$M33$

TD

$S_3(nov-dec)$

Séries & Intégrales Généralisées

Corrections

Ex 1 :

1) $\forall a \in A,\ a \leq \sup A$ et $\forall b \in B,\ b \leq \sup(B)$ dc $a+b \leq \sup A + \sup B$. Ainsi $\forall c \in A+B$, $c \leq \sup A + \sup B$ et $A+B$ est majorée par $\sup A + \sup B$. Comme $A+B$ est pie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$ dc $\exists a \in A$, $B \neq \emptyset$ $\exists b \in B$ et $a+b \in A+B$) et $\hat{c}$ $\mathbb{R}$ a ppté (BS), $A+B$ a (BS).

2) $\exists$ suite $(a_n)_n \subset A$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$

$\exists$ suite $(b_n)_n \subset B$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sup(B)$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \sup A + \sup B$. De plus, comme $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, on ed que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

3) $X = A+B$ & $A = \left\{\frac{(-1)^p}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$, $B = \left\{\frac{2}{q},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{2}$ est un majorant de A et $\hat{c}\ \frac{1}{2} \in A$, $\sup(A) = \frac{1}{2}$.

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{q} \leq 2$ et $2 \in B$ dc $\sup B = 2$.

Ainsi d'après 2) $\quad \sup X = \sup A + \sup B = \frac{5}{2}$.

Ex 2 :

1) soit $n \in \mathbb{N}^*$, on mq $\boxed{PR}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

* pour $p = 1$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$

L'inégalité est dc vraie pr $p = 1$.

* Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$ Alors :

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} + \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{(n+p+1)(n+p)} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$

Or $\frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{(n+p+1)(n+p)}$ dc $\sum\limits_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}$

L'inégalité est dc vraie au rang $p+1$.

On ed $\boxed{PR}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$.

2) On mq suite $(U_n)_n$ est de Cauchy.

soit $\varepsilon > 0$ & soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$; on a :

$U_p - U_q = \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{p^2}$

$< \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q+1}$. Comme $U_p - U_q > 0$; on ed

$|U_p - U_q| < \frac{1}{q+1}$, or $\hat{c}$ comme $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{1}{q+1} = 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall q \geq N$, on ait $\frac{1}{q} < \varepsilon$. Ainsi $\forall p, q \geq N$; on a $|U_p - U_q| < \varepsilon$. La $(U_n)_n$ est dc SdC & tte SdC (cv) ds $\mathbb{R}$.

Ex 3 1) $I = \int_0^1 \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{5/3}} dx$; I est ig en 0.

On calcule un DL en 0 de $\sin 5x - \sin 3x$:

$\sin 5x - \sin 3x = 5x - 3x + x\,\mathcal{E}(x)$ et $\lim_{x\to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

$= 2x + x\,\mathcal{E}(x)$.

Ainsi $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{5/3}} = \frac{2x + x\,\mathcal{E}(x)}{x^{5/3}} = \frac{2 + \mathcal{E}(x)}{x^{2/3}}$

Comme $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{5/3}}}{\frac{2}{x^{2/3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\mathcal{E}(x)}{x^{2/3}} = 1$.

On ed $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{5/3}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^{2/3}}$.

Comme $\frac{2}{x^{2/3}} > 0$, $\forall x \in [0,1]$, on ed I et $\int_0^1 \frac{2}{x^{2/3}}$ st de m̂ natures.

Comme $\int_0^1 \frac{2}{x^{2/3}} dx$ est IdR CV, on ed I CV.

2) $J = \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2} dt$; J ig en ∞.

On a $\lim_{t\to\infty} t^{3/2} \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$.

Donc $\exists\, t_0$, $\forall t \geq t_0$, $\left| t^{3/2} \cdot \frac{\ln t}{t^2} \right| < 1$.

Ainsi $\forall t \geq t_0$, $0 \leq \left| \frac{\ln t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.

On ed $\int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} dt$ et $\int_{t_0}^\infty \frac{\ln t}{t^2} dt$ et dc J st de m̂ natu.

Comme $\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^{3/2}} dt$ est Int. CV, J CV.

Ex 4 : 1) $\forall t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$.

Comme $\int_1^\infty e^{-t} dt$ CV, $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ CV.

2) soit $x_0 \geq x \geq 1$, $\forall t \in [x, x_0]$, on a : $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$; d'où :

$0 \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x_0}}{x}$.

Lorsque $x_0 \to \infty$, il vient $0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$, on obtient $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

3) $\forall t \geq x$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}$ et $\int_x^\infty e^{-t} dt$ CV dc $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ CV.

De plus $\forall x_0$, on a $0 \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{x^2} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x_0}}{x^2}$.

Lorsque $x \to \infty$, on ed $0 \leq \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{e^{-x}}{x^2}$.

Ainsi $0 \leq \frac{x}{e^{-x}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x}$ dc $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{-x}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt = 0$.

4) soit $x \geq 1$ et $x_0 \geq x$,

$\int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{x_0} - \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ $\quad u = \frac{1}{t}$ $\quad du = -\frac{1}{t^2}$ $\quad dv = e^{-t}$ $\quad v = -e^{-t}$

$= -\frac{e^{-x_0}}{x_0} + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{x_0} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$

Lorsq $x_0 \to \infty$, il vient $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ et $\mathcal{E}(x) = \frac{x}{e^{-x}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt$

Puisq $\lim_{x\to\infty} \mathcal{E}(x) = 0$, on ed $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Ex 9 2) $u_n = \tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$

$\tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \geq 1$ car tangente est $\nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\tan\frac{\pi}{4} \geq 1$.

Ainsi $(u_n)_n$ ne CV pas vers 0

dc $\sum_n u_n$ DV. (Rq : CdC useless ici)

3) $u_n = \frac{1}{n^2+3}$, or $\frac{1}{n^2+3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

et $\sum_{n\geq 1}$ est une série de Riemann CV

et $u_n \geq 0$ dc $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV.

(Rq : CdC & CdA useless ici)

4) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$, or $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n n^2}}$

car $n^2+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann CV.

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ CV.

Rq Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,

alors $u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} v_n^\alpha \quad \forall \alpha \neq 0$ car

$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^\alpha = 1$

On appliq à $u_n = n(n^2+1)$, $v_n = n^3$, $\alpha = \frac{1}{2}$

Rq ⚠ $u_n \sim v_n \not\Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln v_n$, $e^{u_n} \sim e^{v_n}$

Explicat°s :

$\ln(u_n) \sim \ln(v_n) \overset{?}{\iff} \frac{\ln u_n}{\ln v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

ex $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ car $\frac{1+1/n}{1+1/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

mais $\ln(u_n) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(v_n) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$

ex $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff e^{u_n - v_n} \longrightarrow 1 \iff u_n - v_n \longrightarrow 0$

$u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

5) $U_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq n$ dc $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\ln n}$

comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est SdR DV, $\sum_{n \geq 2} \dfrac{1}{\ln n}$ DV.

6) $U_n = n^2 . e^{-n}$,

[M1] On applique le critère de d'Alembert à U_n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2 . e^{-(n+1)}}{n^2 . e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

comme $e^{-1} < 1$, d'après le CdA, $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV.

[M2] $\lim_{n\to\infty} n^2 . U_n = 0$ par croissance comparée.

Dc $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N$, on ait $n^2 . U_n \leq 1$.

D'où $\forall n > N$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n^2}$

comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ CV, $\sum_{n\geq 1} U_n$ CV.

7) $\dfrac{\ln n}{n^2} = U_n$

⚠ Faux $\ln n > n^2$: car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} > 1$.

→ CdC et CdA useless ici.

$\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV de pt-ê mm $\sum_n U_n$ CV. ☺

On veut $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ of $\alpha > 1$.

$$\frac{n^\alpha \ln n}{n^2} \leq 1$$

si $\alpha = \frac{3}{2}$, $0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

On va mq $\sum_{n\geq 1} U_n$ CV en comparant U_n à $\dfrac{1}{n^{3/2}}$. On a $\lim_{n\to\infty} n^{3/2} . U_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ par croissance comparée.

On ed $\exists N / \forall n > N$, on a :

$$0 \leq n^{3/2} . U_n \leq 1.$$

Dc $\forall n > N$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$

Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est SdR CV,

on ed $\sum_{n\geq 1} U_n$ CV.

8) $u_n = \dfrac{n^2}{n^3+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$,

$\dfrac{1}{n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ SdR DV.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ DV.

9) $u_n = \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{2}\times\cos\frac{1}{n}}}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\cos\frac{1}{n} \leq 1$ dc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{2}$. ainsi $2+(-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n}) \geq -\frac{1}{2}*2 = \frac{3}{2}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $-(2-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n})\ln n \leq -\frac{3}{2}\ln n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $e^{-(2-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n})\ln n} \leq e^{-\frac{3}{2}\ln n}$

Ad+, $0 \leq \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n}}} \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$

Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est SdR CV dc $\sum_{n\geq 1} u_n$ CV.

10) $u_n = \dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

pas m̂ calcul que 9) car $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ DV et on ne pt pas conclure.

Calculons DL $\cos\frac{1}{n}$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{al} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$2-\cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\hat{\varepsilon}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}} = e^{-(2-\cos\frac{1}{n})\ln n} = e^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n})\right)\ln n}$$

On a $e^{-\frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ car $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2} = 0$.

On ed $e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}))\ln n}$

car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{-(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(n))\ln n}}{e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\ln n} = 1$

On étudie la nature de $\sum_{n\geq 1} e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n}$

car les 2 séries $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$ et $\sum_{n\geq 1} e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln(n)}$

st de m̂ nature.

On a $e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n} = e^{-\ln(n)} \times e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}$

$= \frac{1}{n} \times e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n} = 1$

Donc $e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} > 0$

et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV dc $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-(1+\frac{1}{2n^2})\ln n}$

et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2-\cos 1/n}}$ DV.

11) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2 - 2\sqrt{n} + 3\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$,

$\frac{1}{n} \geq 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV.

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ DV.

