TD M41

C1 Suites de fs.

(R) • CV simple

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, x}, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

• CV uniforme.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

Ex1 étude CV simple & uniforme.

① $f_n(x) = x.\ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $A = \mathbb{R}^+$, $n \geqslant 1$.

CV simple.

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On doit étudier limite de $f_n(x)$ qd $n \to \infty$.

▸ pour $x = 0$: $f_n(0) = 0.\ln\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc $(f_n(0))_{n \geqslant 1}$ CV vers 0.

▸ pour $x > 0$:

$\lim_{n \to \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$. D'où par continuité du logarithme, $\lim_{n \to \infty} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) = \ln(x)$

D'où pour $x > 0$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = x.\ln(x)$

posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x.\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

on a dc démqé sdf $(f_n)_{n \geqslant 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}+$.

CV uniforme.

Rq $x \longmapsto x + \frac{1}{n}$ est une f cont sur $\mathbb{R}$, à valeurs ouverts ds $]0, +\infty$. Comme ln est cont sr $]0, +\infty[$ ced que pr tt $n \geqslant 1$, la f f_n est cont sr $\mathbb{R}_+$.

q° limite simple est-elle cont ?

↳ si elle n'est pas cont $\not\Rightarrow$ (f_n) CV unifor t.

(R) TH si $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A $\forall n \geqslant 1$, et si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ CV $\boxed{\text{uniformément}}$ vers f sur A, alors f est cont sur A.

Adit, si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ CV simplement vers f sur A, si $f_n : A \to \mathbb{R}$ cont mais f n'est pas cont alors $(f_n)_{n \geqslant 1}$ ne CV pas uniformément vers sur A.

$\boxed{\text{contraposée}}$ ↳ $\boxed{\text{H}}$ pr mq qu'on n'a pas CV uniforme.

on mq $\forall n \geq 1$, f_n est <u>cont</u> sur A.

⊛ $(f_n)_{n\geq 1}$ CV simplement vers f sur A.

⊛ f n'est pas cont sur A.

on pt cnd $(f_n)_{n\geq 1}$ ne CV pas uniformément.

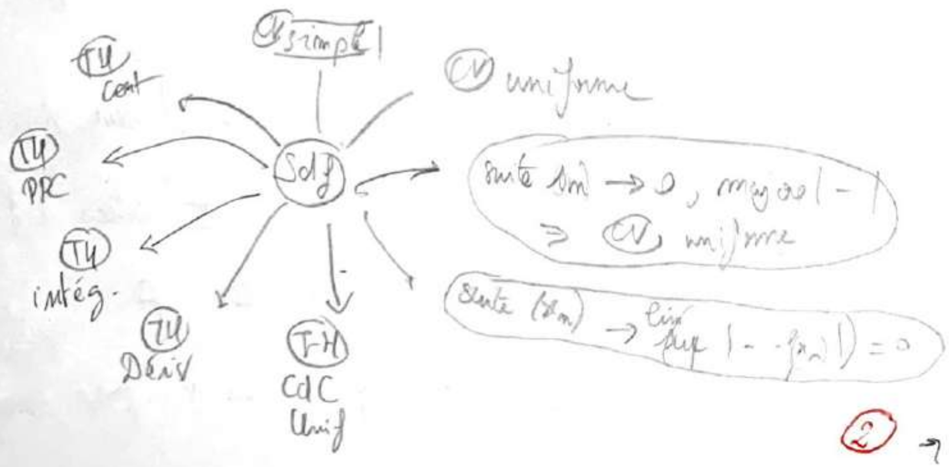
Rq <u>ici</u> $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim x.\ln(x) = 0 = f(0)$

Donc f est <u>cont</u> sr $[0,+\infty[$.

On ne pt pas conclure sr CV uniforme.



Pr étudier CV uniforme, on doit étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \right) \overset{?}{=} 0$$

(soit on le calcule, soit estimé, soit majoré, soit trouver une suite q vérifie l'égalité)

Il est suffisant de trouver une suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ q tend vers 0 tq, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n$

en effet, ccd $0 \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$.

$\xrightarrow{\text{TDG}}$ $\sup |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$.

$f_n(x) = x.\ln(x + \frac{1}{n})$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

<u>$x > 0$</u>

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x.\ln(x+\tfrac{1}{n}) - x.\ln(x)\right|$$

$$= \left|x\left(\ln(x+\tfrac{1}{n}) - \ln(x)\right)\right| = \left|x.\ln\left(\frac{x+1/n}{x}\right)\right|$$

$$= \left|x\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right|$$

2 → tracer ∀ fs ?

$1+\frac{1}{nx} > 1 \Rightarrow x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)$$

Rq $\forall\, t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$. $(*)$

- soit : pr dmq $(*)$, on pt étudier

$$f(t) = t - \ln(1+t), \quad t \geq 0.$$

- soit avec $\boxed{\text{IAF}}$ appliqué à $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \ln(1+t)$.

f est cont & dérivable sur $[0,\infty[$.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

D'où $\sup_{t\geq 0} |f'(t)| = \sup_{t\geq 0} \frac{1}{1+t} = 1$

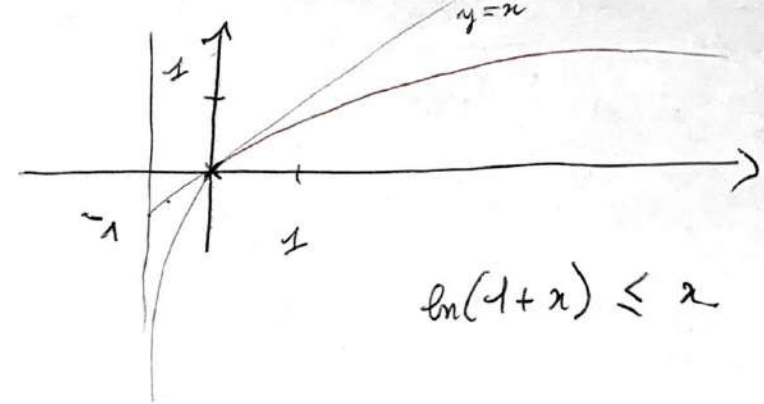
$\boxed{\text{IAF}} \Rightarrow \forall\, t\geq 0 ; \underbrace{|f(t) - f(0)|}_{\|} \leq \left(\sup_{u\geq 0}|f'(u)|\right)(t-0)$

$$|\ln(1+t) - \ln(1)| \leq t$$

$$\ln(1+t) \leq t$$

3

- soit avec concavité de ln :



$\ln(1+x) \leq x$ par concavité.

Ainsi $\ln(1+t) \leq t$, $\forall\, t \geq 0$. $(*)$

$$|f_n(x) - f(x)| = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right) \leq x\cdot\frac{1}{nx} = \frac{1}{n}$$

(d'après $(*)$ & $t = \frac{1}{nx}$)

D'où $\forall\, x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

cette inégalité est vraie pr $x = 0$ car $f_n(0) - f(0) = 0$

Donc $0 \leq \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$

TDG $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

dc $(f_n)_{n\geq 0}$ CV uniformément vers f sur $[0,\infty[$

2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{1+nx}{2+nx^2}$.

CV simple : si $x=0$: $f_n(0) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

si $x \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+nx}{2+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{nx^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$.

dc si on def $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

on a mqé $(f_n)_{n\geq 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

CV uniforme

On n'a pas CV uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}$ car :

- $\forall n>0$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est cont sur $\mathbb{R}$.
- $(f_n)_{n\geq 0}$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
- f n'est pas cont sur $\mathbb{R}$ (car f n'est pas cont en 0 :

$\dfrac{1+n(x-1)}{2+n(x-1)^2}$ (4) $\to$ étude $x=1$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty \neq f(0)$

Donc (f_n) ne CV pas uniformt vers f sur $\mathbb{R}$.

exercice étudier CV uniforme sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ où $a>0$.

+ex2

suite 2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{1+nx}{2+nx^2}$$

(f_n) CV simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) φ CV uniforme sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$, $a>0$?...

pour $x \in \mathbb{R}\setminus[-a,a]$:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{1+nx}{2+nx^2} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x-2|}{|x|\,|2+nx^2|}$$

$$\frac{|x-2|}{|x|\,|2+nx^2|} \leq \frac{1}{a}\,\frac{|x-2|}{|2+nx^2|}$$

$\rightarrow$ $|nx^2+2| \geq nx^2-2$ I

$|x| \geq a > 0 \Rightarrow nx^2 - 2 \geq na^2 - 2 > 0$

si $n > \frac{2}{a^2}$.

D'où $$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{|x-2|}{a(nx^2-2)} \leq \frac{|x|+2}{a(nx^2-2)}$$

$$\varphi(t) = \frac{t+2}{nt^2-2}, \quad t \geq a > 0.$$

Donc $$\sup_{|x|\geq a} |f_n(x)-f(x)| \leq \left(\sup_{t\geq a} \varphi(t)\right) \times \frac{1}{a}$$

on vérifie $\forall t \geq a$, $\varphi'(t) < 0$.

t	a	$+\infty$
$\varphi(t)$	$\varphi(a)$ $\searrow$	0

Donc $$\sup_{|x|\geq a} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{a}\varphi(a) = \frac{a+2}{a(na^2-2)}$$

or $$\frac{a+2}{a(na^2-2)} \sim \frac{a}{na^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

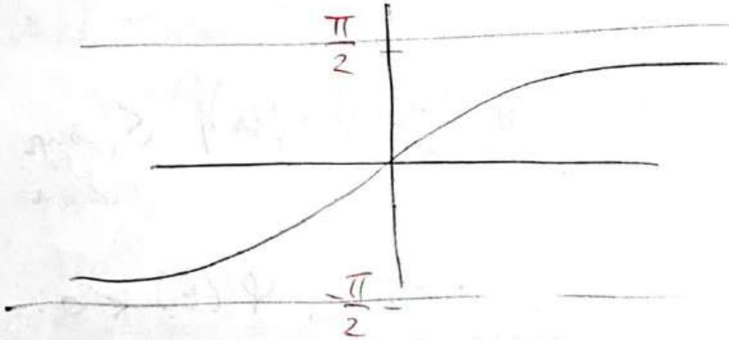
D'où $$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq a} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ CV bien uniformément sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ $\forall a>0$.

⚠ $\not\Rightarrow$ $(f_n)_n$ CV uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) $f_n(x) = \arctan(nx)$, $A = \mathbb{R}$.

CV simple ?



▸ si $x=0$: $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = 0$

▸ si $x>0$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} := f(x)$

▸ si $x<0$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\pi}{2} := f(x)$

si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \pi/2 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Dc la suite de fonctions $(f_n)_n$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

On Rq $\forall n \geq 0$, f_n est cont sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas cont sur $\mathbb{R}$.

Dc on pt cd $(f_n)_{n\geq 0}$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4) $f_n(x) = \sqrt{n} \cdot x \cdot e^{-xn^2}$, $A = \mathbb{R}^+$

CV simple :

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot e^{-n^\beta} = 0 \quad , \alpha, \beta \quad \text{(limite croissance comparée)}$$

$$f_n(x) = x\sqrt{x}\, e^{-(n\sqrt{x})^2}$$

Posons $u := n\sqrt{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $x \neq 0$.

$$f_n(x) = x\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^{1/2} \cdot e^{-u^2} = x^{3/4} \cdot u^{1/2} \cdot e^{-u^2} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

$$f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

CV uniforme

car $f(x)=0$ et $f_n(x) \geq 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x)$$

- f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\left[e^{-xn^2} + x(-n^2)e^{-xn^2}\right]$$

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\, e^{-xn^2}(1-n^2), \ \forall x \geq 0.$$

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1-n^2x \geq 0 \iff \frac{1}{n^2} \geq x.$$

x	0		$\frac{1}{n^2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sqrt{n} \times \frac{1}{n^2} \times e^{-\frac{1}{n^2}\times n^2} = \frac{e^{-1}}{n^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0.$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\geq 0}$ CV uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

$$f_n(x) = \frac{2n\,x^2}{n^2x^4+1}, \ x \in A = \mathbb{R}.$$

1) CV simple ?

$$f_n(x) = \frac{2n\,x^2}{n^2\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2x^2}{n\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right)}$$

si $x \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} n\left(x^4+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$, dc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ccl $(f_n)_n$ CV simplement vers la f idtqt nulle.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 0$$

2) CV uniforme sur $\mathbb{R}$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)$$

$\boxed{M1}$ - calcule $f_n'(x)$
- tab de variaθ

$\boxed{M2}$ $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

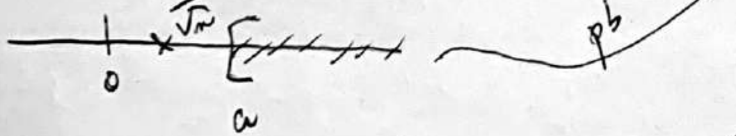
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| \qquad \frac{2\times n\times\frac{1}{n}}{n^2\times\frac{1}{n^2}+1} = 1$$

$\Rightarrow (f_n)_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) CV uniforme sur $[a,+\infty[$, $a>0$

⚠ ici on ne pt pas écrire que:

$$\sup_{x\in[a,\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[a,\infty[} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

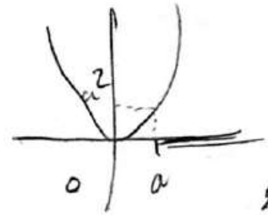


$x \geq a$, $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1} \overset{?}{\leq} \dfrac{2nx^2}{n^2x^4}$

car $n^2x^4+1 \geq n^2x^4 > 0$

D'où $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{2}{n x^2}$

$x \geq a > 0 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{2}{na^2}$



$$\sup_{x\geq a} f_n(x) \leq \frac{2}{na^2}$$

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{2}{na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_n$ CV uniformément vers f sur $[a,\infty[$.

$\boxed{M2}$ $f_n'(x) =$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	0	↗		↘	0

comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$,

$n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < a$.

$$\sup_{x \geqslant a} |f_n(x) - f(a)| = f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- Rq si $(f_n) \xrightarrow{\text{unif cont}} f$ sur A_1 et A_2
  alors $(f_n) \xrightarrow{\text{unif cont}}$ vers f $A_1 \cup A_2$.

Ex3 $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$, $x \in A = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$

1) CV simple sur A

- $x = 0$, $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $x > 0$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{nx}{nx} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Donc $(f_n)_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) CV uniforme sur $[0,1]$?

on Rq que f n'est pas cont sur $[0,1]$,
f n'est pas cont en 0 & $\hat{c}$ les f_n st cont sur $[0,1]$, on ne pt pas avoir CV uniforme sr $[0,1]$.

CV uniforme sur $[1, \infty[$

⚠ On ne pt pas écrire que $\sup\limits_{x\in[1,\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})|$
car $\frac{1}{n} \notin [1, \infty[$.

. Pour $x \geqslant 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \frac{1}{nx+1}$

$x \longmapsto \frac{1}{nx+1}$ est $\searrow$ sr $[1,\infty[$
(comme inverse d'une $f \nearrow$).

Donc $\sup\limits_{x\geqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1) - f(1)| = \frac{1}{1+n}$

comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$, on ed $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[1,\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$(f_n)_n$ CV uniformément sur $[1, \infty[$.

3) $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, $x \in [0,1]$

a) CV simple de (F_n)

Pr $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{nt}{nt+1}\, dt$

Posons $u = nt+1$, $du = n\,dt$, $dt = \frac{du}{n}$

D'où $F_n(x) = \frac{1}{n}\int_1^{nx+1} \frac{u-1}{u}\, du$

$F_n(x) = \frac{1}{n}\int_1^{nx+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{n}\Big[u - \ln(u)\Big]_1^{nx+1}$

$= \frac{1}{n}\left(nx+1 - \ln(nx+1) - 1\right)$

$F_n(x) = x - \frac{\ln(nx+1)}{n}$ sur $[0,1]$

par croissance comparée $\frac{\ln(nx+1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{\ln n + \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)}{n}$

D'où $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

ie $(F_n)_n$ CV simplement sur $[0,1]$ vers la f $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F(x) = x$.

Bien qu'on n'ait pas CV uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$, on a qd m̂

$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$.

CV uniforme de $(F_n)_n$

$|F_n(x) - F(x)| = \left| x - \frac{1}{n}\ln(1+nx) - x \right|$

$= \frac{1}{n}\ln(1+nx)$, $x \in [0,1]$

$x \longmapsto \frac{1}{n}\ln(1+nx)$ est croissante sur $[0,1]$.

Donc $\sup_{x\in[0,1]} |F_n(x) - F(x)| = |F_n(1) - F(1)|$

$= \frac{1}{n}\ln(1+n)$

Par croissance comparée, on a bien $\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où $\lim_{n\to\infty} \sup |F_n(x) - F(x)| = 0$ et

$(F_n)_n$ CV uniformément vers F sur $[0,1]$.

Ex 4 $\quad f_n(x) = (1-x)\cdot \exp(-x^n)$, $A = \mathbb{R}^+ = [0,\infty[$

(R) $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \infty & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Par composition à l'exponentielle (& la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'existence de la limite de l'exponentielle en $-\infty$), on a

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ e^{-1} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en posant $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1[\\ e^{-1}(1-x), & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

D'où $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On obtient de $(f_n)_n$ CV simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) CV uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

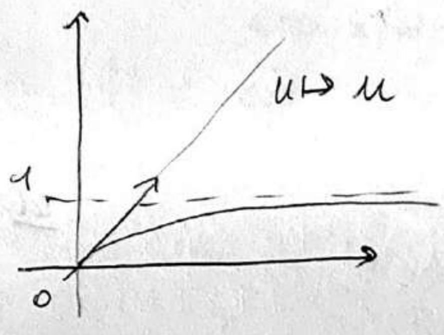
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| (1-x)\, e^{-x^n} - (1-x) \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} (1-x)\, |e^{-x^n} - 1| \quad \text{car } x \in [0,1]$$

$$-x^n \leq 0 \Rightarrow e^{-x^n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} (1-x)(1-e^{-x^n})$$

$\varphi(u) = 1 - e^{-u}$



Posons $\Psi(u) = 1 - e^{-u} - u$, $u \geq 0$,

La f Ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\Psi'(u) = e^{-u} - 1 \leq 0 \quad \text{car } u \geq 0, \; -u \leq 0 \Rightarrow e^{-u} \leq 1.$$

u	0		∞
$\Psi'(u)$		$-$	
$\Psi(u)$	0	$\searrow$	

Dc $\forall u \geq 0$, $\Psi(u) \leq 0$, dc $1 - e^{-u} \leq u$.

