M-62 Pr: Goubet Olivier

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction générale aux Equations différentielles

1. forme générale d'une équation différentielle, cas scalaire et vectoriel
2. notion d'ordre ; condition initiale, problème de Cauchy
3. définition d'une solution, solution maximale, solution globale
4. énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz
5. quelques techniques de résolution explicite (pour les équations linéaires scalaires,d'ordre 1, ou d'ordre 2 à coefficients constants, équations à variables séparées)
6. illustration sur des modèles : datation du carbone 14, équation du pendule, dynamique des populations.

Théorie de Cauchy

1. preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = F(t, y)$ dans R^n
2. applications à l'étude qualitative (non-intersection des graphes de solutions, théorème d'explosion en temps fini)
3. exemples d'études qualitatives (points d'équilibre, portrait dephase), exemples du mouvement du pendule, système de Lotka-Volterra.

Equations différentielles linéaires

1. Solutions des équations linéaires scalaires
2. lemme de Grön-wall
3. théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
4. structure de l'ensemble des solutions, Wronskien, méthode de variation des constantes
5. équations différentielles linéaires d'ordre n
6. équations à coefficients constants
7. portraits de phase de $Y' = AY$ dans R^2 , où A est une matrice à coefficients constants.Les 36 heures de TD comportent 10h de TP avec Python.

$\left(\lim_{t \to T_{max}} \|y(t)\| = -\infty \right)$

f cont $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$
$(t,y) \longmapsto f(t,y)$

Résoudre $\dot{y} = y' = f(t,y)$: (*)
chercher I de $\mathbb{R}$ & $y : I \to \mathbb{R}^D \in C^1$ q vérifie (*)

Équa° autonome : ne dépd pas de t

Pb Cauchy $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ cont

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases} \quad (P)$$

Rq $y(t_0) = y_0$, $t_0 = 0$

D/ Sol maximale

Sol de (P) : $y :]-T_{min}, T_{max}[\to \mathbb{R}^D$ de C^1 sol° de (P).

Sol globale si $T_{max} = \infty$, $-T_{min} = -\infty$

D f globalemt lipschitzienne p/r 2nde var y si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y,z \in \mathbb{R}^D$:
$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L\|y-z\|$$
(cte de lipschitz)

D f localemt lipschitzienne p/r 2nde var y si $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^D$, $\exists L_K$, $\forall t,y,z \in K$:
$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L_K\|y-z\|$$

P : si $f \in C^1 \Rightarrow f$ loc. lip.

Th Cauchy-Lipschitz (v1)
(PdC) H f glob lip p/r y $\Rightarrow \exists!$ y sol° glob à (P)

Th Cauchy-Lipschitz (v2)
(PdC) H f loc. lip p/r y alors 1) $\exists!$ y sol max à (P)
2) $]-T_{min}, T_{max}[$ int max $\Rightarrow$ alternative (d'explo°), soit $T_{max} = \infty$, si $y(t)$ sort de tt compact de $\mathbb{R}^D$ qd $t \mapsto T_{max}$ ($\lim_{t \to T_{max}} \|y(t)\| = +\infty$)

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ cont, $A \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D \in C^1$

$y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t b(s) e^{a(t-s)} ds$ p MVC

D Exponentielle de mat : mat $\longrightarrow$ $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Série normalt CV ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dc CV.

L $t,s \in \mathbb{R}$, $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA}$

Calculer e^A ? $\to$ $\boxed{M1}$ diago/trigonaliser A ; $\to$ $\boxed{M2}$ Th Cayley-Hamilton.

