GDCS Pr: Gijs Tuynman

GÉOMÉTRIE DE COURBES ET DE SURFACES

Préléminaires algébro-géométriques

1. produit scalaire usuel
2. produit vectoriel
3. rotations en 2 et plusieurs dimensions

Courbes

1. Courbes
2. la longueur d'une courbe
3. la droite tangente
4. branches infinies, tangentes et plus
5. courbures et angles
6. courbures et cercles
7. développées et développantes
8. courbes hyperrégulières
9. classification
10. désingulariation d'un point singulier
11. torsion et le repère mobile
12. courbes : le problème inverse
13. un bestiaire de (contre-)exemples

Surfaces I

1. surfaces régulières
2. équivalence avec d'autres définitions
3. applications sur et vers des surfaces régulières
4. le plan tangent à une surface régulière
5. champs de vecteurs
6. intermezzo algébrique
7. la première forme fondamentale
8. aire d'une surface
9. intégrer une fonction sur une courbe ou sur une surface

Surfaces II

1. orientabilité
2. la deuxième forme fondamentale
3. la courbure normale
4. géodésiques, distances et droites
5. géodésiques et le plan tangent basculant
6. intermezzo : champs de vecteurs dépendant du temps
7. géodésiques et le plan tangent basculant - suite
8. transport parallèle et la dérivée covariante

Appendices

1. foncitons de R dans R
2. développments limités en une variable
3. développements limités en plusieurs variables
4. être C^k est une propritété locale
5. algèbre linéaire et le théorème des fonctions implicites

Preuves

Ex Géométrie Différentielle

§ 5. Courbes

Courbe Paramétrée

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

t	-1	0	1	2
$f(t)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
$g(t)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	M_1	M_2	M_3	M_4

Étapes de Résolut°

① Symétrie ② TAV ^x_y ③ Points doubles

@1. $I = \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$

x et y st $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

① $x(-t) = x(t)$ & $y(-t) = -y(t)$

$M(-t)$ est le symétriq de $M(t)$ p/ axe (Ox).

Étude courbe pr $t \in [0, \infty[$

② $x'(t) = 6t$

$y'(t) = 3(1-t^2)$

$M(0) = (-2, 0)$

$\vec{v}(0) = (0, 3)$

$M(1) = (1, 2)$

$\vec{v}(1) = (6, 0)$

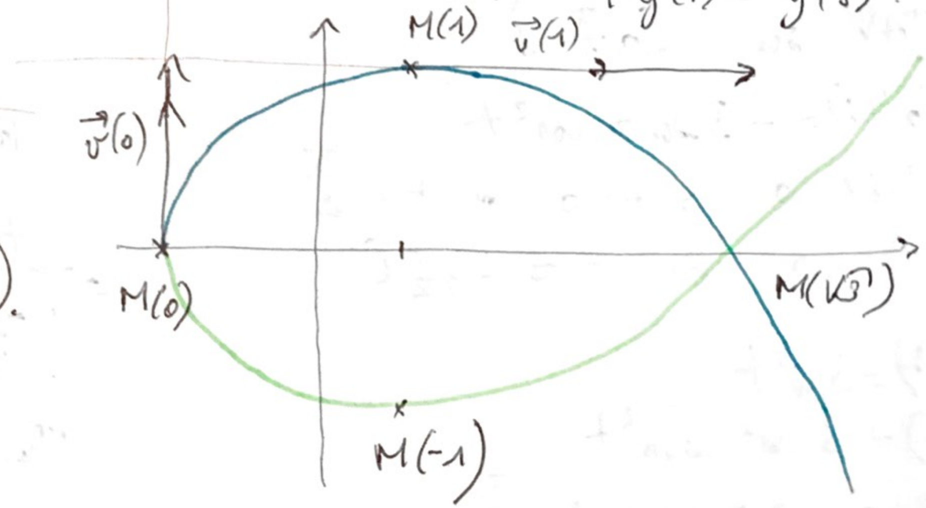
t	0		1		∞
$x'(t)$	0	$+$	6	$+$	
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	
$x(t)$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$y(t) = 0 \Leftrightarrow t(3-t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Point $t = \sqrt{3}$: $x(\sqrt{3}) = 7 = x(-\sqrt{3})$.

$\vec{v}(-t) = (x'(-t), y'(-t)) = (-x'(t), y'(t))$ est le symétriq de $\vec{v}(t)$ p/ (Oy).

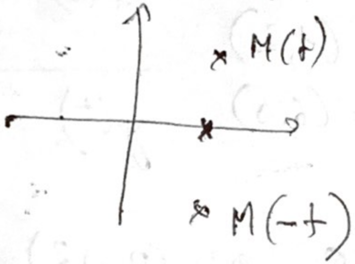
③ Chercher $t \neq s$ tq $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$.



@ 2 $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ 2π-périodiq

① Domaine d'étude $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$ → Tt support courbe ∀ $[-\pi, \pi]$.

$\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$



étude $[0, \pi]$

• $x(\pi - t) = -x(t)$

$y(\pi - t) = y(t)$ "$t = \frac{\pi}{2} + t$"

$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = -x(\frac{\pi}{2} + t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = y(\frac{\pi}{2} + t) \end{cases}$ ⇒ sr $[0, \frac{\pi}{2}]$

② TAV sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t$

$x'(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$.

