M-32

Fonctions de plusieurs variables

Professeur : Gijs Tuyman

C_1 : Notions de topologie dans $\mathbb{R}^m$

C_2 : Fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

C_3 : Extrema des fonctions numériques

C 1 : Topologies & Continuités

1 : Normes

2 Convergence
3. Compacité
4. Connexité

C2 : Différentiabilité

5. Prélude en Algèbre linéaire
6. la différentielle
7. Dérivées ordre supérieur
8. Extrema
9. Inversion locale & f implicites

I (C_1) Topologie & continuité

Normes

1.1. (D) E : EV$_{\mathbb{R}}$, applica° N, norme si :

(i) $\forall x \in E : N(x) \geq 0$

(ii) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : N(\lambda x) = |\lambda| . N(x)$

(iv) $\forall x, y \in E : N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ ⚠

→ $\|x\| \Leftrightarrow N(x)$

→ Boule ouverte de rayon r & Ω : x.

$$B_r(x) = \{ y \in E \mid \|y-x\| < r \}$$

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$ EV normé, $x, y \in E$

$$\|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

⇒ ~~$\|x \pm y\| \leq \|x \pm y\| \leq$~~

(L) $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:

$N(x) = r . |x|$

(L) $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$, 2 EV munis

alors $E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$:

$$N_1(x,y) = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

$$N_2(x,y) = \sqrt{(\|x\|_1)^2 + (\|y\|_2)^2}$$

$$N_\infty(x,y) = \max(\|x\|_1, \|y\|_2)$$

(L) Les applica°s $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$:

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définies par

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$$

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_p|)$$

(D) • soit $(E, \|\cdot\|)$, un EV normé & $A \subset E$.

On dit que A est ouvert si

$$\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A.$$

• Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$ un EV normé. Alors tt boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ est un ouvert de E.

(D) soit E, (ev) et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \to \mathbb{R}$ deux normes sur E. On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ st équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$,

$$\forall x \in E : \|x\|_1 \leq C_1 \cdot \|x\|_2$$

et

$$\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C_2 \cdot \|x\|_1 \quad .$$

(L) soit E, un (EV), $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \to \mathbb{R}$ et $C > 0$. Alors on a l'équivalence

$$\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C. \|x\|_1$$

$$\iff B_1^{(1)}(0) \subset B_C^{(2)}(0)$$

où $B_x^{(i)}(x)$ désigne la boule ouverte de rayon x et de centre x ~~p~~ à la norme $\|\cdot\|_i$.

(L) soit E, un (ev) et $\|\cdot\|_i$, $i=1,2,3$
si $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$
alors $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$.

(L) Les trois normes $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \infty$ sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes.

(L) soit E, (ev) et $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$ deux normes sur E. Alors les 2 pptés st équivalentes :

(i) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ st équivalentes et

(ii) pour tout $A \subset E$ on a l'équivalence :
A un ouvert pr la norme $\|\cdot\|_1$ ssi
A un ouvert pr la norme $\|\cdot\|_2$.

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$ un (ev) normé.
On dit qu'un sous-ens $F \subset E$ est un fermé si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$ (evn) & $F \subset E$ un ss ens : ASSSE
(i) F est un fermé
(ii) $\forall x \notin F, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset$
(iii) $\forall x \notin F$ $\exists$ voisinage ouvert U de x :
$$U \cap F = \emptyset.$$

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$ un (evn) et $x \in E$ un point. Alors l'ensemble $\{x\} \subset E$ est un fermé.

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$ (evn)
(i) $\emptyset$ et E st des ouverts
(ii) si A et B st deux ouverts de E, alors $A \cap B$ est un ouvert de E.

(iii) Si A_i, $i \in I$ est une famille ouverte de E, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de E.
(iv) $\emptyset$ et E sont des fermés.
(v) si A et B st deux fermés de E, alors $A \cup B$ est un fermé de E.
(vi) Si A_i, $i \in I$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé de E.

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$, (evn) $A \subset E$.
On dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
L'ensemble de ts les points adhérent à A est appelé l'adhérence de A ou la fermeture de A et est noté $\overline{A}$.
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A\}.$$

(L) x est adhérent à A ssi pr tt voisinage ouvert U de x on a $U \cap A \neq \emptyset$.

