TD - M53

TD-1 - Rappels

→ Uniforme continuité
→ Intégrales de Riemann
→ Intég. Généralisées

cont [ ]
dér] [
condit°!!
pk?
TAF

Uniforme Continuité

Ex1 a) Mq si $f : I \to \mathbb{R}$ est f k-lipschitzienne sur I. (ie $\forall x,y \in I$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$) alors f est UN cont sur I.

$f : I \to \mathbb{R}$, $\forall x,y \in I$, Montrons que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| \Rightarrow [|f(x)-f(y)| < \varepsilon]$$

$$[|x-y| < \delta \Rightarrow$$

→ k donné p l'énoncé, on a ε!, on cherche δ.

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{k}} \times \cancel{k} = \varepsilon$$

b) ed $x \mapsto \sin(x)$ est UN. cont sur $\mathbb{R}$. → C^1.

$f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ est f k-lipschitzienne ?

$$\forall x,y \in I,\ |\sin(x)-\sin(y)| \leq k|x-y|.$$

TAF $\exists c \in [x,y]$ tq ~~$d \in [x,y]$~~

$$\frac{|\sin(x)-\sin(y)|}{|x-y|} \overset{\sin'}{=} (c) = |\cos(d)| \leq 1$$

On peut écrire pour $c = 1$

$$|\sin(x)-\sin(y)| \leq 1.|x-y|$$

Donc f sinus est k-lipschitzienne.

Ainsi d'après a) f est UN cont sur I.

c) Mq $x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est UN cont.

$\forall x,y \in I$, $|f(x)-f(y)| = \left|\dfrac{1}{1+|x|} - \dfrac{1}{1+|y|}\right|$

$= \left|\dfrac{1+|y|-1-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| = \left|\dfrac{|y|-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|$

$\leqslant \dfrac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \leqslant k|x-y|$

~~avec $k = \dfrac{1}{(1+|x|)(1+|y|)}$~~

On a montré que la f est k-lipschitzienne.

Ainsi f est uniformément cont sur I.

DM Δ $|y| = |y-x+x| \leqslant |y-x| + |x|$

$\Leftrightarrow |y|-|x| \leqslant |y-x|$

$\Leftrightarrow |x|-|y| \leqslant |x-y|$

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$ $\quad \Leftrightarrow \boxed{\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$

$|\sqrt{x-y}|$ $\sqrt{|x-y|}$

(2)

d) Mq $x \mapsto \sqrt{x}$ est UN. cont sur $\mathbb{R}_+$

mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \varepsilon$.

~~$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \times \dfrac{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$~~

pour $\varepsilon = \delta^2$ $\quad$ si $x > y$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \leqslant \delta^2$ Δ

Δ I

$\boxed{1^\circ M}$ $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2^\circ M}$ $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

QC

sur $[1,\infty[$, $\forall x,y \in [1,\infty[$, on a :

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant 2$.

Donc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$

sur $[1,\infty[$, $f\ \sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

• Sur $[0,1]$: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est cont !

si $[0,1]$ – fermé, borné. |||

Le TH de Heine implique que

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est UN cont sur $[0,1]$.

→ si f est f UN cont sur $[0,1]$ & UN cont sur $[1,\infty[$ alors f est UN cont sur $[0,\infty[$

• soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$, $\forall x,y \in [0,1]$,

$|x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

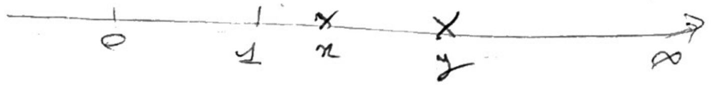
$\exists\, \delta_2 > 0$, $\forall x,y \in [1,\infty[$,

$|x-y| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

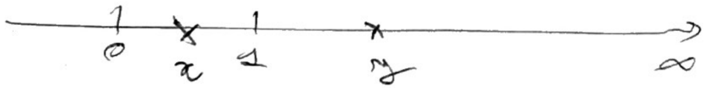
soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et soit $x,y \in [0,\infty[$ tq $|x-y| \leq \delta$.

