MATHS Ch 2 : Suites numériques

1) Généralités

Une suite réelle est une f $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
On note $U_n = u(n)$, $n \in \mathbb{N}$, le terme général de la suite.
Et on note aussi $u = (u_n) = (u_n)_{n \geq 0}$.

Exemple : la suite $(n^2)_{n \geq 0}$, ou $\left(\frac{1}{1+n}\right)_{n \geq 0}$

(Rq) : Certaines suites sont définies à certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$
On note alors $(U_n)_{n \geq n_0}$. (Ex)

Ex : $\left(\ln(n) + \ln(n-1)\right)_{n \geq 2}$

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

On dit que (U_n) est :

1) Majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
2) Minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
3) Bornée si majorée & à la fois minorée.

Ex
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est majorée par 1 / minorée par 0.
- $(n^2)_{n \geq 0}$ est minorée par 0 MS pas majorée
- $\left((-1)^n n^2\right)$ n'est ni majorée ni minorée.

→ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$

Contra $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, U_n > M$.

prouve on veut : Pour $U_n = (-1)^n n^2$, $n \in \mathbb{N}$

Soit $M \geq 1$, on veut $n \in \mathbb{N}$,

$(-1)^n . n^2 > M$;

par ex :

$n = 2(E(M)+1)$ alors $U_n = 4(\underbrace{E(M)+1}_{\geq M})^2 > M$

Soit $m \leq -1$, et $n = 2(E(-m)+1)+1$

alors $U_n = (-1)^n . n^2 = -(\dots) < m$.

(U_n) suite réelle : on dit que (U_n) est :

1) croissante (↗) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2) décroissante (↘) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
3) monotone si (U_n) est ↗ ou ↘.

Méthode pr monotonicité d'une suite :

Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

@ 1) $(U_n)_{n \geq 0}$, $U_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1+1} - \frac{2n+1}{n+1}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \times \left[(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)\right]$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[2n^2 + 2n + 3n + 3 - 2n^2 - 4n - n - 2\right]$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \times 1 > 0.$$

ⓐ$_2$ $U_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \geq 1$ $\quad (n+1)! = (n+1)\, n!$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad U_{n+1} - U_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2^n}{n!} \times \frac{2}{n+1} - \frac{2^n}{n!} \times 1$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{2^n}{n!}\left(\frac{1-n}{n+1}\right) \leq 0.$$

Donc $(U_n)_{n \geq 1}$ est $\searrow$.

Soit (U_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$,

- On dit que (U_n) converge vers ℓ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |U_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ ou encore $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

ⓐ $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^r} = 0$

Preuve : On veut $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \left|\frac{1}{n^r}\right| = \frac{1}{n^r} < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$, je veux trouver N : $\frac{1}{N^r} < \varepsilon$.

$$\boxed{N : \frac{1}{N^r} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < N^r}$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon^{1/r}} < N.$$

Soit donc N un entier avec $N > \varepsilon^{-\frac{1}{r}}$.

alors $\forall n \geq N : |U_n| = \frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{N^r} < \varepsilon$.

$\left(x \mapsto \frac{1}{x^r} \searrow \right)$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

On dit que (U_n) diverge vers $+\infty$ si :

$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n > M$.

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ ou $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

@ Si $a > 1$; $(a^n)_{n \geq 0}$ DV vers $+\infty$.

<u>Preuve :</u> Soit $M > 0$, et N un entier avec $N > \frac{\ln M}{\ln a}$.

Alors $\forall n \geq N : a^n \geq a^N > a^{\frac{\ln M}{\ln a}} = M$

$$a^{\frac{\ln M}{\ln a}} = e^{\frac{\ln M}{\cancel{\ln a}} \cancel{\ln a}} = M$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

• Si $a \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

car $\frac{1}{|a|^n} = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$

Propriétés : Soient (u_n) et (v_n) suites réelles avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, où $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$

Pour $c \in \mathbb{R}^*$, on a :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (c.u_n + v_n) = cl + l' = c.\lim\limits_{\square} u_n + \lim\limits_{\square} v_n$

2) $\lim\limits_{\square} (u_n . v_n) = l.l' = \lim\limits_{\square} u_n . \lim\limits_{\square} v_n$

3) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

Sauf si on obtient des formes indéterminées $(+\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \pm\infty)$

(A) ⓐ$_1$ $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ "Mettre en facteur le terme dominant"

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \frac{\cancel{n}(2 - \frac{1}{n})}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} \Rightarrow$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\lim (2 - \frac{1}{n})}{\lim (1 + \frac{1}{n})} = \frac{2 - \lim (\frac{1}{n})}{1 + \lim (\frac{1}{n})} = 2$

ⓐ$_2$ $v_n = \frac{2n-1}{n^2+1} = \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n} \times \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim \frac{1}{n} \times \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0 \times 2 = 0$.

$\boxed{3)\ n \in \mathbb{N},\ U_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n}}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$U_n = \frac{n-2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

3) Suites Particulières

3.1) Suites géométriques

Rappels : SG de raison $a \in \mathbb{R}^*$ & de premier terme $b \in \mathbb{R}$ est $(b.\,a^n)_{n \geq 0}$.

Proposition : La suite $(a^n)_{n \geq 0}$:

1) Si $a > 1$, $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
2) Si $a = 1$, $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
3) Si $a \in]-1,1[$, $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
4) Si $a < -1$, $(a^n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite

Soit alors $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la suite de terme général :

$$S_n = 1 + a + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

- Si $a = 1$: $S_n = n+1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
- Sinon $a \neq 1$ $(1+a+\ldots+a^n)(1-a) = 1 + \cancel{a} + \ldots + \cancel{a^n} - \cancel{a} - \cancel{a^2} - \ldots - \cancel{a^n} - a^{n+1}$

$$(1+a+\ldots+a^n)(1-a) = 1 - a^{n+1}.$$

$$\forall n \geq 1,\ \boxed{S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

↳ Voir démo de Σ.

Donc • Si $a \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$

• Si $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

• Si $a \leq -1$, S_n n'a pas de limite.

Pour $a = -1$; $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2}$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases} \Rightarrow (S_n)_{n \geq 0}$ est bornée.

ⓐ $U_n = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}$

Calculer $\lim (U_n)_{n \geq 0}$

$n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^{S_n} = 2^{\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - 1/2}}$

S_n de $a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2^{\frac{1}{1-1/2}} = 4$.

Sylvain ARGUILLERE

Sarguillere@gmail.com

Bureau : M2 034

Ldi
Jdi
M^{di} / V^{di}
2 DS
3 Interros
10 % bonus colles.
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

MATHS ELEMENTAIRES

→ ANALYSE

C1 : FONCTIONS RÉELLES

1) Cptts sr les Réels

1.1) Opéraᵗⁱᵒⁿˢ & Relaᵗⁱᵒⁿ d'ordre

Notaᵗⁱᵒⁿ :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

e.? pour $\sqrt{2}$

→ voir parité
↳ p
↳ q

Imjns $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow$ p est paire. $\Rightarrow$ CONTRADICᵗⁱᵒⁿ

Dc $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$ q est paire.

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- $\mathbb{R}$: ens $\forall$ nbres réels.

Addition sr $\mathbb{R}$: $+$:

Groupe
- ► Associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x+y)+z = x+(y+z)$
- ► Possède élt neutre : 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+0 = 0+x = x$
- ► chq réel possède opposé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! \, y \in \mathbb{R}, x+y = y+x = 0$

On appelle cet y l'opposé de x ; on le note $-x$.

G abélien
- ► Commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x+y = y+x$

Multiplicaᵗⁱᵒⁿ sr $\mathbb{R}$: $\times$:

- ► Associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
- ► Élémᵗ neutre : 1, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \times x = x$
- ► Commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \times y = y \times x$
- ► Chq réel non-nul possède inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists ! \, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x = 1$ (1)

soit $\frac{1}{x}$.

▶ 0 est absorbant : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \times x = x \times 0 = 0$

$\Rightarrow$ 0 n'a pas d'inverse.

Ⓔ Sᵗ $a, b \in \mathbb{R}$, tq $a = b$ alors $a^2 = ab$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\Rightarrow \cancel{(a-b)}(a+b) = b\cancel{(a-b)}$$

$$\Rightarrow a + b = b$$

|| Dès qu'on simplifie un facteur ou qu'on divise par des quantités ∮ des "lettres", vérifier qu'on ne divise par 0.

▶ Distributivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y+z) = xy + xz$

Relaᵒ d'ordre : $\leq$

Relaᵒ d'ordre
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$ (Réflexible)
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Ordre total
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ ou $y \leq x$.

Aussi Sᵗ $I \subset \mathbb{R}$; $I \subset I$; Sᵗ $I, J \subset \mathbb{R}$, tq $I \subset J, J \subset I$ alors $I = J$.

Ⓔ $I = [1, 3]$, $J = [2, 4]$ $I \not\subset J,\ J \not\subset I$.

pr $x \in \mathbb{R}$ (ex 1) 2) $2x^2 + 3x + 4 \geqslant 0$

(Aide) Ne jms introduire de variable sans préciser son ensemble.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $2x^2 + 3x + 4 \geqslant 0$

(Aide 2) Comprendre le raisonnement, a q l'on cherche à $\int^{R}$ tj info en +.

→ Soit $x \in \mathbb{R}$ Alors

$2x^2 + 3x + 4 \geqslant 0$

L'équation $2x^2 + 3x + 4 = 0$ a pr discriminant $\Delta = 3^2 - 4.4.2$

Cette équation n'a de pas de solutions réelles et $\Delta = -23$

l'expression $2x^2 + 3x + 4$ est de signe cte. $\Delta < 0$.

De plus, le coefficient de x^2 est $2 > 0$.

Donc $2x^2 + 3x + 4 \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

5) Résoudre ds $\mathbb{R}$, $\dfrac{3}{x^2+9} = \dfrac{1}{x+3}$

Brouillon $x^2 - 9 = 0 \iff x = \pm 3$

$x - 3 = 0 \iff x = 3$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

alors $\dfrac{3}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$

$\iff \dfrac{3}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \dfrac{1}{\cancel{x-3}}$

$\iff \dfrac{3}{x+3} = 1$

$\iff 3 = x + 3$

$\iff x = 0$.

(3) - Exos

Réciproquement $\frac{3}{0^2-9} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{0-3}$

6) Résoudre pr $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x+2}{2x-1}$.

Brouillons

$x-1 = 0 \iff x = 1$

$2x-1=0 \iff x = 1/2$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$,

alors $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x+2}{2x-1}$

$\iff \frac{x-3}{x-1} = \frac{x+2}{2x-1}$

$\iff \frac{x-3}{x-1} - \frac{x+2}{2x-1} = 0$

$\iff \frac{(x-3)(2x-1) - (x+2)(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = 0$ car $\frac{A}{B} = 0 \iff A=0$

$\iff x^2 - 8x + 5 = 0$

L'équation $x^2 - 8x + 5$ a pour discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$\Delta = 44 = (2\sqrt{11})^2$

$\Delta > 0$

Cette équation a des solutions réelles

$x = 4 \pm \sqrt{11}$

$x = \frac{b^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\sqrt{44}$

$\sqrt{2 \times 22}$

$\sqrt{2 \times 2 \times 11}$

$2\sqrt{11}$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}\}$ solu° de $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x+2}{2x-1}$

si et sl'si $x \in \{4-\sqrt{11} ; 4+\sqrt{11}\}$

$x =$

$a =$

④ Exos

M-11. ANAL

Ex 1

① Résoudre pr $x \in \mathbb{R}$ l'équaθ $2(x+4) = 3x - (5+x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$\Rightarrow 2(x+4) = 3x - (5+x)$

$\Rightarrow \cancel{2x} + 8 = \cancel{3x} - 5 - \cancel{x}$

$\Rightarrow 8 = -5$: faux

Donc l'équation $2(x+4) = 3x - (5+x)$ n'a pas de solution pr $x \in \mathbb{R}$.

<u>Complément</u> : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ l'ensemble des réels auquel on a ajouté 2 élmts, $+\infty$ et $-\infty$.

- On étend la relation $\leq$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty \leq x \text{ et } x \leq +\infty.$$

- On étend les lois ⊕ et ⊗ à $\overline{\mathbb{R}}$ par,
  - $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$.
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \pm \infty = \pm\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x \times \infty = \infty$
- On définit $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$

- Formes indéterminées : $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$

1.1.2. Intervalles, Voisinages

On dit que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si :

$$\boxed{\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I.}$$

$I = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 2\}$.