En utilisant cette inégalité, on ed

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \left((1-x) \, x^n \right)$$

Posons $g_n(x) = (1-x)\,x^n = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$

La f g_n est dérivable et on a :

$$g_n'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1)\,x^n = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right)$$

$$g_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - (n+1)x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq x.$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\underline{n \leq n+1}$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cl $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

dc $(f_n)_n$ cv uniformément vers f sur $[0,1]$.

(b) (a') uniforme sur $[1, \infty[$

Indicat : $\forall t \geqslant 1,\ t.e^{-t} \leq \frac{1}{e}$. (1)

Mq (1) Posons $\Psi(t) = t.e^{-t},\ t \geqslant 1$.

La f est dérivable sur $[1, \infty[$

et on a :

- $\Psi'(t) = e^{-t} + t(e^{-t})' = e^{-t}(1-t) \leq 0$ car $t \geqslant 1$.

t	1	∞
$\Psi(t)$	e^{-1} $\searrow$	

$\Rightarrow \forall t \geqslant 1,\ \Psi(t) \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$

- $\sup\limits_{x \geqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \geqslant 1} |(1-x)e^{-x^n} - 0|$

$= \sup\limits_{x \geqslant 1} (x-1)e^{-x^n}$

$x \geqslant 1 \Rightarrow x^n \geqslant 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^n e^{-x^n} \leq \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \geqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x \geqslant 1} \left(\frac{1}{e} \frac{x-1}{x^n} \right)$

$\leq \sup\limits_{x \geqslant 1} (x-1)e^{-x^n} \leq \sup\limits_{x \geqslant 1} \left(\frac{1}{e} \frac{x-1}{x^n} \right)$

Posons $h_n(x) = \frac{x-1}{x^n},\ x \geqslant 1$,

La f h_n est dérivable sur $[1, \infty[$,

$h_n'(x) = \frac{x^n - n x^{n-1}(x-1)}{x^{2n}} = \frac{(x - n(x-1))x^{n-1}}{x^{2n}}$

$h_n'(x) \geqslant 0 \iff x - n(x-1) \geqslant 0$

$\iff x - nx + n \geqslant 0$

$\iff x(1-n) + n \geqslant 0$

$\iff n \geqslant (n-1)x. \iff \frac{n}{n-1} \geqslant x.$

x	1		$\frac{n}{n-1}$		$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\Rightarrow \sup_{x\geq 1} h_n(x) = h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Donc $\displaystyle \sup_{x\geq 1} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{e} \cdot h_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{e}\, \frac{\frac{n}{n-1} - 1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$\leq \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dc $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0$

dc (f_n) CV uniformément sur $[1, \infty[$

3) calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$, où $u_n = \int_0^2 f_n(t)\, dt$

D'après a), $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U.} f$ sur $[0,1]$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U.} f$ sur $[1, \infty[$.

Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U} f$ sur $[0, \infty[$.

En effet, par (*) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $(n \geq n_0,\ x \in [0,1]) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

par (**) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq

$(n \geq n_1,\ x \in [1, \infty[) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'où $n \geq \max(n_0, n_1)$, $x \geq 0$.

* soit $x \in [0,1]$ et on a bien $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
* soit $x \in [1, \infty[$, dc $\forall x \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

dc $n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow{CV\,U.} f$ sur $[0, +\infty[$.

Dc le Thm d'intég° implique que :

D'après le (TH) ,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 (1-t)e^{-t^n}\,dt = \quad = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- car $\displaystyle\int_1^2 (1-t)\,dt = 0$.

Ex 5 $\quad f(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx), & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

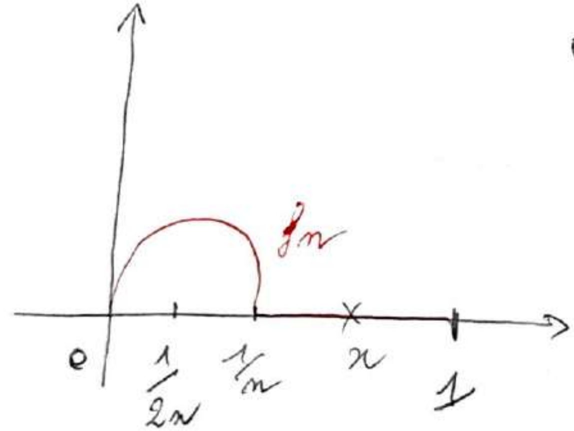
$\forall n \geq 1$, f_n est cont sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{n}\}$.

et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{1}{n} \\ <}} = n^2 \times \frac{1}{n}\left(1 - n \times \frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{n} \\ >}} f(x)$

$= f\left(\frac{1}{n}\right)$.

- $\Rightarrow f_n$ est cont sur $[0,1]$

① CV simple sur $[0,1]$?



$\varphi_n(x) = n^2x - n^3x^2$

$\varphi_n'(x) = n^2 - 2n^3x$

$= n^2(1 - 2na)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

pr $x \in]0,1]$,

$\exists N, n \geq N$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < x$.

$\frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

De plus $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow (f_n)$ CV simplement sur $[0,1]$

vers la f $\quad f: [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$

f identt nulle

2) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} f_n(x)\,dx + \int_{1/n}^1 \underbrace{f_n(x)}_{=0}\,dx$$

$$= \int_0^1 (n^2x - n^3x^2)\,dx$$

$$= \left[n^2\frac{x^2}{2} - n^3\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^2 \times \frac{1}{2n^2} - n^3 \times \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3) CV U.N sur $[0,1]$

TH si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.U} f$ sur $[a,b]$ &

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow f$ est cont

& $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

On a $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{6}$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

Dc $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$.

et dc $(f_n)_n$ ne CV pas U.N sur $[0,1]$

Ex 6 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) CV U.N de $(f_n)_n$ vers f.

CV simple

$\lim_{n\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right) = x^2$ et par continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Dc $(f_n)_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

CV U.N

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right|$$

Conjugué ....

$|a-b| = \dfrac{a^2-b^2}{a+b}$,

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2}$, par croissance de f racine sur $\mathbb{R}^+$,

on a $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$

D'où $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x| \geqslant \frac{1}{n}$

de

$$\frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} \leqslant \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n}$$

on est ∞ $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$

Dc on a bien CV.U.N.

Ex 7 $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

---

2) ex 6 $\quad$ Pb on ne p^t pas avoir $f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)$

pb ici car f n'est pas dérivable en 0.

CV de (f_n') ?

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$$

- $f_n'(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- $x > 0$: $f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$

$f_n'(x)$ $\qquad = -1$

Dc (f_n') CV simplement sur $\mathbb{R}$

vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Or $\forall n \geq 1$, f_n' est cont mais g n'est pas cont en 0 & dc (f_n') ne pt pas CV U.N vers g

R9 Supposons $(f_n')_n$ CV U.N vers g.
Comme $(f_n)_n$ CV. S. vers f.
D'après TH (Dérivaᴼ) $\Rightarrow$ f est dérivable & $f' = g$.
Absurde.
Dc (f_n') ne CV pas U.N.

Ex 7 $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

1) on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (car $|\sin(nx)| \leq 1$)

D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dc $f_n \xrightarrow{CVU} 0$

2) f_n est dérivable & $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$

$$f_n'(x) = \frac{\cos(nx) \cdot n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \cos(nx)$$

soit $x \in \mathbb{R}$, supposons p l'absurde qu'$\exists$ $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\sqrt{n} \cdot \cos(nx) \longrightarrow \ell$.

or $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1$.

- $\sqrt{n} \cdot \cos(nx) \underset{n\to\infty}{\sim} \ell \Rightarrow \cos(nx) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$

$\times$ et $\div$!!

c $\dfrac{\ell}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, dc $\cos(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Dc $\sqrt{2n} \cdot \cos(2nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

or $(\sqrt{2n} \cdot \cos(2nx))_n$ est une sous-suite de $(\sqrt{n} \cdot \cos(nx))_n$ & dt CV vers ℓ. Absurde

$\Rightarrow (f_n'(x))$ ne CV pas.

$\boxed{\text{TD2}}$ Séries de fonctions

Méthodes
- CV simple
- CV normal
- CV unif.

Ex 1 (1) Étude CV (sim, normale, unif) $\sum_n u_n$.

CVS ? $\sum_n u_n = \sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ — x fixé ici

Par croissance comparée, $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} = 0$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$

$\Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot e^{-x^2\sqrt{n}} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ signe cte

Or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ SdR CV donc $\sum e^{-x^2\sqrt{n}}$ CV $\sum \frac{1}{n^2}$

donc on montre que $\sum_n e^{-x^2\sqrt{n}}$ CV $\forall x \in \mathbb{R}^*$ (9)

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ CV simplement sur } \mathbb{R}^*}$

CV normale $\sum u_n$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^*} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1$$

u_n paire

$$= \sup_{x>0} e^{-x^2\sqrt{n}} = 1 \quad u_n \searrow \text{ sur }]0,\infty[$$

Donc $\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |u_n(x)|$ DV

$\Rightarrow$ PAS CV normale.

Rq : $\left[\begin{array}{l} \text{si } \sum u_n \text{ est suite de f qui CVS sur } I \\ \Rightarrow \sum u_n \text{ CVUN ssi } (R_n)_n \text{ CV unif vers 0 sur } I \text{ où, } R_n = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \end{array}\right.$

ie $\left[\sum u_n \text{ CV u.N sur } I \text{ ssi } \sup|R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right.$

$R_n(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-x^2\sqrt{k}} \geq e^{-x^2\sqrt{n+1}}$

car $\forall k \geq n+1$, $e^{-x^2\sqrt{k}} \geq 0$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^*} e^{-x^2\sqrt{n+1}} = 1$

D'où $(R_n)_n$ ne CV pas U.N vers 0 sur $\mathbb{R}^*$.

Dc $\sum u_n$ ne CV pas U.N

---

2) soit $f(x) = \sum^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$

<u>R:</u> • si $\forall n \geq 0$, $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont.

• $\sum_n u_n$ CV U.N sur I

Alors si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$.

On a que f est cont sur I.

On Rq que $\forall n \geq 0$, u_n est paire & dc f est aussi paire. Car $f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(-x) = \sum^{\infty} u_n(x) = f(x)$

Dc on pt étudier cont & dérivabilité de f sur $]0, \infty[$.

par parité, f est cont sur $\mathbb{R}^*$.

Fixons $a>0$ & étudions cont sur $[a, \infty[$.

$\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = \sup_{x\geq a}\left(e^{-x^2\sqrt{n}}\right) = e^{-a^2\sqrt{n}}$

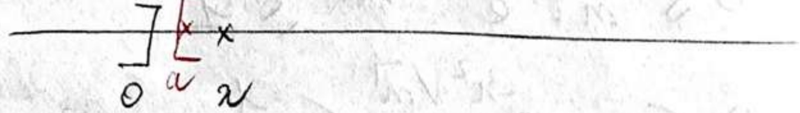
car la f : $x \longmapsto e^{-x^2\sqrt{n}}$ $\searrow$ sur $]0, \infty[$

$\sum e^{-a^2\sqrt{n}}$ CV (car on sait que $\sum u_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^*$).

Donc $\sum_n \sup_{x\geq a} |u_n(x)|$ CV & on a dc

$\sum_n u_n$ CV normalement dc U.N sur $[a, \infty[$.

D'après TH (Continuité), on pt en déduire que f est cont sur $[a, \infty[$



soit $x > 0$. Alors $\exists a$, $0 < a < x$.

D'après ce qui précède, f est cont sur $[a, \infty[$

et dc f est <u>cont</u> en x. Dc $\forall x > 0$, f cont en x

ce prouve f est <u>cont</u> sur $]0, \infty[$.

Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ (resp C^1)

$\mathbb{R}^*$ **si** • $\forall n \geq 0$, $u_n : I \to \mathbb{R}$ dérivable

•• $\sum_n u_n$ CV S. sur I

••• $\sum u_n'$ CV U.N sur I

et **si** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$, alors

● f est dérivable sur I (resp C^1) et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

→ $u_n(x) = e^{-x^2\sqrt{n}}$, $n \geq 0$, on R/ que u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$u_n'(x) = -2x\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}$$

● •• $\sum u_n$ CV S sur $\mathbb{R}^*$

••• on étudie CV normale de $\sum u_n'$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} \sqrt{n}\, 2|x|\, e^{-x^2\sqrt{n}} = \sup_{x>0} \left(2x\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right)$$

Posons $\varphi_n(x) = 2x \sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}$, $x > 0$ et étudions les variations de φ. La f φ est dérivable & on a

$$\varphi_n'(x) = 2\sqrt{n}\left(e^{-x^2\sqrt{n}} - 2x^2\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right)$$
$$= 2\sqrt{n}\left(1 - 2x^2\sqrt{n}\left(e^{-x\sqrt{n}}\right)\right)$$

Donc $\varphi_n'(x) \geq 0 \iff 1 - 2x^2\sqrt{n} \geq 0$

$$\iff x^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
$$\iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}.$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}$ a		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi(a)$	$\searrow$	0

$$\sup\left(2x\sqrt{n}\, e^{-x^2\sqrt{n}}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^{1/4}}\, e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}}$$
$$= \text{cte} \cdot n^{1/4} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

dc $\sum_n \sup|u_n(x)|$ DV grossièrement

(car $\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$)

Ainsi, $\sum U_n'$ ne (cv) pas normalement sur $\mathbb{R}^*$.

Fixons $a>0$ & étudions (cv) normale sur $[a,\infty[$:

comme $\lim \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{1/4}} = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$/

$n \geq N \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{1/4}} < a}$ et dc d'après (de TAV)

ce q précède $\sup_{x\in[a,\infty[} |U_n'(x)| = \sup_{x\in[a,\infty[} (\varphi_a(x)) = \varphi_n(a)$

$\varphi_n(a) = 2a\sqrt{n}\cdot e^{-a^2\sqrt{n}}$

On Rq que $\lim_{n\to\infty} (n^2 \varphi_n(a)) = \lim_{n\to\infty} (2a\cdot n^{3/2}\cdot e^{-a^2\sqrt{n}})$

$= 0$ (par croissance comparée)

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$,

D'où $\sum \sup |U_n'(x)|$ (cv)

Ainsi $\sum U_n'$ (cv) normalement sur $[a,\infty[$.

D'après (Th), pr $\forall a>0$, f est dérivable sur $[a,\infty[$ & dc f est dérivable sur $]0,\infty[$.

Ex 2) $U_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Étude (cv) ~~simple~~ normale de la série $\sum(U_n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, on a :

$|U_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ dc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ ↳ signe clé

or $\sum_n \frac{1}{n^3}$ SDR (cv). On en déduit $\sum U_n$ (cv) normalement.

(dc (cv) U.N & simplement) sur $\mathbb{R}$.

Étude cont & dérivabilité de la somme

- $\forall n \geq 1$, U_n cont sur $\mathbb{R}$.
- $\sum U_n$ (cv) normalement sur $\mathbb{R}$.

D'après (Th) Continuité sur $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$,

on a f est cont sur $\mathbb{R}$.

De +, $\forall n \geq 1$, U_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ &

$U_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{n^3} = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$\sup |U_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum U_n'$ (cv) normalt dc (cv) UN sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 1 3) $\sum u_n$, où $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

CV simple : RQ $u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$

où $v_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$;

- suite $(v_n)(x) \searrow$; $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$

D'après CSA, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ CV.
Dc $\sum u_n$ CV simplement.

CV uniforme : CSA $\Rightarrow$ si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$,
on a $\forall n \geq 1$,

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^2}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = 0$

dc (R_n) tend unif. vers 0 sur $\mathbb{R}$.
Donc $\sum u_n$ CV. U.N sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{M2}$ Avec Th d'Abel Uniforme :
Si avec ça, on doit mq $\frac{1}{n+x^2}$ CV. UN vers 0

CV normale :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{n+x^2} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$$

car $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$ en 0, $\frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ DV de
$\sum u_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Continuité & Dérivabilité de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

- $\forall n \geq 1$, u_n est cont sur $\mathbb{R}$
- La série $\sum u_n$ CV unifor. sur $\mathbb{R}$. Dc d'après Th du cours, on ed f est cont sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Th Dériv}}$

- u_n dérivable sur I, $\sum u_n \xrightarrow{CV.S.} f$ sur I, $\sum u_n' \xrightarrow{CV.UN} g$ sur I,
  f classe C^1, $f' = g$, $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$ & $\sum u_n$ CV U.N sur I

on sait déjà que $\sum u_n$ CV.S. & U.N sur $\mathbb{R}$.
Vérifions que $\sum u_n'$ CV. U.N sur $\mathbb{R}$.

u_n dérivable c fcto rationnelle dt dénom. ne s'annule pas.
(car n fixé aussi)

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n'(x) = (-1)^n \frac{-2x}{(n+x^2)^2} = \frac{2(-1)^{n+1} x}{(n+x^2)^2}$$

Idée $|u_n'(x)| = \dfrac{2|x|}{(n+x^2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $n+x^2 \geq n > 0$ et par croiss. de $t \longmapsto t^2$ sur $[0, \infty[$

on a $(n+x^2)^2 \geq n^2$

$$\text{dc } |u_n'(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2}.$$

Fixons $a > 0$, on ed que

$$\boxed{\sup_{x \in [-a,a]} |u_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^2}.}$$

Comme $\sum_n \frac{2a}{n^2}$ cv, on ed que

$\sum u_n'$ cv normalement dc U.N sur $[-a, a]$.

