

# Géométrie des courbes et surfaces

Gijs M. Tuynman



## Table des matières

Préface	5
Chapitre 1. Quelques préliminaires algèbro-géométriques	7
1. Le produit scalaire usuel	7
2. Le produit vectoriel	9
3. Rotations en 2 et plusieurs dimensions	12
4. Droites et plans dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$	15
Chapitre 2. Courbes	21
5. Courbes	21
6. La longueur d'une courbe	24
7. La droite tangente	27
8. Branches infinies, tangentes et plus	34
9. Courbure et angles	40
10. Courbure et cercles	44
11. Développées et développantes	48
12. Courbes hyperrégulières	51
13. Classification	55
14. Désingularisation d'un point singulier	65
15. Torsion et le repère mobile	67
16. Courbes : le problème inverse	72
17. Un bestiaire de (contre-)exemples	75
Chapitre 3. Surfaces	79
18. Surfaces régulières	79
19. Équivalence avec d'autres définitions	93
20. Applications sur et vers des surfaces régulières	95
21. Le plan tangent à une surface régulière	100
22. Intermezzo algébrique	102
23. La première forme fondamentale	105
24. Aire d'une surface	108
25. Intégrer une fonction sur une courbe ou sur une surface	116
26. Champs de vecteurs et le fibré tangent	125
27. Orientabilité	132
28. La deuxième forme fondamentale	135
29. La courbure normale	137
30. Géodésiques, distance et droites	141
31. Géodésiques et le plan tangent basculant	150
32. Transport parallèle et la dérivée covariante	160
Chapitre 4. Appendices	169
33. Fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$	169
34. Développements limités en une variable	171

35. Développements limités en plusieurs variables	175
36. Être $C^k$ est une propriété locale	178
37. Algèbre linéaire et le théorème des fonctions implicites	180
38. Équations différentielles ordinaires	186
Chapitre 5. Les preuves	189
Chapitre 6. Les exercices	309
Chapitre 7. Les solutions	333
Bibliographie	367
Index	369

## Préface

*AVERTISSEMENT AU LECTEUR : ce texte n'est pas achevé. Il comporte certainement des erreurs d'une gravité variable. De certaines je suis au courant mais je n'ai pas encore eu le temps de les corriger ; d'autres me sont (encore) inconnus. Et surtout : il manque beaucoup de dessins. Je les ai dessinés dans ma tête, mais il m'a manqué jusqu'à maintenant le temps et surtout le courage de les faire. Le lecteur trouvera aussi des traces de mes multiples changements d'avis sur la présentation que j'espère effacer aux fils des "améliorations," mais ce n'est pas gagné d'avance. D'autre part, je pense qu'il est suffisamment avancé pour que des étudiants peuvent en tirer du profit. Je remercie d'avance tout lecteur qui aura la gentillesse de me faire parvenir ses remarques, critiques et corrections.*

L'enseignement de la géométrie disparaît petit à petit du cursus d'un étudiant de mathématiques, ce qui est dommage et dommageable pour la discipline. Cette constatation n'est pas nouvelle : on la trouve dans des livres qui datent de 50 et 100 ans. Néanmoins, ce processus se poursuit. Et c'est dommageable pour la discipline, car la quasi totalité des mathématiques est **visuel**. Il suffit d'écouter un mathématicien parler de sa spécialité pour s'en convaincre. Il ne pense pas en termes d'une suite de symboles cabalistiques, mais il se fait guider par des images. C'est vrai que, plus que la spécialité s'éloigne de la géométrie proprement dite, ces images deviennent de plus en plus personnelles. Reste que le mathématicien se laisse guider par des images. La recherche en mathématique est un va-et-vient perpétuel entre image et formule. À l'heure actuelle il semble qu'on a inculqué aux étudiants en mathématique l'idée qu'un dessin ne démontre rien et qu'il faut **donc** se méfier des dessins. À un tel point que, quand je demande de me tracer le graphe d'une fonction, les étudiants me calculent les zéros, la dérivée, les zéros de la dérivée et me dressent le tableau de variation. C'est rare qu'on me fournit un dessin. Et oui, je dois avouer qu'un dessin ne démontre rien. **Mais**... moi je ne sais rien démontrer sans dessins ! Et que pour moi une preuve commence avec un dessin, une image, et que ce n'est qu'après que j'écris la preuve, et pas dans l'autre sens. Comme le disent les amateurs d'opéra : *prima la musica, dopo le parole*.

Dans le présent texte, qui n'est qu'une introduction (et trop courte en tant que telle), j'ai essayé de fournir autant de dessins que possible pour illustrer et motiver les énoncés et leurs preuves. J'ai aussi essayé de l'écrire à deux niveaux. D'abord un niveau naïf, où j'essaie d'expliquer l'origine d'une notion, de donner des analogies dans la vie courante qui motivent les énoncés. D'autre part un niveau formel, où je donne les énoncés exactes avec leurs preuves. La plupart du temps ces énoncés sont illisibles sans une explication préalable (d'où le niveau naïf), car pour un énoncé précis, il faut souvent donner beaucoup de précautions. Et plus qu'un énoncé est long, moins qu'on comprend (à la première lecture au moins). Dans les preuves j'ai essayé d'être aussi complet que possible, parfois peut-être trop. Bien que ce texte a été écrit pour un cours de troisième année d'université, j'ai inclus un certain nombre d'arguments qu'on peut facilement qualifier de niveau de première année.

Je les ai quand même inclus, parce que je sais qu’il y a bon nombre d’étudiants en mathématiques d’aujourd’hui qui, bien qu’ils connaissent ces résultats, ne seront pas capables de fournir ces justifications sur demande.<sup>1</sup> Là où il y a vingt ans on disait simplement “on en déduit,” maintenant il faut indiquer comment, car la plupart des étudiants ne saura pas le faire. Dans le même état d’esprit j’ai essayé de fournir autant que possible des exemples qui montrent le pourquoi de certaines conditions, qui montrent les limites de ce qu’on peut montrer.

Gijs M. Tuynman  
27 juin 2019

---

1. Et oui, je plaide coupable, je suis un formaliste. Je veux être sûr qu’une preuve est correcte, que je comprend **toute** la chaîne logique. Cela m’est arrivé trop souvent que je croyais que mon dessin était correct et que “donc” la preuve était “évident” pour plus tard m’apercevoir qu’il y avait des erreurs. Ce qui n’enlève rien au fait que je commence une preuve avec des images, des dessins. Mais comme dit, c’est un va-et-vient perpétuel entre image et formule.

## Quelques préliminaires algébro-géométriques

### 1. Le produit scalaire usuel

**1.1 Définitions.** Le *produit scalaire usuel* dans  $\mathbf{R}^n$  est l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n) \quad \Longrightarrow \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

La *norme (euclidienne)* associée dans  $\mathbf{R}^n$  est l'application  $\| \cdot \| : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

On dit qu'un vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$  est *unitaire* si on a  $\langle x, x \rangle = 1$ , ou, ce qui est équivalent,  $\|x\| = 1$ . Et on dit que deux vecteurs  $x, y \in \mathbf{R}^n$  sont *orthogonaux* (ou que  $x$  est *orthogonal* à  $y$ ) si on a  $\langle x, y \rangle = 0$ ; on note cette propriété comme  $x \perp y$ .

Ⓟ **1.2 Lemme.** Soit  $x, y \in \mathbf{R}^n$  deux vecteurs avec  $y \neq 0$ . Alors il existe une façon unique d'écrire

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp} ,$$

où  $x_{\parallel}$  est parallèle à  $y$  et  $x_{\perp}$  est orthogonal à  $y$ . On dit que c'est la décomposition orthogonale de  $x$  par rapport à  $y$ . Cette décomposition est donnée par

$$x_{\parallel} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \cdot y = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \cdot \frac{y}{\|y\|} \quad \text{et} \quad x_{\perp} = x - x_{\parallel} = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \cdot y .$$

En plus, on a les égalités

$$\|x_{\parallel}\|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle^2$$

et

$$\|x_{\perp}\|^2 = \frac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \|x_{\parallel}\|^2 \quad (\text{Pythagore}).$$

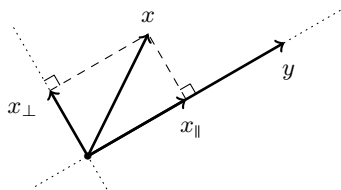


FIGURE 1. La décomposition orthogonale

Ⓟ **1.3 Corollaire (l'inégalité de Cauchy-Schwarz<sup>1</sup>).** *Pour tout  $x, y \in \mathbf{R}^n$  on a l'inégalité*

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 ,$$

*avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.*

**1.4 Définition.** Si  $x, y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  sont deux vecteurs non-nuls, alors par [1.3] le nombre

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ . Il existe donc un unique  $\alpha \in [0, \pi]$  tel qu'on a l'égalité

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\alpha) .$$

Le nombre/angle  $\alpha$  est appelé *l'angle entre  $x$  et  $y$ .*

**1.5 Nota Bene.** On retrouve la formule bien connue

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$$

qui relie le produit scalaire des deux vecteurs  $x$  et  $y$  à l'angle  $\alpha$  entre ces deux vecteurs. Mais il faut bien savoir que c'est l'angle qui est défini à l'aide du produit scalaire et pas le produit scalaire qui est défini à l'aide de l'angle.

---

1. (Karl) Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), le même du théorème de Schwarz sur les dérivées secondes et du lemme de Schwarz en analyse complexe (entre autres) ; à ne pas confondre avec Laurent Schwartz (1915–2002).



## 2. Le produit vectoriel

**2.1 Définitions.** Soit  $v_1, \dots, v_n$  et  $w_1, \dots, w_n$  deux bases de  $\mathbf{R}^n$ . Alors il existe une matrice inversible  $A$  de taille  $n \times n$  avec éléments de matrice  $A_{ij}$  telle que  $w_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} v_j$ .

- On dit que les deux bases  $v_1, \dots, v_n$  et  $w_1, \dots, w_n$  de  $\mathbf{R}^n$  ont la même orientation si la matrice  $A$  qui les relie a un déterminant positif. Sinon on dit qu'elles ont des orientations opposées.

- On dit la base  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathbf{R}^n$  est (orientée) directe si la matrice formée par les colonnes de ces vecteurs a un déterminant positif. Autrement dit, une base est (orientée) directe si et seulement si elle a la même orientation que la base canonique.

Ⓟ **2.2 Lemme.** Soit  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  une application linéaire. Alors il existe un unique vecteur  $v \in \mathbf{R}^n$  tel que

$$\forall w \in \mathbf{R}^n : f(w) = \langle v, w \rangle .$$

**Remarque.** Le résultat [2.2] se généralise facilement pour un produit scalaire  $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  arbitraire [22.1] (et même pour des applications bilinéaire non-dégénérées arbitraires) dans le sens que pour toute application linéaire  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  il existe un unique vecteur  $v \in \mathbf{R}^n$  tel qu'on a

$$\forall w \in \mathbf{R}^n : f(w) = g(v, w) .$$

Si on note  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ , où  $(e_i)$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , alors la non-dégénérescence de  $g$  implique que cette matrice est inversible. Avec cette remarque on vérifie aisément que le vecteur  $v$  défini par

$$v = \sum_{i,j=1}^n f(e_i) (g^{-1})_{ij} e_j$$

fait l'affaire. Et [2.2] se généralise même vers des espaces de dimension infini munis d'un produit scalaire, à condition qu'ils sont complets (c'est-à-dire des espaces de Hilbert) et que l'application linéaire est continue (ce qui est automatique en dimension finie). Mais dans ces cas, la preuve est un petit peu plus compliquée.

Il est bien connu que le déterminant de  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  dans  $\mathbf{R}^n$  est une application  $n$ -linéaire anti-symétrique. En particulier, si on fixe les  $(n-1)$  premiers vecteurs  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , on obtient une application linéaire dans le dernier vecteur  $v_n$ .

Ⓟ **2.3 Lemme.** Soit  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$   $n-1$  vecteurs arbitraires et soit  $w \in \mathbf{R}^n$  l'unique vecteur [2.2] tel qu'on a

$$\forall v_n \in \mathbf{R}^n : \det(v_1, \dots, v_n) = \langle w, v_n \rangle .$$

- (i) Si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont dépendants, alors  $w = 0$ .
- (ii) Si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont indépendants, alors  $w$  est orthogonal au sous-espace (de dimension  $n-1$ ) engendré par ces  $n-1$  vecteurs et  $v_1, \dots, v_{n-1}, w$  est une base orientée directe de  $\mathbf{R}^n$ .

En général, quand on donne  $n - 1$  vecteurs indépendants  $v_1, \dots, v_{n-1}$  dans  $\mathbf{R}^n$ , il y a plusieurs façons de les compléter en une base directe de  $\mathbf{R}^n$ . Le résultat [2.3] nous dit que parmi toutes ces possibilités, il y en a une qui est privilégiée : le vecteur  $w$ . Nous nous intéressons particulièrement à une formule pour ce vecteur  $w$  dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  (pour  $n > 3$  c'est moins intéressant).

Ⓟ **2.4 Lemme.** Soit  $u \in \mathbf{R}^2$  un vecteur arbitraire. Alors  $w = R_{\pi/2}u$  (voir [3.1]) est l'unique vecteur vérifiant

$$\forall v \in \mathbf{R}^2 : \det(u, v) = \langle w, v \rangle ,$$

ce qu'on peut réécrire comme la propriété

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^2 : \det(u, v) = \langle R_{\pi/2}u, v \rangle .$$

**2.5 Définition.** Soit  $u, v \in \mathbf{R}^3$  deux vecteurs arbitraires. Alors le *produit vectoriel* de  $u$  et de  $v$ , noté  $u \wedge v$ , est l'unique vecteur dans  $\mathbf{R}^3$  qui vérifie la condition

$$\forall w \in \mathbf{R}^3 : \langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w) .$$

Ⓟ **2.6 Lemme.** Le produit vectoriel de deux vecteurs  $u, v \in \mathbf{R}^3$  est donné par la formule

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

Ce produit a les propriétés suivantes :

- (i) L'application  $\wedge : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $(u, v) \mapsto u \wedge v$  est bilinéaire ;
- (ii)  $v \wedge u = -u \wedge v$  ;
- (iii)  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et à  $v$  dans le sens qu'on a  $\langle u \wedge v, u \rangle = 0 = \langle u \wedge v, v \rangle$  ;
- (iv)  $u \wedge v \neq 0$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont indépendants ;
- (v) si  $u \wedge v \neq 0$ , alors le triplet  $u, v, u \wedge v$  est une base directe de  $\mathbf{R}^3$  [2.1] ;
- (vi)  $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$  ;
- (vii)  $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \alpha$ , où  $\alpha \in [0, \pi]$  est l'angle entre les deux vecteurs  $u$  et  $v$  déterminé par  $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$  ;
- (viii)  $\|u \wedge v\|$  est égale à l'aire du parallélogramme de côtés  $u$  et  $v$  ;
- (ix)  $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle u, v \rangle \cdot w = (w \wedge v) \wedge u$ .

**Remarque.** Il y a deux “astuces” mnémotechnique pour déterminer la direction du vecteur  $u \wedge v$  quand on connaît les deux vecteurs  $u$  et  $v$  : “la main droite” et “le tire-bouchon.”

#### DESSIN

Pour l'astuce de la main droite, si le pouce donne la direction du premier vecteur  $u$  et si l'index donne la direction du deuxième vecteur, alors le majeur donne la direction du produit vectoriel  $u \wedge v$ . Une petite réflexion montre que la même astuce avec la main gauche donnera le sens opposé.

Pour l'astuce du tire-bouchon, on s'imagine que le premier vecteur  $u$  est dans la direction de la manche et qu'on la tourne dans le plan engendré par les deux vecteurs  $u$  et  $v$ , par l'angle plus petit que  $\pi$  vers le deuxième vecteur  $v$ . La direction dans laquelle le tire-bouchon bouge donne la direction du produit vectoriel  $u \wedge v$ .