Soient $a \leq x \leq b$, tq $a, b \in I$ & $x \in \mathbb{R}$.

(On veut mq $-1 \leq x < 2$)

or $a \in I \Rightarrow -1 \leq a \leq x$

De plus $b \in I \Rightarrow x \leq b < 2$.

$\Rightarrow x \in I$.

- Est-ce que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un intervalle ?

I pas intervalle si :

▶ $\exists a, b \in I, \exists x \in \mathbb{R}$, non $(\underbrace{a \leq x \leq b}_{A} \Rightarrow \underbrace{x \in I}_{B})$

$[\text{non } (A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow A$ et non B.

▶ $a \leq x \leq b$ et $x \notin I$

Il faut trouver a et $b \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tq $a \leq x \leq b$ et $x \notin \mathbb{R}^*$.

$-1 \in \mathbb{R}^*$ et $1 \in \mathbb{R}^*$

or, $-1 \leq 0 \leq 1$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Donc $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Intervalle : $\forall a,b \in I ; \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$.

- $\{0\}$ est un intervalle. $\forall y \in \mathbb{R}, \{y\}$ aussi.
- $\mathbb{Q}$ $-1000 \in \mathbb{Q}$ et $1000 \in \mathbb{Q}$
  et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $-1000 \leq \sqrt{2} \leq 1000$

Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.

→ 9 types intervalles.

(Voisinages) Soit V une partie non vide de $\mathbb{R}$, On dit que V est un voisinage de :

1. de x si V contient un intervalle $\boxed{\text{ouvert}}$ I avec $x \in I$.
2. de $+\infty$ si V contient un intervalle non-majorée
3. de $-\infty$ si V contient un intervalle non-minorée.

ex
- $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$ voisinage de 0.
- $[-1 ; 1]$: $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[\subset [-1 ; 1] \Rightarrow$ voisinage de 0.

1.2. Généralités sur les fonctions

1.2.1. Def & Préléminaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$, une fonction réelle sur I est une règle q associe à tout élément x de I un uniq réel $f(x) = y$.

On dit que x est un antécédent de x par f, et que y est l'image de x par f.

$P = \cup I$
$E = P.I$

• On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles sur I

REDACTION

Pr introduire une f :

• Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

• Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad (x \mapsto f(x))$

ⓔ

▸ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ▸ $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

▸ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

• L'ensemble $f(I) = \{ f(x), x \in I \}$.

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, f(x) = y \}$.

//////

ⓔ $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

a pour image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

Souvent, $x \mapsto f(x)$ est donné par une formule sans préciser le domaine de définition : le "I".

Dans ce cas, on considère $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pr lesquels $f(x)$ a un sens.

On dit q $\mathcal{D}_f$ est le Domaine de définition de f.

/////

ⓔ Soit $f(x) = \sqrt{x}$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$

D Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f, \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

On définit les f_s : * $f+g \in \widetilde{\mathcal{F}}(I,\mathbb{R})$ par

$\forall x\ I,\ (f+g)x = g(x)$

* $fg \in \widetilde{\mathcal{F}}(I,\mathbb{R})$ par $(fg)(x)$

* $(\lambda f)x \in \widetilde{\mathcal{F}}(I,\mathbb{R})$ par $(\lambda f)x = \lambda f(x)$.

1.2.2. Pptés f réelles

D Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$

On dit que,

- f est majorée sur I si :

  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.

- f est minorée si :

  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x)$.

- f est bornée si elle est à la fois majorée & minorée.

13 Écrire les proposit°s suivantes & leur négation à l'aide

1.2.3. des quantificateurs :

1) → f est majorée par $1 \iff \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant 1$.

Négation f n'est pas majorée par $1 \iff \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > 1$.

2) → f est constante à $\mathbb{R} \iff \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$

~~Négation~~ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

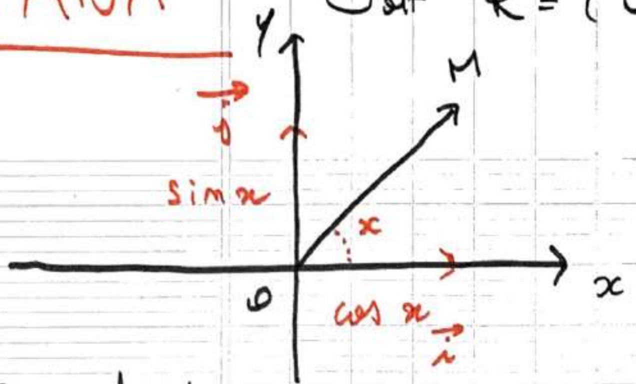
Négation $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$.

3) → f s'annule à $\mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

M-ANA

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$: RON direct



On considère $C(0,1)$ & pr $x \in \mathbb{R}$, on définit $M(x)$ le point du cercle | $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}(x)) = x$ en radian

On définit cos x et sin x de sorte que $\overrightarrow{OM}(x) = (\cos x, \sin x)$.

$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ d'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leq 1$.

▸ $\forall x \in \mathbb{R}, \; -1 \leq \begin{matrix}\cos x \\ \& \\ \sin x\end{matrix} \leq 1$.

$\Rightarrow$ Cos & Sin st bornées sr $\mathbb{R}$.

$\left| \begin{array}{l} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{array} \right.$

▸ f est paire si $f(-x) = f(x)$
▸ f est impaire si $f(-x) = -f(x)$

(@ x : impaire ; $\frac{1}{x}$ impaire
x^2 : paire)

$\left| \begin{array}{l} \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \end{array} \right.$

On dit que f est T-périodique si $\forall x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$

f est périodiq si $\exists\, T > 0$, $f \to$ T-périodique.

Soit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ d'où $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Finalement : $x + \pi \in D_{\tan}$.

▸ $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)}$

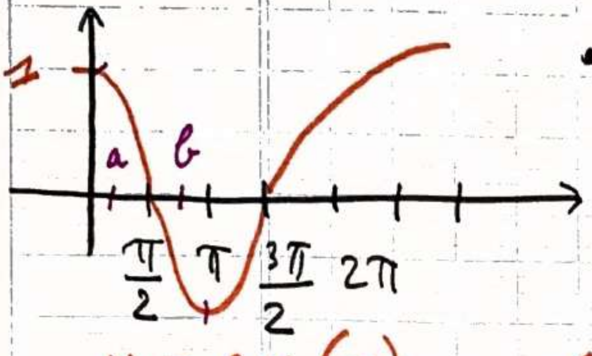
▸ $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan(x)$.

M-ANA

→ $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

→ tan est π-périodiq : π-per.

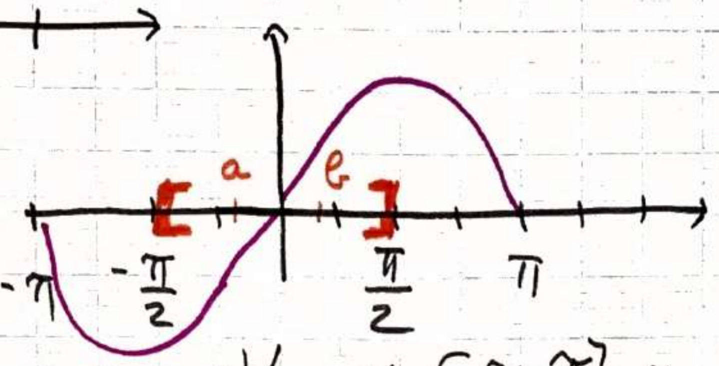
$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$



$y = \cos(x)$

• $\forall a < b$ ds $[0, \pi]$, $\cos a > \cos b$

→ cos est strict^t décroissante sur $[0, \pi]$



• $\forall a < b$ $[-\pi, \pi]$, $\sin a < \sin b$.

→ sin est strict croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Soit f une f réelle et $I \subset D_f$ un intervalle. On dit que f est :

1) • croissante si : $\forall x \leq y \in I$, $f(x) \leq f(y)$.
 • strict^t crste si : $\forall x < y \in I$, $f(x) < f(y)$.

2) • décroissante si : $\forall x \leq y \in I$, $f(x) \geq f(y)$.
 • strict^t dcrste si : $\forall x \leq y \in I$, $f(x) > f(y)$.

3) • monotone si elle est croissante ou décroissante.
 • Strict^t monotone si elle est strict^t croiste ou strict^t déc.

$\boxed{\text{DEMO}}$ Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle
à la fois ↗ et ↘.

alors $\forall x \leq y$, $f(x) \leq f(y) \leq f(x)$

Dc $\forall x \leq y \in I$, $f(x) = f(y)$

Dc f est cte.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$
$x \to a$

$\forall x \leq y \in I$, $f(x) = a = f(y)$
dc $f(x) \leq f(y)$ et $f(x) \geq f(y)$

$\Rightarrow f$ est $\nearrow$ et $\searrow$: cad f cte.

Ex : • $x \mapsto x^2$ est $\begin{cases} \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \searrow \text{ sur } \mathbb{R}^- \end{cases}$ MAIS PAS MONOTONE sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$

Rq : Soient f et g $\nearrow$ et h $\searrow$, f réelles.

Alors :
- $f + g$ est $\nearrow$
- $-f$ est $\searrow$
- $x \mapsto f(g(x))$ est $\nearrow$
- $x \mapsto f(h(x))$ et $x \mapsto h(f(x))$ sont $\searrow$.
- $x \mapsto h(k(x))$ est $\nearrow$ pr k $\searrow$.

DÉMO ÀF

1.2.3. TH de la bijection

TH : Soit $f : I \to J$
Alors les 3 propositions st $\Leftrightarrow$:

- $\exists f^{-1} : J \to I$ | $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$; $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$
- $\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$ (unique solution)
- f est bijective.

TH (de la bijection) :

Soit f une f réelle, et $I \subset D_f$ intervalle.

Si f est strictement monotone sur I, alors $f : I \to f(I)$ est bijective, et sa réciproque f^{-1} $f(I) \to I$ est de m̂ monotonie stricte.

Proposi° : Soit $f : I \to f(I)$ bijective & impaire

Alors $f^{-1} : f(I)$ est aussi impaire.

En effet pr $y \in f(I)$, $x = f^{-1}(y)$ d'où $f(x) = y$.

Alors $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x))$.

$f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$.

$\Rightarrow f^{-1}$ est impaire.

1.3. Fonctions usuelles

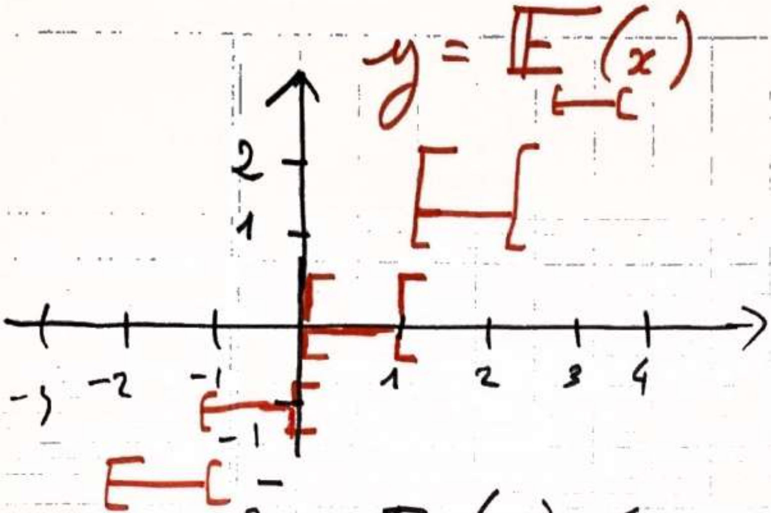
1.3.1 La fonction partie entière

arrondi en-dessous

Pr $x \in \mathbb{R}$ la partie entière de x est le + gd entier relatif qui soit $\leqslant x$. On la note $\mathbb{E}(x)$.

En conséquence $\begin{cases} \mathbb{E}(x) \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{E}(x) \leqslant x < \mathbb{E}(x) + 1 \end{cases}$.

