L2 Mathématiques - M33

2020/2021

Chapitre 1

–

APPROFONDISSEMENT SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1 Bornes inférieure et supérieure

Définition 1.0.1 (majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure) Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

(i) Le réel m est appelé *minorant* de A si pour tout $a \in A$, $m \leq a$.

(ii) Le réel M est appelé *majorant* de A si pour tout $a \in A$, $a \leq M$.

(iii) Le réel m est appelé *plus petit élément* de A si m est un minorant de A et si m appartient à A.

(iv) Le réel M est appelé *plus grand élement* de A si M est un majorant de A et si M appartient à A.

(v) Le réel m est appelé *borne inférieure* de A si :
— m est un minorant de A, i.e. pour tout $x \in A$, $m \leq x$,
— Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.
Autrement dit, la borne inférieure est le plus grand des minorants. On note $\inf A$ la borne inférieure de A.

(vi) Le réel M est appelé *borne supérieure* de A si :
— M est un majorant de A, i.e. pour tout $x \in A$, $x \leq M$,
— Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon \leq x_\varepsilon$.
Autrement dit, M est le plus petit des majorants. On note $\sup A$ la borne supérieure de A.

Exemple 1.0.2 La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1 (à noter, 1 n'appartient pas à $[0, 1[$). L'ensemble $[0, +\infty[$ n'a pas de borne supérieure.

Théorème 1.0.3 Toute partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

2 Suites de nombres réels

Définition 2.0.1 On appelle suite de $\mathbb{R}$ toute application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{cases}$$

On note $u_n = u(n)$ la valeur de u en n et on confondra généralement l'application u et l'ensemble de ses valeurs noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le nombre u_n s'appelle le terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.0.2 Soit $(u_n)_n$ une suite. Nous dirons que
— $(u_n)_n$ est *majorée* s'il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq M$.

— $(u_n)_n$ est *minorée* s'il existe m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $m \leq u_n$.
— $(u_n)_n$ est *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 2.0.3 Soit $(u_n)_n$ une suite. Nous dirons que
— $(u_n)_n$ est *croissante* (resp. décroissante) à partir du rang N si pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
— $(u_n)_n$ est *strictement croissante* (resp. décroissante) à partir du rang N si pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
— $(u_n)_n$ est dite *monotone* (resp. strictement monotone) à partir du rang N si $(u_n)_n$ est décroissante (resp. strictement décroissante) à partir du rang N ou si $(u_n)_n$ est croissante (resp. strictement croissante) à partir du rang N.

Définition 2.0.4 (Convergence d'une suite) Soient $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et u_* un nombre réel. On dit que
— la suite $(u_n)_n$ converge vers u_* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_*| < \varepsilon$. Dans ce cas, on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_*$.
— la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si pour tout réel $M > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq M$. Dans ce cas, on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
— la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ si pour tout réel $M < 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq M$. Dans ce cas, on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2.0.5 La limite d'une suite de nombres réels est unique.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite. Supposons que $(u_n)_n$ ait deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$.
On sait que $(u_n)_n$ converge vers l_1 et l_2, autrement dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|u_n - l_2| < \varepsilon$. C'est vrai pour n'importe quel ε, à nous de le choisir intelligemment ! Soit alors $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$. Comme $l_1 \neq l_2$, ε est strictement positif.
Comme $(u_n)_n$ tend vers l_1, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l_1| < \varepsilon$.
De même, comme $(u_n)_n$ tend vers l_2, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|u_n - l_2| < \varepsilon$.
Pour $N = \max(N_1, N_2)$ on a

$$\begin{array}{rcl} |l_1 - l_2| & = & |l_1 - u_N + u_N - l_2| \\ & \leq & |l_1 - u_N| + |u_N - l_2| \text{ d'après l'inégalité triangulaire} \\ & < & \varepsilon + \varepsilon = \dfrac{2}{3}|l_1 - l_2|. \end{array}$$

Et cela est impossible : un nombre strictement positif ne peut-être strictement inférieur à 2/3 de lui-même. □

2.1 Bornes inférieures, bornes supérieures et suites

Proposition 2.1.1 Le réel M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A et s'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers M.
Le réel m est la borne inférieure de A si et seulement si m est un minorant de A et s'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers M.