On a $e^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\ln n} = e^{-\ln(n)} \times e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}$

$= \frac{1}{n} \times e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}\ln n} = 1$

Donc $e^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} > 0$

et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (DV) dc $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\ln n}$

et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2-\cos 1/n}}$ (DV).

11) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2 - 2\sqrt{n} + 3\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$,

$\frac{1}{n} \geq 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (DV).

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ (DV).

13) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$, $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

Rq : si $\not\exists$ $\sqrt{t}$, on pt calculer $\int$. $0 \leq \dfrac{t^n}{1+\sqrt{t}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

car $1+\sqrt{t} \geq 1$ et $t^n \leq \frac{1}{2^n}$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ (CV), c'est série géométriq de raison $g^T < 1$ en vl^r absolue. On ed $\sum\limits_{n\geq 0} \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$ (CV)

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

dc $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq \frac{\pi}{2^n}$, de + ĉ $0 \leq \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$ $\forall n \geq 1$

et ĉ $\sin x \geq 0$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on ed

$0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ $\forall n \geq 1$,

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\pi}{2^n}$ (CV) on ed $\sum\limits_{n\geq 0} \sin\frac{\pi}{2^n}$ (CV)

15) $\dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a + gd terme $\frac{3}{5}$

$* = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{n^2+\ln n}{5^n}\right)+1}$, ĉ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{5^n} = \frac{n^2+\ln n}{e^{n\ln 5}} = 0$

on ed $\dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$; comme $\left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et ĉ

$\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ (CV), on ed $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$ (CV).

16) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n.\ln n} = u_n$,

$\boxed{M1}$

$$\left(\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n.\ln n}\right)^{1/n} = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2\ln n}$$

$$= e^{2\ln n.\ \ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)}$$

- on a $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

Dc $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{2.\ln n}_{\to\infty}.\ \underbrace{\ln\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln 2} = -\infty$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n.\ln n}\right)^{1/n} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

Ainsi d'après critère de Cauchy, $\sum\limits_{n} u_n$ CV.

$\cancel{\boxed{M2}}$

- $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n.\ln n} \times 2^{2n\ln n} = \left(\dfrac{n+3}{n+\frac{1}{2}}\right)^{2n\ln n}$

$= e^{2n.\ln n.\ \ln\left(\frac{n+3}{n+\frac{1}{2}}\right)}$,

or $\lim\limits_{n\to\infty} 2n.\ln n.\ \ln\left(\dfrac{n+3}{n+\frac{1}{2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n.\ln n.\ \ln\left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{5/2}{n+\frac{1}{2}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 2n.\ln n.\ \ln\left(1 + \dfrac{5}{2n+1}\right)$

Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\dfrac{5}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dc

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n.\ln n.\ \ln\left(\dfrac{n+3}{n+\frac{1}{2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n}{2n+1}\ln n = \infty$.

Alors $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n} \times 2^{2n.\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,

⚠ D'où $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n}$ n'est pas équivalent en $+\infty$ à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n.\ln n}$

⚠ Les équivalents n'♡ pas composiOs !

$$\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\underbrace{2n.\ln n}} = e^{2n.\ln n.\ \ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)} \sim 2n.\ln n.\ \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

puissance n'est pas cte.

$$\underset{n\to\infty}{\sim} e^{2n.\ln n.\ \ln\frac{1}{2}}.$$

FAUX

équivlt & puissance cte pas de pb.

équivlt puissance non cte : ☹.

17) $U_n = \frac{n!}{e^n}$, on appliq le critère de D'Alembert à U_n.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

D'après le CdD'A, $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{e^n}$ DV.

18) $U_n = \frac{n!}{n^n}$, on appliq le critère de D'Alembert à U_n.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

On a : $n.\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = n.\ln\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$

$1+\varepsilon(n)$ "

$\ln(1+\varepsilon(n)) \sim \varepsilon(n)$ car $\varepsilon(n) \to 0$.

$\frac{n}{n+1} = 1 + \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)$, $\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \varepsilon(n)$

$$= n\left(\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= n.\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n \times \frac{-1}{n+1}$$ car $\frac{-1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

$$= \frac{-n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1}$

comme $e^{-1} < 1$, d'après CdD'A, $\sum_n U_n$ CV.

19) $U_n = \frac{(\ln(n))^n}{n!}$, on appliq le CdD'A à U_n,

on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(\ln n)^n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$

$\left(\frac{\ln n+1}{\ln n}\right)^n = e^{n.\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)}$, m̂ STRATÉGIE,

$$n.\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = n.\ln\left(1 + \frac{\ln n+1}{\ln n} - 1\right)$$

$\underset{n\to\infty}{\sim} n.\left(\frac{\ln n+1}{\ln n} - 1\right)$ car $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

et $n \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} - n = n \cdot \left(\dfrac{\ln(n(1+1/n))}{\ln n}\right) - n$

$= n\left(\dfrac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) = n + \dfrac{n \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} - n$

de DL et non ~.

$= n + \dfrac{n}{\ln n}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)\right) - n$ où $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$= \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{\ln n}\varepsilon(n)$

Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}}_{\to 0} \times \underbrace{\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n}_{\to e^0} = 0.$

Le CdD'A implique que $\sum_n u_n$ CV.

10) $u_n = \dfrac{(n+1)!}{1.4.7..(3n+1)} \cdot a^n$ $(a>0)$.

On appliq CdD'A,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!\ a^{n+1}}{1\times4\times7\times\dots(3n+1)(3n+4)} \times \frac{1\times4\times7\times\dots\times(3n+1)}{(n+1)!\ a^n}$$

⚠ expreθ u_{n+1} $a>0$

$$= \frac{n+2}{3n+4}\, a \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{3}$$

Donc • si $a>3$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ dc $\sum_n u_n$ DV.

• si $a<3$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ dc $\sum_n u_n$ CV.

• si $a=3$, le CdD'A ne permet pas de cclure.

si $a=3$: $u_n = \dfrac{1\times2\times3\times\dots\times(n+1)\times3^n}{1\times4\times7\times\dots\times(3n+1)}$.

$$u_n = \frac{(2\times3)\times(3\times3)\times(4\times3)\times\dots\times(3(n+1))}{(3\times1+1)(3\times2+1)\dots\times(3n+1)}$$ ← n termes

$\geq 1\times1\times1\times\dots\times1 = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ et dc $\sum_n u_n$ DV grossièrement.

21) On appliq critère de D'Alembert à $U_n = \dfrac{2\times 4\times \dots \times 2n}{n^n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2\times 4\times \dots \times (2n)\times(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2\times 4\times \dots \times 2n}$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

On $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e^{-n\cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1}$ dc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2\cdot e^{-1} < 1.$$

D'après CdD'A, $\sum\limits_n U_n$ CV.

22) $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)a^n \quad (a>0)$:

* $\sum\limits_{n\geq 0}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)a^n$: on a $\left(1+\dfrac{(-1)^{2n}}{2}\right)a^{2n} = \dfrac{3}{2}(a^2)^n$

et $\sum\limits_{n\geq 0}(a^2)^n$ CV ssi $a^2<1$ dc si $0<a<1$.

Donc $\sum\limits_{n\geq 0}\left(1+\dfrac{(-1)^{2n}}{2}\right)a^{2n}$ CV si $0<a<1$.

* $\sum\limits_{n\geq 0}\left(1+\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2}\right)a^{2n+1}$: on a,

$$\left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2}\right)a^{2n+1} = \frac{a}{2}(a^2)^n$$

et $\sum\limits_{n\geq 0}(a^2)^n$ CV ssi $a^2<1$ dc $0<a<1$.

** on ed q si $0<a<1$, $\sum\limits_{n\geq 0}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)a^n$ CV

car somme de 2 séries CV.

** si $a\geq 1$, $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}a^n\right)_n$ ne CV pas vers 0

dc $\sum\limits_{n\geq 0}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}a^n\right)$ DV.

23) On appliq la CdC à $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)}$$

car $\geqslant 0$

$$n \cdot \ln\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right) = n \ln\left(1+\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2} - 1\right)\right)$$

$\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

on $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} n\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2} - 1\right)$$

et $\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$= n \cdot \frac{n^2-5n+1-n^2+4n-2}{n^2-4n+2}$$

$$= n \cdot \frac{-n-1}{n^2-4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

Donc $\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = e^{-1} < 1$ dc $\sum_n u_n$ CV.

24) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$.

$$= \frac{2n+1 - 2n}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

or $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}}{\frac{1}{2\sqrt{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1} = 1$$

Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2n}}$. comme $\frac{1}{2\sqrt{2n}} \geqslant 0$

et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\sqrt{2n}}$ est SdR DV dc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ (DV).

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\sqrt{2n}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^{1/2}}$$

25) $U_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$= e\left(1 - e^{-1+n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$

on a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ & $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dc :

$U_n = e\left(1 - e^{-1+n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)}\right)$

$= e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)}\right)$

on a $\boxed{e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X}$ dc

$U_n \underset{n\to\infty}{\sim} e\left(-\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right)\right) = e \times \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right)$

or $\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) = \frac{1}{2n}\left(1 + 2\varepsilon(n)\right) \sim \frac{1}{2n}$

$\triangle$ $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} V_n \not\Rightarrow e^{U_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{V_n}$.

si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$.

ex: $n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1$

Ainsi $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$. Comme $\frac{e}{2n} \geq 0$,

$\sum_{n\geq 1} U_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{e}{2n}$ st de m̂ nature

et $\sum_{n\geq 1} \frac{e}{2n}$ est une SDR DV dc $\sum_{n\geq 1} U_n$ DV.

26) $\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}$.

$(n^3+2n)^{1/3}$ $(n^2-1)^{1/2}$ on v^t DL

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$\triangle$ α cte $\in \mathbb{R}$.

* $a \sim b \Rightarrow \exists\, \varepsilon / \varepsilon(x) \to 0$ et $a = b(1+\varepsilon(x))$.

