TD M41

C1 Suites de fS.

R → • CV simple

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, x}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

• CV uniforme

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

Ex1 étude CV simple & uniforme.

① $f_n(x) = x . \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $A = \mathbb{R}^+$, $n \geq 1$.

CV simple.

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On doit étudier limite de $f_n(x)$ qd $n \to \infty$.

▶ pour $x = 0$: $f_n(0) = 0 . \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc $(f_n(0))_{n \geq 1}$ CV vers 0.

▶ pour $x > 0$:

$\lim_{n \to \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$. D'où par continuité du logarithme, $\lim_{n \to \infty} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) = \ln(x)$

D'où pour $x > 0$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = x . \ln(x)$

posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x.\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

on a dc démqé sdf $(f_n)_{n \geq 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$.

CV uniforme.

Rq $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ est une f cont sur $\mathbb{R}$, à valeurs ouverts ds $]0, +\infty$. Comme ln est cont sur $]0, +\infty[$ ced que pr tt $n \geq 1$, la f f_n est cont sur $\mathbb{R}_+$.

(q°) limite simple est-elle cont ?

↳ si elle n'est pas cont $\not\Rightarrow$ (f_n) CV unifomt.

R → TH si $f_n : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A $\forall n \geq 1$,
et si $(f_n)_{n \geq 1}$ CV $\boxed{\text{uniformément}}$ vers f sur A,
alors f est cont sur A.

Adit, si $(f_n)_{n \geq 1}$ CV simplement vers f sur A, si $f_n : A \to \mathbb{R}$ cont mais f n'est pas cont alors $(f_n)_{n \geq 1}$ ne CV pas uniformément vers sur A.

$\boxed{\text{contraposée}}$ ↳ $\boxed{M}$ pr mq qu'on n'a pas CV uniforme.

on mq $\forall n \geq 1$, f_n est <u>cont</u> sur A.

⊛ $(f_n)_{n\geq 1}$ CV simplement vers f sur A.

⊛ f n'est pas cont sur A.

on pt <u>end</u> $(f_n)_{n\geq 1}$ ne CV pas uniformément.

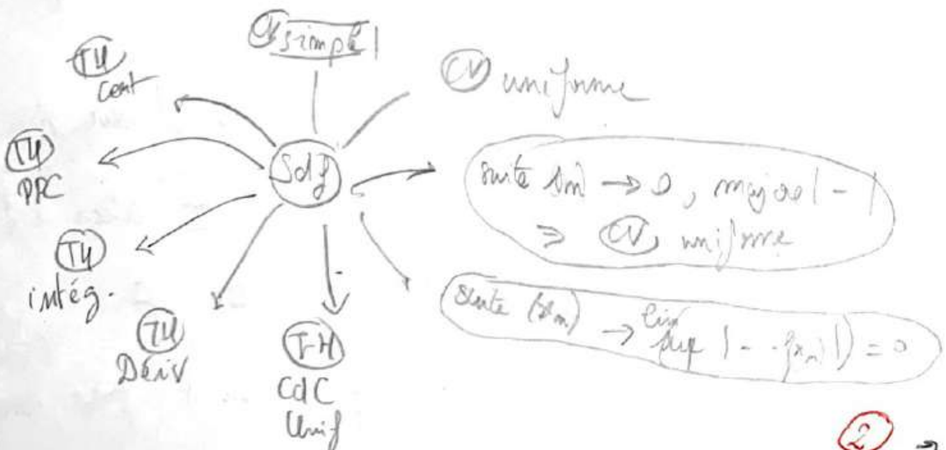
Rq <u>ici</u> $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim x.\ln(x) = 0 = f(0)$

Donc f est <u>cont</u> sr $[0,+\infty[$.

On ne pt pas conclure sr CV uniforme.



Pr étudier CV uniforme, on doit étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \right) \overset{?}{=} 0$$

(soit on le calcule, soit estimeᶿ, soit majoraᶿ, soit trouver une suite q vérifie l'égalité)

Il est suffisant de trouver une suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ q tend vers 0 tq, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n$

en effet, <u>ç ed</u> $0 \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$.

<u>TDG</u> $\rightarrow$ $\sup |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$.

$f_n(x) = x.\ln(x + \frac{1}{x})$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

<u>$x > 0$</u>

$$|f_n(x) - f(x)| = |x.\ln(x + \tfrac{1}{n}) - x.\ln(x)|$$

$$= |x(\ln(x + \tfrac{1}{n}) - \ln(x))| = \left|x.\ln\left(\frac{x + 1/n}{x}\right)\right|$$

$$= \left| x \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right|$$

② → tracer ∀ fs ?

$1+\frac{1}{nx} > 1 \Rightarrow x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)$

$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)$.

R* $\forall t\geq 0$, $\ln(1+t)\leq t$. (*)

• soit : pr dmq (*), on pt étudier

$$f(t)=t-\ln(1+t), \quad t\geq 0.$$

• soit avec $\boxed{\text{IAF}}$ appliqué à $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \ln(1+t)$.

f est cont & dérivable sur $[0,\infty[$.

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}, \quad t\geq 0.$$

D'où $\sup_{t\geq 0}|f'(t)| = \sup_{t\geq 0}\frac{1}{1+t} = 1$

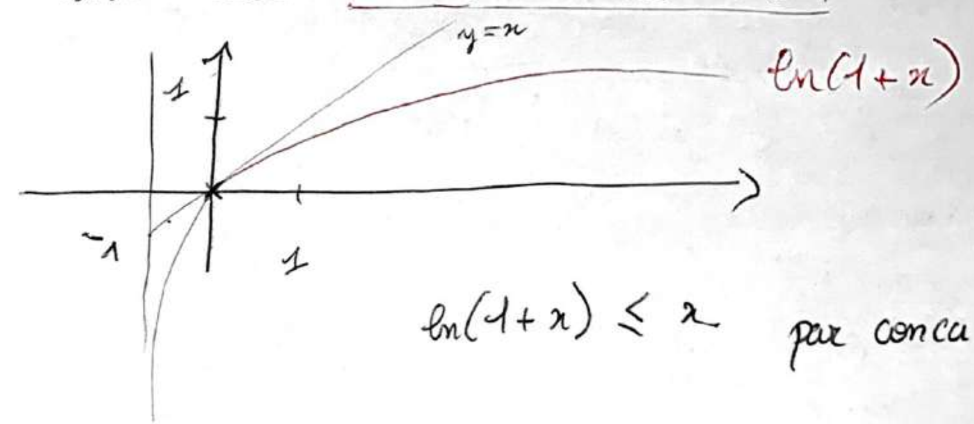
$\boxed{\text{IAF}} \Rightarrow \forall t\geq 0 ;\ |f(t)-f(0)| \leq \left(\sup_{u\geq 0}|f'(u)|\right)(t-0)$

$\qquad \| $

$|\ln(1+t)-\ln(1)| \leq t$

$\ln(1+t)\leq t$

• soit avec concavité de ln :



$\ln(1+x)\leq x$ par concavité.

Ainsi $\ln(1+t)\leq t$, $\forall t\geq 0$. (*)

$|f_n(x)-f(x)| = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right) \leq x\cdot\frac{1}{nx} = \frac{1}{n}$

(d'après (*) as $t=\frac{1}{nx}$)

D'où $\forall x>0$, $|f_n(x)-f(x)|\leq \frac{1}{n}$.

cette inégalité est vraie pr $x=0$ car $f_n(0)-f(0)=0$

Donc $0\leq \sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}$

TDG $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = 0$.

dc $(f_n)_{n\geq 0}$ CV uniformément vers f sur $[0,\infty[$

2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{1+nx}{2+nx^2}$.

CV simple : si $x=0$: $f_n(0) = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

si $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+nx}{2+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{nx^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$.

dc si on def $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

on a mqé $(f_n)_{n\geq 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

CV uniforme

On n'a pas CV uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}$ car :

- $\forall n>0$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est cont sur $\mathbb{R}$.
- $(f_n)_{n\geq 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
- f n'est pas cont sur $\mathbb{R}$ (car f n'est pas cont en 0 :

$\dfrac{1+n(x-1)}{2+n(x-1)^2}$ 4 → étude $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty \neq f(0)$

Donc (f_n) ne CV pas uniform^t vers f sur $\mathbb{R}$.

exercice étudier CV uniforme sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ où $a>0$.

+ex2

suite 2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{1+nx}{2+nx^2}$

(f_n) CV simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1 Q CV uniforme sur $\mathbb{R} \setminus [-a,a]$, $a > 0$?...

pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1+nx}{2+nx^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x-2|}{|x|\,|2+nx^2|}$$

$$\frac{|x-2|}{|x|\,|2+nx^2|} \leq \frac{1}{a} \frac{|x-2|}{|2+nx^2|}$$

$\rightarrow |nx^2+2| \geq nx^2 - 2$ $\triangle$ I

$|x| \geq a > 0 \Rightarrow nx^2 - 2 \geq na^2 - 2 > 0$

si $n > \dfrac{2}{a^2}$.

D'où $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{|x-2|}{a(nx^2-2)} \leq \dfrac{|x|+2}{a(nx^2-2)}$

5

$\varphi(t) = \dfrac{t+2}{nt^2-2}$, $t \geq a > 0$.

Donc $\sup\limits_{|x| \geq a} |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\sup\limits_{t \geq a} \varphi(t) \right) \times \dfrac{1}{a}$

on vérifie $\forall t \geq a$, $\varphi'(t) < 0$.

t	a	$+\infty$
$\varphi(t)$	$\varphi(a)$ $\searrow$	0

Donc $\sup\limits_{|x| \geq a} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{a} \varphi(a) = \dfrac{a+2}{a(na^2-2)}$

or $\dfrac{a+2}{a(na^2-2)} \sim \dfrac{a}{na^3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

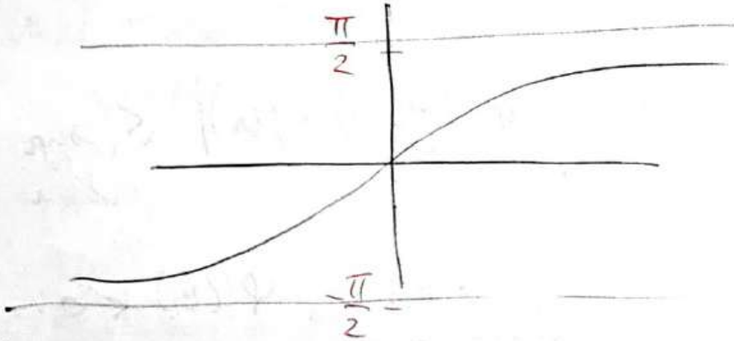
D'où $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{|x| \geq a} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\Rightarrow (f_n)_n$ CV bien uniformément sur $\mathbb{R} \setminus [-a,a]$ $\forall a > 0$.

⚠ $\not\Rightarrow$ $(f_n)_n$ CV uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) $f_n(x) = \arctan(nx)$, $A = \mathbb{R}$.

CV simple ?



- si $x=0$: $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)=0$
- si $x>0$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} := f(x)$
- si $x<0$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\pi}{2} := f(x)$

si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \pi/2 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Dc la suite de fonctions $(f_n)_n$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

On Rq $\forall n \geq 0$, f_n est cont sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas cont^t sur $\mathbb{R}$.