Preuve : On montre seulement le cas de la borne supérieure. Supposons que $M = \sup A$. Alors M est un majorant de A. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ tel que $M < u_n + \frac{1}{n}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $M - \frac{1}{n} < u_n \leq M$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = M$.
Réciproquement, supposons que M soit un majorant de A et qu'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers M.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ converge vers M, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - M| < \varepsilon$. Ainsi, pour $x_\varepsilon = u_N$, il vient $-\varepsilon < x_\varepsilon - M < \varepsilon$ et donc $M - \varepsilon \leq x_\varepsilon$. Ainsi M est la borne suprérieure de A. □

3 Suites convergentes et inégalités

Proposition 3.0.1 Toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite convergente, l sa limite. On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$. À nous de choisir le ε intelligemment ! Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < 1$. Ainsi pour tout $n \geq N$ on a $l - 1 < u_n < l + 1$. Soit alors $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l+1)$ et $m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l-1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n \leq M$. $\square$

Théorème 3.0.2 Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers l et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, tel que $u_n \geq \lambda$. Alors $l \geq \lambda$.

Preuve : On raisonne par l'absurde et on suppose que $l < \lambda$. Soit $\varepsilon = \frac{\lambda - l}{2}$. Par hypothèse, $\varepsilon > 0$ et comme $(u_n)_n$ converge vers l, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Par hypothèse sur $(u_n)_n$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq \lambda$ et donc $u_n - l \geq \lambda - l$. On obtient ainsi la suite d'inégalité suivante :

$$0 < \lambda - l \leq u_n - l \leq |u_n - l| < \varepsilon = \frac{\lambda - l}{2}$$

et c'est absurde car on ne peut pas avoir $0 < \lambda - l < \frac{\lambda - l}{2}$! Donc $l \geq \lambda$. $\square$
Une conséquence immédiate du précédent théorème est le corollaire suivant :

Corollaire 3.0.3 Si $(u_n)_n$ converge vers l et si $u_n \geq \lambda$ (resp. $u_n \leq \lambda$) pour tout n à partir d'un certain rang, alors $l \geq \lambda$ (resp. $l \leq \lambda$).

Théorème 3.0.4 (des gendarmes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que
- Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$.
Comme $\lim_{n\to\infty} w_n = l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|w_n - l| < \varepsilon$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$-\varepsilon < u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l < \varepsilon$$

et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. $\square$

Remarque 3.0.5 Même si dans les théorèmes précédents les inégalités sur les termes des suites sont strictes, les inégalités sur les limites sont larges. Par exmple, si pour tout $n > 0$, on a $u_n = \frac{1}{n}$, alors $u_n > 0$. Cependant, on n'a pas $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$.

Exemple 3.0.6 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1+a_n}$ où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π. Alors $0 < v_n \leq u_n$ et donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

4 Opérations sur les suites et limites

Proposition 4.0.1 Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$.

Preuve : On utilise l'inégalité $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < \varepsilon.$$

$\square$

Proposition 4.0.2 Si $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors $(|u_n|)_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang N, tous les u_n sont positifs donc $|u_n| = u_n$ pour tout $n \geq N$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors à partir d'un certain rang N, tous les u_n sont négatifs donc $|u_n| = -u_n$ pour tout $n \geq N$. Soit alors $M \in \mathbb{R}$ arbitraire. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$ on ait $u_n \leq -M$. Alors pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a $|u_n| = -u_n \geq M$ donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. $\square$

Proposition 4.0.3 [limite d'une somme, d'un produit et de l'inverse de suites, cas de limites finies] Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites qui convergent vers l et l' respectivement. Alors

1. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
2. la suite $(a \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \cdot l$
3. la suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \cdot l'$.
4. si $l \neq 0$, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{l}$.