$\boxed{M1}$ $P^{-1}AP \to P^{-1}e^AP$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{M2}$ $P_A(X) = X(X-2)$, DE de X^m par $P_A(X)$, $\exists Q(X)$, $X^m = P_A(X)Q(X) + a_mX + b_m$.
$A^m = 0 + a_mA + b_m Id$
$X^m = X(X-2)Q(X) + a_mX + b_m$
$X=0$: $0 = 0 + 0a_m + b_m$
$X=2$: $2^m = 0 + 2a_m$ $\Rightarrow A^m = 2^{m-1}A$, $m \geq 1$.
$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = Id + \sum \frac{A^m}{m!} = Id + \left(\sum \frac{2^{m-1}}{m!}\right)A = Id + \frac{1}{2}[e^2 - 1]A$

@ Résoudre $x'' + 2x' + x = 0$

Th Décomposit° de Dunford
$A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\exists (D,N)$ diagonalisable & nilpotent : $A = D + N$ & $DN = ND$, $e^{tA} = e^{tD}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(tN)^j}{j!}\right)$

Prop $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, l'ens des soluts de $y' = Ay$ est ev de dim d.

Résol° éq° non-linéaire
L soit y une solut, f $g(y(t))$ ne pt pas s'annuler.

EDO coeff cte $y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$,
$P(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ racines réelles & $\mu_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_r$ racines d'imag. $\neq 0$.
L'espace des soluts est engendré p $e^{\lambda_j t}t^k$, $0 \leq k \leq i_j - 1$ où i_j est multiplicité de λ_j et $e^{a_jt}\cos(b_jt)t^k$, $e^{a_jt}\sin(b_jt)t^k$ où $\mu_j = a_j + ib_j$.

EDO M62.

$\Phi : E \to E$, $y \mapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$

Pr $0 \leq t \leq T$, $\|\Phi^k(y) - \Phi^k(z)\|_T \leq \frac{(LT)^k}{k!}\|y - z\|_T$

Th pt fixe revisitée
(E,d) espace métriq complet, $\Phi : E \to E$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, Φ^k st contractante $\Rightarrow \Phi$ admet un uniq pt fixe.

Cylindre de sécurité (CDS)
$\mathcal{C} = \{(t,y), |t| \leq T, \|y - y_0\| \leq r\}$

D CdS est un cylindre C tq si y solu° de (I), y ne pt pas quitter le cylindre C par le bord $\|y - y_0\| = r$.

L $\exists$ CdS.

Prop (CL v3)
(P) où f cont & loct lipschitz p/r y $\Rightarrow \exists$ T approximatif, (P) admet une uniq solu° C^1 sur $[-T, T]$.

(E_h) $ay'' + by' + cy = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
(E_c) $ax^2 + bx + c = 0$
- $\Delta > 0$: $y_h(x) = \lambda_1 e^{r_1x} + \lambda_2 e^{r_2x}$
- $\Delta = 0$: $y_h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}$
- $\Delta < 0$: $y_h(x) = \lambda_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

racines conj $\alpha \pm i\beta$.

(1)

Quoi ? @ pendule
équ autonome
Pb de Cauchy
D sol max / globale
D glob/loc. lipschitz
P si f $C^1 \Rightarrow f$ loc lips.
Th Cauchy Lipschitz v1/v2
@ Syst diff à coeff cte
$\boxed{M1}$ V° cte / des ctes
D exponentielle de mat
L expo.
Appli

III/ Systèmes différentiels autonomes

SD autonome : ne dépd pas de t.

$$(P) \begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^D \end{cases}$$ ← indépendant de t

Hypo : $f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ cont, loc. lipschitz.

Rq : $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}^D$; $z \in \mathbb{R}^{D+1}$

$z = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, $\dot{z} = \begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$

D/P $\dot{y} = f(y)$ où f cont, loc. lipsch. sur $\mathbb{R}^D$.

D Orbite / trajectoire
si y sol° de (E) $\Rightarrow \{y(t), t \in]-T_{min}, T_{max}[\}$

P 1) 2 orbites du système distinctes ou confondues.
2) On note $s(t)y_0 = y(t)$: les solu°s de $\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $s(t+s)y_0 = s(t)s(s)y_0$
3) si une orbite se recoupe $\Rightarrow$ traj. périodiq

Rq : Une traj périodiq est t déf $\forall t \in \mathbb{R}$, est bornée.

