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(R_C) &= \int_0^{\cos(a)} \left(\int_0^{x \tan(a)} dy \right) dx + \int_{\cos(a)}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\cos(a)} x \tan(a) dx + \int_{\cos(a)}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ x=\cos(\varphi) \quad &= \left[\frac{1}{2} x^2 \tan(a) \right]_0^{\cos(a)} + \int_0^a (\sin(\varphi))^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \sin(a) \cos(a) + \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^a = \frac{1}{2} a. \end{aligned}$$

Ce résultat n'a rien de surprenant : l'aire du secteur de disque R_C déterminé par l'angle a est bien $\frac{1}{2}a$.



Quand on fait le calcul analogue pour R_H on trouve

$$\begin{aligned} \text{Aire}(R_H) &= \int_0^1 \left(\int_0^{x \tanh(a)} dy \right) dx + \int_1^{\cosh(a)} \left(\int_{\sqrt{x^2-1}}^{x \tanh(a)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \tanh(a) dx + \int_1^{\cosh(a)} (x \tanh(a) - \sqrt{x^2-1}) dx \\ x=\cosh(\varphi) \quad &= \left[\frac{1}{2} x^2 \tanh(a) \right]_0^{\cosh(a)} - \int_0^a (\sinh(\varphi))^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \sinh(a) \cosh(a) - \left[\frac{1}{4} \sinh(2\varphi) - \frac{1}{2} \varphi \right]_0^a = \frac{1}{2} a. \end{aligned}$$

Et on trouve que l'aire de R_H vaut aussi $\frac{1}{2}a$ quand a est le paramètre utilisé dans la courbe γ_H avec les (co)sinus hyperboliques.

On peut maintenant renverser l'argument : on prend un point (x_o, y_o) sur le cercle ou l'hyperbole, on détermine l'aire A délimité par les droites $y = 0$ (l'axe des

abscisses), $y = xy_o/x_o$ et la figure (cercle ou hyperbole). Et on constate que pour le cercle on a forcément

$$(x_o, y_o) = (\cos(2A), \sin(2A))$$

et pour l'hyperbole on a forcément

$$(x_o, y_o) = (\cosh(2A), \sinh(2A)) .$$

Autrement dit, les fonctions (co)sinus et les fonctions (co)sinus hyperboliques nous sont imposées quand on veut relier l'aire de la figure aux coordonnées du point.

Une critique historique sur la notation. Le lecteur attentif aura remarqué la façon dont j'ai noté les formules $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ et $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, des formules que le plus souvent on voit écrites comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Cette dernière notation est très répandue, mais l'idée sous-jacente prête à confusion, surtout quand on l'applique avec l'exposant -1 . Car comment interpréter par exemple $\sin^{-1}(x)$? Faut-il le voir comme l'application réciproque du sinus appliquée à x ? Ou faut-il le voir comme l'image réciproque du singleton $\{x\}$? Ou faut-il le voir comme la réciproque (dans \mathbf{R}^*) de l'image $\sin x$? La différence entre l'application réciproque et l'image réciproque est (le plus souvent) évidente, soit parce que l'application n'est pas bijective (auquel cas c'est l'image réciproque), soit elle est bijective (auquel cas il n'y aura pas de différence). Mais comment distinguer cette interprétation de la troisième? Je pense que (presque) tous les mathématiciens seront d'accord qu'il ne faut pas utiliser la notation $\sin^{-1} x$ pour désigner $1/\sin x$. Mais si on reste cohérent, il ne faut pas non plus utiliser la notation $\sin^2 x$ pour désigner $(\sin x)^2$!

Je ne suis pas le premier à faire cette remarque, car déjà le célèbre mathématicien Carl Friedrich Gauß se plaignait de cette interprétation. Le 23 septembre 1839 il écrivit à son élève et ami Heinrich Christian Schumacher (voir [GS65, lettre 657(290), pp291–293]) :

La même chose s'applique à l'écriture $\sin^2 \phi$. Je trouve que cette écriture est contraire à une quelconque analogie, car par analogie un 2 en exposant est surtout une abréviation pour la double écriture du symbole juste avant et donc $\sin^2 \phi = \sin(\sin \phi)$. L'écriture $\sin^2 \phi$ est effectivement utilisée par des personnes de renom, comme Laplace et Poisson, et est en soi écrite avec de bonnes intentions, car on veut éviter la mauvaise interprétation de lire $\sin(\phi^2)$ quand on veut dire $(\sin \phi)^2$, ce qui est possible quand on écrit simplement $\sin \phi^2$. Mais dans 1000 cas cette interprétation ne se produit pas une seule fois et donc un malentendu ne peut pas se produire, et quand ceci est potentiellement possible, il serait mieux de l'éviter en utilisant des parenthèses (comme ci-dessus), que par une écriture qui est contraire à toute analogie. Je me rappelle qu'à un moment Herschel s'est prononcé explicitement contre l'écriture $\sin^2 \phi$. Bessel, qui à ma connaissance tient à ce que l'on écrive correctement les formules, ne l'a écrit jamais ainsi.

EXERCICES

→ 6.5 Exercice.

- (i) Quelle est l'image par \exp d'une droite verticale $\{z \mid \operatorname{Re} z = a\}$? d'une droite horizontale $\{z \mid \operatorname{Im} z = b\}$? d'une bande $\{z \mid a < \operatorname{Re} z < a'\}$? d'une bande $\{z \mid b < \operatorname{Im} z < b'\}$? de la droite $\{z = t(1+i) \mid t \in \mathbf{R}\}$?
- (ii) Montrer que les fonctions $\sin, \cos : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ sont surjectives.
- (iii) Représenter dans le plan complexe les solutions de l'équation $\cos z = a$.
- (iv) Déterminer l'image par \cos des demi-bandes (avec $k \in \mathbf{Z}$) de la forme $\{z \in \mathbf{C} \mid k\pi \leq \operatorname{Re}(z) \leq (k+1)\pi, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.
- (v) Résoudre dans \mathbf{C} l'équation $7 \cos z + \sin z = 5$.
- (vi) Soit w dans \mathbf{C} . Déterminer les nombres complexes z tels que $\cos z = \cos w$. Même question avec la fonction \sin .
- (vii) Si $z = x + iy$ avec x et y réels, montrer que l'on a $|\sin z|^2 = (\sin x)^2 + (\sinh y)^2$ et $|\cos z|^2 = (\cos x)^2 + (\sinh y)^2$. En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans \mathbf{C} .
- (viii) Montrer que la fonction $f(z) = \tan z$ définie par $\tan z = \sin z / \cos z$ réalise une bijection de $T = \{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z \leq \pi/2, z \neq \pi/2\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{-i, i\}$. On pourra écrire $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ avec $f_1(z) = 2iz$, $f_2(z) = e^z$, $f_3(z) = \frac{1-z}{1+z}$, $f_4(z) = iz$.

7. Variantes de différentiabilité

Convention. Dans tout ce qui suit et sauf avis explicite du contraire, la lettre U désignera un ouvert de \mathbf{C} .

7.1 Définitions. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ une application.

- On dit que f est **\mathbf{R} -dérivable au point $a \in U$** s'il existe une matrice $A \in M(2, \mathbf{R})$ tel qu'on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{|h|} = 0 .$$

Si c'est le cas on note $(Df)(a) = A$ et on dit que A est la *différentielle de f au point a* , aussi appelé la *matrice Jacobienne* de f en a .

- On dit que f est **\mathbf{C} -dérivable au point a** ou que f est *holomorphe en a* s'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lambda .$$

Si c'est le cas on note $f'(a) = \lambda$ et on dit que $\lambda = f'(a)$ est la *dérivée (complexe) de f en a* .

- On dit que f est *holomorphe sur U* si f est \mathbf{C} -dérivable en tout point $a \in U$.
- On dit que f est *développable en série entière au voisinage de $a \in U$* s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (avec $c_n \in \mathbf{C}$) de rayon de convergence $\rho > 0$ et s'il existe $0 < r \leq \rho$ telles que $D_r(a) \subset U$ et pour tout $z \in D_r(a)$ on a l'égalité $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$.
- On dit que f est *analytique sur U* si f est développable en série entière au voisinage de tout point $a \in U$.

Définitions. Une fois qu'on dispose de la notion d'application holomorphe, on définit des noms associés à des cas spéciaux.² Si U et V sont deux ouverts de \mathbf{C} et $f : U \rightarrow V$ une application holomorphe, alors on dit que f est *biholomorphe* ou que f est un *biholomorphisme (entre U et V)* si f est bijective et que l'application réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$ est aussi holomorphe. Dans la même veine on définit un *automorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbf{C}$* comme un biholomorphisme $f : U \rightarrow U$. L'ensemble des automorphismes d'un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ est noté $\text{Aut}(U)$; c'est un groupe quand on le muni de la composition d'applications.

→ **7.2 Lemme/Définition.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application et $z \in U$. Alors f est \mathbf{C} -dérivable en z si et seulement si elle est \mathbf{R} -dérivable en z et que les dérivées partielles de sa partie réelle et imaginaire $\text{Re } f, \text{Im } f : U \rightarrow \mathbf{R}$ vérifient les équations dites de Cauchy-Riemann

$$(\partial_1 \text{Re } f)(z) = (\partial_2 \text{Im } f)(z) \quad \text{et} \quad (\partial_2 \text{Re } f)(z) = -(\partial_1 \text{Im } f)(z) .$$

Si c'est le cas avec $f'(z) = \alpha + i\beta$, alors $(Df)(z) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ (voir [4.15]!).

2. En algèbre linéaire avec la notion d'application linéaire on a les "endomorphismes," "isomorphismes," et "automorphismes," en théorie des groupes avec la notion d'homomorphisme on a les "isomorphismes" et "automorphismes," en topologie avec la notion d'application continue on a les "homéomorphismes" et en calcul différentiel avec la notion d'application différentiable on a les "difféomorphismes."

→ **7.3 Corollaire.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Alors f est \mathbf{C} -dérivable en z si et seulement si elle est \mathbf{R} -dérivable et que les dérivées partielles vérifient l'équation de Cauchy-Riemann complexe

$$(\partial_1 f)(z) = -i (\partial_2 f)(z) .$$

Si c'est le cas, alors sa dérivée (complexe) $f'(z)$ est donnée au choix par

$$f'(z) = (\partial_1 f)(z) = -i (\partial_2 f)(z) .$$

7.4 Remarque : les opérateurs/dérivées partielles ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$. Si $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction différentiable, on peut parler de ses dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$. Quand on note les deux variables de $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ par (x, y) (ou $z = x + iy$), alors on note ces dérivées partielles aussi comme

$$\partial_1 f = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \partial_2 f = \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Mais il ne faut jamais oublier que ces notations alternatives dépendent du choix des noms des variables et peuvent donc varier d'un moment à l'autre. Sachant qu'on parle d'une fonction à valeurs complexe, on peut aussi considérer des combinaisons linéaires avec coefficients complexes de ces dérivées partielles. Ainsi on définit en analyse complexe l'opérateur/dérivée partielle ∂_z par son action sur une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$(\partial_z f)(x, y) = \frac{1}{2} \left((\partial_1 f)(x, y) - i(\partial_2 f)(x, y) \right) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) .$$

Et comme pour les dérivées partielles ordinaires, il y a une notation alternative :

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} .$$

Associée à cet opérateur ∂_z est l'opérateur/dérivée partielle $\partial_{\bar{z}}$ dont la définition en termes de son action sur une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est donnée par

$$(\partial_{\bar{z}} f)(x, y) = \frac{1}{2} \left((\partial_1 f)(x, y) + i(\partial_2 f)(x, y) \right) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) .$$

Et bien évidemment il y a la notation alternative $\partial_{\bar{z}} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

On vérifie aisément que [7.2] se reformule en termes des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ comme :

$$f \text{ est } \mathbf{C}\text{-dérivable en } z = x + iy \text{ si et seulement si } (\partial_{\bar{z}} f)(z) = 0,$$

auquel cas on a l'égalité

$$f'(z) = (\partial_z f)(z) \equiv \frac{\partial f}{\partial z}(z) .$$

Attention quand même : l'opérateur ∂_z s'applique aussi quand f n'est pas \mathbf{C} -dérivable (il suffit que les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent). Et on peut recombinaison les opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ en ∂_1 et ∂_2 :

$$\partial_z + \partial_{\bar{z}} = \partial_1 \quad \text{et} \quad i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) = \partial_2 .$$

À part les coefficients complexes, on pourrait croire qu'on effectue un changement de variables dans $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$: $(x, y) \mapsto (z, \bar{z})$. Et au lieu de considérer les dérivées partielles par rapport aux variables x et y , on considère les dérivées partielles par rapport aux variables z et \bar{z} . Sauf que ni z ni \bar{z} est une coordonnée réelle sur \mathbf{R}^2 .

Cette interprétation, bien que parfois utile, est donc dangereuse. Le lecteur curieux trouvera plus de détails dans §25 et en particulier dans [25.9].

Remarque pour le lecteur curieux. Certains auteurs notent parfois l'opérateur ∂_z comme ∂ et l'opérateur $\partial_{\bar{z}}$ comme $\bar{\partial}$. Ces notations sont à éviter, car en analyse complexe les symboles ∂ et $\bar{\partial}$ sont réservés pour ce qu'on appelle les *opérateurs del et del-bar*. Ces opérateurs sont liées à la dérivée extérieure d , car pour une fonction différentiable $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ on définit les 1-formes différentielles ∂f et $\bar{\partial} f$ par

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{et} \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

On vérifie aisément qu'on a l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \text{ou encore} \quad df = \partial f + \bar{\partial} f ,$$

ce qui permet d'obtenir l'égalité $d = \partial + \bar{\partial}$.

→ **7.5 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction \mathbf{C} -dérivable en $z \in U$, alors f est continue en z .

→ **7.6 Lemme.** Soit $f, g : U \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions complexes, \mathbf{C} -dérivables en $z \in U$.

(i) $f + g$ et $f \cdot g$ sont aussi \mathbf{C} -dérivables en z avec

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad \text{et} \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) .$$

(ii) Si $g(z) \neq 0$, alors f/g est aussi \mathbf{C} -dérivable en z avec

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2} .$$

(iii) Si $V \subset \mathbf{C}$ est un ouvert tel que $f(U) \subset V$ et $k : V \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction complexe qui est \mathbf{C} -dérivable en $f(z)$, alors la composée $k \circ f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est aussi \mathbf{C} -dérivable en z avec

$$(k \circ f)'(z) = k'(f(z)) \cdot f'(z) .$$

→ **7.7 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe. Si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors f est constante.

→ **7.8 Lemme (un mélange de dérivées).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe, $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbf{C}$ une courbe dérivable et $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ l'application composée $F(t) = f(\gamma(t))$. Alors on a l'égalité

$$F'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) ,$$

une formule qui mélange la dérivée $\gamma'(t)$ au sens d'une application entre espaces vectoriels réels (ici donc une fonction d'une seule variable réelle) avec la \mathbf{C} -dérivée $f'(z)$ au sens d'une application complexe.

→ **7.9 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

(i) La 1-forme complexe $f(z) \, dz$ est fermée.

(ii) La 1-forme complexe exacte df est donnée par (voir [2.5] et [4.10])

$$df = f'(z) \, dz .$$

→ **7.10 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que f' soit continue³ et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une $C^{1/}$ -courbe. Alors on a l'égalité

$$\int_{\gamma} f'(z) \, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .$$

→ **7.11 Lemme.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors f est holomorphe sur son disque (ouvert) de convergence $D_{\rho}(0)$ avec dérivée (complexe) la série entière (de même rayon de convergence [5.13])

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} .$$

→ **7.12 Corollaire.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors f est infiniment \mathbf{C} -dérivable sur son disque de convergence $D_{\rho}(0)$ et on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in D_{\rho}(0)$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! c_n}{(n-k)!} z^{n-k} \quad \text{et en particulier} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} .$$

Remarque. On peut réécrire le résultat [7.12] sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n ,$$

ce qui a une ressemblance forte avec les polynômes de Taylor d'une fonction et certains auteurs parlent de *la série de Taylor de la fonction f* . En général le polynôme de Taylor est une approximation de la fonction et on prétend que cette approximation sera meilleure quand le degré du polynôme est plus élevé (bien qu'il faut bien préciser ce qu'on entend par une meilleure approximation). Dans cet état d'esprit le résultat [7.12] nous dit que la série de Taylor en $z = 0$ d'une fonction déterminée par une série entière est une approximation parfaite : elle reproduit la fonction f . Mais attention : si on part d'une fonction infiniment dérivable arbitraire, alors il n'y a aucune garantie que sa série de Taylor converge, et même si elle converge, ce n'est pas sûr qu'elle converge vers la fonction d'origine. Un exemple de ce phénomène est la fonction étudiée en [5.24].

Mais il y a plus surprenant. Si on se donne une suite de $n+1$ nombres complexes a_0, \dots, a_n , alors il est évident qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ (au moins) n fois

3. On montrera dans [8.5] que cette condition est superflue.

dérivable avec la propriété $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$: il suffit de prendre le polynôme de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k .$$

Ce qui est surprenant est que pour toute suite $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^∞ vérifiant $f^{(k)}(0) = a(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Car il doit être évident qu'on ne peut pas (en général) prendre la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a(k) x^k$, pour la simple raison qu'on ne sait rien sur son rayon de convergence (qui peut même être zéro). Et pourtant, de telles fonctions existent pour toute suite a .⁴ Dans [7.21] et [7.22] on donne deux façons différentes de le montrer.

EXERCICES

→ **7.13 Exercice.** Dans la preuve de [7.6] on a utilisé les faits que la somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions complexes continues est de nouveau continue. Justifier ces résultats.

→ **7.14 Exercice.** Démontrer [7.6.i] à l'aide des équations de Cauchy-Riemann. Constatier qu'une même vérification pour [7.6.ii] est assez longue.

→ **7.15 Exercice.**

- (i) Soit $f_n : z \in \mathbf{C} \mapsto z^n$ (avec $n \in \mathbf{N}$). Montrer que f_n est holomorphe et calculer f'_n .
- (ii) Montrer que $z \in \mathbf{C} \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe. À quelle condition l'application $z \mapsto az + b\bar{z} + c$ est-elle holomorphe ?
- (iii) En quels points l'application $f(z) = \bar{z}^2$ est-elle \mathbf{C} -dérivable ?
- (iv) Étudier la \mathbf{C} -dérivabilité des fonctions

$$z \mapsto |z|^2, \quad z \mapsto \operatorname{Re} z, \quad z \neq 0 \mapsto \ln |z|, \quad z \neq 1 \mapsto \frac{1+z^2}{z-1} .$$

- (v) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{|xy|}$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann en 0. Est-elle \mathbf{C} -dérivable en 0 ?
- (vi) Soit f la fonction définie sur \mathbf{C} par $f(0) = 0$ et $f(z) = \exp(-1/z^4)$ si $z \neq 0$. Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en tout point de \mathbf{C} mais n'est pas holomorphe dans \mathbf{C} .
- (vii) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de \mathbf{C} . On suppose que f est à valeurs réelles. Montrer que f est constante.
- (viii) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de \mathbf{C} . Montrer que f est constante si et seulement si $\operatorname{Re} f$ l'est si et seulement si $|f|$ l'est.

4. Ce résultat est habituellement attribué à Émile Borel [Bor95] (à ne pas confondre avec Armand Borel), mais il se trouve déjà dans une note de Giuseppe Peano dans [Gen84, Annotazione N. 67, p.XVII] (reproduit dans [Pea57, p.58]).

→ **7.16 Exercice.** Une fonction holomorphe définie par une intégrale. Soient ρ un réel strictement positif, z et w des nombres complexes tels que $|z| > \rho$ et $|w| > \rho$, et n un entier naturel.

(i) Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\left| \frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n} \right| \leq |z - w| \frac{n}{\rho^{n+1}}$$

$$\left| \frac{1}{z - w} \left(\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n} \right) - \frac{n}{z^{n+1}} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{w^k} - \frac{1}{z^k} \right) \frac{1}{z^{n-k+1}} \right| \leq |z - w| \frac{n^2}{\rho^{n+2}}.$$

Soient maintenant σ et ϕ deux fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle $I = [a, b]$. On fixe un point $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(I)$ et on pose $\rho = \frac{1}{2} \inf_{a \leq t \leq b} |\sigma(t) - z|$.

(ii) Montrer que $\rho > 0$.

(iii) Soit $g(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t) - z)^n} dt$. En remplaçant dans (i) z par $\sigma(t) - z$ et w par $\sigma(t) - z - h$ avec $|h| < \rho$, montrer que

$$\left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - n \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t) - z)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{|h|n^2}{\rho^{n+2}} \int_a^b |\phi(t)| dt.$$

En déduire que $g(z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \sigma(I)$ et que g' est donnée par

$$g'(z) = n \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t) - z)^{n+1}} dt.$$

→ **7.17 Exercice.** Dans la liste ci-dessous on vous donne une intégrale curviligne sur un chemin dans \mathbf{C} . Dans chacun des cas, dessiner le chemin, exprimer l'intégrale curviligne sous forme $\int_a^b F(t) dt$ pour une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ qu'on donne explicitement et (finalement) calculer cette intégrale (de la fonction F). Comparer cette méthode du calcul de $\int_\gamma \dots$ avec l'application de [7.10].

- (i) $\int_\gamma (z-a)^n dz$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $\gamma : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = a + R e^{it}$ un morceau cercle de centre a , parcouru dans le sens positif.
- (ii) $\int_C (z^2 + 3z) dz$ avec C (a) le cercle $|z| = 2$ du point $(2,0)$ au point $(0,2)$; (b) le segment de droite joignant les points $(2,0)$ et $(0,2)$; (c) le contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2,0)$ à $(2,2)$ et $(2,2)$ à $(0,2)$.
- (iii) $\int_\gamma (12z^2 - 4iz) dz$ avec γ l'arc de courbe $\gamma(t) = t + i(t^3 - 3t^2 + 4t - 1)$ joignant les points $(1,1)$ et $(2,3)$.
- (iv) $\int_\gamma z e^{z^2} dz$ avec γ (a) le segment de i à $i+2$; (b) l'arc de la parabole d'équation $y = (x-1)^2$ allant de i à $i+2$; (c) l'arc de la sinusoïde d'équation $y = (1 + \cos(\pi x))/2$ allant de i à $i+2$.
- (v) $I_1 = \int_\gamma z^3 dz$ et $I_2 = \int_C dz/z$ avec $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ défini par (a) $\gamma(t) = 1 + it$; (b) $\gamma(t) = 1 + it + t^2$.

→ **7.18 Exercice.** Soit $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = R e^{it}$ le demi cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens positif. Calculer $\int_\gamma e^z dz$ et comparer avec $\int_{-R}^R e^x dx$.

→ **7.19 Exercice. Intégrales de Wallis.** Calculer

$$\int_{C(0,1)} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^n dx$, puis calculer les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$ pour tout entier n pair.

→ **7.20 Exercice.**

- (i) Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} , F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin tel qu'on a $\text{image}(\gamma) \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\gamma} F(z) G'(z) dz = F(\gamma(b)) G(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) G(\gamma(a)) - \int_{\gamma} F'(z) G(z) dz .$$

- (ii) Calculer $\int_{\gamma} (z+2) e^{iz} dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + it^2/\pi^2$ joignant $(0, 0)$ à $(\pi, 1)$.

→ **7.21 Exercice. Toute série entière est une série de Taylor (à la Peano 1884).** Soit $d : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite de nombres réels arbitraire. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ vérifiant pour tout $p \in \mathbf{N}$: $f^{(p)}(0)/p! = d_p$.⁵

- (i) Soit $b \geq 0$ un réel positif, soit $n, p \in \mathbf{N}$ deux entiers et soit $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x^n}{1 + bx^2} .$$

Montrer qu'on a l'égalité

$$g^{(p)}(0) = \begin{cases} (-1)^q p! b^q & (p-n)/2 \equiv q \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que pour tout $b, x > 0$ on a la majoration

$$\forall x \in \mathbf{R} : |g^{(p)}(x)| \leq \frac{p! 2^{p+1}}{b} \cdot |2x|^{n-p-2} .$$

Indication : écrire

$$\frac{x}{1 + bx^2} = \frac{1}{2b} \cdot \left(\frac{1}{x + i/\sqrt{b}} + \frac{1}{x - i/\sqrt{b}} \right) ,$$

utiliser la formule de Leibniz et le binôme de Newton pour $(1+1)^n$.

- (ii) Soit $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite arbitraire, soit $c : \mathbf{N} \rightarrow]0, \infty[$ une suite strictement positive telle que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/c_n$ a un rayon de convergence infini et soit pour chaque $n \in \mathbf{N}$ la fonction $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g_n(x) = \frac{a_n x^n}{1 + c_n \cdot |a_n| \cdot x^2} .$$

5. On reproduit ici presque à la lettre l'argument donné par Peano [Gen84, Annotazione N. 67, p.XVII].

Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1 + c_n \cdot |a_n| \cdot x^2}$$

représente une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R} et qu'on a $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$ et pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = a_p + \sum_{q=1}^{E(p/2)} (-1)^q a_{p-2q} \cdot (c_{p-2q} \cdot |a_{p-2q}|)^q ,$$

où E désigne la partie entière.

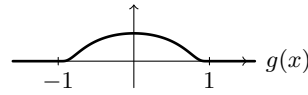
- (iii) En déduire que pour toute suite $d : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ vérifiant $f^{(p)}(0)/p! = d_p$.

→ **7.22 Exercice. Toute série entière est une série de Taylor (version “moderne”).**

Soit $d : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite de nombres réels arbitraire. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ vérifiant pour tout $p \in \mathbf{N}$: $f^{(p)}(0)/p! = d_p$.

- (i) Montrer que la fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

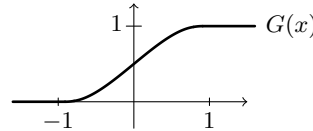
$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$



est une fonction de classe C^∞ (voir [5.24]).

- (ii) En déduire que la fonction $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par⁶

$$G(x) = \frac{1}{\int_{-1}^1 g(t) dt} \cdot \int_{-1}^x g(t) dt$$

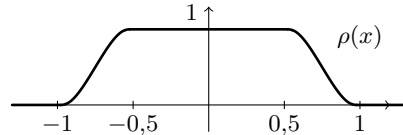


est une fonction croissante de classe C^∞ vérifiant

$$\forall x \leq -1 : G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1 : G(x) = 1 .$$

- (iii) En déduire que la fonction $\rho : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\rho(x) = G(4x + 3) \cdot G(-4x + 3)$$



est une fonction de classe C^∞ vérifiant

$$|x| \geq 1 \Rightarrow \rho(x) = 0 \quad \text{et} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \rho(x) = 1 .$$

- (iv) Soit $d : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite arbitraire. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \cdot \rho(d_n x)$$

6. Étant donné qu'il n'existe pas une expression explicite pour une primitive de g , le dessin du graphe de G et celui de ρ est basé sur le fait que l'approximation de g par son développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est remarquablement bonne sur l'intervalle $[-0,79, 0,79]$.

représente une fonction de classe C^∞ vérifiant $f^{(p)}(0)/p! = d_p$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.
Indication : montrer qu'il existe des constantes $C_p > 0$, $p \in \mathbf{N}$ telles que pour tout $p, n \in \mathbf{N}$ et tout $y \in \mathbf{R}$ on a les inégalités $0 \leq y^n \cdot \rho^{(p)}(y) \leq C_p$.

Les théorèmes fondamentaux

8. La formule de Cauchy

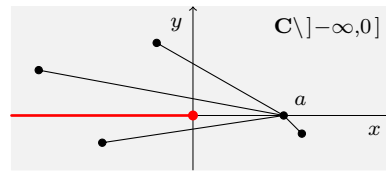
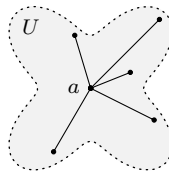
Ⓟ **8.1 Proposition.** Soit $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec F' continue, soit $w_o \in U$ et $R > 0$ tel que $D_R(w_o) \subset U$. On définit, pour $n \in \mathbf{N}$ et $0 < r < R$, les nombres $c_n \in \mathbf{C}$ par

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \equiv \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F(w_o + r e^{it}) e^{-int} dt.$$

Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Les nombres c_n ne dépendent pas de r .
- (ii) La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ a un rayon de convergence $\rho \geq R$.
- (iii) Pour tout $w \in D_r(w_o)$ on a l'égalité $F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F(z)}{z - w} dz$, appelé la formule de Cauchy
- (iv) Pour tout $w \in D_R(w_o)$ on a l'égalité $F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n$.

8.2 Définitions. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble. On dit que U est *convexe* si pour tout $x, y \in U$ le segment $[x, y]$ est inclus dans U . Et on dit que U est *étoilé par rapport à* $a \in U$ si pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est inclus dans U .



Il est immédiat que tout ensemble convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Alors on dit qu'une fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ est une *primitive holomorphe de f* si F est holomorphe avec $F' = f$.

Ⓟ **8.3 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert étoilé par rapport à $A \in U$ et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que (voir [4.14])

$$\int_{\partial \Delta_{ABC}} f(z) dz = 0$$

pour tout $B, C \in U$ tels que $\Delta ABC \subset U$. Alors la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(w) = \int_{[A,w]} f(z) \, dz$$

est une primitive holomorphe de f .

Ⓟ **8.4 Proposition (Goursat).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout triangle $\Delta ABC \subset U$ on a

$$\int_{\partial \Delta ABC} f(z) \, dz = 0 .$$

→ **8.5 Corollaire.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, alors f est analytique ; en particulier f' est holomorphe et plus généralement f est infiniment dérivable.

→ **8.6 Corollaire.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, alors f est analytique sur $D_\rho(0)$.

→ **8.7 Corollaire.** $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si f est analytique.

Ⓟ **8.8 Théorème de Cauchy.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe, $w_o \in U$, soit $R > 0$ défini par

$$R = \sup \{ r \mid D_r(w_o) \subset U \} ,$$

c'est-à-dire que R est le rayon du plus grand disque centré en w_o qui est contenu dans U , et soit finalement $0 < r < R$.

(i) Pour tout $w \in D_r(w_o)$ on a l'égalité $F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F(z)}{z - w} \, dz$.

(ii) La fonction f est analytique dans un voisinage de w_o avec rayon de convergence $\rho \geq R$. En formule : $\forall z \in D_R(w_o) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} (z - w_o)^n$.

(iii) $f^{(n)}(w_o) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} \, dz = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(w_o + r e^{it}) e^{-int} \, dt$.

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} \right|^2 \cdot r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w_o + r e^{it})|^2 \, dt$.

EXERCICES

→ **8.9 Exercice.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, soit $z_o \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(z_o, r)} \subset U$. Montrer qu'il existe $R > r$ tel que $D(z_o, R) \subset U$. En déduire que le rayon de convergence du développement de f en série entière au voisinage de z_o est strictement plus grand que r .

→ **8.10 Exercice. Existence de primitives holomorphes.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert étoilé. Montrer que toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ admet une primitive holomorphe.

→ **8.11 Exercice. Propriété de la moyenne.** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ contenant $\overline{D(a, r)}$. Montrer que $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r e^{i\theta}) d\theta$.

→ **8.12 Exercice.** Soit f une fonction entière.

(i) Supposons qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ et $C, R > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{C} : |z| > R \Rightarrow |f(z)| \leq C \cdot |z|^N.$$

Montrer que f est un polynôme de degré au plus N .

(ii) Soit $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ un polynôme. Montrer qu'on a $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-N} P(z) = a_N$.

(iii) En déduire que s'il existe un polynôme P et $C, R > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{C} : |z| > R \Rightarrow |f(z)| \leq C \cdot |P(z)|,$$

alors f est un polynôme de degré au plus $\deg(P)$.

→ **8.13 Exercice. La partie réelle d'une fonction holomorphe.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe, $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $R > 0$ tel que $\overline{D(0, R)} \subset U$.

(i) Montrer que les coefficients a_n du développement en série entière de f au voisinage de 0 (i.e., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$) vérifient pour tout entier $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\operatorname{Re} f)(R e^{i\theta})}{R^n e^{in\theta}} d\theta.$$

Que devient cette intégrale pour $n = 0$?

(ii) En déduire que si $\operatorname{Re} f$ est constante, alors f l'est aussi.

(iii) Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$ on a l'inégalité

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} \cdot \sup_{|w|=R} |(\operatorname{Re} f)(w)|.$$

En déduire que pour tout $z \in \overline{D(0, \frac{1}{2}R)}$ on a $|f(z) - f(0)| \leq 2 \sup_{|w|=R} |(\operatorname{Re} f)(w)|$.

(iv) On suppose maintenant que f est entière (c'est-à-dire $U = \mathbf{C}$). Montrer que, si $|\operatorname{Re} f|$ est bornée, alors f est constante.

9. Quelques conséquences de la formule de Cauchy

→ **9.1 Théorème de l'inversion locale holomorphe.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et soit $z_o \in U$ tel que $f'(z_o) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $z_o \in W \subset U$ et un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ tel que $f : W \rightarrow V$ est bijective et que $f^{-1} : V \rightarrow W$ est holomorphe avec $(f^{-1})'(z) = 1/f'(f^{-1}(z))$.

On connaît la notion de la multiplicité d'une racine d'un polynôme $P(z)$. Si $a \in \mathbf{C}$ est une racine de P , alors il existe un unique $k \in \mathbf{N}^*$ (avec k plus petit ou égal au degré du polynôme) et un unique polynôme $Q(z)$ de sorte qu'on a

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = (z - a)^k \cdot Q(z) .$$

On l'obtient en appliquant l'algorithme d'Euclide (k fois). Et dans ce cas on appelle ce k la *multiplicité de la racine a de P* ou *l'ordre du zéro/racine*. Sachant que toute fonction holomorphe est analytique, on peut étendre cette notion aux racines des fonctions holomorphes.

→ **9.2 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit $a \in U$. S'il existe $r > 0$ tel que f n'est pas identiquement nulle sur $D_r(a) \subset U$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbf{N}$ et une unique fonction holomorphe $g : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ de sorte qu'on a

$$g(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in D_r(a) : f(z) = (z - a)^k \cdot g(z) .$$

En particulier $f^{(k)}(a) = k! g(a) \neq 0$ et pour tout $n < k$ on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Remarque. Le résultat [9.2] n'est plus vrai pour une fonction de classe C^∞ , car il est "facile" de construire une fonction f de classe C^∞ qui n'est pas identiquement nulle dans un voisinage d'un point a , mais pour laquelle toutes les dérivées $f^{(n)}(a)$ sont nulles. On en trouve un exemple dans [5.24].

9.3 Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et soit $a \in U$ tel que $f(a) = 0$. Si f n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de a , alors on appelle *ordre du zéro a* l'unique entier $k \in \mathbf{N}^*$ déterminé dans [9.2]. Dans ce contexte, le mot *racine* est synonyme de "zéro" et le mot *multiplicité* est synonyme de "ordre".

→ **9.4 Lemme (le principe des zéros isolés, deuxième version).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec U connexe. Si f n'est pas (identiquement) nulle, alors l'ensemble $Z = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ n'a pas de point d'accumulation **dans** U .

Nota Bene. On ne peut pas insister assez, dans [9.4] et sa conséquence [9.5], sur le "détail" que le point d'accumulation doit être dans l'ouvert de définition. Sans cela le résultat ne s'applique pas ! Il suffit de penser à la fonction holomorphe $f : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) .$$

L'ensemble de ses zéros Z est donné par

$$Z = \left\{ \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbf{Z}^* \right\}.$$

Cet ensemble admet bien un point d'accumulation $a \in \mathbf{C}$, à savoir $a = 0$. Mais ce point d'accumulation n'appartient pas au domaine $U = \mathbf{C}^*$. Et, bien évidemment, cette fonction n'est pas identiquement nulle.

- Ⓟ **9.5 Corollaire (le principe du prolongement analytique).** Soit $f, g : U \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes avec U connexe. S'il existe un sous-ensemble $Z \subset U$ avec un point d'accumulation **dans** U avec la propriété

$$\forall z \in Z : f(z) = g(z),$$

alors $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in U$.

- Ⓟ **9.6 Problèmes au bord.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors il existe un point sur le cercle de convergence $z_o \in \partial D_\rho(0)$ pour lequel il n'existe pas une fonction holomorphe g définie sur un disque $D_r(z_o)$, $r > 0$ qui coïncide avec f sur l'intersection $D_\rho(0) \cap D_r(z_o)$. Autrement dit, on ne peut pas prolonger f au-delà son rayon de convergence partout.

Exemple. Le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est 1 et il est bien connu que c'est le développement en série entière au voisinage de $z = 0$ de la fonction $h(z) = \frac{1}{1-z}$. De cette expression il est clair que pour tout $z_o \neq 1$ il existe une fonction holomorphe $g(z)$ définie sur le disque $B_r(z_o)$ avec $r = |1 - z_o|$ qui coïncide avec f sur l'intersection $D_1(0) \cap D_r(z_o)$, à savoir la restriction de h à ce disque. Par contre, aucune telle fonction sur un disque centré en $z_o = 1$ n'existe. Un argument simple est que, si une telle fonction existait, la limite $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ existerait, ce qui n'est pas le cas.

Remarque. Dans la preuve de [9.6] on a utilisé le fait que deux prolongements holomorphes d'une fonction holomorphe au-delà de son domaine de définition coïncident forcément sur l'intersection de leurs domaines (étendus, avec le bémol qu'il faut que cet intersection soit connexe — c'est le principe du prolongement analytique). Ceci n'est certainement pas vrai pour des prolongements par continuité, comme on peut voir dans l'exemple suivant. On considère $f : D_1(0) \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

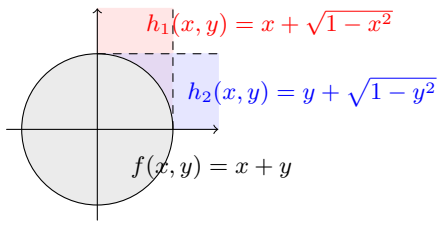
$$f(x, y) = x + y$$

et on considère deux prolongements $h_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}$ définis par

$$\begin{aligned} U_1 &= D_1(0) \cup \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ et } y > 0 \} \\ U_2 &= D_1(0) \cup \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < 1 \text{ et } x > 0 \} \end{aligned}$$

et

$$h_1(x, y) = \begin{cases} x + y & (x, y) \in D_1(0) \\ x + \sqrt{1 - x^2} & (x, y) \notin D_1(0) \end{cases}$$

$$h_2(x, y) = \begin{cases} x + y & (x, y) \in D_1(0) \\ y + \sqrt{1 - y^2} & (x, y) \notin D_1(0) \end{cases} .$$


Chaque h_i est bien un prolongement continu de f (les trois expressions coïncident pour $(x, y) \in \partial D_1(0)$), mais il est “évident” que h_1 et h_2 ne coïncident pas sur $U_1 \cap U_2 \setminus \overline{D_1(0)} \equiv]0, 1[\times]0, 1[\setminus \overline{D_1(0)}$.

→ **9.7 Théorème de Morera (première partie).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Si $\int_{\partial \Delta_{ABC}} f(z) dz = 0$ pour tout triangle fermé $\Delta_{ABC} \subset U$, alors f est holomorphe.

Ⓟ **9.8 Proposition (existence de primitives holomorphes).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive holomorphe F si et seulement si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout $C^{1/}$ -lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow U$.

Définition. Une fonction entière n’est rien d’autre qu’une fonction holomorphe $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie sur le plan complexe \mathbf{C} entier.

Ⓟ **9.9 Théorème de Liouville.** Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Si elle est bornée, alors elle est constante.

9.10 Définitions. Soit $A \subset \mathbf{C}$ un sous-ensemble non borné et $f : A \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Alors on dit que la limite de $f(z)$ quand $|z|$ tend vers l’infini vaut $\ell \in \mathbf{C}$, qu’on note $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \ell$, si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall z \in A : |z| > R \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon .$$

De la même façon, on dit que la limite de $|f(z)|$ quand $|z|$ tend vers l’infini vaut ∞ , notée $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, si elle vérifie la condition

$$\forall M > 0 \exists R > 0 \forall z \in A : |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M .$$

Remarque. Quand on dispose de la sphère de Riemann sur lequel il existe un point particulier appelé ∞ , on peut laisser tomber les valeurs absolues dans les définitions ci-dessus et écrire $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ (voir [18.1]).

Ⓟ **9.11 Théorème de d’Alembert-Gauß.** Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. Si P n’a pas de racines dans \mathbf{C} , alors il est constant.

Ⓟ **9.12 Le principe du module maximum, première version.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec U connexe. Si $|f|$ admet un maximum local en $w_o \in U$, alors f est constante.

→ **9.13 Le principe du module maximum, deuxième version.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe borné et soit $\partial U = \overline{U} \setminus U$ son bord (topologique). Soit $f : \overline{U} \rightarrow \mathbf{C}$ continue telle que sa restriction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ à U soit holomorphe. Posons

$$M = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$$

le maximum de $|f|$ sur le bord ∂U de U . Alors on a les propriétés

- (i) pour tout $z \in U : |f(z)| \leq M$ ou encore $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$ et
- (ii) s'il existe $z_o \in U$ tel que $|f(z_o)| = M$, alors f est constante.

Ⓟ **9.14 Proposition (structure locale).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe non constante avec U connexe. Alors pour tout $z_o \in U$ il existe un voisinage $V \subset U$ de z_o , $k \in \mathbf{N}^*$ et $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe tels que

- (i) $\forall z \in V : f(z) = f(z_o) + (\psi(z))^k$ et
- (ii) $\psi(z_o) = 0$ et $\psi'(z_o) \neq 0$.

Ⓟ **9.15 Théorème de l'application ouverte holomorphe.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec U connexe. Si f n'est pas constante, alors f est une application ouverte (c'est-à-dire que, pour tout ouvert $U' \subset U$, l'image $f(U')$ est un ouvert).

Ⓟ **9.16 Corollaire.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe injective. Alors pour tout $z \in U$ on a $f'(z) \neq 0$.

→ **9.17 Corollaire (théorème de l'inversion globale holomorphe).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe injective. Alors $V = f(U)$ est un ouvert et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est holomorphe. Autrement dit, $f : U \rightarrow V$ est un biholomorphisme.

Remarque. Quand on compare le théorème de l'inversion globale holomorphe avec le théorème classique de l'inversion globale dans le cas réel, il y a une différence notable : dans le cas réel on a besoin, à côté de l'injectivité, de la condition supplémentaire que la différentielle est partout inversible. Dans le cas holomorphe l'injectivité force la dérivée de f d'être non-nulle partout. On pourrait pousser la différence encore plus loin en remarquant que pour être holomorphe il suffit que la fonction soit \mathbf{C} -dérivable et que pour l'inversion (locale ou globale) dans le cas réel on a besoin aussi que la fonction soit de classe C^1 .

Dans un cadre plus large, on peut remarquer que la réciproque d'une application linéaire bijective est automatiquement linéaire, que la réciproque d'un homomorphisme de groupes (anneaux/corps) bijective est automatiquement un homomorphisme de groupes (anneaux/corps), mais que la réciproque d'une application continue bijective n'est pas nécessairement continue, que la réciproque d'une application

différentiable bijective n'est pas nécessairement différentiable et que la réciproque d'une application mesurable n'est pas nécessairement mesurable. Quant aux applications holomorphes, on voit que la réciproque d'une application holomorphe bijective est automatiquement holomorphe. De ce point de vue la notion d'holomorphie rejoint le camp de l'algèbre plutôt que le camp d'analyse.

EXERCICES

→ **9.18 Exercice.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe contenant 0 et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

- (i) Montrer qu'on ne peut pas avoir $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2^{-n}$ pour une infinité d'entiers $n \in \mathbf{N}^*$.
- (ii) Montrer que, si $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur U .

→ **9.19 Exercice.** On note, pour chaque ouvert $V \subset \mathbf{C}$ par $\mathcal{O}(V)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes $f : V \rightarrow \mathbf{C}$:

$$\mathcal{O}(V) = \{ f : V \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ holomorphe} \} .$$

Soient U un ouvert non vide de \mathbf{C} et D un disque ouvert non vide contenu dans U . On considère le morphisme de restriction $\rho : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(D), f \mapsto f|_D$.

- (i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit injectif.
- (ii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit surjectif.

→ **9.20 Exercice.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et soit $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. Muni des opérations d'addition et de multiplication (point par point) cet ensemble devient un anneau (on ne demande pas de le montrer, c'est "trivial"!).

- (i) Montrer que $\mathcal{O}(U)$ est un anneau intègre si et seulement si U est connexe.
- (ii) Soit \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de U : un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ appartient à \mathcal{C} si et seulement si V est une composante connexe de U (voir [22.8]). Montrer qu'on a l'égalité en tant qu'anneaux

$$\mathcal{O}(U) = \prod_{V \in \mathcal{C}} \mathcal{O}(V) .$$

→ **9.21 Exercice.** Soit f une fonction entière non-constante. Montrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans \mathbf{C} .

→ **9.22 Exercice.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $z \in U$. Montrer que $f'(z) \neq 0$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de z tel que la restriction $f|_V$ est injective.

→ **9.23 Exercice. Fonctions holomorphes injectives.** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert convexe U . Montrer que si $\operatorname{Re} f'$ est positive sur U , alors f est ou bien constante, ou bien injective sur U .

→ **9.24 Exercice.** Déterminer explicitement pour $a \in \mathbf{R}$: $\max_{|z| \leq 1} |z^2 + 2aiz + 1|$.

→ **9.25 Exercice. Principe du minimum.** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$. Montrer que si $|f|$ atteint un minimum local en $z_o \in U$, alors ou bien $f(z_o) = 0$, ou bien f est constante.

→ **9.26 Exercice. Lemme de Schwarz.** Soit $\mathbf{D} = D_1(0)$ le disque unité ouvert et soit $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

- (i) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$ on a $g(z) = f(z)/z$.
- (ii) Soit $r \in]0, 1[$. Montrer que pour tout $|z| \leq r$ on a $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$.
- (iii) En déduire que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbf{D}$, que (donc) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{D}$ et que f envoie \mathbf{D} dans \mathbf{D} .
- (iv) Montrer que s'il existe $z_o \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_o)| = |z_o|$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

→ **9.27 Exercice. Automorphismes de \mathbf{D} .** Soit $\mathbf{D} = D_1(0)$ le disque unité.

- (i) Soit $f \in \operatorname{Aut}(\mathbf{D})$ tel que $f(0) = 0$. Montrer que f est une rotation : il existe $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$.
- (ii) Soit $\alpha \in \mathbf{D}$. Montrer que l'application $\varphi_\alpha : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}$$

appartient à $\operatorname{Aut}(\mathbf{D})$ et qu'on a $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$.

- (iii) Soit $f \in \operatorname{Aut}(\mathbf{D})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{D}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $f(z) = e^{i\theta} \cdot \varphi_\alpha(z)$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.
- (iv) Montrer qu'une application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ fixant deux points distincts $a, b \in \mathbf{D}$ est l'identité.
- (v) Soient $a \neq b$ deux points distincts de \mathbf{D} . Montrer que toute application holomorphe de \mathbf{D} dans \mathbf{D} échangeant a et b est un automorphisme. Combien y en a-t-il ?

→ **9.28 Exercice.** Soit g une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ telles que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout $z \in U$.

→ **9.29 Exercice.** Soit $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le *demi plan de Poincaré* et soit $f : \overline{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{C}$ une application continue, bornée vérifiant les deux conditions

$$\forall z \in \mathbf{R} : |f(z)| \leq 1 \quad \text{et} \quad f|_{\mathbf{H}} \text{ holomorphe.}$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbf{H}$.

(i) Soit t un réel strictement positif. On considère la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{i + tz}.$$

Montrer qu'elle est continue sur $\overline{\mathbf{H}}$ et holomorphe sur \mathbf{H} .

(ii) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{R}$ on a $|g(z)| \leq 1$ et que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$.

(iii) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{H}$ on a $|g(z)| \leq 1$. En déduire que pour tout $z \in \mathbf{H}$ on a $|f(z)| \leq 1$.

(iv) L'hypothèse que f est bornée est-elle vraiment nécessaire ?

→ **9.30 Exercice. Principe de réflexion de Schwarz.** Soit U un ouvert connexe de \mathbf{C} symétrique par rapport à l'axe réel, c'est-à-dire invariant par conjugaison complexe. On définit les quatre ensembles $U^{\pm}, U^{\pm*} \subset U$ par

$$U^{+*} = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset U^+ = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

$$U^{-*} = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z < 0\} \subset U^- = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Soit $f : U^+ \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue qui est holomorphe sur l'ouvert $U^{+*} \subset U^+$ et à valeurs réelles sur $U^+ \cap \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $g : z \in U^- \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ définit une fonction continue sur U^- et holomorphe sur l'ouvert $U^{-*} \subset U^-$.

(ii) Justifier que la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$z \in U^+ \Rightarrow F(z) = f(z) \quad \text{et} \quad z \in U^- \Rightarrow F(z) = g(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$$

est continue sur U . En déduire que f admet un prolongement holomorphe sur U .

10. Suites, séries et intégrales de fonctions holomorphes

Dans §23 on a rassemblé quelques résultats classiques concernant la continuité et dérivabilité quand on prend des limites ou des intégrales de fonctions à valeurs dans un \mathbf{R}^q . Ces résultats sont bien évidemment applicables aux fonctions holomorphes via les équations de Cauchy-Riemann. Mais être holomorphe simplifie certains de ces énoncés, car en particulier pour la dérivabilité on n'a plus besoin d'exiger une condition sur la dérivée (pourtant essentielle dans le cas des dérivées partielles réelles). On rassemble ici ces résultats dans le cadre des fonctions holomorphes avec leurs preuves.

→ **10.1 Lemme.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{C}$ une suite de fonctions continues et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/}$ -courbe. Si la suite f_n converge uniformément sur tout compact de U , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) \, dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \, dz .$$

→ **10.2 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et soit $\overline{D_r(w)} \subset U$. Alors pour tout $k \geq 0$ on a la majoration

$$\forall z \in \overline{D_{r/2}(w)} \quad : \quad |f^{(k)}(z)| \leq \frac{k! 2^k}{r^k} \cdot \sup_{\zeta \in \overline{D_r(w)}} |f(\zeta)| .$$

Ⓟ **10.3 Holomorphie et limites.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{C}$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. Alors f est holomorphe et pour tout $k \geq 0$ la suite $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

→ **10.4 Holomorphie et séries.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{C}$ une suite de fonctions holomorphes. Si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément ou normalement sur tout compact, alors $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est une fonction holomorphe et pour tout $k \in \mathbf{N}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ converge uniformément respectivement normalement sur tout compact avec

$$(10.5) \quad S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) .$$

→ **10.6 Holomorphie et intégration.** Soit $F : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue (sur le produit) telle que pour tout $t \in [a, b]$ l'application $z \mapsto F(z, t)$ est holomorphe et que la fonction $\partial_z F : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est continue (sur le produit). Alors la fonction $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$g(z) = \int_a^b F(z, t) \, dt$$

est holomorphe avec $g'(z) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(z, t) dt$.

Remarque. Contrairement à la remarque faite dans l'introduction, on voit apparaître dans l'énoncé de [10.6] une conditions sur la dérivée d'une fonction. Mais cela est dû au fait qu'on fait la preuve sans l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue. Quand on utilise l'intégrale de Lebesgue (et surtout le théorème de convergence dominée, voir §24) dans la preuve, on n'a plus besoin de la condition sur la dérivée $\partial_z F$ et on récupère une formule pour toutes les dérivées $g^{(k)}$, voir [24.13], tout en laissant le reste de l'énoncé inchangé (et en particulier sans parler de l'intégrale de Lebesgue).

EXERCICES

→ 10.7 Exercice. Convergence uniforme sur des compacts.

(i) Montrer, pour tout $z \in \mathbf{C}$, les inégalités suivantes :

$$|e^z| \leq e^{|z|} \quad , \quad |1+z| \leq e^{|z|} \quad \text{et} \quad |e^z - 1 - z| \leq \frac{|z|^2}{2} e^{|z|} \quad .$$

(ii) Montrer que la suite

$$\left(\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right)_{n \geq 1}$$

tend vers e^z uniformément sur tout compact de \mathbf{C} . Indication : on pourra utiliser $a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k}$ et les majorations montrées dans (i).

→ 10.8 Exercice. La fonction zêta de Riemann. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on définit la fonction $f_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ par $f_n(z) = \exp(-z \ln(n))$, ce qu'on écrit le plus souvent comme $f_n(z) = \frac{1}{n^z}$.

- (i) Montrer que pour tout $a > 1$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ est normalement convergente sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geq a\}$.
- (ii) Montrer que pour tout $a > 1$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ est normalement convergente sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geq a\}$.
- (iii) Dédire de ce qui précède que la fonction $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

11. Le logarithme complexe ... est dangereux

En tant que fonction réelle, la fonction exponentielle $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ établit une bijection entre \mathbf{R} et $]0, \infty[$. La fonction réciproque existe donc et on l'appelle le *logarithme (népérien)* : $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$. Quand on voit la fonction exponentielle comme une application sur \mathbf{C} , elle n'est plus injective (donc pas bijective sur son image) et on ne peut plus parler de sa réciproque. Par contre, quand on restreint le domaine de définition de l'exponentielle à une bande $B_a \subset \mathbf{C}$ (avec $a \in \mathbf{R}$),

$$B = \{ z \in \mathbf{C} \mid a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi \} ,$$

alors il n'est pas difficile de voir que $\exp : B_a \rightarrow \mathbf{C}$ est injective et établit donc une bijection sur son image. Et on aura envie d'appeler sa réciproque le logarithme complexe. Sauf qu'il y aura une infinité dépendant de $a \in \mathbf{R}$. Vu de cet œil, il n'y aura donc pas un seul logarithme complexe, mais une infinité. Et c'est là une des origines de la difficulté du logarithme complexe. S'il n'y avait que cela, il n'y aurait pas un grand danger. Mais tous ces logarithmes complexes ont des propriétés qui ressemblent beaucoup aux propriétés bien connues du logarithme réel. Et c'est là le danger : parfois les propriétés du logarithme réel sont aussi valables pour un de ces logarithmes complexes, et parfois pas.

11.1 Définitions. • Soit $w \in \mathbf{C}^*$ un nombre complexe non nul. Alors *un argument de w* est un nombre réel t tel que $w = |w| e^{it}$. Selon [6.4] ce nombre t est unique modulo 2π .

• Soit $w \in \mathbf{C}^*$ un nombre complexe non nul. Alors *un logarithme de w* est un nombre complexe z tel que $e^z = w$. Selon [6.4.i] ce nombre z est unique modulo $2\pi i$ et selon [6.1.ix] on doit avoir $\operatorname{Re} z = \ln(|w|)$. En combinant cette définition avec la définition d'un argument, on voit que z est un logarithme de w si et seulement si $z = \ln(|w|) + it$ où t est un argument de w .

• Une *détermination continue de l'argument* est un couple (U, g) avec $U \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert et $g : U \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue vérifiant

$$\forall z \in U : z = |z| e^{ig(z)} .$$

Il est coutume de noter une telle application par “arg.” Mais que le lecteur soit bien conscient que cette dénomination seule n'a pas de sens, car il faut l'accompagner de son domaine de définition U .

• Une *détermination continue du logarithme (complexe)* est un couple (U, g) avec $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application continue vérifiant

$$\forall z \in U : \exp(g(z)) = z .$$

À noter qu'on ne dit pas que g est la réciproque de la fonction exponentielle (restreint à une partie de \mathbf{C}). À noter aussi que U ne peut pas contenir 0. Il est coutume de noter une détermination continue du logarithme par “log,” mais comme pour une détermination continue de l'argument, il ne faut jamais oublier qu'il faut aussi préciser son domaine de définition.

Ⓟ **11.2 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application.

- (i) (U, f) est une détermination continue du logarithme (complexe) si et seulement si $(U, \operatorname{Im} f)$ est une détermination continue de l'argument et si pour tout $z \in U$ on a $(\operatorname{Re} f)(z) = \ln(|z|)$ (où \ln désigne la réciproque de l'application $\exp : \mathbf{R} \rightarrow]0, \infty[$ [6.1.viii]).
- (ii) Si (U, \log) est une détermination continue du logarithme (complexe), alors \log est holomorphe et pour tout $z \in U$ on a $\log'(z) = 1/z$.

Remarque pour les comparateurs. À côté du nom “détermination continue du logarithme” on rencontre aussi le nom “détermination holomorphe du logarithme”. Selon [11.2] cela revient au même.

Ⓟ **11.3 Corollaire.** Soit $U \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert contenant un cercle $C_r(0)$ (pour un certain $r > 0$). Alors il n'existe pas une détermination continue du logarithme complexe (U, f) .

→ **11.4 Lemme.** Soit (U, \log) une détermination continue du logarithme et soient $z, w \in U$ tels que $z \cdot w \in U$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w) + 2k\pi i .$$

Nota Bene. Le danger dont on fait allusion dans le titre fait référence à ce résultat [11.4] : une détermination continue du logarithme complexe a des propriétés presque similaire au logarithme népérien en réel, mais parfois il y a des termes de la forme $2k\pi i$ qui se rajoutent.

11.5 Définition de l'argument principal. Soit $U = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ le plan complexe privé de la demi-droite réelle négative et soit $\operatorname{Arg} : U \rightarrow]-\pi, \pi[$ définie par

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) .$$

Alors (U, Arg) est appelée la *détermination principale de l'argument*. Associée à la détermination principale de l'argument est l'application $\operatorname{Log} : \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z) ,$$

appelée la *détermination principale du logarithme*. Son image est la bande horizontale d'épaisseur 2π $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

→ **11.6 Lemme.** Soit $U = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ et soit $\text{Arg} : U \rightarrow]-\pi, \pi[$ la détermination principale de l'argument. Alors (U, Arg) est une détermination continue de l'argument et l'application Log est donc une détermination continue/holomorphe du logarithme.

Définitions. • Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}^*$ une application holomorphe. Une *détermination continue de $\log(f(z))$* est un couple (V, g) avec $V \subset U$ un ouvert et $g : V \rightarrow \mathbf{C}$ une application continue telle que

$$\forall z \in V \quad : \quad e^{g(z)} = f(z) .$$

Bien qu'on note souvent une telle application par $\log(f(z))$, cette écriture n'a pas de sens en soi ; il faut toujours préciser la façon dont on la définit et son domaine de définition. Une détermination continue du logarithme est le cas particulier avec la fonction $f(z) = z$.

• Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors une *détermination continue de la racine n -ième de f* , notée $\sqrt[n]{f(z)}$ est un couple (V, g) avec $V \subset U$ un ouvert et $g : V \rightarrow \mathbf{C}$ une application continue vérifiant

$$\forall z \in V : (g(z))^n = f(z) .$$

Comme pour une détermination continue de $\log(f(z))$, la notation $\sqrt[n]{f(z)}$ est suggestive, mais n'a pas de sens en soi sans la prescription explicite comment on la définit.

Remarque. Dans la littérature on trouve aussi le nom *branche continue* pour "détermination continue."

Ⓟ **11.7 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}^*$ une application holomorphe (ne s'annulant pas).

(i) Toute détermination continue de $\log(f(z))$ et de $\sqrt[n]{f(z)}$ est holomorphe avec (notation horrible !)

$$\left(\log(f(z)) \right)' = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[n]{f(z)} \right)' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{f(z)}}{f(z)} \cdot f'(z) .$$

(ii) Si (V, g) est une détermination continue de $\log(f(z))$, alors l'application $h : V \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{n} g(z)\right)$$

est une détermination continue de $\sqrt[n]{f(z)}$.

11.8 Définition. Pour définir l'application $z \mapsto z^\alpha$ pour un $\alpha \in \mathbf{C}$ quelconque, il faut prendre ses précautions. Une telle application ne peut être définie que par l'intermédiaire d'une détermination continue du logarithme. Si $\log : U \rightarrow \mathbf{C}$ est une détermination continue du logarithme, on peut lui associer l'application $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(z) = e^{\alpha \log(z)} .$$

L'application f est appelée *une détermination continue de z^α* . Comme pour les autres déterminations continues, il ne faut jamais oublier que la notation z^α n'a pas de sens en soi et qu'il faut toujours préciser comment on la définit.

Remarque. Pour $\alpha \in \mathbf{Z}$ on retrouve la définition usuelle de z^α : si $\mathbf{Z} \ni \alpha \geq 0$, toute détermination continue de z^α est le produit de α facteurs z ; et si $\mathbf{Z} \ni \alpha < 0$, toute détermination continue de z^α est égale à 1 divisé par le produit de $-\alpha$ facteurs z . Par exemple pour $\alpha = -3$:

$$z^{-3} \stackrel{\text{déf.}}{=} z^{-3} e^{-3 \log(z)} = \frac{1}{e^{\log(z)+\log(z)+\log(z)}} = \frac{1}{e^{\log(z)} \cdot e^{\log(z)} \cdot e^{\log(z)}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{z \cdot z \cdot z} .$$

Avertissement. Étant donné qu'une puissance $z \mapsto z^\alpha$ pour $\alpha \notin \mathbf{Z}$ est définie à l'aide d'une détermination du logarithme complexe, le même danger est présent dans la manipulations d'une telle puissance que pour la manipulation du logarithme [11.4]. En particulier il n'est pas du tout garanti qu'on a l'égalité $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$. Selon [11.4], ce qu'on peut dire d'une façon positive est qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que (si z, w et zw appartiennent au domaine de définition de la détermination continue du logarithme utilisée pour la puissance α)

$$(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha e^{2k\pi i \alpha} .$$

Quand on oublie ce facteur, on peut faire des calculs qui mènent à des résultats contradictoire :

$$i = (-1)^{1/2} \equiv \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad i^2 = 1 .$$

La racine n -ième étant le cas particulier $\alpha = 1/n$, cet avertissement est “donc,” mutatis mutandis, valable pour une détermination continue de la racine n -ième d'une fonction holomorphe.

EXERCICES

→ **11.9 Exercice.** Calculer la différentielle (réelle) de la détermination principale de l'argument $\text{Arg} : \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R}$ de deux façons différentes : directe et via la détermination principale du logarithme.

→ **11.10 Exercice.** Soit $\text{Log} : \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{C}$ la détermination principale du logarithme et soit $\theta \in \mathbf{R}$ fixe. Montrer que l'application f_θ définie par

$$f_\theta(z) = \text{Log}(z e^{-i\theta}) + i\theta$$

est une détermination continue du logarithme. Déterminer son domaine de définition et son image.

→ **11.11 Exercice.** Soit Log la détermination principale du logarithme.

- (i) Trouver un couple $z, w \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ pour lequel on n'a pas l'égalité

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) .$$

- (ii) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ on a l'égalité

$$\operatorname{Log}(1/z) = -\operatorname{Log}(z) .$$

- (iii) Soit $\theta \in \mathbf{R}^*$. Trouver un z tel que on n'a pas l'égalité $f_\theta(1/z) = -f_\theta(z)$ pour la détermination continue du logarithme f_θ donnée dans [11.10].

→ **11.12 Exercice.** Pour chaque $\theta \in \mathbf{R}$ qui n'est pas de la forme $\theta = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$ (expliquer pourquoi on enlève ces valeurs) déterminer le développement en série entière de la fonction f_θ [11.10] au voisinage de $z = 1$. En déduire que la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ de rayon de convergence $\rho = 1$ est une détermination continue du logarithme de la fonction holomorphe $1/(1-z)$ et qu'elle est donnée sur son disque de convergence par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-z) .$$

→ **11.13 Exercice.** Résoudre les équations $e^z = -3$, $\cos z = 2$, $\sin z = 2$, $\tan z = 2i$, $\cosh z = \frac{1}{2}$ de deux façons différentes : en identifiant les parties réelles et imaginaires et en utilisant le logarithme.

→ **11.14 Exercice. Convergence uniforme sur des compacts, suite de [10.7].**

- (i) Montrer, pour tout $z \in \mathbf{C}$, l'inégalité $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$.
- (ii) Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact, f une fonction continue sur K et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur K convergeant uniformément vers f sur K . Montrer que $(\exp f_n)_{n \geq 1}$ tend vers $\exp f$ uniformément sur K (on pourra appliquer la deuxième inégalité dans (i) à $f_n(z) - f(z)$).
- (iii) En utilisant le développement en série entière de la fonction Log au voisinage de $z = 1$, montrer que pour tout $0 < |z| \leq r < 1$ on a la majoration

$$|\operatorname{Log}(z-1) - z| \leq \frac{|z|^2}{2(1-r)} .$$

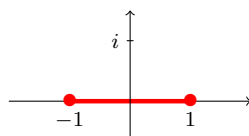
- (iv) Dédurre des questions précédentes une autre preuve que la suite

$$\left(\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right)_{n \geq 1}$$

tend vers e^z uniformément sur tout compact de \mathbf{C} .

→ **11.15 Exercice.** En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions $z \mapsto z^{1/2}$, $z \mapsto (1-z)^{1/3}$, $z \mapsto ((1-2i)z)^{2i/5}$. Donner leur domaine de définition.

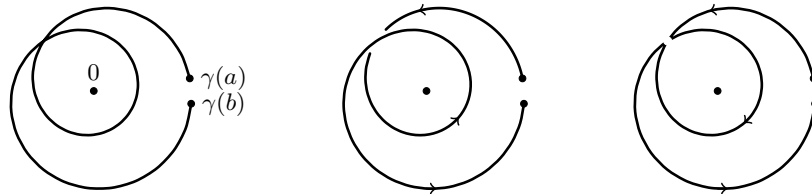
→ **11.16 Exercice.** Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une détermination holomorphe f de $\sqrt{1-z^2}$ sur $U = \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ telle que $f(i) = \sqrt{2}$.



- (i) Définir f sur $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 1]$ au moyen des fonctions $\text{Log}(z+1)$ et $\text{Log}(z-1)$, où Log désigne la détermination principale du logarithme.
- (ii) Soit x un réel strictement inférieur à 1. Étudier $\lim_{y \rightarrow 0} f(x+iy)$ quand y tend vers 0 par valeurs positives puis négatives.
- (iii) Définir f sur $\mathbf{C} \setminus [-1, \infty[$ au moyen des fonctions $\log(z+1)$ et $\log(z-1)$, où $\log = f_\pi$ [11.10] est la détermination non-principale du logarithme avec $\text{Im}(\log) : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ \rightarrow]0, 2\pi[$.
- (iv) Montrer que les deux définition de f coïncident en $z = \pm i$ et conclure.
- (v) Montrer qu'on obtient ainsi une application f telle que $f(U) \subset U$ et $f \circ f = -\text{Id}_U$. En déduire que f est une bijection de U sur lui-même.
- (vi) Montrer de la même manière qu'il existe une détermination holomorphe g de $\sqrt{1-z^2}$ sur $V = \mathbf{C} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geq 1\}$ vérifiant $g(i) = \sqrt{2}$. Comparer f et g .

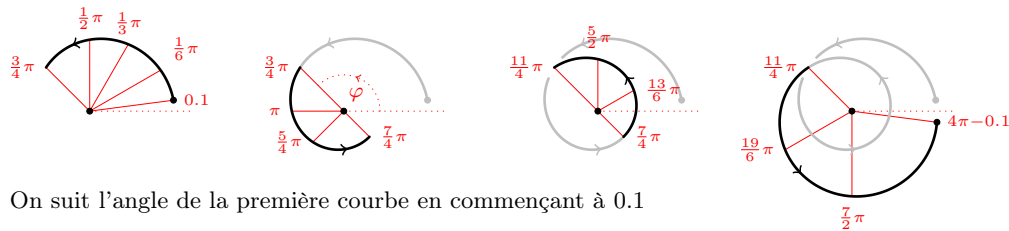
12. L'indice et la formule de Cauchy généralisée

Si $z \in \mathbf{C}^*$ est un nombre complexe non nul, on peut l'écrire presque de façon unique sous la forme $z = r e^{i\varphi}$, presque, car bien que $r = |z|$ est unique, l'angle $\theta \in \mathbf{R}$ n'est unique qu'à un multiple de 2π près. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}^*$ est une application à valeurs dans \mathbf{C}^* , il existe pour tout $t \in [a, b]$ un angle $\varphi(t) \in \mathbf{R}$ tel que $\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\varphi(t)}$. De nouveau, cet angle $\varphi(t)$ n'est pas unique, pour aucune valeur de $t \in [a, b]$. La question qu'on veut poser est de savoir si on peut faire un choix pour cette application $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ de façon continue quand γ est continue. Si γ prend ses valeurs dans le domaine de définition de l'argument principal Arg [11.5], la réponse est certainement affirmative : il suffit de prendre $\varphi(t) = \text{Arg}(\gamma(t))$. De la même façon, si (U, \arg) est une branche continue de l'argument [11.1] et si γ prend ses valeurs dans U , de nouveau la réponse est affirmative en prenant $\varphi(t) = \arg(\gamma(t))$. Mais s'il n'existe pas une détermination continue de l'argument (U, \arg) telle que γ prend ses valeurs dans U ? Est ce que la réponse reste affirmative? Il suffit de regarder quelques exemples pour se convaincre que la réponse doit être affirmative : quand on suit la courbe continue on peut attribuer un argument de façon continue aux points. Regardons deux exemples et suivons la progression de la courbe.



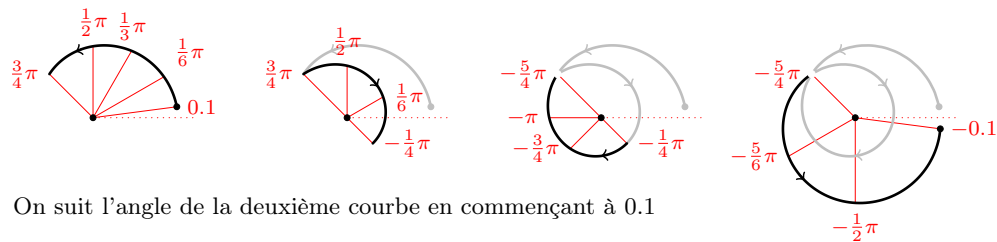
Deux courbes $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ avec le même image

Quand on attribue la valeur 0.1 à l'argument de $\gamma(a)$ (un choix arbitraire module 2π) on obtient la suite des arguments/angles



On suit l'angle de la première courbe en commençant à 0.1

Et quand on fait la même chose pour la deuxième courbe, on ne trouve pas les mêmes valeurs que pour la première courbe, malgré le fait que leurs images sont identiques.



On suit l'angle de la deuxième courbe en commençant à 0.1

En regardant ces deux exemples, on sera facilement convaincu de deux choses : d'abord que oui, il est possible d'attribuer un argument/angle $\varphi(t)$ de façon continue aux points $\gamma(t)$. Et deuxièmement qu'il est nécessaire de suivre la courbe dès le début

et qu'on ne peut pas attribuer de tels arguments localement en espérant qu'on peut recoller ces morceaux de façon continue. Le résultat précis est donné dans [12.1].

Ⓟ **12.1 Proposition.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}^*$ une courbe continue.

(i) Il existe une application continue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$(12.2) \quad \forall t \in [a, b] : \gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} .$$

(ii) Si $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions continues vérifiant (12.2), alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + 2k\pi$ pour tout $t \in [a, b]$.

(iii) Si φ vérifie (12.2) et si γ est de classe C^k ou de classe $C^{k/}$, $k \geq 1$, alors φ le sera également.

(iv) Si γ est de classe $C^{1/}$ et si $\varphi_a \in \mathbf{R}$ est un argument de $\gamma(a)$, alors l'application $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \varphi_a + \operatorname{Im} \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$$

vérifie (12.2).

Notation. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une courbe. Alors on notera le complémentaire de son image par $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$:

$$\mathbf{C}^{\setminus \gamma} = \mathbf{C} \setminus \gamma([a, b]) .$$

Si γ est (au moins) continue, $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ sera un ouvert. Le but de cette notation est de raccourcir l'écriture et de faciliter la lecture.

→ **12.3 Proposition.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un lacet continue et soit $w \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma}$.

(i) Il existe un unique entier m tel que pour toute fonction continue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall t \in [a, b] : \gamma(t) - w = |\gamma(t) - w| \cdot e^{i\varphi(t)} ,$$

on a l'égalité $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi m$.

(ii) Si γ est de classe $C^{1/}$ on a $m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}$.

12.4 Définition. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un $C^{1/}$ -lacet et $w \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma}$. Alors l'entier m défini dans [12.3] est appelé l'indice de w par rapport au lacet γ et est noté par $m = \operatorname{Ind}_{\gamma}(w)$. On obtient ainsi une application $\operatorname{Ind}_{\gamma} : \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \rightarrow \mathbf{Z}$.

Une interprétation de l'indice. Quand on regarde les deux exemples donnés ci-dessus, il n'est pas difficile de se convaincre que l'indice d'un lacet par rapport à un point (l'origine dans ces exemples) donne le nombre de fois que la courbe γ tourne autour de ce point. Pour la première courbe on tourne (presque) deux fois autour l'origine ($\varphi(b) - \varphi(a) \approx 4\pi - 0$, donc $m = 2$), tandis que pour la deuxième courbe on fait des aller-retours : on tourne d'abord presque un demi tour autour de l'origine, ensuite on fait un tour complet dans l'autre sens, pour terminer avec un demi tour

(et un petit peu plus) pour revenir. En fin de compte on n'a donc pas vraiment tourné autour de l'origine ($\varphi(b) - \varphi(a) \approx 0 - 0$, donc $m = 0$). En anglais l'indice comporte le nom plus suggestif de “*winding number*.” La notion d'indice joue un rôle important en analyse complexe, mais aussi dans beaucoup d'autres domaines de mathématiques, voir [Roe15].

Remarque pour les comparateurs. En analyse complexe on n'a pas tellement besoin de la fonction continue φ associée à une courbe continue γ selon (12.2), seulement de l'indice d'un point w par rapport à un $C^{1/}$ -lacet γ . La plupart des auteurs se contentent donc d'établir le résultat que pour un $C^{1/}$ -lacet γ l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w}$ est un entier. J'ai quand même opté pour l'introduction de cette fonction continue φ pour placer la notion d'indice dans un contexte plus large et parce que je pense que cela contribue à une meilleure compréhension de cette notion.

Définition/Notation. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une $C^{1/}$ -lacet. Alors on définit l'ensemble $K_{\gamma} \subset \mathbf{C}$ par

$$K_{\gamma} = \gamma([a, b]) \cup \{z \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \mid \text{Ind}_{\gamma}(z) \neq 0\} \equiv \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \mid \text{Ind}_{\gamma}(z) = 0\}.$$

Ⓟ **12.5 Proposition.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un $C^{1/}$ -lacet.

- (i) $\text{Ind}_{\gamma} : \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \rightarrow \mathbf{Z}$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$.
- (ii) L'ensemble K_{γ} est compact.
- (iii) $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ contient exactement une composante connexe non bornée (sur laquelle l'indice est nécessairement nulle).

En ce qui concerne la théorie, il suffit d'avoir la définition de l'indice (d'un point par rapport à une courbe), mais dans la pratique on aura besoin de déterminer explicitement l'indice sur chaque composante connexe de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ pour une courbe γ donnée. Dans [4.13] on a défini ce qu'on entend par le côté gauche ou droite d'une $C^{1/}$ -courbe régulière, mais sans avoir montré que la définition s'applique vraiment. Dans [12.8] on montrera qu'on peut effectivement distinguer le côté gauche du côté droit d'une $C^{1/}$ -courbe arbitraire, mais “seulement” dans les points $\gamma(t)$ qui ne sont pas des points multiples et où $\gamma'(t)$ ne s'annule pas. Et on montrera aussi que passer du côté droit vers le côté gauche augmente l'indice de 1, ce qui a comme corollaire que le côté gauche appartient à une autre composante connexe que le côté droit. Avec ce résultat on peut déterminer l'indice de tous les composantes connexes de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ par une sorte de récurrence : on suit un chemin (imaginaire) partant loin de la courbe (pour être dans la composante connexe non-bornée où l'indice vaut 0) pour aller vers la composante connexe en question en traversant plusieurs fois la courbe. En comptant combien de fois on traverse dans un sens et combien de fois on traverse dans l'autre, on saura l'indice.

Nota Bene. On peut bien-sûr se poser la question si la contrainte $\gamma'(t) \neq 0$ n'empêchera pas la méthode d'être applicable. Mais pour une $C^{1/}$ -courbe γ , sur chaque

intervalle sur lequel γ' est continue, si $\gamma' = 0$ sur tout l'intervalle, alors γ sera constante et ne contribuera pas à la “frontière” que constitue l'image $\gamma([a, b])$. Sur chaque morceau de la frontière il doit donc y avoir certainement des points avec $\gamma'(t) \neq 0$.

Ceci dit, il faut quand même faire attention avec ce genre de raisonnement. Pour une $C^{1/}$ -courbe régulière il n'y a pas de problèmes, mais si γ n'est pas régulière, on ne maîtrise pas bien l'ensemble des points avec $\gamma'(t) = 0$. Pour une courbe de classe $C^{1/}$ on peut montrer (ce n'est pas trop difficile avec le théorème des accroissements finis) que sur un morceau de la frontière (des points de la courbe donc) entre deux composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus \gamma$ il y a forcément des points avec $\gamma'(t) \neq 0$. Mais il existe des fonctions avec des propriétés contre-intuitives. Par exemple la fonction qu'on appelle *l'escalier du diable* est une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bijective, croissante, continue et dérivable sur un ensemble de mesure de Lebesgue 1 (autrement dit, presque partout) et dans ces points la dérivée est nulle. Et si la dérivée est presque partout nulle, on a l'impression que la fonction doit être constante, ce qui n'est pas le cas.

→ **12.6 Lemme préparatoire.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une $C^{1/}$ -courbe et $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Alors pour tout $w \in \mathbf{C} \setminus \gamma$ on a l'égalité

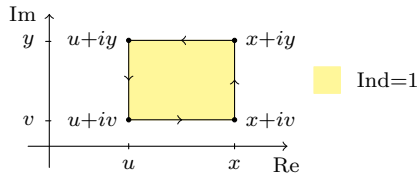
$$\text{Ind}_\gamma(w) = \text{Ind}_{\lambda\gamma}(\lambda w) ,$$

où $\lambda\gamma$ désigne la $C^{1/}$ -courbe définie comme $t \mapsto \lambda \cdot \gamma(t)$.

Ⓟ **12.7 Lemme préparatoire.** Soit $R = [u, x] \times [v, y] \subset \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ un rectangle fermé et soit $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbf{C}$ le C^∞ -lacet qui décrit le bord ∂R de R parcouru dans le sens positif (voir [4.13]) :

$$\gamma = [u + iv, x + iv] \cdot [x + iv, x + iy] \cdot [x + iy, u + iy] \cdot [u + iy, u + iv] .$$

Alors pour tout $a \in \overset{\circ}{R}$ on a $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$ et pour tout $a \notin R$ on a (nécessairement) $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$.

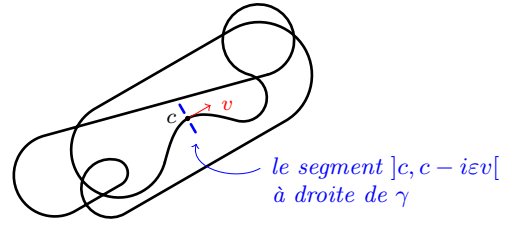


12.8 Proposition : l'indice augmente de 1 quand on traverse la courbe

Ⓟ **du côté droit vers le côté gauche.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un $C^{1/}$ -lacet et soit $t_o \in]a, b[$ tel que $c = \gamma(t_o)$ n'est pas un point multiple : pour tout $t \neq t_o$ on a $\gamma(t) \neq \gamma(t_o)$ et tel que $v = \gamma'(t_o) \neq 0$ (ce qui présuppose que γ est dérivable dans un

voisinage ouvert de t_o). Alors il existe $\varepsilon > 0$ avec la propriété (voir [4.13])

$$\forall 0 < r < \varepsilon : c \pm irv \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma}.$$



En plus, pour tout $0 < r, s < \varepsilon$ on a l'égalité

$$\text{Ind}_\gamma(c + irv) = \text{Ind}_\gamma(c - isv) + 1.$$

Autrement dit, l'indice (par rapport à la courbe γ) des points de la composante connexe de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ qui contient le segment ouvert $]c, c + i\varepsilon v[$ (le côté gauche de la courbe au point c) est 1 de plus que l'indice des points de la composante connexe qui contient le segment ouvert $]c, c - i\varepsilon v[$ (le côté droit).

→ **12.9 Corollaire (indice et sens de parcours d'un bord).** Soit $O \subset \mathbf{C}$ un ouvert borné tel que son bord ∂O est l'image d'un $C^{1/1}$ -lacet simplement fermé $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ [4.12]. Alors Ind_γ vaut +1 sur O si γ est orientée dans le sens positif [4.13] et Ind_γ vaut -1 sur O si elle est orientée dans le sens négatif.

Ⓟ **12.10 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit $Q : U \times U \rightarrow \mathbf{C}$ l'application définie par

$$Q(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z. \end{cases}$$

Alors Q est continue et pour tout $z \in U$ fixé, l'application $w \mapsto Q(w, z)$ est holomorphe sur U .

Nota Bene. Dans le résultat suivant on aura une $C^{1/1}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ qui doit vérifier la condition $K_\gamma \subset U$. Cette condition n'est pas automatiquement satisfaite, comme le montre les exemples suivantes, où on voit que l'ensemble des points avec indice zéro peuvent être "un peu partout."

Ⓟ **12.11 Proposition (la formule de Cauchy généralisée).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une $C^{1/1}$ -courbe telle que $K_\gamma \subset U$. Alors on a les propriétés

$$\int_\gamma f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \forall w \in U \setminus \gamma([a, b]) : \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dz = f(w) \cdot \text{Ind}_\gamma(w).$$

→ **12.12 Corollaire (théorème de Morera complet).** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors f est holomorphe si et seulement si

$$\int_{\partial \Delta_{ABC}} f(z) dz = 0$$

pour tout triangle fermé $\Delta ABC \subset U$.