$a + 1 = b(1+\varepsilon) + 1 \overset{?}{=} (b+1)(1+\hat{\varepsilon})$, $\hat{\varepsilon} \to 0$.

or $b(1+\varepsilon) + 1 = b + b\varepsilon + 1 = (b+1) = \ldots$

** $\frac{a}{b} \to 1$, $\frac{a+1}{b+1} \to ?$ si $a \to 0$ et $b \to 0$ oui !!

$a+1 \underset{a\to 0}{\not\sim} b+1$

$$\sqrt[3]{n^3+2n} = (n^3+2n)^{1/3} = \left(n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)^{1/3}$$

$$= n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/3}$$

$$= n\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{2}{n^2} - \frac{1}{9}\times\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^4}\,\varepsilon(n)\right) \qquad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$(n^2-1)^{\frac{1}{2}} = \left(n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} \qquad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$= n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{n^2} - \frac{1}{8}\times\frac{-1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\,\varepsilon(n)\right)$$

$$= n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{n^3}\,\varepsilon(n).$$

Ainsi $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$

$$u_n = \cancel{n} + \frac{2}{3n} - \frac{4}{9n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon(n) - \left(\cancel{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon_n\right)$$

$$u_n = \frac{7}{6n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon(n) \quad \text{où} \quad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{7}{6n}$ et $\frac{7}{6n} \geq 0$,

les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{7}{6n}$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est SdR DV, on cd $\sum_{n\geq 1} u_n$ DV.

$$\sqrt[3]{n^3+2n} = (n^3+2n)^{1/3} = \left(n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)^{1/3}$$

$$= n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/3}$$

$$= n\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{2}{n^2}-\frac{1}{9}\times\frac{4}{n^4}+\frac{1}{n^4}\varepsilon(n)\right) \quad \varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$(n^2-1)^{1/2} = \left(n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}$$

$$\varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$= n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{n^2}-\frac{1}{8}\times\frac{-1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\varepsilon(n)\right)$$

$$= n-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+\frac{1}{n^3}\varepsilon(n).$$

Ainsi $U_n = \sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$

$$U_n = \cancel{n}+\frac{2}{3n}-\frac{4}{9n^3}+\frac{1}{n^3}\varepsilon(n)-\left(\cancel{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+\frac{1}{n^3}\varepsilon_n\right)$$

$$U_n = \frac{7}{6n}+\frac{1}{n}\varepsilon(n) \quad \text{où } \varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

On en déduit que $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{7}{6n}$ et c $\frac{7}{6n}\geq 0$,

les séries $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{7}{6n}$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est SdR DV, on ccl $\sum_{n\geq 1} U_n$ DV.

Ex 10 Étudier CV ce $U_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ $(n\geq 2)$

Ns allons comparer $\sum_{n\geq 0} U_n$ à $\int_2^\infty f(x)\,dx$ où

$f :]1,\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$.

si $\alpha<1$: $\lim_{x\to\infty} x.f(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = \infty$ par croiss comparée car $1-\alpha>0$.

$1-\alpha>0$

Alors $\exists\, x_0>1$ tq $\forall x\geq x_0$, $x.f(x)\geq 1$;

d'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq x_0$, $U_n = f(n)\geq\frac{1}{n}>0$.

Ainsi c $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est SdR DV. $\sum_n U_n$ DV.

On suppose $\alpha\geq 1$: étudions var° de f ;

f est dérivable sur $]1,\infty[$ et $\forall x>1$:

$$f'(x) = \left(x^{-\alpha}.(\ln x)^{-\beta}\right)'$$

$$= -\alpha.x^{-\alpha-1}.(\ln x)^{-\beta}-\frac{\beta}{x}x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta-1} \qquad \frac{\beta}{x}x^{-\alpha} = x^{-\alpha-1}$$

$$= -x^{-\alpha-1}(\ln x)^{-\beta-1}(\alpha\ln x+\beta).$$

$\alpha\ln x+\beta>0 \iff \alpha\ln x\geq-\beta \iff \ln x\geq-\frac{\beta}{\alpha} \iff x\geq e^{-\beta/\alpha}$.

On a $\alpha\ln x+\beta\geq 0$ si $x\geq e^{-\beta/\alpha}$.

Donc pr tt $x\in\,]\max(1,e^{-\beta/\alpha}),\infty[$;

$f'(x)\leq 0$ et f est ↘.

On a aussi $f(x) > 0 \quad \forall x > 1$ Alors $\sum_n f(n)$ et $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ st de m̂ nature. Ainsi $\sum_n u_n$ DV si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$ et CV si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Ccl $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln x)^{\beta}}$ CV si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ et DV ds tous les autres cas.

Rq Qd on compare la série à intégrale d'une fonct° : il faut vérifier fonct° f est :
- ≥ 0 et ↘.

* si $\alpha < 0$ $\lim_{n \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow f$ n'est pas ↘ $\Rightarrow$ pas de comparaison

---

Donc $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ DV.

- si $\alpha = 0$, alors $\lim_{n \to \infty} n \cdot f(n) = \infty$ dc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$, $n f(n) \geq 1$. Alors $\forall n \geq n_0$; $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$ et $\sum_n \frac{1}{n}$ DV dc $\sum_n u_n$ DV.

Ex 10 On vt comparer $\sum_{n \geq 0} u_n$ à $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$.

* $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 2$ car $\ln x > 0, \forall x > 1$.

* f est ↘ : f est dérivable sur $[2, +\infty[$ car $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x^{\alpha} (\ln x)^{\beta} \neq 0$ sur $[2, +\infty[$.

$$f'(x) = \left(x^{-\alpha} \cdot (\ln x)^{-\beta}\right)'$$
$$= -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} (\ln x)^{\beta} - \beta \cdot \frac{(\ln x)^{-\beta-1}}{x} \cdot x^{-\alpha}$$
$$= -x^{\alpha-1} (\ln x)^{-\beta-1} (\alpha \ln x + \beta).$$

Signe de $\alpha \ln x + \beta$:

$$\alpha \ln x + \beta \geq 0 \iff \alpha \ln x \geq -\beta \iff \begin{cases} \ln x \geq \frac{-\beta}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ \ln x \leq \frac{-\beta}{\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Donc si $\alpha > 0$, $f'(x) \leq 0$, $\forall x \geq e^{-\beta/\alpha}$ ⇝ $\forall x \geq \max(e^{-\beta/\alpha}, 1)$.

si $\alpha > 0$, $\sum_n f(n)$ et $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ st de m̂ nature, à savoir $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha} (\ln x)^{\beta}}$ CV ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

- si $\alpha < 0$ alors f ↗ sur $[\max(e^{-\beta/\alpha}, 1), +\infty[$ dc $\lim_{n \to \infty} f(n) \neq 0$ car f est ↗ & ≥ 0.

Ex 11 : $(a_n)_n$ tq $a_n > 0$ et $\sum_n a_n$ CV.

a) $\sum_n a_n^2$, comme $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ car $\sum_n a_n$ CV

dc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $0 < a_n \leqslant 1$.

On ed pr $n \geqslant n_0$: $0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_n$.

Comme $\sum_n a_n$ CV, on ed par comparaison

que $\sum_n a_n^2$ CV.

b) $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1+a_n > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+a_n} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$.

Comme $\sum_n a_n$ CV, on ed q $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ CV.

NB $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$ car $\frac{1}{1+a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

c) $\sum_n a_n a_{2n}$, c $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ car $\sum_n a_n$ CV dc

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $0 < a_{2n} \leqslant 1$; on ed

pr $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant a_n \cdot a_{2n} \leqslant a_n$.

Comme $\sum_n a_n$ CV, on ed par comparaison

que $\sum_n a_n a_{2n}$ CV.

d) $\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$; $a^2+b^2 \geqslant 2|ab|$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant -2ab$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

Ainsi $\boxed{a^2+b^2 \geqslant 2|ab|}$

On ed $\propto \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n}^2 + \frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}$.

Comme $\sum_n a_n$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV, $\sum_n \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}\right)$ CV

dc $\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ CV.

Ex 14 : a) En comparant la somme partielle d'ordre n de la série harmoniq $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à une intégrale, mq H_n : $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$.

f est $\searrow$ dc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]k, k+1]$, on a :

$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$; dc en intégrant

entre $]k, k+1]$ $\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$

car intervalle longr $= 1$.

ne dépd pas de x dc cte.

En ajoutant pr $k = 1, \dots, n$
l'inégalité : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

on a $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$

D'où $\ln(n+1) \leq H_n$.

En ajoutant $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ pr $k = 1, \dots, n-1$;

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

on a $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n} \frac{1}{x} dx = \ln n$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n - 1$$

$\Rightarrow H_n - 1 \leq \ln n$

D'où $\boxed{\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1}$

b) comme $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$ dc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

on a $\forall n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)}$$

& $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1$, on ed d'aps

TH Gendarmes que $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$ dc $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

c) Pour n entier naturel non nul, on pose
$u_n = H_n - \ln(n)$ et $V_n = H_n - \ln(n+1)$.
Mq $(u_n)_n$ & $(V_n)_n$ cv réel $\gamma \in [\frac{1}{4}, 1]$.
(γ est cte d'Euler.)

On mq $(u_n)_n$ & $(V_n)_n$ st des suites adjacentes.

- $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = f(n) \leq 0$$

M1

soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$.

La f f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{-x - x(x+1) + (x+1)^2}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} \geqslant 0, \quad \forall x > 0.$$

Ainsi f est s^T ↗ dc $\hat{c}$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

On a $f(n) \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et dc $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_n$ ↘.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$= 0$ car $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\ln(1) = 0$

- $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1)$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$

M2 D'après $\boxed{TAF}$:

$$\frac{\ln(n+2) - \ln(n+1)}{\underbrace{n+2 - n+1}_{=1}} = \frac{1}{\theta} \overset{(\ln \theta)'}{} \quad 4\ \theta \in [n+1, n+2]$$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\theta} > 0$ car $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{n+1}$.

Ainsi $(v_n)_n$ est ↗.