@ $\mathbb{E}(1{,}12) = 1$; $\mathbb{E}(-0{,}1) = -1$.



$$\mathbb{E}(x) \leqslant x < \mathbb{E}(x)+1 \leqslant x+1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \mathbb{E}(nx) \leqslant nx \leqslant \mathbb{E}(nx)+1 \leqslant nx+1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{\mathbb{E}(nx)}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\mathbb{E}(nx)}{n} + \frac{1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant x - \underbrace{\frac{\mathbb{E}(nx)}{n}}_{\in \mathbb{Q}} \leqslant \frac{1}{n}$$

$\frac{-\mathbb{E}(nx))}{n}$

$$\boxed{\underline{\text{TH}} : \forall a < b \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{Q}, r \in]a,b[}$$

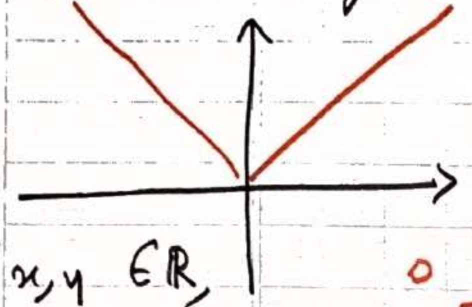
On dit $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$.

→ indication preuve ; prendre $r = \dfrac{\mathbb{E}\left(\frac{n(a+b)}{2}\right)}{n}$

pour "n assez grand"

1.3.3. La fonction valeur absolue

Déf La valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ est notée $|x|$ et est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.



PAIRE : $|x| = |-x|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

- $|xy| = |x|.|y|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ Inégalité triangulaire

Exemple 5 :

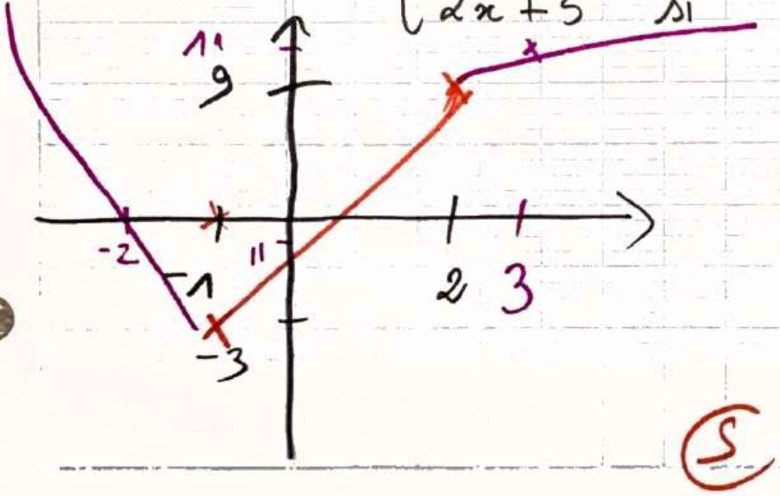
$f(x) = 3|x+1| - |x-2|$

① Expression de f n'utilisant pas la valeur absolue avec des sous cas.
② Tracer le graphe de f
Résoudre ds $\mathbb{R}$: (a) $3|x+1| - |x-2| = 5$
dans $\mathbb{R}$ (b) $3|x+1| \geq |x-2| + 5$

On exprime les valeurs des compo $f(x)$ f $x \in \mathbb{R}$ ds tableau.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	ϕ $x+1$		$x+1$
$\lvert x-2 \rvert$	$-x+2$	$-x+2$	ϕ	$x-2$
$f(x)$	$-3x-3+x-2$ $-2x-5$	$4x+1$		$2x+5$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } x < -1 \\ 4x+1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 2x+5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$



3) ⓐ On veut l'ensemble S des $x \in \mathbb{R}$ |
$f(x) = 3|x+1| - |x-2| = 5$

$$f(x) = 5 \iff \begin{cases} -2x - 5 = 5 \text{ et } x \leq -1 \\ \text{ou} \\ 4x + 1 = 5 \text{ et } -1 \leq x \leq 2 \\ \text{ou} \\ 2x + 5 = 5 \text{ et } x \geq 2. \end{cases}$$

$$f(x) = 5 \iff \begin{cases} x = -5 \text{ et } x \leq -1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ et } -1 \leq x \leq 2 \\ \text{ou} \\ x = 0 \text{ et } x \geq 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \Longrightarrow S = \{-5, 1\}.$$

$$f(x) \geq 5 \iff \begin{cases} x \leq -5 \text{ et } x \leq -1 \\ \text{ou} \\ x \geq 1 \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \text{ou} \\ x \geq 0 \text{ et } x \geq 2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow S =]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[.$

ⓑ

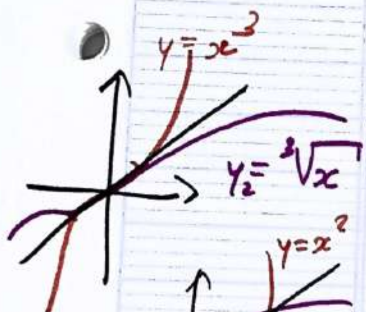
3.3. Fonctions puissances à exposant rationnel

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$.

- pour $-n$, $n \in \mathbb{N}^*$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

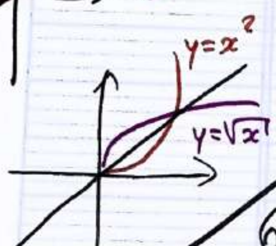
- $n \in \mathbb{N}^*$: – Si n est impair, f_n S^{ct} $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}$

par le TH bijection : f_n admet une réciproque $f_{\frac{1}{n}}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$



– Si n est pair, f_n $\nearrow$ sur $\underline{\underline{\mathbb{R}_+}}$ et $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

par le TH bij$^{\circ}$: $f_{\frac{1}{n}}$ admet réciproq $f_{\frac{1}{n}}$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$



- Pour $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ et $x > 0$,

On définit : $f_r(x) = f_{\frac{1}{q}}\left(f_p(x)\right) = f_p\left(f_{\frac{1}{q}}(x)\right)$

$$f_r(x) = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{p/q}$$

<u>Si $x < 0$:</u> $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} < 0$

$x^{2/6} = \sqrt[6]{x^2} > 0$.

Exemple 6 : Résoudre ds $\mathbb{R}$ après avoir donné leur domaine de validité.

1) $x - \sqrt{x^2-1} = -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $x - \sqrt{x^2-1}$ est valide lorsque

$x^2 - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$
$\Leftrightarrow |x| \geq 1.$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \text{ou} \\ x \geq 1. \end{cases}$

Alors $x - \sqrt{x^2-1} = -1$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2-1}$

$\cancel{\Leftrightarrow} \Rightarrow (x+1)^2 = x^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 1$

$\Rightarrow x = -1.$

Réciproquement : $-1 \leq -1$ et $-1 - \sqrt{(-1)^2 - 1} = -1 - 0 = -1.$

Donc les solutions de $x - \sqrt{x^2-1}$ st réduits à $\{-1\}$.

2) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x} = 2$, Soit $x \in \mathbb{R}_+$;

Soit $x \geq 0$; $\sqrt{x^2} - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 2$

$\Rightarrow x - 2 = \sqrt{x}$

$\Rightarrow (x-2)^2 = x$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$

Discriminant de cet équ° : $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0.$

Les solutions : $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ ou $x = \frac{5+3}{2} = 4.$

Réciproquement : • $1 \geq 0$, est $\sqrt{(-1)^2} - \sqrt{1} - 2 = 0 \neq 2$

Donc 1 n'est pas solu°.

• $4 \geq 0$, est $\sqrt{4^2} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2$

Donc 4 est solu°

La seule sol° de l'équ° est $x = 4$.

$x^{2/3} - x^{1/3} = 2$, déf pr $x > 0$

Soit $x > 0$, $x^{2/3} - x^{1/3} = 2 \iff \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - x^{\frac{1}{3}} = 2$.

Posons $u = x^{1/3} \geq 0$: alors x solu°s $\iff$ u solu° de
$$u^2 - u = 2.$$
$$u^2 - u - 2 = 0$$

Le discriminant de cette équa° vaut : $\Delta = 1 + 8 = 3^2 > 0$

D'où $u = \frac{1-3}{2} = -1$ ou $u = \frac{1+3}{2} = 2$.

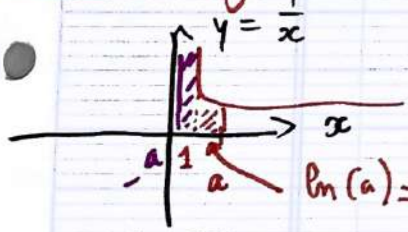
Comme $u \geq 0$, $u \neq -1$.

Donc x solution $\Rightarrow u = 2$
$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2 \Rightarrow x = 2 = 8$

Réciproq^t, $8 > 0$ et $(8)^{2/3} - (8)^{1/3} = 4 - 2 = 2$

Dc $x = 8$ est l'unique solu°.

3.1. Log & exp



$\ln(a) = -\text{Aire}(H_a)$ si $a \leq 1$.

$\ln(a) = \text{Aire}(H_a)$ si $a \geq 1$.

Déf : pour $a > 0$, on définit $\boxed{\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x}}$

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(a) < 0$ si $0 < a < 1$
- $\ln(a) > 0$ si $a > 1$
- $\ln$ est St^t $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Pptés algébriqs : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ r \in \mathbb{Q}^*$

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln 1/x = -\ln x$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln x^r = r \cdot \ln x$

PREUVE : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$

f dérivable de dérivée :

$$f'(x) = y \cdot \ln'(xy) - \ln'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Donc f est constante égale à $f(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y)$

$f(1) = 0$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(xy) = \ln x + \ln y.$

- $x > 0,\ \ln(1) = 0 = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}.$

Exemple 7. 1) $A = 4\ln 2 - \ln 3 + \ln 6$

$A = 4\ln 2 - \ln 3 + \ln(2 \times 3)$

$A = 4\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 + \ln 3$

$A = 5\ln 2$

2) $B = \ln(4 - 2\sqrt{3}) + \ln(4 + 2\sqrt{3})$

$B = \ln[(4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})]$

$B = \ln[16 - 4 \times 3] = \ln 4 = 2\ln 2$

Proposition - Définition

- Comme ln est $S^t \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'image $\mathbb{R}$.
Sa réciproque est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs ds $\mathbb{R}_+^*$ notée
$$\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto \exp(x)$$
appelée fonction exponentielle.

→ elle est $S^t \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

On note $e = \exp(1)$, de sorte que $\ln(e) = 1$.

Rq : $\forall r \in \mathbb{Q}^*$, $\exp(r) = e^r$

En effet, $\ln(e^r) = r \cdot \ln(e) = r$
$\Rightarrow \exp(\ln e^r) = \exp(r) = e^r$

- Pr $x \in \mathbb{R}$, on définit alors $e^x = \exp(x)$.

Ppté's : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$,

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \ ; \ e^{-x} = \frac{1}{e^x} \ ; \ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \ ; \ (e^x)^r = e^{rx}$$

Preuve : $x, y \in \mathbb{R}$, $\ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(e^x) + \ln(e^y) = \ln(e^x e^y)$

Exemple 8 :

1) $\ln(4x) - 3\ln x = \ln 2$ → valide sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x > 0$, $\ln(4x) - 3\ln x = \ln 2$
$\iff \ln(x) + 2\ln 2 - \ln(x^3) = \ln 2$
$\iff \ln(x) - 3\ln(x) = -\ln 2$
$\iff +2\ln(x) = +\ln 2$
$\iff \ln(x) = \frac{1}{2}\ln 2$
$\iff x = e^{\frac{1}{2}\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{\ln 2}} = \sqrt{2}$.

La solution est $\sqrt{2}$.

S

2) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$

Valide pour $x > 1$.

Soit $x > 1$, $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$

$\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x-1)] = \ln 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \underset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x = 2.$

3) $e^x - 2x.e^x = 0$

Valide pour $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$: $e^x - 2x.e^x = 0$

$\Leftrightarrow (1-2x)e^x = 0$

$e^x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

4) $e^{-2x} - 3e^{-x} + 2 = 0$

Valide pour $\mathbb{R}$,

Soit $x \in \mathbb{R}$: $e^{-2x} - 3e^{-x} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{-x})^2 - 3e^{-x} + 2 = 0$

$u = e^{-x}$ solution de $u^2 - 3u + 2 = 0$.

Equa° de discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$.

Dc u est solution $\Leftrightarrow u = \frac{3-1}{2}$ ou $u = \frac{3+1}{2}$

Les deux st >0. $u = 1$ ou $x = 2$

Dc x solu° $\Leftrightarrow e^{-x} = 1$ ou $e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\ln 2$.

Finalement $x = 0$ et $x = -\ln 2$ sont les solutions.