1°cas

2°cas



3°cas



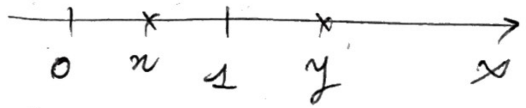
si $x,y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \delta \leq \delta_1$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

2°cas : $x,y \in [1,\infty[$:

$|x-y| \leq \delta < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

3°cas $x \in [0,1]$, $y \in [1,\infty[$, $|x-y| \leq \delta$



$$|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f(1)|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|f(1)-f(y)|}_{\leq \varepsilon/2}$$

(car $x, 1 \in [0,1]$, $|x-1| \leq \delta_1$

$y, 1 \in [1,\infty[$ & $|y-1| \leq \delta_2$)

d) Pk $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Mq $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sr $[0, \infty[$.

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \qquad \forall x,y > 0,$$

Rais^t ?! $\exists k \,/\, \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq k\,|x-y|$

D'où $\forall x, y > 0,\ x \neq y,\ \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq k$

$$\forall n \geq 1 : \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} \infty} \leq k \qquad \left(\begin{array}{l} x = 1/n \\ y = 1/n+1 \end{array} \right)$$

Absurde

Ex 2 Mq $x \mapsto x^2$ est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$ mais n'est pas UN cont sr $\mathbb{R}$.

• $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Le Th de Heine implique que f est UN cont sr tt compact de $\mathbb{R}$.

•• Sur $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y|$$

négat°

Mq $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in \mathbb{R}$.

$|x-y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

soit $\delta > 0$, prenons $x_n = n$, $y_n = n + \dfrac{1}{n}$

où n est choisit tq $n \geq \dfrac{1}{\delta}$.

Dc $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} \leq \delta$.

& $|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n^2 - \left(n + \dfrac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \dfrac{1}{n^2} \geq 2$

$\varepsilon = 2$.

4

Dc $\varepsilon = 2$ fonctionne & f n'est pas UN cont sr $\mathbb{R}$.

Ex3 : soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. f UN cont.

On vt mq $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \leq ax + b$.

But

a) Justifier l'$\exists$ $\eta_1 > 0$ tq

$$|x-y| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

par définit° cela convient

b) soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ & $n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1$

(i) Mq $$|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|$$

$$\left| f\left(\frac{\cancel{n_0} x_0}{\cancel{n_0}}\right) - f(0) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right)\right|$$

$\hat{s}$ télescpq

$$\underset{\text{I}\Delta}{\leq} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|$$

(ii) $$|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \underbrace{\left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{k x_0}{n_0}\right)\right|}_{\leq 1 \text{ d'a)}}$$

car $\left|\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{k x_0}{n_0}\right| = \frac{x_0}{n_0} < \eta_1$

$$\left\lfloor \frac{x_0}{\eta_1} \right\rfloor \leq \frac{x_0}{\eta_1} < \left\lfloor \frac{x_0}{\eta_1} \right\rfloor + 1 = n_0$$

$\left\lfloor \frac{x_0}{\eta_1} \right\rfloor = n_0 - 1$

Donc $$|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0$$

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0) + f(0)| \leq |f(x_0) - f(0)| + |f(0)|$$
$$\leq n_0 + |f(0)| \leq \underbrace{\frac{1}{\eta_1}}_{a} x_0 + \underbrace{1 + |f(0)|}_{b}$$
$$\leq a x_0 + b.$$

Dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq ax + b$

c) (i) $f(x) = e^x$, $x > 0$.

Supposons f UN cont alors $\exists\, a, b > 0$ tq $e^x \leq ax + b$, $\forall x \geq 0$.

$$\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty} \leq \underbrace{a + \frac{b}{x}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} a}$$

Intégrales de Riemann

$f : I \to \mathbb{R}$ cont sur I, $a \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in I.$$

(F est la primitive de f q s'annule en a.