Preuve :

1. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
   Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a
   $$\begin{aligned} |u_n + v_n - l - l'| &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
   donc $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$.
2. Si $a = 0$ il n'y a rien à montrer car $a \cdot u_n = 0$ pour tout n et donc la suite $(a \cdot u_n)_n$ converge vers $0 = a \cdot l$.
   On suppose donc $a \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a \neq 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{|a|}$. Ainsi
   $$|a \cdot u_n - a \cdot l| = |a| \cdot |u_n - l| < \varepsilon$$
   et on a bien $\lim_{n\to+\infty} a \cdot u_n = a \cdot l$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
   Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-M < u_n < M$ et soit $M' > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-M' < v_n < M'$. (M et M' existe car $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ étant des suites convergentes, elles sont bornées). Remarquons que $|l| \leq M$ et $|l'| \leq M'$.
   Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M'}$.

Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{array}{rcl} |u_n v_n - ll'| & = & |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ & = & |u_n(v_n - l') + (u_n - l)l'| \\ & \leq & |u_n||v_n - l'| + |u_n - l| \cdot |l'| \\ & < & M\dfrac{\varepsilon}{2M} + M'\dfrac{\varepsilon}{2M'} = \varepsilon. \end{array}$$

4. On sait que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe N' tel que $n \geq N'$ implique $|u_n - l| < \varepsilon'$.
Ici, on veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| < \varepsilon$. Or $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|u_n - l|}{|u_n| \cdot |l|}$. Il suffit de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon |u_n||l|$.
Comme $(u_n)_n$ converge vers l, $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$ et $|l| > 0$. Donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $\frac{1}{2}|l| < |u_n|$.
Ainsi, si on peut montrer que $|u_n - l| < \frac{1}{2}\varepsilon |l|^2$, on aura $|u_n - l| < \varepsilon |u_n||l|$.
Soit alors $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon |l|^2$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon'$.
Alors pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ on a

$$|u_n - l| < \varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon |l||l| \leq \varepsilon |l||u_n|$$

et donc $\forall n \geq N$, $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| < \varepsilon$. $\square$

Proposition 4.0.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tel que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. $\square$

Proposition 4.0.5 (Limite d'une somme, cas de limites infinies) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée (resp. majorée). Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Preuve : Soit m un minorant de $(v_n)_n$ et soit $M \in \mathbb{R}$ arbitraire. Comme $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq M - m$. Alors pour tout $n \geq N$:

$$u_n + v_n \geq M - m + m = M$$

ce qui prouve, puisque M est quelconque, que $(u_n + v_n)_n$ diverge vers $+\infty$. L'autre cas se traite de la même façon. $\square$

Proposition 4.0.6 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $a \in \mathbb{R}^*$. Alors
(a) si $a > 0$, la suite $(a \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(b) si $a < 0$, la suite $(a \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Preuve : On traite uniquement le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $a > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}$ arbitraire. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq \frac{M}{a}$ Ainsi

$$a \cdot u_n \geq a\frac{M}{a} = M$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} a \cdot u_n = +\infty$. $\square$

Proposition 4.0.7 (Limite d'un produit, cas de limites infinies) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

(a) Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m > 0$ à partir d'un certain rang. Alors la suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(b) Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $m < 0$ à partir d'un certain rang. Alors la suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Preuve : On traite uniquement le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_n$ minorée par $m > 0$ à partir d'un certain rang N_1. Soit $M \in \mathbb{R}$ arbitraire. Comme $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq \frac{M}{m}$. Alors pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$:

$$u.v_n \geq \frac{M}{m}m = M$$

ce qui prouve puisque M est quelconque que $(u_n \cdot v_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
Les autres cas se traitent de la même façon. □
Remarque : Cette proposition s'applique en particulier lorsque $(v_n)_n$ converge vers un réel non nul ou vers $\pm\infty$.

Proposition 4.0.8 (limite de l'inverse, cas de limites infinies) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 tel que $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$) à partir d'un certain rang. Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Preuve : Dans le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir du rang $N' \in \mathbb{N}$: Soit $M > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n| < \frac{1}{M}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$:

$$\frac{1}{u_n} = \left|\frac{1}{u_n}\right| > M$$

et donc comme M est arbitraire, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. □

5 Équivalents

Définition 5.0.1 Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites équivalentes, et on note $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang :

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n).$$

Remarque 5.0.2 Remarquons que si $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n = 0$ si et seulement si $v_n = 0$.