2 TH, on obtient $\forall a > 0$, f est dérivable sur $[-a, a]$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(car si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists\, a > 0$ tq $x_0 \in]-a, a[$ et dc f sera dérivable en x_0).

autre M calcul $\sup |u_n'(x)|$ de TAV de $t \longmapsto 2\dfrac{t}{(n+t^2)^2}$ sur $[0, \infty[$

4) $\sum \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$

$$\sup |u_n(x)| \leq \frac{\pi/2}{n^2}.$$

ĉ $\sum \frac{1}{n^2}$ cv, on ed $\sum u_n$ cv normalt sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \geq 1$, u_n cont sur $\mathbb{R}$ (arctan cont sur $\mathbb{R}$)

on ed 4 TH. si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$\implies f$ est cont sur $\mathbb{R}$

Dérivabilité de f

* $\forall n \geq 1$, u_n est classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $u_n'(x) = \dfrac{n}{n^2(1+n^2x^2)}$

$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

** $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ (& CV UN)

*** CV U.N de $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}$.

CV Normale sur $\mathbb{R}$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

La f $x \longmapsto \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$ est paire et ≥ 0

Donc $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \sup_{x\in[0,\infty[} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$

comme de plus, f_n est $\downarrow$, on ad que

$\displaystyle\sup \left\{ \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \right\} = f_n(0) = \frac{1}{n}$

D'où $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| = \frac{1}{n}$

Sadly, $\sum \frac{1}{n}$ DV.

Fixons $a>0$.

$$\sup_{|x|\geq a} |u_n'(x)| = \sup_{|x|\geq a} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \overset{\text{par parité}}{=} \sup \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

$$= \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \quad \left(\text{par décroissance de } f_n : x \longmapsto \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \right)$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n+n^3a^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CV.

Donc $\sum u_n'$ CV Normalement sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$

Donc $\forall a>0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a] =$
$=]-\infty, a[\cup]a,\infty[$.

On obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

qᵒ dérivabilité en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x} f(x) \quad \text{car} \quad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n(0)}_{=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x} \quad \text{car } \arctan(0) = 0.$$

[minorons pr obtenir limite finie]

Fixons $N \geq 1$, $x > 0$. On a alors

$\forall n \geq 1$, $\dfrac{\arctan(nx)}{n^2 x} \geq 0$ et dc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x}$$

De plus, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{nx}{n^2 x} = \frac{1}{n}$

car $\arctan(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$

D'où $$\liminf_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \geq \liminf_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Comme c'est $\forall N \geq 1$, on obtient en faisant tendre $N \to \infty$ que

$$\liminf_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2.3.4

Ex2 $u_n(x) = \dfrac{\sin(2^n x)}{n^n}$, $n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Mq CV normale

on a $\forall n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^n}$,

de +, pr $n \geqslant 2$, $n^n \geqslant 2^n > 0$,

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$ & $\forall n \geqslant 2$, on a

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

or $\sum_n \frac{1}{2^n}$ CV, suite géométriq de raison 1/2.

Dc la série $\sum_n u_n$

ou $\sum \frac{1}{n^n}$ CV ? Cd Cauchy $\left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

d'après CdC, $\sum \frac{1}{n^n}$ CV.

(ii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Mq f est dérivable sr $\mathbb{R}$

- $\sum u_n$ CV.S car CV. Norm^{t}.
- $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable (sin dérivable
- $\sum u_n'$ CV UN sr $\mathbb{R}$ ~~car CV. Norm^t sr $\mathbb{R}$~~

car $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| \leq \frac{2^n}{n^n}$.

De plus, si $v_n = \frac{2^n}{n^n}$, on a :

$|v_n|^{1/n} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$ D'après le Crit de Cauchy, $\sum v_n$ CV.

on a bien CV normale de uniforme de $\sum u_n'$ sr $\mathbb{R}$.

si CV Abel $|\sum \cos(2^k x)| = |\sum \mathrm{Re}(e^{kx})|$. ⚠ $|\Sigma b_k| \leq M$ indépdt

D'après Th de Dérivat°, f est dérivable sr $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n x)}{n^n}$$

Ex3 $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n^3}$, $n \geq 1$, $x \geq 0$

① Comme $n^2 x + n^3 \geq n^3 \geq 1$ (car $x \geq 0$)

dc u_n indéfiniment dérivable sr $\mathbb{R}^+$.

ĉ fracθ rationnelle d^t dénominat^r ne s'annule pas.

De +, $u_n'(x) = \dfrac{-n^2}{(n^2 x + n^3)^2} = \dfrac{-1}{n^2 (x+n)^2}$

Mq par récurrence $\forall k \geq 1$, $\forall x \geq 0$,

$u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k\, k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$ (H_k)

(H_1) vraie d'après ce q précède.

· supposons que (H_k) est vraie pr cert$_1$ $k \geq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k\, k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$u_n^{(k)}(x)$ est dérivable.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u_n^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{n^2} \times \dfrac{-(k+1)(x+n)^k}{(x+n)^{2(k+1)}}$

$= \dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{n^2} \times \dfrac{1}{(x+n)^{k+2}}$ ②

Dc (H_{k+1}) est vraie

Par récurrence, on a prouvé (H_k) vraie $\forall k$.

2) cd f est ∞ dérivable.

Mq $\forall k \in \mathbb{N}$,

$\sum \dfrac{(-1)^k\, k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$ CV normalement sur $\mathbb{R}$.

$\left| \dfrac{(-1)^k k!}{n^2 (x+n)^{k+1}} \right| \leq \dfrac{k!}{n^2 \cdot n^{k+1}}$ car $x \geq 0$ $\Rightarrow x+n \geq n$. $(x+n)^{k+1} \geq n^{k+1}$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n^{(k)}(x)| \leq \dfrac{k!}{n^{k+3}}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k+3 \geq 3 > 1$ & dc

$\sum_n \dfrac{1}{n^{k+3}}$ CV (Série de Riemann)

Dc $\sum_n u_n^{(k)}$ CV normal^t sr $\mathbb{R}^+$.

D'où f est ∞ dérivable sr $\mathbb{R}^+$

Ex 4 $\quad u_n(x) = \dfrac{x \cdot e^{-nx}}{\ln(n)}, n \geq 2, x \geq 0$

$\underline{\text{Rq}}$ $u_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

& $n^2 \cdot u_n(x) = x \cdot \dfrac{n^2 \cdot e^{-nx}}{\ln(n)}$

$\boxed{\text{croissance comparée}}$ $\quad n^2 \cdot e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad$ si $x > 0$

$\dfrac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où pr $x > 0$, $n^2 \cdot u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

et pr $x = 0$, aussi vraie.

dc $\forall x \geq 0$, on a $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

& $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV.

D'où on en conclut $\sum_n u_n(x)$ CV. simplt

2) Mq $x \geq 0$,

$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u(k)$

$x \geq 0 \quad \left|\sum^{N} e^{-nx}\right| \leq \sum^{N} (e^{-x})^n = \dfrac{1 - e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}}$

$\leq \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x \cdot e^{-kx}}{\ln(k)} \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kx}$

$k \geq n+1 \Rightarrow \ln(k) \geq \ln(n+1)$

$\leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$

D'où $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$

$= \dfrac{x}{\ln(n+1)} \times \dfrac{1}{e^x(1 - e^{-x})}$

$= \dfrac{1}{\ln(n+1)} \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1$

car $e^x - 1 \geq x$ pr $x \geq 0$. TAV $e^x - 1 - x$.

D'où $\forall x > 0$, $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

$x = 0$, $R_n(0) = 0$ & dc on a aussi

$0 \leq R_n(0) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

cd $\forall x \geq 0,\ 0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

2d f est cont sur $\mathbb{R}_+$.

D'après Q5 on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dc $(R_n)_n$ CV U.N vers 0.

Adit, $\sum u_n$ cv. U.N sur $\mathbb{R}^+$.

ô les u_n st cont sur $\mathbb{R}^+$, f est cont sur $\mathbb{R}^+$.

cl $\forall x \geq 0,\ 0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

2d f est cont sr $\mathbb{R}_+$

D'après CVs on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

dc $(R_n)_n$ CV U.N vers 0.

Adit, $\sum u_n$ cv. U.N sr $\mathbb{R}^+$.

ô les u_n st cont sr $\mathbb{R}^+$, f est cont sr $\mathbb{R}^+$.

---

4) Mq $\sum \dfrac{x.e^{-nx}}{\ln(n)}$ ne CV pas normalement.

→ mq $\sup|u_n(x)| = \dfrac{e^{-1}}{\ln(n).n}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+}\left(\frac{x.e^{-nx}}{\ln n}\right)$$

soit $\varphi_n(x) = x.e^{-nx}$, $x \geq 0$, $n \geq 2$

f dérivable sr $\mathbb{R}^+$.

$$\varphi'(x) = e^{-nx}(1-nx)$$

D'où $\varphi' \geq 0 \iff 1-nx \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{n}e^{-1}$	↘	0

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-1}$$

D'où $\sup_{x \geq 0} |u_n(x)| = \dfrac{e^{-1}}{n.\ln(n)}$

Or $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ DV car série de Bertrand.
ici $\alpha = 1$, $\beta = 1$ de DV

RP SdB

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{ CV} \iff \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \ \& \ \beta > 1$$

RQ : si $a>0$, $\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = u_n(a)$, or $\sum u_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^+$, on sait $\sum_n u_n(a)$ CV.

Donc $\sum u_n$ CV normalement sur $[a,\infty[$.

Dc f est cont sur $[a,\infty[$, $\forall a>0$.

D'où f cont sur $]0,\infty[$.

Ex 5 $\quad u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, $n\geq 1$, $x\in\mathbb{R}$

0) Mq $\sum u_n$ CV simplemt sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ ← pas oublier le x. cte

Dc série $\sum \frac{1}{n^2}$ CV & dc $\sum u_n(x)$ CV abs dc CV & pr $x=0$, $u_n(0)=0$ & dc $\sum u_n(0)$ CV aussi.

Dc $\sum u_n$ CV simplt.

⚠ utilisat° équivalts nécessite avoir séries à termes positifs.

1) Mq f cont sur $\mathbb{R}$.

* $\forall n\geq 1$, u_n cont sur $\mathbb{R}$ (c fract° rationnelle dt le dénominateur ne s'annule pas car $n^2+x^2 \geq n^2 \geq 1$).

* soit $a>0$,

$\sup_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \dfrac{|x|}{n^2+x^2} \leq \dfrac{a}{n^2}$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV dc la série $\sum \sup |u_n(x)|$ CV,

ie $\sum u_n$ CV normalmt sur $[-a,a]$.

D'où Th (Continuité) f est cont sur $[-a,a]$, $\forall a>0$

Dc f cont sur $\mathbb{R}$.

en effet si $x_0\in\mathbb{R}$, $\exists a>0$ tq $x_0\in\,]-a,a[$.

Dc f cont en x_0.

2) Mq $\forall x>0$ & $n\geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt$$

$t \longmapsto \frac{x}{t^2+x^2}$ est décroissante sur $[0,\infty[$.

Dc $\forall t \in [n, n+1]$, on a :

$$\frac{x}{t^2+x^2} \leq \frac{x}{n^2+x^2}$$

dc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{x}{n^2+x^2}\,dt = \frac{x}{n^2+x^2}$

De m̂ $\forall t \in [n-1, n]$,

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{t^2+x^2}$$

d'où $\displaystyle\frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt$

on a obtenu que :

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = f(x)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq f(x)$$

$$\frac{1}{x}\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt \leq f(x)$$

$u = \frac{t}{x}$

$du = dt/x$.

D'où $\displaystyle\int_{1/x}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \leq f(x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\arctan u\right]_{u=\frac{1}{x}}^{u=\infty} \leq f(x)$$

(ii) De m̂ ↳ $\leq$, on obtient

$$f(x) \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \left[\arctan u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\forall x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Or $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Dc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ex 6 $\quad u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$.

1) CV simple sr $[0,1]$

M1 d'Alembert $\quad$ M2 Cr de Cauchy

M3
* $\forall x \in [0,1[$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right)$

$$\leq x^{2n} + x^{2n+1}$$

& $\sum x^{2n}$ & $\sum x^{2n+1}$ séries géométriques

& $x < 1$.

Dc $\sum u_n(x)$ CV abs dc CV pr $x \in [0,1]$.

& $\sum u_n(1)$ CV car $\forall n \geq 1$, $u_n(1) = 0$

CV normale sr $[0,1]$: $\quad \sup |u_n(x)|$

inégalités astuce... majorer, CVce

f dérivable sr $[0,1]$

$$u_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(2n \cdot x^{2n-1} - (2n+1)\,x^{2n}\right)$$

$$= \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}}\left(2n - (2n+1)\,x\right)$$

D'où $u_n'(x) \geq 0 \iff 2n - (2n+1)x \geq 0$

$\iff x \leq \dfrac{2n}{2n+1}$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Par conség^t, $\sup |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} - \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}}_{\leq 1}\frac{1}{2n+1} \quad \geq n \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ SDR CV, $\frac{3}{2} > 1$ (autre $\boxed{M}$ Cauchy, d'Alembert)

Dc A $\sum_n u_n$ CV normalement dc CV uniformément.

2) $\forall n \geq 1$, u_n cont sur $[0,1]$

série $\sum u_n$ CV U.N $[0,1]$

Dc d'après TVb cont, f est cont sur $[0,1]$

Ex 7 soit $U_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0,2]$

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} U_n(x)$$

1) CV simple $\sum_n U_n$?

si $x \in]0,2] \setminus \{1\}$:

- $$\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \frac{x|1-x|^{n+1}}{x|1-x|^n} = |1-x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = |1-x|$$

$0 < x < 2 \Rightarrow -1 < 1-x < 1$

$\Rightarrow |1-x| < 1$ d'Alembert

- série $\sum_n U_n$ CV

$\rightarrow \sum (1+x)$, $x > 0$ DV.

* $U_n(0) = U_n(1) = 0 \Rightarrow \sum U_n(0)$ & $\sum U_n(1)$ CV.

* $U_n(2) = 2(-1)^n$, $n \geq 1$

$U_n(2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dc $\sum U_n(2)$ DV

$\Rightarrow$ Ainsi $\sum U_n$ CV S. sur $[0,2[$.

2) CV U.N sur $[0,2[$?

on devine ça ne CV pas normalt, ne CV pas U.N ar

on fixe $n \geq 0$, pr $x \in]0,2[$.

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x(1-x)^k$$

$$= x \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x)^k$$

$$= x \frac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (1-x)^{n+1}$$

$$\sup_{x\in[0,2[} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in]0,2[} |R_n(x)|$$

$$= \sup_{x\in]0,2[} |1-x|^{n+1}$$

$$= 1$$

$$\frac{1^\circ \text{ terme}^{n+1}}{1 - \text{raison}}$$

Donc $\sup_{x\in[0,2[} |R_n(x)| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

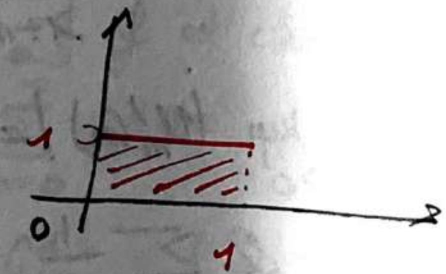
& donc $\sum_n u_n$ ne CV pas U.N sur $[0,2[$.

3) calculer $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx\right)$ & $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right)$

$\forall x\in]0,1]$

- $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \sum x(1-x)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(0) = 0$



$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = 1$$

- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x(1-x)^n\,dx$

$u_n(x) = x$, $u'(x) = 1$

$v_n(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ $v_n'(x) = (1-x)^n$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = -\left[x\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2}\left[-(1-x)^{n+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

D'où $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

<u>DES</u>

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{N+2}$$

$$= \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{1}{N+1}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N+1}} - \frac{1}{N+2}\right)$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$ &

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = 1$$

Rq si $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

si $\sum_n u_n$ CV U.N $[a,b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$.

Ex 8 $u_n(x) = \dfrac{\exp(-nx)}{1+n^2}$, $n \geq 0$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$

1) Mq f CV Normalt sur $\mathbb{R}^+$.

$$\sup_{x \geq 0} |u_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \left(\frac{1}{1+n^2} e^{-nx} \right) = \frac{1}{1+n^2}$$

car $x \mapsto e^{-nx}$ est $\searrow$ sur $[0, \infty[$

$\sum_n \dfrac{1}{1+n^2}$ CV d'où $\sum u_n$ CV Normalt

2) Mq $\sum u_n'$, $\sum u_n''$ CV normalt sur $[a, \infty[$, $\forall a > 0$.

f u_n dérivable. $\forall x \geq 0$

$$u_n'(x) = \frac{-n}{1+n^2} e^{-nx}$$

$$\& \quad u_n''(x) = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx}$$

$$\sup |u_n'(x)| = \sup_{x \geq a} \left(\frac{n}{1+n^2} e^{-nx} \right) = \frac{n}{1+n^2} e^{-na}$$

Rq $\displaystyle\sup_{x \geq 0} |u_n'(x)| = \frac{n}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

& $\sum \dfrac{1}{n}$ DV.

D'où $\exists N \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq n^2 \cdot \dfrac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq \dfrac{1}{n^2}$

$\Downarrow$ $\qquad \sum \dfrac{1}{n^2}$ CV

dc $\sum$ —— CV

dc $\sum u_n'$ CV Normalmt

De même $\sum_n u_n''$ CV normalement sur $[a, \infty[$.

3) Mq f est solution de $y''+y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x>0$

$\to$ u_n est C^2 sur $[0, \infty[$

$\to$ $\sum u_n'$ CV ~~simplement~~ mement de ~~normalement~~ simplement sur $[a, \infty[$.

$\to$ $\sum u_n''$ CV N. de U.N sur $[a, \infty[$.

Le TH du cours $\Leftrightarrow$ f est classe C^2 sur $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

TH $\Leftrightarrow$ f est classe C^1 $\quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)\,dx$ sur $[a, \infty[$.

$\to$ $\sum u_n''$ CV normalement de U.N sur $[a, \infty[$.

TH $\Rightarrow$ f' est C^1 sur $[a, \infty[$ & $\forall x \geq a$,

$$(f')'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x).$$

ie f classe C^2 sur $[a, \infty[$

& $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$, $x \geq a$

D'où f est classe C^2 sur $]0, \infty[$

& $\forall x > 0$, $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$

mq $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x>0$.

$$f''(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2}\right) e^{-nx}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$ Somme série géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$.

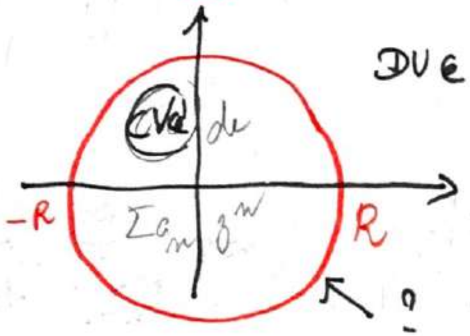
D'où $f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

TD3

Séries Entières

(R1) Série entière $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$.

