Séries numériques et intégrales généralisées

—

FICHE 3 : SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Calculs de sommes de séries

Exercice 1. Calculer les sommes des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

b) $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$. (On pourra d'abord calculer $(1-3^{-1})\sum_{n=0}^{N}(n+1)3^{-n}$).

c) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$. (On pourra écrire $\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$, puis $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$).

Exercice 2.

a) Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme.

b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $1/(4x^3-x)$.

c) Montrer la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1}1/(4k^3-k)$ et calculer sa somme.

Exercice 3.

a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1, et en déduire que

$$e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

b) Calculer les sommes des séries :

$$\text{(i)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}\qquad\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}\qquad .$$

c) Montrer que le reste d'ordre n de la série exponentielle, $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, est majoré par $\frac{1}{nn!}$. En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 4. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction logarithme, montrer que la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente de somme $\ln 2$.

Exercice 5. Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$.

a) Donner une expression simple de $S_n'(x)$.

b) En déduire que

$$S_n(x)=\ln(1+x)-\int_0^x\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

c) Conclure que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x).$$

d) Retrouver le résultat de l'exercice 3.

Exercice 6. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels convergent vers 0, et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n, \ (n \geqslant 0).$$

Démontrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 7. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{1+2^2+\cdots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme. *Indication :* On rappelle que $1^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a été étudiée dans l'exercice 3.

II. Séries numériques à termes positifs

Exercice 8. Etudier la nature des séries de terme général suivant :

a) $\dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geqslant 1)$,

b) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geqslant 1)$,

c) $\dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ $(n \geqslant 3)$,

d) $-\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$ $(n \geqslant 1)$

Exercice 9. En utilisant les différents critères de convergence, préciser la nature des séries de terme général suivant :

1) $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$, $n \geqslant 1$,
2) $\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$,
3) $\frac{1}{n^2+3}$,
4) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$,
5) $\frac{1}{\ln n}$,
6) $n^2 e^{-n}$,
7) $\frac{\ln n}{n^2}$,
8) $\frac{n^2}{n^3+1}$,
9) $\frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n}}}$,
10) $\frac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$,
11) $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2-2\sqrt{n}+3\ln n}$,
12) $\frac{\sin n}{n(n+1)}$,
13) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$
14) $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$,
15) $\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$,
16) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n}$,
17) $\frac{n!}{e^n}$,
18) $\frac{n!}{n^n}$,
19) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$,
20) $\frac{(n+1)!}{1.4....(3n+1)}a^n \quad (a>0)$,
21) $\frac{2.4....2n}{n^n}$,
22) $\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)a^n \quad (a>0)$,
23) $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$,
24) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$,
25) $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
26) $\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$,
27) $\frac{\ln 2+\ln 3+\ln n}{n^\alpha}$,
28) $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$,
29) $\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(\frac{1}{n})}\right)^{n^{5/2}}$,
30) $n\left(2^{\frac{1}{n^2}}-1\right)-\ln\left(1+\frac{\ln 2}{n}\right)$,
31) $\cos\left(\frac{\pi n^2}{2(n^2+pn+qn)}\right)$.

Exercice 10. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}, \quad (n \geqslant 2),$$

où α, β sont des paramètres réels.

Exercice 11. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_n a_n$ converge. Etudier la nature des séries suivantes

$$a) \ \sum_n a_n^2, \qquad b) \ \sum_n \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad c) \ \sum_n a_n a_{2n}, \qquad d) \ \sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \neq 0$. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0}|u_{n+1}-u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\right|$ sont de même nature.

Exercice 13. Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante à termes positifs. On suppose que $\sum_n a_n$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.$$

Indication : on pourra minorer $\sum_{k=p+1}^{n} a_k$ *pour* $n > p$...

Exercice 14.

a) En comparant la somme partielle d'ordre n de la série harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

à une intégrale, montrer que H_n vérifie l'encadrement

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n).$$

b) En déduire que la série harmonique est divergente et que H_n est équivalent lorsque n tend vers l'infini à $\ln n$.

c) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in [1/4, 1]$ (γ est appelée la constante d'Euler).

d) Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 15. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

1. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t}$.

Pour $N \geqslant 3$, on pose $S_N = \sum_{n=3}^{N} u_n$ et $I_N = \int_3^N \frac{\ln t}{t}dt$.

3. Montrer l'encadrement $I_N \leqslant S_N \leqslant \frac{\ln 3}{3} + I_N$?
4. Montrer que l'on a $S_N \sim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln N)^2$.
5. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{S_n}{n^2}$?

Exercice 16.

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. Soit un entier $N \geqslant 1$. On pose $I_N = \int_N^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$. Montrer que l'intégrale généralisée I_N converge et donner sa valeur.
3. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on considère $R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$. Établir l'encadrement

$$2e^{-\sqrt{N}} \leqslant R_N \leqslant \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} + 2e^{-\sqrt{N}}.$$

4. En déduire un équivalent de R_N quand N tend vers l'infini.

Exercice 17. Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de

a) $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b) $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

c) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme général $1/w_n$ est-elle convergente ?

Exercice 18. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive. On pose $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$, $n \geqslant 1$.

a) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}.$$

b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

c) On suppose dans cette question que $a_n = 1/\sqrt{n}$.

