$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx \overset{\text{Riemann}}{=} \lim_{\sup|x_{n+1}-x_n| \to 0} \sum (x_{i+1}-x_i) f(x_i)$$ ⓐ si f est cont.

si f est f en escalier $\Rightarrow$ f intégrable au sens de Riemann

Somme de Darboux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ subdivis° de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$

$$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} m_k (x_{k+1}-x_k) \quad \& \quad \overline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k (x_{k+1}-x_k)$$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x)$, $0 \leq k \leq m-1$, $M_k = \sup f(x)$

f intég au sens de Riemann ssi $\sup \underline{S}(f,\sigma) = \inf \overline{S}(f,\sigma)$

Int de **Lebesgue** est déf sr ens f **mesurables**. $\left(\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

Riemann : Th CV UN : si $f_n \longrightarrow f$ ⓐ UN

alors $\int f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\,dx$.

Lebesgue : Th CV dominée : SppS $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ ⓐ simple

SppS $\exists\, c > 0$, $|f_n(x)| \leq c$ $\forall x$ $\forall n$

Alors $\int |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Th de la mesure

Ⓓ (**Tribu**) E ens, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une **tribu** (σ-algèbre) sr E si :

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ stable p union & intersc° ⓓ
  ie $\forall n, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ stable p passage au complémentaire
  si $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$

M6-1

- $(E,\mathcal{T})$: **espace mesurable**.
- élts de $\mathcal{T}$ st **ens mesurables**.

Suffit de vérifier la stabilité soit p $\cup$ ⓓ soit p $\cap$ ⓓ.

Ⓟ I ens qlcq d'indices (pas sppS ⓓ)

$(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ famille de tribu

$\Rightarrow \forall i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est tribu sr E

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une **tribu** sr E.

Ⓓ (**Tribu engdrée p 1 ds pies de E**)

soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, on définit

$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{T} \in \mathcal{P}(E)$, tribu sr E contenant $\mathcal{E}\}$

$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu.

tribu eng dré p $\mathcal{E}$.

→ $\sigma(\mathcal{E})$ + petite tribu contenant $\mathcal{E}$

→ si $\mathcal{E}$ tribu, $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Ⓓ (**Tribu borélienne sr $\mathbb{R}$**) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

On déf $I = \{$inter ouverts$\} = \{]a,b[$, $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$

On déf $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I)$

la tribu borélienne sr $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I) = \bigcap \{\mathcal{T}$, tribu sr $\mathbb{R} \supset I\}$

Ⓡ La tribu borélienne pt ê déf sr tt espace topo. $(E,\mathcal{O})$ avec $\mathcal{O}$ la Ⓣ sr $(E,\mathcal{O})$ est déf $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)$. $\mathcal{B}(\Gamma) = \{A \cap \Gamma$,

* boréliens sr $\Gamma = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
* borélien sr $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $\sigma(\{B_r(x), r \in]0,\infty[, x \in \mathbb{R}^d\})$

où $B_r(x)$: boule ouverte.

→ diff. construire ens non-borélien.

2. Fonctions mesurables

Ⓓ (**f mesurable**) $(E,\mathcal{T})$, $(F,\mathcal{T}')$ 2 espaces mesurables,

soit $f : E \to F$. f est **mesurable** (de $(E,\mathcal{T})$ ds F muni $\mathcal{T}'$)

si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $B := f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$.

→ f est **mesurable** si **l'image réciproq** de tt ens mesurable est mesurable.

si $\mathcal{T}'$ est tribu borélienne : f est borélienne ou Borel-mesurable.

NoO de mesurabilité dpd fondmtlt des tribus que l'on a muni les espaces.

Ⓓ (**Mesure positive**) soit espace mesurable $(E,\mathcal{T})$, une appli $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est une **mesure** si :

- $\mu(\emptyset) = 0$ & $\forall (A_n)_n$ suite disjointe d'ens. mesurables

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- $(E,\mathcal{T},\mu)$ est un **espace mesuré**.