EXERCICES

→ **12.13 Exercice.** Soit $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ deux lacets ne passant pas par 0 et soit $\gamma_p(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$ le “lacet produit.” Montrer qu’on a l’égalité

$$\text{Ind}_{\gamma_p}(0) = \text{Ind}_{\gamma_1}(0) + \text{Ind}_{\gamma_2}(0) .$$

Montrer également que pour le “lacet quotient” $\gamma_q(t) = \gamma_1(t)/\gamma_2(t)$ on a l’égalité $\text{Ind}_{\gamma_q}(0) = \text{Ind}_{\gamma_1}(0) - \text{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

→ **12.14 Exercice. Suite de [12.13].** Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ deux lacets et soit $z \in \mathbf{C}$ tel que

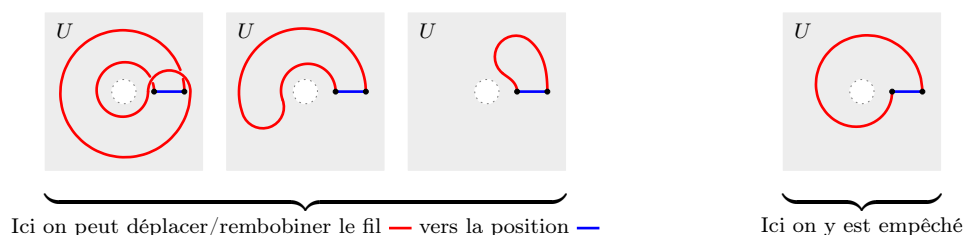
$$\forall t \in [0, 1] \quad : \quad |\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |z - \gamma_0(t)| .$$

Montrer que $\text{Ind}_{\gamma_0}(z)$ et $\text{Ind}_{\gamma_1}(z)$ existent et sont égaux.

13. Homotopie et ouverts simplement connexes

La notion d'homotopie ou de chemins homotopes est fondamental en topologie algébrique, mais aussi dans beaucoup d'autres domaines et en particulier en analyse complexe. L'image qu'il faut avoir en tête pour bien comprendre cette notion, est l'image d'un fil posé sur une table dont on a fixé les deux extrémités. Ou (encore mieux !) le cordon électrique qui relie l'aspirateur à une prise électrique. L'intérêt est que l'intégrale d'une 1-forme $f(z) dz$ sur une courbe avec f holomorphe ne change pas quand on remplace la courbe par une courbe homotope.

Si on garde l'image du fil électrique entre l'aspirateur et la prise, on s'imagine qu'on est en train de passer l'aspirateur et qu'à un moment ce fil est bloqué. On doit donc déplacer le fil pour pouvoir continuer son travail. Pendant qu'on déplace ce fil, ni l'aspirateur ni la prise électrique bougent, seulement le fil entre les deux. Et non seulement peut-on déplacer le fil, on peut aussi dérouler ou enrouler le fil (dans la limite de la longueur maximale du fil, ce qui dépend de l'aspirateur). Mais si, malheureusement, on a contourné une table, il faut (re)faire le tour de la table (ou la soulever, solution qu'on ignore ici). Et c'est cela l'idée d'une homotopie : on dit que la position initiale du fil (une courbe !) est homotope à la position finale dans la pièce ou on passe l'aspirateur si on peut faire ce déplacement (le déblocage) sans bouger l'aspirateur et sans débrancher et rebrancher le fil sur la prise. Sinon on dit que ces deux courbes ne sont pas homotope (dans la pièce).¹ La définition officielle formalise cette idée.



13.1 Définition d'homotopie. • Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\delta : [c, d] \rightarrow U$ deux courbes continues. On dit que γ est homotope à δ dans U s'il existe une application continue $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\forall t \in [0, 1]$ on a les égalités

$$\Gamma(0, t) = \gamma(a + t(b - a)) \quad \text{et} \quad \Gamma(1, t) = \delta(c + t(d - c)) ,$$

(ii) les deux courbes $s \mapsto \Gamma(s, 0)$ et $s \mapsto \Gamma(s, 1)$ définies sur $[0, 1]$ sont constantes.

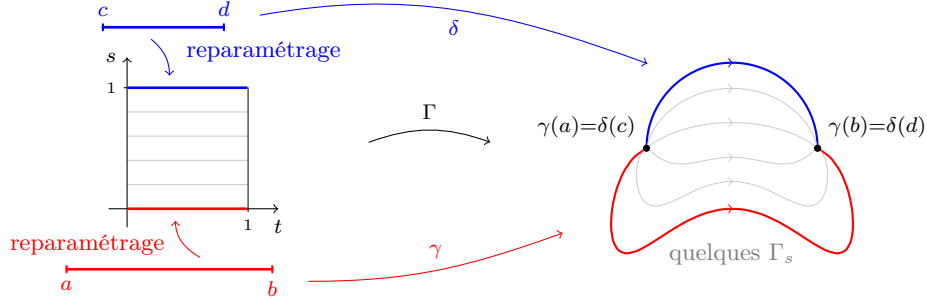
Dans ce contexte l'application Γ est appelée *l'homotopie entre γ et δ* . Il est souvent "utile" de noter l'élément $\Gamma(s, t)$ comme $\Gamma_s(t)$ et de parler de la courbe (continue) $\Gamma_s : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ définie comme $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$. Avec cette notation, la première condition dit que Γ_0 est équivalent (par un reparamétrage direct linéaire) à γ et que Γ_1 est équivalent (par un reparamétrage direct linéaire) à δ . Et la deuxième condition

1. Attention quand même à ne pas vouloir pousser l'analogie trop loin, car une homotopie mathématique autorise les auto-intersections. Cela évite (à ce niveau) le problème des nœuds. Il ne faut donc pas prendre trop au sérieux les croisements qu'on voit dans le dessin.

dit qu'on doit avoir les égalités (pour tout $s \in [0, 1]$)

$$\gamma(a) = \Gamma_s(0) = \delta(c) \quad \text{et} \quad \gamma(b) = \Gamma_s(1) = \delta(d) ,$$

Autrement dit, les courbes γ , δ et Γ_s ont toutes les mêmes points de départ et d'arrivée. En particulier les courbes γ et δ ne peuvent être homotopes dans U que si elles ont les mêmes points de départ et d'arrivée.



• Si une courbe continue $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est homotope à une courbe constante $\delta : [c, d] \rightarrow U$, on simplifie la phrase en disant que γ est *homotope à un point*. C'est l'abus de langage standard pour confondre la courbe δ avec son image $\delta([c, d])$ qui dans ce cas est bien un point.

Ⓟ **13.2 Proposition (être homotope dans U est une relation d'équivalence).** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $\delta : [c, d] \rightarrow U$ et $\varepsilon : [e, f] \rightarrow U$ trois courbes continues.

- (i) γ est homotope à γ dans U .
- (ii) Si γ est homotope à δ dans U , alors δ est homotope à γ dans U .
- (iii) Si γ est homotope à δ dans U et δ est homotope à ε dans U , alors γ est homotope à ε dans U .

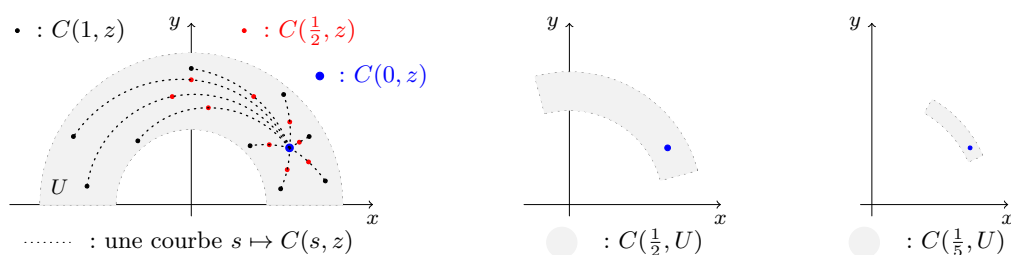
Ⓟ **13.3 Lemme (l'homotopie est préservée sous concaténation).** Soient $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1$ et δ_2 quatre courbes continues à valeurs dans U . Si γ_1 est homotope dans U à γ_2 , si δ_1 est homotope dans U à δ_2 et si la concaténation $\gamma_1 \cdot \delta_1$ existe, alors la concaténation $\gamma_2 \cdot \delta_2$ existe et est homotope dans U à $\gamma_1 \cdot \delta_1$.

13.4 Définitions (la suite de [8.2]). Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble. On dit que U est *contractile* s'il existe une application continue $C : [0, 1] \times U \rightarrow U$, appelée une *contraction*, vérifiant les deux conditions

- (i) $\forall z \in U : C(1, z) = z$ et
- (ii) $\forall z, w \in U : C(0, z) = C(0, w)$.

Autrement dit, l'application $z \mapsto C(1, z)$ est l'identité et $z \mapsto C(0, z)$ est une application constante. Et toute courbe (continue) $t \mapsto C(t, z)$ est un chemin continu

dans U qui mène de z à un point fixe $C(0, z)$ indépendant de z .



On dit que U est *simplement connexe* si U est connexe par arcs et si tout lacet continue $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est homotope dans U à un point.

Ⓟ **13.5 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert.

- (i) Si U est convexe, il est étoilé par rapport à chaque point $a \in U$.
- (ii) Si U est étoilé par rapport à $a \in U$, alors U est contractile.
- (iii) Si U contractile, alors U est simplement connexe.

Nota Bene. Comme on peut voir dans les dessins présentées dans [8.2] et [13.4], aucune des implications dans [13.5] est une équivalence. Par exemple l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0\}$ (la réunion des deux axes) est étoilé par rapport à l'origine, mais certainement pas convexe. Ou, plus important en analyse complexe, l'ensemble $U = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \subset \mathbf{C}$ qui n'est pas convexe, mais qui est étoilé par rapport à chaque point réel $r > 0$.

• L'ensemble $\{e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ (un demi cercle) est contractile, mais pas étoilé. Ou, si on cherche un exemple qui est ouvert, l'ensemble

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 2 \text{ et } z \notin]-\infty, 0]\}.$$

C'est un ouvert contractile mais pas étoilé (par rapport à aucun de ses points). Une contraction est donnée par l'application $C : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$C(t, z) = e^{t \operatorname{Log}(z)}.$$

• Finalement (sans preuve) l'ensemble $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$ est simplement connexe mais pas contractile.

On a défini, comme est l'habitude en topologie algébrique, la notion d'homotopie entre deux courbes continues comme une application $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ qui est continue. Mais en analyse complexe on a surtout besoin de $C^{1/}$ -courbes pour qu'on puisse faire des calculs. Bien évidemment, une $C^{1/}$ -courbe est automatiquement continue, mais une homotopie continue Γ n'est pas automatiquement différentiable. On sera donc fort embêté quand on veut utiliser une homotopie dans nos calculs où on a besoin de la dérivée, en particulier quand on veut montrer que $\int_{\gamma} f(z) dz$ sur une $C^{1/}$ -courbe γ ne change pas quand on la remplace par une autre $C^{1/}$ -courbe qui est homotope (dans leur domaine). Ce résultat est fort utile quand le domaine U est simplement connexe, car l'intégrale de $f(z) dz$ sur une courbe constante (un

point) vaut zéro et donc $\int_{\gamma} f(z) dz$ vaut zéro pour tout $C^{1/}$ -lacet dans U . Se pose donc la question si on peut “améliorer” la classe de dérivabilité d’une homotopie. La réponse est positive ; dans [13.7] on donne le résultat “minimal” dont on a besoin dans ce texte, mais il est facile d’améliorer la classe de dérivabilité (par morceaux) en cas de besoin.

→ **13.6 Lemme préparatoire.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble convexe, soit $x_1, \dots, x_m \in U$ un nombre fini d’éléments de U et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$ des réels tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Alors la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ appartient aussi à U (on l’appelle une combinaison convexe des points x_1, \dots, x_m).

Ⓟ **13.7 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert.

- (i) Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est une courbe continue, alors il existe une ligne brisée (une $C^{1/\infty}$ -courbe) $\tilde{\gamma} \rightarrow U$ qui est homotope à γ dans U .
- (ii) Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\delta : [c, d] \rightarrow U$ sont deux $C^{1/}$ -courbes homotopes dans U , alors il existe une homotopie $\bar{\Gamma}$ entre γ et δ dans U pour laquelle toutes les courbes $\bar{\Gamma}_s$ sont de classe $C^{1/}$ et même un petit peu plus : il existe une subdivision $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = 1$ de $[0, 1]$ telle que la fonction $\partial_2 \bar{\Gamma}$ existe et est continue sur chaque rectangle $[0, 1] \times [\tau_{j-1}, \tau_j]$.

→ **13.8 Lemme.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe continue et définissons pour tout $p \in U$ la courbe $C_p : [c, d] \rightarrow U$ comme la courbe constante $C_p(t) = p$.

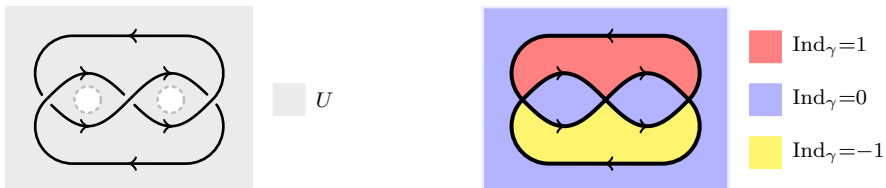
- (i) $\gamma \cdot \overleftarrow{\gamma}$ est homotope à $C_{\gamma(a)}$ dans U et $\overleftarrow{\gamma} \cdot \gamma$ est homotope à $C_{\gamma(b)}$ dans U .
- (ii) $C_{\gamma(a)} \cdot \gamma$ et $\gamma \cdot C_{\gamma(b)}$ sont homotopes à γ dans U .

Ⓟ **13.9 Proposition.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\delta : [c, d] \rightarrow U$ deux courbes continues. Alors γ et δ sont homotopes dans U si et seulement si $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ existe et est un lacet qui est homotope à un point dans U .

Ⓟ **13.10 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert.

- (i) Si U est simplement connexe, alors tout $C^{1/}$ -lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est homotope à un point dans U .
- (ii) Si un $C^{1/}$ -lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est homotope à un point dans U , alors $K_{\gamma} \subset U$.

Remarque. Pendant un petit instant j’ai pensé que toute $C^{1/}$ -courbe γ vérifiant $K_{\gamma} \subset U$ était homotope à un point dans U . Mais la courbe ci-dessous montre qu’il y a des cas avec $K_{\gamma} \subset U$, sans que γ est homotope à un point dans U .



À gauche je l'ai dessiné comme le nœud de trèfle pour mieux faire ressortir le chemin parcouru par γ , mais cela reste une courbe dans \mathbf{R}^2 qui a trois points doubles. C'est les **deux** "trous" dans U qui empêchent cette courbe d'être homotope à un point dans U . Si on supprime/bouche un des deux trous, cette courbe sera homotope à un point dans ce nouvel U .

→ **13.11 Corollaire.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors f admet une primitive holomorphe.

→ **13.12 Corollaire.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soient $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\delta : [c, d] \rightarrow U$ deux $C^{1/}$ -courbes. Si γ et δ sont homotopes dans U , alors on a l'égalité $\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\delta} f(z) \, dz$.

→ **13.13 Corollaire.** L'ouvert $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.

EXERCICES

→ **13.14 Exercice.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\delta : [c, d] \rightarrow U$ deux courbes continues dans U qui sont équivalentes par reparamétrage direct. Montrer que γ et δ sont homotope dans U .

Singularités

14. Séries de Laurent

Définitions. • Une *couronne de centre* $w \in \mathbf{C}$ est un ensemble $A(w; R_1, R_2) \subset \mathbf{C}$ avec $R_1 < R_2 \in [0, \infty]$ définie comme

$$A(w; R_1, R_2) = \{ z \in \mathbf{C} \mid R_1 < |z - w| < R_2 \} .$$

Dans le cas $R_1 = 0$ on trouve

$$A(w; 0, R_2) = \{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - w| < R_2 \} ,$$

ce qu'on appelle un *disque époinché* et qu'on note aussi comme

$$D_{R_2}(w)^* = A(w; 0, R_2) .$$

• Une *série de Laurent centrée en* $w_o \in \mathbf{C}$ est une fonction/expression de la forme

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (w - w_o)^{-n}$$

associée à deux séries entières $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ et $h(u) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ dont le deuxième n'a pas de terme constant. Formellement on peut donc écrire

$$f(w) = g(w - w_o) + h\left(\frac{1}{w - w_o}\right) .$$

Si on note ρ_g le rayon de convergence de g et ρ_h celui de h , on constate que pour $|w - w_o| < \rho_g$ la fonction $w \mapsto g(w - w_o)$ est holomorphe et que pour $1/|w - w_o| < \rho_h$ la fonction $w \mapsto 1/(w - w_o) \mapsto h(1/(w - w_o))$ est holomorphe. Autrement dit, sur la couronne $A(w_o; 1/\rho_h, \rho_g)$, appelée *la couronne de convergence de la série de Laurent* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$, l'expression $f(w) = g(w - w_o) + h(1/(w - w_o))$ représente une fonction holomorphe. À noter que cette couronne sera vide si $\rho_g \cdot \rho_h \leq 1$, où on utilise les conventions $0 \cdot \infty = 0$ (pour l'inégalité) ainsi que $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$ (pour la détermination de $1/\rho_h$).

• Soit $f : A(w_o; R_1, R_2) \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe définie sur une couronne centrée en w_o . On dit que f est *développable en série de Laurent sur la couronne* $A(w_o; R_1, R_2)$ s'il existe une série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$ centrée en w_o dont la couronne de convergence $A(w_o; r_1, r_2)$ contient la couronne $A(w_o; R_1, R_2)$ telle que pour tout $w \in A(w_o; R_1, R_2)$ on a $f(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$.

Ⓟ **14.1 Lemme.** Soit $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z - a)^n$ une série de Laurent avec couronne de convergence $A(a; r, R)$. Alors il y a convergence normale sur tout compact de $A(a; r, R)$, ce qui veut dire que pour tout compact $K \subset A(a; r, R)$ les deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n}$ convergent normalement sur K .

- Ⓟ **14.2 Proposition.** Soit $f : A(w_o; R_1, R_2) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. On définit, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $R_1 < r < R_2$, les nombres $c_n \in \mathbf{C}$ par

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \equiv \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(w_o + r e^{it}) e^{-int} dt .$$

Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Les nombres c_n ne dépendent pas de r .
(ii) Pour $w \in A(w_o; r_1, r_2)$ avec $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ on l'égalité

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{r_2}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{r_1}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz .$$

- (iii) Pour $|w - w_o| < R_2$ et $\max(R_1, |w - w_o|) < r_2 < R_2$ on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{r_2}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n .$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ est donc au moins R_2 .

- (iv) Pour $|w - w_o| > R_1$ et $R_1 < r_1 < \min(R_2, |w - w_o|)$ on a l'égalité

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{r_1}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{w - w_o} \right)^n \equiv \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (w - w_o)^n .$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ est donc au moins $1/R_1$ (avec rayon ∞ dans le cas $R_1 = 0$).

- (v) La série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$ a une couronne de convergence qui contient la couronne initiale $A(w_o; R_1, R_2)$ et coïncide avec f sur cette dernière. Autrement dit, c'est le développement en série de Laurent de f sur cette couronne.

- Ⓟ **14.3 Lemme.** Soit $f : A(w_o; R_1, R_2) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe.

- (i) Il existe deux fonctions holomorphes $g : D_{R_2}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ et $h : D_{1/R_1}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ (avec $1/0 = \infty$) telles que

$$\forall w \in A(w_o, R_1, R_2) : f(w) = g(w - w_o) + h\left(\frac{1}{w - w_o}\right) \quad \text{et} \quad h(0) = 0 .$$

- (ii) Cette décomposition est unique : si $g_1 : D_{R_2}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ et $h_1 : D_{1/R_1}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ vérifient les mêmes conditions, alors $g = g_1$ et $h = h_1$.

→ **14.4 Corollaire (unicité des coefficients d'une série de Laurent).** Soient $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n z^n$ deux séries de Laurent définies sur une même couronne $A(0; R_1, R_2)$. Si sur cette couronne on a $f(z) = g(z)$, alors on a l'égalité $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

14.5 Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On dit qu'un point $z_o \in \mathbf{C} \setminus U$ est une *singularité isolée* de f s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^*$ est contenu dans U . À noter que cela ne dépend pas de la fonction f mais seulement de son domaine U .

Si z_o est une singularité isolée de f , alors selon [14.2] il existe un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z - z_o)^n$$

valable dans une couronne qui contient le disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^*$. Selon le nombre des coefficients c_n non-nuls pour $n < 0$ on distingue trois types de singularités isolées.

- (i) Si $\{n \in \mathbf{N}^* \mid c_{-n} \neq 0\}$ est vide, on dit que la singularité (isolée) est *effaçable* ; on trouve aussi les noms *singularité apparente* ou *singularité illusoire*.
- (ii) Si $\{n \in \mathbf{N}^* \mid c_{-n} \neq 0\}$ est un ensemble fini non vide, on dit que z_o est un *pôle* de f et que f est *méromorphe* en z_o .
- (iii) Si $\{n \in \mathbf{N}^* \mid c_{-n} \neq 0\}$ est un ensemble infini, on dit que z_o est une *singularité (isolée) essentielle* de f .

Dans le cas d'un pôle on dit que l'entier $k \in \mathbf{N}^*$ défini par

$$k = \min \{n \in \mathbf{N}^* \mid a_{-n} \neq 0\}$$

est l'ordre du pôle z_o . Dans la suite doublement infinie $\dots, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots$, c'est le premier terme non-nul qui donne l'ordre du pôle (s'il y a des coefficients $c_n \neq 0$ pour $n < 0$, sinon ce n'est pas un pôle). Si $n = 1$ on parle d'un *pôle simple*, si on a $n = 2$ d'un *pôle double*, et cætera.

Ⓟ **14.6 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et z_o une singularité isolée de f .

- (i) Si la singularité est effaçable, on peut prolonger f par continuité en une fonction holomorphe (notée aussi par f , abus de notation !) sur $U \cup \{z_o\}$.
- (ii) La singularité est effaçable si et seulement si la fonction $|f|$ est bornée sur un disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^* \subset U$.

Ⓟ **14.7 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, soit $z_o \in \mathbf{C}$ une singularité isolée de f et soit $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z - z_o)^n$ le développement en série entière de f dans un disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^*$. Si on définit les ensembles $Z \subset \mathbf{N}^*$ et $L \subset \mathbf{N}$ par

$$Z = \{n \in \mathbf{N}^* \mid c_{-n} \neq 0\} \quad \text{et} \quad L = \{n \in \mathbf{N} \mid \lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{n+1} f(z) = 0\},$$

alors la classification de la singularité isolée z_o se fait de trois façons équivalente : via l'ensemble Z (la définition), via l'ensemble L , ou via le comportement de la limite $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)|$, le tout comme décrit dans le tableau ci-dessous.

type de singularité	Z	L	$\lim_{z \rightarrow z_o} f(z) $
singularité effaçable	vide	\mathbf{N}	dans $[0, \infty[$
pôle	non vide fini	$\emptyset \neq L \neq \mathbf{N}$	∞
singularité essentielle	infini	\emptyset	n'existe pas

où il faut interpréter la condition que “la limite n'existe pas” comme la négation des deux propriétés “limite finie” et “limite infinie.”

- Ⓟ **14.8 Théorème de Casorati-Weierstraß.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et z_o une singularité essentielle de f . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'image $f(D_\varepsilon(z_o)^* \cap U)$ est dense dans \mathbf{C} .

EXERCICES

- **14.9 Exercice.** Développer les fonctions suivantes en série de Laurent dans chacune des couronnes données.

- (i) $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ avec $0 < |a| < |b|$ dans $D_{|a|}(0)^*$, $A(0; |a|, |b|)$ et $|z| > |b|$;
- (ii) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$) dans $D_{|a|}(0)$ et $|z| > |a|$;
- (iii) $f(z) = \frac{1}{z(z-a)}$ dans $D_{|a|}(0)^*$ et $|z| > |a|$;
- (iv) $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans $D_1(0)$, $A(0; 1, 3)$ et $|z| > 3$.
- (v) $f(z) = \frac{z}{1+z+z^2}$ dans $D_1(0)$, $D_{\sqrt{3}}(j)^*$ et $D_{\sqrt{3}}(j^2)^*$, où $j = e^{2i\pi/3}$;
- (vi) une détermination holomorphe f de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ avec $0 < |a| = |b|$ dans $D_{|a|}(0)$ et $|z| > |b|$;
- (vii) $f(z) = ze^{1/z}$ dans \mathbf{C}^* ;
- (viii) $f(z) = \sin((z+2)^{-1})$ dans $\mathbf{C} \setminus \{-2\}$;
- (ix) $f(z) = (z+3)\sin((z+2)^{-1})$ dans $\mathbf{C} \setminus \{-2\}$;
- (x) $f(z) = \exp(z+z^{-1})$ dans \mathbf{C}^* ;
- (xi) $f(z) = \sin z \cdot \sin(z^{-1})$ dans \mathbf{C}^* ;

- **14.10 Exercice.** Déterminer la couronne de convergence des séries de Laurent suivantes : $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a^{|n|} z^n$, $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|! z^n$, $\sum_{n \in \mathbf{Z}} R(n) z^n$ (avec R une fonction rationnelle sans pôles dans \mathbf{Z}).

- **14.11 Exercice.** Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes, puis donner leur nature.

- 1) $z \mapsto \frac{1}{z(z^2+4)^2}$
- 2) $z \mapsto \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}$
- 3) $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$
- 4) $z \mapsto \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$
- 5) $z \mapsto \cotan(z) - \frac{1}{z}$
- 6) $z \mapsto \cotan\left(\frac{1}{z}\right)$
- 7) $z \mapsto \frac{1}{\sin z - \sin a}$
- 8) $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right)$
- 9) $z \mapsto \exp\left(\tan\left(\frac{1}{z}\right)\right)$

- **14.12 Exercice.** Exhiber des fonctions n'ayant dans le plan complexe que les singularités suivantes :

- (i) un pôle d'ordre 3 en 0, un pôle simple en 1 et une singularité essentielle en i et $-i$;
- (ii) une singularité essentielle en tout entier.

→ **14.13 Exercice.** Soit f une fonction entière telle que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. En étudiant $z \mapsto \frac{1}{f(1/z)}$ au voisinage de 0, montrer que f est un polynôme.

→ **14.14 Exercice. Automorphismes de \mathbf{C} .** Soit f une fonction entière injective.

- (i) Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on a l'implication $|z| \geq r \Rightarrow |f(z) - f(0)| \geq \varepsilon$.
- (ii) En étudiant la fonction $h(z) = 1/(f(1/z) - f(0))$ déduire de (i) que f est polynomiale.
- (iii) Montrer que f est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbf{C}^*$, $b \in \mathbf{C}$.

15. Fonctions méromorphes

Parmi les fonctions holomorphes avec des singularités isolées sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$, on s'intéresse en particulier à la classe des fonctions méromorphes : fonctions holomorphes sans singularités isolées essentielles. Il y a deux raisons indépendantes pour considérer cette classe en particulier : une raison géométrique et une raison algébrique. On peut dire que la raison géométrique est inspiré par [14.7] qui dit que les singularités isolées qui ne sont pas essentielles (donc des pôles) ont un comportement “gentil” par rapport à la limite $z \rightarrow z_0$. En rajoutant un point ∞ à l'ensemble \mathbf{C} (ce qui donne naissance à la sphère de Riemann), on enlève les singularités en les envoyant à ce nouveau point ∞ . C'est comme pour une singularité effaçable où on bouche la singularité avec la valeur limite. Ainsi la classe des fonctions méromorphes sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ devient la classe des fonctions holomorphes à valeurs dans la sphère de Riemann.

La raison algébrique réside dans la construction du corps des fractions associé à un anneau intègre (exactement comme on construit \mathbf{Q} à partir de \mathbf{Z}). On constate que la collection des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe est un anneau intègre (une conséquence du principe des zéros isolés, voir [9.20]), ce qui permet d'appliquer la construction abstraite du corps des fractions des fonctions holomorphes. Mais pour les fonctions holomorphes on a un quotient partout où le dénominateur ne s'annule pas. Et quand le dénominateur s'annule, le quotient aura un pôle en ce point, jamais une singularité isolée essentielle. Un quotient de deux fonctions holomorphes est donc une fonction méromorphe. Mais on peut même montrer la réciproque : toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions holomorphes.

La classe des fonctions méromorphes a donc deux interprétations différentes : comme les fonctions holomorphes à valeurs dans la sphère de Riemann (le corps des nombres complexes augmenté avec un nouvel élément ∞ ; c'est le tout début de la théorie des surfaces de Riemann) et comme le corps des fractions de fonctions holomorphes. Dans cette section on se contente de la définition “classique” d'une fonction méromorphe et quelques petites propriétés. L'aspect avec la sphère de Riemann sera traité dans §19 et pour l'aspect algébrique on renvoie le lecteur à la littérature (par exemple [Rud66, Thm 15.11]/[Rud98]).

À part ces deux raisons pour l'introduction de la classe des fonctions méromorphes il y a une troisième façon d'interpréter cette classe. Dans [9.2] on a montré que si $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe, alors (avec quelques libertés) on a la propriété

$$\begin{aligned} \forall a \in U \exists k \in \mathbf{N} \exists \chi : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C} \text{ holomorphe} : \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in D_r(a) : f(z) = (z - a)^k \chi(z) . \end{aligned}$$

Alors la classe des fonctions méromorphes sur U a cette même propriété avec l'assouplissement $k \in \mathbf{Z}$ au lieu de $k \in \mathbf{N}$. La classe des fonctions méromorphes généralise donc la notion d'ordre d'un zéro avec des valeurs négatives. Sauf que cela pose le problème qu'une telle fonction n'est plus définie au point a , ce qui explique qu'une fonction méromorphe sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ n'est pas définie sur U entier.

→ **15.1 Lemme.** Soit $V \subset \mathbf{C}$ un ouvert, soit $f : V \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et soit S_{eff} défini comme

$$S_{\text{eff}} = \{ a \in \mathbf{C} \setminus V \mid a \text{ est une singularité isolée effaçable de } f \} ,$$

alors $U = V \cup S_{\text{eff}}$ est un ouvert et on peut prolonger f par continuité en une (unique) fonction holomorphe $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbf{C}$.

Nota Bene. En général il est coutume de noter le prolongement \mathbf{f} de [15.1] par le même symbol que la fonction initiale, c'est-à-dire par f . Je ne le fais pas (dans cette section) pour bien distinguer les deux objets (mais voir aussi [15.7]).

15.2 Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Alors une fonction *méromorphe* sur U est une fonction holomorphe définie sur U privé d'un sous-ensemble S sans point d'accumulation dans U telle que aucun point de S est une singularité (isolée) essentielle de f . Attention : on dit que f est méromorphe sur U , bien que le domaine de définition de f est plus petit ! C'est avec l'introduction de la sphère de Riemann que le domaine de définition d'une fonction méromorphe sur U devient vraiment ce même U (voir [19.7]). Sans la sphère de Riemann il faut donc jongler avec des domaines de définition plus petites, y compris des domaines où il y aura des singularités isolées effaçables.

Nota Bene. Il est essentiel dans la définition d'une fonction méromorphe f sur U que l'ensemble S des points de U qu'on enlève pour obtenir le domaine de définition de f est un ensemble sans point d'accumulation dans U . Cette condition garantit que le domaine de définition $U \setminus S \subset \mathbf{C}$ de la fonction holomorphe f est bien un ouvert [22.5.iv]. Exiger seulement que S consiste de points isolés (autrement dit, que S est discret) ne suffit pas pour le garantir. Et on en a besoin, car on n'a pas défini la notion d'être \mathbf{C} -dérivable ailleurs que sur des ouverts. À noter que la condition " S discret et $U \setminus S$ ouvert" est équivalente à " S sans point d'accumulation dans U " [22.5.iv].

Ⓟ **15.3 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe, $a \in U$, f une fonction méromorphe sur U non-identiquement nulle et $V \subset U$ le domaine (ouvert) de définition de f .

- (i) Il existe $r > 0$ tel que le disque épointé $D_r(a)^*$ est contenu dans V .
- (ii) Si le disque épointé $D_r(a)^*$ est contenu dans V , alors il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ indépendant de r et une unique fonction holomorphe $\chi : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\chi(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in D_r(a)^* : f(z) = (z - a)^k \cdot \chi(z) .$$

- (iii) Soit \mathbf{f} le prolongement de f sur l'ensemble de singularités isolées effaçables S_{eff} de f [15.1]. Alors selon la valeur de k obtenu dans (ii) on aura les propriétés

suivantes :

$$\begin{aligned}
 k \geq 0 & \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ est holomorphe sur } D_r(a) \subset V \cup S_{\text{eff}} \\
 k > 0 & \Leftrightarrow a \text{ est un zéro d'ordre } k \text{ de } \mathbf{f} \\
 k = 0 & \Leftrightarrow \mathbf{f}(a) \neq 0 \\
 k < 0 & \Leftrightarrow a \text{ est un pôle d'ordre } -k \text{ de } \mathbf{f} .
 \end{aligned}$$

15.4 Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe, $a \in U$ arbitraire et f une fonction méromorphe non-identiquement nulle sur U . Alors on appelle l'unique entier $k \in \mathbf{Z}$ défini en [15.3] la *valuation de f en a* et on la note $v_a(f)$. Pour une fonction méromorphe fixée (non-identiquement nulle sur U), l'application $a \mapsto v_a(f)$ est donc une application définie sur U et à valeurs dans \mathbf{Z} .

Nota Bene. Il est essentiel dans [15.3] et [15.4] que l'ouvert U est connexe. Le problème est “toujours” le même : si U n'est pas connexe, il existe des fonctions méromorphes qui sont identiquement nulle sur une composante et qui ne le sont pas sur une autre. Il faut donc appliquer [15.3] et [15.4] sur la restriction d'une telle fonction à chaque composante connexe où elle n'est pas identiquement nulle.

Remarque pour les comparateurs. Certains auteurs élargissent la définition de la valuation pour que cela s'applique à toutes les fonctions holomorphes avec singularités isolées en posant $v_a(f) = -\infty$ s'il s'agit d'une singularité isolée essentielle en a et en posant $v_a(f) = +\infty$ si f est identiquement nulle sur un disque épointé $D_r(a)^*$. Cela a l'avantage qu'on n'a pas besoin de se limiter à des fonctions méromorphes non-identiquement nulle sur un ouvert connexe, mais l'intérêt pratique est limité.

→ **15.5 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et f une fonction méromorphe sur U non-identiquement nulle. Alors l'ensemble

$$F = \{a \in U \mid v_a(f) \neq 0\}$$

des zéros et pôles de f (ou plutôt de son prolongement \mathbf{f} dans les singularités effaçables [15.1]) est sans point d'accumulation dans U (à comparer avec [9.4]).

Ⓟ **15.6 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe, soient f et g deux fonctions méromorphes non-identiquement nulle sur U . Alors la somme $f + g$, le produit $f \cdot g$ et le quotient f/g (là où ces opérations sont définies) sont des fonctions méromorphes sur U . Quand le résultat n'est pas identiquement nulle (ce qui ne peut arriver que pour la somme $f + g$) on a pour tout $a \in U$:

- (i) $v_a(f + g) \geq \min(v_a(f), v_a(g))$ avec égalité si $v_a(f) \neq v_a(g)$,
- (ii) $v_a(f \cdot g) = v_a(f) + v_a(g)$,
- (iii) $v_a(f/g) = v_a(f) - v_a(g)$.

15.7 Le corps des fonctions méromorphes. Quand on regarde le résultat [15.6] et qu'on y rajoute les observations que la fonction identiquement nulle fonctionne comme l'élément neutre pour l'addition et la fonction constante 1 fonctionne comme l'élément neutre pour la multiplication, on a l'impression qu'on vient de montrer que l'ensemble des fonctions méromorphe sur un ouvert connexe est un corps. Malheureusement il y a un petit détail qui gâche la fête : le domaine de définition ! Par exemple, si f est une fonction méromorphe avec au moins un pôle, la somme $f - f$ est identiquement nulle **sur le domaine de définition de f** , ce qui exclut l'ensemble des pôles. Ce n'est donc pas la fonction identiquement nulle sur U entier. Et une même remarque (avec encore plus de points à enlever) s'applique pour le produit $f \cdot (1/f)$. Et pourtant ! Le résultat est si alléchant qu'on veut que ce soit vrai. Car que peuvent faire ces quelques points où une fonction méromorphe n'est pas définie ? Ce n'est qu'un ensemble sans point d'accumulation dans U . Il s'avère qu'il y a (au moins) trois façons de résoudre ce dilemme.

La première, la plus élégante, est de considérer, comme dit dans l'introduction, une fonction méromorphe sur U comme une vraie fonction sur U entier mais à valeurs dans la sphère de Riemann au lieu de \mathbf{C} . Ainsi on n'aura plus le problème des singularités isolées (effaçables ou pôles).

La deuxième façon consiste à garder "toutes" les fonctions méromorphes, y compris celles qui ont des singularités isolées effaçables, mais de dire que deux de telles fonctions sont équivalentes si elles coïncident en dehors d'un ensemble sans point d'accumulation dans U . On remplace donc l'ensemble des fonctions méromorphes par l'ensemble des classes d'équivalences de fonctions méromorphes par rapport à cette relation d'équivalence. Les opérations d'addition, multiplication et quotient "descendent" sur l'ensemble des classes d'équivalences et en font un corps. Cette stratégie est l'analogue de la stratégie en théorie de la mesure où on identifie deux fonctions qui coïncident en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Là aussi les opérations d'addition et de multiplication descendent sur l'ensemble des classes d'équivalences et donnent naissance aux espaces L^p . Et dans les deux cas (des fonctions méromorphes et des élément des espaces L^p) on ne mentionne même pas, la plupart du temps, qu'on manipule des classes d'équivalences, on fait semblant de manipuler des "vraies" fonctions.

La troisième façon consiste à ne pas considérer l'ensemble de toutes les fonctions méromorphes sur U , mais seulement les fonctions méromorphes qu'on ne peut plus prolonger par continuité. Autrement dit, on remplace une fonction méromorphe sur U par son prolongement par continuité [15.1] pour que toutes ses singularités isolées sont des pôles. Ou, dit d'une autre façon encore, on choisit dans une classe d'équivalence de la deuxième façon ci-dessus un élément privilégié qu'on prend comme **le** représentant de la classe. Cette troisième façon est parfois pris comme définition d'une fonction méromorphe. Son désavantage est qu'il faut compléter l'opération de multiplication par une opération plus évoluée : on fait d'abord l'opération sur les deux fonctions (point par point, là où les deux existent), mais ensuite on remplace le résultat par son prolongement par continuité [15.1] pour "boucher" les singularités effaçables.

Aussi bizarre que cela pourrait paraître, un mathématicien chevronné considère ces trois façons de résoudre le dilemme concernant le domaine de définition d'une fonction méromorphe comme trois facettes d'un même objet et pas du tout comme trois approches différentes. Et tout étudiant de mathématique connaît déjà une telle situation depuis son passage au collège ! Je pense à la notion de nombre rationnel. Quand on écrit $\frac{2}{10}$, tout le monde pense à un seul nombre, qu'on place quelque part

entre 0 et 1 sur la droite réelle. Mais on n'a pas du tout écrit un seul nombre, on en a écrit deux : 2 et 10. Quand on écrit $\frac{1}{5}$, tout le monde sera d'accord que c'est le même nombre que $\frac{2}{10}$, personne ne le voit comme un nombre différent, malgré le fait qu'on écrit de nouveau deux nombres, pas un seul, et pas les mêmes. Ce qui se passe est que les nombres rationnels sont en fait des classes d'équivalences de paires de nombres entiers, numérateur et dénominateur, mais on a appris de les considérer comme une seule entité : nombre rationnel. Parfois (surtout au collège, beaucoup moins à la fac) on décide de choisir un représentant unique dans chaque classe d'équivalence : l'élément qu'on ne peut plus "simplifier" (pgcd de numérateur et dénominateur égal 1) et avec dénominateur positif. Mais on peut aussi passer à une toute autre écriture unique : l'écriture décimale comme 0,2.¹ Un étudiant en mathématique connaît donc (au moins) un objet mathématique qu'on exprime de plusieurs façons différentes, tantôt par une classe d'équivalence, tantôt par un élément privilégié dans une telle classe, tantôt par une toute autre forme, le tout sans vraiment se rendre compte que de fait on manipule des objets qui sont fondamentalement différents. Et pour les fonctions méromorphes la situation est analogue : à la longue on ne fait plus de différence entre une fonction holomorphe à valeur dans la sphère de Riemann et une classe d'équivalence de fonctions holomorphes avec singularités isolées ou un élément privilégié dans une telle classe ; ce sont des aspects différents d'un même objet.

1. Unique une fois qu'on a réglé le problème des 9's qui se répètent : $0,199999 \dots = 0,2!$

16. Le théorème des résidus

→ **16.1 Lemme préparatoire.** Soit $g(u) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n$ une série entière de rayon de convergence ∞ et soit $a \in \mathbf{C}$. Alors la fonction $f : \mathbf{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - a)^{-n}$$

est holomorphe et admet une primitive holomorphe $F : \mathbf{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{1-n} (z - a)^{1-n}.$$

→ **16.2 Lemme.** Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit z_o une singularité isolée de f . Alors il existe un unique nombre complexe a tel que

$$f(z) - \frac{a}{z - z_o}$$

admet une primitive sur un disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^*$. Si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z - z_o)^n$ est le développement en série de Laurent au voisinage de z_o , alors $a = c_{-1}$.

16.3 Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit z_o une singularité isolée de f . Alors le nombre $a \in \mathbf{C}$ dans [16.2], c'est-à-dire le coefficient c_{-1} dans le développement en série de Laurent au voisinage de z_o [14.2], est appelé le *résidu de f au point z_o* ; on le note comme $\text{Rés}(f, z_o)$:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z - z_o)^n \quad \implies \quad \text{Rés}(f, z_o) = c_{-1}.$$

Ⓟ **16.4 Théorème des résidus.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $F \subset U$ un sous-ensemble sans point d'accumulation dans U , $f : U \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a, b] \rightarrow U \setminus F$ un $C^{1/}$ -lacet tel que $K_\gamma \subset U$. Alors l'ensemble $F^* = F \cap K_\gamma = \{a \in F \mid \text{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ est fini et on a l'égalité

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{a \in F^*} \text{Ind}_\gamma(a) \cdot \text{Rés}(f, a).$$

Remarque pour les comparateurs. La plupart des auteurs énoncent le théorème des résidus avec des hypothèses légèrement différentes : on prend F un ensemble fini et on prend U simplement connexe (une hypothèse plus forte, car si U est simplement connexe, alors toute $C^{1/}$ -lacet vérifie automatiquement la condition $K_\gamma \subset U$, voir [13.10]). Notre preuve sera donc un petit peu plus longue que pour d'autres auteurs, mais pas plus compliquée. Et on gagne en souplesse, car on n'a pas besoin de s'assurer que l'ouvert U soit simplement connexe, ni de s'assurer qu'il n'y a qu'un nombre fini de singularités isolées. On en profite dans les applications au calcul d'intégrales §17, où on parle d'un ouvert qui contient un demi-plan fermé, sans s'occuper si c'est vraiment simplement connexe ou non. Ceci dit, quand U n'est pas simplement connexe ou F non-fini, il "suffit" (le plus souvent) de réduire U un peu pour obtenir

un ouvert simplement connexe dans lequel il n'y qu'un nombre fini d'éléments de F mais qui contient toujours le lacet γ .

Remarque. Trois résultats précédent s'interprètent facilement comme des cas particuliers du théorème des résidus (quatre avec un peu d'imagination), à commencer avec la formule de Cauchy [8.1.iii], [8.8.iii] :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D_r(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz .$$

La fonction f étant holomorphe, le quotient $f(z)/(z-w)$ n'a qu'une seule singularité isolée en $z = w$ qui est un pôle simple. On vérifie aisément (sinon on applique [17.1.iii]) qu'on a

$$(16.5) \quad \text{Rés}\left(\frac{f(z)}{z-w}, w\right) = f(w)$$

et qu'on a $\text{Ind}_{\partial D_r(w)}(w) = 1$ (w est à l'intérieur du disque et son bord est parcouru dans le sens positif), ce qui transforme la formule de Cauchy en

$$\text{Ind}_{\partial D_r(w)}(w) \cdot \text{Rés}\left(\frac{f(z)}{z-w}, w\right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D_r(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz ,$$

ce qui est le théorème des résidus.

Le deuxième résultat est la formule pour l'indice [12.4], [12.3.ii]. Mais soyons honnête : en le voyant comme un cas particulier du théorème des résidus, on tourne en rond. Mais quand même : la fonction $z \mapsto 1/(z-w)$ a une seule singularité isolée en $z = w$ et son résidu en ce point vaut 1. On peut donc réécrire la définition de l'indice sous la forme

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot \text{Rés}\left(\frac{1}{z-w}, w\right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz ,$$

ce qui est de nouveau le théorème des résidus.

Le troisième résultat est la formule de Cauchy généralisée [12.11] :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(w) .$$

La fonction holomorphe f n'a pas de singularités isolées, donc l'ensemble F^* dans le théorème des résidus est vide, ce qui veut dire que la somme sur $a \in F^*$ vaut zéro. Ce qui montre que la première égalité est bien un cas particulier du théorème des résidus. Et la fonction $f(z)/(z-w)$ n'a qu'une seule singularité isolée en $z = w$ avec résidu $f(w)$ (16.5). Et donc la deuxième égalité est aussi un cas particulier du théorème des résidus.

Avec un peu d'imagination (ou après lecture de la preuve) on peut aussi interpréter la formule [14.2.ii] comme un cas particulier du théorème des résidus. Car avec le lacet γ (26.27) donné dans la preuve de [14.2] et toujours avec (16.5) pour l'unique singularité isolée de la fonction $f(z)/(z-w)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_{r_2}(w_o)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial D_{r_1}(w_o)} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &\stackrel{[16.4]}{=} 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot \text{Rés}\left(\frac{f(z)}{z-w}, w\right) = 2\pi i f(w) . \end{aligned}$$

L'imagination réside donc dans le fait que les deux cercles initiaux (qui ne constituent pas un lacet) sont "augmentés" par un aller-retour sur un segment qui les relie pour en faire un seul lacet γ qui a la même intégrale.

Nota Bene. Dans la quasi totalité des applications du théorème des résidus, le $C^{1/}$ -lacet γ sera en fait un C^{∞} -lacet **simplement fermé** [3.2]. Selon le théorème de Jordan [4.12] son image est donc le bord d'un ouvert borné O et souvent on ne donne que cet ouvert (ou son adhérence compact K_γ) pour décrire la courbe γ , en précisant qu'on utilisera le sens positif ou le sens négatif [4.13]. Selon [12.9] l'indice $\text{Ind}_\gamma(a)$ pour une singularité isolée de f (dans le théorème des résidus) n'a donc que deux possibilités : soit 0 quand a n'appartient pas à O , soit 1 s'il appartient et qu'on utilise le sens positif, respectivement -1 s'il appartient à O et qu'on utilise le sens négatif. Sachant qu'en plus dans la plupart des cas on utilisera le sens positif, le résultat du théorème des résidus se simplifie en

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{a \in F^*} \text{Rés}(f, a) .$$

Mais attention : bien que souvent on est dans ces circonstances, il y a des cas où on utilisera le sens négatif pour l'orientation du bord ∂K , et donc il faut rajouter un "signe moins" à cette formule.

Ⓟ **16.6 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et f une fonction méromorphe et non-identiquement nulle sur U .

- (i) La fonction f'/f est méromorphe sur U , tous ses pôles sont simples et l'ensemble S de ses pôles est la réunion des zéros Z et des pôles F de f .
- (ii) Pour tout $a \in U$ on a $\text{Rés}(f'/f, a) = v_a(f)$.
- (iii) Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U \setminus S$ est un $C^{1/}$ -lacet vérifiant $K_\gamma \subset U$, alors l'ensemble $S^* = K_\gamma \cap S = \{a \in S \mid \text{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ est fini et on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{a \in S^*} v_a(f) \cdot \text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbf{Z} .$$

16.7 Remarques. • Le résultat [16.6.iii] s'applique en particulier au cas où γ est un $C^{1/}$ -lacet simplement fermé et donc le bord d'un ouvert borné O (l'intérieur de l'image de γ) qu'on a orienté positivement [4.13]. Selon [12.9] on aura donc

$$O = \{z \in U \setminus \gamma([a, b]) \mid \text{Ind}_\gamma(z) = 1\} .$$

Si on note par Z l'ensemble (fini) de zéros de f dans O et par P l'ensemble (fini) des pôles de f dans O , alors on obtient l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{a \in Z} v_a(f) - \sum_{a \in P} (-v_a(f)) ,$$

ce qui compte le nombre de zéros à l'intérieur de (l'image de) γ , compté avec multiplicité, moins le nombre de pôles à son intérieur, également compté avec multiplicité.

• Sachant que pour tout point $a \in U$ qui n'est ni un zéro ni un pôle de f on a forcément $v_a(f) = 0$, on peut réécrire [16.6.iii] sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in U} v_a(f) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a) ,$$

ce qui évite de donner un nom à l'ensemble des zéros et pôles de f . Par contre, cela nécessite d'interpréter la somme comme la somme d'une famille sommable, une notion qui n'appartient pas au programme standard d'un étudiant en L3.

Ⓟ **16.8 Théorème de Rouché.** Soient $f, g : U \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphe sur un ouvert U et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un $C^{1/}$ -lacet simplement fermé tel que son intérieur O [4.12] est inclus dans U . Si f et g vérifient la condition

$$(16.9) \quad \forall z \in \gamma([a, b]) : |f(z) - g(z)| < |g(z)| ,$$

alors f et g ont le même nombre (fini!) de zéros (compté avec multiplicité) dans O , c'est-à-dire dans l'intérieur de γ .

EXERCICES

→ **16.10 Exercice.** Montrer que la formule [8.8.iii] s'interprète aussi comme un cas particulier du théorème des résidus.

→ **16.11 Exercice.** Déterminer les singularités isolées a des fonctions f suivantes et calculer $\text{Rés}(f, a)$.

$$\begin{array}{lll} 1) \quad z \mapsto \frac{1}{z^3 - z^5} & 2) \quad z \mapsto \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} & 3) \quad z \mapsto \exp(z + z^{-1}) \\ 4) \quad z \mapsto \frac{\sin(2z)}{(z+1)^3} & 5) \quad z \mapsto \cos\left(\frac{z^2 + 4z - 1}{z - 3}\right) & 6) \quad z \mapsto z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right) \end{array}$$

→ **16.12 Exercice.** En évaluant $\int_C e^z dz$ sur le cercle unité C , montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0 .$$

→ **16.13 Exercice.** Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \text{ où } \gamma(t) = e^{it} \ (t \in [0, 2\pi]) ; \\ \text{(ii)} & \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz \text{ où } \gamma(t) = e^{it} \ (t \in [0, 2\pi]) ; \\ \text{(iii)} & \int_{\gamma} \frac{\cos z^2}{z} dz \text{ où } \gamma(t) = e^{it} \ (t \in [0, 2\pi]) ; \end{array}$$

- (iv) $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz$ où $\gamma(t) = 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);
- (v) $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - a)^n}$ ($n \in \mathbf{Z}$), où γ est un chemin fermé ne passant pas par a ;
- (vi) $\int_{\gamma_r} \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} dz$, où $\gamma_r(t) = re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);
- (vii) $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z - 1} \right)^n dz$, $n \in \mathbf{N}^*$, où $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

→ **16.14 Exercice.** Soit P le polynôme $P(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$. Déterminer le nombre de zéros de P à l'intérieur du disque unité $D_1(0)$. Indication : considérer la fonction $f(z) = -5z^3$.

→ **16.15 Exercice.** Déterminer le nombre de zéros du polynôme $P(z) = z^9 + z^5 - 8z^3 + 2z + 1$ dans la couronne $A(0; 1, 2)$.

17. Application au calcul d'intégrales

Le théorème des résidus n'a pas seulement un grand intérêt théorique, il permet aussi de calculer des intégrales définies (propres ou impropres) sans passer par un calcul de primitives. Et même et surtout dans un certain nombre de cas où une expression explicite en termes de fonctions usuelles d'une primitive n'existe pas. Chacun de ses calculs peut être considéré comme un exercice d'application directe de ce théorème, mais on présentera quelques exemples typiques pour illustrer l'approche. Car comme pour le calcul des primitives, cette application au calcul des intégrales n'est pas une science mais un art. Il ne suffit pas d'appliquer un algorithme, une recette, pour arriver au bout, car un tel algorithme n'existe pas. Comme pour le calcul des primitives, on peut donner des classes d'exemples où on peut donner une recette (c'est cela qu'on va faire), mais dans d'autres cas, il faut "trouver" l'astuce qui convient. Comme pour le calcul des primitives, où il y a des classes de fonctions pour lesquelles il existe un algorithme (par exemple les fonctions rationnelles, ou les fonctions rationnelles en $\sin t$ et $\cos t$), mais pour d'autres fonctions, il faut "trouver" l'astuce pour calculer une expression explicite pour une primitive. Sans garantie que cela marchera, car on peut montrer qu'en général il n'existera pas une telle expression ! La même chose est vraie pour l'application du théorème des résidus au calcul des intégrales : il n'y a pas de garantie que cela marchera. ²

→ **17.1 Lemme.** Soit $a \in U$ et $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe.

(i) Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ avec $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}((z-a)^n \cdot f(z))}{dz^{n-1}}.$$

(ii) Si dans (i) on a $n = 1$, c'est-à-dire que a est un pôle simple de f , cela se simplifie en

$$\text{Rés}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z).$$

(iii) Si $f = g/h$ avec $g, h : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et a un zéro simple de h , alors (ii) se simplifie en

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Nota Bene. Il est important de garder la limite $z \rightarrow a$ dans [17.1.i], car la fonction f ni ses dérivées sont définies en a .

2. Il semble que pendant longtemps on a cru que le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt$ n'était pas possible par cette méthode, jusqu'au moment où quelqu'un a réussi à le faire.

17.2 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt$. Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X, Y]$ deux polynômes en deux variables et soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}.$$

On dit que f est une *fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$* . En première année à l'université on apprend comment on peut trouver une primitive d'une telle fonction : on effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$, on obtient une fonction rationnelle en u à laquelle on peut appliquer une décomposition en éléments simples pour lesquelles on connaît des primitives. Ce calcul devient vite très laborieux. Mais ici on ne demande pas de calculer une primitive de f , mais uniquement l'intégrale définie entre 0 et 2π . Et c'est là où le théorème des résidus entre.

On commence avec la remarque qu'on a les égalités

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{(e^{it})^2 + 1}{2e^{it}} \quad \text{et} \quad \sin t = -\frac{i}{2}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{(e^{it})^2 - 1}{2ie^{it}}.$$

Et ensuite on remarque que pour une fonction holomorphe h on a l'égalité

$$\int_{\partial D_1(0)} h(z) dz = \int_0^{2\pi} h(e^{it}) i e^{it} dt.$$

Quand on combine ces deux remarques, on voit directement qu'en prenant pour h la fonction

$$h(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{P\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)}{Q\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)},$$

alors on aura l'égalité

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\sin t, \cos t)}{Q(\sin t, \cos t)} dt = \int_{\partial D_1(0)} h(z) dz.$$

Mais si P et Q sont deux polynômes, alors h sera une fraction rationnelle en z , quotient de deux polynômes $R, S \in \mathbf{C}[X]$:

$$h(z) = \frac{R(z)}{S(z)},$$

ce qui est une fonction méromorphe sur \mathbf{C} avec ses pôles les zéros de S . En plus, le bord $\partial D_1(0)$ est un C^∞ -lacet simplement fermé orienté dans le sens positif. Pour les points $z \in D_1(0)$ on a donc $\text{Ind}_{\partial D_1(0)}(z) = 1$ et pour les points $|z| > 1$ on aura $\text{Ind}_{\partial D_1(0)}(z) = 0$. Si on note P l'ensemble des zéros du polynôme S à l'intérieur du disque $D_1(0)$, le théorème des résidus nous donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\sin t, \cos t)}{Q(\sin t, \cos t)} dt = 2\pi i \sum_{a \in P} \text{Rés}(h, a).$$

Bien sûr, on a négligé la possibilité que h s'annule sur le cercle $\partial D_1(0)$, mais on vérifie aisément que si la fonction f est définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, alors le polynôme Q (de deux variables X et Y) ne s'annule pas sur le cercle unité des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $x^2 + y^2 = 1$ et que donc h ne s'annule pas non plus sur ce cercle. Le théorème des résidus s'applique donc bien.

Traisons l'exemple de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{r + \cos t}{r^2 + 1 + 2r \cos t} dt .$$

On a donc les polynômes P et Q donnés par

$$P(X, Y) = r + X \quad \text{et} \quad Q(X, Y) = r^2 + 1 + 2rX ,$$

ce qui donne pour la fonction h :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{iz} \cdot \frac{P\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)}{Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{r + \frac{z^2+1}{2z}}{r^2 + 1 + 2r \frac{z^2+1}{2z}} \\ &= \frac{1}{2iz} \cdot \frac{z^2 + 2rz + 1}{rz^2 + (r^2 + 1)z + r} = \frac{1}{2iz} \cdot \frac{z^2 + 2rz + 1}{(z+r)(rz+1)} . \end{aligned}$$

La fonction h a donc trois pôles simples : en 0, $-r$ et $-1/r$. Le point $z = 0$ se trouve toujours à l'intérieur du disque $D_1(0)$, mais selon la valeur de r (qui ne peut pas avoir norme 1 pour que l'intégrale soit bien définie) un des deux points $-r$ et $-1/r$ se trouve à l'intérieur et l'autre à l'extérieur. Quand on calcule les résidus selon [17.1.ii] on trouve directement

$$\begin{aligned} \text{Rés}(h, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \cdot \frac{z^2 + 2rz + 1}{(z+r)(rz+1)} = \frac{1}{2ir} \\ \text{Rés}(h, -r) &= \lim_{z \rightarrow -r} \frac{1}{2iz} \cdot \frac{z^2 + 2rz + 1}{rz+1} = \frac{1}{-2ir} \\ \text{Rés}(h, -1/r) &= \lim_{z \rightarrow -1/r} \frac{1}{2iz} \cdot \frac{z^2 + 2rz + 1}{r(z+r)} = \frac{1}{2ir} . \end{aligned}$$

Pour l'intégrale on trouve donc selon le module de r :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r + \cos t}{r^2 + 1 + 2r \cos t} dt = \begin{cases} 2\pi i \left(\frac{1}{2ir} + \frac{1}{-2ir} \right) = 0 & | -r | < 1 \\ 2\pi i \left(\frac{1}{2ir} + \frac{1}{2ir} \right) = \frac{2\pi}{r} & | -r | > 1 . \end{cases}$$

À part les intégrales (de 0 à 2π) de fractions rationnelles en $\cos t$ et $\sin t$, les autres applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales comportent toutes des passages à la limite. L'idée générique est qu'on considère un lacet qui dépend d'un paramètre (ou même plusieurs), qu'on applique le théorème des résidus à l'intégrale d'une fonction f sur ce lacet et qu'ensuite on fait tendre le(s) paramètre(s) vers une valeur limite. Pour cela on aura besoin de quelques résultats concernant le comportement d'une intégrale sous le passage à la limite.

→ **17.3 Lemme.** Soit $S \subset \mathbf{C}$ le secteur défini par

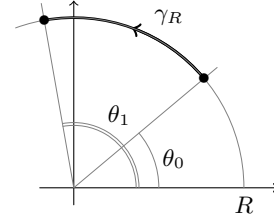
$$S = \{r e^{i\theta} \in \mathbf{C} \mid r \geq 0 \text{ et } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\} ,$$

soit $\gamma_R : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbf{C}$ la courbe $\gamma_R(t) = R e^{it}$ et soit $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in S} z f(z) = A \in \mathbf{C} .$$

Alors on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0)A .$$



17.4 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé :

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \subset U ,$$

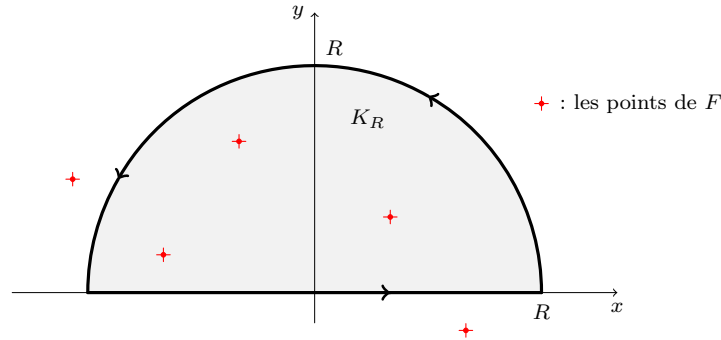
soit $F \subset U \setminus \mathbf{R}$ un ensemble sans point d'accumulation dans U vérifiant la condition que le sous-ensemble F_+ défini comme

$$F_+ = \{z \in F \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

est fini, et soit $f : U \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. (On dit que f a un nombre fini de singularités isolées dans le demi-plan supérieur et aucun sur l'axe réel.) Soit finalement $K_R \subset U$ le demi-disque fermé supérieur de rayon R :

$$K_R = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\} .$$

Quand on prend R suffisamment grand, tous les éléments de F_+ seront à l'intérieur de K_R .



Pour un tel R on aura donc par le théorème des résidus (et [12.9]) :

$$\int_{\partial K_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f, a) ,$$

où ∂K_R désigne le bord de K_R orientée positivement [4.13] (c'est bien une C^∞ -courbe, donc [16.4] s'applique). L'intégrale sur ce bord se décompose en deux parties : l'intégrale sur le segment de droite $[-R, R]$ et l'intégrale sur le demi-cercle $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma_R(t) = R e^{it}$. Autrement dit, pour tout R suffisamment grand, on aura

$$(17.5) \quad 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f, a) = \int_{\partial K_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{\gamma_R} f(z) dz .$$

En appliquant [17.3] on aura donc montré le résultat suivant.

17.6 Proposition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé, soit $F \subset U \setminus \mathbf{R}$ un ensemble sans point d'accumulation dans U vérifiant la condition que le sous-ensemble F_+ défini comme

$$F_+ = \{z \in F \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

est fini, et soit $f : U \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Alors on a l'égalité

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) \, dt = 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f, a) .$$

Dans le cas où l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt$ est convergente, on obtient donc sa valeur.

Nota Bene. Il est important de noter que la condition $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ dans [17.6] ne garantit pas que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt$ est convergente. Autrement dit, en toute généralité il est possible que la limite symétrique $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) \, dt$ existe, sans que les limites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(t) \, dt$$

existent séparément. Un même avertissement s'appliquera aux résultats [17.8] et [17.11].

Exemple. Traitons, à titre d'exemple, la fonction $f(z) = (z^2 + 1)^{-1}$, pour laquelle on peut calculer tous les ingrédients, à commencer avec la propriété $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Ensuite on calcule

$$\int_{[-R, R]} f(z) \, dz = \int_{-R}^R \frac{dt}{t^2 + 1} = [\arctan(t)]_{-R}^R = 2 \arctan(R) .$$

La fonction f a deux pôles simples en i et $-i$, dont seulement i est dans le demi-plan supérieur, avec résidu (selon [17.1.ii]) :

$$\operatorname{Rés}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i} .$$

La formule (17.5) nous donne alors

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \int_{-R}^R \frac{dt}{t^2 + 1} + \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 2 \arctan(R) + \int_{\gamma_R} f(z) \, dz ,$$

et donc

$$\int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \pi - 2 \arctan(R) .$$

Et on remarque finalement qu'on a bien $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 0$ comme prédit par [17.3] et qu'on a bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\pi i \cdot \operatorname{Rés}(f, i) ,$$

comme prédit par [17.6].

Remarque. Dans [17.4] et donc [17.6] on a supposé qu'on avait une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé excepté quelques points. La plupart du temps on aura une fonction holomorphe définie sur \mathbf{C} entier, excepté quelques points. Rien ne nous empêche donc de remplacer le demi-disque supérieur K_R dans [17.4] par le demi-disque inférieur avec l'hypothèse que dans le demi-plan inférieur (ouvert) il n'y a qu'un nombre fini de singularités isolées de f . Attention quand même avec l'orientation du bord pour le demi-disque inférieur : pour obtenir l'intégrale \int_{-R}^R , il faut orienter le bord négativement !

Dans le cadre de la transformée de Fourier il existe une variante de [17.6] qui utilise le même contour (le bord du demi-disque supérieur de rayon R) mais qui nécessite une condition un peu plus faible. En contre partie, pour le montrer on a besoin d'une variante de [17.3] un peu plus fort.

→ **17.7 Lemme (variation de [17.3]).** Soit $S \subset \mathbf{C}$ le secteur défini par

$$S = \{z \in \mathbf{C} \mid \theta_0 \leq \arg z \leq \theta_1\} ,$$

soit $\gamma_R : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbf{C}$ la courbe $\gamma_R(t) = R e^{it}$ et soit $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in S} f(z) = 0 .$$

Alors on a les deux implications

$$\begin{aligned} [\theta_0, \theta_1] \subset [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi] &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^z \, dz = 0 \\ [\theta_0, \theta_1] \subset [0, \pi] &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} \, dz = 0 . \end{aligned}$$

→ **17.8 Proposition : intégrales de la forme** $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it} \, dt$. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé, soit $F \subset U \setminus \mathbf{R}$ un ensemble sans point d'accumulation dans U de sorte que le sous-ensemble F_+ défini comme

$$F_+ = \{z \in F \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

est fini, et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Alors on a l'égalité

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) e^{it} \, dt = 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f(z) e^{iz}, a) .$$

Dans le cas où l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it} \, dt$ est convergente, on obtient donc sa valeur.

Remarque. Pour les intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt$ on a remarqué qu'on pouvait aussi bien utiliser le demi-disque fermé inférieur et donc obtenir une formule pour cette intégrale qui fait intervenir les singularités isolées dans le demi-plan inférieur. Une remarque analogue s'applique presque pour les intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it} \, dt$, sauf qu'il y a un "mais." Le "mais" concerne la contrainte $[\theta_0, \theta_1] \subset$

$[0, \pi]$. Car quand on utilise le demi-disque fermé inférieur, on sera confronté avec la courbe $\gamma_R : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\gamma_R(t) = R e^{it}$, ce qui ne permet pas d'appliquer [17.7]. L'explication est assez simple : les points $z = it$ avec $t > 0$ appartiennent au demi-disque supérieur, et pour ces points la fonction $z \mapsto e^{iz}$ prend les valeurs $e^{iit} = e^{-t}$, ce qui est une fonction décroissante en t . Par contre, ce n'est que pour $t < 0$ que ces points appartiennent au demi-disque inférieur, et pour ces points, les valeurs e^{-t} deviennent de plus en plus grandes. Pour couper court, si on veut utiliser le demi-disque inférieur (et donc les singularités isolées de f dans le demi-plan inférieur), il faut regarder l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it} dt$.

Dans les deux applications précédentes on a utilisé un contour avec un seul paramètre R qu'on faisait tendre vers l'infini. Dans l'application suivante, qui est une "amélioration" du cas précédent avec la transformée de Fourier, on utilisera un contour avec deux paramètres R et ε et on prendra les limites $R \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \downarrow 0$. Et de nouveau, pour la deuxième limite, on aura besoin d'un résultat préliminaire concernant le comportement d'une intégrale sous le passage à cette limite.

→ **17.9 Lemme.** *Soit f une fonction holomorphe dans le disque époiné $D_R(0)^*$ ayant un pôle simple en 0 et soit $\gamma_\varepsilon : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbf{C}$ l'arc de cercle donné par $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ (pour $0 < \varepsilon < R$). Alors on a l'égalité*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0) \text{Rés}(f, 0) .$$

17.10 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin t dt$. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé, soit $F \subset U \setminus \mathbf{R}$ un ensemble sans point d'accumulation dans U de sorte que le sous-ensemble F_+ défini comme

$$F_+ = \{ z \in F \mid \text{Im } z > 0 \}$$

est fini, et soit $f : U \setminus (F \cup \{0\}) \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe ayant les propriétés :

- (i) $\forall z \in \mathbf{R} : f(z) \in \mathbf{R}$ et
- (ii) 0 est un pôle simple de f .

Attention : on suppose donc que f a une seule singularité isolée réelle : l'origine 0 qui est un pôle simple, et un nombre fini de singularités isolées dans le demi-plan supérieur ouvert. Avec cette hypothèse la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \sin(t)$$

existe, ce qui permet de conclure que pour tout $R > 0$ l'intégrale

$$\int_{-R}^R f(t) \sin t dt$$

existe et est réelle. Sachant qu'on a $\sin t = \text{Im } e^{it}$ on a envie d'écrire

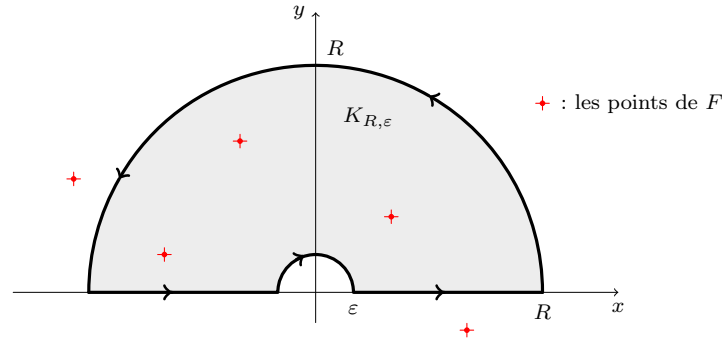
$$\int_{-R}^R f(t) \sin t dt = \int_{-R}^R f(t) \text{Im } e^{it} dt = \text{Im} \int_{-R}^R f(t) e^{it} dt ,$$

sauf que la dernière égalité n'est pas justifiable, car l'intégrale $\int_0^R f(t) e^{it} dt$ n'est pas convergente en 0 à cause de la partie réelle $\cos t$ de e^{it} (la fonction $1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0). Une autre façon de dire (plus ou moins) la même chose est de constater qu'on ne peut pas appliquer [17.8] parce que f a un pôle (simple) sur l'axe réel.

Ceci nous amène à introduire l'ensemble $K_{R,\varepsilon} \subset U$ comme le demi-anneau fermé supérieur de rayons $\varepsilon < R$:

$$K_{R,\varepsilon} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ et } \varepsilon \leq |z| \leq R \} ,$$

et de définir $\gamma_{R,\varepsilon}$ comme étant une paramétrisation de son bord $\partial K_{R,\varepsilon}$ orientée positivement. Quand on prend R suffisamment grand et ε suffisamment petit, tous les éléments de F_+ seront à l'intérieur de $K_{R,\varepsilon}$.



Pour R suffisamment grand et ε suffisamment petit, on peut donc appliquer le théorème des résidus et conclure qu'on a l'égalité

$$\int_{\partial K_{R,\varepsilon}} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f(z) e^{iz}, a) ,$$

Contrairement au cas décrit dans [17.4], ici l'intégrale sur le bord $\partial K_{R,\varepsilon}$ se décompose en quatre parties : l'intégrale sur le demi-cercle $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow U$, $\gamma_R(t) = R e^{it}$, l'intégrale sur le demi-cercle $\gamma_\varepsilon : [0, \pi] \rightarrow U$, $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$ (attention !) et les intégrales sur les deux segments de droites $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$. On aura donc :

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f(z) e^{iz}, a) &= \int_{\partial K_{R,\varepsilon}} f(z) e^{iz} dz \\ &= \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t) e^{it} dt + \int_{\varepsilon}^R f(t) e^{it} dt \\ &\quad + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) e^{iz} dz . \end{aligned}$$

Avec quelques petits arguments et en utilisant [17.9] on arrive au résultat suivant.

17.11 Proposition. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé, soit $F \subset U \setminus \mathbf{R}$ un ensemble sans points d'accumulation dans U de sorte que le sous-ensemble F_+ défini comme*

$$F_+ = \{ z \in F \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

est fini, et soit $f : U \setminus (F \cup \{0\}) \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe ayant les propriétés :

- (i) $\forall z \in \mathbf{R} : f(z) \in \mathbf{R}$,

- (ii) 0 est un pôle simple de f et
- (iii) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

Alors on a l'égalité

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) \sin t \, dt = 2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Rés}(f, 0) + \sum_{a \in F_+} \operatorname{Rés}(f, a) \right).$$

Dans le cas où l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin t \, dt$ est convergente (à l'infini), on obtient donc sa valeur.

Remarque. En passant du demi-disque supérieur au demi-disque inférieur on pouvait remplacer dans [17.6] la somme sur les singularités (isolées) dans le demi-plan supérieur par la somme (avec un signe moins) sur les singularités dans le demi-plan inférieur. Pour [17.8] le même changement nécessitait de remplacer aussi la fonction à intégrer de $f(z) e^{iz}$ en $f(z) e^{-iz}$. Mais dans le cas de [17.11] on peut rester avec la même fonction, pour la simple raison qu'on a les égalités

$$\forall t \in \mathbf{R} : \sin t = \operatorname{Im} e^{it} = -\operatorname{Im} e^{-it}.$$

Et donc on peut obtenir un résultat analogue de [17.11] avec une somme sur les singularités de f dans le demi-plan inférieur (et toujours la singularité en 0). Les détails sont laissés aux bons soins du lecteur.

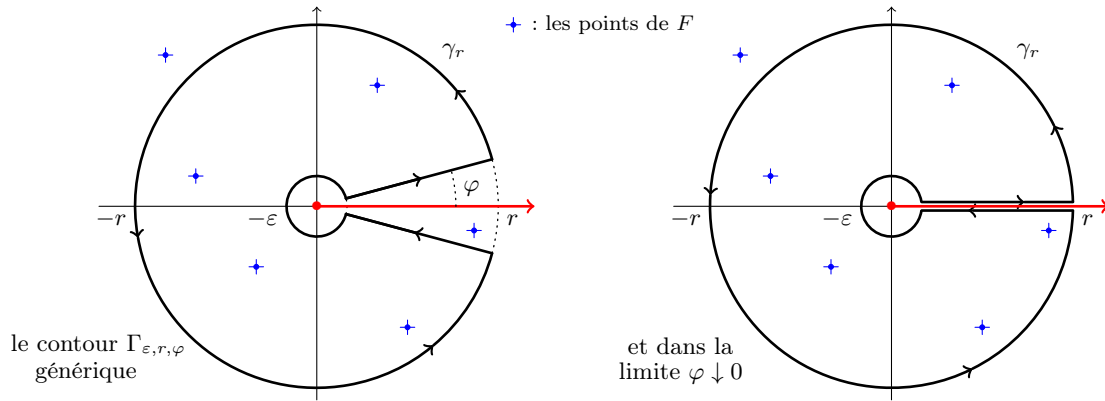
Dans la dernière application qu'on présentera, on “complique” les choses encore un petit peu en considérant un contour qui dépend de trois paramètres. Ce (type de) contour (qui sera présenté ci-dessous) est utile quand une fonction logarithme est présente. Pour une fonction logarithme il “faut” exclure un demi-droite pour avoir une fonction holomorphe et on ne peut pas prolonger par continuité sur cette demi-droite, car la partie imaginaire saute de 2π . L'idée est donc de passer des deux côtés de cette demi-droite et de prendre une limite dans laquelle on passe deux fois sur la droite. Sauf que la fonction qu'on intègre sur chaque passage n'est pas la même : la partie imaginaire diffère de 2π selon les deux côtés.

Intégrales de la forme $\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(t) \, dt$. Soit $F \subset \mathbf{C} \setminus [0, \infty[$ un ensemble fini (donc sans point d'accumulation dans \mathbf{C}), $f : \mathbf{C}^* \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit $\alpha \in \mathbf{C}$. À noter que f n'a donc pas de singularités isolées dans $]0, \infty[$. Avec ces ingrédients on définit la fonction holomorphe $g : \mathbf{C} \setminus (F \cup [0, \infty[) \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(z) = e^{(\alpha-1) \operatorname{Log}(-z)} f(z) \stackrel{[11.8]}{\equiv} (-z)^{\alpha-1} f(z),$$

où Log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$.

Soit maintenant $0 < \varepsilon < r$ deux réels et soit $\varphi \in]0, \pi/2[$. Avec ces paramètres on définit le contour $\Gamma_{\varepsilon, r, \varphi}$ comme la concaténation des quatre chemins suivants : le segment $[\varepsilon e^{i\varphi}, r e^{i\varphi}]$, l'arc $\gamma_r : [\varphi, 2\pi - \varphi] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma_r(t) = r e^{it}$, le segment $[\varepsilon e^{-i\varphi}, r e^{-i\varphi}]$ et finalement l'arc $\gamma_\varepsilon : [\varphi, 2\pi - \varphi] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, les deux derniers parcouru dans le sens inverse. Quand ε et φ sont suffisamment petits et quand r est suffisamment grand, alors l'ensemble F sera inclus à l'intérieur de ce contour.



Avec cela on a tout le matériel pour pouvoir calculer (avec quelques précisions) la *transformée de Mellin* de f , à savoir la fonction

$$\alpha \mapsto \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t) dt .$$

L'idée est d'appliquer le théorème des résidus (quelle surprise) à la fonction g et le contour $\Gamma_{\varepsilon,r,\varphi}$ et de prendre ensuite la limite $\varphi \downarrow 0$. Dans cette limite on fait un lien entre les intégrales sur les segments $[\varepsilon e^{i\varphi}, r e^{i\varphi}]$ et $[\varepsilon e^{-i\varphi}, r e^{-i\varphi}]$ et l'intégrale $\int_\varepsilon^r t^{\alpha-1} f(t) dt$. Et finalement on prend les limites $\varepsilon \downarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$ pour obtenir le résultat qui suit.

Ⓟ 17.12 Proposition. Soit $U = \mathbf{C} \setminus [0, \infty[$, soit $F \subset U$ un ensemble fini, soit $f : \mathbf{C}^* \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^{\operatorname{Re} \alpha} |f(z)| = 0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{\operatorname{Re} \alpha} |f(z)| .$$

Si on note $g : U \setminus F \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction holomorphe définie par

$$g(z) = e^{(\alpha-1) \operatorname{Log}(-z)} f(z) \stackrel{[11.8]}{\equiv} (-z)^{\alpha-1} f(z) ,$$

alors on a l'égalité

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t) dt \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^r e^{(\alpha-1) \ln(t)} f(t) dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \cdot \sum_{a \in F} \operatorname{Rés}(g, a) .$$

Remarque. Dans [17.6], [17.8], [17.11] et [17.12] on a mis la condition que l'ensemble des singularités isolés (d'une fonction holomorphe) à l'intérieur d'un contour grandissant est toujours fini. Mais que peut-on faire si ce nombre n'est pas fini? Sachant que le nombre de tels singularités est toujours fini à l'intérieur d'un contour fixe et que ces résultats s'obtiennent en prenant une limite qui élargit l'intérieur d'un tel contour, il est facile de voir que le passage à la limite nous fournit un résultat qui donne une série de résidus (au lieu d'une somme finie). Tant que cette série sera convergente, on aura toujours une valeur pour l'intégrale dont on parle dans ces énoncés. On trouvera des exemples de tels cas dans les exercices.

EXERCICES

→ **17.13 Exercice.** Soient U un ouvert de \mathbf{C} , $a \in U$, $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$.

- (i) Soit f définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$. Vérifier que f est méromorphe sur \mathbf{C} , et calculer les résidus en chacun de ses pôles.
- (ii) Si $f = P/Q$, P et Q étant holomorphes sur U et a étant un zéro double de Q , montrer que

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{6P'(a)Q''(a) - 2P(a)Q'''(a)}{3(Q''(a))^2}.$$

- (iii) Soit f définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$. Vérifier que f est méromorphe sur \mathbf{C} , et calculer ses résidus en chacun de ses pôles.

→ **17.14 Exercice. Intégrales trigonométriques.**

- (i) Soit $a > 1$. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$.
- (ii) Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}$ ($a > b > 0$).
- (iii) Calculer pour tout $n \in \mathbf{Z}$: $\int_0^{2\pi} \exp(\cos t) \cos(nt - \sin t) dt$.
- (iv) Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$ pour $|a| \neq 1$ selon l'approche décrite dans [17.2].
- (v) Essayer de retrouver la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(3t)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$ selon l'approche décrite dans [17.2].

→ **17.15 Exercice.** Le but de cet exercice est de calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- (i) Montrer que pour tous entiers $k \leq n$ et tout $r > 0$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} (1+z)^n \frac{dz}{z^{k+1}},$$

où $C(0, r)$ est le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct. En déduire que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ pour tout entier n .

- (ii) Soient $r_1 < r_2$ les deux racines de $z^2 - 3z + 1$. Montrer que, pour tout $r \in]r_1, r_2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = -\frac{5}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$$

(on pourra commencer par écrire $\binom{2n}{n}$ sous la forme $\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \left(\frac{(1+z)^2}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$).

(iii) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$.

(iv) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{k^n}$ pour tout réel $k > 4$. En déduire que

$$\forall z \in D(0, \frac{1}{4}) \quad : \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} ,$$

où $z \mapsto \sqrt{1+z}$ est la racine carrée habituelle (définie à l'aide du logarithme principal) sur $D(0, 1)$.

→ **17.16 Exercice.** Soit $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ deux polynômes et $f(z) = P(z)/Q(z)$ la fraction rationnelle associée. On suppose que Q n'a pas de racines réelles et qu'on a $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.

(i) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (a) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$,

0, (b) $\deg P \leq \deg Q - 2$ et (c) l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ converge.

(ii) Soit $R_+ = \{z \in \mathbf{C} \mid Q(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$ l'ensemble des racines de Q dans le demi plan supérieur. Montrer qu'on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi i \sum_{z \in R_+} \operatorname{Rés}(f, z) .$$

(iii) Soit $R_- = \{z \in \mathbf{C} \mid Q(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$ l'ensemble des racines de Q dans le demi plan inférieur. Montrer qu'on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = -2\pi i \sum_{z \in R_-} \operatorname{Rés}(f, z) .$$

→ **17.17 Exercice.** Soit $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ le chemin défini par $\gamma_R(t) = R e^{it}$.

(i) Montrer qu'on a $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = 0$.

(ii) Déduire de (i) la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

(iii) Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$.

(iv) Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^4+a^4)^2}$ pour $a > 0$.

→ **17.18 Exercice. Transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.** Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ on pose

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx .$$

- (i) Calculer $F(\xi)$ en intégrant $z \mapsto \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}$ sur un contour bien choisi.
- (ii) Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Que remarque-t-on ?