- $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to\infty} -\ln(n+1) + \ln n$

$$= \lim_{n\to\infty} -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ st adjacentes et dc cv vs m̂ limite γ. De plus $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

ep $u_1 = 1 - \ln 1 = 1$
$v_1 = 1 - \ln 2 \geqslant 1 - 0{,}69 \geqslant 1/4$. Donc $\gamma \in [\frac{1}{4}, 1]$.

d) Donner valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Il suffit trouver n tq $u_n - V_n < 10^{-2}$.

Alors u_n et v_n seront des approximat°s à 10^{-2} de γ car:

$$0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant u_n - v_n < 10^{-2}.$$

$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) < 10^{-2} \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 10^{-2}$

$\iff \frac{n+1}{n} < e^{1/100}$

$\iff 1 + \frac{1}{n} < e^{1/100}$

$\iff \frac{1}{n} < e^{1/100} - 1$

$\iff n > \frac{1}{e^{1/100} - 1}$

Comme $\frac{1}{e^{\frac{1}{100}} - 1} \simeq 99,5$; il suffit de prendre $n = 100$.

Ex 16 : 1) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Mq $\sum_{n \geq 1} u_n$ CV.

2) soit entier $N \geq 1$. On pose $I_N = \int_N^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt$.

Mq ig I_N CV et donner valeur.

3) Pr tt entier $N \geq 1$, on considère $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} u_n$.

établir $2 . e^{-\sqrt{N}} \leq R_N \leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} + 2 e^{-\sqrt{N}}$.

4) ed un équivalent de R_N qd $N \longrightarrow \infty$.

1) On a $\lim_{n \to \infty} n^2 . u_n = \lim n^{3/2} e^{-\sqrt{n}} = 0$ par croissce comparée.

Donc $\exists\, n_0 \,/\, \forall n \geq n_0$, on aura :

$$0 \leq n^2 . u_n \leq 1$$

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV, on ed $\sum_n u_n$ CV.

2) soit $f(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$.

$\left(\lim_{t \to \infty} t^2 . \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to \infty} t . e^{-\sqrt{t}} = 0 \right.$ par croissce comparée.$\left.\right)$

soit $A \geq N$: on a $\int_N^A f(t)\, dt = \int_N^A \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt$

on pose $u = \sqrt{t}$; $du = +\frac{1}{2\sqrt{t}} dt. \Rightarrow dt = 2u \, du$

$= \int_{\sqrt{N}}^{\sqrt{A}} \frac{e^{-u}}{u} 2u \, du = \int_{\sqrt{N}}^{\sqrt{A}} 2 \frac{e^{-u}}{} du = \left[-2 e^{-u} \right]_{\sqrt{N}}^{\sqrt{A}}$

$= -2 e^{-\sqrt{A}} + 2 e^{-\sqrt{N}}$.

Donc $\lim_{A \to \infty} \int_N^A f(t)\, dt = 2 . e^{-\sqrt{N}}$ dc $\int_N^{\infty} f(t)\, dt$ CV

et vaut $2 . e^{-\sqrt{N}}$.

3) On étudie les var°s de f :

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^3}} < 0.$$

Donc f est $\searrow$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in [k, k+1]$. On a :

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

On intègre sur $[k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq \underbrace{\int_k^{k+1} f(x)\, dx}_{} \leq f(k)$$

" $\int_k^{k+1} f(t)\, dx$ " cte.

→ on ad : $\sum_{k=N}^{M} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=N}^{M} f(k)$.

d'où $\int_N^{M+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=N}^{M} f(k)$.

Lorsq $M \to \infty$, comme $\int_N^{\infty} f(t)\, dt$ CV et vaut $2 \cdot e^{-\sqrt{N}}$ et $\hat{c}$ $\sum_n f(n)$ CV, on a :

$$\int_N^{\infty} f(t)\, dt \leq \sum_{k=N}^{\infty} f(k).$$

Donc $\overset{\shortparallel}{2 e^{-\sqrt{N}}} \leq R_N$.

On ad $\underbrace{f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k)}_{}$. $\forall k > 0$:

$\forall M \geq N$, $\sum_{k=N}^{M} f(k+1) \leq \sum_{k=N}^{M} \int_k^{k+1} f(x)\, dx$

d'où $\sum_{k=N}^{M} f(k+1) \leq \int_N^{M+1} f(x)\, dx$.

Comme $\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ CV et $\hat{c}$ $\sum_n f(n)$ CV.

Lorsq $N \to \infty$, on obtient :

$$R_N - \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} = \sum_{k=N}^{\infty} f(k+1) \leq \int_N^{\infty} f(x)\, dx = 2 e^{-\sqrt{N}}$$

D'où $R_N \leq 2 \cdot e^{-\sqrt{N}} + \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}}$.

Ainsi $\forall N$, on a $\underline{2 \cdot e^{-\sqrt{N}} \leq R_N \leq 2 \cdot e^{-\sqrt{N}} + \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}}}$.

4) On mq $R_N \underset{N\to\infty}{\sim} 2 \cdot e^{-\sqrt{N}}$. On mq $\lim \frac{R_N}{2 e^{-\sqrt{N}}} = 1$

On a pr tt $N \geq 1$, d'après 3)

$$1 \leq \frac{R_N}{2 \cdot e^{-\sqrt{N}}} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Ainsi $\lim_{N \to \infty} \frac{R_N}{2 \cdot e^{-\sqrt{N}}} = 1$ d'après $\boxed{\text{TD 6}}$

Donc $R_N \underset{N\to\infty}{\sim} 2 \cdot e^{-\sqrt{N}}$.

Ex 17

$\hat{m}$ techniq

Par comparaison à une int, donner équivt de

a) $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

b) $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k}$

c) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme $\frac{1}{w_n}$ est-elle CV ?

a) $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est ↘ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On int entre $[k, k+1]$: (par rapport à x)

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \underline{\int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}}}.$$

→ on ed : $\sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{n+1}^{2n+1}$

$= 2\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}\right)$

Donc $2\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}\right) \leq u_n$.

(*) on ed $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx$ que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_n^{2n}$$

$= 2\left(2\sqrt{n} - \sqrt{n}\right)$

D'autre part : $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} = u_n$

D'où $u_n \leq 2\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)$.

On obtient :

$$2\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}\right) \leq u_n \leq 2\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)$$

On mq $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{2n} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2 - \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$

$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 1$.

On ed $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{2\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)} = 1$, dc $u_n \sim 2\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)$.

De plus $\sqrt{2n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ dc $u_n \sim 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{n}$.

b) $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln k}$,

soit $f : x \mapsto \frac{1}{x.\ln x}$. On étudie var° f.

La fonct° est inverse f dérivable q ne s'annule pas sur $[2,+\infty[$ dc est elle-même dérivable. $\forall x \geq 2$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \leq 0$$

car $x^2.\ln x \geq 0$ $\forall x \geq 2$ et $x^2.\ln^2 x \geq 0$.

Ainsi f est $\searrow$, dc $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a :
$\forall x \in [k, k+1]$: $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

On int sur $x \in [k, k+1]$ et on obtient :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k)$$

$v_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$ dc :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) = v_n .$$

On a $\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x.\ln x} dx$ de la forme $\frac{u'}{u}$

$= \left[\ln(\ln x) \right]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.

D'où $\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln 2 \leq v_n$.

Comme $\forall k \geq 2$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{n+1} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\, dx .$$

$$\Rightarrow v_n - f(2) + f(n+1) \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$

$$\Rightarrow v_n \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Ainsi $\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln 2 \leq v_n \leq \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2 - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

on a :

$$1 - \frac{\ln\ln 2}{\ln\ln(n+1)} \leq \frac{v_n}{\ln(\ln n+1)} \leq 1 - \frac{\ln\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{(n+1)\ln n+1}}{\ln\ln(n+1)}$$

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln 2}{\ln\ln(n+1))} = 0$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln 2}{\ln(\ln(n+1))} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\ln 2} \dfrac{1}{\ln(\ln(n+1))} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)} = 0$

Dc $\lim \dfrac{v_n}{\ln\ln(n+1)} = 1$ d'après TD6

dc $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(\ln+1)$.

c) $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Soit $f : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow (\ln x)^2$.

Comme $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2$ st $\nearrow$, f est $\nearrow$

dc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [k, k+1]$, on a :

$f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$

Dc en int pour $x \in [k, k+1]$, on obtient :

$\ln^2 k \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \ln^2 x \, dx \leq \ln^2(k+1)$

On ed $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \displaystyle\int_k^{k+1} \ln^2 x \, dx$.

D'où $w_n \leq \displaystyle\int_1^{n+1} \ln^2 x \, dx$

IPP

$\displaystyle\int_1^{n+1} \ln^2 x \, dx = \left[x \ln^2 x\right]_1^{n+1} - 2\int_1^{n+1} \ln x \, dx$ $\quad u = \ln^2 x \quad u' = 2\frac{1}{x}\ln x$
$\quad v' = 1 \quad v = x$.

$= (n+1)\ln^2(n+1) - 2\left[x . \ln x - x\right]_1^{n+1}$.

$= (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2$

$= (n+1)\ln(n+1)(\ln(n+1) - 2) + 2n$.

Ainsi on a $w_n \leq (n+1)\ln(n+1)(\ln(n+1) - 2) + 2n$.

De l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln^2 x \, dx \leq \ln^2(k+1)$, on ed :

$\sum\limits_{k=1}^{\cancel{n+1}} \displaystyle\int_k^{k+1} \ln^2(x) \, dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln^2(k+1$

On a $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2(k+1) = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \ln^2(k) = w_n + \ln^2(n+1) + - \underbrace{\ln^2(1)}_{=0}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \displaystyle\int_k^{k+1} \ln^2(x) \, dx = \int_1^{n+1} \ln^2 x \, dx = (n+1)\ln(n+1)(\ln(n+1) - 2) + 2n$.

D'où : $(n+1)\ln(n+1)(\ln(n+1)-2)+2n-\ln^2(n+1)\leq w_n$!

