M-53 Pr: Emmanuel Fricain

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

SÉRIES DE FOURIER

1. Intégrales définies dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre.
2. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; mise en parallèleavec des résultats connus pour des séries de fonctions.
3. Critères de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales ; la convergence normale implique la convergence uniforme. (if time left)
4. Polynômes et séries trigonométriques, calcul pratique des coefficients de Fourier, forme complexe de la série de Fourier.
5. Formes hermitiennes et identité de Parseval ; convergence en moyenne quadratique pour les fonctions continues par morceaux.6.Lemme de Riemann-Lebesgue, théorème de convergence simple de Dirichlet pour les fonctions C^1 par morceaux, théorème de convergence uniforme pour les fonctions continues C^1 par morceaux.

M53 - Intégrales à Paramètres

C1 - Continuité UN & Integ Génér.

(D) C-S : I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$
alors f est cont, $\forall x \in I$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall y \in I$, $|x-y| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

(D) C-U : ..., f cont & UN sr I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall x, y \in I$, $|x-y| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

⚠ f UN cont sr I
$\Rightarrow f$ cont sr I. (~~RF~~)

(TH) Heine
soit I compact de $\mathbb{R}$ & $f : I \to \mathbb{R}$ cont alors f est UN cont.

(TH) Heine $\mathbb{R}^2$
soit I, J compacts de $\mathbb{R}$
soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont
alors f est UN cont sr $I \times J$.

$\to f$ UN cont sr $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$,
$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$

2.1. Intég. Généralisées

(D) soit I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est locmlt intégrable (au sens de Riemann) si f est Riemann intégrable sr tt intervalle compact.

(D) soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ & spps f loclmt integ sr $[a,b[$, on dit q l'intégrable de f sr $[a,b[$ est
(CV) si $f : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b[$
a une limite finie qd $x \to b$.
On note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$.

Cette limite s'appelle l'(ig) de f sr $[a,b[$. $(-\infty < a < b < \infty)$

2.2. Fausse Généralité

(P) soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ cont & spps que $\lim_{x \to b, x<b} f(x)$ $\exists$ (& est finie) alors
$\int_a^b f(x)\,dx$ (CV).

2.3. Crit (CV) si f signe cte

(TH) soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ & spps que :
(i) $\exists c \in [a,b[$, $\forall x \in [c,b[$: $f(x) \geq 0$
(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$
(ie : $\exists M > 0, \forall x \in [c, b[$, $f(x) \leq M.\,g(x)$)

Alors :
(a) si $\int_a^b g(x)\,dx$ (CV) $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ (CV)
(b) si $\int_a^b g(x)\,dx$ (DV) $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ (DV)

(TH) $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ
spps (i) $\exists c \in [a,b[$, $\forall x \in [c,b[$, $f(x) \geq 0$
(ii) $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$
(ie : $\exists \varepsilon : [c,b[\to \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \to b} \varepsilon(x) = 0$
& $\forall x \in [c,b[$, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$)

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx$ (CV) ssi $\int_a^b g(x)\,dx$.

2.4. Crit de (CV) en Valeur Absolue

(TH) $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ li & spps que
$\int_a^b |f(t)|\,dt$ (CV) $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ (CV).

2.5. Crit de Cauchy

(TH) soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ li
alors $\int_a^b f(t)\,dt$ (CV) $\boxed{\text{ssi}}$ $\forall \varepsilon > 0$,
$\exists x_\varepsilon \in [a,b[$, $\forall x, x'$:
$x_\varepsilon < x < x' \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$.

C2 : Integ définies à paramètres

1. Continuité de F

- I int de $\mathbb{R}$ borné ou non
- $J = [a,b]$, $f : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(x,t) \longmapsto f(x,t)$

n spps $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est Riemann Intégrable sr I.

Th Spps $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont alors $F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$, $x \in I$,

la f F est bien déf & cont sr I.

⚠ a, b dvt ê réels finis ! Ne f pas pr IG.