Dc on pt cd $(f_n)_{n\geq 0}$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4) $f_n(x) = \sqrt{n}\cdot x \cdot e^{-x n^2}$, $A = \mathbb{R}^+$

CV simple :

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha e^{-n^\beta} = 0 \quad , \alpha, \beta \quad \left(\text{limite croissance comparée}\right)$$

$$f_n(x) = x\sqrt{x}\, e^{-(n\sqrt{x})^2}$$

Posons $u := n\sqrt{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $x \neq 0$.

$$f_n(x) = x\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^{1/2} \cdot e^{-u^2} = x^{3/4} \cdot u^{1/2} \cdot e^{-u^2} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

$$f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

CV uniforme

car $f(x)=0$ et $f_n(x) \geq 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x)$$

- f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\left[e^{-xn^2} + x(-n^2)e^{-xn^2}\right]$$

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\, e^{-xn^2}(1-n^2), \ \forall x \geq 0.$$

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1-n^2x \geq 0 \iff \frac{1}{n^2} \geq x.$$

x	0	$\frac{1}{n^2}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	ϕ	$-$
$f_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sqrt{n} \times \frac{1}{n^2} \times e^{-\frac{1}{n^2}\times n^2} = \frac{e^{-1}}{n^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\geq 0}$ CV uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 : $f_n(x) = \dfrac{2n x^2}{n^2x^4+1}$, $x \in A = \mathbb{R}$

1) CV simple ?

$$f_n(x) = \frac{2n x^2}{n^2\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2x^2}{n\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right)}$$

si $x \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} n\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$, dc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

si $x=0$: $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ccl $(f_n)_n$ CV simplement vers la f idt^gt nulle.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 0$$

2) CV uniforme sur $\mathbb{R}$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)$$

$\boxed{M1}$ - calcule $f_n'(x)$

- tab de variaθ

$\boxed{M2}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2\times n\times \frac{1}{n}}{n^2\times\frac{1}{n^2}+1} = 1$$

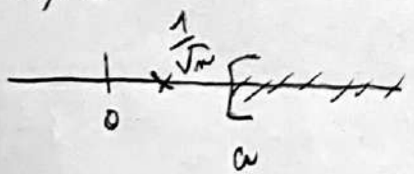
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|$$

$\Rightarrow (f_n)_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) CV uniforme sur $[a,+\infty[$, $a>0$

⚠ ici on ne pt pas écrire que :

$$\sup_{x\in[a,\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[a,\infty[} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$



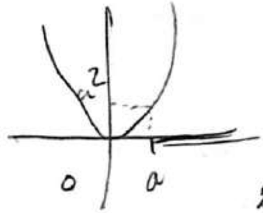
pb

$x\geq a$, $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1} \overset{?}{\leq} \dfrac{2nx^2}{n^2x^4}$

car $n^2x^4+1 \geq n^2x^4 > 0$

D'où $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{2}{nx^2}$

$x\geq a>0 \Rightarrow x^2\geq a^2 \Rightarrow 0\leq f_n(x)\leq \dfrac{2}{na^2}$



$$\sup_{x\geq a} f_n(x) \leq \frac{2}{na^2}$$

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{2}{na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_n$ CV uniformément vers f sur $[a,\infty[$.

$\boxed{M2}$ $f_n'(x) =$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$		$-$
$f_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$,

$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < a$.

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(a)| = f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- R9 si $(f_n) \xrightarrow{\text{uniformt}} f$ sur A_1 et A_2
  alors $(f_n) \xrightarrow{\text{uniformt}}$ vers f $A_1 \cup A_2$.

comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < a$.

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(a)| = f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- (Rq) si $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}^{\text{ment}}} f$ sur A_1 et A_2 alors $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}^{\text{ment}}}$ vers f $A_1 \cup A_2$.

Ex3 $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$, $x \in A = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$

1) CV simple sur A

- $x = 0$, $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $x > 0$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{nx}{nx} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Donc $(f_n)_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) CV uniforme sur $[0,1]$?

on Rq que f n'est pas cont sur $[0,1]$, f n'est pas cont en 0 & c̑ les f_n st cont sur $[0,1]$, on ne pt pas avoir CV uniforme sr $[0,1]$.

CV uniforme sur $[1, \infty[$

⚠ On ne pt pas écrire que $\sup_{x \in [1,\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})|$ car $\frac{1}{n} \notin [1, \infty[$.

. Pour $x \geq 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \frac{1}{nx+1}$

$x \longmapsto \frac{1}{nx+1}$ est ↘ sr $[1, \infty[$

(comme inverse d'une f ↗).

Donc $\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1) - f(1)| = \frac{1}{1+n}$

comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [1,\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$(f_n)_n$ CV uniformément sur $[1, \infty[$.

3) $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, $x \in [0,1]$

a) CV simple de (F_n)

Pr $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{nt}{nt+1}\, dt$

Posons $u = nt+1$, $du = n\,dt$, $dt = \frac{du}{n}$

D'où $F_n(x) = \frac{1}{n}\int_1^{nx+1} \frac{u-1}{u}\, du$

$F_n(x) = \frac{1}{n}\int_1^{nx+1}\left(1-\frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{n}\Big[u-\ln(u)\Big]_1^{nx+1}$

$= \frac{1}{n}\left(nx+1-\ln(nx+1)-1\right)$

$F_n(x) = x - \frac{\ln(nx+1)}{n}$ sur $[0,1]$

par croissance comparée $\frac{\ln(nx+1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{\ln n + \ln\left(x+\frac{1}{n}\right)}{n}$

D'où $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

ie $(F_n)_n$ CV simplement sur $[0,1]$ vers la f $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F(x) = x$.

Bien qu'on n'est pas CV uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$, on a qd m̂

$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$.

CV uniforme de $(F_n)_n$

$|F_n(x) - F(x)| = \left|x - \frac{1}{n}\ln(1+nx) - x\right|$

$= \frac{1}{n}\ln(1+nx)$, $x \in [0,1]$

$x \longmapsto \frac{1}{n}\ln(1+nx)$ est croissante sur $[0,1]$.

Donc $\sup_{x\in[0,1]} |F_n(x) - F(x)| = |F_n(1) - F(1)|$

$= \frac{1}{n}\ln(1+n)$

Par croissance comparée, on a bien $\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où $\lim_{n\to\infty} \sup |F_n(x) - F(x)| = 0$ et

$(F_n)_n$ CV uniformément vers F sur $[0,1]$.

Ex 4 $\quad f_n(x) = (1-x) \cdot \exp(-x^n)$, $A = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$

- R+ $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \infty & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Par composition de l'exponentielle (& la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'existence de la limite de l'exponentielle en $-\infty$), on a

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ e^{-1} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en posant $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in [0,1[\\ e^{-1}(1-x) & , x = 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$

D'où $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On obtient de $(f_n)_n$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) CV uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

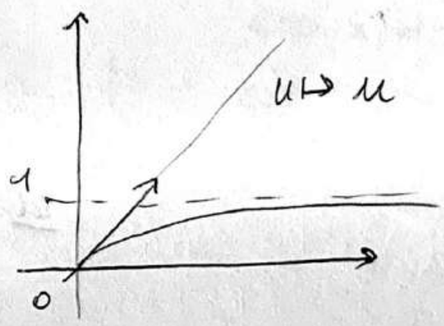
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| (1-x) e^{-x^n} - (1-x) \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} (1-x) \left| e^{-x^n} - 1 \right| \quad \text{car } x \in [0,1]$$

$$-x^n \leq 0 \Rightarrow e^{-x^n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} (1-x)\left(1 - e^{-x^n}\right)$$

$$\varphi(u) = 1 - e^{-u}$$



Posons $\Psi(u) = 1 - e^{-u} - u$, $u \geqslant 0$,

La f Ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\Psi'(u) = e^{-u} - 1 \leqslant 0 \quad \text{car } u \geqslant 0,\ -u \leqslant 0 \Rightarrow e^{-u} \leqslant 1.$$

u	0		∞
$\Psi'(u)$		$-$	
$\Psi(u)$	0	$\searrow$	

Dc $\forall u \geqslant 0$, $\Psi(u) \leqslant 0$, dc $1 - e^{-u} \leqslant u$.

En utilisant cette inégalité, on ed

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} \left((1-x)\, x^n \right)$$

Posons $g_n(x) = (1-x)\,x^n = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$

La f g_n est dérivable et on a :

$$g_n'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1)\,x^n = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right)$$

$$g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow n - (n+1)x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geqslant x.$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$		$+$	ϕ	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$n \leqslant n+1$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\leqslant 1}$$

$$\leqslant 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cl $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

dc $(f_n)_n$ CV uniformément vers f sur $[0,1]$.

b) CV uniforme sur $[1, \infty[$

Indicat°: $\forall t \geqslant 1,\ t.e^{-t} \leqslant \frac{1}{e}$. (1)

Mq (1) Posons $\psi(t) = t.e^{-t}$, $t \geqslant 1$.

La f est dérivable sur $[1, \infty[$ et on a :

- $\psi'(t) = e^{-t} + t(e^{-t})' = e^{-t}(1-t) \leqslant 0$ car $t \geqslant 1$.

t	1	∞
$\psi(t)$	e^{-1} $\searrow$	

$\Rightarrow \forall t \geqslant 1,\ \psi(t) \leqslant e^{-1} = \frac{1}{e}$

- $\sup_{x \geqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geqslant 1} |(1-x)e^{-x^n} - 0|$

$= \sup_{x \geqslant 1} (x-1)e^{-x^n}$

$x \geqslant 1 \Rightarrow x^n \geqslant 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^n e^{-x^n} \leqslant \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \sup_{x \geqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x \geqslant 1} \left(\frac{1}{e}\ \frac{x-1}{x^n}\right)$

- $\leqslant \sup_{x \geqslant 1} (x-1)e^{-x^n} \leqslant \sup_{x \geqslant 1} \left(\frac{1}{e}\ \frac{x-1}{x^n}\right)$

Posons $h_n(x) = \frac{x-1}{x^n}$, $x \geqslant 1$,

La f h_n est dérivable sur $[1, \infty[$,

$h'_n(x) = \frac{x^n - n x^{n-1}(x-1)}{x^{2n}} = \frac{(x - n(x-1))x^{n-1}}{x^{2n}}$

$h'_n(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - n(x-1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x - nx + n \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x(1-n) + n \geqslant 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant (n-1)x \Leftrightarrow \frac{n}{n-1} \geqslant x$.

x	1	$\frac{n}{n-1}$		$+\infty$
$h_n'(x)$	$+$	ϕ	$-$	
$h_n(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$	0

$\Rightarrow \sup_{x \geq 1} h_n(x) = h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$

Donc $\sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e} \cdot h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{e} \frac{\frac{n}{n-1} - 1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$\leq \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = 0$

dc (f_n) CV uniformément sur $[1, \infty[$

3) calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$, où $u_n = \int_0^2 f_n(t)\, dt$

D'après a), $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U.} f$ sur $[0,1]$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U.} f$ sur $[1, \infty[$.

Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U} f$ sur $[0, \infty[$.

En effet, par $(*)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $(n \geq n_0,\ x \in [0,1]) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

par $(**)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq

$(n \geq n_1,\ x \in [1, \infty[) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'où $n \geq \max(n_0, n_1)$, $x \geq 0$.

* soit $x \in [0,1]$ et on a bien $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
* soit $x \in [1, \infty[$, dc $\forall x \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

dc $n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow{CV\ U.} f$ sur $[0, +\infty[$.

Dc le Thé d'intég° implique que :

D'après le TH,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 (1-t)e^{-t^n}\,dt = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- car $\int_1^2 (1-t)\,dt = 0$.