Ainsi

$$-\ln^2(n+1)+z_n \leq w_n \leq \cancel{(n+1)\ln(n+1)}\, z_n$$

où $z_n=(n+1)\ln(n+1)\left(\ln(n+1)-2\right)+2n$.

On va mtn mq : $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1)$

$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} z_n=(n+1)\ln^2(n+1)-2(n+1)\ln(n+1)+2n$$

$$=(n+1)\ln^2(n+1)\left(1-\underbrace{\frac{2}{\ln(n+1)}+\frac{2n}{(n+1)\ln^2(n+1)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\right)$$

$$\sim (n+1)\ln^2(n+1)$$

- On a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}1-\dfrac{2}{\ln(n+1)}+\dfrac{2n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

car $\dfrac{1}{\ln(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et $\dfrac{2n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\ln^2(n+1)+z_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{3n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

car $\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et $\dfrac{3n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

D'après TDG, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

Donc $w_n \underset{n\to\infty}{\sim}(n+1)\ln^2(n+1)$.

On a $\dfrac{1}{w_n}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

$\dfrac{1}{w_n}\geq 0$ dc $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{w_n}$ et

$\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ st de m̂ nature.

De plus, $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ est une CV, série de Bertrand

dc $\sum\limits_{n}\dfrac{1}{w_n}$ CV.

Ex 21 (Type DS) : On a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

1) Précisez nature série.
Puis donner dev asymptotiq à 2 termes pr les sommes partielles $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On considère d'abord la série de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et ses sommes partielles $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ pour $n \geq 1$.
On convient $V_0 = 0$.

2) Mq $\forall n \geq 1$, $v_{n+1} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq v_n$.

3) $\forall n \geq 1$, on pose $\begin{cases} a_n = V_{n-1} - 2\sqrt{n} \\ b_n = V_n - 2\sqrt{n} \end{cases}$.

4) Mq $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ CV $\hat{m}$ lim.

5) $\forall n \geq 1$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
Déterminer nature $\sum_{n\geq 1} w_n$.

6) $\forall n \geq 1$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. vérifier $U_n = 2\sqrt{n} + \lambda + \underbrace{\varepsilon_n}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$

$\downarrow$

$U_n = 2\sqrt{n} + b_n - W_n$.

Ed $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq
dev asymptotiq.

1) On $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

et $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ dc $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n u_n$ st de $\hat{m}$ nature.

Comme $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est $\boxed{\text{SdR}}$ DV dc $\sum_n u_n$ DV.

D'où : $(n+1)\ln(n+1)(\ln(n+1)-2)+2n-\ln^2(n+1)\leq w_n$!

Ainsi

$$-\ln^2(n+1)+z_n \leq w_n \leq \cancel{(n+1)\ln(n+1)}\, z_n$$

où $z_n=(n+1)\ln(n+1)\big(\ln(n+1)-2\big)+2n$.

On va mtn mq : $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1)$

- $$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} z_n=(n+1)\ln^2(n+1)-2(n+1)\ln(n+1)+2n$$
$$=(n+1)\ln^2(n+1)\Big(\underbrace{1-\frac{2}{\ln(n+1)}+\frac{2n}{(n+1)\ln^2(n+1)}}_{\substack{\downarrow\ n\to\infty\\ 0}}\Big)$$
$$\sim (n+1)\ln^2(n+1)$$

- On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{2}{\ln(n+1)}+\frac{2n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

car $\displaystyle\frac{1}{\ln(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et $\displaystyle\frac{2n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln^2(n+1)+z_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n+1}+\frac{3n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

car $\displaystyle\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et $\displaystyle\frac{3n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

D'après TDG, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1$

Donc $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1)$.

On a $\displaystyle\frac{1}{w_n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

$\displaystyle\frac{1}{w_n}\geq 0$ dc $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{w_n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ st de m̂ nature.

De plus, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ est une série de Bertrand CV,

dc $\displaystyle\sum_n\frac{1}{w_n}$ CV.

Ex 21 (Type DS) : On a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

1) Préciser nature série.
Puis donner dev asymptotiq à 2 termes pr les sommes partielles $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On considère d'abord la série de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n\geq 1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et ses sommes partielles $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ pour $n\geq 1$.
On convient $V_0 = 0$.

2) Mq $\forall n\geq 1$, $v_{n+1} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq v_n$.

3) $\forall n\geq 1$, on pose $\begin{cases} a_n = V_{n-1} - 2\sqrt{n} \\ b_n = V_n - 2\sqrt{n} \end{cases}$.

4) Mq $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ CV m̂ lim.

5) $\forall n\geq 1$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
Déterminer nature $\sum_{n\geq 1} w_n$.

6) $\forall n\geq 1$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. vérifier $U_n = 2\sqrt{n} + \lambda + \underset{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}{\varepsilon_n}$

$\downarrow$

$U_n = 2\sqrt{n} + b_n - W_n$.

Ed $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq dev asymptotiq.

1) On $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

et $u_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ dc $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n u_n$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est $\boxed{\text{SdR}}$ DV dc $\sum_n u_n$ DV.

2) TAF ou RC... $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

ĉ $2\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$; on ed :

$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{= v_{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{= v_n}$

3) On a $a_n = V_1 + \dots + V_{n-1} - 2\sqrt{n}$.

$b_n = V_1 + \dots + V_{n-1} + V_n - 2\sqrt{n}$.

On mq $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ st 2 suites adj. :

* $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$

* $a_{n+1} - a_n = v_n - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 0$ d'après 2).

Donc $(a_n)_n \nearrow$.

* $b_{n+1} - b_n = v_{n+1} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$ d'après 2).

Donc $(b_n)_n \searrow$.

Ainsi $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ st adja. & dc CV vers m̂ lim réelle.

4-5) $w_n = v_n - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Ainsi $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}} \geq 0$.

dc $\sum_{n>0} w_n$ et $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est SDR CV dc $\sum_{n\geq 1} w_n$ CV.

6) $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Vérifier $U_n = 2\sqrt{n} + b_n - W_n$.

$$2\sqrt{n} + b_n - W_n = 2\sqrt{n} + V_n - 2\sqrt{n} - W_n$$
$$= v_1 + v_2 + \dots + v_n - (v_1 - u_1 + v_2 - u_2 + \dots + v_n - u_n)$$
$$= u_1 + \dots + u_n$$
$$= U_n.$$

On note $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} W_n$.

(ces 2 limites $\exists$ d'après q°s précdtes.

Ainsi $U_n - 2\sqrt{n} = b_n - W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta - S$

En posant $\lambda = \beta - S$. et $\varepsilon_n = b_n - W_n - \lambda$, alors :

* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

* $U_n = 2\sqrt{n} + \lambda + \varepsilon_n$

III. Séries numériques de signe quelconque

Ex 23 : Étudier la CVce simple & absolue des séries de terme général suivant :

* Ds cas *, donner majorat simple du reste d'ordre n, $|R_n|$, de la série.

1) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}}$ 2*) $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3) $\dfrac{1}{(-1)^n n^2+n+1}$ 4) $\dfrac{n^2}{(1+i)^n}$

⚠ $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ne CV pas abslt de pb pr produit.

1) $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}}$.

Alors $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n\sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

Or $\dfrac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ dc $\sum\limits_{n\geqslant 2} U_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ st de m̂ natures. Or $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ $\boxed{\text{SdR}}$ CV.

dc $\sum\limits_{n\geqslant 2} U_n$ CV.

2) $U_n = \dfrac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}$

(i) CV-t-il absolument ? non.

$|U_n| = \dfrac{\ln n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n}$ série DV de Bertrand.

dc $\sum\limits_n U_n$ ne CV pas absolument.

$\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n$ est une série alternée :

$U_{n+1}\cdot U_n = \dfrac{-\ln n}{n}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant 0.$

On a :

* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ par croissance comparée.
* soit $f : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$, f est un quotient de f dérivable sr $[1,\infty[$ dt le dénominatr ne s'annule pas dc f est dérivable.

De plus $\forall x \geqslant 1$, on a :

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2} < 0$ si $x \geqslant e$.

Donc f est ↘ sr $[e,\infty[$ & $(|U_n|)_n$ décroît à partir de $n=3$.

Le critère des séries alternées CdSA implique $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n$ CV.

Ainsi $\sum_n u_n$ est semi-CV.

*

3) $u_n = \dfrac{1}{(-1)^n n^2 + n + 1}$

premier terme

* Enfin $\forall n$: $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\ln k}{k}\right| \leq \left|(-1)^{n+1} \dfrac{\ln n+1}{n+1}\right| = \dfrac{\ln n+1}{n+1}$

$u_n = \dfrac{1}{(-1)^n n^2 + n + 1}$.

$|u_n| \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ SdR CV et $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$.

Donc $\sum_n |u_n|$ CV et $\sum_n u_n$ est abs^t CV.

4) $u_n = \dfrac{n^2}{(1+i)^n}$

$|u_n| = \dfrac{n^2}{|1+i|^n} = \dfrac{n^2}{(\sqrt{2})^n}$

On a $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 |u_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^4}{(1+i)^n} = n^4 \cdot e^{-n \ln \sqrt{2}} = 0$

car $\ln(\sqrt{2}) > 0$

par croissance comparée.

Donc $\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0$, $0 \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ CV, $\sum_n |u_n|$ CV.

dc $\sum_n u_n$ est absolum^t CV.

5) $u_n = (-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. indique série alternée.

⚠ piège.

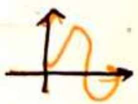
$|u_n| = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$ et $\sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ DV.

Donc $\sum_n |u_n|$ DV et dc $\sum u_n$ n'est pas CVAb.

* $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = \sin 0 = 0$

* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ est ↘ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in \,]0,1]$, $\forall n \geq 1$ et

sinus est ↗ sur $]0,1]$ dc $\forall n \in \mathbb{N}^*$:



$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow (|u_n|)_n$ est ↘

Le critère des séries alternées implique que $\sum_n u_n$ CV.