Elle ne pt sortir de tt compact.
Ppe d'explo° $\Rightarrow$ sol° globale

D $y^* \in \mathbb{R}^D$ point fixe pr SDA $\dot{y} = f(y)$ si $f(y^*) = 0$
$t \mapsto y^*$ sol° stationnre de $\dot{y} = f(y)$
$\frac{d}{dt}y^* = 0 = f(y^*)$

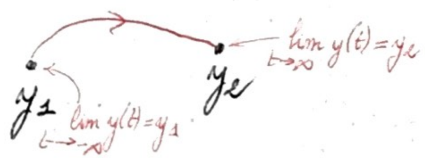
(C) $\{y(t)\}$ trajectoire déf $\forall\, t \geq 0$: $[T_{max} = \infty]$

si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y^* \in \mathbb{R}^D \Rightarrow y^*$ pt fixe

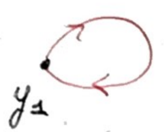
---

(D) Orbites hétéroclines & homoclines.

▸ Hétéro :



▸ Homo :



$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = y_1$

(R) Une traj. ds $\mathbb{R}^2$ est donnée p $y = \varphi(x)$; $y(t) = \varphi(x(t))$.

$\dot{y} = \varphi'(x)\,\dot{x}$. Pente de la tangente au point (x,y) donnée p $\varphi'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

(D) $\alpha \in [0, \infty]$, l'isocline $I_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \alpha\}$

(en pratiq calculer I_0 & I_∞)

tangente $=$ tangente $\parallel$

Pts fixes $= I_0 \cap I_\infty$.

(L) SDA $\lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}$ ← pts fixes

(D) (Intégrale première)

$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a la ppté,

si $(x(t), y(t))$ soluθ de (ED) $\Rightarrow t \mapsto E(x(t), y(t)) =$ cte

---

(a) Chercher E : $\dfrac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 0 = \dfrac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial E}{\partial y}\dot{y}$

A à coeff réels

(D) (Hyperbolicité)

$\binom{a}{b}$ pt fixe hyperboliq si $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow Re(\lambda) \neq 0$.

Cas hyperboliq

1° cas	vp ≠, m̂ signe	nd répulsif $0 < \lambda_1 < \lambda_2$	nd attractif $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	
2° cas	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	col		
3° cas	vp double	noeud dégénéré		
4° cas	vp conjuguées $Sp A = \{\alpha + i\alpha, \alpha - i\alpha\}$	foyer répulsif $\alpha > 0$	foyer attractif $\alpha < 0$	Centre $\alpha = 0$

Cas non-hyperboliq : $Sp\,A = \{ia, -ia\}$, $a \neq 0$.

(D) (Système linéarisé en y^*) $\dot{z} = DF(y^*)\,z$

(Th) (Hartman-Grobman)

Spps 0 pt fixe hyperboliq pr le système linéarisé alors $\exists\, V_{y^*}$ ds $\mathbb{R}^2$ et V_0 ds $\mathbb{R}^2$, $h : V_0 \to V_{y^*}$ homéomorphisme (bijecθ bicont) tq $y(t) = h(z(t))$ et y^* a m̂ nature que 0.

$\Phi : \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix}$ applicaθ dite "de premier retour de Poincaré"

(D) (f de Lyapunov)

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positive, cont ; L f de Lyapunov si

(i) L décroît le long des trajectoires

(ii) si $\exists\,]t_1, t_1 + \varepsilon[$, $\forall\, s \in\,]t, t+\varepsilon[$, L est cte

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ point fixe.

Idée : Pr ce syst 2×2, l'ens des soluθs S est
$S = \{$ solθ particulière $+ S_H\}$ où S_H : ens solθ syst $\hat{h}$
$S_H = \left\{ e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\}$ est ev réel de dim 2.
$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S_H$ est isomorphisme entre e.v.
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ Un élt ev de dim 2 est e.affin dim 2.