Rayon de CVa $R \in [0, \infty[$



DVe grossière $\sum a_n z^n$.

De plus, $\sum a_n \cdot z^n$ CV normalmt $\mathcal{D}(0,R)$, $r<R$.

En effet, $\sup_{|z|\leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n$.

Or comme $r \in \mathcal{D}(0,R)$ & que la série CV abst ds $\mathcal{D}(0,R)$, on ed série CV $\sum a_n z^n$ CV normalt sr $\overline{\mathcal{D}(0,R)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$

Ex1 Rayon de CVa ?

1) $\sum_n \frac{n^n}{n!} x^n$; on pose $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \geq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+n)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = (n+1)^n \times \frac{1}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{1+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ et de la règle d'Alembert, on a $R = \frac{1}{e}$.

Dc la série $\sum_n \frac{n^n}{n!} x^n$ CV sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, DV grossiert sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[\right\}$.

Étude en $x = \pm \frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$, $\sum_n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$ CV ou DV ?

$$u_n := \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

FF de Sterling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{n.\ln n - n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n\ln n - n\ln\left(\frac{n}{e}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n + n\ln(e)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

(u_n) est une suite positive.

$\sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ DV d'après le crit de Riemann.

Dc $\sum u_n$ DV pr $x = \frac{1}{e}$.

$\sum \frac{n^n}{}$

$x = -\frac{1}{e}$, $\sum_n (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$ CV ou DV ?

$$\sum v_n = \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}.$$

↳ série alternée

- $v_n = (-1)^n w_n$; $w_n = \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} \geq 0$
- $w_n =$ $w_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n\cancel{+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \frac{1}{e^{n\cancel{+1}}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^n} \cancel{e^n}$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{e} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}$$

→ $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$ ↳ TAF ↳ TAV ...

D'où $\forall n \geq 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

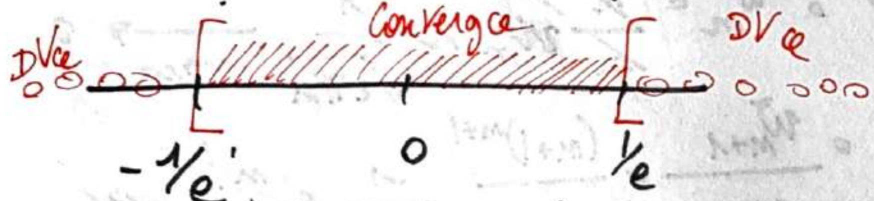
$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$

on a $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ & de $(w_n)_n \searrow$

D'après CSA, $\sum v_n = \sum (-1)^n W_n$ CV

Ainsi $\sum v_n$ CV en $x = -\frac{1}{e}$.

En Résumé :



M] Au cercle, $z = \frac{1}{e} e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$

θ tq $\sum \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e} e^{in\theta}$ CV.

$\rightsquigarrow$ Règle d'Abel svt

a_n : $\searrow$, $\longrightarrow 0$

b_n : $e^{in\theta}$: sommes partielles, pr qq θ : bornées

sp

- soit $b_n = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n}$, $c_n = e^{in\theta}$, $n \geq 0$.

La suite $(b_n)_n$ positive, $\searrow$ vers 0

- On cherche $C > 0$ tq $\forall N \geq 0$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq C. \quad \text{pr } \theta \in]0, 2\pi[$$

ici $\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{N} (e^{i\theta})^n = \frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$

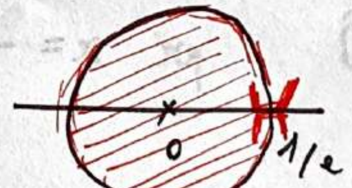
D'où $\left| \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq \frac{|1-e^{i(N+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} =$

D'après le Crit d'Abel, on a que

$$\sum_n b_n \cdot c_n = \sum_n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} e^{in\theta} \text{ CV } \forall \theta \in]0, 2\pi[$$

Finalement $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ CV si $C(0, \frac{1}{e}) \setminus \{\frac{1}{e}\}$

& si $\overline{D(0, \frac{1}{e})} \setminus \{\frac{1}{e}\}$



2) $\sum_n n^2 x^{2n+1} = \sum_n a_n x^n$

$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ k^2 & \text{si } n \text{ impair}, n = 2k+1 \end{cases}$

$\sum n^2 x^{2n+1} = 0 + 0 \times x + 0 \times x^2 + 1 \times x^3 + 0 \times x^4 + 2^2 . x^5 + 0 . x^6 + 3^2 \times x^7$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'est pas bien définie.

on pose $\alpha_n(x) := n^2 x^{2n+1}$, $n \geq 1$, $x \neq 0$

$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{|x^{2n+3}|}{|x|^{2n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x|^2$

- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right| = |x|^2$ D'après crit de D'alembert.

si $|x| < 1$, $x \neq 0$, $\sum_n \alpha_n(x)$ CV

Dc le rayon de CVce est $R = 1$.

CV | DV en -1 & 1 ?...

2) $\sum_n n^2 . z^{2n+1}$, $z \in \mathbb{C}$,

Étudier CVce de $\sum n^2 . z^{2n+1}$ pr $|z| = 1$.

on RQ pr $|z| = 1$, on a :

$$|n^2 . z^{2n+1}| = n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

et la série $\sum n^2 . z^{2n+1}$ DV grossièrt, pr tt $\forall z, |z| = 1$.

cl Le domaine de CVce de $\sum n^2 . z^{2n+1}$ est $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$.

3) $\sum_n \ln(n) . x^n$

calcul du Rayon de CVce.

$a_n = \ln(n)$, $n \geq 2$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

$$= 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

or $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$ & $\lim(\ln(n)) = \infty$

d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

D'après le Cde d'Alembert, on end $\underline{R=1}$.

Domaine de CVce.

si $|z| = 1$, on a $|\ln(n). x^n| = \ln(n). x^n \xrightarrow{} \infty$

dc $\sum \ln(n). z^n$ DV grossmt $\forall |z| = 1$

Dc domaine de CV de $\sum \ln(n). z^n$

est $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4) $\sum_n n^{(-1)^n} z^n$!

Rayon de CVce on pose $a_n = n^{(-1)^n}$.

$$|a_n|^{1/n} = e^{\frac{(-1)^n}{n} \ln(n)}$$

or $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ P croissce comparée

dc $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$

D'après le Cd Cauchy, on ed

Rayon de CVce est $\underline{R = 1}$. $= \frac{1}{l}$

Domaine de CV pr $\sum_n n^{(-1)^n} z^n$:

si $|z| = 1$, on a :

$$|a_{2n} z^{2n}| = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

dc $\sum n^{(-1)^n} z^n$ DV grossièr^t.

ainsi domaine de CV de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ est $\underline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^{2n}$!

trous pr coeffs z^{2n+1} !

Suite Gondar / gruillère → pb de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\alpha_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^{2n}$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^2+1}{3^{\cancel{n}+1}} z^{\cancel{2n}+2} \times \frac{\cancel{3^n}}{n^2+1} \frac{1}{z^{\cancel{2n}}}$$

$$= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)} |z|^2$$

or $\displaystyle\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \frac{1}{3}|z|^2$

D'après le Crit de D'Alembert,

si $|z| < \sqrt{3}$, série $\sum \alpha_n(z)$ CV.

si $|z| > \sqrt{3}$, série $\sum \alpha_n(z)$ DV.

dc le Rayon de CVce est $\sqrt{3}$

→ **Comportement de la série pr $|z| = \sqrt{3}$:**

si $|z| = \sqrt{3}$:

$$\left|\frac{n^2+1}{3^n} z^{2n}\right| = n^2 + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

dc la série $\sum \alpha_n(z)$ DV (grossièrm^t)

$\forall z$, $|z| = \sqrt{3}$. Finalm^t, le domaine de CVce est $D(0,\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < \sqrt{3}\}$.

6. $\sum_{n\geq 0} n!\, z^{n^2}$:

Rayon de CVce :

$\alpha_n(z) = n!\, z^{n^2}$, $z \neq 0$.

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \left|\frac{(n+1)\cancel{!}\, z^{(n+1)^2}}{\cancel{n!}\, z^{n^2}}\right| =$$

$$= (n+1)\frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}} = (n+1)\frac{\cancel{|z|^{n^2}}\,|z|^{2n+1}}{\cancel{|z|^{n^2}}} = (n+1)|z|^{2n+1}$$

si $|z| < 1$, $|z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$(n+1)\,|z|^{2n+1} = e^{\ln(n+1)}\, e^{(2n+1)\ln|z|}$$

$$= e^{(2n+1)\left[\ln|z| + \frac{\ln(n+1)}{2n+1}\right]}$$

or $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1} = 0$ P croissce comparée

d'où $\lim_{n\to\infty} (2n+1)\left[\ln|z| + \frac{\ln(n+1)}{2n+1}\right] = -\infty$ car $|z|<1$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} (n+1)|z|^{2n+1} = 0$

dc $\forall\ |z| < 1$, $z \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = 0 < 1.$$

D+, si $|z| \geq 1$:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = (n+1)\,|z|^{2n+1} \geq (n+1) \to \infty$$

ainsi $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(z)}{\alpha_n(z)}\right| = \infty$

d'après le crit de d'Alembert, on a que
- si $|z| < 1$, $\sum \alpha_n(z)$ CV
- si $|z| \geq 1$, $\sum \alpha_n(z)$ DV

dc $R = 1$ & $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

7) $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) x^n$:

Rayon de CVce :

$(\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x)$

Si $a_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$.

d'où $|a_n z^n| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n$

a_n, b_n tq $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n|$

$\sum a_n z^n$ & $\sum b_n z^n$ ont m̂ Rayon de CV

$\sum a_n \cdot z^n$ CV. Abs. ssi $\sum b_n \cdot z^n$

or $\sum_n \left(\frac{|z|}{2}\right)^n$ CV ssi $|z| < 2$

dc $\sum a_n \cdot z^n$ CV abs ssi $|z| < 2$.

Dc Rayon de CVce est $R = 2$

(si on mq $\sum a_n \cdot z^n$ CV abs si $|z| < R_0 \Rightarrow$ le rayon de CVce est $\geq R_0$)

Si $|z| = 2 \Rightarrow |a_n \cdot z^n| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n = 1$

& dc $\sum_n a_n z^n$ DV gross.

Le domaine de CVce est $D(0,2) =$
$= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

2) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$

soit $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

D'après cd Cauchy, on a $R=1$

Domaine de CVa ?

si $|z| = 1$, $\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

& $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ ⚠ $\left[\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\right]$

dc $\lim \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n\right| = \frac{1}{e}$ $\forall |z| = 1$

dc la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$ DV gross $\forall z, |z| = 1$

Le domaine de CVa est dc $D(0,1)$

@ SE q CV en tt pt appartenant au bord du disq de CVa.

$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

RDC est $\underline{R=1}$.

si $|z| = 1$, on a $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

& dc $\sum \frac{z^n}{n^2}$ CV abs

dc CV $\forall |z| = 1$.

Le domaine de CVa est dc

$DF = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$

g) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n$

Mq $\frac{1}{n.\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$, $n\geq 2$.

$$\ln(n!) = \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

$\forall k\geq 1,\ \ln(k)\geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq \ln(n)$

$\forall k\leq n,\ \ln(k)\leq \ln(n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq n.\ln(n)$

$$\ln(n)\leq \ln(n!) \leq n\ln(n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n.\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

$a_n = \frac{1}{\ln(n!)}$ d'après l'indicat, on a un encadrement

$$\frac{1}{n.\ln(n)} \leq a_n \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}\ln^{\frac{1}{n}}} \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{(\ln(n))^{1/n}}$$

$\frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)^{\beta}}$ $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ & $\beta>1$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ car } \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$$

$$\ln(n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)} = e^{\frac{\ln n}{n}\times\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Par TD6 $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$

Le CdC implique donc le rayon de CVce de $\sum \frac{1}{\ln(n!)} x^n$ est $R=1$.

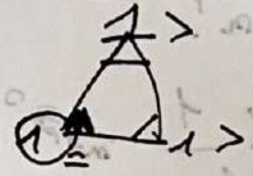
Domaine de CVce :

$\sum_n \frac{1}{\ln(n!)} z^n$. SdB DV

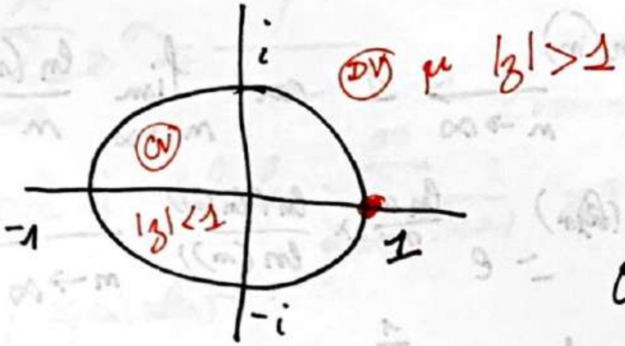
• si $z=1$, on a $\frac{1}{\ln(n!)} z^n = \frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{n\ln(n)}$

$\sum \frac{1}{n.\ln(n)}$ Sd Bertrand DV.

(SdB CV ssi $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ & $\beta>1$.



$$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{\ln(n!)} z^n \text{ DV en } z=1$$



$\theta \in]0, 2\pi[$.

si $|z|=1$ & $z \neq 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$.

Etudions $\sum \frac{1}{\ln(n!)} e^{in\theta}$ pr $\theta \in]0,2\pi[$.

Th d'Abel :

si $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$, $n \geq 2$.

on a $\ln((n+1)!) = \ln((n+1)n!)$
$= \ln(n+1) + \ln(n!)$

Parenthèse

$$\left| \frac{1}{\ln(n!)} z^n \right| = \frac{1}{\ln n!}$$

$$\& \quad \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln n!} \leq \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$0 \xleftarrow[n\to\infty]{}$

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} n^n$

on ne pt pas conclure sur la CVS de la série slmt que la série DV abs pr $|z|=1$

D'où $\ln((n+1)!) \geq \ln(n!)$

$u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi $(u_n)_n$ est ↘ & $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

on $\cdot \leq \cdot\cdot \leq \cdot$ & $u_n \geq 0$.

Mq .. bornée p M.

$$\left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} (e^{i\theta})^n \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \quad (e^{i\theta} \neq 1)$$

$$\leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} \leftarrow \text{cte } M$$

indépdte de n.

$\forall \theta \in]0, 2\pi[, \exists M_\theta > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} \right| \leq M$

D'après Th d'Abel

$\sum_n a_n e^{in\theta}$ CV $\forall \theta \in]0, 2\pi[$.

56

La $\sum \left(\frac{1}{n!}\right) z^n$ CV simplement

ssi $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

Bonne idée Th Abel qd $a_n \searrow$ & $\to 0$.

Ex 8

1) $\sum_n \frac{n}{n+1} x^n$

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ dc d'après le crit de d'Alembert, le rayon de CVce vaut 1.

2) pr $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

mq $f(0) = 0$ & pr $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f(0) = a_0 = 0$.

si $x \neq 0$, $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} x^n$$

d'où $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n$

$$f(x) \overset{?}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{CV\ ?} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{CV\ ?}$$

or $\sum x^n$ est CV car $|x| < 1$

et $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = x^n - \frac{1}{n+1} x^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} x^n = \underbrace{x^n}_{TG\ s\ CV} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n}_{TG\ série\ CV}$$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} x^n$: TG s CV (Terme Général série CV)

Ainsi on pt écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n.$$

or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$
(somme série géom).

Il reste à calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \ln(1-x)$
$x \neq 0$
$|x| < 1$.

ce qui équivaut :

$$-\ln(1-x) = +\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Soit $g(x) = -\ln(1-x)$. g est dérivable sur $]-1,1[$ & $g'(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

D'après Th 5.3.1 du cours, on a $\forall x \in]-1,1[$:

$$\int_0^x g'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \, dt ,$$

$$g(x) - g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

or $g(0) = -\ln(1) = 0$.

D'où $\forall x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} ,$$

ce qui donne $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

car on a multiplié les 2 égalités par $\frac{1}{x}$.

Ex 3 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$!

1) Rayon de CVce : R de SE.

$$\alpha_n(x) := \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \neq 0 \quad \text{si } x\neq 0.$$

D'alembert : $$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{\cancel{x^{2n+1}} x^2}{(n+2)(2n+3)} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{\cancel{x^{2n+2}}}$$

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n^2}{2n^2} x^2 = x^2$$

on ed $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = x^2$.

D'où si $|x|<1$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{1 \cdot x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ CV et si $|x|>1$, la série DV, d'après le Crit de d'Alembert.

ccl Le rayon de CV de la série entière $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ est $R=1$.

étude CV en $x=1$ & $x=-1$?

Pr $x=1$ ou $x=-1$, on a :

$$\left| \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \right| = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, dc $\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV abs dc CV en $x=1$ & en $x=-1$.

2) Mq $\forall x \in]-1,1[$, $f''(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$.

où $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$$

Ĉ le Rayon de CVce est $R=1$, la f f est de classe $C^\infty(]-1,1[)$ et $\forall x \in]-1,1[$.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} (2n+2) x^{2n+1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{(n+1)}\cancel{(2n+1)}} \underbrace{(2n+2)}_{2(n+1)} \cancel{(2n+1)} x^{2n}.$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}$$

3) ed $f(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$ ' $x \in]-1,1[$

$\boxed{M1}$ On introduit

$g(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$, $x \in]-1,1[$

Mq g est 2 fois dérivable & que $\forall x \in]-1,1[$.

R: si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ intervalle dérivable sur I.

si $\forall x \in I$, $f'(x) = g'(x)$ alors $\exists c \in \mathbb{R}$ | $\forall x \in I$, $f(x) = g(x) + c$.

Cor si f & g st 2 fois dérivables sur I & tq $\forall x \in I$, $f''(x) = g''(x)$
Alors $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$,

$f(x) = g(x) = c_1 x + c_2$.