Proposition 5.0.3 Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang (i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$), alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Preuve : Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 et un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$. Puisque v_n est non nul à partir d'un rang n_1, on en déduit que pour tout $n \geq max(n_1, n_0)$:

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n.$$

Puisque $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, on pose $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n} - 1$ tout n tel que $v_n \neq 0$. Alors, puisqu'à partir d'un rang n_1, $v_n \neq 0$, on a pour tout $n \geq n_1$

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

□

Proposition 5.0.4 Soient $(u_n)_n$, $(u'_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(v'_n)_n$ des suites telles que u_n soit équivalent à v_n et u'_n à v'_n lorsque n tend vers l'infini. Alors $u_n u'_n \sim_{n\to+\infty} v_n v'_n$.
Si de plus $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n}$.

Preuve : Soient $(\varepsilon_n)_n$ et $(\varepsilon'_n)_n$ deux suites qui convergent vers 0 et telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ et $u'_n = v'_n(1 + \varepsilon'_n)$ (remarquons qu'a priori, le rang n'est pas le même pour le couple de suites $((u_n)_n, (v_n)_n)$ que pour le couple $((u'_n)_n, (v'_n)_n)$, mais qu'en prenant le maximum des deux, on peut en fait supposer sans restriction que c'est le même). Alors

$$\begin{aligned} u_n u'_n &= v_n v'_n (1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon'_n) \\ &= v_n v'_n (1 + \varepsilon_n + \varepsilon'_n + \varepsilon_n \varepsilon'_n). \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon''_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n + \varepsilon_n \varepsilon'_n$. La suite $(\varepsilon''_n)_n$ converge vers 0 et à partir d'un certain rang :

$$u_n u'_n = v_n v'_n (1 + \varepsilon''_n),$$

autrement dit $u_n u'_n \sim_{n\to+\infty} v_n v'_n$.

Remarque 5.0.5 En général $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ et $u'_n \sim_{n\to+\infty} v'_n$ n'implique pas $u_n + u'_n \sim_{n\to+\infty} v_n + v'_n$. De même, en général si f est une fonction et si $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, on n'a pas $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} f(v_n)$. Par exemple, si pour tout n, $u_n = n + n^2$ et $v_n = n^2$, et $f : x \mapsto e^x$, alors :

— $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$,

— mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)}{f(v_n)} = \lim_{n\to+\infty} e^n \neq 1$ donc on n'a pas $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Question : À quelle condition sur $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ a-t-on $e^{u_n} \sim_{n\to+\infty} e^{v_n}$?

6 Existence de la limite

6.1 Croissance et convergence

Théorème 6.1.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée par M. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qui satisfait $\ell \leq M$.

Preuve : Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On pose $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors U est une partie majorée de $\mathbb{R}$ par M, U admet une borne supérieure ℓ. On montre que $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe un élément de U, par exemple u_N tel que $\ell - \varepsilon < u_N$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq N$ on a $\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell$.
Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ on a $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$ c'est à dire $|u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque 6.1.2 Ce n'est pas parce que (u_n) est croissante et majorée par 1 que u_n converge vers 1. Par exemple, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée par 1 mais elle ne converge pas vers 1 mais vers $\frac{1}{2}$!

Exemple 6.1.3 Soit (v_n) la suite récurrente définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$. On a déjà vu dans l'exemple sur les suites croissantes que (v_n) est majorée par 2 et croissante. Elle est donc convergente. Notons l sa limite. Alors l vérifie $l = \sqrt{l+2}$. On en déduit que $l^2 - l - 2 = 0$ et donc $l = -1$ ou 2. Comme $v_n \geq 0$ pour tout n, on en déduit que (v_n) converge vers 2.

