M42 : Formes bilinéaires, espaces euclidiens

Licence de Mathématiques L2 S4 – Université de Lille – Année 2020-2021

Feuille de TD 2. Formes bilinéaires et quadratiques

Dans cette feuille K désigne un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Lesquelles des fonctions $f : E \times E \to K$ suivantes sont des formes bilinéaires sur les K-espaces vectoriels E donnés ? Dans les cas où f est bilinéaire, donner la matrice de f dans une base convenable ; au cas où f est bilinéaire symétrique, donner une expression pour la forme quadratique associée :

1. $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n))$ un monôme en x_i, y_i. Même question pour f un polynôme en x_i, y_i.
2. $E = \mathbb{R}^n$, $f(x, y) = (\sum(x_i + y_i))^2 - (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$.
3. $E = \mathbb{R}^n$, $f(x, y) = (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$.
4. $E = M_n(\mathbb{R})$, $f(A, B) = \det(A + B) - \det(A - B)$.
5. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f(P, Q) = \int_{-1}^{1} xP(x)Q'(x)dx$.
6. $E = \mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f(x, y) = |xy|$, $f(x, y) = \mathrm{Re}\,(x\bar{y})$, $f(x, y) = \mathrm{Im}\,(x\bar{y})$, $f(x, y) = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$.
7. $E = \mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f(x, y) = \bar{x}_1 y_2 + x_1 \bar{y}_2$.
8. $E = \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = \bar{x}_1 y_2 - \bar{x}_2 y_1$.

Exercice 2. Ecrire et démontrer la formule pour la matrice A' d'une forme bilinéaire f dans une base (e'_1, e'_2, e'_3) en fonction de A, P, où A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) et P est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3). Réaliser le calcul de A' pour A et le changement de base donnés : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{E}$, $g \in \mathscr{B}(E)$ une forme bilinéaire sur E et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme linéaire de E. Montrer que les fonctions $\alpha, \beta : E \times E \to K, \beta(x, y) = g(u(x)x, y), \gamma(x, y) = g(x, u(y))$, sont des formes bilinéaires et donner leurs matrices en fonction des matrices G de g et A de u, dans la base $\mathscr{E}$. Soient $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ la base standard, et $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$. Déterminer tous les endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ pour lesquels la forme β est symétrique et γ est alternée simultanément.

Exercice 4. Vérifier que l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$q\big((x, y, z)\big) = x^2 + 3(x + y - z)^2 + (z - y)^2.$$

La forme q est-elle définie positive ?

Exercice 5. Diagonaliser les formes quadratiques par la méthode de Gauss, déterminer le rang et la signature et présenter une base orthogonale par chacune des formes :

1. $x^2+y^2+z^2-4(xy+yz+zx)$;
2. $2x^2+6y^2-4xy+8xz$;
3. $xy+yz+2zx$;
4. $9x^2-6y^2-8z^2+6xy-14xz+18xw+8yz+12yw-4zw$;
5. $M_2(\mathbb{R}) \ni M \mapsto \det M$.

EXERCICE 6. a) Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ pour n fixé ? b) On dit que deux formes Q, Q' sont semblables s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $Q, \lambda Q'$ sont équivalentes. Combien y a-t-il de classes de similitude de formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$?

EXERCICE 7. Pour quelles valeurs de paramètres λ, μ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\mu x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \mu x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)-\lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

EXERCICE 8. Deux formes bilinéaires $f : E\times E \to K$, $f' : E'\times E' \to K$ sont dites équivalentes si E, resp. E' admettent des bases $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{E}'$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}(f')$. Dire, sans aucun calcul, si les deux formes bilinéaires données sur $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes ou pas :

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 9x_3y_3,$$

$$f'(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_3.$$

EXERCICE 9. Sans aucun calcul, dire si les formes bilinéaires données sur $\mathbb{R}^3$ se réduisent à une forme diagonale dans une base convenable :

a) $f_1(x,y) = -x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;

b) $f_2(x,y) = -x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

EXERCICE 10. Pour $P, Q \in K_n[X]$ on pose $\phi(P,Q) = P(1)Q(1)$. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $K_n[X]$. Déterminer son noyau et son rang. Donner une base ϕ-orthogonale.

EXERCICE 11. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ et $\phi \in \mathscr{S}(E)$ la forme bilinéaire symétrique définie par $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,(AB)$.

a) Montrer que ϕ est non dégénérée.

b) Montrer que toute matrice symétrique est ϕ-orthogonale à toute matrice anti-symétrique.

c) Déterminer la signature de ϕ.

EXERCICE 12. Soient P un plan vectoriel et q une forme quadratique non dégénérée sur P. On suppose qu'il existe un vecteur isotrope pour q, c'est à dire, un vecteur $v \in P$ tel que $v \neq 0$ et $q(v) = 0$. Montrer qu'il existe une base de P dans laquelle la matrice de q est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un plan P muni d'une forme quadratique q comme celle-ci s'appelle plan hyperbolique.

EXERCICE 13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et Q une forme quadratique sur E. Un vecteur v de E est dit *isotrope* si $v \neq 0$ et si $Q(v) = 0$. Le *cône isotrope* $C(Q)$ de Q est l'ensemble des vecteurs isotropes complété par le vecteur nul, ou de façon équivalente :

$$C(Q) = \{v \in E \mid Q(v) = 0\}.$$

1. Représenter graphiquement le cône $C(Q_i)$ pour les formes quadratiques $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, et $Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$. Montrer sur le dessin une base de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) formée de vecteurs de $C(Q_1)$ (resp. $C(Q_2)$).
2. Montrer que si $C(Q)$ est un sous-espace vectoriel de E, alors Q est de signe constant, c'est à dire : ou bien $Q(v) \geq 0$ pour tout $v \in E$, ou bien $Q(v) \leq 0$ pour tout $v \in E$.
3. Montrer que si Q est non-dégénérée et admet un vecteur isotrope, alors E a une base formée de vecteurs isotropes.

EXERCICE 14. Soit Q une forme quadratique de signature $(n-1, 1)$ sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Déterminer toutes les signatures possibles pour la restriction $Q|_H$ sur un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$. Illustrer les cas qui se présentent par un dessin, montrant la position de H par rapport au cône isotrope $C(Q)$.

EXERCICE 15. En appliquant l'orthogonalisation de Gram–Schmidt à une base convenable de $\mathbb{R}^3$, construire une base orthogonale pour la forme quadratique q donnée, déterminer la signature de q et donner une expression de q en fonction des coordonnées dans la base orthogonale :

1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$;

2) $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10xz$;

3) la forme quadratique q de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 16. Trouver une base orthonormée de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

EXERCICE 17.

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose $a_{i,j} = \int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive ssi la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
2. En déduire que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts alors la matrice de terme général $1/(\lambda_i + \lambda_j)$ est définie positive.