**Nota Bene.** Quand on dérive le produit vectoriel de deux fonctions vectorielles, on a bien la propriété de Leibniz :

$$(u \wedge v)'(t) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t) .$$

Mais il faut faire très attention s'il y a le même vecteur, car on a

$$(u \wedge u)'(t) = u'(t) \wedge u(t) + u(t) \wedge u'(t) \neq 2 \cdot u'(t) \wedge u(t) .$$

La raison est simple : le produit vectoriel n'est pas commutatif ! On a donc

$$(u \wedge u)'(t) = u'(t) \wedge u(t) + u(t) \wedge u'(t) \stackrel{\text{[2.6.ii]}}{=} u'(t) \wedge u(t) - u'(t) \wedge u(t) = 0 ,$$

ce qui est tout-à-fait raisonnable, car  $u \wedge u$  est identiquement nul, donc sa dérivée aussi.

### 3. Rotations en 2 et plusieurs dimensions

#### 3.1 Définitions.

- Si  $A$  est une matrice de taille  $n \times k$  ( $n$  lignes et  $k$  colonnes) avec éléments de matrice  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq k$ , alors  ${}^tA$  désigne la *matrice transposée* de taille  $k \times n$  avec éléments de matrice  $({}^tA)_{ij}$  donnés par

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji} .$$

- $M(n, \mathbf{R})$  est l'ensemble de tous les matrices  $n \times n$  à coefficients réels ; c'est un anneau unitaire pour l'addition et la multiplication de matrices. On note  $\text{Id}_n$  la matrice identité dans  $M(n, \mathbf{R})$ .
- $Gl(n, \mathbf{R})$  est le sous-ensemble de  $M(n, \mathbf{R})$  de tous les matrices inversibles ; c'est un groupe.
- $O(n)$ , appelé le *groupe orthogonal*, est l'ensemble des matrices qui préservent le produit scalaire canonique de  $\mathbf{R}^n$  :

$$O(n) = \{ A \in M(n, \mathbf{R}) \mid \forall v, w \in \mathbf{R}^n : \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \} ;$$

c'est un groupe pour la multiplication matricielle, sous groupe de  $Gl(n, \mathbf{R})$ .

- $SO(n)$ , appelé le *groupe orthogonal spécial*, est le sous-groupe de  $O(n)$  de matrices à déterminant 1 :

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \} .$$

- La rotation dans le plan  $\mathbf{R}^2$  d'angle  $\theta$  et centre l'origine est l'application linéaire  $R_\theta$  donnée par la matrice

$$(3.2) \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

Ⓟ **3.3 Lemme.** Soit  $A \in M(n, \mathbf{R})$  une matrice  $n \times n$  à coefficients réels. Alors :

- (i) pour tout  $v, w \in \mathbf{R}^n$  on a l'égalité  $\langle v, Aw \rangle = \langle {}^tAv, w \rangle$  ;
- (ii)  $A \in O(n)$  si et seulement si  ${}^tA \cdot A = \text{Id}_n$  ;
- (iii)  $A \in O(n)$  si et seulement si les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  ;
- (iv) si  $A$  appartient à  $O(n)$ , alors  $\det(A) = \pm 1$  et  ${}^tA \in O(n)$ .

Ⓟ **3.4 Corollaire.** Pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$  la rotation  $R_\theta$  [3.1] appartient à  $SO(2)$ .

Ⓟ **3.5 Proposition.** Soit  $v_1, \dots, v_k$  et  $w_1, \dots, w_k$  avec  $1 \leq k \leq n$  deux systèmes orthonormés de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ .

- (i) Dans le cas  $k < n - 1$  il existe une matrice  $A \in SO(n)$  telle que  $w_i = Av_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .
- (ii) Dans le cas  $k = n - 1$  il existe une unique matrice  $A \in SO(n)$  telle que  $w_i = Av_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k = n - 1$ .
- (iii) Dans le cas  $k = n$  il existe une unique matrice  $A \in O(n)$  telle que  $w_i = Av_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k = n$ .

Ⓟ **3.6 Proposition.** Soit  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application. Alors  $f$  est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n : \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| ,$$

si et seulement s'il existe  $A \in O(n)$  et  $b \in \mathbf{R}^n$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n : f(x) = A(x) + b .$$

Ⓟ **3.7 Lemme.** Soit  $u, v \in \mathbf{R}^2$  deux vecteurs.

- (i) On a l'égalité  $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 = (\det(u, v))^2$ .
- (ii) Si  $u$  et  $v$  sont unitaires, alors il existe un unique angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tel que la rotation  $R_\theta$  d'angle  $\theta$  [3.1] envoie  $u$  sur  $v$  :  $R_\theta(u) = v$ . Cet angle  $\theta$  est déterminé d'une façon unique par les équations

$$\sin \theta = \det(u, v) \quad \text{et} \quad \cos \theta = \langle u, v \rangle .$$

**3.8 Remarque.** L'angle  $\theta$  défini/construit en [3.7.ii] est plus précis que l'angle  $\alpha$  entre deux vecteurs défini en [1.4]. D'abord parce que  $\alpha$  n'appartient qu'à  $[0, \pi]$ , tandis que  $\theta$  prend ses valeurs dans  $]-\pi, \pi]$ . Ensuite on a les égalités

$$\cos \theta = \langle u, v \rangle \stackrel{[1.5]}{=} \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha \stackrel{\|u\|=\|v\|=1}{=} \cos \alpha ,$$

et donc  $\theta = \pm \alpha$  (avec les contraintes des intervalles qui contiennent  $\theta$  et  $\alpha$ ). On aura l'égalité  $\alpha = \theta$  quand le vecteur  $v$  est “à gauche” du vecteur  $u$ , dans le sens suivant. Le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur  $u$  divise le plan  $\mathbf{R}^2$  en deux parties ; quand on regarde dans la direction de  $u$ , il y aura une partie “à droite” et une partie “à gauche.” Et si  $v$  se trouve “à droite”, alors on aura  $\theta = -\alpha$ . Et oui, c'est vrai que si on regarde le papier d'en-dessous, on échange droite et gauche, donc cette description n'est pas intrinsèque. La façon intrinsèque sera de dire que  $\alpha = \theta$  quand les deux vecteurs  $u, v$  forment une base orientée directe [2.1] et que  $\alpha = -\theta$  dans le cas contraire.

Ⓟ **3.9 Proposition.** Soit  $n \in \mathbf{R}^3$  un vecteur unitaire, soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  un réel et soit  $R_{n,\alpha}$  la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe de direction  $n$ . Alors pour tout  $x \in \mathbf{R}^3$  l'image  $R_{n,\alpha}(x)$  est donnée par la formule

$$(3.10) \quad R_{n,\alpha}(x) = \cos(\alpha) \cdot x + (1 - \cos(\alpha)) \cdot \langle x, n \rangle \cdot n + \sin(\alpha) \cdot n \wedge x .$$

**Définition/Remarque.** Si on écrit la formule (3.10) sous forme matricielle en notant  $n = (n_1, n_2, n_3)$ , on trouve la matrice

$$R_{n,\alpha} = \cos(\alpha) \cdot \text{Id} + (1 - \cos(\alpha)) \cdot \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Une façon plus compacte de noter cette matrice est d'introduire d'abord, pour tout vecteur  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ , la matrice  $j(y)$  donnée par

$$(3.11) \quad j(y) = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

La définition plus intrinsèque de cette matrice est la formule

$$\forall y, z \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad j(y)(z) = y \wedge z .$$

Si on interprète les éléments de  $\mathbf{R}^3$  comme des vecteurs colonnes, et donc leurs transposés comme des vecteurs en ligne, on peut résumer la matrice de  $R_{n,\alpha}$  comme

$$R_{n,\alpha} = \cos(\alpha) \cdot \text{Id} + (1 - \cos(\alpha)) \cdot n \cdot {}^t n + \sin(\alpha) \cdot j(n) .$$

Ⓟ **3.12 Lemme.** Soit  $u, v \in \mathbf{R}^3$  deux vecteurs unitaires non opposés ( $u \neq -v$ ). Alors la rotation  $R$  qui envoie  $u$  sur  $v$  et dont l'axe de rotation est perpendiculaire aux vecteurs  $u$  et  $v$ , est donnée par la formule

$$R(x) = \langle u, v \rangle \cdot x + (u \wedge v) \wedge x + \frac{\langle x, u \wedge v \rangle}{1 + \langle u, v \rangle} \cdot u \wedge v .$$

**Remarque.** Dans  $\mathbf{R}^3$  il n'y a pas unicité d'une rotation qui envoie un vecteur unitaire donné sur un autre. Il suffit de noter qu'on peut d'abord effectuer une rotation autour le vecteur initial et ensuite appliquer la rotation donnée par [3.12]. Le produit sera toujours une rotation de  $\mathbf{R}^3$ .

**Remarque.** On peut démontrer (et ce n'est pas difficile) que l'ensemble de toutes les applications  $R_\theta$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$  est le groupe  $\text{SO}(2)$ . On peut aussi démontrer (et c'est un petit peu plus compliqué) que l'ensemble de toutes les applications  $R_{n,\alpha}$  avec  $n \in \mathbf{R}^3$  un vecteur unitaire et  $\alpha \in \mathbf{R}$  est le groupe  $\text{SO}(3)$ . Dans ce texte on n'a pas besoin de ces résultats; c'est pourquoi on n'a pas fourni ces preuves.

Ⓟ **3.13 Lemme.** Soit  $A \in \text{Gl}(3, \mathbf{R})$  une matrice  $3 \times 3$  inversible et  $u, v \in \mathbf{R}^3$  deux vecteurs arbitraires. Alors on a l'égalité

$$(Au) \wedge (Av) = \det(A) \cdot {}^t(A^{-1})(u \wedge v) .$$

En particulier, si  $A$  appartient à  $\text{SO}(3)$  on a l'égalité  $(Au) \wedge (Av) = A(u \wedge v)$ .

**Remarque.** C'est le comportement décrit en [3.13] qui amène (surtout les physiciens) à dire que le produit vectoriel de deux vecteurs n'est pas un vrai vecteur, mais un *pseudo vecteur* ou *vecteur axial*. Car si on effectue une rotation  $A$  de l'espace, un vecteur ordinaire  $v$  (aussi appelé *vecteur polaire* dans ce contexte) est transformé en  $Av$ , ainsi que le produit vectoriel. Mais si on fait opérer un élément  $A$  de  $O(3)$  qui n'est pas une rotation (comme l'inversion de l'espace ou une symétrie par rapport à un plan), alors un vecteur ordinaire est toujours transformé en  $Av$ , tandis qu'un produit vectoriel  $w = u \wedge v$  est transformé en  $-Aw$  (car  $\det(A) = -1$  dans ce cas).

#### 4. Droites et plans dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$

**Définitions.** Une *droite*  $D$  dans  $\mathbf{R}^n$  est le translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément,  $D \subset \mathbf{R}^n$  est une droite s'il existe  $V \subset \mathbf{R}^n$  un sous-espace vectoriel de dimension 1 et un vecteur  $b \in \mathbf{R}^n$  tels que  $D$  est donné par

$$D = \{b + x \mid x \in V\} \equiv b + V .$$

##### DESSIN

Si  $v \in V$  est une base de  $V$  (tout élément non-nul de  $V$  convient), alors on a

$$V = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbf{R}\} ,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$D = \{b + \lambda v \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \equiv b + \mathbf{R} \cdot v .$$

Dans ce contexte, on appelle  $b$  un *point de base* de la droite  $D$  et  $v$  un *vecteur directeur* de la droite  $D$ .

Un *plan*  $P$  dans  $\mathbf{R}^n$  est le translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension 2. Plus précisément,  $P \subset \mathbf{R}^n$  est un plan s'il existe  $V \subset \mathbf{R}^n$  un sous-espace vectoriel de dimension 2 et un vecteur  $b \in \mathbf{R}^n$  tels que  $P$  est donné par

$$P = \{b + x \mid x \in V\} \equiv b + V .$$

##### DESSIN

Si  $v, w \in V$  est une base de  $V$ , alors on a

$$V = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} ,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$P = \{b + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} \equiv b + \mathbf{R} \cdot v + \mathbf{R} \cdot w .$$

Dans ce contexte, on appelle  $b$  un *point de base* du plan  $P$  et  $v_1, v_2$  deux *vecteurs directeurs* du plan  $P$  (avec le sous-entendu que ces deux vecteurs sont indépendants).

**4.1 Lemme.** Pour  $i = 1, 2$ , soit  $D_i \subset \mathbf{R}^n$  une droite décrite par un point de base  $b_i \in \mathbf{R}^n$  et un vecteur directeur  $v_i$ . Alors  $D_1 = D_2$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  tels que

$$v_2 = \mu v_1 \quad \text{et} \quad b_2 = b_1 + \lambda v_1 .$$

Autrement dit,  $v_1$  et  $v_2$  sont colinéaires et  $b_2$  appartient à la droite  $D_1$ .

##### DESSIN

**4.2 Lemme.** Pour  $i = 1, 2$ , soit  $P_i \subset \mathbf{R}^n$  un plan décrit par un point de base  $b_i \in \mathbf{R}^n$  et deux vecteurs directeurs  $v_i, w_i$ . Alors  $P_1 = P_2$  si et seulement s'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  et une matrice inversible  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tels que

$$v_2 = av_1 + bw_1 \quad , \quad w_2 = cv_1 + dw_1 \quad \text{et} \quad b_2 = b_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 .$$

Autrement dit, la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  représente un "changement de base" (entre la "base"  $v_1, w_1$  et la "base"  $v_2, w_2$ ) et  $b_2$  appartient au plan  $P_1$ .

**4.3 Lemme.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^2$  un sous-ensemble. Alors  $D$  est une droite si et seulement s'il existe une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  de taille  $1 \times 2$  et de rang 1 et  $c \in \mathbf{R}$  tel que

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c) \right\} ,$$

ce qui est le cas si et seulement s'il existe  $n \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  ( $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  convient) et  $c \in \mathbf{R}$  tels que

$$D = \{ x \in \mathbf{R}^2 \mid \langle x, n \rangle = c \} .$$

Si c'est le cas on dit que la droite  $D$  est décrite par l'équation  $\langle n, x \rangle = c$ .

**4.4 Lemme.** Soit  $P \subset \mathbf{R}^3$  un sous-ensemble. Alors  $P$  est un plan si et seulement s'il existe une matrice  $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$  de taille  $1 \times 3$  et de rang 1 et  $d \in \mathbf{R}$  tel que

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (d) \right\} ,$$

ce qui est le cas si et seulement s'il existe  $n \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  et  $d \in \mathbf{R}$  tels que

$$P = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = d \} .$$

Si c'est le cas, on dit que le plan  $P$  est décrit par l'équation  $\langle x, n \rangle = d$ .

**4.5 Nota Bene.** Soit  $P \subset \mathbf{R}^3$  un plan décrit par l'équation  $\langle x, n \rangle = d$  et soit  $p \in P$  un point arbitraire. Alors on a  $\langle p, n \rangle = d$  et donc on peut réécrire l'équation du plan comme

$$\langle x, n \rangle = d = \langle p, n \rangle \iff \langle x - p, n \rangle = 0 .$$

Au lieu de décrire le plan  $P$  par un vecteur  $n$  et un nombre  $d$ , on peut donc le décrire par un vecteur  $n$  et un point (de base) arbitraire  $p \in P$ . Une même remarque est valable, mutatis mutandis, pour une droite  $D \subset \mathbf{R}^2$  décrite par un vecteur  $n$  et un nombre  $c$  [4.3].

**4.6 Lemme.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^3$  un sous-ensemble. Alors  $D$  est une droite si et seulement s'il existe une matrice  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  de rang 2 et  $g, h \in \mathbf{R}$  tels que

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \right\} ,$$

ce qui est le cas si et seulement s'il existe deux vecteurs indépendants  $n_1, n_2 \in \mathbf{R}^3$  et  $g, h \in \mathbf{R}$  tels que

$$D = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \langle x, n_1 \rangle = g \text{ et } \langle x, n_2 \rangle = h \} .$$

Si c'est le cas, on dit que la droite  $D$  est décrite par les équations  $\langle x, n_1 \rangle = g$  et  $\langle x, n_2 \rangle = h$ .