$x'(t) < 0 \iff t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$y(t) = \sin^3 t$

$y'(t) = 3 \cos t \sin^2 t$

$y'(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$

$y'(t) > 0 \iff t \in]0, \pi/2[$.

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$	0
$x(t)$	1	↘	0
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	↗	1

③ Pt particulier $t = \frac{\pi}{4}$,

$M(\frac{\pi}{4}) = (x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

tgte en ce pt: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \to \vec{v}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -3\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ Pts singuliers sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$ pts singuliers

Tangente en $M(0)$: $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\sin^3 t - 0}{\cos^3 t - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3}{(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^3 - 1}$

$= \frac{t^3}{\cancel{1} - \frac{3}{2}t^2 + o(t^2) - \cancel{1}} = \frac{t^3}{-\frac{3}{2}t^2 + o(t^2)} \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{2}{3}t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Tangente en $M(0)$ de pente nulle : dc tgt horizontale

② — $M(\frac{\pi}{2})$ verticale.

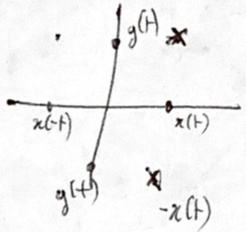
(ii) $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(2t))$; $M(0) = (0,0)$ $\quad M(\frac{\pi}{2}) = (1,0)$

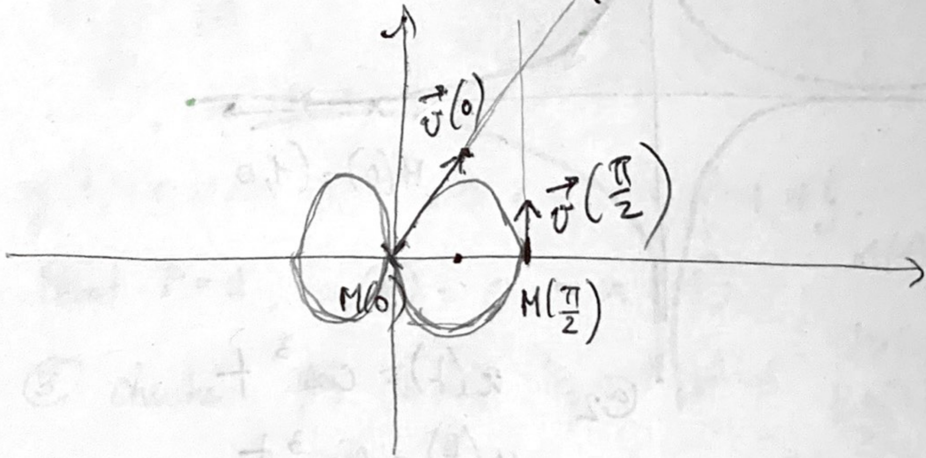
$\vec{v}(0) = (1,2)$ $\quad \vec{v}(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{\pi}{4})$

$I = \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2π-périodique

$\begin{cases} -x(t) = x(-t) \\ -y(t) = y(-t) \end{cases}$





$\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

TAV^x_y

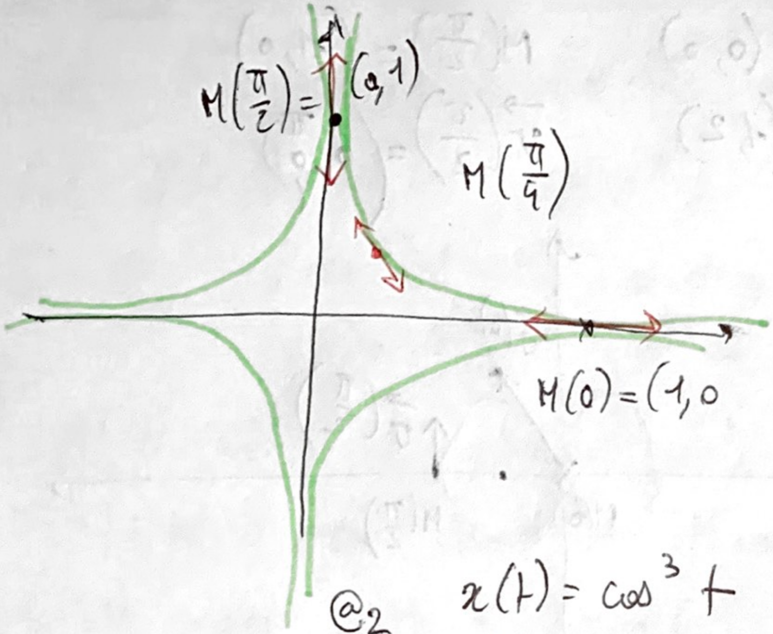
$x'(t) = \cos t$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ | $x'(t) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$y'(t) = 2\cos(2t)$ $\underset{y'(t)=0}{\Leftrightarrow}$ $t = \frac{\pi}{4}$