→ **17.19 Exercice.** Soit $a > 0$ et $\gamma_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma_a(t) = a + it$. Pour $\beta \in \mathbf{R}$, on définit

$$J(\beta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_a} \frac{e^{\beta z}}{z^2} dz .$$

- (i) Montrer que cette intégrale converge.
- (ii) En considérant le lacet $[a - iR, a + iR] \sqcup \gamma_R$, où γ_R parcourt un demi-cercle de diamètre $[a - iR, a + iR]$ (à choisir de quel côté on positionne ce demi-cercle!), montrer que $J(\beta) = 0$ si $\beta \leq 0$ et $J(\beta) = \beta$ si $\beta \geq 0$.

→ **17.20 Exercice.**

- (i) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x}$ où $\alpha \in]0, 1[$.
- (ii) Soit Γ la fonction Gamma définie pour $\operatorname{Re} z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Dédurre de (i) que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a la formule des compléments

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} .$$

→ **17.21 Exercice. Bernoulli et zêta de Riemann.** Le but de cet exercice est de déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \cotan(z)$ dans la couronne $k\pi < |z| < (k+1)\pi$ pour $k \in \mathbf{N}$ et d'établir une relation entre les nombres de Bernoulli et la fonction zêta de Riemann [10.8].

Définition : les nombres de Bernoulli B_n sont définis par la formule

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{z^n}{n!} .$$

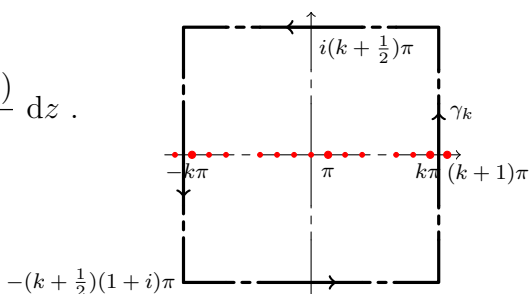
On constate facilement qu'on a $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, et que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$. Ce dernier résultat est immédiat quand on écrit

$$\frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2}z + \frac{z}{\exp(z) - 1} = \frac{\frac{1}{2}z(e^z + 1)}{e^z - 1} = \frac{\frac{1}{2}z \cosh(\frac{1}{2}z)}{\sinh(\frac{1}{2}z)} ,$$

ce qui est une fonction paire.

- (i) En utilisant les nombres de Bernoulli, déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \cotan(z)$ dans le disque épointé $D_{\pi}(0)^*$.
- (ii) En déduire la valeur de $\operatorname{Rés}\left(\frac{\cotan(z)}{z^{n+1}}, 0\right)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
- (iii) Évaluer pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$ l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, (k+\frac{1}{2})\pi)} \frac{\cotan(z)}{z^{n+1}} dz$.
- (iv) En déduire pour tout $k \in \mathbf{N}$, le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \cotan(z)$ dans la couronne $k\pi < |z| < (k+1)\pi$.

- (v) Soit γ_k le contour représenté par le carré de sommets $(\pm 1 \pm i)(k + \frac{1}{2})\pi$ parcouru dans le sens positif. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$ on a l'égalité

$$\int_{C(0, (k + \frac{1}{2})\pi)} \frac{\cotan(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{\gamma_k} \frac{\cotan(z)}{z^{n+1}} dz .$$


- (vi) Montrer que, si k est assez grand, on a $|\cotan(z)| \leq 2$ pour tout $z \in \text{image}(\gamma_k)$ et en déduire qu'on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} \frac{\cotan(z)}{z^{n+1}} dz = 0 .$$

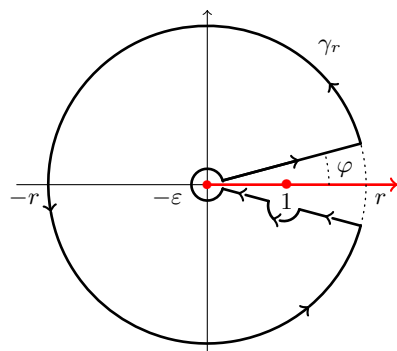
- (vii) En déduire qu'on a pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ l'égalité

$$B_{2p} = \frac{(-1)^{p+1} 2 (2p)!}{(2\pi)^{2p}} \cdot \zeta(2p) \equiv \frac{(-1)^{p+1} 2 (2p)!}{(2\pi)^{2p}} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2p}} .$$

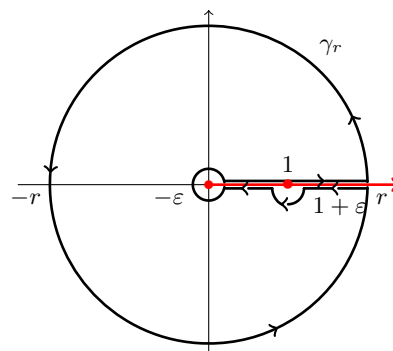
→ **17.22 Exercice. Intégrale de $x \mapsto R(x) \ln x$.** Soit $R \in \mathbf{C}(x)$ une fonction rationnelle sans pôle dans $[0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z R(z) = 0$.

- (i) Justifier que l'intégrale $\int_0^{\infty} R(x) \cdot \ln(x) dx$ converge.
- (ii) En considérant le contour $\Gamma_{\varepsilon, r, \varphi}$ introduit dans [17.20] et la fonction holomorphe $f(z) = R(z) \cdot (\log z)^2$, où \log désigne la détermination du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ obtenue en choisissant l'argument entre 0 et 2π , exprimer l'intégrale $\int_0^{+\infty} R(x) \cdot \ln(x) dx$ en fonction des résidus de f et de $\int_0^{\infty} R(x) dx$.
- (iii) En supposant (en plus) que $R(x) \in \mathbf{R}(x)$ est une fonction rationnelle réelle, montrer que $\int_0^{+\infty} R(x) \cdot \ln(x) dx$ s'exprime uniquement en termes (de la partie réelle) des résidus de f .
- (iv) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}$.
- (v) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$ à l'aide de (iii).

- (vi) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ converge. En modifiant le contour $\Gamma_{\varepsilon, r, \varphi}$ comme indiqué ci-dessous, montrer qu'on a $I = \frac{1}{4}\pi^2$.



Le contour modifié générique

et dans la limite $\varphi \downarrow 0$

Un peu de géométrie complexe

18. La sphère de Riemann

Définition de la sphère de Riemann (topologique/analytique). Comme dit dans l'introduction de §15, la *sphère de Riemann* $\overline{\mathbf{C}}$ est l'élargissement du plan complexe \mathbf{C} avec un élément à l'infini qu'on notera d'habitude par ∞ , mais que je noterai par $\overline{\infty}$ pour le distinguer de l'élément plus-infini dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ qui “complète” la droite réelle à droite [5.1]. On a donc

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\overline{\infty}\} .$$

Pour définir une topologie sur $\overline{\mathbf{C}}$ on introduit d'abord les ensembles $D_r(\overline{\infty}) \subset \overline{\mathbf{C}}$, $r > 0$ par

$$D_r(\overline{\infty}) = \{\overline{\infty}\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > r\}$$

et ensuite on dit qu'un sous-ensemble $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ est un ouvert si

$$\forall a \in U \exists r > 0 : D_r(a) \subset U .$$

Dans le cas $U \subset \mathbf{C}$ on retrouve donc la définition usuelle et dans le cas $\overline{\infty} \in U$ cela veut dire qu'il existe $r > 0$ tel que tout z avec $|z| > r$ appartient à U . Les voisinages “élémentaires” du point à l'infini $\overline{\infty}$ sont donc les anneaux extérieurs $|z| > r$, de plus en plus “petit” quand r devient plus grand. Autrement dit, les éléments “proche de $\overline{\infty}$ ” sont les nombres complexes qui sont grand en valeur absolue, ce qui correspond bien avec l'idée que $\overline{\infty}$ est “à l'infini.” On constate facilement que cette topologie est séparée : pour $z \in \mathbf{C}$ les deux voisinages ouverts $D_1(z)$ de z et $D_{|z|+1}(\overline{\infty})$ de $\overline{\infty}$ sont disjoints.

Remarque pour les comparateurs. La raison pourquoi je veux distinguer l'élément $\infty \in \overline{\mathbf{R}}$ de l'élément $\overline{\infty} \in \overline{\mathbf{C}}$ réside dans le fait que leur comportement par rapport aux opérations algébriques est différent. Plus précisément, on peut partiellement prolonger par continuité les opérations d'addition, multiplication, soustraction et division sur $\overline{\mathbf{R}}$ et $\overline{\mathbf{C}}$. Si on fait cela sur $\overline{\mathbf{R}}$, l'addition $\infty + \infty = \infty$ sera bien définie, tandis que dans $\overline{\mathbf{C}}$ l'addition $\overline{\infty} + \overline{\infty}$ est une forme indéterminée. Par contre, dans $\overline{\mathbf{R}}$ le quotient $1/0$ est une forme indéterminée (le problème réside dans le signe : est-ce ∞ ou $-\infty$), tandis que dans $\overline{\mathbf{C}}$ on a $1/0 = \overline{\infty}$. Une autre solution pour distinguer ces deux éléments, adoptée par certains auteurs, est d'écrire $+\infty$ pour l'élément dans $\overline{\mathbf{R}}$ (avec son opposé $-\infty$) et de noter ∞ sans le “+” pour l'élément dans $\overline{\mathbf{C}}$. Je n'ai pas opté pour cette différentiation, car pour rester cohérent, il fallait écrire aussi systématiquement $+3$ au lieu de 3 , ce qu'on ne fait (presque) jamais. Mais aussi parce qu'on n'écrit jamais $3 + +\infty = +\infty$.

Une fois qu'on a une topologie sur $\overline{\mathbf{C}}$ et donc la notion de limite et continuité par rapport à cette topologie [22.11], il devient intéressant de savoir comment ces notions se comparent avec les notions classiques de limite et continuité sur \mathbf{C} en termes de ε - δ et leurs extensions données dans [9.10]. Tant qu'on évite le point ∞ , la notion de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ en termes de ε - δ ne changera pas, car la topologie sur \mathbf{C} induite par la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$ est (par définition) la topologie habituelle de \mathbf{C} . Et ceci indépendamment du choix de domaine ou d'espace d'arrivé (dans $\overline{\mathbf{C}}$ ou \mathbf{R}^n). Par contre, si à la source et/ou à l'arrivé il s'agit du point ∞ , la définition classique avec ε - δ ne s'applique plus. Sachant que les voisinages de ∞ sont les anneaux extérieurs $D_r(\infty)$, le lecteur ne devrait pas être surpris du résultat suivant, qui relie la notion de limite topologique [22.11] avec les extension de la notion classique données dans [9.10].

→ **18.1 Lemme.** *Dans les trois cas qui nous intéressent particulièrement, on a les traductions de la notion de limite topologique [22.11] suivantes.*

- (i) *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert (y compris le cas $n = 2$ vu comme $U \subset \mathbf{C} \subset \overline{\mathbf{C}}$), soit $a \in \mathbf{R}^n$ un point d'accumulation de U et soit $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ une application. Alors on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si et seulement si*

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U \setminus \{a\} : \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M .$$

Dans le cas $n = 2$ on l'a écrit comme $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ [9.10].

- (ii) *Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert, soit ∞ un point d'accumulation de U , soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application et soit $\ell \in \mathbf{R}^n$ (y compris les cas $n = 2$ vu comme $\mathbf{C} \subset \overline{\mathbf{C}}$). Alors on a $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall z \in U \setminus \{\infty\} : |z| > r \Rightarrow \|f(z) - \ell\| < \varepsilon .$$

Dans le cas $n = 2$ on l'a écrit comme $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \ell$ [9.10].

- (iii) *Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert, soit ∞ un point d'accumulation de U et soit $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ une application. Alors on a $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si et seulement si*

$$\forall M > 0 \exists r > 0 \forall z \in U \setminus \{\infty\} : |z| > r \Rightarrow |f(z)| > M .$$

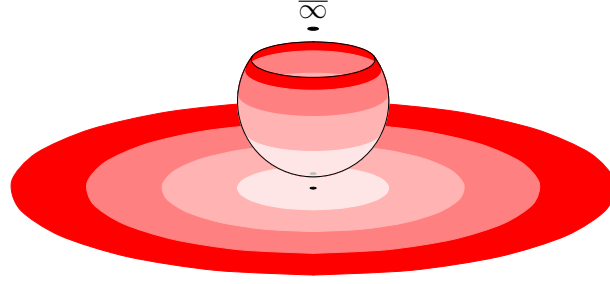
→ **18.2 Corollaire.** *L'application $\text{Inv} : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ définie par*

$$\text{Inv}(0) = \infty \quad , \quad \text{Inv}(\infty) = 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbf{C}^* : \text{Inv}(z) = \frac{1}{z}$$

est un homéomorphisme vérifiant $\text{Inv} \circ \text{Inv} = \text{Id}$.

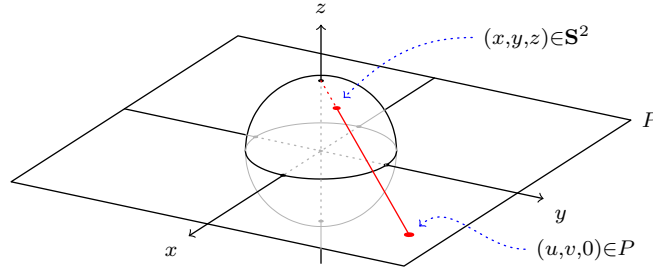
La sphère de Riemann comme $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$. L'image qu'on "doit" avoir de la sphère de Riemann est celle de la sphère unité $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ dans \mathbf{R}^3 . Pour comprendre pourquoi, on s'imagine le plan complexe $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ comme le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$ et on met le point ∞ au-dessus ce plan en $N = (0, 0, 1) \in \mathbf{R}^3$, un point qu'on interprète comme le pôle nord de la sphère \mathbf{S}^2 . Ensuite on dessine des cercles concentriques (de centre l'origine) sur P et on constate

que, selon la définition de la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$ ces cercles devraient se “rapprocher” de N quand leur rayon augmente.



Et dans \mathbf{R}^3 on a de la place pour faire cela. On lève ces cercles un petit peu, de plus en plus avec un rayon plus grand et ensuite on réduit le rayon pour que ces cercles se rapprochent du pôle nord N . L'image qu'on peut avoir est celle d'un morceau de tissu circulaire avec une ficelle entrelacé dans le bord qu'on serre pour “fermer” un sac.

Une façon de faire cela de façon mathématique est de considérer la projection stéréographique de la sphère \mathbf{S}^2 sur le plan P à partir du pôle nord $N = (0, 0, 1)$, mais en identifiant P avec \mathbf{R}^2 en oubliant la troisième coordonnée via $(u, v, 0) \in P \leftrightarrow (u, v) \in \mathbf{R}^2$. C'est l'application $\pi_N : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par la procédure suivante. Pour chaque point $(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ on a nécessairement $z < 1$ et donc la droite passant par le pôle nord N et (x, y, z) coupe le plan $P \cong \mathbf{R}^2$ dans un point unique (u, v) .



Un calcul élémentaire montre que cette application est donnée par

$$\pi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Réciproquement, pour tout point $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, la droite passant par $(u, v, 0) \in P$ et le pôle nord N coupe la sphère \mathbf{S}^2 dans un unique point $\psi_N(u, v) \in \mathbf{S}^2$ donné par

$$\psi_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \in \mathbf{S}^2.$$

Ainsi on obtient une bijection $\psi_N : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ avec réciproque $\psi_N^{-1} = \pi_N$ qu'on peut “étendre” en une bijection $\overline{\psi}_N$ entre $\overline{\mathbf{C}}$ et \mathbf{S}^2 en envoyant ∞ sur le pôle nord $(0, 0, 1)$.

18.3 Lemme. *L'application $\overline{\psi}_N : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{S}^2$ définie par*

$$\overline{\psi}_N(u + iv) = \psi_N(u, v) \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_N(\infty) = N \equiv (0, 0, 1)$$

est un homéomorphisme avec réciproque donnée par

$$(x, y, z) \neq N \Rightarrow \overline{\psi}_N^{-1}(x, y, z) = \pi_N(x, y, z) \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_N^{-1}(N) = \infty.$$

Avec la projection stéréographique du pôle nord on obtient donc un homéomorphisme entre $\overline{\mathbf{C}}$ et la sphère \mathbf{S}^2 ce qui explique qu'on parle d'une sphère (de Riemann) quand on parle de $\overline{\mathbf{C}}$. Il s'ensuit immédiatement que $\overline{\mathbf{C}}$ est un espace topologique compact, car \mathbf{S}^2 est une partie fermée et bornée de \mathbf{R}^3 . On aurait pu montrer cela directement à partir de la définition de la topologie sur $\overline{\mathbf{C}}$ (voir [18.4]), mais de cette façon on l'obtient presque gratuitement. Mais attention : c'est en tant qu'espace topologique qu'on identifie $\overline{\mathbf{C}}$ avec la sphère \mathbf{S}^2 . La structure de corps sur le sous-ensemble $\mathbf{C} = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{\infty\}$ n'existe pas sur $\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$.

18.4 Remarques pour le lecteur curieux. • Il existe plusieurs façons d'ajouter des points à l'infini ou de compactifier un espace topologique T . L'idée générale est de trouver un espace topologique compact C tel que T est homéomorphe à un sous-ensemble dense de C . Après identification de T avec ce sous-ensemble on aura la propriété $\overline{T} = C$, ce qui justifie (un peu) la notation avec la barre au-dessus l'espace pour noter une compactification. Dans le cadre de la géométrie projective, où on interprète la sphère de Riemann comme l'espace projectif complexe $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, on trouve d'une façon naturelle une autre façon de compactifier le plan complexe par l'espace projectif réel $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ en ajoutant tout un cercle de “points à l'infini” (voir [18.6]).

• La procédure pour mettre une topologie sur la sphère de Riemann, le plan complexe avec un (seul) point à l'infini ajouté, est un cas particulier d'une procédure en topologie générale appelé *compactification d'Alexandroff*.¹ C'est une procédure qui part d'un espace topologique (localement compact) T auquel on ajoute un seul point ∞ “à l'infini” pour obtenir un espace $\overline{T} = T \cup \{\infty\}$ qui sera compact. Un ensemble $O \subset \overline{T}$ sera ouvert si $O \subset T$ est un ouvert ou s'il existe un sous-ensemble $K \subset T$ compact tel que $O = \overline{T} \setminus K$.

18.5 La sphère de Riemann comme l'espace projectif $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. On a commencé à définir $\overline{\mathbf{C}}$ comme espace topologique “abstrait” en ajoutant un point “à l'infini.” Ensuite on a montré qu'il y a un homéomorphisme assez naturel entre cet espace abstrait $\overline{\mathbf{C}}$ et la sphère unité \mathbf{S}^2 dans \mathbf{R}^3 . Mais il y a encore une autre façon d'interpréter la sphère de Riemann : via la géométrie projective. L'idée de base de la géométrie projective (réelle ou complexe) est de remplacer les points dans \mathbf{K}^n (avec \mathbf{K} un corps arbitraire, ici pour nous $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}) par les sous-espaces de dimension 1 de \mathbf{K}^{n+1} . Pour simplifier l'écriture (et la lecture) on abrégera “sous-espace vectoriel de dimension 1” par “sev-1”. En géométrie projective on regarde donc l'ensemble de tous les sev-1 de \mathbf{K}^{n+1} qu'on note par $\mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$ ou $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$.² Sachant qu'un sev-1 est complètement déterminé par un (seul) vecteur de base et qu'un vecteur de base est un vecteur non-nul, on peut donc écrire

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{K}) = \{ \mathbf{K} \cdot v \mid v \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\} \} .$$

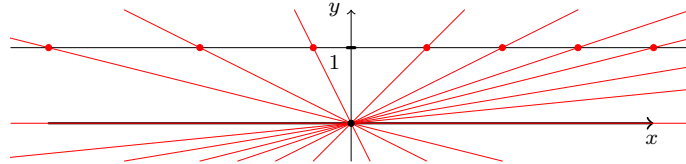
Si on note $P \subset \mathbf{K}^{n+1}$ l'hyperplan défini par $P = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1 \}$, alors il est immédiat qu'il y a une identification naturelle entre P et \mathbf{K}^n (on oublie la $n + 1$ -ième coordonnée) et que pour tout $x \in P$ il existe un unique sev-1

1. En anglais on parle de “one point compactification.”

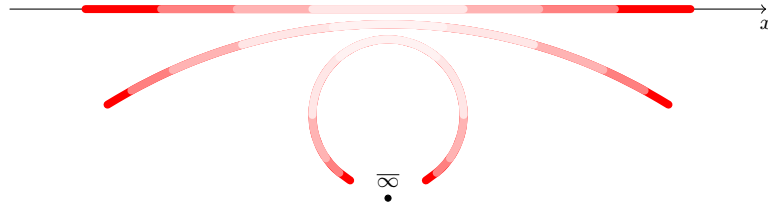
2. Dans la littérature on trouve aussi les notations $\mathbf{K}\mathbf{P}^n$, $\mathbf{P}^n\mathbf{K}$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$, ce qui prête à confusion, car ce n'est absolument pas un produit cartésien de n exemplaires d'un espace \mathbf{P} .

passant par ce x : celui qui a x comme vecteur de base. Ainsi on identifie “donc” \mathbf{K}^n comme un sous-ensemble des sev-1 dans \mathbf{K}^{n+1} . Les seules sev-1 qui manquent à l’appel sont les sev-1 avec un vecteur de base parallèle à P , c’est-à-dire de la forme $(x_1, \dots, x_n, 0)$.

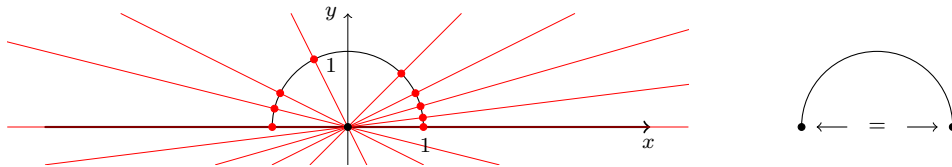
Concentrons nous d’abord sur le cas $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$, ce qui constitue avec le cas $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ les seuls cas qu’on peut raisonnablement dessiner. À part le sev-1 horizontal (l’axe des x), tous les autres sev-1 dans \mathbf{R}^2 coupent la droite $y = 1$ dans un point unique. Et quand on suit un point $(x, 1)$ vers l’infini, c’est-à-dire $x \rightarrow \infty$, on a bien l’impression que le sev-1 passant par $(x, 1)$ tend vers le sev-1 horizontal.



Mais la même chose se passe dans la limite $x \rightarrow -\infty$. On se trouve donc dans la situation où on peut identifier notre ensemble $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ avec l’ensemble \mathbf{R} augmenté d’un seul point ∞ (qui désigne ici donc le sev-1 horizontal manquant) et que les points $x \in \mathbf{R}$ qui sont “loin” (à gauche ou à droite) s’approchent du “point manquant” ∞ . On peut donc appliquer exactement le même raisonnement que pour la sphère de Riemann, identifier \mathbf{R} avec une droite horizontale dans \mathbf{R}^2 , mettre le nouveau point ∞ ici en-dessous de cette droite et approcher les deux extrémités $\pm\infty$ vers ce point.



La suggestion est forte que l’espace $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ est un cercle. Je parle bien d’une suggestion, car je n’ai pas mis de topologie sur cet espace. Cette suggestion sera d’autant plus forte quand on regarde une autre façon de décrire l’ensemble des sev-1 dans \mathbf{R}^2 . Pour cela prenons le demi cercle $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\}$. Chaque sev-1 coupe ce demi-cercle en un point unique, sauf le sev-1 horizontal, qui le coupe en deux points. Vu de cette façon, l’ensemble $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ s’identifie avec le demi cercle, à condition d’identifier les deux extrémités, ce qui en fait un cercle complet (mais d’un rayon plus petit!).



Et de nouveau on a la suggestion forte que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ est un cercle. Le résultat est que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ “est” la compactification d’Alexandroff de la droite réelle. À ne pas confondre avec la droite achevée $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, qui est aussi une compactification de la droite réelle, mais avec deux points supplémentaires. L’application $\arctan : \overline{\mathbf{R}} \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ fournit un homéomorphisme entre $\overline{\mathbf{R}}$ et l’intervalle compact $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ quand on pose $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}\pi$.

Quand on passe de $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ à $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, le raisonnement mathématique est identique, mais le dessin ne suit pas ! Car un sev-1 dans \mathbf{C}^2 s'identifie avec \mathbf{C} , ce qu'on devrait dessiner comme un plan, pas comme une droite, comme un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans \mathbf{R}^4 , quelque chose qu'on ne sait pas faire.³ Reprenons donc l'argumentation mathématique : un sev-1 dans \mathbf{C}^2 est représenté par un vecteur non-nul $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ et deux de tels vecteurs (z_1, w_1) et (z_2, w_2) représentent le même sev-1 s'il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $(z_2, w_2) = \lambda(z_1, w_1)$. Si un sev-1 est représenté par un vecteur (z, w) avec $w \neq 0$, alors il admet un unique vecteur de base de la forme $(z, 1)$. Et si $w = 0$, c'est nécessairement le sev-1 "horizontal" $\mathbf{C} \times \{0\}$. On peut donc représenter $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ par le "plan complexe" $\mathbf{C} \cong \{(z, 1) \mid z \in \mathbf{C}\}$ augmenté du seul sev-1 manquant $\mathbf{C} \times \{0\}$ notée ∞ . Et comme dans le cas de $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$, plus que $|z|$ est grand, plus que le sev-1 représenté par le point/vecteur de base $(z, 1)$ sera "proche" du sev-1 horizontal ∞ . Ainsi on rejoint donc la description de la sphère de Riemann topologique où la topologie sur $\overline{\mathbf{C}}$ nous dit que le point manquant ∞ est approché par les $z \in \mathbf{C}$ avec $|z|$ grand.

La triple interprétation de la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$. Pour résumer nos trois interprétations de la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ on commence avec l'interprétation topologique qui dit que c'est le plan complexe \mathbf{C} avec un point supplémentaire ∞ qui se trouve "ailleurs," "dans une autre dimension." L'interprétation géométrique dit que le point $z = u + iv \in \mathbf{C}$ représente le point

$$\psi_N(u + iv) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \in \mathbf{S}^2$$

de la sphère unité \mathbf{S}^2 et que le point ∞ représente le pôle nord $(0, 0, 1) \in \mathbf{S}^2$. Et finalement l'interprétation projective dit que le point $z \in \mathbf{C}$ représente le sous-espace vectoriel $V \subset \mathbf{C}^2$ de dimension 1 dans \mathbf{C}^2 dont $(z, 1)$ est un vecteur de base :

$$V = \mathbf{C} \cdot (z, 1) \subset \mathbf{C}^2$$

et que le point ∞ représente le sous-espace vectoriel $\mathbf{C} \cdot (1, 0) \subset \mathbf{C}^2$.

Remarque pour le lecteur curieux. Je n'ai pas mis une topologie sur $\mathbf{P}_n(K)$, mais c'est assez facile à faire : un sous-ensemble $U \subset \mathbf{P}_n(K)$ est un ouvert s'il existe un ouvert $O \subset K^{n+1} \setminus \{0\}$ tel qu'on a

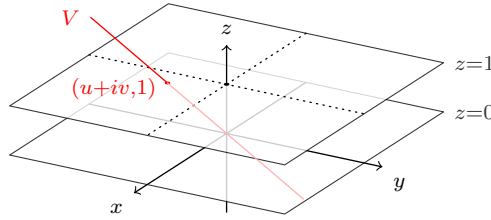
$$V \in U \iff V \cap O \neq \emptyset.$$

Il n'est pas non plus très difficile de montrer que cette topologie sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ correspond avec la topologie du cercle $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ et que cette topologie sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ correspond avec la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$, et donc avec la topologie de la sphère $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$.

18.6 Remarque pour le lecteur curieux : l'espace $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Quand on voit dans la description de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ la remarque que le point $(w = u + iv, 1)$ représente le sous-espace vectoriel $V = \mathbf{C} \cdot (w, 1) \subset \mathbf{C}^2$, il est naturel de penser qu'on peut bien

3. Si, on sait le faire, comme on sait dessiner un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans \mathbf{R}^3 sur une feuille de dimension 2, par des projections. Mais contrairement à l'habitude qu'on a à interpréter de telles dessins, on est physiquement incapable d'interpréter raisonnablement de telles projections de \mathbf{R}^4 sur une feuille.

dessiner ce plan complexe $(w, 1)$ comme sous-espace affine dans \mathbf{R}^3 comme le plan $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 1\}$ et donc de faire le dessin suivant.



Le problème avec ce dessin est qu'il manque une dimension au sous-espace vectoriel V , car V est isomorphe à un plan complexe, pas à une droite réelle. La tentation sera donc presque irrésistible de penser que le plan $z = 0$ est constitué de beaucoup de sous-espaces de dimension 1, par analogie avec le dessin de V . Et rien n'est plus faux, car le plan $z = 0$ (avec ici z le troisième coordonnée dans \mathbf{R}^3 , pas une variable complexe) représente un seul sous-espace vectoriel de dimension 1 dans \mathbf{C}^2 , à savoir l'espace $\mathbf{C} \cdot (1, 0)$. Plus précisément, l'axe vertical représente un (sous-)espace de dimension 2, quelque chose qu'on ne peut plus dessiner convenablement.

Par contre, ce dessin est parfaitement bien adapté à une représentation de l'ensemble $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Un sous-espace V de dimension 1 dans \mathbf{R}^3 est représenté par un vecteur de base, c'est-à-dire par un vecteur non-nul $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ comme $V = \mathbf{R} \cdot (x, y, z)$. Si on est dans la situation $z \neq 0$, alors un tel sous-espace admet un unique vecteur de base de la forme $(x, y, 1)$. Ainsi le hyper-plan $z = 1$ dans \mathbf{R}^3 représente bijectivement tous les sous-espaces $V \subset \mathbf{R}^3$ de dimension 1 avec un vecteur de base dont la troisième composante est non-nulle. Et c'est exactement ce qui est représenté par le dessin ci-dessus. Mais dans cette situation ce n'est pas un seul sous-espace (de dimension 1) qui manque, c'est tous les sous-espaces engendrés par un vecteur (non-nul) de la forme $(x, y, 0)$. Autrement dit, ce qui manque est un ensemble en bijection avec $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$.

Soit maintenant $(x, y, 0)$ un vecteur non nul représentant un des sous-espaces de dimension 1 manquant et soit $\lambda > 0$. Alors on peut considérer le point $(\lambda x, \lambda y, 1)$ dans le plan $z = 1$ qui représente (donc) le sous-espace $\mathbf{R} \cdot (\lambda x, \lambda y, 1)$. Mais on a l'égalité

$$\mathbf{R} \cdot (\lambda x, \lambda y, 1) = \mathbf{R} \cdot \left(x, y, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Il s'ensuit que dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$ le sous-espace représenté par le point $(\lambda x, \lambda y, 1)$ tend intuitivement vers le sous-espace manquant $\mathbf{R} \cdot (x, y, 0)$. C'est pourquoi on appelle ce sous-espace manquant $\mathbf{R} \cdot (x, y, 0)$ le *point à l'infini dans la direction (x, y)* . Sauf qu'on obtient le même sous-espace manquant en prenant la limite $\lambda \rightarrow -\infty$. Ce point à l'infini dans la direction (x, y) se trouve donc des deux côtés. C'est le même phénomène qu'on a vu dans la description de $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ où le sous-espace horizontal se trouvait proche des deux extrémités $\pm\infty$ de la droite réelle.

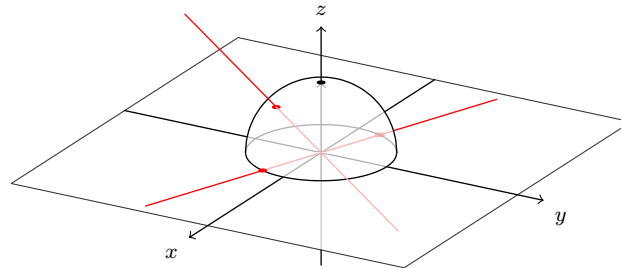
Le fait que le point à l'infini dans la direction (x, y) se trouve des deux côtés se voit encore plus simplement quand on généralise l'idée utilisé pour $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ de représenter un sous-espace par un point du demi-cercle unité. Ici on regarde "donc" la demi-sphère \mathbf{S}_+^2 définie par

$$\mathbf{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}.$$

Alors tout sous-espace de dimension 1 engendré par un vecteur (x, y, z) avec $z \neq 0$ coupe \mathbf{S}_+^2 dans un point unique, à savoir le point

$$\frac{|z|}{z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (x, y, z) .$$

Par contre, tout sous-espace de dimension 1 engendré par un vecteur non-nul de la forme $(x, y, 0)$ coupera \mathbf{S}_+^2 dans deux points opposés.



Ainsi on obtient l'image que $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$, l'espace projectif réel de dimension 2, s'identifie avec la demi-sphère supérieure où il faut identifier des points opposés sur l'équateur. C'est un espace (variété différentiable) non-orientable compact. C'est donc un exemple d'une compactification de \mathbf{R}^2 avec une infinité de points.

19. Fonctions holomorphes sur et vers la sphère de Riemann

Dans §18 on a introduit la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$ comme extension du plan complexe \mathbf{C} et on a vu plusieurs façons d'interpréter cet ensemble. Le but ici sera de considérer des fonction sur et vers cette sphère de Riemann. La motivation principale est le résultat que les fonctions méromorphes sur un ouvert de \mathbf{C} s'interprètent naturellement comme des fonctions holomorphes à valeurs de $\overline{\mathbf{C}}$ et vice-versa. Mais une fois qu'on a accepté l'idée de considérer des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$, c'est naturel de vouloir aussi considérer des fonctions définie sur $\overline{\mathbf{C}}$. Dans ce contexte on "découvre" que les polynômes prennent une place particulière dans le sens que les seuls fonctions entières qui sont méromorphe sur $\overline{\mathbf{C}}$ sont les polynômes et que les seules fonctions méromorphes sur $\overline{\mathbf{C}}$ sont les fractions rationnelles. Commençons donc avec la motivation pour la notion de fonction holomorphe sur $\overline{\mathbf{C}}$.

Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, $a \in \mathbf{C}$ une singularité isolée de f et $\ell \in \mathbf{C}$. Définissons ensuite l'ouvert $V = U \cup \{a\}$ et la fonction $g : V \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(a) = \ell \quad \text{et} \quad \forall z \in U : g(z) = f(z) .$$

Alors c'est une conséquence immédiate de [14.6] que g est holomorphe sur V si et seulement si elle est continue sur V . Autrement dit, quand on peut prolonger une fonction holomorphe par continuité dans une singularité isolée, alors on peut le faire d'une façon analytique. Ce qui n'est certainement pas le cas pour des fonctions réelles : la fonction $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = x$ pour $x > 0$, qui est bien analytique sur \mathbf{R}^* , se prolonge par continuité en $x = 0$ en posant $f(0) = 0$, mais le résultat n'est pas dérivable en $x = 0$. On utilise cette propriété de fonctions holomorphes pour étendre la notion d'holomorphie vers les fonctions définies sur des ouverts de $\overline{\mathbf{C}}$.

19.1 Définitions (une première extension de la notion d'holomorphie). •

Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est holomorphe (sur U) si elle est continue et si sa restriction $f : U \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe dans le sens ordinaire.

- Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. S'il existe $r > 0$ tel que $D_r(\infty) \setminus \{\infty\} \subset U$, alors on dit que ∞ est une singularité isolée de f . Sa classification comme singularité effaçable, pôle ou singularité essentielle est la classification de la singularité isolée $w = 0$ de la fonction holomorphe $g : D_{1/r}(0)^* \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(w) = f(1/w)$.

- Une fonction méromorphe sur un ouvert $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ est une fonction holomorphe f (dans le sens ci-dessus) définie sur U privé d'un sous-ensemble $S \subset U$ sans point d'accumulation dans U telle que aucun élément de S est une singularité (isolée) essentielle de f (dans le cas $\infty \in S$ dans le sens ci-dessus).

→ **19.2 Lemme.** Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert contenant ∞ , soit $r > 0$ tel que $D_r(\infty) \subset U$ et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Alors f est holomorphe dans le sens [19.1] si et seulement si la restriction $f : U \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ et la fonction $g : D_{1/r}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ définie

par

$$g(0) = f(\infty) \quad \text{et} \quad \forall z \in D_{1/r}(0)^* : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

sont holomorphes dans le sens ordinaire.

→ **19.3 Corollaire.** Soit $f : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, alors f est constante.

→ **19.4 Lemme.** Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Alors f est méromorphe sur $\overline{\mathbf{C}}$ si et seulement si c'est un polynôme.

19.5 Proposition. Une fonction f est méromorphe sur $\overline{\mathbf{C}}$ si et seulement s'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ avec $Q \neq 0$ tel que $f = P/Q$, c'est-à-dire que si $S \subset \overline{\mathbf{C}}$ est un sous-ensemble sans point d'accumulation dans $\overline{\mathbf{C}}$ tel que $f : \overline{\mathbf{C}} \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe, alors

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus S : f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

et donc en particulier les zéros de Q sont inclus dans S .

L'extension de la notion d'holomorphicité pour des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$ n'est pas aussi facile que l'extension de cette notion pour des fonctions définies sur $\overline{\mathbf{C}}$. L'idée de base est le même que l'idée qui est sous-jacente à [19.2] : l'application $\text{Inv} : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ échange 0 et ∞ et est holomorphe sur \mathbf{C}^* . Dans [19.2] on l'a utilisé pour montrer que f est holomorphe sur $D_r(\infty)$ (un voisinage ouvert de ∞) si (et seulement si) la fonction $f \circ \text{Inv}$ est holomorphe sur $D_{1/r}(0)$ (un voisinage ouvert de 0). Pour une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$ on va utiliser la même technique : si $f(z) = \infty$, alors $(\text{Inv} \circ f)(z) = 0$, ce qui permettra de définir l'holomorphicité de f dans de tels points par l'holomorphicité de $\text{Inv} \circ f$ dans ces mêmes points.

19.6 Définition (une deuxième extension de la notion d'holomorphicité). Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ une fonction. Alors on dit que f est holomorphe (sur U) si elle est continue et si les deux fonctions

$$f : \{z \in U \mid f(z) \neq \infty\} \rightarrow \mathbf{C}$$

et

$$g : \{z \in U \mid f(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{définie par} \quad g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

sont holomorphes dans le sens [19.1] (avec le sous-entendu que $1/\infty = 0$). La condition préalable que f soit continue nous assure que les domaines de définition de ces deux fonctions à valeurs dans \mathbf{C} sont des ouverts de $\overline{\mathbf{C}}$.

Ⓟ **19.7 Proposition.** Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ une fonction holomorphe dans le sens [19.6] et non-identiquement ∞ . Alors l'ensemble

$$S = \{z \in U \mid f(z) = \infty\}$$

n'a pas de point d'accumulation dans U et la fonction $f : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ est méromorphe sur U (dans le sens [19.1]).

Réciproquement, si g est une fonction méromorphe (dans le sens [19.1]) sur U et si $S \subset U$ est un ensemble sans point d'accumulation dans U tel que $g : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe (dans le sens [19.1]), alors il existe une unique fonction holomorphe (dans le sens [19.6]) $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ telle que $g = f|_{U \setminus S}$.

→ **19.8 Corollaire.** *Une application $f : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ est holomorphe si et seulement s'il existe deux polynômes sans facteur en commun $P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ et $Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ (avec $b_n \neq 0$) tels qu'on a*

$$f(\infty) = \begin{cases} 0 & m < n \\ a_n/b_n & m = n \\ \infty & m > n \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbf{C} : f(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)} & Q(z) \neq 0 \\ \infty & Q(z) = 0 \end{cases}$$

Avec [19.7] on a établi une bijection entre l'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ et l'ensemble des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$ (à l'exception de la fonction identiquement ∞). Ou plus précisément : une bijection définie sur les classes d'équivalence de fonctions méromorphes, car si on "rajoute" quelques singularités effaçables (ce qui veut dire qu'on retire quelques points du domaine de définition de la fonction méromorphe), la fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$ ne changera pas. Mais c'est exactement ce qu'on voulait pour la vision géométrique des fonctions méromorphes ! Une fonction méromorphe dans le sens [15.2] est "l'ombre" d'une fonction holomorphe à valeurs dans la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$ dont on a enlevé un ensemble sans point d'accumulation de son domaine de définition pour ne plus avoir le point ∞ dans son image.

En ce qui concerne l'aspect algébrique des fonctions méromorphes, on a vu dans [19.5] que l'ensemble des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$ est le corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(X)$. Et dans [Rud66, Thm 15.11]/[Rud98] le lecteur trouvera la preuve que pour tout ouvert connexe $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ différent de $\overline{\mathbf{C}}$ entier, l'ensemble des fonctions méromorphes sur U est égal au corps des fractions associé à l'anneau intègre des fonctions holomorphes sur U [9.20].

20. Intermède : la vision géométrique

Quand on regarde la définition d'une fonction holomorphe définie sur $\overline{\mathbf{C}}$ et/ou à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$, on pourrait avoir l'impression que ce sont des définition un peu ad-hoc : on "prolonge" par continuité, on regarde la fonction $1/f(z)$ et cætera. Pour voir que cet aspect ad-hoc n'est qu'illusoire il faut passer par la vision géométrique d'une application entre deux variétés (différentiables). Dans cette section je donnerai un aperçu de l'approche géométrique pour sensibiliser le lecteur. À l'aide de la variété différentiable \mathbf{S}^2 on verra les notions de carte et d'atlas, mais cela restera superficielle et je passerai un certain nombre de détails sous le tapis.

Dans un premier temps on "remplace" l'ensemble $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ par \mathbf{S}^2 et on se concentre sur la question comment on peut définir la notion d'une application différentiable $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie sur un ouvert V de la sphère \mathbf{S}^2 . L'idée qui vient naturellement à l'esprit est d'appliquer simplement la définition usuelle d'une fonction différentiable : f est différentiable en $x \in V \subset \mathbf{S}^2$ s'il existe une matrice/application linéaire A telle que

$$(20.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 .$$

Mais on a tout de suite le problème qu'on ne peut pas prendre $h \in \mathbf{R}^3$ arbitraire, même pas si on le prend suffisamment petit, car il n'y a aucune raison que la somme $x+h$ reste sur la sphère. Il vaut donc mieux l'écrire sous la forme

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \mathbf{S}^2}} \frac{\|f(y) - f(x) - A(y-x)\|}{\|y-x\|} = 0 .$$

Écrite sous cette forme, l'expression a bien un sens, mais malheureusement avec la contrainte $y \in \mathbf{S}$ il est facile de montrer que l'application A n'est pas unique (si elle existe). On est donc obligé de conclure que l'approche "classique" ne marche pas. La raison est assez simple : dans le fond une fonction définie sur (une partie de) \mathbf{S}^2 dépend de deux variables réelles (c'est une surface), pas de trois, bien que un élément dans la source s'écrit comme un vecteur dans \mathbf{R}^3 .

Une fois qu'on a fait cette observation, il est naturel de vouloir utiliser des coordonnées sur la sphère pour exprimer la valeur d'une fonction $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ et pas les trois coordonnées de l'espace ambiant \mathbf{R}^3 . Les coordonnées qui viennent le plus naturellement à l'esprit sont les coordonnées sphérique (φ, θ) longitude et latitude avec lesquelles on indique un point sur la sphère terrestre. Mais on peut aussi penser aux coordonnées d'un plan de ville (sous forme G4-E6). Dans la modélisation de la météo, on exprime la température T comme une fonction $T(\varphi, \theta)$ des coordonnées sphérique, on suppose qu'elle est différentiable et qu'elle vérifie une certaine équation différentielle. Vient alors la question : que se passe-t-il avec cette fonction $T(\varphi, \theta)$ si on l'exprime en termes des coordonnées d'un plan d'un ville ? Est ce qu'elle reste différentiable en termes de ces coordonnées ? Pour pouvoir répondre, il faut préciser ce qu'on entend par coordonnées sur (une partie de) la sphère.

Ainsi on arrive à la définition d'une *carte* pour (une partie de) la sphère \mathbf{S}^2 comme une application injective de classe C^∞ (mais on peut considérer des classes de différentiabilité moindre) $\psi : U \rightarrow \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ avec U un ouvert de \mathbf{R}^2 telle que la

différentielle $D\psi$ a partout rang 2.⁴ On a déjà rencontré deux de telles cartes : les coordonnées stéréographiques données par l'application $\psi :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbf{S}^2$ donnée par

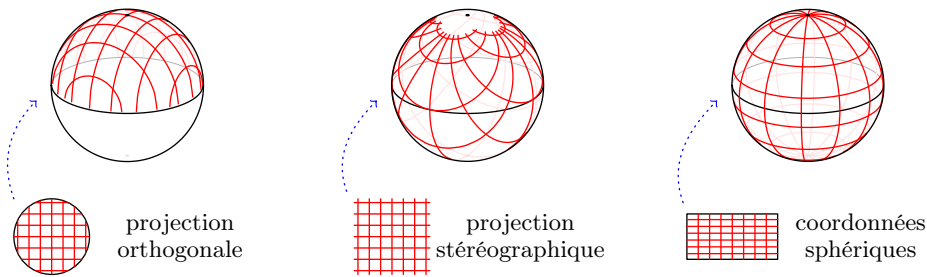
$$\psi(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

et la projection stéréographique du pôle nord (ou plutôt son inverse) $\psi_N : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ donnée par

$$\psi_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Mais il est facile d'imaginer d'autres cartes, comme par exemple la projection orthogonale (inverse) $\psi : B_1((0, 0)) \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ définie par

$$(20.2) \quad \psi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$



Bien qu'il est d'habitude d'appeler l'application $\psi : U \rightarrow \mathbf{S}^2$ la carte, c'est son inverse qui donne les coordonnées d'un point de la sphère : pour $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2$ on a $\psi^{-1}(\mathbf{x}) = (u, v) \in U$ et c'est le couple (u, v) qu'on appelle les coordonnées (locales) du point $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2$. Avec la définition d'une carte, on peut maintenant définir ce qu'on entend par "exprimer une fonction en coordonnées locales" : si $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une application et $\psi : U \rightarrow \mathbf{S}^2$ est une carte, alors la composée $f \circ \psi : \psi^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{R}^n$ est l'expression de la fonction f dans les coordonnées locales (u, v) données par la carte ψ . Et c'est exactement cela ce qu'on fait quand on écrit la température T sur terre comme une fonction des coordonnées sphériques longitude et latitude (φ, θ) . L'expression d'une fonction sur \mathbf{S}^2 en coordonnées locales est bien une fonction de deux variables et on peut utiliser la définition habituelle pour dire si cette expression est différentiable ou non. Sauf qu'il faut, comme dans la discussion informelle ci-dessus, se poser la question ce qui se passe quand on exprime la même fonction en deux systèmes de coordonnées locales différentes : obtient-on la même réponse sur la dérivabilité ?

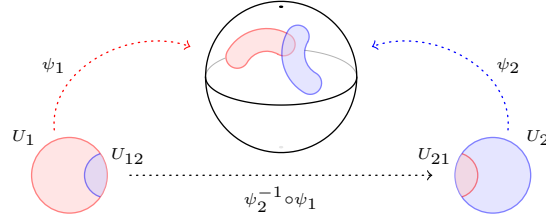
C'est ici que le théorème des fonctions implicites nous aide, car avec ce théorème on peut montrer le résultat suivant. Soient $\psi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{S}^2$ et $\psi_2 : U_2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ deux cartes, alors les images $\psi_i(U_i)$ sont des ouverts de \mathbf{S}^2 , les deux ensembles $U_{12} \subset U_1$ et $U_{21} \subset U_2$ définis comme

$$U_{12} = \psi_1^{-1}(\psi_2(U_2)) \quad \text{et} \quad U_{21} = \psi_2^{-1}(\psi_1(U_1))$$

sont des ouverts (de \mathbf{R}^2) et l'application $\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : U_{12} \rightarrow U_{21}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ (ou moindre si au départ on a considéré des classes de différentiabilité

4. Attention : il ne faut pas confondre la notion de "carte" avec la définition d'une sous-variété ! Une partie de la définition d'une sous-variété (comme la sphère) ressemble très fortement à la définition d'une carte, mais contient une condition supplémentaire essentielle.

moindre pour les cartes).

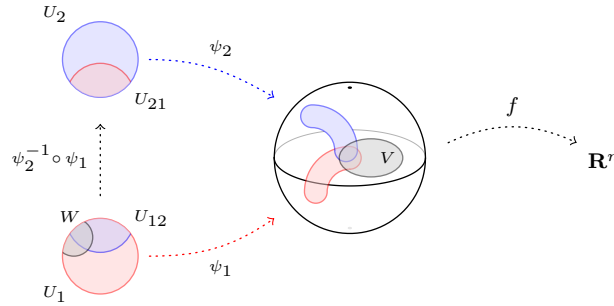


Pour les points dans l'ouvert $\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$ on a donc deux systèmes de coordonnées locales données par les deux cartes ψ_1 et ψ_2 . Si $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction sur V , alors sur l'ouvert $V \cap \psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$ on peut exprimer f dans les deux systèmes de coordonnées. Pour voir le lien entre ces deux façons d'exprimer f , on définit l'ouvert $W \subset U_1$ par

$$W = \psi_1^{-1}(\psi_2(U_2) \cap V) \subset \psi_1^{-1}(V) .$$

Pour $(u, v) \in W$ on aura entre autres $\psi_1(u, v) \in \psi_2(U_2)$, ce qui permet de faire le calcul

$$(20.3) \quad (f \circ \psi_1)(u, v) = ((f \circ \psi_2) \circ (\psi_2^{-1} \circ \psi_1))(u, v) = (f \circ \psi_2)((\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(u, v)) .$$



Autrement dit, sur W l'expression $f \circ \psi_1$ de la fonction f dans les coordonnées locales données par ψ_1 est la composée de son expression $f \circ \psi_2$ dans les coordonnées locales données par ψ_2 avec l'application $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞ . En échangeant les rôles des deux cartes, on voit que la notion de différentiabilité de la fonction f (en un point) ne dépend pas du choix d'une carte pour l'exprimer en coordonnées locales.

Une fois qu'on sait ce que c'est une fonction différentiable $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$, il faut attaquer la question d'une fonction holomorphe $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$. Et là on a un problème! Car si l'expression de f dans une carte $\psi : U \rightarrow \mathbf{S}^2$ est une application holomorphe $f \circ \psi : U \subset \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, il est hautement improbable que son expression dans une autre carte sera aussi holomorphe. Prenons par exemple les deux cartes ψ_N de la projection stéréographique du pôle nord et ψ définie en (20.2) et supposons que la composée $f \circ \psi_N : \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est l'application holomorphe identité :

$$(f \circ \psi_N)(z = x + iy \cong (x, y)) = z .$$

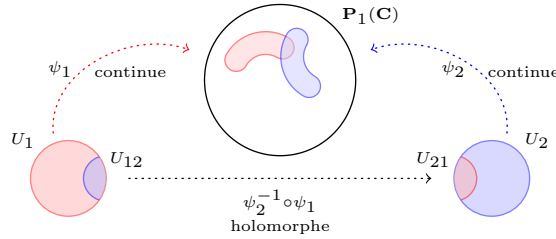
Quand on exprime cette fonction f dans la carte ψ on trouve

$$\begin{aligned} (f \circ \psi)(w = u + iv) &= (f \circ \psi_N \circ \psi_N^{-1} \circ \psi)(u, v) = (f \circ \psi_N)((\pi_N \circ \psi)(u, v)) \\ &= (f \circ \psi_N)\left(\frac{u + iv}{1 - \sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) = \frac{w}{1 - \sqrt{1 - w\bar{w}}} . \end{aligned}$$

Et malheureusement ceci n'est pas une fonction holomorphe (en w , là où elle est définie). La "solution" consiste à dire qu'on ne veut pas de cette nouvelle carte. Mais

dit comme ça, ce n'est pas une solution très convaincante. Faisons donc un détour via la représentation de la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$ par l'espace projectif $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Quand on pose la question comment on peut définir la notion d'une application différentiable (ou holomorphe) définie sur l'espace $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension (complexe) 1 dans \mathbf{C}^2 , on ne peut plus utiliser la notion de carte qu'on a utilisé pour la sphère \mathbf{S}^2 , car que veut dire qu'une application $\psi : U \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est différentiable (de classe C^∞, \dots) ? L'ensemble $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ ne se trouve pas (d'une façon naturelle) dans un espace vectoriel. On dispose d'une topologie sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, mais pas d'une structure vectoriel. La théorie des variétés différentiables (réelles ou complexes) nous donne la définition suivante. On se donne un *atlas (holomorphe)* sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, ce qui veut dire qu'on fournit un recouvrement par ouverts $\mathcal{V} = \{V_i \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \mid i \in I\}$ de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, et pour chaque $i \in I$ un ouvert $U_i \subset \mathbf{C}$ et un homéomorphisme $\psi_i : U_i \rightarrow V_i$ de sorte que les applications $\psi_j^{-1} \circ \psi_i$ soient holomorphes sur leurs domaines de définition. Le dessin qui illustre cela est le même que pour les cartes pour la sphère \mathbf{S}^2 , mais le point de départ est tout-à-fait différent : dans le cas des cartes pour la sphère on avait des applications différentiables vers $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ et le théorème des fonctions implicites nous disait que les applications $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ sont différentiables. Ici on sait seulement que les applications sont continues et on sélectionne les applications pour que les composées $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ sont holomorphes.



Il va de soi qu'une telle application $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est appelée une *carte (holomorphe) de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$* . C'est l'ensemble des cartes $\{\psi_i : U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ qu'on appelle un *atlas (holomorphe)* pour $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. On dit aussi qu'une telle atlas confère la structure d'une variété complexe à l'espace topologique $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Et ensuite on dit qu'une application $f : V \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe si (et seulement si) la composée $f \circ \psi_i : \psi_i^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe pour toute carte dans l'atlas. La définition d'un atlas garantit qu'il n'y aura pas de contradictions dans cette définition. Pour rendre cette définition plus intrinsèque il faut passer par les notions d'atlas maximal, d'équivalence d'atlas et plus encore, mais pour cela je renvoie le lecteur à la littérature.

Revenons maintenant à la sphère $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ et la question comment définir la notion d'une fonction holomorphe $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C}$. Avec la discussion sur la structure d'une variété complexe en tête, il faut choisir un atlas holomorphe pour \mathbf{S}^2 . Sachant qu'une seule carte ne peut pas suffire (la sphère \mathbf{S}^2 n'est homéomorphe à aucun ouvert de \mathbf{R}^2), le choix habituel est de prendre la carte ψ_N déjà définie et la carte ψ_S définie comme

$$\psi_S(w = u + iv) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Un calcul élémentaire nous donne la formule

$$(\psi_N^{-1} \circ \psi_S)(w) = \frac{1}{w},$$

ce qui est bien holomorphe sur son domaine de définition. On peut remarquer que ψ_s est lié à la projection stéréographique à partir du pôle sud : la projection stéréographique à partir du pôle sud $\pi_s : \mathbf{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est donnée par

$$\pi_s(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

et pour sa réciproque on a la formule

$$\pi_s^{-1}(u, v) = \psi_s(u, -v) \quad \text{ou encore} \quad \psi_s(w) = \pi_s^{-1}(\overline{w}) .$$

Bien sûr, on aurait pu choisir d'autres cartes à la place de ψ_s pour couvrir le pôle nord (qui manque à la carte ψ_N), mais la théorie abstraite des variétés complexes nous dit que cela revient au même ! C'est donc bien un choix arbitraire, mais sans importance du point de vue d'une variété complexe. Et quand on regarde l'aspect plus abstraite de la sphère de Riemann sous l'angle de l'espace $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ il y a un choix naturel pour ces deux cartes : pour la première carte on choisit l'application $\psi_1 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ définie par

$$\psi_1(z) = \mathbf{C} \cdot (z, 1) ,$$

une application qu'on a déjà rencontré implicitement dans [18.5]. Et pour la deuxième carte on choisit l'application $\psi_2 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ définie par

$$\psi_2(w) = \mathbf{C} \cdot (1, w) .$$

Il est alors immédiat qu'on a la formule $(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)(w) = 1/w$.

Avec cette définition d'une structure de variété complexe sur \mathbf{S}^2 fournie par les deux cartes ψ_N et ψ_s , on obtient la définition qu'une application $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe si les deux composées $f \circ \psi_N : \psi_N^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{C}$ et $f \circ \psi_s : \psi_s^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{C}$ sont holomorphes. En suivant la discussion qui nous a amené à la formule (20.3) on constate qu'on a l'égalité

$$(f \circ \psi_s)(w) = (f \circ \psi_N)((\psi_N^{-1} \circ \psi_s)(w)) = (f \circ \psi_N)\left(\frac{1}{w}\right) ,$$

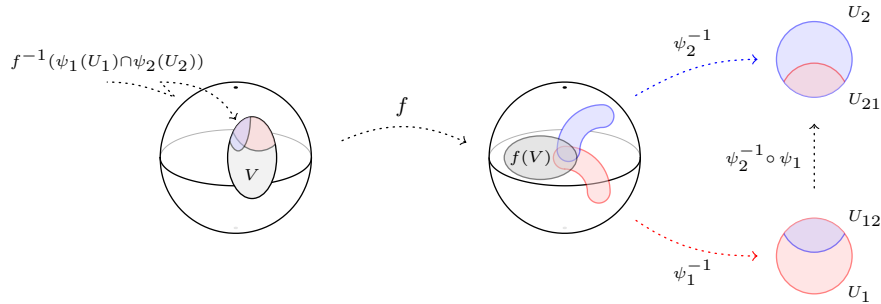
valable sur l'ouvert $W = \psi_s^{-1}(\psi_N(\mathbf{C}) \cap V)$. Pour faire le lien avec la définition qu'on a donné dans [19.1] et l'équivalence donnée dans [19.2] on commence avec le rappel qu'on a identifié $\overline{\mathbf{C}}$ avec \mathbf{S}^2 à l'aide de l'application $\overline{\psi}_N$, l'extension de ψ_N avec $\overline{\psi}_N(\infty) = (0, 0, 1)$ le pôle nord. Dans cette optique, l'application $f \circ \psi_N$ n'est rien d'autre que la restriction de l'application f à \mathbf{C} . Mais si on identifie "donc" l'expression $f \circ \psi_N$ de l'application $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ dans la carte ψ_N avec (la restriction de) l'application f elle-même sur \mathbf{C} , l'expression $f \circ \psi_s$ dans la carte ψ_s n'est rien d'autre que l'application g donnée dans [19.2] : $g(w) = f(1/w) \cong (f \circ \psi_N)(1/w)$. Et on retrouve l'équivalence que $f : V \subset \overline{\mathbf{C}} \cong \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe si (et seulement si) les deux applications $f \circ \psi_N \cong f|_{\mathbf{C}}$, la restriction de f à \mathbf{C} et $f \circ \psi_s \cong g$ sont holomorphe sur leurs domaines respectifs. Le fait qu'on regarde (dans [19.2]) les deux fonctions $f(z)$ et $f(1/z)$ sur des domaines convenables est donc lié au choix de l'atlas holomorphe pour $\overline{\mathbf{C}} \cong \mathbf{S}^2$. Tout autre choix pour la deuxième carte dans un atlas holomorphe pour $\overline{\mathbf{C}} \cong \mathbf{S}^2$ (pour couvrir le pôle nord) aurait donné un résultat similaire, sauf qu'un autre choix aurait donné des formules encore plus bizarres que la simple fonction $g(w) = f(1/w)$.

Maintenant qu'on sait définir la notion d'une application différentiable ou holomorphe définie sur (un ouvert de) la sphère, regardons comment on peut définir la notion d'une application différentiable ou holomorphe à valeurs dans \mathbf{S}^2 . On regarde donc une application $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ définie sur un ouvert V et à valeurs dans la sphère. Pour la notion de différentiabilité la réponse est extrêmement simple :

la sphère \mathbf{S}^2 est incluse dans l'espace \mathbf{R}^3 et toute fonction à valeurs dans \mathbf{S}^2 peut donc être vu comme une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel \mathbf{R}^3 pour laquelle on sait définir la notion de différentiabilité. Mais une application à valeurs dans \mathbf{R}^3 ne peut pas être holomorphe. Un problème similaire se produit déjà pour la différentiabilité quand on remplace \mathbf{S}^2 par l'espace projectif $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$: comment définir la notion de différentiabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$? Car déjà le numérateur dans (20.1) n'a plus de sens, faute d'une addition/soustraction dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. En théorie des variétés différentiables la "solution" est la même : on utilise une carte pour identifier $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ localement avec un ouvert d'un espace vectoriel (ici donc \mathbf{C}) et on utilise cette représentation locale pour définir la notion de différentiabilité ou d'holomorphicité. Ainsi on donne la définition suivante : si $\psi : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2$ est une carte dans un atlas holomorphe pour la sphère, alors ψ^{-1} prend ses valeurs dans $U \subset \mathbf{C}$. Pour notre fonction f à valeurs dans \mathbf{S}^2 on dit "donc" qu'elle est holomorphe si (et seulement si) la composée $\psi^{-1} \circ f$ est holomorphe pour toute carte dans un atlas holomorphe de \mathbf{S}^2 , où il faut bien évidemment restreindre le domaine aux points dans l'image réciproque de la carte $\psi(U) \subset \mathbf{S}^2$. Et pour que cela marche, on a un tout petit soucis : on a défini la notion d'holomorphicité (et différentiabilité) pour des fonctions définies sur des ouverts. La composée $\psi^{-1} \circ f$ est définie sur l'ensemble $f^{-1}(\psi(U))$, mais est-ce un ouvert ? C'est pourquoi on ne définit la notion d'holomorphicité ou différentiabilité d'une application à valeurs dans la sphère \mathbf{S}^2 que pour des applications dont on sait au préalable qu'elles sont continues.

Supposons maintenant qu'on se trouve dans l'image de deux cartes holomorphes ψ_1 et ψ_2 de \mathbf{S}^2 , alors on aura l'égalité (à comparer avec (20.3))

$$\psi_1^{-1} \circ f = (\psi_1^{-1} \circ \psi_2) \circ (\psi_2^{-1} \circ f) ,$$



et par définition d'un atlas holomorphe, l'application $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ est holomorphe. Ainsi, si l'expression $\psi_2^{-1} \circ f$ de f dans la carte ψ_2 est holomorphe, ; alors il en est de même pour l'expression $\psi_1^{-1} \circ f$ de f dans la carte ψ_1 . En échangeant les rôles des deux cartes, on voit qu'on ne peut pas avoir des contradictions dans cette définition. Quand on applique cette définition avec nos deux cartes ψ_N et ψ_S , on obtient la définition qu'une fonction à valeurs dans \mathbf{S}^2 est holomorphe si (et seulement si) les deux fonctions

$$\psi_N^{-1} \circ f \quad \text{et} \quad \psi_S^{-1} \circ f = (\psi_S^{-1} \circ \psi_N) \circ (\psi_N^{-1} \circ f)$$

sont holomorphes. Mais $(\psi_S^{-1} \circ \psi_N)(w) = 1/w$, ce qui nous donne la formule

$$(\psi_S^{-1} \circ f)(z) = \frac{1}{(\psi_N^{-1} \circ f)(z)} .$$

Dans notre identification de \mathbf{C} avec $\psi_N(\mathbf{C})$ et le pôle nord avec ∞ , le domaine de $\psi_N^{-1} \circ f$ consiste des points où la fonction f ne prend pas la valeur ∞ . Et le domaine de la fonction $\psi_S^{-1} \circ f$ consiste des points où la fonction f ne prend pas la valeur 0.

Quand on compare la définition qu'on vient de donner avec la définition donnée dans [19.6], on voit qu'on obtient la même définition quand on identifie la fonction f avec sa représentation $\psi_N^{-1} \circ f$ et quand on identifie "donc" la fonction g dans [19.6] avec $\psi_S^{-1} \circ f$. Le choix de définir la notion d'holomorphicité pour une fonction (continue) à valeurs dans \mathbf{S}^2 par l'holomorphicité des deux fonctions $f(z)$ et $1/f(z)$ (sur des domaines convenables) est donc de nouveau lié au choix de l'atlas holomorphe qu'on a choisi pour la sphère. Un autre choix pour la deuxième carte (pour couvrir le pôle nord) aura donné une autre formule, mais nettement plus "arbitraire" que le choix avec ψ_S qui nous donne la fonction $g(z) = 1/f(z)$.

Quand on rassemble un peu les idées exposées ci-dessus, on obtient la définition suivante pour la notion d'une application holomorphe entre un ouvert de \mathbf{S}^2 et \mathbf{S}^2 .

Définition. Soit $\mathcal{A} = \{\psi_i : U_i \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2 \mid i \in I\}$ un atlas holomorphe pour \mathbf{S}^2 , soit $V \subset \mathbf{S}^2$ un ouvert et $f : V \rightarrow \mathbf{S}^2$ une application continue. Alors on dit que f est holomorphe si pour tout deux cartes $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbf{S}^2$ et $\psi_j : U_j \rightarrow \mathbf{S}^2$ dans l'atlas \mathcal{A} l'application

$$\psi_i^{-1} \circ f \circ \psi_j : \psi_j^{-1}(V \cap \psi_i(U_i)) \subset U_j \subset \mathbf{C} \rightarrow U_i \subset \mathbf{C}$$

est holomorphe. La définition d'un atlas holomorphe nous garantit qu'il n'y aura pas de contradictions avec cette définition. Les fonctions $\psi_i^{-1} \circ f \circ \psi_j$ sont appelées les expressions de la fonction f dans les cartes ψ_j à la source et ψ_i à l'arrivée.

Retour vers la vision analytique. Quand on prend, comme il est d'habitude, l'atlas qui consiste des deux cartes ψ_N et ψ_S , une fonction $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ aura quatre expressions dans ces cartes :

$$(20.4) \quad \psi_N^{-1} \circ f \circ \psi_N, \quad \psi_N^{-1} \circ f \circ \psi_S, \quad \psi_S^{-1} \circ f \circ \psi_N \quad \text{et} \quad \psi_S^{-1} \circ f \circ \psi_S.$$

Mais en analyse on identifie \mathbf{C} avec \mathbf{S}^2 privé du pôle nord via l'application ψ_N . L'expression $\psi_N^{-1} \circ f \circ \psi_N$ représente donc la fonction elle-même, au moins sa partie où ∞ n'est pas concerné. Si on note cette fonction par $F = \psi_N^{-1} \circ f \circ \psi_N$, on a les formules suivantes pour les trois autres expressions de f :

$$\begin{aligned} (\psi_N^{-1} \circ f \circ \psi_S)(w) &= F\left(\frac{1}{w}\right), & (\psi_S^{-1} \circ f \circ \psi_N)(z) &= \frac{1}{F(z)} \\ \text{et} \quad (\psi_S^{-1} \circ f \circ \psi_S)(w) &= \frac{1}{F\left(\frac{1}{w}\right)}. \end{aligned}$$

La symétrie dans la définition de l'holomorphicité de f qu'on voit dans les quatre expressions données dans (20.4) est brisée quand on donne un statut particulier à une des expressions de f et qu'on exprime les autres expressions en termes de l'expression "privilégiée."

On peut aller encore plus loin pour voir l'aspect arbitraire dans nos choix. On part d'un atlas holomorphe pour \mathbf{S}^2 et on suppose qu'il contient une carte $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2$ définie sur tout \mathbf{C} telle que l'image est toute la sphère à l'exception d'un seul point. Alors on identifie $\overline{\mathbf{C}}$ avec \mathbf{S}^2 en envoyant ∞ sur ce point manquant, on identifie une application $f : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ avec son expression $\psi^{-1} \circ f \circ \psi$ dans cette carte ψ et pour l'holomorphicité en ∞ on utilise le lien avec les expressions dans les autres cartes.

Quelles expressions on obtient dépendra des autres cartes dans l'atlas. Dit ainsi on voit que l'identification du pôle nord avec $\overline{\infty}$ est aussi un choix arbitraire.

21. Automorphismes

Dans cette section on utilise la théorie précédente pour déterminer trois groupes d'automorphismes : du disque unité $\mathbf{D} = D_1(0)$, du plan complexe \mathbf{C} et de la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$. La raison de n'étudier que ces trois groupes est qu'à biholomorphisme près ce sont les seuls ouverts simplement connexes de $\overline{\mathbf{C}}$ [21.2]. Ces trois groupes jouent des rôles importantes en géométrie (euclidienne et hyperbolique) et on devrait en dire beaucoup plus, mais cela dépassera largement le cadre de ce texte. Je me contente donc d'énoncer qu'une seule propriété de ces groupes, une propriété qui concerne la transitivité [21.11].⁵ Mais je termine avec une liste (un peu en vrac) de remarques qui pourraient inviter le lecteur à approfondir certains aspects de ces groupes.

Définition. Les notions de biholomorphisme et d'automorphisme s'étendent, mutatis mutandis, vers les applications entre ouverts de $\overline{\mathbf{C}}$: si U et V sont deux ouverts de $\overline{\mathbf{C}}$, alors une application $f : U \rightarrow V$ est un *biholomorphisme* si f est bijective et si f et f^{-1} sont holomorphes. Un *automorphisme de U* est une application biholomorphe $f : U \rightarrow U$. Et comme avant, l'ensemble de tous les automorphismes de U est noté $\text{Aut}(U)$.

→ **21.1 Lemme.** Soit $U, V \subset \overline{\mathbf{C}}$ deux ouverts et $f : U \rightarrow V$ une application biholomorphe. Alors l'application $\Phi : \text{Aut}(U) \rightarrow \text{Aut}(V)$ définie par

$$\Phi(g) = f^{-1} \circ g \circ f$$

est un isomorphisme de groupes.

21.2 Théorème (admis). Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert connexe non vide. Alors U est simplement connexe si et seulement s'il existe une application biholomorphe $f : U \rightarrow V$, où V est l'un des trois ouverts $\mathbf{D} = D_1(0)$, \mathbf{C} ou $\overline{\mathbf{C}}$ dans $\overline{\mathbf{C}}$.

→ **21.3 Lemme de Schwarz.** Soit $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbf{D}$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{D}$ et s'il existe $z_o \in \mathbf{D}^*$ tel que $|f(z_o)| = |z_o|$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

→ **21.4 Proposition (automorphismes de \mathbf{D}).** Une application $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ est un automorphisme (de \mathbf{D}) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{D}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{D} : f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1} .$$

⁵. C'est un choix absolument arbitraire. Tout autre auteur aurait certainement choisi une autre propriété.

C'est le cas si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbf{C}$ vérifiant $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{D} : f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

21.5 Proposition. Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière injective. Alors il existe $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

→ **21.6 Corollaire (automorphismes de \mathbf{C}).** Une application $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est un automorphisme (de \mathbf{C}) si et seulement si f est de la forme $f(z) = az + b$ pour $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$.

→ **21.7 Proposition (automorphismes de $\overline{\mathbf{C}}$).** Une application $f : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ est un automorphisme (de $\overline{\mathbf{C}}$) si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ vérifiant $ad - bc = 1$ tels que

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbf{C} : f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où il faut interpréter la forme $\lambda/0$ pour $\lambda \neq 0$ comme étant ∞ .

→ **21.8 Lemme.** Un élément $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ préserve le cercle unité $\partial\mathbf{D}$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ vérifiant $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \neq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{D} : f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}.$$

→ **21.9 Corollaire.** Chaque élément de $\text{Aut}(\mathbf{D})$ et de $\text{Aut}(\mathbf{C})$ se prolonge en un (unique) élément de $\text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$. De plus, pour $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ on a les équivalences

- (i) la restriction $f|_{\mathbf{C}}$ appartient à $\text{Aut}(\mathbf{C})$ si et seulement si $f(\infty) = \infty$.
- (ii) la restriction $f|_{\mathbf{D}}$ appartient à $\text{Aut}(\mathbf{D})$ si et seulement si $f(\partial\mathbf{D}) \subset \partial\mathbf{D}$ et $f(0) \in \mathbf{D}$.

Définitions/Notations. Pour un corps \mathbf{K} on note l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbf{K} par $M(n, \mathbf{K})$. L'ensemble des éléments inversibles dans $M(n, \mathbf{K})$ est noté $GL(n, \mathbf{K})$; c'est un groupe par rapport à la multiplication matricielle : le groupe *général linéaire*. L'algèbre linéaire nous apprend que le déterminant $\det : M(n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ respecte la multiplication, i.e., $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, et qu'on a

$$GL(n, \mathbf{K}) = \{ A \in M(n, \mathbf{K}) \mid \det(A) \neq 0 \}.$$

Dans $GL(n, \mathbf{K})$ on définit le sous-groupe $SL(n, \mathbf{K})$ par

$$SL(n, \mathbf{K}) = \{ A \in GL(n, \mathbf{K}) \mid \det(A) = 1 \},$$

appelé le *groupe spécial linéaire (de rang n sur le corps \mathbf{K})*.

On s'intéresse maintenant particulièrement au groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ et les trois sous-groupes $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, G_1 , et G_2 définis comme

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{C}^*, b \in \mathbf{C} \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C}, a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\}.$$

→ **21.10 Lemme.** *L'application $\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ définie par*

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est un homomorphisme surjectif de groupes avec $\ker(\Phi) = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbf{C}^\}$.*

- (i) *La restriction de Φ à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est un homomorphisme surjectif sur $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ avec noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$.*
- (ii) *La restriction de Φ à G_1 est un isomorphisme de groupes entre G_1 et $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$.*
- (iii) *La restriction de Φ à G_2 est un homomorphisme surjectif sur $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ avec noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$.*

Remarque. On peut rendre l'énoncé de [21.10] plus "symétrique" avec l'introduction du sous-groupe $G'_1 \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ définie comme

$$G'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{C}^*, b \in \mathbf{C} \right\}.$$

L'application $\phi : G'_1 \rightarrow G_1$ définie par

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme surjectif de groupes sur G_1 avec noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$. Et dans [21.10.ii] on peut remplacer G_1 par G'_1 pour obtenir que la restriction de Φ à G'_1 est surjectif sur $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ avec noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

21.11 Proposition. *Les trois groupes d'automorphismes des domaines \mathbf{D} , \mathbf{C} et $\overline{\mathbf{C}}$ ont les propriétés de transitivité suivantes.*

- (i) *Soit $a \in \mathbf{D}$ et $b \in \partial\mathbf{D}$, alors l'application $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ définie par*

$$f(z) = \frac{(1 - \bar{a}b)(z - a)}{(b - a)(1 - \bar{a}z)} = b \cdot \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b - a} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

est l'unique automorphisme de \mathbf{D} tel que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$ (mieux : le prolongement de f en tant qu'automorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$ vérifie $f(b) = 1$).

- (ii) *Soit $a, b \in \mathbf{C}$ deux points distincts, alors l'application $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par*

$$f(z) = \frac{z - a}{b - a}$$

est l'unique automorphisme de \mathbf{C} tel que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.

(iii) Soit $a, b, c \in \overline{\mathbf{C}}$ trois points distincts, alors l'application $f : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ définie par

$$f(z) = \frac{(z-a)(b-c)}{(b-a)(z-c)}$$

est l'unique automorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$ tel que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ et $f(c) = \infty$.

→ **21.12 Corollaire.** Soit $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ouvert, $U \neq \overline{\mathbf{C}}$. Alors il existe un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ et une application biholomorphe $\psi : U \rightarrow V$. En particulier l'application $\psi^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ entre l'ensemble des applications holomorphes sur V vers l'ensemble des applications holomorphes sur U définie par

$$\psi^*(f) = f \circ \psi$$

est une bijection avec réciproque $g \mapsto g \circ \psi^{-1}$.

Remarque. L'interprétation de [21.12] est que l'étude de l'ensemble des fonctions holomorphes (ou méromorphes) sur un ouvert de $\overline{\mathbf{C}}$ (différent de $\overline{\mathbf{C}}$) peut être ramené à l'étude de l'ensemble des fonctions holomorphes (ou méromorphes) sur un ouvert de \mathbf{C} . Et pour l'ensemble des fonctions holomorphes ou méromorphes sur $\overline{\mathbf{C}}$ entier on connaît la réponse par [19.3] et [19.5].

Comme dit dans l'introduction, je termine cette section avec un certain nombre de remarques en vrac concernant ces groupes d'automorphismes pour le lecteur curieux.

Le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$. Les automorphismes de $\overline{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire les applications $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ s'appellent des *homographies* ou des *transformations de Möbius*. Le groupe $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ s'appelle le *groupe des homographies*, le *groupe de Möbius* ou le *groupe projectif linéaire (de taille 2 à coefficient complexes)*. Quand on parle du groupe projectif linéaire, on le note par $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$. L'explication de ce nom est assez directe. D'une part on a le théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes qui dit que pour un homomorphisme de groupes Φ on a un isomorphisme

$$\mathrm{image}(\Phi) \cong \mathrm{source}(\Phi) / \ker(\Phi) .$$

Quand on l'applique à l'application $\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ [21.10], on obtient un isomorphisme $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}}) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) / \mathbf{C}^* \cdot \mathrm{Id}$. D'autre part, le groupe $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{K})$ opère sur \mathbf{K}^{n+1} et envoie un sous-espace vectoriel de dimension k sur un sous-espace vectoriel de dimension k . Ce groupe opère donc en particulier sur l'ensemble $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de \mathbf{K}^{n+1} [18.5]. Il n'est pas difficile de montrer que les seuls éléments $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{K})$ qui opèrent comme l'identité sur $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ sont les multiples non nuls de l'identité. Il est donc naturel de noter le quotient $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{K}) / \mathbf{K}^* \cdot \mathrm{Id}$ comme $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{K})$ et de l'appeler le groupe projectif linéaire. C'est le groupe qui opère sur l'espace projectif induit par le groupe général linéaire. Une fois qu'on a décidé d'appeler ce quotient $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{K})$, on "applique" l'abus de notation/langage courant qui veut qu'on identifie (souvent, mais pas toujours) deux groupes isomorphes en disant que $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ "est" le groupe

d'automorphismes de $\overline{\mathbf{C}}$ et en écrivant l'égalité $\text{Aut}(\overline{\mathbf{C}}) = \text{PGL}(2, \mathbf{C})$, bien qu'il ne s'agit que d'un isomorphisme.

Mais il y a plus que cette simple identification : en rappelant qu'on a identifié $z \in \mathbf{C}$ avec le sous-espace vectoriel $\mathbf{C} \cdot (z, 1)$ de dimension 1 dans \mathbf{C}^2 on peut faire le calcul suivant pour $A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$:

$$\begin{aligned} \text{pour } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } z \in \mathbf{C} : \quad A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \quad \text{et} \\ z \longleftrightarrow \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto A(\mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}) &= \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} \frac{az + b}{cz + d} \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} . \end{aligned}$$

Ainsi on retrouve l'expression de l'automorphisme de $\overline{\mathbf{C}} \cong \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ associé à l'application linéaire $A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$ par l'homomorphisme Φ [21.10].

Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$. On a défini le groupe $\text{PGL}(n, \mathbf{K})$ comme le quotient

$$\text{PGL}(n, \mathbf{K}) = \text{GL}(n+1, \mathbf{K}) / \mathbf{K}^* \cdot \text{Id} ,$$

et on a justifié que ce groupe opère sur l'espace projectif $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{K})$. On a donc une projection canonique $\pi : \text{GL}(n, \mathbf{K}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbf{K})$. Pour tout sous-groupe $G \subset \text{GL}(n, \mathbf{K})$ on obtient donc un sous-groupe $\pi(G) \subset \text{PGL}(n, \mathbf{K})$. En particulier pour le sous-groupe $\text{SL}(n, \mathbf{K})$ on note son image par $\pi(\text{SL}(n, \mathbf{K})) = \text{PSL}(n, \mathbf{K}) \subset \text{PGL}(n, \mathbf{K})$. En général on n'aura pas égalité : on a égalité si tout élément de \mathbf{K}^* admet une racine n -ième. En particulier on aura les égalités

$$\text{PSL}(n, \mathbf{C}) = \text{PGL}(n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \text{PSL}(2n+1, \mathbf{R}) = \text{PGL}(2n+1, \mathbf{R}) ,$$

et des vraies inclusions

$$\text{PSL}(2n, \mathbf{R}) \subsetneq \text{PGL}(2n, \mathbf{R}) \quad \text{par exemple } \pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \text{PSL}(2, \mathbf{R}) .$$

Malgré l'égalité $\text{PSL}(2, \mathbf{C}) = \text{PGL}(2, \mathbf{C})$ il faut faire attention à son utilisation. La condition $ad - bc = 1$ dans [21.7] est la manifestation directe de cette égalité et la condition $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ dans [21.4] permet d'affirmer qu'on peut voir $\text{Aut}(\mathbf{D})$ comme un sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$. Mais les éléments de $\text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ qui préservent le cercle unité $\partial\mathbf{D}$ et qui envoient 0 en dehors \mathbf{D} [21.8] ne peuvent pas être représentés par un élément dans $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ de la forme $\pi \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Pour eux il faut prendre la forme $\pi \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})$, ou encore $z \mapsto -(az + b)/(\bar{b}z + \bar{a})$ avec $b\bar{b} - a\bar{a} = 1$.

Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$. Le disque unité \mathbf{D} est intimement lié à la géométrie hyperbolique où il porte le nom de *disque de Poincaré*. Mais il y a un autre modèle de la géométrie hyperbolique : le *demi-plan de Poincaré* $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im} z > 0\}$. Un petit calcul montre que l'homographie $\phi \in \text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ définie par

$$\phi(z) = \frac{z - i}{iz - 1} \quad \text{ou encore avec [21.10]} \quad \phi = \Phi \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \right)$$

échange \mathbf{D} et \mathbf{H} : $\phi(\mathbf{D}) = \mathbf{H}$ et $\phi(\mathbf{H}) = \mathbf{D}$. Il s'ensuit que le groupe $\text{Aut}(\mathbf{H})$ est donné par

$$\text{Aut}(\mathbf{H}) = \phi^{-1} \circ \text{Aut}(\mathbf{D}) \circ \phi = \{ \phi^{-1} \circ f \circ \phi \mid f \in \text{Aut}(\mathbf{D}) \} .$$

Un autre petit calcul montre l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } a - \text{Im } b & \text{Im } a - \text{Re } b \\ -\text{Im } a - \text{Re } b & \text{Re } a + \text{Im } b \end{pmatrix} .$$

Sachant que les images sous Φ des matrices de cette forme avec $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ forment le groupe $\text{Aut}(\mathbf{D})$ [21.4] on en déduit facilement qu'on a l'égalité

$$\text{Aut}(\mathbf{H}) = \Phi(\text{SL}(2, \mathbf{R})) ,$$

et que le noyau est (encore une fois) $\pm \text{Id}$. La conclusion est que $\text{Aut}(\mathbf{H})$ est (isomorphe à) $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ et donc (bonus) le groupe $\text{Aut}(\mathbf{D})$ aussi.