$x_0 \in I$, $x \in I$, $x \neq x_0$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\, dt} + \int_{x_0}^x f(t)\, dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\, dt}}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

Voir DM

↳ TVI

Le Th de la moyenne : $\exists\, c_x$ compris entre x et x_0 tq $\boxed{\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\, dt = f(c_x)}$

Or lorsque $x \to x_0$, on a $c_x \to x_0$ & par continuité de f, on a : $f(c_x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

D'où $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ $\exists$ & vaut $f(x_0)$.

Donc F est dérivable & $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in I$.

Ex 7 $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

Supposons g est positive & décroissante

alors $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{F(c)} .$$

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_{n-1} \quad b = x_n .$

pas : découpage :

$$\delta(S) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

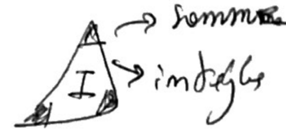
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty .$$

soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

---

1 a) Mq $\displaystyle \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(x_{i-1}))\,f(x)\,dx \right|}_{= I} \leq$

$$I \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(g(x) - g(x_{i-1}))|\,|f(x)|\,dx$$



$$\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\,dx$$

$$= \|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_{i-1}) - g(x))\,dx$$

car $g \searrow$ & dc $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ $g(x) \leq g(x_{i-1})$.

D'où $\displaystyle I \leq \|f\|_\infty \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_{i-1})\,dx}_{= (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})} - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx \right)$

D'où $\displaystyle I \leq \|f\|_\infty \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, g(x_{i-1})}_{\text{Somme de Riemann.}} - \int_a^b g(x)\,dx \right)$

Lorsque $\delta(S) \longrightarrow 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g(x) - g(x_{i-1})\right) f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b g(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\, dx = \lim_{\delta(S) \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$.

c) F dérivable de continue sur $[a, b]$ & de F admet un minimum & un maximum.

Lorsque $\delta(S) \to 0$, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(x_i) \longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big) f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} \int g(x_{i-1}) f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b g(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\, dx = \lim_{\delta(S) \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$.

c) F dérivable de continue sur $[a,b]$

& de F admet un minimum & un maximum.

- $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont
- g est $\oplus$ & $\searrow$

Mq $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

On a vu que $\delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\delta(S)\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right) = \cdot$$ Chasles

A) I) Somm

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \boxed{v_i} \qquad V_i = \sum_{k=1}^{i} v_k \qquad \cancel{j=i-1}$$

$$\cdot = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_{i-1})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)} = $$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) F(x_i) - \sum_{j=0}^{n-1} g(x_j) F(x_j)$$

car $x_0 = a$ & $F(a) = 0$

$$= g(x_{n-1}) F(x_n) - \cancel{g(x_0) F(x_0)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) F(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

$$= g(x_{n-1}) F(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) F(x_i)$$

$m = \min_{t\in[a,b]} F(t)$ & $M = \max_{t\in[a,b]} F(t)$.

$F(b) \leq M$ & $F(x_i) \leq M$; $1 \leq i \leq n-1$

& $\hat{c}$ $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0$ car g est $\searrow$.

$$I \leq M g(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right) M$$

$$= M\left[\cancel{g(x_{n-1})} + g(x_0) - \cancel{g(x_{n-1})}\right] = M g(a)$$

De $\hat{m}$, $I \geq m.g(a)$.

D'où $$m.g(a) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx} \leq M g(a)$$

$\downarrow \ \delta(S) \longrightarrow 0$

$$m\,g(a) \leq \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leq M\,g(a)$$

<u>ccl</u> si $g(a)=0$, n'importe quel c fonctionne car alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ d'après l'inég. précédente.

si $g(a) \neq 0$: $m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M$

& on appliq le <u>TVI</u> : $\exists\, c \in [a,b]$ tq

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(c)$$

d'où $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^c f(x)\,dx$. $\square$

<u>Applicat°</u> soit f cont $\searrow$ de $[0,\infty[$ ds $\mathbb{R}$; $\lim_{\infty} f = 0$

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} f(t)\, e^{it}\,dt$. $\left(\begin{array}{c}\text{mq q ça td} \\ \text{vers 0 qd } n\to\infty\end{array}\right)$

$\int_n^{n^2} f(t)\,e^{it}\,dt = ?$

- $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt$: f & cos st <u>cont</u>
- f est $\searrow$ & $\oplus$.