Théorème 6.1.4 Toute suite strictement croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Preuve : Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, il existe N tel que $u_N \geq M$. Ainsi, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq M$. ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. $\square$
La conséquence immédiate des deux théorèmes précédents est donc le corollaire suivant :

Corollaire 6.1.5 Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

6.2 Suites adjacentes

Définition 6.2.1 Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront dites adjacentes si :

1. $(u_n)_n$ est croissante,
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$.

Proposition 6.2.2 Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes. On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.

Preuve : Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$.
Alors comme $(u_n)_n$ est croissante et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$$

et c'est impossible. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$. $\square$

Théorème 6.2.3 Deux suites adjacentes de $\mathbb{R}$ convergent vers une même limite.

Preuve : Soient deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Donc $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée donc $(u_n)_n$ converge vers un certain l.
De même, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc converge vers un certain l'. On a $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = l' - l$ et par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$ donc $l = l'$. $\square$

6.3 Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 6.3.1 (Sous suite, suite extraite) Soit $(u_n)_n$ une suite. Une suite $(v_n)_n$ est une *suite extraite* ou *sous suite* de $(u_n)_n$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 6.3.2 Soit $(u_n)_n$ une suite, alors $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$, $(u_{n^2})_n$ sont des suites extraites de $(u_n)_n$.

Théorème 6.3.3 Si une suite $(u_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers l.

Théorème 6.3.4 (Bolzano-Weierstrass) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $[a, b]$. Alors il existe une suite $(u_{n_k})_k$ extraite qui converge (nécessairement dans $[a, b]$).

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite minorée par m et majorée par M. On va construire par récurrence deux suites adjacentes $(m_i)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $m_i \leq u_{n_i} \leq M_i$. Si nous y parvenons, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeront vers un certain l et le théorème des gendarmes impliquera que $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.
On pose $m_0 = m$, $M_0 = M$ et $n_0 = 0$.
Soit $l_0 = \frac{M_0+m_0}{2}$. Alors soit $[m_0, l_0]$, soit $[l_0, M_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$. Dans le premier cas, on pose $m_1 = m_0$ et $M_1 = l_0$ et dans le second, on pose $m_1 = l_0$ et $M_1 = M_0$. Remarquons qu'alors $[m_1, M_1] \subset [m_0, M_0]$, que $[m_1, M_1]$ contient une infinité de u_n et que $M_1 - m_1 = \frac{M_0-m_0}{2}$.
Supposons avoir construit une suite d'intervalles emboîtés

$$[m_i, M_i] \subset [m_{i-1}, M_{i-1}] \subset \ldots \subset [m_1, M_1] \subset [m_0, M_0]$$

tels que chaque intervalle contienne une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$ et tels que pour tout k, $M_k - m_k = \frac{M_0-m_0}{2^k}$.
On pose alors $l_i = \frac{M_i+m_i}{2}$. Soit $[m_i, l_i]$, soit $[l_i, M_i]$ contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_n$. Dans le premier cas, on pose $m_{i+1} = m_i$ et $M_{i+1} = l_i$ et dans le second, on pose $m_{i+1} = l_i$ et $M_{i+1} = M_i$, de sorte que $[m_{i+1}, M_{i+1}] \subset [m_i, M_i]$ et $M_{i+1} - m_{i+1} = \frac{M_0-m_0}{2^{i+1}}$.
La suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien croissante et la suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus $(M_i - m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Elle converge donc vers 0. Par suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit ensuite un terme u_{n_i} dans $[m_i, M_i]$ de sorte que $n_i > n_{i-1}$.
On a ainsi construit deux suites adjacentes $(m_i)_{i\in\mathbb{N})}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N})}$ et nous avons extrait une sous suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $m_i \leq u_{n_i} \leq M_i$. □

6.4 Suites de Cauchy

Définition 6.4.1 (Critère de Cauchy pour les suites) Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels vérifie *le critère de Cauchy* ou est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Proposition 6.4.2 Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$ on ait

$$|u_p - u_q| < 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |u_n| &\leq |u_n - u_N| + |u_N| \\ &\leq 1 + |u_N|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1,).$$