⚠ **mesure** $\neq$ f **mesurable** → prd son argument ds E.

a pr argument ens mesurable $B \in \mathcal{T}$

Ⓓ Une **mesure** μ sur $(E,\mathcal{T})$ est dite :

1) **finie** si $\mu(E) < \infty$ 2) **de probabilités** si $\mu(E) = 1$

3) **σ-finie** s'$\exists$ partit° ⓓ $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$

ⓔ **mesure de Lebesgue** sr $\mathbb{R}$ est uniq mesure λ sr $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a$

ⓔ **mesure de Dirac**

Ptés des mesures : soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ espace mesuré,

1) **monotonie** $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) **sous-additivité** soit $(B_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$

3) **continuité** ↗ union ↗

$(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

4) **continuité** ↘ intersc° ↘

$B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_{n+1} \subset B_n$ s'$\exists n$ tq $\mu(B_n) < \infty$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

1

Ⓓ (lim sup & lim inf d'ensembles)

soit $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ mesurable, on définit

$$\limsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} B_p \quad (1)$$

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} B_p \quad (2)$$

(1) ens $x \in E$ q st ds ∞ té B_n.
(2) ens $x \in E$ q st ds ts B_n ∁ᵃ nⁿ.

Ⓟ Ⓛ de Borel Cantelli

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré, $\forall (A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$

2. Variables aléatoires

2.1. Loi d'une variable aléatoire

Ⓓ On appelle espace de probabilités un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω : univers, $\mathcal{F}$ est tribu sr Ω & $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités sr $(\Omega, \mathcal{F})$ = un espace mesuré dont la mesure est de probas.

▸ On appelle va tte f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ds un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$. On appelle alors E l'espace d'évents de X. Ds le contexte des probas, on appelle événements les élts $\mathcal{F}$ par X une va, on définit sa loi ou distribution ĉ la mesure sr $(E, \mathcal{T})$, notée $\mathbb{P}_X$, déf p $(X : \Omega \to E)$, $\forall A \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\text{évent} \in \mathcal{F}}) \text{ car } X \text{ va}.$$

Notat° : On note $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$ $= \{X^{-1}(A)\} = \{w \in \Omega, X(w) \in A\}$.

De m̂, $\{X \in A, Y \in B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)$

2.2. va discrètes

Ⓓ va dᵗ l'espace d'élts est soit fini soit ⓓ. Spps $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\{1, \dots, n\}$. Ds le cas discret, on munit E de la tribu discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Pr déterminer $\mathbb{P}_X$, la loi d'une va, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(A)$ $\forall A \subset E$, il suffit de connaître les $\mathbb{P}_X(\{e\})$ $\forall e \in E$ car

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{e\in A} \mathbb{P}_X(\{e\}) \text{ par } \mathbb{P}_X(\{e\})$$
$$= \mathbb{P}(X = e) = \mu_e, \ (\mathbb{P}_X \text{ est déterminé p } \mu).$$

Ⓓ (Espérance) $E \subset \mathbb{N}$, $X : \Omega \to E$, une va discrète,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in E} k\,\mu_k \quad \text{où } \mu_k = \mathbb{P}(X = k)$$

est la loi de X.

(ss réserve de cve absolue si $E = \mathbb{N}$)

Ⓓ Variance de X est

$$V(X) = \sum_{k\in E} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k \quad \text{ss réserve d'absolue cve si } E = \mathbb{N}.$$

$$V(X) = \mathbb{E}((X - E(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ⓓ $A, B \in \mathcal{F}$, proba conditionnel de A sachant B p

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \in [0,1], \text{ spps } \mathbb{P}(B) > 0$$

Les évents st indpts si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

$\iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Ⓟ (FF Probas totales)

soit $\Omega = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_k).\mathbb{P}(B_k)$$

Ⓟ Th du transfert ds cas discret

soit $X : \Omega \to E$ va discrète & $\varphi : E \to \mathbb{N}$ une applicat° alors $\varphi(X) : w \in \Omega \to \varphi(X(w))$ est égalmt une va

& $$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e\in E} \varphi(e)\,\mu_e \quad \text{où } \mu_e \text{ est la loi de } X.$$

Ⓓ (Indépendce de suites d'évents)

→ soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, cette suite est dite indépendante, si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_k$:

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_k}) = \prod_{p=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_p})$$

→ elle est dite indépendante 2 à 2 si c'est vrai pr $k = 2$

ie $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n).\mathbb{P}(A_m)$

Ⓓ (Indépendances de suites de Ⓥⓐ discrètes)

soit X, Y 2 Ⓥⓐ discrètes à val^{rs} ds E, F.