$y'(t) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

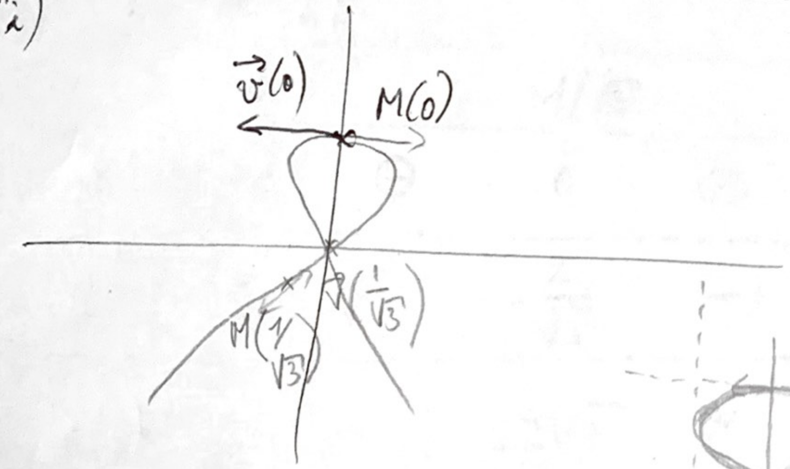
t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	1	$+$	0
$y'(t)$	2	$+$	$\frac{\pi}{4}$
$x(t)$	0	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	0

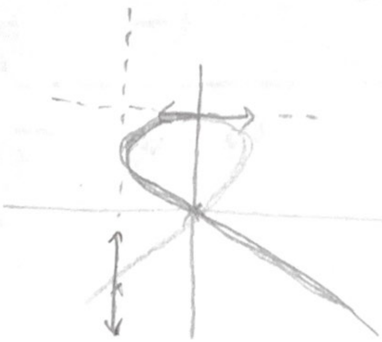


@2 $x(t)=\cos^3 t$

$y(t)=\sin^3 t$

(ii)





5.2. ~~(1)~~ Tracer ds plan $\mathbb{R}^2$ courbes

(i) $\gamma(t) = (t^3 - t, 1 - t^2)$

$I = \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$ x et y st $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

① $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$

$M(-t)$ est le sym. de $M(t)$ ~~p~~ axe (Oy).

Étude courbe pr $t \in [0, \infty[$.

② $x'(t) = 3t^2 - 1 = 3\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$

$y'(t) = -2t$

t	0		$1/\sqrt{3}$		∞
$x'(t)$	-1	$\ominus$	0	$\oplus$	
$y'(t)$	0	$\ominus$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\ominus$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	∞
$y(t)$	1	$\searrow$	$-1/3$	$\searrow$	$-\infty$

③

~~$M(0) = (-1, 0)$~~ $M(0) = (0, 1)$

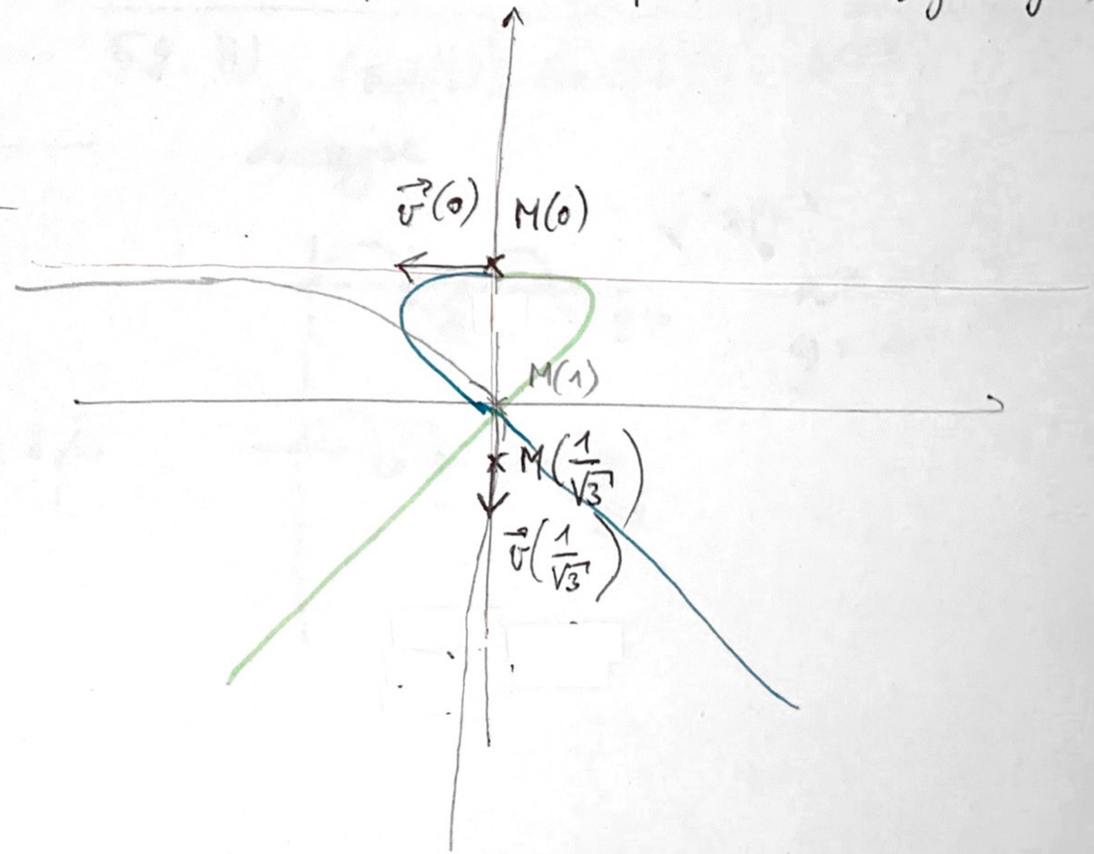
$\vec{v}(0) = (-1, 0)$

$M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\cancel{0}\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

$y(t) = 0 \iff 1 - t^2 = 0 \iff t \in \{-1, 1\}$.