(L) $A \subset \overline{A}$.

(L) $\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.
On dit que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

(C) A est fermé ssi $A = \overline{A}$.

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $A \subset E$.
On dit qu'un point $x \in E$ est un point accumulat° de A si $\forall\, \varepsilon > 0$:
$$\left(B_\varepsilon(x) \cap A \right) \setminus \{x\} \neq \emptyset .$$

(L) soit $(E, \|\cdot\|)$, evn et $A \subset E$.
(i) si $x \in E$ est PA° de A, alors x est point adhérent à A.

EXOS

- $\mathcal{D}f$, graphiqt $\mathcal{D}f$, hacurer $\not\mathcal{D}f$
  ↳ $f(x,y) = \ln(2x+y-2)$.

- Représenter ligne de niveau c de f :
  $f(x,y) = 2x+3y$ et $c = -1, 1, 2$

- Fonctions partielles $f(x_0, y)$ et $f(x, y_0)$ pr des points (x_0, y_0) choisis ds $\mathcal{D}f$, $\mathcal{D}f$ et les lignes de niveau $f(x,y) = c$ $\forall c \in \mathbb{R}$.
  Représenter graphe.
  $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Démq lemmes →

- Décider s'il s'agit oui/non normes
  - $N(x,y) = |4x+3y|$
  - $N(x,y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x + ty|$

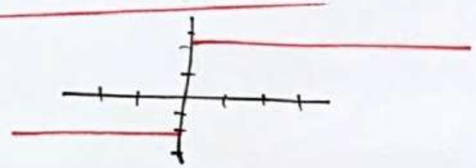
- Mq N_c est une norme.
- Dmq $A \subset B$.
- Matrices ⟺ Normes. Polynômes ⟺ Normes.
- Ensembles ouverts & fermés.
  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^3 > 0\}$

- Déterminer points adhérents, points accumulaOs & points isolés des sous-ens A de $\mathbb{R}$: $A = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, ...

- Mq A est fermé & ne contient aucune boule ouverte.

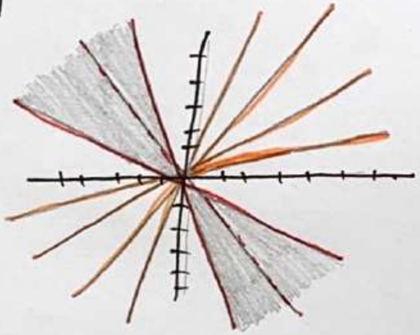
M 32 - Motivation

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{|x|}}$$



$$\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\uparrow 0}\frac{x}{|x|} = -1$$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}}$$



$$\lim_{x\uparrow 0} f(x,0) = \lim_{x\uparrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x,0) = \lim_{x\downarrow 0} 0 = 0 \qquad \lim_{y\uparrow 0} f(0,y) = 0$$

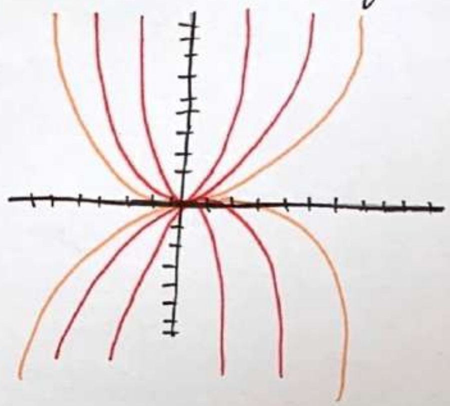
$$\lim_{y\downarrow 0} f(0,y) = \lim_{y\downarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

si $y = \lambda x$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda x^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \frac{x^2\,\lambda x}{x^4+\lambda^2 x^2}$$

$$= \frac{\lambda x}{x^2+\lambda^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

FPV : univ- lyon 1

I/ Notion de topologie dans $\mathbb{R}^n$

I.1. Espaces métriques, distance, normes (ev)

D : Espaces Vectoriels

Soit E un ensemble. On dispose sur cet ens d'une opéra° (notée additivement) & on dispose d'une applica°
$\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ qui à tout couple (λ, x) associe λx.
On dit que E est un (ev) lorsque :