X & Y st indépendantes si $\forall e \in E, \forall f \in F$:

$$\mathbb{P}(X=e, Y=f) = \mathbb{P}(X=e) . \mathbb{P}(Y=f).$$

Une suite X_n de Ⓥⓐ Ⓓ à vl^{rs} ds $\mathbb{N}$ est indépend^{te} si $\forall (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite d'évenb $(\{X_n = p_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est indépend.

Ⓛ de Borel Cantelli n°2

$(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on spps la suite (A_n) indépend^{te},

$$\text{si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

(si $\sum$ probas suite évents est ∞ ⇒ a proba 1 qu'1 infinité de ces events se produit.

2.3 Lois discrètes classiqs

- Loi de Bernoulli, $X \sim Bern(p)$
  - paramètre $p \in [0,1]$ — $E = \{0,1\}$, $\mu_1 = p$, $\mu_0 = 1-p$.
  - $\mathbb{E}(X) = p$ — $V(X) = p(1-p)$
- Loi Binomiale, $X \sim Bin(n,p)$
  - 2 paramètres $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ — $E = \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $\mathbb{E}(X) = np$ — $V(X) = np(1-p)$
- Loi Uniforme, $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$
  - 1 paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ — $E = \{1,\dots,n\}$, $\mu_K = \frac{1}{n}$ $\forall K \in \{1,\dots,n\}$.
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ — $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- Loi géom, $X \sim Geom(p)$
  - paramètre $p \in [0,1]$ — $E = \mathbb{N}^*$, $\mu_K = p(1-p)^{K-1}$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ — $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Loi de Poisson, $X \sim Pois(\lambda)$
  - paramètre $\lambda > 0$ — $E = \mathbb{N}$, $\mu_K = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$ — $Var(X) = \lambda$.

2.4. Variables à densité

Ⓓ Spps f est $CM(\mathbb{R})$, f f positive tq $\forall A > 0$ $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$ $\exists$.

On spps qu'il $\exists$ $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \infty$ alors on dit que f intégrable sr $\mathbb{R}$

et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$. (*)

- soit f f cont$_p$ mcx, on dit f est intégrable si $|f|$ l'est en admettant alors (*).

Ⓓ Une f f (CM) est densité de probas sr $\mathbb{R}$.
- $f \geq 0$ ie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- borélienne (≈ mesurable) & intégrable sr $\mathbb{R}$ & satisfaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

Ⓓ Soit f une densité de probas, on dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est Ⓥⓐ à densité ou densité de f, si $\forall a,b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ⓓ soit X Ⓥⓐ réelle à densité de densité f_X, on déf f de répartit° de X comme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Pptés de F_X

soit X (var), $F_X \nearrow$ à vl^{Rs} ds $[0,1]$, cont à droite, et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x)=1$. Par ailleurs, F_X détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$ de X ds le sens où si $F_X = F_Y$ sur $\mathbb{R}$ pr 2 (var) X et Y $\Rightarrow \mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$,
ie $\forall A\in\mathcal{T}$, $\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(Y\in A)=\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}_Y(A)$

Prop soit X (var) à densité f_X, on spps $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx<\infty$
alors on déf $\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$, on dit que X intégrable.

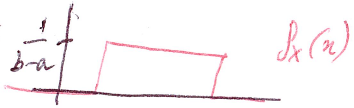
- spps $x^2 f_X(x)$ est intégrable sr $\mathbb{R}$, on déf la variance

$$V(X) = \int_\mathbb{R} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\int_\mathbb{R} x f_X(x)\,dx\right)^2 = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2.$$

2.5. Lois classiqs à densité

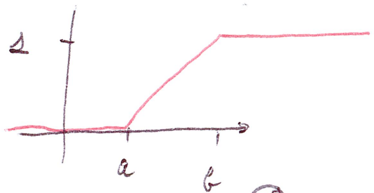
1. Loi uniforme sr $[a,b]$, $a<b \in \mathbb{R}$.