2. Condi°s pr F soit C^1

Th soit $f : I \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
spps (i) f cont sr $I \times [a,b]$
(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sr $I \times [a,b]$
alors f $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$
est bien déf & classe C^1 sr I.

et $\forall x \in I$,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

C2 : Integ définies à paramètres

1. Continuité de F

- I int de $\mathbb{R}$ borné ou non
- $J = [a,b]$, $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$

on spps $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann Intégrable sur I.

Th Spps $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont

alors $F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$, $x \in I$,

la f F est bien déf & cont sur I.

⚠ a, b dvt ê réels finis ! Ne f pas pr (IG).

2. Condit°s pr F soit C^1

Th soit $f : I \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

spps (i) f cont sur $I \times [a,b]$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sur $I \times [a,b]$

alors f $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$

est bien déf & classe C^1 sur I.

et $\forall x \in I$,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

Th de Fubini

soit $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a,b]$ &

$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$, spps cont sur $I \times J$

alors f $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$

est cont sur I & $G : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(t)$

où $G(t) = \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx$ est cont sur J

et $\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_a^b G(t)\, dt$

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt$$

2.4. Int à Param dt bornes dépdt aussi du Param

intéressant ax f $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt$

Th soit I, J fermés, bornés

$f : I \times J \to \mathbb{R}$, $a, b : I \to J$

spps :
- a, b st de C^1 sur I
- f cont $I \times J$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $I \times J$

alors f $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt$

est C^1 & $\forall x \in I$:

$$\Psi'(x) = f(x, b(x)).\, b'(x) - f(x, a(x)).\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

C3 : Int génér. à param

- $f : I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cont, $(x,t) \mapsto f(x,t)$

I int qq de $\mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq \infty$

1. Continuité

Th $f : I \times [a,b[\to \mathbb{R}$ cont

& on spps q :

$\exists$ $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ (li) tq

(i) $\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$

(ii) $\int_a^b g(t)\, dt$ (CV)

alors $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$

est bien déf & cont sur I.

2. Dérivabilité

Th $f : I \times [a,b[\to \mathbb{R}$ cont

(i) $\forall x \in I$, $\int_a^b f(x,t)\, dt$ (CV)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sur $I \times [a,b[$

(iii) $\exists$ $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ (li) tq
- $\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq g(t)$
- $\int_a^b g(t)\, dt$ (CV)

Alors $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$

est de classe C^1 sur I &

$\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$

(Th)$_3$ de Fubini

soit $-\infty<\alpha<\beta<\infty$; $-\infty<a<b<\infty$; $f:[\alpha,\beta]\times[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ cont,

spps $\exists\ g:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ (l.) & tq

- $\forall(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[a,b[,\quad |f(x,t)|\leq g(t)$
- $\int_a^b g(t)dt$ (CV)

Alors $$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx.$$

Ch4 : Transformée de Fourier

4.0 Séries de Fourier :

soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 2π-périodiq + hypo de régularité

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\hat{f}(n)\,e^{int}$$

où $$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-int}\,dt$$

Pr fs non-périodiqs, remplacer $n\in\mathbb{Z}\longrightarrow s\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}ds$$

On écrirait : $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,e^{ist}\,ds$ où $\hat{f}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}$

(D) Transformée de Fourier

soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cont p morcx, spps $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ (CV) alors

on pose $$\hat{f}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-ist}$$

(Th)$_4$ soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cont, spps $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ alors

$\hat{f}$ est cont sr $\mathbb{R}$. (not° : $\hat{f}$: transformée de Fourier).

(Th) soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont, $\int_{-\infty}^{\infty}|t\,f(t)|\,dt<\infty$ alors

$\hat{f}$ est de classe C^1 sr $\mathbb{R}$, $\forall s\in\mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(s)=-i\int_{-\infty}^{\infty}t\,f(t)\,e^{-its}\,dt.$$

(Th) Riemann-Lebesgue

soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont sr $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ alors

$$\lim_{s\to\infty}\hat{f}(s)=0 \quad\text{et}\quad \lim_{s\to-\infty}\hat{f}(s)=0.$$

(L) Densité

soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ $(-\infty<a<b<\infty)$ cont alors

$\exists\ (\varphi_n)_n$ suite de fs en escalier tq

$$\sup_{x\in[a,b]}|\varphi_n(x)-f(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

(Th) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tq
- $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ CV
- $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|\,dt$

Alors $\widehat{f'}(s)=is\,\hat{f}(s)$, $s\in\mathbb{R}$.

