

1. $\int \frac{1}{\cos x} dx$	2. $\int \frac{1}{\sin x} dx$	3. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$	4. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$	5. $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$
6. $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$	7. $\int \frac{1}{1 + \sin^2(x)} dx$	8. $\int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx$	9. $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} dx$	10. $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$
11. $\int \sin(x)\cos(x) dx$	12. $\int \sin(x)\tan(x) dx$	13. $\int \frac{1}{\tan(1+x)} dx$	14. $\int \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx$	15. $\int \frac{1 + \sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$
16. $\int \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1} dx$	17. $\int \frac{1 + \cos(x) + \cos^2(x)}{1 + \sin(x) + \sin^2(x)} dx$			

$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right  + C$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right  + C$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left  \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} \right  + C$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right  + C$	
$\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} + C$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan(x)) + C$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left  \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} \right  + C$	$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} - \ln  1 - \sin(x)  + C$	
$-\frac{1}{4} \cos(2x) + C$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right  - \sin(x) + C$	$\ln  \sin(1+x)  + C$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C$	$-x +$
$-\ln  \sin(x) + \cos(x)  + C$				

1.  $I = \int \frac{1}{\cos x} dx$ , on pose  $x = \arcsin(u) \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ , on a donc  $I = \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du = -\frac{1}{2} \ln|1-u| + \frac{1}{2} \ln|1+u| + C, C \in \mathbb{R}$

Finalement,  $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.$

2.  $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$ , on pose  $x = \arccos u \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du$ , donc  $I = -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2} \ln|1-u| - \frac{1}{2} \ln|1+u| + C, C \in \mathbb{R}$

$$\text{Finalement, } I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C.$$

$$3. I = \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx, \text{ on pose } x = 2u \implies dx = 2du, \text{ on obtient } I = 2 \int \frac{1}{\sin(2u) + \cos(2u)} du = 2 \int \frac{1}{2 \sin(u)\cos(u) + \cos^2(u) - \sin^2(u)} du,$$

on divise en bas et en haut pas  $\cos^2(u)$  :  $I = 2 \int \frac{\frac{1}{\cos^2(u)}}{2 \tan(u) + 1 - \tan^2(u)} du$ , on remarque le changement de variable simple  $w = \tan u \implies dw = \frac{1}{\cos^2(u)} du$ ,

$$\text{donc } I = -2 \int \frac{1}{w^2 - 2w - 1} dw = -2 \int \frac{1}{(w-1)^2 - 2} dw = - \int \frac{1}{\frac{1}{2}(w-1)^2 - 1} dw = - \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}w - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1} dw, \text{ on pose finalement } s = \frac{1}{\sqrt{2}}w - \frac{1}{\sqrt{2}} \implies dw = \sqrt{2} ds$$

$$I = -\sqrt{2} \int \frac{1}{s^2 - 1} ds = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} ds = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{s-1}{s+1} \right| + C, C \in \mathbb{R}, \text{ c'est-à-dire } I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{vmatrix} + C.$$

4.  $I = \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$ , on pose  $x = \arccos(u) \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du$ , donc  $I = \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C, C \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  
 $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C$ .

5.  $I = \int \frac{1}{1+\cos x} dx$ , on pose  $x = 2u \Rightarrow dx = 2du$ , donc  $I = 2 \int \frac{1}{1+\cos(2u)} du = 2 \int \frac{1}{1+\cos^2(x)-\sin^2(u)} du$ , on remarque la présence au dénominateur d'un  
 $I = 2 \int \frac{1}{2\cos^2(u)} du = \tan(u) + C, C \in \mathbb{R}$ , donc  $I = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$ .

6.  $\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)} dx = \int \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx + \frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} + C, C \in \mathbb{R}$

7.  $I = \int \frac{1}{1+\sin^2(x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)+2\sin^2(x)} dx$ , on divise en haut et en bas par  $\cos^2(x)$  :  $I = \int \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{1+2\tan^2(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\frac{1}{\cos^2(x)}}{1+(\sqrt{2}\tan(x))^2} dx$ , on pose  $\sqrt{2}\tan(x) = u \Rightarrow \sqrt{2}\sec^2(x)dx = du$ , donc  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(u) + C, C \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C$ .

8.  $I = \int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx$ , on peut facilement se ramener à l'intégrale n°3 à l'aide des propriétés de parité des fonctions trigonométriques :  $\int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{1}{\cos(-x) - \sin(-x)} dx = \int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx$

$-x = u \Rightarrow dx = -du$  on trouve  $I = -\int \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx$  et à partir de là on utilise le résultat de l'intégrale n°3 :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{vmatrix} + C.$$

$$9. I = \int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx = \int \frac{1}{1-\sin(x)} dx + \int \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} dx = \int \frac{1}{1+\sin(-x)} dx - \ln |1-\sin x| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Pour l'intégrale restante, après le changement de variable  $u = \sin x$ , on obtient  $du = \cos x dx$  et  $\int \frac{1}{1+\sin(-x)} dx = \int \frac{1}{1-u} du = \ln |1-u| + C = \ln |1-\sin x| + C$ . Donc  $I = \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} - \ln |1-\sin(x)| + C$ .

$$10. \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln |\sin(x)| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$11. \int \sin(x)\cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$12. I = \int \sin(x)\tan(x) dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} dx - \int \cos(x) dx,$$

pour la première intégrale on utilise le résultat de l'intégrale n°1 pour  $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$ .

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \sin(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$13. I = \int \frac{1}{\tan(1+x)} dx = \int \frac{1}{\tan(u)} du \text{ avec } u = 1+x \implies du = dx. \text{ Ensuite, } I = \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \ln|\sin(1+x)| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$14. I = \int \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx, \text{ semblable à l'intégrale n°7 : } I = \int \frac{1}{\sin^2(x) + 2\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\tan^2(x) + 2} \times \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)\right)^2 + 1} \times \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2(x)} dx, \text{ et}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(u) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ c'est-à-dire } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C.$$

$$15. I = \int \frac{1+\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{1+\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx, \text{ pour la première intégrale on utilise l'intégrale n°14 : } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C + \int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

l'intégrale restante pour que les calculs soient plus clairs :  $\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx = - \int \frac{1+\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)} + 2 \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx$  et on se sert à nouveau du résultat de l'intégrale n°14

fraction, on trouve  $\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} dx = -x + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C, C \in \mathbb{R}$ . Finalement, en rassemblant les résultats on trouve

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) - x + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C = -x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan(x)\right) + C.$$

$$16. I = \int \frac{\tan(x)-1}{\tan(x)+1} dx, \text{ on simplifie en multipliant en haut et en bas par } \cos(x) \text{ pour obtenir } I = \int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx, \text{ en réarrangeant on remarque } I = - \int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$$

$$17. I = \int \frac{1+\cos(x)+\cos^2(x)}{1+\sin(x)+\sin^2(x)} dx, \text{ on pose } x = \arccos u \implies dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du, \text{ donc } I = - \int \frac{1+u+u^2}{1-u^2+(2-u^2)\sqrt{1-u^2}} du$$