(i) Montrer que $\ln((1+a_1)\dots(1+a_n)) \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

(ii) En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 19. Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série divergente à termes strictement positifs et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de ses sommes partielles. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une suite $(v_n)_n$ négligeable devant $(u_n)_n$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge encore. Pour cela, on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est négligeable devant $(u_n)_n$, i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n/u_n = 0$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est divergente.

Exercice 20. Soit $f : [1,\infty[\to]0,\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel $a \geqslant 1$ tel que pour tout $x \geqslant a$, on ait $\frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$.

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

Exercice 21. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $n \geqslant 1$.

1. Préciser la nature de cette série.

Dans la suite, on se propose de donner un développement asymptotique à deux termes pour les sommes partielles $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On considère d'abord la série de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, et ses sommes partielles $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$ pour $n \geqslant 1$. On convient de poser $V_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$v_{n+1} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant v_n.$$
3. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose
$$a_n = V_{n-1} - 2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad b_n = V_n - 2\sqrt{n}.$$
4. Montrer que les suite $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers une même limite.
5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$. Vérifier que l'on a
$$U_n = 2\sqrt{n} + b_n - W_n.$$
En déduire qu'il existe un réle λ tel qu'on ait le développement asymptotique
$$U_n = 2\sqrt{n} + \lambda + \varepsilon_n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

III. Séries numériques de signe quelconque

Exercice 22.

a) Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On note S la somme de la série.

b) Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-1}.

Exercice 23. Etudier la convergence simple et absolue des séries de terme général suivant :

1) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}}$

2*) $\frac{(-1)^n \ln n}{n}$

3) $\frac{1}{(-1)^n n^2+n+1}$

4) $\frac{n^2}{(1+i)^n}$

5*) $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

6) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

7*) $(-1)^n(\sqrt{1+n}-\sqrt{n})$

8) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$

9) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

10) $\left(\frac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n$.

11) $(-1)^n \ln\frac{n+1}{n-1}$, $(n\geqslant 2)$

Dans chaque cas *, donner une majoration simple du reste d'ordre n, $|R_n|$, de la série.

Exercice 24. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}.$$

En déduire que deux séries de termes généraux équivalents ne sont pas forcément de même nature.

Exercice 25. Discuter selon les valeurs de $\alpha>0$, la convergence simple et absolue de la série de terme général

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}.$$

Exercice 26. Etudier la nature des trois séries :

$$u_n=\frac{\cos n}{n+\cos n},\quad v_n=\frac{\cos n}{n^{3/4}+\cos n},\quad w_n=\frac{\cos n}{n^{1/2}+\cos n}.$$

On pourra utiliser la règle d'Abel et utiliser des développements limités.

Exercice 27. Soit $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ une série convergente à termes réels. On pose

$$v_n=\ln(1+u_n).$$

1. Montrer que le terme v_n est bien défini à partir d'un certain rang n_0.
2. Montrer que si les $(u_n)_n$ sont tous positifs, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0}v_n$ est convergente.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant n_0}v_n$ lorsque $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
4. La conclusion du (2) reste-t-elle vraie sans l'hypothèse de signe ?

Exercice 28. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série réelle convergente. Que pensez-vous de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n^2$?

Exercice 29. On considère la série de terme général $u_n=\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{\sqrt{n}}$, où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.

1. Le critère des séries alternée peut-il s'appliquer à la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$?
2. Soit un entier $N\geqslant 1$. Montrer que pour tout entier n vérifiant $N^2+1\leqslant n\leqslant N^2+2N$, on a $E(\sqrt{n})=N$.
3. Montrer que pour tout entier $N\geqslant 1$, on a
$$|u_{N^2+1}+\ldots+u_{N^2+2N}|>1.$$
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$.

Exercice 30. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\ln n}{n}$ diverge.

Indication : on montrera que la série ne vérifie pas le critère de Cauchy en déterminant les intervalles sur lesquels $\cos\ln n\geqslant 1/2$.

Exercice 31.

1. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = -f(n) + \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$
   (a) En appliquant la formule de Taylor-Laplace, montrer l'égalité $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
   (c) En déduire que la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_n$ est convergente.
2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^\alpha}$ $(\alpha > 1/2)$.
   (a) Vérifier que f satisfait les hypothèses de la question 1.
   (b) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente (on pourra commencer par étudier $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du critère d'Abel).
   (c) En déduire que la série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 32. On se propose d'établir la relation
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt. \tag{1}$$

1. Soit un entier $n \geqslant 0$. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que l'intégrale généralisée u_n donnée par $u_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2n+2}}dt$ est convergente et calculer sa valeur.
   On considère maintenant la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}$.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 1.
3. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 4$, on a $\ln t \leqslant \sqrt{t}$.
4. En déduire que l'intégrale généralisée I définie par $I = \int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
5. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\ln t \leqslant \frac{1}{2}(t^2-1)$.
6. En déduire que pour tout $N \geqslant 0$, l'intégrale généralisée I_N définie par $I_N = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{2N+2}}dt$ est convergente et que l'on a $0 \leqslant I_N \leqslant \frac{1}{4N+2}$.
7. Montrer que pour tout entier $N \geqslant 0$, on a $\sum_{n=0}^{N} u_n = I - I_N$.
8. Établir la relation (1).