Cercles et droites. Si on coupe la sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ avec un hyperplan, on obtient un cercle (ou un point si c'est un plan tangent ou l'ensemble vide si le plan ne coupe pas). D'autre part, on a utilisé la projection stéréographique π_N pour identifier la sphère de Riemann $\bar{\mathbf{C}}$ avec la sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$. À partir de là il est immédiat qu'une droite dans \mathbf{C} correspond avec l'intersection de \mathbf{S}^2 avec un hyperplan passant par le pôle nord, c'est-à-dire avec un cercle sur \mathbf{S}^2 . Autrement dit, un cercle sur \mathbf{S}^2 passant par le pôle nord est envoyé par la projection stéréographique sur une droite de \mathbf{C} et c'est même une bijection entre de tels cercles sur \mathbf{S}^2 et toutes les droites dans \mathbf{C} . Il est moins évident que l'image d'un cercle arbitraire sur \mathbf{S}^2 ne passant pas par le pôle nord est envoyé par la projection stéréographique sur un cercle dans \mathbf{C} et que c'est une bijection : tout cercle dans \mathbf{C} est l'image d'un cercle sur \mathbf{S}^2 ne passant pas par le pôle nord. De ce point de vue il est donc tout-à-fait naturel de dire qu'une droite dans \mathbf{C} est un cercle de rayon infini.

On pourrait dire que c'est une propriété intéressante de la projection stéréographique. Mais cela devient beaucoup plus intéressant quand on rajoute l'action du groupe $\text{Aut}(\bar{\mathbf{C}})$ des homographies, qu'on appelle dans ce contexte le groupe de Möbius. Car un élément $f \in \text{Aut}(\bar{\mathbf{C}})$ agit sur $\mathbf{S}^2 \cong \bar{\mathbf{C}}$ via l'identification par la projection stéréographique (étendue) et un calcul montre qu'un tel automorphisme envoie un cercle sur \mathbf{S}^2 sur un cercle de \mathbf{S}^2 . Ou, transposé comme automorphisme de \mathbf{C} (si besoin privé d'un point), un tel automorphisme envoie "une droite ou un cercle" dans \mathbf{C} sur "une droite ou un cercle" (mais attention : un cercle peut être envoyé sur une droite et une droite sur un cercle). Par exemple, l'automorphisme $f(z) = (z - i)/(iz - 1)$ qui relie le disque de Poincaré au demi-plan de Poincaré envoie la droite réelle \mathbf{R} sur le cercle unité $\partial\mathbf{D}$ (privé du point $-i$) et vice-versa et envoie la droite imaginaire $i\mathbf{R}$ (privé du point $-i$) sur elle-même.

Le groupe $\text{PSU}(2) = \text{SO}(3, \mathbf{R})$ **et** \mathbf{S}^2 . À l'intérieur du groupe $\text{GL}(2, \mathbf{C})$ on a le sous-groupe $\text{U}(2)$ des matrices unitaires :

$$\begin{aligned} \text{U}(2) &= \{ A \in \text{GL}(2, \mathbf{C}) \mid {}^t \bar{A} \cdot A = \text{Id} \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbf{C}) \mid \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} . \end{aligned}$$

L'intersection de $\text{U}(2)$ avec $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ est le groupe spécial unitaire $\text{SU}(2)$:

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} .$$

Quand on utilise la projection stéréographique pour identifier $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ avec $\overline{\mathbf{C}}$, l'automorphisme $\Phi(A) \in \text{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ pour $A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$ opère sur \mathbf{S}^2 selon la formule

$$\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3 \mapsto (\overline{\psi}_N \circ \Phi(A) \circ \overline{\psi}_N^{-1})(\mathbf{x}) .$$

Toutes les applications intervenant dans cette formule étant données par des fractions rationnelles, cette formule pour l'action de $\Phi(A)$ sur $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ sera également une fraction rationnelle dans les coordonnées $(x, y, z) = \mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$. En général cette expression sera assez longue et pas très jolie, mais pour $A \in \text{SU}(2)$ il y a un petit miracle qui se passe : dans ce cas l'automorphisme $\Phi(A)$ opère sur \mathbf{S}^2 comme une application linéaire et même comme une rotation. Plus précisément, pour $A \in \text{SU}(2)$ donné par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1$$

un calcul explicite nous donne la formule

$$(\overline{\psi}_N \circ \Phi(A) \circ \overline{\psi}_N^{-1}) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \text{Re}(a^2 - b^2) & -\text{Im}(a^2 + b^2) & -2\text{Re}(ab) \\ \text{Im}(a^2 - b^2) & \text{Re}(a^2 + b^2) & -2\text{Im}(ab) \\ 2\text{Re}(a\bar{b}) & -2\text{Im}(a\bar{b}) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Un autre calcul explicite montre que cette matrice (de taille 3×3) appartient au groupe $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ défini comme

$$\text{SO}(3, \mathbf{R}) = \{ A \in \text{GL}(3, \mathbf{R}) \mid {}^t A \cdot A = \text{Id} \text{ et } \det(A) = 1 \} .$$

Ce groupe consiste de toutes les rotations de l'espace \mathbf{R}^3 . On obtient donc une application $\Psi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3, \mathbf{R})$ définie par (avec un peu de liberté dans l'écriture)

$$\Psi(A) = \overline{\psi}_N \circ \Phi(A) \circ \overline{\psi}_N^{-1} .$$

Cette application est (c'est presque trivial) un homomorphisme de groupes, et on peut montrer qu'il est surjectif. Son noyau est $\pm \text{Id}$, ce qui nous donne l'isomorphisme

$$\text{PSU}(2) \equiv \text{SU}(2)/\{\pm \text{Id}\} \cong \text{SO}(3, \mathbf{R}) .$$

Le lecteur pourrait avoir l'impression que la matrice $\Psi(A)$ pour $A \in \text{SU}(2)$ qu'on a obtenu ci-dessus est un peu le fruit du hasard, mais cette même matrice apparaît naturellement aussi dans d'autres contextes. Par exemple dans le cadre des algèbres de Lie, un groupe de Lie opère sur son algèbre de Lie par l'action adjointe. Quand on s'intéresse au groupe $\text{SU}(2)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ consiste des matrices (complexes de taille 2×2) anti-hermitiennes :

$$\mathfrak{su}(2) = \{ A \in \text{M}(2, \mathbf{C}) \mid {}^t \bar{A} = -A \}$$

et l'action adjointe de $\text{SU}(2)$ sur $\mathfrak{su}(2)$ est donnée par (c'est une formule générique!)

$$\forall A \in \text{SU}(2) \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2) \quad : \quad \text{Ad}(A)(X) = A \cdot X \cdot A^{-1} .$$

On peut identifier $\mathfrak{su}(2)$ avec \mathbf{R}^3 par⁶

$$X \in \mathfrak{su}(2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : X = \begin{pmatrix} iz & ix - y \\ ix + y & -iz \end{pmatrix} .$$

6. L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ consiste des matrices anti-hermitiennes, à un facteur i près donc des matrices hermitiennes. Et quand on sort le facteur i de la matrice X , on trouve la matrice hermitienne $\begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix}$, où les variables $x+iy$ et z apparaissent d'une façon "plus logique."

En posant

$$\begin{pmatrix} i\hat{z} & i\hat{x} - \hat{y} \\ i\hat{x} + \hat{y} & -i\hat{z} \end{pmatrix} = \hat{X} = A \cdot X \cdot A^{-1} \quad \text{pour} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1$$

on trouve

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a^2 - b^2) & -\operatorname{Im}(a^2 + b^2) & -2\operatorname{Re}(ab) \\ \operatorname{Im}(a^2 - b^2) & \operatorname{Re}(a^2 + b^2) & -2\operatorname{Im}(ab) \\ 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) & -2\operatorname{Im}(a\bar{b}) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'action adjointe du groupe $\mathrm{SU}(2)$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, un espace vectoriel réel de dimension 3, est donnée par la même formule que l'action de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ obtenue en passant par les homographies de \mathbf{C} et l'identification de $\overline{\mathbf{C}}$ avec \mathbf{S}^2 via la projection stéréographique.

Appendices

22. Quelques rappels de topologie

Nota Bene. Dans la littérature sur la topologie générale il existe deux variantes concernant la définition d'un voisinage d'un point. On trouve la définition (plus restrictive) que U est un voisinage de x (dans un espace topologique X) si U est un ouvert contenant x . Mais on trouve aussi la définition que U est un voisinage de x s'il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset U$. Dans ce deuxième cas un voisinage de x n'est donc plus forcément ouvert. Chaque variante a ses avantages et ses inconvénients. Dans ce texte j'opte pour la première variante, ce qui veut dire que dans ce texte un voisinage est forcément ouvert, même si ce n'est pas précisé.

22.1 Définitions. • Soit $A \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble. Un *recouvrement* de A par des *ouverts* est une collection $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ d'ouverts $V_i \subset \mathbf{R}^p$ telle que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} V_i .$$

• Soit $A \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble. On dit que A est *compact* si pour tout recouvrement de A par des ouverts $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ il existe un nombre fini d'éléments $V_1, \dots, V_p \in \mathcal{V}$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^p V_i$.

Nota Bene. La définition d'un sous-ensemble compact donnée dans [22.1] est la définition "officielle," valable pour tout espace topologique (bien que cela dépend de l'auteur si on rajoute la condition que l'espace doit être séparé). L'équivalence avec la propriété sur les suites donnée dans [22.2] pour les sous-ensembles de \mathbf{R}^p n'est pas valable dans un espace topologique quelconque.

22.2 Proposition (admis). *Soit $A \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble. Alors A est compact si et seulement si toute suite x_n dans A admet une sous-suite convergente avec limite dans A .*

Ⓟ **22.3 Lemme (un nombre de Lebesgue).** *Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un compact et $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ un recouvrement de K par des ouverts. Alors il existe $\lambda > 0$, appelé un nombre de Lebesgue du recouvrement, tel que pour tout $x \in K$ il existe $i \in I$ avec $B_\lambda(x) \subset V_i$.*

Remarque. Quand on regarde bien la preuve de [22.3], on voit qu'on montre même plus qu'annoncé : on montre l'existence d'un nombre de Lebesgue **et** l'existence d'un nombre fini V_1, \dots, V_q d'éléments de \mathcal{V} tels que toute boule $B_\lambda(x)$, $x \in K$ est contenu dans un des V_1, \dots, V_q .

→ **22.4 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un ouvert, soit $K \subset U$ un sous-ensemble et soit $d_K : \mathbf{R}^p \rightarrow [0, \infty[$ l'application définie par

$$d_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\| .$$

- (i) L'application d_K est uniformément continue.
- (ii) Si K est fermé, alors pour tout $x \in \mathbf{R}^p$ il existe $y \in K$ tel qu'on a $d_K(x) = \|y - x\|$.
- (iii) Si K est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on a l'inclusion

$$\{x \in \mathbf{R}^p \mid d_K(x) \leq \varepsilon\} \subset U .$$

Définition. Soit $Z \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble.

- On dit que $a \in \mathbf{R}^n$ est un *point d'accumulation* de Z si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $z \in Z$ avec $0 < \|z - a\| < \varepsilon$. Autrement dit, tout voisinage de a contient un point de Z autre que a lui-même (mais ce n'est pas nécessaire que a appartienne à Z).
- On dit que Z est *discret* si pour tout $z \in Z$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(z) \cap Z = \{z\}$. Autrement dit, tout point de Z possède un voisinage qui ne contient aucun autre point de Z .

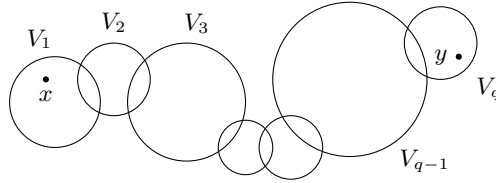
→ **22.5 Proposition.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $Z \subset U$ un sous-ensemble. Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) La collection $\mathcal{O} = \{B_r(q) \mid r \in \mathbf{Q}_+^* \text{ et } q \in \mathbf{Q}^n\}$ est une base (dénombrable) de la topologie de \mathbf{R}^n : pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et tout point $z \in U$ il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $z \in O \subset U$.
- (ii) U est σ -compact : il existe une suite $K_j \subset U$ de compacts telle que $U = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$.
- (iii) Si Z est discret, alors il ne contient qu'un nombre dénombrable (fini ou infini) d'éléments.
- (iv) Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (a) pour tout compact $K \subset U$ l'intersection $K \cap Z$ est un ensemble fini,
 - (b) Z n'a pas de point d'accumulation dans U ,
 - (c) Z est discret et $U \setminus Z$ est ouvert.
 - (d) Z est discret et fermé dans U .

Remarque. L'ensemble $Z = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\} \subset \mathbf{C}$ est un exemple d'un ensemble discret avec un point d'accumulation dans \mathbf{C} . Dans [22.5.ivb] on ne peut donc pas omettre la condition que le point d'accumulation soit dans U . Par contre, en posant $U = \mathbf{C}^*$, on aura $Z \subset U$ et Z sera sans point d'accumulation dans U .

Ⓟ **22.6 Lemme (des chaînes finis).** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble connexe, soit \mathcal{V} un recouvrement de U par des ouverts contenus dans U et soit $x, y \in U$ arbitraire. Alors il existe $q \in \mathbf{N}^*$ et $V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V}$ tels que¹ :

$$(22.7) \quad x \in V_1 \quad , \quad \forall 1 \leq i < q : V_i \cap V_{i+1} \cap U \neq \emptyset \quad , \quad y \in V_q .$$



Dans ce cas on dira que y est relié à x par la chaîne $V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V}$.

→ **22.8 Lemme.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, alors toute composante connexe C de U est un ouvert.

Nota Bene. Pour un sous-ensemble $U \subset \mathbf{R}^n$ non-ouvert il n'y a aucune raison que ses composantes connexes soient ouvertes (ni dans U ni dans \mathbf{R}^n). L'exemple type pour montrer que ce n'est pas le cas en général est l'ensemble $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Ses composantes connexes sont les singletons, qui sont fermées (dans \mathbf{Q} et dans \mathbf{R}), mais pas ouvertes. Un petit peu plus sophistiqué (mais dans le fond le même) est le sous-ensemble $C \subset \mathbf{R}^2$ défini par

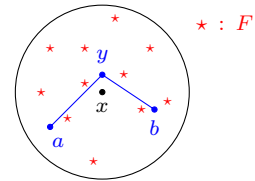
$$C = \{ \lambda(p, q) \mid \lambda > 0, (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \} ,$$

c'est-à-dire la réunion de toutes les demi-droites ouvertes qui passent par un point à coordonnées entières. Les composantes connexes sont les demi-droites ouvertes $D_{p,q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$ définies comme

$$D_{p,q} = \{ (\lambda p, \lambda q) \in \mathbf{R}^2 \mid \lambda > 0 \} .$$

Aucune de ses demi-droites est ouvert dans C : il n'y a pas d'ouvert $U \subset \mathbf{R}^2$ tel que $U \cap C = D_{p,q}$.

Ⓟ **22.9 Lemme.** Soit $r > 0$, soit $n \geq 2$ et soit $F \subset B_r(x) \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble dénombrable. Alors pour tout $a, b \in B_r(x) \setminus F$ il existe $y \in B_r(x) \setminus F$ tel que les deux segments $[a, y]$ et $[y, b]$ sont contenu dans $B_r(x) \setminus F$. En particulier $B_r(x) \setminus F$ est connexe par arcs.



Ⓟ **22.10 Corollaire.** Soit $U \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ un ouvert connexe et $F \subset U$ un sous-ensemble dénombrable. Alors pour tout couple de points $A, B \in U \setminus F$ il existe une ligne brisée

$$\gamma = [P_0, P_1] \cdot [P_1, P_2] \cdot \dots \cdot [P_{q-1}, P_q]$$

contenue dans $U \setminus F$ (c'est-à-dire $\gamma([0, q]) \subset U \setminus F$) avec $A = P_0$ et $B = P_q$. En particulier $U \setminus F$ est connexe par arcs.

1. Dans le dessin j'ai représenté les éléments de \mathcal{V} par des disques, mais autre qu'être ouvert il n'y a pas de contrainte sur ces éléments, même pas la connexité!

22.11 Définitions. • Soit X et Y deux espaces topologiques séparées, $U \subset X$ un sous ensemble, $x_o \in X$ un point d'accumulation de U , $\ell \in Y$ et $f : U \rightarrow Y$ une application. Alors on dit que *la limite de f quand x tend vers x_o vaut ℓ* , qu'on écrit comme $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$, quand on a

$$\forall O \text{ voisinage ouvert de } \ell \exists V \text{ voisinage ouvert de } x_o : f(V \cap U \setminus \{x_o\}) \subset O .$$

La clause " $x_o \in X$ un point d'accumulation de U " est nécessaire pour que $V \cap U \setminus \{x_o\}$ n'est pas vide (ce qui rendrait l'inclusion $f(V \cap U \setminus \{x_o\}) \subset O$ trivialement vraie). Cette définition est réservée aux espaces séparés pour pouvoir montrer l'unicité d'une limite.

La *continuité de f en $x_o \in U$* est définie par la condition

$$\forall O \text{ voisinage ouvert de } f(x_o) \exists V \text{ voisinage ouvert de } x_o : f(V \cap U) \subset O .$$

Dans le cas où x_o est un point d'accumulation de U (autrement dit, $x_o \in U$ n'est pas un point isolé de U) la continuité de f en x_o se traduit par l'égalité $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$.

• Soit $A \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble et $f : A \rightarrow \mathbf{R}^q$ une application. La définition générale de continuité de f donnée ci-dessus se traduit par la condition

$$\forall a \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon .$$

Et on dit que f est *uniformément continue sur A* si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in A \forall x \in A : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon .$$

Rappelons qu'il est facile d'exhiber des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues. Par exemple la fonction $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, \infty[$.

→ **22.12 Lemme.** Soit $A \subset \mathbf{R}^p$ compact et $f : A \rightarrow \mathbf{R}^q$ une application continue. Alors f est uniformément continue.

Ⓟ **22.13 Lemme.** Soit I un ensemble d'indices arbitraire, soit pour chaque $i \in I$, $U_i \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble arbitraire et $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^p$ une application continue. Supposons en plus qu'on a la propriété

$$\forall i, j \in I \forall x \in U_i \cap U_j : f_i(x) = f_j(x) .$$

- (i) Il existe une (unique) application $f : \bigcup_{i \in I} U_i \rightarrow \mathbf{R}^p$ telle que $\forall i \in I : f_i = f|_{U_i}$.
- (ii) Si chaque U_i est un ouvert, alors f est continue.
- (iii) Si chaque U_i est fermé dans $\bigcup_{i \in I} U_i$ et si I est fini, alors f est continue.

Nota Bene. Il n'est pas facile d'améliorer le résultat [22.13.iii] en laissant tomber la fermeture des U_i ou la finitude de I .

• Si on laisse tomber la fermeture des U_i , on peut penser à l'exemple $U_0 = \{0\} \subset \mathbf{R}$ et $U_1 =]0, \infty[$ avec $f_0(0) = 0$ et $f_1(x) = 1$. Cela remplit toutes les autres conditions, mais la fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas continue (en 0).

• Si on laisse tomber la condition de finitude, on peut penser à la modification suivante de l'exemple précédent : $U_0 = \{0\}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $U_n = \{1/n\}$ avec

$f_0(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $f_n(1/n) = 1$. Chaque f_n est (trivialement) continue sur l'ensemble fermé U_n (un singleton), mais l'application $f : \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas continue (en 0).

Ou on peut penser à l'exemple un peu moins trivial avec $I = \mathbf{N}$ et

$$U_n = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = nx \} \quad \text{et} \quad f_n(x, nx) = n^2 x .$$

Chaque U_n est une droite passant par l'origine (donc un fermé) et toutes les fonctions continues f_n prennent la valeur 0 à l'origine (l'intersection commune des U_n). Mais la fonction $f : \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas continue (à l'origine $(0, 0)$). Il suffit de prendre la suite $p_n = (n^{-2}, n^{-1}) \in U_n$ (avec $n > 0$ pour éviter des problèmes). Pour cette suite on a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = (0, 0) \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(n^{-2}, n^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq f(0, 0) .$$

23. Convergence, continuité et plus

Quand on veut construire des nouvelles applications à partir d'anciennes, on dispose de plusieurs façons. On a tout d'abord les opérations classiques qui à partir de deux applications f et g construisent une nouvelle : $f + g$, $f \cdot g$, f/g et $f \circ g$ (somme, produit, quotient et composée, chacun avec ses restrictions “évidentes”). Ensuite on des constructions un petit peu plus sophistiqué où on construit une nouvelle application à partir d'une infinité d'autres applications : à partir d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on peut construire la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ou la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, ou à partir d'une famille d'application f_a dépendant d'un paramètre $a \in \Omega$ dans un espace mesuré sur lequel on peut intégrer pour obtenir $\int_{\Omega} f_a d\mu(a)$. De nouveau avec les restrictions “évidentes.”

La grande question est de savoir si une propriété particulière des fonctions initiales persiste dans les nouvelles, comme être continue, être dérivable, être de classe C^k et cætera. Dans les cours standard sur les fonctions d'une variable réelle et sur les fonctions de plusieurs variables, on démontre systématiquement que les opérations qui font intervenir deux applications préservent ces propriétés : si f et g sont continues/dérivable/de classe C^k , alors la même chose est vraie pour leur somme/produit/quotient/composée. Dans d'autres cours on montre que cela n'est plus le cas pour des limites/séries/applications définies par une intégrale et on donne des conditions suffisante pour que ces propriétés passent au résultat. Ces conditions contiennent (presque) toujours le mot “convergence,” avec l'inconvénient qu'il y a plusieurs sortes de convergence : simple, uniforme, normale, dominée (et j'oublie les variantes qu'on rencontre en théorie des probabilités), parfois accompagnée d'adjectifs comme “localement” ou “sur tout compact”.

Dans cette section on trouve un résumé de ces résultats dans une forme augmentée par rapport à ce qu'on trouve dans un cours classique de deuxième année : quelques précisions sur ce que veut dire “convergence localement uniforme/normale” et “convergence uniforme/normale sur tout compact,” ainsi que des résultats concernant des dérivées partielles. Dans la section suivante on présente les résultats qu'on peut obtenir via l'intégrale de Lebesgue. L'avantage de l'intégrale de Lebesgue est qu'on peut améliorer plusieurs résultats avec des hypothèses plus simples et/ou plus performantes. Mais l'intégrale de Lebesgue permet aussi de mettre les constructions de nouvelles fonctions par des séries ou par des intégrales dans le même cadre : une série n'est rien d'autre que l'intégrale de Lebesgue sur l'ensemble \mathbf{N} muni de la mesure de comptage. Avec l'intégrale de Lebesgue il n'y a donc plus de différence entre une série et une fonction définie par une intégrale.

Notation/Convention. Dans toute cette section et sauf mention explicite du contraire, U désigne un ouvert de \mathbf{R}^p . Attention donc : pour avoir la lettre n comme indice d'une suite, j'ai changé la lettre n , jusqu'ici réservée pour la dimension, en la lettre p .

23.1 Définitions. Soit $A \subset U$ un sous-ensemble et $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions. On dit que la suite f_n converge (simplement) sur A vers une fonction

$g : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ si on a

$$\forall x \in U : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) .$$

Et on dit que la suite f_n converge uniformément sur A vers $g : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \|f_n(x) - g(x)\| = 0 .$$

→ **23.2 Lemme (le critère de Cauchy).** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions et soit $A \subset U$ un sous-ensemble.

(i) Si la suite converge uniformément sur A vers une fonction f , alors on a la propriété

$$(23.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n, m \geq N \quad : \quad \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon .$$

(ii) Si la suite vérifie la condition (23.3), alors il existe une fonction unique $f : A \rightarrow \mathbf{R}^q$ telle que la suite f_n converge uniformément sur A vers f .

Ⓟ **23.4 Proposition.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction $g : U \rightarrow \mathbf{R}^q$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que la convergence est uniforme sur V .
- (ii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la convergence est uniforme sur la boule ouverte $B_r(x) \subset U$.
- (iii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la convergence est uniforme sur la boule fermée $\overline{B_r(x)} \subset U$.
- (iv) Pour tout $K \subset U$ compact la convergence est uniforme sur K .

Définitions. Les propriétés (i) et (iv) de [23.4] portent un nom : dans le cas de (i) on dit que la convergence est localement uniforme et dans le cas de (iv) on dit que la convergence est uniforme sur tout compact (sous-entendu de U). Selon [23.4] ces deux propriétés sont donc équivalentes.

23.5 Remarque. Sachant que les quatre propriétés dont on parle dans [23.4] sont équivalentes, il devient une question de goût laquelle on utilise comme condition dans un énoncé. La plupart des auteurs favorisent la forme “sur tout compact,” parce que cette forme permet (dans des bonnes conditions) la définition d’une topologie sur un espace de fonctions (convenablement choisi). Je me conformerai à cet usage, bien que dans certaines preuves je basculerai vers une autre variante plus adapté aux circonstances.

→ **23.6 Continuité et limite.** Soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un ouvert et $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions continues. Si la suite converge uniformément sur tout compact vers $g : U \rightarrow \mathbf{R}^q$, alors g est continue.

Nota Bene. Dans la suite je vais énoncer un certain nombre de résultats où on intègre une fonction à valeurs dans un espace vectoriel \mathbf{R}^q . Comme dit déjà dans [1.1], une telle intégrale est définie composante par composante : pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ on définit

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left(\int_a^b f_1(t) \, dt, \dots, \int_a^b f_q(t) \, dt \right).$$

Jusqu'à là c'est simplement la définition. Mais je deviens paresseux dans les preuves, car dans les preuves je traite ces intégrales comme des intégrales d'une fonction à valeurs réelles ! Je demande donc au lecteur d'être indulgent et de lire ces preuves comme si elles étaient écrites composante par composante.

→ **23.7 Intégration et limite.** Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions continues. Si la suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$, alors on a l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Remarque. Contrairement à la plupart des autres résultats énoncés ici, on n'a pas une condition de convergence locale dans [23.7], mais une condition de convergence globale. Ceci est dû (en partie) au fait qu'ici les fonctions sont définies déjà sur un (intervalle) compact, pas sur un ouvert.

Ⓟ **23.8 Dérivabilité et limite.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions et soit $1 \leq j \leq p$ tel que (pour tout $n \in \mathbf{N}$) la fonction $\partial_j f_n$ existe et est continue. Si la suite f_n converge simplement vers une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ et si la suite $\partial_j f_n$ converge uniformément sur tout compact, alors $\partial_j f$ existe, est continue et est donnée par

$$\partial_j f \equiv \partial_j \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_j f_n.$$

Quand on sait que la définition d'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dit que c'est la limite des sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k,$$

on voit qu'on peut directement appliquer nos résultats sur les suites aux séries. Le seul "hic" est qu'en général on maîtrise mal les sommes partielles et donc que c'est difficile d'établir directement la convergence (localement) uniforme. On se tourne donc vers la convergence (localement) normale, une condition plus forte qui implique la convergence (localement) uniforme. Pour bien faire les choses, il faut donc préciser ce qu'on entend par convergence (localement) normale, établir si possible des équivalences similaires aux équivalences [23.4] et montrer que cette condition implique la convergence (localement) uniforme.

Définition. Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions et $A \subset U$ un sous-ensemble. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur A s'il existe une suite de nombres réels $g_n \in [0, \infty[$ vérifiant les deux conditions

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n < \infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in A : |f_n(x)| \leq g_n .$$

Ⓟ **23.9 Proposition.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur V .
- (ii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur la boule ouverte $B_r(x) \subset U$.
- (iii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur la boule fermée $\overline{B_r(x)} \subset U$.
- (iv) Pour tout $K \subset U$ compact la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur K .

Définitions. Comme dans le cas de [23.4], les propriétés (i) et (iv) de [23.9] portent un nom : dans le cas de (i) on dit que la convergence est localement normale (sur U) et dans le cas de (iv) on dit que la convergence est normale sur tout compact (de U). Selon [23.9] ces deux propriétés sont donc équivalentes. Concernant le choix pour utiliser une de ces quatre variantes de [23.9], voir [23.5].

→ **23.10 Lemme.** Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $A \subset U$, alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément sur A .

Avec [23.10] on peut maintenant enchaîner les arguments : si une série converge normalement selon un des critères (équivalents) de [23.9], alors selon [23.10] la suite des sommes partielles converge uniformément selon un des critères (équivalents) de [23.4], ce qui permet d'appliquer au choix un des résultats [23.6], [23.7] ou [23.8] pour obtenir un résultat correspondant pour une série : la continuité ou dérivabilité d'une série, ou la possibilité d'échanger une série avec une intégrale.

→ **23.11 Continuité et série.** ([23.6]+[23.10]) Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ une suite de fonctions continues. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur tout compact vers $S : U \rightarrow \mathbf{R}^p$, alors S est continue.

→ **23.12 Intégration et série.** ([23.7]+[23.10]) Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions continues. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$, alors on

a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \, dt .$$

23.13 Dérivabilité et série. ([23.8]+[23.10]) Soit $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ une suite de fonctions et soit $1 \leq j \leq p$ tel que (pour tout $n \in \mathbf{N}$) la fonction $\partial_j f_n$ existe et est continue. Si la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \partial_j f_n$ converge normalement sur tout compact, alors la dérivée partielle $\partial_j S$ existe, est continue et est donnée par

$$\partial_j S \equiv \partial_j \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_j f_n .$$

Pour pouvoir énoncer des résultats similaires pour des fonctions qui sont définies via une intégrale, la meilleure façon est de passer par l'intégrale de Lebesgue. Pour ceux qui ne maîtrisent pas la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue, on établit ici deux résultats "élémentaires" qui suffisent dans ce texte, mais ces résultats ont des hypothèses qu'on peut très facilement affaiblir quand on connaît l'intégrale de Lebesgue et en particulier le théorème de convergence dominée (de Lebesgue).

Ⓟ **23.14 Continuité sous l'intégrale.** Soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble et $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une application continue. Alors la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$$

est continue.

Ⓟ **23.15 Dérivabilité sous l'intégrale.** Soit $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une application continue et soit $1 \leq j \leq p$ tel que $\partial_j f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ existe et est aussi continue. Alors la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$ admet une dérivée partielle $\partial_j F$ continue qui est donnée par

$$(\partial_j F)(x) = \int_a^b (\partial_j f)(x, t) \, dt .$$

Nota Bene. Dans [23.14] et [23.15] la condition de la continuité porte sur le couple $(x, t) \in U \times [a, b]$, pas seulement en $x \in U$.

Remarque pour le lecteur curieux : la généralisation pour des 1-formes. Dans [23.7], [23.12], [23.14] et [23.15] on a des résultats qui se prononcent sur le comportement de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre : soit d'un entier n dans [23.7] et [23.12] avec $\int_a^b f_n(t) \, dt$, soit d'un élément $x \in U \subset \mathbf{R}^p$ dans

[23.14] et [23.15] avec $\int_a^b f(x, t) dt$. Mais on peut voir ces intégrales comme des intégrales de 1-formes sur \mathbf{R} avec la courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par $\gamma(t) = t$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(t) dt &= \int_{\gamma} \alpha_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n(t) = f_n(t) dt \\ \int_a^b f(x, t) dt &= \int_{\gamma} \alpha_x \quad \text{avec} \quad \alpha_x(t) = f(x, t) dt . \end{aligned}$$

La question naturelle est donc de savoir si on peut généraliser ces résultats vers des 1-formes plus générales. Pour pouvoir répondre dans l'affirmatif, distinguons les cas avec un paramètre $n \in \mathbf{N}$ et un paramètre $x \in U \subset \mathbf{R}^p$.

On commence avec un ouvert $V \subset \mathbf{R}^s$, une $C^{1/}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ et une suite de 1-formes α_n sur V donné par une suite de fonctions $f_{n,i} : V \rightarrow \mathbf{R}$ comme

$$\alpha_n(y) = \sum_{i=1}^s f_{n,i}(y) dy_i .$$

Et on affirme que si la suite $f_{n,i}$ respectivement la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,i}$ converge uniformément respectivement normalement sur tout compact de V , alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \alpha_n = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad \text{respectivement} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \alpha_n = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n .$$

L'idée de la preuve est simple : par définition on a l'égalité

$$\int_{\gamma} \alpha_n = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^s f_{n,i}(y) dy_i = \sum_{i=1}^s \int_a^b f_{n,i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt .$$

Si, dans un premier temps, on suppose que γ est de classe C^1 , alors γ'_i est continue sur l'intervalle compact $[a, b]$, donc en particulier elle est bornée. Et γ étant continue, l'image $\gamma([a, b]) \subset V$ est un compact, donc les fonctions $f_{n,i}$ y convergent uniformément (normalement dans le cas des séries). Il s'ensuit que la suite des fonctions $t \mapsto f_{n,i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t)$ converge uniformément (normalement dans le cas des séries) sur $[a, b]$, ce qui permet d'appliquer [23.7] respectivement [23.12] et de conclure. Si γ est de classe $C^{1/}$, il suffit d'utiliser la subdivision $a = t_0 < \dots < t_m = b$ de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^1 sur chaque sous-intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ et d'appliquer ce résultat sur chaque sous-intervalle séparément pour obtenir le résultat.

Pour la généralisation de [23.14] et [23.15] on considère une famille de 1-formes α_x sur V indexée par un élément $x \in U$ donnée par une fonction $f : U \times V \rightarrow \mathbf{R}^s$ comme

$$\alpha_x = \sum_{i=1}^s f_i(x, y) dy_i .$$

Et on affirme que si la fonction f est continue (et que $\partial_j f$ existe et est continue), alors la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{\gamma} \alpha_x = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^s f_i(x, y) dy_i$$

est continue, respectivement admet une dérivée partielle $\partial_j F$ donnée par

$$(\partial_j F)(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \equiv \int_{\gamma} \sum_{i=1}^s (\partial_j f_i)(x, y) dy_i .$$

Comme pour le cas d'une suite α_n , l'idée de la preuve est de passer par la définition de l'intégrale d'une 1-forme :

$$\int_{\gamma} \alpha_x = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^s f_i(x, y) \, dy_i = \sum_{i=1}^s \int_a^b f_i(x, \gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) \, dt .$$

Si γ est de classe C^1 , le produit $f_i(x, \gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t)$ est continue respectivement admet une dérivée partielle ∂_j qui est continue et permet donc d'appliquer [23.14] respectivement [23.15]. Et si γ est de classe $C'^{1/}$, on utilise la subdivision et on applique ces résultats aux intégrales sur les sous-intervalles $[t_{j-1}, t_j]$.

24. Avec l'intégrale de Lebesgue

Les résultats dans §23 nous donnent des critères qui permettent de dire des choses intéressantes sur des nouvelles fonctions qu'on obtient par une limite, une série ou une intégrale. Ces résultats suffisent pour montrer nos théorèmes concernant l'analyse complexe. Mais il est utile de placer ces résultats concernant les séries et les intégrales dans le contexte de l'intégrale de Lebesgue, car ainsi on peut unifier et simplifier ces résultats. Et parfois obtenir des résultats plus performants. La clé est le théorème de convergence dominée (de Lebesgue). On le rappelle et on montre comment en déduire des résultats similaires ou plus performants concernant la continuité, dérivabilité et holomorphie de séries de fonctions ou de fonctions définies par une intégrale.

Notation/Convention. Comme dans la section précédente, sauf mention explicite du contraire, U désigne un ouvert de \mathbf{R}^p .

24.1 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré (avec \mathcal{F} une tribu et μ une mesure), soit $A \subset U \subset \mathbf{R}^p$ des sous-ensembles et $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction. On dit qu'il y a *convergence dominée sur A* de f s'il existe une fonction μ -intégrable $g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ telle que pour tout $x \in A$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a la majoration $\|f(x, \omega)\| \leq g(\omega)$.

24.2 Nota Bene. Quand on lit la définition de la convergence dominée sur A superficiellement, on pourrait croire qu'il s'agit de deux quantificateurs universelles qu'on peut permuter. Mais la condition de " μ -presque tout ω " change la donne : exiger "pour tout x et μ -presque tout ω " n'est pas la même chose qu'exiger "pour μ -presque tout ω et tout x ". La première condition se traduit en formule comme

$$\forall x \exists D \subset \Omega : \mu(\Omega \setminus D) = 0 \text{ et } \forall \omega \in D \dots,$$

tandis que la deuxième condition se traduit comme

$$\exists D \subset \Omega : \mu(\Omega \setminus D) = 0 \text{ et } \forall \omega \in D \forall x \dots$$

Dans le premier cas l'ensemble D peut dépendre de x , tandis que dans le deuxième cas D est indépendant de x . La formulation de la convergence dominée sur A est donc la plus faible des deux.

Ⓟ **24.3 Proposition.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que la convergence est dominée sur V .
- (ii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la convergence est dominée sur la boule ouverte $B_r(x) \subset U$.
- (iii) Pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que la convergence est dominée sur la boule fermée $\overline{B_r(x)} \subset U$.

(iv) Pour tout $K \subset U$ compact la convergence est dominée sur K .

Définitions. Comme dans le cas de [23.4], les propriétés (i) et (iv) de [24.3] portent un nom : dans le cas de (i) on dit que la convergence est localement dominée (sur U) et dans le cas de (iv) on dit que la convergence est dominée sur tout compact (de U). Selon [24.3] ces deux propriétés sont donc équivalentes.

24.4 Théorème (de convergence dominée de Lebesgue - admis). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans \mathbf{C} vérifiant les hypothèses suivantes.

- (i) La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge μ -presque partout vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$.
- (ii) Il existe une fonction μ -intégrable $g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a la majoration $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$.

Sous ces conditions on a les propriétés suivantes.

- (i) Les fonctions f_n et f sont μ -intégrables (et en particulier f est mesurable).
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$.
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Ⓟ **24.5 Continuité sous l'intégrale.** Soit (Ω, μ) un espace mesuré, soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble et $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction vérifiant les conditions

- (i) Pour tout $x \in U$ l'application $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est μ -mesurable.
- (ii) Pour tout $x \in U$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $z \mapsto f(z, \omega)$ est continue en x (voir aussi [24.2]).
- (iii) Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$ de x tel que la convergence est dominée sur $U \cap V$.

Alors l'application $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par $F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) \, d\mu(\omega)$ est continue.

Nota Bene. La condition [24.5.iii] est formulée avec une variante de la notion de convergence localement dominée et pas avec la convergence dominée sur tout compact. La raison est simple : l'ensemble $U \subset \mathbf{R}^n$ ici n'est pas (forcément) un ouvert, et dans ce cas les équivalences de [24.3] ne s'appliquent plus. Par contre, dès que U est un ouvert, on peut remplacer la condition donnée dans [24.5.iii] par la condition de convergence dominée sur tout compact (inclus dans l'ouvert U !).

Ⓟ **24.6 Dérivabilité sous l'intégrale.** Soit (Ω, μ) un espace mesuré, $U \subset \mathbf{R}^p$ un ouvert, $1 \leq i \leq p$ et $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction vérifiant les conditions

- (i) Pour tout $x \in U$ l'application $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est μ -intégrable.
- (ii) Pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $x \mapsto (\partial_i f)(x, \omega)$ existe.
- (iii) Il y a convergence dominée de $\partial_i f$ sur tout compact de U .

Alors l'application $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par $F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) \, d\mu(\omega)$ admet une dérivée partielle (sur U) $\partial_i F$ qui est donnée par

$$(\partial_i F)(x) = \int_{\Omega} (\partial_i f)(x, \omega) \, d\mu(\omega) .$$

Si pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $x \mapsto (\partial_i f)(\omega, x)$ est continue, alors $\partial_i F$ est continue.

24.7 Nota Bene. Le lecteur attentif pourrait croire qu'il y a un problème/contradiction entre les conditions [24.6.ii] et [24.6.iii], car dans la première on dit que la fonction $\partial_i f$ n'existe pas forcément partout, pour ensuite énoncer une condition qui semble indiquer qu'elle doit être définie partout, une observation qui semble être confirmée par le fait qu'on parle de l'intégrale de $\partial_i f$ sur Ω . Cette confusion est récurrente pour l'intégrale de Lebesgue : changer une fonction sur un ensemble de mesure nulle ne change pas la valeur de l'intégrale. Ceci permet de modifier une fonction sur un ensemble de mesure nulle sans changer le résultat, mais donc aussi d'appliquer l'intégrale à une fonction qui n'est pas définie sur un ensemble de mesure nulle. Car toute façon de la définir sur cet ensemble donnera la même valeur pour l'intégrale. La résolution de ce paradoxe est donc de définir la fonction $\partial_i f$ comme étant zéro chaque fois que la dérivée partielle (officielle) n'existe pas.

Remarque. Signalons la différence entre les conditions [24.5.ii] et [24.6.ii], une différence dont on a déjà parlé dans [24.2]. Pour dire la même chose dans d'autres mots, définissons les ensembles $\mathcal{NC}, \mathcal{ND} \subset U \times \Omega$ (pour "NonContinue" et "NonDérivable") par

$$\begin{aligned} \mathcal{NC} &= \{ (x, \omega) \in U \times \Omega \mid z \mapsto f(z, \omega) \text{ n'est pas continue en } x \} \\ \mathcal{ND} &= \{ (x, \omega) \in U \times \Omega \mid z \mapsto f(z, \omega) \text{ n'admet pas une dérivée} \\ &\quad \text{partielle } \partial_j f \text{ en } x \} \end{aligned}$$

et définissons pour tout $x \in U$ les ensembles $\mathcal{NC}_x, \mathcal{ND}_x \subset \Omega$ par

$$\mathcal{NC}_x = \{ \omega \in \Omega \mid (x, \omega) \in \mathcal{NC} \} \quad \text{et} \quad \mathcal{ND}_x = \{ \omega \in \Omega \mid (x, \omega) \in \mathcal{ND} \} .$$

Alors les conditions [24.5.ii] et [24.6.ii] demandent que ces ensembles sont de mesure nulle, mais [24.6.ii] exige en plus que les ensembles \mathcal{ND}_x sont indépendants de x (ou presque, dans le sens qu'ils doivent être inclus tous dans un même ensemble de mesure nulle).

Les énoncés avec un espace mesuré sont assez abstraites. On va donc les décliner en deux versions qui nous intéressent le plus : le cas où $\Omega = [a, b]$ est un intervalle fermé muni de la mesure de Lebesgue et le cas où $\Omega = \mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels muni de la mesure de comptage. On commence avec le cas $\Omega = [a, b]$ et on va reprendre les énoncés [24.4], [24.5] et [24.6] dans ce cas, en simplifiant un peu les hypothèses : on remplacera la condition que la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ définie sur $[a, b]$ soit mesurable par la condition qu'elle soit continue par morceaux et on omettra les conditions de presque partout. Le fait qu'on peut prendre des fonctions continues par morceaux est un petit bonus de la théorie de la mesure.

Si les discontinuités sont les mêmes pour toutes les fonctions d'une suite, il est facile d'incorporer cette "amélioration" aussi dans les énoncés du §23, mais moins facilement si les discontinuités sont dispersées.

→ **24.8 Intégration et limite ([24.4] avec $\Omega = [a, b]$).** Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une suite de fonctions continues par morceaux. Si la suite converge simplement sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ et s'il existe une fonction intégrable $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ qui majore toutes les $\|f_n\|$, alors on a l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt .$$

Comparaison de [24.8] avec [23.7]. Ces deux résultats donnent des conditions suffisantes pour échanger une limite avec une intégrale. Dans [23.7] on demande la convergence uniforme, tandis que dans [24.8] on ne demande que la convergence simple, mais qu'il y a "domination" de toutes les fonctions par une fonction intégrable. Que [24.8] est vraiment plus fort que [23.7] se voit dans l'exemple de la suite $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = nx^n(1 - x)$ qui converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle. On ne peut donc pas appliquer [23.7]. Par contre, on montre que cette suite est majorée par la fonction intégrable constante 1 sur $[0, 1]$, ce qui permet d'appliquer [24.8] et de conclure qu'on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = 0$.

24.9 Continuité sous l'intégrale ([24.5] avec $\Omega = [a, b]$). Soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un sous-ensemble et soit $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction vérifiant les conditions

- (i) Pour tout $x \in U$ l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux.
- (ii) Pour tout $t \in [a, b]$ l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue.
- (iii) Pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$ de x tel que la convergence est dominée sur $U \cap V$.

Alors l'application $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$ est continue.

24.10 Comparaison de [24.9] avec [23.14]. Ces deux résultats donnent des conditions suffisantes pour qu'une fonction définie par une intégrale soit continue. Dans [23.14] on demande que $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ soit continue dans le couple, tandis que dans [24.9] on ne demande que la continuité par rapport à chaque variable (de U et de l'intervalle d'intégration) séparément, mais qu'il y a convergence localement dominée. Que [24.9] est vraiment plus fort que [23.14] se voit dans l'exemple de la fonction $f : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, t) \neq (0, 0) : f(x, t) = \frac{2xt}{x^2 + t^2} .$$

Cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$, mais elle est continue dans chaque variable séparément et elle est majorée par la fonction constante 2 qui est intégrable sur $[0, 1]$. Et effectivement, la fonction $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t) \, dt = \int_0^1 \frac{2xt \, dt}{x^2 + t^2} = x \ln(x^2 + 1) - x \ln(x^2)$$

est bien continue sur \mathbf{R} .

24.11 Dérivabilité sous l'intégrale ([24.6] avec $\Omega = [a, b]$). Soit $U \subset \mathbf{R}^p$ un ouvert, $1 \leq j \leq p$ et $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ une fonction vérifiant les conditions

- (i) Pour tout $x \in U$ l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux.
- (ii) Pour tout $t \in [a, b]$ l'application $x \mapsto (\partial_j f)(x, t)$ existe.
- (iii) Il y a convergence dominée de $\partial_j f$ sur tout compact de U .

Alors l'application $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ admet une dérivée partielle (sur U) $\partial_j F$ qui est donnée par

$$(\partial_j F)(x) = \int_a^b (\partial_j f)(x, t) dt .$$

Si pour tout t l'application $x \mapsto (\partial_j f)(x, t)$ est continue, alors $\partial_j F$ est continue.

Comparaison de [24.11] avec [23.15]. Ces deux résultats donnent des conditions suffisantes pour qu'une fonction définie par une intégrale admette une dérivée partielle. Dans [23.15] on demande que $f, \partial_j f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^q$ soient continues dans le couple, tandis que dans [24.11] on ne demande que la continuité² (de ces deux fonctions) séparément par rapport à chaque variable (de U et de l'intervalle d'intégration), mais qu'il y a convergence localement dominée de la fonction $\partial_j f$.

L'exemple pour montrer que [24.11] est vraiment plus fort que [23.15] est "le même" que pour la continuité sous l'intégrale. On considère la fonction $g : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, t) \neq (0, 0) : g(x, t) = t \ln(x^2 + t^2) .$$

Pour cette fonction on a $\partial_1 g = f$, la fonction donnée dans [24.10]. La fonction g ne vérifie donc pas les hypothèses de [23.15], elle vérifie les hypothèses de [24.11] et effectivement la fonction $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^1 g(x, t) dt = \int_0^1 t \ln(x^2 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) (\ln(x^2 + 1) - 1) - \frac{1}{2} x^2 (\ln(x^2) - 1) \end{aligned}$$

est bien dérivable sur \mathbf{R} avec comme dérivée la fonction F de [24.10].

Le deuxième cas qui nous intéresse concerne $\Omega = \mathbf{N}$ muni de la mesure de comptage sur la tribu totale (de tous les sous-ensembles de \mathbf{N} , c'est la tribu de Borel associée à la topologie discrète). Dans ce cas, toute fonction sur \mathbf{N} est mesurable, une fonction $f : U \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^q$ n'est rien d'autre qu'une suite de fonctions $f_n : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ donnée par $f_n(x) = f(x, n)$ et l'intégrale sur \mathbf{N} se "réduit" à la somme/série :

$$\int_{\mathbf{N}} f(x, n) d\text{Comptage}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) .$$

2. On oublie le cas encore plus faible dans [24.11] où on a seulement l'existence de $\partial_j f$ avec comme résultat que $\partial_j F$ existe, sans se prononcer sur la continuité.

Pour la mesure de comptage, le seul ensemble de mesure nulle est l'ensemble vide, donc la condition de “pour μ -presque tout” se simplifie en “pour tout.” Et la définition de convergence dominée sur un ensemble A [24.1] devient l'existence d'une suite numérique $g_n \in [0, \infty[$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n < \infty$ avec pour tout $x \in A$ la majoration $|f(x, n)| \leq g_n$. Autrement dit, c'est la définition de la *convergence normale* d'une série de fonctions. Le lecteur ne devrait donc pas être surpris que la déclinaison des résultats obtenus via le théorème de la convergence dominée de Lebesgue avec $\Omega = \mathbf{N}$ ressemblent beaucoup aux résultats qu'on connaît déjà. Plus précisément, la traduction de [24.5] avec $\Omega = \mathbf{N}$ donne exactement le même résultat que [23.11], tandis que [24.6] avec $\Omega = \mathbf{N}$ donne un résultat seulement légèrement différent du [23.13] : la condition que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ doit converger simplement est remplacé par la condition de la convergence absolue, mais avec l'intégrale de Lebesgue on n'a pas besoin d'exiger que les dérivées f'_n soient continues (auquel cas on n'aura pas le résultat que la somme de la série admet la dérivée partielle correspondante).

Maintenant il est vrai que les résultats obtenus via les suites dans §23 peuvent être renforcés en utilisant la convergence uniforme (des séries). Et il est aussi vrai qu'il existe des séries pour lesquelles la suite des sommes partielles converge uniformément, tandis que la série ne converge pas normalement. Mais dans la plupart des cas, on ne maîtrise pas du tout la suite des sommes partielles, donc on aura du mal à établir sa convergence uniforme. Et on se tourne donc vers des versions avec la convergence normale, des versions qu'on peut donc voir soit comme des cas particuliers de conséquences du théorème de convergence dominée de Lebesgue en prenant $\Omega = \mathbf{N}$, soit comme des conséquences de résultats concernant les suites, en invoquant [23.10].

Le lecteur attentif aura remarqué que le résultat [23.12] ne figure pas parmi les résultats qu'on peut obtenir via le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec $\Omega = \mathbf{N}$, et pour cause : on aurait deux intégrales, une sur $[a, b]$ et une sur \mathbf{N} . Plus en détail, quand on applique [23.7] ou [24.8] à la suite des sommes partielles d'une série, on obtient deux conditions légèrement différentes pour qu'on puisse échanger une série avec une intégrale (sur $[a, b]$). Mais dans les deux cas, la convergence normale de la série (sur $[a, b]$) implique ces conditions et on récupère le même résultat [23.12]. Une autre façon d'interpréter ce même résultat est comme un cas particulier du théorème de Fubini appliqué aux deux espaces mesurés \mathbf{N} (avec la mesure de comptage) et $[a, b]$ (muni de la mesure de Lebesgue). La condition de convergence normale garantit que le théorème de Fubini s'applique, ce qui démontre encore une fois que cette condition permet d'échanger la série (intégrale sur \mathbf{N}) avec l'intégrale sur $[a, b]$.

Terminons ici avec, dans un certain sens, la suite de §10 en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la notion d'holomorphic sous l'intégrale.

24.12 Holomorphic sous l'intégrale. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes.*

- (i) *Pour tout $z \in U$ l'application $\omega \mapsto f(z, \omega)$ est \mathcal{F} -mesurable.*
- (ii) *Pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $z \mapsto f(z, \omega)$ est holomorphe sur U .*
- (iii) *Il y a convergence dominée de f sur tout compact de U .*

Alors les fonctions $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, \omega)$ vérifient ces mêmes conditions, elles sont μ -intégrables et la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(z) = \int_{\Omega} f(z, \omega) \, d\mu(\omega)$$

est holomorphe avec

$$F^{(k)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, \omega) \, d\mu(\omega) .$$

Remarque. Si dans [24.12] on prend $P = \mathbf{N}$ avec la mesure de comptage, on retrouve le résultat [10.4] que si une série $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalement sur tout compact, alors la même chose est vrai pour $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, F est holomorphe et on a les égalités $F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$.

Ⓟ **24.13 Corollaire.** Soit $F : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue (sur le produit) telle que pour tout $t \in [a, b]$ l'application $z \mapsto F(z, t)$ soit holomorphe sur U . Alors la fonction $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$g(z) = \int_a^b F(z, t) \, dt$$

est holomorphe avec pour tout $k \in \mathbf{N}$: $g^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k F}{\partial z^k}(z, t) \, dt$.

25. Complexifier ce qui est complexe.

Cette section traite une partie de l'algèbre linéaire souvent négligée : la complexification d'un espace vectoriel réel. Dit comme cela, ce n'est pas très important, mais cela devient plus important quand on commence avec un espace vectoriel complexe, qu'on oublie l'aspect complexe et qu'on ne retienne que l'aspect d'un espace vectoriel réel. Et qu'on le complexifie ensuite. On dirait que c'est complètement inutile et pourtant : sans le savoir le lecteur de ce texte l'a déjà rencontré quand on a parlé des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ [7.4]. On y reviendra à la fin, mais commençons au début.

25.1 La complexification d'un espace vectoriel réel. Soit E un espace vectoriel réel, alors on définit sa *complexification* $E^{\mathbf{C}}$, un espace vectoriel complexe, comme suit. En tant qu'ensemble $E^{\mathbf{C}}$ est le produit (cartésien) $E^{\mathbf{C}} = E \times E$, muni de l'addition évidente

$$(e, f) + (e', f') = (e + e', f + f')$$

et de la multiplication par nombres complexes définie comme

$$(x + iy) \cdot (e, f) = (xe - yf, xf + ye) .$$

Une autre façon de dire la même chose est de dire qu'en tant qu'espace vectoriel réel on a $E^{\mathbf{C}} = E \times E$ sur lequel on définit une multiplication par le nombre complexe i par

$$i \cdot (e, f) = (-f, e) .$$

On laisse aux bons soins du lecteur la vérification "triviale" que c'est bien un espace vectoriel complexe.

Sur $E^{\mathbf{C}}$ on définit une l'application $\mathfrak{C} : E^{\mathbf{C}} \rightarrow E^{\mathbf{C}}$, appelé *la conjugaison complexe* par

$$\mathfrak{C}(e, f) = (e, -f) .$$

C'est une involution : $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{C} = \text{Id}$ et c'est une application anti-linéaire :

$$\forall z \in \mathbf{C} \forall v, w \in E^{\mathbf{C}} : \mathfrak{C}(v + z \cdot w) = \mathfrak{C}(v) + \bar{z} \cdot \mathfrak{C}(w) .$$

Et on définit l'application $\Phi_r : E \rightarrow E^{\mathbf{C}}$, appelée *l'injection canonique* par $\Phi_r(e) = (e, 0)$.

Si $A : E \rightarrow F$ est une application \mathbf{R} -linéaire entre deux espaces vectoriels réels, alors on définit sa complexification $A^{\mathbf{C}} : E^{\mathbf{C}} \rightarrow F^{\mathbf{C}}$ par

$$A^{\mathbf{C}}(e, e') = (A(e), A(e')) .$$

On laisse (de nouveau) aux bons soins du lecteur la vérification que $A^{\mathbf{C}}$ est bien une application \mathbf{C} -linéaire entre les espaces vectoriels complexes $E^{\mathbf{C}}$ et $F^{\mathbf{C}}$.

Nota Bene. Beaucoup d'auteurs définissent la complexification $E^{\mathbf{C}}$ comme étant $E \oplus iE$. Bien que cette notation est (très) suggestive, elle est fondamentalement fausse ! Pour un espace vectoriel réel E , la notation iE n'a pas de sens, car on ne peut pas multiplier un élément de E avec le nombre complexe i . C'est donc une notation purement formelle. Ensuite, une fois qu'on a défini $E^{\mathbf{C}}$ comme le produit cartésien $E \times E$, il faut remarquer que l'espace E **n'est pas** un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{C}}$! C'est $E \times \{0\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{C}}$ et l'injection canonique

$\Phi_r : E \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ fournit l'isomorphisme entre E et le sous-espace vectoriel $E \times \{0\} = (E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$. Une fois qu'on est dans $E^{\mathbf{C}}$ avec le sous-espace vectoriel $(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} = E \times \{0\}$, on peut multiplier par i et constater qu'on a les égalités

$$i \cdot (E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \{iv \mid v \in (E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}\} = i \cdot (E \times \{0\}) = \{0\} \times E$$

et que ce sous-ensemble est stable par multiplication par nombres réels : c'est un sous-espace vectoriel réel de $E^{\mathbf{C}}$, comme $(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$. Les deux sous-espace vectoriels (réels) $(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$ et $i(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$ sont supplémentaires, ce qui permet d'écrire l'égalité

$$E^{\mathbf{C}} = (E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} \oplus i(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} .$$

C'est une façon pompeuse d'écrire $E \times E = E \times \{0\} \oplus \{0\} \times E$. Mais attention donc : cette somme directe est en tant qu'espaces vectoriels réels. L'écrire comme $E^{\mathbf{C}} = E \oplus iE$ (en utilisant l'isomorphisme entre E et $(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$) est donc suggestive, très suggestive, y compris pour comment fonctionne la multiplication par nombres complexes. Mais cela reste suggestive et ne peut pas être pris comme définition !

Remarque pour le lecteur curieux. La définition de la complexification d'un espace vectoriel réel comme donnée ci-dessus est un peu "artisanale" dans le sens qu'une "meilleure" définition serait de passer par le produit tensoriel. En toute généralité, si E est un espace vectoriel sur un corps K et si $L \supset K$ est une extension de corps, on obtient un espace vectoriel sur L en prenant le produit tensoriel (sur le corps de base K) $L \otimes_K E$ de L vu comme espace vectoriel sur K et E . Dans cette optique la multiplication par les éléments de L est donnée par la formule "évidente"

$$\ell \cdot (\ell' \otimes e) = (\ell \cdot \ell') \otimes e .$$

L'injection canonique est alors donnée par

$$\Phi_r(e) = 1 \otimes e$$

et la formule pour l'application L -linéaire A^L associée à une application K -linéaire $A : E \rightarrow F$ sera donnée par

$$A^L(\ell \otimes e) = \ell \otimes A(e) .$$

Je ne l'ai pas donné sous cette forme, car la notion de produit tensoriel ne fait pas partie d'un cursus "ordinaire" en licence de mathématique.

Un premier exemple simple. L'exemple le plus simple (à part l'espace vectoriel $\{0\}$ qui n'a pas un grand intérêt) est l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}$. Dans ce cas on aura $E^{\mathbf{C}} = \mathbf{R}^2$ avec la multiplication par nombres complexes donnée par

$$\forall u, v \in \mathbf{R} \quad : \quad (x + iy) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu) .$$

Quand on compare cela à la construction de \mathbf{C} dans §4, on voit directement que c'est la même chose. Autrement dit, on (re)construit l'ensemble \mathbf{C} . Sauf qu'ici le contexte est complètement différent : on connaît déjà le corps des nombres complexes et on est en train de construire la complexification de l'espace vectoriel réel \mathbf{R} pour obtenir un espace vectoriel complexe $\mathbf{R}^{\mathbf{C}}$. À part ce "détail," la construction est la même : on obtient l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$, maintenant vu comme espace vectoriel complexe (de dimension 1), avec l'injection canonique $\Phi_r = \iota$ donnée par

$$\Phi_r(x) = (x, 0) = \iota(x) .$$

Remarque pour le lecteur curieux. Dans l'exemple ci-dessus on a argumenté qu'on obtient une vraie égalité $\mathbf{R}^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$. Cette affirmation est vraie dans le cadre de ce texte, où on a défini \mathbf{C} de cette façon. Mais il y a d'autres façons de définir \mathbf{C} , par exemple comme le quotient $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$ de l'anneau intègre $\mathbf{R}[X]$ modulo l'idéal engendré par le polynôme $X^2 + 1$. Et dans ce cas, la construction de la complexification $\mathbf{R}^{\mathbf{C}}$ ne donne pas, à l'identique, l'ensemble \mathbf{C} , mais un ensemble qui sera isomorphe avec \mathbf{C} (on dira canoniquement isomorphe, sans explication de ce que cela veut dire exactement).³

25.2 Un deuxième exemple (presque) à l'autre extrême. Comme deuxième exemple on regarde un espace vectoriel qui peut être très grand. Soit A un ensemble, soit E un espace vectoriel réel et soit $\mathcal{F}(A; E)$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans E . C'est un espace vectoriel réel quand on définit la multiplication par nombres réels et l'addition de fonctions point par point :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(A; E) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall a \in A \quad : \quad (f + \lambda \cdot g)(a) = f(a) + \lambda \cdot (g(a)) .$$

La complexification $\mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}} = \mathcal{F}(A; E) \times \mathcal{F}(A; E)$ consiste de couples de fonctions à valeurs dans E avec la multiplication par nombres complexes donnée par

$$(25.3) \quad (x + iy) \cdot (f, g) = (xf - yg, xg + yf) .$$

Maintenant il est vrai qu'un couple de fonctions n'est pas une fonction proprement dit. Mais il est extrêmement naturel, quand on part de deux fonctions $f : A \rightarrow X$ et $g : A \rightarrow Y$, d'identifier le couple de fonctions (f, g) avec une fonction $A \rightarrow X \times Y$ selon la formule

$$(f, g)(a) = (f(a), g(a)) .$$

Avec cette identification, on voit un couple $(f, g) \in \mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}}$ comme une fonction $(f, g) : A \rightarrow E \times E \cong E^{\mathbf{C}}$. Mais, comme pour $\mathcal{F}(A; E)$, on peut multiplier une fonction $h : A \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ par un nombre complexe point par point selon la formule

$$(25.4) \quad (z \cdot h)(a) = z \cdot (h(a)) .$$

On a donc deux façons de multiplier un couple $(f, g) \in \mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}}$ par un nombre complexe : les formules (25.3) et (25.4). Heureusement un petit calcul montre que ces deux façons sont identiques :

$$\begin{aligned} ((x + iy) \cdot (f, g))(a) &\stackrel{(25.4)}{=} (x + iy) \cdot ((f, g)(a)) = (x + iy) \cdot (f(a), g(a)) \\ &\stackrel{[25.1]}{=} (x \cdot f(a) - y \cdot g(a), x \cdot g(a) + y \cdot f(a)) \\ &= ((xf - yg)(a), (xg + yf)(a)) = (xf - yg, xg + yf)(a) \\ &\stackrel{(25.3)}{=} ((x + iy) \cdot (f, g))(a) . \end{aligned}$$

Avec cette identification, on vient de montrer (plus ou moins, on laisse les détails au lecteur consciencieux) que la complexification $\mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}}$ est l'espace vectoriel complexe $\mathcal{F}(A; E^{\mathbf{C}})$:

$$\text{officiellement : } \mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}} \cong \mathcal{F}(A; E^{\mathbf{C}}) ,$$

$$\text{dans la pratique : } \mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}} = \mathcal{F}(A; E^{\mathbf{C}}) .$$

3. Généralement quand on parle d'un objet (isomorphisme, injection, ...) canonique, cela veut dire que dans la construction/définition de cet objet on ne fait pas de choix (comme le choix d'une base dans un espace vectoriel) et qu'on n'a pas besoin d'autres ingrédients pour le définir. Par exemple on a une injection canonique d'un espace vectoriel dans son bi-dual. Mais on a besoin (du choix) d'un produit scalaire pour définir une injection dans son dual.

Quand on combine cet exemple avec le précédent, on trouve que la complexification de l'espace des fonctions réelles sur un ensemble A "est" (s'identifie avec) l'espace des fonctions complexes sur A : $\mathcal{F}(A; \mathbf{R})^{\mathbf{C}} = \mathcal{F}(A; \mathbf{C})$.

Une variante de cet exemple, dont on aura besoin dans la suite, est la suivante. On part d'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et on regarde l'espace $C^\infty(U; E)$ des fonctions $f : U \rightarrow E$ de classe C^∞ , où E est un \mathbf{R} -espace vectoriel (muni d'une norme pour que la notion de différentiabilité est bien définie). Un raisonnement rigoureusement analogue montre que sa complexification est (canoniquement isomorphe à) l'espace $C^\infty(U; E^{\mathbf{C}})$ des fonctions $f : U \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ de classe C^∞ et en particulier :

$$\text{officiellement : } C^\infty(U; \mathbf{R})^{\mathbf{C}} \cong C^\infty(U; \mathbf{R}^{\mathbf{C}}) ,$$

$$\text{dans la pratique : } C^\infty(U; \mathbf{R})^{\mathbf{C}} = C^\infty(U; \mathbf{C}) .$$

→ **25.5 Lemme.** Soit E et F deux espaces vectoriels réels et soit $A : E \rightarrow F$ une application \mathbf{R} -linéaire.

- (i) L'application $\Phi_r : E \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels entre E et le sous-espace réel $(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} \subset E^{\mathbf{C}}$ défini comme

$$(E^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} = \{ v \in E^{\mathbf{C}} \mid \mathfrak{C}(v) = v \} = \{ (e, 0) \mid e \in E \} .$$

- (ii) Si $\mathcal{B} \subset E$ est une base de E comme espace vectoriel réel, alors $\Phi_r(\mathcal{B})$ est une base de $E^{\mathbf{C}}$ comme espace vectoriel complexe.

- (iii) L'application $A^{\mathbf{C}} : E^{\mathbf{C}} \rightarrow F^{\mathbf{C}}$ est l'unique application \mathbf{C} -linéaire vérifiant

$$\forall e \in E : A^{\mathbf{C}}(\Phi_r(e)) = \Phi_r(A(e)) ,$$

où à gauche Φ_r désigne l'injection canonique $\Phi_r : E \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ et à droite l'injection canonique $\Phi_r : F \rightarrow F^{\mathbf{C}}$.

- (iv) L'application $A^{\mathbf{C}}$ est "compatible" avec la conjugaison complexe \mathfrak{C} (dans $E^{\mathbf{C}}$ et $F^{\mathbf{C}}$) :

$$\forall v \in E^{\mathbf{C}} : \mathfrak{C}(A^{\mathbf{C}}(v)) = A^{\mathbf{C}}(\mathfrak{C}(v)) .$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels réels, l'ensemble $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F)$ des applications \mathbf{R} -linéaires entre ces deux espaces est aussi un espace vectoriel réel. Quand on complexifie E et F , on obtient deux espaces vectoriels complexes $E^{\mathbf{C}}$ et $F^{\mathbf{C}}$, ce qui permet de définir l'espace vectoriel complexe $\text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$ des applications \mathbf{C} -linéaires entre ces deux espaces complexifiés. Mais on peut aussi regarder la complexification de l'espace $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F)$.

→ **25.6 Proposition.** Soit E et F deux espaces vectoriels réels. Alors l'application $\Psi : (\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F))^{\mathbf{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$ définie par

$$\Psi(A, B) = A^{\mathbf{C}} + i B^{\mathbf{C}}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes. Réciproquement, on peut exprimer l'application $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F) \rightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$, $A \mapsto A^{\mathbf{C}}$ en termes de l'application Ψ par $A^{\mathbf{C}} = (\Psi \circ \Phi_r)(A)$.

Nota Bene. • Il ne faut pas confondre l'isomorphisme $\Psi : (\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F))^{\mathbf{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$ avec l'identification $\mathcal{F}(A; E)^{\mathbf{C}} \cong \mathcal{F}(A; E^{\mathbf{C}})$ décrite dans [25.2]. Cette dernière identification a une variante qui donne une identification entre $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F)^{\mathbf{C}}$ et $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F^{\mathbf{C}})$, mais l'ensemble source ne change pas et les applications restent \mathbf{R} -linéaires. Par contre, avec l'isomorphisme Ψ on change l'ensemble source de E en $E^{\mathbf{C}}$, mais on change aussi la nature des applications concernées de \mathbf{R} -linéaires en \mathbf{C} -linéaires.

• Il est habituel de ne pas écrire l'isomorphisme Ψ et “donc” d'identifier les deux espaces $(\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F))^{\mathbf{C}}$ et $\text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$. On a donc des identifications “naturelles” entre les trois \mathbf{C} -espaces vectoriels $(\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F))^{\mathbf{C}}$, $\text{End}_{\mathbf{C}}(E^{\mathbf{C}}; F^{\mathbf{C}})$ et $\text{End}_{\mathbf{R}}(E; F^{\mathbf{C}})$.

Une fois qu'on sait comment définir la complexification d'un espace vectoriel réel, prenons un espace vectoriel complexe E et oublions qu'elle est complexe, en ne retenant que le fait qu'on peut multiplier par des nombres réels. Alors on peut définir sa complexification $E^{\mathbf{C}} = E \times E$ munie d'une multiplication par nombres complexes et en particulier par i selon la formule

$$i \cdot (e, f) = (-f, e) .$$

Si maintenant on se réveille d'un coup et qu'on se rappelle que E était un espace vectoriel complexe et que donc on sait déjà comment multiplier par $i \in \mathbf{C}$, on a un problème. Car dans ce cas, le produit ie de $i \in \mathbf{C}$ avec $e \in E$ reste dans E et n'échange pas les deux composantes dans le produit $E \times E$. On a donc **deux** façons de multiplier par $i \in \mathbf{C}$ qu'il faut distinguer. On notera la multiplication par $i \in \mathbf{C}$ dans l'espace complexifié $E^{\mathbf{C}}$ toujours par i :

$$\forall (e, f) \in E^{\mathbf{C}} \equiv E \times E : i \cdot (e, f) = (-f, e)$$

et on notera l'application de multiplication par i dans l'espace vectoriel complexe E comme $I : E \rightarrow E$:

$$\forall e \in E : I(e) = ie \in E .$$

C'est une application \mathbf{C} -linéaire, mais on ne retient pour l'instant que le fait que c'est une application \mathbf{R} -linéaire. En tant que telle, on a sa complexification $I^{\mathbf{C}} : E^{\mathbf{C}} \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ définie par

$$I^{\mathbf{C}}(e, f) = (I(e), I(f)) \equiv (ie, if) .$$

25.7 Proposition. *L'application \mathbf{C} -linéaire $I^{\mathbf{C}} : E^{\mathbf{C}} \rightarrow E^{\mathbf{C}}$ est diagonalisable avec deux valeurs propres $\pm i$.*

(i) *Les deux sous-espaces propres sont donnés par*

$$E_{\pm i}^{\mathbf{C}} = \{ v \in E^{\mathbf{C}} \mid I^{\mathbf{C}}(v) = \pm iv \} = \{ (e, \mp I(e)) \mid e \in E \} .$$

(ii) *La décomposition comme somme directe $E^{\mathbf{C}} = E_i^{\mathbf{C}} \oplus E_{-i}^{\mathbf{C}}$ est donnée par*

$$\forall v \in E^{\mathbf{C}} : v = \frac{1}{2}(v - iI^{\mathbf{C}}(v)) + \frac{1}{2}(v + iI^{\mathbf{C}}(v)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}(v \mp iI^{\mathbf{C}}(v)) \in E_{\pm i}^{\mathbf{C}}$$

ou encore par

$$\begin{aligned} \forall (e, f) \in E^{\mathbf{C}} : (e, f) &= \frac{1}{2}(e + I(f), f - I(e)) + \frac{1}{2}(e - I(f), f + I(e)) \\ &\quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}(e \pm I(f), f \mp I(e)) \in E_{\pm i}^{\mathbf{C}} . \end{aligned}$$

(iii) L'application $\Phi_+ : E \rightarrow E_i^{\mathbf{C}}$ donnée par

$$\Phi_+(e) = \frac{1}{2}(e, -I(e))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes et l'application $\Phi_- : E \rightarrow E_{-i}^{\mathbf{C}}$ donnée par

$$\Phi_- = \mathfrak{C} \circ \Phi_+ \quad \text{ou} \quad \Phi_-(e) = \frac{1}{2}(e, I(e))$$

est un anti-isomorphisme d'espaces vectoriels complexes.

Un exemple “simple”. Le plus simple des espaces vectoriels complexes est \mathbf{C} (à part l'exemple trivial $\{0\}$). Sauf que pour cet exemple, les notations nous jouent un mauvais tour. Je le présente quand même, car cela permet la comparaison avec le cas des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$. Dans le fond c'est exactement le même exemple, sauf que, quand on l'écrit sous la forme des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$, il y a beaucoup moins de risque de confusion.

Suivons donc la construction de $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, la complexification de \mathbf{C} vu comme espace vectoriel réel. En tant qu'ensemble on aura

$$\mathbf{C}^{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$$

et les différentes opérations/applications sont données par les formules

$$(25.8) \quad \forall (w, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \quad : \quad \begin{aligned} i \cdot (w, z) &= (z, -w) & \Phi_r(w) &= (w, 0) \\ I^{\mathbf{C}}(w, z) &= (iw, iz) & \Phi_{\pm}(w) &= (\tfrac{1}{2}w, \mp \tfrac{i}{2}w) . \end{aligned}$$

Un petit calcul explicite montre qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} \Phi_+(w) &= w \cdot \Phi_+(1) = w \cdot \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{i}{2}\right) \\ \Phi_-(w) &= \bar{w} \cdot \Phi_-(1) = \bar{w} \cdot \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{i}{2}\right) , \end{aligned}$$

ce qui confirme l'égalité $\Phi_r = \Phi_+ + \Phi_-$ et le fait que Φ_+ est \mathbf{C} -linéaire, tandis que Φ_- est anti-linéaire.

Jusqu'à ici les choses sont assez limpides, mais la notation nous joue un mauvais tour quand on veut déterminer une base de $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$. Car les deux vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ ne forment pas une base, contrairement à ce qu'on aurait cru par la notation : on a la relation $e_2 - ie_1 = 0$. Par contre, les vecteurs $(1, 0)$ et $(i, 0)$ forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, comme le font les vecteurs $(\frac{1}{2}, \frac{i}{2})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2})$. On voit que l'espace vectoriel complexe original \mathbf{C} est “canoniquement” isomorphe avec le sous-espace vectoriel complexe engendré par le vecteur $(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2})$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ et qu'il est “canoniquement” anti-isomorphe avec le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{i}{2})$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

25.9 Les opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$. Dans [7.4] on a introduit les opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ comme deux combinaisons linéaires (complexes) des dérivées partielles ∂_1 et ∂_2 . Ce qui est beaucoup moins évident à première vue est que ces deux opérateurs sont intimement liés à la complexification de l'espace tangent en un point $a \in \mathbf{C}$, ce qui leur confère un statut géométrique. Pour bien comprendre cela, il faut commencer au début et se poser la question naïve : c'est quoi un vecteur tangent ?

Naïvement un vecteur tangent s'obtient comme la dérivée d'une courbe : si $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ est une courbe (différentiable), alors $\gamma'(t)$ sera un vecteur tangent au point $\gamma(t)$. En variant la courbe γ , on voit facilement qu'on peut obtenir tout

vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ comme vecteur tangent en un point $a = \gamma(t)$ fixe : il suffit de prendre la courbe $\gamma(t) = a + tv$, auquel cas on aura $v = \gamma'(0)$ comme vecteur tangent au point $a = \gamma(0)$. Et déjà là, on voit une différence entre les vecteurs dans $U \subset \mathbf{R}^n$ et les vecteurs tangents : un vecteur dans U n'est pas arbitraire (ça doit rester dans U), tandis qu'un vecteur tangent peut être arbitraire, même si l'ouvert U est (très) petit. La "conclusion" est la suivante : si $U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert et $a \in U$, alors l'ensemble des vecteurs tangents en a est l'espace vectoriel \mathbf{R}^n complet, indépendant de l'ouvert U et le point a .

On peut prendre cela comme la définition de l'espace tangent en un point $a \in U$. Mais il y a une autre façon d'interpréter un vecteur tangent : comme une dérivée directionnelle. Si $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ est une fonction dérivable et $v \in \mathbf{R}^n$ un vecteur tangent, alors on peut définir $(D_v f)(a)$ la dérivée directionnelle de f dans la direction v au point $a \in U$ par

$$(25.10) \quad (D_v f)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \sum_{j=1}^n v_j (\partial_j f)(a) .$$

Le lien avec la première "définition" d'un vecteur tangent est facile à établir : si γ est une courbe avec vecteur tangent $v = \gamma'(t)$ au point $a = \gamma(t)$, alors la dérivée directionnelle $(D_v f)(a)$ est exactement la dérivée de la fonction $g(t) = f(\gamma(t))$, indépendant de la courbe choisie (avec bien sûr $v = \gamma'(t)$ et $a = \gamma(t)$) :

$$g(t) = f(\gamma(t)) \equiv f(a) \quad \Rightarrow \quad g'(t) = (D_v f)(a) .$$

Cette idée de dérivée directionnelle pour interpréter un vecteur tangent est formalisée dans la définition suivante. Pour un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ on regarde l'ensemble $C^\infty(U; \mathbf{R})$ des fonctions réelles $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ . C'est un espace vectoriel sur \mathbf{R} . Ensuite on regarde l'espace vectoriel $\text{End}_{\mathbf{R}}(C^\infty(U; \mathbf{R}); \mathbf{R})$ et son sous-espace vectoriel $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$ des *dérivation* en $a \in U$ de $C^\infty(U; \mathbf{R})$, c'est-à-dire des applications \mathbf{R} -linéaires $D : C^\infty(U; \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant la propriété de Leibniz

$$\forall f, g \in C^\infty(U; \mathbf{R}) : D(f \cdot g) = (D(f)) \cdot g(a) + f(a) \cdot (D(g)) .$$

Il est facile à montrer qu'une application de la forme

$$D(f) = \sum_{j=1}^n v_j (\partial_j f)(a) ,$$

avec $v_j \in \mathbf{R}$ est bien une telle dérivation, mais avec un petit peu plus d'effort on peut aussi montrer que ce sont les seules. La conclusion est que $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$, l'ensemble des dérivations en $a \in U$, est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n (les coefficients $v_j \in \mathbf{R}$ ci-dessus) et que les dérivations $\partial_1, \dots, \partial_n$ forment une base. Ainsi on arrive à une autre définition d'un "vecteur tangent" en $a \in U$ comme un élément de $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$.

Avec cette définition on a bouclé (un peu) la discussion sur la notion d'un vecteur tangent : en commençant avec la dérivée d'une courbe, et en passant par la notion de dérivée directionnelle, on arrive à la définition qu'un vecteur tangent (au point $a \in U$) "est" une dérivation (au point $a \in U$) de l'espace vectoriel (réel) $C^\infty(U; \mathbf{R})$.⁴ Autrement dit, on identifie une dérivation $D = \sum_{j=1}^n v_j \partial_j$ avec le vecteur $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$, un vecteur qu'on voit comme la dérivée d'une courbe, c'est-à-dire

4. Bien évidemment il y a d'autres définitions possibles d'un vecteur tangent, comme par exemple la classe d'équivalence de courbes passant par $a \in U$ pour une relation d'équivalence bien choisie.

comme un vecteur tangent au point $a \in U$. Cette identification est d'autant plus naturelle quand on voit D comme la dérivée directionnelle D_v d'une fonction dans la direction v au point a selon (25.10).

D'un point de vue géométrique il ne paraît pas naturel de vouloir complexifier l'espace tangent \mathbf{R}^n au point $a \in U$ (des dérivées de courbes), mais vu comme l'ensemble $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$ des dérivations de $C^\infty(U; \mathbf{R})$ (au point a), cela devient plus naturel. Car même en géométrie différentielle réelle on regarde des fonctions à valeurs complexes, donc regarder l'ensemble $C^\infty(U; \mathbf{C})$ est normal et on a vu qu'on a l'égalité/identification

$$C^\infty(U; \mathbf{C}) = C^\infty(U; \mathbf{R})^{\mathbf{C}}.$$

De là à regarder l'espace vectoriel $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ (sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $\text{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(U; \mathbf{C}); \mathbf{C})$) des applications \mathbf{C} -linéaires sur $C^\infty(U; \mathbf{C})$ qui vérifient la propriété de Leibniz n'est qu'un petit pas. Pour faire le lien entre $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ et $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$, on note qu'il n'est pas difficile de montrer que l'isomorphisme Ψ de [25.6] appliqué aux espaces $E = C^\infty(U; \mathbf{R})$ et $F = \mathbf{R}$ envoie le sous espace $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$ sur $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$:

$$\begin{array}{ccc} \left(\text{End}_{\mathbf{R}}(C^\infty(U; \mathbf{R}); \mathbf{R}) \right)^{\mathbf{C}} & \xrightarrow[\cong]{\Psi} & \text{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(U; \mathbf{C}); \mathbf{C}) \\ \cup & & \cup \\ \text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))^{\mathbf{C}} & \xrightarrow[\cong]{\Psi} & \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C})) . \end{array}$$

Sous-entendu dans cette affirmation sont les identifications $C^\infty(U; \mathbf{R})^{\mathbf{C}} \cong C^\infty(U; \mathbf{C})$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{C}} \cong \mathbf{C}$ décrites dans [25.2]. Sachant que les dérivées partielles ∂_j forment une base de $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$, on peut appliquer [25.5.ii] et [25.6] pour conclure que les applications $\partial_j^{\mathbf{C}} = (\Psi \circ \Phi_r)(\partial_j)$ forment une base de $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ (en tant qu'espace vectoriel complexe!). Pour savoir comment ces opérateurs/applications $\partial_j^{\mathbf{C}}$ opèrent sur $C^\infty(U; \mathbf{C})$, il "suffit" d'enchaîner les différentes définitions et identifications. On prend un élément $f \in C^\infty(U; \mathbf{C})$ et on rappelle qu'on l'a identifié avec un couple d'éléments $(\text{Re } f, \text{Im } f) \in C^\infty(U; \mathbf{R})^{\mathbf{C}} \equiv C^\infty(U; \mathbf{R}) \times C^\infty(U; \mathbf{R})$ selon la formule

$$(\text{Re } f, \text{Im } f)(a) = ((\text{Re } f)(a), (\text{Im } f)(a)) \equiv (\text{Re } f)(a) + i(\text{Im } f)(a) \in \mathbf{C}.$$

Ensuite on applique la définition de $\partial_j^{\mathbf{C}}$ donnée dans [25.1] :

$$\partial_j^{\mathbf{C}}(\text{Re } f, \text{Im } f) = (\partial_j(\text{Re } f), \partial_j(\text{Im } f)).$$

Autrement dit, les applications $\partial_j^{\mathbf{C}}$ sont simplement les dérivées partielles d'une fonction à valeurs vectorielle/complexes qu'on calcule composante par composante. Et oui, officiellement la dérivée partielle $\partial_j \in \text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$ n'est pas la même opération que la dérivée partielle $\partial_j \in \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$: le domaine de définition n'est pas le même (fonctions à valeurs réelles versus fonctions à valeurs complexes) et l'espace d'arrivée n'est pas le même non plus (\mathbf{R} versus \mathbf{C}). Mais tout le monde s'accorde de les confondre et de les noter de la même façon (et même de dire que c'est la même opération). Ceci est (encore une fois) un exemple d'abus de notation et d'identification d'objets différents ; plus qu'on avance dans ses études de mathématiques, plus qu'on rencontre de telles identifications.