DM

On appliq R à $f'(x)$ & $g'(x)$
Dc $\exists c_1 \in \mathbb{R}$ | $\forall x \in I$,

$f'(x) = g'(x) + c_1 = h'(x)$

où $h(x) := g(x) + c_1 x$, $x \in I$.

D'après le R, $\exists c_2 \in \mathbb{R}$ |
$\forall x \in I$, $f(x) = h(x) + c_2$
$= g(x) + c_1 x + c_2$ □

Généralᵗ possible pr un polynôme p, de degré $< k+1$ | $\forall x \in I$, $f(x) = g(x) + p(x)$.
si $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$.

$\boxed{M1}$ $g(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$, $x \in]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[$, $1-x^2$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

& g est 2 fois dérivable par composée de fct 2 fois dériv. D+, $\forall x \in]-1,1[$,

on a $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x \frac{\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{1+x}{\cancel{1-x}}} - \frac{2x}{1-x^2}$

$g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$g''(x) = \frac{\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{1+x}{\cancel{1-x}}} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$

Finalmt, $\forall x \in]-1,1[$, $f''(x) = g''(x)$.

on ed $\exists$ 2 cte $c_1, c_2 > 0 \mid \forall x \in]-1,1[$,

$$f(x) = g(x) + c_1 x + c_2.$$

En $x=0$: $f(0) = g(0) + c_2$

or $f(0) = 0$ & $g(0) = 0.\ln(1) + \ln(1) = 0$

Dc $\boxed{c_2 = 0}$

on sait d+ $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = g'(x) + c_1$

en $\underline{x=0}$, on a $f'(0) = g'(0) + c_1$

or $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, d'où $g'(0) = \ln(1) = 0$

& $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+1}$,

on a $f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

dc $\forall x\ ]-1,1[$, $f(x) = g(x)$.

$\boxed{M2}$ On intègre l'équa° différentielle.

$f''(x) = \frac{2}{1-x^2}$

d'où $f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\,dt$

$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$

or $f'(0) = 0$ d'où

$f'(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$

d'où $f'(x) = \left[\ln(1+t) - \ln(1-t)\right]_0^x$

$f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

on a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$

$f(x) \cancel{- f(0)} = \int_0^x \left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right) dt$

$v(t) = \ln(1+t) - \ln(1-t)$

$v'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$

$u'(t) = 1 \quad , \quad u(t) = t$

$f(x) = \left[t(\ln(1+t) - \ln(1-t))\right]_0^x - \int_0^x \left(\frac{t}{1+t} + \frac{t}{1-t}\right) dt$

$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(\frac{(t+1)-1}{1+t} - \frac{(1-t)-1}{1-t}\right) dt$

$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{1}{1-t}\right) dt$

$= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left[-\ln(1+t) - \ln(1-t)\right]_0^x$

$\Rightarrow$ soit $\forall x \in \,]-1, 1[$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1 - x^2)$$

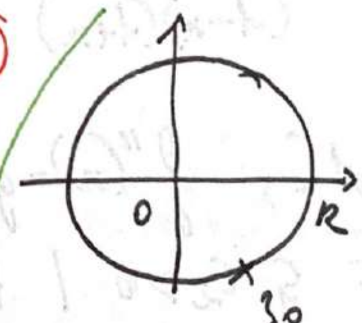
4) cq $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = 2 \ln(2)$

on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV

en $x = 1$ & vaut de $f(1)$.

qd pt-on affirmer $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$!?

R0



soit $\sum a_n z^n$ SE de rayon de CVa égale à R

si $\sum a_n z_0^n$ CV alors

$$\lim_{z \to z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n .$$

RY : $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}\right| = .$

$= \sup_{|x|\leq 1} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} |x|^{2n+2} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$

dc la $\sum_n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ CV normalement sur $[-1,1]$.

dc Uniformément

& ĉ $x \longmapsto \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ est cont n $[-1,1]$,

on obtient que f est cont sur $[-1,1]$.

ep $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$= \lim_{x\to 1^-} x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$

on a : $x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) =$

$= \underbrace{x\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} - x\ln(1-x) + \underbrace{\ln(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)} + \ln(1-x)$

D+, $-x\ln(1-x) + \ln(1-x) = (1-x)\ln(1-x)$

or $\lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0$ d'où

$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$

Ainsi $f(1) = 2\ln(2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

Ex4 1) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ Calcul de somme.

Étude de la CVce

D'Alembert ; $n\neq 0$; $a_n = n^2$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

D'où $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dc le rayon de CVce de la série $\sum n^2 x^n$ est $R=1$.

Dc on sait que $\sum n^2 x^n$ CV pr $|x|<1$ & DV pr $|x|>1$.

Pr $|x|=1$, $|n^2 x^n| = n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Dc la $\sum n^2 x^n$ DV grossièrement.

Calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

→ soit on dérive

→ soit on intègre

Remarquons que si $U_n(x) = x^n$ alors

$U_n''(x) = n(n-1)\,x^{n-2} = n^2 x^{n-2} - n x^{n-2}$.

Pour $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} =: g(x)$

comme le rayon de CVce est 1, g est $C^\infty(]-1,1[)$

$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$ (1) pr $|x|<1$

$g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} - n x^{n-2}$

on Rq que les 2 séries $\sum n^2 . x^{n-2}$ & $\sum n . x^{n-2}$ CV pr $|x|<1$ (car elles ont un RDC $=1$).

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n . x^{n-2}$$

$$\text{D'où } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-2}}_{\frac{1}{x(1-x)^2}}$$

Soit $x\neq 0$ on divisant (1) par x.

En multipliant par x^2 :

D'où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x^3)} + x\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(2x+1-x)}{(1-x)^3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}}$$

---

2) $\sum_n \frac{n^2+1}{n!} x^n$

CV de série : $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$, $n \geq 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Dc $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

Dc série CV $\forall x \in \mathbb{R}$.

Calcul de la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n \; ; \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}$$

on sait que le RDC $R = \infty$

D'où en dérivant :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \; ; \; e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

*

$$e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-2}$$

* comme les 2 séries $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ & $\sum \frac{x^n}{n!}$ CV on pt écrire $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} x^n$$

$$\text{Dc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n}_{(ii)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n}_{(i)}$$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1}$

$\displaystyle = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x \cdot e^x$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+2} = x^2 e^x$

$$f(x) = xe^x + x^2 e^x + e^x = (1+x+x^2)e^x$$

Ex5 1) $\displaystyle S = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ CV-t-elle ?

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+1} = (-1)^n U_n$; $U_n = \dfrac{1}{3n+1} > 0$

La série $\sum_n a_n$ est donc une série alternée.

Rq suite $(U_n)_{n\geq 0} \searrow$ & $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On déduit de $\boxed{\text{CSA}}$ que $\sum a_n$ CV.

2) Rayon de CVce de $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

$\sum a_n x^{3n+1}$; $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$; $\alpha_n = a_n x^{3n+1}$

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{x^{3n+4}}{x^{3n+1}}\right| = \frac{3n+1}{3n+4} |x|^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|^3$$

si $|x| < 1$, série CV.

si $|x| > 1$, série DV.

3) Mq $x \in]-1,1[$, $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$

où $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

$(1+t)^3 = (t+1)\underbrace{(t^2 - t + 1)}_{\Delta = -3 < 0}$

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

ĉ le RDC de $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{n+1}$ est $R = 1$.

↳ f est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) =$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{(3n+1)}\, x^{3n}}{\cancel{3n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n$$

- ĉ $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

Par Th fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt$$

- or $f(0) = 0$ d'où:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt\ ,\ x \in]-1,1[.$$

4) Mq $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est U.N sur $[0,1]$.

On Rq $\sum_n (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \sum_n (-1)^n v_n(x)$

& $v_n(x) = \frac{x^{3n+1}}{3n+1} > 0$, dc la série est une série alt.

D+, $\forall x \in [0,1]$, la suite $(v_n(x))_n$ est $\searrow$ & $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = \frac{3n+1}{3n+4} x^3 \leq 1 \ ;\ \forall n \geq 0, \forall x \in [0,1].$$

$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{3n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après crit SA, on a: $|R_n(x)| \leq \frac{x^{3n+4}}{3n+4}$, $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{3n+4} \longrightarrow 0$$

Dc $(R_n)_n$ CV U.N $\to 0$ sur $[0,1]$.

Ainsi la série CV U.N sur $[0,1]$

R4 avec TH d'Abel radial.

si $\sum a_n x^n$ est SE de $R>0$.
On supp $\sum a_n R^n$ CV alors la série $\sum a_n x^n$ est UN. CV sur $[0,R]$

CV normale

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}$$

or $\sum_n \frac{1}{3n+1}$ DV dc la série ne CV pas normalement.

5) cd ∞ $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$

on sait que $\forall x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \quad \text{d'après 3)}$$

on sait que f est cont sur $[0,1]$.
La $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est U.N CV sur $[0,1]$.

D'où,

$$S = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \quad g(x)$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

car $\left| \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} - \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \right| = \left| \int_x^1 \frac{dt}{1+t^3} \right| \leq 1-x \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

$g(x) - \ell \to 0$

Ex6 $f(x) = (2+x)e^x$

a) Mq $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = f(x) + n e^x$.

soit $\forall n \geq 0$: H_n : " $f^{(n)}(x) = f(x) + n e^x$, $x \in \mathbb{R}$ "

H_0 : $f^{(0)}(x) = f(x) = f(x) + 0 \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$

dc H_0 vraie.

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Supposons H_n soit vraie.

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \overset{H_n}{=} f'(x) + n e^x$

$= e^x + (2+x)e^x + n e^x$

$= (2+x)e^x(n+1)$

dc $f^{(n+1)}(x) = f(x) = (n+1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

dc H_{n+1} est vraie.

Ainsi $\forall n \geq 0$, H_n est vraie (PPR)

$\boxed{M2}$ FF Leibniz

b) DE SE f ; de classe C^∞ donné p :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

D'après a), $f^{(n)}(0) = f(0) + n e^0$

$f^{(n)}(0) = 2 + n \quad \forall n \geq 0$

Le de SE de f est $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n$.

RDC ? D'Alembert

$a_n := \dfrac{2+n}{n!}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2+n+1}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{2+n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} \to 0$

Dc RDC de SE vaut $R = \infty$.

c) Mq $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

(car les 2 SE $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ & $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$

CV $\forall x$ (RDC $R = \infty$)

α $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Puis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1}$ $\quad$ pr $k = n-1$

$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x . e^x$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n}{n!} x^n = 2e^x + x e^x = (2+x)e^x = f(x)$$

Ex 7 DSE $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

on pourra dériver f

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ et $1-x^2 > 0\}$

$\mathcal{D}f =]-1,1[$ $\quad$ automatiq

$\mathcal{F}$ Th Compo, ext f est dérivable $C^\infty(]-1,1[)$.

Pr $x \in]-1,1[$; on a :

$f(x) = -\ln\sqrt{1-x^2} = -\ln(1-x^2)^{1/2}$

$= -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

D'où $f'(x) = -\frac{1}{2} \quad \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$

D+, $\forall u \in]-1,1[$, on a

$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$,

si $x \in]-1,1[$, $x^2 \in [0,1[$ & dc

$$\frac{x}{1-x^2} = x . \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, on a : $\quad$ * Th Intégr° SE

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

& $f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \ln(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}, \quad \forall x \in]-1,1[.$$

RDC ? $\alpha_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$, on a :

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{x^{\cancel{2n+4}\,2}}{2n+4} \times \frac{2n+2}{\cancel{x^{2n+2}}}$$

dc $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|^2$

- D'après Th D'Alembert, on a le RDV vaut $R = 1$.

Rq : D'après (*), $R \geq 1$, (la SE cv vers $f(x)$ pr $x \in]-1,1[$).

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ DV en $x = 1$.

- Dc $R = 1$.

Ex 8 soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \displaystyle\int_0^x e^{t^2/2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Objectif : DE SE de f.

1° idée : On part de $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$, $u \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$)

$e^{t^2/2} = \sum \cdots$ puis on intègre puis on fait le produit de Cauchy du DE SE de $e^{-x^2/2}$ & $\displaystyle\int_0^x e^{t^2/2}\,dt$

$$e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \geq 0$

2° idée : avec équat° différentielle.

a) $f(x) = e^{-x^2/2} \cdot h(x)$ où $h(x) = \int_0^x e^{t^2/2}\,dt$

cp h est la primitive de $t \to e^{t^2/2}$ q s'annule en 0. Comme $t \longmapsto e^{t^2/2}$ est cont sur $\mathbb{R}$, on ed h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^{x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

R : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cont s intervalle $I \subset \mathbb{R}$ & $a \in I$, alors on sait que f admet des primitives &

$$(*) \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

, où F est une primitive de f.

Si G est la primitive de f q s'annule en a alors d'après $(*)$;

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a) = G(x).$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fs dérivables) & $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} e^{-x^2/2} h(x) + e^{-x^2/2} h'(x)$$
$$= -x e^{-x^2/2} h(x) + e^{-x^2/2} e^{+x^2/2}$$
$$= -x f(x) + 1$$

dc $f'(x) + x f(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2) solᵒ équaᶿ s forme SE.

$$y' + xy = 1 \quad (E)$$

Supposons $\exists$ une f $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en SE au V de 0 q est soluᶿ de (E).

ie $\exists R>0$ tq $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

& $g'(x) + x g(x) = 1$, $|x| < R$

cp g est dérivable $\forall x \in]-R, R[$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1},$$

- D'où $\forall x \in]-R, R[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1.$$

ds 1° terme, on fait chgt d'indices $k = n-1$, $(k+1 = n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

- $$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^j \qquad \begin{array}{l} j = n+1 \\ \Leftrightarrow n = j-1 \end{array}$$

D'où $$1 = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$1 = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) a_{k+1} + a_{k-1} \right) x^k$$

D'où par unicité $\left| \begin{array}{l} a_1 = 1 \quad \& \\ k \geq 2,\ (k+1) a_{k+1} + a_{k-1} = 0 \end{array} \right.$

Rq (unicité)

Supps $\exists R > 0$ tq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < R$$

$\Rightarrow \forall n \geq 0$, $a_n = b_n$.

$\longrightarrow$ ici $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

空手

1 $a_0 \in \mathbb{R}$. Fixons-le.

$a_1 = 1$

$3a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$

$5a_5 + a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{5} a_3 = \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

$7a_7 + a_5 = 0 \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{7} \cdot a_5 = \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$a_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} a_{2n-1}$$

$$a_{2n+1} = \left(-\frac{1}{2n+1}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-1}\right) \times \dots \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1) \times \dots \times 3 \times 1}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad 2n \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2$$

$$= \frac{(-1)^n 2^n \times n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(2n+1)!}$$

D'où $\forall n \geqslant 0$,

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$$

Suite ex 8 :

Supp. $\exists$ f g développable en SE,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R,$$

solu° de $y' + xy = 1$.

- On a mqé $a_1 = 1$ & pr $k \geq 1$;

$$(k+1) a_{k+1} + a_{k-1} = 0 \quad (*) \iff a_{k+1} = -\frac{1}{k+1} a_{k-1}$$

D'où $\forall n \geq 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$

si on fixe $a_0 \in \mathbb{R}$.

Dans (*) pr $k = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2} a_0$

$k = 3$, $a_4 = -\frac{1}{4} a_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) a_0$

- $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2n\,(2n-2) \dots \times 4 \times 2} a_0 \quad : H_n$

H_1 : $a_2 = -\frac{1}{2} a_0$ d'où H_1 vraie.

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Supposons que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n\,(2n-2) \times \dots \times 4 \times 2} a_0$$

on sait que p (*) :

$$a_{2n+2} = -\frac{1}{2n+2} a_{2n}$$

$$\overset{HDR}{=} -\frac{1}{(2n+2)} \frac{(-1)^n}{(2n\,(2n-2) \times \dots \times 4 \times 2} a_0$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2) \times \dots \times 4 \times 2}$$

Dc H_{n+1} est vérifiée. PR on a mqé $\forall n \geq 1$, H_n est vraie.

ccl si g est une solu° de $y' + xy = 1$ développable en SE, alors

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{où}$$

(1) $$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}, & k = 2n+1 \\[2ex] \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} a_0, & k = 2n \end{cases}$$

Réciproqmt, soit g la somme ~~g la~~ de la (SE) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où a_n est donnée p (1).

Étudions la limite de $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

$k=2n$ $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{\cancel{(-1)^n}\, 2^n n!}{(2n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{\cancel{(-1)^n}}$

$= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

FF de Sterling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,.\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$k=2n$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4^n \cancel{2}\pi n \quad \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$$

$\sim \cancel{2}\sqrt{\pi n}$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4^n\sqrt{\pi n}}{\frac{2n+1}{e}}\; e^{2n\left[\ln\left(\frac{n}{e}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{e}\right)\right]}$$

$\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

$a,b>0$

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

puis $\frac{n}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

d'où $\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$2n.\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = -2n.\ln 2 + 2n\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$$e^{2n.\ln(n/(2n+1))} = e^{-2n\ln 2}\,.\,e^{2n\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{\ln 2^{2n}}} = \frac{1}{4^n}$$

D'où $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{4^n}\sqrt{\pi n}}{\frac{2n}{e}} \times \dfrac{1}{\cancel{4^n}} e^{2n\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$

$= \dfrac{e\sqrt{\pi}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times e^{2n\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$

$\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \quad , u\to 0$

$\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) = -\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2(2n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$

$2n\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) = \underbrace{-\dfrac{2n}{2n+1}}_{\to -1} - \dfrac{2n}{2(2n+1)^2} + o(n)$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 0$

• $k = 2n+1$: $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \times \dfrac{(2n+1)!}{(-1)^n 2^n n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{(2n+1)!}{2 \cdot 4^n (n+1)(n!)^2}$

or $\dfrac{4^n \cdot n!^2}{(2n+1)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{n}} \quad , c \neq 0$

$\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2(n+1)} \dfrac{\sqrt{n}}{c} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{2c \cdot n}$

$= \dfrac{1}{2c\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 0$

Dc $R = +\infty$.