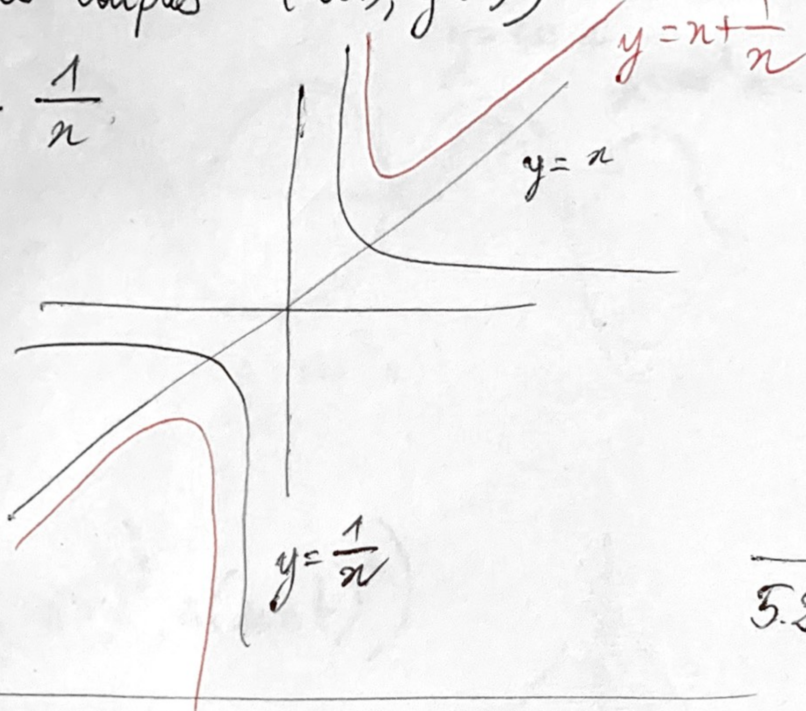
Point $t = 1$, $x(1) = 0 = x(-1)$ $M(1) = (0, 0)$

③ chercher pts doubles tq $t \neq s$, $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$



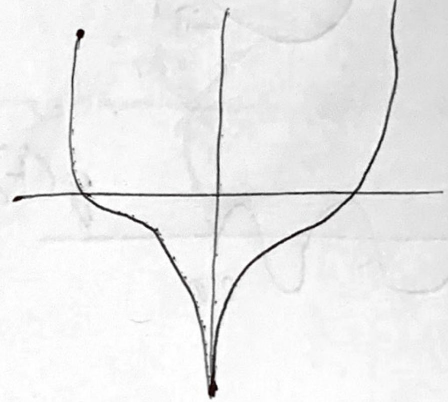
1° Placer des couples $(x(t), y(t))$

$y(x) = x + \frac{1}{x}$

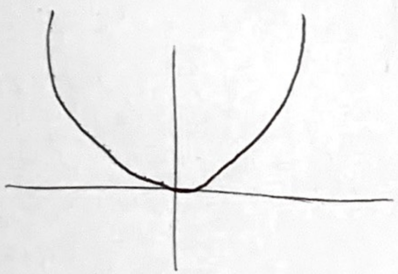


La tractrice

$\gamma(t) = \left(\sin(t), \cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$



La chaînette $\gamma(t) = (t, \cosh t)$



Corde attachée à 2 pts

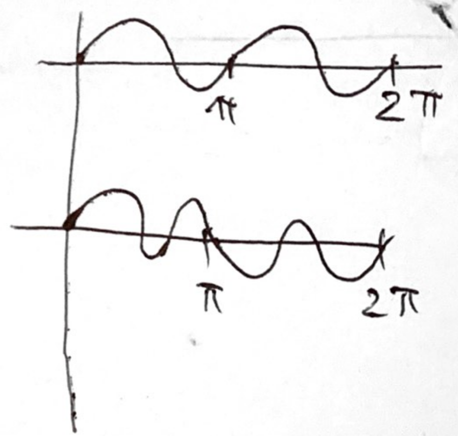
5.2. ii) $(\sin(at), \sin(bt)) = \gamma(t)$