La conclusion de la discussion précédente est donc que $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension n et que les dérivées partielles $\partial_1, \dots, \partial_n$ forment une base (officiellement on devrait dire que ce sont les $\partial_j^{\mathbf{C}}$ qui le font). On aurait pu

obtenir ce résultat d'une façon directe avec les mêmes arguments qu'utilisés pour la preuve que les ∂_j forment une base de $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$, mais c'est rassurant de voir qu'on obtient exactement le même résultat avec nos identifications.

Passons maintenant au cas particulier d'un ouvert $U \subset \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$. Dans ce cas on a l'identification $\text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R})) \cong \mathbf{R}^2$. Quand on passe à sa complexification on trouve l'identification

$$\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C})) \cong \text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))^{\mathbf{C}} \cong (\mathbf{R}^2)^{\mathbf{C}}.$$

Mais le voir comme l'espace (tangent) complexifié $(\mathbf{R}^2)^{\mathbf{C}}$ sous-entend qu'on a oublié que $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ était un espace vectoriel complexe. Rappelons nous donc cet aspect et prenons $w = u + iv \in \mathbf{C}$. On a identifié ce $w \in \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ avec la dérivation $D_w = u\partial_1 + v\partial_2 \in \text{Der}_{\mathbf{R}}^a(C^\infty(U; \mathbf{R}))$; pour son image $(D_w)^{\mathbf{C}} \in \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ on peut faire le calcul (en omettant l'exposant \mathbf{C} sur les dérivées partielles, voir la discussion ci-dessus) :

$$\begin{aligned} (D_w)^{\mathbf{C}}(f) &= u(\partial_1 f)(a) + v(\partial_2 f)(a) \\ &= \frac{1}{2}(u + iv)((\partial_1 f)(a) - i(\partial_2 f)(a)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u - iv)((\partial_1 f)(a) + i(\partial_2 f)(a)) \\ &= w \cdot (\partial_z f)(a) + \bar{w} \cdot (\partial_{\bar{z}} f)(a), \end{aligned} \tag{25.11}$$

où on a utilisé les opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ introduits dans [7.4]. Ce calcul montre que le nombre complexe w , vu comme le vecteur tangent réel $(u, v) \cong u\partial_1 + v\partial_2$ correspond à la dérivation (complexe) donnée par la somme $w\partial_z + \bar{w}\partial_{\bar{z}}$. Ce qu'on vient de refaire est la preuve de l'égalité $\Phi_r = \Phi_+ + \Phi_-$ (composée avec l'isomorphisme Ψ) donnée dans [25.7.iii]. Pour le voir, regardons quelques détails de nos identifications.

On a tout d'abord l'identification $u + iv \cong u\partial_1 + v\partial_2$ et la multiplication par i dans l'espace complexe \mathbf{C} , qu'on note ici par l'application I , est donnée par

$$I(u + iv) = i(u + iv) = -v + iu \quad \text{ou encore} \quad I(u\partial_1 + v\partial_2) = -v\partial_1 + u\partial_2.$$

Quand on met maintenant [25.7.iii] et [25.6] ensemble, on trouve

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi_+)(u\partial_1 + v\partial_2) &= \Psi\left(\frac{1}{2}(u\partial_1 + v\partial_2, -I(u\partial_1 + v\partial_2))\right) \\ &= \frac{1}{2}\Psi(u\partial_1 + v\partial_2, v\partial_1 - u\partial_2) \\ &= \frac{1}{2}((u\partial_1 + v\partial_2)^{\mathbf{C}} + i(v\partial_1 - u\partial_2)^{\mathbf{C}}) \\ &= \frac{1}{2}(u + iv)(\partial_1 - i\partial_2) = w\partial_z, \end{aligned} \tag{25.12}$$

et de la même façon $(\Psi \circ \Phi_-)(u\partial_1 + v\partial_2) = \bar{w}\partial_{\bar{z}}$. Et l'égalité $\Phi_r = \Phi_+ + \Phi_-$ composée avec l'application Ψ se transforme en l'égalité (25.11). Pour voir que la formule (25.12) est bien "la même" que (25.8), il suffit de se rappeler l'identification $w = u + iv \cong u\partial_1 + v\partial_2$ pour obtenir l'identification du couple

$$\left(\frac{1}{2}(u\partial_1 + v\partial_2), \frac{1}{2}(v\partial_1 - u\partial_2)\right) \cong \left(\frac{1}{2}w, -\frac{i}{2}w\right),$$

où à gauche on a la deuxième ligne de (25.12) (sans l'identification Ψ) et à droite (25.8).

Mais on peut faire toute autre chose : on peut regarder l'ensemble $\mathcal{O}(U) \subset C^\infty(U; \mathbf{C})$ des fonctions holomorphes sur U et l'ensemble $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(\mathcal{O}(U))$ des dérivations complexes de $\mathcal{O}(U)$. Et encore une fois en utilisant les mêmes arguments, on montre qu'une telle dérivation $D \in \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(\mathcal{O}(U))$ est nécessairement de la forme $D(f) = v f'(a)$ pour un $v \in \mathbf{C}$. Les dérivations de $\mathcal{O}(U)$ forment donc un espace vectoriel complexe de dimension 1, pas 2. D'autre part, toute dérivation (complexe)

de $C^\infty(U; \mathbf{C})$ est une dérivation de $\mathcal{O}(U) \subset C^\infty(U; \mathbf{C})$, ce qui nous donne une projection canonique $\pi : \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C})) \rightarrow \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(\mathcal{O}(U))$ donnée par la restriction d'une dérivation au sous-ensemble $\mathcal{O}(U)$. Sachant que les vecteurs/dérivations $(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}) \cong \partial_z$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}) \cong \partial_{\bar{z}}$ forment une base de $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$, il n'est pas difficile de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann nous disent que le noyau de cette projection π est donné par les multiples de $\partial_{\bar{z}}$:

$$\ker\left(\pi : \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C})) \rightarrow \text{Der}_{\mathbf{C}}^a(\mathcal{O}(U))\right) = \mathbf{C} \cdot \partial_{\bar{z}} .$$

Ceci est en parfait accord avec [7.3] qui dit que pour une fonction holomorphe on a les égalités

$$f'(a) = (\partial_1 f)(a) = -i(\partial_2 f)(a) .$$

Car les trois dérivations ∂_1 , $-i\partial_2$ et ∂_z dans $\text{Der}_{\mathbf{C}}^a(C^\infty(U; \mathbf{C}))$ diffèrent par des multiples de l'opérateur $\partial_{\bar{z}}$:

$$\partial_1 = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \quad \text{et} \quad -i\partial_2 = \partial_z - \partial_{\bar{z}} = \partial_1 - 2\partial_{\bar{z}} ,$$

et donc leur action sur une fonction holomorphe sera le même.

Le constat (conclusion?) de cette discussion est qu'en géométrie différentielle complexe (uni-dimensionnelle) on a un choix concernant l'espace tangent en un point $a \in U \subset \mathbf{C}$. On peut prendre $\mathbf{C}^2 = (\mathbf{R}^2)^{\mathbf{C}}$, la complexification de l'espace tangent "réel" $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ ou on peut prendre $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$. Ce choix dépendra de ce qu'on veut faire avec. Si on veut (de temps en temps) utiliser des fonctions réelles, on sera obligé d'utiliser la complexification \mathbf{C}^2 avec comme "base" ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$. Si on n'utilise que des fonctions holomorphes, on peut se restreindre à \mathbf{C} avec comme base ∂_z .

Les preuves

Les preuves de §1

Preuve de [1.4]. • (i) \Rightarrow (ii). Si f est de classe C^k sur selon [1.2], alors elle est nécessairement de classe C^k sur $]a, b[$. Mais en plus chaque $f^{(\ell)}$, $1 \leq \ell \leq k$ est aussi définie en a et en b et elle est continue sur $[a, b]$. Ce qui implique $f^{(\ell)}$ admet une limite à droite en a en une limite à gauche en b .

• (ii) \Rightarrow (i). Supposons que f vérifie les hypothèses de (ii) et montrons par récurrence sur ℓ que les dérivées successives $f^{(\ell)}$ existent sur $[a, b]$ et y sont continues. Supposons donc qu'on a montré que $f^{(\ell-1)}$ existe et est continue sur $[a, b]$ (ce qui est vrai pour $\ell = 1$, car f est continue sur $[a, b]$). Par hypothèse $f^{(\ell)}$ existe sur $]a, b[$ et y est continue, mais en plus elle admet des limites à droite en a et à gauche en b . Par [1.3] il s'ensuit que $f^{(\ell)}(a)$ et $f^{(\ell)}(b)$ existent et que $f^{(\ell)}$ est (donc) définie et continue sur $[a, b]$. Par récurrence c'est donc vrai pour tout $1 \leq \ell \leq k$.

• (i) \Rightarrow (iii). Si f est de classe C^k sur $[a, b]$ selon [1.2], alors on peut définir les fonction polynomiales $P_a, P_b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$P_a(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \quad \text{et} \quad P_b(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-b)^i}{i!} f^{(i)}(b) .$$

Il s'ensuit que la fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} P_a(x) & x < a \\ f(x) & x \in [a, b] \\ P_b(x) & x > b , \end{cases}$$

est de classe C^k sur \mathbf{R} , simplement parce qu'on a, par définition des polynômes P_a et P_b , les égalités

$$P_a^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a) \quad \text{et} \quad P_b^{(\ell)}(b) = f^{(\ell)}(b) .$$

Plus précisément, en utilisant la continuité de $f^{(\ell)}$ sur $[a, b]$ on a les égalités

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow a} g^{(\ell)}(x) &= \lim_{x \uparrow a} P_a^{(\ell)}(x) = P_a^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a) = \lim_{x \downarrow a} f^{(\ell)}(x) = \lim_{x \downarrow a} g^{(\ell)}(x) \\ \lim_{x \uparrow b} g^{(\ell)}(x) &= \lim_{x \uparrow b} f^{(\ell)}(x) = f^{(\ell)}(b) = P_b^{(\ell)}(b) = \lim_{x \downarrow b} P_b^{(\ell)}(x) = \lim_{x \downarrow b} g^{(\ell)}(x) . \end{aligned}$$

Ceci montre d'abord que $g^{(\ell)}(a)$ existe comme dérivée de $g^{(\ell-1)}$ en a , car (avec [1.3]) sa dérivée à gauche et sa dérivée à droite existent et sont égales (et un argument similaire en b). Mais cela montre aussi que la fonction $g^{(\ell)}$ est continue en a et en b . Cet argument étant valable pour tout $0 \leq \ell \leq k$, il s'ensuit que g est bien de classe C^k sur \mathbf{R} .

• (iii) \Rightarrow (i). Si f est la restriction de g à l'intervalle fermé $[a, b]$, alors il est immédiat que les dérivées successives $f^{(\ell)}$ existent sur $[a, b]$ comme la restriction des dérivées successives $g^{(\ell)}$. Et donc f est de classe C^k sur $[a, b]$ selon [1.2]. \boxed{CQFD}

Preuve de [1.5]. • (i). Si f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq p$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ est de classe C^k et que, pour tout $0 \leq \ell \leq k$, les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n). Mais pour $0 \leq m \leq k - \ell$ on a l'égalité $(f^{(\ell)})^{(m)} = f^{(\ell+m)}$. Il s'ensuit immédiatement que la restriction de $f^{(\ell)}$ à l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ est de classe $C^{k-\ell}$ et que, pour tout $0 \leq m \leq k - \ell$, les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} (f^{(\ell)})^{(m)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} (f^{(\ell)})^{(m)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n). Ce qui équivaut l'affirmation que $f^{(\ell)}$ est de classe $C^{k-\ell}$ par morceaux.

• (ii). Si f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq p$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ est de classe C^k et que, pour tout $0 \leq \ell \leq k$, les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n). Ceci veut dire qu'on peut prolonger par continuité, pour chaque $0 \leq \ell \leq k$, la fonction continue $f^{(\ell)} :]t_{j-1}, t_j[\rightarrow \mathbf{R}^n$ en une fonction continue sur $[t_{j-1}, t_j]$. Sachant qu'un intervalle fermé (et borné) est compact, ce prolongement par continuité est donc borné sur $[t_{j-1}, t_j]$, ce qui implique que $f^{(\ell)}$ est bornée sur l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$. Ceci étant vrai pour tout sous-intervalle $]t_{j-1}, t_j[$, il s'ensuit que $f^{(\ell)}$ est bornée sur tout son domaine de définition : $[a, b]$ privé des points t_j .

• (iii). Si f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq p$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_j[$ est de classe C^k et que, pour tout $0 \leq \ell \leq k$, les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n).

Montrons par récurrence sur ℓ que $f^{(\ell)}$ existe et est continue sur l'intervalle fermé $[t_{j-1}, t_j]$. La continuité de f garantit que c'est vrai pour $\ell = 0$. Supposons ensuite que c'est vrai pour ℓ , alors selon [1.3] la restriction de $f^{(\ell)}$ à $[t_{j-1}, t_j]$ est dérivable sur $[t_{j-1}, t_j]$ et sa dérivée y sera continue. Autrement dit, $f^{(\ell+1)}$ existe et est continue sur $[t_{j-1}, t_j]$, ce qui termine la preuve par récurrence.

Réciproquement, supposons qu'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à $[t_{j-1}, t_j]$ est de classe C^k **sur** $[t_{j-1}, t_j]$ selon

[1.2]. Alors ceci veut dire que pour chaque $0 \leq \ell \leq k$ la fonction $f^{(\ell)}$ existe et est continue sur $[t_{j-1}, t_j]$. En particulier les limites à droite en t_{j-1} et à gauche en t_j

$$\lim_{t \downarrow t_{j-1}} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

existent (dans \mathbf{R}^n) ; elles sont données par $f^{(\ell)}(t_{j-1})$ et $f^{(\ell)}(t_j)$ respectivement. Autrement dit, f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$. Mais on sait que f est définie et continue sur chaque sous-intervalle $[t_{j-1}, t_j]$. On a donc les égalités

$$\lim_{t \uparrow t_j} f(t) = f(t_j) = \lim_{f \downarrow t_j} f(t) ,$$

ce qui montre que f est bien continue sur $[a, b]$ entier.

Attention : le même argument ne s'applique pas pour montrer que les dérivées successives $f^{(\ell)}$, $\ell > 0$ sont continues sur $[a, b]$! La valeur $f(t_j)$ fait partie de la définition de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Par contre, la valeur $f^{(\ell)}(t_j)$, $\ell > 0$ est une valeur dérivée/déduite et n'existe pas en général, seulement sa valeur en tant que dérivée à gauche ou dérivée à droite. Les deux limites

$$\lim_{t \downarrow t_j} f^{(\ell)}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_j} f^{(\ell)}(t)$$

peuvent donc bien être différentes.

CQFD

Preuve de [1.11]. • (i). Si ϕ est strictement (dé)croissante, il y est de même pour ϕ^{-1} . Autrement dit, ϕ est directe si et seulement si ϕ^{-1} l'est. Supposons maintenant que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ est une subdivision telle que ϕ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et que ϕ' ne s'annule pas sur (aucun) $[t_{j-1}, t_j]$. Alors les points $s_j = \phi(t_j)$ constituent une subdivision de $[c, d]$, avec $c = s_0 < s_1 < \dots < s_p = d$ dans le cas ϕ direct et avec $c = s_p < s_{p-1} < \dots < s_0 = d$ dans le cas ϕ renversant.

Dans le cas ϕ direct, il s'ensuit que $\phi : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow [s_{j-1}, s_j]$ est une application bijective de classe C^k avec ϕ' qui ne s'annule pas. Par le théorème de l'inversion locale, $\phi^{-1} : [s_{j-1}, s_j] \rightarrow [t_{j-1}, t_j]$ est également une bijection de classe C^k pour laquelle la dérivée ne s'annule jamais (car $(\phi^{-1})'(s) = 1/\phi'(\phi^{-1}(s))$). L'application ϕ^{-1} est donc continue, de classe C^k sur chaque intervalle fermé $[s_{j-1}, s_j]$ avec une dérivée qui ne s'annule pas. C'est donc bien un changement de paramètre (direct).

Dans le cas ϕ renversant, le raisonnement est analogue, sauf qu'ici ϕ établit une bijection entre $[t_{j-1}, t_j]$ et $[s_j, s_{j-1}]$. Mais la conclusion ne change pas (beaucoup) : ϕ^{-1} est une application continue, de classe C^k sur chaque intervalle fermé $[s_j, s_{j-1}]$ avec une dérivée qui ne s'annule pas. C'est donc un changement de paramètre. Seul changement est que ϕ^{-1} sera, comme ϕ renversant.

• (ii). Soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que ϕ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et soit $c = s_0 < s_1 < \dots < s_q = d$ une subdivision de $[c, d]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[s_{\ell-1}, s_\ell]$. Définissons maintenant l'ensemble $D \subset [a, b]$ par

$$D = \{t_j \mid j = 0, \dots, p\} \cup \{\phi^{-1}(s_\ell) \mid \ell = 0, \dots, q\} ,$$

supposons que cet ensemble contient $r \leq p + q$ éléments et mettons les dans l'ordre :

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r = b .$$

Alors par définition de D , chaque intervalle $[\tau_{u-1}, \tau_u]$ (avec $1 \leq u \leq r$) est contenu dans un intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ (simplement parce que D contient plus de points que la subdivision initiale de $[a, b]$), mais aussi l'image $\phi([\tau_{u-1}, \tau_u])$ est incluse dans un intervalle $[s_{\ell-1}, s_\ell]$ parce que $\phi(D)$ contient plus de points que la subdivision initiale

de $[c, d]$. Il s'ensuit que la composée $\gamma \circ \phi$ est de classe C^k sur chaque $[\tau_{u-1}, \tau_u]$ comme composée d'applications de classe C^k . Par [1.5.iii] on conclut que $\gamma \circ \phi$ est $C^{k/}$.

• (iii). Le début de cette partie de la preuve est identique à l'argument donné en (ii) en remplaçant γ par ψ . La conclusion est donc que la composée $\psi \circ \phi$ est de classe $C^{k/}$. Elle est donc de classe C^k sur chaque $[\tau_{u-1}, \tau_u]$, où on a l'égalité

$$(\psi \circ \phi)'(t) = \psi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) .$$

Mais pour tout s dans une intervalle $\phi([\tau_{u-1}, \tau_u]) \subset [s_{\ell-1}, s_\ell]$ on a par hypothèse $\psi'(s) \neq 0$ et pour tout $t \in [\tau_{u-1}, \tau_u] \subset [t_{j-1}, t_j]$ on a $\phi'(t) \neq 0$. L'application $(\psi \circ \phi)'$ ne s'annule donc pas sur $[\tau_{u-1}, \tau_u]$, ce qui montre que $\psi \circ \phi$ est bien un $C^{k/}$ -changement de paramètre.

• (iv). Soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et soit $D \subset [c, d] \subset [a, b]$ défini par

$$D = \{c, d\} \cup \left(\{t_j \mid j = 0, \dots, p\} \cap [c, d] \right) .$$

Quand on met les $q \leq p$ éléments de D dans l'ordre

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_q = d ,$$

on a une subdivision de $[c, d]$ (essentiellement une sous-suite des t_j , si besoin augmenté au début avec c et/ou à la fin avec d) avec la propriété que chaque intervalle $[s_{\ell-1}, s_\ell]$ est contenu (ou même égal) dans un intervalle $[t_{j-1}, t_j]$. La restriction de γ à un de ces intervalles est donc automatiquement de classe C^k . Et donc, toujours par [1.5.iii], la restriction de γ à $[c, d]$ est bien de classe $C^{k/}$.

• (v). Si γ est de classe $C^{k/}$, alors elle est continue et de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$. Par [1.5.iii] il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$. Elle est donc a fortiori de classe C^ℓ , $1 \leq \ell \leq k$ sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$. Ce qui implique de nouveau par [1.5.iii] que γ est de classe C^ℓ par morceaux sur $[a, b]$. Étant continue, elle est donc de classe $C^{\ell/}$ sur $[a, b]$. \boxed{CQFD}

Preuve de [1.15]. • (i). Si $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, alors la concaténation $\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2$ existe, est définie sur $[a_1, b_1 - a_2 + b_2]$ et est donnée par

$$(\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 - a_2 + b_2 . \end{cases}$$

En particulier on a $(\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2)(b_1 - a_2 + b_2) = \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3)$, ce qui implique que la concaténation $(\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2) \mathbin{\lrcorner} \gamma_3$ existe, est définie sur $[a_1, b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3]$ et est donnée par

$$((\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2) \mathbin{\lrcorner} \gamma_3)(t) = \begin{cases} (\gamma_1 \mathbin{\lrcorner} \gamma_2)(t) & t \leq b_1 - a_2 + b_2 \\ \gamma_3(t - b_1 + a_2 - b_2 + a_3) & b_1 - a_2 + b_2 \leq t . \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 - a_2 + b_2 \\ \gamma_3(t - b_1 + a_2 - b_2 + a_3) & b_1 - a_2 + b_2 \leq t . \end{cases}$$

On montre de la même façon que la concaténation $\gamma_2 \blacksquare \gamma_3$ existe et est définie sur $[a_2, b_2 - a_3 + b_3]$, que $\gamma_1 \blacksquare (\gamma_2 \blacksquare \gamma_3)$ existe, est définie sur $[a_1, b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3]$ et est donnée par

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \blacksquare (\gamma_2 \blacksquare \gamma_3))(t) &= \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq b_1 \\ (\gamma_2 \blacksquare \gamma_3)(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t . \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 - a_2 + b_2 \\ \gamma_3(t - b_1 + a_2 - b_2 + a_3) & b_1 - a_2 + b_2 \leq t . \end{cases} \end{aligned}$$

• (ii). Soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ la subdivision de $[a, b]$ telle que γ_1 est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et soit $c = s_0 < s_1 < \dots < s_q = d$ la subdivision de $[c, d]$ telle que γ_2 est de classe C^k sur chaque $[s_{\ell-1}, s_\ell]$. Alors

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b = s_0 - c + b < s_1 - c + b < \dots < s_q - c + b = d - c + b$$

est une subdivision de $[a, b - c + d]$, le domaine de définition de $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ telle que $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ est de classe C^k sur chacun de ses sous-intervalles. Parce qu'on a $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, la courbe $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ est continue en $t = b$, ce qui termine la preuve que $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ est de classe $C^{k/}$. D'autre part, il est immédiat qu'on a

$$(\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)([a, b - c + d]) = (\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)([a, b]) \cup (\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)([b, b - c + d]) = \gamma_1([a, b]) \cup \gamma_2([c, d]) .$$

• (iii). Selon [1.11.iv] les restrictions γ_1 et γ_2 sont de classe $C^{k/}$. La définition de la concaténation nous donne immédiatement l'égalité $\gamma = \gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ en tant qu'applications définies sur $[a, b]$.

• (iva). Par hypothèse on a $\gamma_i = \psi_i \circ \phi_i$, avec $\phi_i : [a_i, b_i] \rightarrow [c_i, d_i]$ un $C^{k/}$ -changement de paramètre direct. Parce que ϕ_i est direct, on a

$$\psi_1(d_1) = \gamma_1(\phi_1^{-1}(d_1)) = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2) = \gamma_2(\phi_2^{-1}(c_2)) = \psi_2(c_2)$$

et donc les deux concaténations $\psi_1 \blacksquare \psi_2$ et $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2$ existent. Définissons maintenant l'application $\Phi : [a_1, b_1 - a_2 + b_2] \rightarrow [c_1, d_1 - c_2 + d_2]$ par

$$\Phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \phi_2(t - b_1 + a_2) + d_1 - c_2 & b_1 \leq t \leq b_1 - a_2 + b_2 . \end{cases}$$

Parce qu'on a

$$\phi_1(b_1) = d_1 = d_1 - c_2 + c_2 = \phi_2(a_2) + d_1 - c_2 ,$$

on a

$$\lim_{t \uparrow b_1} \Phi(t) = \phi_1(b_1) = \phi_2(a_2) + d_1 - c_2 = \lim_{t \downarrow b_1} \Phi(t) ,$$

ce qui montre que l'application Φ est continue en $t = b_1$. Par un argument similaire à l'argument donné dans (ii), il s'ensuit que Φ est de classe $C^{k/}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur les sous-intervalles fermés sur lesquels elle est de classe C^k . C'est donc un changement de paramètre.

Avec la définition de Φ il est élémentaire de montrer l'égalité $\gamma_1 \blacksquare \gamma_2 = (\psi_1 \blacksquare \psi_2) \circ \Phi$:

$$\begin{aligned}
((\psi_1 \blacksquare \psi_2) \circ \Phi)(t) &= \begin{cases} (\psi_1 \blacksquare \psi_2)(\phi_1(t)) & t \leq b_1 \\ (\psi_1 \blacksquare \psi_2)(\phi_2(t - b_1 + a_2) + d_1 - c_2) & b_1 \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\psi_1 \blacksquare \psi_2)(\phi_1(t)) & t \leq b_1 \Rightarrow \phi_1(t) \leq d_1 \\ (\psi_1 \blacksquare \psi_2)(\phi_2(t - b_1 + a_2) + d_1 - c_2) & b_1 \leq t \\ & \Rightarrow d_1 \leq \phi_2(t - b_1 + a_2) + d_1 - c_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi_1(\phi_1(t)) & t \leq b_1 \\ \psi_2(\phi_2(t - b_1 + a_2)) & b_1 \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \end{cases} = (\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)(t) .
\end{aligned}$$

- (ivb). Dans ce cas les changements de paramètres ϕ_i sont renversants, ce qui donne

$$\psi_2(d_2) = \gamma_2(\phi_2(d_2)) = \gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1) = \gamma_1(\phi_1(c_1)) = \psi_1(c_1) ,$$

ce qui montre que maintenant c'est la concaténation $\psi_2 \blacksquare \psi_1$ qui est définie. Dans ce cas on définit l'application $\Phi : [a_1, b_1 - a_2 + b_2] \rightarrow [c_2, d_2 - c_1 + d_1]$ par

$$\Phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) - c_1 + d_2 & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \phi_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 - a_2 + b_2 . \end{cases}$$

Ici on a

$$\phi_1(b_1) - c_1 + d_2 = d_2 = \phi_2(a_2) ,$$

ce qui permet de montrer que Φ est continue en $t = b_1$. Et de nouveau par un argument similaire à l'argument donné dans (ii), il s'ensuit que Φ est de classe $C^{/k/}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur les sous-intervalles fermés sur lesquels elle est de classe C^k . C'est donc un changement de paramètre.

Avec cette définition de Φ calculons $(\psi_2 \blacksquare \psi_1) \circ \Phi$:

$$\begin{aligned}
((\psi_2 \blacksquare \psi_1) \circ \Phi)(t) &= \begin{cases} (\psi_2 \blacksquare \psi_1)(\phi_1(t) - c_1 + d_2) & t \leq b_1 \\ (\psi_1 \blacksquare \psi_2)(\phi_2(t - b_1 + a_2)) & b_1 \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\psi_2 \blacksquare \psi_1)(\phi_1(t) - c_1 + d_2) & t \leq b_1 \Rightarrow d_2 \leq \phi_1(t) - c_1 + d_2 \\ (\psi_2 \blacksquare \psi_1)(\phi_2(t - b_1 + a_2)) & b_1 \leq t \Rightarrow \phi_2(t - b_1 + a_2) \leq d_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi_1(\phi_1(t)) & t \leq b_1 \\ \psi_2(\phi_2(t - b_1 + a_2)) & b_1 \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \end{cases} = (\gamma_1 \blacksquare \gamma_2)(t) ,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité $(\psi_2 \blacksquare \psi_1) \circ \Phi = \gamma_1 \blacksquare \gamma_2$.

• (v). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une C^k -courbe et soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ la subdivision de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$. Si on note γ_j la restriction de γ à $[t_{j-1}, t_j]$, alors une application répétée de (iii) montre directement l'égalité

$$\gamma = \gamma_1 \mathbin{\square} \gamma_2 \mathbin{\square} \dots \mathbin{\square} \gamma_p ,$$

avec chaque γ_j de classe C^k .

CQFD

Les preuves de §2

Les preuves de §3

Preuve de [3.1]. Si f est injective, elle est bijective sur son image C . Il faut donc montrer que l'application réciproque $f^{-1} : C \rightarrow B$ est continue pour avoir un homéomorphisme. Supposons donc que f^{-1} n'est pas continue en $c \in C$, ce qui veut dire qu'on a

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in C \quad : \quad \|y - c\| < \delta \text{ et } \|f^{-1}(y) - f^{-1}(c)\| \geq \varepsilon .$$

En prenant $\delta = 1/n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ on obtient une suite $y_n \in C$ vérifiant

$$(26.1) \quad \|y_n - c\| < 1/n \quad \text{et} \quad \|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(c)\| \geq \varepsilon .$$

Mais $f^{-1}(y_n)$ est une suite dans B qui est compact. Il existe donc une suite extraite $f^{-1}(y_{n_q})$ convergente dans B , disons $\lim_{q \rightarrow \infty} f^{-1}(y_{n_q}) = b \in B$. Par continuité de f en b on a donc

$$f(b) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(f^{-1}(y_{n_q})) = \lim_{q \rightarrow \infty} y_{n_q} = c ,$$

car toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Il s'ensuit qu'on a $b = f^{-1}(c)$ et donc on a (par définition de limite)

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|f^{-1}(y_{n_q}) - f^{-1}(b)\| = 0 .$$

Ceci contredit (26.1), car pour tout q on doit avoir $\|f^{-1}(y_{n_q}) - f^{-1}(b)\| \geq \varepsilon > 0$. On en déduit par l'absurde que $f^{-1} : C \rightarrow B$ est aussi continue et que $f : B \rightarrow C$ est un homéomorphisme. \square CQFD

Preuve de [3.3]. • (i). C'est un corollaire immédiat de [3.1] : $[a, b]$ est un compact et une $C^{k/}$ -courbe est en particulier continue.

• (ii). Commençons avec la partie facile. Si γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage, il existe un changement de paramètre $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tel que $\gamma = \psi \circ \phi$. Il s'ensuit immédiatement qu'on a $\gamma([a, b]) = \psi([c, d])$. En plus, sachant qu'un changement de paramètre est soit strictement croissant (direct) soit strictement décroissant (renversant), il n'y a que deux possibilités pour $\phi(a)$, à savoir c dans le cas direct ou d dans le cas renversant. Pour $\gamma(a) = \psi(\phi(a))$ on n'a donc que deux possibilités : $\psi(c)$ (cas direct) ou $\psi(d)$ (cas renversant). Vu l'injectivité de ψ , on en déduit que l'égalité $\gamma(a) = \psi(c)$ implique que ϕ est direct. Reste donc la partie difficile : montrer que si on a l'égalité $\gamma([a, b]) = \psi([c, d]) = C \subset \mathbf{R}^n$, alors il existe un changement de paramètre ϕ tel que $\gamma = \psi \circ \phi$.

Supposons donc qu'on a $\psi([c, d]) = C$. Alors par (i) on sait que les applications $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ et $\psi : [c, d] \rightarrow C$ sont des homéomorphismes. Il s'ensuit que l'application $\phi = \psi^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est un homéomorphisme vérifiant $\gamma = \psi \circ \phi$. En invoquant [1.9] on sait que ϕ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Traitons d'abord le cas strictement croissante. Pour cela on considère une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et que ψ est de classe C^k sur chaque $[\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)]$.

Une telle subdivision existe toujours : il suffit d'ajouter si besoin quelques points. Voici l'argument précis. Par définition d'une $C^{k/}$ -courbe il existe une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = b$ de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^k sur chaque $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Il existe aussi une subdivision $c = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_q = d$ de $[c, d]$ telle que ψ est de classe C^k sur chaque $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$. Définissons

$$D = \{ \tau_0, \dots, \tau_p \} \cup \phi^{-1}(\{ \sigma_0, \dots, \sigma_q \}) = \{ t_0, \dots, t_r \} \subset [a, b] ,$$

et supposons que ses éléments t_j sont dans l'ordre : $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$. Alors tout d'abord chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ est inclus dans un des intervalles $[\tau_{\ell-1}, \tau_\ell]$, simplement parce que les τ_ℓ sont tous dans D . Sachant que la restriction de γ à $[\tau_{\ell-1}, \tau_\ell]$ est de classe C^k , il s'ensuit que la restriction de γ à $[t_{j-1}, t_j]$ est de classe C^k . Ensuite on constate que chaque intervalle $[\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)]$ est inclus dans un des intervalles $[\sigma_{\ell-1}, \sigma_\ell]$, simplement parce que les σ_ℓ sont tous dans $\phi(D)$. Et donc la restriction de ψ à $[\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)]$ est de classe C^k comme voulu.

Pour $t \notin D$ il existe j tel que $t \in]t_{j-1}, t_j[$. Par définition d'une $C^{k/}$ -courbe régulière $\psi :]\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)[\rightarrow \mathbf{R}^n$ est de classe C^k et ψ' ne s'y annule pas. Il existe donc $1 \leq i \leq n$ tel que $\psi'_i(\phi(t)) \neq 0$. En appliquant le théorème de l'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $V_o \subset]\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)[$ de $\phi(t)$ et $V_i \subset \mathbf{R}$ de $\psi_i(\phi(t))$ tels que $\psi : V_o \rightarrow V_i$ est un difféomorphisme de classe C^k . Pour $\tau \in \phi^{-1}(V_o)$ on a donc $\gamma_i(\tau) = \psi_i(\phi(\tau)) \in V_i$, ce qui permet d'appliquer ψ_i^{-1} et d'écrire

$$(26.2) \quad \phi(\tau) = \psi_i^{-1}(\psi_i(\phi(\tau))) = \psi_i^{-1}(\gamma_i(\tau)) .$$

Sur l'ouvert $\phi^{-1}(V_o)$ la fonction ϕ est la composée des deux fonctions ψ_i^{-1} et γ_i de classe C^k , donc de classe C^k . Il s'ensuit que ϕ est de classe C^k sur l'ouvert $[a, b] \setminus D$.

En changeant les rôles, on montre de la même façon que ϕ^{-1} est de classe C^k sur l'ouvert $[c, d] \setminus \phi(D)$. Il s'ensuit en particulier que $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \notin D$. Reste donc de montrer que ϕ est dérivable à droite et à gauche en chaque point de la subdivision $\phi^{-1}(D)$ avec une valeur non-nulle (seulement d'un côté pour les points a et b du bord). Traitons le cas de la dérivée à droite au point t_{j-1} (les autres cas étant similaires). Sur $[\phi(t_{j-1}), \phi(t_j)]$ la courbe ψ est de classe C^k et ψ' n'y s'annule pas. En particulier il existe $1 \leq i \leq n$ tel que la dérivée à droite de ψ_i au point $\phi(t_{j-1})$ est non nulle. Elle est donc non nulle dans un voisinage $[\phi(t_{j-1}), \phi(t_{j-1} + \varepsilon)[$ de $\phi(t_{j-1})$ et sur $]\phi(t_{j-1}), \phi(t_{j-1} + \varepsilon)[$ de $\phi(t_{j-1})$ on peut appliquer notre raisonnement précédent (26.2) pour déduire que sur l'intervalle ouvert $]t_{j-1}, t_{j-1} + \varepsilon[$ on a

$$\phi'(\tau) = (\psi_i^{-1})'(\gamma_i(\tau)) \cdot \gamma'_i(\tau) = \frac{\gamma'_i(\tau)}{\psi'_i(\phi(\tau))} .$$

Mais par définition les fonctions γ'_i et $\psi'_i \circ \phi$ y sont continues et la limite de $\psi'_i \circ \phi$ en t_{j-1} est non nulle. On peut donc appliquer [1.3] et de conclure qu'on a

$$\phi'(t_{j-1}) = \lim_{\tau \downarrow t_{j-1}} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_{j-1})}{\tau - t_{j-1}} \stackrel{1.3}{=} \lim_{\tau \downarrow t_{j-1}} \phi'(\tau) = \frac{\gamma'_i(t_{j-1})}{\psi'_i(\phi(t_{j-1}))} .$$

Cette limite est non-nulle car le même raisonnement s'applique à ϕ^{-1} au point $\phi(t_{j-1})$ et pour tout $\tau \in]t_{j-1}, t_j[$ on a l'égalité

$$1 = (\phi^{-1})'(\phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau) ,$$

et donc, quand les deux admettent une limite finie en t_{j-1} , aucun des deux peut avoir une limite nulle. La conclusion est donc que ϕ est bien un changement de paramètre de classe C^k .

Pour montrer le cas où ϕ est strictement décroissante il suffit au bons endroit "d'inverser" l'ordre des indices concernées. On laisse les détails aux bons soins du lecteur. \boxed{CQFD}

Preuve de [3.4]. Quand on dispose des prérequis adéquates en topologie, la preuve est assez simple. Dans $[a, b]$ on identifie les deux extrémités a et b et on considère l'espace quotient $[a, b]/\sim$ avec la projection canonique $\pi : [a, b] \rightarrow [a, b]/\sim$. C'est une application continue surjective quand on munit l'espace quotient de la topologie quotient, donc l'espace quotient est compact. De plus,

l'application $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ factorise par l'espace quotient via une application continue bijective $\hat{\gamma} : [a, b]/\sim \rightarrow C$ vérifiant $\gamma = \hat{\gamma} \circ \pi$. Par une généralisation "évidente" de [3.1] où on remplace $B \subset \mathbf{R}^p$ par un espace topologique compact B arbitraire, il s'ensuit que l'application $\hat{\gamma}$ est un homéomorphisme. Ceci s'applique aussi à l'application $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^1$ définie par

$$\psi(t) = \exp(2\pi i(t - a)/(b - a)) .$$

On en déduit que l'application $\bar{\gamma} = \hat{\gamma} \circ (\hat{\psi})^{-1} : \mathbf{S}^1 \rightarrow C$ est un homéomorphisme. Quand on ne dispose pas de ces prérequis, on peut le montrer d'une façon directe "à la main" comme suit.

Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ l'application définie par

$$\psi(s) = \left(\cos(2\pi(s - a)/(b - a)), \sin(2\pi(s - a)/(b - a)) \right) .$$

Il est immédiat que ψ est bijective et que l'application $\bar{\gamma} = \gamma \circ \psi^{-1} : \mathbf{S}^1 \rightarrow C$ est également bijective (parce que $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ est bijective par définition d'une courbe simplement fermée). Sachant que $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ est un fermé borné, il suffit de montrer que $\bar{\gamma}$ est continue pour pouvoir conclure avec [3.1] qu'elle est un homéomorphisme quand on munit C de la topologie induite.

Pour montrer qu'elle est continue, on montrera qu'elle est continue en chaque point en quatre étapes, trois "grosses" et une "petite." Sur le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ l'application

$$(x, y) \mapsto \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

est une application continue et l'expression de sa restriction à \mathbf{S}^1 se simplifie en $\arccos(x)$. Il s'ensuit que sur l'ensemble $\mathbf{S}_{\text{haut}}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid y > 0\}$ l'application ψ^{-1} est donnée par l'expression

$$\psi^{-1}(x, y) = a + \frac{\arccos(x) \cdot (b - a)}{2\pi} \in \left] a, \frac{1}{2}(a + b) \right[,$$

une application qui est continue. De la même façon on montre que sur l'ensemble $\mathbf{S}_{\text{bas}}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid y < 0\}$ l'application ψ^{-1} est donnée par l'expression

$$\psi^{-1}(x, y) = b - \frac{\arccos(x) \cdot (b - a)}{2\pi} \in \left] \frac{1}{2}(a + b), b \right[,$$

ce qui est de nouveau une application continue. Et pour la troisième "grosse" étape on considère l'ensemble $\mathbf{S}_{\text{gauche}}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid x < 0\}$ et on constate que sur cet ensemble l'application ψ^{-1} est donnée par l'expression

$$\psi^{-1}(x, y) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{\arcsin(y) \cdot (b - a)}{2\pi} \in \left] a + \frac{1}{4}(b - a), a + \frac{3}{4}(b - a) \right[,$$

ce qui est encore une fois une application continue. La conclusion de ces trois étapes est que ψ^{-1} est continue en chaque point de \mathbf{S}^1 avec l'exception du point $(1, 0)$ et donc que la composée $\bar{\gamma} = \gamma \circ \psi^{-1}$ avec l'application continue γ est également continue en ces points.

Reste donc à montrer que $\bar{\gamma}$ est continue en $(1, 0)$. Commençons avec la remarque que les mêmes arguments que ci-dessus montrent que la restriction de l'application ψ^{-1} à l'ensemble $\mathbf{S}_{\text{droite}}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid x > 0\}$ est donnée par

$$(26.3) \quad \psi^{-1}(x, y) = \begin{cases} a + \frac{\arcsin(y) \cdot (b - a)}{2\pi} & \text{si } y \geq 0 \\ b - \frac{\arcsin(y) \cdot (b - a)}{2\pi} & \text{si } y < 0 . \end{cases}$$

Le fait que la fonction arcsin est continue en 0 nous dit qu'on a

$$(26.4) \quad \forall \delta' > 0 \exists \delta > 0 \forall y : |y| < \delta \Rightarrow |\arcsin(y)| < \delta'.$$

Et le dernier ingrédient dont on a besoin est le fait que γ est continue en a et en b et donc qu'on a

$$(26.5) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \exists \delta_a > 0 \quad \forall t \in [a, a + \delta_a[& : \quad \|\gamma(t) - \gamma(a)\| < \varepsilon \\ \exists \delta_b > 0 \quad \forall t \in]b - \delta_b, b] & : \quad \|\gamma(t) - \gamma(b)\| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Avec ces ingrédients on enchaîne : on prend $\varepsilon > 0$ arbitraire, ce qui nous donne $\delta_a, \delta_b > 0$ par (26.5). Ensuite on pose

$$\delta' = \frac{2\pi \cdot \min(\delta_a, \delta_b)}{b - a}$$

et on invoque (26.4) pour obtenir $\delta > 0$. Et on prétend qu'on a la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbf{S}^1 : \|(x, y) - (1, 0)\| < \delta \Rightarrow \|\bar{\gamma}(x, y) - \bar{\gamma}(1, 0)\| < \varepsilon,$$

ce qui montrera que $\bar{\gamma}$ est continue en $(1, 0)$ comme voulu. Voici l'argument précis. On a la majoration

$$|y| \leq \sqrt{y^2 + (x - 1)^2} = \|(x, y) - (1, 0)\| < \delta.$$

Selon (26.4) on a donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \leq a + \frac{\arcsin(y) \cdot (b - a)}{2\pi} < a + \frac{\delta' \cdot (b - a)}{2\pi} \leq a + \delta_a & \text{si } y \geq 0 \\ b \geq b - \frac{\arcsin(y) \cdot (b - a)}{2\pi} > b - \frac{\delta' \cdot (b - a)}{2\pi} \geq b - \delta_b & \text{si } y < 0. \end{array} \right.$$

Selon (26.3) on a donc les appartenances

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi^{-1}(x, y) \in [a, a + \delta_a[& \text{si } y \geq 0 \\ \psi^{-1}(x, y) \in]b - \delta_b, b] & \text{si } y < 0. \end{array} \right.$$

Et finalement on applique (26.5) qui nous dit que dans les deux cas $y \geq 0$ et $y < 0$ on a bien $\|\bar{\gamma}(x, y) - \bar{\gamma}(1, 0)\| < \varepsilon$, sachant qu'on a les égalités $\bar{\gamma}(1, 0) = \gamma(a) = \gamma(b)$.

CQFD

Preuve de [3.7]. On commence avec la remarque (triviale) que si γ et ψ sont équivalente par reparamétrage, alors elles ont le même image C . Pour l'implication réciproque et pour (ii), on remarque d'abord que ψ est injective sur $]c, d[$ et qu'on n'a pas $\gamma(a') = \psi(c)$. Il s'ensuit qu'il existe un unique $c' \in]c, d[$ tel que $\gamma(a') = \psi(c')$. Si on note $m = \gamma(a') = \psi(c')$ et $p = \gamma(a) = \psi(c)$, alors les hypothèses nous donnent les égalités

$$\gamma([a, a'[) \cup \gamma([a', b]) = \psi([c, c'[) \cup \psi([c', d]) = C \setminus \{p, m\}.$$

Selon [3.4] l'ensemble $C \subset \mathbf{R}^n$ est homéomorphe à \mathbf{S}^1 et le cercle unité privé de deux points se décompose en deux composantes connexes et donc $C \setminus \{p, m\}$ se décompose en deux composantes connexes. Mais γ et ψ sont continues, et l'image par une application continue d'un intervalle (ouvert) est connexe. Il s'ensuit que $\gamma([a, a'[)$ et $\gamma([a', b])$ respectivement $\psi([c, c'[)$ et $\psi([c', d])$ sont ces deux composantes connexes. Il n'y a donc que deux possibilités : $\gamma([a, a'[) = \psi([c, c'[)$ ou $\gamma([a, a'[) = \psi([c', d])$.

Dans le premier cas on a aussi (nécessairement) l'égalité $\gamma(]a', b[) = \psi(]c', d[)$ et, par un argument de continuité, aussi les égalités $\gamma([a, a']) = \psi([c, c'])$ et $\gamma([a', b]) = \psi([c', d])$. Si on note γ_1 la restriction de γ à $[a, a']$, γ_2 la restriction de γ à $[a', b]$, ψ_1 la restriction de ψ à $[c, c']$ et ψ_2 la restriction de ψ à $[c', d]$, alors on a quatre $C^{1/k}$ -courbes régulières injectives telles que γ_i a le même image que ψ_i ($i = 1, 2$). Par [3.3] il s'ensuit qu'il existe deux changements de paramètres ϕ_i tels que $\gamma_i = \psi_i \circ \phi_i$. Sachant qu'on a $p = \gamma_1(a) = \psi_1(c)$ et $m = \gamma_2(a') = \psi_2(c')$, les changements de paramètre ϕ_i sont directs [3.3]. Avec [1.15.iv] il s'ensuit que $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ et $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$ sont équivalentes par reparamétrage avec un changement de paramètre direct.

Le deuxième cas se traite de la même manière, sauf qu'ici on aura les égalités $\gamma_1([a, a']) = \psi_2([c', d])$ et $\gamma_2([a', b]) = \psi_1([c, c'])$. Il existe donc deux changements de paramètres avec $\gamma_1 = \psi_2 \circ \phi_2$ et $\gamma_2 = \psi_1 \circ \phi_1$. Ici on a $p = \gamma_1(a) \neq \psi_2(c') = m$, donc selon [3.3] le changement de paramètre ϕ_2 est renversant. De même, on a $m = \gamma_2(a') \neq \psi_1(c) = p$, donc ϕ_1 est renversant. Et de nouveau on peut invoquer [1.15.iv] et conclure que γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage, cette fois ci par un changement de paramètre renversant. \square CQFD

Preuve de [3.10]. On sépare la preuve en deux parties : le cas où γ est injective sur $[a, b]$ et le cas avec $\gamma(a) = \gamma(b)$, c'est-à-dire un lacet simplement fermé. Dans le premier cas la preuve est essentiellement une conséquence directe de [3.3.ii], tandis que dans le cas d'un lacet simplement fermé le résultat est une conséquence de [3.7], mais demande un petit peu plus de travail pour régler le problème du point de départ via [3.6].

Pour le premier cas on suppose “donc” qu'on a deux $C^{1/}$ -courbes $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\psi : [c, d] \rightarrow U$ régulières et injectives telles que $\gamma([a, b]) = C = \psi([c, d])$ et pour lesquelles il existe $t \in]a, b[, s \in]c, d[, \lambda, \mu \in \mathbf{R}^*$ tels que

$$\gamma(t) = c = \psi(s) \quad \text{et} \quad \lambda^{-1} \cdot \gamma'(t) = v = \mu^{-1} \cdot \psi'(s) .$$

Avec ces propriétés on peut appliquer [3.3.ii] et conclure que γ et ψ sont équivalentes par reparamétrage. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ le changement de paramètre avec $\gamma = \psi \circ \phi$. Par l'injectivité de ψ sur $]c, d[$ on doit avoir $\phi(t) = s$, ce qui nous permet de conclure qu'on a l'égalité

$$v = \lambda^{-1} \cdot \gamma'(t) = \lambda^{-1} \cdot \psi'(s) \cdot \phi'(t) = \lambda^{-1} \cdot \mu \cdot \phi'(t) \cdot v .$$

Parce que $v \neq 0$, il s'ensuit qu'on a

$$\text{signe}(\lambda) \cdot \text{signe}(\phi'(t)) = \text{signe}(\mu) .$$

Il suffit maintenant d'invoquer [2.11] pour avoir

$$(26.6) \quad \text{signe}(\lambda) \cdot \int_{\gamma} \alpha = \text{signe}(\lambda) \cdot \text{signe}(\phi') \cdot \int_{\psi} \alpha = \text{signe}(\mu) \cdot \int_{\psi} \alpha .$$

Pour le deuxième cas on suppose qu'on a deux $C^{1/}$ -courbes $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et $\psi : [c, d] \rightarrow U$ régulières et simplement fermées telles que $\gamma([a, b]) = C = \psi([c, d])$ et pour lesquelles il existe $t \in]a, b[, s \in]c, d[, \lambda, \mu \in \mathbf{R}^*$ tels que

$$\gamma(t) = c = \psi(s) \quad \text{et} \quad \lambda^{-1} \cdot \gamma'(t) = v = \mu^{-1} \cdot \psi'(s) .$$

Dans un premier temps on suppose en plus qu'on a l'égalité $\gamma(a) = \psi(c)$ (et donc $\gamma(b) = \psi(d) = \gamma(a)$). Ceci nous permet d'appliquer [3.7] et de conclure que γ et ψ

sont équivalentes par reparamétrage. À partir d'ici on peut copier mot par mot la preuve du cas de courbes injectives ci-dessus et conclure qu'on a l'égalité (26.6).

Si on n'a pas $\gamma(a) = \psi(c)$, on applique [3.6] pour déplacer le point de départ. Plus précisément, parce que γ est simplement fermée, il existe un unique $t_o \in]a, b[$ tel que $\gamma(t_o) = \psi(c) \in C$. Avec ce t_o on définit $\gamma_1 = \gamma|_{[a, t_o]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[t_o, b]}$ et on applique [3.6] pour conclure que $\chi : [t_o, t_o + b - a] \rightarrow U$ définie par $\chi = \gamma_2 \cdot \gamma_1$ est un $C^{1/2}$ -lacet simplement fermé avec la même image que $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ [1.15.iii], donc la même image que ψ . Mais pour χ on a la propriété

$$\int_{\chi} \alpha = \int_{\gamma_2 \cdot \gamma_1} \alpha \stackrel{[2.10]}{=} \int_{\gamma_2} \alpha + \int_{\gamma_1} \alpha \stackrel{[2.10]}{=} \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \alpha \stackrel{[1.15.iii]}{=} \int_{\gamma} \alpha$$

et (par construction) $\chi(t_o) = \gamma(t_o) = \psi(c)$. On peut donc appliquer l'argument précédent (pour deux courbes simplement fermées avec même point de départ) et conclure qu'on a égalité

$$\text{signe}(\lambda) \cdot \int_{\gamma} \alpha = \text{signe}(\lambda) \int_{\chi} \alpha = \text{signe}(\mu) \cdot \int_{\psi} \alpha .$$

Ainsi on a montré que dans tous les cas le résultat $\text{signe}(\lambda) \cdot \int_{\gamma} \alpha$ ne dépend pas du choix de l'application γ (modulo les contraintes imposées). \boxed{CQFD}

Les preuves de §4

Preuve de [4.9]. Soit $c \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ tel que $c \cdot \int_{\gamma} \alpha \in [0, \infty[$. Un tel c existe toujours : si $\int_{\gamma} \alpha = 0$, on peut prendre $c = 1$ et dans le cas contraire on peut poser $c = \overline{\int_{\gamma} \alpha} / |\int_{\gamma} \alpha|$. Avec ce c on peut faire le calcul

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma} \alpha \right| &= \left| \operatorname{Re} \left(c \cdot \int_{\gamma} \alpha \right) \right| = \left| \int_a^b \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(c \cdot \alpha_i(\gamma(t)) \right) \cdot \gamma'_i(t) \, dt \right| \\
 &= \left| \int_a^b \left\langle \operatorname{Re} \left(c \cdot \alpha(\gamma(t)) \right), \gamma'(t) \right\rangle \, dt \right| \\
 &\leq \int_a^b \left| \left\langle \operatorname{Re} \left(c \cdot \alpha(\gamma(t)) \right), \gamma'(t) \right\rangle \right| \, dt \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \left\| \operatorname{Re} \left(c \cdot \alpha(\gamma(t)) \right) \right\| \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \\
 &\leq \int_a^b \|\alpha(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \leq \left(\sup_{s \in [a, b]} \|\alpha(\gamma(s))\| \right) \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt .
 \end{aligned}$$

Dans ce calcul il n'est pas nécessaire de mettre les valeurs absolues autour des termes après la première, deuxième et troisième égalité, car on sait que c est un nombre réel positif (par définition de c). Mais cela nous permet plus facilement de reconnaître dans la première inégalité la majoration standard pour des fonctions réelles continues qui dit qu'on a $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$. La troisième inégalité est essentiellement la majoration valable pour un nombre complexe z arbitraire : $|\operatorname{Re}(cz)| \leq |cz| = |z|$ (car $|c| = 1$ par hypothèse). \square CQFD

Les preuves de §5

Preuve de [5.9]. • (i). Si $|z| < \rho$, alors par définition du sup, il existe $r \in [0, \infty[$ tel que $|z| < r \leq \rho$ et ayant la propriété que la suite $|c_n| r^n$ est majorée. Par [5.8] la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolument.

• (ii). Soit $|z| > \rho$ et supposons que la suite $|c_n z^n|$ est majorée, disons par $M \in [0, \infty[$. Alors par définition on a

$$|z| \in \{ r \in [0, \infty[\mid \exists M \in]0, \infty[\forall n \in \mathbf{N} : |c_n| r^n \leq M \}$$

et donc par définition du sup on doit avoir $|z| \leq \rho$. Cette contradiction montre que la suite $|c_n z^n|$ n'est pas majorée. \boxed{CQFD}

Preuve de [5.11]. • (i). Supposons $L < 1$ et définissons la suite $b_n = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$. Avec la définition de limite et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, il existe pour $\varepsilon = (1 - L)/2 > 0$ un $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : b_n < L + \varepsilon = (1 + L)/2 < 1 .$$

On a donc aussi :

$$\forall k \geq n \geq N : \sqrt[k]{|a_k|} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = b_n < (1 + L)/2$$

et donc

$$\forall n \geq N : |a_n| < \left(\frac{1 + L}{2} \right)^n .$$

Mais $\sum_{n=0}^{\infty} ((1 + L)/2)^n$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente.

Supposons maintenant $L > 1$. Alors, parce que la suite b_n est décroissante de limite L , on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $b_n \geq L > 1$. Il s'ensuit :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 .$$

Par définition du sup il existe donc $k_n \geq n$ telle que

$$\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > 1 .$$

On en déduit (par récurrence) l'existence d'une application strictement croissante $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |a_{\varphi(n)}| > 1 .$$

On ne peut donc pas avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne peut pas converger.

• (ii). La série converge trivialement pour $z = 0$. Soit donc $|z| > 0$ et soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|}$. Alors selon (i) la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolument si $L < 1$ et diverge si $L > 1$. D'autre part on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} L &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|c_k z^k|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} |z| \cdot \sqrt[k]{|c_k|} \right) \\ &\stackrel{|z| \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|z| \cdot \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|c_k|} \right) = |z| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|c_k|} \right) = |z| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} . \end{aligned}$$

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge donc pour $|z| < 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ et diverge pour $|z| > 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, ce qui est le résultat annoncé. (Remarque : officiellement il faut distinguer le cas $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ des autres cas, car dans ce cas la conclusion officielle est que la série numérique ne converge pas : on a supposé $|z| > 0$. Mais dans ce cas la conclusion est bien que le rayon de convergence vaut $0 = 1/\infty$.) \boxed{CQFD}

Preuve de [5.13]. On traite d'abord le cas de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ et on montrera que l'autre série se réduit à ce cas. Quand on a fait l'exercice [5.20.ii], la preuve est assez simple. Selon [5.11.ii] le rayon de convergence $\hat{\rho}$ de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n$ (attention !) est donné par

$$\frac{1}{\hat{\rho}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n c_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{c_n}.$$

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ et donc, en appliquant [5.20.ii] on trouve

$$\frac{1}{\hat{\rho}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \cdot \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\rho},$$

et donc $\hat{\rho} = \rho$. Il suffit maintenant de remarquer qu'on a l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ et que la multiplication par z ne change pas le rayon de convergence.

Quand on n'a pas fait cet exercice, on revient à la définition [5.9], [5.10] du rayon de convergence. Soit donc $r < \rho$, alors pour \hat{r} choisi arbitrairement entre r et ρ ($r < \hat{r} < \rho$) il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} : |c_n| \hat{r}^n \leq M.$$

Sachant que $r/\hat{r} < 1$ et donc qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} n (r/\hat{r})^n = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : n \left(\frac{\hat{r}}{r} \right)^n < 1.$$

On peut donc faire le calcul

$$\forall n \geq N : n |c_n| r^n = n |c_n| \left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^n \hat{r}^n \leq |c_n| \hat{r}^n \leq M.$$

Il s'ensuit qu'il existe $M' > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} : n |c_n| r^n \leq M'.$$

D'autre part, par définition de ρ on constate que pour $r > \rho$ la suite $|c_n| \hat{r}^n$ n'est pas bornée. Mais alors on a la minoration

$$n |c_n| r^n \geq |c_n| \hat{r}^n,$$

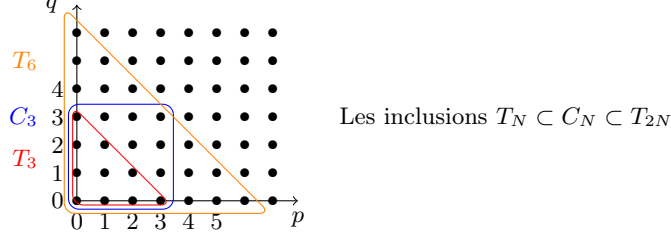
ce qui montre que la suite $n |c_n| r^n$ n'est pas bornée non plus. On conclut que pour $r < \rho$ la suite $n |c_n| r^n$ est bornée et pour $r > \rho$ elle ne l'est pas. Il s'ensuit que le rayon de convergence de la suite $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n$ est ρ et donc (de nouveau parce que multiplier par z ne change pas le rayon), le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ est aussi ρ .

Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n/n$ on note $a_n = c_{n-1}/n$, ce qui nous donne donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Soit $\hat{\rho}$ le rayon de convergence de cette série, alors par le calcul précédent le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ est aussi $\hat{\rho}$. Mais $n a_n = c_{n-1}$, ce qui veut dire que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^{n-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est $\hat{\rho}$. Et donc on a égalité $\hat{\rho} = \rho$ comme souhaité. \boxed{CQFD}

Preuve de [5.16]. Pour simplifier la discussion, on introduit, pour tout $N \in \mathbf{N}$, deux sous-ensembles de \mathbf{N}^2 : $T_N, C_N \subset \mathbf{N}^2$ (T pour “triangle,” C pour “carré”) par

$$T_N = \{ (p, q) \in \mathbf{N}^2 \mid p + q \leq N \} \quad \text{et} \quad C_N = \{ (p, q) \in \mathbf{N}^2 \mid p, q \leq N \} ,$$

et on note les inclusions (voir le dessin) $T_N \subset C_N \subset T_{2N}$.



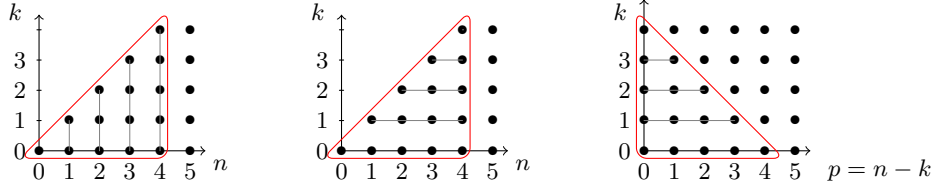
On introduit aussi les nombres $A_N, B_N \in \mathbf{R}^+$ par

$$A_N = \sum_{n=0}^N |a_n| \quad \text{et} \quad B_N = \sum_{n=0}^N |b_n| ,$$

et on remarque que, par hypothèse de la convergence absolue, on a

$$S_a \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \text{et} \quad S_b \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} B_N = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty .$$

Pour la convergence absolue de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ on calcule (voir le dessin) :



Le changements de variables $(n, k) \mapsto (p, k) = (n - k, k)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |c_n| &= \sum_{n=0}^N \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}| \equiv \sum_{(k,p) \in T_N} |a_k| \cdot |b_p| \\ &\stackrel{T_N \subset C_N}{\leq} \sum_{(k,p) \in C_N} |a_k| \cdot |b_p| \equiv \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^N |a_k| \cdot |b_p| = \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^N |b_p| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p| \right) < \infty , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence du fait que les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent absolument. Ainsi on a montré que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolument.

Pour montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$ on calcule :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{p=0}^N a_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^N b_q \right) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - \sum_{p,q=0}^N a_p b_q \right| \\ &= \left| \sum_{(p,q) \in T_{2N}} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in C_N} a_p b_q \right| = \left| \sum_{(p,q) \in T_{2N} \setminus C_N} a_p b_q \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{(p,q) \in T_{2N} \setminus C_N} |a_p b_q| \leq \sum_{(p,q) \in C_{2N} \setminus C_N} |a_p b_q| \\
&= \sum_{(p,q) \in C_{2N}} |a_p b_q| - \sum_{(p,q) \in C_N} |a_p b_q| \\
&= \left(\sum_{p=0}^{2N} |a_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{2N} |b_q| \right) - \left(\sum_{p=0}^N |a_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^N |b_q| \right) .
\end{aligned}$$

Quand on prend la limite $N \rightarrow \infty$, le membre de droite tend vers 0, donc le membre de gauche également, ce qui veut dire qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2N} c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=0}^N a_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^N b_q \right) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q \right) ,$$

comme voulu. \square *CQFD*

Les preuves de §6

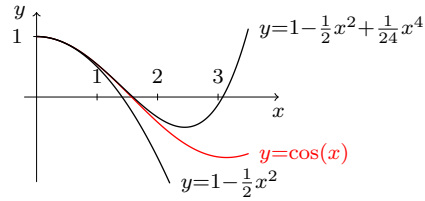
Preuve de [6.2]. Introduisons d'abord l'abréviation $A_\pi = \{x \in]0, \infty[\mid \cos(x) = 0\}$, pour la simple raison qu'on doit l'écrire souvent. Par définition on a donc $\frac{1}{2}\pi = \inf A_\pi$.

Soit maintenant $x \in [0, 3]$ fixé. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / (2n)!$ est une série alternée dont le terme général est strictement décroissante en valeur absolue. En tenant compte des signes, on a "donc" les inégalités

$$-\frac{1}{2}x^2 = \sum_{n=1}^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Il s'ensuit que pour $x \in [0, 3]$ on a les inégalités

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$



Pour $x \in [0, 1]$ on a donc $\cos(x) > 1 - \frac{1}{2}x^2 > \frac{1}{2} > 0$, ce qui nous donne l'inclusion
(26.7) $A_\pi \subset]1, \infty[$.

Et pour $x = 2$ on a $\cos(2) < 1 - \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{24}2^4 = -\frac{1}{3} < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue \cos sur l'intervalle $[1, 2]$ on en déduit l'existence d'un $r \in]1, 2[$ tel que $\cos(r) = 0$. Ceci montre que l'ensemble A_π n'est pas vide.

Par (26.7) on sait que 1 est un minorant de A_π , ce qui permet d'appliquer [5.3] et conclure qu'on a $\frac{1}{2}\pi = \inf A_\pi \geq 1$. Par définition de l'inf, il existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ un élément $a_n \in A_\pi$ vérifiant

$$\frac{1}{2}\pi \equiv \inf A_\pi \leq a_n < \inf A_\pi + \frac{1}{n} \equiv \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{n}.$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}\pi$. Mais par définition de A_π on a $\cos(a_n) = 0$, donc par continuité de la fonction \cos on a aussi $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Avec $\frac{1}{2}\pi \geq 1$ et $\cos(1) > 0$ il s'ensuit qu'on doit avoir $\frac{1}{2}\pi > 1$. Et parce qu'il existe $r \in]1, 2[$ tel que $r \in A_\pi$, on doit avoir $\frac{1}{2}\pi = \inf A_\pi \leq r < 2$. □CQFD

Preuve de [6.3]. • (i). Par définition de $\frac{1}{2}\pi$ (et la continuité de \cos) on a $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ et pour tout $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ on a $\cos(x) \neq 0$. Avec $\cos(0) = 1$ et le fait que \cos est une fonction continue paire [6.1.i], il s'ensuit que pour tout $|x| < \frac{1}{2}\pi$ on a $\cos(x) > 0$. Selon [6.1.v] on doit avoir $(\sin(\frac{1}{2}\pi))^2 = 1$. Si on avait $\sin(\frac{1}{2}\pi) = -1$, alors par le théorème des accroissements finis, il existerait $\xi \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ tel que

$$\frac{-2}{\pi} = \frac{-1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi) - \sin(0)}{\frac{1}{2}\pi - 0} \stackrel{\text{A.F.}}{=} \sin'(\xi) \stackrel{[6.1.vii]}{=} \cos(\xi).$$

Cette contradiction montre qu'on doit avoir $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$.

Par [6.1.iv] on a

$$\sin(\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $x \in]0, \pi[$ tel que $\sin(x) = 0$. Alors de nouveau par [6.1.iv] on a

$$\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) + \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = \cos(x) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 .$$

Mais $x \in]0, \pi[$ implique $|x - \frac{1}{2}\pi| < \frac{1}{2}\pi$ et donc par l'argument précédent on a $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) > 0$. Cette contradiction montre que π est la plus petite valeur strictement positive pour laquelle la fonction \sin s'annule.

- (ii). Avec [6.1.iv] et les égalités $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ et $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ on trouve :

$$\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) + \cos(x) \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = \cos(x)$$

$$\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) - \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = -\sin(x) .$$

Il s'ensuit facilement qu'on a pour tout $x \in \mathbf{R}$ les égalités

$$\sin(x + 2\pi) = \cos(x + \frac{3}{2}\pi) = -\sin(x + \pi) = -\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = -\sin(x + \frac{3}{2}\pi) = -\cos(x + \pi) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x) ,$$

montrant que \sin et \cos sont périodique avec période 2π . Supposons maintenant que $T > 0$ est la plus petite période de la fonction \sin : our tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\sin(x + T) = \sin(x)$. Alors on doit avoir

$$\sin(T) = \sin(0) = 0 ,$$

ce qui implique qu'on doit avoir $T \geq \pi$ par (i). Et alors on a

$$\sin(T - \pi) = \sin(T) \cdot \cos(\pi) - \cos(T) \cdot \sin(\pi) = 0 .$$

Avec $T - \pi \geq 0$ il s'ensuit qu'on a $T - \pi = 0$ ou $T - \pi \geq \pi$. Mais on a montré précédemment qu'on a $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Donc si $T = \pi$ est une période de la fonction \sin , on aura $\sin(x) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$ pour tout x , en contradiction avec $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$. On doit donc avoir $T \geq 2\pi$, montrant que 2π est la plus petite période de la fonction \sin . Ensuite l'égalité $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ montre que la fonction \cos a les mêmes périodes que la fonction \sin .

- (iii). $z = x + iy$ appartient à \mathbf{S}^1 si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$ et en particulier $|x| \leq 1$. Avec $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -\cos(0) = -1$ et le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos(t) = x$. Par [6.1.v] il s'ensuit qu'on a

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2 ,$$

et donc $y = \sin(t)$ ou $y = -\sin(t)$. Dans le premier cas on a trouvé notre $t \in [0, \pi] \subset [0, 2\pi[$. Dans le deuxième cas on peut exclure la possibilité $t = 0$, car avec $t = 0$ on aura $y = \sin(t) = -\sin(t) = 0$ et on se retrouve dans le premier cas. Avec $t \in]0, \pi]$ on utilise nos formules et la périodicité pour calculer :

$$y = -\sin(t) = \sin(-t) = \sin(2\pi - t)$$

$$x = \cos(t) = \cos(-t) = \cos(2\pi - t) ,$$

avec $2\pi - t \in [\pi, 2\pi[$. Ainsi on a montré l'existence d'un $t \in [0, 2\pi[$ vérifiant $e^{it} = z$.

Pour l'unicité, remarquons d'abord qu'on a $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1 > 0$ et que la fonction \sin ne s'annule pas entre 0 et π . Il s'ensuit par continuité qu'on a $\sin(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Et donc si on a $\cos(t) = \cos(u)$ avec $t < u \in [0, \pi]$, on aura par le théorème des accroissements finis l'existence d'un $\xi \in]t, u[\subset]0, \pi[$ tel que

$$0 = \frac{\cos(u) - \cos(t)}{t - u} = \cos'(\xi) = -\sin(\xi) .$$

Cette contradiction montre que l'équation $\cos(t) = x$ a une solution unique $t \in [0, \pi]$ pour $x \in [-1, 1]$.

Supposons maintenant qu'il existe $0 \leq t < u < 2\pi$ tels que $\cos(t) = \cos(u)$ et $\sin(t) = \sin(u)$. Si on a $t \leq \pi$, alors l'argument précédent montre qu'on doit avoir $t = u$, ce qui est exclu. Et si on a $\pi < t$, on aura $2\pi - t, 2\pi - u \in]0, \pi[$ et

$$\cos(2\pi - t) = \cos(-t) = \cos(t) = \cos(u) = \cos(-u) = \cos(2\pi - u) ,$$

et de nouveau par l'argument précédent $2\pi - t = 2\pi - u$, ce qui est exclu par hypothèse. On doit donc avoir $t \leq \pi < u$. Mais dans ce cas on calcule :

$$\cos(t) = \cos(u) = \cos(2\pi - u) \quad \text{avec} \quad t, 2\pi - u \in [0, \pi]$$

et donc $t = 2\pi - u$. On a donc

$$\sin(t) = \sin(2\pi - u) \stackrel{\text{pér.}}{=} \sin(-u) \stackrel{\text{impaire}}{=} -\sin(u) \stackrel{\text{hyp.}}{=} -\sin(t) ,$$

c'est-à-dire $\sin(t) = 0$. Avec $t \in [0, \pi]$ il s'ensuit qu'on doit avoir $t = 0$ ou $t = \pi$. Mais avec $u = 2\pi - t$ cela donne $u = 2\pi$ ou $u = \pi$. Le premier cas est exclu car on a $u < 2\pi$ et le deuxième cas est exclu par l'hypothèse $t < u$. On a donc toujours une contradiction, ce qui montre que la solution pour $t \in [0, 2\pi[$ de l'équation $e^{it} = z$ est unique. \boxed{CQFD}

Preuve de [6.4]. • (i). Si on a $z = 2k\pi i$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors on aura

$$e^z = e^{2k\pi i} \stackrel{[6.1.vi]}{=} e^0 \cdot (\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) \stackrel{[6.3.ii]}{=} 1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) = 1 .$$

Réciproquement, si on a $e^z = 1$, on a $e^{\operatorname{Re} z} = |e^z| = |1| = 1$. Le fait que (la restriction de) la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbf{R} (car $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ [6.1.viii]) on en déduit qu'on doit avoir $\operatorname{Re} z = 0$. On a donc $z = iy$ avec $y \in \mathbf{R}$. Il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y + 2k\pi \in [0, 2\pi[$; il suffit de prendre pour $-k$ la partie entière de $y/(2\pi)$.¹ En posant $t = y + 2k\pi$ on aura donc (avec le calcul fait au début)

$$e^{it} = e^{iy+2k\pi i} = e^{iy} \cdot e^{2k\pi i} = 1 \cdot 1 = 1 .$$

Par l'unicité dans [6.3.iii] il s'ensuit qu'on doit avoir $t = 0$ et donc $z = 0 + iy = 2k\pi i$.

• (ii). Si $z = 0$, tout choix pour $t \in \mathbf{R}$ convient. Supposons donc qu'on a $|z| > 0$, alors en posant $u + iv = z/|z|$ (avec sous-entendu $u, v \in \mathbf{R}$) on aura $|u + iv| = 1$, c'est-à-dire $u + iv \in \mathbf{S}^1$. Par [6.3.iii] il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $u + iv = e^{it}$, et donc

$$z = |z| \cdot (u + iv) = |z| \cdot e^{it} .$$

• (iii). La formule $e^w \cdot e^{-w} = e^0 = 1$ nous dit déjà que 0 ne peut pas appartenir à l'image $\exp(\mathbf{C})$ et donc qu'on a l'inclusion $\exp(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^*$. Pour $z \in \mathbf{C}^*$ il existe selon (ii) $t \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z| e^{it}$. Par hypothèse $|z| > 0$, donc par [6.1.viii] il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $e^\ell = |z|$. Au final on aura donc

$$z = |z| e^{it} = e^\ell \cdot e^{it} = e^{\ell+it} ,$$

montrant que $z \in \exp(\mathbf{C})$ comme annoncé.

1. La partie entière d'un nombre réel r est l'unique entier $k \in \mathbf{Z}$ tel qu'on a $k \leq r < k + 1$.

- (iv). Avec $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et (donc) $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, le calcul de la longueur est direct :

$$\begin{aligned} L_{[a,b]}(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \|(-\sin(t), \cos(t))\| \, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \, dt = \int_a^b 1 \, dt = b - a . \quad \boxed{CQFD} \end{aligned}$$

Les preuves de §7

Les preuves de §8

Preuve de [8.1]. Pour $0 < r < R$ et $w \in D_r(w_o)$ on définit les fonctions $g, h : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(s, t) = \frac{F((1-s)w + s(w_o + r e^{it}))}{w_o + r e^{it} - w} \cdot i r e^{it}$$

$$h(s, t) = F((1-s)w + s(w_o + r e^{it}))$$

et on constate (en utilisant [7.8]) qu'on a les égalités (le deuxième pour $s \neq 0$)

$$(\partial_1 g)(s, t) = F'((1-s)w + s(w_o + r e^{it})) \cdot i r e^{it} = \frac{1}{s} \cdot (\partial_2 h)(s, t) .$$

Ensuite on définit la fonction $G : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$G(s) = \int_0^{2\pi} g(s, t) dt = \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F((1-s)w + sz)}{z - w} dz ,$$

où pour la deuxième égalité on a utilisé la paramétrisation $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = w_o + r e^{it}$ pour le bord $\partial D_r(w_o)$ (et bien sûr la définition [2.7]). La fonction $\partial_1 g$ étant continue (car F' est supposée continue), on remplit les conditions de [23.15] pour pouvoir dériver sous le signe de l'intégrale et obtenir (pour $s \neq 0$)

$$G'(s) = \int_0^{2\pi} (\partial_1 g)(s, t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{(\partial_2 h)(s, t)}{s} dt = \frac{h(s, 2\pi) - h(s, 0)}{s} = 0 .$$

Strictement parlant on ne peut pas appliquer [23.15], car le domaine pour s n'est pas un ouvert. Mais cela est facilement "réparable" en remarquant que le fait que F est définie sur un ouvert nous permet d'affirmer que la fonction g est définie au moins sur un ensemble de la forme $I \times [0, 2\pi]$ avec $I \subset \mathbf{R}$ un ouvert contenant $[0, 1]$.

La fonction G est continue sur $[0, 1]$ et a une dérivée nulle sur $]0, 1]$; elle est donc constante sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qui permet d'obtenir

$$(26.8) \quad \int_0^{2\pi} \frac{F(w_o + r e^{it})}{w_o + r e^{it} - w} \cdot i r e^{it} dt \equiv G(1) = G(0) \equiv F(w) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{w_o + r e^{it} - w} dt .$$

Dans un premier temps on se concentre sur l'intégrale à droite de cette égalité et on fait le calcul

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{w_o + r e^{it} - w} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{1 - \frac{w - w_o}{r e^{it}}} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - w_o}{r} \right)^n i e^{-int} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - w_o}{r} \right)^n \int_0^{2\pi} i e^{-int} dt = 2\pi i . \end{aligned}$$

Dans ce calcul la troisième égalité est justifiée par le fait qu'on a la majoration

$$(26.9) \quad \lambda \stackrel{\text{déf.}}{=} \left| \frac{w - w_o}{r} e^{-it} \right| = \frac{|w - w_o|}{r} < 1$$

et donc la série est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ (ce qui permet l'échange de la somme avec l'intégrale selon [23.12]). Pour la dernière égalité on utilise le calcul

$$\int_0^{2\pi} i e^{-int} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i & n = 0 \\ \left[-\frac{e^{-int}}{n} \right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq 0 . \end{cases}$$

Quand on substitue ce résultat dans (26.8) on trouve (avec [2.7] et notre courbe γ) la formule

$$(26.10) \quad \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F(z)}{z - w} dz = 2\pi i F(w) ,$$

ce qui est (iii).

Ensuite on applique la même technique au membre de droite dans (26.8) pour faire le calcul

$$(26.11) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{F(w_o + r e^{it})}{w_o + r e^{it} - w} \cdot i r e^{it} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{i F(w_o + r e^{it})}{1 - \frac{w - w_o}{r e^{it}}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - w_o}{r e^{it}} \right)^n i F(w_o + r e^{it}) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (w - w_o)^n \int_0^{2\pi} \frac{i F(w_o + r e^{it})}{r^n e^{int}} dt . \end{aligned}$$

Ici la troisième égalité est justifiée par le fait que F est continue sur le compact $\overline{B_r(w_o)} \subset U$, donc bornée, disons par $M > 0$. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - w_o}{r e^{it}} \right)^n F(w_o + r e^{it})$$

est donc normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, bornée par la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n M$ (26.9), ce qui permet l'échange d'intégrale et série (de nouveau selon [23.12]). Avec [2.7] et notre courbe γ on peut transformer l'égalité (26.11) en

$$\int_0^{2\pi} \frac{F(w_o + r e^{it})}{w_o + r e^{it} - w} \cdot i r e^{it} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (w - w_o)^n \int_{\partial D_r(w_o)} \frac{F(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz ,$$

ce qui donne, en combinaison avec (26.8) et (26.10), le résultat (iv). Sauf que dans (iv) on a seulement $w \in D_R(w_o)$, sans référence à r .

Pour remédier la situation et obtenir en même temps les autres résultats, le raisonnement est comme suit. On a déduit, pour l'instant, nos deux formules (iii) et (iv) sous l'hypothèse $|w - w_o| < r < R$. Sur le disque ouvert $D_r(w_o)$ la fonction F est donc développable en série entière. Par unicité des coefficients d'une série entière [5.19] on en déduit que les coefficients c_n ne dépendent pas du choix de r (pourvu qu'on respecte $r < R$). Ce qui est (i). Ensuite on prend $w \in D_R(w_o)$ et on choisit r tel que $|w| < r < R$. Alors par le résultat précédent la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n$ converge vers $F(w)$, ce qui nous donne (iv) en toute généralité. Mais en même temps on vient de montrer que cette série converge pour tout $w \in D_R(w_o)$, ce qui implique que son rayon de convergence ρ est supérieur ou égal à R , ce qui est (ii). \boxed{CQFD}

Preuve de [8.3]. Soit $\lambda, h, B \in \mathbf{C}$ et définissons la courbe (de classe C^∞) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$\gamma(t) = B + th .$$

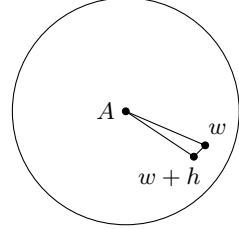
Alors son image est le segment $[B, B + h]$ et on a

$$(26.12) \quad \int_{[B, B+h]} \lambda dz = \int_{\gamma} \lambda dz = \int_0^1 \lambda \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \lambda \cdot h dt = h \cdot \lambda .$$

Ce résultat s'obtient aussi en appliquant [7.10] avec la fonction $f(z) = \lambda z$.

Soit maintenant $w \in U$ arbitraire. Par ce que U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $D_\delta(w) \subset U$. Soit $h \in \mathbf{C}$ tel que $|h| < \delta$ et soit $t \in [0, 1]$. Alors parce que U est étoilé par rapport à A et parce que $w + th \in D_\delta(w) \subset U$, le segment $[A, w + th]$ est inclus dans U . Il s'ensuit que le triangle $\Delta Aw(w + h)$ est inclus dans U . On constate que le bord orienté du triangle $\Delta = \Delta Aw(w + h)$ consiste des trois segments orientés $[A, w]$, $[w, w + h]$ et $[w + h, A]$. Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz \\ &= \int_{[A,w]} f(z) \, dz + \int_{[w,w+h]} f(z) \, dz + \int_{[w+h,A]} f(z) \, dz \\ &= F(w) - F(w + h) + \int_{[w,w+h]} f(z) \, dz . \end{aligned}$$



Attention quand même : le calcul ci-dessus n'est pas entièrement correct ! Selon nos conventions [4.13], le bord $\partial\Delta$ est orienté positivement, mais on n'est pas sûr que la courbe simplement fermée $[A, w] \sqcup [w, w + h] \sqcup [w + h, A]$ (dont l'image est bien le bord $\partial\Delta$) est orientée positivement [4.14]. Cette courbe pourrait être orientée négativement. Et dans le cas où elle est orientée négativement, on doit remplacer, selon [2.11], la deuxième égalité ci-dessus par l'égalité

$$-\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = \int_{[A,w]} f(z) \, dz + \int_{[w,w+h]} f(z) \, dz + \int_{[w+h,A]} f(z) \, dz .$$

Mais $-0 = 0$ et donc l'égalité entre le début et la fin reste vraie.