La loi uniforme sr $[a,b]$ est la loi à densité de densité $f_X(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{a\le x\le b}$ où



$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X\le x)$$

$$F_X(x) = \begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]. \\ 1 & \text{si } x\ge b.\end{cases}$$



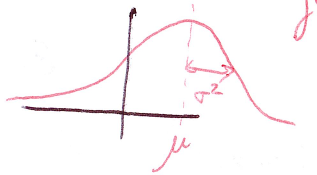
Rq Par variables à densité, f de répartition est cont :
$F_X(x)=\int_{-\infty}^x f_X(x)\,dx$ dérivable de dérivée $f_X \Rightarrow$ cont.

$$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}, \quad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Loi gaussienne/normale

La loi normale, notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}_+^*$. C'est une loi de densité :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$\mathbb{E}(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$.

→ f de répartition de la loi normale n'est pas explicite.
- $\mathbb{E}(X)=0 \Leftrightarrow \mu=0$: var centrée.
- $V(X)=1 \Leftrightarrow \sigma^2=1$: var réduite.

→ Une loi $\mathcal{N}(0,1)$: loi normale centrée réduite.

Th Fubini

$\int\int$ POSITIVE, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, I & I' 2 interv. de $\mathbb{R}$:

$$\int_I dx \int_{I'} dy\, f(x,y) = \int_{I'} dy \int_I dx\, f(x,y)$$

F_X

P x (var) à vl^{Rs} positives, à densité f_X $\in M$, spps $\mathbb{E}(X)$ bien déf ($\int_\mathbb{R} x f_X(x)\,dx<\infty$) : $\mathbb{E}(X)=\int_0^\infty (1-F_X(y))\,dy$

$$\int_I f(x)\,dx = \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{x\in I}\, f_X(x)\,dx.$$

(D) La loi exponentielle représente un tps d'attente. On dit qu'une (va) X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si X est variable à densité de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Sa f de répartition est donnée p sa f de répartition :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}\, dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et } 0 \ \forall x < 0.$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(P) $\mathbb{P}(X > a+b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$

(Rq) ⚠ $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) \neq \int_{-\infty}^{1} f_X(y)\, dy$ (guichet, tps d'attente)

Faux car X pas à densité !

3/ Intégrale p/ à une mesure σ-finie

3.1) Déf de l'intégrale d'une f mesurable

(D) soit $A \in \mathcal{T}$, on définit la f $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée l'indicatrice de A comme $\forall x \in E$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

(Rq) Une f $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée s'$\exists\, n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et des ens mesurables $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ tq $\forall x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. (Étagée = combi. lin d'indicatrice)

On note $\mathcal{E}$ l'ens des f étagées. ($\mathcal{E}^+$ pr positives.

(D) soit $f \in \mathcal{E}^+$, $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $a_i \geq 0$ $\forall i$, on déf l'intégrale de f contre μ : $\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i)$

(Rq) Cette déf est encore valide pr $f \in \mathcal{E}$ si μ est une mesure finie.

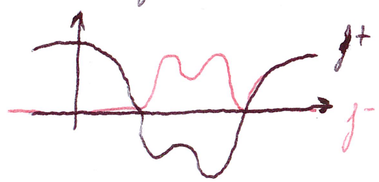
(D) (L'integ f mesurable positive)

f cont, mesure σ-finie, μ déf c $\int_E f\, d\mu = \sup\left\{ \int_E g\, d\mu,\ g \in \mathcal{E}^+,\ g \leq f \right\}$.

→ f est dite intégrable si $\int f\, d\mu < \infty$.