Ex 5 $\quad f(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx), & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

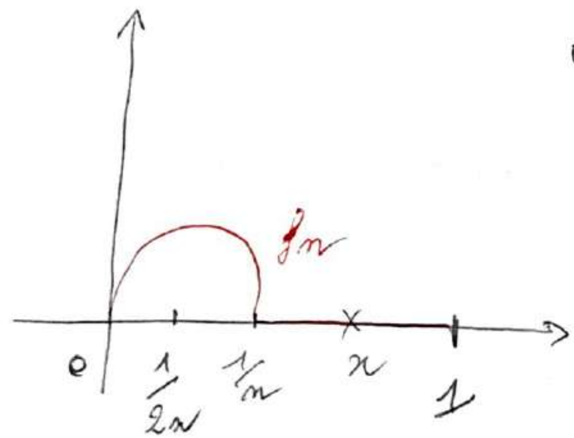
$\forall n \geq 1$, f_n est cont sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{n}\}$.

et $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} \frac{1}{n}} = n^2 \times \frac{1}{n}\left(1 - n \times \frac{1}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} \frac{1}{n}} f(x)$

- $= f\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\Rightarrow f_n$ est cont sur $[0,1]$

a) CV simple sur $[0,1]$?



$\varphi_n(x) = n^2x - n^3x^2$

$\varphi'_n(x) = n^2 - 2n^3x$
$= n^2(1-2na)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

pr $x \in]0,1]$,
$\exists N$, $n \geq N$
$\Rightarrow \frac{1}{n} < x$.

$\frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

De plus $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow (f_n)$ CV simplement sur $[0,1]$
vers la f $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

fonction nulle

2) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} f_n(x)\,dx + \int_{1/n}^1 \underbrace{f_n(x)}_{=0}\,dx$$

$$= \int_0^1 (n^2x - n^3x^2)\,dx$$

$$= \left[n^2\frac{x^2}{2} - n^3\frac{x^3}{3}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^2 \times \frac{1}{2n^2} - n^3 \times \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3) CV U.N sur $[0,1]$

TH si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U} f$ sur $[a,b]$ &

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow f$ est cont

& $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

or $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{6}$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

Dc $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$.

et dc $(f_n)_n$ ne CV pas U.N sur $[0,1]$

Ex 6 $\quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) CV U.N de $(f_n)_n$ vers f.

CV simple

$\lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right) = x^2$ et par continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, on ed $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Dc $(f_n)_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

CV U.N

$$\boxed{|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|\right|}$$

Conjugué....

$$\boxed{|a-b| = \frac{a^2-b^2}{a+b}}$$

$$= \frac{x^2+\frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$, par croissance de f racine sur $\mathbb{R}^+$,

on a $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$

D'où $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x| \geq \frac{1}{n}$

de $$\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n}$$

on est ∞ $$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)| = 0$$

Dc on a bien CV U.N.

Ex 7 $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

2) ex 6 Pb on ne pt pas avoir $f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)$

pb ici car f n'est pas dérivable en 0.

CV de (f_n') ?

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$$

- $f_n'(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $x>0$: $f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$

$f_n'(x)$ $= -1$

Dc (f_n') CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

Pr $\forall n \geq 1$, f'_n est cont mais g n'est pas cont en 0 & dc (f'_n) ne pt pas CV U.N vers g

(R4) Supposons $(f'_n)_n$ CV U.N vers g.
Comme $(f_n)_n$ CV. S. vers f.
D'après TH (Dérivat°) $\Rightarrow$ f est dérivable & $f' = g$.
Absurde.
Dc (f'_n) ne CV pas U.N.

Ex 7 $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

1) on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (car $|\sin(nx)| \leq 1$)

D'où $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dc $f_n \xrightarrow{CVU} 0$

2) f_n est dérivable & $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$

$$f_n'(x) = \frac{\cos(nx) \cdot n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \cos(nx)$$

soit $x \in \mathbb{R}$, supposons p l'absurde qu'$\exists$ $l \in \mathbb{R}$ tq $\sqrt{n} \cdot \cos(nx) \longrightarrow l$.

or $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1$.

- $\sqrt{n} \cdot \cos(nx) \underset{n\to\infty}{\sim} l \Rightarrow \cos(nx) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{l}{\sqrt{n}}$

(x) et (÷) !!

c $\dfrac{l}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, dc $\cos(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Dc $\sqrt{2n} \cdot \cos(2nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

or $(\sqrt{2n} \cdot \cos(2nx))_n$ est une sous-suite de $(\sqrt{n} \cdot \cos(nx))_n$ & dt CV vers l. Absurde

$\Rightarrow (f'_n(x))$ ne CV pas.

TD2 Séries de foncOs

Méthodes
- CV simple
- CV normal
- CV unif.

Ex 1 (1) Etude CV (sim, normale, unif). $\sum_n u_n$.

CVS ? $\sum_n u_n = \sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ x fixé ici

Par croissance comparée, $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} = 0$

Dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant N$

$\Rightarrow 0 \leqslant n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant e^{-x^2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. signe cte

Or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ SdR CV dc $\sum e^{-x^2\sqrt{n}} \in \sum \frac{1}{n^2}$

de ô nature dc $\sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ CV $\forall x \in \mathbb{R}^*$. cg

Dc $\boxed{\sum u_n \text{ CV simplement sur } \mathbb{R}^*}$

CV normale $\sum u_n$?

$\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^*} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1$

u_n paire $= \sup_{x>0} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1$ $\quad u_n \searrow$ sur $]0,\infty[$

Dc $\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)|$ DV

$\Rightarrow$ PAS CV normale.

TD2 Séries de foncOs

Méthodes
- CV simple
- CV normal
- CV unif.

Ex 1 (1) Étude CV (sim, normale, unif) $\sum_n u_n$.

CVS ? $\sum_n u_n = \sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ x fixé ici

Par croiss. comparée, $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} = 0$

Dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$

$\Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ signe cte

ô $\sum_n \frac{1}{n^2}$ SdR CV de $\sum e^{-x^2\sqrt{n}}$ & $\sum \frac{1}{n^2}$

de ôn nature de $\sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ CV $\forall x \in \mathbb{R}^*$. cg

Dc $\boxed{\sum u_n \text{ CV simplement sur } \mathbb{R}^*}$

CV normale $\sum u_n$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^*} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1$$

u_n paire

$$= \sup_{x>0} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1 \qquad u_n \searrow \text{ sr }]0,\infty[$$

Dc $\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)|$ DV

$\Rightarrow$ PAS CV normale.

R1 [si $\sum u_n$ est suite f q CVS sr I

$\Rightarrow \sum u_n$ CVUN ssi $(R_n)_n$ CV UV vers 0 sr I où, $R_n = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k$]

ie [$\sum u_n$ CV U.N sr I ssi $\sup |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$]

$R_n(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-x^2\sqrt{k}} \geq e^{-x^2\sqrt{n+1}}$

car $\forall k \geq n+1$, $e^{-x^2\sqrt{k}} \geq 0$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^*} e^{-x^2\sqrt{n+1}} = 1$

D'où $(R_n)_n$ ne CV pas U.N vers 0 sur $\mathbb{R}^*$.

Dc $\sum u_n$ ne CV pas U.N

---

2) soit $f(x) = \sum^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$

<u>R$\!^*$</u> • si $\forall n \geq 0$, $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont

• $\sum_n u_n$ CV U.N sur I

Alors si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$.

On a que f est cont sur I.

On RQ que $\forall n \geq 0$, u_n est paire & dc f est aussi paire. Car $f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(-x) = \sum^{\infty} u_n(x) = f(x)$

Dc on pt étudier cont & dérivabilité de f sur $]0, \infty[$.

par parité, f est cont sur $\mathbb{R}^*$.

Fixons $a > 0$ & étudions cont sur $[a, \infty[$.

$\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = \sup_{x\geq a} \left(e^{-x^2\sqrt{n}}\right) = e^{-a^2\sqrt{n}}$

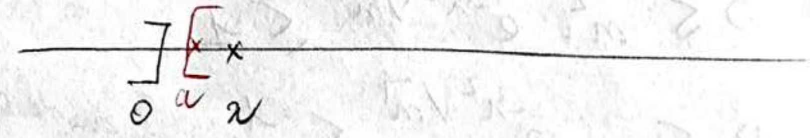
car la f : $x \longmapsto e^{-x^2\sqrt{n}}$ ↘ sur $]0, \infty[$

$\sum e^{-a^2\sqrt{n}}$ CV (car on sait que $\sum u_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^*$).

Donc $\sum_n \sup_{x\geq a} |u_n(x)|$ CV & on a dc

$\sum_n u_n$ CV normalement dc U.N sur $[a, \infty[$.

D'après TH (Continuité), on pt en dire que f est cont sur $[a, \infty[$



soit $x > 0$. Alors $\exists a$, $0 < a < x$.

D'après ce q précède, f est <u>cont</u> sur $[a, \infty[$

et dc f est <u>cont</u> en x. Dc $\forall x > 0$, f cont en x

ce prve f est <u>cont</u> sur $]0, \infty[$.

Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. (resp C^1)

($\mathbb{R}^*$) si • $\forall n \geq 0$, $u_n : I \to \mathbb{R}$ dérivable

•• $\sum_n u_n$ CV S. sur I

••• $\sum u_n'$ CV U.N sur I

et si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$, alors

● f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, (resp C^1)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x).$$

→ $u_n(x) = e^{-x^2\sqrt{n}}$, $n \geq 0$, on R/ que U_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$u_n'(x) = -2x\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}$$

● •• $\sum u_n$ CV S sur $\mathbb{R}^*$

••• on étudie CV normale de $\sum u_n'$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} \sqrt{n}\, 2|x|\, e^{-x^2\sqrt{n}} = \sup_{x>0} \left(2x\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right)$$

Posons $\varphi_n(x) = 2x\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}$, $x>0$ et étudions les variations de φ. La f φ est dérivable & on a

$$\varphi_n'(x) = 2\sqrt{n}\left(e^{-x^2\sqrt{n}} - 2x^2\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right)$$
$$= 2\sqrt{n}\left(1 - 2x^2\sqrt{n}\left(e^{-x\sqrt{n}}\right)\right)$$

Donc $\varphi_n'(x) \geq 0 \iff 1 - 2x^2\sqrt{n} \geq 0$

$$\iff x^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
$$\iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}.$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}$		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	↗	$\varphi(a)$	↘	0

$$\sup\left(2x\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^{1/4}}\, e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}}$$
$$= \text{cte}.\ n^{1/4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

dc $\sum_n \sup |u_n(x)|$ DV grossièrement

(car $\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$)

Ainsi, $\sum U_n'$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^*$.

Fixons $a>0$ & étudions CV normale sur $[a,\infty[$.

comme $\lim \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{1/4}} = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ /

$n \geq N \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{1/4}} < a}$ et dc d'après (le TAV)

ce q précède $\sup_{x\in[a,\infty[} |U_n'(x)| = \sup_{x\in[a,\infty[} (\varphi_n(x)) = \varphi_n(a)$

$\varphi_n(a) = 2a\sqrt{n}\cdot e^{-a^2\sqrt{n}}$

On Rq que $\lim_{n\to\infty} (n^2 \varphi_n(a)) = \lim_{n\to\infty} (2a\cdot n^{3/2} e^{-a^2\sqrt{n}})$

$= 0$ (par croisse comparée)

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$,

D'où $\sum \sup |U_n'(x)|$ CV.

Ainsi $\sum U_n'$ CV normalement sur $[a,\infty[$.

D'après TH, $\forall a>0$, f est dérivable sur $[a,\infty[$ & dc f est dérivable sur $]0,\infty[$.