Lissajou

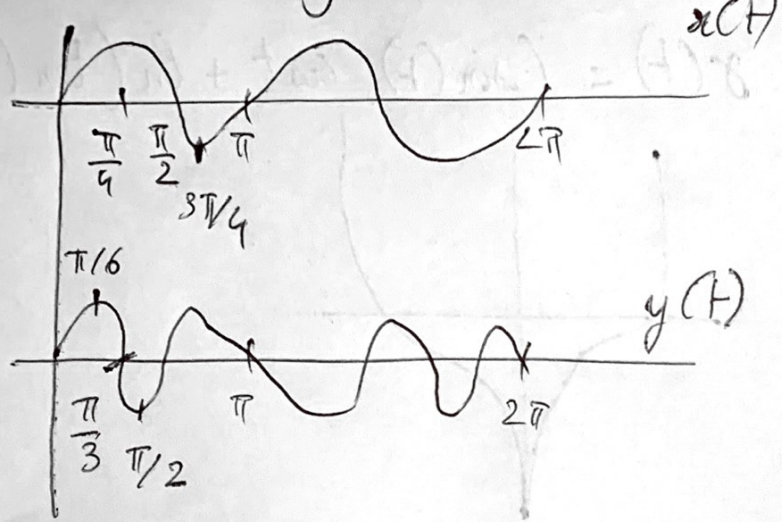
$x(t)$

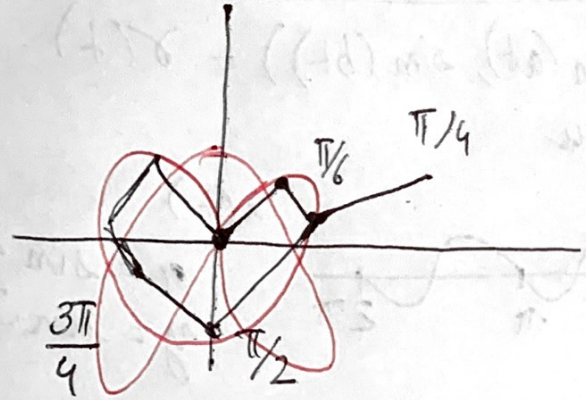
$x = \sin 2t$

$y = \sin 3t$

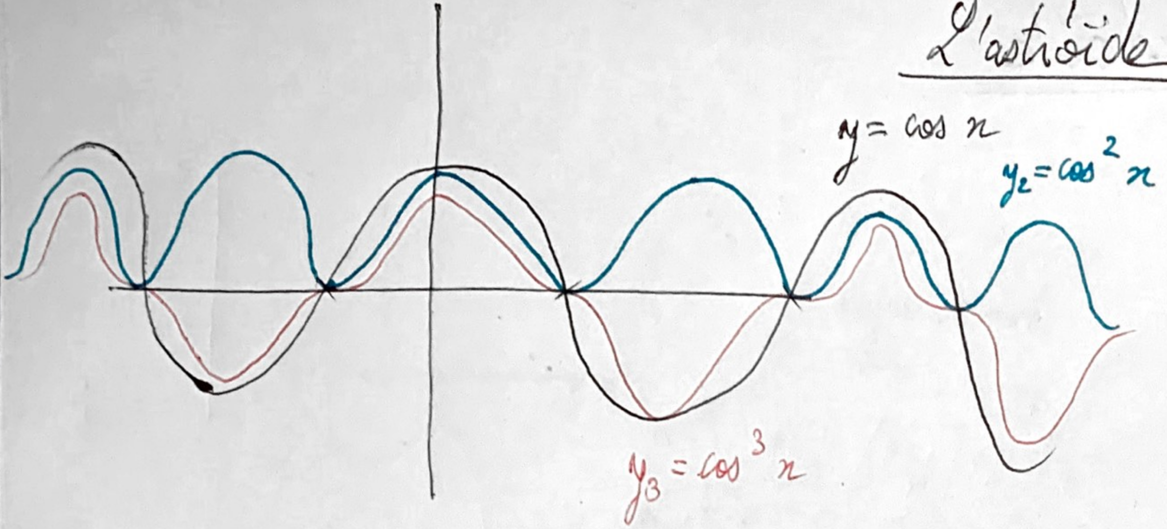


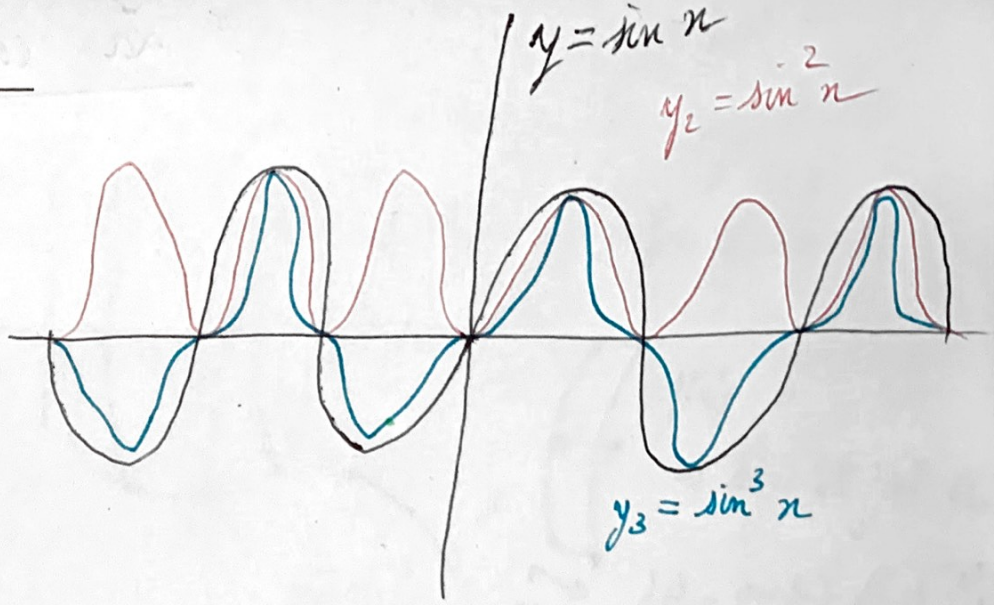
Courbe de Lissajou





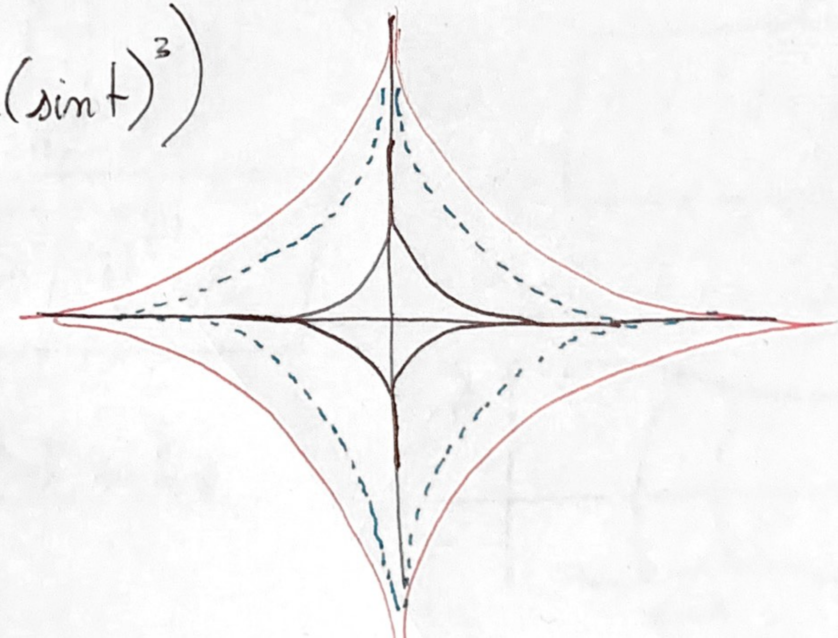
L'astroïde



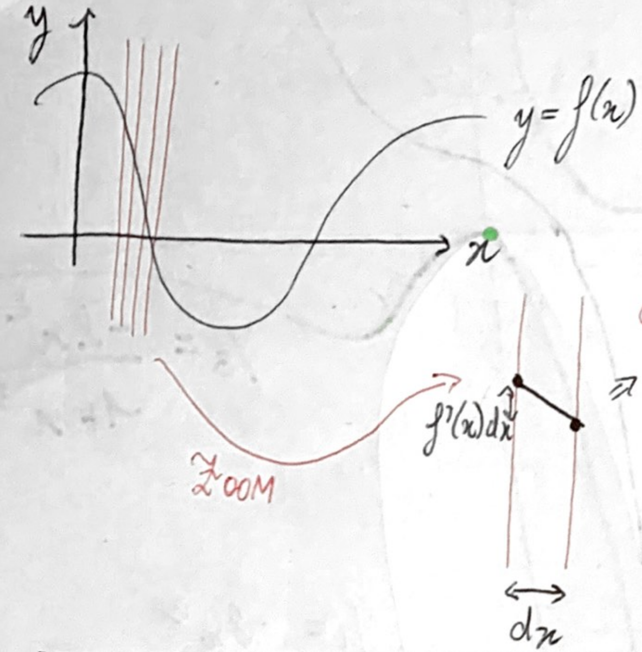


$$\gamma(t) = \left(a(\cos t)^3, a(\sin t)^3\right)$$