Donc $\sum_n u_n$ est semi-CVte.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}| = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

6) $U_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$. dev asymptotiq

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

dc $U_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8} \frac{(-1)^{2n}}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n} \varepsilon(n) - 1$ ∉ $\varepsilon(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$U_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} (1 + \hat{\varepsilon}(n))$ ∉ $\hat{\varepsilon}(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

• $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série CV car c'est une série alterné.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ est ↘.

. $\frac{1}{8n}(1 + \varepsilon(n)) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{8n}$ par déf° équivalent.

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{8n}$ est une série DV.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{8n}(1 + \varepsilon(n))$ DV. $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $\sum_n U_n$ est une série DV

car $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{|U_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{2} = 1$

7)* $U_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\frac{1}{\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}$

série altamée.

* $|U_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Comme $\sum_n \frac{1}{2\sqrt{n}}$ DV et est une série à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} |U_n|$ DV.

$\sum_n U_n$ est une série alternée car

$U_{n+1} \cdot U_n = -(\underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}_{\geq 0})(\underbrace{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}_{\geq 0})$

≤ 0.

* $|U_n| \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ dc $\lim_{n \to \infty} |U_n| = 0$.

* $|U_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = |U_{n+1}|$

dc $(|U_n|)_n$ est ↘.

Le critère des séries alternées CdSA impliq $\sum_n U_n$ CV.

Donc $\sum_n U_n$ est semi-CVte.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \right| \leq |U_{n+1}| = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

8) $U_n = n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dev asymptotiq

$$U_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon(n)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{n^2}\tilde{\varepsilon}(n)\right)$$

$$U_n = \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{n^2}\tilde{\varepsilon}(n)$$

+ $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$U_n = \frac{7}{24n^2}\left(1 + \hat{\varepsilon}(n)\right).$$

Ainsi $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{7}{24n^2}$ et $\frac{7}{24n^2} \geq 0$

Donc $\sum_n U_n$ et $\sum_n \frac{7}{24n^2}$ st de m̂ natures.

Comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum_n U_n$ CV.

Rq $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{7}{24n^2}$ et $\frac{7}{24n^2} \geq 0$, dc $U_n \geq 0$ $\boxed{\text{apcr}}$.

Dc $\sum_n U_n$ est une série à termes positif et dc CV absolument.

⚠ CdSA

⚠ • $(|U_n|)_n \searrow$

• $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

9) $U_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$

• $|U_n| = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ dc $\sum_n U_n$ ne CV pas absolumt.

• $\sum_n U_n$ est une série alternée car $U_{n+1} U_n =$

$$U_{n+1} \cdot U_n = \frac{-1}{\underbrace{(n+1) + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}_{>0}} \times \frac{1}{\underbrace{n + (-1)^n\sqrt{n}}_{>0}} \leq 0$$

On essaie d'appliquer le critère des séries alternées :

$$|U_{2n+1}| - |U_{2n}| = \frac{1}{\underbrace{2n+1-\sqrt{2n+1}}_{\geq 0}} - \frac{1}{\underbrace{2n+\sqrt{2n}}_{\geq 0}}$$

~~$(U_n)_n \searrow$~~

→ $U_{2n} \geq U_{2n+1}, U_{2n-1}$.

$$= \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n} - 1}{(2n+1-\sqrt{2n+1})(2n+\sqrt{2n})} \geq 0.$$

De m̂ $|U_{2n}| - |U_{2n-1}| \leq 0$. Donc $(|U_n|)_n$ n'est pas $\searrow$.

Ainsi le CdSA ne s'appliq pas.

Dc deV asymptotiq : $\frac{1}{1+x} = 1-x+x\,\varepsilon(x)$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\varepsilon(n)\right) \text{ où } \varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\varepsilon(n)\right).$$

La série des $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée CV car $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ décroit et tend vers 0.

Puis $\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon(n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Ensuite $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ dc $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon(n))$ st de m̂ natures.

La série $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série CV

dc $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon(n))$ CV.

Donc $\sum_n U_n$ est la somme de 2 séries CV.

Donc $\sum_n U_n$ CV. On a mqé $\sum_n U_n$ est semi-CV.

10) $U_n = \left(\frac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n.$

• $|U_n| = \left(\frac{\sqrt{(2n+3)^2+(2n)^2}}{\sqrt{(3n)^2+1^2}}\right)^n$

On en déduit $|U_n|^{1/n} = \sqrt{\frac{(2n+3)^2+(2n)^2}{(3n)^2+1}}$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{8n^2}{9n^2}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

D'après le CdC, $\sum_n U_n$ CV absolument.

Rq si $\lim |U_n|$ ne permet pas de conclure étudier $U_n = \underbrace{V_n}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{W_n}_{\in\mathbb{R}}$.

$\sum V_n$ CV et $\sum W_n$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV.

11) $U_n = (-1)^n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

- $|U_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$

comme $\frac{2}{n-1} \geq 0$ dc $\sum_n |U_n|$ et $\sum_n \frac{2}{n-1}$ st de m̂ nature.

Comme $\sum_n \frac{2}{n-1}$ DV dc $\sum_n U_n$ ne CV pas abslt.

On réalise un dev asymptotiq.

$$U_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) = (-1)^n\left(\frac{2}{n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \varepsilon(n)\right)$$

tq $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$U_n = 2\frac{(-1)^n}{n-1} - 2\frac{(-1)^n}{(n-1)^2}(1+\varepsilon(n)), \quad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{n-1}$ est une série alterné CV.

car $\left(\frac{1}{n-1}\right)_n$ décroit & CV vers 0

- $\left|\frac{(-1)^n}{(n-1)^2}(1+\varepsilon(n))\right| = \frac{1}{(n-1)^2}|1+\varepsilon(n)| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)^2}$

et $\frac{1}{(n-1)^2} \geq 0$ dc $\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{(n-1)^2}(1+\varepsilon(n))\right|$

et $\sum_n \frac{1}{(n-1)^2}$ st de m̂ nature.

Et comme $\sum_n \frac{1}{(n-1)^2}$ CV, on ed que :

$\sum_n \frac{(-1)^n}{(n-1)^2}(1+\varepsilon(n))$ CV absolmt dc CV.

Ainsi $\sum_n U_n$ est somme de 2 séries CV dc CV.

Ainsi $\sum_n U_n$ est semi-CV.

Autre méthode.

- $|U_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\ln(1)=0$

- $|U_{n+1}| - |U_n| = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{(n+2)(n-1)}{(n)(n+1)}\right)$

$= \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right) \leq 0$ car $n^2+n-2 \leq n^2+n$

$\rightarrow \frac{n^2+n-2}{n^2+n} \leq 1$.

Ainsi $(|U_n|)_n$ décroit & CV vers 0.

Le critère des séries alternées $\Rightarrow \sum_n U_n$ CV

24 Étudier (CV) $\sum_n U_n$, $U_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$

ex 2 séries termes génér^x équivalts ne st pas fct de m̂ nature.

$U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$

- $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est série alternée (CV)

car $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ décroît & (CV) vers 0.

- $\sum_n \dfrac{1}{n}$ est une série (DV).

Donc $\sum_n U_n$ est somme de 2 séries, l'une (CV), l'autre (DV) dc $\sum_n U_n$ (DV).

(Rq): $|U_n|$ DV $\Sigma |U_n|$ DV.

On a $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est (CV)

dc m̂ si les termes généraux st équivalents, $\sum_n U_n$ et $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne st pas de m̂ nature.

⚠ $U_n \sim V_n$ si ils ne st pas de signe ct $\Rightarrow$ ne st pas m̂ nature.

25 Selon val^{rs} $\alpha > 0$, (CV) simple & absolue de

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

- $|U_n| = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$ $\forall n \geq 2$ car $\alpha > 0$

$\underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Comme $|U_n| \geq 0$, $\sum_n |U_n|$ et $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ st m̂ nature.

Comme $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ (CV) si $\alpha > 1$.

La série $\sum_n U_n$ est absolument (CV) si $\alpha > 1$ mais pas si $0 < \alpha \leq 1$

- $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \dfrac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}$, on utilise $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X\varepsilon(X)$ $\varepsilon(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$

& $X = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\varepsilon(n)\right)$ & $\varepsilon(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$= \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{n^{2\alpha}}(1 + \varepsilon(n))$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\varepsilon(n))$$

. $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée CV car $\alpha > 0$

car $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_n$ décroît et CV vers 0. "$\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2}$"

. $\frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\varepsilon(n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ et $\frac{1}{n^{2\alpha}} > 0$ et $\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}$ et

$\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\varepsilon(n))$ st de m̂ nature.

$\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}$ CV ssi $2\alpha > 1$ dc si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Ainsi si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum_n U_n$ CV et si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

$\sum_n U_n$ DV.

Cl : si $\alpha > 1$: $\sum_n U_n$ est absolument CV.

si $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$: $\sum_n U_n$ est semi-CV.

si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\sum_n U_n$ est DV.

Ex 26

Règle d'Abel?...

$$U_n = \frac{\cos n}{n + \cos n} = \varepsilon_n \tilde{u}_n$$

où $\varepsilon_n = \frac{1}{n+\cos n}$ et $\tilde{u}_n = \cos n$.

soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n\right| = \left|\sum_{n=0}^N \cos n\right| = \left|\sum_{n=0}^N \mathrm{Re}(e^{in})\right|$$

$$= \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^N e^{in}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^i}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{1}{1-e^i} + \frac{|e^{i(N+1)}|}{|1-e^i|} = \frac{2}{|1-e^i|}$$

Comme $\frac{2}{|1-e^i|}$ ne dépend pas de N,

$\Rightarrow \left|\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n\right|$ est majorée indépendamment de N.

• on a $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ car $n-1 \leq n+\cos n \leq n+1$

dc $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+\cos n} \leq \frac{1}{n-1}$.

or $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, $\boxed{\text{TDG}}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\cos n} = 0$

• $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{1}{n+1+\cos(n+1)} - \frac{1}{n+\cos n} = \frac{n+\cos n - n - 1 - \cos(n+1)}{(n+1+\cos(n+1))(n+\cos n)}$

$$= \frac{\cos n - \cos(n+1) - 1}{(n+1+\cos(n+1))(n+\cos n)}$$

D'après $\boxed{TAF}$, $\exists\, \theta_n \in]n, n+1[$ tq

$$\frac{\cos n - \cos(n+1)}{n-(n+1)} = -\sin \theta_n$$

Donc $\cos n - \cos(n+1) = \sin \theta_n$.

