TD - M53

TD-1 - Rappels

→ Uniforme continuité

→ Intégrales de Riemann

→ Intég. Généralisées

Uniforme Continuité

Ex1 a) Mq si $f: I \to \mathbb{R}$ est f k-lipschitzienne sur I. (ie $\forall x,y \in I$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ alors f est UN cont sur I.

$f: I \to \mathbb{R}$, $\forall x,y \in I$, Montrons que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| \Rightarrow \left[|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \right]$

→ k donné p l'énoncé, on a ε !, on cherche δ.

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{k}} \times \cancel{k} = \varepsilon$

b) ed $x \mapsto \sin(x)$ est UN. cont sur $\mathbb{R}$.

→ C^1.

cont [ ]

dér] [

condit°!!

pk ?

$f: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, est f k-lipschitzienne ?

$\forall x,y \in I$, $|\sin(x)-\sin(y)| \leq k|x-y|$.

TAF

$\exists c \in [x,y]$ tq ~~$d \in [x,y]$~~

$$\frac{|\sin(x)-\sin(y)|}{|x-y|} = \sin'(c) = |\cos(d)| \leq 1$$

On peut écrire pour $c=1$

$|\sin(x)-\sin(y)| \leq 1.|x-y|$

Donc f sinus est k-lipschitzienne.

Ainsi d'après a) f est UN cont sur I.

c) Mq $x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est <u>UN</u> <u>cont</u>.

$\forall x,y \in I,\ |f(x)-f(y)| = \left|\dfrac{1}{1+|x|} - \dfrac{1}{1+|y|}\right|$

$= \left|\dfrac{1+|y|-1-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| = \left|\dfrac{|y|-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|$

$\leqslant \dfrac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \quad \leqslant k|x-y|$

~~avec~~ $\cancel{k = \dfrac{1}{(1+|x|)(1+|y|)}}$

On a montré que la f est k-lipschitzienne.
Ainsi f est uniformément <u>cont</u> sur I.

DM $|y| = |y-x+x| \leqslant |y-x| + |x|$

$\Leftrightarrow |y|-|x| \leqslant |y-x|$

$\Leftrightarrow |x|-|y| \leqslant |x-y|$

$|a+b| \leqslant |a|+|b| \qquad \Leftrightarrow \boxed{\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{\cancel{a-b}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$

$|\sqrt{x-y}| \quad \sqrt{|x-y|}$

d) Mq $x \longmapsto \sqrt{x}$ est <u>UN</u>. cont sur $\mathbb{R}_+$
mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$
$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \varepsilon.$

$\cancel{|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \times \dfrac{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}}$

pour $\varepsilon = \delta^2$ — pr $x>y$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \leqslant \delta^2$

$\boxed{1^\circ M}$ $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|},\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$

$\boxed{2^\circ M}$ $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

QC

sur $[1,\infty[$, $\forall x,y \in [1,\infty[$, on a :

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant 2.$

Donc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$

sur $[1,\infty[$, $f\ \sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

• Sur $[0,1]$: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est cont !

si $[0,1]$ – fermé, borné.

Le TH de Heine implique que

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est UN cont sur $[0,1]$.

→ si f est f UN cont sur $[0,1]$ & UN cont sur $[1,\infty[$ alors f est UN cont sur $[0,\infty[$

• soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$, $\forall x,y \in [0,1]$,

$$|x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\exists\, \delta_2 > 0$, $\forall x,y \in [1,\infty[$,

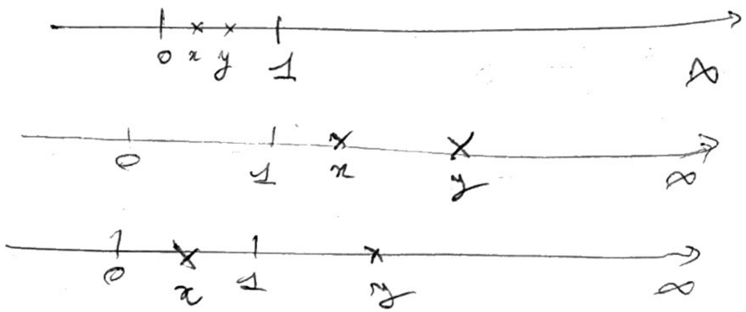
$$|x-y| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et soit $x,y \in [0,\infty[$ tq $|x-y| \leq \delta$.

1° cas

2° cas

3° cas



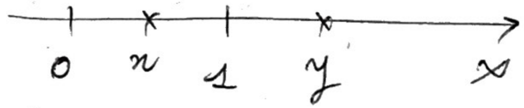
1° cas : si $x,y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \delta \leq \delta_1$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

2° cas : $x,y \in [1,\infty[$:

$$|x-y| \leq \delta < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

3° cas $x \in [0,1]$, $y \in [1,\infty[$, $|x-y| \leq \delta$



$$|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f(1)|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|f(1)-f(y)|}_{\leq \varepsilon/2}$$

(car $x,1 \in [0,1]$, $|x-1| \leq \delta_1$
$y,1 \in [1,\infty[$ & $|y-1| \leq \delta_2$)

d) Pk $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Mq $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sr $[0, \infty[$.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad \forall x,y>0,$$

Rais^t ?! $\exists k \,/\, |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq k|x-y|$

D'où $\forall x,y>0,\ x \neq y,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq k$

$\forall n \geq 1$: $\underbrace{\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} \leq k \qquad \left(\begin{array}{l} x = 1/n \\ y = 1/n+1 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Absurde}}$

Ex 2

Mq $x \mapsto x^2$ est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$ mais n'est pas UN cont sr $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le Th de Heine implique que f est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$.

•• Sur $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x^2-y^2| = |x-y||x+y|$$

négat° Mq $\exists \varepsilon>0,\ \forall \delta>0,\ \exists x,y \in \mathbb{R}$.

$|x-y| \leq \delta$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

soit $\delta>0$, prenons $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$

où n est choisit tq $n \geq \frac{1}{\delta}$.

Dc $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \leq \delta$.

& $|f(x_n)-f(y_n)| = \left|n^2 - \left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$

$\varepsilon = 2$.

Dc $\varepsilon = 2$ fonctionne & f n'est pas <u>UN</u> cont sr $\mathbb{R}$.

Ex3 : soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. f <u>UN</u> cont.
On vt mq $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \leq ax + b$.

But

a) Justifier l'$\exists$ $\eta_1 > 0$ tq

$$|x-y| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

par définit° cela convient

b) soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ & $n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1$

(i) Mq $\displaystyle \left|f(x_0) - f(0)\right| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|$

$$\left| f\left(\frac{\cancel{n_0} x_0}{\cancel{n_0}}\right) - f(0) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right)\right|$$

$\hat{s}$ télescpq

$$\underset{\mathrm{I}}{\leq} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|$$

(ii) $\displaystyle |f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \underbrace{\left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|}_{\leq 1 \text{ d'a)}}$

car $\displaystyle \left| \frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{k x_0}{n_0} \right| = \frac{x_0}{n_0} < \eta_1$

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{x_0}{\eta_1} \right\rfloor}_{n_0 - 1} \leq \frac{x_0}{\eta_1} < \left\lfloor \frac{x_0}{\eta_1} \right\rfloor + 1 = n_0$$

Donc $\displaystyle |f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0$

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0) + f(0)| \leq |f(x_0) - f(0)| + |f(0)|$$
$$\leq n_0 + |f(0)| \leq \underbrace{\frac{1}{\eta_1}}_{a} x_0 + \underbrace{1 + |f(0)|}_{b}$$
$$\leq a x_0 + b.$$

Dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq ax + b$

c) (i) $f(x) = e^x$, $x > 0$.

Supposons f UN cont alors $\exists\, a, b > 0$

tq $e^x \leqslant ax + b$, $\forall x \geqslant 0$.

$$\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty} \leqslant \underbrace{a + \frac{b}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} a}$$

Intégrales de Riemann

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cont sur I, $a \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I.$$

(F est la primitive de f q s'annule en a.

$x_0 \in I$, $x \in I$; $x \neq x_0$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

voir DM

$\Leftarrow$ TVI

Le Th de la moyenne : $\exists\, c_x$ compris entre x et x_0 tq $\boxed{\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(c_x)}$

Or lorsque $x \longrightarrow x_0$, on a

$c_x \longrightarrow x_0$ & par continuité de f,

on a : $f(c_x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

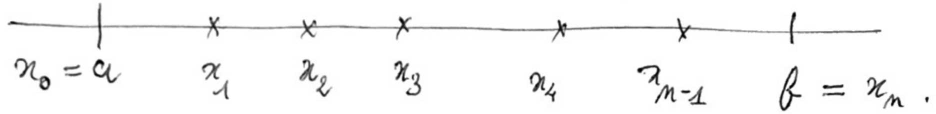
D'où $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ $\exists$ & vaut $f(x_0)$.

Donc F est dérivable & $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in I$.

Ex 7 $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

Supposons g est positive & décroissante alors $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{F(c)} .$$



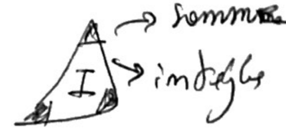
pas : découpage :

$$\delta(S) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty .$$

soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

1 a) Mq $\underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(x_{i-1}))\,f(x)\,dx \right|}_{I} \leq$



$$I \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(g(x) - g(x_{i-1}))|\,|f(x)|\,dx$$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\,dx$$

$$= \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_{i-1}) - g(x))\,dx$$

car $g \searrow$ & dc $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ $g(x) \leq g(x_{i-1})$.