**4.7 Lemme.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^2$  une droite décrite par un vecteur directeur  $v$  et un point de base  $b$  et soit  $D'$  une droite décrite par l'équation  $\langle n, x \rangle = c$ . Alors  $D = D'$  si et seulement si on a

$$\langle n, v \rangle = 0 \quad \text{et} \quad c = \langle n, b \rangle .$$

**4.8 Lemme.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^3$  une droite décrite par un vecteur directeur  $v$  et un point de base  $b$  et soit  $D'$  une droite décrite par les équations  $\langle n_1, x \rangle = g$  et  $\langle n_2, x \rangle = h$ . Alors  $D = D'$  si et seulement si on a

$$\langle n_1, v \rangle = 0 \quad , \quad \langle n_2, v \rangle = 0 \quad , \quad g = \langle n_1, b \rangle \quad \text{et} \quad h = \langle n_2, b \rangle .$$

**4.9 Lemme.** Soit  $P \subset \mathbf{R}^3$  un plan décrit par deux vecteurs directeurs  $v_1, v_2$  et un point de base  $b$  et soit  $P'$  un plan décrit par l'équation  $\langle n, x \rangle = d$ . Alors  $P = P'$  si et seulement si on a

$$\langle n, v_1 \rangle = 0 \quad , \quad \langle n, v_2 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad d = \langle n, b \rangle .$$

**4.10 Définition.** Soit  $X \subset \mathbf{R}^n$  une droite ou un plan. Alors on dit qu'un vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$  est *orthogonal* à  $X$ , qu'on note  $x \perp X$ , si pour tout  $p, q \in X$  on a

$$\langle x, p - q \rangle = 0 .$$

Au lieu de dire que  $x$  est orthogonal à  $X$ , on dit aussi que  $x$  est *perpendiculaire* à  $X$ , ou que  $x$  est un *vecteur normal* à  $X$ .

**Remarque.** La notion d'être orthogonal n'est pas restreint à des droites ou des plans, car la définition a aussi un sens pour un sous-ensemble  $X \subset \mathbf{R}^n$  quelconque. Notons que les cas d'une droite et d'un plan sont des cas particulier d'un sous-espace affine, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel  $F \subset \mathbf{R}^n$  et un point (de base)  $b \in \mathbf{R}^n$  tel qu'on a l'égalité

$$X = \{ v + b \mid v \in F \} \quad (\text{ce qu'on note souvent comme } b + F).$$

**4.11 Lemme.** Si  $D \subset \mathbf{R}^n$  est une droite décrite par un vecteur directeur  $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  et un point de base  $b \in \mathbf{R}^n$ , alors  $x \in \mathbf{R}^n$  est orthogonal à  $D$  si et seulement si  $\langle x, v \rangle = 0$ .

Si  $P \subset \mathbf{R}^n$  est un plan décrit par deux vecteurs directeurs  $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  et un point de base  $b \in \mathbf{R}^n$ , alors  $x \in \mathbf{R}^n$  est orthogonal à  $P$  si et seulement si  $\langle x, v_1 \rangle = 0$  et  $\langle x, v_2 \rangle = 0$ .

**4.12 Corollaire.**

- (i) Soit  $D \subset \mathbf{R}^2$  une droite. Alors  $D$  est décrite par l'équation  $\langle x, n \rangle = c$  si et seulement si  $n \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  est orthogonal à  $D$ .
- (ii) Soit  $D \subset \mathbf{R}^3$  une droite. Alors  $D$  est décrite par les équations  $\langle x, n_1 \rangle = g$  et  $\langle x, n_2 \rangle = h$  si et seulement si  $n_1, n_2 \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  sont indépendants et orthogonaux à  $D$ .

- (iii) Soit  $P \subset \mathbf{R}^3$  un plan. Alors  $P$  est décrit par l'équation  $\langle x, n \rangle = d$  si et seulement si  $n \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  est orthogonal à  $P$ .

**4.13 Définition.** Soit  $A \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble non-vidé et  $x \in \mathbf{R}^n$  un point. Alors la distance  $d(x, A)$  du point  $x$  à l'ensemble  $A$  est définie comme

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\| \mid a \in A \} .$$

Étant donné que l'ensemble  $\{ \|x - a\| \mid a \in A \}$  est minoré par 0, l'inf existe toujours.

**4.14 Proposition.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^n$  une droite et  $x \in \mathbf{R}^n$  un point arbitraire. Alors il existe un unique point  $p \in D$  tel que  $x - p$  est orthogonal à  $D$ . On dit que  $p$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $D$ . En plus :

- (i)  $p$  réalise la plus courte distance entre  $x$  et un point de  $D$  :

$$\forall q \in D : q \neq p \Rightarrow \|x - q\| > \|x - p\| .$$

En particulier on a  $d(x, D) = \|x - p\|$ .

**DESSIN**

- (ii) Si  $D$  est décrite par le vecteur directeur  $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  et le point de base  $b \in \mathbf{R}^n$ , alors on a

$$p = b + \frac{\langle x - b, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \quad \text{et} \quad d(x, D)^2 = \frac{\|x - b\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle x - b, v \rangle^2}{\|v\|^2} .$$

- (iii) Si, en dimension  $n = 2$ , la droite  $D$  est décrite par l'équation  $\langle n, x \rangle = c$ , alors on a

$$p = x - \frac{\langle x, n \rangle - c}{\|n\|^2} \cdot n \quad \text{et} \quad d(x, D) = \frac{|\langle x, n \rangle - c|}{\|n\|} .$$

**4.15 Proposition.** Soit  $P \subset \mathbf{R}^n$  un plan et  $x \in \mathbf{R}^n$  un point arbitraire. Alors il existe un unique point  $p \in P$  tel que  $x - p$  est orthogonal à  $P$ . On dit que  $p$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $P$ . En plus :

- (i)  $p$  réalise la plus courte distance entre  $x$  et un point de  $P$  :

$$\forall q \in P : q \neq p \Rightarrow \|x - q\| > \|x - p\| .$$

En particulier on a  $d(x, P) = \|x - p\|$ .

**DESSIN**

- (ii) Si  $P$  est décrit par les deux vecteurs directeurs  $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  et le point de base  $b \in \mathbf{R}^n$ , alors on a

$$p = b + \frac{\langle v_2, v_2 \rangle \cdot \langle x - b, v_1 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \langle x - b, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \cdot v_1 \\ + \frac{\langle v_1, v_1 \rangle \cdot \langle x - b, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \langle x - b, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \cdot v_2$$

et

$$d(x, P) = \sqrt{\frac{\det \begin{pmatrix} \langle x-b, x-b \rangle & \langle x-b, v_1 \rangle & \langle x-b, v_2 \rangle \\ \langle v_1, x-b \rangle & \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, x-b \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}}} .$$

Dans le cas  $n = 3$  (et uniquement dans ce cas), on a les égalités

$$\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \|v_1 \wedge v_2\|^2$$

$$\det \begin{pmatrix} \langle x-b, x-b \rangle & \langle x-b, v_1 \rangle & \langle x-b, v_2 \rangle \\ \langle v_1, x-b \rangle & \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, x-b \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \langle x-b, v_1 \wedge v_2 \rangle^2,$$

auquel cas on a

$$d(x, P) = \frac{|\langle x-b, v_1 \wedge v_2 \rangle|}{\|v_1 \wedge v_2\|}.$$

En plus, toujours uniquement dans le cas  $n = 3$ , le plan  $P$  est décrit par l'équation

$$\langle x-b, v_1 \wedge v_2 \rangle = 0,$$

c'est-à-dire par le vecteur  $n = v_1 \wedge v_2$  et le point de base  $b$  [4.5].

- (iii) Si, en dimension  $n = 3$ , le plan  $P$  est décrit par l'équation  $\langle n, x \rangle = d$  (une petite confusion de notation, car ici le  $n$  ne désigne pas la dimension, qui est 3, mais un vecteur non-nul), alors on a

$$p = x - \frac{\langle x, n \rangle - d}{\|n\|^2} \cdot n \quad \text{et} \quad d(x, P) = \frac{|\langle x, n \rangle - d|}{\|n\|}.$$

**4.16 Définition.** Une droite  $D \subset \mathbf{R}^2$  en dimension 2 divise le plan  $\mathbf{R}^2$  en deux : les deux côtés de la droite. Si  $D$  est décrite par l'équation  $\langle x, n \rangle = c$ , ces deux côtés sont distingués par le signe de  $\langle n, x \rangle - c$ . Dans cette situation on définit la *distance signée* d'un point  $x \in \mathbf{R}^2$  à la droite  $D$ , qu'on note par abus de notation aussi par  $d(x, D)$ , comme

$$d(x, D) = \frac{\langle n, x \rangle - c}{\|n\|}.$$

Selon [4.14.iii], la distance ordinaire sera la valeur absolue de la distance signée.

De la même façon, un plan  $P \subset \mathbf{R}^3$  en dimension 3 divise l'espace en deux : les deux côtés du plan. Et si  $P$  est décrit par l'équation  $\langle x, n \rangle = d$ , alors ces deux côtés sont distingués par le signe de  $\langle x, n \rangle - d$ . Comme pour une droite dans le plan, on définit dans cette situation la *distance signée* d'un point  $x \in \mathbf{R}^3$  au plan  $P$ , qu'on note avec le même abus de notation par  $d(x, P)$ , comme

$$d(x, P) = \frac{\langle x, n \rangle - d}{\|n\|}.$$

Et selon [4.15.iii], la distance ordinaire sera la valeur absolue de la distance signée. Mais attention, le signe de la distance signée dépend d'un choix, car il change avec  $n$ .

**Remarque.** Si une droite  $D \subset \mathbf{R}^2$  ou un plan  $P \subset \mathbf{R}^3$  est décrit par un vecteur  $n$  et un point de base  $b$  via l'équation  $\langle x-b, n \rangle = 0$  (voir [4.5]), alors la distance et la distance signée sont données par les formules

$$\frac{|\langle x-b, n \rangle|}{\|n\|} \quad \text{et} \quad \frac{\langle x-b, n \rangle}{\|n\|}.$$



## Chapitre 2

### Courbes

#### 5. Courbes

**Définition.** Une *courbe paramétrée de classe  $C^k$*  est une application  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^k$  où  $I \subset \mathbf{R}$  est un intervalle ouvert.

**Nota Bene.** La plupart du temps la classe de dérivabilité d'une courbe ne nous intéresse pas tellement. On parlera donc simplement d'une courbe, sans préciser la classe  $C^k$ , c'est-à-dire, le  $k$  qui pourrait être un entier non-nul, voire  $\infty$ . On supposera que  $k$  est suffisamment grand pour que les définitions et les calculs ont un sens. La plupart du temps  $k = 2$  suffit, mais il y aura des moments où on aura besoin de plus de dérivabilité. D'autre part, pour certains résultats venant d'analyse il est important de savoir qu'ils ne sont valable que si  $k$  est suffisamment grand. On le précisera à chaque fois que c'est important.

On parlera systématiquement de courbes paramétrées  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , mais au fond on s'intéresse seulement à l'image  $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$ . Le but de l'étude des courbes paramétrées est de décrire des propriétés de ces images par un calcul en analyse et ou algèbre linéaire. Le problème est qu'il y a tellement de façons de décrire une même image. Par exemple, les courbes

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^2 & \gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t)) \\ \gamma : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^2 & \gamma(t) &= (\cos(t^2), \sin(t^2)) \\ \gamma : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^2 & \gamma(t) &= (\sin(t \sin(t)), \cos(t \sin(t)))\end{aligned}$$

ont toutes la même image (le cercle de rayon 1 et de centre  $(0, 0)$ ) dans  $\mathbf{R}^2$ . En tant qu'applications, elle sont différentes, mais en tant qu'image (sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$ ) elles sont identiques. L'analogie qu'on va utiliser régulièrement pour illustrer cette différence est l'autoroute et la voiture qui roule dessus. À un moment donné la voiture se trouve à un endroit précis sur l'autoroute et sa position change avec le temps. En plus, deux voitures ne se trouvent pas au même endroit au même moment, sauf quand elles roulent en convoi. Par contre, le tracé de l'autoroute est toujours le même. Dans cette analogie, l'autoroute est l'image de la courbe et le trajectoire de la voiture dans le temps représente l'application définie sur un intervalle (de temps). Il paraît évident que la vitesse de la voiture n'a aucune importance pour le tracé de l'autoroute (bien que le tracé peut influencer la vitesse) : on peut rouler à des vitesses différentes sur la même autoroute. L'idée que deux voitures suivent la même autoroute à des vitesses différentes est exprimé par la notion de courbes équivalentes par reparamétrage.

On peut se poser la question pourquoi on s'obstine à utiliser les courbes paramétrées si on ne s'intéresse qu'à leurs images. La raison est simplement qu'on a plus d'ennuis quand on le fait, que de simplifications. Dans des circonstances "ordinaires," l'image d'un petit intervalle est un bout de courbe et réciproquement, un bout de courbe est l'image d'un petit intervalle. Par contre, une courbe paramétrée peut avoir un point d'auto-intersection ou un point limite qui lui touche. Et dans un voisinage d'un tel point, on a du mal à décrire la situation si on n'utilise pas les courbes paramétrées. Bien sûr, on pourrait exclure de telles situations par définition (ce qu'on fera pour les surfaces!), mais pour la description de propriétés de l'image, on aura de toute façon besoin de le voir comme l'image par une application et on devrait montrer que le résultat obtenu ne dépend pas de l'application choisie pour réaliser l'image. On gagne très peu et on perd beaucoup en souplesse. D'où notre obstination avec les courbes paramétrées.

Le but est donc de trouver des quantités qu'on peut calculer à l'aide d'une courbe paramétrée, mais qui seront les mêmes pour toutes les courbes qui ont la même image : quelque chose qu'un automobiliste peut calculer, mais telle que tous trouvent la même chose, indépendamment de la vitesse à laquelle ils roulent, des informations sur la route qu'on peut mettre à côté de l'autoroute. On peut penser aux panneaux qui indiquent la distance parcourue (depuis la dernière ville), ou le panneau "virage dangereux" (pour indiquer que la route tourne très vite), ou un panneau "descente dangereuse 10%" pour indiquer une pente. La plupart du temps ces indications ne dépendent pas de la direction dans laquelle on roule, mais il y en a qui en dépendent. Par exemple l'indication "virage dangereux vers la droite" devient "virage dangereux vers la gauche" quand on roule dans la direction opposée. L'idée de deux voitures qui roulent à des vitesses différentes sur la même autoroute se traduit en la notion d'équivalence par reparamétrage et l'idée de rouler à sens inverse se traduit en la notion d'orientation de la courbe.

**5.1 Définitions.** On dit que deux courbes paramétrées  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^k$  sont *équivalentes par reparamétrage* s'il existe un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  tel que  $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$  pour tout  $t \in I_2$ . L'application  $\varphi$  est appelée *la fonction de reparamétrage*. Au lieu de dire que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux courbes paramétrées qui sont équivalentes par reparamétrage, on dit aussi que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux paramétrages différents d'une même courbe, ou que  $\gamma_2$  est un autre paramétrage de la courbe  $\gamma_1$ .

Si deux courbes paramétrées  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^k$  sont équivalentes par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ , alors pour tout  $s \in I_2 : \varphi'(s) \neq 0$  (car pour un  $C^k$ -difféomorphisme, la réciproque  $\varphi^{-1}$  est aussi dérivable). Il s'ensuit qu'on a  $\varphi' > 0$  sur  $I_2$  ou  $\varphi' < 0$  sur  $I_2$ . Dans le premier cas on dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  *parcourent la courbe dans le même sens*, et dans le deuxième cas on dit qu'elles *parcourent la courbe en sens inverse*. Dans le premier cas on dit aussi que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont la *même orientation* et dans le deuxième cas qu'elles ont une *orientation opposée*.

Le but est donc de trouver des quantités qu'on peut calculer à l'aide d'une courbe paramétrée, mais qui seront les mêmes pour toutes les courbes équivalentes par reparamétrage. Parfois on trouve une quantité qui est la même pour toutes les courbes équivalentes par reparamétrage, à condition qu'elles ont toutes la même orientation

(par exemple pour les branches infinies [8.3] ou la détermination de l'angle entre deux courbes [23.6]).