On en déduit qu'on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w + h) - F(w)}{h} - f(w) \right| &= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{[w,w+h]} f(z) \, dz - h \cdot f(w) \right| \\ &\stackrel{(26.12)}{=} \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{[w,w+h]} (f(z) - f(w)) \, dz \right| \stackrel{[4.11]}{\leq} \sup_{z \in [w,w+h]} |f(z) - f(w)| . \end{aligned}$$

Mais pour $z \in [w, w + h]$ on a la majoration $|z - w| \leq h$ et donc par continuité de f en w on en déduit qu'on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{z \in [w,w+h]} |f(z) - f(w)| = 0 .$$

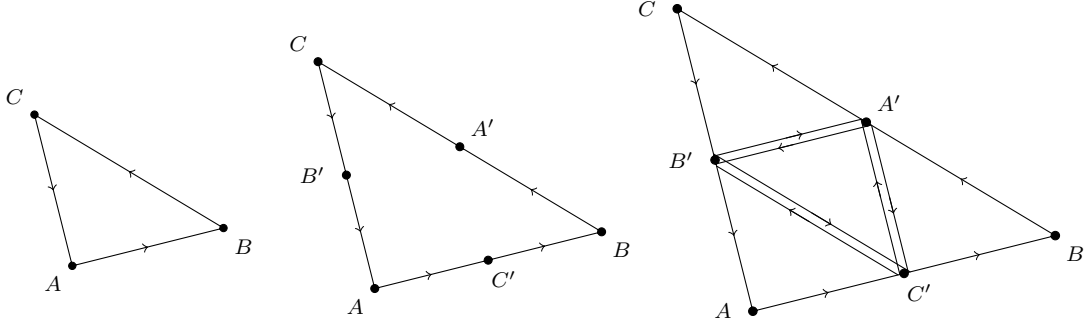
Le résultat annoncé s'en déduit directement. \square

Preuve de [8.4]. Commençons avec l'idée de base sous-jacente. Le bord orienté d'un triangle ΔABC est la concaténation de trois segments orientés :

$$\partial\Delta ABC = [A, B] \sqcup [B, C] \sqcup [C, A] .$$

Il est vrai qu'on ne sait pas si ce bord est orienté positivement ou négativement, mais cela est un détail (important mais) qui nous n'intéresse pas, car on veut montrer que l'intégrale sur ce bord est nulle. Selon [2.11], changer l'orientation ne changera pas ce résultat. Sachant qu'un dessin est beaucoup plus parlant (mais parfois moins précis) que des formules, donnerons d'abord la suite des dessins qui montre ce qu'on

va faire en formule après.



On commence à rajouter les milieux des trois côtés :

$$A' = \frac{1}{2}(B + C) , \quad B' = \frac{1}{2}(C + A) \text{ et } C' = \frac{1}{2}(A + B) .$$

Avec ces points on aura donc le deuxième triangle dans le dessin ci-dessus :

$$\partial\Delta ABC = [A, C'] \cdot [C', B] \cdot [B, A'] \cdot [A', C] \cdot [C, B'] \cdot [B', A] .$$

Remarquons ensuite que faire un aller-retour sur un chemin du type $[E, F] \cdot [F, E]$ ne change pas l'intégrale : les deux segments $[E, F]$ et $[F, E]$ ont le même image, mais ont l'orientation opposée, donc l'intégrale sur cet aller-retour vaut zéro [2.10], [2.11]. En ce qui concerne l'intégrale, on a donc les égalités (sans écrire la 1-forme $f(z) dz$)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta ABC} &= \int_{[A,B]} + \int_{[B,C]} + \int_{[C,A]} \\ &= \int_{[A,C']} + \int_{[C',B]} + \int_{[B,A']} + \int_{[A',C]} + \int_{[C,B']} + \int_{[B',A]} \\ &= \int_{[A,C']} + \int_{[C',B]} + \int_{[B,A']} + \int_{[A',C]} + \int_{[C,B']} + \int_{[B',A]} \\ &\quad + \int_{[A',B']} + \int_{[B',A']} + \int_{[B',C']} + \int_{[C',B']} + \int_{[C',A']} + \int_{[A',C']} \\ &= \int_{[A,C']} + \int_{[C',B']} + \int_{[B',A]} + \int_{[B,A']} + \int_{[A',C']} + \int_{[C',B]} \\ &\quad + \int_{[C,B']} + \int_{[B',A']} + \int_{[A',C]} + \int_{[A',B']} + \int_{[B',C']} + \int_{[C',A']} \\ &= \int_{\partial\Delta AC'B'} + \int_{\partial\Delta BA'C'} + \int_{\partial\Delta CB'A'} + \int_{\partial\Delta A'B'C'} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le troisième triangle dans le dessin ci-dessus. Bien sûr, pour mieux faire ressortir les deux segments orientés $[A', B']$ et $[B', A']$ (et de même pour les autres aller-retours), je les ai dessiné côte-à-côte, mais en réalité ils coïncident.

Une fois arrivé ici, on peut faire quelques petits calculs (de nouveau sans écrire la 1-forme $f(z) dz$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta ABC} \right| &= \left| \int_{\partial\Delta AC'B'} + \int_{\partial\Delta BA'C'} + \int_{\partial\Delta CB'A'} + \int_{\partial\Delta A'B'C'} \right| \\ &\leq \left| \int_{\partial\Delta AC'B'} \right| + \left| \int_{\partial\Delta BA'C'} \right| + \left| \int_{\partial\Delta CB'A'} \right| + \left| \int_{\partial\Delta A'B'C'} \right| \end{aligned}$$

$$(26.13) \quad \leq 4 \cdot \max \left(\left| \int_{\partial \Delta_{AC'B'}} \right|, \left| \int_{\partial \Delta_{BA'C'}} \right|, \left| \int_{\partial \Delta_{CB'A'}} \right|, \left| \int_{\partial \Delta_{A'B'C'}} \right| \right) .$$

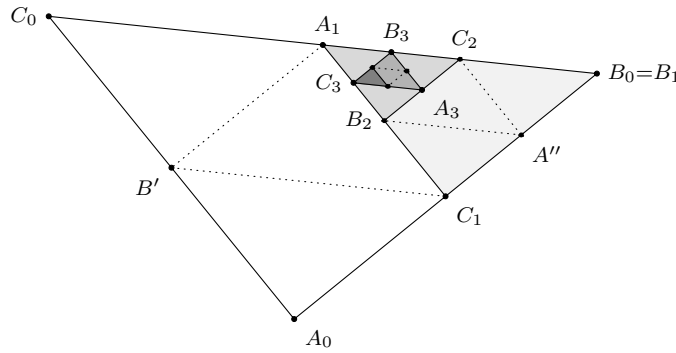
Et c'est à partir d'ici que le vrai travail commence. Le point de départ est un triangle $\Delta_0 = \Delta ABC \subset U$, ce qui garantit que l'intégrale $\int_{\partial \Delta_0} f(z) dz$ est bien définie. Ensuite on construit par récurrence une suite de triangles Δ_n vérifiant (entre autres)

$$\Delta_{n+1} \subset \Delta_n, \quad \text{diam}(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(\Delta_n) \quad \text{et} \quad \left| \int_{\partial \Delta_n} \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial \Delta_{n+1}} \right| ,$$

où $\text{diam}(X)$ désigne le *diamètre* d'un ensemble X défini comme

$$\text{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} |x - y| .$$

La construction de cette suite est une simple application de l'idée de base expliquée au début : quand on a construit le triangle Δ_n , on rajoute les milieux des côtés et on le coupe en quatre sous-triangles. Parmi ces quatre sous-triangles, il y en a un qui représente la valeur maximale dans (26.13). C'est ce sous-triangle qui sera le Δ_{n+1} .



Par construction on a l'inclusion $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ et la majoration $\left| \int_{\partial \Delta_n} \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial \Delta_{n+1}} \right|$. Et le fait qu'on a pris les milieux des côtés nous donne immédiatement l'égalité $\text{diam}(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(\Delta_n)$.

Une fois qu'on dispose de cette suite, on constate que c'est une suite décroissante de fermés dans $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ dont le diamètre tend vers 0 :

$$(26.14) \quad \text{diam}(\Delta_n) = 2^{-n} \cdot \text{diam}(\Delta_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

On peut donc invoquer le théorème de Bolzano-Weierstraß et conclure que l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ se réduit à un seul point $z_o \in \Delta_0 \subset U$:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{z_o\} .$$

C'est maintenant qu'on utilise le fait que f est holomorphe, donc en particulier \mathbf{C} -dérivable en z_o . Par définition il existe donc une fonction $\varepsilon : U \setminus \{z_o\} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \varepsilon(z) = 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in U : f(z) = f(z_o) + (z - z_o) f'(z_o) + (z - z_o) \varepsilon(z) .$$

Sachant que la fonction affine $g(z) = f(z_o) + (z - z_o) f'(z_o)$ admet une primitive, à savoir

$$G(z) = z (f(z_o) - z_o f'(z_o)) + \frac{1}{2} z^2 f'(z_o) ,$$

on peut utiliser [7.10] pour faire le calcul (en appelant A_n , B_n et C_n les trois sommets du triangle Δ_n)

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz &= \int_{\partial\Delta_n} (z - z_o) \varepsilon(z) \, dz + \int_{[A_n, B_n]} g(z) \, dz \\
 &\quad + \int_{[B_n, C_n]} g(z) \, dz + \int_{[C_n, A_n]} g(z) \, dz \\
 &\stackrel{[7.10]}{=} \int_{\partial\Delta_n} (z - z_o) \varepsilon(z) \, dz + G(B_n) - G(A_n) \\
 &\quad + G(C_n) - G(B_n) + G(A_n) - G(C_n) \\
 &= \int_{\partial\Delta_n} (z - z_o) \varepsilon(z) \, dz
 \end{aligned}$$

et ensuite on peut utiliser [4.11] pour majorer :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial\Delta_n} (z - z_o) \varepsilon(z) \, dz \right| &\leq \sup_{z \in \partial\Delta_n} |(z - z_o) \varepsilon(z)| \cdot L(\partial\Delta_n) \\
 &\leq \sup_{z \in \partial\Delta_n} |z - z_o| \cdot \sup_{z \in \partial\Delta_n} |\varepsilon(z)| \cdot L(\partial\Delta_n) \\
 &\leq \text{diam}(\Delta_n) \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| \cdot L(\partial\Delta_n) .
 \end{aligned}$$

Dans cette formule $L(\partial\Delta_n)$ est la longueur du bord du triangle, pour laquelle on peut faire la majoration

$$L(\partial\Delta_n) = |A_n - B_n| + |B_n - C_n| + |C_n - A_n| \leq 3 \cdot \text{diam}(\Delta_n) .$$

Avec (26.14) on arrive donc à la majoration

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right| \leq 3 \cdot \text{diam}(\Delta_n)^2 \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| = 3 \cdot 2^{-2n} \cdot \text{diam}(\Delta_0)^2 \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| .$$

Mais on montre aussi directement par récurrence la majoration

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) \, dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right| ,$$

ce qui nous donne au final la majoration, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) \, dz \right| \leq 3 \cdot \text{diam}(\Delta_0)^2 \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| .$$

Pour terminer il suffit d'appliquer quelques arguments simples concernant des limites pour montrer qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| = 0$. Pour cela on commence avec $\lim_{z \rightarrow z_o} \varepsilon(z) = 0$, ce qui donne :

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z : |z - z_o| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(z)| < \epsilon .$$

Ensuite on constate que z_o appartient à tous les Δ_n et qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\Delta_n) = 0$, ce qui donne :

$$\forall \delta > 0 \, \exists N \in \mathbf{N} \, \forall n > N : \text{diam}(\Delta_n) < \delta .$$

En enchaînant les deux, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbf{N} \, \forall n > N \, \forall z \in \partial\Delta_n : |z - z_o| \leq \text{diam}(\Delta_n) < \delta \Rightarrow |\varepsilon(z)| < \epsilon .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Delta_n} |\varepsilon(z)| = 0 ,$$

ce qui montre qu'on doit avoir $\int_{\partial\Delta_0} f(z) \, dz = 0$ comme annoncé.

CQFD

Preuve de [8.8]. Si f est holomorphe, alors f' est continue [8.5]. On peut donc appliquer [8.1]. Les résultats (ii) et (iii) sont alors une simple transcription de la définition des c_n dans [8.1] avec [8.1.iv] et [7.12] et (i) n'est rien d'autre que [8.1.iii].

Reste donc (iv). Avec $M \in [0, \infty[$ défini par

$$M = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(w_o + r e^{it})|$$

(ce qui existe, car f est continue sur le cercle $\partial D_r(w_o)$ qui est compact), on vérifie directement la majoration suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\overline{f^{(n)}(w_o)}}{n!} r^n e^{-int} \cdot f(w_o + r e^{it}) \right| \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} \right| \cdot r^n .$$

Mais le rayon de convergence de la série en (ii) est supérieur ou égal à R et on a $r < R$, ce qui implique que le membre de droite converge. Il s'ensuit que le membre de gauche (sans les valeurs absolues) est une série (de fonctions en t) normalement convergente sur $[0, 2\pi]$. Ceci nous permet (selon [23.12]) de changer l'ordre entre série et intégrale dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(w_o + r e^{it})|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \overline{f(w_o + r e^{it})} \cdot f(w_o + r e^{it}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{f^{(n)}(w_o)}}{n!} r^n e^{-int} \cdot f(w_o + r e^{it}) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{f^{(n)}(w_o)}}{n!} r^n \int_0^{2\pi} f(w_o + r e^{it}) e^{-int} dt \\ &\stackrel{(iii)}{=} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{f^{(n)}(w_o)}}{n!} r^{2n} \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} , \end{aligned}$$

ce qui est le résultat (iv).

CQFD

Les preuves de §9

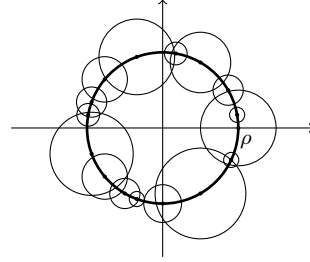
Preuve de [9.5]. Définissons la fonction holomorphe $h : U \rightarrow \mathbf{C}$ par $h(z) = f(z) - g(z)$. Si f n'est pas identiquement nulle, alors selon [9.4] l'ensemble

$$Z = \{ z \in U \mid h(z) = 0 \} \equiv \{ z \in U \mid f(z) = g(z) \}$$

n'a pas de point d'accumulation dans U , contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit que h est identiquement nulle sur U , donc $f = g$ sur U . \boxed{CQFD}

Preuve de [9.6]. Supposons que pour tout $z \in \partial D_\rho(0)$ il existe $r_z > 0$ et une fonction holomorphe $g_z : D_{r_z}(z) \rightarrow \mathbf{C}$ qui coïncide avec f sur l'intersection $D_\rho(0) \cap D_{r_z}(z)$. Alors on définit $U \subset \mathbf{C}$ par

$$U = D_\rho(0) \cup \left(\bigcup_{z \in \partial D_\rho(0)} D_{r_z}(z) \right).$$



Le but est maintenant de montrer qu'il existe une fonction holomorphe $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ qui coïncide avec f sur $D_\rho(0)$.

On commence avec la remarque que, parce que f et g_z coïncident sur $D_\rho(0) \cap D_{r_z}(z)$, la fonction $h_z : D_\rho(0) \cup D_{r_z}(z) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$h_z(a) = \begin{cases} f(a) & a \in D_\rho(0) \\ g_z(a) & a \in D_{r_z}(z) \end{cases},$$

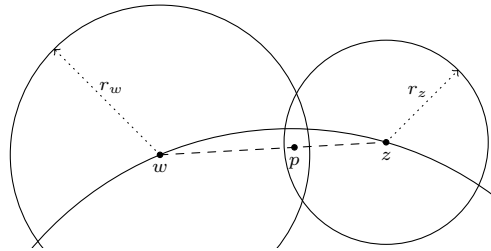
est bien définie et holomorphe. Si $z, w \in \partial D_\rho(0)$ sont deux éléments arbitraires (distincts), alors les restrictions de h_z et h_w à l'ouvert connexe

$$V = D_\rho(0) \cup (D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w))$$

coïncident sur $D_\rho(0)$ et cet ensemble admet un point d'accumulation dans V (en fait, tous les points de $D_\rho(0)$ sont point d'accumulation de $D_\rho(0)$ dans V).

Pour voir que V est bien connexe, on commence avec la remarque que $D_{r_z}(z)$ et $D_{r_w}(w)$ sont convexes et donc que leur intersection est aussi convexe, donc connexe. Ensuite il suffit de montrer que la triple intersection $D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w) \cap D_\rho(0)$ n'est pas vide (quand l'intersection $D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w)$ n'est pas vide!) pour pouvoir conclure que V est connexe. Pour cela on constate d'abord que, si l'intersection $D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w)$ n'est pas vide, alors forcément $|z - w| < r_z + r_w$. Avec cette observation on définit le point $p \in D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w)$ par

$$p = \frac{r_w}{r_w + r_z} \cdot z + \frac{r_z}{r_w + r_z} \cdot w$$



et on fait les calculs :

$$|p - z| = \frac{r_z}{r_w + r_z} \cdot |z - w| < r_z, \quad |p - w| = \frac{r_w}{r_w + r_z} \cdot |z - w| < r_w$$

$$\begin{aligned}
|p|^2 &= \frac{r_w^2}{(r_w + r_z)^2} \cdot z \bar{z} + \frac{r_z^2}{(r_w + r_z)^2} \cdot w \bar{w} + \frac{r_w r_z}{(r_w + r_z)^2} \cdot (z \bar{w} + w \bar{z}) \\
&= \frac{r_w^2 + r_z^2}{(r_w + r_z)^2} \cdot \rho^2 + \frac{2r_w r_z}{(r_w + r_z)^2} \cdot \operatorname{Re}(w \bar{z}) .
\end{aligned}$$

Mais selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\operatorname{Re}(w \bar{z})| = |(\operatorname{Re} w) \cdot (\operatorname{Re} z) + (\operatorname{Im} w) \cdot (\operatorname{Im} z)| = |\langle w, z \rangle| \leq |w| \cdot |z| = \rho^2 ,$$

avec égalité si et seulement si w et z sont colinéaires. En vu des conditions $|z| = |w| = \rho$ ceci est le cas si et seulement si $z = w$ ou $z = -w$. Il s'ensuit qu'on a (sans valeurs absolues!) $\operatorname{Re}(w \bar{z}) \leq \rho^2$, avec égalité si et seulement si on a $z = w$, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. En résumant on a donc l'inégalité stricte

$$|p|^2 < \frac{r_w^2 + r_z^2}{(r_w + r_z)^2} \cdot \rho^2 + \frac{2r_w r_z}{(r_w + r_z)^2} \cdot \rho^2 = \rho^2 ,$$

c'est-à-dire $p \in D_\rho(0) \cap D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w)$ comme voulu.

Il s'ensuit qu'on peut appliquer [9.5] et conclure que h_z et h_w coïncident partout dans V . En particulier g_z et g_w coïncident sur l'intersection $D_{r_z}(z) \cap D_{r_w}(w)$. Ceci permet de définir la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$F(a) = \begin{cases} f(a) & a \in D_\rho(0) \\ g_z(a) & \exists z \in \partial D_\rho(0) : a \in D_{r_z}(z) , \end{cases}$$

car il n'y aura pas de conflit si un point $a \in U$ vérifie plusieurs appartenances $a \in D_\rho(0)$, $a \in D_{r_z}(z)$ ou $a \in D_{r_w}(w)$ (avec $z \neq w$). La restriction de F à chaque ouvert $D_\rho(0)$ ou $D_{r_z}(z)$ étant holomorphe, F est bien holomorphe sur U .

Par définition de U on a l'inclusion

$$\overline{D_\rho(0)} = D_\rho(0) \cup \partial D_\rho(0) \subset U$$

et $K = \overline{D_\rho(0)}$ est un compact. Selon [22.4] il existe donc $\varepsilon > 0$ tel qu'on a l'inclusion

$$\{z \in \mathbf{C} \mid d_K(z) \leq \varepsilon\} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq \rho + \varepsilon\} \subset U .$$

Mais alors par [8.8.ii] la fonction holomorphe F est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence supérieur ou égal à $\rho + \varepsilon$. Ceci contredit la définition de ρ , rayon de convergence de f . L'hypothèse du départ est donc intenable. \square

Preuve de [9.8]. Si f admet une primitive holomorphe F , alors pour tout $C^{1/}$ -lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ on a par [7.10] $\int_\gamma f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\int_\gamma f(z) \, dz = 0$ pour tout $C^{1/}$ -lacet γ . Pour définir une primitive holomorphe F de f , on le fait séparément sur chaque composante connexe de U . Soit donc $U_o \subset U$ une composante connexe de U (qui est ouvert selon [22.8]) et soit $w_o \in U_o$ arbitraire (mais fixe). Alors on définit $F : U_o \rightarrow \mathbf{C}$ comme suit. Pour $w \in U_o$ il existe selon [3.13] une $C^{1/}$ -courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow U_o$ avec $\gamma(a) = w_o$ et $\gamma(b) = w$ (plus précisément une ligne brisée, qui est même de classe $C^{1/\infty}$). Avec ce γ on définit

$$F(w) = \int_\gamma f(z) \, dz .$$

Si $\delta : [c, d] \rightarrow U_o$ est une autre $C^{1/}$ -courbe avec $\delta(c) = w_o$ et $\delta(d) = w$, alors $\delta \sqcup \overleftarrow{\gamma}$ est un $C^{1/}$ -lacet dans U . On a donc par hypothèse :

$$0 = \int_{\delta \sqcup \overleftarrow{\gamma}} f(z) \, dz = \int_{\delta} f(z) \, dz - \int_{\gamma} f(z) \, dz ,$$

ce qui montre que la valeur $F(w)$ ne dépend pas du choix de la courbe γ qui relie w_o à w . Autrement dit, la fonction $F : U_o \rightarrow \mathbf{C}$ est bien définie. En faisant cela pour toute composante connexe de U on obtient une fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$.

Pour montrer que F est holomorphe avec $F' = f$ on procède comme dans [8.3]. Pour $w \in U_o$ et $r > 0$ tel que $D_r(w) \subset U_o$ on choisit une $C^{1/}$ -courbe γ qui relie w_o à w et on constate que $\gamma \sqcup [w, w+h]$ relie w_o à $w+h$ pour tout $h \in D_r(0)$. On peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(w+h) - F(w)}{h} - f(w) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{\gamma \sqcup [w, w+h]} f(z) \, dz - \int_{\gamma} f(z) \, dz - h \cdot f(w) \right| \\ &\stackrel{(26.12)}{=} \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{[w, w+h]} (f(z) - f(w)) \, dz \right| \stackrel{[4.11]}{\leq} \sup_{z \in [w, w+h]} |f(z) - f(w)| . \end{aligned}$$

La continuité de f en w implique qu'on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{z \in [w, w+h]} |f(z) - f(w)| = 0 ,$$

ce qui implique à son tour qu'on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(w+h) - F(w)}{h} - f(w) \right| = 0 .$$

La fonction F est donc \mathbf{C} -dérivable en $w \in U_o$ avec $F'(w) = f(w)$. \boxed{CQFD}

Preuve de [9.9]. Soit $r > 0$ arbitraire. Si f est une fonction entière, alors selon [8.8.ii] (avec $w_o = 0$) on a pour tout $z \in \mathbf{C}$ la formule

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{avec} \quad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-int} \, dt .$$

Si f est bornée, disons $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors on a la majoration

$$\left| \int_0^{2\pi} f(w_o + r e^{it}) e^{-int} \, dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| \, dt \leq 2\pi M .$$

Cela nous donne les majorations

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M ,$$

valable pour tout $r > 0$. Mais pour $n > 0$ on a $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-n} = 0$, et donc pour $n > 0$ on doit avoir $f^{(n)}(0) = 0$. Ce qui nous donne pour $f(z)$ la formule

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) .$$

Autrement dit, f est constante. \boxed{CQFD}

Preuve de [9.11]. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant à coefficient complexes. Si P n'a pas de racines dans \mathbf{C} , alors la fonction $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

est bien une fonction entière. On veut appliquer le théorème de Liouville [9.9] pour conclure que f et donc P est constante, ce qui constituera une contradiction avec l'hypothèse que P n'est pas constant. Si P est de degré $n \in \mathbf{N}^*$ (car P non constant), alors on a $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ avec $c_n \neq 0$. Avec la remarque évidente qu'on a $\lim_{|z| \rightarrow \infty} 1/z = 0$, on calcule :

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{P(z)} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n c_k z^k} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^n c_k z^{k-n}} \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{c_0 z^{-n} + \dots + c_{n-1} z^{-1} + c_n} \stackrel{n \geq 0}{=} 0 \cdot \frac{1}{c_n} = 0 . \end{aligned}$$

Par définition de cette limite, il existe (en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition) $R > 0$ tel que

$$\forall |z| > R : |f(z)| < 1 .$$

D'autre part, le disque fermé $\overline{D_R(0)}$ est compact et f est continue, donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall z \in \overline{D_R(0)} : |f(z)| \leq M .$$

Au final on aura donc

$$\forall z \in \mathbf{C} : |f(z)| \leq \max(1, M) ,$$

ce qui veut dire que f est bornée. Par le théorème de Liouville [9.9] f et donc P est constante. L'hypothèse du départ que P n'est pas constant est donc intenable.

CQFD

Preuve de [9.12]. Supposons que $|f|$ admet un maximum local en $w_o \in U$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on a l'inégalité

$$(26.15) \quad \forall w \in D_\varepsilon(z) : |f(w)| \leq |f(w_o)| .$$

Selon [8.8.iv] (avec $0 < r < \varepsilon$) on a donc

$$\begin{aligned} |f(w_o)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} \right|^2 \cdot r^{2n} &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} \right|^2 \cdot r^{2n} \\ &\stackrel{[8.8.iv]}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w_o + r e^{it})|^2 dt \stackrel{(26.15)}{\leq} |f(w_o)|^2 , \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(w_o)}{n!} \right|^2 \cdot r^{2n} \leq 0 .$$

Mais les termes de cette série sont positives, donc on doit avoir $f^{(n)}(w_o) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Le développement en série entière de f au voisinage de w_o est donc une fonction constante. La fonction f et la fonction partout cette constante coïncident donc sur ce voisinage qui admet w_o comme point d'accumulation. Par le principe de prolongement analytique [9.5] ces deux fonctions coïncident donc partout, c'est-à-dire que f est constante sur U .

CQFD

Preuve de [9.14]. Soit $z_o \in U$, alors selon [8.8] f est développable en série entière au voisinage de z_o , disons sur $D_r(z_o) \subset U$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_o)^n .$$

Si pour tout $n \geq 1$ on a $c_n = 0$, alors f est constante sur $D_r(z_o)$, donc par le principe de prolongement analytique [9.5] elle l'est partout (le disque $D_r(z_o)$ contient tous ces points comme points d'accumulation dans U), contraire à l'hypothèse. Il existe donc $n \geq 1$ avec $c_n \neq 0$, ce qui permet de définir k comme

$$k = \min \{ n \in \mathbf{N}^* \mid c_n \neq 0 \} .$$

Il s'ensuit qu'on peut écrire sur $D_r(z_o)$:

$$f(z) = f(z_o) + c_k (z - z_o)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_n}{c_k} (z - z_o)^{n-k} .$$

Quand on définit la fonction $g : D_r(z_o) \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_o)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_o)^n ,$$

alors on aura les propriétés

$$g(z_o) = c_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in D_r(z_o) : f(z) = f(z_o) + (z - z_o)^k \cdot g(z) .$$

En écrivant $c_k = |c_k| e^{it}$ [6.4.ii] on peut définir $\lambda = \sqrt[k]{|c_k|} e^{it/k}$, un nombre complexe qui vérifie $\lambda^k = c_k$. Avec ce nombre on regarde la fonction $P_k : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $P_k(z) = z^k$ (la puissance k -ième). Alors $P_k(\lambda) = c_k$ et $P'_k(\lambda) = k\lambda^{k-1} \neq 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème de l'inversion locale holomorphe [9.1] et de conclure qu'il existe deux voisinages $V_1 \ni \lambda$ et $V_2 \ni c_k$ tels que $P_k : V_1 \rightarrow V_2$ est bijective avec $P_k^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ holomorphe. Parce qu'une série entière est en particulier continue il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(D_\varepsilon(z_o)) \subset V_2$ (c'est la continuité de g en z_o avec $g(z_o) = c_k \in V_2$). Il s'ensuit que la fonction $h : D_\varepsilon(z_o) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $h = P_k^{-1} \circ g$ est holomorphe et vérifie

$$\forall z \in D_\varepsilon(z_o) : (h(z))^k = g(z) .$$

Pour terminer il nous suffit de définir l'application holomorphe $\psi : D_\varepsilon(z_o) \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$\psi(z) = (z - z_o) h(z) .$$

On en déduit directement qu'on a $\psi(z_o) = 0$, $\psi'(z_o) = \lambda \neq 0$ et

$$(\psi(z))^k = (z - z_o)^k (h(z))^k = (z - z_o)^k g(z) = f(z) - f(z_o) ,$$

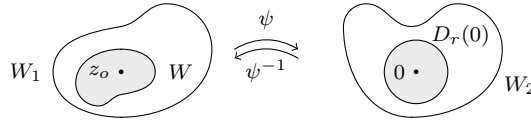
ce qui termine la preuve. \square

Preuve de [9.15]. Soit $U' \subset U$ un ouvert. Pour montrer que $f(U')$ est un ouvert, il suffit de trouver pour tout $z_o \in U'$ un ensemble $W \subset U'$ contenant z_o tel que $f(W)$ est un ouvert. Car dans ce cas $f(W)$ sera un voisinage ouvert de $f(z_o)$ contenu dans $f(U')$. Soit donc $z_o \in U'$ arbitraire. Si f n'est pas constante, on peut appliquer [9.14]

(à la fonction holomorphe $f : U' \rightarrow \mathbf{C}$) pour obtenir un voisinage $V \subset U'$ de z_o , un $k \in \mathbf{N}^*$ et une application holomorphe $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant $\psi(z_o) = 0$, $\psi'(z_o) \neq 0$ et

$$(26.16) \quad \forall z \in V : f(z) = f(z_o) + (\psi(z))^k .$$

Selon les deux premières propriétés de ψ on peut invoquer le théorème de l'inversion locale holomorphe [9.1] et conclure qu'il existe deux voisinages $W_1 \subset V$ de z_o et W_2 de $0 = \psi(z_o)$ tels que $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ est bijective avec $\psi^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$ holomorphe. En particulier $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ sera un homéomorphisme. Parce que W_2 est un voisinage ouvert de 0 , il existe $r > 0$ tel que $D_r(0) \subset W_2$. Et parce que $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ est un homéomorphisme, l'ensemble $W = \psi^{-1}(D_r(0)) \subset W_1$ est un voisinage ouvert de z_o contenu dans U .



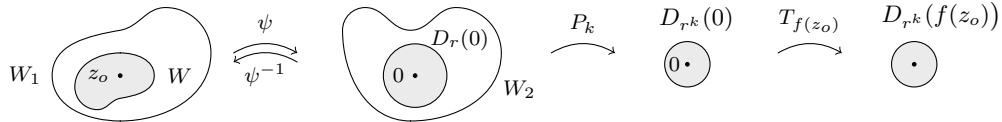
On prétend maintenant que $f(W)$ est un ouvert. Pour le montrer on raisonne comme suit. Selon (26.16) l'application f est (sur V) la composée de trois applications : d'abord l'application ψ , ensuite l'application P_k (de prendre la puissance k -ième) et finalement la translation $T_{f(z_o)}$ (qui envoie z sur $z + f(z_o)$) :

$$\begin{aligned} z \mapsto \psi(z) \mapsto (\psi(z))^k &= (P_k \circ \psi)(z) \mapsto f(z) = f(z_o) + (\psi(z))^k \\ &= (T_{f(z_o)} \circ P_k \circ \psi)(z) . \end{aligned}$$

Regardons ce que devient le voisinage W de z_o . Sous ψ on a (par définition de W) l'égalité $\psi(W) = D_r(0)$. Ensuite on invoque [6.4.ii] et le fait que la restriction $P_k : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ (de l'application P_k à l'intervalle $[0, \infty[$) est un homéomorphisme pour en déduire qu'on a l'égalité

$$P_k(D_r(0)) = D_{r^k}(0) .$$

On aura donc :



$$f(W) = T_{f(z_o)}(P_k(\psi(W))) = T_{f(z_o)}(P_k(D_r(0))) = T_{f(z_o)}(D_{r^k}(0)) = D_{r^k}(f(z_o)) ,$$

ce qui est bien un ouvert. CQFD

Preuve de [9.16]. Soit $z_o \in U$ et soit $U_o \subset U$ la composante connexe de U contenant z_o . C'est un ouvert [22.8] et l'injectivité de f implique que la restriction de f à U_o n'est pas constante.² Selon [9.14] il existe donc $k \in \mathbf{N}^*$, $z_o \in V \subset U_o$ et $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ tels que

$$\psi(z_o) = 0 , \quad \psi'(z_o) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in V : f(z) = f(z_o) + (\psi(z))^k .$$

En appliquant [9.1] à la fonction ψ au point z_o , on déduit l'existence de deux voisinages $W_1 \subset V$ de z_o et W_2 de $0 = \psi(z_o)$ tels que $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ est bijective avec $\psi^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$ holomorphe. Parce que W_2 est un voisinage ouvert de 0 , il existe

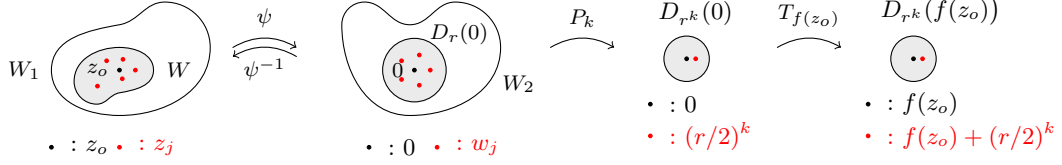
2. On notera la similarité entre l'argument qui suit et la preuve de [9.15].

$r > 0$ tel que $D_r(0) \subset W_2$, ce qui implique que les k points distincts w_1, \dots, w_k définis comme

$$w_j = \frac{1}{2} r e^{2\pi i j/k}$$

appartiennent à W_2 . Il s'ensuit que les points $z_j = \psi^{-1}(w_j) \in W_1 \subset V \subset U_o$ sont k points distincts. Mais par définition de ψ on a

$$f(z_j) = f(z_o) + (\psi(z_j))^k = f(z_o) + (w_j)^k = f(z_o) + \left(\frac{1}{2} r\right)^k .$$



Les k points z_j ont donc tous le même image par f . L'injectivité de f nous oblige à conclure qu'on a $k = 1$. On peut donc faire le raisonnement

$$f(z) = f(z_o) + \psi(z) \quad \implies \quad f'(z_o) = \psi'(z_o) \neq 0 ,$$

ce qui termine la preuve. \square CQFD

Les preuves de §10

Preuve de [10.3]. La première partie de la preuve est du jonglage avec les équivalences [23.4]. Si f_n converge vers f uniformément sur tout compact, alors par [23.4] elle converge uniformément sur tout $\overline{D_r(w)} \subset U$. Par le critère de Cauchy [23.2] on a donc la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n, m \geq N : \sup_{z \in \overline{D_r(w)}} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon .$$

Avec [10.2] on en déduit, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la majoration

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n, m \geq N : \sup_{z \in \overline{D_{r/2}(w)}} |f_n^{(k)}(z) - f_m^{(k)}(z)| < \frac{k! 2^k}{r^k} \cdot \varepsilon .$$

La suite $f_n^{(k)}$ vérifie donc le critère de Cauchy sur $\overline{D_{r/2}(w)} \subset U$. Et donc elle converge uniformément sur $\overline{D_{r/2}(w)}$ vers une fonction $g_k : \overline{D_{r/2}(w)} \rightarrow \mathbf{C}$. Ceci étant vrai pour tout $w \in U$, l'unicité d'une limite montre que la suite $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout U vers une fonction $g_k : U \rightarrow \mathbf{C}$. Et par [23.4], cela est équivalent à la convergence uniforme sur tout compact $K \subset U$ de la suite $f_n^{(k)}$ vers g_k .

Supposons qu'on a réussi à montrer que f est \mathbf{C} -dérivable avec $f' = g_1$, alors on en déduit directement par récurrence qu'on a $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \geq 1$, ce qui terminera la preuve. Reste donc la preuve que f est \mathbf{C} dérivable avec $f' = g_1$.

Sachant que f'_n converge uniformément sur tout compact, on peut appliquer [7.10] et [10.1] et conclure qu'on a

$$\begin{aligned} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(w+h) - f_n(w)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-1} \cdot \int_{[w, w+h]} f'_n(z) \, dz \\ &= h^{-1} \cdot \int_{[w, w+h]} g_1(z) \, dz \end{aligned}$$

On en déduit la majoration

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g_1(w) \right| &= \left| h^{-1} \cdot \int_{[w, w+h]} (g_1(z) - g_1(w)) \, dz \right| \\ &\stackrel{[4.11]}{\leq} \sup_{z \in [w, w+h]} |g_1(z) - g_1(w)| . \end{aligned}$$

Mais g_1 est continue par [23.6], donc le membre de droite tend vers zéro dans la limite $h \rightarrow 0$. Ainsi on a montré que f est \mathbf{C} -dérivable avec dérivée g_1 comme voulu.

Au lieu de passer par [7.10] et [10.1] pour démontrer l'égalité $f' = g_1$, on peut aussi passer par [23.8] et les équations de Cauchy-Riemann comme suit. Pour cela on commence avec la remarque qu'on a selon [7.3] :

$$(\partial_1 f_n)(z) = f'_n(z) \quad \text{et} \quad (\partial_2 f_n) = i f'_n(z) .$$

Les suites f_n , $\partial_1 f_n$ et $\partial_2 f_n$ convergent donc uniformément sur tout compact vers f , g_1 et $i g_1$ respectivement. On peut donc invoquer [23.8] et conclure qu'on a les égalités

$$\partial_1 f = g_1 \quad \text{et} \quad \partial_2 f = i g_1 .$$

Il s'ensuit que f vérifie l'équation de Cauchy-Riemann complexe. Selon [7.3] elle est donc holomorphe avec $f' = g_1$ comme voulu. CQFD

Les preuves de §11

Preuve de [11.2]. • (i). Si (U, f) est une détermination continue du logarithme complexe, on a pour tout $z \in U$ l'égalité $z = \exp(f(z))$. Avec [6.1.ix] il s'ensuit qu'on a

$$|z| = |e^{f(z)}| = e^{(\operatorname{Re} f)(z)} \implies \ln(|z|) = (\operatorname{Re} f)(z) .$$

Et donc par [6.1.iv] on en déduit

$$z = e^{(\operatorname{Re} f)(z) + i(\operatorname{Im} f)(z)} = e^{(\operatorname{Re} f)(z)} \cdot e^{i(\operatorname{Im} f)(z)} = |z| \cdot e^{i(\operatorname{Im} f)(z)} ,$$

ce qui montre que $(U, \operatorname{Im} f)$ est une détermination continue de l'argument (car f donc $\operatorname{Im} f$ est supposée continue).

Réciproquement, si $(\operatorname{Re} f)(z) = \ln(|z|)$ et $\operatorname{Im} f$ une détermination continue de l'argument, on aura pour tout $z \in U$:

$$z = |z| \cdot e^{i(\operatorname{Im} f)(z)} = e^{\ln(|z|)} \cdot e^{i(\operatorname{Im} f)(z)} .$$

En posant $(\operatorname{Re} f)(z) = \ln(|z|)$ (une fonction continue) il s'ensuit que $f = \operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f$ est une détermination continue du logarithme complexe.

• (ii). Soit $z_o \in U$ et $w_o = \log(z_o)$, alors on a par définition d'une détermination continue du logarithme $z_o = \exp(\log(z_o)) = \exp(w_o)$. Sachant que l'application $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$ est holomorphe et qu'on a $\exp'(w_o) = \exp(w_o) \neq 0$, on peut appliquer le théorème de l'inversion locale holomorphe [9.1] pour conclure qu'il existe des voisinages W de w_o et V de $z_o = \exp(w_o)$ tels que $\exp : W \rightarrow V$ est bijective et sa réciproque $\exp^{-1} : V \rightarrow W$ est aussi holomorphe. Parce que \log est continue, $V_o = \log^{-1}(W) \subset U$ est un ouvert contenant z_o , ce qui permet de raisonner comme suit :

$$z \in V_o \implies \log(z) \in W \implies \log(z) = \exp^{-1}(\exp(\log(z))) = \exp^{-1}(z) .$$

La conclusion est donc que la restriction de \log au voisinage V_o de z_o est holomorphe, étant égale à l'application holomorphe \exp^{-1} . Le fait que z_o est arbitraire montre que \log est holomorphe partout.

Sachant que \log est holomorphe, on peut utiliser sa définition $\exp(\log(z)) = z$ pour calculer sa dérivée avec [7.6] :

$$1 = \exp'(\log(z)) \cdot \log'(z) \stackrel{[7.12]}{=} \exp(\log(z)) \cdot \log'(z) = z \cdot \log'(z) ,$$

ce qui termine la preuve qu'on a $\log'(z) = 1/z$. \boxed{CQFD}

Preuve de [11.3]. Supposons qu'il existe une détermination continue du logarithme (U, f) . Par [11.2] on sait que f est holomorphe et qu'on a $f'(z) = 1/z$. On a donc $df = f'(z) dz = dz/z$ [7.9.ii] et par hypothèse le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\gamma(t) = r e^{it}$ est contenue dans U . Selon [2.9] on en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= f(r) - f(r) = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) \\ &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{it}}{r e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i . \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que la détermination (U, f) ne peut pas exister. \boxed{CQFD}

Preuve de [11.7]. • (i). Avec les modifications “évidentes,” ces preuves sont des copies conformes de la preuve de [11.2]. Soit, pour commencer, (U_g, g) une détermination continue de $\log(f(z))$, soit $z_o \in V$ et $w_o = g(z_o)$. Par définition de g on a $e^{w_o} = f(z_o)$ et (comme dans la preuve de [11.2.ii]) on peut appliquer le théorème de l’inversion locale holomorphe [9.1] pour conclure qu’il existe des voisinages W de w_o et V de $f(z_o) = \exp(w_o)$ tels que $\exp : W \rightarrow V$ est bijective et sa réciproque $\exp^{-1} : V \rightarrow W$ est aussi holomorphe. Parce que g est continue, $V_o = g^{-1}(W) \subset U_g \subset U$ est un ouvert contenant z_o , ce qui permet de raisonner comme suit :

$$z \in V_o \implies g(z) \in W \implies g(z) = \exp^{-1}(\exp(g(z))) = \exp^{-1}(f(z)) .$$

La conclusion est donc que la restriction de g au voisinage V_o de z_o est holomorphe, étant égale à la composée $\exp^{-1} \circ f$ de deux fonctions holomorphes. Le fait que z_o est arbitraire montre que g est holomorphe partout.

Sachant que g est holomorphe, on peut utiliser sa définition $\exp(g(z)) = f(z)$ pour calculer sa dérivée avec [7.6] :

$$f'(z) = \exp'(g(z)) \cdot g'(z) \stackrel{[7.12]}{=} \exp(g(z)) \cdot g'(z) = f(z) \cdot g'(z) ,$$

ce qui termine la preuve qu’on a $g'(z) = f'(z)/f(z)$.

Soit maintenant (U_g, g) une détermination continue de $\sqrt[n]{f(z)}$, soit $z_o \in U_g$ et soit $w_o = g(z_o)$. Définissons l’application $P_n = \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ par $P_n(z) = z^n$. Alors par définition de g on a $P_n(w_o) = f(z_o)$. Parce que f ne s’annule pas, on doit avoir $w_o \neq 0$ et donc $P'_n(w_o) = n(w_o)^{n-1} \neq 0$. Il s’ensuit qu’on peut appliquer le théorème de l’inversion locale holomorphe [9.1] pour conclure qu’il existe des voisinages W de w_o et V de $f(z_o) = P_n(w_o)$ tels que $P_n : W \rightarrow V$ est bijective et sa réciproque $P_n^{-1} : V \rightarrow W$ est aussi holomorphe. Parce que g est continue, $V_o = g^{-1}(W) \subset U_g \subset U$ est un ouvert contenant z_o , ce qui permet de raisonner comme suit :

$$z \in V_o \implies g(z) \in W \implies g(z) = P_n^{-1}(P_n(g(z))) = P_n^{-1}(f(z)) .$$

La conclusion est donc que la restriction de g au voisinage V_o de z_o est holomorphe, étant égale à la composée $P_n^{-1} \circ f$ de deux fonctions holomorphes. Le fait que z_o est arbitraire montre que g est holomorphe partout.

Sachant que g est holomorphe, on peut utiliser sa définition $P_n(g(z)) = f(z)$ pour calculer sa dérivée avec [7.6] :

$$f'(z) = P'_n(g(z)) \cdot g'(z) \stackrel{[7.12]}{=} n \cdot (g(z))^{n-1} \cdot g'(z) = n \cdot f(z) \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} ,$$

ce qui se réécrit comme

$$g'(z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{g(z)}{f(z)} \cdot f'(z) .$$

• (ii). Si g est continue, alors h est aussi continue comme composée de g avec l’exponentielle. Et il est immédiat qu’on a

$$(h(z))^n = \left(\exp\left(\frac{1}{n} g(z)\right) \right)^n = \exp(g(z)) = f(z) ,$$

montrant que h est une détermination de $\sqrt[n]{f(z)}$.

CQFD

Les preuves de §12

Preuve de [12.1]. • (i). L'idée de la preuve est assez simple. On considère deux déterminations continues de l'argument : l'argument principal $\text{Arg} : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^- \rightarrow]-\pi, \pi[$ et la détermination $\arg : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ \rightarrow]0, 2\pi[$ définie par

$$\arg(z) = \text{Arg}(-z) + \pi .$$

La réunion des deux domaines de définition fait \mathbf{C}^* et donc chaque $\gamma(t) \in \mathbf{C}^*$ appartient à au moins un des deux domaines $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ ou $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$. L'idée de la preuve est alors assez simple : on coupe l'intervalle $[a, b]$ en n petit morceaux de sorte que l'image de chaque morceau (par l'application γ) est contenue dans l'un ou l'autre domaine $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^\pm$. Sur chaque sous-intervalle on utilise la branche continue de l'argument pour définir la fonction φ sur le sous-intervalle et ensuite on s'arrange pour recoller ces résultats en une seule fonction continue sur tout l'intervalle $[a, b]$. Il y a donc deux "obstacles" à surmonter : le choix des sous-intervalles et le recollage.

Pour le choix des sous-intervalles, on définit d'abord pour chaque $t \in [a, b]$ l'ouvert $U_t \subset \mathbf{C}$ par $U_t = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ si $\gamma(t) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ et $U_t = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ dans le cas contraire, c'est-à-dire $\gamma(t) \in \mathbf{R}^-$. Le point important est qu'on a $\gamma(t) \in U_t$ pour tout $t \in [a, b]$. Parce que γ est continue, la collection \mathcal{V} définie comme

$$\mathcal{V} = \{ \gamma^{-1}(U_t) \mid t \in [a, b] \}$$

est un recouvrement par ouverts de $[a, b]$. Il existe donc un nombre de Lebesgue λ de ce recouvrement [22.3]. Avec ce nombre de Lebesgue on choisit $n \in \mathbf{N}^*$ de sorte que $(b - a)/n < 2\lambda$. La propriété d'un nombre de Lebesgue permet d'affirmer que chaque sous-intervalle $I_k = [a + \frac{k-1}{n}(b - a), a + \frac{k}{n}(b - a)]$, $k = 1, \dots, n$ est contenu dans un des ouverts $\gamma^{-1}(U_t)$. Si \arg_k est la détermination continue de l'argument associée avec cet ouvert U_t (c'est-à-dire Arg dans le cas $U_t = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ et \arg dans le cas $U_t = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$), alors on définit l'application $\theta_k : I_k \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$\forall t \in I_k \equiv \left[a + \frac{k-1}{n}(b - a), a + \frac{k}{n}(b - a) \right] : \theta_k(t) = \arg_k(\gamma(t)) .$$

L'application θ_k est bien définie car par construction on a $\gamma(I_k) \subset U_t$, le domaine de définition de \arg_k (un tel U_t existe par définition d'un nombre de Lebesgue). De plus, chaque θ_k est continue comme composée des applications continues γ et \arg_k .

En particulier on a pour chaque $\tau_k = \frac{k}{n}(b - a) \in I_k \cap I_{k+1}$, $k = 1, \dots, n - 1$ l'égalité

$$|\gamma(\tau_k)| \cdot e^{i\theta_k(\tau_k)} \stackrel{\tau_k \in I_k}{=} \gamma(\tau_k) \stackrel{\tau_k \in I_{k+1}}{=} |\gamma(\tau_k)| \cdot e^{i\theta_{k+1}(\tau_k)}$$

et donc il existe $m_k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta_{k+1}(\tau_k) - \theta_k(\tau_k) = 2\pi m_k$. À l'aide des entiers m_k on peut maintenant recoller les application θ_k en une application $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$t \in I_k \implies \varphi(t) = \theta_k(t) - 2\pi \sum_{j=1}^{k-1} m_j ,$$

où dans le cas $k = 1$ on n'enlève rien (somme "vide"). Les seuls cas où il y a ambiguïté sont les cas $t = \tau_k \in I_k \cap I_{k+1}$, mais dans un tel cas on a

$$\theta_k(\tau_k) - 2\pi \sum_{j=1}^{k-1} m_j = \theta_k(\tau_k) + m_k - 2\pi \sum_{j=1}^k m_j = \theta_{k+1}(\tau_k) - 2\pi \sum_{j=1}^{(k+1)-1} m_j ,$$

ce qui montre que les deux prescriptions coïncident. On peut donc appliquer [22.13.iii] et conclure que φ est continue.

- (ii). Si φ_1 et φ_2 vérifient (12.2), alors on a les égalités

$$|\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi_1(t)} = \gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi_2(t)} ,$$

ce qui implique qu'on doit avoir

$$e^{i\varphi_1(t)} = e^{i\varphi_2(t)} \quad \text{et donc} \quad \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \in 2\pi\mathbf{Z} .$$

L'application continue $\varphi_2 - \varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ prend donc ses valeurs dans l'espace discret \mathbf{Z} . L'intervalle $[a, b]$ étant connexe, il s'ensuit que $\varphi_2 - \varphi_1$ doit être constante : il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + 2k\pi$ pour tout $t \in [a, b]$.

- (iii). Pour montrer que cette application φ a la même classe de dérivabilité que γ , il suffit de remarquer que φ est localement de la forme $\varphi(t) = \arg(\gamma(t))$ pour une détermination continue de l'argument. Une telle détermination continue est la partie imaginaire d'une détermination continue du logarithme qui est holomorphe [11.2] et donc \arg est de classe C^∞ . La composée $\varphi = \arg \circ \gamma$ est donc de la même classe de dérivabilité que γ , l'argument ne mettant pas d'autres restrictions, étant de classe C^∞ .

Plus précisément, soit $t \in [a, b]$, alors t appartient à l'ouvert $\gamma^{-1}(U_t)$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $B_\delta(t) \cap [a, b] \subset \gamma^{-1}(U_t)$. Si on note \arg_t la détermination continue de l'argument définie sur U_t (donc soit Arg , soit \arg définie ci-dessus), alors la fonction $\theta : B_\delta(t) \cap [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\theta = \arg_t \circ \gamma$ vérifie (12.2), comme la restriction de φ à $B_\delta(t) \cap [a, b]$. Par (ii) il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi(s) = \theta(s) + 2k\pi$ pour tout $s \in B_\delta(t) \cap [a, b]$. Toute détermination continue de l'argument étant de classe C^∞ (comme argumenté ci-dessus), la classe de dérivabilité de θ est la même que celle de γ ; additionner une constante ne change pas ce constat, et donc la restriction de φ à l'ouvert $B_\delta(t) \cap [a, b]$ est la même que celle de γ . La classe de dérivabilité étant une propriété locale, le résultat en découle immédiatement.

- (iv). Il y a deux façons de montrer que cette application φ vérifie (12.2) : on peut le montrer directement, ou on peut utiliser une solution de classe $C^{1/}$ $\hat{\varphi}$ donnée par (iii) et montrer que la différence $\hat{\varphi} - \varphi$ est un multiple de 2π . On choisit la deuxième méthode, légèrement plus simple. Soit donc $\hat{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $C^{1/}$ vérifiant (12.2). Alors en posant $r : [a, b] \rightarrow]0, \infty[$, $r(t) = |\gamma(t)|$ (une fonction également de classe $C^{1/}$), on aura

$$\gamma(t) = r(t) \cdot e^{i\hat{\varphi}(t)} \quad \text{et donc} \quad \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\hat{\varphi}'(t) .$$

On peut donc faire le calcul

$$\varphi(t) \equiv \varphi_a + \text{Im} \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \, ds = \varphi_a + \int_a^t \hat{\varphi}'(s) \, ds \stackrel{[1.6.iii]}{=} \hat{\varphi}(t) + \varphi_a - \hat{\varphi}(a) .$$

Mais φ_a et $\hat{\varphi}(a)$ sont tous les deux des arguments de $\gamma(a)$ et donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi_a - \hat{\varphi}(a) = 2k\pi$. Sachant que $\hat{\varphi}$ vérifie (12.2), il s'ensuit immédiatement que φ le fait également.

La preuve directe que φ vérifie (12.2) commence avec l'introduction de l'application $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\psi(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} .$$

Le but sera donc de montrer qu'on a l'égalité $\psi(t) = \gamma(t)$. Pour le faire on calcule $\psi'(t)$:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \left((|\gamma(t)|)' + i\varphi'(t) \cdot |\gamma(t)| \right) \cdot e^{i\varphi(t)} = \left(\frac{\text{Re}(\overline{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t))}{|\gamma(t)|^2} + i \text{Im}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) \right) \cdot \psi(t) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \psi(t) . \end{aligned}$$

On en déduit qu'on a

$$\left(\frac{\psi(t)}{\gamma(t)} \right)' = \frac{\psi'(t)\gamma(t) - \psi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2} = 0 .$$

L'application ψ/γ est donc constante sur l'intervalle (connexe) $[a, b]$. Sachant qu'on a $\psi(a) = |\gamma(a)| \cdot e^{i\varphi_a} = \gamma(a)$, on doit avoir $\psi = \gamma$ partout, ce qui montre que φ vérifie (12.2). \boxed{CQFD}

Preuve de [12.5]. • (i). Être constante sur chaque composante connexe est équivalente à être localement constante. Et en analyse on a un réflexe qui dit qu'il y a équivalence entre localement constante et dérivée nulle. Sauf que pour cela il faut que la fonction soit dérivable. Dans notre cas il n'est pas difficile de montrer que la fonction Ind_γ est dérivable, mais c'est à ce niveau de la théorie plus difficile de montrer que sa dérivée est nulle. L'approche qu'on va utiliser est de montrer qu'elle est continue et qu'on a donc une fonction continue à valeurs dans un espace discret \mathbf{Z} , ce qui implique aussi qu'elle doit être localement constante.

Sachant que γ est de classe $C^{1/}$, il existe une subdivision $a = t_0 < \dots < t_s = b$ de $[a, b]$ telle que γ soit de classe C^1 sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et donc en particulier γ' y est continue. La fonction $F_j : \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \times [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F_j(w, t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}$$

est donc une fonction continue, ce qui permet d'appliquer [23.14] et de conclure que la fonction $g_j : \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$g_j(w) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_j(w, t) \, dt$$

est continue. Mais on a évidemment l'égalité

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \, dt = \sum_{j=1}^s \frac{1}{2\pi i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^s g_j(w) ,$$

ce qui est donc aussi une fonction continue. La fonction Ind_γ est donc continue et prend ses valeurs dans l'ensemble discret \mathbf{Z} . Chaque singleton $\{n\} \subset \mathbf{Z}$ étant un ensemble ouvert et fermé, son image réciproque $(\text{Ind}_\gamma)^{-1}\{n\} \subset \mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ est aussi ouvert et fermé; c'est donc une réunion de composante connexes.

• (ii). L'intervalle $[a, b]$ est compact et γ est continue, donc l'image $\gamma([a, b])$ est compact. Il s'ensuit qu'il existe $R > 0$ tel que $\gamma([a, b]) \subset D_R(0)$. L'ensemble $A_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R\}$ est donc un ouvert connexe contenu dans $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$. La restriction de Ind_γ à A_R est donc constante. D'autre part, en utilisant [4.11] et la définition de R on peut faire la majoration pour tout $w \in A_R$:

$$|2\pi i \cdot \text{Ind}_\gamma(w)| = \left| \int_\gamma \frac{dz}{z - w} \right| \leq \sup_{z \in \gamma([a, b])} \left| \frac{1}{z - w} \right| \cdot L(\gamma) \leq \frac{L(\gamma)}{|w| - R} .$$

On en déduit immédiatement qu'on a

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} |\text{Ind}_\gamma(w)| = 0 .$$

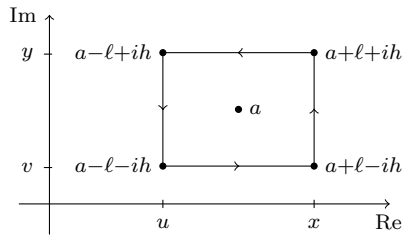
Mais $\text{Ind}_\gamma(w)$ est un entier et sur A_R c'est une constante. On a donc forcément $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$ pour tout $w \in A_R$. Il s'ensuit qu'on a forcément l'inclusion $K_\gamma \subset \overline{D_R(0)}$, montrant que K_γ est borné. Mais K_γ est le complémentaire de $\{z \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \mid \text{Ind}_\gamma(z) =$

$0\}$, ce qui est selon (i) une réunion de composantes connexes de l'ouvert $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$, donc un ouvert [22.8]. K_γ est donc un fermé, donc un compact.

• (iii). Ci-dessus on a vu que A_R est un ouvert connexe contenu dans $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$. Si on note C_∞ la composante connexe de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$ qui contient A_R , il s'ensuit que toute autre composante connexe doit être incluse dans $\overline{D_R(0)}$ et est donc bornée. Sachant que Ind_γ est nulle sur A_R elle l'est sur la composante connexe non-bornée C_∞ . CQFD

Preuve de [12.7]. Le bord du rectangle R coupe le plan en deux parties connexes : l'intérieur (un rectangle ouvert) et l'extérieur. Selon [12.5.i] l'indice est constante sur chacune de ces deux parties avec indice 0 pour la partie extérieure. Il suffit donc de calculer $\text{Ind}_{\partial R}(a)$ pour une seule valeur de $a \in \mathring{R}$ pour connaître sa valeur partout. On prend pour a le centre du rectangle et on définit $\ell, h \in \mathbf{R}$ (largeur et hauteur) comme les demi-longueurs des côtés :

$$a = \frac{1}{2}((u + iv) + (x + iy)) \quad ,$$

$$\ell = \frac{1}{2}(u + x) \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2}(v + y) \quad .$$


Avec ces définition on décrit les quatre côtés du rectangle par les courbes :

$$\begin{array}{lll} [u + iv, x + iv] & \text{par} & \gamma_1 : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_1(t) = a + t - ih \\ [x + iv, x + iy] & \text{par} & \gamma_2 : [-h, h] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_2(t) = a + \ell + it \\ [x + iy, u + iy] & \text{par} & \gamma_3 : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_3(t) = a - t + ih \\ [u + iy, u + iv] & \text{par} & \gamma_4 : [-h, h] \rightarrow \mathbf{C} , \quad \gamma_4(t) = a - \ell - it \end{array}$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Ind}_{\partial R}(a) &= \int_{\gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \gamma_3 \sqcup \gamma_4} \frac{dz}{z - a} \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dt}{t - ih} + \int_{-h}^h \frac{i dt}{\ell + it} + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{-dt}{ih - t} + \int_{-h}^h \frac{-i dt}{-\ell - it} \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{2(t + ih)}{t^2 + h^2} dt + \int_{-h}^h \frac{2(t + i\ell)}{t^2 + \ell^2} dt \\ &= \left[\ln(t^2 + h^2) \right]_{-\ell}^{\ell} + 2i \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{(t/h)^2 + 1} \cdot \frac{dt}{h} \\ &\quad + \left[\ln(t^2 + \ell^2) \right]_{-h}^h + 2i \int_{-h}^h \frac{1}{(t/\ell)^2 + 1} \cdot \frac{dt}{\ell} \\ &= 2i \left[\arctan(t/h) \right]_{-\ell}^{\ell} + 2i \left[\arctan(t/\ell) \right]_{-h}^h \\ &= 4i \left(\arctan(\ell/h) + \arctan(h/\ell) \right) . \end{aligned}$$

Un simple calcul montre que la fonction $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$$

a une dérivée nulle. Elle est donc constante sur chaque composante connexe de \mathbf{R}^* et en particulier sur $]0, \infty[$. Pour $x = 1$ on trouve $f(1) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$. Il s'ensuit qu'on a

$$\arctan(\ell/h) + \arctan(h/\ell) = \frac{1}{2}\pi$$

et donc $2\pi i \operatorname{Ind}_{\partial R}(a) = 2\pi i$ comme annoncé. \boxed{CQFD}

Preuve de [12.8]. La preuve se déroule en trois étapes. Dans la première étape on montre qu'il suffit de regarder le cas $\gamma'(t_o) = 1$ en ramenant le cas général à ce cas particulier. Dans la deuxième étape on utilise le théorème de l'inversion locale pour trouver $\varepsilon > 0$ tel que les segments ouverts $]c, c \pm i\varepsilon v[$ ne rencontrent pas la courbe. Et dans la troisième étape on utilise une petite amélioration de l'argument avec le théorème de l'inversion locale pour trouver une situation adéquate qui nous permet d'établir "facilement" la relation concernant l'indice.

• Sachant que $\gamma'(t_o) = v \in \mathbf{C}$ n'est pas 0, on peut poser $\lambda = 1/v \in \mathbf{C}^*$. Avec ce λ on définit la $C^{1/}$ -courbe $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ par $\delta = \lambda\gamma$. Si on a montré le résultat pour la courbe δ , on aura (avec les raccourcis évidents)

$$\delta(t_o) \pm i r \delta'(t_o) \in \mathbf{C}^{\setminus \delta} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ind}_{\delta}(\delta(t_o) + i r \delta'(t_o)) = \operatorname{Ind}_{\delta}(\delta(t_o) - i s \delta'(t_o)) + 1 .$$

Mais il est immédiat qu'on a l'équivalence

$$w \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda w \in \mathbf{C}^{\setminus \delta} .$$

La première partie (du résultat pour δ) nous donne donc

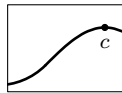
$$\lambda\gamma(t_o) + i r \lambda\gamma'(t_o) \in \mathbf{C}^{\setminus \delta} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(t_o) + i r \gamma'(t_o) \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} ,$$

et la deuxième donne, en combinaison avec [12.6]

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\gamma}(\gamma(t_o) + i r \gamma'(t_o)) &= \operatorname{Ind}_{\lambda\gamma}(\lambda\gamma(t_o) + i r \lambda\gamma'(t_o)) \equiv \operatorname{Ind}_{\delta}(\delta(t_o) + i r \delta'(t_o)) \\ &= \operatorname{Ind}_{\delta}(\delta(t_o) - i s \delta'(t_o)) + 1 \equiv \operatorname{Ind}_{\lambda\gamma}(\lambda\gamma(t_o) - i s \lambda\gamma'(t_o)) + 1 \\ &= \operatorname{Ind}_{\gamma}(\gamma(t_o) - i s \gamma'(t_o)) + 1 . \end{aligned}$$

Autrement dit, quand on a démontré le résultat pour δ , on l'aura démontré pour γ . L'intérêt de la courbe δ est qu'on a $\delta'(t_o) \equiv (\lambda\gamma)'(t_o) = \gamma'(t_o)/v = 1$. La conclusion est donc qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'on a $v \equiv \gamma'(t_o) = 1$. En particulier, le vecteur tangent à la courbe au point $c = \gamma(t_o)$ est horizontal et pointe vers la droite.

• Dans la suite de la preuve on suppose donc $v = 1$ et le but pour les deux dernières étapes est de trouver un rectangle fermé R autour de $c = \gamma(t_o)$ de sorte que l'intersection $R \cap \gamma([a, b])$ de ce rectangle avec l'image de la courbe est exactement le graphe d'une fonction f définie sur la base (horizontale) de R (un intervalle fermé dans \mathbf{R}) et à valeur dans le côté (vertical) de R (aussi un intervalle fermé de \mathbf{R}).



Pour trouver la fonction f , on applique le théorème de l'inversion locale à la fonction $\operatorname{Re} \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$: cette fonction est supposée dérivable au voisinage de

t_o et a une dérivée non-nulle (à savoir 1) en t_o . Il existe donc $\delta > 0$ tel qu'on a l'inclusion $B_\delta(t_o) \equiv]t_o - \delta, t_o + \delta[\subset [a, b]$ et que la restriction de $\text{Re } \gamma$ à $B_\delta(t_o)$ établit un C^1 -difféomorphisme avec son image :

$$\exists]u_1, u_2[\subset \mathbf{R} : \text{Re } \gamma : B_\delta(t_o) \rightarrow]u_1, u_2[\text{ un } C^1\text{-difféomorphisme.}$$

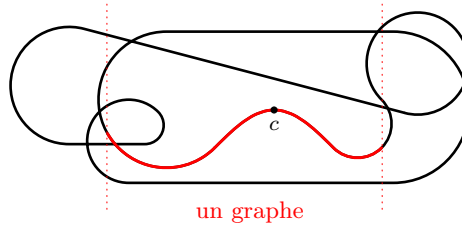
Sachant que $(\text{Re } \gamma)'(t_o) = 1 > 0$, il s'ensuit que c'est même un C^1 -difféomorphisme croissante. Quand on note $\psi :]u_1, u_2[\rightarrow B_\delta(t_o)$ la réciproque de $\text{Re } \gamma$ et $f :]u_1, u_2[\rightarrow \mathbf{R}$ la fonction (de classe C^1 , car on a supposé γ de classe C^1 sur le voisinage $B_\delta(t_o)$)

$$f(x) = (\text{Im } \gamma)(\psi(x)) ,$$

alors on a automatiquement l'égalité

$$\gamma(B_\delta(t_o)) = \{ x + if(x) \mid x \in]u_1, u_2[\} .$$

Le bout de courbe $\gamma(B_\delta(t_o))$ est donc bien le graphe de la fonction f .



Avec $\gamma'(t_o) \equiv v = 1$ on cherche maintenant $\varepsilon > 0$ tel que

$$]c, c \pm i\varepsilon[\cap \gamma([a, b]) = \emptyset .$$

Mais $]c, c \pm i\varepsilon[$ sont deux segments verticaux avec un “trou” à $c = \gamma(t_o) \in \gamma(B_\delta(t_o))$. Sachant que ce bout de courbe est un graphe, il est immédiate qu'on a

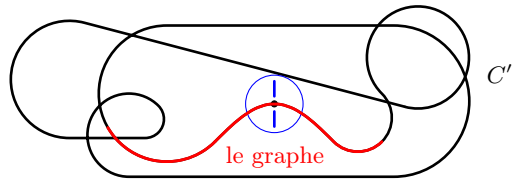
$$]c, c \pm i\varepsilon[\cap \gamma([t_o - \delta, t_o + \delta]) = \emptyset .$$

Autrement dit, ces deux segments ne rencontrent pas le bout de courbe $\gamma(B_\delta(t_o))$. Et ceci pour toute valeur de $\varepsilon > 0$. Mais il faut aussi éviter les autres points de la courbe, c'est-à-dire l'ensemble $C' \subset \mathbf{C}$ défini par

$$C' = \gamma([a, t_o - \delta]) \cup \gamma([t_o + \delta, b]) .$$

Mais γ est continue et $[a, t_o - \delta] \cup [t_o + \delta, b]$ est compact. L'ensemble $C' \subset \mathbf{C}$ est donc compact et ne contient pas $c = \gamma(t_o)$ par l'hypothèse que c n'est pas un point multiple. Il s'ensuit que la distance ε du point c vers l'ensemble C' est strictement positif :

$$\varepsilon = \inf_{z \in C'} |z - c| > 0 .$$



Et pour ce $\varepsilon > 0$ on aura donc par définition

$$]c, c \pm i\varepsilon[\cap C' = \emptyset ,$$

et donc, avec le résultat précédent, on aura bien $]c, c \pm i\varepsilon[\cap \gamma([a, b]) = \emptyset$ comme voulu.

• Pour pouvoir convenablement montrer le lien entre l'indice des deux côtés on a maintenant besoin d'un rectangle fermé R autour c dont l'intersection avec $\gamma([a, b])$ ne contient qu'un morceau du graphe de f avec la condition supplémentaire que

l'intersection de ce bout de graphe avec le bord ∂R du rectangle R ne consiste que de deux points : l'intersection du graphe avec le bord gauche et le bord droit de R .

La fonction f est définie sur $]u_1, u_2[$ comme $f = (\text{Im } \gamma) \circ (\text{Re } \gamma)^{-1}$. Elle y est de classe C^1 , donc avec $\gamma(t_o) = c$ et $\gamma'(t_o) = 1$ on en déduit directement qu'on a

$$f'(\text{Re } c) = 0 .$$

Et de la continuité de f' au point $\text{Re } c \in]u_1, u_2[$ on déduit l'existence d'un $\delta_1 > 0$ vérifiant

$$[\text{Re } c - \delta_1, \text{Re } c + \delta_1] \subset]u_1, u_2[\quad \text{et} \quad \forall |x - \text{Re } c| \leq \delta_1 : |f'(x)| \leq \frac{1}{2} .$$

Avec ce δ_1 on définit δ_2 et le rectangle R (actuellement un carré avec c au centre ; ce n'est certainement pas un choix optimal, mais cela suffit) par

$$\delta_2 = \min(\delta_1, \varepsilon/\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad R = [\text{Re } c - \delta_2, \text{Re } c + \delta_2] \times [\text{Im } c - \delta_2, \text{Im } c + \delta_2] .$$

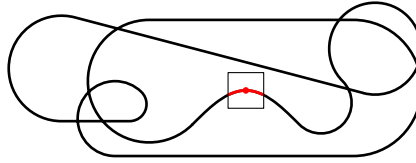
Prendre le minimum avec $\varepsilon/\sqrt{2}$ nous garantit que ce carré ne contient pas d'éléments de C' . Et selon l'inégalité des accroissements finis on a pour tout $x \in [\text{Re } c - \delta_2, \text{Re } c + \delta_2]$

$$|f(x) - f(\text{Re } c)| \equiv |f(x) - \text{Im } c| \leq \sup_{y \in [\text{Re } c - \delta_1, \text{Re } c + \delta_1]} |f'(y)| \cdot |x - \text{Re } c| \leq \frac{1}{2} \cdot \delta_2 .$$

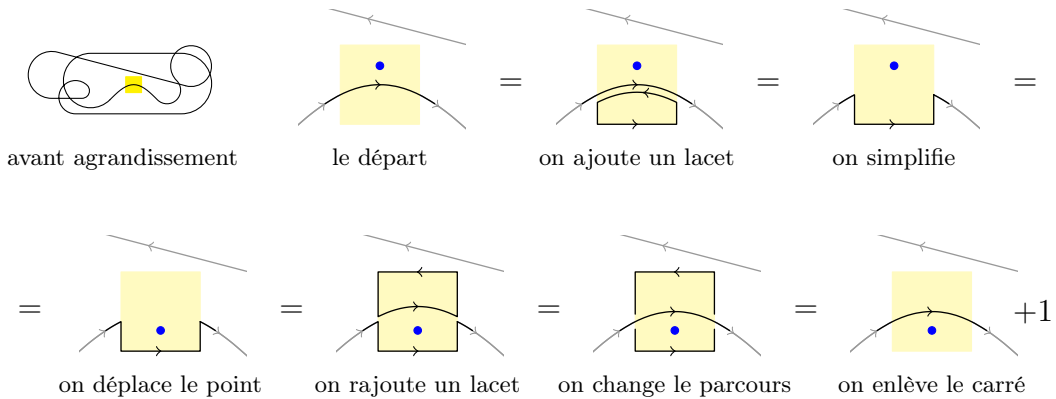
La restriction du graphe de f à $[\text{Re } c - \delta_2, \text{Re } c + \delta_2]$ est donc contenu dans le rectangle

$$[\text{Re } c - \delta_2, \text{Re } c + \delta_2] \times [\text{Im } c - \frac{1}{2} \delta_2, \text{Im } c + \frac{1}{2} \delta_2] ,$$

ce qui montre que ce morceau de graphe est contenu dans R et ne coupe le bord qu'au points $(\text{Re } c \pm \delta_2, f(\text{Re } c \pm \delta_2))$.



Une fois qu'on a trouvé ce rectangle avec des propriétés convenables, on peut “facilement” montrer le lien entre l'indice des deux côtés de la courbe. Malheureusement il faut donner des noms à beaucoup d'objets pour en faire une preuve rigoureuse. On commence donc avec les dessins qui contiennent l'essentiel de la preuve, pour ensuite introduire les noms et l'écriture formelle qui vient avec les dessins.



On connaît déjà le rectangle R défini comme le carré de centre c et de “rayon” δ_2 . Il figure dans l'avant dernier dessin. Ce rectangle est coupé en deux par le graphe de f : R_- la partie de R en-dessous du graphe et R_+ la partie au-dessus du graphe. Ces deux parties figurent dans le troisième respectivement sixième dessin. Ensuite,

pout calculer des indices, il faut donner des noms aux bords de ces régions (ce qui est facile : on rajoute le symbole ∂), mais aussi à certaines parties de ces bords.

On commence donc (c'est un non-sequitur) avec la courbe γ . On définit les points $a < t_g < t_d < b$ (les indices g pour "gauche" et d pour "droit") par

$$t_g = \psi(\text{Rec} - \delta_2) \quad \text{et} \quad t_d = \psi(\text{Rec} + \delta_2) ,$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} X_g &= \gamma(t_g) = (\text{Rec} - \delta_2, f(\text{Rec} - \delta_2)) \\ X_d &= \gamma(t_d) = (\text{Rec} + \delta_2, f(\text{Rec} + \delta_2)) , \end{aligned}$$

où X_g et X_d sont les intersections du graphe de f avec le bord gauche respectivement droit du rectangle R . Avec ces valeurs on coupe maintenant la courbe γ en trois parties : γ_g la restriction de γ à $[a, t_g]$, γ_{int} la restriction de γ à $[t_g, t_d]$ ("int" pour intérieur du rectangle) et γ_d la restriction de γ à $[t_d, b]$. Par définition de la concaténation on a donc l'égalité

$$(26.17) \quad \gamma = \gamma_g \cdot \gamma_{\text{int}} \cdot \gamma_d .$$

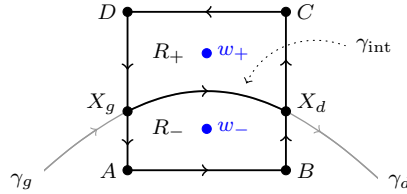
Par définition de δ_2 , la courbe γ_{int} est la partie de γ à l'intérieur de R , c'est-à-dire le graphe de f :

$$\gamma_{\text{int}}([t_g, t_d]) = \gamma([a, b]) \cap R = \{ (x, f(x)) \mid |x - \text{Rec}| \leq \delta_2 \} .$$

Ensuite on donne des noms pour les quatre coins du rectangle R :

$$\begin{aligned} D &= c - (1 - i)\delta_2 & C &= c + (1 + i)\delta_2 \\ A &= c - (1 + i)\delta_2 & B &= c + (1 - i)\delta_2 . \end{aligned}$$

Et on termine avec w_{\pm} , deux représentants des segments $]c, c \pm i\varepsilon[: w_{\pm} = c \pm \frac{1}{2}\delta_2 i$. Le dessin suivant résume les noms qu'on vient de donner dans un voisinage du rectangle R :



Avec ces noms on peut donner des expressions explicites pour les différents bords parcourus dans le sens positif :

$$\begin{aligned} \partial R &= [A, B] \cdot [B, C] \cdot [C, D] \cdot [D, A] \\ (26.18) \quad \partial R_+ &= \gamma_{\text{int}} \cdot [X_d, C] \cdot [C, D] \cdot [D, X_g] \\ \partial R_- &= [X_g, A] \cdot [A, B] \cdot [B, X_d] \cdot \overleftarrow{\gamma_{\text{int}}} , \end{aligned}$$

où il faut remarquer que pour le bord de R_- on parcourt la partie γ_{int} dans le sens opposé, ce qui explique qu'on utilise $\overleftarrow{\gamma_{\text{int}}}$. Et en dernier on définit le lacet γ_{defo} comme la concaténation

$$(26.19) \quad \gamma_{\text{defo}} = \gamma_g \cdot [X_g, A] \cdot [A, B] \cdot [B, X_d] \cdot \gamma_d ,$$

ce qui est bien un $C^{1/}$ -lacet, car le point "terminal" de γ_d est le point initial de γ_g , simplement parce que γ est un $C^{1/}$ -lacet.

On peut maintenant commencer avec le "grand calcul." En préliminaire on remarque que ∂R_{\pm} sont des lacets simplement fermés qui partagent (donc) le plan en deux parties connexes : l'intérieur et l'extérieur. En particulier w_+ est à l'extérieur

de ∂R_- et w_- est à l'extérieur de ∂R_+ , ce qui nous permet d'appliquer [12.5.iii] et conclure qu'on a

$$(26.20) \quad \text{Ind}_{\partial R_-}(w_+) = \text{Ind}_{\partial R_+}(w_-) = 0 .$$

Et on aborde finalement le calcul présenté en dessins ci-dessus (avec une explication à la fin) :

$$\begin{aligned}
& \text{Ind}_\gamma(w_+) \stackrel{(26.20)}{=} \text{Ind}_\gamma(w_+) + \text{Ind}_{\partial R_-}(w_+) \\
(\text{dessin 3}) \quad & \stackrel{(26.17), (26.18)}{=} \left(\int_{\gamma_g \blacksquare \gamma_{\text{int}} \blacksquare \gamma_d} + \int_{[X_g, A] \blacksquare [A, B] \blacksquare [B, X_d] \blacksquare \gamma_{\text{int}}^-} \right) \frac{dz}{z - w_+} \\
& \stackrel{[2.10]}{=} \left(\int_{\gamma_g} + \int_{\gamma_{\text{int}}} + \int_{\gamma_d} + \int_{[X_g, A]} + \int_{[A, B]} + \int_{[B, X_d]} + \int_{\gamma_{\text{int}}^-} \right) \frac{dz}{z - w_+} \\
(\text{dessin 4}) \quad & \stackrel{(3.9), [2.10]}{=} \int_{\gamma_g \blacksquare [X_g, A] \blacksquare [A, B] \blacksquare [B, X_d] \blacksquare \gamma_d} \frac{dz}{z - w_+} \stackrel{(26.19)}{=} \text{Ind}_{\gamma_{\text{defo}}}(w_+) \\
(\text{dessin 5}) \quad & = \text{Ind}_{\gamma_{\text{defo}}}(w_-) \\
(\text{dessin 6}) \quad & \stackrel{(26.20)}{=} \text{Ind}_{\gamma_{\text{defo}}}(w_-) + \text{Ind}_{\partial R_+}(w_-) \\
& = \left(\int_{\gamma_g} + \int_{[X_g, A]} + \int_{[A, B]} + \int_{[B, X_d]} + \int_{\gamma_d} \right. \\
& \quad \left. + \int_{\gamma_{\text{int}}} + \int_{[X_d, C]} + \int_{[C, D]} + \int_{[D, X_g]} \right) \frac{dz}{z - w_+} \\
& = \left(\int_{[A, B]} + \int_{[B, X_d]} + \int_{[X_d, C]} + \int_{[C, D]} + \int_{[D, X_g]} + \int_{[X_g, A]} \right. \\
& \quad \left. + \int_{\gamma_g} + \int_{\gamma_{\text{int}}} + \int_{\gamma_d} \right) \frac{dz}{z - w_+} \\
(\text{dessin 7}) \quad & = \text{Ind}_\gamma(w_-) + \text{Ind}_{\partial R}(w_-) \\
(\text{dessin 8}) \quad & \stackrel{[12.7]}{=} \text{Ind}_\gamma(w_-) + 1 .
\end{aligned}$$

Dans le deuxième dessin (le premier montre le lacet complet) on “calcule” l'indice du point w_+ par rapport au lacet γ . Selon [26.20] l'indice de ce point par rapport au lacet ∂R_- est nul, donc on ne change rien en l'ajoutant, ce qui donne le troisième dessin. Sachant que l'indice est l'intégrale d'une fonction holomorphe (particulière) sur le lacet et que ces deux lacets sont des concaténations, on peut appliquer [2.10] (dans les deux sens) et (3.9) pour arriver au quatrième dessin, ce qui représente l'indice du point w_+ par rapport au lacet γ_{defo} . Pour passer au cinquième dessin, on remarque que le segment (connexe) $[w_+, w_-]$ a une intersection vide avec l'image du lacet γ_{defo} , donc tous les éléments de ce segment sont contenus dans la même composante connexe de $\mathbf{C}^{\gamma_{\text{defo}}}$, ce qui implique qu'ils prennent tous la même valeur pour l'indice par rapport à ce lacet [12.5.i]. On a donc en particulier l'égalité $\text{Ind}_{\gamma_{\text{defo}}}(w_+) = \text{Ind}_{\gamma_{\text{defo}}}(w_-)$. Maintenant qu'on calcule l'indice du point w_- , on peut remarquer que w_- est à l'extérieur du lacet ∂R_+ et que donc selon [26.20] son indice par rapport à ∂R_+ est nulle. On peut donc rajouter cela à notre formule sans la changer, ce qui donne le sixième dessin. Ensuite on réutilise l'écriture des lacets γ_{defo} et ∂R_+ comme une concaténation pour appliquer de nouveau [2.10] et ensuite de réarranger les termes dans une autre ordre, ce qui donne le septième dessin. C'est maintenant

qu'on utilise en plus l'invariance d'une intégrale sur une $C^{1/}$ -courbe [2.11] pour dire que le lacet

$$[A, B] \cdot [B, X_d] \cdot [X_d, C] \cdot [C, D] \cdot [D, X_g] \cdot [X_g, A]$$

est une autre façon de paramétrer le bord ∂R parcouru dans le sens positif, ce qui permet d'appliquer (quand même) [12.7] et obtenir le huitième et dernier dessin.