- $t \mapsto f(t,y)$ cont sr $\mathbb{R}$ car composée & ô f cont
- Vérifier f-lipschitz : $|f(t,y) - f(t,z)| \leq M|y-z|$.
- Pr résoudre $\dot{y} = -y - 2t \Leftrightarrow$ fct^{R} intégrant e^t.
- $\dot{y} = |y + t| - t \geq 0$ pr $t<0$, $t \mapsto y(t) \nearrow$, vu que $y(0) = 0$, nécessairt $y(t) \leq 0$; $y(t) + t \leq 0$ et $\dot{y} = -y - 2t$.
- $\underline{t \geq 0}$ petit $y(t) + t = t + o(t) > 0$ car $y(0) = 0$, $\dot{y} = y + t - t = y \Rightarrow y(t) = 0e^t = 0$.
- Utile de multiplier par $\dot{y}$.
- Syst autonome : 2 traj. ne se coupent pas sauf si elles st confondues.
- Mq global lipschit, mq coeff $DF(Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ st bornés.
- si y borné sr I, p ppe d'exploθ, on a $I = \mathbb{R}$.

(Th) d'exploθ : si on ne pt pas appliquer (CL) global

- matrice si linéarité
- $e^{-tA} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tA)^n}{n!} = I + \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1)A$.
- $P^{-1} = \frac{1}{\det} \operatorname{com}^t(P)$ 4 $\operatorname{com}(A) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$
- $F \in C^\infty$ car polynôme de localt lipschitz
- soluθ stationn^{R} : $\dot{y} = 0$

- Dmq $\forall t \in$ interv maximal d'$\mathcal{A}$, on a $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ 4 (H) $x(0) > 0$, $y(0) > 0$
Spps p contradicθ $\exists\, t \in]T^-, T^+[$ tq $x(t) \leq 0$. Comme x cont & $x(0) > 0$,
p TVI, $\exists\, t^* \in]T^-, T^+[$ tq $x(t^*) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soluθ (SD) $\begin{cases} \dot{Y} = F(Y) \\ Y(t^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*) \end{pmatrix} \end{cases}$ sur $]T^-, T^+[$
Or l'uniq soluθ de (*) est $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*)e^{-c(t-t^*)} \end{pmatrix}$ ep $x(0) = 0$ contradicθ
$\Rightarrow x > 0$ sr $]T^-, T^+[$, de m̂ $y > 0$ $\forall t \in]T^-, T^+[$.

- $x > 0 \Rightarrow \dot{x} \geq x$; on a pr $0 \leq t \leq t^*$, $1 \geq x(t) \geq x_0 e^t$
$\Rightarrow t \leq \ln \frac{1}{x_0}$ dc $t^* \leq \ln \frac{1}{x_0}$.
- Déterminer pf en cherchant $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$
- $\forall \varepsilon > 0$, f $V(x,y) = x^2 + y^2$ est f de Lyapunov pr $\mathcal{V}$ de 0 $\begin{cases} \to V \text{ cont, minorée} \\ \to V \searrow \text{ le long traj} \\ \to \text{si } \exists\,]t_0, t_0+\varepsilon[\text{ tq } V \equiv cte \Rightarrow (x,y) \text{ pf} \end{cases}$
- $\frac{\partial E}{\partial x}\, b\, \frac{y - y^*}{y} = \frac{\partial E}{\partial y}\, d\, \frac{x - x^*}{x}$, on cherche $E(x,y)$ de la forme $E(x,y) = G(x) + H(y)$
$G'(x)\, \frac{by - y^*}{y} = H'(y)\, \frac{dx - x^*}{x}$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} G'(x) = \lambda\, \frac{dx - x^*}{x} \\ H'(y) = \lambda\, \frac{by - y^*}{y} \end{cases}$
Poser $\lambda = 1$, $G(x) = dx - dx^* \ln x$
$H(y) = by - by^* \ln y \Rightarrow E(x,y) = dx - c\ln x - by - a\ln y$

A à coeff réels
0.
nachf - 0
Contre $x=0$
$\exists\, \mathcal{V}_{y^*}$
chéma
autre que 0.
"...n de Poincaré"
+ cte

Th (ppe d'invariance de la Salle)

soit un système ≠ L Lyapunov, soit $(x(t), y(t))$ traject qq ⇒ tte vlr d'adhérence de cette trajec est un PF.

$$(x(t_n), y(t_n)) \longrightarrow (x^*, y^*) \quad \text{ie} \quad t_n \to \infty.$$

L de Grönwall

si $y(t)$ et $a(t)$ f cont tq $\dot{y} = \frac{dy}{dt} \leq a(t)\,y(t)$

$$\Rightarrow y(t) \leq y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \quad \text{pr } t \geq t_0.$$

ep si $y(t_0) = 0 \Rightarrow \forall t \geq t_0,\ y(t) \leq 0.$

Trouver soluts de $x''+2x'+x=0$

soit $y=\dot{x}$, $Y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $Y'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $Y'=AY=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}Y$.