1. E est un groupe commutatif (pour l'addition) g^pe add
2. Pour tout vecteur x de E, $1 . x = x$ (1 : neutre) EN
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$ associat scal^R
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ distrib scal^R
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$ distrib vecto

D : Norme

Soit E : (ev) sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E, une applica°

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow \|x\|$$

1. (Sépara°) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. (Homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$
3. (I) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

D (evn)

Un ev sur $\mathbb{R}$ muni de la norme : espace vectoriel normé : e.v.n

P $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

D Normes équivalentes :

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E st EQUIVALENTES s'$\exists$ deux ctes réelles $\lambda > 0$, $\mu > 0$ tq $\forall x \in E$:

$$\lambda \|x\| \leq \|x\|' \leq \mu \|x\|.$$

On note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

→ Sur $\mathbb{R}^n$ (evn de dim finie) TOUTES les normes st équivalentes

- Norme manhattan : $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$
- Norme euclidienne : $\|x\|_2 = \left(\sum_1^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$
- Norme p, $p \geq 1$: $\|x\|_p = \left(\sum_1^n |x_i|^p \right)^{1/p}$
- Norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

→ dist° de Tchebychev : $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$.

I.3. Boules ouvertes, fermées et parties bornées

(D) Boule ouverte, fermée, sphère

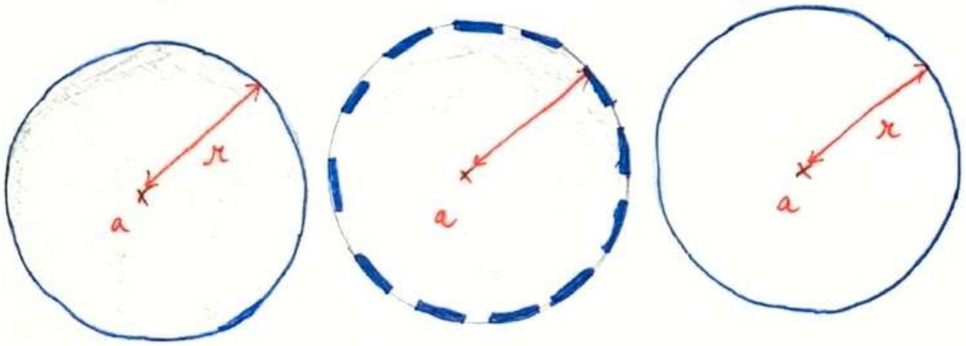
soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n, soit $a \in E$ (point), $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

- $\overline{B}_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E, \|x-a\| \leq r\}$: boule fermée $\begin{cases} \text{centre } a \\ \text{rayon } r \end{cases}$
- $B_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E, \|x-a\| < r\}$: boule ouvertes { " "
- $S_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E, \|x-a\| = r\}$: sphère { " " .

(D) $(E, \|\cdot\|)$, evn :

- $\overline{B}(0, 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$: boule unité fermée
- $B(a, r) = \{x \in E, \|x\| < 1\}$: boule unité ouverte
- $S(a, r) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$: sphère unité

@ $\mathbb{R}^2$ ℓp NE :



(D) Partie Bornée

I.4. Ouverts et fermés

(D) Partie ouverte

soit $(E, \|\cdot\|)$ evn. Une partie **ouverte** (ou un ouvert) de E est une partie U de E tq $\forall x \in U, \exists r > 0,$ $\boxed{B(x, r) \subset U}$. A^d, tout point de U est le centre d'une boule ouverte de rayon non nul, incluse dans U.

(D) Partie fermée

soit $(E, \|\cdot\|)$, evn. Une partie **fermée** (ou un fermé) de E est une partie tq son **complémentaire U de E est un ouvert**.

(P) Boule ouvertes, fermées

soit $(E, \|\cdot\|)$, evn → boule ouverte est un ouvert
↳ boule fermée est un fermé.

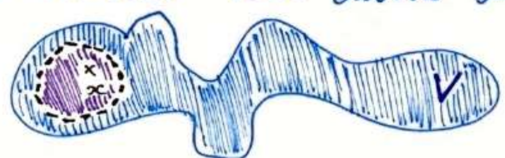
(P) Intersec. $\cap$, réunion ouverts, fermés

I.5. Position d'un point p à une partie de E

(D) (Voisinage)

Une partie V de E est un voisinage de $x \in E$ si V contient un ouvert contenant x.

