M-54 Pr: Bernhard Beckermann

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

Introductions et rappels

1. motivation pour la résolution de systèmes linéaires ; matrices particulières ; normes vectorielles Hölderiennes ($p = 1, 2, \infty$), normes matricielles associées,rayon spectral, norme de Frobenius ; conditionnement d'une matrice ; série de Neumann,sensibilité de la solution d'un système linéaire par rapport aux perturbations des données.

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

1. méthodes d'élimination de Gauss, pivotage, factorisation LU, PA=LU, complexité ; cas particulier des matrices symétriques définies positives, factorisation de Cholesky ; problème des moindres carrés : équation normale et utilité d'une factorisation QR ; factorisation QR : approches de Householder et de Givens.

Calculs numériques de valeurs propres

1. théorème de Bauer-Fike ;méthode de la puissance, convergence ; itération invese ; décomposition en valeurs singulières(SVD) (motivations et applications), existence d'une SVD, calcul numérique, théorème deEckart-Young (meilleure approximation d'une matrice de moindre rang).

M54 - Analyse Numériq Matricielle

- Précision finie ordi $|\alpha - \text{float}(\alpha)| \leq \varepsilon|\alpha|$ où $\varepsilon \approx 10^{-8}$ (resp. pré. double)
- ⚠ exemple de cancellat°

1. Mat, vect^Rs

- Transposée : ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tq $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$
- Adjointe : $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tq $(A^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$
- Produit Scalaire : ↔ 2 vect^Rs $x, y \in \mathbb{C}^m$:
  $$(y,x) = x^* y = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j y_j$$
- Inég. de Cauchy Schwarz : $|(x,y)| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$
- Complément orthogonal : $K^\perp = \{ y \in \mathbb{K}^m : \forall x \in K, (x,y) = 0 \}$.

2. Mat particulières

- symétriq (hermitienne) : $A^* = A$ (resp ${}^tA = A$)
- orthogonale (unitaire) : ${}^tAA = I$ (resp $A^*A = I$)
- normale si $AA^* = A^*A$
- semi-déf ⊕ si $\forall x \in \mathbb{K}^m$, $(Ax, x) \geq 0$
- déf ⊕ si SDP ET $(Ax,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- diagonale : si $a_{j,k} = 0$ pour $j \neq k$.
- ◥ : si $a_{j,k} = 0$ pr $j > k$.
- similaire : à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'∃ mat inv. S tq $B = S^{-1}AS$. (diagonalisable si simil^R à mat diagonale)

3. Val^Rs propres

- (λ, x) : élt propre de A.
- $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$: rayon spectral

TH.1 Mat diagonalisables

(a) ∃ mat non diagonalisable.

(b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable tq $B = S^{-1}AS$ diagonale ssi A admet 1 base de vect^Rs donnée p colonnes de S, tq vp ⟨A⟩ r diagonale de B.

(c) si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admt n vp distincts ⇒ A est diagonalisable

5 Norme.

(a) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |x_i|$

→ une mat invers. d^t ê carrée

→ $(AB)^* = B^*A^*$ (resp. transposée)

→ det(◥) = Π(élts diagonale)

→ $\det(A) = \det({}^tA)$

→ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, le systm̂

$Ax = b$ admt soluθ ssi $b \in \mathrm{Im}(A)$.

Ds ce cas, $\mathcal{S} = \{ y + \ker(A) \}$.

→ Pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: & K sev $K \subset \mathbb{K}^n$:

$rg(A) + \dim(\ker(A)) = n$. $rg(A) = rg(A^*)$

$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A^\perp) = \mathrm{Im}(A^*)$

Th 2 Factorisaθ de Schur

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire & $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sit q $T = U^* A U$.

Si A normale $\Rightarrow$ T diagonale.

Cor 2.2 Diagonalisaθ mat hermitienne

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire dsq $D = U^* A U$ est diagonale & composé ds vp de A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L Tte mat normale et ∇ : forcmt diagonale.

→ Mat hermitienne admt base orné de $\vec{vp}$.

4. Décompoziθ en valeurs singulières

L 2.3 $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les vp de $A^* A$ st réelles et $+$.

NB mat unitaire est inversible. ($Q^* Q = I$ et $Q^{-1} = Q^*$).

L 2.4. soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Alors vp $\neq 0$ de AB & BA st m̂s. (cq mltplcté).

Th 2.6. Valr singulière mat normale

Les vs mat normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ st les modules de ses vp.

Th 2.7 Décompoziθ en vs, SVD

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ac r vs $+$ alors $\exists U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ & $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ttes 2 unitaires et $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ("diag")

tq $A = U \Sigma V^*$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$

ep $rg(A) = r \leq \min(m,n)$.

R: Schéma Calcul de SVD

- clcl élts propres (μ_j^2, v_j) de A^*A avec $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ & $\{v_1, \dots, v_n\}$ base orné du $\mathbb{K}^n$.
- clcl $u_j = \dfrac{A v_j}{\mu_j}$ pr $j=1,\dots,r$ ainsi $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ base orné de $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$
- Poser $U = (u_1, \dots, u_m)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$, Σ c avt.

5. Approcher A p mat de faible rg : SVD(3)

(TH) 1.9 Eckhart - Young

Pr $k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ la mat de rg $\leq k$ la + proche de A est :

$$B = U \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = \sum_{j=1}^{k} u_j \mu_j v_j^*$$

de distance donnée p μ_{k+1}.

→ Pr calculer B, il suffit connaître slmt k élts propres de A^*A. Stockage mém : $B \to (m+n)k$, $A \to mn$.

6. Normes matricielles & normes compatibles

(D) 3.1 Normes matricielles

Pr $n \geq 1$ une norme vectorielle $|||\cdot|||$ sr $\mathbb{K}^n$. Une norme $\|\cdot\|$ sr $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est

- compatible avec norme vectorielle $|||\cdot|||$ si $\forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}), \forall x \in \mathbb{K}^n : |||Ax||| \leq \|A\| \; |||x|||$
- s.-multiplicative ou norme matricielle si $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\ \forall B \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K}) : \|AB\| \leq \|A\| \; \|B\|$.