D'où $I \leq \|f\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_{i-1})\,dx}_{= (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})} - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx \right)$

D'où $I \leq \|f\|_\infty \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})}_{\text{Somme de Riemann.}} - \int_a^b g(x)\,dx \right)$

Lorsque $\delta(S) \longrightarrow 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g(x) - g(x_{i-1})\right) f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b g(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\, dx = \lim_{\delta(S) \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx.$

c) F dérivable de continue sur $[a, b]$ & de F admet un minimum & un maximum.

Lorsque $\delta(S) \to 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g(x) - g(x_{i-1})\right) f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b g(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\, dx = \lim_{\delta(S) \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$.

c) F dérivable de continue sur $[a,b]$ & de F admet un minimum & un maximum.

- $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont
- g est $\oplus$ & $\searrow$

Mq $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

On a vu que $\delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\delta(S)\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \underbrace{\left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)}_{\text{Chasles}} = \circ$$

A) C

I.8)

Som

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \boxed{v_i} \qquad V_i = \sum_{k=1}^{i} v_k \qquad \cancel{j = i-1}$$

$$\circ = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_{i-1})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)} = $$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{j=0}^{n-1} g(x_j) F(x_j)$$

$$= g(x_{n-1}) F(x_n) - \cancel{g(x_0) F(x_0)}$$ car $x_0 = a$ & $F(a) = 0$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) F(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

$$= g(x_{n-1}) F(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) F(x_i)$$

$$m = \min_{t\in[a,b]} F(t) \quad \& \quad M = \max_{t\in[a,b]} F(t).$$

$F(b) \leq M$ & $F(x_i) \leq M$; $1 \leq i \leq n-1$

& $\hat{c}$ $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0$ car g est $\searrow$.

$$I \leq M g(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) M$$

$$= M\left[\cancel{g(x_{n-1})} + g(x_0) - \cancel{g(x_{n-1})}\right] = M g(a)$$

De même, $I \geq m \cdot g(a)$.

D'où $m \cdot g(a) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx} \leq M g(a)$

$\downarrow \delta(S) \longrightarrow 0$

$$m\, g(a) \leq \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leq M\, g(a)$$

ccl si $g(a)=0$, n'importe quel c fonctionne car alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ d'après l'inég. précédente.

si $g(a) \neq 0$: $m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M$

& on appliq le TVI : $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(c)$$

d'où $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^c f(x)\,dx$.

Applicat° soit f cont $\searrow$ de $[0,\infty[$ ds $\mathbb{R}$; $\lim_{\infty} f = 0$

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} f(t)\, e^{it}\,dt$. (mq q ça td vers 0 qd $n\to\infty$)

$\int_n^{n^2} f(t)\, e^{it}\,dt = ?$

- $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt$: f & cos st cont
- f est $\searrow$ & $\oplus$.

$\exists\, c \in [n, n^2]$ tq $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt =$

$$= f(n) \int_n^{c_n} \cos(t)\,dt$$

$$= f(n)\,[\sin(t)]_n^{c_n}$$

$$= f(n)\,(\sin(c_n) - \sin(n))$$

$$\Rightarrow \left| \int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt \right| \leq 2 f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\int_n^{n^2} f(t)\cos t\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

De m̂ pr sinus.

Intégrales Généralisées

1) • $t \mapsto \ln t$ est cont sr $]0,1]$. IPP

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = \left[t \ln t \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \cancel{t \times \frac{1}{t}} \, dt$$

$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = 1/t$

$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$

$$= \underbrace{-\varepsilon \ln(\varepsilon)}_{\varepsilon \to 0 \ \Rightarrow\ 0} - \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\to 1}$$

par croiss comparée

D'où $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -1$

Dc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ CV & vaut -1.

2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est cont sr $\mathbb{R}$.

dc localemt intégrable sr $[0, \infty[$.

• $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive

comme $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ croiss ce comparée

$\exists\, t_0 \geq 0,\ t \geq t_0 \Rightarrow 0 \leq t^2 e^{-t^2} \leq 1$

$0 \leq e^{-t^2} \leq 1/t^2$

$\displaystyle\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^\infty e^{-t^2} dt$ CV

ainsi $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto \infty$

• $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

pas de primitive

11 par $e^{u(n)}$

Rq : on pt prendre aussi $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$

3) $\int_0^{\infty} x.(\sin x) e^{-x} \, dx$

- $x \longmapsto x(\sin x) e^{-x}$ est cont sur $[0,\infty[$

dc localemt intégrable sur $[0,\infty[$.

$|x \sin x . e^{-x}| \leq x . e^{-x}$

& $x e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\text{car } x^3 e^{-x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0\right]$

& $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CV.

Donc $\int_1^{\infty} x \sin x . e^{-x} \, dx$ CV abs dc CV.

$\frac{\ln t}{t} \times t^3 e^{-t} = t^2 \ln(t) e^{-t}$ raccourci

4) $\int_0^{\infty} (\ln t) e^{-t} \, dt$?

$t \mapsto (\ln t) e^{-t}$ est cont sur $]0,\infty[$ dc $(li)^{]0,\infty[}$

On a $k_1 \in]0,1[$ & $k_2 \in [1,\infty[$

sur $]0,1[$:

$\ln(t) e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)$

[ç $\ln(t) e^{-t}$ & $\ln(t)$ st de m signes.]

$\int_0^1 \ln t . e^{-t} dt$ & $\int_0^1 \ln t \, dt$ st de m nature.

D'après 1) $\int_0^1 \ln t \, dt$ CV $\Rightarrow \int_0^1 \ln t \, e^{-t} dt$ CV.

Sur $[1,\infty[$: IPP

$u(t) = \ln t$ $u'(t) = 1/t$

$v(t) = -e^{-t}$ $v'(t) = e^{-t}$

$\int_1^{k_2} \ln t . e^{-t} dt =$

$= -[\ln t . e^{-t}]_1^{k_2} + \int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t} dt$

$= -\ln k_2 . e^{-k_2} + \int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t} dt$

- $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ dc $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ CV.
- $\lim_{k_2 \to \infty} -\ln(k_2) e^{-k_2} = 0$

Ainsi par somme $\lim_{k_2 \to \infty} \int_1^{k_2} \ln(t) e^{-t^2} dt \; \exists$

(12) cl $\int_0^{\infty} \ln t \, e^{-t^2} dt$ CV.

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ ---> DV

⚠ majorant n'est pas vraie par tout $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

⚠ CV en 0 ok mais ne pas oublier impropre en 1.

D $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont p morcx

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ CV

$\exists c \in]a,b[$ tq $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ CV.

Étude en 1 : $\forall t \in [0,1[$

$$\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{1-t} \quad \& \quad \frac{1}{1-t} \geq 0,$$

$\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ DV (① ① & CDV en $u = 1-t$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ DV

$\boxed{L = 1}$

13 voir lim PPi qd indét

Ex 9

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1}$ ---> DV

$t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est cont sr $]0, \infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to 0^>} \frac{1}{e^t - 1} = \infty$. $\quad e^t = 1 + t + o(t),\ t \to 0$

$e^t - 1 = t + o(t)$

$\Rightarrow e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$

$$\frac{1}{e^t - 1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

$\frac{1}{t} \geq 0$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ est DV. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t - 1}\,dt$ DV.

et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1}\,dt$ est DV.

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$

$t \longmapsto \dfrac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est cont sur $[0,\infty[$.

+ grde puissance

Or $\dfrac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t.e^{-\sqrt{t}}}{t^2} = \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$

$\cancel{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\sqrt{t}}}$ $\lim\limits_{t\to\infty} t.e^{-\sqrt{t}} = 0$, par croissance comparée

alors $\exists t_0$ tq $\forall t \geq t_0$,

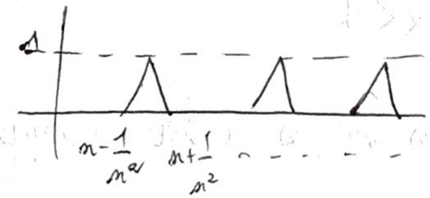
$0 < te^{-\sqrt{t}} < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{t} e^{-\sqrt{t}} < \dfrac{1}{t^2}$

Or $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ CV donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$ CV.

9) $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ CV $\overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ Faux

CA



$\displaystyle\sum \frac{1}{\cancel{2}n^2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{4}} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Si la limite existe en $+\infty$ & $f \geq 0$.

3) $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right) dt$, $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est cont s $]0,1]$.

Or $0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$

$\int_0^1 1\, dt$ CV d'où $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ CV.

Ex 10

1) $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ cont s $]0,\infty[$

Étude en 0 : on a $\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ basse puissce.

$\int_0^1 \ln t\, dt$ CV dc $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

$\ln t \leq 0 \ \forall t \in (0,1)$

Étude en ∞ :

$1+t^2 \geq t^2 \Leftrightarrow \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2} \Leftrightarrow \frac{t^{3/2} \cdot \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$

Or par croissance comparée $t^{-\frac{1}{2}} \ln t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Puis $\exists t_0, \forall t \geq t_0$, $\cancel{0 \leq \frac{\ln t}{\sqrt{t}}}$

$\sqrt{t} \geq \ln(t)$, $\frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2}$

$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$

Or $\int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}} dt$ CV car $\frac{3}{2} > 1$.

Donc $\int_1^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$

$x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ cont sur $]1,\infty[$ & $\oplus$

$\ln(x) = \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

$u = x-1$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x}}(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx \quad \text{CV}$$

$\frac{1}{2} < 1$.

Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV

Choisir $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$,

$$x^{1+\varepsilon}\,\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{1+\varepsilon}\cdot\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \tfrac{1}{2}-\varepsilon > 0$$

D'où $\exists\, t_0$ tq $t \geq t_0 \Rightarrow x^{1+\varepsilon}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x+1)\sqrt{x}} \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

& $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,dx$ CV.

Donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV.

hopeness
CV $\alpha < 1 \Rightarrow x^{\alpha} \rightsquigarrow f \to 0$
DV $\alpha \geq 1 \Rightarrow x^{\alpha} \rightsquigarrow f \xrightarrow[x\to\infty]{} > 0$
multiplie x^{α}

16

3) $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$, $t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est cont n $[1,\infty[$

Posons $\frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} = \frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{e^{\ln t}} = e^{\sqrt{\ln t} - \ln t}$

$= e^{-\ln t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

D'où $\exists\, t_0$, $\forall\, t \geq t_0$:

$0 < \frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} \leq 1$

$\frac{1}{t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$

Or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ DV.

Donc $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$ DV.

3) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$, $t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est cont sur $[1,\infty[$

Penser $\dfrac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} = \dfrac{e^{\sqrt{\ln t}}}{e^{\ln t}} = e^{\sqrt{\ln t} - \ln t}$

$= e^{-\ln t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

D'où $\exists t_0$, $\forall t \geq t_0$:

$0 < \dfrac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} \leq 1$

$\dfrac{1}{t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$

Or $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt$ DV.

Donc $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$ DV.

Ex 11 $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$?

$t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est cont sur $]0,\infty[$.

(sur $[0,\infty[$ si $\alpha \leq 0$).

$e^{-t} = 1 - t + o(t) \rightarrow \dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha} = \dfrac{-t+o(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$

La f $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est négative $\forall t > 0$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ CV ssi $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha < 2$.

en $+\infty$

$e^{-t} - 1 \xrightarrow[t\to\infty]{} -1$ d'où $\dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{t^\alpha}$

La f $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t^\alpha}$ est négative (de signe cte) sur $]0,\infty[$.

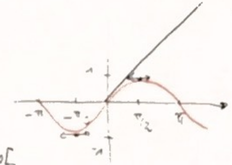
Or $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha > 1$.

D'où $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,dt$ CV $\iff \alpha \in]1,2[$.

17

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$



$t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est $\underline{\text{cont}}$ sur $]0,\infty[$

$\forall t \geq 0,\ \sin(t) \leq t$ (à prouver)

$\Rightarrow t \longmapsto \dfrac{t-\sin(t)}{t^\alpha}$ est $\oplus$ sur $]0,\infty[$.

• $\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$

$$\frac{t-\sin t}{t^\alpha} = \frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^\alpha} = \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha-3<1 \Leftrightarrow \alpha<4$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha<4$.

• $\dfrac{t-\sin t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$ [illegible]

D'où $t-\sin t \underset{t\to\infty}{\sim} t$ & $\dfrac{t-\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ $\sim \frac{1}{t^\alpha} \geq 0$ $\forall t>0$

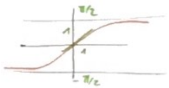
$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ CV $\underline{\text{ssi}}$ $\alpha-1>1$ ssi $\alpha>2$

D'où $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha>2$.

En résumé $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\underline{2<\alpha<4.}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$, $t \longmapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$ est $\underline{\text{cont}}$ & $\oplus$ sur $]0,\infty[$.

Or $\arctan(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$



$\dfrac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha-1<1 \Leftrightarrow \alpha<2$

or $1/t^{\alpha-1} \geq 0,\ \forall t>0$.

D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV ssi $\alpha<1$.

• $\arctan(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^\alpha}$ & $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow 1<\alpha$.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha>1$.

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ CV $\Leftrightarrow 1<\alpha<2$.

Ex 10 a) Mq CV $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,dx$, $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/4}}$ est $\underline{\text{cont}}$ sur $]0,1]$.

• $x^\alpha \cdot \dfrac{\ln x}{x^{3/4}} = x^{\alpha-\frac{3}{4}} \ln x$, or $\boxed{\lim_{x\to 0} x^\beta \ln x = 0 \text{ si } \beta>0}$

Dc $x^{\alpha-\frac{3}{4}} \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ssi $\alpha > \dfrac{3}{4}$.

Dc $\dfrac{\ln x}{x^{3/4}} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$; or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CV ssi $\alpha<1$.

Dc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}$ CV $\forall\ \alpha = \frac{7}{8}$

b) Mq CV $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}$ cont sur $]0,1]$

& $\oplus$ car $x+\sqrt{x} \geq x \Rightarrow \ln(x+\sqrt{x}) \geq \ln(x)$.

$$\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \ln(1+\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(1+\sqrt{x})$$

or $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(1+\sqrt{x}) = 0$

Donc $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln(x)$

D'où $\dfrac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x^{3/4}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,dx$ CV

Dc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$ CV

On va étudier nature $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$

Or $\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u)$

$\frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/4}x^{1/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$

comme $\frac{5}{4} > 1$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$ CV

de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}\,dx$ CV.

⚠ on ne peut pas utiliser il° abs $\int f(x)$ ... positifs

Ex 13

1. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$

Pr $x \geq 4$,

$\sqrt{x}+\sin(x) \geq \sqrt{4}+(-1) = 2-1 = 1 > 0.$

d'où $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ est cont sur $[4,\infty[$,

indic° : $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$ $\quad \frac{1}{1+u}$

$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} 1-u+O(u^2) + \frac{\sin^2(x)}{x}$

$f(x) = \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\right)}_{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}$ et $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ CV

de $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\right)dx$ CV

Or $\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(2\cos(2x)-2) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\displaystyle\int_4^{\infty} f(x)\,dx$ CV ssi $\displaystyle\int_4^{\infty} g(x)\,dx$ CV.

$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}$

$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}$

$\boxed{M1}$ IPP en $\nearrow^{++}$ le deg de x à $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ d'abord

$\boxed{M2}$ $\displaystyle\int_X^{X'} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ soit $X' > X$

Par la 2° f de la moyenne

$\exists c \in [X, X']$ tq

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{X}}\int_X^{c} \sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{X}}(\cos X - \cos c)$

$\Rightarrow \left|\displaystyle\int_X^{X'} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\right| \leq \frac{2}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

Dc l'intégrale $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ CV.

De mê pr $\displaystyle\int_X^{X'} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx = \frac{1}{2X}\int_X^{c} \cos(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2X}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_X^c = \frac{1}{4X}\left(\sin(2c) - \sin(2X)\right)$

Prdt de 2 fs, l'1 q ↘ & td vers 0 l'autre est bornée & cte q ne dpd pas bornes

$\Rightarrow \left|\displaystyle\int_X^{X'} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx\right| \leq \frac{2}{4X} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$

Dc l'integ $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$ CV.

De plus, $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ DV

Donc $\displaystyle\int_4^{\infty} f(x)\,dx$ DV.

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right)dx$, $\alpha > 0$ | Résultat CV ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

TD 2 : Intégrales déf dépendant d'un paramètre

Ex 1 : pr $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,dt$

soit $f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \cos(tx)$

⚠ m̂ si int. fin's f^n ⚠ cont f sinon int. impropre.

f est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$

Donc F est bien déf & cont sur $\mathbb{R}$. (TH1 du C6)

$F(-x) = \int_0^1 \cos(t\times(-x))\,dt = \int_0^1 \cos(tx)\,dt = F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

car cos est paire. Donc F est paire.

b) Mq F est dérivable

- f est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.
- $\forall t \in [0,1]$,
  $x \longmapsto f(x,t) = \cos(xt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
  & $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$

Par TH4 du C6, la f F est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

ie $F'(x) = -\int_0^1 t\sin(xt)\,dt$

Ex 2 soit $F(x) = \int_0^1 t^3 e^{xt}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ & calculer $F'(0)$

$f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto t^3 e^{xt}$

- f est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^4 \cdot e^{xt}$

↳ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$
$\Longrightarrow F$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 t^4 e^{xt}\,dt$.

ef en 0 : $F'(0) = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

Ex 3 $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = ?$

$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Mq F bien déf & cont sur $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$

- f est cont sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ $\left((1+t^2)(1+x^2t^2) \geq 1 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]\right)$

$\Longrightarrow F$ est bien déf & cont.

b) Par DES, calculer $F(x)$, ed $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

On sait q' $\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$, si $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{1+x^2t^2} \overset{\text{parité}}{=} \frac{-at+b}{1+t^2} + \frac{-ct+d}{1+x^2t^2}$$

unicité DES (23) $\Rightarrow a = c = 0$

Pour $t=0$, $1 = b + d$

~~$t=1$, $\frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{b}{2} + \frac{d}{1+x^2}$~~

$X(1+t^2)$ puis calculer $t = i$:

$\frac{1}{1-x^2} = b$; $d = 1 - b = \frac{1-x^2-1}{1-x^2} = \frac{-x^2}{1-x^2}$

$x \neq \pm 1$

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\arctan(t)\right]_0^1 - \frac{x}{1-x^2}\left[\arctan(xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{4} - \frac{x\cdot\arctan(x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} - x\arctan(x)}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1.$$

$F'(x) = \dots \frac{1}{\dots} \frac{\dots \arctan(x)}{1-x^2}$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \underbrace{\frac{x.\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}}_{\substack{x \to 1}} \qquad \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$(x\arctan x)'(1) = \left[\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right]_{x=1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$F(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Ex 4 pr $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

Mq F bien déf & dérivable s/ $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \begin{cases} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

- f est cont s/ $\mathbb{R} \times]0,1]$
- ~~soit~~ $(x_0, 0)$ mq f est cont en $(x_0, 0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} f(x,t) = f(x_0, 0) = 1 \, ?$$

$$f(x,t) = \underbrace{e^{-xt}}_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}\; 1} \; \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{t \to 0\; 1}$$

Donc f est cont s/ $\mathbb{R} \times [0,1]$

Dc F est bien ~~dérivable~~ définie s/ $\mathbb{R}$.