$\exists\, c \in [n, n^2]$ tq $\int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt =$

$$= f(n) \int_n^{c_n} \cos(t)\,dt$$

$$= f(n)\,[\sin(t)]_n^{c_n}$$

$$= f(n)\,(\sin(c_n) - \sin(n))$$

$$\Rightarrow \left| \int_n^{n^2} f(t)\cos(t)\,dt \right| \leq 2 f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\int_n^{n^2} f(t)\cos t\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

De m̂ pr <u>sinus</u>.

Intégrales Généralisées

1) • $t \mapsto \ln t$ est cont sur $]0,1]$. IPP

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \cancel{t \times \frac{1}{t}} \, dt$$

$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = 1/t$

$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$

$$= \underbrace{-\varepsilon \ln(\varepsilon)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\, 0} - \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\to 1}$$

par croiss. comparée

D'où $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -1$

Dc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ CV & vaut -1.

2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est cont sur $\mathbb{R}$.

dc localemt intégrable sur $[0, \infty[$.

• $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive

~~$0 \leq e^{-t^2}$~~ comme $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ — croiss. comparée

$\exists\, t_0 \geq 0,\ t \geq t_0 \Rightarrow 0 \leq t^2 e^{-t^2} \leq 1$

$0 \leq e^{-t^2} \leq 1/t^2$

$\displaystyle\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^\infty e^{-t^2} dt$ CV

ainsi $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \longmapsto \infty$

• $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ CV.

• $e^{-t^2} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty e^{-t^2} dt$ CV.

pas de primitive

11 par $e^{u(x)}$

Rq : on pt prdre ass $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} x.(\sin x) e^{-x}\, dx$

• $x \longmapsto x(\sin x) e^{-x}$ est cont sr $[0,\infty[$
dc localem^t intégrable sr $[0,\infty[$.

$|x \sin x . e^{-x}| \leq x . e^{-x}$

& $x e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\text{car } x^3 e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\right]$

& $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ CV.

Donc $\displaystyle\int_1 x \sin x . e^{-x}\, dx$ CV abs dc CV.

$\frac{\ln t}{t} \times t^3 e^{-t} = t^2 \ln(t) e^{-t}$ raccourci

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} (\ln t)\, e^{-t}\, dt$?

$t \mapsto (\ln t) e^{-t}$ est cont sr $]0,\infty[$ dc (li)$^{]0,\infty[}$

On a $k_1 \in]0,1[$ & $k_2 \in [1,\infty[$

sr $]0,1[$.

$\ln(t) e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$

[ô $\ln(t) e^{-t}$ & $\ln(t)$ st de m̂ signes.]

$\displaystyle\int_0^1 \ln t . e^{-t}\, dt$ & $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ st de m̂ nature.

D'après 1) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \ln t\, e^{-t}\, dt$ CV.

Sur $[1,\infty[$: IPP

$u(t) = \ln t \quad u'(t) = 1/t$

$v(t) = -e^{-t} \quad v'(t) = e^{-t}$

$\displaystyle\int_1^{k_2} \ln t . e^{-t}\, dt =$

$= -\left[\ln t . e^{-t}\right]_1^{k_2} + \displaystyle\int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

$= -\ln k_2 . e^{-k_2} + \displaystyle\int_1^{k_2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

• $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ dc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ CV. • $\displaystyle\lim_{k_2\to\infty} -\ln(k_2) e^{-k_2} = 0$

Ainsi par somme $\displaystyle\lim_{k_2\to\infty} \int_1^{k_2} \ln(t) e^{-t^2}\, dt$ $\exists$

(12) cl $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln t\, e^{-t^2}\, dt$ CV.

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ ---> DV

← ⚠ majoration n'est pas vraie par tout $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

⚠ CV en 0 ok mais ne pas oublier impropre en 1.

D $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont p morcx

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ CV

$\exists c \in]a,b[$ tq $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ CV.