Malgré le discours précédent, ce n'est pas vrai que deux courbes qui ont la même image seront automatiquement équivalentes par reparamétrage (c'est très facile de construire des contre-exemples). La raison pour utiliser la notion d'équivalence par reparamétrage au lieu de la notion de même image (ou une condition équivalente) est, de nouveau, une question de simplicité. Pour toute image d'une courbe avec une allure "normale" on peut trouver une description par une courbe paramétrée "bizarre." Pour une telle description, on ne pourrait pas calculer nos quantités, bien qu'avec une description "normale" on l'aurait pu. Si l'on veut, c'est une conséquence du fait qu'on s'intéresse aux courbes paramétrées plutôt qu'à leurs images. Comme dit avant, on peut "améliorer" la situation (et on le fera pour les surfaces), mais on sera obligé d'éliminer beaucoup de courbes paramétrées importantes, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan historique (on peut penser par exemple aux cycloïdes).

**Nota Bene.** Il arrive régulièrement qu'une courbe n'est pas définie sur un seul intervalle, mais sur plusieurs intervalles. Ce qui arrive le plus souvent est qu'on considère des courbes dont le domaine de définition est un intervalle privé d'un nombre fini de points. Par exemple, on parle de la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = \left( \frac{t}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t^2 - 1} \right).$$

Bien évidemment, le domaine de définition de  $\gamma$  n'est pas  $\mathbf{R}$ , mais la réunion des trois intervalles  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 1[ \cup ] 1, \infty[$ . Dans un tel cas, il faut scinder l'analyse de la courbe en plusieurs morceaux selon les différents intervalles qui constituent son domaine de définition.

## 6. La longueur d'une courbe

**6.1 Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe et soit  $[a, b] \subset I$  un intervalle fermé et borné.

- Une *subdivision* de  $[a, b]$  est un ensemble **fini**  $\Delta \subset [a, b]$  contenant au moins les deux éléments  $a$  et  $b$ . Si  $\Delta$  contient  $m + 1$  éléments ( $m \geq 1$ ), alors on les numérote de 0 à  $m$  et on les met dans l'ordre en écrivant

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b\} .$$

Associée à une subdivision sont deux nombres :  $T(\Delta)$  (la “taille” de  $\Delta$ ) et  $L(\Delta)$  (la “longueur du polygone” associé à la subdivision et approximant la courbe) définis comme

$$T(\Delta) = \max_{i=1, \dots, m} (t_i - t_{i-1})$$

et

$$L(\Delta) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| .$$

### DESSIN

- On dit que la courbe est *rectifiable* (sur  $[a, b]$ ) si l'ensemble

$$\{ L(\Delta) \mid \Delta \text{ une subdivision de } [a, b] \}$$

est borné. Dans ce cas on définit la *longueur*  $L_{[a,b]}(\gamma)$  de la courbe sur l'intervalle  $[a, b]$  par

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \sup \{ L(\Delta) \mid \Delta \text{ une subdivision de } [a, b] \} .$$

Dans le cas contraire on dit que la courbe n'est pas rectifiable sur  $[a, b]$  et on écrit  $L_{[a,b]}(\gamma) = \infty$ .

**(P) 6.2 Lemme.** La courbe (continue)  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\gamma(0) = (0, 0) \quad \text{et} \quad \gamma(t) = (t, t \cdot \cos(1/t)) \quad \text{si } t \neq 0$$

n'est pas rectifiable sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**6.3 Théorème (rappel).** Soit  $D \subset \mathbf{R}^n$  un ensemble fermé et borné (un compact) et  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Alors :

(i)  $f$  est bornée :

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in D \quad : \quad |f(x)| \leq M$$

(ii)  $f$  est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D \quad : \quad \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

**6.4 Théorème (rappel).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  (au sens de Riemann et au sens de Lebesgue) et on a la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \text{ subdivision de } [a, b]$$

$$\forall x_1, \dots, x_m \text{ vérifiant } x_i \in [t_{i-1}, t_i] \text{ où } m + 1 \text{ est le nombre d'éléments de } \Delta \quad :$$



$$T(\Delta) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(z) dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot f(x_i) \right| < \varepsilon .$$

DESSIN

**6.5 Lemme.** *Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux subdivisions, alors leur réunion  $\tilde{\Delta} = \Delta \cup \Delta'$  est aussi une subdivision et on a les inégalités*

$$T(\tilde{\Delta}) \leq \min(T(\Delta), T(\Delta')) \quad \text{et} \quad L(\tilde{\Delta}) \geq \max(L(\Delta), L(\Delta')) .$$

DESSIN

Ⓟ **6.6 Théorème.** *Si la courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de classe  $C^1$ , alors  $\gamma$  est rectifiable sur tout intervalle fermé borné  $[a, b] \subset I$  et on a*

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt .$$

Ⓟ **6.7 Corollaire : la distance est invariante sous reparamétrage.** *Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes de classe  $C^1$  qui sont équivalentes par reparamétrage et soit  $[c, d] \subset I_2$ . Si  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  est la fonction de reparamétrage et  $[a, b] = \varphi([c, d])$ , alors on a l'égalité*

$$L_{[a,b]}(\gamma_1) = L_{[c,d]}(\gamma_2) .$$

Malgré notre discussion sur le fait qu'on cherche des propriétés qui ne dépendent pas de l'application  $\gamma$  mais seulement de l'image et malgré [6.7], la longueur d'une courbe n'est pas complètement indépendant de l'application  $\gamma$ . Un exemple simple pour montrer le problème qui peut arriver est le suivant. On considère les deux courbes  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définies par

$$\gamma_1(t) = (3t, 0) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (t^3 - t, 0) .$$

Pour les deux courbes, l'image de l'intervalle  $[-2, 2]$  est le segment de l'axe horizontal  $[-6, 6]$ .

DESSIN

Il est immédiat qu'on a

$$L_{[-2,2]}(\gamma_1) = \int_{-2}^2 3 dt = 12$$

et

$$\begin{aligned} L_{[-2,2]}(\gamma_2) &= \int_{-2}^2 |3t^2 - 1| dt \\ &= 2 \int_0^{1/\sqrt{3}} (1 - 3t^2) dt + 2 \int_{1/\sqrt{3}}^2 (3t^2 - 1) dt = 12 + \frac{8}{9}\sqrt{3} . \end{aligned}$$

À image égale (sur l'intervalle  $[-2, 2]$ ) les deux courbes n'ont donc pas la même longueur. Et oui, il est évident que la raison est que la courbe  $\gamma_2$  fait un aller-retour supplémentaire entre les deux points  $(-\frac{2}{9}\sqrt{3}, 0)$  et  $(\frac{2}{9}\sqrt{3}, 0)$ . On peut montrer

que ce phénomène (de faire des aller-retours) ne se produit pas quand l'application est localement injective, c'est-à-dire que pour tout  $t \in I$  il existe un voisinage  $J$  de  $t$  tel que la restriction de  $\gamma$  à  $J$  est injective. On ne demande pas l'injectivité globalement, car la courbe peut s'auto-intersecter (par exemple sur un échangeur d'autoroutes quand on fait trois quart de tour à droite pour finalement tourner à gauche en montant sur un pont qui croise l'autoroute qu'on vient de quitter). Quand on parle de la longueur d'une courbe on suppose donc qu'elle est localement injective pour éviter des aller-retours et donc un triple comptage d'un morceau de la courbe. Dans la pratique, "tous" les courbes seront de ce type : il est "difficile" de donner une courbe paramétrée "au hasard" qui fait des aller-retours. On n'en fait pas une définition pour un raison très simple : le nombre de cas concerné est négligeable qu'on peut facilement les repérer. On se compliquerait plus la vie avec une définition que sans. Et le fait que la longueur a quand même une signification pour l'image, malgré la mise en garde donnée ci-dessus, est confirmé par le fait qu'on trouve, à côté de l'autoroute, des panneaux indiquant la distance à parcourir.

## 7. La droite tangente

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée, soit  $C = \gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$  la courbe associée, soit  $t_o \in I$  et  $p = \gamma(t_o) \in C$ . Il y a deux idées qui peuvent servir pour l'introduction de la notion de la droite tangente à la courbe  $C$  au point  $p$ . La première part de l'idée que c'est la droite  $D \subset \mathbf{R}^n$  qui, parmi toutes les droites dans  $\mathbf{R}^n$ , fait la meilleure approximation de la courbe  $C$  dans un voisinage de  $p$ . Bien évidemment il faut préciser ce qu'on entend par "meilleure approximation," ce qu'on prend dans le sens "le plus proche." Ce qui n'est pas plus explicite qu'avant, donc il faut être encore plus précis. Pour un point  $q \in C$  on peut calculer  $d(q, D)$ , la distance de  $q$  à la droite  $D$ . Et il s'avère que le bon critère est de demander que cette distance est vraiment plus petite que la distance  $\|q - p\|$  entre  $q$  et  $p$  dans le sens qu'on cherche une droite vérifiant

$$\lim_{q \rightarrow p, q \in C} \frac{d(q, D)}{\|q - p\|} = 0 .$$

Ce critère est manifestement intrinsèque, car formulé en terme de l'image  $C$  plutôt qu'en termes de la courbe paramétrée  $\gamma$ .

### DESSIN

Malheureusement on ne peut pas le prendre tel quel, pour la simple raison qu'il y aura "beaucoup" de points pour lesquels une telle droite n'existe pas. Il suffit de penser à des points doubles (points d'auto-intersection - la figure huit) ou des points limites.

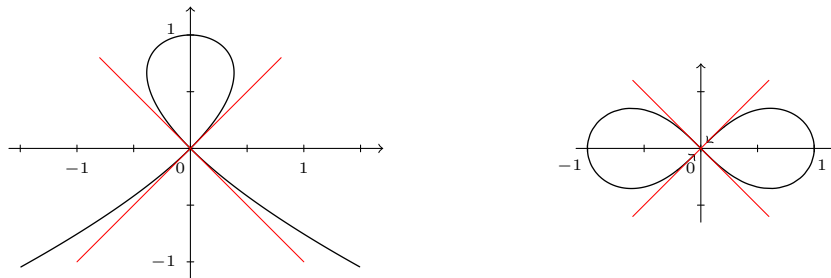


FIGURE 1. Les courbes [40.1.i] et [40.1.iii], avec des droites tangentes multiples

Mais il y a une petite modification qui enlève la plupart de ces problèmes. Au lieu de regarder le comportement des points  $q \in C$  qui sont proche de  $p$ , on ne regarde que les points  $\gamma(t)$  pour  $t$  proche de  $t_o$ . La continuité de  $\gamma$  implique que ces points  $\gamma(t)$  seront proche de  $p = \gamma(t_o)$ , mais l'implication réciproque sera fausse en général. En conséquence on cherche donc une droite  $D$  qui vérifie

$$(7.1) \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 .$$

La deuxième idée, qu'on montrera équivalente à la première [7.3], part de l'idée qui est sous-jacente à la définition de la dérivée : on prend un deuxième point sur la courbe  $q \in C$  et on considère la droite  $D_q$  passant par  $p$  et  $q$  et on se pose la question s'il existe une droite limite  $D$  quand  $q$  tend vers  $p$ . Dit comme ça, on aura le même problème avec les points  $p$  à problèmes (un point double, point limite etc.) et on adoptera la même solution : on regarde que les droites passant par  $p = \gamma(t_o)$  et  $\gamma(t)$  pour  $t$  proche de  $t_o$ . Sachant qu'une droite est décrite par un point de base

et un vecteur directeur et que pour nous le point de base est le point fixe  $p = \gamma(t_o)$ , la limite de la famille de droites  $D_{\gamma(t)}$  revient à la limite d'un vecteur directeur pour ces droites. Prendre bêtement le vecteur  $\gamma(t) - \gamma(t_o)$  comme vecteur directeur de la droite  $D_{\gamma(t)}$  a le désavantage que la limite quand  $t$  tend vers  $t_o$  existe toujours mais donne le vecteur nul, ce qui ne peut pas servir comme vecteur directeur d'une droite. S'inspirant du fait qu'un vecteur directeur doit indiquer la direction de la droite, on normalise le vecteur  $\gamma(t) - \gamma(t_o)$  en divisant par sa norme, ce qui nous amène à étudier l'existence de la limite

$$(7.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_o)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} .$$

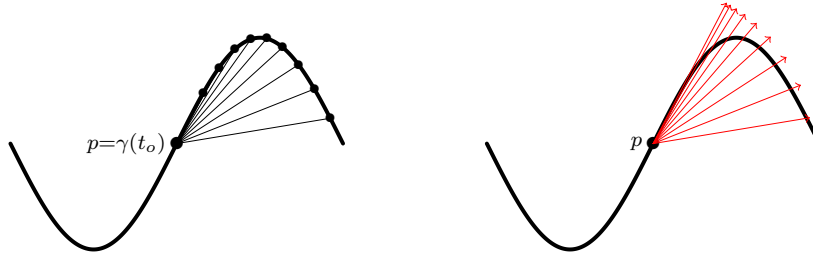


FIGURE 2. Une courbe avec quelques segments  $[\gamma(t_o), \gamma(t)]$  et avec ces mêmes segments “normalisés”

Si cette limite existe, notant la  $w$ , on dira que la droite tangente existe et est décrite par le point de base  $p$  et vecteur directeur  $w$ . Mais si on regarde bien l'expression (7.2), on s'aperçoit vite qu'il y a un problème : même si “intuitivement” cette limite existe comme direction, sa valeur changera de signe si on prend la limite  $t \rightarrow t_o$  à droite ou à gauche !

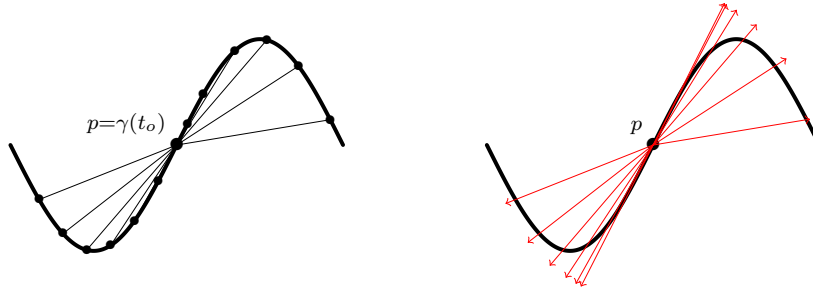


FIGURE 3. La même chose, mais maintenant en prenant des points des deux côtés

Ce problème n'existe pas pour la première idée, mais nous amène quand même à une amélioration de notre approche : l'idée d'une droite tangente unilatérale. Pour cela on remplace la limite  $t \rightarrow t_o$  dans (7.1) ou (7.2) ci-dessus par une limite unilatérale (à gauche ou à droite)  $\lim t \uparrow t_o$  ou  $\lim t \downarrow t_o$ . La motivation pour cette précision/distinction réside dans les courbes qui présentent un angle en un point  $p$  (et oui, de telles courbes peuvent être réalisées par des courbes paramétrées de classe  $C^\infty$ , voir §17).

De chaque côté d'un tel point on “voit” bien qu'il y a une droite tangente, mais pas la même des deux côtés. La notion d'une droite tangente unilatérale prend cela en compte. De plus, cette notion de droite tangente unilatérale permet d'interpréter les asymptotes comme des droites tangentes unilatérales (voir §8).

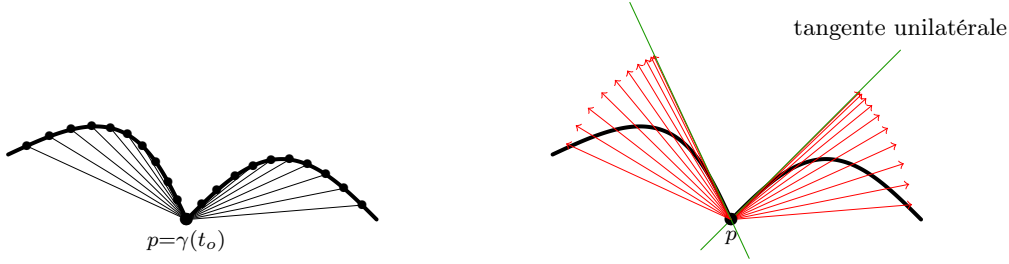


FIGURE 4. Une courbe avec des droites tangentes unilatérales

Comme on verra, même avec ces modifications, il reste des courbes qui n'admettent pas une droite tangente partout (voir §17). Mais la plupart des courbes auront des droites tangentes (partout) et, plus important, elles existeront quand naïvement on pense qu'elles devraient exister. Mieux encore, pour un point double  $p \in C$  (ou multiple), il y aura deux droites tangentes, une pour chaque passage de la courbe par  $p$ , ce qui est parfaitement en accord avec notre intuition quand on regarde la courbe  $C$  !