M-ANA

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = |x+1| + |x-1| - 4}$$

① Mq f est paire
② Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue
③ Tracer le graphe de f.
④ Résoudre
• $|x+1|+|x-1|=4$
et $|x+1|+|x-1|\leq 4$

① Mq f est paire signifie $f(x) = f(-x)$.

$f(-x') = |-x+1| + |-x-1| - 4$

$f(-x') = |-(x-1)| + |-(x+1)| - 4$

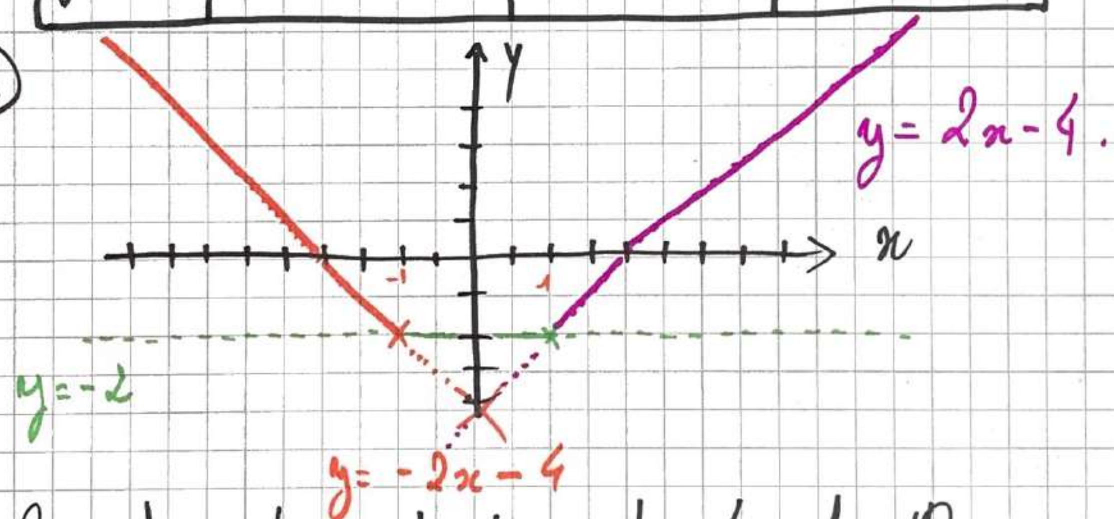
$f(-x') = |x-1| + |x+1| - 4 = f(x)$

$\Rightarrow$ Dc f est paire.

② On exprime chaque terme de f.

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$f(x)$	$-2x+0-4$	-2	$2x-4$

③



④ Résoudre $|x+1|+|x-1| = 4$ ds $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |x+1| + |x-1| = 4 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4=0 & \text{si } x \leq -1 \\ \text{ou} \\ -2=0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \\ \text{ou} \\ 2x-4=0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ et } x \leq -1 \\ \text{ou} \\ x=2 \text{ et } x \geq 1. \end{cases}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Ex 6 1) $e^{-2\ln 5} - e^{-3\ln 5} = e^{\ln(5)^{-2}} - e^{\ln(5)^{-3}}$

$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

• $= 5^{-2} - 5^{-3}$

• $= \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5^3} = \frac{4}{125}$

2) $\ln(3-2\sqrt{2}) + \ln(3+2\sqrt{2}) = \ln[(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})]$

• $= \ln(9-8) = \ln(1) = 0.$

Ex 7

① $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

Valide pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x > 0$: $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(\sqrt{3x})$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x+3}{2}}_{\geqslant 0} = \underbrace{\sqrt{3x}}_{\geqslant 0}.$

car $\frac{x+3}{2}$ et $\sqrt{3x} \geqslant 0$ $\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{4} = 3x$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 12x$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3.$ Donc x sol° $\Leftrightarrow x = 3.$

2) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = -\ln 2$ $\quad x \neq 1.$

Valide pour : $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$

c.à.d pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0		
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $\begin{cases} x < -1 \\ \text{ou} \\ x > 1 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = 2^{-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x - 1$

$\Leftrightarrow x = -3$

Comme l'expression est valide pour -3. $(-3 < -1)$

La solu° est $x = -3$.

3) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = -\ln 2$

⚠ En fait $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{|x+1|}{|x-1|}\right) = \ln(|x+1|) - \ln(|x-1|)$

3.5. Puissances Irrationnelles

Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \exp(a \ln x)$

$x \longmapsto e^{a \ln x} = x^a$.

La fonction puissance a.

Rq : Si $a \in \mathbb{Q}^*$, on a bien $\forall x > 0$, $\exp(a \ln x) = x^a$

- $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective.

et $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Ppté • $\forall x, y > 0$; $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$:

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b \qquad (xy)^a = x^a \cdot y^a$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (x^a)^b = x^{ab}.$$

On a aussi $\ln(x^a) = a \ln(x)$.

(On ne le savait que pr $a \in \mathbb{Q}^*$).

⚠ Ce n'est qu'une notaᵒ, pr l'écriture $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

Il faut la comprendre comme $f(x) = \exp(v(x) \times \ln u(x))$

(Ex6) 4) Domaine de validité & simplification de

$$(e^x)^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = (e^x)^{\ln\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)}$$

Valide pour : $x > 0$

$$(e^x)^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = (e^x)^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{x \times \frac{1}{x} \ln x} = x.$$

(Ex 7) 6) Domaine de validité & résoudre :

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

$$\hookrightarrow \cancel{e}\, e^{6x.\ln 8} - 3e^{3x\ln 8} - 4 = 0.$$

Valide pr $x \in \mathbb{R}$,

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

$$\left(8^{3x}\right)^2 - 3 \times \left(8^{3x}\right) - 4 = 0$$

Donc x solution $\Leftrightarrow u = 8^{3x} > 0$ solu° de $u^2 - 3u - 4 = 0$

Le discriminant de $u^2 - 3u - 4 = 0$ est $\Delta = 9 + 16 = 25$

Donc les solutions sont :

$$u_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad u_2 = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Finalement x solution $\Leftrightarrow 8^{3x} = 4$ ou $\cancel{8^{3x} = -1}$ impossible

$\Leftrightarrow 8^{3x} = 4$

$\Leftrightarrow e^{3x\ln 8} = 4$

$\Leftrightarrow 3x \ln 8 = \ln 4 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{9}}$

5

M-ANA

3.6. Fonctions circulaires réciproques

$\forall a, b \in \mathbb{R}$,

- $\sin a = \sin b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$
- $\cos a = \cos b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \; a = b \pm 2k\pi$.
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos a - 1$.
- $\sin 2a = 2 \sin a . \cos a$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \; ; \; \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

- $\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est $\mathcal{S}^t \nearrow$, bijective. $\mathcal{D}1$

Elle admet dc une réciproq $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

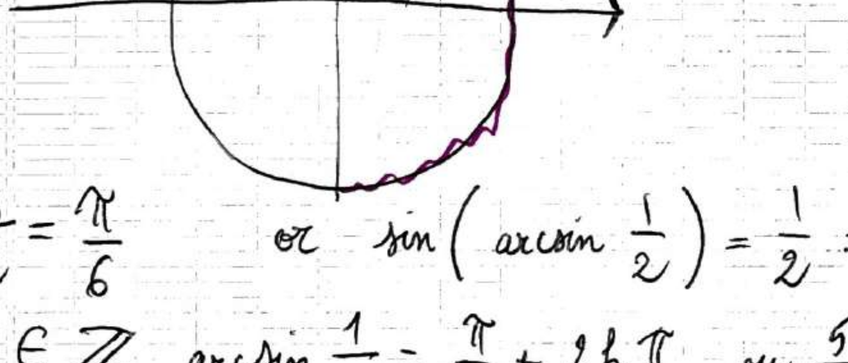
$x \mapsto \arcsin(x)$

$\Rightarrow$ arcsin est $\mathcal{S}^t \nearrow$ et impaire. (*)

(*)

- $y = \arcsin(x)$: y est l'unique angle ds $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tq $\sin y = x$.

$x \in [-1, 1]$



@ $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ or $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$.

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

et $\arcsin \frac{1}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

(*) En particulier : • $\forall x \in [-1,1]$; $\sin(\arcsin(x)) = x$
• $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin(\sin x) = x$

$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ car $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

car $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right)\right) = ?\ -\frac{\pi}{3}$.

$\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left((3 \times 2\pi) + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$.

$\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Posons $x = \arcsin\left(\sin \frac{22\pi}{3}\right)$ alors $\sin x = \sin \frac{22\pi}{3}$

alors $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x = \begin{cases} 6\pi + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi & \to \pi + \frac{\pi}{3} \\ -6\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

(avec $k=3$)

Par exemple $x = -\pi/3$ convient.

Comme $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$.

· ~~Cos est~~ $\cos [0, \pi] \to [-1, 1]$ est $\mathcal{S}^t \searrow$, bijecti

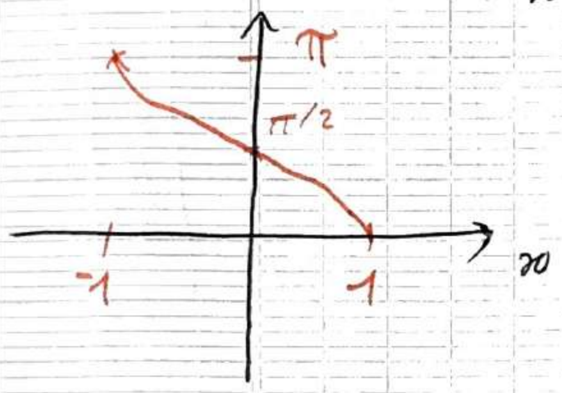
Elle admet de réciproque appelée arccosinus :

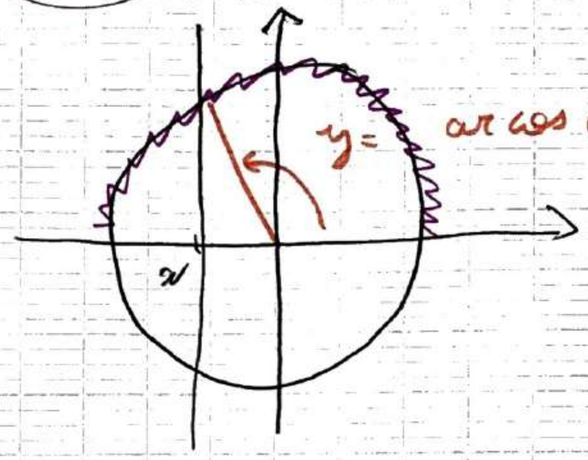
$\boxed{\arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

$x \longrightarrow \arccos(x)$. $\arccos\ \mathcal{S}^t \searrow$.

En particulier : $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$

$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$.





$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

g2

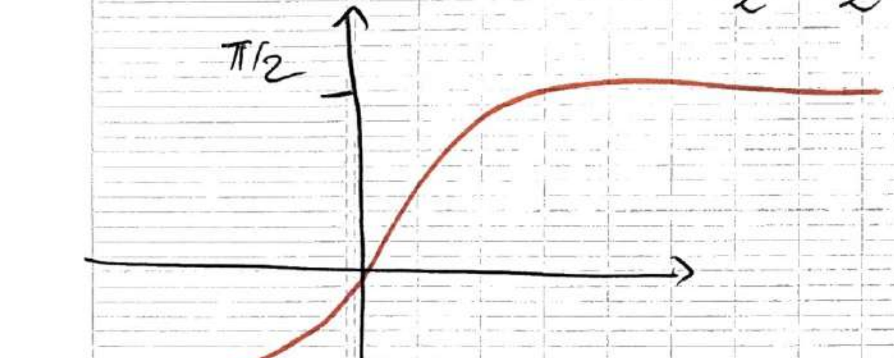
· $\tan\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{S}^t \nearrow$ bijective

Elle admet de réciproq appelé arctangente :

$\arctan = \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\arctan\ \mathcal{S}^t \nearrow$.

En particulier · $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tan(\arctan x) = x$

· $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\arctan(\tan x) = x$.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Proposition : $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)}$

Preuve Soit $x \in [-1,1]$; $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$

dc $\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$.

dc $|\sin(\arccos x)| = \sqrt{1-x^2}$

or $\arccos x \in [0,\pi]$ dc $\sin(\arccos x) \geq 0$.

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = |\sin(\arccos x)|$

$\sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)$.

$\cos(\underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}}) = -\cos(-\frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3})$

$\cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos(x)$

De même, $|\cos \arcsin x| = \sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$.

Inversion

Or $\arcsin x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et cos est $\geqslant 0$ sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}}$.