(22)

Ex 1 2) $U_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Étude CV ~~simple~~ normale de la série $\sum U_n$)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, on a :

$|U_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ dc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$

↳ signe clé

or $\sum_n \frac{1}{n^3}$ SDR CV. On cd $\sum U_n$ CV normalement.

(dc CV U.N & simplement) sur $\mathbb{R}$.

Étude de cont & dérivabilité de la somme

- $\forall n \geq 1$, U_n cont sur $\mathbb{R}$.
- $\sum U_n$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

D'après TH continuité sur $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$,

on a f est cont sur $\mathbb{R}$.

De +, $\forall n \geq 1$, U_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ &

$U_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{n^3} = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$\sup |U_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum U_n'$ CV norm^{lt} dc CV UN sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 1 3) $\sum u_n$, où $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$

CV simple : RQ $u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$

où $v_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$;

- suite $(v_n)(x) \searrow$; $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$

D'après CSA, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ CV

Dc $\sum u_n$ CV simplement.

CV uniforme : CSA $\Rightarrow$ si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$,

on a $\forall n \geq 1$,

$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^2}$

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = 0$

dc (R_n) tend unif vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Donc $\sum u_n$ CV. U.N sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{M2}$ Use TH d'Abel Uniforme :

Si usage uS, on doit mq $\frac{1}{n+x^2}$ CV. UN vers 0

CV normale :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{n+x^2} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ DV de car $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$

$\sum u_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}$. en 0, $\frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$.

Continuité & Dérivabilité de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

- $\forall n \geq 1$, u_n est cont sur $\mathbb{R}$
- La série $\sum u_n$ CV unifor. sur $\mathbb{R}$. Dc d'après TH du cours, on ed f est cont sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{TH Dériv}}$

- u_n dérivable sur I, $\sum u_n \xrightarrow{CV.S.} f$ sur I, $\sum u_n' \xrightarrow{CV.UN} g$ sur I, f classe C^1, $f' = g$, $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$ à $\sum u_n$ CV U.N sur I

on sait déjà que $\sum u_n$ CV. S. & U.N sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que $\sum u_n'$ CV. U.N sur $\mathbb{R}$.

u_n dérivable $\hat{c}$ fracto rationnelle dt dénom. ne s'annule pas.

(car n fixé aussi)

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n'(x) = (-1)^n \frac{-2x}{(n+x^2)^2} = \frac{2(-1)^{n+1} x}{(n+x^2)^2}$$

Idée $\quad |u_n'(x)| = \dfrac{2|x|}{(n+x^2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad n+x^2 \geq n > 0$ et par croissance de $t \longmapsto t^2$ sur $[0, \infty[$

on a $\quad (n+x^2)^2 \geq n^2$

$$\text{dc} \quad |u_n'(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2}.$$

Fixons $a > 0$, on ed que

$$\boxed{\sup_{x \in [-a,a]} |u_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^2}.}$$

comme $\sum_n \dfrac{2a}{n^2}$ CV, on ed que

$\sum u_n'$ CV normalement dc U.N sur $[-a, a]$.

P TH, on obtient $\forall a > 0$, f est dérivable sur $[-a, a]$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(car si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists\, a > 0$ tq $x_0 \in]-a, a[$ et dc f sera dérivable en x_0).

autre $\boxed{M}$ calcul $\sup |u_n'(x)|$ de TAV
de $t \longmapsto 2\dfrac{t}{(n+t^2)^2}$ sur $[0, \infty[$

4) $\quad \sum \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$

$$\sup |u_n(x)| \leq \frac{\pi/2}{n^2}.$$

ĉ $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV, on ed $\sum u_n$ CV normalt sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \geq 1$, u_n cont sur $\mathbb{R}$ (arctan cont sur $\mathbb{R}$)
on ed 4 TH. si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est cont sur $\mathbb{R}$

Dérivabilité de f

* $\forall n \geq 1$, u_n est classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $u_n'(x) = \dfrac{n}{n^2(1+n^2x^2)}$

$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

** $\sum u_n$ cvs sur $\mathbb{R}$ (& cv UN)

*** cv U.N de $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}$.

cv Normale sur $\mathbb{R}$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

La f $x \longmapsto \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$ est paire et ≥ 0

Donc $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \sup_{x\in[0,\infty[} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

comme de plus, f_n est $\searrow$, on a que

$$\sup \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = f_n(0) = \frac{1}{n}$$

D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| = \dfrac{1}{n}$

Sadly, $\sum \frac{1}{n}$ DV.

Fixons $a>0$.

$$\sup_{|x|\geq a} |u_n'(x)| = \sup_{|x|\geq a} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \underset{\text{par parité}}{=} \sup \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

$$= \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$ (par décroissance de f_n : $x \longmapsto \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$)

Or $\dfrac{1}{n+n^3a^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CV.

Donc $\sum u_n'$ CV Normalement sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$

Donc $\forall a>0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a] =$
$=]-\infty, a[\cup]a,\infty[$.

On obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

q° dérivabilité en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x} f(x) \quad \text{car } f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) = 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x} \quad \text{car } \arctan(0) = 0.$$

[minorons pr obtenir limite finie]

Fixons $N \geq 1$, $x > 0$. On a alors

$\forall n \geq 1$, $\dfrac{\arctan(nx)}{n^2 x} \geq 0$ et dc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x}$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2 x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{nx}{n^2 x} = \dfrac{1}{n}$

car $\arctan(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$

D'où $\liminf\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \right) \geq \liminf\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2 x}$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Comme c'est $\forall N \geq 1$, on obtient en faisant tendre $N \to \infty$ que

$$\liminf_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2.3.4

Ex2 $u_n(x) = \dfrac{\sin(2^n x)}{n^n}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Mq CV normale

on a $\forall n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$ $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^n}$,

de +, pr $n \geq 2$, $n^n \geq 2^n > 0$,

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$ & $\forall n \geq 2$, on a

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

or $\sum_n \frac{1}{2^n}$ CV, suite géométriq de raison 1/2.

Dc la série $\sum_n u_n$

ou $\sum \frac{1}{n^n}$ CV ? Cd Cauchy $\left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

d'après CdC, $\sum \frac{1}{n^n}$ CV.

(ii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Mq f est dérivable sr $\mathbb{R}$

- $\sum u_n$ CV.S car CV. Normt.
- $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable (sin dérivable
- $\sum u_n'$ CV UN sr $\mathbb{R}$ ~~car CV. Nomt sr $\mathbb{R}$~~

car $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| \leq \dfrac{2^n}{n^n}$.

De plus, si $v_n = \dfrac{2^n}{n^n}$, on a :

$|v_n|^{1/n} = \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$ D'après le Crit de Cauchy, $\sum v_n$ CV.

on a bien CV normale de uniforme de $\sum u_n'$ sr $\mathbb{R}$.

---

si Cor Abel $|\sum \cos(2^k x)| = |\sum Re(e^{kx})|$. ⚠ $|\Sigma b_k| \leq M$ indépdt

---

D'après Th de Dérivat°, f est dérivable sr $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n x)}{n^n}$$

Ex3 $\quad u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n^3}, \; n \geq 1, \; x \geq 0$

1) Comme $n^2 x + n^3 \geq n^3 \geq 1$ (car $x \geq 0$)

dc u_n indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

ĉ fracθ rationnelle d^t dénominat^r ne s'annule pas.

De +, $\quad u_n'(x) = \dfrac{-n^2}{(n^2 x + n^3)^2} = \dfrac{-1}{n^2 (x+n)^2}$

Mq par récurrence $\forall k \geq 1, \forall x \geq 0,$

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^2 (x+n)^{k+1}} \quad (H_k)$$

(H_1) vraie d'après ce q précède.

· supposons que (H_k) est vraie pr cert. $k \geq 1$

P HDR, on a $\quad u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k \cdot k!}{n^2 (x+n)^{k+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$u_n^{(k)}(x)$ est dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^2} \times \frac{-(k+1)(x+n)^k}{(x+n)^{2(k+1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{n^2} \times \frac{1}{(x+n)^{k+2}}$$

Dc (H_{k+1}) est vraie

Par récurrence, on a prouvé (H_k) vraie $\forall k$.

2) Mq f est ∞ dérivable.

Mq $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sum \frac{(-1)^k \cdot k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$$

CV normalement sur $\mathbb{R}$.

$$\left| \frac{(-1)^k k!}{n^2 (x+n)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{n^2 \cdot n^{k+1}}$$

car $x \geq 0 \Rightarrow x+n \geq n$. $\quad (x+n)^{k+1} \geq n^{k+1}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{n^{k+3}}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k+3 \geq 3 > 1$ & dc

$$\sum_n \frac{1}{n^{k+3}} \quad \text{CV} \quad \text{(Série de Riemann)}$$

Dc $\sum_n u_n^{(k)}$ CV normal^t sur $\mathbb{R}^+$.

D'où f est ∞ dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Ex 4 $\quad U_n(x) = \dfrac{x \cdot e^{-nx}}{\ln(n)}$, $n \geq 2$, $x \geq 0$

Rq $\quad U_n(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}+$

& $n^2 U_n(x) = x \cdot \dfrac{n^2 e^{-nx}}{\ln(n)}$

croissance comparée $\quad n^2 e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $x > 0$

$\dfrac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où pr $x>0$, $n^2 U_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

et pr $x = 0$, aussi vraie.

dc $\forall x \geq 0$, on a $U_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

& $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV.

D'où on en conclut $\sum_n U_n(x)$ CV simplt.

2) Mq $x \geq 0$,

$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U(k)$

$x \geq 0 \quad \left|\sum^{N} e^{-nx}\right| \leq \sum^{N} (e^{-x})^n = \dfrac{1 - e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}$

$\leq \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x \cdot e^{-kx}}{\ln(k)} \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kx}$

$k \geq n+1 \Rightarrow \ln(k) \geq \ln(n+1)$

$\leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$

D'où $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \times \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

$= \dfrac{x}{\ln(n+1)} \times \dfrac{1}{e^x(1-e^{-x})}$

$= \dfrac{1}{\ln(n+1)} \dfrac{x}{e^x-1} \leq 1$

car $e^x - 1 \geq x$ pr $x \geq 0$. TAV $e^x - 1 - x$.

D'où $\forall x > 0$, $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

$x = 0$, $R_n(0) = 0$ & dc on a aussi

$0 \leq R_n(0) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

c) $\forall x \geq 0, \; 0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

2) f est cont sur $\mathbb{R}_+$

D'après $\mathcal{P}_s$ on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

dc $(R_n)_n$ cv U.N vers 0.

Adit, $\sum u_n$ cv. U.N sur $\mathbb{R}^+$.

∂ les u_n st cont sur $\mathbb{R}^+$, f est cont sur $\mathbb{R}^+$.

---

cl $\forall x \geq 0,\ 0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

2d f est cont sur $\mathbb{R}_+$

D'après (P_s) on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

dc $(R_n)_n$ CV U.N vers 0.

Ad+, $\sum u_n$ cv. U.N sur $\mathbb{R}^+$.

& les u_n st cont sur $\mathbb{R}^+$, f est cont sur $\mathbb{R}^+$.

---

4) Mq $\sum \dfrac{x.e^{-nx}}{\ln(n)}$ ne CV pas normalement.