**7.3 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il existe  $\varepsilon > 0$  avec la propriété

$$\forall t \in ]t_o, t_o + \varepsilon[ \quad : \quad \gamma(t) \neq \gamma(t_o) .$$

Autrement dit, il existe un voisinage à droite de  $t_o$  sur lequel la courbe ne passe pas par le point  $\gamma(t_o)$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une droite (affine)  $D \subset \mathbf{R}^n$  telle qu'on a

$$(7.4) \quad \lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 ,$$

où  $d(x, D)$  désigne la distance du point  $x \in \mathbf{R}^n$  à la droite  $D$ .

(ii) Il existe  $w \in \mathbf{R}^n$  tel que

$$(7.5) \quad \lim_{t \downarrow t_o} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_o)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = w .$$

Si une des deux conditions est vérifiée, alors la droite  $D$  est unique et peut être décrite par le point de base  $\gamma(t_o)$  et le vecteur  $w$  comme vecteur directeur.

Le résultat reste vrai quand on remplace l'intervalle  $]t_o, t_o + \varepsilon[$  par l'intervalle  $]t_o - \varepsilon, t_o[$  et les limites à droite  $\lim_{t \downarrow t_o}$  par des limites à gauche  $\lim_{t \uparrow t_o}$ .

**Nota Bene : abus/simplification d'hypothèse.** L'hypothèse sur  $t_o$  de l'existence d'un  $\varepsilon > 0$  dans [7.3] est pour assurer qu'on peut parler du quotient  $\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^{-1}$ . Autrement dit, que les deux limites dont on parle dans [7.3] ont un sens. D'autre part, parler de ces limites sous-entend en général que ces expressions ont un sens, c'est-à-dire que (au moins dans un voisinage de  $t_o$ )  $\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|$  ne s'annule pas. Et cette condition est équivalent à la condition que le point  $p = \gamma(t_o)$  n'est pas un point double/multiple dans un voisinage (à droite) de  $t_o$ . Avec cet sous-entendu sur la notation de la limite (ce qui revient à éviter les points doubles), on pourrait donc omettre l'hypothèse sur l'existence  $\varepsilon > 0$  et énoncer le résultat de [7.3] directement

sous la forme que pour un  $t_o \in I$  les deux propriétés [7.3.i] et [7.3.ii] sont équivalentes. Dans la suite on appliquera cette simplification et on ne mentionnera plus la condition de l'existence d'un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|$  ne s'annule pas pour  $t_o < t < t_o + \varepsilon$  ou  $t_o - \varepsilon < t < t_o$ .

**7.6 Proposition : la droite  $D$  dans [7.3] est invariante sous reparamétrage**

Ⓟ (mais pas de côté). Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes qui sont équivalentes par reparamétrage, soit  $s_o \in I_2$ , soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage, soit  $t_o = \varphi(s_o)$  et soit  $D$  une droite (affine) dans  $\mathbf{R}^n$ .

(i) Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont la même orientation (sont parcourues dans le même sens), alors on a les équivalences

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s \downarrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} = 0$$

et

$$\lim_{t \uparrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s \uparrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} = 0 .$$

(ii) Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont une orientation opposée (sont parcourues dans des sens opposés), alors on a les équivalences

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s \uparrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} = 0$$

et

$$\lim_{t \uparrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s \downarrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} = 0 .$$

**7.7 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il existe  $k \geq 1$  avec  $\gamma^{(k)}(t_o) \neq 0$  (la courbe a une dérivée non-nulle en  $t_o$ ). Alors il existe une (unique) droite affine  $D$  telle qu'on ait

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 .$$

Si  $p \geq 1$  est la première dérivée non nulle de  $\gamma$  en  $t_o$  :

$$\forall 1 \leq i < p = \gamma^{(i)}(t_o) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma^{(p)}(t_o) \neq 0 ,$$

alors la droite  $D$  peut être décrite par le point de base  $\gamma(t_o)$  et  $\gamma^{(p)}(t_o)$  comme vecteur directeur.

**7.8 Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée,  $t_o \in I$  et soit  $D \subset \mathbf{R}^n$  une droite affine. Si on a

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 \quad \text{respectivement} \quad \lim_{t \uparrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 ,$$

alors on dit que  $D$  est la droite tangente unilatérale (à droite respectivement à gauche) à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$  et on la note comme  $D = DT_{t_o}^{d/g} \gamma$ . Dans [7.3] on a vu que si une droite tangente unilatérale (à droite ou à gauche) existe, alors elle est unique et elle admet  $\gamma(t_o)$  comme point de base. Et dans [7.6] on a vu que

l'existence d'une droite tangente unilatérale (à droite ou à gauche) est indépendante du paramétrage, sauf que si on change l'orientation, une droite tangente unilatérale à gauche devient une droite tangente unilatérale à droite et vice versa.

Si  $\gamma$  admet, au point  $\gamma(t_o)$ , une droite tangente unilatérale à gauche  $DT_{t_o}^g\gamma$  et à droite  $DT_{t_o}^d\gamma$  et si ces deux droite tangentes unilatérales coïncident (ce qui n'est pas forcément le cas!), alors on dit que  $DT_{t_o}^g\gamma = DT_{t_o}^d\gamma \equiv DT_{t_o}\gamma$  est la *droite tangente à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$* .<sup>1</sup> Dans ce cas la droite tangente est bien invariante sous reparamétrage, car on aura la même droite tangente unilatérale à droite et à gauche. Son existence est garantie dès qu'il existe une dérivée non-nulle de  $\gamma$  en  $t_o$ .

Si la courbe  $\gamma$  admet une droite tangente, on définit l'*espace tangent à la courbe au point  $\gamma(t_o)$*  comme le sous-espace vectoriel (de dimension 1)  $T_{t_o}\gamma \subset \mathbf{R}^n$  associé à la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  de sorte que tout vecteur directeur de  $DT_{t_o}\gamma$  est un vecteur de base de  $T_{t_o}\gamma$  et vice versa.

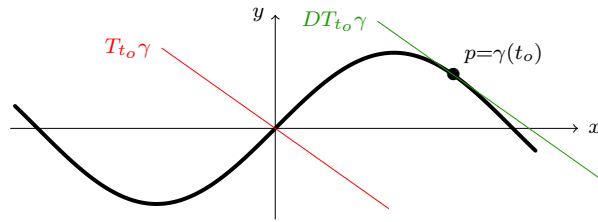


FIGURE 5. La droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  et l'espace tangent  $T_{t_o}\gamma$

Cette définition de la droite tangente (et a fortiori d'une droite tangente unilatérale) nécessite plusieurs commentaires. Commençons avec la remarque que dans la littérature on parle presque exclusivement de l'espace tangent  $T_t\gamma$  d'une courbe au point  $\gamma(t)$  et les quelques fois qu'on a besoin de la droite tangente  $DT_t\gamma$ , on a tendance à la confondre avec l'espace tangent : on interprète  $DT_t\gamma$  comme le "sous-espace vectoriel" dont l'origine se trouve au point  $\gamma(t)$ . Cela facilite le langage, mais formellement il y a une différence entre les deux notions. La plupart du temps on aura à faire avec l'espace tangent, mais parfois c'est la droite tangente qui nous intéresse. On utilisera donc les deux notations pour distinguer les deux cas de figure.

Ensuite on peut remarquer que la plupart des auteurs se facilitent la tâche en définissant la droite tangente exclusivement pour des points où la dérivée  $\gamma'(t_o)$  est non-nulle (le cas  $p = 1$  dans [7.7]). Et dans ce cas on définit souvent l'espace tangent comme le sous-espace vectoriel engendré par cette dérivée  $\gamma'(t_o)$ . Nous avons opté pour notre démarche parce que elle est plus "intrinsèque" dans le sens que c'est un objet dont la définition ne dépend que de l'image (ou presque dans notre cas) et pas du paramétrage. Un avantage supplémentaire de notre définition est qu'on définit une droite tangente dans certains cas singuliers (voir §13), des cas où le dessin suggère fortement qu'il y a une droite tangente, mais où la définition à l'aide de  $\gamma'(t_o)$  fait défaut. Et une partie du travail qu'on va effectuer dans le cadre de notre définition va servir de nouveau pour ces cas singuliers (à savoir le fait que la classification des points singuliers ne dépend pas du paramétrage, un résultat qu'on oublie souvent d'énoncer).

1. Dans [AF90, p301] on parle d'une tangente géométrique stricte.

D'autre part, si on insiste sur une définition d'une courbe qui évite les points doubles et autres points problématiques, c'est-à-dire une définition analogue à la définition d'une surface régulière (voir [18.18]), alors on sera toujours dans le cas où la dérivée première est non-nulle, mais aussi dans le cas où on peut donner la définition complètement intrinsèque.

Une troisième remarque est qu'il y a une ambiguïté dans notre discours sur la droite tangente à une courbe. D'une part on prend la peine de montrer que cette droite ne dépend pas du paramétrage choisi et d'autre part on note cette droite  $DT_p\gamma$  avec la mention explicite de l'application  $\gamma$ , c'est-à-dire, le paramétrage. Ce grand écart nous est "imposé" par le fait qu'on doit éviter les points doubles ou des points limites, où il y aura deux (voire plusieurs) droites tangentes.

Une dernière remarque concerne l'équivalence [7.3]. Une des explications qu'on donne quand on introduit la notion de dérivée d'une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  en un point  $c \in ]a, b[$  est la suivante. On trace le graphe de  $f$ , on considère le point (de base)  $(c, f(c))$  sur le graphe et un point arbitraire  $(t, f(t))$ . Ensuite on considère la droite  $D_t$  qui passe par ces deux points  $(c, f(c))$  et  $(t, f(t))$ . Et on dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $c$  si la droite  $D_t$  prend une position limite fixe quand  $t$  tend vers  $c$ . La dérivée de  $f$  en  $c$  sera alors la pente de cette droite limite. Mais si une telle droite limite existe, on peut aussi la décrire par un point de base et un vecteur directeur. Une droite  $D_t$  est (évidemment) décrite par le point de base  $(c, f(c))$  et le vecteur directeur unitaire

$$\frac{(t, f(t)) - (c, f(c))}{\|(t, f(t)) - (c, f(c))\|} .$$

Quand  $t$  tend vers  $c$ , la droite  $D_t$  prendra une position fixe si et seulement si ce vecteur directeur admet une limite, c'est-à-dire s'il existe  $w \in \mathbf{R}^2$  tel que

$$\lim_{t \downarrow c} \frac{(t, f(t)) - (c, f(c))}{\|(t, f(t)) - (c, f(c))\|} = w .$$

Ici on doit prendre une limite unilatérale, car le vecteur limite change de signe quand on prend la limite de l'autre côté. Mais on peut réécrire cette limite comme

$$w = \lim_{t \downarrow c} \frac{(t, f(t)) - (c, f(c))}{\|(t, f(t)) - (c, f(c))\|} \equiv \lim_{t \downarrow c} \frac{\left(1, \frac{f(t) - f(c)}{t - c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{f(t) - f(c)}{t - c}\right)^2}} .$$

Écrit de cette façon, on voit clairement que, si la limite

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}$$

existe, alors le vecteur  $w$  existe. Autrement dit, si  $f$  est dérivable au point  $t = c$  dans le sens ordinaire, alors son graphe aura une droite tangente dans notre sens. De cette façon on relie donc l'introduction naïve de la dérivée avec notre définition d'une droite tangente.

Malgré le fait qu'on a défini la droite tangente à une courbe pour des points où la dérivée première peut être nulle, les points où cette dérivée première est non-nulle ont quand même un intérêt particulier.



**Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et  $t_o \in I$ .

- On dit que le point  $\gamma(t_o)$  est un *point régulier* de la courbe si  $\gamma'(t_o) \neq 0$ . Un point qui n'est pas régulier est un *point singulier*. Autrement dit,  $\gamma(t_o)$  est un point singulier si  $\gamma'(t_o) = 0$ . On dit qu'un point singulier  $\gamma(t_o)$  est *isolé* (on parle d'un *point singulier isolé*) s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in I$  vérifiant  $0 < |t - t_o| < \delta$  le point  $\gamma(t)$  est régulier.
- On dit que la courbe  $\gamma$  est *régulière* si pour tout  $t \in I$  on a  $\gamma'(t) \neq 0$  et on dit qu'elle est *paramétrée à vitesse constante* s'il existe  $v > 0$  tel que  $\|\gamma'(t)\| = v$  pour tout  $t \in I$ . Dans le cas particulier  $v = 1$  on dit aussi que  $\gamma$  est *paramétrée par longueur d'arc*. Une courbe paramétrée à vitesse constante est donc a fortiori régulière.

Ⓟ **7.9 Lemme “trivial” mais intéressant.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée. Alors elle est paramétrée à vitesse constante si et seulement si pour tout  $t \in I$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont orthogonaux.

Ⓟ **7.10 Proposition.** Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée régulière, soit  $a \in I_1$ , soit  $L : I_1 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction (de reparamétrage) définie par

$$(7.11) \quad L(t) = \int_a^t \|\gamma_1'(s)\| \, ds ,$$

et soit  $I_2 = L(I_1) \subset \mathbf{R}$ . Alors  $L : I_1 \rightarrow I_2$  est un difféomorphisme (de la même classe de dérivabilité que  $\gamma_1$ ) et  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ L^{-1} : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une courbe paramétrée par longueur d'arc équivalente par reparamétrage à  $\gamma_1$  avec la même orientation.

Selon [7.10] toute courbe paramétrée régulière est équivalente à une courbe paramétrée par longueur d'arc. L'intérêt de ce résultat n'est pas tellement pour faciliter le calcul, au contraire : dans la plupart des cas l'intégrale (7.11) définissant la fonction  $L$  n'est pas exprimable en fonctions élémentaires. Et même si c'est possible, trouver une expression explicite pour la réciproque  $L^{-1}$  peut être difficile voire impossible. Non, l'intérêt est plutôt théorique, car cela permet d'exprimer certains résultats plus facilement.

## 8. Branches infinies, tangentes et plus

**Convention locale.** Dans tout ce chapitre, quand on parle de l'intervalle  $]a, b[$ , les valeurs  $a = -\infty$  et/ou  $b = +\infty$  seront autorisées.

**8.1 Définition (rappel).** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  une application. On dit que *la limite (à gauche) quand  $t$  tend vers  $a$  de  $f(t)$  vaut  $+\infty$* , ce qu'on note

$$\lim_{t \uparrow a} f(t) = +\infty ,$$

si on a la propriété

$$\forall M \in \mathbf{R} \exists T \in ]a, b[ \forall t \in ]T, b[ : f(t) \geq M .$$

Et on dit que *la limite (à gauche) quand  $t$  tend vers  $b$  de  $f(t)$  vaut  $-\infty$* , ce qu'on note

$$\lim_{t \uparrow b} f(t) = -\infty ,$$

si on a la propriété

$$\forall M \in \mathbf{R} \exists T \in ]a, b[ \forall t \in ]T, b[ : f(t) \leq M .$$

Dans le cas  $b = +\infty$  on écrit aussi  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  au lieu de  $\lim_{t \uparrow \infty}$ . On a des définitions analogues pour la limite à droite en  $a$  en remplaçant l'intervalle  $]T, b[$  par l'intervalle  $]a, T[$ .