$\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$

$-\ln(1-u) = -u - \dfrac{1}{2}u^2 + o\left(\frac{1}{2}u^2\right)$

$\boxed{M}$ Résol° EDiff $\Leftarrow$ (SE)

① supp sol équa diff
dév en (SE) $g(x) = \sum a_n x^n$
de RDC R.
on dérive ; injecte ds ED
identificat° $\longrightarrow$ coeff^{ts} ; a_n ?
(PR) a_n.
RDC a_n ?
$\longrightarrow$ $R = \infty$ $\Rightarrow$ g dériv sr $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$g'(x) + x g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ k=n-1}}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) a_k + a_{k-1}\right) x^k$$

$=$

al ttes les soluts de $y' + xy = 1$ développables en (SE) st données par

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

où $(a_k)_k$ est donnée q (1)

② Calcul RDC converg^{ce}

M41-

$\boxed{M}$ Résoudre équa diff de SE.

1/ On supp. $\exists$ SE $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
de RDC R, sol (E).
Puis on dérive g, on injecte le calcul ds (E) pr chercher relaᵒ de récurrence s coeff $(a_n)_n$ pr ensuite les déterminer p identificaᵒ.

2/ On vérifie SE qu'on a obtenu est bien soluᵒ de (E). ie on calcule son RDC R puis on vérifie qu'elle est solᵒ de (E).

c) cf dev SE de f.

$$f(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\, dt$$

- f est solᵒ de (E) (q. a)
- f est dév. en SE (car exponentielle)

Alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_n$ est donnée p (1)

De +, $f(0) = 0$; dc $a_0 = 0$

d'où $a_{2n} = 0$, $\forall n \geq 0$. $a_1 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

D'après la lecture du tableau

$\mathbb{P}(X \leq 3, Y = 4)$

$= \mathbb{P}(X=1, Y=4) + \mathbb{P}(X=3, Y=4)$

$= 0,15 + 0,3 = 0,4$

4) Indépendce ?

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i) \cdot \mathbb{P}(Y=j)$

$\forall i,j$ on a bien indép dce.

5) loi (va) $V = X - Y$?

• V prd ses valeurs dans

$\{-1, 1, 3, -3\}$

Y \ X	1	3	5
2	0,1 -1	0,2 1	0,1 3
4	0,15 -3	0,3 -1	0,15 1

$\mathbb{P}(V=-1) = \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=3, Y=4) = 0,4$

$\mathbb{P}(V=1) = 0,35$, $\mathbb{P}(V=3) = 0,1$, $\mathbb{P}(V=-3) = 0,15$

$\sum \mathbb{P}(V=k) = 1$

$V = X - Y$

$Var(V) = Var(X) + Var(-Y) = Var(X) + Var(Y)$

$E(V) = E(X) - E(Y) = 3 - 3,2 = 0,2$

$Var(V) = E(V^2) - (E(V))^2$

$Var(X+Y) = \mathbb{E}\left[(X+Y-\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y))^2\right]$

$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y))^2\right]$

$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2 + (Y-\mathbb{E}(Y))^2 + 2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]$

$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}(Y))^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]$

$\Rightarrow \boxed{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)}$

si X, Y st indépend : $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

39

Ou bien on calcule

$Var(V) = \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2$

$cov(X,Y) = \frac{1}{2}\left[Var(V) - Var(X) - Var(Y)\right]$

$$\boxed{cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}$$

$\mathbb{E}(XY) = 2\times 0{,}1 + 6\times 0{,}2 + 10\times 0{,}1 + 4\times 0{,}15$
$+ 12\times 0{,}3 + 20\times 0{,}15 = 9{,}6.$

Ex 3 X : va tq $\mathbb{E}(X) = 1$, $Var(X) = 5$

Trouver $\mathbb{E}((2+X)^2)$ & $Var(4-3X)$

$\mathbb{E}((2+X)^2) = \mathbb{E}(X^2 + 4X + 4)$

$= \mathbb{E}(X^2) + 4\,\mathbb{E}(X) + 4 = 6 + 4\times 1 + 4 = 14$

On $\mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 5 + 1^2 = 6$

$Var(4-3X) = Var(-3X) = 9\,Var(X) = 45.$

Ex 4 soit X va $X \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$, $\lambda > 0$,

Justif $\mathbb{E}(Y = e^X)$ $\exists$ & calcule.

X suit un moment exponentiel.

$\rightarrow Y$ est va positive :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^k\, \mathbb{P}(X=k)$$ $\leftarrow$ Regarder sa Convergence.

NB : $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\, \mathbb{P}(X=k)$ si $\varphi > 0$

ⓐ $\varphi(x) = x^2$

$\mathbb{E}(x^2) = \sum k^2\, \mathbb{P}(X=k)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^k . \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^k . \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e} = e^{\lambda(e-1)}$$

$\Rightarrow$ Série (CV).

dc espérance $\exists$.

Ex5 X & Y 2 (va) indépend. loi de Bernoulli

$X \sim \mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$, $Y \sim \mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$.

on déf $S = X+Y$ & $D = |X-Y|$.

1) Donner lois S, D 2) $\mathrm{cov}(S, D)$. indépdc ?

loi de S $\mathbb{P}(S=0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(S=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S=2) = \frac{1}{4}$

- $S = X+Y \sim \mathrm{Bin}(2, \frac{1}{2})$

$$C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \frac{C_2^k}{4}.$$

loi de D $D = |X-Y|$, D prend ses val^{rs} ds $\{0,1\}$.

$\mathbb{P}(D=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$\mathbb{P}(D=0) = \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=1)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(D=1) = \dots = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow D \sim \mathrm{Bern}(\frac{1}{2})$

$\mathrm{cov}(S,D) = \mathbb{E}(SD) - \underbrace{\mathbb{E}(S)}_{1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(D)}_{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$= 0$.

NB :

$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \sum \varphi(x_k, y_\ell)\, \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_\ell)$

$\mathbb{E}(SD) = \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} (i+j)|i-j|\, \mathbb{P}(X=i, Y=j)$

$= \sum (i+j)|i-j|\, \mathbb{P}(X=i) \cdot \mathbb{P}(Y=j)$

$= \frac{1}{4}(0+1+1+0) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ S & D st. ils indép ?

$\mathbb{P}(S=1, D=0) = 0 \neq \mathbb{P}(S=1) \cdot \mathbb{P}(D=0)$

⚠ m̂ si $\mathrm{cov}(S,D) = 0$ les variables ne st pas forcément indépendantes.

ici S & D ne st pas indépdtes.

Ex 6 (supporters, trains, inégalité Tchebichev)

→ 700 + m places. ; se répartissent au hasard

→ 1400 supporters

$X \sim \mathcal{B}in(1400, \frac{1}{2})$

$Y \sim \mathcal{B}in(1400, \frac{1}{2})$

si $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème supp. ds train à gauche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$1 \leq i \leq 1400$.

$X = \sum_{i=1}^{1400} \varepsilon_i$

$(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 1400}$ ie $\mathcal{B}er(\frac{1}{2})$.

Ex 9 (ED)

(1) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

1°) Supposons $\exists$ f $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (développ. en SE sur $R>0$) q soit soluᵒ de (E_1)

$\forall x \in]-R, R[$, on a :

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Puis on injecte ds l'(E_1) :

y soluᵒ de (E_1) ssi

$$\hookrightarrow x(x-1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + 3x\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Puis on veut regrouper les termes, les séries ensemble, en ajoutant les premiers termes.

Ce q est équivalent à :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1}}_{j=k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\bullet\bullet = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) j a_{j+1} x^j$$

Dc y soluᵒ de (E_1) ssi

$$a_0 + (\cancel{2a_2} + 3a_1 + a_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)a_k - (k+1)k a_{k+1} + 3k a_k + a_k] x^k = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)a_k - (k+1)k a_{k+1} + 3k a_k + a_k] x^k = 0$$

Par unicité, $a_0 = 0$

& $k(k-1)a_k - (k+1)k a_{k+1} + 3k a_k + a_k = 0$, $k \geq 1$.

D'où $a_0 = 0$

$$(\underbrace{k(k-1) + 3k + 1}_{\substack{k^2+2k+1 \\ \parallel \\ (k+1)^2}})a_k = (k+1)k\, a_{k+1}$$

dc $\begin{cases} a_0 = 0 \\ (k+1)a_k = k a_{k+1}, & k \geq 1 \end{cases}$

soit $\dfrac{a_{k+1}}{k+1} = \dfrac{a_k}{k}$, $\forall k \geq 1$.

dc $\dfrac{a_k}{k} = \dfrac{a_1}{1}$, $k \geq 1$.

$\left| \begin{array}{l} a_k = k a_1, \ k \geq 1. \\ a_0 = 0 \end{array} \right.$

- On a dc mqé si y est solut° de (E_1) dev en SE, alors

$$y(x) = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad |x| < R.$$

2°] Vérifier si cela f bien.

soit $y(x) = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} k x^k$, $a_1 \in \mathbb{R}$.

RDC? D'après D'Alembert $\dfrac{k+1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Dc $R = 1$.

Dc y est dérivable sur $]-1,1[$

$$y'(x) = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$$

$$y''(x) = a_1 \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1) x^{k-2}, \quad x \in]-1,1[$$

D'où $(x^2-x)\, y''(x) + 3x\, y'(x) + y(x) =$

$$= a_1 \left[(x^2-x) \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1) x^{k-2} + 3x \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k x^k \right]$$

$$= a_1 \left[\sum_{k=\cancel{2}\,1}^{\infty} k^2(k-1) x^k - \sum_{\substack{k=\cancel{2}\,1 \\ j=k-1}}^{\infty} k^2(k-1) x^{k-1} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k x^k \right]$$

$$= a_1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2(k-1) + 3k^2 + k \right] x^k - \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^2 j x^j \right]$$

$$= a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^3 - k^2 + 3k^2 + k - k(k^2 + 2k + 1) \right] x^k$$

$\cancel{k^3} + \cancel{2k^2} + \cancel{k} - \cancel{k^3} - \cancel{2k^2} - \cancel{k}$

$= 0$

75

(2) (E_2) $xy'' + xy' + y = 1$

1° étape : Supposons $\exists$ soluθ y de (E_2) dev en (SE), ie $\exists R>0$ tq

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R \ \&$$

y 2 fois dérivable sur $]-R, R[$

& $$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Con injecte dans l'équaθ (E_2) :

$$x \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=\cancel{2}\,1}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} + \sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1$$

$j = k-1$

D'où

$$\sum_{j=\cancel{1}\,0}^{\infty} (j+1) j\, a_{j+1} x^j + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)k\, a_{k+1} + (k+1) a_k \right] x^k = 1,$$

$x \in]-R, R[$

Par unicité, par identificatθ :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \cancel{(k+1)} k\, a_{k+1} + \cancel{(k+1)} a_k = 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

(Rq) $\exists R>0$ tq (Th unicité)

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

$$\Rightarrow a_n = b_n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{k+1} = -\dfrac{1}{k} a_k \end{cases}$$

$$a_{k+1} = -\frac{1}{k}\, a_k = \left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k-1}\right) a_{k-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k-1}\right)\left(-\frac{1}{k-2}\right) a_{k-2}$$

d'où $a_{k+1} = \left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k-1}\right) \cdots\cdots \left(\frac{-1}{1}\right) a_1$

- Mq $\boxed{a_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k!}\, a_1}$

PR^{ce} pr $k=0$, ☺ ✓

Supposons $a_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k!}\, a_1$

& $a_{k+2} = -\frac{1}{k+1}\, a_{k+1} = \left(-\frac{1}{k+1}\right) \frac{(-1)^k}{k!}\, a_1$

- $$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\, a_1$$

Finalmt si y est f dv SE de (E_2) alors

$$y(x) = 1 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!}\, x^k$$

$$= 1 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi $y(x) = 1 + a_1\, x\, e^{-x}$

2° étape) si $y(x) = 1 + a_1 x e^{-x}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ alors on vérifie y est sol^{u} de (E_2).

$y'(x) = a_1 \left[e^{-x} - e^{-x} \right]$, $\underbrace{R = \infty}_{\text{car } e^{x} \text{ DSE } \infty}$.

$y''(x) = a_1 \left[-e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} \right]$

d'où $xy'' + xy' + y = a_1 x \left[-2 e^{-x} + x e^{-x} \right]$

$+ a_1 x \left[e^{-x} - x e^{-x} \right]$

$+ 1 + a_1 x e^{-x}$

$= 1 + a_1 x e^{-x} \left[\underbrace{-2 + x + 1 - x + 1}_{= 0} \right] = 1$

$= 1$ dc y bien sol$^{\circ}$ de (E_2)

TD4 Ex 1. soit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geq 1$

et soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

1) Calcul du RDC de $\sum a_n x^n$!

Mq $1 \leq a_n \leq n$

on a $a_n = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{\geq 0} \geq 1$

Dc $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Ainsi $1 \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(car $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ croiss̃ce comparée)

dc $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$ (TDG)

Donc $R = 1$

Dc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ CV pr $x \in]-1,1[$.

2) $\forall x \in]-1,1[$, on a :

$(1-x) f(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{j=n+1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-1} x^j$

$\Rightarrow (1-x) f(x) = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$

or $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$. & $a_1 = 1$

D'où $(1-x) f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

3) D'après le cours, $\forall x \in]-1,1[$

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n}$$

Ainsi $(1-x) f(x) = -\ln(1-x)$

D'où $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Rq : on pt user le produit de Cauchy.

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$R_1 = 1$, $R_2 = 1$.

D'après le Th sur le produit de SE,

$\forall x \in]-1,1[$,

on a $\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$

où $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

et $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ \frac{1}{k}, & k \geq 1 \end{cases}$, $b_k = 1, k \geq 0$

D'où $d_0 = 0$ & $n \geq 1$ $d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ex 2

(1) calculer $\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$, $n \geq 0$.

$\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^1 x^n \ln(x)\, dx$,

comme $u : x \longmapsto \ln x$ & C^1 sur $[\varepsilon, 1]$

& $v : x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est C^1 sur $[\varepsilon, 1]$

la ff d'intégrale IPP s'applique &

$$\int_\varepsilon^1 x^n \ln(x)\, dx = \int_\varepsilon^1 u(x) v'(x) dx$$

$$= [u(x) v(x)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 u'(x) v(x)\, dx$$

$$\int_\varepsilon^1 x^n \ln(x)\, dx = -\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)$$

$$-\frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n\, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_\varepsilon^1$$

$$= -\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{(n+1)^2}(1-\varepsilon^{n+1})$$

$\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ (croissance comparée)

$\varepsilon^{n+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Dc $\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$ CV &

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

2) Mq $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)^2}$

$\forall x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

l'idée $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\ln(x)\, dx$

pb ici $\displaystyle = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\ln(x)\, dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

Sa f : $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est cont.

en 0, $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$

dc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ & dc on pt PPC en 0.

en 1 : $\ln(x) = \ln(1-(1-x)) \underset{x\to 1}{\sim} -(1-x)$

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$

on pt PPC f en 1. en posant $f(1)=0$.

- Dc l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\ln(x)\,dx$$

Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{n}\ln(x)$.

Mq $\sum u_n$ CV normalem^t sur $[0,1]$.

u_n est dérivable sur $[0,1]$, $n \geq 2$

- et $u_n'(x) = \frac{1}{n}\left[n x^{n-1}\ln x + \underbrace{x^n \times \frac{1}{x}}_{x^{n-1}}\right]$

$$= \frac{x^{n-1}}{n}\left(n\ln(x) + 1\right)$$

D'où $u_n'(x) \geq 0$

$\iff n\ln(x) + 1 \geq 0$

$\iff x \geq e^{-\frac{1}{n}}$

x	0		$e^{-1/n}$		1
$u_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$u_n(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = -(u_n(e^{-1/n}))$$

$$= -\frac{1}{n}(e^{-\frac{1}{n}})^n \ln(e^{-\frac{1}{n}})$$

$$= \frac{e^{-1}}{n^2}$$

comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV, on ed que $\sum_n \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)|$ CV

Dc $\sum_n u_n$ CV normalem^t dc uniform^t sur $[0,1]$

Ainsi $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx)$$

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{n} x^n \ln(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)^2} \text{ d'après 1)}$$

D'c $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$

Ex 3 $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$

1) $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R},\ 1+x-2x^2 > 0\}$

$$1+x-2x^2 = (x-1)(-2x-1)$$
$$= -(x-1)(2x+1)$$

x		$-1/2$		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$1+x-2x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \mathcal{D}f = \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

2) Déterminer dev en SE.

R$\rightarrow$ $\ln(1+u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n}$

$\left[\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-(-u)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n\right.$

$$\ln(1+u) - \ln 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k} \qquad k = n+1$$

$R = 1$, $|u| < 1$.

$f(x) = \ln(1+x-2x^2)$

On pourrait vouloir remplacer u par $x - 2x^2$ mais il faudrait s'assurer que $|x - 2x^2| < 1$.

- et d+ il faut ensuite calculer $u^n = (x - 2x^2)^n$ & dc dev $\hookrightarrow$ le binôme de Newton... bof

$\Rightarrow$ on sait que $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$

$f(x) = \ln((1-x)(1+2x))$

- Or $\forall x \in]-\frac{1}{2}, 1[$, $1+2x > 0$, $1-x > 0$,

dc $f(x) = \ln(1+2x) + \ln(1-x)$

D'où pr $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\subset]-1,1[$, on a $2x \in]-1,1[$ &

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^{n-1}2^n - 1\right)x^n}$$

Ex4 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x \in]-1,1[$.

Rq : pr $x \in]-1,1[$, $1+x > 0$ et $1-x > 0$

Dc f est bien déf sur $[-1,1]$.

Rq $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+u)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n, \quad |u| < 1$$

(a) Mq $f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}$, $x \in]-1,1[$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}}$$

$$= \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{car } 1+x>0$$

$$= (1+x)(1-x^2)^{-1/2}$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{-1-2n+2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-2n+1}{2}\right) \quad -(2n-1)$$

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = \frac{(-1)\times(-3)(-5)\times\dots(-(2n-1))}{2\times 2\times\dots\times 2}$$

$$= \frac{(-1)\times(-2)(-3)\times\dots\times(-2(n-1))\ (-2n)}{2\times(-2)\times 2\times\dots\times 2\times(-2n)}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}\ (2n)!}{(-1)^n\, 2^n\, n!}$$

$$= \frac{(-1)^n\ (2n)!}{2^{2n}\ n!}$$

µ $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

D'où $$(1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} u^n, \quad |u|<1$$

pour $u = -x^2$, $x \in]-1,1[$.