Ainsi $$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{\sin\theta_n - 1}{(1+n+\cos(n+1))(n+\cos n)} \leq 0$$

car $n + \cos n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$n+1+\cos(n+1) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Dc $(\varepsilon_n)_n \searrow$

$\sin\theta_n - 1 \leq 0.$

Règle d'Abel : si $u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$

- $(\varepsilon_n)_n \geq 0$, $\searrow$ & CV vers 0.
- $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M.$

↳ D'après RdA $\sum_n u_n$ CV

b) $$v_n = \frac{\cos n}{n^{3/4} + \cos n}.$$

dev asympt.

- $$v_n = \frac{\cos n}{n^{3/4}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{\cos n}{n^{3/4}}}.$$

$$v_n = \frac{\cos n}{n^{3/4}}\left(1 - \frac{\cos n}{n^{3/4}} + \frac{\cos n}{n^{3/4}}\,\varepsilon(n)\right).$$

4 $\varepsilon(n) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et car $\dfrac{\cos n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc $$v_n = \frac{\cos n}{n^{3/4}} - \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}\,(1+\varepsilon(n)).$$

On a $$\frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$$

et $\dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}} \geq 0$ dc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n))$

st de m̂ nature.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$

Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ ~~et~~ $\boxed{SDR}$ CV dc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$

est une série absolument CV.

Donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n))$ CV.

- on écrit : $\dfrac{\cos n}{n^{3/4}} = \tilde{v}_n \cdot \tilde{\varepsilon}_n$ où $\tilde{v}_n = \cos n$, $\tilde{\varepsilon}_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$!

Alors $(\tilde{\varepsilon}_n)_n$ est ↘ & CV vers 0.

$\forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^{N} \tilde{v}_n \right| \leq \dfrac{2}{|1-e^i|}$

dc $\sum_{n=0}^{N} \tilde{v}_n$ est bornée uniformément en N.

La règle d'Abel impliq $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{n^{3/4}}$ CV.

On a mqé $\sum_n v_n$ est somme de 2 séries CV

dc $\sum_n v_n$ CV.

---

c) $W_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$ — dev asympt

$= \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} + \dfrac{\cos^2 n}{\sqrt{n}^2} + \dfrac{\cos^2 n}{\sqrt{n}^2}\,\varepsilon(n)\right)$

où $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left(\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \right.$ où $\left.\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$.

$W_n = \underbrace{\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}}_{\text{cv RdA}} - \underbrace{\dfrac{\cos^2 n}{n}}_{\text{DV}} + \underbrace{\dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}}\left(1+\varepsilon(n)\right)}_{\text{CV abs}}$

(i) on a $\left|\dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n))\right| \sim \dfrac{|\cos^3 n|}{n^{3/2}}$

dc $\sum_{n\geq 1}\left|\dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n))\right|$ et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{|\cos^3 n|}{n^{3/2}}$ ont m̂ nature.

NB: on fait dev asympt à l'ordre 2 pr obtenir terme $K_n(1+\varepsilon(n))$ ← CV ABSOLUE TOUJOURS !

De plus, $0 \leq \left|\dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$

et comme $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ CV dc finalement

$\sum_{n\geq 1}\dfrac{|\cos^3 n|}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 1}\left|\dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}}(1+\varepsilon(n))\right|$ CV.

(ii) on écrit $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} = \tilde{w}_n \cdot \tilde{\varepsilon}_n$ où $\tilde{w}_n = \cos n$ & $\tilde{\varepsilon}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

comme précédemment $\forall N \in \mathbb{N}, \left|\sum_{n=0}^{N}\tilde{w}_n\right| \leq \dfrac{2}{|1-e^i|}$

et $(\tilde{\varepsilon}_n)_n$ décroît & CV vers 0.

La règle d'Abel impliq $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ CV.

(iii) Mq $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{n}$ (DV).

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) = \frac{\cos(2n) + 1}{2}$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ (CV) car $\left| \sum_{n=1}^{N} \cos(2n) \right| = *$

$$* = \left| \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{2in} \right) \right| = \left| \mathrm{Re}\left(e^{2i} \frac{1 - e^{2iN}}{1 - e^{2i}} \right) \right|$$

$$\leq \left| \frac{e^{2i} - e^{2i(N+1)}}{1 - e^{2i}} \right| \leq \frac{|e^{2i}|}{|1 - e^{2i}|} + \frac{|e^{2i(N+1)}|}{|1 - e^{2i}|}$$

$$= \frac{2}{|1 - e^{2i}|}$$

$*\left(\frac{1}{n}\right)_n$ décroît & (CV) vers 0.

La règle d'Abel impliq $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ (CV).

comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (DV), on ed $\underset{\infty}{ }$ $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{n}$ (DV).

Ainsi $\sum_n W_n$ est somme de 2 séries (CV) & d'une série (DV).

Donc $\sum_n W_n$ (DV).

Ex 27 soit $\sum_{n\geq 1} U_n$ (CV) $\left| \lim_{n\to\infty} U_n = 0 \right|$.

1)

Dc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, on a $|U_n| < 1$, dc $1 + U_n > 0$.

Ainsi V_n est bien déf $\forall n \geq n_0$.

(1) q° mq V_n bien déf à partir d'un rg n_0).

2) Mq si $(U_n)_n$ st tous (+) $\Rightarrow \sum_{n\geq n_0} V_n$ (CV).

comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, dc puisq $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$,

on a $V_n = \ln(1 + U_n) \underset{n\to\infty}{\sim} U_n$.

Comme $U_n \geq 0$, $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ st de m̂ nature

dc $\sum_n V_n$ (CV) car $\sum_n U_n$ (CV)

3) Déterminer nature série $\sum_{n\geq n_0} V_n$ qd $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $V_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

$V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 \varepsilon(n)$ où $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}(1 + \varepsilon(n))$.

• $\frac{1}{2n}(1+\varepsilon(n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2n} \geq 0$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ DV dc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}(1+\varepsilon(n))$ DV.

• $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est série alternée car $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = *$

$* = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 0$ et $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|\right)_n$ décroît

et td vers 0. $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

dc le critère des séries alternées implique

que $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV.

Donc $\sum_n v_n$ est somme série CV &

série DV dc $\sum_n v_n$ DV.

4) Hypo 2) vraie sans hypo signe.

Non, sans l'hypo signe, $\sum_n u_n$ CV

n'impliq pas $\sum_n v_n$ CV car $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV

mais $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ DV.

Ex 29 soit $u_n = \frac{(-1)^{\{E(\sqrt{n})\}}}{\sqrt{n}}$

1) Critère séries alternée pt-il s'appliq $\sum_{n\geq 1} u_n$?

2) soit $N \geq 1$. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$N^2+1 \leq n \leq N^2+2N$, on a $E(\sqrt{n}) = N$.

3) Mq $\forall N \geq 1$: $|u_{N^2+1} + \dots + u_{N^2+2N}| > 1$.

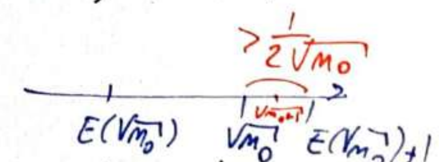
4) en déd nature $\sum_{n\geq 1} u_n$.

1) $\sum_n u_n$ n'est pas série alternée :

cdc ...

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{x_n}}$ ac $x_n \in]n, n+1[$.

dc $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.



Ainsi $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n_0} - E(\sqrt{n_0}) < \frac{1}{2\sqrt{n_0}}$

et alors

• $\frac{1}{2n}(1+\varepsilon(n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2n} \geq 0$

et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}$ DV dc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}(1+\varepsilon(n))$ DV.

• $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est série alternée car $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = *$

$* = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 0$ et $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|\right)_n$ décroît

et td vers 0. $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

dc le critère des séries alternées implique que $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV.

Donc $\sum_n v_n$ est somme série CV & série DV dc $\sum_n v_n$ DV.

4) Hypo 2) vraie sans hypo signe.

Non, sans l'hypo signe, $\sum_n u_n$ CV n'impliq pas $\sum_n v_n$ CV car $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV mais $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ DV.

Ex 29 soit $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{\sqrt{n}}$

1) Critère séries alternée pt-il s'appliq $\sum_{n\geq 1} u_n$?

2) soit $N \geq 1$. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ vérift $N^2+1 \leq n \leq N^2+2N$, on a $E(\sqrt{n}) = N$.

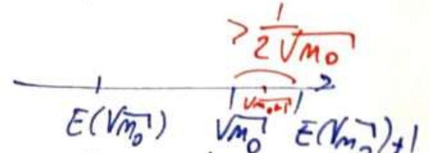
3) Mq $\forall N \geq 1$: $|u_{N^2+1}+\dots+u_{N^2+2N}| > 1$.

4) ed nature $\sum_{n\geq 1} u_n$.

1) $\sum_n u_n$ n'est pas série alternée : cdc ...

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{x_n}}$ avec $x_n \in]n, n+1[$.

dc $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.



Ainsi $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n_0}-E(\sqrt{n_0}) < \frac{1}{2\sqrt{n_0}}$.

et alors

1) $\sum_n u_n$ n'est pas série alternée, m̂ à partir d'un certain rang.

soit $m_0 \in \mathbb{N}$. Alors $E(\sqrt{m_0^2}) = m_0$.

Mq $E(\sqrt{m_0^2+1}) = m_0$, ce qui montrera que $u_{m_0^2}$ et $u_{m_0^2+1}$ sont même signe.