□

Proposition 6.4.3 Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente converge.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente $(u_{n_k})_k$. Notons l la limite de $(u_{n_k})_k$ et montrons que $(u_n)_n$ converge vers l.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$ on ait

$$|u_q - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $(u_{n_k})_k$ converge, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, on ait

$$|u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K$ et $k \geq N$ (auquel cas $n_k \geq n_N \geq N$). Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela montre que la suite $(u_n)_n$ converge vers l. □

Théorème 6.4.4 (Complétude de $\mathbb{R}$) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Alors $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(u_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Preuve : Supposons que $(u_n)_n$ converge et notons l sa limite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $p, q \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq |u_p - l| + |u_q - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.
Réciproquement, supposons que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy et montrons qu'elle converge.
Comme $(u_n)_n$ est de Cauchy elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite convergente et donc elle converge. □

Théorème 6.4.5 Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{R}$ est complet : toute suite de Cauchy converge.
2. $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure.
3. toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente,
4. deux suites adjacentes convergent vers une même limite
5. théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée a une sous-suite convergente.

Preuve : Nous avons montré que (2) implique (3), (3) implique (4), (4) implique (5). Enfin, (5) implique (1). On montre que (1) implique (2).

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On note b_0 un majorant de A. Comme A est non vide, il existe $a_0 \in A$.
Supposons avoir construit deux suites d'entiers $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$ et $b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq b_n$ telles que, pour tout j,

— $0 \leq b_j - a_j \leq \frac{b_0 - a_0}{2^j}$,
— a_j appartient à A,
— b_j est un majorant de A.

On considère alors $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si α est encore un majorant de A, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \alpha$ de sorte que $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$, a_{n+1} appartient à A et b_{n+1} est un majorant de A.
Sinon, α n'est pas un majorant de A. Il existe donc $a_{n+1} \in A$ tel que $a_{n+1} \geq \alpha$ et on pose $b_{n+1} = b_n$. Alors a_{n+1} appartient à A et b_n est un majorant de A. De plus $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - \alpha = \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$.
Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont de Cauchy : En effet, pour $\varepsilon > 0$ arbiraire, il existe N tel que $0 \leq \frac{b_0 - a_0}{2^N} < \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \geq N$ avec $p > q$, on a $0 \leq a_p - a_q \leq b_p - a_q \leq b_q - a_q \leq \frac{b_0 - a_0}{2^q} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^N} < \varepsilon$. De

même $0 \leq b_q - b_p \leq b_q - a_p \leq b_q - a_q \leq \frac{b_0-a_0}{2^q} \leq \frac{b_0-a_0}{2^N} < \varepsilon$. Ainsi $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent. De plus, puisque pour tout n on a $0 \leq b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. On en déduit que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent donc vers une même limite ℓ. On montre que $\ell = \sup A$.
Pour tout $a \in A$ fixé, on a $a \leq b_n$ et donc en passant à la limite, $a \leq \ell$: ℓ est un majorant de A. De plus, la suite $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ donc $\ell = \sup A$.

6.5 Suites récurrentes, théorème du point fixe

Définition 6.5.1 On dira que $(u_n)_n$ est une suite récurrente s'il existe une fonction f défine sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que pour tout n u_n appartient à I et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition 6.5.2 Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante sur I si

— $f(I) \subset I$,

— Il existe $c \in]0, 1[$ tel que pour tout $x, x' \in I$, $x \neq x'$, on ait $|f(x) - f(x')| < c|x - x'|$.

c est appelé rapport de contraction de f sur I.

Proposition 6.5.3 Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $c \in]0, 1[$ et $f : I \to I$ une application dérivable telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| < c$.
Alors f est contractante.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis : pour tout $x, x' \in I$, il existe y compris entre x et x' tel que $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = f'(y)$ donc $\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right| \leq c$.