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^n} (2n)!}{4^n (n!)^2} \cancel{(-1)^n} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Dc $$f(x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} + \sum^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où $a_n = \begin{cases} \dfrac{(2p)!}{4^p (p!)^2}, & n = 2p \\ \dfrac{(2p)!}{4^p (p!)^2}, & n = 2p+1 \end{cases}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} + \sum^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

où $a_m = \begin{cases} \dfrac{(2p)!}{4^p (p!)^2}, & m = 2p \\ \dfrac{(2p)!}{4^p (p!)^2}, & m = 2p+1 \end{cases}$

Ex 5

1) Mq $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$ 2) Mq $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}, \quad |u| < 1.$$

& on sait que RDC est $R = 1$.

$\forall u \in]-1,1[$, on peut appliquer le Th de dérivation sur les SE & on obtient :

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n u^{n-1}$$

→ en multipliant par u, on obtient que :

$$\frac{u}{(1-u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n u^n, \quad u \in]-1,1[.$$

en appliquant ceci à $u = x^2$ ($x \in]-1,1[$

$$\frac{2x^2}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n}$$

$\forall x \in]-1,1[$, $1+x > 0$ & $1-x > 0$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

on $\forall u \in]-1,1[$,

$$\boxed{\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}}$$

D'où : $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)x^n}{n}$.

$= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$

NB $(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 2 \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$

3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$

a) calcul de R ?

soit $a_n = n^{(-1)^n}$, $n \geq 1$.

Cauchy : $a_n^{\frac{1}{n}} = n^{(-1)^n/n} = e^{(-1)^n/n \ln(n)} \xrightarrow[\text{(1)}]{n\to\infty} e^0 = 1$

Car $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croiss. comparée.

D'où $R = 1$

CVa en $x=1$ et $x=-1$

→ si $n = 2p+1$, $n^{(-1)^n} = n^{-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

→ si $n = 2p$, $n^{(-1)^n} = n = 2p \xrightarrow[p\to\infty]{} +\infty$

Pour $x=1$ ou $x=-1$, on a :

$|a_{2p}\, x^{2p}| = a_{2p} = 2p \xrightarrow[p\to\infty]{} +\infty$.

Dc la série $\sum_{n=1} a_n x^n$ DV en $x=1$ et $x=-1$

b) Mq $\forall x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$\forall x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (2p)^{(-1)^{2p}} x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^{(-1)^{2p+1}} x^{2p+1}$$

(car $\sum n^{(-1)^n} x^n$ CV abs si $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ par 1) \& 2)}.$$

Ex6 Annales 2020

soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

1) RDC R?

soit $a_n = \frac{1}{n^2}$.

D'Alembert ;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow R = 1.$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV & dc $\sum \sup\left|\frac{x^n}{n^2}\right|$ CV

ie $\sum \frac{x^n}{n}$ CV normalement sur $[-1,1]$.

D+, $x \longmapsto \frac{x^n}{n}$ est cont sur $[-1,1]$.

alors f est <u>cont</u> sur $[-1,1]$.

ds diag de CV, série CV abs.

2) a) calcul $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$

$\boxed{M1}$ si on pose $g(t) = \ln(1-t)$, $t<1$.

on sait que g est dérivable sr $]-\infty, 1[$

& $g'(t) = \frac{-1}{1-t}$

d'où $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0) = -1$

$\boxed{M2}$ $\ln(1-t) \underset{t \to 0}{\sim} -t$

& $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-t}{t} = -1$

b) Mq $\forall |x| < 1$,

$$f(x) = \int_0^x -\ln(1-t) \frac{dt}{t}$$

Rq $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est cont sr $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$

& on pt PPC en 0 (cf a)).

Dc l'intégrale $\int_0^x - \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

$\forall x \in]-1,1[$, on a :

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ & en dérivant

(ce qu'on pt faire p TH de dérivaᵒ des SE)

on obtient que

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n}\, x^{n-1}$

d'où $x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.

Ainsi $\forall t \in]-1,1[$, $x \neq 0$,

$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

TH Hosta $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$.

D'où $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

car $t \neq 0$

Or $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

3) a) calculer $\lim_{t\to 0^+} \left(\ln(t)\ln(1-t)\right)$

$\ln(1-t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -t$

$\ln(t)\ln(1-t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -t\ln(t)$

& $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ (croissance comparée).

D'où $\lim_{t\to 0^+} (\ln(t)\ln(1-t)) = 0$

b) Mq si $0 < x < 1$, on a
$f(x) + f(1-x) = f(1) - \ln(x)\ln(1-x)$

soit $0 < \varepsilon < x < 1$:

$\int_\varepsilon^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = ?$

$u(t) = -\ln(1-t) \qquad v(t) = \ln(t)$.

Les f u & v st de $C^1([\varepsilon, x])$ &

on a $\int_\varepsilon^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = \int_\varepsilon^x u(t)v'(t)\,dt$

$= \left[u(t)v(t)\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x u'(t)v(t)\,dt$

$= u(x)v(x) - u(\varepsilon)v(\varepsilon) - \int_\varepsilon^x u'(t)v(t)\,dt$

$= -\ln(1-x)\ln(x) + \ln(1-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt$

(*)

89

on effectue alors le $\boxed{\text{CDV}}$ $u = 1-t$ ds la dernière intégrale.

On obtient :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_{1-\varepsilon}^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u}(-du)$$

$$= \int_{1-x}^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-u)}{u}\,du$$

$$= \underbrace{\int_{1-x}^{0} \frac{\ln(1-u)}{u}\,du}_{+f(1-x)} + \underbrace{\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-u)}{u}\,du}_{-f(1-\varepsilon)}$$

D'où en remplaçant ds l'équat° (*) :

$$\int_{\varepsilon}^{x} -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\ln(1-x)\ln(x) + \ln(1-\varepsilon)\ln\varepsilon + f(1-\varepsilon) - f(1-x).$$

Puis on fait tendre $\varepsilon \to 0$:

- $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{x} -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{0}^{x} -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = f(x)$

(car l'intégrale CV en 0).

- $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \ln(1-\varepsilon)\ln(\varepsilon) = 0$ d'après 3)a)

- $f(1-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f(1)$ car f $\underline{\text{cont}}$ en 1^-.

D'où $f(x) + f(1-x) = f(1) - \ln(x)\ln(1-x)$. $0 < x < 1$.

4) ed $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1 - 2^{1-n}}{n^2} = (\ln(2))^2$

$\to \ln(2) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

en appliquant 3)b) à $x = \frac{1}{2}$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1) - (\ln(2))^2$$

D'où $(\ln 2)^2 = f(1) - 2 f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^{1-n}}{n^2}.$$

Ex 7 : (Th de Liouville basée sur ff de Cauchy)

Rq FF de Cauchy : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est SE de RDC R, alors

$\forall\ 0<r<R,\ \forall n \geq 0$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta$$

1) soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de RDC $R = \infty$ & si $|f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \geq 0$ alors f est un polynôme de deg $\leq q$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ \alpha \ln(x) = \ln x^\alpha \end{array}}$$

Mq $\forall n \geq q+1$, $a_n = 0$.

D'après ff de Cauchy, $\forall r > 0$, $\forall n \geq q+1$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

d'où $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, \underbrace{|e^{-in\theta}|}_{=1}\, d\theta$

$$\underset{\text{hypothèse}}{\leq} \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (\alpha r^q + \beta)\, d\theta$$

$$= \frac{\alpha r^q + \beta}{r^n}$$

D'où $\forall r > 0$, $\forall n \geq q+1$,

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{\alpha r^q + \beta}{r^n} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0 \text{ car } (n \geq q+1)$$

et dc $a_n = 0$, $\forall n \geq q+1$.

Ainsi $f(z) = \sum_{n=0}^{q} a_n z^n$ est un polynôme de deg $\leq q$.

ep si $q=0$, on a mqé si f est une SE de RCV $R=\infty$ et si f est bornée alors f est cte

Thé. Liouville.

2) Mq si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq e^{Re(z)}$ alors $\exists K \in \mathbb{C}$ tq $f(z) = K e^{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

soit $h(z) = f(z)\, e^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$.

On sait que f est $\boxed{DSE}$ de RDC $R_f = \infty$.

• $g : z \longmapsto e^{-z}$ est DSE de $R_g = \infty$.

D'où h est $\boxed{DSE}$ & le rayon de CV $R_h \geqslant \min(R_f, R_g) = \infty$.

D'où $R_h = \infty$.

De plus $|h(z)| = |f(z)\, e^{-z}|$

$= |f(z)|\, |e^{-z}|$

$= |f(z)|\, |\underbrace{e^{-Re(z)}}_{>0}\, \underbrace{e^{-i\, Im(z)}}_{|\cdot| = 1,\ e^{i\theta},\ \forall \theta \in \mathbb{R}}| =$

$= |f(z)|\, e^{-Re(z)} \leq$

$\underset{\text{hypothèse}}{\leq} e^{Re\, z}\, e^{-Re\, z} = 1$

Par Th de Liouville, on en déduit

dc $\exists K \in \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \mathbb{C}$, $h(z) = K$,

ie $f(z)\, e^{-z} = K$, soit $f(z) = K e^{z}$

Ex 8 : R1 : Identité de Parseval :

soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE de RDC $R>0$ alors $\forall\ 0<r<R$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}}$$

1) a) $f(z)=\frac{1}{1-z}$, on a $f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

& son RDC vaut $R=1$.

D'après l'identité de Parseval, on obtient que $\forall\ 0<r<1$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2}}_{=f(re^{i\theta})}\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}=\frac{1}{1-r^2}$$

$\forall a,b\in\mathbb{C}$, $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}(a\bar{b})$

$$|1-re^{i\theta}|^2=1+r^2-2r.\cos(\theta)$$

dc $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+r^2-2r\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{1-r^2},\quad 0<r<1.$$

2) a) Mq $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

$5-4\cos\theta=\ ?\ (1+r^2-2r\cos\theta)$ pr $0<r<1$

$$5-4\cos\theta=4\left(\frac{5}{4}-\cos\theta\right)=4\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=4(1+r^2-2r\cos\theta)\ \text{si } r=\frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{4}(5-4\cos\theta)}\,d\theta=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\cancel{4}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{\cancel{4}}{3}$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

1) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

M1

on a $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{1}{1-z} \times \dfrac{1}{1-z}$.

Produit de Cauchy

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right), |z|<1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

où $\sum_{n=0}^{k} 1 \times 1 = c_k = k+1$ sur $|z|<1$.

D'où $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

De plus, on vérifie (par d'Alembert) que $R=1$.

M2 Dérivat° : on a ;

$\forall |z|<1$, $g(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(RDC $R=1$)

D'où g est "dérivable"...

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

posons $k = n-1$
$k+1 = n$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$$

L'identité de Parseval implique $\forall 0<r<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-xe^{i\theta}|^4} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^{2n}$$

" $f(re^{i\theta})$ "

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^{2n}.$$

2)b) ed ∞ $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-4\cos(\theta))^2} d\theta = \frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} = \frac{10\pi}{27}$$

On applique 1)b) à $r = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{5}{4}-\cos\theta\right)^2} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\frac{16}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-4\cos\theta)^2} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n}$$

d'où $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-4\cos\theta)^2} d\theta = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n}.$$

→ Mq $\forall\ |x| < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

idée : Dérivat°

on a : $\forall |x|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^{n+1}\right)'$$

car RDC vaut $R = 1$, dc on sait qu'on pt dériver terme à terme.

$$= \left(x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n\right)'$$

$$= \left(x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)'\right)'$$

D'où $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \left(x \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'$$

$$= \left(x\, \frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$n^k x^n \ldots$

D'où pour $x = \frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} = \frac{1+\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3^3}{4^3}}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{4^3}{3^3} = \frac{5 \times 4^2}{3^3} = \frac{5 \times 16}{27}$$

$$\frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} = \frac{\pi}{8} \times \frac{5 \times 16}{27} = \boxed{\frac{10\pi}{27}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-4\cos\theta)^2} \, d\theta = \frac{10\pi}{27}$$

fin ex 8 1) c) $f(z) = e^{z}$

on rappelle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ & $R = \infty$

(si $a_n = \frac{1}{n!}$ alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc d'après l'identité de Perseval,

- on a $\forall\ 0 < r$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^2 r^{2n}.$$

$$|f(re^{i\theta})| = |e^{re^{i\theta}}| = |e^{r\cos\theta} e^{ir\sin\theta}|$$

- Or $e^{r\cos\theta} > 0$ & $|e^{ir\sin\theta}| = 1$

car $|e^{ia}| = 1,\ \forall a \in \mathbb{R}$)

D'où $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2r\cos\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2} \quad (*)$$

2.c) on appliq $(*)$ de $r = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}$$

Ex 9 1) soit $a \in \mathbb{C}^*$, $x \in]-|a|, |a|[$

$f(x) = \frac{1}{a-x}$, DSE de f ds $]-|a|, |a|[$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z| < 1 \quad \text{R1}$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$$

$-|a| < x < |a| \iff |x| < |a|$

$\iff \left|\frac{x}{a}\right| < 1$

$(a \neq 0)$.

$f(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n$, $x \in]-|a|, |a|[$.

$\longrightarrow$ Calculons le rayon de convergence de (SE) obtenue si on pose

$\alpha_n = \frac{1}{a^{n+1}}$, $n \geq 0$, on a :

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^{n+2}}\right| = \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

Le $\underline{RDC}$ est $|a|$ d'après d'Alembert.

2) soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$f_k(x) = \frac{1}{(a-x)^k} = (f(x))^k$, $|x| < |a|$

a) Mq $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-|a|, |a|[$,

$f^{(k)}(x) = k!\, f_{k+1}(x)$

f est C^∞ sur $]-|a|, |a|[$ & ~~ep~~ $\forall x \in I$,

$f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} = 1!\, f_2(x)$

dc H_1 vérifiée.

Mq $H_k \Rightarrow H_{k+1}$:

Supp. $\forall x \in]-|a|, |a|[$,

$f^{(k)}(x) = k!\, f_{k+1}(x)$

or $f_{k+1}(x) = \frac{1}{(a-x)^{k+1}} = (a-x)^{-(k+1)}$

& dc $f'_{k+1}(x) = -(k+1)(-1)(a-x)^{-(k+1)-1}$

$= \frac{k+1}{(a-x)^{k+2}}$

D'où $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(k+1)!}{(a-x)^{k+2}}$

$= (k+1)!\, f_{k+2}(x)$ dc H_{k+1} est vérifiée.

Ainsi PPR, on est $\forall k \geq 1$,

H_k est vraie.

---

b) Comme $f_k(x) = \dfrac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x)$, $k \geq 1$

& f est DSE sur $]-|a|, |a|[$

$f^{(k-1)}$ & dc f_k est DSE sur I.

→ & le RDC est $R = |a|$.

- Dc $\forall x \in]-|a|, |a|[$,

$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_k^{(n)}(0)$

Comme $f_k(x) = \dfrac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)$, $x \in I$

on a : $f_k^{(n)}(x) = \dfrac{1}{(k-1)!} f^{(n+k-1)}(x)$, $x \in I$.

d'où $f_k^{(n)}(0) = \dfrac{1}{(k-1)!} f^{(n+k-1)}(0)$

comme d'après 1) on a

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{a^{n+1}} x^n$

on est $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{a_{n+1}}$ (par unicité du DSE)

cours

& dc $f^{(n+k-1)}(0) = \dfrac{(n+k-1)!}{a^{n+k}}$.

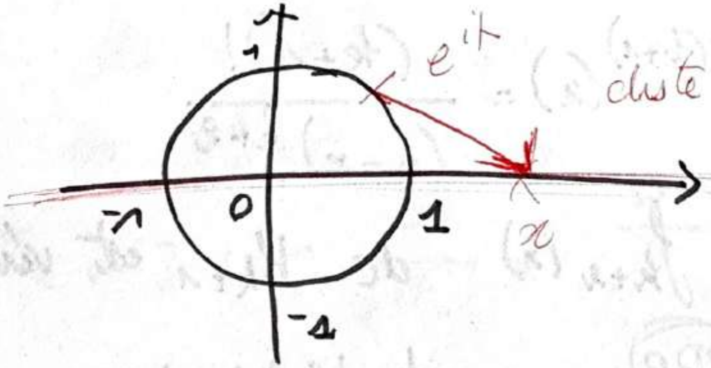
D'où $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+k-1)!}{(\cancel{k}-1)!\, n!} \dfrac{1}{a^{n+k}} x^n$

$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \dfrac{1}{a^{n+k}} x^n$

Ex 10 1) soit $t \in]0, \pi[$,

$$f(x) = \frac{\sin(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Mq f bien définie



dist $\oplus$ ou nulle.

M1

Pk $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, \pi[$.

$1 - 2x\cos(t) + x^2 \neq 0$??

$$1 - 2x\cos(t) + x^2 = \boxed{|x - e^{it}|^2}$$

En effet $|x - e^{it}|^2 =$

$$= \boxed{x^2 + |e^{it}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(xe^{it})}$$

$$= x^2 + 1 - 2x\cos(t)$$

M2 $\quad 1 - 2x\cos(t) + x^2$.

$\Delta = 4\cos^2(t) - 4 =$

$= 4(\cos^2(t) - 1) < 0$ car $t \in]0, \pi[$

dc $1 - 2x\cos(t) + x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

dc $1 - 2x\cos(t) + x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$2\,\mathrm{Re}\, a\bar{b}$ ou $2\,\mathrm{Re}\, \bar{a}b$

100

2)a) $\forall x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{e^{-it}-x} - \frac{1}{e^{it}-x} = \frac{e^{it}-x-e^{-it}+x}{|e^{it}-x|^2}$$

$\underline{z\bar{z}=|z|^2}$

$$= \frac{2i\sin(t)}{|e^{it}-x|^2}$$

D'où $\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^{-it}-x} - \frac{1}{e^{it}-x}\right) = \frac{\sin t}{|e^{it}-x|^2} = f(x)$

b) DSE de f sur $]-1,1[$ en 9

Rq ex 9 : $\forall a \in \mathbb{C}^*$,

$\forall a \in \mathbb{C}^*$, $\forall x \in]-|a|,|a|[$,

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n$$

de pr $a = e^{-it}$ & $a = e^{-it}$,

on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{1}{e^{it}-x} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)t} x$$

$$\& \frac{1}{e^{-it}-x} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)t} x$$

D'où $f(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)t} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)t} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}}{2i} x^n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin((n+1)t)\, x^n, \quad x \in]-1,1[.$$

3) Mq $\forall x \in]-1,1[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\sin(kt)}{1-2x\cos(t)+x^2}\,dt = \frac{\pi}{2}x^{k-1}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\sin(kt)}{1-2x\cos(t)+x^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} f_t(x)\sin(kt)\,dt$$

où $f_t(x) = \dfrac{\sin(t)}{1-2x\cos(t)+x^2}$.

$$I = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sin((n+1)t)\sin(kt)\,x^n\,dt$$

$$\sup_{t\in[0,\pi]} |\sin((n+1)t)\sin(kt)x^n| \leqslant |x|^n$$

comme $x \in]-1,1[$,

$\sum_n |x|^n$ CV car $|x| < 1$.

