M 52. Nota Bene

@ Dimensions ev & Espaces Vectoriels

- $\mathbb{R}^n \to$ dim : n • $\mathbb{R}^{*}_{[a,b]}[X]$: dim : ∞
- $\mathcal{C}[a,b] \to$ dim : ∞ • $\mathbb{R}_n[X]$: dim : $n+1$
- $l_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$

<u>idée :</u> $(x_i + y_i)^2 \leqslant 2x_i^2 + 2y_i^2$.

@ Sous-espaces

- $\mathcal{C}_0 = \{ (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$
- $\mathcal{C} : \{ (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = d \in \mathbb{R} \}$
- l_∞ : suites bornées • $\mathbb{R}^\infty$: ttes suites

M52 · Nota Bene

@ Dimensions ev & Espaces Vectoriels

- $\mathbb{R}^n \to$ dim : n
- $\mathbb{R}^*_{[a,b]}[X]$: dim : ∞
- $\mathcal{C}[a,b] \to$ dim : ∞
- $\mathbb{R}_n[X]$: dim : $n+1$
- $l_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$

idée : $(x_i + y_i)^2 \leq 2x_i^2 + 2y_i^2$.

@ Sous-espaces

- $\mathcal{C}_0 = \{ (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$
- $\mathcal{C} : \{ (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = d \in \mathbb{R} \}$
- l_∞ : suites bornées
- $\mathbb{R}^\infty$: ttes suites

$\boxed{M}$ Mq ens E est un espace Vectoriel.

1) mq $(E,+)$ est un groupe. → associativité → élt neutre → élt inverse.
2) mq $(E,+)$ est un groupe abélien.
3) mq distributivité mltplc° scalaire.
4) mq associativité mltplc° scalaire.

DM CBS avec $\sqrt{ab} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $a, b \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a = \frac{x_i^2}{\|x_i\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y_i\|^2}$

(*) $\Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x_i\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y_i\|^2} \right) \xrightarrow[\text{sr } i]{\text{Sommer}} \sum |x_i y_i| \leq \underbrace{\sqrt{\sum |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum |y_i|^2}}_{\|x\| \cdot \|y\|}$

DM IM

Mq $C[a,b]$ n'est pas complet & $\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2 dt$ muni $\|f-g\| = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

→ soit $\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$, mq $(\varphi_n)_n$ est de Cauchy ds $\mathcal{C}_2[-1,1]$ q ne CV pas

(!!) abs.

→ calcul $\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

Rq L'ens $\mathcal{C}_2[a,b]$ remplacé p $L^2[a,b]$

$\mathcal{C}_1[a,b] = (C[a,b], \|\cdot\|_1)$ mais $C_\infty[a,b] = (C[a,b], \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|)$ est complet.

Rq (TH) boules emboîtées. (si ptdvue interv. fermés : ppe Cauchy-Cantor : constic° $\mathbb{R}$).

- $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne st pas mpd.

@ Ens de Cantor $C \subset [0,1]$ mpd. (C n'est pas dénomb.)

▷ Tte suite CV est de Cauchy.

▷ Tte suite de Cauchy est CV ds (X,d) si espace complet.

▷ $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne st pas complets. $\mathbb{P}[\mathbb{K}]$ pas complet.

▷ Les 3 normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ st équivaltes ds $\mathbb{R}^n$, (x_n) est de Cauchy $\mathscr{P}$ $\|\cdot\|_1$ ssi $\mathscr{P}$ $\|\cdot\|_2$ ssi $\mathscr{P}$ $\|\cdot\|_\infty$.

▷ ℓ_2 est complet.

▷ $\mathbb{R}$ est complet.

▷ $C[a,b]$ n'est pas complet.