4.1. Séries Trigonométriques

(D) Une série trigonométriq est une série de fs dont le terme général est :

$U_n(x)=a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)$ ⋮ $n\geq 0$, $a_n,b_n\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

(R1) $\cos(nx)=\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx)=\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

(R2) $$\sum_{n=0}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=\sum_{n=-N}^{N}c_n\cdot e^{inx}\quad\text{où } c_n=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_n-ib_n) & n\geq 1\\ a_0 & n=0\\ \frac{1}{2}(a_n+ib_n) & n\leq -1.\end{cases}$$

↳ Une St s'écrit ainsi : $v_n(x)=c_n\cdot e^{inx}$, $n\in\mathbb{Z}$, $c_n\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

(R3) Une série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_n$ CV si $\sum_{n\geq 0}(v_n+v_{-n})$ CV.

(ie $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}v_n\ \exists$).

(Th1) Spps $(a_n)_{n\geq 0},(b_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfont : $\sum_n|a_n|<\infty$, $\sum_n|b_n|<\infty$

$\Rightarrow$ St $\Leftrightarrow$ $\sum_n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ CV normalement sur $\mathbb{R}$ et si $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, $x\in\mathbb{R}$

alors S cont sur $\mathbb{R}$.

(Th2) soit $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ st 2 suites ↘, tdt vers 0 alors

(i) St $\Leftrightarrow$ CV sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(ii) St CV U.N sur $[2\pi k+\alpha,\ 2(k+1)\pi-\alpha]$

(iii) si $S(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

alors S cont sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Th $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tq • $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ CV
• $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|\,dt$

Alors $\widehat{f'}(s) = is\,\hat{f}(s)$, $s\in\mathbb{R}$.

4.1. Séries Trigonométriques

D Une série trigonométiq est une série de fs dont le terme général est : $m \geq 0$, $a_m, b_m \in \mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

$U_m(x) = a_m \cdot \cos(mx) + b_m \cdot \sin(mx)$

Rq $\cos(mx) = \dfrac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}$, $\sin(mx) = \dfrac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}$

Rq 1 $\sum_{m=0}^{N}(a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx)) = \sum_{m=-N}^{N} c_m \cdot e^{imx}$ où $c_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_m - ib_m) & m\geq 1 \\ a_0 & m=0 \\ \frac{1}{2}(a_m+ib_m) & m\leq -1 \end{cases}$

↳ Une St s'écrit ainsi : $v_m(x) = c_m \cdot e^{imx}$, $m\in\mathbb{Z}$, $c_m\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

Rq Une série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m$ CV si $\sum_{m\geq 0}(v_m + v_{-m})$ CV.
(ie $\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} v_m\ \exists$).

Th 1 Spps $(a_m)_{m\geq 0}, (b_m)_{m\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfont : $\sum_m |a_m| < \infty$, $\sum_m |b_m| < \infty$
$\Rightarrow$ st $\Leftrightarrow$ $\sum_m (a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx))$ CV normalement sur $\mathbb{R}$ et si $S(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx))$, $x\in\mathbb{R}$
alors S cont sur $\mathbb{R}$.

Th 2 soit $(a_m)_{m\geq 0}$, $(b_m)_{m\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $(a_m)_{m\geq 0}$, $(b_m)_{m\geq 0}$ st 2 suites ↘, tdt vers 0 alors
(i) st $\Leftrightarrow$ CV sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
(ii) st CV U.N sur $[2\pi k+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$
(iii) si $S(x) := \sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx))$, $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$
alors S cont sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Rq St $\sum(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx))$ CV en $x\in\mathbb{R}$ (resp CV UN sur $I\subset\mathbb{R}$) ssi St $\sum c_m\cdot e^{im\mathbb{Z}}$ CV en $x\in\mathbb{R}$. (CV UN sur I).