① ① VP de A : $x^2+2x+1=0 \Rightarrow \lambda=1$ (VP).

$x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$ où a,b param connus.

Cor Cauchy-Lip

S = ens des soluts de (E) : ev dim 2.

Calculer a,b en f de $x_0=x(0)$, $y_0=x'(0)$.

$x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$.

DL en 0 $\quad x(t)=ae^{-t}+bte^{-t}$ $\quad$ M1

$$=a(1-t+o(t))+bt+o(t)$$
$$=a+t(b-a)+o(t)$$
$$=x(0)+x'(0)(t)+o(t)$$

$\begin{cases}a=x(0)\\b-a=x'(0)\end{cases} \Rightarrow x(t)=x(0)e^{-t}+x'(0)e^{-t}$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}$, calculer e^{tA} $\quad$ M2

$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=e^{tA}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\to -1$ VP de A $\quad \to A+Id=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad \to (A+Id)^2=0$

$e^{tA}=e^{-t}[Id+t(A+Id)+0]=e^{-t}\begin{pmatrix}1+t&t\\-t&1-t\end{pmatrix}$

$e^{tA}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\Big(\ \cdots$

Exemples $\quad$ Résoudre $t\ddot{y}+2\dot{y}+2ty=0$.

$Y=\begin{pmatrix}y\\\dot{y}\end{pmatrix}$, $\begin{cases}\dot{y}=z\\ \dot{z}=-\frac{2}{t}z-2y\end{cases}$ $\quad$ Je peux chercher sol° ds $I_+=]0,\infty[$

S = ev dim 2, $\dot{Y}=A(t)Y$.

Cherchons une solut sous la forme DSE $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$, $R>0$ et $|t|<R$, et y est dérivable $\forall t\in]-R,R[$.

$\dot{y}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$, $\ddot{y}(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$. Je cherche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+1}=0$$

$$\sum n(n-1)a_nt^{n-1}+2\sum na_nt^{n-1}+2a_1+\sum a_nt^{n+1}=0$$

$$2a_1+\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)t^{j+1}a_{j+2}+2\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)a_{j+2}t^{j+1}+\sum_{j=0}^{\infty}2a_jt^{j+1}=0 \qquad n=j+2$$

$t=0$, $a_1=0$ $\quad (j+2)(j+3)a_{j+2}+2a_j=0 \iff a_{2n+1}=0$

$(2n+2)(2n+3)a_{2n+2}+2a_{2n}=0 \iff a_{2n+2}=\dfrac{-2a_{2n}}{(2n+2)(2n+3)}$

Par crit de d'Alembert, $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=L$, de RDC $R=\infty=\frac{1}{L}$

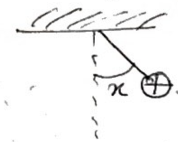
$\exists y\in C^1(\mathbb{R})$ à (E) déf f DSE.

$t\ddot{y}+2\dot{y}+2ty=0$, on cherche $y=y_1(t)z(t)$

E1

①$_1$ Pendule pesant (sans frottement)

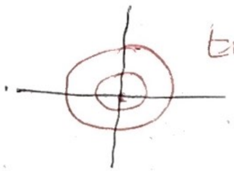
$\ddot{x} = -\sin x$ (syst diff auton sur $\mathbb{R}^2$) $\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = -\sin x\end{cases}$



②$_2$ "linéarisation ①$_1$" $\sin x \simeq x$, si x suffisamment petit : $\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = -x\end{cases}$

↳ $z(t) = x + iy$; $\dot z = y - ix = -iz$, $z(t) = z_0 e^{-it}$

↳ Orbites : $\{e^{-it}\}_{t\in\mathbb{R}} = \{e^{-it}e^{i\theta}\}_{t\in\mathbb{R}}$

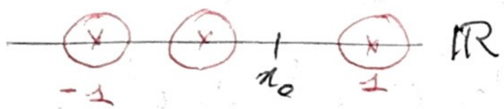


Trajectoire

↳ Pts fixes : $Y^* = \begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}$ pt fixe.