(D) Un ens $N \subset E$ est dit négligeable s'$\exists\, A \in \mathcal{T}$, $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

(D) soit f f mesurable, on déf fs $f^+(x) = \max(0, f(x))$, $f^-(x) = \max(0, -f(x))$



$\Rightarrow f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

→ f^+ & f^- st mesurables, si f^+ & f^- st intégrables, f est integ & $\int f\, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

→ On note $\mathcal{L}^1(E)$ ou $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ens f integ p/ à μ.

(5) → f intég $\iff |f|$ intégrable.

Notaⁿ : $\int f d\mu = \int f(x) \mu(dx) = \int f(x) d\mu(x)$

(si $\mu = \lambda$ et mesure de Lebesgue sr $\mathbb{R}$ $= \int f(x) dx$.

Rq si f, g mesurables & égales presq partout alors f intégrables $\Leftrightarrow$ g integ & $\int f d\mu = \int g d\mu$.

$\|f\|_1 = \int |f| d\mu$, $f = g$ μpp : $f = g$ ds $\mathcal{L}^1$.

D A ens mesurable, f f intégrable :

$$\int_A f\, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A\, d\mu$$ (cp monotonie de l'int)

Pptés • L'int de Lebesgue est linéaire

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{L}^1$

et $\int af + bg\, d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$.

• Monotonie : si $f, g \in \mathcal{L}^1$, $f \leq g$ μ-pp

$\Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

3.2. Convergence d'intégrales

D • (f_n) suite f mesurables, f_n CV simplmt vers f si $\forall x \in E$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x).$$

• f_n CV μ presque partout vers f s' $\exists$ ens négligeable N tq f_n CV simplt vers f sr N^c.

D (f_n) suite fs intégrables & soit $f \in \mathcal{L}^1$, on dit que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ si $\boxed{\int |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

(c'est CVce ~~ass~~ à $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$)

⚠ $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{sim}} f$ & $f_n \xrightarrow{\text{simplt}} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

D Lim inf & limsup de suites réelles

soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle, $b_p = \sup_{n \geq p} a_n$, $c_p = \inf_{n \geq p} a_n$,

$p \in \mathbb{N}$, $b_p, c_p \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_p \searrow$, $c_p \nearrow$, $c_p \leq b_p$

$\exists$ $\bar{a} = \lim_{p\to\infty} b_p = \lim_{p\to\infty} \sup_{n \geq p} a_n$ & $\underline{a} = \lim c_p = \liminf a_n$

↳ $\bar{a}$, $\underline{a}$: + gde (resp + petite) valᴿ d'adhérence de $(a_n)_{n\geq 0}$

↳ $\bar{a}$ (resp $\underline{a}$) : + gde (resp + petite) vlᴿ dt a_n va passer infiniment proche sr ξ.

D f_n suite $f : E \to \mathbb{R}$,

$\limsup f_n(x) := \limsup(f_n(x))$ (idm)

$\liminf f_n(x) := \liminf(f_n(x))$

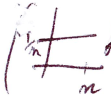
6

Rq si f_n suite f^{o} mesurables $\Rightarrow \lim\sup_{\inf} f_n$ mesurables

Th (L de Fatou)

(f_n) suite de fs mesurables positives alors

$$\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonction } g} d\mu \leq \liminf \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{suite réelle}}$$



$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$ $\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0,n]) = 1$, $\liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

$\rightarrow$ calculer $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ pr $x \geq 0$, $\exists \, n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ à x fixé

$f_n(x)$ CV & $\lim f_n(x) = 0 \Rightarrow \liminf f_n = 0 \Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda = 1.$$

Th (CVce monotone)

soit $(f_n)_n \nearrow$ de f mesurables & positives (ie $\forall n$ $f_n(x) \nearrow_n$)

$\Rightarrow (f_n)$ CV simplem^{t} vers f mesurable,

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

$\rightarrow f$ $\int$ prend ses val^{rs} ds $\overline{\mathbb{R}}^{+}$

$\rightarrow$ aucune hypo intégrabilité sr f, idem pr suites $\searrow$ de fs nég.

Th (CVce dominée)

soit (f_n) suite fs mesurable, CV simple vers f. On spps $\exists \, g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, ie $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.