**Définition.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée. Alors on dit que  $\gamma$  a *une branche infinie en  $a$*  si on a

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t)\| = +\infty$$

et on dit qu'elle a *une branche infinie en  $b$*  si on a

$$\lim_{t \uparrow b} \|\gamma(t)\| = +\infty .$$

**Nota Bene.** On a déjà remarqué qu'il arrive qu'une courbe n'est pas définie sur un seul intervalle, mais sur la réunion de plusieurs intervalles et qu'il faut donc étudier la courbe sur chaque intervalle séparément. Ceci s'applique en particulier à l'étude des branches infinies, où il faut donc étudier l'existence d'une branche infinie dans  $2N$  cas s'il y a  $N$  intervalles (disjoints) dans le domaine de définition de la courbe. Par exemple pour la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = \left( \frac{t}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t^2 - 1} \right)$$

le domaine de définition est la réunion des trois intervalles  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 1[ \cup ] 1, \infty[$ . Il y a donc 6 possibilités d'avoir une branche infinie : en  $-\infty$ , en  $-1$  à gauche, en  $-1$  à droite, en  $1$  à gauche, en  $1$  à droite, et en  $+\infty$ . Et parmi ces 6 possibilités, il y en a quatre qui sont effectivement des branches infinies : en  $\pm 1$  à droite et à gauche.

**Définition.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée ayant une branche infinie en  $a$  et soit  $D \subset \mathbf{R}^n$  une droite. Alors on dit que  $D$  est *l'asymptote de la branche infinie en  $a$*  si elle vérifie la condition

$$\lim_{t \downarrow a} d(\gamma(t), D) = 0 ,$$

où  $d(\gamma(t), D)$  désigne la distance du point  $\gamma(t)$  à la droite  $D$  [4.14]. Le cas d'une branche infinie en  $b$  est similaire.

**8.2 Proposition.** Soit  $\gamma_1 : ]a_1, b_1[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : ]a_2, b_2[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes paramétrées équivalentes par reparamétrage.

- (i)  $\gamma_1$  a une branche infinie si et seulement  $\gamma_2$  a une branche infinie.
- (ii) Si une branche infinie de  $\gamma_1$  admet une asymptote  $D$ , alors  $D$  est aussi une asymptote pour la branche infinie de  $\gamma_2$ .

**8.3 Nota Bene.** L'énoncé [8.2] n'est pas tout à fait correct. Si  $\gamma_1 : ]a_1, b_1[$  a une branche infinie, il y a deux possibilités : en  $a_1$  ou en  $b_1$  (et même une troisième possibilité : des deux côtés). Si elle est équivalente par reparamétrage à la courbe  $\gamma_2 : ]a_2, b_2[$  et si la branche infinie est en  $a_1$ , on ne peut pas conclure que  $\gamma_2$  a une branche infinie en  $a_2$ , car cela dépend de la fonction de reparamétrage  $\varphi : ]a_2, b_2[ \rightarrow ]a_1, b_1[$  : si elle est croissante,  $\gamma_2$  a bien une branche infinie en  $a_2$ , mais si  $\varphi$  est décroissante,  $\gamma_2$  a une branche infinie en  $b_2$ . Et s'il y a une branche infinie des deux côtés, alors  $\gamma_2$  en a aussi des deux côtés, mais cela dépend de la (dé)croissance de  $\varphi$  laquelle correspond avec qui. Et quand il y a une asymptote, il faut bien savoir à quelle branche infinie il est associé.

Le but du reste de ce chapitre est de mettre la définition d'une asymptote dans un contexte plus générale qui fait le lien entre une asymptote et une droite tangente (unilatérale). Le cadre "naturel" pour le faire est la géométrie projective, et le lecteur qui a suivi une initiation à cette théorie devrait reconnaître les constructions qui suivent. Par contre, une telle connaissance est nullement nécessaire pour pouvoir apprécier les constructions et l'unification entre les notions d'asymptote et tangente. Et en bonus on obtient le cadre naturel pour la notion de branche (infinie) parabolique.

Pour visualiser la construction qui va suivre, on remarque d'abord que tout le monde peut "voir" que l'horizon est un cercle autour de nous "à l'infini" et que des droites parallèles "convergent" vers un même point sur l'horizon.

Mais même une route qui n'est pas rectiligne peut sembler converger vers un point sur l'horizon. Et les droites qui émanent de ce point sur l'horizon seront toutes parallèles. Il devient donc naturel d'identifier un point sur l'horizon avec une direction dans le plan. Si on réfléchit un petit peu, on s'aperçoit qu'on peut "voir" l'horizon parce qu'on est au-dessus du plan (de la terre). Si on était dans le plan (de la terre), notre vue serait bloquée ; ce n'est que parce qu'on est au-dessus qu'on peut voir les courbes dans le plan et l'horizon. Si on fait abstraction de notre capacité d'estimer la distance, notre oeil ne peut voir que dans des directions et ce qu'on voit peut se dessiner sur un demi-sphère à distance fixe. Dans cette optique l'horizon devient

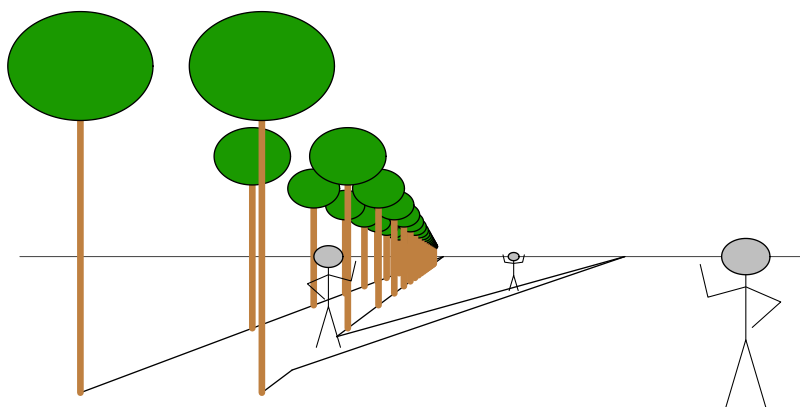


FIGURE 6. Un dessin en perspective

l'équateur de ce demi-sphère. C'est ainsi qu'on peut ramener l'horizon vers nous et parler sérieusement d'une courbe qui s'approche d'un point de l'horizon : quand on dessine une telle courbe sur notre demi-sphère, elle s'approche d'un point de l'équateur.<sup>2</sup>

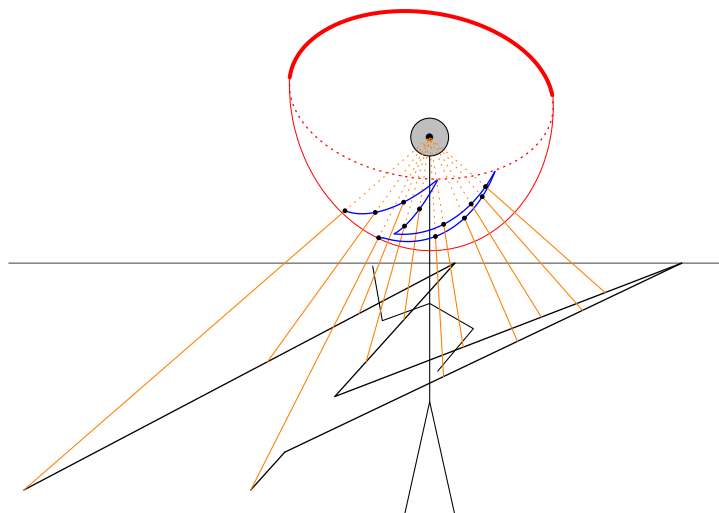


FIGURE 7. La projection sur l'hémisphère

Supposons maintenant qu'une courbe a une branche infinie, c'est-à-dire qu'elle s'approche de l'horizon, et qu'elle admet une asymptote  $D$ . Cette droite  $D$  coupe l'horizon dans un point précis et, parce que c'est une asymptote de notre courbe, notre courbe s'approche du même point sur l'horizon. Considérons maintenant le plan  $P$  passant par la droite (asymptote)  $D$  et notre oeil. Ce plan coupe la demi-sphère en un grand cercle (la moitié d'un grand cercle) et le point sur l'horizon devient un point sur l'équateur où "convergent" ce grand cercle et (la projection de) notre courbe.

### DESSIN

En regardant bien le dessin, on n'aura pas de mal à croire que ces deux courbes sur la demi-sphère ont une même tangente au point de l'équateur. Et si on réfléchit un petit peu plus, on veut bien croire qu'une courbe admet une asymptote si et seulement si la courbe projetée sur la demi-sphère (avec notre oeil au centre) admet

2. La déformation de l'hémisphère dans la figure 7 est due à la projection en perspective.

une droite tangente au point de l'équateur et que, dans ce cas, on obtient l'asymptote en prenant le plan qui passe par le point sur l'équateur et qui contient ce vecteur tangent. Et c'est bien cela qu'on va montrer. La seule différence entre le modèle mathématique et la vision décrite ci-dessus est qu'on "inverse" la situation. Notre oeil, le centre de la demi-sphère, est au-dessus du plan qui contient les courbes; notre demi-sphère est donc dans un certain sens l'hémisphère sud d'une sphère. En mathématique on positionne le centre en-dessous du plan, simplement en remontant le plan vers le haut, ce qui veut dire qu'on considère plutôt l'hémisphère nord.

**Construction.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe, alors on construit d'abord une courbe  $\hat{\gamma} : ]a, b[ \rightarrow H \subset \mathbf{R}^{n+1}$  dans l'hyperplan  $H = \{ (x, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid z = 1 \}$  en rajoutant une  $n + 1$ -ième coordonnée 1 comme

$$\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t), 1) .$$

Ensuite on projette cette courbe sur la sphère  $\mathbf{S}^n = \{ (x, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid \|x\|^2 + z^2 = 1 \}$  en prenant le quotient par sa norme, c'est-à-dire, en posant

$$\gamma_u(t) = \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} .$$

L'image de la courbe  $\gamma_u : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  sera contenu dans le demi-espace supérieur, car la dernière composante de  $\gamma_u(t)$  sera forcément (strictement) positive.

#### DESSIN

En termes de la courbe initiale  $\gamma$ , la courbe  $\gamma_u$  est donnée par

$$\gamma_u(t) = \left( \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}} \right) .$$

Il s'ensuit immédiatement que la courbe  $\gamma$  présente une branche infinie en  $a$  si et seulement si la dernière composante de  $\gamma_u$  tend vers 0 dans la limite  $x \downarrow a$ .

**Nota Bene.** Les résultats et définitions concernant les branches infinies en  $a$  sont, mutatis mutandis (à part quelques détails, il suffit de remplacer  $\lim_{t \downarrow a}$  par  $\lim_{t \uparrow b}$ ), valables pour les branches infinies en  $b$ .

Ⓟ **8.4 Lemme.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe et soit  $v, w \in \mathbf{R}^n$  et  $\zeta \in \mathbf{R}$  tels que

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) = (v, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = (w, \zeta) .$$

Alors on a les (in)égalités

$$\|v\| = 1 \quad , \quad \langle v, w \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \zeta \geq 0 .$$

Si  $\zeta = 0$ , alors  $\|w\| = 1$  et si  $\zeta > 0$ , alors on aura

$$(w, \zeta) = \frac{(b, 1)}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} \quad \text{avec} \quad b = \zeta^{-1} \cdot w \in \mathbf{R}^n .$$

Ⓟ **8.5 Proposition.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe avec une branche infinie en  $a$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une droite  $D$  qui est asymptote à la branche infinie en  $a$ .  
(ii) Il existe  $v, b \in \mathbf{R}^n$  tels que

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) = (v, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = \frac{(b, 1)}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} .$$

Si c'est le cas,  $b$  est un point de base et  $v$  est un vecteur directeur de l'asymptote  $D$ .

**Ⓟ 8.6 Corollaire - unicité d'asymptote.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe avec une branche infinie en  $a$ . Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux droites qui sont tous les deux asymptotes de la branche infinie en  $a$ , alors  $D_1 = D_2$ .

**8.7 Définitions.** • Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe qui présente une branche infinie en  $a$ . Alors on dit que la branche infinie en  $a$  a une direction asymptotique (normalisée)  $v \in \mathbf{R}^n$ , si

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) = (v, 0) \in \mathbf{R}^{n+1} .$$

Cette condition est équivalente à la condition

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = v .$$

On parlera d'une direction asymptotique non-normalisée  $w \in \mathbf{R}^n$  s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\lambda w$  est la direction asymptotique normalisée.

• Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe qui présente une branche infinie en  $a$  avec direction asymptotique  $v \in \mathbf{R}^n$ . Alors on peut prolonger  $\gamma_u$  par continuité en une application  $\gamma_u : [a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  en posant  $\gamma_u(a) = (v, 0)$ . Si cette prolongation  $\gamma_u$  admet une droite tangente unilatérale en  $a$ , ce qui veut dire selon [7.3], [7.8] qu'il existe  $(w, \zeta) \in \mathbf{R}^{n+1}$  tel que

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = (w, \zeta) ,$$

alors, en vu de [8.4], on distingue deux cas. Si  $\zeta \neq 0$ , la branche infinie aura une asymptote  $D$  [8.5]. Et si  $\zeta = 0$  on dira que la branche infinie est une *branche (infinie) parabolique de direction (normalisée)  $v$* .<sup>3</sup>

**DESSIN**

**Comparaison avec la géométrie projective.** Si on passe à la géométrie projective, alors l'existence d'une direction asymptotique pour une branche infinie se traduit par le fait que la courbe admet une limite "à l'infini." Et s'il existe une droite tangente unilatérale  $D$  en ce point limite, il y a deux possibilités : ou bien la droite  $D$  est contenue dans "l'infini," ou bien elle ne l'est pas. Dans le premier cas on parle d'une branche parabolique (la droite tangente est "cachée" à l'infini) et dans le deuxième cas la droite tangente (sa partie "visible") est l'asymptote de la branche infinie. La distinction entre "branche infinie avec asymptote" et "branche infinie parabolique" disparaît donc en géométrie projective et devient (dans les deux cas) l'existence d'une droite tangente unilatérale.

3. Le nom "branche parabolique" est habituellement réservé pour les courbes planes, c'est-à-dire le cas  $n = 2$ . Je l'étend ici à toute dimension simplement pour avoir un nom.

On termine ce chapitre avec un résultat concernant les courbes planes qui fait le lien entre la notion d'asymptote/branche parabolique telle qu'on l'a exposé ci-dessus et la façon classique d'aborder tout cela avec le comportement des deux composantes  $x(t)$  et  $y(t)$  de la courbe  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ .

Ⓟ **8.8 Proposition.** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe plane avec ses deux composantes  $x, y : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  données par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Si  $\gamma$  a une branche infinie en  $a$ , alors il y a une direction asymptotique si et seulement si l'une des deux limites existe dans  $\mathbf{R}$  :

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbf{R} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{x(t)}{y(t)} = m^* \in \mathbf{R} .$$

Dans le premier cas la direction asymptotique est donnée (à un multiple près) par le vecteur  $(1, m)$  et dans le deuxième cas (à un multiple près) par le vecteur  $(m^*, 1)$ .