Ceci termine la preuve sur le lien entre les indices, car w_+ appartient au segment ouvert $]c, c + i\varepsilon[$, w_- appartient au segment ouvert $]c, c - i\varepsilon[$ et chaque segment (connexe) ne rencontre pas $\gamma([a, b])$ et est donc contenu dans une composante connexe de \mathbf{C}^γ sur laquelle l'indice est constante [12.5.i]. \boxed{CQFD}

Preuve de [12.10]. Il est immédiat que Q est continue sur l'ouvert $\{(w, z) \in U \times U \mid w \neq z\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De la même façon, pour $z \in U$ fixé l'application $w \mapsto Q(w, z)$ est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$.

Fixons maintenant z et utilisons le fait que f est holomorphe sur U , donc développable en série entière au voisinage de chaque point de U , et en particulier au voisinage de z : ils existent $c_n \in \mathbf{C}$ (qui dépendent de z !) tels que

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z)^n ,$$

pour tout w dans un voisinage de z . Et on remarque qu'on a $c_0 = f(z)$ et $c_1 = f'(z)$. On aura donc pour tout $w \neq z$:

$$\begin{aligned} Q(w, z) &= \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{c_0 + c_1(w - z) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (w - z)^n - f(z)}{w - z} \\ &= f'(z) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (w - z)^{n-1} . \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement que l'application $w \mapsto Q(w, z)$ est développable en série entière au voisinage de $w = z$, donc elle est holomorphe sur tout U comme souhaité.

Reste donc la continuité de Q dans les points (z_o, z_o) . Pour cela on invoque d'abord le fait que U est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $D_r(z_o) \subset U$. Ensuite on prend $w, z \in D_r(z_o) \subset U$ et on regarde la fonction $F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(t) = f(tw + (1 - t)z) .$$

Avec [7.8] on a donc pour $w \neq z$:

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{F(1) - F(0)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \cdot \int_0^1 F'(t) dt \stackrel{[7.8]}{=} \int_0^1 f'(tw + (1 - t)z) dt .$$

Pour $w \neq z \in D_r(z_o)$ on peut donc écrire

$$Q(w, z) = \int_0^1 f'(tw + (1 - t)z) dt .$$

Mais si on regarde bien, on s'aperçoit que cette formule reste vraie pour $w = z$, car dans ce cas on aura

$$Q(z, z) = f'(z) = \int_0^1 f'(z) \, dt = \int_0^1 f'(tz + (1-t)z) \, dt .$$

Ceci nous permet d'écrire et majorer :

$$\begin{aligned} |Q(w, z) - Q(z_o, z_o)| &\leq \int_0^1 |f'(tw + (1-t)z) - f'(z_o)| \, dt \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(tw + (1-t)z) - f'(z_o)| . \end{aligned}$$

Maintenant on invoque le fait que f est holomorphe, ce qui implique en particulier que f' est continue, donc continue en z_o :

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in U : |z - z_o| < \delta \Rightarrow |f'(z) - f'(z_o)| < \varepsilon .$$

Sachant que pour $w, z \in D_\delta(z_o)$ on a aussi $tw + (1-t)z \in D_\delta(z_o)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on en déduit qu'on a bien

$$\lim_{(w,z) \rightarrow (z_o, z_o)} |Q(w, z) - Q(z_o, z_o)| = 0 ,$$

ce qui montre que Q est aussi continue aux points (z_o, z_o) . \boxed{CQFD}

Preuve de [12.11]. Définissons la fonction $Q : U \times U \rightarrow \mathbf{C}$ comme dans [12.10], soit $a = t_0 < \dots < t_s = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que γ est de classe C^1 sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et définissons les fonctions $g_j : U \times [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g_j(w, t) = Q(w, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t) .$$

Alors selon [12.10] chaque g_j sera continue sur son domaine de définition et pour $t \in [t_{j-1}, t_j]$ fixé l'application $w \mapsto g_j(w, t)$ sera holomorphe. On peut donc invoquer [24.13] et conclure que la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(w) = \int_\gamma Q(w, z) \, dz = \sum_{j=1}^s \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_j(w, t) \, dt$$

est holomorphe sur U .

Si on ne veut pas s'appuyer sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue via [24.13], on pourrait passer par [10.6], mais cela demande l'argument supplémentaire que la fonction $\partial_w g_j$ est continue. Pour le montrer on invoque d'abord la preuve de [12.10], selon laquelle la fonction Q est (aussi) donnée par la formule

$$Q(w, z) = \int_0^1 f'(sw + (1-s)z) \, ds .$$

La fonction f' est holomorphe et en particulier de classe C^∞ . Il s'ensuit que la fonction $G_j : U \times [t_{j-1}, t_j] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$G_j(w, t, s) = f'(sw + (1-s)\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) ,$$

vu comme fonction de 4 variables réelles est continue, que sa dérivée partielle $\partial_1 G_j$ existe et est donnée par (avec [7.8])

$$(\partial_1 G_j)(w, t) = s \cdot f''(tw + (1-t)\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) ,$$

ce qui est aussi une fonction continue. On peut donc appliquer [23.15] et conclure que la fonction $g_j(w, t) = \int_0^1 G_j(w, t, s) \, ds$ admet une dérivée partielle $\partial_1 g_j$ continue sur $U \times [t_{j-1}, t_j]$. Mais selon les équations de Cauchy-Riemann, on a l'égalité $\partial_1 g_j = \partial_w g_j$, ce qui montre que $\partial_w g_j$ est continue, ce qui permet effectivement d'appliquer [10.6].

Soit maintenant $w \in U \setminus \gamma([a, b])$. Alors on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} \\ (26.21) \quad &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - 2\pi i f(w) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(w) . \end{aligned}$$

La deuxième partie de l'énoncé veut donc dire que ceci vaut zéro. Quand on regarde ce résultat, on a bien l'impression qu'on peut l'étendre en-dehors de U : l'intégrale est définie pour tout $w \notin \gamma([a, b])$ et pour $w \notin U$ on aura $\text{Ind}_{\gamma}(w) = 0$, donc pour $w \notin U$ ce terme disparaîtrait. Et c'est bien cela ce qu'on va justifier. Pour le faire on définit l'ouvert V comme le complémentaire de K_{γ} (une réunion de composantes connexes de $\mathbf{C}^{\setminus \gamma}$) :

$$V = \mathbf{C} \setminus K_{\gamma} \equiv \{ w \in \mathbf{C}^{\setminus \gamma} \mid \text{Ind}_{\gamma}(w) = 0 \} ,$$

et on constate que par hypothèse on a l'inclusion $\mathbf{C} \setminus U \subset V$. Sur V on définit la fonction $G : V \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$G(w) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz .$$

Avec exactement les mêmes arguments que pour F on montre que G est holomorphe (bien qu'ici on pourrait aussi appliquer le résultat de l'exercice [7.16], contrairement au cas pour F). De plus, pour $w \in U \cap V$ on aura, selon (26.21), l'égalité $F(w) = G(w)$. La fonction $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$H(w) = F(w) \text{ si } w \in U \quad \text{et} \quad H(w) = G(w) \text{ si } w \in V$$

est donc une fonction entière.

Maintenant on invoque [12.5.ii] pour conclure que si $R > 0$ est tel que $K_{\gamma} \subset \overline{D_R(0)}$, alors $\mathbf{C} \setminus \overline{D_R(0)} \subset V$. Pour $w \in \mathbf{C}$ avec $|w| > r > R$ on peut donc faire les majorations

$$|G(w)| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \right| \cdot L(\gamma) \leq \frac{\sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}{r - R} \cdot L(\gamma) .$$

En prenant la limite $r \rightarrow \infty$ on en déduit qu'on doit avoir

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} H(w) \equiv \lim_{|w| \rightarrow \infty} G(w) = 0 .$$

Ceci a deux conséquences : d'abord que la fonction entière H est bornée sur \mathbf{C} et donc, selon le théorème de Liouville [9.9] qu'elle est constante. Et ensuite, parce qu'on a $\lim_{|w| \rightarrow \infty} H(w) = 0$, cette constante doit être nulle. Mais si H est identiquement nulle, cela s'applique donc en particulier à $w \in U \setminus \gamma([a, b])$. Pour un tel w on a $H(w) = F(w)$, donc (26.21) s'applique et on a montré la deuxième partie de l'énoncé.

La première partie s'en déduit très facilement : on choisit arbitrairement $w_o \in U \setminus \gamma([a, b])$ et on applique le résultat précédent à la fonction holomorphe $g(z) = (z - w_o) \cdot f(z)$. On aura donc en particulier l'égalité

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - w_o} dz = g(w_o) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(w_o) .$$

Substitution de la définition de g donne le premier résultat de l'énoncé.

CQFD

Les preuves de §13

Preuve de [13.2]. • (i). Soit $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ l'application continue définie par

$$\forall s, t \in [0, 1] : \Gamma(s, t) = \gamma(a + t(b - a)) .$$

Alors il est immédiat que Γ est une homotopie entre γ et γ .

• (ii). Soit $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ l'homotopie entre γ et δ . Alors l'application $\overleftarrow{\Gamma} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ définie par

$$\forall s, t \in [0, 1] : \overleftarrow{\Gamma}(s, t) = \Gamma(1 - s, t)$$

vérifie les conditions pour être une homotopie entre δ et γ .

• (iii). Soit $\Gamma^{(1)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ l'homotopie entre γ et δ et soit $\Gamma^{(2)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ l'homotopie entre δ et ε . Avec ces ingrédients on définit l'application $\Gamma^{(3)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ par

$$\forall s, t \in [0, 1] : \Gamma^{(3)}(s, t) = \begin{cases} \Gamma^{(1)}(2s, t) & s \leq \frac{1}{2} \\ \Gamma^{(2)}(2s - 1, t) & s \geq \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Pour $s = \frac{1}{2}$ et $t \in [0, 1]$ on a les égalités

$$\Gamma^{(1)}(2s, t) = \Gamma^{(1)}(1, t) \stackrel{[13.1.i]}{=} \delta(c + t(d - c)) \stackrel{[13.1.i]}{=} \Gamma^{(2)}(0, t) = \Gamma^{(2)}(2s - 1, t) .$$

Ceci montre en même temps que la définition de $\Gamma^{(3)}$ est cohérente et qu'on peut appliquer [22.13.iii] ($[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ et $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ sont fermés) pour conclure que $\Gamma^{(3)}$ est continue. Le reste de la vérification que $\Gamma^{(3)}$ est une homotopie entre γ et ε est immédiat. \boxed{CQFD}

Preuve de [13.3]. Soient $[a_i, b_i]$ et $[c_i, d_i]$, $i = 1, 2$ les domaines de définition de γ_i et δ_i respectivement et soit $\Gamma^{(\gamma)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ et $\Gamma^{(\delta)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ des homotopies entre γ_1 et γ_2 respectivement entre δ_1 et δ_2 . Alors on a en particulier (par définition des homotopies) les égalités

$$\begin{aligned} \gamma_2(b_2) &\stackrel{[13.1.i]}{=} \Gamma^{(\gamma)}(1, 1) \stackrel{[13.1.ii]}{=} \Gamma^{(\gamma)}(0, 1) \stackrel{[13.1.i]}{=} \gamma_1(b_1) \stackrel{\gamma_1 \cdot \delta_1 \text{ existe}}{=} \delta_1(c_1) \\ &\stackrel{[13.1.i]}{=} \Gamma^{(\delta)}(0, 0) \stackrel{[13.1.ii]}{=} \Gamma^{(\delta)}(1, 0) \stackrel{[13.1.i]}{=} \delta_2(c_2) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la concaténation $\gamma_2 \cdot \delta_2$ existe.

Pour montrer que $\gamma_1 \cdot \delta_1$ est homotope à $\gamma_2 \cdot \delta_2$ on veut juxtaposer les deux homotopies $\Gamma^{(\gamma)}$ et $\Gamma^{(\delta)}$. Le seul "problème" est qu'il faut le faire "correctement." Plus précisément, la concaténation $\gamma_i \cdot \delta_i$ est définie sur l'intervalle $[a_i, d_i - c_i + b_i]$ et donc, si $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ est l'homotopie entre $\gamma_1 \cdot \delta_1$ et $\gamma_2 \cdot \delta_2$, alors on doit avoir les égalités

$$\begin{aligned} \Gamma(0, t) &= (\gamma_1 \cdot \delta_1)(a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)) \\ \Gamma(1, t) &= (\gamma_2 \cdot \delta_2)(a_2 + t(d_2 - c_2 + b_2 - a_2)) . \end{aligned}$$

Quand on y met la définition de la concaténation, on trouve qu'on doit avoir

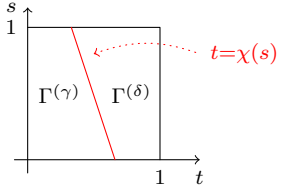
$$\Gamma(0, t) = (\gamma_1 \cdot \delta_1)(a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1))$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \gamma_1(a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)) & a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1) \leq b_1 \\ \delta_1(a_1 - b_1 + c_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)) & a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1) \geq b_1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Gamma^{(\gamma)}\left(0, t \cdot \frac{d_1 - c_1 + b_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) & t \leq \frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1 + b_1 - a_1} \\ \Gamma^{(\delta)}\left(0, \frac{a_1 - b_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)}{d_1 - c_1}\right) & t \geq \frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1 + b_1 - a_1} \end{cases}
\end{aligned}$$

et un résultat analogue pour $\Gamma(1, t)$ avec l'indice 1 remplacé par l'indice 2. On voit que la juxtaposition de $\Gamma^{(\gamma)}$ et $\Gamma^{(\delta)}$ sur l'intervalle en t ne se fait pas au même endroit pour $s = 0$ et $s = 1$. Pour $s = 0$ on change de $\Gamma^{(\gamma)}$ vers $\Gamma^{(\delta)}$ à $t = (b_1 - a_1)/(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)$ et pour $s = 1$ on fait ce changement à $t = (b_2 - a_2)/(d_2 - c_2 + b_2 - a_2)$. Pour un s quelconque on fera "donc" la jonction par interpolation via la fonction $\chi : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ définie par

$$\chi(s) = s \cdot \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2 + b_2 - a_2} + (1 - s) \cdot \frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1 + b_1 - a_1}.$$

Ceci nous amène à la définition de l'application $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ par

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \Gamma^{(\gamma)}\left(s, \frac{t}{\chi(s)}\right) & t \leq \chi(s) \\ \Gamma^{(\delta)}\left(s, \frac{t - \chi(s)}{1 - \chi(s)}\right) & t \geq \chi(s) \end{cases}$$


L'analyse préalable montre qu'on a bien les égalités

$$\begin{aligned}
\Gamma(0, t) &= (\gamma_1 \sqcap \delta_1)(a_1 + t(d_1 - c_1 + b_1 - a_1)) \\
\Gamma(1, t) &= (\gamma_2 \sqcap \delta_2)(a_2 + t(d_2 - c_2 + b_2 - a_2)) ,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne [13.1.i]. Et pour [13.1.ii] on a

$$\Gamma(s, 0) = \Gamma^{(\gamma)}(s, 0) = \gamma_1(a_1) \quad \text{et} \quad \Gamma(s, 1) = \Gamma^{(\delta)}(s, 1) = \delta_1(c_1) ,$$

ce qui sont bien des courbes constantes.

Reste donc la continuité de Γ . On commence avec le constat qu'on a coupé le carré $[0, 1]^2$ en deux morceaux qui s'intersectent selon la droite $t = \chi(s)$. Sur chacun des morceaux l'application Γ est continue, exprimée en termes d'un seul des $\Gamma^{(\gamma)}$ ou $\Gamma^{(\delta)}$ (et la fonction χ). Et sur l'intersection les deux expressions nous donnent :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\gamma)}\left(s, \frac{\chi(s)}{\chi(s)}\right) &= \Gamma^{(\gamma)}(s, 1) = \gamma_1(b_1) \\
\Gamma^{(\delta)}\left(s, \frac{t - \chi(s)}{1 - \chi(s)}\right) &= \Gamma^{(\delta)}(s, 0) = \delta_1(c_1) .
\end{aligned}$$

Mais la concaténation $\gamma_1 \sqcap \delta_1$ existe, donc $\gamma_1(b_1) = \delta_1(c_1)$, montrant que les deux expressions coïncident sur l'intersection (c'est même une application constante sur cette droite $t = \chi(s)$). On peut donc appliquer [22.13.iii] (les deux morceaux de $[0, 1]^2$ coupés selon $t = \chi(s)$ sont des fermés) et conclure que Γ est bien continue sur tout le carré $[0, 1]^2$. CQFD

Preuve de [13.5]. • (i). Soit $a, x \in U$, alors par convexité le segment $[a, x]$ est contenu dans U . Ce qui implique que U est étoilé par rapport à $a \in U$.

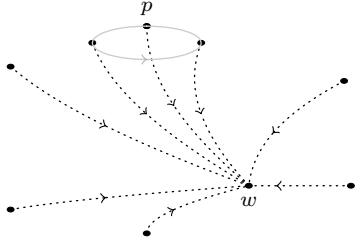
• (ii). Supposons que U est étoilé par rapport à $a \in U$ et définissons l'application $C : [0, 1] \times U \rightarrow U$ par

$$C(t, z) = a + t \cdot (z - a) \in [a, z] .$$

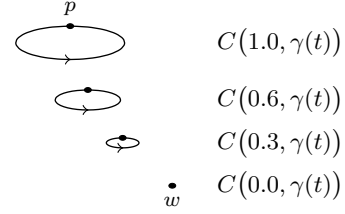
Parce que la somme et la multiplication par un nombre sont des opérations continues dans un espace vectoriel, C est continue. Et C prend bien ses valeurs dans U parce que U est étoilé par rapport à a , ce qui implique que le segment $[a, z]$ est contenu dans U pour tout $z \in U$. Et finalement, il est immédiat qu'on a $C(1, z) = z$ et $C(0, z) = a$, montrant que C est bien une contraction.

• (iii). L'idée de la preuve est assez simple : si $C : [0, 1] \times U \rightarrow U$ est la contraction avec $w = C(0, z)$ indépendant de z , on veut définir l'homotopie $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ entre une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ et un point par

$$\Gamma(s, t) = C(1 - s, \gamma(a + t(b - a))) .$$



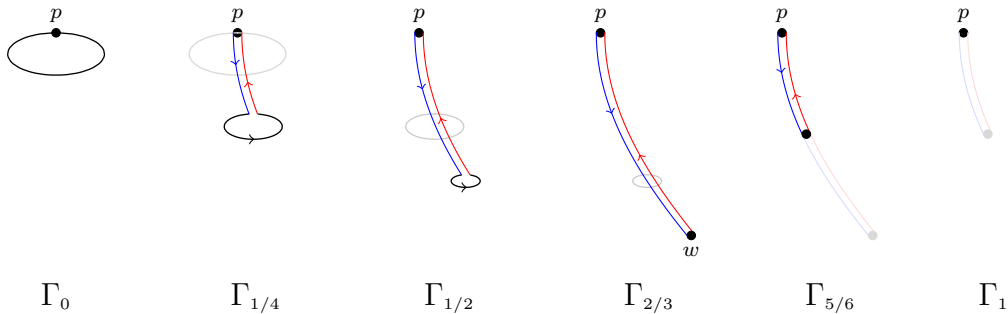
La contraction C appliquée à quelques points
..... : $C(s, z)$ avec s allant de 1 à 0



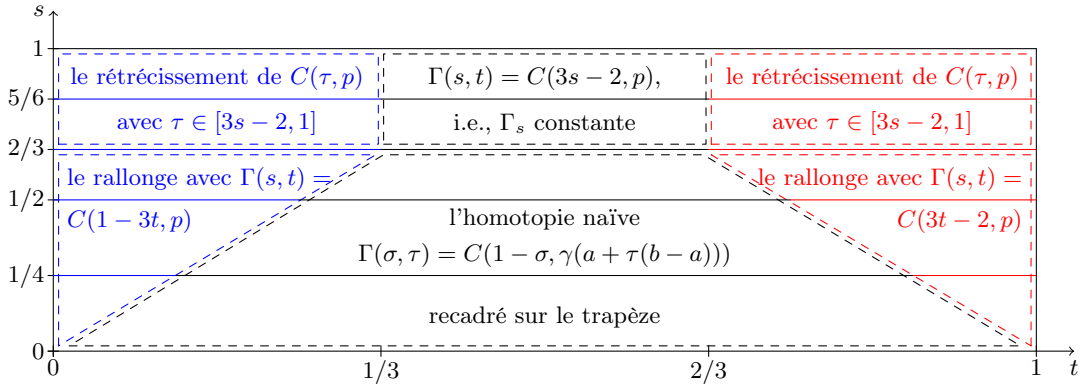
La contraction C appliquée à un lacet,
l'idée naïve de l'homotopie

Il est immédiat, par définition d'une contraction, qu'on a bien $\Gamma_0(t) = \gamma(a + t(b - a))$ ce qui montre que Γ_0 est équivalente par reparamétrage direct (linéaire) à γ . Il est aussi immédiat qu'on a $\Gamma_1(t) = w$ pour tout t , donc Γ_1 est bien un point. Mais les applications $s \mapsto \Gamma(s, 0)$ et $s \mapsto \Gamma(s, 1)$ ne sont pas (forcément) constantes. Sachant que, par définition d'une homotopie, cette constante doit impérativement être le point $p = \gamma(a) = \gamma(b)$, il "faut" donc rallonger les courbes Γ_s pour relier les points $\Gamma_s(0) = C(1 - s, \gamma(a))$ et $\Gamma_s(1) = C(1 - s, \gamma(b))$ à ce point $p = \gamma(a) = \gamma(b)$. Mais quand on rallonge ces courbes, le résultat à la fin sera (probablement) la courbe $t \mapsto C(t, p)$, ce qui n'est pas un point. Il faut donc continuer le travail en rétrécissant cette courbe. Et c'est exactement ce que fait la preuve "officielle."

Soit "donc" $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un lacet continue, soit $p = \gamma(a) = \gamma(b)$ et soit $C : [0, 1] \times U \rightarrow U$ la contraction avec $w = C(0, z)$ indépendant de z . Pour montrer que γ est homotope à un point (forcément p), on dessine d'abord quelques courbes Γ_s selon les étapes esquissées ci-dessus.



Ensuite on donne le domaine de définition de cette homotopie avec les zones correspondant aux différentes étapes.³



Et finalement on donne la définition explicite de l'homotopie qui fera l'affaire :

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} C(1 - 3t, p) & s \leq \frac{2}{3}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}s \\ C\left(1 - \frac{3}{2}s, \gamma\left(a + \frac{2t - s}{2 - 2s}(b - a)\right)\right) & s \leq \frac{2}{3}, \frac{1}{2}s \leq t \leq 1 - \frac{1}{2}s \\ C(3t - 2, p) & s \leq \frac{2}{3}, 1 - \frac{1}{2}s \leq t \leq 1 \\ C(1 - 9t(1 - s), p) & s \geq \frac{2}{3}, 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ C(3s - 2, p) & s \geq \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ C(1 - 9(1 - t)(1 - s), p) & s \geq \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Avec cette définition il est immédiat qu'on a les égalités

$$\Gamma(0, t) = C\left(1, \gamma(a + t(b - a))\right) = \gamma(a + t(b - a))$$

$$\Gamma(1, t) = C(1, p) = p$$

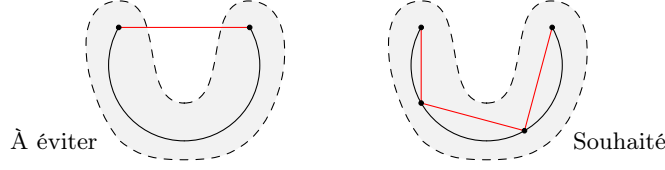
$$\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1) = C(1, p) = p,$$

ce qui montre que Γ vérifie les deux conditions d'être une homotopie entre γ et la courbe constante p . Sauf qu'on n'a pas encore montré que Γ est continue. Pour le faire on constate qu'on a subdivisé le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ en 6 parties fermées (trois rectangles, deux triangles et un trapèze) qui se chevauchent. La définition de Γ sur chacune de ses parties est donnée par une expression qui est continue. De plus, ces expressions coïncident sur les intersections deux à deux (c'est-à-dire sur les segments de droites qui les séparent ; une vérification qu'on laisse au lecteur). On peut donc appliquer [22.13.iii] (les 6 parties sont fermées) et conclure que Γ est continue sur le carré entier. \boxed{CQFD}

Preuve de [13.7]. • (i). L'idée principale de la preuve est de choisir des points P_j sur l'image de la courbe $\gamma([a, b])$ et de remplacer la courbe γ par la ligne brisée $\tilde{\gamma}$

3. La façon donc on a découpé le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ en six morceaux (trois rectangles, deux triangles et un trapèze) est assez arbitraire. Seul le choix du trapèze a une certaine importance : le côté bas représente un reparamétrage (affine) de la courbe γ et le côté haut représente la courbe constante w . On ne peut pas réduire l'intervalle de définition de cette courbe constante à un intervalle de longueur 0 (c'est-à-dire remplacer le trapèze par un triangle) pour la simple raison que l'expression en termes de la contraction C présenterait une discontinuité.

formée par les segments $[P_{j-1}, P_j]$ [3.12]. Le souci principal est de s'assurer que ces segments de la ligne brisée restent dans U .



Pour trouver les “bons” points P_j , on commence avec la remarque que, parce que U est un ouvert, il existe pour tout $t \in [a, b]$ un $\varepsilon(t) > 0$ tel que $B_{\varepsilon(t)}(\gamma(t)) \subset U$. Par continuité de γ la collection

$$\mathcal{V} = \left\{ \gamma^{-1}\left(B_{\varepsilon(t)}(\gamma(t))\right) \mid t \in [a, b] \right\}$$

est un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts. L'intervalle $[a, b]$ étant compact, il existe donc $\lambda > 0$ (un nombre de Lebesgue du recouvrement [22.3]) tel que tout $B_\lambda(t) =]t - \lambda, t + \lambda[$ est contenu dans un des $\gamma^{-1}(B_{\varepsilon(s)}(\gamma(s)))$. Prenons maintenant $m \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $2m\lambda > b - a$ et définissons la subdivision $a = t_0 < \dots < t_m = b$ par $t_j = a + j(b - a)/m$. Par définition (de λ et de m) on a les inclusions

$$[t_{j-1}, t_j] \subset B_\lambda\left(\frac{1}{2}(t_{j-1} + t_j)\right) \stackrel{\exists s}{\subset} \gamma^{-1}\left(B_{\varepsilon(s)}(\gamma(s))\right)$$

et donc l'image $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ est contenu dans l'ensemble convexe $B_{\varepsilon(s)}(\gamma(s))$. Introduisons finalement la courbe $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ par

$$\hat{\gamma}(\tau) = \gamma(a + \tau(b - a)) ,$$

la subdivision $0 = \tau_0 < \dots < \tau_m = 1$ de $[0, 1]$ par $\tau_j = j/m$, les points P_j par

$$P_j = \gamma(t_j) = \hat{\gamma}\left(\frac{j}{m}\right)$$

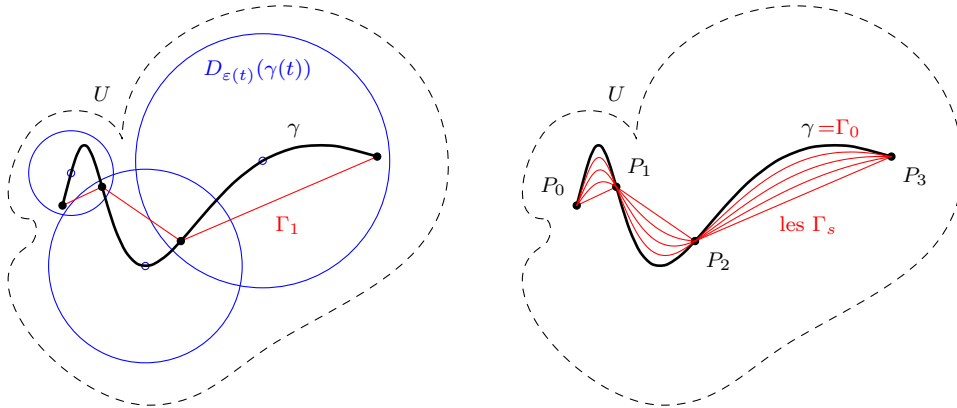
et la courbe $\tilde{\gamma} : [0, m] \rightarrow U$ comme la ligne brisée

$$\tilde{\gamma} = [P_0, P_1] \cdot [P_1, P_2] \cdot \dots \cdot [P_{m-1}, P_m] .$$

Avec ces préparations on définit l'application $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ par

$$(26.22) \quad \Gamma(s, \tau) = (1 - s) \cdot \underbrace{\hat{\gamma}(\tau)}_{\text{décrit } \gamma \text{ entre } P_{j-1} \text{ et } P_j} + s \cdot \underbrace{\left((j - m\tau)P_{j-1} + (m\tau - j + 1)P_j \right)}_{\text{décrit le segment } [P_{j-1}, P_j]} .$$

décrit l'interpolation entre γ et le segment $[P_{j-1}, P_j]$



Par hypothèse les points P_{j-1} , P_j et $\hat{\gamma}(\tau)$ (pour $\tau \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$) appartiennent tous à $\hat{\gamma}([\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]) = \gamma([t_{j-1}, t_j])$ et donc à un même convexe $B_{\varepsilon(s)}(\gamma(s))$. En regardant

l'expression pour $\Gamma(s, \tau)$, on s'aperçoit vite que c'est une combinaison convexe de ces trois points :

$$[(1-s)] + [s(j-m\tau)] + [s(m\tau-j+1)] = 1 ,$$

ce qui permet d'appliquer [13.6] et de conclure que $\Gamma(s, \tau)$ appartient également à ce convexe contenu dans U . Et donc Γ prend bien ses valeurs dans U comme souhaité.

Pour montrer que Γ est continue, on constate d'abord que la restriction de Γ à un sous-rectangle $[0, 1] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ est donnée par l'expression (26.22), ce qui représente une application continue. Ensuite on constate que les valeurs sur les segments communs $[0, 1] \times \{\frac{j}{m}\}$ coïncident (c'est même l'application constante $\gamma(P_j)$ sur un tel segment). On peut donc appliquer [22.13.iii] et conclure que Γ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$. La conclusion est donc que Γ est bien une application continue à valeurs dans U .

Pour vérifier que Γ est une homotopie entre γ et $\tilde{\gamma}$, on commence avec la remarque que la ligne brisée $\tilde{\gamma} : [0, m] \rightarrow U$ est donnée explicitement par (voir [3.11] et [1.14])

$$t \in [j-1, j] \implies \tilde{\gamma}(t) = (j-t)P_{j-1} + (t-j+1)P_j .$$

Ensuite on vérifie les conditions d'être une homotopie : pour $\tau \in [0, 1]$ on a

$$\Gamma_0(\tau) \equiv \Gamma(0, \tau) = \hat{\gamma}(\tau) = \gamma(a + \tau(b-a)) ,$$

et

$$\begin{aligned} \tau \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] &\implies m\tau \in [j-1, j] \implies \\ \Gamma_1(\tau) \equiv \Gamma(1, \tau) &= (j-m\tau)P_{j-1} + (m\tau-j+1)P_j = \tilde{\gamma}(m\tau) , \end{aligned}$$

ce qui montre que Γ vérifie la première condition d'une homotopie. Et finalement

$$\Gamma(s, 0) = (1-s)\gamma(a) + sP_0 = \gamma(a) \quad \text{et} \quad \Gamma(s, 1) = (1-s)\gamma(b) + sP_m = \gamma(b) ,$$

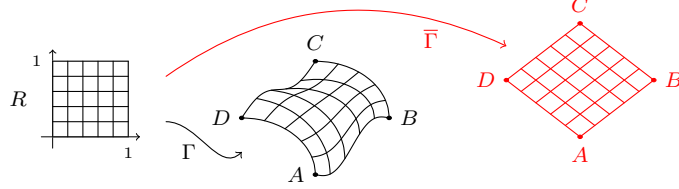
car $P_0 = \gamma(t_0) = \gamma(a)$ et $P_m = \gamma(t_m) = \gamma(b)$. Ainsi on a montré que Γ est bien une homotopie entre γ et la ligne brisée $\tilde{\gamma} = [P_0, P_1] \cdot \cdots \cdot [P_{m-1}, P_m]$.

• (ii). Dans la preuve de (i) on a défini une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et on a associé une ligne brisée aux images par γ des points de cette subdivisions. Le principal souci était de s'assurer que les segments de la ligne brisée restaient dans l'ouvert U , ainsi que l'interpolation avec la courbe. L'idée ici sera la même : on va déterminer deux subdivisions de $[0, 1]$ (un pour chaque coordonnée s et t) et on associe des quadrilatères dans U aux couples d'éléments des deux subdivisions. Ensuite on remplace l'homotopie (continue) Γ d'origine par une nouvelle $\bar{\Gamma}$ constituée de segments de droites. Et de nouveau, le principal souci est de s'assurer qu'on ne sort pas de l'ouvert U .

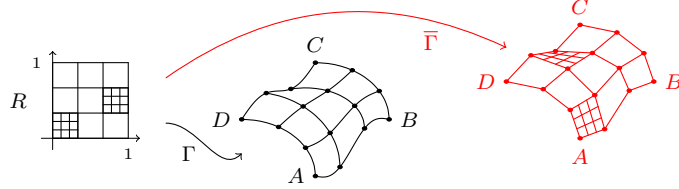
Avant d'entamer la preuve proprement dite, commençons avec l'idée sous-jacente. On dispose d'une application continue Γ définie sur le carré $R = [0, 1]^2$ et à valeurs dans l'ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$. Et on veut la remplacer par une application $\bar{\Gamma}$ qui a des propriétés de différentiabilité définie sur le même carré R et à valeurs dans le même U (avec les contraintes que $\bar{\Gamma}_0$ doit être équivalente par reparamétrage directe linéaire à γ et que $\bar{\Gamma}_1$ doit être équivalente par reparamétrage directe linéaire à δ). En oubliant les contraintes pour l'instant, une idée simple serait d'envoyer le carré $R = [0, 1]^2$ sur le quadrilatère $ABCD \subset \mathbf{R}^n$ défini par les images des quatre coins du carré R :

$$A = \Gamma(0, 0) , \quad B = \Gamma(0, 1) , \quad C = \Gamma(1, 1) , \quad D = \Gamma(1, 0) .$$

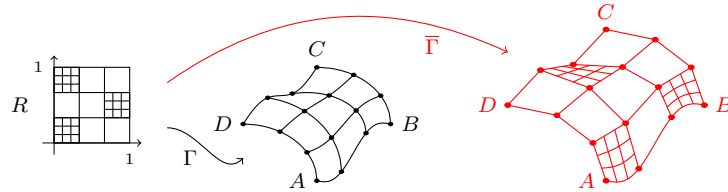
Il y aura des bonnes chances (mais sans garantie) que ce quadrilatère soit contenu dans U , mais comment définir plus précisément l'application $\bar{\Gamma}$? Pour cela on s'imagine que les courbes $\Gamma_s : [0, 1] \rightarrow U$ et $\Gamma^t : [0, 1] \rightarrow U$ (avec $\Gamma_s(t) = \Gamma^t(s) = \Gamma(s, t)$) constituent une “grille courbe” dans \mathbf{R}^n , image de la grille (orthogonale) des segments orthogonaux s ou t constants (avec (s, t) les coordonnées dans $[0, 1]^2 \subset \mathbf{R}^2$). Pour définir $\bar{\Gamma}$, on va remplacer cette grille courbe dans \mathbf{R}^n par une grille constituée de segments de droites dans le quadrilatère $ABCD$.



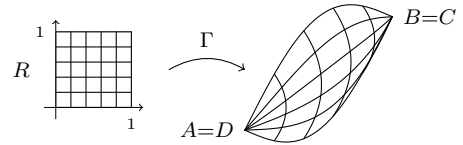
C'est bien l'idée de base, mais comme dit, il n'est pas sûr que le quadrilatère $ABCD$ est contenu dans U . Pour s'assurer qu'on reste dans U on va couper le carré R en petit sous-carrés et appliquer l'idée décrite ci-dessus à chaque petit sous-carré.



Si nos sous-carrés sont suffisamment petits, les quadrilatères formés par les (quatre) images de leurs coins seront bien dans U . Mais avec cela on n'a pas résolu tous les problèmes, car on veut bien que $\bar{\Gamma}$ reste une homotopie entre γ et δ . Et donc en particulier on veut que $\bar{\Gamma}_0$ est équivalente à γ (par reparamétrage directe linéaire). La façon la plus simple de réaliser cela est d'imposer l'égalité $\bar{\Gamma}(0, \tau) = \Gamma(0, \tau)$ pour tout $\tau \in [0, 1]$. On ne peut donc pas remplacer cette courbe par une concaténation de segments de droites. Ce qui veut dire que pour les petit sous-carrés au bord de R il faut faire une interpolation entre la courbe $\Gamma(0, \tau)$ et la ligne brisée formée par $\bar{\Gamma}(\epsilon, \tau)$ (où ϵ est la taille du petit sous-carré).



Avec la remarque qu'il faut faire la même chose de l'autre côté (pour $s = 1$) pour la courbe δ , on aura résolu tous les “problèmes” liés à la transformation de Γ en $\bar{\Gamma}$. Avant de mettre ce discours heuristique en formule, terminons d'abord avec une petite remarque concernant les dessins. On n'a pas tenu compte du fait que Γ est une homotopie dans le sens qu'on n'a pas respecté la condition $\Gamma(s, 0) = \gamma(a)$ et $\Gamma(s, 1) = \gamma(b)$ pour tout $s \in [0, 1]$. L'aspect de l'image de Γ est donc plutôt ce qu'on voit ci-contre.



Soit donc $\Gamma : R = [0, 1]^2 \rightarrow U$ l'homotopie continue entre γ et δ . Parce que U est ouvert, il existe pour tout $(s, \tau) \in R$ un $\varepsilon(s, \tau) > 0$ tel que $B_{\varepsilon(s, \tau)}(\Gamma(s, \tau)) \subset U$.

Par continuité de Γ la collection

$$\mathcal{V} = \left\{ \Gamma^{-1} \left(B_{\varepsilon(s,\tau)}(\Gamma(s,\tau)) \right) \mid (s,\tau) \in R \right\}$$

est un recouvrement de R par des ouverts. R étant compact, il existe $\lambda > 0$ (un nombre de Lebesgue du recouvrement [22.3]) tel que pour tout $(s,\tau) \in R$ il existe $(s_o, \tau_o) \in R$ tel que $B_\lambda(s,\tau) \subset \Gamma^{-1}(B_{\varepsilon(s_o, \tau_o)}(\Gamma(s_o, \tau_o)))$. Prenons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m\lambda > 1$ et définissons les points $P_{j,\ell} \in U$ et les (petits) carrés $R_{j,\ell} \subset R$ par

$$P_{j,\ell} = \Gamma\left(\frac{j}{m}, \frac{\ell}{m}\right) \quad \text{et} \quad R_{j,\ell} = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] \times \left[\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}\right].$$

Alors par l'inégalité triangulaire chaque petit carré $R_{j,\ell}$ est contenu dans un des $\Gamma^{-1}(B_{\varepsilon(s_o, \tau_o)}(\Gamma(s_o, \tau_o)))$ et donc son image $\Gamma(R_{j,\ell})$ est contenu dans l'ensemble convexe $B_{\varepsilon(s_o, \tau_o)}(\Gamma(s_o, \tau_o)) \subset U$.

Avec ces préparations on définit l'application $\bar{\Gamma} : R \rightarrow U$ par sa restriction à chaque sous-rectangle $R_{j,\ell}$ en fonction de la valeur de j comme suit. Pour $j = 1$ et donc $(s,\tau) \in R_{1,\ell}$ on pose

$$(26.23) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}|_{R_{1,\ell}}(s,\tau) = & (1 - ms) \underbrace{\gamma(a + \tau(b - a))}_{\text{décrit la courbe } \gamma} \\ & + ms \underbrace{\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{1,\ell-1} \right)}_{\text{décrit le segment } [P_{1,\ell-1}, P_{1,\ell}]} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{décrit l'interpolation entre } \gamma \text{ et le segment } [P_{1,\ell-1}, P_{1,\ell}]} \end{aligned}$$

Pour $1 < j < m$ on pose

$$(26.24) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}|_{R_{j,\ell}}(s,\tau) = & m\left(s - \frac{j-1}{m}\right) \underbrace{\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j,\ell-1} \right)}_{\text{décrit le segment } [P_{j,\ell-1}, P_{j,\ell}]} \\ & + m\left(\frac{j}{m} - s\right) \underbrace{\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j-1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j-1,\ell-1} \right)}_{\text{décrit le segment } [P_{j-1,\ell-1}, P_{j-1,\ell}]} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{décrit l'interpolation entre les segments } [P_{j-1,\ell-1}, P_{j-1,\ell}] \text{ et } [P_{j,\ell-1}, P_{j,\ell}]} \end{aligned}$$

Et finalement pour $j = m$ on pose

$$(26.25) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}|_{R_{m,\ell}}(s,\tau) = & m\left(s - \frac{m-1}{m}\right) \underbrace{\delta(c + \tau(d - c))}_{\text{décrit la courbe } \delta} \\ & + m(1 - s) \underbrace{\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{m-1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{m-1,\ell-1} \right)}_{\text{décrit le segment } [P_{m-1,\ell-1}, P_{m-1,\ell}]} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{décrit l'interpolation entre } \delta \text{ et le segment } [P_{m-1,\ell-1}, P_{m-1,\ell}]} \end{aligned}$$

Maintenant qu'on a défini l'application $\bar{\Gamma}$, il faut vérifier qu'elle satisfait à toutes nos exigences, à commencer avec sa continuité. Sur chaque petit carré $R_{j,\ell}$ l'expression pour $\bar{\Gamma}$ (une parmi (26.23), (26.24) et (26.25)) est continue. Ensuite on veut appliquer [22.13.iii], ce qui demande de vérifier que nos définitions coïncident sur les bords communs des petits sous-carrés (fermés). Le nombre de cas à vérifier est assez large, donc on se contente avec deux cas particulier, en laissant les autres cas aux bons soins du lecteur.

Le segment $[0, \frac{1}{m}] \times \{\frac{\ell}{m}\}$ est commun aux rectangles $R_{1,\ell}$ et $R_{1,\ell+1}$. Pour un point dans ce segment on a

$$\bar{\Gamma}|_{R_{1,\ell}}(s, \frac{\ell}{m}) = (1 - ms)\gamma\left(a + \frac{\ell}{m}(b - a)\right) + ms\left(m\left(\frac{\ell}{m} - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \frac{\ell}{m}\right)P_{1,\ell-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - ms)\gamma\left(a + \frac{\ell}{m}(b - a)\right) + msP_{1,\ell} \\
&= (1 - ms)\gamma\left(a + \frac{\ell}{m}(b - a)\right) + ms\left(m\left(\frac{\ell}{m} - \frac{\ell}{m}\right)P_{1,\ell+1} + m\left(\frac{\ell+1}{m} - \frac{\ell}{m}\right)P_{1,\ell}\right) \\
&= \bar{\Gamma}|_{R_{1,\ell+1}}\left(s, \frac{\ell}{m}\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux expressions coïncident sur le segment en commun. Et le segment $\{\frac{j}{m}\} \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$ est commun aux rectangles $R_{j,\ell}$ et $R_{j+1,\ell}$. Pour un point dans ce segment on a

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}|_{R_{j,\ell}}\left(\frac{j}{m}, \tau\right) &= m\left(\frac{j}{m} - \frac{j-1}{m}\right)\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j,\ell-1}\right) \\
&\quad + m\left(\frac{j}{m} - \frac{j}{m}\right)\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j-1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j-1,\ell-1}\right) \\
&= m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j,\ell-1} \\
&= m\left(\frac{j}{m} - \frac{j}{m}\right)\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j+1,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j+1,\ell-1}\right) \\
&\quad + m\left(\frac{j+1}{m} - \frac{j}{m}\right)\left(m\left(\tau - \frac{\ell-1}{m}\right)P_{j,\ell} + m\left(\frac{\ell}{m} - \tau\right)P_{j,\ell-1}\right) \\
&= \bar{\Gamma}|_{R_{j+1,\ell}}\left(\frac{j}{m}, \tau\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux expressions coïncident sur ce segment. Une fois les autres vérifications faites, on peut invoquer [22.13.iii] et conclure que $\bar{\Gamma}$ est bien continue sur le carré $R = [0, 1]^2$ entier.

Ensuite on attaque la question de la continuité de $\partial_2 \bar{\Gamma}$ sur les rectangles $[0, 1] \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$. On commence avec le calcul de cette dérivée partielle sur chaque sous-carré $R_{j,\ell}$, ce qui donne pour $j = 1$ et donc $(s, t) \in R_{1,\ell}$ l'expression

$$\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{1,\ell}}(s, t) = (1 - ms)(b - a)\gamma'(a + t(b - a)) + m^2 s(P_{1,\ell} - P_{1,\ell-1}).$$

Pour $1 < j < m$ on trouve

$$\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{j,\ell}}(s, t) = m^2\left(s - \frac{j-1}{m}\right)(P_{j,\ell} - P_{j,\ell-1}) + m^2\left(\frac{j}{m} - s\right)(P_{j-1,\ell} - P_{j-1,\ell-1}).$$

Et finalement pour $j = m$ on trouve

$$\begin{aligned}
\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{m,\ell}}(s, t) &= m\left(s - \frac{m-1}{m}\right)(d - c)\delta'(c + t(d - c)) \\
&\quad + m^2(1 - s)(P_{m-1,\ell} - P_{m-1,\ell-1}).
\end{aligned}$$

Sauf que... les dérivées γ' et δ' n'existent pas forcément partout ! Mais oublions ce "détail" pour l'instant et concentrons nous sur l'idée qu'on veut montrer que c'est continue sur les rectangles $[0, 1] \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$. Pour le faire on vérifie que les différentes expressions coïncident sur les segments en communs $\{\frac{j}{m}\} \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$ (avec $1 \leq j < m$). Pour $j = 1$ on calcule :

$$\begin{aligned}
\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{1,\ell}}\left(\frac{1}{m}, t\right) &= (1 - m\frac{1}{m})(b - a)\gamma'(a + t(b - a)) + m^2\frac{1}{m}(P_{1,\ell} - P_{1,\ell-1}) \\
&= m(P_{1,\ell} - P_{1,\ell-1}) \\
&= m^2\left(\frac{1}{m} - \frac{2-1}{m}\right)(P_{2,\ell} - P_{2,\ell-1}) + m^2\left(\frac{2}{m} - \frac{1}{m}\right)(P_{2-1,\ell} - P_{2-1,\ell-1}) \\
&= \partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{2,\ell}}\left(\frac{1}{m}, t\right),
\end{aligned}$$

pour $1 < j < m - 1$ on calcule

$$\begin{aligned}
\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{j,\ell}}\left(\frac{j}{m}, t\right) &= m^2\left(\frac{j}{m} - \frac{j-1}{m}\right)(P_{j,\ell} - P_{j,\ell-1}) + m^2\left(\frac{j}{m} - \frac{j}{m}\right)(P_{j-1,\ell} - P_{j-1,\ell-1}) \\
&= m(P_{j,\ell} - P_{j,\ell-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m^2 \left(\frac{j}{m} - \frac{j}{m} \right) (P_{j+1,\ell} - P_{j+1,\ell-1}) + m^2 \left(\frac{j+1}{m} - \frac{j}{m} \right) (P_{j,\ell} - P_{j,\ell-1}) \\
&= \partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{j+1,\ell}} \left(\frac{j}{m}, t \right)
\end{aligned}$$

et pour $j = m - 1$ on calcule

$$\begin{aligned}
\partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{m-1,\ell}} \left(\frac{m-1}{m}, t \right) &= m^2 \left(\frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m} \right) (P_{m-1,\ell} - P_{m-1,\ell-1}) \\
&\quad + m^2 \left(\frac{m-1}{m} - \frac{m-1}{m} \right) (P_{m-2,\ell} - P_{m-2,\ell-1}) \\
&= m(P_{m-1,\ell} - P_{m-1,\ell-1}) \\
&= m \left(\frac{m-1}{m} - \frac{m-1}{m} \right) (d - c) \delta' (c + t(d - c)) \\
&\quad + m^2 \left(1 - \frac{m-1}{m} \right) (P_{m-1,\ell} - P_{m-1,\ell-1}) \\
&= \partial_2 \bar{\Gamma}|_{R_{m,\ell}} \left(\frac{m-1}{m}, t \right) .
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que les différentes expressions pour $\partial_2 \bar{\Gamma}$ coïncident sur les segments en communs $\{\frac{j}{m}\} \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$, ce qui permet d'appliquer [22.13.iii] et de conclure que $\partial_2 \bar{\Gamma}$ est bien continue sur le rectangle $[0, 1] \times [\frac{\ell-1}{m}, \frac{\ell}{m}]$, à condition que la restriction à chaque sous-carré (fermé) soit continue. Mais les courbes γ et δ sont de classe $C^{1/}$, donc pas dérivables en tout point de leurs intervalles de définition. Ces dérivées interviennent dans la définition de Γ sur les sous-carrés $R_{1,\ell}$ et $R_{m,\ell}$, mais elles n'interviennent dans aucune des expressions sur les segments en commun. Il "suffit" donc de rajouter les points de discontinuité de γ' et δ' à la subdivision $0 < \frac{1}{m} < \dots < \frac{m}{m} = 1$ de $[0, 1]$ pour régler le problème. Soit $a = t_0 < \dots < t_p = b$ la subdivision de $[a, b]$ telle que γ' existe et est continue sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et soit $c = t'_0 < \dots < t'_{p'} = d$ la subdivision de $[c, d]$ telle que δ' existe et est continue sur chaque $[t'_{j-1}, t'_j]$. Avec ces deux subdivisions on définit l'ensemble fini $D \subset [0, 1]$ par

$$D = \left\{ \frac{\ell}{m} \mid 0 \leq \ell \leq m \right\} \cup \left\{ \frac{t_\ell - a}{b - a} \mid 0 < \ell < p \right\} \cup \left\{ \frac{t'_\ell - c}{d - c} \mid 0 < \ell < p' \right\} .$$

Si D contient $q + 1$ éléments qu'on met dans l'ordre, on peut écrire

$$D = \{ \tau_\ell \mid 0 \leq \ell \leq q \} \quad \text{avec} \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q = 1 .$$

Par définition de D , chaque intervalle $[\tau_{\ell-1}, \tau_\ell]$ est contenu dans un intervalle de la forme $[\frac{\ell'-1}{m}, \frac{j\ell}{m}]$ et l'expression pour $\partial_2 \bar{\Gamma}$ sur le sous-rectangle

$$\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right] \times [\tau_{\ell-1}, \tau_\ell] \subset \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right] \times \left[\frac{\ell'-1}{m}, \frac{\ell'}{m} \right]$$

sera continue pour tout couple (j, ℓ) avec $0 \leq j \leq m$ et $0 \leq \ell \leq q$. Étant donné qu'on a déjà vérifié la compatibilité aux segments qui sont en commun entre différents sous-carrés fermés, on peut effectivement appliquer [22.13.iii] et de conclure que $\partial_2 \bar{\Gamma}$ est bien continue sur les rectangle $[0, 1] \times [\tau_{\ell-1}, \tau_\ell]$.

Ensuite il faut vérifier que $\bar{\Gamma}$ prend ses valeurs dans U . Regardons cela sur chaque $R_{j,\ell}$ selon la valeur de j . Pour $j = 1$ on a (26.23) qui dit que $\bar{\Gamma}(s, \tau)$ est une combinaison linéaire des trois points $\gamma(a + \tau(b - a)) = \Gamma(0, \tau)$, $P_{1,\ell-1}$ et $P_{1,\ell}$, trois points qui appartiennent tous à $\Gamma(R_{1,\ell})$, donc à un ensemble convexe contenu dans U . Quand on regarde leurs coefficients, on s'aperçoit tout de suite qu'ils sont positifs et que leur somme est donnée par

$$[1 - ms] + [msm(\tau - \frac{\ell-1}{m})] + [msm(\frac{\ell}{m} - \tau)] = 1 .$$

Par [13.6] on conclut que $\bar{\Gamma}(s, \tau)$ (pour les valeurs $(s, \tau) \in R_{1,\ell}$) appartient bien à un convexe $B_{\varepsilon(s_o, \tau_o)}(\Gamma(s_o, \tau_o))$, donc à U . Pour le cas $j = m$ (avec donc $(s, \tau) \in R_{m,\ell}$ et

(26.24)) le raisonnement est complètement analogue : $\bar{\Gamma}(s, \tau)$ est une combinaison convexe des trois points $\delta(c + \tau(d - c)) = \Gamma(1, \tau)$, $P_{m-1, \ell}$ et $P_{m-1, \ell-1}$ qui appartiennent (toujours par [13.6]) à U . Pour le cas $1 < j < m$ c'est presque la même chose, sauf qu'ici $\bar{\Gamma}(s, \tau)$ est, selon sa définition (26.25), une combinaison convexe des quatre points $P_{j-1, \ell-1}$, $P_{j, \ell-1}$, $P_{j-1, \ell}$ et $P_{j, \ell}$ avec coefficients positifs de somme

$$\begin{aligned} & [m^2(s - \frac{j-1}{m})(\tau - \frac{\ell-1}{m})] + [m^2(s - \frac{j-1}{m})(\frac{\ell}{m} - \tau)] \\ & + [m^2(\frac{j}{m} - s)(\tau - \frac{\ell-1}{m})] + [m^2(\frac{j}{m} - s)(\frac{\ell}{m} - \tau)] = 1 . \end{aligned}$$

Et de nouveau par [13.6] (et le fait que ces quatre points appartiennent à un même convexe $B_{\varepsilon(s_o, \tau_o)}(\Gamma(s_o, \tau_o))$ contenu dans U) on peut conclure que $\bar{\Gamma}(s, \tau)$ appartient aussi dans ce dernier cas à U .

Reste donc les propriétés [13.1.i/ii] d'une homotopie entre γ et δ . Pour [13.1.i] on remarque qu'un point $(0, t)$ appartient forcément à un carré $R_{j, \ell}$ avec $j = 1$, et donc que c'est (26.23) qui s'applique :

$$\bar{\Gamma}_0(\tau) = \gamma(a + \tau(b - a)) .$$

De la même façon, un point $(1, \tau)$ appartient forcément à un $R_{m, \ell}$, ce qui implique qu'il faut utiliser (26.25) :

$$\bar{\Gamma}_1(\tau) = \delta(c + \tau(d - c)) .$$

Il s'ensuit que $\bar{\Gamma}$ vérifie bien la condition [13.1.i]. Pour la propriété [13.1.ii] on procède de la même manière. Un point $(s, 0)$ appartient forcément à un carré $R_{j, 1}$ et on vérifie directement qu'on a

$$\bar{\Gamma}(s, 0) = \left\{ \begin{array}{ll} (1 - ms) \gamma(a) + ms P_{1,0} & j = 1 \\ m(s - \frac{j-1}{m}) P_{j,0} + m(\frac{j}{m} - s) P_{j-1,0} & 1 < j < m \\ m(s - \frac{m-1}{m}) \delta(c) + m(1 - s) P_{m-1,0} & j = m \end{array} \right\} = \gamma(a) ,$$

simplement parce que $P_{j,0} = \Gamma(\frac{j}{m}, 0) = \gamma(a)$ pour tout j par définition d'une homotopie. De la même façon, un point $(s, 1)$ appartient toujours à un carré $R_{j,m}$ et on a de la même façon

$$\bar{\Gamma}(s, 1) = \left\{ \begin{array}{ll} (1 - ms) \gamma(b) + ms P_{1,m} & j = 1 \\ m(s - s_{j-1}) P_{j,m} + m(s_j - s) P_{j-1,m} & 1 < j < m \\ m(s - s_{m-1}) \delta(d) + m(1 - s) P_{m-1,m} & j = m \end{array} \right\} = \gamma(b) ,$$

parce que $P_{j,m} = \Gamma(\frac{j}{m}, 1) = \gamma(b)$ pour tout j . Et donc la propriété [13.1.ii] est aussi vérifiée. \boxed{CQFD}

Preuve de [13.9]. • (\Rightarrow). Si γ et δ sont homotopes, alors par définition $\gamma(a) = \delta(c) = \overleftarrow{\delta}(d)$ et $\gamma(b) = \delta(d) = \overleftarrow{\delta}(c)$, ce qui montre que la concaténation $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ existe et est un lacet. Ensuite on applique [13.3] qui dit que $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ et $\delta \cdot \overleftarrow{\gamma}$ sont homotopes. Par [13.8] et [13.2.iii] il s'ensuit que $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ est homotope à un point.

• (\Leftarrow). Réciproquement, si $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ existe et est un lacet, alors on doit avoir $\gamma(a) = \delta(c)$ et $\gamma(b) = \delta(d)$. Si $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ est homotope à un point, c'est forcément le point $\gamma(a)$. Si on appelle $C_{\gamma(a)}$ la courbe constante $\gamma(a)$ (voir [13.8]), notre courbe $\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}$ sera homotope à $C_{\gamma(a)}$. Et donc par [13.3] $(\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}) \cdot \delta$ est homotope à $C_{\gamma(a)} \cdot \delta$. Mais selon [13.8.i]

$\overleftarrow{\delta} \cdot \delta$ est aussi homotope à un point, à savoir $\delta(d) = \gamma(b)$. Autrement dit $\overleftarrow{\delta} \cdot \delta$ est homotope à la courbe constante $C_{\gamma(b)}$. Par [13.3] et [1.15.i] $(\gamma \cdot \overleftarrow{\delta}) \cdot \delta = \gamma \cdot (\overleftarrow{\delta} \cdot \delta)$ est donc homotope à $\gamma \cdot C_{\gamma(b)}$. Par [13.2.iii] on a donc une homotopie entre $\gamma \cdot C_{\gamma(b)}$ et $C_{\gamma(a)} \cdot \delta$. Selon [13.8.ii] $\gamma \cdot C_{\gamma(b)}$ est homotope à γ et $C_{\gamma(a)} \cdot \delta$ est homotope à δ , donc par [13.2.iii] γ est homotope à δ . \boxed{CQFD}

Preuve de [13.10]. • (i). Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un $C^{1/}$ -lacet, alors c'est un C^0 -lacet et par définition d'un ouvert simplement connexe, γ est homotope à un point dans U .

• (ii). L'idée de la preuve consiste de trois "remarques". La première est que si deux courbes sont homotopes, alors l'indice d'un point qui n'est pas dans l'image de l'homotopie est la même pour les deux courbes (homotopes). La deuxième remarque est que $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$ pour toute courbe constante $p \in U$ et tout $w \neq p$. Et la troisième est que montrer l'implication $\text{Ind}_\gamma(w) \neq 0 \Rightarrow w \in U$ revient à montrer l'implication $w \notin U \Rightarrow \text{Ind}_\gamma(w) = 0$.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un $C^{1/}$ -lacet qui est homotope à un point (forcément $\gamma(a)$) dans U . Sachant qu'une courbe constante est automatiquement de classe $C^{1/}$, on peut appliquer [13.7.ii] et conclure qu'il existe une homotopie Γ entre γ et le point $p = \gamma(a) \in U$ pour laquelle il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = 1$ telle que $\partial_2 \Gamma$ existe et est continue sur chaque $[0, 1] \times [t_{j-1}, t_j]$. En particulier chaque courbe Γ_s est de classe $C^{1/}$ et prend ses valeurs dans U , ce qui permet de définir l'application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$F(s) = \text{Ind}_{\Gamma_s}(w) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(\partial_2 \Gamma)(s, t)}{\Gamma(s, t) - w} dt.$$

Par [2.11] et [13.1.i] on aura l'égalité $F(0) = \text{Ind}_\gamma(w)$. Et parce que $\Gamma_1(t) = \gamma(a)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on aura $F(1) = 0$. L'idée est maintenant de montrer que F est continue et de remarquer qu'elle prend ses valeurs dans l'espace topologique discret \mathbf{Z} . Parce que $[0, 1]$ est connexe, cela implique que F est constante, donc $F(1) = F(0) = \text{Ind}_\gamma(w)$. Ainsi on aura montré que pour tout $w \notin U$ on a $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$, ce qui implique par contraposé l'inclusion $K_\gamma \subset U$.

Pour montrer que F est continue on commence avec la définition des applications $f_j : [0, 1] \times [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f_j(s, t) = \frac{(\partial_2 \Gamma)(s, t)}{\Gamma(s, t) - w},$$

Par [13.7.ii] ce sont des applications continues, ce qui permet d'appliquer [23.14] et de conclure que les fonctions $F_j : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$F_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(s, t) dt$$

sont continues. Mais on a évidemment l'égalité $F(s) = \sum_{j=1}^q F_j(s)$, ce qui implique que F est une fonction continue comme voulu. \boxed{CQFD}

Les preuves de §14

Preuve de [14.1]. Par définition de la couronne de convergence, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ a un rayon de convergence R et la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ a un rayon de convergence $1/r$. Soit maintenant $K \subset A(a; r, R)$ un compact. Alors $K \subset D_R(a)$ et donc par [5.12] la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge normalement sur K . Ensuite on considère l'application $\phi : \mathbf{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}^*$ définie par $\phi(z) = 1/(z - a)$. C'est un homéomorphisme avec réciproque $\phi^{-1}(u) = a + 1/u$. Par hypothèse on a l'inclusion

$$K \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| > r\} \subset \mathbf{C} \setminus \{a\} ,$$

ce qui implique qu'on aura l'inclusion

$$\phi(K) \subset \{u \in \mathbf{C}^* \mid |u| \leq 1/r\} \subset D_{1/r}(0) .$$

Mais ϕ est un homéomorphisme, donc $\phi(K)$ est (aussi) un compact. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ converge donc (de nouveau par [5.12]) normalement sur $\phi(K)$, ce qui est équivalente à la convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\phi(z))^n$ sur K .

CQFD

Preuve de [14.2]. • Les preuves de (i) et (ii) se font en appliquant [12.11] avec le même lacet à deux fonctions holomorphes sur $A(w_o; R_1, R_2)$. Pour définir ce lacet on commence avec la définition, pour tout $r > 0$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}$ de la courbe $\gamma_r : [\alpha, \alpha + 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\gamma_r(t) = w_o + r e^{it} .$$

Avec cette définition on constate que les résultats de (i) et (ii) s'écrivent comme

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \\ f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{\gamma_{r_1}}} \frac{f(z)}{z - w} dz , \end{aligned}$$

où on a utilisé $\overleftarrow{\gamma_{r_1}}$, la courbe γ_{r_1} parcourue dans le sens opposé pour transformer le signe moins en un signe plus (par [2.11]). Ensuite on fixe $w \in A(w_o; R_1, R_2)$ et on choisit α tel que

$$w - w_o = |w - w_o| \cdot e^{i(\alpha + \pi)} .$$

Avec ce α on définit les points $P_1, P_2 \in A(w_o; R_1, R_2)$ par

$$P_i = w_o - r_i \cdot e^{i\alpha}$$

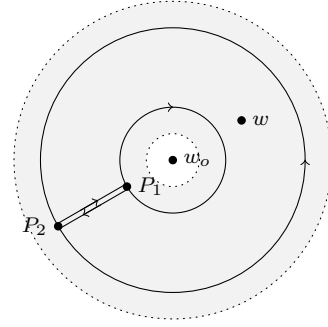
et on constate qu'on a, toujours selon [2.11], l'égalité

$$(26.26) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{[P_1, P_2]} \frac{f(z)}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{[P_2, P_1]} \frac{f(z)}{z - w} dz = 0 ,$$

où on a utilisé la définition de α pour être sûr que la fonction $f(z)/(z - w)$ est définie pour tout point de ces segments. Avec ces préparations on définit maintenant

le C^∞ -lacet γ par

$$(26.27) \quad \gamma = \gamma_{r_2} \cdot [P_2, P_1] \cdot \overleftarrow{\gamma_{r_1}} \cdot [P_1, P_2] ,$$



ce qui est bien un lacet, car on a les égalités $\gamma_{r_i}(\alpha) = \gamma_{r_i}(\alpha + 2\pi) = P_i$ assurant que les concaténations sont bien définies. Pour ce lacet (qui n'est pas simplement fermé car le segment $[P_1, P_2]$ est parcouru deux fois dans les deux sens) le complémentaire $\mathbf{C} \setminus \gamma$ a trois composantes connexes : l'intérieur du cercle γ_{r_1} (le disque ouvert $D_{r_1}(w_o)$), l'extérieur du cercle γ_{r_2} et la couronne $A(w_o; r_1, r_2)$ privé du segment $[P_1, P_2]$. Quand on applique [12.8] on voit immédiatement que l'indice vaut 1 dans cette couronne et qu'elle vaut 0 sur les deux autres composantes connexes. Il s'ensuit qu'on a en particulier l'égalité et inclusion

$$K_\gamma = \overline{A(w_o; r_1, r_2)} \equiv \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 \leq |z - w_o| \leq r_2\} \subset A(w_o; R_1, R_2) .$$

Une fois qu'on dispose de ce lacet, on applique [12.11] d'abord à la fonction holomorphe $g : A(w_o; R_1, R_2) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} .$$

La première égalité dans [12.11] nous donne alors l'égalité

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \equiv \int_{\gamma_{r_2} \cdot [P_2, P_1] \cdot \overleftarrow{\gamma_{r_1}} \cdot [P_1, P_2]} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \\ &\stackrel{[2.10]}{=} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz + \int_{[P_2, P_1]} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \\ &\quad + \int_{\overleftarrow{\gamma_{r_1}}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz + \int_{[P_1, P_2]} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz \\ &\stackrel{(26.26), [2.11]}{=} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz , \end{aligned}$$

ce qui montre que c_n ne dépend pas de la valeur de r .

Et quand on applique [12.11] à la fonction holomorphe f elle-même, la deuxième égalité dans [12.11] nous donne l'égalité

$$\begin{aligned} f(w) &= f(w) \cdot \text{Ind}_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dz \equiv \int_{\gamma_{r_2} \cdot [P_2, P_1] \cdot \overleftarrow{\gamma_{r_1}} \cdot [P_1, P_2]} \frac{f(z)}{z - w} dz \\ &\stackrel{[2.10]}{=} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z - w} dz + \int_{[P_2, P_1]} \frac{f(z)}{z - w} dz + \int_{\overleftarrow{\gamma_{r_1}}} \frac{f(z)}{z - w} dz + \int_{[P_1, P_2]} \frac{f(z)}{z - w} dz \\ &\stackrel{(26.26), [2.11]}{=} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z - w} dz - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z - w} dz , \end{aligned}$$

ce qui est le résultat (ii).

• (iii). Les conditions sur w et r_2 garantissent que cette intégrale est bien définie. On peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_{r_2}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz &= \int_{\gamma_{r_2}} f(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w_o)^n}{(z - w_o)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (w - w_o)^n \cdot \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n, \end{aligned}$$

où l'échange de l'intégrale avec la série est justifié par le fait que la fonction holomorphe (donc continue) f est bornée sur l'image de γ_{r_2} (un cercle) et qu'on a pour z dans l'image de γ_{r_2}

$$\left| \frac{w - w_o}{z - w_o} \right| = \frac{|w - w_o|}{r_2} < 1,$$

par définition de r_2 . La série de fonctions

$$f(\gamma_{r_2}(t)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w_o)^n}{r_2^{n+1} e^{i(n+1)t}}$$

est donc normalement convergente sur $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ ce qui permet d'appliquer [23.12]. Il s'ensuit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n$ est convergente pour $|w - w_o| < R_2$, ce qui implique que son rayon de convergence doit être supérieur ou égal à R_2 .

• (iv). Les conditions sur w et r_1 garantissent que cette intégrale est bien définie. On peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D_{r_1}(w_o)} \frac{f(z)}{z - w} dz &= \int_{\gamma_{r_1}} f(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - w_o)^n}{(w - w_o)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w - w_o)^{n+1}} \cdot \int_{\gamma_{r_1}} f(z) \cdot (z - w_o)^n dz \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (w - w_o)^n \cdot \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{(z - w_o)^{n+1}} dz = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (w - w_o)^n, \end{aligned}$$

où la justification de l'échange intégrale-série est la même qu'en (iii) avec maintenant l'implication

$$|w - w_o| > r_1 \quad \implies \quad \left| \frac{z - w_o}{w - w_o} \right| = \frac{r_1}{|w - w_o|} < 1.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{w - w_o} \right)^n \equiv \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (w - w_o)^n$$

converge pour $1/|w - w_o| < 1/R_1$, ce qui implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ doit être supérieur ou égal à $1/R_1$.

• (v). Selon (iii) et (iv) la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$ contient la couronne initiale $A(w_o; R_1, R_2)$. Pour montrer qu'elle coïncide avec f sur cette dernière, on prend $w \in A(w_o; R_1, R_2)$ et on choisit $R_1 < r_1 < |w - w_o| < r_2 < R_2$. Avec ces r_i il suffit de combiner les résultats de (ii), (iii) et (iv) pour obtenir l'égalité $f(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (w - w_o)^n$. \square CQFD

Preuve de [14.3]. • (i). Selon [14.2] il existe deux séries entières $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ de rayon de convergence au moins R_2 et $h(u) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u_n$ de rayon de convergence au moins $1/R_1$ telles qu'on a

$$\forall w \in A(w_o; R_1, R_2) : f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (w - w_o)^n = g(w - w_o) + h\left(\frac{1}{w - w_o}\right).$$

Étant donné que la série h n'a pas de terme constante, on a $h(0) = 0$, ce qui termine la preuve de (i).

• (ii). Supposons que g_1 et h_1 vérifient les mêmes conditions, alors pour tout $w \in A(w_o; R_1, R_2)$ on a l'égalité

$$f(w) = g(w - w_o) + h\left(\frac{1}{w - w_o}\right) = g_1(w - w_o) + h_1\left(\frac{1}{w - w_o}\right)$$

et donc

$$g(w - w_o) - g_1(w - w_o) = h_1\left(\frac{1}{w - w_o}\right) - h\left(\frac{1}{w - w_o}\right).$$

En regardant les domaines de définitions, on peut donc définir la fonction entière $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$F(w) = \begin{cases} g(w - w_o) - g_1(w - w_o) & |w - w_o| < R_2 \\ h_1\left(\frac{1}{w - w_o}\right) - h\left(\frac{1}{w - w_o}\right) & |w - w_o| > R_1, \end{cases}$$

simplement parce que sur l'intersection $R_1 < |w - w_o| < R_2$, c'est-à-dire pour $z \in A(w_o; R_1, R_2)$ les deux expressions coïncident. Mais par définition on a

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} F(w) = \lim_{|w| \rightarrow \infty} h_1\left(\frac{1}{w - w_o}\right) - h\left(\frac{1}{w - w_o}\right) = h_1(0) - h(0) = 0.$$

Ceci implique que F est borné, donc selon le théorème de Liouville [9.9] F est constante. Et ensuite, parce qu'on a $\lim_{|w| \rightarrow \infty} F(w) = 0$, cette constante doit être nulle. On a donc $g = g_1$ sur le disque $D_{R_2}(w_o)$ et $h(u) = h_1(u)$ pour tout $u \in D_{1/R_1}(0)^*$. Mais h et h_1 sont continue sur $D_{1/R_1}(0)$, donc elles coïncident aussi en 0, montrant qu'on a $h = h_1$, ce qui finit la preuve de l'unicité de la décomposition.

CQFD

Preuve de [14.6]. • (i). Si la singularité est effaçable, le développement en série de Laurent dans un disque époiné $D_r(z_o)^*$ est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_o)^n,$$

c'est-à-dire que dans ce disque époiné la fonction f coïncide avec une série entière. En définissant la valeur $f(z_o)$ de f en z_o par $f(z_o) = c_o$ elle sera holomorphe en z_o simplement parce que f sera (aussi) donnée par une série entière dans le disque entière $D_r(z_o)$.

• (ii). Si la singularité est effaçable, alors par (i) elle est prolongeable en une fonction holomorphe dans un disque $D_r(z_o)$. En tant que fonction continue sur le compact $\overline{D_{r/2}(z_o)} \subset D_r(z_o)$ elle sera donc bornée sur le disque époiné $D_{r/2}(z_o)^*$.

Réciproquement, supposons qu'elle est bornée sur un disque épointé $D_\varepsilon(z_o)^*$. En appliquant [14.2] avec $0 = R_1 < r < R_2 = \varepsilon$ on trouve les coefficients de sa série de Laurent comme

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_o)} \frac{f(z)}{(z - z_o)^{n+1}} dz .$$

Mais f est borné, donc il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D_\varepsilon(z_o)^*$. On peut donc appliquer [4.11] et majorer les c_n par

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n} .$$

Ceci est valable pour tout $0 < r < \varepsilon$. En particulier on peut prendre pour $n < 0$ la limite $r \downarrow 0$ et conclure qu'on doit avoir $c_n = 0$ pour un tel $n < 0$. Autrement dit, z_o est une singularité effaçable [14.5].

On peut voir cette partie de la preuve (l'implication bornée donc effaçable) comme une application du théorème de Liouville [9.9]. La série de Laurent de f est composée de deux séries entières g et h sous la forme

$$f(z) = g(z - z_o) + h\left(\frac{1}{z - z_o}\right) .$$

Parce que f est définie sur un disque épointé, le rayon de convergence de h est forcément ∞ , c'est-à-dire une fonction entière. Le fait que f est bornée sur un (petit) disque épointé implique que h est bornée en dehors d'un disque centré en 0. C'est donc une fonction entière bornée, donc par le théorème de Liouville une constante. Mais la série entière h n'a pas de terme constant, donc h est nulle, montrant que la singularité est effaçable. [CQFD]

Preuve de [14.7]. Commençons avec la remarque que la définition de L nous donne directement l'implication

$$n \in L \quad \Rightarrow \quad \forall k > n : k \in L .$$

Il s'ensuit que si L n'est pas vide, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que L est de la forme

$$L = \{ k \in \mathbf{N} \mid k \geq n \} .$$

• Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n > k$ on a $c_{-n} = 0$. Alors le cas $k = 0$ décrit le cas $Z = \emptyset$ et le cas $k > 0$ décrit le cas Z non vide mais fini. Avec ce k on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_o)^n = (z - z_o)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z - z_o)^n .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a

$$\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{k+1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z - z_o)^n = 0 ,$$

montrant qu'on a $k \in L$. Par l'argument donné au début on en déduit que si z_o est une singularité effaçable ou un pôle selon la définition [14.5], alors L vérifie les condition du tableau.

Réciproquement, supposons que L vérifie les conditions du tableau et qu'il n'est pas vide. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $L = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \geq k \}$. Regardons alors la fonction $g : D_r(z_o) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$g(z) = (z - z_o)^{k+1} f(z) .$$

Par définition de $\lim_{z \rightarrow z_o} g(z) = 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in D_\delta(z_o)^* : |g(z)| < 1 .$$

La fonction holomorphe g est donc bornée sur le disque époiné $D_\delta(z_o)$ et donc par [14.6] g coïncide avec une série entière au voisinage de z_o : il existe $b_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^n .$$

Mais on a toujours $\lim_{z \rightarrow z_o} g(z) = 0$, donc $b_0 = 0$. Il s'ensuit qu'on a l'égalité

$$f(z) = (z - z_o)^{-k-1} g(z) = (z - z_o)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} (z - z_o)^n ,$$

ce qui montre que $c_{-n} = 0$ pour tout $n < k$. Pour $k = 0$ on a donc $Z = \emptyset$ et pour $k > 0$ on a Z fini mais non vide. Ainsi on a montré l'équivalence des descriptions des singularités effaçable et les pôles via Z et via L . Par le tiers-exclu on en déduit que l'équivalence est valable également pour les singularités essentielles.

• Pour l'équivalence avec les conditions sur $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)|$, on commence avec l'observation que la condition $Z = \emptyset$ directement implique qu'on a

$$\lim_{z \rightarrow z_o} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_o} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_o)^n = c_0$$

et donc $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)| = |c_0| \in [0, \infty[$. Réciproquement, si on a $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)| \in [0, \infty[$, alors nécessairement f est bornée dans un disque époiné $D_\varepsilon(z_o)^*$ et donc par [14.6] z_o sera une singularité effaçable.

Ensuite considérons le cas Z fini mais non vide. Alors il existera $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $c_{-k} \neq 0$ et

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_o)^n = (z - z_o)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z - z_o)^n$$

et donc

$$\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_o} |z - z_o|^{-k} \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z - z_o)^n \right| = |c_{-k}| \cdot \lim_{z \rightarrow z_o} |z - z_o|^{-k} = \infty .$$

Réciproquement, supposons qu'on a $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)| = \infty$. Alors il existe $0 < \delta \leq \varepsilon$ tel qu'on a

$$\forall 0 < |z - z_o| < \delta : |f(z)| > 1 .$$

Il s'ensuit qu'on peut définir la fonction holomorphe $g : D_\delta(z_o)^* \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} .$$

Cette fonction admet donc une série de Laurent dans ce disque époiné $D_\delta(z_o)^*$. Mais on a $\lim_{z \rightarrow z_o} g(z) = 0$, donc par l'argument précédent, z_o est une singularité effaçable et g coïncide avec une série entière au voisinage de z_o : il existe $a_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n .$$

La fonction g ne pouvant pas être identiquement nulle, il existe $k \in \mathbf{N}$ (on prend le premier !) tel qu'on a $a_k \neq 0$ et

$$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z - z_o)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_o)^n .$$

Si on pose $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_o)^n$, on aura $h(z_o) = a_k \neq 0$, donc $1/h(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de z_o , donc développable en série entière : $1/h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^n$. Il s'ensuit qu'on a

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_o)^{-k} \cdot \frac{1}{h(z)} = (z - z_o)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^n .$$

On en déduit immédiatement que l'ensemble Z est fini, éventuellement vide. Mais Z ne peut pas être vide, car dans ce cas la limite $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)|$ sera fini. Il s'ensuit que Z est fini et non vide, montrant l'équivalence entre la description des pôles via Z et via $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)|$.

De nouveau par le tiers-exclu on en déduit l'équivalence entre les descriptions des singularités essentielles via Z et via $\lim_{z \rightarrow z_o} |f(z)|$. \boxed{CQFD}

Preuve de [14.8]. Par définition d'une singularité isolée, il existe $\varepsilon_o > 0$ tel qu'on a l'inclusion $D_{\varepsilon_o}(z_o)^* \subset U$. Il suffit donc de montrer que l'image $f(D_{\varepsilon}(z_o)^*)$ est dense dans \mathbf{C} pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, ce qui facilite l'écriture.

La preuve se fait maintenant par l'absurde en supposant qu'il existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ pour lequel $f(D_{\varepsilon}(z_o)^*)$ n'est pas dense dans \mathbf{C} . Cela veut dire qu'il existe $w \in \mathbf{C} \setminus \overline{f(D_{\varepsilon}(z_o)^*)}$, ce qui implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $D_{\delta}(w) \cap f(D_{\varepsilon}(z_o)^*) = \emptyset$. Avec cela on définit la fonction holomorphe $g : D_{\varepsilon}(z_o)^* \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} ,$$

ce qui est bien définie, car pour tout $z \in D_{\varepsilon}(z_o)^*$ on a $|f(z) - w| \geq \delta > 0$ et donc plus en particulier on a la majoration

$$\forall z \in D_{\varepsilon}(z_o)^* \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\delta} .$$

Par [14.6] le point z_o est une singularité isolée effaçable de g et donc g est développable en série entière au voisinage de z_o . Sachant que g ne peut pas être identiquement nulle, ce développement est forcément de la forme (voir aussi [9.2])

$$g(z) = (z - z_o)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_o)^n \quad \text{avec} \quad k \geq 0 \text{ et } a_k \neq 0 .$$

On peut donc faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{k+1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{k+1} \cdot \left(w + \frac{1}{g(z)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_o} 0 + \frac{(z - z_o)^{k+1}}{(z - z_o)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_o)^n} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{z - z_o}{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_o)^n} = \frac{0}{a_k} = 0 . \end{aligned}$$

Selon [14.7] ceci veut dire que z_o est une singularité effaçable ou un pôle, contraire à l'hypothèse. Cette contradiction montre donc que $f(D_\varepsilon(z_o)^*)$ doit être dense dans \mathbf{C} . \square *CQFD*

Les preuves de §15

Preuve de [15.3]. • (i). Soit $S \subset U$ l'ensemble sans point d'accumulation dans U tel que $f : V = U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe. Alors V est ouvert, donc si $a \in V$, alors il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subset V$ et en particulier la disque épointé est contenu dans V . Si $a \in S$, alors parce que S n'a pas de point d'accumulation dans l'ouvert U , il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subset U$ et $D_r(a)^* \cap S = \emptyset$. Il s'ensuit de nouveau que le disque épointé $D_r(a)^*$ est contenu dans V .

• (ii). La fonction f étant holomorphe dans le disque épointé $D_r(a)^*$, elle admet un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z-a)^n$ sur ce disque épointé. Si $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, alors la restriction de f à $D_r(a)^*$ est identiquement nulle, ce disque épointé a un point d'accumulation dans V (tous ses points sont des points d'accumulation) et selon [22.5] et [22.10] l'ouvert V est connexe. Par le principe de prolongement analytique [9.5] f est donc identiquement nulle sur V , contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $c_n \neq 0$.

Le fait que a n'est pas une singularité (isolée) essentielle implique que l'ensemble $\{n \in \mathbf{Z} \mid c_n \neq 0\}$ est minoré. On peut donc définir $k \in \mathbf{Z}$ comme

$$k = \min \{n \in \mathbf{Z} \mid c_n \neq 0\}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-a)^n \quad \text{avec} \quad c_k \neq 0.$$

Quand on définit $\chi : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-a)^n$$

(ce qui est possible, car le rayon de convergence de cette série est le même que celui de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ qui est au moins r selon [14.2.iii]), on aura une fonction holomorphe avec $\chi(a) = c_k \neq 0$ et pour tout $z \in D_r(a)^*$ l'égalité $f(z) = (z-a)^k \chi(z)$ comme voulu.