- Mq $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∃ & est cont s/ $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Fixons $t \in [0,1]$ & on étudie la dérivabilité de $x \mapsto f(x,t)$.

si $t = 0$: $x \mapsto f(x,t) = 1$ est dérivable

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$

si $t > 0$: $x \mapsto f(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}(-t) \cdot e^{-xt} = -\sin(t) \, e^{-xt}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∃ s/ $\mathbb{R} \times [0,1]$ & $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont s/ $\mathbb{R} \times]0,1]$.

D+, pr $(x_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

on a : $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \lim\limits_{(x,t) \to (x_0,0)} \left(-\sin(t) \, e^{-xt}\right) = 0 \times 1 = 0$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$

Dc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont s/ $\mathbb{R} \times [0,1]$.

$\Rightarrow$ F est dérivable s/ $\mathbb{R}$.

cg $\xrightarrow{\text{TD1 + TD2}}$ IE le $\overset{\text{semaine}}{05/10}$ ($CC = \frac{30 IE + 70 DS1}{100}$, NF max$\left(\frac{CC + DS2}{2}, DS2\right)$)

Ex6 Pr $x \in]-1,1[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) \, dt$$

a) Mq F bien déf s/ $]-1,1[$ & que $]-1,1[$

pr $x \in]-1,1[$:

$$F(x) = 2 \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) \, dt$$

@ $1 - 2x \cdot \cos(t) + x^2 > 0$?

pr $x \in]-1,1[$, $\forall t \in [0, 2\pi]$

M1 la f $g_t :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g_t(x) = x^2 - 2x\cos(t) + 1$

est une f polynômiale.

M2 si $x \in [0,1[$

$-\cos(t) \geq -1 \Leftrightarrow -2x\cos(t) \geq -2x$

$\Leftrightarrow 1-2x\cos(t)+x^2 \geq 1-2x+x^2 = (x-1)^2 > 0$ car $x \neq 1$.

si $x \in]-1,0]$,

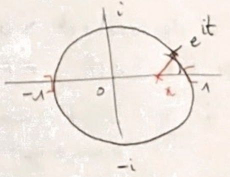
$\cos t \geq -1 \Leftrightarrow -2x\cos t \geq +2x$

$\Leftrightarrow 1-2x\cos t + x^2 \geq 2x+1+x^2 = (x+1)^2 > 0$ car $x \neq -1$.

M3 Rq voir un module au carré.

$1-2x\cos t + x^2 = |e^{-it} - x|^2$

$|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, a\bar{b}$.



26

$\forall (x,t) \in]-1,1[\times [0,2\pi]$,

$1-2x\cos(t)+x^2$.

Donc $t \mapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est cont sur $[0,2\pi]$, $\forall x \in]-1,1[$.

$\Rightarrow$ F est définie sur $]-1,1[$.

Mq $F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$.

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$$

Fait : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodiq & cont

alors $\int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt$, $\forall \alpha$.

DM $\int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt = \int_\alpha^0 g(t)\,dt + \int_0^T g(t)\,dt + \int_T^{\alpha+T} g(t)\,dt$

DM $G(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+T} g(t)\,dt$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

g cont $\Rightarrow \exists H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable tq $H'(t) = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$G(\alpha) = H(\alpha+T) - H(\alpha)$.

G est dérivable &

$G'(\alpha) = H'(\alpha+T) - H'(\alpha)$.

$G'(\alpha) = g(\alpha+T) - g(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ G = cte sur $\mathbb{R}$.

$G(\alpha) = G(0)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ici $t \mapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est 2π-périodiq.

Donc $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$

~~F(x)~~ $= 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$

27

car $t \mapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$ est paire.

b) Mq F est dérivable sur $]-1,1[$.

$F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$, $x \in]-1,1[$

$f :]-1,1[\times [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$(x,t) \mapsto f(x,t) = \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$

- f est cont sur $]-1,1[\times [0,\pi]$ car $(1-2x\cos(t)+x^2 > 0)$
- $\forall t \in [0,\pi]$, $x \mapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est dérivable sur $]-1,1[$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2\cos(t)+2x}{1-2x\cos(t)+x^2}$

& comme $1-2x\cos t + x^2 \neq 0$.

on a $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sur $]-1,1[\times [0,\pi]$.

D'après le Th de dérivabilité des intégrales définie, on sd que F est dérivable sur $]-1,1[$ &

$\forall x \in]-1,1[$;

$$F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\, dt .$$

c) en posant $u = \tan(t/2)$; $4\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

mq $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$

$$F'(x) = 4\int_0^{\infty} \frac{x - \frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+x^2} \times \frac{2}{1+u^2}\, du$$

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$dt = \frac{2}{1+u^2}\, du$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{x(1+u^2) - (1-u^2)}{[1+u^2 - 2x(1-u^2)+x^2(1+u^2)](1+u^2)}\, du$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)[(x^2+2x+1)u^2+x^2-2x+1]}\, du$$

$$= 8\int_0^{\infty} \frac{(1+x)u^2+x-1}{\underbrace{(1+u^2)}_{\geq 1}[(x+1)^2u^2+\underbrace{(x-1)^2}_{>0}]}\, du$$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

$$\frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)[(x+1)^2u^2+(x-1)^2]} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{cu+d}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}$$

DES

Par parité $a = c = 0$.

$\times(1+u^2)$ & on évalue en $u = i$

$$\frac{-(x+1)+x-1}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = c = \frac{-2}{(x-1+x+1)(x-1-x-1)}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2x}}$$

On évalue en $u=0$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2} = c + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

$$d = +x-1 - \frac{(x-1)^2}{2x} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x} = d}$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty} \frac{(x+1)u^2+x-1}{(u^2+1)((x+1)^2u^2+(x-1)^2)}\, du$$

$$F'(x) = \frac{8}{2x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\right) du$$

$$= \frac{4}{x}\underbrace{\left[\arctan(u)\right]_0^{\infty}}_{\pi/2} + \frac{4(x^2-1)}{x}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\, du$$

or $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\, du = (x-1)^2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)^2}\, du$

On fait $\boxed{\text{CDV}}$ $v = \frac{x+1}{x-1}u$, $du = \frac{x-1}{x+1}\, dv$

$x \in]-1,1[$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\, du = \frac{1}{(x-1)^2}\int_0^{-\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}}{1+v^2}\, dv$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\cdot\left[\arctan(v)\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{-\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{4}{x}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{4(x^2-1)}{x}\cdot\frac{-\pi}{2(x^2-1)} = 0 .$$

$\Rightarrow F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$.

F est de classe C^1 sur $]-1,1[$

donc F' est cont sur $]-1,1[$ &

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} F'(x) = 0$$

D'où $F'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$.

d) Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-1,1[$,

$F(x) = c$

Or $F(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1)\, dt = 0$.

D'après le Th de dérivabilité des intégrales définies, on a que F est dérivable sur $]-1,1[$ &

$\forall x \in]-1,1[$;

$$F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt.$$

c) en posant $u=\tan(t/2)$; $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

mq $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x)=0$

$$F'(x) = 4\int_0^{\infty} \frac{x-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+x^2}\times\frac{2}{1+u^2}\,du$$

$u=\tan(\frac{t}{2})$

$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(\frac{t}{2})\right)$

$dt = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty}\frac{x(1+u^2)-(1-u^2)}{[1+x^2-2x(1-u^2)+x^2(1+u^2)](1+u^2)}\,du$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty}\frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)[(x^2+2x+1)u^2+x^2-2x+1]}\,du$$

$$=8\int_0^{\infty}\frac{(1+x)u^2+x-1}{\underbrace{(1+u^2)}_{\geq 1}[(x+1)^2u^2+\underbrace{(x-1)^2}_{>0}]}\,du$$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\frac{(1+x)u^2+x-1}{(1+u^2)[(x+1)^2u^2+(x-1)^2]} = \frac{au+b}{1+u^2}+\frac{cu+d}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}$$

DES

Par parité $a=c=0$.

$\times(1+u^2)$ & on évalue en $u=i$

$$\frac{-(x+1)+x-1}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = c = \frac{-2}{(x-1+x+1)(x-1-x-1)}$$

$$\boxed{c=\frac{1}{2x}}$$

On évalue en $u=0$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2} = c+\frac{d}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x}+\frac{d}{(x-1)^2}$$

$$d = +x-1-\frac{(x-1)^2}{2x} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x}=d}$$

$$F'(x) = 8\int_0^{\infty}\frac{(x+1)u^2+x-1}{(u^2+1)((x+1)^2u^2+(x-1)^2)}\,du$$

$$F'(x) = \frac{8}{2x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\right)du$$

$$=\frac{4}{x}\underbrace{[\arctan(u)]_0^{\infty}}_{\pi/2}+\frac{4(x^2-1)}{x}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du$$

or $\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = (x-1)^2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)^2}\,du$

On fait $\boxed{\text{CDV}}$ $v=\frac{x+1}{x-1}u$, $du = \frac{x-1}{x+1}\,dv$

$x\in]-1,1[$, $\frac{x+1}{x-1}<0$.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,du = \frac{1}{(x-1)^2}\int_0^{-\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}}{1+v^2}\,dv$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\cdot[\arctan(v)]_0^{-\infty} = \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{-\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{4}{x}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4(x^2-1)}{x}\cdot\frac{-\pi}{2(x^2-1)} = 0.$$

$\Longrightarrow F'(x)=0$, $\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\}$.