Étude en 1 : $\forall t \in [0,1[$

$\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{1-t}$ & $\dfrac{1}{1-t} \geq 0$,

$\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ DV (① ① & CDV en $u = 1-t$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ DV

$\boxed{L = 1}$

13 voir lim PPi qd indét

Ex 9 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1}$ ---> DV

$t \mapsto \dfrac{1}{e^t-1}$ est cont sur $]0,\infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{e^t-1} = \infty$. $e^t = 1 + t + o(t)$, $t\to 0$

$e^t - 1 = t + o(t)$

$\Rightarrow e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$

$\dfrac{1}{e^t-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$

$\frac{1}{t} \geq 0$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ est DV. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t-1}\,dt$ DV.

et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^t-1}\,dt$ est DV.

2) $\int_0^{\infty} \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$

$t \longmapsto \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est cont sur $[0,\infty[$.

+ grde puissance

Or $\frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{t.e^{-\sqrt{t}}}{t^2} = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$

$\cancel{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\sqrt{t}}}$ = $\lim_{t\to\infty} t.e^{-\sqrt{t}} = 0$, par croissance comparée

alors $\exists t_0$ tq $\forall t \geq t_0$,

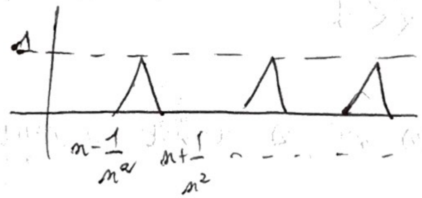
$0 < te^{-\sqrt{t}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t} e^{-\sqrt{t}} < \frac{1}{t^2}$

Or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ CV donc $\int_0^{\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$ CV.

9) $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ CV $\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ Faux

CA



$\sum \frac{1}{\cancel{2}n^2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{4}} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Si la limite existe en $+\infty$ & $f \geq 0$.

3) $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right) dt$, $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est cont sur $]0,1]$.

Or $0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$

$\int_0^1 1\, dt$ CV d'où $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ CV.

Ex 10

1) $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ cont sur $]0,\infty[$

Étude en 0 : on a $\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \ln t$ basse puissance.

$\int_0^1 \ln t\, dt$ CV dc $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

$\ln t \leq 0 \ \forall t \in (0,1)$

Étude en ∞ :

$1+t^2 \geq t^2 \Leftrightarrow \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2} \Leftrightarrow \frac{t^{3/2} \cdot \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$

Or par croissance comparée $t^{-\frac{1}{2}} \ln t \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Puis $\exists t_0, \forall t \geq t_0$, ~~$0 \leq \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$~~

$\sqrt{t} \geq \ln(t)$, $\frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2}$

$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$

or $\int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}} dt$ CV car $\frac{3}{2} > 1$.

On a $\int_1^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ CV.

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$

$x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ cont sur $]1,\infty[$ & $\oplus$

$\ln(x) = \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

$u = x-1$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx \quad \text{CV}$$

$\frac{1}{2} < 1$.

Do $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV

Choisir $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$,

$$x^{1+\varepsilon}\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{1+\varepsilon}\cdot\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \tfrac{1}{2}-\varepsilon > 0$$

D'où $\exists\, t_0$ tq $t \geq t_0 \Rightarrow x^{1+\varepsilon}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x+1)\sqrt{x}} \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

& $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,dx$ CV.

Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$ CV.

hopeneus

CV $\alpha < 1 \Rightarrow \times x^\alpha \rightsquigarrow f \to 0$

DV $\alpha \geq 1 \Rightarrow \times x^\alpha \rightsquigarrow f \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} >0$

multiplie x^α

10

3) $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$, $t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est cont n $[1,\infty[$

Penser $\frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} = \frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{e^{\ln t}} = e^{\sqrt{\ln t} - \ln t}$

$= e^{-\ln t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

D'où $\exists t_0, \forall t \geq t_0$:

$0 < \frac{1}{t} e^{\sqrt{\ln t}} \leq 1$

$\frac{1}{t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$

Or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ DV.

Donc $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$ DV.