ⓔ Domaine de validité & résoudre $\arccos x = \arcsin(1-x)$

$\arccos x$ déf sur $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $\arcsin(1-x)$ déf sur

$-1 \leqslant 1-x \leqslant 1$

$0 \leqslant x \leqslant 2$.

$\Rightarrow$ Valide sur $x \in [0,1]$

Alors $x \in [0,1]$ $\arccos x = \arcsin(1-x)$

$$\Rightarrow \cos(\arccos x) = \cos(\arcsin(1-x))$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{1-(1+x^2-2x)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{-x^2+2x}$$

$$\Rightarrow x^2 = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - x) = 0 = 2x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Donc $\arccos x = \arcsin(1-x) \Rightarrow x \in [0,1]$.

Réciproquement

Pour $x = 0$: $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = \arcsin(1-0)$

Donc 0 est solution.

Pour $x = 1$: $\arccos(1) = 0 = \arcsin(0) = \arcsin(1-1)$

Donc 1 est solution.

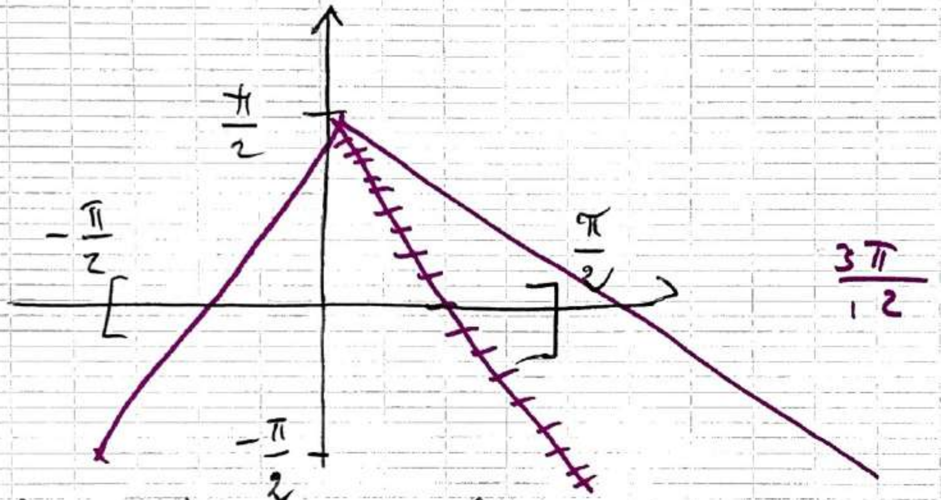
Ex 10 Simplifier expre° & tracer graphe de f

Ex 11 $f(x) = \arcsin(\sin x)$

$\mathcal{D}_f = ?$ $f(x)$ défini si $\sin x \in [-1,1]$

$\Rightarrow f(x)$ défini $\forall x \in \mathbb{R}$.

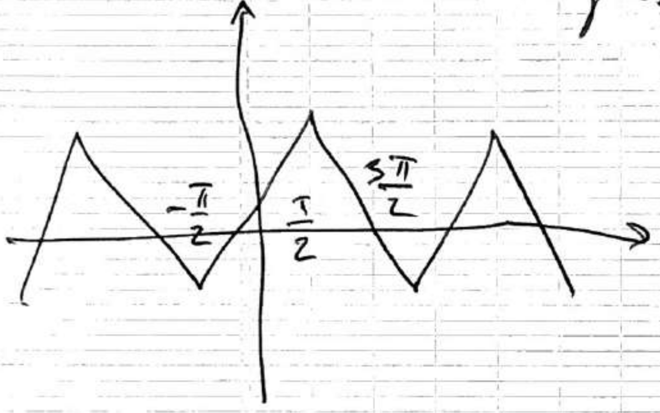
y_3



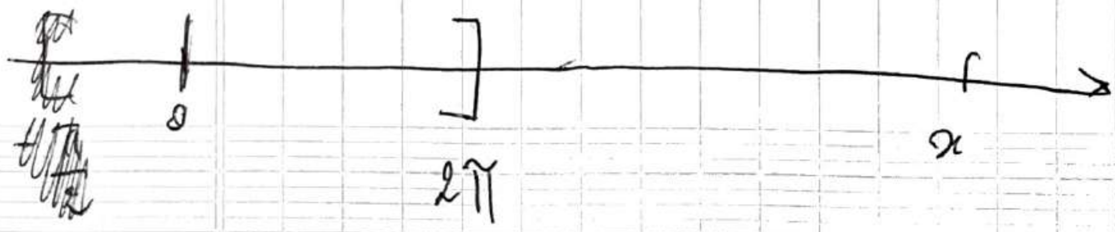
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \arcsin(\sin(x+2\pi))$

$= \arcsin(\sin x)$

$= f(x)$



Soit $x \in \mathbb{R}$,



$\forall x$

"Je connais f sur $[0, 2\pi]$, et $f(x+2\pi) = f(x)$

pr calculer $f(x)$: Je trouve $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 \leq x - 2k\pi < 2\pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi < \frac{3\pi}{2}\right)$$

Si on a un tel k : $2k\pi \leq x < 2\pi(k+1)$.

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{x}{2\pi} < k+1.$$

$$\Leftrightarrow k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

Finalement, $f(x) = f\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$.

Si $2k\pi \leq x + \frac{\pi}{2} < (k+1)2\pi$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k+1$$

$$\Leftrightarrow k = E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right).$$

Finalement $f(x) = f\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)\right)$.

APARTE

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right) & \text{si } \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - (x - 2\pi E) & \text{si } (\ldots) \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Ex 10

$\rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ 7

M-ANA

① p23 Etudier CV suites, de terme général :

1) $U_n = \dfrac{n^2+1}{2n^3+1}$; pr $\forall n \in \mathbb{N}$, assez grand.

$$U_n = \frac{n^2+1}{2n^3+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^3}} \times \frac{1}{n}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^3}} = 0 \times \dfrac{1}{2} = 0$.

4) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n$, pr $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \sqrt{n^2+n} - n = \sqrt{n^2+n} - n \times \left(\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$U_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ or $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{1+0} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

6) $\boxed{U_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \quad \text{Pr } \forall n \in \mathbb{N}^*,}$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

$$U_n = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{D'où } \lim_{n\to+\infty} U_n = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1.$$

8) $U_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, pr $\forall n \in \mathbb{N},$

$$U_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = 3\,\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \; 3 \times \frac{1+0}{1+0} = 3$$

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 1 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{si } a\in\,]-1,1[\end{cases}$$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$

5. $U_n = \ln(n^2+1) - \ln n \quad \forall n \in \mathbb{N},$

$$U_n = \ln\left(n^2 \times \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln n = \ln n^2 + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \ln n = 2\ln n - \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$U_n = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{D'où } \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty.$$

(11) $U_n = \ldots = e$

$e^n - 1$

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$U_n = \frac{e^{2n}+1-e^n(e^n-1)}{e^n-1} = \frac{e^{2n}+1-e^{2n}+e^n}{e^n-1}$$

$$U_n = \frac{1+e^n}{-1+e^n} = \frac{e^n}{e^n} \times \frac{1+\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e^n}}$$ D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1+0}{1-0} = 1$

(12) $$U_n = \frac{3^n+\pi^n}{2^{2n}} = \frac{3^n+\pi^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$ h $\forall n \in \mathbb{N}^*$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0+0 = 0$ $\rightarrow \frac{3}{4}, \frac{\pi}{4} \in]-1, 1[$

$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$

(9) $$U_n = (-2)^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{(-2)^n}{3^n}$$ h $n \in \mathbb{N}.$

$U_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ si $a \in]-1, 1[.$

3.2. Suites de référence, Suites équivalentes

Soit (U_n) & (V_n) 2 suites réelles tq (V_n) ne s'annule pas à certain rang apcr.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, V_n \neq 0.$$

(U_n) & (V_n) st équivalentes : $U_n \underset{+\infty}{\sim}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$

@ $n^2+n+1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$; $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

⚠ $\frac{1}{n^2} \cancel{\underset{+\infty}{\sim}} \frac{1}{n}$; $1 + \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Propriétés : Soient $(U_n), (V_n), (U'_n), (V'_n)$

* $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ et $U'_n \underset{+\infty}{\sim} V'_n$.

1) $U_n \times U'_n \underset{+\infty}{\sim} V_n \times V'_n$

2) $\frac{U_n}{U'_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{V_n}{V'_n}$

3) $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell}$

Equivalents Usuels : Soit (U_n) de $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

- $\sin(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $e^{U_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $\ln(1+U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
- $\tan U_n \underset{+\infty}{\sim} U_n$.
- $1 - \cos(U_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{U_n^2}{2}$
- $(1+U_n)^{\alpha} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha . U_n$

@ $\boxed{\forall \alpha > 0.}$

Exemple 5 : Calcul lim de :

1) $U_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin \frac{1}{n}}$ comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

D'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1/n}{1/n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

3) $U_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/\ln n} = \exp\left(\dfrac{\ln \frac{1}{n}}{\ln n}\right) = \exp\left(-\dfrac{\ln n}{\ln n}\right) = e^{-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$.

TH Croissance comparée : $\forall\, a>1$ et $r>0$,

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^r} = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^r}{a^n} = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0}$

$U_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{1}{n} \times \ln \dfrac{1}{n}\right) = \exp\left(-\dfrac{\ln n}{n}\right)$

$\boxed{a^b = \exp(b.\ln(a))}$

or $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \exp(0) = 1$.

ON N'AJOUTE PAS & ON NE SOUSTRAIT PAS $\sim$ équivalents

4. Théorèmes de convergence ou de divergence

4.1. TH encadrement

TH Passage à la limite ds les inégalités

Soit (U_n) & (V_n) 2 suites réelles tq $U_n \leq V_n$ apcr.

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ U_n \leq V_n$.

~~Alors~~ :
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.
- Si (U_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ & (V_n) CV vers $\ell' \in \mathbb{R}$.
Alors $\ell \leq \ell'$.

@ Calcul lim de $U_n = \dfrac{n}{1+\sin^2 n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$1 + \sin^2 n \leq 2$ donc $\dfrac{n}{1+\sin^2 n} \geq \dfrac{n}{2}$.

Comme $\dfrac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

TH Soit (U_n) & (V_n) tq $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ & $|U_n| \leq V_n$ apcr

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

@ Calcul lim de (U_n) tq $U_n = \dfrac{\sin n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n| = \dfrac{|\sin n|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

$\boxed{\text{TH} \quad \lim V_n = 0 \ \& \ |U_n| \leq V_n \text{ (apcr)} \Rightarrow \lim U_n = 0}$

ⓔ $U_n = \frac{\sin n}{n}$; $\forall n \geq 1$; $|U_n| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ dc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

DM : TH $\forall n \in \mathbb{N}$,

On vt mq : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |U_n - 0| \leq \varepsilon}$

On sait que : • $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leq V_n$

• $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|V_n| \leq \varepsilon$. Déf° de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$: soit $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|V_n| \leq \varepsilon$.

Alors $\forall n \geq N$, $|U_n| \leq V_n \leq |V_n| \leq \varepsilon$.

D'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

TH ENCADREMENT : Soient (U_n), (V_n), (W_n)

• $\underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0}_{\text{apcr}}$; $V_n \leq U_n \leq W_n$.

• (V_n) et (W_n) ont m̂s limites $\ell \in \mathbb{R}$] (H)

• $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$] (C)

Preuve : DM : $\forall n \geq n_0$, on a :

$$|U_n - \ell| = |U_n - V_n + V_n - \ell|$$

$$|U_n - V_n + V_n - \ell| \leq |U_n - V_n| + |V_n - \ell|$$

$\leq |U_n - V_n| + |V_n - \ell|$

$= U_n - V_n + |V_n - \ell| \leq W_n - V_n + |V_n - \ell|$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} (W_n - V_n + |V_n - \ell|) = \ell - \ell = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - \ell| = 0$

(10) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

Ex 2

1,3,4, 6,8, 11, 12

① $U_n = \sqrt[n]{3 - \sin^2 n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq 3 - \sin^2 n^2 \leq 4$

Comme la $\sqrt[n]{\cdot}$ est ↗,

On a $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{3 - \sin n^2} \leq \sqrt[n]{4}$.

or $\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$.

et $\sqrt[n]{4} = e^{\frac{\ln 4}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$.