$a > 0$.



Longueur d'une courbe



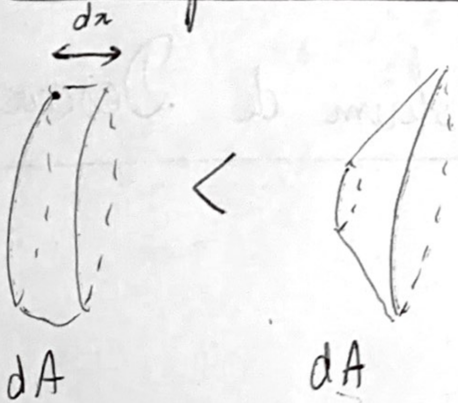
Élt de longueur infinitésimal

$$dL = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

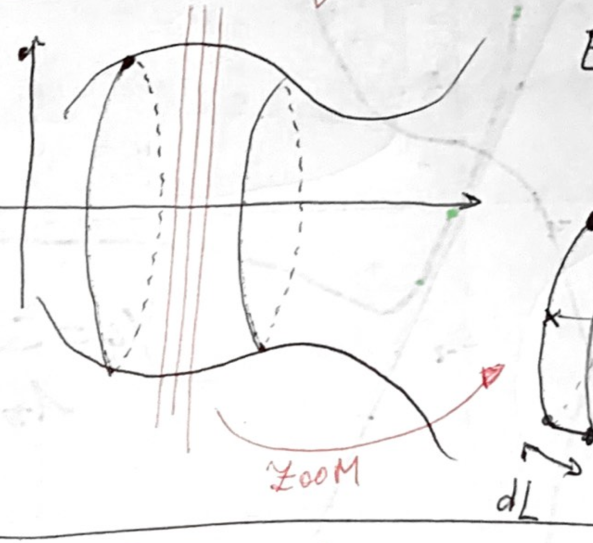
(par Pythagore)

$$\boxed{L = \int dL = \int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Erreur par le calcul de surface