③$_3$ Déterminer les trajectoires de $\dot x + x^3 - x = 0$.

⟹ Pts fixes : ? $\dot x = x - x^3$ ainsi $f(x) = x - x^3 = 0$ si $x = \{0, -1, 1\}$



(*) $\begin{cases}\dot x = x - x^3\\ x(0) = x_0 \in]0,1[\end{cases}$

→ 2 traje. ne se coupent pas, les sol^o de (*) : $x(t) \in]0,1[$.

→ Vu que $x(t)$ piégée ds le compact $[0,1]$, elle est déf ∀ tps d'après ppe d'explos^o.

$\dot x = x(1-x^2) \geq 0$ pr $x \in [0,1]$; $t \mapsto x(t)$, $\mathbb{R} \mapsto]0,1[$ ↗ $\begin{cases}\lim_{t\to-\infty} x(t) = x^- \ \exists\\ \lim_{t\to\infty} x(t) = x^+ \ \exists\end{cases}$.

(f ↗ majorée admet une limite)

orb. hétéroclines

⇝ ① pcédt : ↗ x^-, x^+ pts fixes.

Affirmat^o (orbite noire) : $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ en ↘

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\dot x = x(1-x^2) \leq 0}$

$\exists\ -T_{min} < \infty$ tq $x(t) \xrightarrow[t\to -T_{min}]{} \infty$, si $x(t)$ sol^o, $-x(t)$ sol^o : ens des orbites sym /r à l'origine.

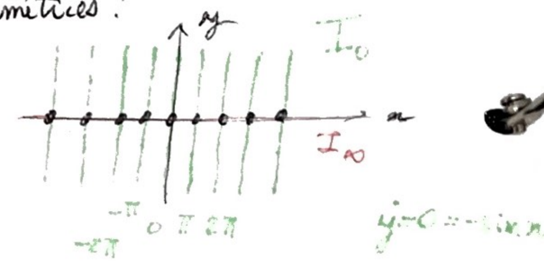
Exemple d'étude SDA pendule pesant

(P) $\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = -\sin x\end{cases}$ → Étude qualitative des solut^{os}. → Vérifions cadre ① de (P).

$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\ -\sin x\end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glob lips., ! solut^{os} de (P) st globales

→ Isoclines ? Symétries ?

$\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = -\sin x\end{cases}$



lieu où $\dot x = 0 = y$

Pts fixes $= I_0 \cap I_\infty$.

$y = y_1(t)\, z(t)$ $\qquad t\ddot{y} + 2\dot{y} + 2ty = 0$

$\dot{y} = \dot{y}_1(t)\, z(t) + y_1(t)\, \dot{z}(t)$

$\ddot{y} = \ddot{y}_1 z + \dot{y}_1 \dot{z} + \dot{y}_1 \dot{z}_1 + y_1 \ddot{z}_1$

$t\ddot{y}_1 z + t\dot{y}_1 \dot{z} + t\dot{y}_1 \dot{z}_1 + ty_1 \ddot{z}_1 + 2ty_1 z = 0$

$+2\dot{y}_1 z \qquad + 2y_1 \dot{z}$

$2t\dot{y}_1 \dot{z} + 2y_1 \dot{z} + ty_1 \ddot{z}_1 = 0$

$a\dot{y}_1 + by_1 = 0 \rightarrow a = 2t\dot{z}$

$b = 2\dot{z} + t\ddot{z}$

$a \neq 0$

$\dot{y}_1 + \frac{b}{a} y_1 < 0$

$= - \int_0^x \frac{2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)}{2t\,\dot{z}(t)}\, dt$

$a(x)$

$-\int a(x)$

$\dot{Y} + AY = B(t) \rightarrow Y_0 e^{At},\ Y_0 \in \mathbb{R}^2$