Rq St $\sum_{m\in\mathbb{N}}(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx))$ CV en $x\in\mathbb{R}$ alors elle CV en $x+2k\pi$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ & si $S(x)$. On a $S(x+2k\pi) = S(x)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Rq si St CV UN sur $I\subset\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ S cont sur I.

Rq si St CV simplmt sur I & $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-n\cdot a_n\sin(nx) + nb\cos(nx))$ CV UN sur I alors $S(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx))$, $x\in I$.
On a que S est C^1 sur I, $\forall x\in I$: $S'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(mb\cos(mx) - ma_m\sin(mx))$

Calculo coefficients (st)

(Pr pb séries de Fourier, ∀ f ∫, on ⟺ coeff de Fourier de f)
de $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on ⟺ cdF ∮:

$$a_0 = c_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad , \quad n > 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \; .$$

Et les coefficients de Fourier complexes de f pr $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx \, .$$

→ la sdF ⟺ f est (st) ⟺ coeff calc $\begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases}$ ou c_n.

→ sdF : $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ou $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

(Rq) Comme $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ est 2π-périodiques, on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

De m̂ pr a_n & b_n.

(Prop) soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$,

a) si f est paire ⇒ $\forall n > 0$, $b_n = 0$ et $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx & n=0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx & n \geq 1 \end{cases}$

b) si f est impaire ⇒ $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ $\forall n \geq 0$.

Règle (cv) sdF : (Th) Dirichlet (cv ponctuelle) / (Th) cv L^2 (quadratiq) / (Th) Féjer (cv UN.) /

(L) **Riemann-Lebesgue**

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, sppo integ(Riemann) alors

$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$; on a $I(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$

(Cor) soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ c_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0 \end{cases}$

(Th) **Dirichlet**

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, sppo $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$ tq

$u \mapsto \frac{1}{u}\left(f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right)$ est borné sr $]0,\delta]$

alors $\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$. $\left(f(x_0^+) = \lim_{t \to x_0, >} f(t) \right)$

(Cor) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 (cm) & 2π périod sr $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ex si f dt cont, on a $\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = f(x)$

Th de Fejer soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont, 2π-périodiq

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup |\sigma_n f(x) - f(x)| = 0$$

où $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x) =: (\sigma_n f)(x)$ nème polynome de Féjer

Cor1 si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ et si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = 0 \Rightarrow f = 0$.

Polynômes trigo :

Pr $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_N = Vect(e_k, k \in [\![-N,N]\!] = [\![-N,N]\!] \cap \mathbb{Z})$

où pr $k \in \mathbb{Z}$, $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(t) = e^{ikt}$.

Ens des polynômes trigo $\mathcal{P}$ est déf ? $\mathcal{P} = Vect(e_k, k \in \mathbb{Z})$

Cor2 $\mathcal{P}$ est dense ds $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni de la norme infini.

CVce quadratiq

Pr $f, g \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$,

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

$\to \langle \cdot,\cdot \rangle$ est forme sesquilinéaire, positive. (elle n'est pas déf + car si $\|f\|_2 \cancel{\Rightarrow} f = 0$)

Prop La famille $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ forme une base orné de $\mathcal{P}_N$.

TH si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \inf_{p \in \mathcal{P}_N} \|f - p\| = \|f - S_N f\|_2$

TH (Inégalité de Bessel)

si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$ CV

& $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$.

Cor si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}$ tq $\|f - p\|_2 < \varepsilon$

TH (CVce quadratiq)

si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \|S_k f - f\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

TH (Égalité de Parseval)

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) + |a_0|^2$

TH soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont, 2π-périodiq & C^1 par morceaux

$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e^{ikt}$ CV normalt de UN vers f sr $\mathbb{R}$.