→ mq $\sup |u_n(x)| = \dfrac{e^{-1}}{\ln(n).n}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{x.e^{-nx}}{\ln n} \right)$$

soit $\varphi_n(x) = x.e^{-nx}$, $x \geq 0$, $n \geq 2$

f dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$$\varphi'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$$

D'où $\varphi' \geq 0 \iff 1 - nx \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$\varphi'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n}e^{-1}$	$\searrow$	0

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1}$$

D'où $\displaystyle\sup_{x \geq 0} |u_n(x)| = \frac{e^{-1}}{n.\ln(n)}$

Or $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ DV car série de Bertrand.
ici $\alpha = 1, \beta = 1$ de DV

RP SdB

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ CV} \iff \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \ \& \ \beta > 1$$

RQ : si $a>0$, $\sup |U_n(x)| = U_n(a)$
$x \geq a$, or $\sum U_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^+$, on sait $\sum_n U_n(a)$ CV.
Donc $\sum U_n$ CV normalement sur $[a,\infty[$.
Dc f est cont sur $[a,\infty[$, $\forall a>0$.
D'où f cont sur $]0,\infty[$.

Ex 5 $\quad U_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$

0) Mq $\sum U_n$ CV simplemt sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \neq 0$, $U_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ ← pas oublier le n. cte

Dc série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV & dc $\sum U_n(x)$ CV abs dc CV & pr $x=0$, $U_n(0)=0$ & dc $\sum U_n(0)$ CV aussi.

Dc $\sum U_n$ CV simplt.

⚠ usage équivalts nécessite avoir séries à termes positifs.

1) Mq f cont sur $\mathbb{R}$.

* $\forall n \geq 1$, U_n cont sur $\mathbb{R}$ (c fract rationnelle dt le dénominateur ne s'annule pas car $n^2+x^2 \geq n^2 \geq 1$).

* soit $a>0$,

$$\sup_{x\in[-a,a]} |U_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{a}{n^2}$$

or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV dc la série $\sum \sup |U_n(x)|$ CV, ie $\sum U_n$ CV normalemt sur $[-a,a]$.
D'où Th (Continuité) f est cont sur $[-a,a]$, $\forall a>0$
Dc f cont sur $\mathbb{R}$.

en effet si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists a>0$ tq $x_0 \in]-a,a[$.
Dc f cont en x_0.

2) Mq $\forall x>0$ & $n \geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt$$

$t \longmapsto \frac{x}{t^2+x^2}$ est décroissante sur $[0,\infty[$.

Dc $\forall t \in [n, n+1]$, on a :

$$\frac{x}{t^2+x^2} \leq \frac{x}{n^2+x^2}$$

dc $\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{x}{n^2+x^2}\,dt = \frac{x}{n^2+x^2}$

De m̂ $\forall t \in [n-1, n]$,

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{t^2+x^2}$$

d'où $\frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt$

on a obtenu que :

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = f(x)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq f(x)$$

$$\frac{1}{x}\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt \leq f(x)$$

$u = \frac{t}{x}$

$du = dt/x.$

D'où $\int_{1/x}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \leq f(x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\arctan u\right]_{u=\frac{1}{x}}^{u=\infty} \leq f(x)$$

(ii) De même pour $\leq$, on obtient

$$f(x) \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \Big[\arctan u\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\forall x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Or $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Dc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ex 6 $\quad u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$.

1) CV simple sur $[0,1]$

M1/ d'Alembert $\quad$ M2/ Cr de Cauchy

M3/ * $\forall x \in [0,1[$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right)$

$$\leq x^{2n} + x^{2n+1}$$

& $\sum x^{2n}$ & $\sum x^{2n+1}$ séries géométriques car $x < 1$.

Dc $\sum u_n(x)$ CV abs donc CV pour $x \in [0,1]$.

& $\sum u_n(1)$ CV car $\forall n \geq 1$, $u_n(1) = 0$

CV normale sur $[0,1]$: $\quad \sup |u_n(x)|$

inégalités astuce... majorer, CVce

(ii) De m̂ ↯ $\leq$, on obtient

$$f(x) \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \left[\arctan u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\forall x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Dc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ex 6 $\quad u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$.

1) CV simple sur $[0,1]$

M1/ d'Alembert $\quad$ M2/ R de Cauchy

M3/

* $\forall x \in [0,1[$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right)$

$\leq x^{2n} + x^{2n+1}$

& $\sum x^{2n}$ & $\sum x^{2n+1}$ séries géométriques & $x < 1$.

Dc $\sum u_n(x)$ CV abs de CV pr $x \in [0,1]$.

& $\sum u_n(1)$ CV car $\forall n \geq 1$, $u_n(1) = 0$

CV normale sur $[0,1]$: $\quad \sup|u_n(x)|$

inégalités astuce... majorer, CVce

f dérivable sur $[0,1]$

$$u_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(2n\, x^{2n-1} - (2n+1)\, x^{2n}\right)$$

$$= \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}}\left(2n - (2n+1)x\right)$$

D'où $u_n'(x) \geq 0 \iff 2n-(2n+1)x \geq 0$

$\iff x \leq \dfrac{2n}{2n+1}$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Par conséq^t, $\sup |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} - \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\left(1-\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}}_{\leq 1}\frac{1}{2n+1} \quad \geq n \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$

or $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ SDR CV, $\frac{3}{2} > 1$ (contre $\boxed{M}$ Cauchy, d'Alembert)

Dc $\sum_n u_n$ CV normalement dc CV uniformément.

2) $\forall n \geq 1$, u_n cont sur $[0,1]$

série $\sum u_n$ CV U.N $[0,1]$

Dc d'après TVD cont, f est cont sur $[0,1]$

Ex 7 soit $u_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0,2]$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$$

1) CV simple $\sum_n u_n$?

si $x \in]0,2] \setminus \{1\}$:

- $$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x|1-x|^{n+1}}{x|1-x|^n} = |1-x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |1-x|$$

$$0 < x < 2 \Rightarrow -1 < 1-x < 1$$
$$\Rightarrow |1-x| < 1$$

d'Alembert

- série $\sum_n u_n$ CV

$\rightarrow \sum (1+x)$, $x > 0$ DV.

* $u_n(0) = u_n(1) = 0 \Rightarrow \sum u_n(0)$ & $\sum u_n(1)$ CV.

* $u_n(2) = 2(-1)^n$, $n \geq 1$

$u_n(2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ de $\sum u_n(2)$ DV

$\Rightarrow$ Ainsi $\sum u_n$ CV S. sur $[0,2[$.

2) CV U.N sur $[0,2[$?

on devine ça ne CV pas normlt, ne CV pas U.N au

on fixe $n \geq 0$, pr $x \in$ $]0,2[$.

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x(1-x)^k$$

$$= x \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x)^k$$

$$= x \frac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (1-x)^{n+1}$$

$$\frac{1^\circ \text{ terme}^{n+1}}{1 - \text{raison}}$$

$$\sup_{x\in[0,2[} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in]0,2[} |R_n(x)|$$
$$= \sup_{x\in]0,2[} |1-x|^{n+1}$$
$$= 1$$

Dc $\sup_{x\in[0,2[} |R_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

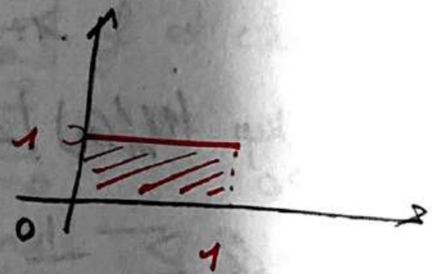
& dc $\sum_n u_n$ ne CV pas U.N à $[0,2[$.

3) calculer $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx\right)$ & $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right)$

$\mu\ x\in]0,1]$

• $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum x(1-x)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) = 0$



$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = 1$$

• $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x(1-x)^n\,dx$

$u_n(x) = x$, $u'(x) = 1$

$v_n(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ $\quad v_n'(x) = (1-x)^n$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = -\left[x\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[-(1-x)^{n+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

D'où $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

<u>DES</u>

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+2}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{1}{N+1}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N+1}} - \frac{1}{N+2}\right)$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$ &

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 U_n(x)\,dx = 1$

Rq si $U_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

si $\sum_n U_n$ CV U.N $[a,b] \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$.

Ex& $U_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{1+n^2}$, $n \geq 0$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} U_n(x)$

1) Mq f CV Normalt sur $\mathbb{R}^+$.

$\sup_{x \geq 0} |U_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \left(\frac{1}{1+n^2} e^{-nx} \right) = \frac{1}{1+n^2}$

car $x \mapsto e^{-nx}$ est $\searrow$ sur $[0, \infty[$

$\sum_n \frac{1}{1+n^2}$ CV d'où $\sum U_n$ CV Normalt

2) Mq $\sum U_n'$, $\sum U_n''$ CV normalt sur $[a, \infty[$, $\forall a > 0$.

$\mathcal{f}$ U_n dérivable. $\forall x \geq 0$

$U_n'(x) = \frac{-n}{1+n^2} e^{-nx}$

& $U_n''(x) = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx}$

$\sup |U_n'(x)| = \sup_{x \geq a} \left(\frac{n}{1+n^2} e^{-nx} \right)$

$= \frac{n}{1+n^2} e^{-na}$

Rq $\sup_{x \geq 0} |U_n'(x)| = \frac{n}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

& $\sum \frac{1}{n}$ DV.

D'où $\exists N \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot \frac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq \frac{1}{n^2}$

$\Downarrow$ $\sum \frac{1}{n^2}$ CV

dc $\sum$ —— CV

dc $\sum U_n'$ CV Normalnt

De m̂ $\sum_n u_n''$ CV normt sur $[a, \infty[$.

3) Mq f est sol° de $y'' + y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x > 0$

→ u_n est C^2 sur $[0, \infty[$

→ $\sum u_n'$ CV ~~simplt~~ normt de ~~normlt~~ simplt sur $[a, \infty[$.

→ $\sum u_n''$ CV N. de U.N sur $[a, \infty[$.

- Le TH du pront $\Rightarrow$ f est classe C^2 sur $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

TH $\Rightarrow$ f est classe C^1 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ dx sur $[a, \infty[$.

→ $\sum u_n''$ CV normlt de U.N sur $[a, \infty[$.

- TH $\Rightarrow$ f' est C^1 sur $[a, \infty[$ & $\forall x \geq a$,

$$(f')'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x).$$

ie f classe C^2 sur $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$, $x \geq a$

D'où f est classe C^2 sur $]0, \infty[$

& $\forall x > 0$, $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

mq $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

De m̂ $\sum_n u_n''$ CV Normlt s $[a, \infty[$.

3) Mq f est solᵒ de $y''+y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x>0$

→ u_n est C^2 s $[0, \infty[$

→ $\sum u_n'$ CV ~~simplt~~ mement de ~~normlt~~ simplt s $[a, \infty[$.

→ $\sum u_n''$ CV N. de U.N s $[a, \infty[$.

- Le TH du pont $\underset{\infty}{\text{ed}}$ f est classe C^2 s $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

TH $\underset{\infty}{\text{ed}}$ f est classe C^1 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)\,dx$ s $[a, \infty[$.

→ $\sum u_n''$ CV normlt de U.N s $[a, \infty[$.

- TH ⇒ f' est C^1 s $[a, \infty[$ & $\forall x \geq a$,

$$(f')'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x).$$

ie f classe C^2 s $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$, $x \geq a$

D'où f est classe C^2 s $]0, \infty[$

& $\forall x > 0$, $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

mq $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x>0$.

$$f''(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2}\right) e^{-nx}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

Somme série géométriq de raison $e^{-x} \in]0,1[$.

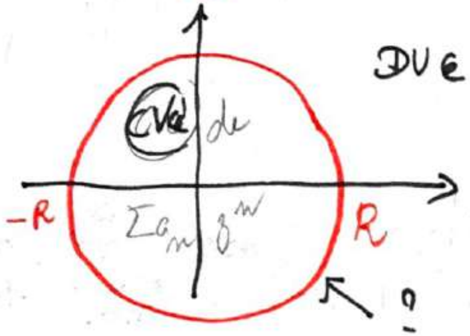
D'où $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

TD3

Séries Entières

R1 Série entière $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$.