Par le TH encadrement, on a dc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3 - \sin n^2} = 1$

③ $U_n = n.\sin + n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\underbrace{-n + n^2}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty} \leq n.\sin n + n^2 \leq n^2 + n.$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\sin + n^2 = +\infty$

$U_n = \cos n \, . \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

4)

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Pr $n \in \mathbb{N}$, $|U_n| = |\cos n| . |\sin \frac{1}{\sqrt{n}}| \leq 1 . \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

or $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Dc $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

6) $U_n = \frac{e^{-n . \cos^2 n}}{n+1}$, $\forall n > -1$.

$-n . \cos^2 n \leq 0$

→ Donc $e^{-n . \cos^2 n} \leq 1$.

D'où $|U_n| = U_n = \frac{e^{-n . \cos^2 n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

$$1 \geq -\cos n \geq -1$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 1-\frac{\cos n}{\sqrt{n}} \geq -1+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

comme $1+\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1-0 = \underline{1}$

11) $U_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+\sin n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$$-1 \geq \frac{1}{\sin n} \geq 1$$

$$\frac{-1}{n^2+1} \cancel{\geq} \frac{1}{n^2+\sin n+1} \cancel{\geq} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{-3n^2-1}{n^2+1} \cancel{\leq} \frac{3n^2+1}{n^2+\sin n+1} \cancel{\geq} \frac{3n^2+1}{n^2+1}$$

$$\frac{-3n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2\left(-3-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-3-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = -3.$$

$$\frac{3n^2+1}{n^2+\sin n+1} = \frac{n^2(3+1/n^2)}{n^2\left(1+\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

$$\hookrightarrow \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{3+0}{1+0+0} = 3.$

12) $U_n = \left(\frac{\sin n}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

$$|U_n| = \frac{|\sin n|^n}{2^n} \leq \frac{1^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

7) $U_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

$$1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{3} = 1$$

$$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln(3)}{n}} \to e^0 = 1$$

$$\sqrt[n]{a} = 3^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\exp\left(\frac{1}{n}.\ln 3\right) =$$

or $a^b = \cancel{\text{ba}\exp} \ \exp(b.\ln a)$

$a > 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

Arcsin
Arccos
Suites
Nbres $\mathbb{C}$

PE $a^x = e^{x \cdot \ln a}$

$n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln a \times \frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln a}{n}}$

1.3. Suites monotones, suites adjacentes

Th: Soit (U_n) une suite croissante alors

1) Si (U_n) est majorée, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

2) Si (U_n) n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

En particulier, toute suite $\nearrow$ a une limite.

Rq : Si (U_n) $\nearrow$ & majorée de limite l, alors l est un majorant de (U_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq l$.

Corollaire : Si (U_n) $\searrow$ & minorée, elle converge vers une limite l dans $\mathbb{R}$, elle diverge vers $-\infty$.

$U_n = \left(\frac{10^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$

Pr $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{10}{(n+1)} U_n$

Si $n \geq 9$, $U_{n+1} \leq \frac{10}{9+1} U_n = U_n$

Dc $(U_n)_{n \geq 9}$ est $\searrow$.

Or $U_n \geq 0$ pour tout n, dc $(U_n)_{n \geq 9}$ est $\searrow$ & minorée. Elle converge dc vers $l \in \mathbb{R}$.

Or $\underbrace{U_{n+1}}_{\substack{\longrightarrow \ell \\ n\to+\infty}} = \underbrace{\frac{10}{n+1}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n\to+\infty}} \cdot \underbrace{U_n}_{\substack{\longrightarrow \ell \\ n\to+\infty}}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \times \ell = 0$.

D'où $\ell = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!}$

Déf : On dit que suites (U_n) & (V_n) st adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0}$$

(4) **TH : suite adjacente**

Soient (U_n) & (V_n) des suites adjacentes avec par exemple $(U_n)\nearrow$ & $(V_n)\searrow$.

Alors 1) (U_n) & (V_n) CV vers même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n \leq \ell \leq V_n}$

EX 5

Ex 5 $(U_n)_{n\geq 1}$ & $(V_n)_{n\geq 1}$.

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$$

a) Mq (U_n) & (V_n) CV vers m̂ limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que (U_n) & (V_n) st adjacentes

Pr $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n - V_n = \cancel{U_n} - \cancel{U_n} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{-1}{n \times n!}$

• $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$ $\qquad (U_n)$ est $\nearrow$

• $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right)$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n^2+2n-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$$

$D_C\,(V_n) \searrow$

$\Rightarrow (U_n)$ & (V_n) adjacentes & CV vers $l \in \mathbb{R}$.

---

2) $U_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2{,}5$

$2{,}5 \leq \underset{e}{\overset{\shortparallel}{l}} \leq 2{,}75.$

$V_2 = U_2 + \frac{1}{2 \times 2!} = 2{,}75.$

M-ANA

Mdi IE

- $\mathbb{C}$
- Suites
- f circuf^res récipro^qs

EXS

Soient (U_n) & (V_n)

$$\forall n \geq 1 ; \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad V_n = U_n + \frac{1}{n.n!}$$

Pour $n \geq 1$, $U_n - V_n = \dfrac{-1}{n.n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Mq $U_n \nearrow$

$$\circ \; U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

$\Rightarrow U_n \nearrow$.

Mq $V_n \searrow$

$$\circ \; V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n.n!}\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = \underbrace{U_{n+1} - U_n}_{\frac{1}{(n+1)!}} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n.n!}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{\cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1}{n(n+1)^2}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)^2 n!} \leq 0$$

$\Rightarrow V_n \searrow$.

Finalement $(U_n) \nearrow$, $(V_n) \searrow$, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0$

D'où (U_n) & (V_n) CV vers m̂ limite ℓ

& $\forall n \geq 1 ;\ U_n \leq \ell \leq V_n$.

4.2. Suites extraites

Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.
Une suite extraite de (U_n), ou **sous-suite** de (U_n) est une suite de la forme $\left(U_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$

$\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $s^t \nearrow$.

(Rq) On a forcément $\varphi(n) \geqslant n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

@ $(U_n)_{n\geqslant 0}$: $(U_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite.

$\left(\text{Si } U_n = \frac{1}{n+1}, \quad \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} \right)$.

$\longrightarrow$ La suite des termes paires $(U_{2n})_{n\geqslant 0}$ & la suite des termes impairs $(U_{2n+1})_{n\geqslant 0}$

Pour $U_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$U_{2n} = 1$ & $U_{2n+1} = -1$; $n \in \mathbb{N}$.

(TH) (U_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ si & seulement si :

$(U_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ CV tous les deux vers la m̂ limite ℓ

@ La suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ diverge car

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}$$

Considérons $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : U_{2n+1} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+3)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

correspond au terme en +

$\cdot\ U_{2(n+1)} - U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)}$

$U_{2(n+1)} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+3)} + \frac{(1)^{2n}}{\ln(2n+4)}$

$U_{2(n+1)} - U_{2n} = \frac{-1}{\ln(2n+3)} + \frac{1}{\ln(2n+4)} \leq 0$

$(\ln(2n+3) \leq \ln(2n+4))$.

Dc $(U_{2n})_{n\geq 0}$ est $\downarrow$; de m̂ $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ $\uparrow$.

Finalement (U_{2n}) & (U_{2n+1}) sont ADJACENTES.
CV vers m̂ lim $\ell \in \mathbb{R}$. Dc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

(TH) Soit (U_n) une suite réelle ;

1) Si (U_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors toute sous-suite de (U_n) CV vers ℓ.

2) Si $\exists$ sous-suite de ℓ qui ne CV pas ou s'il existe 2 sous-suites q CV vers 2 limites $\neq$tes alors (U_n) DV.

Entraîn-t Ex 6

$(-1)^{2n}(2)^{2n}$

Ex 7 3) $U_n = (-2)^n + 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$: • $U_{2n} = (-2)^{2n} + 2^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$U_{2n} = 2^{2n} + 2^{2n} = 2 \times 2^{2n} = 2^{2n+1}$.

• $U_{2n+1} = (-2)^{2n+1} + 2^{2n+1} = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc (U_n) n'a pas de limite.

4) $U_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{2n+1}$,

Pour $n \in \mathbb{N}$, • $U_{2n} = \dfrac{2n + (-1)^{2n} \cdot 2n}{4n+1} = \dfrac{4n}{4n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

• $U_{2n+1} = \dfrac{2n+1 + (-1)^{2n+1}(2n+1)}{2(2n+1)+1} = \dfrac{\cancel{2n+1} - (\cancel{2n+1})}{4n+3} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Dc (U_n) n'a pas de limite.

6) $U_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$,

Pour $n \in \mathbb{N}$, • $U_{3n} = \sin(2\pi n) = 0$

• $U_{3n+1} = \sin\left(\dfrac{-2\pi}{3} \times (3n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$U_{3n+1} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dc (U_n) n'a pas de limite.

Ex3 **IE**

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 1, \quad U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}.$$

1) Mq $(U_n) \nearrow$

2) Mq récurrence $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$.

3) En déduire (U_n) majorée. Que dire sa convergence ?

1) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

$\Rightarrow U_n \nearrow$.

2) Pour $n \geq 1$, on pose $P(n)$: $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

Mq par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

- Pour $n = 1$: $U_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1} \leq 2 - \frac{1}{1}$.

Donc $P(1)$ est vraie.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, tq $P(n)$ soit vraie.

Mq $P(n+1)$ est vraie aussi cad $U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

- $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ par $\boxed{\text{HDR}}$

$$= 2 + \frac{-(n+1)^2 + n}{n(n+1)^2}$$

$$= 2 + \frac{-n^2 - 2n - 1 + n}{n(n+1)^2}$$

$$= 2 - \left[\frac{\cancel{n(n+1)}}{\cancel{n}(n+1)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{n(n+1)^2}\right]$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Donc par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$, cad $\forall n \geq 1$, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

3) En déduire q U_n est majorée | Q : convga.

$\forall n \geqslant 1, \quad U_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$ $\qquad \frac{\pi^2}{6}$

Dc $(U_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée par 2.

ĉ (U_n) est aussi ↗, elle CV vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

→ FAIRE ∀ EXOS SUPPLÉMENTAIRES.

Ex4 Soit (U_n) déf par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < U_n$.

1R) Mq par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 2$.

Pour $n = 0$: $U_0 = 3 > 2$.

Si on a $U_n > 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

$2 + U_n > 4 \Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} > \sqrt{4} = 2$.

Donc $U_{n+1} > 2$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 2$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\sqrt{U_n + 2}\right)^2 - U_n^2$

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = -U_n^2 + U_n + 2$

Or $(2 - U_n)(1 + U_n) = 2 + 2U_n - U_n - U_n^2 = -U_n^2 + U_n + 2$

Donc $U_{n+1}^2 - U_n^2 = (2 - U_n)(1 + U_n)$.

3) En déduire que (U_n) ↓.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = (2-U_n)(1+U_n) < 0.$$

car $2-U_n < 0$ D'où $U_{n+1}^2 < U_n^2$.

Comme U_n et U_{n+1} sont > 0, on obtient

$$U_{n+1} < U_n \qquad (\sqrt{x}\ \nearrow).$$

D'où (U_n) ↓.

4) Mq (U_n) CV déterminer sa limite.

- (U_n) ↓ et minorée par 2, elle CV donc vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Donc $U_{n+1}^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell^2$ & $U_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell^2$

En passant à la limite dans $(U_{n+1}^2 - U_n^2) = (2-U_n)(1+U_n)$

On obtient $0 = \ell^2 - \ell^2 = (2-\ell)(1+\ell)$

$$\Rightarrow \ell = 2 \text{ ou } \cancel{\ell = -1}$$

impossible comme $U_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \ell = 2.$

-> ① ①

ex.

⑦ lP

M-ANA 6, 7, 8

$\boxed{6)}$ $U_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$, $n \geq 2$.

$= \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

$= 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ dc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

$\boxed{7)}$ $U_n = 4^n - 3^n + 1 = 4^n\left[1 - \dfrac{3^n}{4^n} + \dfrac{1}{4^n}\right]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 4^n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

a $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{4} \in]-1,1[$ dc $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; $\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty\,(1-0+0) = +\infty$.

$\boxed{8}$ $U_n = \dfrac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \dfrac{3^{n+1}\left[1 + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right]}{3^n\left[1 + \frac{2^n}{3^n}\right]} = \dfrac{3 \times 3^n \times \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{3^n\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$

$U_n = 3 \times \dfrac{\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$ comme $\left(\frac{2}{3}\right) \in]-1,1[\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3 \times \dfrac{0+1}{0+1} = 3$.