La série $\sum_n \sin((n+1)t)\sin(kt)x^n$

CV dc normalement sur $[0,\pi]$ $\left(\substack{\mathbb{R}\\ \mathbb{R}}\right)$

Dc on pt permuter $\int\sum = \sum\int$.

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_0^{\pi} \sin((n+1)t)\sin(kt)\,x^n\,dt$$

$$I = \sum x^n \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos((n+1)t-kt) - \cos((n+1)t+kt)\;d$$

$\forall p \in \mathbb{Z}^*$,

- $\displaystyle\int_0^\pi \cos(pt)\,dt = \frac{1}{p}\left[\sin(pt)\right]_0^\pi$

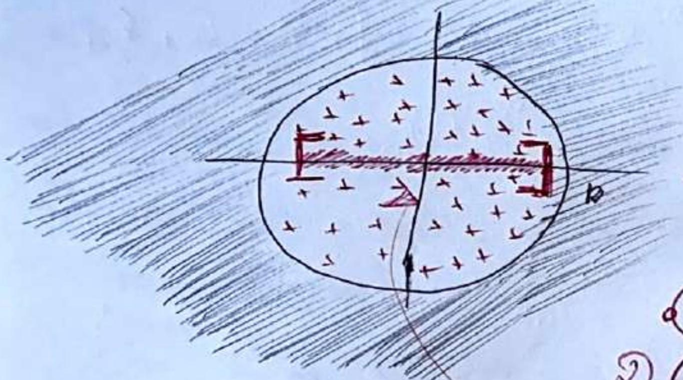
$\displaystyle = \frac{1}{p}\left(\sin(p\pi) - \sin(0)\right) = 0$

- $\displaystyle\int_0^\pi \cos(pt)\,dt = \pi$ si $p = 0$.

$\boxed{\text{dc ttes les integ. st nulles sauf p}^{r}\ n+1 = k \text{ ie } n = k-1}$

- Dc $\boxed{I = \frac{\pi}{2}\, x^{k-1}}$

(RS) soit (SE) $\sum a_n z^n$ de RDC $= R$



- (CV) simplement sur disq ouvert
- (DV) grossièrement sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$
- (CV) normalement sur $\mathcal{D}(0, r)$, $\forall r < R$.
- (CV) uniformément

⚠ (CV) normale sur $[-r, r]$, $\forall r < R$

$\not\Rightarrow$ (CV) normal sur $]-R, R[$.

ⓐ $\sum n x^{2n} = \sum a_n x^n$

$$a_n = \begin{cases} k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

n	f_n
0	$0 \cdot x^{2\times 0} = 0$
1	$0 + 1 \times x^2$
2	$0 + x^2 + 2 \cdot x^4$
3	
4	

$-\ln(1-u) = \sum \frac{x^n}{n}$

(ii)

Mai 2020

ex 1 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

1) étude CV simple de suite $(f_n)_n$.

2) (i) soit $a > 0$, étude CV U.N de $(f_n)_n$ sur $[a, \infty[$

(ii) étude CV U.N de suite $(f_n)_n$ sur $]0, \infty[$

indic considérer : $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$.

3) calculer $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_1^2 \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\, dx$

ex 2 soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n^3}$, $n \geq 1$,

$f(x) = \sum U_n(x)$.

1) étude CV ~~série~~ N. UN série & cont de f sur $\mathbb{R}^+$

2) a) Mq $\forall k \geq 0$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0$:

$$U_n^{(k)} = \frac{(-1)^k\, k!}{n^2\,(x+n)^{k+1}}$$

b) ed f appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^+)$

M41 : exos.

- exam mai 2020 : ex 1/2.
- Ralt juill 2020 : ex 2.
- DS mai 2018 : ex 2.

RJ 2020 ex 2 : SE

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

1) RDC ? étude CVce en $x = -R$ et $x = R$.
2) étude cont de f sur $[-3,3]$
 & justif f est dérivable sur $]-3,3[$.
3) $\forall x \in]-3,3[$, $f(x) = \ln\left(\frac{3}{3-x}\right)$
4) ed

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

mai 2018 : ex 2. soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

1) RDC R de SE.
2) étude CVce $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ en R, −R. ed D_f
3) étude cont de f sur D_f
4) Justif f est classe C^∞ sur $]-R,R[$.
5) Graphe de f sur D_f :
 a) signe de $f'(x)$ pr $x \in [0,R[$.
 b) mq $\lim_{x\to R^-} f(x) = \infty$
 c) exprimer $(1-x) f'(x)$ ss forme SE pr $x \in]-R,R[$
 ed signe de $f'(x)$ sur $]-R,0[$.

indic : on pt écrire x ss la forme $x = -t$,
ac $t \in]0,R[$, & reconnaître une série alternée. On rappelle somme série alternée

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n \quad \text{ac } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \ \& \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

est du signe du 1° terme a_0, ie $+$

② d) allure de la courbe de f sur D_f.

Résolu en 1 mai 2020

1) $\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$

$f_n \xrightarrow{CV.S} f(x) = 0$

2) soit $a>0$, CVUN $[a,\infty[$.

CV. Normale.

$\left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2x^2}$

$x>a$ $\quad \leq \frac{1}{1+n^2a^2}$

$\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$

$\Rightarrow$ CV. normalm^t $\Rightarrow$ CV.UN sr $[a,\infty[$

(ii) CV UN $]0,\infty[$?

étudions $|f_n(x_n)-f(x_n)|$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right|$$

on a CV.UN de suite

3) commutativité & cont u_n & inversion

$\int \lim u_n = \int 0 = 0.$

en 2 mai 2020.

$u_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3}$, $x \geq 1$

$f(x) = \sum u_n(x)$.

cont^t sr $\mathbb{R}^+$ si CV normlt sr $\mathbb{R}^+$

CV.S? CV.N? CV.UN?

CV.S vers 0 $\frac{1}{n^2x+n^3} \sim \frac{1}{n^3} \to 0$

sup atteint en $\frac{1}{n}$?

1

2) a) Mq

$$u_n^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{n^2(x+n)^{k+1}}$$

Rais. par récurrence

b)

cont f sur $\mathbb{R}^+$, de classe C^1 & ∞ dérivable

de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

R1

Ex 1 $f_n(x) = x(1 + n^{\alpha} e^{-nx})$, $n \geq 1$
$x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) limite simple f de $(f_n)_n$ sr $\mathbb{R}^+$.
(2) Mq f_n CV UN vers f sr $\mathbb{R}^+$ ssi $\alpha < 1$.
→ chercher $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)|$
(3) Calculer
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}\, e^{-nx})\, dx.$$

on a CV.UN, & f_n cont sr $\mathbb{R}^+$,
$$\lim \int = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} x + (1 + \sqrt{n}\, e^{-nx}\, dx)$$
$$\int_0^1 \cancel{f}\, x \cancel{dx} = \left[\frac{1}{2} x^2 \cancel{}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \cancel{} = \cancel{}$$

$\alpha \geq 2$ | croissance comparée de e^{-nx}
$$n^{\alpha} e^{-nx} \leq 1 \iff e^{-nx} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$$
$$\cancel{x(1 + e^{-nx}) \leq \frac{x}{n^{\alpha}}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 1) soit $x \in]0, \infty[$, α ⊕ crss ce comparée
$$n^{\alpha} e^{-nx} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (\text{croissance } \cancel{\alpha} \text{ comparée})$$
dc $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x$
D + $f_n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

on pose $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x$
$$(f_n)_n \xrightarrow{CV.S.} f \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

2) CV U.N ?
$f_n \xrightarrow{CV.UN} f$ sur $\mathbb{R}^+$ ssi $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(ii)

$$f_n(x) - f(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx}) - x$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \underbrace{n^\alpha . x . e^{-nx}}_{g_n(x)} \text{ car } x e^{-nx} \geq 0$$

pr $x \in \mathbb{R}^+$.

TAV g_n

g_n est dérivable sr $[0, \infty[$ & on a

$$g'_n(x) = n^\alpha (e^{-nx} - nx e^{-nx})$$

$$g'_n(x) = n^\alpha (1 - nx) e^{-nx}.$$

dc $g'_n(x) \geq 0 \iff 1 - nx \geq 0$

$\iff x \leq \frac{1}{n}$.

x	0	$\frac{1}{n}$	∞
$g'_n(x)$	$+$	0	$-$
$g_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

(iii)

D'où $\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = g_n\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= n^\alpha \frac{1}{n} e^{-n x \frac{1}{n}} = \frac{e^{-1}}{n^{1-\alpha}}.$$

dc $(f_n)_n$ CV. UN vers f sur $\mathbb{R}^+$

ssi $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{-1}}{n^{1-\alpha}} = 0$; ce q est équivalent

à $1 - \alpha > 0$ soit $\alpha < 1$.

3) calculer $\lim \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} . e^{-nx}) dx$.

D'après 2), on sait que (ici $\alpha = \frac{1}{2}$)

$x(1 + \sqrt{n} e^{-nx})$ CV. U.N vers $x \mapsto x$

sur $\mathbb{R}^+$. D'après le TH du cours,

on pt ed

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}\, e^{-nx})\,dx = \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Rattrpge 2020

Exe

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n.\,3^n}$$

1) $a_n = \dfrac{1}{n\,3^n}$, $n \geq 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\,3^n}{(n+1)\,3^{n+1}} = \frac{1}{3}\,\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

dc $\boxed{R = 3}$ d'après le crit de d'Alembert.

Étude CV μ $x=-3$, $x=3$

en $x = 3$, on a $\dfrac{x^n}{n.\,3^n} = \dfrac{1}{n}$ et $\sum_n \dfrac{1}{n}$ DV

dc la SE $\sum \dfrac{x^n}{n\,3^n}$ dV en $x=3$.

en $x=-3$ CdSA

$$\frac{x^n}{n\,3^n} = \frac{(-1)^n\,3^n}{n.\,3^n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

dc $\sum \dfrac{x^n}{n\,3^n}$ est Série alternée en $\boxed{x=-3}$

ĉ la suite est $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ est ↘ et CV vers 0 & ⊕. Dc le crit des séries alternées implique que la série $\sum \dfrac{x^n}{n\,3^n}$ CV en $x=-3$

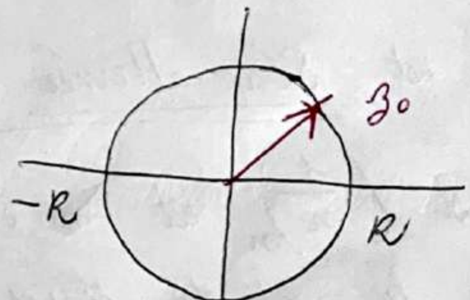
2) étude cont en $[-3,3]$ & justif f est dérivable sur $]-3,3[$.

tentative si $0<a<3$, $\sup_{x\in[-3,a]} \left|\frac{x^n}{n3^n}\right| = \frac{1}{n}$

ne marche pas.

Th CVce d'Abel

R



si $\sum a_n \cdot z^n$ est une SE de RDC R

& si $\sum a_n z_0^n$ CV pr certain $|z_0|=R$

$\Rightarrow \sum a_n z^n$ est cont.

$\rightarrow$ on Rq $\sum \frac{x^n}{n3^n}$ est une SE de RDC $R=3$.

• $\sum \frac{x^n}{n3^n}$ CV en $x=-3$.

dc d'après le Th de CVce radiale d'Abel, la f f est cont sur $[-3,3[$.

M2 Comme le RDC est $R=3$, la foncto f est cont sur $]-3,3[$.

$\rightarrow$ mq on a CV UN sur $[-3,0]$

Pr $-3\leqslant x\leqslant 0$, la série est une série alternée

car $\frac{x^n}{n\cdot 3^n} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{n3^n} = (-1)^n a_n(x)$

& $a_n(x) = \frac{+(-x)^n}{n\cdot 3^n} \geqslant 0$, $\forall n\geqslant 0$.

(D+), $(a_n(x))_n$ est ↘ et (CV) vers 0, (+)

$a_n(x) = \frac{1}{n}\left(-\frac{x}{3}\right)^n$ de raison $0 < -\frac{x}{3} \leq 1$

↘, td vers 0 ; suite géométriq

de le crit des séries alternées implique

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k.3^k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\sup_{x \in [-3,0]} |R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi (R_n) td UN vers 0 sur $[-3,0]$

dc la série (CV) UN sur $[-3,0]$.

Dc f est cont sur $[-3,0]$.

Ainsi f est cont sur $[-3,3[$.

? le RDC $R=3$, d'après le cours, la (SE) f est dérivable (et m̂ C^∞) sur $]-3,3[$.

(vi)

3) Mq $\forall x \in]-3,3[$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{3-x}\right).$$

on a $\ln\left(\frac{3}{3-x}\right) = \ln\left(\frac{3}{3(1-\frac{x}{3})}\right)$

$= -\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$

(RA) pr $u \in]-1,1[$,

$$\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}$$

or $x \in]-3,3[\Rightarrow \frac{x}{3} \in]-1,1[$;

d'où $\ln\left(\frac{3}{3-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n} = f(x)$.

cos, sin, sh, ch, e^x. RDC Δ $R=\infty$ Bernoulli, 3h... curious tan (SE) on a $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n 3^n} = \ln\left(\frac{3}{3-x}\right)$

4) cd $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

D'après la question 2) f est cont si $[-3,3[$

dc $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x) \overset{3)}{=} \lim_{x\to -3^+} \ln\left(\frac{3}{3-x}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to -3^+} \ln\left(\frac{3}{3-x}\right) = -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Ex 2 $\quad f(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

1) RDC d'Alembert $\Rightarrow R = 1$

2) en 1 : DV $\quad$ en -1 : Série Alt CV

cd $Df = [-1,1[$.

3) cont $\rightsquigarrow$ Abel radial $\quad$ cont en $[-1,1[$

4) f classe C^∞ sur $]-R,R[$.

---

5) a) signe $f'(x)$ pr $x \in [0,R[$?

$\hookrightarrow$ $+$

b) mq $\boxed{\lim_{x\to R^-} f(x) = \infty}$

$\hookrightarrow$ SE à termes $+$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$

(vii)

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$ DSE ⊕.

$\lim_{x \to R^-} f(x) = +\infty$? pr $x > 0$, $N \geqslant 0$:

minoraθ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

dc $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$\underline{\lim = \lim\inf}$

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ← somme finie dc on p^t permuter

Puis on fait tendre $N \to \infty$

et $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

dc $\lim_{x\to R^-} f(x) = \infty$

à terminer.

(viii)

ⓐ $\sum n x^{2n} = \sum a_n x^n$, $x \neq 0$

$a_n = \begin{cases} k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ prendre $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$. pb $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dc

---

Sur $]-1,1[$

c) expreθ $(1-x) f'(x)$ DSE pr $x \in]-1,1[$.

↳ signe $f'(x)$ sur $]-R,0[$

soit $x = -t$; $(1+t) f'(-t)$ ⚠

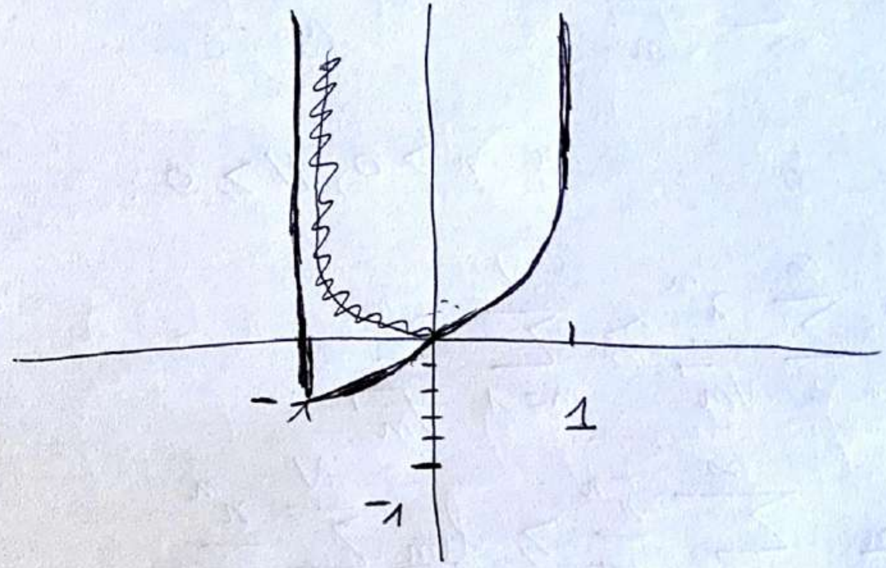
$f(x) = f(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{n}}$ Série alternée.

où $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n \searrow$, ⓐ vers 0 et $\geqslant 0$ → signe 1° terme ⊕.

d'où si $f(-t)$ est ⊕, on a $f(x)$ ⊖.

Ainsi

c) exprimer $(1-x)\,f'(x)$ ss f^{me} SE x



$x \in]-1,1[$;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, n \cdot x^{n-1}$$

pr $x=-t$; $\displaystyle f'(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} (-t)^{n-1}$

$$f'(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \times (-1)^n \times \frac{t^n}{t}$$

On a $(1-x)\,f'(x)$ & $x=-t$

$-x = t$

<u>ie</u> $(1+t)\,f'(-t)$

$1-\frac{1}{2}$

(ix)