Rayon de CVce $R \in [0, \infty[$



DVe grossière $\sum a_n z^n$.

De plus, $\sum a_n \cdot z^n$ CV normal^t $\mathcal{D}(0,r)$, $r<R$.

En effet, $\sup_{|z|\le r} |a_n z^n| = |a_n| r^n$.

Or comme $r \in \mathcal{D}(0,R)$ & que la série CV abs^t ds $\mathcal{D}(0,R)$, on ed série CV $\sum a_n z^n$ CV normal^t sur $\overline{\mathcal{D}(0,R)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le r\}$

Ex1 Rayon de CVce ?

1) $\sum_n \frac{n^n}{n!} x^n$; on pose $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \geq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+n)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = (n+1)^n \times \frac{1}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{1+o(1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} e.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ et de la règle d'Alembert, on a $R = \frac{1}{e}$.

Dc la série $\sum_n \frac{n^n}{n!} x^n$ CV sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, DV grossièr^t sur $\mathbb{R} \setminus \{]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[\}$.

Étude en $x = \pm \frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$, $\sum_n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$ CV ou DV ?

$$U_n := \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

FF de Sterling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{n.\ln n - n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n\ln n - n\ln\left(\frac{n}{e}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n + n\ln(e)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

(U_n) est une suite positive.

$\sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ DV d'après le crit de Riemann.

Dc $\sum U_n$ DV pr $x = \frac{1}{e}$.

$\sum \frac{n^n}{}$

$x = -\frac{1}{e}$, $\sum_n (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$ CV ou DV ?

$$\sum v_n = \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

série alterné

- $v_n = (-1)^n w_n$; $w_n = \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} \geq 0$
- $w_n =$ $w_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \frac{1}{e^{\cancel{n+1}}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^n} \cancel{e^n}$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{e} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}$$

$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$ → TAF, TAV ...

D'où $\forall n \geq 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$$

on a $\frac{w_{n+1}}{w_n} \le 1$ & de $(w_n)_n \searrow$

D'après CSA, $\sum v_n = \sum (-1)^n w_n$ CV

Adt $\sum v_n$ CV en $x = -\frac{1}{e}$.

En Résumé :

$\boxed{M}$ sur cercle, $z = \frac{1}{e} e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi[$

θ tq $\sum \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e} e^{in\theta}$ CV.

⇝ Règle d'Abel sert

a_n : $\searrow$, $\to 0$

b_n : $e^{in\theta}$: sommes partielles, pr q^e θ : bornés

sp

• soit $b_n = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n}$, $c_n = e^{in\theta}$, $n \ge 0$.

La suite $(b_n)_n$ positive, $\searrow$ vers 0

• On cherche $C > 0$ tq $\forall N \ge 0$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \le C. \quad \text{pr } \theta \in]0,2\pi[$$

ici $\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{N} (e^{i\theta})^n = \frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$

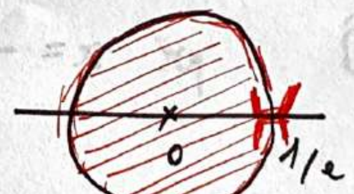
D'où $\left| \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \le \frac{|1-e^{i(N+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} \le \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} =$

D'après le Crit d'Abel, on a que

$\sum_n b_n \cdot c_n = \sum_n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} e^{in\theta}$ CV $\forall \theta \in]0,2\pi[$

Finalement $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ CV sur $C(0,\frac{1}{e}) \setminus \{\frac{1}{e}\}$

& sur $\overline{D(0,\frac{1}{e})} \setminus \{\frac{1}{e}\}$



2) $\sum_n n^2 x^{2n+1} = \sum_n a_n x^n$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ k^2 & \text{si } n \text{ impair, } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sum n^2 x^{2n+1} = 0 + 0 \times x + 0 \times x^2 + 1 \times x^3 + 0 \times x^4 + 2^2 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 3^2 \times x^7$$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'est pas bien définie.

on pose $\alpha_n(x) := n^2 x^{2n+1}$, $n \geq 1$, $x \neq 0$

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{|x^{2n+3}|}{|x|^{2n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x|^2$$

- $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} \right| = |x|^2$ D'après crit de D'alembert.

si $|x| < 1$, $x \neq 0$, $\sum_n \alpha_n(x)$ CV

Dc le rayon de CVce est $R = 1$

CV | DV en -1 & 1 ?...

2) $\sum_n n^2 x^{2n+1} = \sum_n a_n x^n$

$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ k^2 & \text{si } n \text{ impair, } n = 2k+1 \end{cases}$

$\sum n^2 x^{2n+1} = 0 + 0 \times x + 0 \times x^2 + 1 \times x^3 + 0 \times x^4 + 2^2 . x^5 + 0 . x^6 + 3^2 \times x^7$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'est pas bien définie.

on pose $\alpha_n(x) := n^2 x^{2n+1}$, $n \geq 1$, $x \neq 0$

$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{|x^{2n+3}|}{|x|^{2n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x|^2$

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} \right| = |x|^2$ D'après crit de D'alembert.

si $|x| < 1$, $x \neq 0$, $\sum_n \alpha_n(x)$ CV

Dc le rayon de CVce est $R = 1$.

CV | DV en -1 & 1 ?...

2) $\sum_n n^2 . z^{2n+1}$, $z \in \mathbb{C}$,

Étudier CVce de $\sum n^2 . z^{2n+1}$ pr $|z| = 1$.

on RQ pr $|z| = 1$, on a :

$|n^2 . z^{2n+1}| = n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

dc la série $\sum n^2 . z^{2n+1}$ DV grossièr^t p tt $\forall z, |z| = 1$.

ccl Le domaine de CVce de $\sum n^2 . z^{2n+1}$ est $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$.

3) $\sum_n \ln(n).\, x^n$

calcul du <u>Rayon de CVce.</u>

$a_n = \ln(n)$, $n \geq 2$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

$$= 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

or $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$ & $\lim(\ln(n)) = \infty$

d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

D'après le Cde d'Alembert, on end <u>$R=1$</u>.

<u>Domaine de CVce.</u>

si $|z|=1$, on a $|\ln(n).\, x^n| = \ln(n).\, x^n \longrightarrow \infty$

dc $\sum \ln(n).\, z^n$ DV grossnt $\forall |z|=1$

Dc domaine de CV de $\sum \ln(n).\, z^n$

est $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4) <u>$\sum_n n^{(-1)^n} z^n$!</u>

Rayon de CVce on pose $a_n = n^{(-1)^n}$.

$$|a_n|^{1/n} = e^{\frac{(-1)^n}{n}\ln(n)}$$

or $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ P croissce comparée

dc $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$

D'après le Cd Cauchy, on ed

Rayon de CVce est <u>$R=1.$</u> $= \frac{1}{\ell}$

Domaine de CV pr $\sum_n n^{(-1)^n} z^n$:

si $|z| = 1$, on a :

$$\left| a_{2n} z^{2n} \right| = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

dc $\sum n^{(-1)^n} z^n$ DV grossièrt.

ainsi domaine de CV de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ est $\underline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^{2n}$!

trous pr coeffs z^{2n+1} ! suite Gruyère → prdre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\alpha_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^{2n}$$

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)} \right| = \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} z^{\cancel{2n}+2} \, \frac{\cancel{3^n}}{n^2+1} \, \frac{1}{z^{\cancel{2n}}}$$

$$= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)} |z|^2$$

or $\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$

D'où $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)} \right| = \frac{1}{3} |z|^2$

D'après le Crit de D'Alembert,

si $|z| < \sqrt{3}$, série $\sum \alpha_n(z)$ CV.

si $|z| > \sqrt{3}$, série $\sum \alpha_n(z)$ DV.

dc le Rayon de CVce est $\sqrt{3}$

→ **Comportement de la série pr $|z| = \sqrt{3}$:**

si $|z| = \sqrt{3}$

$$\left| \frac{n^2+1}{3^n} z^{2n} \right| = n^2 + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

dc la série $\sum \alpha_n(z)$ DV (grossièrmt) $\forall z$, $|z| = \sqrt{3}$. Finalmt, le domaine de CVce est $D(0, \sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < \sqrt{3}\}$.

6. $\sum_{n\geq 0} n!\, z^{n^2}$:

Rayon de CVce :

$\alpha_n(z) = n!\, z^{n^2}$, $z \neq 0$.

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \left|\frac{(n+1)\cancel{!}\; z^{(n+1)^2}}{\cancel{n!}\; z^{n^2}}\right| =$$

$$= (n+1)\frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}} = (n+1)\frac{\cancel{|z|^{n^2}}\,|z|^{2n+1}}{\cancel{|z|^{n^2}}} = (n+1)|z|^{2n+1}$$

si $|z| < 1$, $|z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$(n+1)\,|z|^{2n+1} = e^{\ln(n+1)}\, e^{(2n+1)\ln|z|}$$

$$= e^{(2n+1)\left[\ln|z| + \frac{\ln(n+1)}{2n+1}\right]}$$

or $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1} = 0$ P croissce comparée

d'où $\lim_{n\to\infty} (2n+1)\left[\ln|z| + \frac{\ln(n+1)}{2n+1}\right] = -\infty$ car $|z|<1$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} (n+1)\,|z|^{2n+1} = 0$

dc $\forall\, |z| < 1$, $z \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = 0 < 1.$$

D+, si $|z| \geq 1$:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = (n+1)\,|z|^{2n+1} \geq (n+1) \to \infty$$

ainsi $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \infty$

d'après le crit de d'Alembert, on est que
- si $|z| < 1$, $\sum \alpha_n(z)$ CV
- si $|z| \geq 1$, $\sum \alpha_n(z)$ DV

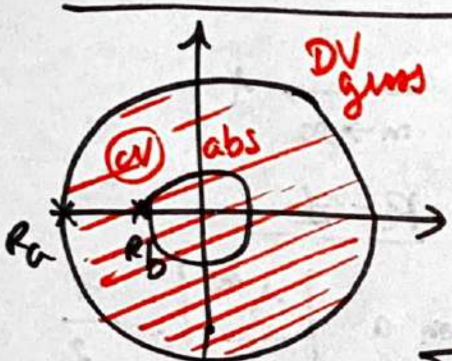
dc $R=1$ & $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

7) $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) x^n$:

Rayon de CVce : $\left(\sin x \underset{n\to 0}{\sim} x\right)$

Si $a_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$.

d'où $|a_n z^n| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n$



a_n, b_n tq $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n|$

$\sum a_n z^n$ & $\sum b_n z^n$ ont m̂ Rayon de CV

$\sum a_n \cdot z^n$ CV. Abs. ssi $\sum b_n \cdot z^n$

or $\sum_n \left(\frac{|z|}{2}\right)^n$ CV ssi $|z| < 2$

dc $\sum a_n \cdot z^n$ CV abs ssi $|z|<2$.

Dc Rayon de CVce est $R=2$

(si on mq $\sum a_n \cdot z^n$ CV abs si $|z| < R_0 \Rightarrow$ le rayon de CVce est $\geq R_0$)

Si $|z| = 2 \Rightarrow |a_n \cdot z^n| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n = 1$

& dc $\sum_n a_n z^n$ DV gross.