A^d : Une partie V de E est un voisinage de $x \in E$ si V contient une boule ouverte contenant x.



Ⓓ Intérieur
Ⓟ Ppté Intérieur

Ⓓ (Adhérence)

soit $(E, \|\cdot\|)$ evn et $A \subset E$. Un point x de E est dit adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A.
A^{dit}, si toute boule ouverte contenant x contient au-moins un élt de A.
L'adhérence de $A \subset E$, notée $\overline{A}$ ou $adh(A)$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Ⓟ (Ppté de adhérence)

soit $(E, \|\cdot\|)$, evn et $A \subset E$. L'adhérence de A est la plus petite fermée contenant.
Adhérence du complémentaire : $\overline{\complement_E A} = \complement_E \mathring{A}$.

Ⓓ Intérieur

soit $(E, \|\cdot\|)$ evn et $A \subset E$. Un point x de E est intérieur à A si A est un voisinage de x.
A^{dit}, si A contient une boule ouverte contenant x.
L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ ou $Int(A)$ est l'ens des points intérieurs à A.

FPV : univ - lyon 1

II / Fonctions de plusieurs variables. Limite. Continuité

II.1. Fonctions réelles de variable réelle

① Fonction réelle de plusieurs variables réelles

soit E un sous-ens non-vide de $\mathbb{R}^n$ et G une partie de $E \times \mathbb{R}$ tq $\forall$ vecteur $x \in E$, $\exists y \in \mathbb{R}$ un et un seul tel que le couple (x, y) appartienne à G. Alors le triplet $(f, E, \mathbb{R})$ s'appelle fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- E est l'ens de départ de f (ou $\mathcal{D}_f$) est appelé l'image de E par f, noté $\mathrm{Im}(f)$
- l'UNIQUE nbr réel y correspondant à l'élt $x \in E$ par f s'appelle l'image de x par f, noté $f(x)$
- notaᵒ $f = (G, E, \mathbb{R})$ lourde, on use $f : E \to \mathbb{R}$.

① Graphes d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

soit E ss-nv de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une f réelle 2 vari.

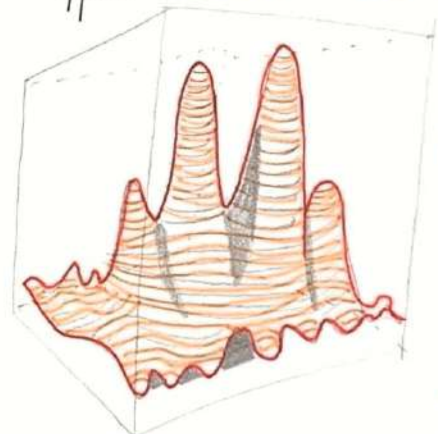
① Ens des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x, y) \in E,\ z = f(x, y)\}$$

est Surface Représentative de f. (ou Graphe).

② Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de E. Les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $x \mapsto f(x, b)$ et $y \to f(a, y)$ déf sr intervalles ouverts contenant respectivement a et b sont appelées FONCTIONS PARTIELLES associées à f au point A.

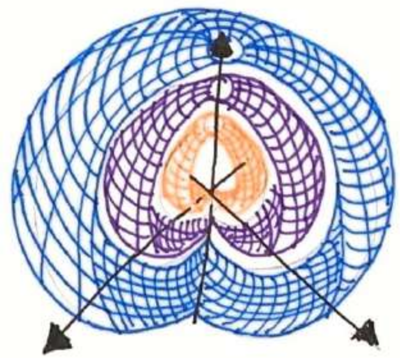
③ soit $k \in \mathbb{R}$. L'ens $L_k = \{(x, y) \in E,\ f(x, y) = k\}$ est appelé LIGNE DE NIVEAU k de f.



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) = z = \frac{\sin(x^2 + 3y^2)}{0{,}1 + x^2} + (x^2 + 5y^2) \cdot \frac{\exp(1 - x^2)}{2}$$

où $x = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Les surfaces de niveaux st données par $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.