F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ donc F' est cont sur $]-1,1[$ &

$F'(0) = \lim_{x\to 0} F'(x) = 0$

D'où $F'(x)=0$, $\forall x\in]-1,1[$.

d) Donc $\exists c\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in]-1,1[$,

$F(x)=c$

Or $F(0) = \int_0^{2\pi}\ln(1)\,dt = 0$.

Ex 7 pr $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$$

a) Justifier que F bien déf sur $\mathbb{R}$.

On pose $\mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

La fonction f est bien continue (par quotient de 2 fonctions cont dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)

Ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Mq F est une f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Rq f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\exists$ & cont sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\, dt$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$.

c) calculer $F(0)$ & $F'(0)$:

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$F'(0) = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2}$$

d) Mq F est S^T ↘ sur $\mathbb{R}$ & convexe.

On sait que F est dérivable & $F'(x) = -\underbrace{\int_0^1 \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\, dt}_{\geq 0}$

$\Rightarrow F'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Rq si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont & si $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$.

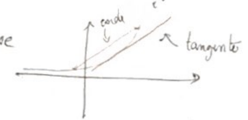
$$\int_a^b h(x)\, dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ h(x) = 0.$$

Dc ici : $\forall t \in [0,1]$, $\frac{t.e^{-tx}}{1+t^2}$ est cont, positive, non-identiquement nulle.

Donc $\int_0^1 \frac{t e^{-tx}}{1+t^2}\, dt > 0$ d'où $F'(x) < 0$.

Donc F est strictement ↘.

Rq f convexe



si f est 2 fois dérivables, alors

f est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$

$\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} \geq 0$

dc $F''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ convexe.

e) Mq $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \infty$

Rq on a $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$$0 \leq \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leq e^{-tx}$$

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-tx}\, dt = -\frac{1}{x}\left[e^{-tx}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$0 \leq F(x) \leq -\frac{1}{x}(e^{-x} - 1) = \frac{1-e^{-x}}{x}$$

Or $\lim_{x \to \infty} \frac{1-e^{-x}}{x} = 0$

D'après le Th des gendarmes, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$.

Mq $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \infty$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \geq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-tx} = -\frac{1}{2x}\left[e^{-tx}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$\frac{1-e^{-x}}{2x} \sim \frac{-e^{-x}}{2x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$$

dc $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \infty$

f) Donner l'allure du graphe de F.

Ex 10 $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$$F(x) = x \int_0^1 \frac{f(t)}{x^2+t^2}\, dt \quad , \quad x > 0$$

a) Mq F est cont sur $]0,\infty[$

$g :]0,\infty[\times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto g(x,t) = \dfrac{x f(t)}{x^2+t^2}$

La f g est cont sur $]0,\infty[\times [0,1]$.

(comme quotient de f cont dt le dénominat^{r} ne s'annule pas).

$\Rightarrow$ F est cont sur $]0,\infty[$.

b) Mq $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$

$x>0$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\left(\frac{t}{x}\right)^2\right)}\, dt$

$= \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan 0$

$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$

c) Mq $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt\right) = 0$

$$\underbrace{F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt}_{G(x)} = \int_0^1 \frac{x f(t)}{x^2+t^2}\, dt - \int_0^1 \frac{f(0)\, x}{x^2+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\left(f(t) - f(0)\right) dt$$

soit $\varepsilon > 0$, par continuité de f en 0,

$\exists\, 0 < \delta$ tq $0 \leq t < \delta \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$.

$$G(x) = \int_0^{\delta} \frac{x}{x^2+t^2}\big(f(t)-f(0)\big)\,dt + \int_1^{\delta} \frac{x}{x^2+t^2}\big(f(t)-f(0)\big)\,dt$$

$$|G(x)| \leqslant \int_0^{\delta} \frac{x}{x^2+t^2} \underbrace{|f(t)-f(0)|}_{\leq \varepsilon}\,dt + \int_{\delta}^{1} \frac{x}{x^2+t^2}|f(t)-f(0)|\,dt$$

$$\leqslant \varepsilon \underbrace{\int_0^{\delta} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt}_{\arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)} \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon$$

$$\int_{\delta}^{1} \frac{x}{x^2+t^2}|f(t)-f(0)|\,dt \leq 2M \int_{\delta}^{1} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt$$

où $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty$

$$= 2M \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$$

Dc $\exists\, x_0 > 0$ tq $0 < x < x_0 \Rightarrow \left|2M\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{x}\right)\right)\right| \leq \varepsilon$.

Pour $0 < x < x_0$; on a :

$$|G(x)| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} G(x) = 0.$$

d) cd $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2} f(0)$

$$G(x) = F(x) - f(0)\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

& $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$.

D'où $F(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \underbrace{\frac{\pi}{2} f(0)}_{\frac{\pi}{2}\int f\, d\delta_0}$ dirac en 0.

Ex 11 a) soit φ déf V_0^T, à vals >0 & dérivable en 0. Sppo $\varphi(0)=1$.

$\varphi:]-1,1[\to \mathbb{R}$

Déterminer $\lim_{x\to 0} (\varphi(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\varphi'(0)}$

$$\varphi(x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(\varphi(x))}$$

$$\frac{\ln(\varphi(x))}{x} = \frac{\ln(\varphi(x)) - \ln(\varphi(0))}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{(\ln\circ\varphi)'(0)}$$

Car $(\ln\circ\varphi)'(0) = \ln'(\varphi(0) \times \varphi'(0))$

$$= \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \varphi'(0)$$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\varphi(x))}{x} = \varphi'(0)$.

b) soit $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont & sppo $\forall t \in [0,1]$, $f(t) > 0$. Posons

$$I(x) = \int_0^1 f(t)^x \, dt.$$

Mq I bien déf & dérivable sur $\mathbb{R}$.

soit $g: (x,t) \longmapsto f(t)^x = e^{x\ln(f(t))}$ est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(f(t))\, e^{x\ln(f(t))}$$

$\to$ $\frac{\partial g}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sr $\mathbb{R}\times[0,1]$.

D'où I est bien déf & de C^1 sr $\mathbb{R}$.

$$I'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^1 \ln(f(t)) \cdot e^{x\ln(f(t))} dt$$

c) cd $\lim_{x\to 0} \left(\int_0^1 f(t)^x dt\right)^{1/x} = \exp\left(\int_0^1 \log(f(t))\, dt\right)$

$$(I(x))^{\frac{1}{x}} = \left(\int_0^1 f(t)^x \, dt\right)^{1/x}$$

soit $\varphi(x) := I(x)$

- φ est déf sur $\mathbb{R}$ & dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 1$

$\left(\text{car } \varphi(x) = \int_0^1 e^{x\ln(f(t))} dt > 0\right)$

D'où d'après a).

$$\lim_{x\to 0} I(x)^{\frac{1}{x}} = e^{I'(0)}$$
$$= e^{\int_0^1 \ln(f(t))\, dt}$$

⚠ complément : $\lim_{x\to\infty} I(x)^{1/x} = ?$

$$= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Ex 8 : Soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x\sin^2(t))\, dt$, $x > 1$

a) Mq F déf & dérivable sur $]-1,\infty[$. Calculer $F'(0)$.

$$f :]-1,\infty[\times [0,\tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \ln(1+x\sin^2(t))$$

$1+x\sin^2(t) > 0 \iff x\sin^2(t) > -1$.

- si $x \geq 0$: alors $x\sin^2(t) \geq 0 > -1$
- si $-1 < x < 0$: $\sin^2(t) \leq 1 \Rightarrow x\sin^2(t) \geq x > -1$.

Par composit° f est cont sur $]-1,\infty[\times [0,\frac{\pi}{2}]$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2(t)}{1+x\sin^2(t)}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $]-1,\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

D'où $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{1+x\sin^2(t)}\, dt$

$$F'(0) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, dt = \frac{\pi}{4}$$

linéariser sinus

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) À l'aide du CDV $u=\tan(t)$, trouver :

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$\sin^2(t) = \frac{u^2}{1+u^2} \quad , \quad du = \left(1+\tan^2(t)\right)dt$$

$$dt = \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1+x\frac{u^2}{1+u^2}} \times \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+u^2+xu^2)}\,du = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)}\,du \; , x>-1$$

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{cu+d}{1+(1+x)u^2}$$

Par parité $a=c=0$.

D'où $u^2 = \left(b(x+1)+d\right)u^2 + b + d$

$$\begin{cases} b+d=0 & (1) \\ b(x+1)+d=1 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow bx = 1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{x}}$ & $\boxed{d=\frac{-1}{x}}$

$$F'(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(x+1)u^2}\right)du$$

$$xF'(x) = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du - \int_0^{\infty}\frac{1}{1+(x+1)u^2}\,du$$

$$= \left[\arctan u\right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\arctan(\sqrt{x+1}\,u)\right]_0^{\infty}$$

$$xF'(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{2}\frac{(\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{1+x}}$$

$$\text{D'où } xF'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{\pi}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)} \quad , x \neq 0.$$

$\forall t > -1, \quad F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+t}\,(\sqrt{1+t}+1)}$

$$F(x) - F(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t}\,(\sqrt{1+t}+1)}\, dt$$

$$F(x) - F(0) = \frac{\pi}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \cdot \left[\ln(\sqrt{1+t}+1) \right]_0^x$$

D'où $F(x) - F(0) = \pi \left[\ln(\sqrt{1+x}+1) - \ln(2) \right]$

Or $F(0) = \int_0^{\pi/2} \ln(1)\, dt = 0$

$$\boxed{F(x) = \pi \left(\ln(\sqrt{1+x}+1 - \ln(2) \right)}$$

Ex 15 pr $x \in I = [0, \infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}, \quad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

a) Mq F est définie, cont, dériv sur I.
↳ Exprimer sa dérivée ss forme d'une intég.