Théorème 6.5.4 Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ ($I = [a, b]$, $I = [a, +\infty[$, $I =]-\infty, a]$), f une application contractante sur I. Alors il existe un unique $l \in I$ tel que $f(l) = l$. De plus, toute suite $(u_n)_n$ définie par u_0 quelconque dans I et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers I. On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - l| \leq c^n|u_0 - l|$ et $|u_n - l| \leq \frac{c^n}{1-c}|u_1 - u_0|$.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 quelconque dans I. On commence par montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a par récurrence $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq c|u_n - u_{n-1}| \leq c^n|u_1 - u_0|$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. On a

$$\begin{array}{rcl}
|u_n - u_m| & \leq & |u_n - u_{n-1}| + |u_{n-1} - u_{n-2}| + \ldots + |u_{m+1} - u_m| \\
& \leq & (c^{n-1} + \ldots + c^m)|u_1 - u_0| \\
& \leq & |u_1 - u_0|c^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c + 1) \\
& \leq & |u_1 - u_0|c^m \dfrac{1 - c^{n-m}}{1 - c}
\end{array}$$

Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$ on ait $|u_1 - u_0|c^m \frac{1-c^{n-m}}{1-c} < \varepsilon$ car c appartient à $]0, 1[$.
Ainsi, $(u_n)_n$ est de Cauchy.
Notons l sa limite. Alors l appartient à I car pour tout n, u_n appartient à I et I est fermé.
Ensuite nous avons

$$0 \leq |u_{n+1} - f(l)| = |f(u_n) - f(l)| \leq c|u_n - l|$$

et quand n tend vers l'infini on obtient $l - f(l) = 0$ donc $f(l) = l$. Nous avons donc montré que $(u_n)_n$ converge vers un élément l de I tel que $f(l) = l$. Démontrons l'unicité de l.
Si l_1 et l_2 sont deux solutions distinctes de l'équation $f(x) = x$ alors

$$0 \leq |l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| < c|l_1 - l_2|$$

et c'est absurde car $c < 1$.
Le dernier point se montre par récurrence.

Exemple 6.5.5 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ pour $n \geq 0$.

1. Étudier cette suite si $a = -10$.
2. Étudier cette suite si $a = 0$.
3. Étudier cette suite si $a = 3$.

On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 2$ de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. On étudie les variations de g définie par $g(x) = f(x) - x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = e^x - 1$ donc g est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = -1$. L'équation $f(x) = x$ admet donc exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$. Remarquons que $g(2) = e^2 - 4 > 0$, $g(1) = e - 3 < 0$ donc $1 < \beta < 2$ et $g(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $g(-2) = e^{-2} > 0$ donc $-2 < \alpha < -1$.

1. On a $f(x) = e^x - 2 < -1$ pour tout $x < 0$, donc pour tout $x \in]-\infty, -1]$, $f(x)$ appartient à $]-\infty, -1]$. Ensuite, $f'(x) = e^x$ donc $0 < f'(x) < e^{-1}$ sur $]-\infty, -1]$. $f :]-\infty, -1] \to]-\infty, -1]$ est donc contractante. Ainsi, d'après le théorème de point fixe, lorsque $u_0 = -10$, u_n converge vers α.
2. Pour $u_0 = 0$, on a $u_1 = 1 - 2 = -1$ donc d'après ce que l'on vient de faire, $(u_n)_n$ converge encore vers α.
3. Pour $u_0 = 3$, alors le théorème de point fixe ne s'applique plus car f n'est pas contractante sur $[0, +\infty[$. On montre que $(u_n)_n$ est croissante et que pour tout n, $u_n \geq 3$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n, alors $u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \geq e^3 - 2 > 3$. On en déduit par récurrence que $u_n \geq 3$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ d'après les variations de g donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.
   Montrons maintenant que $(u_n)_n$ tend vers l'infini. La suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée car sinon, elle convergerait vers un certain l (suite croissante et majorée) et l vérifierait $f(l) = l$. Donc $l = \alpha$ ou $l = \beta$ mais, $u_n \geq 3 > \beta > \alpha$, donc $(u_n)_n$ ne peut pas converger et ne peut donc pas être majorée.
   Ainsi $(u_n)_n$ est une suite croissante non majorée, elle tend vers $+\infty$.