Le domaine de CVce est $D(0,2) =$
$= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

2) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$

soit $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

D'après cd Cauchy, on ed $R = 1$

Domaine de CVa ?

si $|z| = 1$, $\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

& $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$! $\left[\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\right]$

dc $\lim \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n\right| = \frac{1}{e}$ $\forall |z| = 1$

dc la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$ DV gross $\forall z, |z| = 1$

Le domaine de CVa est dc $D(0,1)$

a) SE q CV en tt pt appartenant au bord du disq de CVa.

$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

RDC est $\underline{R = 1}$.

si $|z| = 1$, on a $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

& dc $\sum \frac{z^n}{n^2}$ CV abs

dc CV $\forall |z| = 1$.

Le domaine de CVa est dc

$DF = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$

g) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n$

Mq $\frac{1}{n.\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$, $n \geq 2$.

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\forall k \geq 1,\ \ln(k) \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq \ln(n)$

$\forall k \leq n,\ \ln(k) \leq \ln(n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq n.\ln(n)$

$$\ln(n) \leq \ln(n!) \leq n\ln(n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n.\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

$a_n = \frac{1}{\ln(n!)}$ d'après l'inéga, on a un encadrement

$$\frac{1}{n.\ln(n)} \leq a_n \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{n}} \ln^{\frac{1}{n}}} \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{(\ln(n))^{1/n}}$$

49

$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ $\alpha \geq 1$ $\alpha > 1$ ou $\beta > 1$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ car } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

$$\ln(n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)} = e^{\frac{\ln n}{n} \times \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Par TD6 $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$

Le CdC implique donc le rayon de CVce de $\sum \frac{1}{\ln(n!)} x^n$ est $R = 1$.

Domaine de CVce :

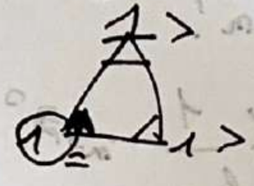
$\sum_n \frac{1}{\ln(n!)} z^n$.

SdB DV

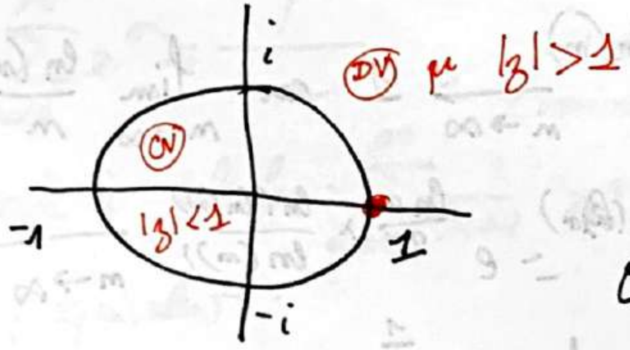
• si $z = 1$, on a $\frac{1}{\ln(n!)} z^n = \frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{n\ln(n)}$

$\sum \frac{1}{n.\ln(n)}$ Sd Bertrand DV.

(SdB CV ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ & $\beta > 1$.



$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{\ln(n!)} z^n$ DV en $z = 1$



$\theta \in]0, 2\pi[$.

si $|z| = 1$ & $z \neq 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$.

étudions $\sum \frac{1}{\ln(n!)} e^{in\theta}$ p $\theta \in]0,2\pi[$.

Th d'Abel :

si $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$, $n \geq 2$.

on a $\ln((n+1)!) = \ln((n+1)\,n!)$
$= \ln(n+1) + \ln(n!)$

Parenthèse

$\left| \frac{1}{\ln(n!)} z^n \right| = \frac{1}{\ln n!}$

& $\frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln n!} \leq \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$0 \xleftarrow[n\to\infty]{}$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$

on ne pt pas conclure sur la CVa de la série slmt que la série DV abs pr $|z|=1$

D'où $\ln((n+1)!) \geq \ln(n!)$

$u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi $(U_n)_n$ est ↘ & $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ou $\cdot \leq \ldots \leq \ldots$ & $U_n \geq 0$.

Mq .. bornée p M.

$(e^{i\theta} \neq 1)$

$\left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} (e^{i\theta})^n \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|$

$\leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$ ← cte M indépdte de n.

$\forall \theta \in]0,2\pi[, \exists M_\theta > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} \right| \leq M$

D'après Th d'Abel

$\sum_n a_n e^{in\theta}$ CV $\forall \theta \in]0, 2\pi[$.

La $\sum \left(\frac{1}{n!}\right) z^n$ CV simplement ssi $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

Bonne idée Th Abel qd $a_n \searrow$ & $\to 0$.

Ex 8

1) $\sum_n \frac{n}{n+1} x^n$

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ dc d'après le crit de d'Alembert, le rayon de CV vaut 1.

2) pr $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

mq $f(0) = 0$ & pr $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f(0) = a_0 = 0$.

si $x \neq 0$, $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} x^n$$

d'où $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n$

$$f(x) \overset{?}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{CV\ ?} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{CV\ ?}$$

or $\sum x^n$ est CV car $|x| < 1$

et $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = x^n - \frac{1}{n+1} x^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1} x^n}_{TG\ s\ CV} = x^n - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n}_{TG\ série\ CV}$$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} x^n$: TG s CV (Terme Général série CV)

Ainsi on pt écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n.$$

or $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$ (comme série géom).

Il reste à calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x}\ln(1-x)$

$x \neq 0$
$|x| < 1$.

ce q équivaut :

$$-\ln(1-x) = +\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Soit $g(x) = -\ln(1-x)$. g est dérivable sur $]-1,1[$ & $g'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

D'après TH 5.3.1 du cours, on a $\forall x \in]-1,1[$:

$$\int_0^x g'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt$$

$$g(x) - g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

or $g(0) = -\ln(1) = 0$.

D'où $\forall x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ce q donne $x \in]-1,1[$ $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x)$$

car on a multiplié les 2 égalités par $\frac{1}{x}$.

Ex 3 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$! ⚠

1) Rayon de CVce = R de SE.

$\displaystyle \alpha_n(x) := \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \neq 0$ si $x \neq 0$.

D'alembert : $\displaystyle \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{\cancel{x^{2n+4}}\ x^2}{(n+2)(2n+3)} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{\cancel{x^{2n+2}}}$

$\displaystyle \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n^2}{2n^2} x^2 = x^2$

on ed $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = x^2$.

D'où si $|x| < 1$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{1 \cdot x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ CV et si $|x| > 1$, la série DV, d'après le Crit de d'Alembert.

ccl Le rayon de CV de la série entière $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ est $R = 1$.

étude CV en $x = 1$ & $x = -1$?

Pr $x = 1$ ou $x = -1$, on a :

$$\left| \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \right| = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, dc $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV abs dc CV en $x = 1$ & en $x = -1$.

2) Mq $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle f''(x) = \frac{2}{1-x^2}$

où $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$

Ĉ le Rayon de CVce est $R = 1$, la f f est de classe $C^\infty(]-1,1[)$ et $\forall x \in]-1,1[$.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} (2n+2) x^{2n+1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{(n+1)}\cancel{(2n+1)}} \overset{2(n+1)}{(2n+2)}\cancel{(2n+1)} x^{2n}.$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}$$

3) ed $f(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)'$, $x \in]-1,1[$

$\boxed{M1}$ On introduit

$g(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$, $x \in]-1,1[$

Mq g est 2 fois dérivable & que
$\forall x \in]-1,1[$.

R• : si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ intervalle dérivable sur I.

si $\forall x \in I$, $f'(x) = g'(x)$ alors $\exists c \in \mathbb{R} \mid$
$\forall x \in I$, $f(x) = g(x) + c$.

Cor si f & g st 2 fois dérivables sur I
& tq $\forall x \in I$, $f''(x) = g''(x)$
Alors $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$,

$f(x) = g(x) = c_1 x + c_2$.

DM

On appliq R• à $f'(x)$ & $g'(x)$
Dc $\exists c_1 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I$,

$f'(x) = g'(x) + c_1 = h'(x)$

où $h(x) := g(x) + c_1 x$, $x \in I$.

D'après le R• , $\exists c_2 \in \mathbb{R} \mid$
$\forall x \in I$, $f(x) = h(x) + c_2$
$= g(x) + c_1 x + c_2$ $\square$

Généralᵗ possible pr un polynôme p, de degré $< k+1$ $\mid \forall x \in I$, $f(x) = g(x) + p(x)$.

pr $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$.

$\boxed{M1}$ $g(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$, $x \in]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[$, $1-x^2$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

& g est 2 fois dérivable par composée de la f 2 fois dériv. D+, $\forall x \in]-1,1[$,

on a $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\dfrac{\frac{\cancel{1-x}+\cancel{1+x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{1+x}{\cancel{1-x}}} - \frac{2x}{1-x^2}$

$g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$g''(x) = \dfrac{\frac{\cancel{1-x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{\cancel{1-x}}} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$

Finlmt, $\forall x \in]-1,1[$, $f''(x) = g''(x)$.

on ed $\exists$ 2 cte $c_1, c_2 > 0 \mid \forall x \in]-1,1[$,

$$f(x) = g(x) + c_1 x + c_2.$$

Pr $x=0$: $f(0) = g(0) + c_2$

or $f(0) = 0$ & $g(0) = 0 \cdot \ln(1) + \ln(1) = 0$

Dc $\boxed{c_2 = 0}$

On sait d+ $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = g'(x) + c_1$

en $\underline{x=0}$, on a $f'(0) = g'(0) + c_1$

or $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, d'où $g'(0) = \ln(1) = 0$

& $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+1}$,

on a $f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

dc $\forall x\ ]-1,1[$, $f(x) = g(x)$.

$\boxed{M2}$ On intègre l'équa° différentielle.

$f''(x) = \frac{2}{1-x^2}$

d'où $f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\,dt$

$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$

or $f'(0) = 0$ d'où

$f'(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$

d'où $f'(x) = [\ln(1+t) - \ln(1-t)]_0^x$

$f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

on a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$

$f(x) - \cancel{f(0)} = \int_0^x (\ln(1+t) - \ln(1-t))\,dt$

$v(t) = \ln(1+t) - \ln(1-t)$

$v'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$

$u'(t) = 1$, $u(t) = t$

$f(x) = \left[t(\ln(1+t) - \ln(1-t))\right]_0^x - \int_0^x \left(\frac{t}{1+t} + \frac{t}{1-t}\right)dt$

$= x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(\frac{(t+1)-1}{1+t} - \frac{(1-t)-1}{1-t}\right)dt$

$= x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{1}{1-t}\right)dt$

$= x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left[-\ln(1+t) - \ln(1-t)\right]_0^x$

$\Rightarrow$ soit $\forall x \in]-1,1[$

$f(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$

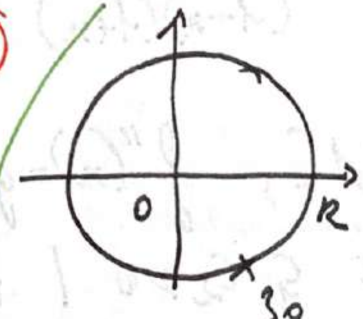
4) ed $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = 2\ln(2)$

on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV

en $x = 1$ & vaut dc $f(1)$.

qd pt-on affirmer $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$!?

R0



soit $\sum a_n z^n$ SE

de rayon de CVa

égale à R

si $\sum a_n z_0^n$ CV alors

$\lim_{z \to z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$.