Aire d'une surface de révolution



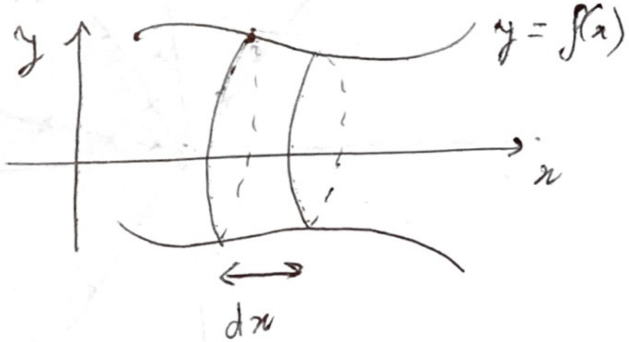
Élt d'aire infinitésimal

$$\Rightarrow dA = 2\pi f(x) \cdot dL$$

$$dA = 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$\boxed{A = \int dA = \int 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

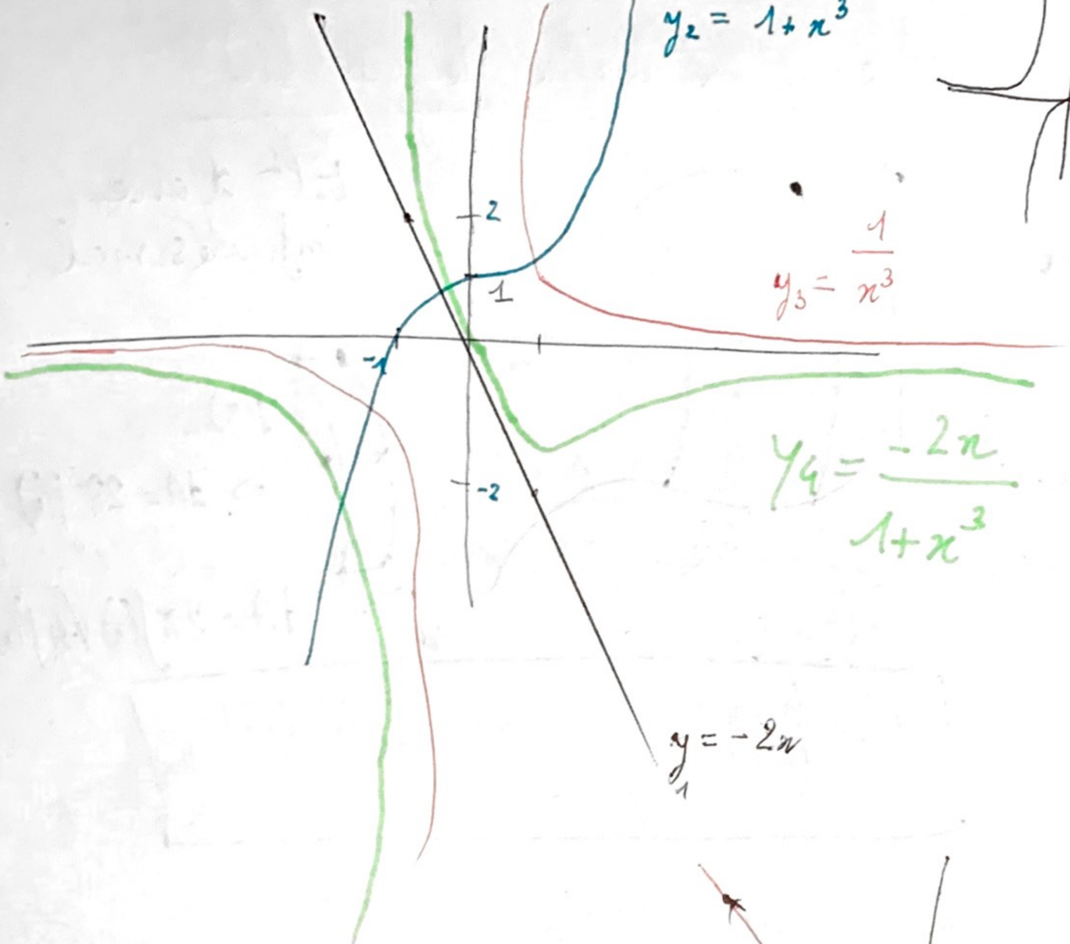
Volume d'un solide de révolution

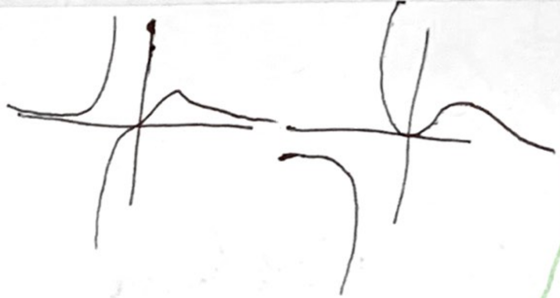


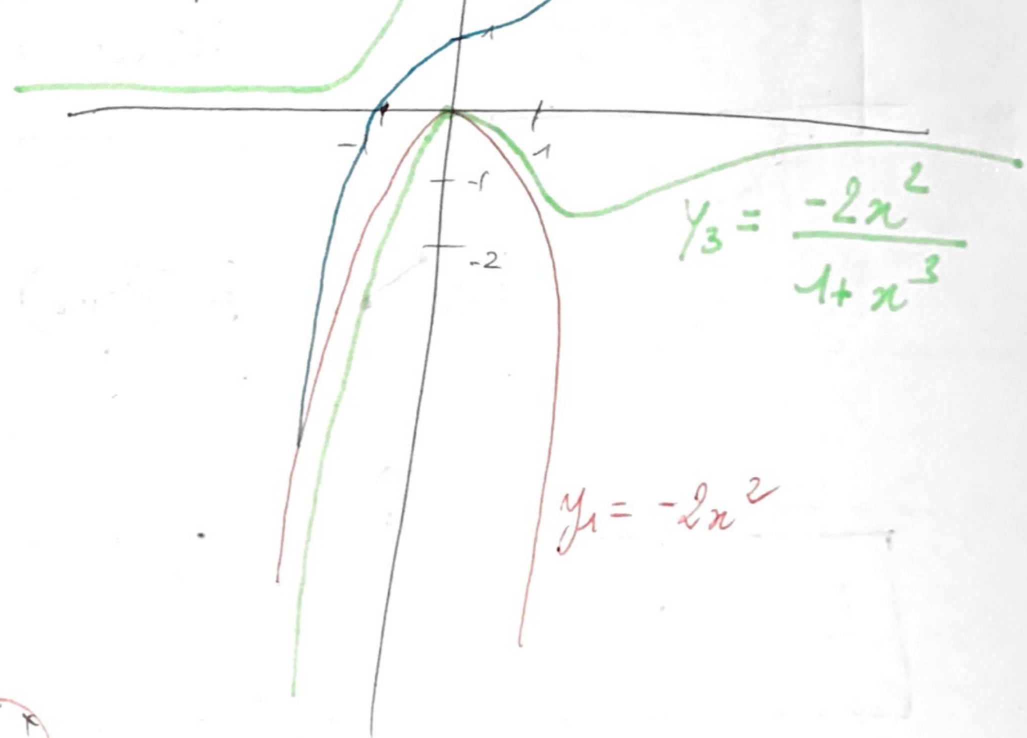
Élt de volume infinitésimal :

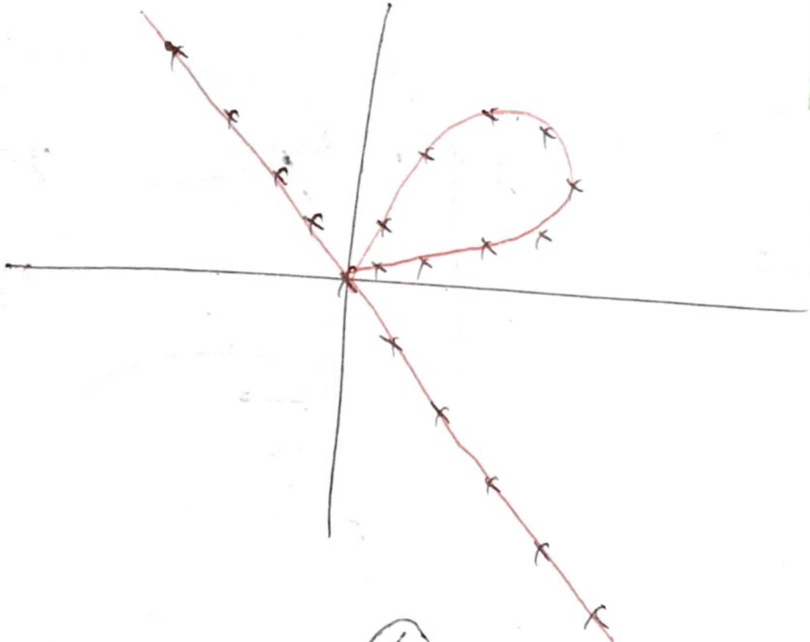
$$dV = \pi f(x)^2\,dx$$

$$\boxed{V = \int dV = \int \pi f(x)^2\,dx}$$









$$\gamma(t) = \left(\frac{+2x}{1+x^3}, \frac{+2x^2}{1+x^3} \right)$$

le folium de Descartes

(vi) Le folium de Descartes.

$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^3}, \frac{2t^2}{1+t^3} \right)$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{2t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

ni paire ni impaire.

Étude sur ~~...~~ $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,\infty[$.

$$x'(t) = \frac{2t(3t^2) - 2(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{\cancel{-2t^3}\ 4t^3 - 2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{2(2t^3-1)}{(1+t^3)^2}$$

$x'(t) = 0 \iff 2t^3 - 1 = 0$

$t^3 = \frac{1}{2} \iff \boxed{t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \approx 0{,}79$

$$y'(t) = \frac{2t^2(3t^2) - 8t(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{-2t^4 - 8t}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{-2t(t^3+4)}{(1+t^3)^2}$$

$y'(t) = 0 \iff -2t^4 - 8t = 0$

$\iff -2t(t^3+4) = 0$

$\iff t = 0$ ou $t = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$

t	
$x'(t)$	
$y'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	