Posons $f : I \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$$

La fonction f est bien définie et continue sur I. Donc la fonction F est bien définie & cont s $I \times [0,1]$.

Cherchons si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ $\exists$ et est cont ?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(t^2+1)}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est bien continue sur I

Donc F est de classe C^1

Ainsi F est dérivable sur I.

Enfin $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} dt$

b) Justifier que G est définie, cont, dérivable sur I,

Mq $F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \in I$.

Posons $g : I \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto g(x,t) = e^{-t^2}$$

La fonction g est bien définie.

$\forall (x,t) \in I \times [0, \infty[$,

$$|e^{-t^2}| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ est une IdR (cv) $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ (cv).

Ainsi G est bien définie, cont sr I.

$$G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \left(H(x) - H(0) \right)^2 \quad \text{où } H'(x) = G(x)$$

$$G'(x) = 2 \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) e^{-x^2}.$$

37 ~~Rep~~

$f^2 = 2 . f . f'$!! la dérivée c'est trivial

b) Mq $F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$

On a $\sqrt{G(\infty)} = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt, \quad x \in [0,\infty[.$$

$$F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.$$

soit H une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$

($\exists$ car $t \mapsto e^{-t^2}$ est cont).

$$G(x) = (H(x) - H(0))^2$$

H étant dérivable sur $\mathbb{R}$, G est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G'(x) = 2H'(x)(H(x) - (H(0)))$$

$$H'(x) = e^{-x^2}$$

$$G'(x) = 2 \cdot e^{-x^2}(H(x) - H(0))$$

$$G'(x) = 2 \cdot e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

posons $t = ux$
$dt = x\,du$

D'où $G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2x^2} x\,du.$

$$= 2x \int_0^1 e^{-x^2 - u^2x^2}\,du.$$

$$\boxed{G'(x) = 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)}\,du}$$

Donc $F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \geq 0.$

c) Md $\forall x \in I, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.$

Ainsi $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x) = c.$

Pour $x = 0$, $c = F(0) + G(0)$ or $G(0) = 0.$

& $F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}.$

d) Mq $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

indic : Rq $|F(x)| \leq e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

$\forall t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$.

$1+t^2 \geq 1$ et $-x^2(1+t^2) \leq -x^2$

$e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$

$\Rightarrow \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2} \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$

Or $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$

& donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

e) Md $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

D'où $\lim_{x\to\infty} G(x)$ $\exists$ & vaut $\frac{\pi}{4}$.

Enfin $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

D'où $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\left(\text{car } \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt > 0\right)$

Autre M :

$\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right)$

(Fubini)

$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ $\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\right) d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ex 16 soit $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 - x.\cos t} dt$

a/ Mq F cont & dériv sur $[0,1[$.
Exprimer $F'(x)$ ss f^m d'intégrale.

$f : [0,1[\times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \frac{t.\sin t}{1 - x\cos(t)}$

ne pas ê confus & intervalle.

$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, $\forall t \in [0,\pi]$

$-x \leqslant x\cos(t) \leqslant x$

$0 < 1-x \leqslant 1 - x\cos(t)$ $\forall x \in [0,1[$.

f est cont s/ $[0,1[\times [0,\pi]$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t \sin(t)\cos(t)}{(1 - x\cos(t))^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont s/ $[0,1[\times [0,\pi]$.

D'où F est dérivable sur $[0,1[$ &
$\forall x \in [0,1[$,

$$F'(x) = \int_0^{\pi} \frac{t.\sin(t)\cos(t)}{(1 - x\cos(t))^2} dt$$

b) Mq $xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{1 - x\cos t} dt$

indic IPP $xF'(x) = \int_0^{\pi} \frac{xt \sin t \cos t}{(1 - x\cos t)^2} dt$

posons $u(t) = t\cos(t)$ $u'(t) =$

$v(t) = \frac{-1}{1 - x\cos t}$ $v'(t) = \frac{x \sin t}{(1 - x.\cos t)^2}$.

TD-3 - Intég Impropres dépendant d'un paramètre

Ex 1 : $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt$

$x \in \mathbb{R}$

a) Justifier F bien déf sur $\mathbb{R}$.

soit $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est cont sur $]0, \infty[$ donc li sur $]0, \infty[$.

$$\frac{\sin(xt)}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{xt}{t} = x$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} = x$$

La f $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se PPC en 0.

Donc $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt$ ⓒ.

• $\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \underset{t \geq 1}{\leq} e^{-t}$ & $\int_1^{\infty} e^{-t} dt$ ⓒⓥ

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt$ ⓒⓥ abs de ⓒⓥ.

Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Justif F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ & donner expre $F'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

soit $f : \mathbb{R} \times]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$

• f est cont sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$

• soit $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t \cos(xt)}{t} e^{-t} = \cos(xt) e^{-t}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t} \quad \& \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt \text{ cv}.$$

Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ &

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \cos(xt)\, e^{-t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) calculer $F'(x)$:

1° M on fait 2 IPP.

2° M On Rq $\cos(xt) = \mathrm{Re}\left(e^{ixt}\right)$

D'où $F'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{ixt} e^{-t}\, dt\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(-1+ix)t}\, dt\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{-1+ix} e^{(-1+ix)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

or $\left|e^{(-1+ix)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$F'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+ix)}{|1-ix|^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

d) en déduire $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt + F(0)$$

$$= \left[\arctan(t)\right]_0^x + F(0)$$

$$\boxed{F(x) = \arctan(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\& \ F(0) = \int_0^{\infty} \frac{0}{t} e^{-t}\, dt = 0$$

__Ex 2__ $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \quad , x>0.$

a) Mq F définie sr $]0,\infty[$.

• $t \longmapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est __cont__ sr $]0,1]$

• $0 \leq \dfrac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$

or ĉ $x>0$, $1-x<1$

& de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ CV

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ CV.

Ainsi F est bien déf sr $]0,\infty[$.

b) Mq F est cont sr $]0,\infty[$.

Si on veut ĉ __àd__ que F soit cont sr $]0,\infty[$, il suffit de vérifier que :

⊛ $f :]0,\infty[\times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont.

⊛ $\forall\, 0<a<b$, $\exists\, \varphi_{a,b}$ tq $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in]0,1]$

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$$

$$\int_0^1 \varphi_{a,b}(t)\,dt \text{ CV}$$

Si on pt le mq sr 1 __interv__ qq compact alors __cont__ f aussi sr int. ouvert.

__Brouillon__

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\underset{<0}{\ln(t)}} \leq t^{-1} = \frac{1}{t} \quad \int_0 \frac{1}{t} \text{ DV}.$$

Sur $[a,\infty[$, $a>0$, $\forall x \geq a$,
$\forall t \in]0,1]$,

$$\left|\frac{t^{x-1}}{1+t}\right| = \frac{e^{(x-1)\ln(t)}}{1+t} \leq \frac{e^{(a-1)\ln(t)}}{1+t} = \frac{t^{a-1}}{1+t}$$

De +, $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ ⓒⓥ : c'est la q° a).

Donc F est cont sur $[a,\infty[$.
Comme c'est vrai $\forall a>0$, on ed
F est cont sur $]0,\infty[$.

c) calculer $F(x)+F(x+1)$ $\forall x>0$.

$F(x)+F(x+1) =$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{x}}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t} dt$$

$$F(x)+F(x+1) = \left[\frac{t^x}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x}$$

$t^x = e^{x\ln t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\boxed{F(x)+F(x+1) = \frac{1}{x}}$$

d) ed un Équivalent de F en 0

mq $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

On a $xF(x) = 1 - xF(x+1)$

$F(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} F(1)$ (F cont sur $]0,\infty[$)

D'où $xF(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \times F(1) = 0$

Donc $xF(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ & $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

e) **ed** lim F en ∞.

$\lim_{x\to\infty} F(x) = ?$

On Rq F est $\searrow$ sur $]0,\infty[$

car si $x_1 \geq x_2$: $e^{(x_1-1)\ln t} \leq e^{(x_2-1)\ln t}$

$\Downarrow$

$F(x_1) \leq F(x_2)$

$\Rightarrow$ F est minorée par 0.

D'où $l = \lim_{x\to\infty} F(x)$ $\exists$

& c $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$

$\downarrow_{x\to\infty} \downarrow$

$l + l = 0 \Rightarrow l = 0$

Ex 3 $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,dt$, $x \geq 0$.

a) Mq F est définie & **cont** sur $[0,\infty[$

soit $f : \mathbb{R}^+ \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$

- f est **cont** sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$
- on cherche $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\infty[$:

$|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ & $\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$ CV.

$|f(x,t)| = f(x,t) \leq \frac{1}{t^2}$ mais $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ DV.

soit $a > 0$: $\forall x \in [0,a]$, $\forall t \in]0,\infty[$.

$\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \leq \frac{1-e^{-at^2}}{t^2}$

Mq $\displaystyle\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1-e^{-at^2}}{t^2}}_{=\varphi(t)} dt$ (CV).

(*) φ est continue sur $]0,\infty[$

(**) $e^{-at} = 1 - at^2 + o(t^2)$.

D'où $\displaystyle\frac{1-e^{-at}}{t^2} = \frac{at^2 + o(t^2)}{t^2} = a + o(1) \xrightarrow[t\to 0]{} a$

Dc φ se PPC en 0.