R4 : $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}\right| =$

$= \sup_{|x|\leq 1} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} |x|^{2n+2} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$

dc la $\sum_n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV normalement sur $[-1,1]$.

dc Uniformément

& ĉ $x \longmapsto \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ est cont s $[-1,1]$,

on obtient que f est <u>cont</u> s $[-1,1]$.

ep $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$= \lim_{x\to 1^-} \left(x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)\right)$

on a : $x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) =$

$= \underbrace{x\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} - x\ln(1-x) + \underbrace{\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} + \ln(1-x)$

D+, $-x\ln(1-x) + \ln(1-x) = (1-x)\ln(1-x)$

or $\lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0$ d'où

$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$

Ainsi $f(1) = 2\ln(2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

RQ : $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}\right| = .$

$= \sup_{|x|\leq 1} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} |x|^{2n+2} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$

dc la $\sum_n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV normalement sur $[-1,1]$.

dc Uniformément

& ĉ $x \longmapsto \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ est cont n $[-1,1]$,

on obtient que f est cont à $[-1,1]$.

ep $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$= \lim_{x\to 1^-} x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$

on a : $x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) =$

$= \underbrace{x\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} - x\ln(1-x) + \underbrace{\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} + \ln(1-x)$

D+, $-x\ln(1-x) + \ln(1-x) = (1-x)\ln(1-x)$

or $\lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0$ d'où

$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$

Ainsi $f(1) = 2\ln(2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

Ex4 1) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ Calcul de sommes

Étude de la CVce

D'Alembert ; $n \neq 0$; $a_n = n^2$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

D'où $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dc le rayon de CVce de la série $\sum n^2 x^n$ est $R = 1$.

Dc on sait que $\sum n^2 x^n$ CV pr $|x| < 1$ & DV pr $|x| > 1$.

Pr $|x| = 1$, $|n^2 x^n| = n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Dc la $\sum n^2 x^n$ DV grossièrement.

Calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

→ soit on dérive

→ soit on intègre

Remarquons que si $U_n(x) = x^n$ alors

$$U_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} = n^2 x^{n-2} - n x^{n-2}.$$

Pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} =: g(x)$

comme le rayon de CVce est 1, g est $C^\infty(]-1,1[)$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad (1) \quad \text{pr } |x|<1$$

$$g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} - n x^{n-2}$$

on Rq que les 2 séries $\sum n^2 . x^{n-2}$ & $\sum n . x^{n-2}$ CV pr $|x| < 1$ (car elles ont un RDC = 1).

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n . x^{n-2}$$

$$\text{D'où } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-2}}_{\frac{1}{x(1-x)^2}}$$

soit $x \neq 0$

on divisant (1) par x.

En multipliant par x^2 :

D'où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x^3)} + x\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(2x+1-x)}{(1-x)^3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}}$$

---

2) $\displaystyle\sum_n \frac{n^2+1}{n!} x^n$

CV de série : $a_n = \dfrac{n^2+1}{n!}$, $n \geq 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Dc $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

Dc série CV $\forall x \in \mathbb{R}$.

Calcul de la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n \ ; \ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

on sait que le RDC $R = \infty$

D'où en dérivant :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \ ; \ e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

*

$$e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-2}$$

* comme les 2 séries $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ & $\sum \frac{x^n}{n!}$ CV on pt écrire $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} x^n$$

$$\text{Dc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n}_{(ii)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n}_{(i)}$$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1}$

$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x \cdot e^x$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+2} = x^2 e^x$

$f(x) = x e^x + x^2 e^x + e^x = (1 + x + x^2) e^x$

Ex 5 1) $S = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ CV-t-elle ?

$a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1} = (-1)^n U_n$; $U_n = \frac{1}{3n+1} > 0$

La série $\sum_n a_n$ est une série alternée.

Rq suite $(U_n)_{n \geq 0} \searrow$ & $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

On ded ap $\boxed{\text{CSA}}$ que $\sum a_n$ CV.

2) Rayon de CV de $f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

$\sum a_n x^{3n+1}$; $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$, $\alpha_n = a_n x^{3n+1}$

$\left| \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{x^{3n+4}}{x^{3n+1}} \right| = \frac{3n+1}{3n+4} |x|^3 \xrightarrow[n \to \infty]{} |x|^3$

si $|x| < 1$, série CV.

si $|x| > 1$, série DV.

3) Mq $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$

où $f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

$(1+t)^3 = (t+1)\underbrace{(t^2 - t + 1)}_{\Delta = -3 < 0}$

$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$

ĉ le RDC de $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{n+1}$ est $R = 1$.

↳ f est dérivable sur $]-1, 1[$

$\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) =$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{(3n+1)}\, x^{3n}}{\cancel{3n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n$$

- ĉ $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

Par Th fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt$$

- or $f(0) = 0$ d'où:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt, \quad x \in]-1,1[.$$

4) Mq $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est U.N @ x $[0,1]$.

On Rq $\sum_n (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \sum_n (-1)^n v_n(x)$

4 $v_n(x) = \frac{x^{3n+1}}{3n+1} > 0$, dc la série est une série alt.

D+, $\forall x \in [0,1]$, la suite $(v_n(x))_n$ est $\searrow$ $\ell \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = \frac{3n+1}{3n+4} x^3 < 1 \; ; \; \forall n \geq 0, \forall x \in [0,1].$$

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{3n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

D'après Cut SA, on a: $|R_n(x)| \leq \frac{x^{3n+4}}{3n+4}$, $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{3n+4} \longrightarrow 0$$

Dc $(R_n)_n$ CV U.N $\longrightarrow 0$ sur $[0,1]$.

Ainsi la série @ U.N ~~sur~~ sur $[0,1]$

R4 avec TH d'Abel radial.

si $\sum a_n x^n$ est SE de $R>0$.
On supp $\sum a_n R^n$ CV alors la série $\sum a_n x^n$ est UN. CV sur $[0,R]$

CV normale

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}$$

or $\sum_n \frac{1}{3n+1}$ DV dc la série ne CV pas normalement.

5) ed ∞ $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$

on sait que $\forall x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \quad \text{d'après 3)}$$

on sait que f est cont sur $[0,1]$.

La $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est U.N CV sur $[0,1]$.

D'où,

$$S = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \underbrace{\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}}_{g(x)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

car $\left| \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} - \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \right| = \left| \int_x^1 \frac{dt}{1+t^3} \right| \leq 1-x \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

$g(x) - \ell \to 0$

Ex6 $f(x) = (2+x)e^x$

a) Mq $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = f(x) + n e^x$.

soit $\forall n \geq 0$: H_n : " $f^{(n)}(x) = f(x) + n e^x$, $x \in \mathbb{R}$ "

H_0 : $f^{(0)}(x) = f(x) = f(x) + 0 . e^x$, $x \in \mathbb{R}$

dc H_0 vraie.

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Supposons H_n soit vraie.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \overset{\text{cf } H_n}{=} f'(x) + n e^x$$
$$= e^x + (2+x)e^x + n e^x$$
$$= (2+x)e^x (n+1)$$

dc $f^{(n+1)}(x) = f(x) = (n+1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

dc H_{n+1} est vraie.

Ainsi $\forall n \geq 0$, H_n est vraie (PPR)

$\boxed{M2}$ FF Leibniz

b) DE SE f ; de classe C^∞ donné p :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

D'après a), $f^{(n)}(0) = f(0) + n e^0$
$$f^{(n)}(0) = 2 + n \quad \forall n \geq 0$$

Le de SE de f est $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n$.

RDC ? D'Alembert

$$a_n := \frac{2+n}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+n+1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2+n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} \to 0$$

Dc RDC de SE vaut $R = \infty$.

c) Mq $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

(car les 2 SE $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ & $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$

CV $\forall x$ (RDC $R = \infty$)

α $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Puis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1}$ pr $k = n-1$

$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x.e^x$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x = f(x)$$

Ex 7 DSE $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

on pourra dériver f

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ et $1-x^2 > 0\}$

$\mathcal{D}f =]-1,1[$

autmatq

Th Compo, cest f est dérivable $C^\infty(]-1,1[)$.

Pr $x \in]-1,1[$; on a :

$f(x) = -\ln\sqrt{1-x^2} = -\ln(1-x^2)^{1/2}$

$= -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$

D'où $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$

D+, $\forall u \in]-1,1[$, on a

$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$,

si $x \in]-1,1[$, $x^2 \in [0,1[$ & dc

$\frac{x}{1-x^2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, on a : * Th Intégrat° SE

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

& $f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \ln(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$, $\forall x \in]-1,1[$.

RDC ? $\alpha_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$, on a :

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{x^{\cancel{2n+4}\,2}}{2n+4} \times \frac{2n+2}{\cancel{x^{2n+2}}}$$

dc $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|^2$

- D'après Th D'Alembert, on en déduit RDV vaut $R = 1$.

Rq : D'après (*), $R \geq 1$, (la SE CV vers $f(x)$ pr $x \in]-1,1[$).

et $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$ DV en $x = 1$.

- Dc $R = 1$.

Ex 8 soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_0^x e^{t^2/2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Objectif : DE SE de f.

1° idée : On part de $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u^n}{n!}$, $u \in \mathbb{R}$ $(R = \infty)$ $e^{t^2/2} = \sum \cdots$ puis on intègre puis on fait le produit de Cauchy du DE SE de $e^{-x^2/2}$ & $\int_0^x e^{t^2/2}\,dt$

$$e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \geq 0$

2° idée : avec équat° différentielle.

a) $f(x) = e^{-x^2/2} \cdot h(x)$ où $h(x) = \int_0^x e^{t^2/2}\,dt$

ep h est la primitive de $t \to e^{t^2/2}$ q s'annule en 0. Comme $t \longmapsto e^{t^2/2}$ est cont sur $\mathbb{R}$, on sait que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^{x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

R : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cont sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$ & $a \in I$, alors on sait que f admet des primitives &

$$(*) \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$, où F est une primitive de f.

Si G est la primitive de f q s'annule en a alors d'après $(*)$;

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a) = G(x).$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fs dérivables) & $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} e^{-x^2/2} h(x) + e^{-x^2/2} h'(x)$$
$$= -x e^{-x^2/2} h(x) + e^{-x^2/2} e^{+x^2/2}$$
$$= -x f(x) + 1$$

dc $f'(x) + x f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) sol° équa° s forme DSE.

$$y' + xy = 1 \quad (E)$$

Supposons ∃ une f $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en SE au V de 0 q est solu° de (E).

66

ie $\exists R>0$ tq $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

& $g'(x)+xg(x)=1$, $|x|<R$

~~cp~~ g est dérivable $\forall x \in]-R,R[$,

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1},$$

- D'où $\forall x \in]-R,R[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 .$$

ds 1° somme, on fait chgt d'indices $k=n-1$, $(k+1=n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k$$

- $$x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^j \qquad j=n+1 \iff n=j-1$$

D'où $1=\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$1 = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)a_{k+1} + a_{k-1}\right)x^k$$

D'où par unicité $\left|\begin{array}{l} a_1 = 1 \quad \& \\ k\geq 2,\ (k+1)a_{k+1}+a_{k-1}=0 \end{array}\right.$

Rq (unicité)

Supps $\exists R>0$ tq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x|<R$$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ a_n = b_n.$

ici $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

空手

$a_1 = 1$ $\quad$ 1 $\quad$ $a_0 \in \mathbb{R}$. Fixons-le.

$3a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$

$5a_5 + a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{5} a_3 = \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

$7a_7 + a_5 = 0 \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{7} \cdot a_5 = \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$a_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} a_{2n-1}$$

$$a_{2n+1} = \left(-\frac{1}{2n+1}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-1}\right) \times \dots \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1) \times \dots \times 3 \times 1}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \; 2n \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2$$

$$= \frac{(-1)^n 2^n \times n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(2n+1)!}$$

D'où $\forall n \geqslant 0$,

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$$