Pour l'unicité, supposons qu'on a $k_1 \in \mathbf{Z}$ et $\chi_1 : D_{r_1}(a) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant les mêmes conditions. Sans perte de généralité on peut supposer qu'on a $k_1 \geq k$ (sinon on échange les deux jeux de données) et donc, en posant $\rho = \min(r, r_1)$, on aura pour tout $z \in D_\rho(a)^*$ l'égalité

$$(z-a)^{k_1-k} \cdot \chi_1(z) = \chi(z).$$

Si $k_1 > k$, alors en prenant la limite $z \rightarrow a$ on obtient l'égalité $0 \cdot \chi_1(a) = \chi(a) \neq 0$. Cette contradiction montre qu'on doit avoir $k_1 = k$. L'égalité $\chi_1 = \chi$ pour tout $z \in D_\rho(a)^*$ s'en déduit immédiatement et donc par continuité en $z = a$ l'égalité $\chi_1 = \chi$ sur tout $D_\rho(a)$. Dans le cas $r = r_1$ on a donc aussi l'unicité de χ .

• (iii). Soit $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z-a)^n$ la série de Laurent de f dans $D_r(a)^*$. Si $k \geq 0$, alors cette série de Laurent est une série entière, donc si on n'a pas $a \in V$, alors a est une singularité effaçable selon [14.5], c'est-à-dire $a \in S_{\text{eff}}$ et donc $D_r(a) = D_r(a)^* \cup \{a\} \subset V \cup S_{\text{eff}}$. Par [15.1] le prolongement \mathbf{f} est holomorphe sur $D_r(a)$. Réciproquement, si \mathbf{f} est holomorphe sur $D_r(a) \subset V \cup S_{\text{eff}}$, alors $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |\mathbf{f}(a)|$ existe et donc selon [14.7] a est une singularité (isolée) effaçable, donc $k \geq 0$.

Dans ce cas on peut appliquer [9.2] à $\mathbf{f} : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ avec $\mathbf{f}(z) = (z - a)^k \cdot \chi(z)$ et conclure que $k = 0$ si et seulement si $\mathbf{f}(a) \neq 0$ et que a est une racine d'ordre k de \mathbf{f} dans le cas $k > 0$ [9.3].

Finalement, si $k < 0$, alors selon la définition de k et [14.5] le point a est un pôle d'ordre $-k$ de f et réciproquement. \boxed{CQFD}

Preuve de [15.6]. Soit $S_f \subset U$ l'ensemble sans point d'accumulation dans U tel que $f : U \setminus S_f \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe et que les éléments de S_f ne sont pas des singularités essentielles de f et soit $S_g \subset U$ défini de façon analogue. Alors l'ensemble $S \subset U$ défini comme

$$S = S_f \cup S_g \cup \{a \in U \mid v_a(g) > 0\}$$

est un ensemble sans point d'accumulation dans U en tant que réunion de trois de tels ensembles (le troisième par [15.5] ou [9.4]). L'intérêt de S est que les trois fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et le quotient f/g sont bien définies sur $U \setminus S$ et y sont holomorphes comme somme, produit et quotient de deux fonctions holomorphes (avec dénominateur qui ne s'annule pas pour le quotient, car si $a \in U \setminus S_g$ tel que $g(a) = 0$, alors $v_a(g) > 0$ [15.3.iii]). Pour montrer que ce sont des fonctions méromorphes, il suffit donc de montrer que les éléments de S ne sont pas de singularités essentielles. On le fera via le calcul de la valuation.

Parce que S n'a pas de point d'accumulation dans U , il existe pour tout $a \in U$ un $r > 0$ tel que $D_r(a)^* \subset U \setminus S$. Et parce qu'on a les inclusions $U \setminus S \subset U \setminus S_f$ et $U \setminus S \subset U \setminus S_g$, on peut invoquer [15.3] et [15.5] et conclure qu'il existe des fonctions holomorphes $\chi_f, \chi_g : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ telles qu'on a

$$\forall z \in D_r(a)^* : \begin{cases} f(z) = (z - a)^{v_a(f)} \cdot \chi_f(z) & \text{avec } \chi_f(a) \neq 0 \\ g(z) = (z - a)^{v_a(g)} \cdot \chi_g(z) & \text{avec } \chi_g(a) \neq 0 \end{cases}$$

Pour la somme $f + g$ on a donc :

$$\forall z \in D_r(a)^* : f(z) + g(z) = (z - a)^{\min(v_a(f), v_a(g))} \cdot \chi_s(z)$$

avec

$$\forall z \in D_r(a)^* : \chi_s(z) = \begin{cases} \chi_f(z) + (z - a)^{v_a(g) - v_a(f)} \cdot \chi_g(z) & v_a(f) \leq v_a(g) \\ \chi_g(z) + (z - a)^{v_a(f) - v_a(g)} \cdot \chi_f(z) & v_a(f) > v_a(g) \end{cases}$$

La fonction χ_s est donc bien une fonction holomorphe sur $D_r(a)$ entier avec en plus :

$$\chi_s(a) = \begin{cases} \chi_f(a) \neq 0 & v_a(f) < v_a(g) \\ \chi_g(a) \neq 0 & v_a(f) > v_a(g) \end{cases},$$

ce qui montre que, dans le cas $v_a(f) \neq v_a(g)$ on a bien $v_a(f+g) = \min(v_a(f), v_a(g))$. Dans le cas $v_a(f) = v_a(g)$ on aura $\chi_s(z) = \chi_f(z) + \chi_g(z)$ qui ne peut pas être identiquement nulle, car dans ce cas $f+g$ serait identiquement nulle sur $D_r(a)^*$, un ensemble avec (beaucoup de) points d'accumulations dans $U \setminus S$, un ouvert connexe selon [22.5] et [22.10]. Et donc par [9.4] $f+g$ serait identiquement nulle, contraire à l'hypothèse. On peut donc développer χ_s en série entière pour trouver l'ordre du zéro $v_a(\chi_s)$ [9.2], ce qui dira qu'on aura

$$v_a(f+g) = v_a(f) + v_a(\chi_s) \geq v_a(f) .$$

Pour le produit on a

$$\forall z \in D_r(a)^* : f(z) \cdot g(z) = (z - a)^{v_a(f)+v_a(g)} \cdot (\chi_f(z) \cdot \chi_g(z))$$

avec $\chi_f(a) \cdot \chi_g(a) \neq 0$. Il s'ensuit (avec l'unicité dans [15.3.ii]) qu'on a bien $v_a(f \cdot g) = v_a(f) + v_a(g)$.

Pour le quotient on remarque d'abord que, par définition de S (qui inclut les zéros de g), la fonction g ne s'annule pas sur $D_r(a)^*$ et donc que χ_g ne s'annule pas sur $D_r(a)$ (car par hypothèse $\chi_g(a) \neq 0$). On en déduit la propriété

$$\forall z \in D_r(a)^* : \frac{f(z)}{g(z)} = (z - a)^{v_a(f)-v_a(g)} \cdot \frac{\chi_f(z)}{\chi_g(z)} \quad \text{avec} \quad \frac{\chi_f(a)}{\chi_g(a)} \neq 0 .$$

Comme pour le produit, il s'ensuit qu'on a bien $v_a(f/g) = v_a(f) - v_a(g)$.

Ainsi on a montré les propriétés de la valuation, ce qui montre en même temps qu'aucun point de S est une singularité isolée essentielle de ces fonctions, montrant que ce sont bien des fonctions méromorphes. \boxed{CQFD}

Les preuves de §16

Preuve de [16.4]. Commençons avec une esquisse des idées de la preuve. On réduit d'abord le domaine de définition à un ouvert V qui contient toujours K_γ mais sur lequel la fonction f n'a qu'un nombre fini de singularités isolées. En chacun des ces singularités on détermine le développement en série de Laurent et on enlève de f la somme finie (un terme pour chaque singularité isolée) des parties singulières (la partie $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^{-n}$) de ces séries de Laurent. Ce qui reste est "donc" une fonction holomorphe sur V à laquelle on peut appliquer [12.11] pour conclure que son intégrale sur γ vaut zéro. Reste donc la somme finie des parties singulières. En enlevant la partie $c_{-1}/(z-a)$ (avec a une singularité isolée) il reste une fonction qui admet une primitive [16.2], donc l'intégrale sur un lacet sera nulle [7.10]. Et finalement l'intégrale du terme $c_{-1}/(z-a)$ donne directement, avec la définition de l'indice et du résidu, le résultat annoncé.

Pour $z \in U$ il y a deux possibilités : $z \in F$ ou $z \notin F$. Si $z \notin F$ il existe $r(z) > 0$ tel que $D_{r(z)}(z) \subset U \setminus F$ (car $U \setminus F$ est un ouvert [22.5.iv]) et si $z \in F$ il existe $r(z) > 0$ tel que $D_{r(z)}(z)^* \subset U \setminus F$ par définition d'une singularité isolée. On a donc les égalités

$$\begin{aligned} F \cap \bigcup_{z \in K_\gamma} D_{r(z)}(z) &= F \cap \left(\bigcup_{z \in K_\gamma \setminus F} D_{r(z)}(z) \cup \bigcup_{z \in K_\gamma \cap F} D_{r(z)}(z)^* \cup (K_\gamma \cap F) \right) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup K_\gamma \cap F = K_\gamma \cap F. \end{aligned}$$

L'ouvert $V = \bigcup_{z \in K_\gamma} D_{r(z)}(z) \subset U$ contient donc autant de singularités isolées de f que l'ensemble K_γ et on a l'inclusion évidente $K_\gamma \subset V$. Mais selon [22.5.iv] l'intersection $K_\gamma \cap F$ contient (au plus) un nombre fini d'éléments, disons a_1, \dots, a_p . Ces points sont donc les singularités isolées de la restriction de f à $V \setminus F$.

Selon [14.2] il existe, pour chaque $j = 1, \dots, p$ un développement en série de Laurent de f dans un disque épointé $D_\delta(a_j)^*$:

$$(26.28) \quad \forall z \in D_\delta(a_j)^* : f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n^{(j)} (z - a_j)^n.$$

A priori le rayon δ est différent pour chaque a_j , mais en prenant le plus petit on peut supposer que c'est le même pour tout j . De plus, selon [14.2.iv] le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} u^n$ vaut $1/0 = \infty$. Il s'ensuit qu'on peut définir les fonctions holomorphes $g_j, g : \mathbf{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ par

$$\begin{aligned} g_j(z) &= \sum_{n_j=2}^{\infty} c_{-n_j}^{(j)} (z - a_j)^{-n_j} \\ g(z) &= \sum_{j=1}^p \sum_{n_j=1}^{\infty} c_{-n_j}^{(j)} (z - a_j)^{-n_j} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{c_{-1}^{(j)}}{z - a_j} + g_j(z) \right). \end{aligned}$$

Définissons maintenant la fonction holomorphe $h : V \setminus \{a_1, \dots, a_p\} \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

et regardons son développement en série de Laurent au voisinage d'une singularité isolée a_j . Pour $k \neq j$ la série $\sum_{n_k=1}^{\infty} c_{-n_k}^{(k)} (z - a_k)^{-n_k}$ est holomorphe au voisinage de a_j , donc développable en série entière au voisinage de a_j , la série $\sum_{n_j=1}^{\infty} c_{-n_j}^{(j)} (z - a_j)^{-n_j}$ est son propre développement en série de Laurent au voisinage de a_j et en comparant avec le développement en série de Laurent de f au voisinage de a_j on constate que le développement en série de Laurent de h au voisinage de a_j n'a pas de puissances négatives en $z - a_j$. Autrement dit, a_j est une singularité effaçable, ce qui veut dire qu'on peut considérer que h est une fonction holomorphe sur V entier.

Avec ces préparations, on constate qu'on peut appliquer [12.11] à la fonction holomorphe $h : V \rightarrow \mathbf{C}$ et le $C^{1/}$ -lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ (car $\gamma([a, b]) \subset K_\gamma \subset V$) et conclure qu'on a l'égalité

$$\int_{\gamma} h(z) \, dz = 0 .$$

D'autre part on peut utiliser [16.1] pour constater que chaque g_j admet une primitive sur $\mathbf{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Ceci nous permet, en combinaison avec [7.10] et le fait que γ est un lacet, de faire le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) \, dz &= \int_{\gamma} \sum_{j=1}^p \left(\frac{c_{-1}^{(j)}}{z - a_j} + g_j(z) \right) \, dz \\ &= \sum_{j=1}^p \int_{\gamma} g_j(z) \, dz + \sum_{j=1}^p c_{-1}^{(j)} \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_j} \\ (\text{avec [12.3.ii], [16.3]}) \quad &= 0 + 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^p \text{Rés}(f, a_j) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a_j) . \end{aligned}$$

Quand on met les résultats ensemble, on trouve

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\gamma} h(z) \, dz + \int_{\gamma} g(z) \, dz = 0 + 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^p \text{Rés}(f, a_j) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a_j) ,$$

ce qui est le résultat annoncé. \boxed{CQFD}

Preuve de [16.6]. • (i,ii). Selon [15.5] l'ensemble $S = \{a \in U \mid v_a(f) \neq 0\}$ est sans point d'accumulation dans U . Sur l'ouvert $U \setminus S$ [22.5.iv] la fonction f est holomorphe et en plus ne s'annule pas. Par [7.6] et [8.5] f'/f est donc holomorphe sur $U \setminus S$. Par définition d'un résidu on a donc $\text{Rés}(f'/f, a) = 0 = v_a(f)$ pour tout $a \in U \setminus S$.

Pour $a \in S$ il existe (parce que S n'a pas de point d'accumulation dans U) $r > 0$ tel que $D_r(a)^* \subset U \setminus S$. Par définition de S la fonction f ne s'annule pas sur $D_r(a)^*$ et donc on peut invoquer [15.3.ii] et conclure qu'il existe $\chi : D_r(a) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe telle que

$$\forall z \in D_r(a)^* : f(z) = (z - a)^{v_a(f)} \cdot \chi(z) \quad \text{et} \quad \chi(a) \neq 0 .$$

Il s'ensuit que χ ne s'annule pas sur $D_r(a)$ car pour $z \in D_r(a)^*$ on a $f(z) \neq 0$, ce qui permet le calcul

$$\forall z \in D_r(a)^* : \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v_a(f)}{z - a} + \frac{\chi'(z)}{\chi(z)} .$$

La fonction χ'/χ étant holomorphe sur $D_r(a)$, on en déduit que a est un pôle simple de la fonction f'/f avec résidu $\text{Rés}(f'/f, a) = v_a(f) \neq 0$.

• (iii). Quand on applique le théorème des résidus [16.4] à la fonction $f'/f : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ on obtient directement le résultat annoncé. \boxed{CQFD}

Preuve de [16.8]. Commençons avec la remarque que selon [12.5] et [12.9] on a $K_\gamma = \overline{O} \subset U$ et pour tout $a \in O$ on a $\text{Ind}_\gamma(a) = \pm 1$ avec le même signe pour tous les $a \in O$. Dans un premier temps on suppose qu'on a $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$ pour tout $a \in O$.

L'inégalité stricte (16.9) implique que pour $z \in \gamma([a, b])$ on ne peut pas avoir $g(z) = 0$ ni $f(z) = 0$. Il s'ensuit que ni f ni g est identiquement nulle sur U . On peut donc appliquer [15.6] et conclure que la fonction $h = f/g$ est méromorphe sur U et non identiquement nulle. Si on note $S \subset U$ l'ensemble des pôles de h , alors le fait que ni f ni g ont des singularités implique que S est contenu dans l'ensemble des zéros de g (il peut y avoir moins si un zéro de g est "compensé" par un zéro de f). Mais g ne s'annule pas sur $\gamma([a, b])$, ce qui implique que γ prend ses valeurs dans $U \setminus S$. On peut donc appliquer [16.6.iii] et conclure qu'on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \sum_{a \in S^*} v_a(h) \cdot \text{Ind}_\gamma(a) ,$$

où $S^* = \{a \in K_\gamma \mid v_a(h) \neq 0\}$ est l'ensemble (sans point d'accumulation dans U) des zéros et pôles de h dans K_γ .

À partir de là on peut aller dans deux directions. De la définition de h on obtient directement l'égalité $h'/h = f'/f - g'/g$, et par l'hypothèse faite au début on a $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$ pour tout $a \in O$, ce qui nous permet de faire le calcul

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz \\ (26.29) \quad \text{par [16.6.iii] et [12.9]} \quad &= \sum_{a \in Z_f \cap O} v_a(f) - \sum_{a \in Z_g \cap O} v_a(g) , \end{aligned}$$

où $Z_f = \{a \in U \mid f(a) = 0\}$ (f n'a pas de pôles!) avec $Z_f \cap K_\gamma = Z_f \cap O$ parce que f ne s'annule pas sur $\gamma([a, b])$ (et des remarques analogues pour Z_g).

D'autre part, selon l'inégalité (16.9) on a l'inégalité

$$\forall z \in \partial K : |h(z) - 1| < 1 .$$

Sachant que la détermination principale du logarithme Log est définie sur $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ qui contient le disque $D_1(1)$, on peut définir l'application $H : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$H(t) = \text{Log}\left(h(\gamma(t))\right)$$

et calculer sa dérivée comme :

$$H'(t) = \frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) .$$

Avec le fait que γ est un lacet on aura donc :

$$0 = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(t) dt = \int_a^b \frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt = \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz .$$

Quand on met les deux résultats ensemble, on trouve

$$0 = \sum_{a \in Z_f \cap O} v_a(f) - \sum_{a \in Z_g \cap O} v_a(g) .$$

Mais $\sum_{a \in Z_f \cap O} v_a(f)$ compte (avec multiplicité) le nombre de zéros de f dans K et $\sum_{a \in Z_g \cap O} v_a(g)$ le fait pour g (voir aussi [16.7]). Par [16.6.iii] c'est une somme finie.

Reste donc la possibilité que pour tout $a \in O$ on a $\text{Ind}_\gamma(a) = -1$. Mais la seule chose qui change dans le raisonnement précédent est un signe global dans (26.29), ce qui ne change pas la conclusion finale. \square *CQFD*

Les preuves de §17

Preuve de [17.12]. On suppose qu'on a pris ε et φ suffisamment petit et r suffisamment grand pour que l'ensemble F est contenu à l'intérieur du contour $\Gamma_{\varepsilon,r,\varphi}$. Cela permet d'appliquer le théorème des résidus, car U est bien simplement connexe (étant étoilé par exemple par rapport à -1) ce qui nous donne (en tenant bien compte des orientation des quatre morceaux constituant le contour)

$$\begin{aligned}
 2\pi i \cdot \sum_{a \in F} \text{Rés}(g, a) &= \int_{\Gamma_{\varepsilon,r,\varphi}} g(z) \, dz \\
 &= \int_{\varepsilon}^r g(t e^{i\varphi}) e^{i\varphi} \, dt + \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} g(r e^{it}) i r e^{it} \, dt \\
 &\quad + \int_r^{\varepsilon} g(t e^{i(2\pi-\varphi)}) e^{i(2\pi-\varphi)} \, dt + \int_{2\pi-\varphi}^{\varphi} g(\varepsilon e^{it}) i \varepsilon e^{it} \, dt \\
 (26.30) \quad &= e^{i\alpha(\pi-\varphi)} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t e^{-i\varphi}) \, dt
 \end{aligned}$$

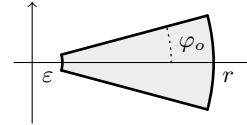
$$(26.31) \quad - e^{i\alpha(\varphi-\pi)} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t e^{i\varphi}) \, dt$$

$$(26.32) \quad - i r e^{(\alpha-1) \ln r - i\alpha\pi} \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{i\alpha t} f(r e^{it}) \, dt$$

$$(26.33) \quad + i \varepsilon e^{(\alpha-1) \ln \varepsilon - i\alpha\pi} \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{i\alpha t} f(\varepsilon e^{it}) \, dt .$$

Comme annoncé, on regarde d'abord la limite $\varphi \downarrow 0$ pour les quatre parties du contour, à commencer avec (26.30) et (26.31). Pour cela on introduit le compact $K \subset \mathbf{C}$ comme

$$K = \{ \rho e^{i\varphi} \in \mathbf{C} \mid \varepsilon \leq \rho \leq r \text{ et } |\varphi| \leq \varphi_o \}$$



avec φ_o suffisamment petit pour que K ne contient aucune singularité de f . Il s'ensuit que la fonction

$$t e^{i\varphi} \mapsto e^{(\alpha-1) \ln t} f(t e^{i\varphi})$$

est continue sur le compact K , donc bornée, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et conclure qu'on a les limites

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \downarrow 0} e^{i\alpha(\pi-\varphi)} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t e^{-i\varphi}) \, dt &= e^{i\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t) \, dt \\
 \lim_{\varphi \downarrow 0} e^{i\alpha(\varphi-\pi)} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t e^{i\varphi}) \, dt &= e^{-i\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t) \, dt
 \end{aligned}$$

Prendre la limite $\varphi \downarrow 0$ dans (26.32) et (26.33) est complètement inoffensif et la somme des résidus ne dépend pas de φ (ni de ε en r avec nos hypothèses). Le passage à la limite $\varphi \downarrow 0$ dans le résultat du théorème des résidus nous donne donc l'égalité

$$2\pi i \cdot \sum_{a \in F} \text{Rés}(g, a) = (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) \int_{\varepsilon}^r e^{(\alpha-1) \ln t} f(t) \, dt$$

$$(26.34) \quad \begin{aligned} & -ir e^{(\alpha-1)\ln r - i\alpha\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha t} f(re^{it}) dt \\ & + i\varepsilon e^{(\alpha-1)\ln \varepsilon - i\alpha\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha t} f(\varepsilon e^{it}) dt . \end{aligned}$$

Pour terminer on majore les deux contributions sur les cercles (maintenant complets, après la limite $\varphi \downarrow 0$) :

$$\begin{aligned} \left| ir e^{(\alpha-1)\ln r} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(t-\pi)} f(re^{it}) dt \right| & \leq r |e^{(\alpha-1)\ln r}| \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} |e^{i\alpha(t-\pi)} f(re^{it})| \cdot 2\pi \\ & \leq 2\pi r^{\operatorname{Re} \alpha} e^{\pi |\operatorname{Im} \alpha|} \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})| , \end{aligned}$$

avec une même formule (en remplaçant r par ε) pour le cercle de rayon ε . Mais par hypothèse on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\operatorname{Re} \alpha} \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})| \equiv \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{\operatorname{Re} \alpha} \cdot |f(z)| = 0 ,$$

ce qui veut dire qu'on a

$$\forall \delta > 0 \exists R > 0 \forall |z| > R : |z|^{\operatorname{Re} \alpha} \cdot |f(z)| < \delta .$$

en prenant le sup on a donc aussi

$$\forall \delta > 0 \exists R > 0 \forall |z| > R : |z|^{\operatorname{Re} \alpha} \cdot \sup_{|w|=|z|} |f(w)| \leq \delta .$$

On en déduit immédiatement qu'on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ir e^{(\alpha-1)\ln r} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(t-\pi)} f(re^{it}) dt .$$

Un argument extrêmement similaire s'applique à la limite $\varepsilon \downarrow 0$ et permet de conclure qu'on a également

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon e^{(\alpha-1)\ln \varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(t-\pi)} f(\varepsilon e^{it}) dt = 0 .$$

Il suffit maintenant de prendre les limites $r \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \downarrow 0$ dans (26.34) pour obtenir le résultat annoncé. \boxed{CQFD}

Les preuves de §18

Preuve de [18.3]. Il est immédiat en vue de leurs expressions analytiques que les applications $\pi_N = \bar{\psi}_N^{-1}|_{\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}} : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{C}$ et $\psi_N : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \subset \mathbf{R}^3$ sont continues. Il suffit donc de montrer que $\bar{\psi}_N$ est continue en ∞ et que sa réciproque est continue en N . Selon [22.11] il faut donc montrer les égalités $\lim_{w \rightarrow \infty} \psi_N(w) = N$ et $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow N} \pi_N(\mathbf{x}) = \infty$ et selon [18.1.i/ii] cela revient à montrer les propriétés

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall w \in \mathbf{C} : \quad & |w| > r \Rightarrow \|\psi_N(w) - N\| < \varepsilon \\ \forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} : \quad & \|\mathbf{x} - N\| < \delta \Rightarrow |\pi_N(\mathbf{x})| > M . \end{aligned}$$

Pour obtenir ces propriétés on calcule :

$$\begin{aligned} \|\psi_N(w) - N\| &= \left\| \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{-2}{u^2 + v^2 + 1} \right) \right\| \\ (26.35) \quad &= \sqrt{\frac{4u^2 + 4v^2 + 4}{(|w|^2 + 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{|w|^2 + 1}} . \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a $\lim_{|w| \rightarrow \infty} \|\psi_N(w) - N\| = 0$, ce qui implique la première propriété. Quand on résout $|w|$ en termes de $\|\psi_N(w) - N\|$ de (26.35) et quand on sait que $\psi_N^{-1} = \pi_N$, on trouve l'égalité pour $\psi_N(w) = \mathbf{x} \in \mathbf{S}^2$:

$$|\pi_N(\mathbf{x})| = \sqrt{\frac{4}{\|\mathbf{x} - N\|^2} - 1} .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a $\lim_{\|\mathbf{x} - N\|} |\pi_N(\mathbf{x})| = \infty$, ce qui est la deuxième propriété q'on voulait montrer. CQFD

Les preuves de §19

Preuve de [19.7]. • Séparons S en deux morceaux en définissant S_{iso} comme les points isolés de S :

$$S_{\text{iso}} = \left\{ s \in S \mid \exists r > 0 : D_r(s) \cap S = \{s\} \right\}.$$

Parce que f est continue, S est fermé (dans U) et on déduit directement de la définition de S_{iso} que le complémentaire $S \setminus S_{\text{iso}}$ est également fermé. Le but est maintenant de montrer que $S \setminus S_{\text{iso}}$ est aussi un ouvert. Avec la connexité de U et le fait que f n'est pas identiquement ∞ il s'ensuit immédiatement qu'on doit avoir $S \setminus S_{\text{iso}} = \emptyset$, ce qui montre que $S = S_{\text{iso}}$ est sans point d'accumulation dans U (car discret et fermé dans U [22.5.iv]).

Pour montrer que $S \setminus S_{\text{iso}}$ est un ouvert, on considère l'ouvert $V = \{z \in U \mid f(z) \neq 0\} \subset \overline{\mathbf{C}}$ et la fonction $g : V \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(z) = 1/f(z)$, qui est holomorphe par définition de l'holomorphie de f . Il est immédiat qu'on a l'égalité

$$S = \{z \in V \mid g(z) = 0\}$$

et que $s \in S$ appartient à S_{iso} si et seulement si s est un zéro isolé de g . Prenons maintenant $s \in S \setminus S_{\text{iso}}$. Si $s \neq \infty$, il existe $r > 0$ tel que $D_r(s) \subset V \cap \mathbf{C}$ et $g : D_r(s) \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe. Par le principe des zéros isolés [9.4] et le fait qu'on a $s \notin S_{\text{iso}}$, la fonction g doit être identiquement nulle sur $D_r(s)$ (un disque est connexe), ce qui implique qu'on a l'inclusion $D_r(s) \subset S \setminus S_{\text{iso}}$.

Si $s = \infty$, il existe $r > 0$ tel que $D_r(\infty) \subset V$ et par [19.2] la fonction $h : D_{1/r}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $h(w) = g(1/w)$ est holomorphe. On a $h(0) = g(\infty) = 0$ et donc de nouveau par le principe des zéros isolés [9.4], soit 0 est un zéro isolé de h , soit h est identiquement nulle sur $D_{1/r}(0)$. Mais si 0 est un zéro isolé de h , $\infty = s$ sera un zéro isolé de g , ce qui est exclu par l'hypothèse $s \in S \setminus S_{\text{iso}}$. La fonction h est donc identiquement nulle sur $D_{1/r}(0)$, ce qui implique que g est identiquement nulle sur $D_r(s = \infty)$. Il s'ensuit qu'on a l'inclusion $D_r(s) \subset S \setminus S_{\text{iso}}$.

La conclusion est donc que pour tous les points $s \in S \setminus S_{\text{iso}}$ il existe $r > 0$ tel que $D_r(s) \subset S \setminus S_{\text{iso}}$, ce qui veut dire que $S \setminus S_{\text{iso}}$ est un ouvert.

• La restriction $f : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ prend ses valeurs dans \mathbf{C} et est (par définition) holomorphe dans le sens [19.1]. Il s'ensuit que les éléments de S sont des singularités isolées de f et par continuité de f on a pour tout $s \in S$ la propriété $\lim_{z \rightarrow s} f(z) = \infty$.

Soit maintenant $s \in S \setminus \{\infty\}$, alors s est une singularité isolée de la restriction $f : (U \setminus S) \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$, ce qui est une fonction holomorphe dans le sens ordinaire [19.1]. Avec l'équivalence

$$\lim_{z \rightarrow s} f(z) = \infty \quad \stackrel{[18.1.i]}{\iff} \quad \lim_{z \rightarrow s} |f(z)| = \infty$$

et [14.7] on en déduit que s est un pôle de cette restriction.

Si $\infty \in S$, alors il existe $r > 0$ tel que $D_r(\infty) \setminus \{\infty\} \subset U \setminus S$ et selon [19.2] la fonction $g : D_{1/r}(0) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(w) = f(1/w)$ est holomorphe. Avec les équivalences

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad \iff \quad \lim_{w \rightarrow 0} g(w) = \infty \quad \stackrel{[18.1.i]}{\iff} \quad \lim_{w \rightarrow 0} |g(w)| = \infty$$

et (de nouveau) [14.7] on en déduit que 0 est un pôle de g , ce qui veut dire que ∞ est un pôle de f . Aucun élément de S n'est donc une singularité isolée essentielle, ce qui implique que f est une fonction méromorphe sur U .

• Réciproquement, si g est méromorphe sur U et holomorphe sur $U \setminus S$, alors chaque $s \in S$ est soit une singularité isolée effaçable de g , soit un pôle de g . Dans le premier cas la limite $\lim_{z \rightarrow s} g(z)$ existe dans \mathbf{C} , et dans le deuxième cas on peut appliquer [14.7] et [18.1] pour conclure qu'on a

$$\lim_{z \rightarrow s} |g(z)| = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow s} g(z) = \infty.$$

À noter que cet argument est aussi valable dans le cas $s = \infty \in S$: dans ce cas $w = 0$ n'est pas une singularité isolée essentielle de la fonction $h(w) = f(1/w)$. C'est donc une singularité effaçable ou un pôle. Dans le premier cas il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que

$$\ell = \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right) \stackrel{[18.2]}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

et dans le deuxième cas on aura, toujours par [14.7],

$$\infty = \lim_{w \rightarrow 0} \left| f\left(\frac{1}{w}\right) \right| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \stackrel{[18.1.iii]}{\Longleftrightarrow} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

Dans tous les cas on peut donc définir la fonction $f : U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ par

$$\forall z \in U \setminus S : f(z) = g(z) \quad \text{et} \quad \forall s \in S : f(z) = \lim_{z \rightarrow s} g(z),$$

le prolongement par continuité sur U de g .

Pour montrer que ce f est holomorphe sur U il faut montrer que les deux fonctions

$$f : V = \{z \in U \mid f(z) \neq \infty\} \rightarrow \mathbf{C}$$

et

$$h : W = \{z \in U \mid f(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{C} \quad , \quad h(z) = \frac{1}{f(z)}$$

sont holomorphes dans le sens [19.1]. Autrement dit, il faut montrer qu'elles sont continues et que leurs restrictions aux domaines privés de ∞ sont holomorphes dans le sens ordinaire. Pour la continuité il suffit de remarquer que f est continue (comme prolongement par continuité de la fonction continue g) et que l'application $\text{Inv} : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ est continue [18.2], donc les restrictions de f et $\text{Inv} \circ f$ (à tout sous-ensemble de U) seront aussi continues.

Pour montrer qu'elles sont holomorphes (après avoir enlevé ∞), on introduit les abréviations U_\bullet , V_\bullet et W_\bullet (ce sont des ouverts)

$$U_\bullet = U \setminus \{\infty\}, \quad V_\bullet = V \setminus \{\infty\}, \quad W_\bullet = W \setminus \{\infty\}.$$

On constate qu'on a l'inclusion $U_\bullet \setminus S \subset V_\bullet$ et qu'on a les propriétés

$$\forall z \in U_\bullet \setminus S : f(z) = g(z) \quad \text{et} \quad \forall z \in W_\bullet \setminus S : h(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

Mais $U_\bullet \setminus S$ et $W_\bullet \setminus S$ sont des ouverts, g y est holomorphe et g est non-nulle sur $W_\bullet \setminus S$. Les fonctions f et h y sont donc holomorphes. Il reste donc à montrer que f et h sont \mathbf{C} -dérivables dans les points $s \in S \setminus \{\infty\}$.

Soit donc $s \in S \cap V_\bullet$, alors par définition de V on a $\lim_{z \rightarrow s} g(z) = f(s) \in \mathbf{C}$. Mais s est une singularité isolée de g ; c'est donc une singularité effaçable et son prolongement par continuité est holomorphe en s [14.6]. La fonction $f : V_\bullet \rightarrow \mathbf{C}$ est donc bien \mathbf{C} -dérivable en s et en conséquence f est holomorphe sur V_\bullet entier comme souhaité.

Soit finalement $s \in W_\bullet \cap S$, alors par définition de W on ne peut pas avoir $f(s) = 0$. Il s'ensuit que la limite $\lim_{z \rightarrow s} (\text{Inv} \circ f)(z) = \lim_{z \rightarrow s} 1/f(z)$ appartient à \mathbf{C} . Mais $s \in \mathbf{C}$ est une singularité isolée de g qui n'est pas essentielle. Il existe donc

$r > 0$ tel que $D_r(s)^* \subset U \setminus S$ et g ne peut pas être identiquement nulle sur ce disque épointé, car dans ce cas on aurait $f(s) = \lim_{z \rightarrow s} g(z) = 0$, ce qui est exclu par définition de W . Selon [15.3.ii] il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ et une fonction holomorphe $\chi : D_r(s) \rightarrow \mathbf{C}$ tel que $\chi(s) \neq 0$ et

$$\forall z \in D_r(s)^* : g(z) = (z - s)^k \cdot \chi(z) .$$

De nouveau parce qu'on a $0 \neq f(s) = \lim_{z \rightarrow s} g(z)$, on ne peut pas avoir $k > 0$. On a donc l'égalité

$$\forall z \in D_r(s)^* : h(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - s)^{-k}}{\chi(z)} .$$

Mais $\chi(s) \neq 0$ et $-k \geq 0$, ce qui implique que cette fonction est \mathbf{C} -dérivable en s . La fonction $h : W_\bullet \rightarrow \mathbf{C}$ est donc bien holomorphe comme souhaité. \boxed{CQFD}

Les preuves de §20

Les preuves de §21

Les preuves de §22

Preuve de [22.3]. On donnera deux preuve différentes, la première en utilisant la définition de compacité par les recouvrements [22.1], la deuxième par la caractérisation de compacité via des suites (valable dans \mathbf{R}^n) [22.2].

• Commençons donc avec la première preuve. Chaque $V_i \in \mathcal{V}$ étant un ouvert de \mathbf{R}^n , il existe pour tout $x \in V_i$ un $r(i, x) > 0$ tel que $B_{r(i, x)}(x) \subset V_i$. Il s'ensuit qu'on a (attention à la division par 2 du rayon!)

$$V_i = \bigcup_{x \in V_i} \{x\} \subset \bigcup_{x \in V_i} B_{r(i, x)/2}(x) \subset \bigcup_{x \in V_i} V_i = V_i .$$

On en déduit immédiatement que la collection \mathcal{V}' définie comme

$$\mathcal{V}' = \{ B_{r(i, x)/2}(x) \mid i \in I, x \in V_i \}$$

est un recouvrement du compact K par des boules ouvertes. Il existe donc un nombre fini q d'éléments de \mathcal{V}' qui recouvrent déjà K :

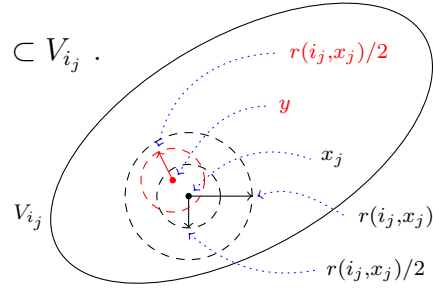
$$(26.36) \quad K \subset B_{r(i_1, x_1)/2}(x_1) \cup B_{r(i_2, x_2)/2}(x_2) \cup \cdots \cup B_{r(i_q, x_q)/2}(x_q) .$$

Avec ce nombre fini de rayons on définit λ par

$$(26.37) \quad \lambda = \min(r(i_1, x_1)/2, r(i_2, x_2)/2, \dots, r(i_q, x_q)/2) .$$

Pour montrer que ce λ convient, on prend $y \in K$ arbitraire. Par (26.36) il existe $1 \leq j \leq q$ tel que $y \in B_{r(i_j, x_j)/2}(x_j)$. On peut donc faire le calcul

$$B_\lambda(y) \stackrel{(26.37)}{\subset} B_{r(i_j, x_j)/2}(y) \stackrel{y \in B_{r(i_j, x_j)/2}(x_j)}{\subset} B_{r(i_j, x_j)}(x_j) \subset V_{i_j} .$$



• Pour la deuxième preuve on passe par l'absurde en supposant qu'un tel λ n'existe pas. Ce qui veut dire en particulier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le nombre $\lambda = 1/n$ ne marche pas, c'est-à-dire qu'il existe $x_n \in K$ tel qu'il n'existe aucun $V_i \in \mathcal{V}$ avec $B_{1/n}(x_n) \subset V_i$. On a donc une suite x_n dans K compact, ce qui implique qu'il existe une suite extraite x_{n_k} qui converge **dans** K , disons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y \in K .$$

Par hypothèse d'un recouvrement il existe $V_i \in \mathcal{V}$ avec $y \in V_i$. Et parce que V_i est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(y) \subset V_i$. Par définition de limite il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall k \geq K : x_{n_k} \in B_{\varepsilon/2}(y) .$$

Il s'ensuit qu'on a aussi pour tout $k \geq \max(K, 2/\varepsilon)$ l'implication

$$z \in B_{1/n_k}(x_{n_k}) \Rightarrow \|z - y\| \leq \|z - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| < 1/n_k + \varepsilon/2 \leq \varepsilon ,$$

où l'inégalité stricte vient de $\|x_{n_k} - y\| < \varepsilon/2$ et où on a utilisé le fait que pour une suite extraite on a l'inégalité $k \leq n_k$ et donc $1/n_k \leq 1/k \leq \varepsilon/2$ par hypothèse. Mais cela veut dire qu'on a l'inclusion $B_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(y) \subset V_i$, ce qui contredit l'hypothèse de départ que cette boule n'est contenu dans aucun $V_i \in \mathcal{V}$. □CQFD

Preuve de [22.6]. Pour $x \in U$ arbitraire on définit l'ensemble $C_x \subset U$ par

$$C_x = \{ y \in U \mid \exists q \in \mathbf{N}^* \exists V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V} \text{ vérifiant (22.7)} \} .$$

Si $y \in C_x$, alors il existe (donc) une chaîne $V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V}$ reliant y à x . Mais alors tout $z \in V_q$ est relié à x par la même chaîne, montrant qu'on a l'inclusion $V_q \subset C_x$. Autrement dit, C_x est un ouvert.

Prenons maintenant $z \in U \setminus C_x$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $z \in V$ (parce que \mathcal{V} est un recouvrement). S'il existait $y \in V \cap C_x$, alors il existerait une chaîne $V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V}$ reliant y à x . Et donc la chaîne V_1, \dots, V_q, V relie z à x , ce qui impliquerait $z \in C_x$. On en déduit qu'on doit avoir $V \subset U \setminus C_x$, c'est-à-dire que $U \setminus C_x$ est aussi un ouvert. Parce qu'il est évident que $x \in C_x$ et donc $C_x \neq \emptyset$, il s'ensuit qu'on a $C_x = U$ par connexité de U . Et donc pour tout $y \in U$ il existe $V_1, \dots, V_q \in \mathcal{V}$ vérifiant (22.7). CQFD

Preuve de [22.9]. Soit $a, b \in B_r(x) \setminus F$ avec $a \neq b$ et soit $D = \{ a + t(b-a) \mid t \in \mathbf{R} \}$ la droite passant par a et b . Parce que $n \geq 2$, $B_r(x) \setminus D$ est un ouvert non vide, et donc il existe $c \in B_r(x) \setminus D$. Considérons maintenant le segment $[\frac{1}{2}(a+b), c]$ qui relie c au milieu entre a et b et soit $\mu : [0, 1] \rightarrow B_r(x)$ l'application qui décrit ce segment :

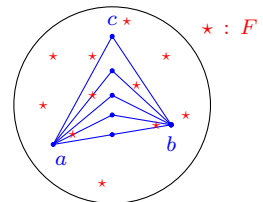
$$\mu(s) = sc + \frac{1}{2}(1-s)(a+b) .$$

L'idée de la preuve est de choisir y dans le segment $[\frac{1}{2}(a+b), c]$, c'est-à-dire de la forme $y = \mu(s)$ (voir le dessin ci-dessous). Pour bien gérer la situation on "réunit" les deux segments $[a, y]$ et $[y, b]$ avec $y = \mu(s)$ dans une seule courbe $\gamma_s = [a, \mu(s)] \sqcup [\mu(s), b]$, la concaténation de ces deux segments. Maintenant il y a plusieurs choses à vérifier : d'abord que le tout appartient bien à la boule $B_r(x)$ et ensuite qu'on peut choisir s de sorte qu'on évite les éléments de F .

Pour justifier que tout ce monde appartient bien à la boule $B_r(x)$ on utilise la convexité d'une boule : $a, b \in B_r(x)$ donc le segment $[a, b] \subset B_r(x)$ et en particulier $\frac{1}{2}(a+b) \in B_r(x)$. De nouveau par convexité le segment $[\frac{1}{2}(a+b), c] \subset B_r(x)$ et en particulier chaque $\mu(s)$ appartient à $B_r(x)$. Et de nouveau par la convexité, les segments $[a, \mu(s)]$ et $[\mu(s), b]$ appartiennent à la boule, ce qui termine la justification.

Quand on écrit l'application $\gamma_s : [0, 2] \rightarrow B_r(x)$ explicitement, on trouve l'expression

$$\begin{aligned} \gamma_s(t) &= \begin{cases} (1-t)a + t\mu(s) & t \leq 1 \\ (2-t)\mu(s) + (t-1)b & t \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a + \frac{1}{2}te_1 + ste_2 & t \leq 1 \\ a + \frac{1}{2}te_1 + (2-t)se_2 & t \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$



★ : F

— : quelques courbes γ_s

où on a introduit les vecteurs $e_1 = b-a$ et $e_2 = c - \frac{1}{2}(b+a)$, des vecteurs indépendants par l'hypothèse sur c . On en déduit aisément que pour $s_1 \neq s_2$ les images $\gamma_{s_1}([0, 2])$ et $\gamma_{s_2}([0, 2])$ sont disjointes (c'est aussi évident visuellement : deux de telles courbes n'ont que $a = \gamma_s(0)$ et $b = \gamma_s(2)$ en commun).

Sachant qu'on a $a, b \in B_r(x) \setminus F$, pour que les deux segments $[a, \mu(s)]$ et $[\mu(s), b]$ évitent F , il suffit de trouver $s \in [0, 1]$ tel que $\gamma_s([0, 2]) \cap F = \emptyset$. Pour cela on définit

d'abord l'ensemble $F_s \subset F$ par

$$F_s = \{ y \in F \mid \exists s \in [0, 1] : y \in \gamma_s([0, 2[) \}$$

et l'application $\Phi : F_s \rightarrow [0, 1]$ par

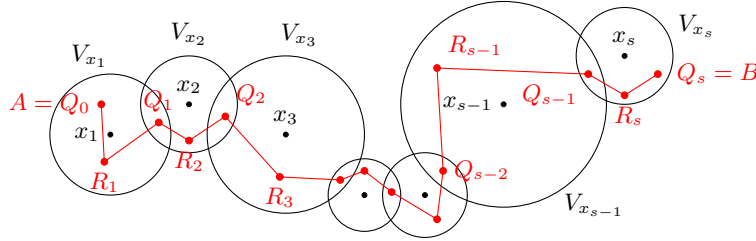
$$\Phi(y) = s \text{ si } y \in \gamma_s([0, 2[) .$$

Cette application est bien définie, car par définition de F_s un tel $s \in]0, 2[$ existe, et parce qu'on a $\gamma_{s_1}([0, 2[) \cap \gamma_{s_2}([0, 2[) = \emptyset$ pour $s_1 \neq s_2$, un tel s sera unique. Mais F est dénombrable, donc F_s aussi. Ce qui implique que l'image $\Phi(F_s)$ est aussi dénombrable. Il s'ensuit qu'on ne peut pas avoir $\Phi(F_s) = [0, 1]$. Il existe donc $s \in [0, 1] \setminus \Phi(F_s)$ et pour un tel s on a nécessairement $\gamma_s([0, 2[) \cap F = \emptyset$.

La courbe continue γ_s prenant ses valeurs dans $B_r(x) \setminus F$, il existe une courbe continue dans $B_r(x) \setminus F$ reliant a et b , ce qui montre que cet ensemble est connexe par arcs. \boxed{CQFD}

Preuve de [22.10]. Parce que U est ouvert, il existe pour tout $x \in U$ un $r > 0$ tel que $V_x = B_r(x) \subset U$. La collection $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in U\}$ est donc un recouvrement de U par des ouverts, ce qui permet d'appliquer [22.6] : pour tout $a, b \in U$ il existe $x_1, \dots, x_s \in U$ tels que

$$A \in V_{x_1}, \quad \forall 1 \leq i < s : V_{x_i} \cap V_{x_{i+1}} \neq \emptyset, \quad B \in V_{x_s} .$$



Pour chaque $1 \leq i < s$ l'intersection $V_{x_i} \cap V_{x_{i+1}}$ est un ouvert non-vidé, donc contient une infinité non-dénombrable d'éléments. Il existe donc $Q_i \in (V_{x_i} \cap V_{x_{i+1}}) \setminus F$. En posant $Q_0 = A$ et $Q_s = B$ on aura donc pour tout $1 \leq i \leq s$ la propriété

$$Q_{i-1}, Q_i \in V_{x_i} \setminus F .$$

Par [22.9] il existe donc $R_i \in V_{x_i}$ tel qu'on a

$$[Q_{i-1}, R_i] \sqcup [R_i, Q_i] \subset V_{x_i} \setminus F .$$

La ligne brisée connectant A à B donnée par

$$[Q_0, R_1] \sqcup [R_1, Q_1] \sqcup [Q_1, R_2] \sqcup [R_2, Q_2] \sqcup \dots \sqcup [Q_{s-1}, R_s] \sqcup [R_s, Q_s]$$

est donc contenu dans $U \setminus F$. Il suffit de renommer les points en P_0 à P_{2s+1} pour obtenir le résultat annoncé avec $q = 2s + 1$. \boxed{CQFD}

Preuve de [22.13]. • (i). Il suffit de définir $f : \bigcup_{i \in I} U_i \rightarrow \mathbf{R}^p$ par

$$x \in U_i \implies f(x) = f_i(x) .$$

L'ambiguïté dans le choix de $i \in I$ avec $x \in U_i$ n'influe pas sur la valeur $f_i(x)$ par hypothèse.

• (ii). Sachant qu'une application est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert (de l'espace d'arrivée) est un ouvert (de l'espace source), on prend $O \subset \mathbf{R}^p$ un ouvert et on montre que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\bigcup_{i \in I} U_i$. Pour le faire on calcule :

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= \{x \in \bigcup_{i \in I} U_i \mid f(x) \in O\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in U_i \mid f(x) \in O\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{x \in U_i \mid f_i(x) \in O\} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(O) . \end{aligned}$$

Mais f_i est continue, donc $f_i^{-1}(O)$ est un ouvert de U_i qui est supposé être un ouvert de \mathbf{R}^n . Et donc $f_i^{-1}(O)$ est un ouvert de \mathbf{R}^n . La réunion d'ouverts étant ouvert, il s'ensuit que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de \mathbf{R}^n inclus dans $\bigcup_{i \in I} U_i$. Autrement dit, $f^{-1}(O)$ est bien un ouvert de $\bigcup_{i \in I} U_i$ comme voulu.

• (iii). L'argument utilisé dans le cas où les ensembles U_i sont ouverts n'est pas (facilement) applicable ici. On change donc d'approche et on montre que f est continue en chaque point x selon la définition ε - δ . Soient donc $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires et posons $I_x = \{i \in I \mid x \in U_i\}$. Pour chaque $i \in I_x$ il existe, par continuité de f_i , un $\delta_i > 0$ tel que

$$\forall y : y \in U_i \cap B_{\delta_i}(x) \Rightarrow f_i(y) \in B_\varepsilon(f_i(x)) .$$

Et pour chaque $i \notin I_x$ il existe, parce que U_i est fermé dans $\bigcup_{i \in I} U_i$, un $r_i > 0$ tel que $B_{r_i}(x) \cap U_i = \emptyset$. Avec tout cela on définit $\delta = \min(\min_{i \notin I_x} r_i, \min_{i \in I_x} \delta_i) > 0$ (où on utilise le fait que I est fini) et on calcule :

$$y \in B_\delta(x) \cap \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I_x : y \in B_\delta(x) \cap U_i \Rightarrow f_i(y) \in B_\varepsilon(f_i(x)) .$$

A priori il serait possible qu'on a $y \in U_i$ pour un $i \notin I_x$, mais cela est exclu par le fait qu'on a pour un tel i la propriété $\delta \leq r_i$ et donc $B_\delta(x) \cap U_i = \emptyset$, ce qui est contradictoire avec $y \in B_\delta(x) \cap U_i$. Sachant que pour $x, y \in U_i$ on a $f_i(x) = f(x)$ et $f_i(y) = f(y)$, on a donc montré que f est continue en x . Ce point étant arbitraire, f est continue sur $\bigcup_{i \in I} U_i$. \boxed{CQFD}

Les preuves de §23

Preuve de [23.4]. Si la convergence est uniforme sur $\overline{B_r(x)} \subset U$, elle l'est sur $B_r(x) \subset U$, ce qui montre l'implication (iii) \Rightarrow (ii). Et $B_r(x) \subset U$ est un voisinage ouvert de x , ce qui montre l'implication (ii) \Rightarrow (i). Mais s'il existe un voisinage ouvert V de x , alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_{r/2}(x)} \subset B_r(x) \subset V$, ce qui montre l'implication (i) \Rightarrow (iii). Autrement dit, on a montré l'équivalence des trois premières propriétés.

Sachant qu'une boule fermée $\overline{B_r(x)}$ est compact, on a immédiatement l'implication (iv) \Rightarrow (iii). Pour terminer la preuve, il suffit donc de montrer l'implication (i) \Rightarrow (iv). Pour cela on prend un compact $K \subset U$ arbitraire. Alors par hypothèse, il existe pour tout $x \in K$ un voisinage ouvert V_x de x sur lequel la convergence est uniforme. Il s'ensuit que la collection \mathcal{V} définie comme

$$\mathcal{V} = \{ V_x \mid x \in K \}$$

est un recouvrement de K par des ouverts. K étant compact, il existe donc un nombre fini V_{x_1}, \dots, V_{x_s} tels que $K \subset \cup_{i=1}^s V_{x_i}$. Définissons maintenant les nombres $M_n, S_{n,i} \in [0, \infty[$ par

$$S_{n,i} = \sup_{x \in V_{x_i}} \|f_n(x) - g(x)\| \quad \text{et} \quad M_n = \max(S_{n,1}, \dots, S_{n,s}) .$$

Par hypothèse on a pour tout $i = 1, \dots, s$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,i} = 0$$

et on a donc aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ (parce qu'il s'agit d'un nombre fini sur lequel on prend le max). Soit maintenant $x \in K$, alors il existe x_i (avec $i = 1, \dots, s$) tel que $x \in V_{x_i}$ et donc on a la majoration

$$\|f_n(x) - g(x)\| \leq \sup_{x \in V_{x_i}} \|f_n(x) - g(x)\| = S_{n,i} \leq M_n .$$

Il s'ensuit qu'on a l'inégalité

$$\sup_{x \in K} \|f_n(x) - g(x)\| \leq M_n ,$$

donc en combinaison avec $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ on a montré la convergence uniforme sur K comme voulu. \boxed{CQFD}

Preuve de [23.8]. Si la suite $\partial_j f_n$ converge uniformément sur tout compact, alors par [23.6] sa limite $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_j f_n$ est continue. Pour faire le lien avec la dérivée partielle de f , traitons le cas $j = 1$ (uniquement parce que c'est plus court à noter). Selon le théorème fondamental du calcul intégrale on a l'égalité

$$f_n(y, x_2, \dots, x_p) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) + \int_{x_1}^y (\partial_1 f_n)(t, x_2, \dots, x_p) dt ,$$

valable pour tout y dans un voisinage de x_1 . Mais l'ensemble $[x_1, y] \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_p\}$ est un compact, donc la suite $\partial_1 f_n$ y converge uniformément, ce qui permet d'appliquer [23.7] et de conclure (en prenant la limite $n \rightarrow \infty$ et la convergence simple de la suite f_n) qu'on a

$$f(y, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \int_{x_1}^y g(t, x_2, \dots, x_p) dt .$$

De là, il est immédiate que la dérivée partielle $(\partial_1 f)(x_1, \dots, x_p)$ existe et est donnée par

$$(\partial_1 f)(x_1, \dots, x_p) = g(x_1, \dots, x_p) . \quad \boxed{CQFD}$$

Preuve de [23.9]. La preuve des équivalences et implication

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (iv)$$

est une copie conforme du cas de la convergence uniforme montré en [23.4]. Pour l'implication (i) \Rightarrow (iv) le schéma est le même qu'en [23.4], mais avec des petites modifications. Soit donc $K \subset U$ un compact. Alors par hypothèse, il existe pour tout $x \in K$ un voisinage ouvert V_x de x sur lequel la convergence est normale. Il s'ensuit que la collection \mathcal{V} définie comme

$$\mathcal{V} = \{ V_x \mid x \in K \}$$

est un recouvrement de K par des ouverts. K étant compact, il existe donc un nombre fini V_{x_1}, \dots, V_{x_s} tels que $K \subset \cup_{i=1}^s V_{x_i}$. Par hypothèse il existe donc des nombres $g_n^{(i)} \in [0, \infty[$ vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq s \quad : \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(i)} < \infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in V_{x_i} : |f_n(x)| \leq g_n^{(i)} \right] .$$

Il s'ensuit que les nombres $g_n \in [0, \infty[$ définis par

$$g_n = \max(g_n^{(1)}, \dots, g_n^{(s)})$$

définissent aussi une série convergente :

$$g_n \equiv \max(g_n^{(1)}, \dots, g_n^{(s)}) \leq \sum_{i=1}^s g_n^{(i)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n \leq \sum_{i=1}^s \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(i)} < \infty .$$

De plus, pour tout $x \in K$ il existe x_i (avec $i = 1, \dots, s$) tel que $x \in V_{x_i}$ et donc on a la majoration

$$|f_n(x)| \leq g_n^{(i)} \leq g_n .$$

Autrement dit, on a montré la convergence normale sur K .

\boxed{CQFD}

Preuve de [23.14]. Une intégrale vectorielle étant définie composante par composante, la preuve se fait dans le cas $q = 1$. Soit $x_o \in U$ et supposons qu'on a montré la propriété⁴

$$(26.38) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall x \in B_\delta(x_o) \cap U : |f(x, t) - f(x_o, t)| < 2\varepsilon .$$

Alors pour $x \in B_\delta(x_o) \cap U$ on peut faire le calcul

$$|F(x) - F(x_o)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_o, t)| \, dt \leq \int_a^b 2\varepsilon \, dt = 2(b-a) \cdot \varepsilon .$$

4. Cela ressemble à la continuité uniforme sur $[a, b] \times (B_\delta(x_o) \cap U)$, mais il y a une différence importante : on ne prend pas deux points arbitraire (x, t) et (x', t') dans ce domaine, on prend $x' = x_o$ le centre de la boule et on prend $t' = t$. Le fait qu'on n'a aucune information sur l'ensemble U empêche qu'on puisse passer (facilement) par la continuité uniforme.

On en déduit qu'on a montré

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_o) \cap U : |F(x) - F(x_o)| < 2(b-a) \cdot \varepsilon .$$

La continuité de F au point x_o s'en déduit directement.

Reste donc à montrer la propriété (26.38). Soit donc $\varepsilon > 0$ et $x_o \in U$ fixé. Par la continuité de f aux points (x_o, t) on a la propriété

$$(26.39) \quad \forall t \in [a, b] \exists \delta(t) > 0 \forall (x, s) \in U \times [a, b] : \\ \|(x, s) - (x_o, t)\| < \delta(t) \implies |f(x, s) - f(x_o, t)| < \varepsilon .$$

Il est immédiat que la collection \mathcal{V} définie comme

$$\mathcal{V} = \{ B_{\delta(t)/2}(x_o, t) \mid t \in [a, b] \}$$

forme un recouvrement par ouverts de l'ensemble compact $\{x_o\} \times [a, b]$. Il existe donc un nombre fini de points $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ tel qu'on a l'inclusion

$$\{x_o\} \times [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\delta(t_j)/2}(x_o, t_j) .$$

Définissons $\delta = \frac{1}{2} \min(\delta(t_1), \dots, \delta(t_n))$ et prenons $x \in B_\delta(x_o) \cap U$ et $t \in [a, b]$ arbitraire. Alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(x_o, t) \in B_{\delta(t_j)/2}(x_o, t_j)$.

C'est maintenant qu'il faut une petite digression concernant le choix de normes sur nos espaces et en particulier sur la norme qu'on utilise sur $\mathbf{R}^{p+1} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$. D'une part on est en dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes, d'autre part, on utilise des valeurs explicites en combinaison avec cette norme (la valeur de δ), donc le choix peut influencer ce qu'il faut écrire. Le choix naturel est la norme euclidienne et pour ce choix on peut écrire

$$\|(x, s) - (y, t)\|^2 = \|x - y\|^2 + |s - t|^2 ,$$

où à gauche on utilise la norme euclidienne dans \mathbf{R}^{p+1} et à droite la norme euclidienne dans \mathbf{R}^p . Avec cela, on aura donc les égalités

$$\|(x, t) - (x_o, t)\| = \|x - x_o\| \quad \text{et} \quad \|(x_o, s) - (x_o, t)\| = |s - t| ,$$

où de nouveau ce ne sont pas les mêmes normes à gauche et à droite. (Remarquons en passant que si on avait utilisé la norme $\|\cdot\|_1$ ou la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui sont définies par $\|x\|_1 = \sum_j |x_j|$ et $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$, on aurait trouvé les "mêmes" égalités avec à gauche la norme dans \mathbf{R}^{p+1} et à droite la norme dans \mathbf{R}^p respectivement la valeur absolue dans \mathbf{R} .)

Après cette digression on reprend notre raisonnement et on fait le calcul

$$\begin{aligned} \|(x, t) - (x_o, t_j)\| &\leq \|(x, t) - (x_o, t)\| + \|(x_o, t) - (x_o, t_j)\| \\ (x_o, t) \in B_{\delta(t_j)/2}(x_o, t_j) &\implies \|x - x_o\| + |t - t_j| < \delta + \delta(t_j)/2 \leq \delta(t_j) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on peut faire le calcul

$$|f(x, t) - f(x_o, t)| \leq |f(x, t) - f(x_o, t_j)| + |f(x_o, t) - f(x_o, t_j)| \stackrel{(26.39)}{<} 2\varepsilon .$$

Les point $x \in B_\delta(x_o) \cap U$ et $t \in [a, b]$ étant arbitraires, on a donc montré (26.38).

CQFD

Preuve de [23.15]. Par [23.14] on sait que F est continue et que la fonction $G : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ définie par

$$G(x) = \int_a^b (\partial_j f)(x, t) \, dt$$

est continue. Il reste donc à montrer qu'on a l'égalité $G = \partial_j F$. Pour cela on choisit $x_o \in U$ et $\varepsilon > 0$. Parce que U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_r(x_o)} \subset U$. Il s'ensuit que $A = \overline{B_r(x_o)} \times [a, b]$ est compact et $\partial_j f : A \rightarrow \mathbf{R}^q$ est continue, ce qui permet d'invoquer [22.12] pour conclure que $\partial_j f$ est uniformément continue sur A et d'en déduire (avec les mêmes arguments que donnés dans la preuve de [23.14] pour passer d'un couple (x, t) au point x , avec le même "avertissement" sur l'utilisation des normes) qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on a

$$(26.40) \quad \forall x \in \overline{B_r(x_o)} \quad \forall t \in [a, b] : \|x - x_o\| < \delta \Rightarrow \|(\partial_j f)(x, t) - (\partial_j f)(x_o, t)\| < \varepsilon .$$

Pour calculer la dérivée partielle $\partial_j F$ au point x_o il faut calculer la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_o + he_j) - F(x_o)}{h} ,$$

où $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ désigne le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^p . Pour le faire on invoque l'égalité des accroissements finis⁵ pour conclure qu'il existe λ_t tel qu'on a l'égalité

$$(26.41) \quad \frac{f(x_o + he_j, t) - f(x_o, t)}{h} = (\partial_j f)(x_o + \lambda_t e_j, t) ,$$

avec $0 < |\lambda_t| < |h|$. Avec ces deux résultats, on calcule pour $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_o + he_j) - F(x_o)}{h} - G(x_o) \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x_o + he_j, t) - f(x_o, t)}{h} - (\partial_j f)(x_o, t) \right| dt \\ &\stackrel{(26.41)}{=} \int_a^b |(\partial_j f)(x_o + \lambda_t e_j, t) - (\partial_j f)(x_o, t)| \, dt \\ &\stackrel{(26.40)}{\leq} \int_a^b \varepsilon \, dt = (b - a) \cdot \varepsilon , \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on utilise la majoration $|\lambda_t| < |h| < \delta$ en combinaison avec (26.40). On vient donc de montrer qu'on a la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h : 0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_o + he_j) - F(x_o)}{h} - G(x_o) \right| < (b - a) \cdot \varepsilon .$$

On en déduit directement l'égalité $(\partial_j F)(x_o) = G(x_o)$.

CQFD

5. C'est ici que c'est essentiel qu'on fait la preuve composante par composante, car pour une fonction à valeurs vectorielles il n'existe pas une égalité des accroissements finis, seulement une inégalité.

Les preuves de §24

Preuve de [24.3]. La preuve des équivalences et implication

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (iv)$$

est une copie conforme du cas de la convergence uniforme montré en [23.4]. Pour l'implication (i) \Rightarrow (iv) le schéma est le même qu'en [23.4], mais avec des petites modifications. Soit donc $K \subset U$ un compact. Alors par hypothèse, il existe pour tout $x \in K$ un voisinage ouvert V_x de x sur lequel la convergence est dominée. Il s'ensuit que la collection \mathcal{V} définie comme

$$\mathcal{V} = \{ V_x \mid x \in K \}$$

est un recouvrement de K par des ouverts. K étant compact, il existe donc un nombre fini V_{x_1}, \dots, V_{x_s} tels que $K \subset \cup_{i=1}^s V_{x_i}$. Par hypothèse il existe donc des fonctions μ -intégrables $g_i : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ telles que pour tout $x \in V_{x_i}$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a $|f(x, \omega)| \leq g_i(\omega)$. Il s'ensuit que la fonction $g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ définie par

$$g(\omega) = \max(g_1(\omega), \dots, g_s(\omega))$$

est aussi μ -intégrable. De plus, pour tout $x \in K$ il existe x_i (avec $i = 1, \dots, s$) tel que $x \in V_{x_i}$ et donc pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a la majoration

$$|f(x, \omega)| \leq g_i(\omega) \leq g(\omega) .$$

Autrement dit, on a montré la convergence dominée sur K . \boxed{CQFD}

Preuve de [24.5]. Soit $x \in U$ arbitraire, soit $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans U vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ et soit $h_n : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^p$ la suite de fonctions définie par

$$h_n(\omega) = f(y_n, \omega) .$$

Et par (iii) il existe un voisinage V de x et une fonction $g_V : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ μ -intégrable telle que pour tout $z \in V$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a la majoration $\|f(z, \omega)\| \leq g_V(\omega)$. Le but est maintenant de montrer que la suite h_n vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue avec $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\omega) = f(x, \omega)$ (μ -presque partout). La conclusion de ce théorème nous dira que F existe et est continue en x .

Commençons avec la remarque que les fonctions h_n sont mesurables selon l'hypothèse (i). Ensuite on invoque l'hypothèse (ii) pour dire qu'il existe un ensemble $D_1 \subset \Omega$ vérifiant $\mu(\Omega \setminus D_1) = 0$ tel que pour tout $\omega \in D_1$ la fonction $z \mapsto f(z, \omega)$ est continue en x . Il s'ensuit que pour tout $\omega \in D_1$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n, \omega) = f(x, \omega) .$$

La suite h_n converge donc μ -presque partout vers la fonction $h(\omega) = f(x, \omega)$. Et on termine avec la remarque que la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ nous dit qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $y_n \in V$ pour tout $n \geq N$. Pour tout $n \geq N$ on aura donc, selon l'hypothèse (iii), pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ la majoration $\|h_n(\omega)\| \leq g_V(\omega)$.

On remplit donc les hypothèses de [24.4] ce qui permet de conclure d'abord que la fonction h est μ -intégrable, ce qui dit que

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) \, d\mu(\omega) = \int_{\Omega} h \, d\mu$$

est bien défini. Le point $x \in U$ étant arbitraire, il s'ensuit que la fonction $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ est bien définie. Et ensuite qu'on a l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n \, d\mu = \int_{\Omega} h \, d\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = F(x) .$$

La suite y_n étant arbitraire, il s'ensuit que F est continue en x . Le point x étant arbitraire, on peut conclure que F est continue sur U . \boxed{CQFD}

Preuve de [24.6]. Selon (i) la fonction F est bien définie. Il faut donc montrer que sa dérivée partielle $\partial_i F$ existe sur U et qu'elle est donnée par la formule annoncée. Pour cela on prend $x = (x^1, \dots, x^p) \in U$ arbitraire, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans $U \setminus \{x\}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ suivant la i -ième coordonnée :

$$(26.42) \quad y_n \equiv (y_n^1, \dots, y_n^p) \quad \text{avec} \quad \forall j \neq i : y_n^j = x^j$$

et on définit les fonctions $h_n : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ par

$$h_n(\omega) = \frac{f(y_n, \omega) - f(x, \omega)}{y_n^i - x^i} .$$

Traduisons finalement l'hypothèse (iii) qui dit, à l'aide de nos équivalences [24.3], que pour notre x il existe un voisinage V de x et une fonction $g_V : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ μ -intégrable telle que pour tout $z \in V$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$ on a la majoration $\|(\partial_i f)(z, \omega)\| \leq g_V(\omega)$. Attention quand même, car il y a un petit piège : les fonctions $z \mapsto (\partial_i f)(z, \omega)$ n'existent pas toujours. Selon (ii) il existe un ensemble $D_o \subset \Omega$ tel que

$$(26.43) \quad \mu(\Omega \setminus D_o) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in D_o \text{ l'application } z \mapsto (\partial_i f)(z, \omega) \text{ existe.}$$

L'hypothèse (iii) dit alors plus précisément :

$$\forall z \in V \exists D \subset D_o : \mu(\Omega \setminus D) = 0 \text{ et } \forall \omega \in D : \|(\partial_i f)(z, \omega)\| \leq g_V(\omega) .$$

Ceci ne nous amène pas à une contradiction car on a demandé $\mu(\Omega \setminus D_o) = 0$ (on aurait eu un problème si c'était possible d'avoir $\mu(\Omega \setminus D_o) > 0$). On pourrait traîner l'ensemble D_o partout dans notre discussion, mais il est plus simple d'étendre la définition de la fonction $\partial_i f$ sur tout $\Omega \times U$ par (voir [24.7])

$$\forall \omega \in \Omega \setminus D_o \forall x \in U : (\partial_i f)(\omega, x) = 0 .$$

Avec ces préparations, le but est maintenant de montrer que la suite h_n vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue avec pour μ -presque tout ω : $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\omega) = (\partial_i f)(x, \omega)$. La conclusion de ce théorème nous dira que $\partial_i F$ existe et est donnée par la formule annoncée. ⁶

Pour montrer que la suite h_n vérifie les hypothèses de [24.4], commençons avec la remarque que les fonctions h_n sont mesurables comme différences de fonctions mesurables selon l'hypothèse (i) (et l'hypothèse qu'on a $y_n \neq x$). Ensuite on rappelle l'hypothèse (ii) pour dire qu'il existe un ensemble $D_o \subset \Omega$ vérifiant (26.43). Avec (26.42) il s'ensuit que pour tout $\omega \in D_o$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n, \omega) - f(x, \omega)}{y_n^i - x^i} = (\partial_i f)(x, \omega) .$$

6. On remarquera l'analogie avec la preuve de [24.5].

La suite h_n converge donc μ -presque partout vers la fonction $h(\omega) = (\partial_i f)(x, \omega)$. Une conséquence particulière est que la fonction $\omega \mapsto (\partial_i f)(\omega, x)$ est mesurable comme limite μ -presque partout d'une suite de fonctions mesurables.

Pour montrer que la condition [24.4.ii] est vérifiée pour notre suite h_n , il faut prendre un petit peu plus de précautions que dans la preuve de [24.5]. Sachant que V est un voisinage (ouvert) de x , il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on a l'inclusion (du pavé)

$$\prod_{j=1}^p]x^j - \varepsilon, x^j + \varepsilon[\subset V \subset U .$$

La condition $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ et (26.42) impliquent donc l'existence d'un $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $0 < |y_n^i - x^i| < \varepsilon$ (les autres coordonnées de y_n sont égales aux coordonnées correspondantes de x). Pour $\omega \in D_o$ on peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis et conclure que pour $n \geq N$ il existe $z = (x^1, \dots, x^{i-1}, z^i, x^{i+1}, \dots, x^p)$ avec $|z^i - x^i| < |y_n^i - x^i| < \varepsilon$ (et donc $z \in V$) tel qu'on a l'égalité

$$h_n(\omega) = \frac{f(y_n, \omega) - f(x, \omega)}{y_n^i - x^i} = (\partial_i f)(z, \omega) .$$

Selon l'hypothèse (ii) on a donc pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ la majoration

$$\|h_n(\omega)\| = \left\| \frac{f(y_n, \omega) - f(x, \omega)}{y_n^i - x^i} \right\| = \|(\partial_i f)(z, \omega)\| \leq g_V(\omega) .$$

On remplit donc les hypothèses de [24.4], ce qui permet de conclure d'abord que la fonction $\omega \mapsto (\partial_i f)(\omega, x)$ est μ -intégrable, ce qui dit que

$$\int_{\Omega} (\partial_i f)(x, \omega) \, d\mu(\omega)$$

est bien défini. Et ensuite qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_i f)(x, \omega) \, d\mu(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(y_n, \omega) - f(x, \omega)}{y_n^i - x^i} \, d\mu(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(y_n) - F(x)}{y_n^i - x^i} . \end{aligned}$$

La suite y_n étant arbitraire (avec la contrainte (26.42)), il s'ensuit que la dérivée partielle $(\partial_i F)(x)$ existe; le point x étant arbitraire, on peut conclure que $\partial_i F$ existe sur U .

Finalement, si $x \mapsto (\partial_i f)(\omega, x)$ est continue pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$, on peut appliquer [24.5] à la fonction $\partial_i f$ (n'oublions pas qu'on a montré que les fonctions $\omega \mapsto (\partial_i f)(\omega, x)$ sont mesurables) et conclure que $\partial_i F$ est continue. \square CQFD

Preuve de [24.13]. La preuve est une application directe de [24.12] dans le cas $\Omega = [a, b]$ muni de la mesure de Lebesgue. Les conditions sur F garantissent que les conditions [24.12.i] et [24.12.ii] sont vérifiées. Pour la condition [24.12.iii] on prend un compact $K \subset U$ et on remarque que la continuité de F sur le produit implique que la restriction de F au produit $K \times [a, b]$ est majorée :

$$\exists M \in [0, \infty[\quad \forall (z, t) \in K \times [a, b] : |F(z, t)| \leq M .$$

Mais la fonction constante M est intégrable sur $[a, b]$ (pour la mesure de Lebesgue). On a donc bien la convergence dominée sur tout compact de U (de la fonction F). La conclusion est donc donnée par [\[24.12\]](#). CQFD

Les preuves de §25

Bibliographie

Pour écrire ce texte, je me suis inspiré de plusieurs ouvrages, en particulier le polycopié [Aud12] de Michèle Audin ainsi que les livres [Rud66]/[Rud98] et [LFA77]. Les exercices viennent de plusieurs sources. Mes collègues O. Serman et I. Dell’Ambrogio m’ont fourni une grande partie. Une autre partie vient d’un vieux cours d’analyse complexe que j’ai trouvé dans mes archives sans en connaître l’origine. Bien que j’ai reçu de l’aide de plusieurs collègues (en particulier V. Thilliez que je remercie chaleureusement), la rédaction de ce texte reste mon entière responsabilité. Je remercie d’avance tout lecteur qui aura la gentillesse de m’indiquer des erreurs et/ou des détails à améliorer.

- [Aud12] Michèle Audin, *Analyse complexe*, polycopié, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2012 ?
- [Bor95] Émile Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. de l’École Norm. Sup. **12** (1895), 9–55.
- [Dug66] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1966.
- [Gen84] Angelo Genocchi, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, pubblicato con aggiunte del Dr. Giuseppe Peano, Fratelli Bocca, Torino, 1884.
- [GS65] Carl Friedrich Gauß and Heinrich Christian Schumacher, *Briefwechsel zwischen C.F. Gauß und H.C. Schumacher*, vol. 3, C.A.F. Peters, Altona, 1860/65, [Scan sur gauss.adw-goe.de](#), le site de l’Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.
- [Hal07] Thomas C. Hales, *The Jordan curve theorem, formally and informally*, The Amer. Math. Monthly **114** (2007), 882–894.
- [Jor87] Camille Jordan, *Cours d’analyse de l’École Polytechnique Tome troisième*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples*, 2^e ed., Dunod, Paris, 1977.
- [Pea57] Giuseppe Peano, « *Annotazioni* » al trattato di calcolo del 1884, *Opere scelte I, Analisi Matematica - Calcolo Numerico* (Roma) (a cura dell’UMI, Ugo Cassina, Giovanni Sansone, and Alessandro Terracini, eds.), Edizioni Cremonese, 1957, pp. 47–73.
- [Roe15] John Roe, *Winding around*, Student Mathematical Library 76, AMS, Providence, RI, 2015.
- [Rud66] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 1966.
- [Rud98] ———, *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices*, Dunod, Paris, 1998, Traduction en français de [Rud66].
- [Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

Index

- 1-forme (différentielle) complexe, 28
- analytique, 48
- application ouverte holomorphe, théorème de, 63
- arc, 8
- argument
 - d'un nombre complexe, 69
 - détermination continue de, 69
 - détermination principale, 70
- atlas holomorphe, 131
- Aut, 48, 136
- automorphisme, 48, 136
- biholomorphe, 48
- biholomorphisme, 48, 136
- bord topologique, 32
- branche continue, 71
- brisée, ligne, 24
- \mathbb{C} -dérivable, 48
- $\overline{\mathbb{C}}$, 117
- $C^{/k/}$, 9
- carte, 128
 - holomorphe, 131
- Cauchy
 - formule de, 57
 - produit de, 39
 - théorème de, 58
- Cauchy-Riemann, équations de, 48
- Cauchy-Schwarz, inégalité de, 29
- centre d'une couronne, 87
- cercle unité, 8
- changement de paramètre, 9
 - direct, 10
 - renversant, 10
- chemin, 8
- classe $C^{/k/}$, 9
- combinaison convexe, 84
- compact, 145
- compactification, 120
- concaténation, 11
- conjugaison complexe, 27, 164
- connexe
 - simplement, 83
- continuité dans un espace topologique, 148
- continuité uniforme, 148
- contour, 8
- contractile, 82
- contraction, 82
- convergence
 - dominée sur tout compact, 158
 - localement dominée, 158
 - localement normale, 153
 - localement uniforme, 151
 - normale, 153, 162
 - normale sur tout compact, 153
 - simple, 151
 - uniforme sur tout compact, 151
 - uniforme sur un ensemble, 151
- convergence dominée, 157
- convexe, 57
- cosinus, 42
- cosinus hyperbolique, 42
- courbe, 8
 - de Jordan, 8, 32
 - fermée, 8
 - paramétrée, 5
 - simplement fermée, 8
- couronne, 87
- couronne de convergence, 87
- Δ : triangle fermé, 34
- \mathbb{D} , 136
- ∂ , bord topologique, 32
- ∂_z , opérateur de dérivation complexe, 49
- $\partial_{\bar{z}}$, 49
- D'Alembert-Gauß, théorème de, 62
- dérivée complexe, 48
- dérivée extérieure (d'une fonction), 16
- dérivée totale, 16
- dérivation, 170
- détermination continue
 - de z^α , 72
 - de l'argument, 69
 - de la racine n -ième, 71
 - de... , 71
 - du logarithme, 69
- détermination principale
 - de l'argument, 70
 - du logarithme, 70
- développable (en série entière), 48
- développable en série de Laurent, 87

- de classe C^k par morceaux (sur un intervalle fermé borné), 6
- de classe C^k sur $[a, b]$, 6
- ∂ , opérateur del, 50
- del, opérateur, 50
- del-bar, opérateur, 50
- $\bar{\partial}$, opérateur del-bar, 50
- diamètre, 203
- différentielle (d'une application), 48
- direct, changement de paramètre, 10
- discret, 146
- disque
 - épointé, 87
 - de convergence, 38
 - ouvert, 28
- droite achevée, 36
- escalier du diable, 78
- espace projectif, 120
- étoilé, 57
- exacte, une 1-forme différentielle, 16
- fermée
 - 1-forme, 16
 - courbe, 8
- fonction entière, 62
- fonction exponentielle, 42
- fonction zêta de Riemann, 68
- formule de Cauchy, 57
- fraction rationnelle, 103
- GL, 137
- groupe
 - de Möbius, 139
 - des homographies, 139
 - général linéaire, 137
 - projectif linéaire, 139
 - spécial linéaire, 137
- holomorphe, 48
 - à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$, 126, 134
 - sur $\overline{\mathbf{C}}$, 125, 134
- homographie, 139
- homotope (courbe), 81
- homotope à un point, 82
- homotopie (entre courbes), 81
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 29
- indice (d'un point par rapport à une courbe), 76
- injection canonique (de \mathbf{R} dans \mathbf{C}), 27
- intégrale (d'une 1-forme sur une courbe), 17
- inversion globale holomorphe, 63
- inversion locale holomorphe, 60
- Jordan, courbe de, 8, 32
- lacet, 8
 - simplement fermé, 8
- Laurent, série de, 87
- Lebesgue, nombre de, 145
- ligne brisée, 24
- limite dans un espace topologique, 148
- limite inférieure, 37
- limite supérieure, 37
- Liouville, théorème de, 62
- logarithme
 - d'un nombre complexe, 69
 - détermination principale du, 70
- logarithme complexe
 - détermination continue de, 69
- logarithme népérien, 69
- longueur (d'une courbe), 9
- Möbius, transformation de, 139
- méromorphe, 93
 - en un point, 89
 - sur $\overline{\mathbf{C}}$, 125
- matrice Jacobienne, 48
- Mellin, transformée de, 111
- Morera, théorème de, 62, 79
- moyenne, propriété de la, 59
- multiplicité d'une racine, 60
- nombre de Lebesgue, 145
- ordre d'un pôle, 89
- ordre d'un zéro, 60
- $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$, 120
- pôle, 89
 - double, 89
 - simple, 89
- paramétrée par longueur d'arc, 44
- partie imaginaire, 27
- partie réelle, 27
- PGL, 139
- Poincaré, demi plan de, 66, 140
- Poincaré, disque de, 140
- point à l'infini, 123
- point d'accumulation, 146
- primitive holomorphe, 57, 62, 85
- principe du module maximum, 63
- produit de Cauchy (de deux séries entières), 39
- produit de Cauchy (de deux séries numériques), 39
- prolongement analytique, principe du, 61
- PSL, 140
- Pythagore, 29
- $\overline{\mathbf{R}}$, 36
- \mathbf{R} -dérivable, 48
- régulière, $C^{/k/}$ -courbe, 21
- résidu, 97
- racine, 60
- racine n -ième, détermination continue de, 71
- rayon de convergence, 38
- rectifiable, 8

- renversant, changement de paramètre, 10
- reparamétrage direct, équivalent par, 10
- reparamétrage, équivalent par, 10
- Riemann
 - fonction zêta de, 68
 - somme de, 13
 - sphère de, 117
- Rouché, théorème de, 100
- \mathbf{S}^1 , 8
- série de Laurent, 87
- série de Taylor, 51
- série entière, 37
- Schwarz
 - lemme de, 65, 136
 - principe de réflexion, 66
- segment orienté, 24
- sens négatif, 33
- sens positif, 33
- simplement connexe, 83
- simplement fermée, 8
- singularité
 - apparente, 89
 - effaçable, 89
 - essentielle, 89
 - illusoire, 89
 - isolée, 88
 - isolée ∞ , 125
- sinus, 42
- sinus hyperbolique, 42
- SL, 137
- somme de Riemann, 13
- sphère de Riemann, 117
- subdivision, 6
- théorème
 - application ouverte holomorphe, 63
 - Cauchy, 58
 - D'Alembert-Gauß, 62
 - Goursat, 58
 - inversion globale holomorphe, 63
 - inversion locale holomorphe, 60
 - lemme de Schwarz, 65, 136
 - Liouville, 62
 - Morera, 62, 79
 - principe de réflexion de Schwarz, 66
 - principe du module maximum, 63
 - Rouché, 100
- transformée de Mellin, 111
- transformation de Möbius, 139
- U, 141
- unitaire, groupe, 141
- valuation, 94
- voisinage, 145
- winding number, 77
- zéros isolés, principe des, 39, 60