(12) $U_n = \frac{\pi^n + 3^n}{2^{2n}} = \frac{\pi^n + 3^n}{(2^2)^n} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

comme $\frac{\pi}{4}$ & $\frac{3}{4} \in]-1,1[\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Ex 6 $\forall n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$; $V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) Mq (U_n) & (V_n) st adjacentes.

• $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$

$\downarrow$

$-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

écrire deux derniers termes

$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \dots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$\Rightarrow U_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n \underbrace{- \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}_{<0} < U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} < U_n$ dc U_n est décroissante.

- $$V_{n+1} = \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k}$$

- $$V_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}$$

$$V_{n+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \left(\frac{(-1)^k}{k}\right)}_{V_n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > V_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} > V_n \Rightarrow V_n \nearrow.$

De plus $V_n - U_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$

écrire le dernier terme

$$V_n - U_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}}$$

$$V_n - U_n = \frac{-1}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow U_n$ & V_n sont adjacentes.

---

2) Soit (W_n) avec $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On voit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = W_{2n}$ & $V_n = W_{2n+1}$.

(U_n) & (V_n) st dc les sous-suites des termes paires & impaires de (W_n).

De plus, comme (U_n) & (V_n) st adjacentes, elles CV vers m̂ limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} W_n = \ell$ aussi.

③

Ex 8 VRAI ou FAUX

$\boxed{\text{VRAI}}$

① Toute suite croissante à partir apcr est minorée.

$(U_n) \nearrow$ apcr : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$

Soit un tel N. Alors $\forall n \geq N, \quad U_n \geq U_N$

soit alors $M = -|U_0| - \dots - |U_N| \in \mathbb{R}$. $M = \min(U_0, \dots U_N)$

Pour $n \in \mathbb{N}$; si $n \geq N$, alors $U_n \geq U_N \geq -|U_N| \geq M$

Sinon $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et donc $U_n \geq -|U_n| \geq M$

Dc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \geq M$.

---

② Une $(U_n) \searrow$ minorée par 0 CV vers 0. $\boxed{\text{FAUX}}$

$U_n = 1 + \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}^*$ | $\cdot \; \forall n \geq 1 \; ; \; U_n \geq 0$
$\cdot \; U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq 0$

---

③ (U_n) non majorée alors elle tend vers $+\infty$ $\boxed{\text{FAUX}}$

$U_n = (-2)^n$: U_n pas majorée

$U_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$U_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

Dc (U_n) n'a pas limite

---

④ Soit $(U_n) \to +\infty$ alors $\nearrow$ apcr. $\boxed{\text{FAUX}}$

Soit $\boxed{(U_n) = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ n-2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}}$ $n \in \mathbb{N}$

$U_{2n+1} - U_{2n} = 2n - 1 - 2n = -1 < 0$

or $\underset{\to +\infty}{U_{2n} = 2n}$ & $\underset{\to +\infty}{U_{2n+1} = 2n - 1}$ $\Rightarrow (U_n)$ pas $\nearrow$

④

(5) Soit (U_n) & (V_n) deux suites tq $U_n < V_n$. VRAI
Si ces 2 suites st CV alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n < \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Soit $U_n = 1$; $V_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < V_n$ & $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

---

6) Cours FAUX

---

7) $U_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ VRAI

(U_n) DV vers $+\infty$.

mais pr $n \geq 1$, $U_{n+1} - U_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
$= \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

6) $U_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$U_{2n} = 1$ (U_{2n}) CV
$U_{2n+1} = -1$ (U_{2n+1}) CV
$\Rightarrow$ (U_n) n'a pas de limite.

(12) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$

(1) $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est défini si $-2x^2+1 \in [-1,1]$

$-1 \leq 1-2x^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq -2x^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$.

Donc $\mathcal{D}_f = [-1,1]$.

- Pour $x \in [-1,1]$, $f(-x) = \arccos(1-2(-x)^2)$

$f(-x) = \arccos(1-2x^2)$

$f(-x) = f(x)$.

Donc f est paire.

---

2) Pour $x \in [0,1]$ soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\boxed{x = \sin t}$

(on a alors $t = \arcsin x$).

$f(\sin t) = \arccos(1-2\sin^2 t) = \arccos(\cos(2t))$

$= 2t$ car $2t \in [0,\pi]$.

$= \underline{2.\arcsin x}$.

car $\cos 2t = 1-2\sin^2 t$

$\cos^2 = 1-\sin^2$.

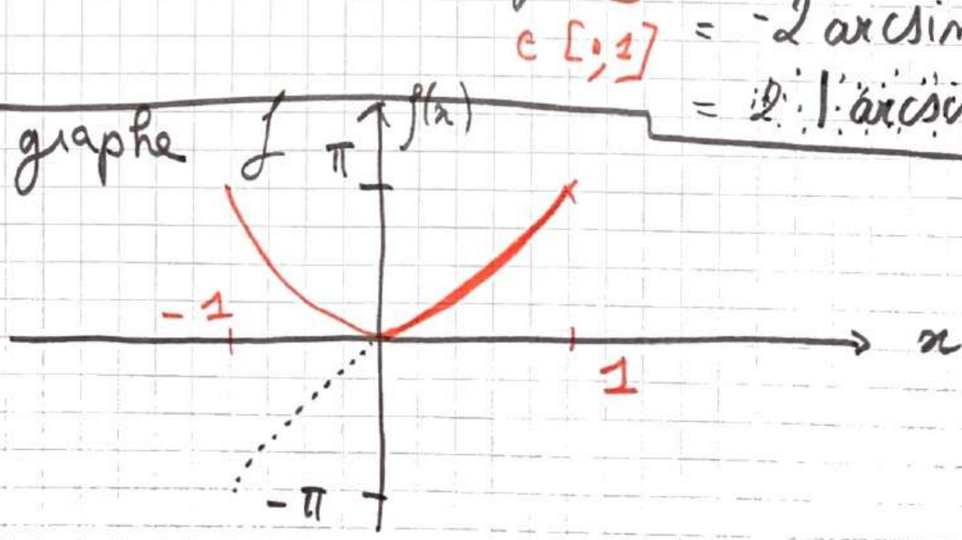
Pour $x \in [-1;0]$; $f(x) = \underbrace{f(-x)}_{\in [0;1]} = 2.\arcsin(-x)$.

$= -2\arcsin(x)$.

$= 2\,|\arcsin(x)|$.

---

3) Tracer graphe f



(6)

Interrogation écrite 2, section 23
Durée: 80 minutes

Exercice 1 :

1. Mettre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le nombre complexe $\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$. $= \dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cdot e}$
2. Résoudre l'équation
$$z^4 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 2 :

1. Rappeler, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule de Moivre (formule de deMoivre sur poly à cause d'une typo).
2. En déduire, avec $n = 2$, que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \text{ et } \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$
3. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on admet que $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$, et on pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
Pour tout $t \in [-\pi/4, \pi/4]$, montrer que
$$f(\sin t) = 2t.$$

Exercice 3 :

Donner dans chaque cas la nature de la suite (u_n), et calculer sa limite si elle existe.

1. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n)+1}$ 2. $u_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{2n+1}}{9^{n+1}}$ 3. $u_n = \dfrac{n\sin(n^2)+1}{n^3+1}$ 4. $u_n = (-3)^n + (-1)^n n$.

Exercice 4 :

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$. On suppose que :
- (a_n) est décroissante,
- (a_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On considère alors la suite (u_n) de terme général
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que (u_n) converge vers une limite réelle.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.
2. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ est croissante.
3. Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n = u_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est décroissante.
4. Conclure sur la nature de (u_n).

C3 : Limites & Continuités

I / Limites

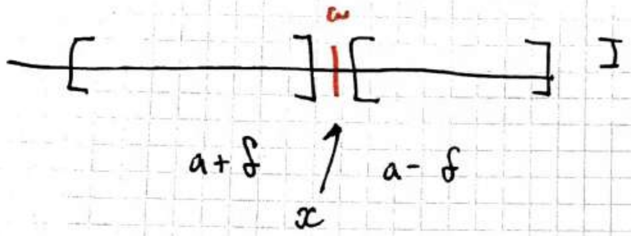
I.1) Déf & généralités

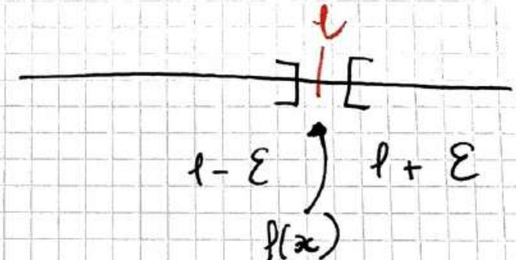
Limite en un point fini :

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert contenant a, & f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{a\}$.

- On dit que f admet pr limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \delta, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$



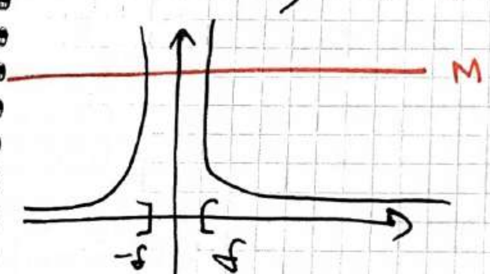


On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

- On dit que f admet pr limite $+\infty$ en a si

$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \delta, f(x) > M$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty.$



$a = 0$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- On dit que f admet pour limite $-\infty$ en a si

$\lim\limits_{x \to a} -f(x) = +\infty.$

(R9) ▸ limite à gauche :

→ m̂ chose mais $I =]b, a[$ avec $b < a$.

On note $\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x)}$, la limite à gauche qd elle existe.

▸ limite à droite : idem avec $I =]a, b[$, $b > a$.

On note $\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x)}$, la limite à droite qd elle existe

②

M-ANA

$I =$ moy 2 meilleures interros.

$$F = \max\left(\frac{DS_1 + DS_2}{2}, \frac{DS_1 + DS_2 + I}{3}\right) + \text{moy colles.}$$

Correc° DS n° 1

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

La forme algébrique de $\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ est $\frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cdot e^{i-\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Ex

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{nix} = (e^{ix})^n$$

On pose $z = \rho\cdot e^{i\varphi}$, $\rho > 0$; $\varphi \in [0, 2\pi[$

$$\arcsin\left(2\cdot\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) = \arcsin(2\cdot\sin t\cdot|\cos t|)$$

$$= \arcsin(2\cdot\sin t\cdot\cos t)$$

car $\cos \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Ex 3 nature $\to$ CV, $\to$ DV

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bullet\ U_n = \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n)+1} = \frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)\left[1+\frac{1}{\ln(n)}\right]} = \frac{\ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln(n)\left[1+\frac{1}{\ln(n)}\right]}$$

$$U_n = \frac{2\ln(n)}{\ln(n)\left[1+\frac{1}{\ln(n)}\right]} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln(n)\left[1+\frac{1}{\ln(n)}\right]} = \frac{2}{1+\underbrace{\frac{1}{\ln(n)}}_{\to 0}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\underbrace{\ln(n)}_{\to +\infty}\left[1+\frac{1}{\ln(n)}\right]}$$

~~Or~~ On D'où (U_n) CV

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{1+\frac{1}{+\infty}} + \frac{0}{+\infty\left[1+\frac{1}{+\infty}\right]} = 2.$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$V_n = \frac{2^{n+2} + 3^{2n+1}}{9n+1} = \frac{2^{n+2} + 9^{n+1}}{9^{n+1}} \rightarrow 3 \times (3^2)^n$$

$$U_n = \frac{4 \cdot 2^n + 3 \times 9^n}{9 \cdot 9^n} = \frac{9^n}{9^n} \times \left(\frac{4 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n + 3}{9} \right)$$

or $\frac{2}{9} \in]-1,1[$, dc $\left(\frac{2}{9}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

$U_n = \dfrac{n \cdot \sin(n^2) + 1}{n^3+1}$ or $\dfrac{-n+1}{1+n^3} \leqslant \dfrac{n \cdot \sin(n^2)+1}{1+n^3} \leqslant \dfrac{n+1}{1+n^3}$

Par TH encadrement : $\underbrace{\frac{-n+1}{1+n^3}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ $\underbrace{\frac{n+1}{1+n^3}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

$$U_n = (-3)^n + (-1)^n n = (-1)^n (3^n + n)$$

- $U_{2n} = (-1)^{2n}(3^{2n} + 2n) = 3^{2n} + 2n$ Dc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = +\infty$

- $U_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(3^{2n+1} + 2n+1) = -3^{2n+1} - 2n + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = -\infty$

Dc V_n a 2 sous-suites extraites de limites ≠tes : elle n'a pas de lim.