Si on a  $\lim_{x \downarrow a} y(t)/x(t) = m$ , alors :

(i) la branche infinie admet un asymptote si et seulement si la limite

$$\lim_{t \downarrow a} (y(t) - m \cdot x(t)) = \ell \in \mathbf{R}$$

existe, auquel cas l'équation de l'asymptote est donnée par  $y = mx + \ell$ , et

(ii) c'est une branche infinie parabolique de direction (non-normalisée)  $(1, m)$  si et seulement si on a

$$\lim_{t \downarrow a} |y(t) - m \cdot x(t)| = +\infty .$$

Et si on a  $\lim_{x \downarrow a} x(t)/y(t) = m^*$ , alors :

(iii) la branche infinie admet un asymptote si et seulement si la limite

$$\lim_{t \downarrow a} (x(t) - m^* \cdot y(t)) = \ell^* \in \mathbf{R}$$

existe, auquel cas l'équation de l'asymptote sera  $x = m^*y + \ell^*$ , et

(iv) c'est une branche parabolique de direction (non-normalisée)  $(m^*, 1)$  si et seulement si on a

$$\lim_{t \downarrow a} |x(t) - m^* \cdot y(t)| = +\infty .$$

### 9. Courbure et angles

L'analogie la plus parlante pour expliquer la notion de courbure d'une courbe est la voiture qui roule sur l'autoroute. Le conducteur peut mesurer un certain nombre de quantités : le temps  $t$  (avec une horloge ou une montre), la distance parcourue  $S$  (sur le compteur) et la vitesse instantanée  $v$  (aussi sur le tableau de bord de sa voiture). En principe il n'a pas besoin de la vitesse instantanée, car il peut l'obtenir en dérivant la distance parcourue par rapport au temps. Plus précisément, soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  la position de la voiture au temps  $t$  dans le plan (on évite les montagnes pour l'instant). Si on fixe  $a \in I$  arbitrairement (le moment du départ de la maison par exemple), alors, selon [6.6], la distance parcourue au moment  $t$  est donnée par la formule

$$(9.1) \quad S(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| \, ds .$$

Et dans ce cas, la vitesse instantanée est donnée par la formule

$$(9.2) \quad v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = S'(t) = \|\gamma'(t)\| .$$

Supposons maintenant qu'il a aussi une boussole qui indique dans quelle direction la voiture roule. Cette direction est mesurée par l'angle  $\alpha(t)$  entre la direction de la voiture au moment  $t$  et la direction du pôle nord. La direction de la voiture est déterminée par un (petit) déplacement, c'est-à-dire par la **direction** du vecteur  $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ . Si on prend  $h$  de plus en plus petit, on trouve que la direction de la voiture est donnée par la direction du vecteur de vitesse  $\gamma'(t)$ . Dans le plan on peut indiquer une telle direction par un vecteur unitaire  $u$ . Si l'angle entre ce vecteur  $u$  et la direction du nord est  $\alpha(t)$ , alors on a

$$u = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) .$$

L'angle  $\alpha(t)$  entre la direction de la voiture et le nord est donc déterminé par l'égalité

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) .$$

**Ⓟ 9.3 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière de classe  $C^k$ . Alors il existe une fonction  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{k-1}$  telle qu'on a pour tout  $t \in I$  :

$$(9.4) \quad \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) .$$

En plus, si  $\hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une autre fonction vérifiant (9.4), alors il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que pour tout  $t \in I$  on a

$$\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + 2k\pi .$$

S'il y a des virages, alors on tourne le volant et l'angle  $\alpha(t)$  change. Dans le temps,  $\alpha(t)$  change plus vite si la vitesse est plus grande. Mais la position du volant à un endroit précis de la route ne dépend pas de la vitesse, mais seulement de la forme du virage dans l'autoroute à l'endroit où on se trouve. La position du volant mesure donc combien la route "tourne" à un moment donné. Une façon de mesurer cela est de mesurer le changement dans l'angle  $\alpha(t)$  par distance parcourue :

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{S(t+h) - S(t)} ,$$



ou plutôt sa valeur instantanée  $\kappa(t)$ , c'est-à-dire sa limite quand  $h$  tend vers 0 :

$$(9.5) \quad \kappa(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{S(t+h) - S(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha(t+h) - \alpha(t))/h}{(S(t+h) - S(t))/h} \stackrel{(9.2)}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\gamma'(t)\|} .$$

Pour se convaincre que cette quantité mesure vraiment quelque chose qui correspond à la position du volant et/ou à la forme du virage, regardons ce que donne ce quotient dans le cas où le volant est dans une position fixe.

Si on roule tout droit, alors  $\alpha$  est constant et ce quotient sera nul. Par contre, si on ne roule pas droit, mais avec la position du volant bloquée, alors on roule dans un cercle dont le rayon ne dépend pas de la vitesse (on ignore les sorties de route à cause des vitesses excessives). Si le rayon est  $R$ , alors quand on a roulé sur un arc de cercle de longueur  $L$ , alors on aura changé l'angle de  $L/R$  radians en plus ou en moins (en plus quand on tourne à gauche contre les aiguilles d'une montre et en moins quand on tourne à droite). Le quotient est donc constant égal à plus ou moins  $1/R$ . Ce qu'on constate est que, pour une position du volant bloquée, le quotient "changement d'angle par distance parcourue" est aussi constant. En plus, plus qu'on a tourné le volant, plus que le rayon du cercle sera petit et plus que ce quotient sera grand.

Si la position du volant n'est pas fixe, on peut faire semblant que pendant des petites périodes elle l'est. Pendant des petites périodes, la voiture roulera donc sur un cercle de rayon  $R$ , où  $1/R$  est le quotient de "changement d'angle par distance parcourue" pendant cette (petite) période (à condition qu'on tourne à gauche, sinon ce quotient vaut  $-1/R$ ). On conclut que la quantité  $\kappa(t)$  définie en (9.5) mesure effectivement quelque chose qui est liée à la position du volant de la voiture et à la forme du virage à l'endroit où on se trouve.

**Ⓟ 9.6 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe et  $t_o \in I$  tel que  $\gamma'(t_o) \neq 0$ . Si on note  $\alpha(t)$  l'angle orienté que fait  $\gamma'(t)$  avec le vecteur  $(0, 1)$  (la direction "nord") et si on note  $S(t)$  la distance parcourue, alors on a

$$\kappa(t_o) \equiv \frac{\alpha'(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|} = \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o))}{\|\gamma'(t_o)\|^3} .$$

La quantité  $\kappa(t_o)$  est un cas particulier de ce qu'on appellera en [12.1] la courbure (relative) de la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$ .

**Ⓟ 9.7 Corollaire.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière, soit  $\kappa : I \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction de courbure [9.6] et soit  $t_0, t_1 \in I$  deux temps. Alors entre le moment  $t = t_0$  et le moment  $t = t_1$  la direction de la courbe a tourné d'un angle  $A$  donné par

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \kappa(t) \|\gamma'(t)\| \, dt .$$

Plus précisément on a

$$\frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|} = R_A \left( \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right) ,$$

où  $R_A$  est la rotation d'angle  $A$  [3.1].

Le résultat [9.7] ne devrait pas être une surprise. Si quelqu'un nous donne des directions du style : après 200 mètres tourner  $30^\circ$  à droite, ensuite après 500 mètres tourner  $50^\circ$  à gauche, etcætera etcætera, alors en cumulant les angles à tourner, on sait de combien on a tourné entre le début et la fin du chemin. Une autre interprétation, plus proche de la formule d'intégration, commence avec la remarque que  $\kappa(t)$  est le changement d'angle par distance parcourue (instantané). Et la distance parcourue est la vitesse (instantanée) multiplié par un laps de temps, c'est-à-dire le produit  $\|\gamma'(t)\| dt$ . Et donc pendant qu'on parcourt cette distance, le changement d'angle est le produit  $\kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt$ . Et de nouveau en cumulant/intégrant ces angles, on obtient l'angle qu'on a tourné en total.

**9.8 Proposition : la courbure [9.6] est presque invariante sous reparamétrage.** Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  deux courbes de classe  $C^1$  qui sont équivalentes par reparamétrage, soit  $s_o \in I_2$ , soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage, soit  $t_o = \varphi(s_o)$  et supposons qu'on a  $\gamma_2'(s_o) \neq 0$ . Soit  $\kappa_1(t_o)$  la courbure de  $\gamma_1$  au point  $p = \gamma_1(t_o)$  et soit  $\kappa_2(s_o)$  la courbure de  $\gamma_2$  au point  $p = \gamma_2(s_o)$ . Alors  $\kappa_1(t_o) = \kappa_2(s_o)$  si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont la même orientation et  $\kappa_1(t_o) = -\kappa_2(s_o)$  si elles ont une orientation opposée [5.1].

Le fait que la courbure change de signe quand on change l'orientation de la courbe est un phénomène bien connu des gens qui font des aller-retours sur un même chemin : quand à l'aller on a tourné à droite, alors au retour on tourne à gauche au même endroit, c'est-à-dire que le changement d'angle est la même en grandeur, mais a le signe opposé.

Si on se pose la question si le travail concernant la courbure qu'on a fait pour une courbe (paramétrée) dans le plan  $\mathbf{R}^2$ , se généralise en dimension supérieure, alors à première vue on a l'impression que la réponse doit être négative, car déjà en dimension 3 on n'a plus la distinction "à droite" et "à gauche," ce qui met en cause la définition de l'angle de changement de direction. Et de toute façon, en dimension supérieure à 2 on ne peut plus caractériser une direction par un simple angle.

Par contre, l'angle entre deux vecteurs comme défini par [1.4] est quand même une mesure de la différence de direction, même si cet angle n'est pas suffisant pour décrire le deuxième vecteur par rapport au premier. Mais, comme déjà dit ci-dessus et remarqué dans [3.8], l'angle  $\alpha$  défini en [1.4] ne distingue pas droite et gauche : il appartient à  $[0, \pi]$ . Si on l'utilisait en dimension 2, on confondait gauche et droite, ce qui revient à dire qu'on prenait la valeur absolue de l'angle qu'on a utilisé dans (9.5). Mais si on prend la valeur absolue de cet angle, alors le raisonnement qui nous définit  $\kappa$  comme le quotient  $\alpha'(t)/\|\gamma'(t)\|$  dans (9.5) n'est plus valable : on se retrouve avec le quotient  $|h|/h$  qui n'a pas de limite quand  $h$  tend vers 0. Et calculer un développement limité pour éviter une dérivée ne résout pas non plus ce problème, car on se retrouve avec le quotient  $|t - t_o|/(t - t_o)$  qui n'a pas non plus de limite quand  $t$  tend vers  $t_o$ . Si on insiste sur cette valeur absolue et si on insiste qu'on veut quand même avoir une limite, il faut aussi prendre la valeur absolue dans le dénominateur. On est donc amené à considérer l'angle (positif)  $\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$  entre les deux vecteurs  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma'(t)$  et de vouloir déterminer la limite

$$(9.9) \quad \kappa_a(t_o) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))}{|S(t) - S(t_o)|} .$$

C'est un (petit) miracle que cette limite existe en toute dimension.

Ⓟ **9.10 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe et  $t_o \in I$  tel que  $\gamma'(t_o) \neq 0$ . Si on note  $\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$  l'angle (non-orienté) entre  $\gamma'(t)$  et  $\gamma'(t_o)$  et si on note  $S(t)$  la distance parcourue, alors on a

$$\kappa_a(t_o) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))}{|S(t) - S(t_o)|} = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^3} .$$

La quantité  $\kappa_a(t_o)$  est appelée la courbure (absolue).

**Remarques.** • Si dans [9.10] on prend la dimension  $n = 2$  et qu'on applique [3.7.i], on trouve

$$\kappa_a(t_o) = \frac{\sqrt{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o))^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^3} = |\kappa(t_o)| ,$$

ce qui donne le lien entre la valeur  $\kappa(t_o)$  qu'on a déterminé pour des courbes dans le plan  $\mathbf{R}^2$  et la valeur de  $\kappa_a(t_o)$  qui existe en toute dimension et qui confirme qu'on a pris la valeur absolue de l'angle en dimension quelconque.

• En vu de [1.2], la quantité  $\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2$  dans [9.10] s'interprète comme  $\|\gamma'(t_o)\|^2$  fois la longueur de la partie orthogonale de  $\gamma''(t_o)$  par rapport à  $\gamma'(t_o)$ . Et ceci est bien cohérent avec l'utilisation du déterminant en dimension 2, car la partie de  $\gamma''(t_o)$  parallèle à  $\gamma'(t_o)$  ne contribue pas au déterminant.

## 10. Courbure et cercles

**10.1 Définition.** On a vu que pour un cercle de rayon  $R$  en dimension 2, la courbure (relative)  $\kappa(t)$  est constante égalé à  $1/R$ . Pour pouvoir faire le lien en dimension quelconque entre la courbure (absolue)  $\kappa_a$  et des cercles, il faut d'abord définir ce que c'est un cercle dans  $\mathbf{R}^n$ .

Soit  $C \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble. On dit que  $C$  est un *cercle de plan*  $P \subset \mathbf{R}^n$ , de *centre*  $M \in P$  et de *rayon*  $R \in \mathbf{R}$  si on a l'égalité

$$C = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid x \in P \text{ et } \|x - M\| = R \} .$$

Autrement dit,  $C$  est un “vrai” cercle de rayon  $R$  et de centre  $M$  dans le plan  $P$ . Il est évident que le triplet  $(P, R, M)$  détermine complètement le cercle  $C$  et que deux triplets différents déterminent des cercles (sous-ensembles) différents.

Pour décrire un cercle dans  $\mathbf{R}^n$  il faut donc préciser un plan  $P$ , un centre  $M \in P$  et un rayon  $R \in \mathbf{R}$ . Et pour décrire un plan, il faut préciser un point de base  $b \in \mathbf{R}^n$  et deux vecteurs directeurs  $e_1, e_2 \in \mathbf{R}^n$ . Mais le centre  $M$  du cercle est contenu dans le plan, donc rien nous empêche de prendre le point  $M$  comme point de base. Et rien nous empêche non plus de prendre deux vecteurs orthonormés  $e_1, e_2$  (c'est-à-dire  $\|e_1\| = 1 = \|e_2\|$ , et  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ) comme vecteurs directeurs pour ce plan. Et avec ces choix, la courbe

$$c(t) = M + R \cos(t)e_1 + R \sin(t)e_2$$

parcourt le cercle  $C$  dans le sens qu'on a bien  $c(\mathbf{R}) = C$ . Autrement dit,  $C$  est complètement déterminé par les quatre données  $M, e_1, e_2 \in \mathbf{R}^n$  et  $R \in \mathbf{R}$ . Par contre, ces quatre données ne sont pas déterminées d'une façon unique par le cercle. Seulement  $M$  et  $R$  le sont, mais on peut changer les vecteurs directeurs, même avec la contrainte que ces deux vecteurs sont orthonormés.

Dans [7.8] on a défini la droite tangente (si elle existe) comme l'unique droite vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = 0 ,$$

On peut interpréter cette condition comme disant que c'est la droite qui reste le plus longtemps proche de la courbe dans le sens que la distance d'un point à cette droite s'approche plus vite de 0 que toute autre droite quand le point approche le point fixe  $\gamma(t_o)$ . Ce qu'on va montrer est qu'un résultat analogue est vrai quand on remplace les droites par des cercles. Plus précisément, on montrera qu'il existe un unique cercle  $C$  qui reste le plus longtemps proche de la courbe dans le sens qu'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), C)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2} = 0 ,$$

où  $d(x, C)$  désigne la distance d'un point  $x \in \mathbf{R}^n$  au cercle  $C$ . Ce qu'on peut déjà remarquer est que cette “approximation” de la courbe  $\gamma$  par un cercle est meilleure que l'approximation par une droite, car on divise par la distance au carré (ou, dit d'une façon différente, le développement limité de  $d(\gamma(t), C)$  commence à un ordre supérieur d'une unité par rapport à  $d(\gamma(t), D)$ ).

- Ⓟ **10.2 Lemme.** Soit  $C \subset \mathbf{R}^n$  un cercle de plan  $P$ , de centre  $M$  et de rayon  $R$ . Alors la distance  $d(x, C)$  d'un point  $x \in \mathbf{R}^n$  au cercle  $C$  est donnée par

$$d(x, C) = \sqrt{\|x - M\|^2 + R^2 - 2R\|p - M\|} ,$$

où  $p \in P$  est la projection orthogonale de  $x$  sur le plan  $P$  [4.15]. Si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux vecteurs directeurs de  $P$  qui sont orthonormés, alors cette distance est donnée par

$$d(x, C) = \sqrt{\|x - M\|^2 + R^2 - 2R \sqrt{\langle x - M, e_1 \rangle^2 + \langle x - M, e_2 \rangle^2}} .$$

- Ⓟ **10.3 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe et soit  $t_o \in I$  tel que  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont indépendants. Alors il existe un unique cercle  $C \subset \mathbf{R}^n$ , appelé le cercle osculateur de  $\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), C)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2} = 0 .$$

Plus précisément, le vecteur  $k_\gamma(t_o)$  défini par

$$k_\gamma(t_o) = \frac{1}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \left( \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o) \right)$$

est non-nul, le plan  $P$  contenant le cercle osculateur est déterminé par le point de base  $\gamma(t_o)$  et les vecteurs directeurs  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$ , et son rayon  $R$  et son centre  $M \in P$  sont donnés par

$$R = \frac{\|\gamma'(t_o)\|^3}{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle^2}} \equiv \frac{1}{\|k_\gamma(t_o)\|}$$

$$M = \gamma(t_o) + R^2 k_\gamma(t_o) \equiv \gamma(t_o) + \frac{k_\gamma(t_o)}{\|k_\gamma(t_o)\|^2} .$$

**10.4 Nota Bene.** Le lecteur averti devrait reconnaître le vecteur

$$\gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o)$$

qui figure dans [10.3] : c'est la partie orthogonale dans la décomposition orthogonale du vecteur  $\gamma''(t_o)$  par rapport au vecteur  $\gamma'(t_o)$  [1.2]. Il s'ensuit que les vecteurs  $k_\gamma(t_o)$  et  $\gamma'(t_o)$  sont orthogonaux.