$1+m_0 > \sqrt{m_0^2+1} \geq m_0$. On a $\sqrt{m_0^2+1}$.

$$u_{m_0^2} = \frac{(-1)^{m_0}}{\sqrt{m_0^2}} \quad \text{et} \quad u_{m_0^2+1} = \frac{(-1)^{m_0}}{\sqrt{m_0^2+1}}$$

D'autre part, $\underbrace{1+m_0-\sqrt{m_0^2+1}}_{>0\,?} = 1-(\sqrt{m_0^2+1}-\sqrt{m_0^2})$.

D'après $\boxed{\text{TAF}}$, $\exists\ x \in\ ]m_0^2, m_0^2+1[$ tq

$$\sqrt{m_0^2+1}-\sqrt{m_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ ainsi :}$$

$$\begin{aligned} 1+m_0-\sqrt{m_0^2+1} &= 1-\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &> 1-\frac{1}{2\sqrt{m_0^2+1}} \\ &\geq \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Donc $m_0 \leq \sqrt{m_0^2+1} < m_0+1$ et $E(\sqrt{m_0^2+1}) = m_0$.

Ainsi, $u_{m_0^2}$ et $u_{m_0^2+1}$ sont m̂ signe, $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas alternée, m̂ à partir d'un certain rang.

2) On doit mq $N \leq \sqrt{n} < N+1$.

comme $n \geq N^2+1$, $\sqrt{n} \geq \sqrt{N^2+1} > \sqrt{N^2} = N$.

D'autre part, $n \leq N^2+2N$ dc :

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{N^2+2N}$$

or $\sqrt{N^2+2N} < N+1 \iff N^2+2N < (N+1)^2 = N^2+2N+1$

$$\iff 0 < 1.$$

Donc on a bien $N \leq \sqrt{n} < N+1$ d'où $E(\sqrt{n}) = N$.

Rq Cela démontre que $\sum_n u_n$ n'est pas alternée au delà du rang N^2+1.

3) $$|u_{N^2+1}+\dots+u_{N^2+2N}| \overset{(*)}{=} \left|(-1)^N\left(\frac{1}{\sqrt{N^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N^2+2N}}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N^2+2N}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N^2+2N}}}_{+\text{ petit terme}} \times 2N \quad \times \text{ nbre terme}$$

car $\forall k = 1, 2, \dots, 2N$, $\frac{1}{\sqrt{N^2+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{N^2+2N}}$ et il y a $2N$ termes ds la somme.

$$(*) = \left|\frac{(-1)^{\overbrace{E(\sqrt{N^2+1})}^{N}}}{\sqrt{N^2+1}}+\dots+\frac{(-1)^{\overbrace{E(\sqrt{N^2+2N})}^{N}}}{\sqrt{N^2+2N}}\right|$$

On a dc : $\left|U_{N^2+1} + \dots + U_{N^2+2N}\right| \geq \dfrac{2N}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} > 1.$

Ns avons $2N \leq N^2$, $\forall N \geq 2$ car $N^2 - 2N = \underbrace{N}_{\geq 0}\underbrace{(N-2)}_{\geq 0} \geq 0$

dc $\sqrt{N^2+2N} \leq \sqrt{2N^2} = \sqrt{2} \cdot N$ d'où *

Pour $N=1$, $\dfrac{2N}{\sqrt{N^2+2N}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1.$

4) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne vérifie pas $\boxed{CdC}$ car

pour $\varepsilon = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists p, q \in \mathbb{N}$, $p = N^2+1$, $q = N^2+2N$ tq :

$$\left|\sum_{k=q}^{q} u_k\right| > \varepsilon.$$

Ainsi si la série ne vérifie pas $\boxed{CC}$.

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ DV}.$$

Ex 31 1) soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, tq $\int_1^{\infty} f'(t)\,dt$ soit absolmt CV ; pr $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = -f(n) + \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$$

a) en appliquant FF Taylor-Laplace, mq

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = +f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,dt.$$

b) Quelle est la nature de $\sum u_n$?

c) ed série $\sum f(n)$ est CV ssi $\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ est CV

2) soit $f(t) = \dfrac{e^{t\sqrt{t}}}{t^\alpha}$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$.

a) vérifier f satisfait hypo 1).

b) Mq $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ est CV (IPP).

c) ed $\sum \dfrac{e^{t\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ est CV.

1) a) On fait $\boxed{IPP}$

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = +f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)\, f'(t)\,dt$$

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \Big[(t-(n+1))f(t)\Big]_n^{n+1} \qquad u = f(t) \quad u' = f'(t)$$
$$v' = 1 \quad v = t-(n+1)$$

$$- \int_n^{n+1} (t-(n+1))\, f'(t)\,dt.$$

$$= +f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t).\, f'(t) =$$

b) Nature $\sum u_n$? $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = -f(n) + \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

$$= \int_n^{n+1} (n+1-t)\, f'(t)\,dt.$$

$\forall t \in [n, n+1]$,

$$0 \leq n+1-t \leq 1 \quad dc :$$

$$0 \leq (n+1-t)\,|f'(t)| \leq |f'(t)|$$

d'où $u_n \leq \displaystyle\int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} |u_n| \leq \int_1^{N+1} |f'(t)|\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt = \int_1^{N+1} |f'(t)|\,dt \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_1^{\infty} |f'(t)|\,dt$$

car $\displaystyle\int_1^{\infty} f'(t)\,dt$ CV absolument.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$ CV & par comparaison,

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ CV dc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}$ CV absolument.

c) ed ∞ $\sum f(n)$ est CV ssi $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ est CV.

On a $f(n) = -u_n + \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt.$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n) = -\sum_{n=1}^{N} u_n + \int_1^{N+1} f(t)\,dt.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n)$ $\exists$ ssi $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} f(t)\,dt$ $\exists$

car $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ CV.

(14) Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ CV ssi $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ CV.

2) a) $f(t) = \dfrac{e^{i\sqrt{t}}}{t^\alpha}$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$.

Vérifier f satisfait hypo q1)

$$f(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{t^\alpha} + i.\frac{\sin\sqrt{t}}{t^\alpha}.$$

Comme cosinus, sinus, $\sqrt{\cdot}$, $t \mapsto t^\alpha$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$ & ĉ $t^\alpha \neq 0$, $\forall t \neq 0$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall t > 0$, on a :

$$f'(t) = -\sin\sqrt{t}.\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{t^\alpha} - \alpha.\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\alpha+1}}$$

$$+ i.\frac{\cos\sqrt{t}}{t^\alpha}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{\alpha\, i.\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha+1}}$$

$$= -\frac{\alpha.e^{i\sqrt{t}}}{t^{\alpha+1}} + \frac{i e^{i\sqrt{t}}}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Donc $|f'(t)| \leq \dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}}|e^{i\sqrt{t}}| + \dfrac{1}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}}|ie^{i\sqrt{t}}|$

$$= \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} + \frac{1}{2.t^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dt$ CV car $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ et $\alpha + 1 > 1$.

Donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^\infty |f'(t)|\,dt$ CV et dc f satisfait les hypothèses de (1).

b) Mq $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,dt$ CV à IPP.

Soit $a > 0$, on a :

$$\int_1^a f(t)\,dt = \int_1^a \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^\alpha}\,dt$$

$\left|\dfrac{e^{i\sqrt{t}}}{t^\alpha}\right| = \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha > \frac{1}{2}$

si $\alpha = \frac{3}{4}$

$$= 2\int_1^a \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{i\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{t^\alpha}\,dt$$

$u' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot e^{i\sqrt{t}}$ $u = \dfrac{e^{i\sqrt{t}}}{i}$

$v = \dfrac{1}{t^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ $v' = \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\dfrac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

$$= 2\left(\left[\frac{1}{t^{\alpha-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{i\sqrt{t}}}{i}\right]_1^a - \int_1^a\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{e^{i\sqrt{t}}}{i.t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dt\right).$$

comme $\left|\dfrac{e^{i\sqrt{t}}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right| = \dfrac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dt$ CV.

dc $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_1^a \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{e^{i\sqrt{t}}}{i\,t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dt\ \exists$.

comme $\left| \frac{1}{a^{\alpha-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{i\sqrt{a}}}{i} \right| = \frac{1}{a^{\alpha-\frac{1}{2}}} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$, on

ed $\lim_{a\to\infty} \int_1^a f(t)\,dt = \frac{-2e^i}{i} + \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{i}\int_1^\infty \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dt.$

dc $\int_1^\infty f(t)\,dt$ CV.

c) ed $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ CV.

comme $\int_1^\infty f(t)\,dt$ CV, $\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ CV

vers $\int_1^\infty f(t)\,dt$ dc d'après 1c, $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ CV.

Université de Lille

L2 Mathématiques

2020/2021

Séries numériques et intégrales généralisées M33 - Devoir Surveillé N°2

LUNDI 11 JANVIER, 15H30-18H30, DURÉE 3 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices et autres objets électroniques sont interditsts. La rédaction tiendra une part importante dans l'évaluation des copies.

Exercice 1. Soit pour n entier, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

1. Pour tout n, montrer la convergence de I_n et calculer I_0. $= 0$.
2. En écrivant $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\frac{xdx}{(1+x^2)^{n+2}}$ et en faisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n$.
3. On pose $u_n = \sqrt{n} I_n$. Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
4. Montrer que la série de terme général $v_n = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.
5. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Pour chacune des séries suivantes, indiquer si elle converge ou si elle diverge. Justifier.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^3-1}{n^4+n^2+1}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$,

Exercice 3. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier les variations de $(u_n)_n$. En déduire que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ est décroissante. 1 1 90'
3. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$.
4. Déterminer la nautre (absolue convergence, semi-convergence ou divergence) de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{u_n}$. Justifier.

60'.

Exercice 4. Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}dx.$$

1. Calculer $a_n = u_n + v_n$ et indiquer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$, on a $|u_n - v_n| \leqslant \frac{\pi}{2(1+\pi n)^2}$. Quelle est la nature $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - v_n)$?
3. Déduire des résultats précédents que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont des séries divergentes.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x}dx$ diverge.
5. Soit α un paramètre réel. On pose $f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha}$, $\quad \forall x \geqslant 0$. Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge et pour quelles valeurs de α elle converge.