(***) $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$

& $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ (cv) $\Rightarrow \int_1^{\infty} \varphi(t)\, dt$ (CV)

Dc F est cont sur $[0,a]$; $\forall a > 0$

Ainsi F est cont sur $[0,\infty[$.

b) Mq f est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

(*) f cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$

(**) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$

Fixons $t \in]0,\infty[$,

$x \longmapsto f(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est dérivable sur $[0,\infty[$

& $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt^2}$

(***) soit $a>0$, $x \longmapsto e^{-xt^2}$ est $\searrow$ sur $[a,\infty[$.

& de $\forall (x,t) \in [a,\infty[\times]0,\infty[$,

$\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2} = \varphi(t)$ & $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt$ (CV)

Donc F est C^1 sur $[a,\infty[$, $\forall a > 0$.

Donc F est C^1 sur $]0,\infty[$.

cont & $e^{-at^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

c) Calculer $F'(x)$ $\forall x \in]0,\infty[$.

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt \quad , x>0.$$

on a $\boxed{\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Dans l'intégrale donnant $F'(x)$, on effectue le COV $u = \sqrt{x}\,t$.

$$du = \sqrt{x}\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,du$$

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,du$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \quad , x>0$$

d) en déduire et calcul $F(x)$ $\forall x \in [0,\infty[$.

$\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x>0$:

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\sqrt{x} + k$$

$$F(x) = \sqrt{\pi x} + k \quad , x>0$$

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = k \quad (F \text{ cont sur } [0,\infty[)$$

D'où $k = F(0) = \int_0^\infty \frac{1-e^0}{t^2}\,dt = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sqrt{\pi x}} \quad , x \geq 0.$$

Ex 4 soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

a) Mq F déf & cont sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$

- f est cont sur $\mathbb{R} \times]0,\infty[$.
- Cherchons $\varphi(t)$ tq $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,\infty[$:

$|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Fixons $a > 0$: pr $x \in [-a,a]$.

$$0 \leq x^2 \leq a^2$$
$$t^2 \leq t^2+x^2 \leq a^2+t^2$$
$$2\ln t \leq \ln(x^2+t^2) \leq \ln(a^2+t^2)$$
$$|\ln(x^2+t^2)| \leq |\ln(a^2+t^2)| + 2|\ln t|$$

car $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \Rightarrow |x_2| \leq |x_1| + |x_3|$

Donc $|f(x,t)| \leq \underbrace{\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{1+t^2} + \frac{2|\ln t|}{1+t^2}}_{\varphi(t)}$

- φ est cont sur $]0,\infty[$
- $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} |\ln(a^2)| + 2|\ln t|$ or $\int_0^1 \ln t\, dt$ CV.

$\Rightarrow \int_0^1 \varphi(t)\, dt$ CV.

$$\varphi(t) = \cancel{\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{\sqrt{t}\,(t^{3/2}+}} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\ln(a^2+t^2)}{t^2} + \frac{2|\ln t|}{t^2}$$

$$= \frac{1}{t^{3/2}} \underbrace{\left(\frac{|\ln(a^2+t^2)|}{t^{1/2}} + \frac{|2\ln(t)|}{t^{1/2}} \right)}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$$

D'où $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ CV $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

Donc $\int_1^{\infty} \varphi(t)\, dt$ CV.

b) Mq F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

$$f : \mathbb{R}\times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$$

(*) f est cont sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ & $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$ CV (a).

(**) Pour $t\in]0,\infty[$, $x\mapsto f(x,t) = \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x/(x^2+t^2)}{1+t^2} = \dfrac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$.

(***) soit $0<a<b<\infty$; $\forall x\in[a,b]$, $\forall t>0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)}$$

$t\longmapsto \dfrac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)}$ est cont sur $[0,\infty[$. Donc (li) sur $[0,\infty[$.

De +, $\dfrac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^4}\,dt$ CV

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2b}{(1+t^2)(t^2+a^2)}\,dt$ CV.

Ainsi, p. le Th de dérivat° des intégrales à paramètres généralisées, F est de classe C^1 sur $[a,b]$, et $\forall x\in[a,b]$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Comme c'est vrai $\forall\, 0<a<b<\infty$, on cd que F est C^1 sur $]0,\infty[$ & $\forall x>0$,

c) $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt$. calculer F'

Pr $x>0$, $x\neq 1$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{x^2+t^2}$$ par l'argument de parité $a=c=0$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{b}{1+t^2} + \frac{d}{x^2+t^2} = \frac{(d+b)t^2 + d+bx^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

D'où $\begin{cases} d+b=0 \\ d+bx^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-b \\ b(x^2-1) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-b \\ b = \dfrac{2x}{x^2-1} \end{cases} = \dfrac{-2x}{x^2-1}$

Ainsi $\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$

D'où $F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left[\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{t^2+x^2}\,dt\right]$ car les intég cv bien donc on peut séparer.

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\left[\arctan(t)\right]_0^\infty - \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\,x\,dv\right)$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^2}\left(x\,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x}$$

Ainsi $\boxed{F'(x) = \frac{\pi}{x+1}}$ $\forall x>0,\ x\neq 1$.

Par continuité de F' sur $]0,\infty[$, on obtient

$$F'(x) = \frac{\pi}{x+1}, \quad x>0.$$

d) et le calcul de $F(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

indic: un calcul $F(0)$ + CDV $u=\frac{1}{t}$.

$$F(x) = \int_0^x F(t)\,dt + F(0)$$

$$F(x) = \left[\pi\ln(t+1)\right]_0^x + F(0)$$

$$F(x) = \pi\ln(1+x) + F(0), \quad x>0.$$

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}\,dt \qquad u=\frac{1}{t} \Leftrightarrow t=\frac{1}{u}, \quad dt = -\frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \int_\infty^0 -\frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{1}{u^2}\,du = \int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{-\ln(u^2)}{1+u^2}\,du = -F(0)$$

$$\Rightarrow 2F(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 0.$$

$\forall x>0,\ F(x) = \pi\ln(x+1)$

D+, $F(0) = 0 = \pi\ln(0+1)$ donc $\forall x\geq 0,\ F(x) = \pi\ln(x+1)$

On Rq que, $F(-x) = \int_0^\infty \frac{\ln\left((-x)^2+t^2\right)}{1+t^2}\,dt = F(x)$

Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Mathématiques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 — 2021-2022
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

INTERROGATION– DURÉE : 1H30

Groupe 2

Exercice 1. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \sin(t) e^{-t}\, dt.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1-\cos^2(t)}\, dt$, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 + t^2 \ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)\right) dt.$

Indication : pour l'intégrale c), on pourra écrire $\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$.

$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\, dt$

Exercice 2. On pose pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 + \sin^2(t))\, dt.$$

$f(x) \cdot g(x)$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer pour $x > 0$, $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

c) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}.$$

CDV bornes

d) En effectuant le changement de variable $u = \tan(t)$ (dans l'expression de $F'(x)$ sous forme d'intégrale), montrer que pour $x > 0$, on a $\boxed{F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}}$.

e) Soit $G(x) = \pi \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x > 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = G(x) + A$.

f) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) - \pi \ln(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + \frac{\sin^2(t)}{x^2}\right) dt.$$

g) En déduire que pour tout $x > 0$, on a $0 \le F(x) - \pi\ln(x) \le \frac{\pi}{2x^2}$.
Indication : on pourra utiliser (sans justification) que $\ln(1+u) \le u$, pour $u \ge 0$.

h) En déduire la valeur de A.

Barème :

Exercice 1 : question a) : 2 points ; question b) : 2 points ; question c) : 2 points.
Exercice 2 : question a) : 3 points ; question b) : 3 points ; question c) : 1 point ;
question d) : 2 points ; question e) : 1 point ; question f) : 1 points
question g) : 2 point ; question h) : 2 points.

$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

M53 TD1

Ex8 : $\int_0^1 \ln t \, dt$, $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, $\int_0^\infty x(\sin x) e^{-x} dx$.

$\int_0^\infty (\ln t) e^{-t} dt$, $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$.

Ex9 : $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1}$, $\int_0^\infty \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$, $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Ex10 $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$, $\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln t}} dt$

Ex11. $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - 1}{t^\alpha} dt$, $\int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$, $\int_0 \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$

Ex12 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}} dx$, $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$, $\int_1^\infty \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$

Ex13 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$, $\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx$, $\alpha > 0$.

TD2 : Ex 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 8, 15, 16,

cont sur I ? de li sur I ?

équivlts $\leftrightarrow$ mêmes signes / positivité de même convergence.

$\int_0 \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha \geq 1$ DV, $\alpha < 1$ CV $\qquad \int^\infty \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha \geq 2$ CV, $\alpha < 1$ DV.

$\lim_{x \to 0} x^\beta \ln x = 0$ si $\beta > 0$

$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx$ | f, g cont $[a,b]$, $g \geq 0$ & $\searrow$, $c \in [a,b]$

$1 - 2x\cos t + x^2 = |e^{-it} - x|^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T périodiq $\qquad \int_\alpha^{\alpha+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt \quad \forall \alpha$.

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dt = \frac{+2\,du}{1+u^2}$

si f est 2 fois dérivable $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$. f convexe.

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t) dt$

$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

TD 1. Ex 14

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt, \quad \int_0^{\infty} t\, e^{-\sqrt{t}}\,dt, \quad \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{-at}\,dt, \quad a>0$$

TD 2

9, 12, 13, 14, 16.