U_{2n} & U_{2n+1} st adjacentes par 1), 2), 3) et dc cV vers $l \in \mathbb{R}$.

Donc sous-suites des termes pairs & impairs de (U_n) CV dc (U_n) CV vers $l \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

Formules trigonométriques

Les formules encadrées sont à connaître par coeur **ET** à savoir retrouver. Les autres à savoir retrouver.

Les formules peuvent être retrouvées en passant par les complexes. Formules valables pour tous $a, b, x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que les fonctions dans les égalités soient définies, sauf mention explicite du contraire. On rappelle que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Identités utilisant la norme :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \quad \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} \quad \text{et} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x \in [0, \pi/2] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \boxed{\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad \tan x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

Si x n'est pas dans $[0, \pi/2]$, les formules restent vraies **au signe près.** Le bon signe est à déterminer en fonction de celui de sin et cos.

Symmétries, périodicités, parité

$$\begin{array}{rlll}
\text{Périodicité :} & \boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x} & \boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x} & \boxed{\tan(x + \pi) = \tan(x)} \\
\text{Parité :} & \boxed{\sin(-x) = -\sin x} & \boxed{\cos(-x) = \cos x} & \boxed{\tan(-x) = -\tan(x)} \\
\text{Symmétrie /O :} & \boxed{\sin(x + \pi) = -\sin x} & \boxed{\cos(x + \pi) = -\cos x} & \\
\text{Symétrie / droite } y = x : & \boxed{\cos(\pi/2 - x) = \sin x} & \boxed{\sin(\pi/2 - x) = \cos x} & \tan(\pi/2 - x) = \dfrac{1}{\tan x}
\end{array}$$

Pour retrouver les deux dernières lignes, on identifie parties réelles et imaginaire dans les membres gauche et droites des égalités

$$\cos(\pi + x) + i\sin(\pi + x) = e^{i\pi}e^{ix} = -(\cos(x) + i\sin(x)) = -\cos x + i\sin x$$

$$\text{et} \quad \cos(\pi/2 - x) + i\sin(\pi/2 - x) = e^{i\pi/2}e^{-ix} = i(\cos(-x) + i\sin(-x)) = \sin x + i\cos x.$$

Résolution d'équations :

$$\boxed{\cos a = \cos b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi} \quad \text{un tel } k \text{ est unique.}$$

$$\boxed{\sin a = \sin b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi} \quad \text{un tel } k \text{ est unique.}$$

$$\boxed{\tan a = \tan b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + k\pi} \quad \text{un tel } k \text{ est unique.}$$

Bijectivité :

cos est décroissante et bijective de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$.
Sa réciproque arccos est bijective et décroissante de $[-1, 1]$ vers $[0, \pi]$

sin est croissante et bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$.
Sa réciproque arcsin est bijective et croissante de $[-1, 1]$ vers $[-\pi/2, \pi/2]$

tan est croissante et bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $\mathbb{R}$.
Sa réciproque arctan est bijective et croissante de $\mathbb{R}$ vers $[-\pi/2, \pi/2]$

Formule de Moivre et applications

$$\text{Moivre : } \boxed{e^{inx} = (e^{ix})^n} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n}$$

Permet d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction des puissances de cos et sin. Pour $n = 2$, on obtient

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i(2\sin x \cos x)$$

d'où

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$$

Avec ces formules, et en forçant la factorisation par $\cos^2 x$ en haut et en bas dans $\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$, on obtient :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Formule d'Euler et applications

$$\text{Euler : } \boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

Permet de "linéariser" les puissances de cos et sin en développant

$$\cos^n x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n} \qquad \sin^n x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^n}{(2i)^n}$$

et en repérant les termes de la forme $e^{ikx} \pm e^{-ikx}$, $k = 0, \ldots, n$.

$$\text{Pour } n = 2 : \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

On peut aussi retrouver ces formules grâce à $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Formules de somme En identifiant parties réelles et imaginaires dans

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$$

on trouve

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

ainsi que, en forçant la factorisation par $\cos a \cos b$ en haut et en bas dans $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Bonus : formules d'angle moitié

$$\text{Pour } t = \tan(x/2) : \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Formules pour les fonctions circulaires réciproques

Les bases. Par définition des fonctions réciproques :

$$\forall x \in [-1,1] : \quad \boxed{\cos(\arccos x) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \boxed{\tan(\arctan x) = x}$$

On a aussi :

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x) = x} \quad \boxed{\forall x \in [-\pi/2,\pi/2],\ \arcsin(\sin x) = x, \text{ et } \arctan(\tan x) = x}$$

Calcul pour des nombres réelles quelconques

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } a \in \mathbb{R}, \text{ on calcule } \arccos(\cos(a)) = b \text{ en trouvant l'unique} \\ b \in [0,\pi] \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = a + 2k\pi \text{ ou } b = -a + 2k\pi\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } a \in \mathbb{R}, \text{ on calcule } \arcsin(\sin(a)) = b \text{ en trouvant l'unique} \\ b \in [-\pi/2,\pi/2] \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = a + 2k\pi \text{ ou } b = \pi - a + 2k\pi\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } a \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ on calcule } \arctan(\tan(a)) = b \text{ en trouvant l'unique} \\ b \in [-\pi/2,\pi/2] \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = a + k\pi\end{array}}$$

Expressions mixtes. Avec $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ sur $[0,\pi]$ et $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$:

$$\boxed{\forall x \in [1,1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)}$$

Avec $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, on obtient

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) = \pi/2 - \arcsin x.$$

Pour aller plus loin On peut aussi obtenir beaucoup d'autres relations sur les fonctions réciproques en utilisant les formules trigonométriques des pages précédentes. Par exemple, comme $1 - \cos^2 t = \cos 2t$, on a

$$\arccos(1 - 2\cos^2 t) = \arccos(\cos 2t) = 2t, \quad t \in [0,\pi/2]$$

On obtient donc

$$\arccos(1 - 2x^2) = 2\arccos x, \quad x \in [0,1],$$

Voir les exercices supplémentaires du chapitre 1 ou wikipedia pour d'autres exemples.

Université de Lille

Place n°

Date : ___/___/______

DIPLÔME :

ÉPREUVE : Mathématiques

NOM : Defraiteur

Prénom : Maxence

N° Étudiant :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les : ...../.....

(partie réservée au correcteur)

NOTE : /20

Appréciations : 19,75/24

19,75/20

5,5/6

Exercice 1 :

$z \in \mathbb{C}$,

2,5

1. $z' = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\frac{7\pi}{12}}$

car $x = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Puis $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \times \dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

3

2. $z^4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i-\frac{\pi}{12}}$, de la forme $\rho\cdot e^{i\varphi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 4\varphi = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi, & k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2^{(-\frac{1}{8})} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{2}{4}k\pi, & k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$

Donc les racines de z^4 sont $w_k = (2)^{(-\frac{1}{8})}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{48} + \frac{1}{2}k\pi)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

Exercice 2 : 5,75/6

1 1. Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

2 2. Pour $n = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$e^{i2x} = \cos 2x + i \sin 2x = (e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2$
$e^{i2x} = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x . \sin x$

D'où les égalités suivantes : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin 2x = 2 \cos x . \sin x$.

Etant donné que $Re(e^{i2x}) = Re(e^{ix})^2$ et $Im(e^{i2x}) = Im(e^{ix})^2$

D'après la relation fondamentale : $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$
On en déduit que $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

D'où $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x - 1$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

De même $1 = \cos^2 x + \sin^2 x \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Puis $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x$

TB

2,75 3) $\forall x \in [-1,1]$; on admet que $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$.

On pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

$\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $f(\sin t) = \arcsin(2\sin t\sqrt{1-(\sin t)^2})$

$f(\sin t) = \arcsin(2.\sin t.\sqrt{1-\sin^2 t})$

On a démontré $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x$

Dès lors $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$.

D'où l'expression, $f(\sin t) = \arcsin(2.\sin t.\sqrt{\cos^2 t})$

$f(\sin t) = \arcsin(2.\sin t.\cos t)$

$f(\sin t) = \arcsin(\sin 2t)$ d'après question 2)

Donc $f(\sin t) = 2t$ $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

3,75/6

Exercice 3 :

0,75

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n)+1} = \dfrac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n^2}))}{\ln(n(1+\frac{1}{n}))+1} = \dfrac{\ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})+1}$

$U_n = \ln(n) + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\ln(1+\frac{1}{n})+1}$

$\ln(n^2) = 2\ln(n)$, pas $\ln(n)^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2}) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})+1 = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty + \frac{0}{1} = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$ 2) $U_n = \dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{9^{n+1}} = \cancel{\dfrac{3^{2n+1}\left[1+\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{2^{n+2}}{3^{2n+1}}\right]}{9^{n+1}\left[1+\frac{1}{9^{n+1}}\right]}}$

0,5

$$U_n = \frac{9^{n+1}\left[\underbrace{\frac{3^{2n+1}}{9^{n+1}} + \frac{2^{n+2}}{9^{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\right]}{9^{n+1}\left[\underbrace{1+\frac{1}{9^{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\right]}$$

non

$\Rightarrow \lim U_n = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ 3) $U_n = \dfrac{n.\sin(n^2)+1}{n^3+1}$

1,5

On a $-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-n+1}{n^3+1} \geq \dfrac{n.\sin(n^2)+1}{n^3+1} \geq \dfrac{n+1}{n^3+1}$

Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n+1}{n^3+1} = 0$, par le théorème d'encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n.\sin(n^2)+1}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

1 4) $U_n = (-3)^n + (-1)^n . n$

Soit $U_{2n} = (-3)^{2n} + (-1)^{2n} . 2n$

$U_{2n} = 3^n + 1 . 2n = 3^n + 2n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = +\infty$

$U_{2n+1} = (-3)^{2n+1} + (-1)^{2n+1} . 2(n+1)$

$U_{2n+1} = \cancel{(-3)^n}$ $-(3)^{2n+1}$ $+ (-1).(2n+2)$

$U_{2n+1} = (-3)^n - 2n - 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} =$ n'a pas ~~de limite~~ $-\infty$

Donc U_n n'a pas de limite car les deux suites extraites n'ont pas les mêmes limites

4

Université de Lille

Place n°

Date : ___/___/______

coin à coller

NOM : Defaiteur

Prénom : Maxence

N° Étudiant :

coin à coller

DIPLÔME : ....

ÉPREUVE : ....

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les : .... / ....

(partie réservée au correcteur)

NOTE : /20

Appréciations :

4,75 / 6

Exercice 4 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) \searrow$, (a_n) CV et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \quad , n \in \mathbb{N}.$$

1,5 1) $U_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$

$$U_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n} - a_{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_{2n+1} - U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n} - a_{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n}$$

$$U_{2n+1} - U_{2n} = -a_{2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-a_{2n+1}) = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} - U_{2n} = 0$ Oui !

Il est interdit aux candidats d'apposer sur la copie tout signe distinctif pouvant indiquer sa provenance, ainsi que sur tout document à remettre avec la copie : QCM, dessin, graphique, etc., distribué par le responsable de l'épreuve.

② $V_n = U_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$V_n = U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n}$$

Montrons que V_n est $\searrow$.

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n} - a_{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n} a_{2n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \underbrace{-a_{2n+1}}_{\text{la valeur est forcément négative}}$$ manque un terme

Donc $V_{n+1} < V_n \Rightarrow$ la suite (V_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

1,5 ③ Soit $W_n = U_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que W_n est $\nearrow$.

$$W_{n+1} - W_n = U_{2n+3} - U_{2n+1}$$

$$W_{n+1} - W_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + 1.a_{2n+2} - a_{2n+3} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$W_{n+1} - W_n = a_{2n+2} - a_{2n+3}$$

On sait que (a_n) est décroissante.

Dès lors $a_{2n+2} > a_{2n+3}$.

Par conséquent $\underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\text{la valeur est positive.}}$

Donc $W_{n+1} > W_n \Rightarrow$ la suite (W_n) est croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

TB

0,75 ④ D'après la question 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$;

puis U_{2n} est $\searrow$ & U_{2n+1} est $\nearrow$. Donc d'après le théorème des suites adjacentes,

la suite (U_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

ⓒ

ce n'est pas ce que dit ce thm