ALGEBRE LINEAIRE
LICENCE MATHÉMATIQUES
Mars 2017
Durée : 2 heures
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question théorique. Définir une forme bilinéaire. Donner des exemples des formes bilinéaires. Définir la matrice d'une forme bilinéaire et obtenir l'expression de la forme en coordonnées. Démontrer la formule de changement de matrice d'une forme bilinéaire pour un changement de bases.

Exercice I.

(1) Montrer que les formes
$$\varphi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3;\ \varphi_2(x) = x_2 - x_3;\ \varphi_3(x) = -x_1 + 2x_2,\ \text{où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$
forment une base de l'espace $(\mathbb{R}^3)^*$.

(2) Trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercice II. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs suivants :
$$v_1 = (1, -1, 1, -1), v_2 = (1, 1, -1, -1), v_3 = (1, -1, -1, 1), v_4 = (1, 1, -1, -1).$$

(1) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires φ qui s'annulent sur v_i :
$$\mathcal{U} = \{\varphi \in (\mathbb{R}^4)^* \ : \ \varphi(v_i) = 0,\ i = 1, 2, 3, 4\}.$$
Démontrer que $\mathcal{U}$ est un sous-espace de $(\mathbb{R}^4)^*$.

(2) Trouver la dimension du sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^4$ tel que $U^\circ = \mathcal{U}$. En déduire la dimension de $\mathcal{U}$.

(3) Trouver $\mathcal{U}$.

Exercice III. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par :
$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(1) Ecrire la matrice de sa forme bilinéaire β dans la base canonique. Trouver le noyau $\mathrm{Ker}\beta$ et calculer le rang $\mathrm{rg}(b)$.

(2) Ecrire la matrice de β dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs v_i forment-ils une base orthogonale pour la forme β ?

(3) (a) Si la réponse à la question précédente est négative, chercher une base orthogonale pour β.
(b) Trouver la signature de Q.
(c) Donner l'équation du cône isotrope $\mathcal{I}_Q$ dans les coordonnées (y_1, y_2, y_3) correspondant à la base orthogonale choisie au point (a).
(d) Trouver l'intersection de $\mathcal{I}_Q$ avec le plan $y_3 = 0$.