Ainsi $F(x)= \begin{cases} \pi \ln(x+1) &, x \geq 0 \\ \pi \ln(-x+1) &, x < 0 \end{cases}$

$$\boxed{F(x) = \pi \ln(|x| + 1)} \;, x \in \mathbb{R}.$$

Ex 7 a) Mq l'integ géné $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-CV (CV mais |CV|). voir cours.

Transformée de Laplace

$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \quad \forall x \geq 0.$

b) Mq F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ & déterminer sa dérivée.

soit $f :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$

- f est cont sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$

$t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ se PPC en 0.

- $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ CV & ainsi $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ CV.

** $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∃ & est cont sur $]0,\infty[$?

étude variations de f

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \cdot (-t) e^{-xt} = -\sin t \cdot e^{-xt}$

*** fixons $a > 0$, $\forall x \geq a$; $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}$.

& $\int_0^{\infty} e^{-at} dt$ CV

Dc d'après le Th du cours, F est C^1 sur $]0,\infty[$

$\forall x \geq 0$, $F'(x) = -\int_0^{\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$

Puis se prolonge à $]0,\infty[$.

$\ln(1+x^2) \leq \frac{\infty}{t^2}$ $\frac{\ln(1+x^2)}{t^2}$ 51 $x > 0$

si quotient : minore dénom. / majore numérat$^{\sim}$

c) calculer $F'(x)$

Mq $\forall x>0,\ F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(par 2 IPP ou écrire $\sin(t)e^{-xt} = \mathrm{Im}(e^{(i-x)t})$).

$|\sin(t)| = |\sin(t)-\sin(0)|$
$\leq \sup_{u\in[0,t]} |\sin'(u)|\,|t-0|$
$\leq |t|$

$|\ln(1+t)| \leq t$ & $t \leq e^t - 1$.

$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x>0$

$$F(x) = -\arctan(x) + k \quad (*)$$

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,dt$$

$x \neq 0$

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty \underbrace{\left|\frac{\sin t}{t}\right|}_{\leq \frac{t}{t}} e^{-xt}\,dt \leq \int_0^\infty e^{-xt}\,dt$$

car $|\sin(t)| \leq |t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|F(x)| \leq -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ & donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

Par $(*)$, on a $0 = -\frac{\pi}{2} + k$ & donc $k = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x>0,\ \boxed{F(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}$$

---

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$, soit $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$.

(i) Mq : $(F_n)_n$ CV UN vers F sur $[0,\infty[$.

indic : use 2nde FF moyenne.

ie $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} |F_n(x) - F(x)| = 0$

$$F(x) - F_n(x) = \int_n^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

<u>1° essai</u> : $$|F(x) - F_n(x)| \leq \int_n^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| |e^{-xt}|\, dt$$

$$\leq \int_n^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty.$$

<u>2° essai</u>

user 2° ff de la moyenne.

$\exists c \in [a,b]$, f, g cont, $g \geq 0$, $\searrow$

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$

Fixons $A > n$.

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

Posons $g(t) = \frac{1}{t} e^{-xt}$, $f(t) = \sin t$.

f, g <u>cont</u> sur $[n, A]$; $g \geq 0$, $\searrow$.

D'après la 2° ff de la moyenne, on a :

$\exists\, c_{n,A} \in [n, A]$ tq

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \frac{e^{-nx}}{n} \int_n^{c_{n,A}} \sin t\, dt.$$

On obtient que :

$$\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \frac{e^{-nx}}{n}\left(-\cos(c_{n,A}) + \cos(n)\right)$$

$$\left|\int_n^A \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt\right| \leq 2\,\frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{2}{n} \quad \forall x \geq 0$$

En faisant tendre $A \to \infty$, on obtient que :

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_n^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt\right| \leq \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \geq 0} |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

(ii) Justifier que $\forall n \geq 1$, F_n est <u>cont</u> sur $[0, \infty[$.

$$F_n : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$ est <u>cont</u> sur $[0, \infty[$.

$$f_n : [0, \infty[\times\,]0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$$

53

f_n est <u>cont</u> sur $[0, \infty[\times\,]0, n]$.

• $|f_n(x,t)| \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$

et $\int_0^n 1\, dt$ CV.

D'après le Th de continuité, on a

chaque F_n est cont sur $[0,\infty[$, $\forall n \geq 1$.

(iii) ed $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$.

F_n est cont sur $[0,\infty[$

$(F_n)_n$ CV UN vers F sur $[0,\infty[$.

$\Rightarrow$ F est cont sur $[0,\infty[$.

ep $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} F(x) = F(0)$

e) Calculer $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = F(0) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} F(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \left(-\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Transformée de Laplace

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

tdF is $\ll \int_{-\infty}^{\infty}$!

Ex 14 soit $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ f cont

La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}f$ définie par

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\exists\, n \geq 0$ tq $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t^n} = 0$.

a) Mq $\mathcal{L}f$ est déf & <u>cont</u> sur $]0,\infty[$.

soit
$$g :]0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,t) \longmapsto f(t)\, e^{-st}$$

Donc g est continue sur $]0,\infty[\times [0,\infty[$.

* soit $a > 0$,

pr $s \in [a,\infty[$, $t \in [0,\infty[$:

$$|f(t)\, e^{-ts}| \leq |f(t)|\, e^{-at} \quad \text{car } s \longmapsto e^{-ts} \searrow$$

De plus $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_0 > 0$ tq $\forall t \geq t_0$,

$$\frac{|f(t)|}{t^n} \leq 1 \quad \text{ie } |f(t)| \leq t^n \quad \& \ t^{n+2} e^{-at} \leq 1$$

D'où pour $t \geq t_0 \Rightarrow |f(t)|\, e^{-at} \leq t^n e^{-at} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^\infty |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ CV

et $\displaystyle\int_0^{t_0} |f(t)|\, e^{-at}\, dt$ CV car $t \mapsto |f(t)|\, e^{-at}$ est <u>cont</u>

Dc par le TH de <u>cont</u>, $\mathcal{L}f$ est bien déf & <u>cont</u> sur $[a,\infty[$, $\forall a > 0$.

Donc $\mathcal{L}f$ est bien déf & <u>cont</u> sur $]0,\infty[$.

f) Mq $\lim_{s\to\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

1er essai

$$\int_0^A f(t)\, e^{-st}\, dt = e^{-0\times s}\int_0^c f(t)\, dt$$

0 pb en 0.

2e essai

$$= \int_0^1 f(t) e^{-st}\, dt + \int_1^\infty f(t) e^{-st}\, dt.$$

pb

$\exists t_0, \forall t \geq t_0, \ |f(t)| \leq t^n$

Mq $\displaystyle\int_{t_0}^\infty t^n e^{-ts}\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

Pour $n=0$: $s>0$

$$\int_{t_0}^\infty e^{-ts}\, dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t=\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - e^{-t_0 s}\right) = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \leq \frac{1}{s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

spps $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_{t_0}^\infty t^n e^{-ts}\, dt = 0$

$$\int_{t_0}^\infty t^{n+1} e^{-ts}\, dt =$$

$u(t) = t^{n+1}$ $\quad u'(t) = t^n(n+1)$

$v'(t) = e^{-ts}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{s} e^{-ts}$

$$-\frac{1}{s}\left[t^{n+1} e^{-ts}\right]_{t=t_0}^{t\to\infty} + \frac{n+1}{s}\int_{t_0}^\infty t^n e^{-ts}\, dt$$

$\frac{1}{s} t_0^{n+1} e^{-t_0 s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ $\quad \frac{n+1}{s} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ $\quad \int_{t_0}^\infty t^n e^{-ts}\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

$$\left|\int_0^{t_0} f(t)\, e^{-st}\, dt\right| \leq \sup_{t\in[0,t_0]} |f(t)| \int_0^{t_0} e^{-st}\, dt < \infty$$

car f est cont.

Fonction	Une primitive
$f+g$	$F+G$
$f' f^{\alpha}$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
f'/f	$\ln f$
$\dfrac{f'}{f^{n}}$	$-\dfrac{1}{(n-1)\, f^{n-1}}$
$f' \sin f$	$-\cos f$
$f' \cos f$	$\sin f$
$\dfrac{f'}{\cos^2 f} = f'(1+\tan^2 f)$	$\tan f$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\arctan f$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

- $$\frac{1}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)} = \frac{A_1}{X-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{X-\alpha_n} \Rightarrow A_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\alpha_i-\alpha_j)^{-1}$$

- $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}+\frac{p}{2\sqrt{\delta}}\right) + c \quad ; \ \delta = q-\frac{p^2}{4}$$

- $$\int \frac{cx+d}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+px+q\rvert - \frac{p}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}+\frac{p}{2\sqrt{\delta}}\right)\right] + C$$

- $$\frac{a_n}{Q(X)} = \frac{A_1}{X-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_r}{X-\alpha_r} + \frac{B_1X+C_1}{X^2+p_1X+q_1} + \cdots + \frac{B_kX+C_k}{X^2+p_kX+q_k}$$

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{-xt}\, dt = \int_0^{\infty} \operatorname{Im}(e^{it} e^{-xt})\, dt = \int_0^{\infty} \operatorname{Im}(e^{t(i-x)})\, dt = - \operatorname{Im}\left(\int_0^{\infty} e^{(i-x)t}\, dt \right) = - \operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{i-x} e^{(i-x)t} \right]_0^{\infty} \right)$$

$$= - \operatorname{Im}\left(0 - \frac{1}{i-x}\right) = - \frac{1}{1+x^2}$$

car $\left| e^{(i-x)t} \right| = e^{-xt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-x+i} - \frac{1}{-x-i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-2i}{1+x^2}\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$