- Ⓟ **10.5 Corollaire.** La courbure (absolue)  $\kappa_a(t_o)$  donnée en [9.10] est égale à  $R^{-1}$ , où  $R$  est le rayon du cercle osculateur  $C$  donné en [10.3].

Avec [10.5] on a donc montré que le lien, qu'on avait deviné en dimension 2 entre la courbure  $\kappa$  qui mesure le changement d'angle et le rayon d'un cercle, persiste en toute dimension : le changement d'angle absolu (sans tenir compte de la direction dans  $\mathbf{R}^n$ ) par distance parcourue est la réciproque du rayon du cercle osculateur qui fait la meilleure approximation de la courbe au point  $\gamma(t_o)$ . En plus, ce cercle est

une propriété de l'image de la courbe et pas de l'application dans le sens qu'une courbe équivalente a le même cercle osculateur.

Ⓟ **10.6 Proposition : le cercle osculateur est invariant sous reparamétrage.**

Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes de classe  $C^2$  qui sont équivalentes par reparamétrage, soit  $s_o \in I_2$ , soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage et soit  $t_o = \varphi(s_o)$ . Alors les deux vecteurs  $\gamma_2'(s_o), \gamma_2''(s_o)$  sont indépendants si et seulement si les deux vecteurs  $\gamma_1'(t_o), \gamma_1''(t_o)$  le sont. Si c'est le cas, le cercle osculateur associé à la courbe  $\gamma_1$  au point  $\gamma_1(t_o)$  par [10.3] est le même que le cercle osculateur associé à la courbe  $\gamma_2$  au point  $\gamma_2(s_o) = \gamma_1(t_o)$  (toujours par [10.3]).

**10.7 Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée (de classe  $C^2$ ), soit  $t \in I$  et  $p = \gamma(t) \in \mathbf{R}^n$ , qu'on suppose être un point régulier.

- Le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  de la courbe au point  $p = \gamma(t)$  est le vecteur (voir [10.4])

$$k_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \left( \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \gamma'(t) \right) .$$

La courbure (absolue)  $\kappa_a(t)$  de la courbe au point  $p$  [9.10] est la longueur du vecteur de courbure :

$$\kappa_a(t) = \|k_\gamma(t)\| = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^3} .$$

- Si  $\gamma''(t)$  est indépendant de  $\gamma'(t)$ , alors le plan  $P$  de point de base  $\gamma(t)$  et vecteurs directeurs  $\gamma'(t), \gamma''(t)$  est appelé le plan osculateur de la courbe au point  $p = \gamma(t)$ .
- Si  $\gamma''(t)$  est indépendant de  $\gamma'(t)$ , alors le cercle  $C$  donné dans [10.3] est appelé le cercle osculateur de la courbe au point  $p = \gamma(t)$ . Il est décrit par le plan osculateur, le rayon  $R = 1/\kappa_a(t)$  et le centre  $M$  donné par

$$M = \gamma(t) + R^2 k_\gamma(t) \equiv \gamma(t) + \frac{k_\gamma(t)}{\|k_\gamma(t)\|^2} .$$

En vu du résultat de [10.3], les définitions qu'on a donné dans [10.7] (dont la plupart est déjà donnée en cours de route) apparaissent comme naturelles. On aurait pu les donner plus tôt, auquel cas elles seraient tombé du ciel, avec une justification après coup. Ces définitions permettent de reformuler la condition de l'indépendance de  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  en termes de la courbure absolue et [10.3] permet de montrer l'indépendance sous reparamétrage de ces notions.

**10.8 Corollaire.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée (de classe  $C^2$ ) et  $p = \gamma(t)$  un point régulier de  $\gamma$ . Alors on a les équivalences :

$$\gamma'(t) \text{ et } \gamma''(t) \text{ sont colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad k_\gamma(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa_a(t) = 0$$

ou encore

$$\gamma'(t) \text{ et } \gamma''(t) \text{ sont indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad k_\gamma(t) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa_a(t) \neq 0 .$$

De plus, le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  au point  $p$  est orthogonal à la vitesse  $\gamma'(t)$  et si la courbe est paramétrée à vitesse constante  $v$ , alors on a les égalités

$$v^2 k_\gamma(t) = \gamma''(t) \quad \text{et (donc)} \quad \kappa_a(t) = \|\gamma''(t)\|/v^2 .$$

**Remarque.** Le dernier résultat de [10.8] a une interprétation bien pratique. Sachant que le vecteur de courbure est un invariant, on en déduit que si on roule à vitesse constante dans un virage, alors l'accélération augmente avec le carré de la vitesse, c'est-à-dire que la dangerosité (sortie de route) augmente avec le carré de la vitesse.

**10.9 Corollaire : le vecteur de courbure (et donc la courbure absolue) est invariant sous reparamétrage.** Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes de classe  $C^2$  qui sont équivalentes par reparamétrage, soit  $s_o \in I_2$ , soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage et soit  $t_o = \varphi(s_o)$ . Alors  $k_{\gamma_1}(t_o) = k_{\gamma_2}(s_o)$ .

## 11. Développées et développantes

**Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée régulière (de classe  $C^2$ ). Alors la *développée* de  $\gamma$  est la courbe  $M : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , où  $M(t)$  est le centre du cercle osculateur à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Bien évidemment cette définition ne s'applique pas à toutes les courbes : dès que la courbure est nulle, le rayon du cercle osculateur est infini. Il faut donc exclure du domaine de définition  $I$  les points où la courbure est nulle.

**11.1 Définitions.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et soit  $D_t \subset \mathbf{R}^n$  une droite dans  $\mathbf{R}^n$  pour tout  $t \in I$ . On dira que  $D_t$  est une famille de droites de classe  $C^k$  s'il existe deux applications  $b, v : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^k$  telles que  $b(t)$  est un point de base de  $D_t$  et  $v(t)$  un vecteur directeur de  $D_t$ . À noter qu'une même famille de droites peut être décrite par plusieurs de telles applications  $b$  et  $v$ .

Une *caustique* est une courbe qui est tangente à une famille de droites (de classe  $C^1$ ) dans le plan. Plus précisément, étant donnée une famille de droites  $D_t \subset \mathbf{R}^2$ ,  $t \in I \subset \mathbf{R}$  de classe  $C^1$ , une caustique est une courbe  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  telle que (pour tout  $t \in I$ )  $c(t)$  appartient à la droite  $D_t$  et telle que  $c'(t)$  est parallèle à  $D_t$ . À noter que la notion de caustique est (beaucoup) plus générale que présentée ici, mais on se restreint au cas d'une famille de droites en dimension 2 pour ne pas trop compliquer la situation.

L'exemple classique d'une caustique s'obtient par pliage d'une feuille de papier avec un bord droit. Prenons une feuille de papier A4 et dessinons quelque part un point  $F$  (on obtient le meilleur résultat quand on prend  $F$  à peu près à un huitième de la hauteur du bord long, voir le dessin). Ensuite on fixe un point  $P$  sur un des deux bords long (ce point joue le rôle du paramètre  $t$ ) et on plie la feuille de sorte que  $P$  se trouve sur  $F$ . La plie  $D_P$  sera notre droite associée au paramètre  $P$ . Quand on a effectué ce pliage pour un grand nombre de points  $P$  sur le bord, on voit apparaître une courbe délimitée par les plis, et on a l'impression que c'est une parabole.

DESSIN

Ⓟ **11.2 Proposition.** Soit  $D_t$ ,  $t \in I$  une famille de droites dans  $\mathbf{R}^2$ . Si la droite  $D_t$  est décrite par un point de base  $b(t)$  et un vecteur directeur  $v(t)$ , alors la caustique associée à cette famille de droites existe si  $v'(t)$  n'est jamais colinéaire à  $v(t)$ . Dans ce cas la caustique  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est donnée par la formule

$$c(t) = b(t) - \frac{\det(b'(t), v(t))}{\det(v'(t), v(t))} \cdot v(t) .$$

Ⓟ **11.3 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière (de classe  $C^2$ ) dont la courbure  $\kappa(t)$  ne s'annule jamais et soit  $D_t$  la droite passant par  $\gamma(t)$  et perpendiculaire à la droite tangente à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Alors la caustique  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  de la famille de droites  $D_t$ ,  $t \in I$  est la développée de  $\gamma$ .



**11.4 Définition.** Une *ortho-caustique* (terminologie non-standard) est une courbe qui est orthogonal à une famille  $D_t$ ,  $t \in I \subset \mathbf{R}$  de droites dans  $\mathbf{R}^n$ . Plus précisément, c'est une courbe  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  telle que  $c(t)$  appartient à  $D_t$  et que  $c'(t)$  est orthogonal à  $D_t$ . Si on part d'une courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  et qu'on prend  $D_t$  la droite tangente à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ , alors on parle d'une *développante* de  $\gamma$ .

Ⓟ **11.5 Proposition.** Soit  $D_t$ ,  $t \in I$  une famille de droites dans  $\mathbf{R}^n$ . Si la droite  $D_t$  est décrite par un point de base  $b(t)$  et un vecteur directeur  $v(t)$ , alors une ortho-caustique associée à cette famille de droites est une courbe  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  donnée par

$$(11.6) \quad c(t) = b(t) + \lambda(t) \cdot v(t) ,$$

où  $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction qui vérifie l'équation différentielle

$$(11.7) \quad \lambda'(t) = -\frac{\langle v'(t), v(t) \rangle}{\langle v(t), v(t) \rangle} \cdot \lambda(t) - \frac{\langle b'(t), v(t) \rangle}{\langle v(t), v(t) \rangle} .$$

**Nota Bene.** L'équation différentielle (11.7) est de la forme  $\lambda' = f \cdot \lambda + g$  pour des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $I$ . Elle a “donc” toujours des solutions définies sur l'intervalle  $I$  entier. Plus précisément, si on note  $F$  une primitive (fixe) de  $f$  et  $H$  une primitive (fixe) de la fonction  $h$  définie comme

$$h(t) = g(t) \cdot \exp(-F(t)) ,$$

alors la solution générale est donnée par

$$\lambda(t) = (H(t) + C) \cdot \exp(F(t)) , \quad C \in \mathbf{R} .$$

On l'obtient en résolvant d'abord l'équation homogène  $\lambda' = f\lambda$  et en appliquant ensuite la méthode de la variation de la constante.

Ⓟ **11.8 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée par longueur d'arc. Alors une développante  $c$  de  $\gamma$  est donnée par

$$c(t) = \gamma(t) - (t - t_o) \cdot \gamma'(t) ,$$

pour une constante  $t_o \in \mathbf{R}$  arbitraire.

Le résultat [11.8] a une très jolie interprétation. On s'imagine une courbe dans  $\mathbf{R}^2$  sur laquelle on a collé un ruban adhésif non-extensible. Ensuite on veut décoller ce ruban en tirant dessus. Dans un premier temps on suppose avoir décollé un morceau et que le ruban suit la droite tangente au point où il commence à se détacher. On suppose que pour décoller il faut soulever le ruban, ce qui veut dire qu'il ne faut pas tirer dans le sens du ruban (il est non-extensible), mais qu'il faut tirer dans la direction orthogonale (on voit apparaître la condition d'une ortho-caustique). Si on tire un tout petit peu dans la direction orthogonale, le ruban se détache un petit peu, jusqu'au moment où on est de nouveau dans la direction de la droite tangente au (nouveau) point où il commence à se détacher.

#### DESSIN

La longueur du morceau de ruban décollé est égale à la longueur du morceau de la courbe sur lequel le ruban était collé. Autrement dit, la longueur du ruban entre nos doigts et le point où il commence à être attaché à la courbe est égale à la

longueur du morceau de courbe sur lequel le ruban était collé avant décollage. En plus, nos doigts se trouvent sur la droite tangente de la courbe au point concerné. Mais pas dans la direction de la courbe, mais dans la direction opposée : plus qu'on décolle le ruban (augmentant le paramètre  $t$ ), plus qu'on est en arrière sur la droite tangente.

## 12. Courbes hyperrégulières

**12.1 Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe régulière (de classe  $C^2$ ).

• On dit que  $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^n$  est un *vecteur normal unitaire principal*, abrégé comme *vecteur n.u.p.*, à la courbe  $\gamma$  au point  $p = \gamma(t)$  (pour un  $t \in I$ ) s'il vérifie les trois conditions :

- $\mathbf{n}$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$  :  $\langle \mathbf{n}, \gamma'(t) \rangle = 0$ ,
- $\mathbf{n}$  est unitaire :  $\|\mathbf{n}\| = 1$  et
- $\gamma''(t)$  appartient au sous-espace vectoriel engendré par  $\gamma'(t)$  et  $\mathbf{n}$ .

• Un *champ normal unitaire principal*, abrégé comme *champ n.u.p.*, le long la courbe  $\gamma$  est une application (au moins) continue  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  telle que pour tout  $t \in I$  le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur normal unitaire principal à la courbe au point  $\gamma(t)$ . Et on dit que la courbe  $\gamma$  est *hyperrégulière* (terminologie non-standard) s'il existe un champ n.u.p le long la courbe.

• Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est hyperrégulière et si  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un champ n.u.p le long la courbe, alors le nombre  $\kappa(t)$  défini par

$$\kappa(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \iff k_\gamma(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{n}(t)$$

est appelé la *courbure (relative)* de  $\gamma$  au point  $p = \gamma(t)$ . La courbure relative dépend donc du choix du champ n.u.p, contrairement à la courbure absolue qui ne dépend pas d'un choix mais qui est toujours positive. Une autre différence entre la courbure relative et la courbure absolue est que la dernière est définie pour toute courbe régulière, tandis que la première ne l'est que pour des courbes hyperrégulières.

**12.2 Corollaire.** Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est hyperrégulière, alors la courbure absolue  $\kappa_a(t)$  [10.7] vaut  $|\kappa(t)|$ .

**12.3 Lemme.** Supposons qu'on a deux courbes  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  qui sont équivalentes par reparamétrage et soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage.

- Si  $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^n$  est un vecteur n.u.p à la courbe  $\gamma_1$  au point  $\gamma_1(t)$ , alors  $\mathbf{n}$  est un vecteur n.u.p à la courbe  $\gamma_2$  au point  $\gamma_2(\varphi^{-1}(t))$ .
- Si  $\mathbf{n} : I_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  un champ n.u.p le long la courbe  $\gamma_1$ , alors  $\hat{\mathbf{n}} : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  défini par  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \varphi$  est un champ n.u.p le long la courbe  $\gamma_2$ .

En particulier, toute courbe hyperrégulière est équivalente par reparamétrage à une courbe hyperrégulière paramétrée par longueur d'arc.

Ⓟ **12.4 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe régulière (de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ ).

- (i) Si pour  $t \in I$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants, alors il existent exactement deux vecteurs n.u.p à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  :  $\pm k_\gamma(t) / \|k_\gamma(t)\|$ .
- (ii) Si pour tout  $t \in I$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants, alors le champ  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  défini par  $\mathbf{n}(t) = k_\gamma(t) / \|k_\gamma(t)\| \equiv k_\gamma(t) / \kappa_a(t)$  (voir [10.7]) est un champ n.u.p le long  $\gamma$ .
- (iii) Si  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un champ n.u.p le long  $\gamma$ , alors  $-\mathbf{n}$  l'est aussi.

(iv) Si l'ensemble  $J \subset I$  défini comme

$$J = \{ t \in I \mid \gamma'(t) \text{ et } \gamma''(t) \text{ indépendants} \}$$

est dense dans  $I$ , alors il existe au plus deux champs n.u.p le long  $\gamma$ .

**12.5 Corollaire/reformulation.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe régulière.

- (i) Si la courbure absolue  $\kappa_a$  n'a pas de zéros, alors  $\gamma$  est une courbe hyperrégulière.
- (ii) Si  $\gamma$  admet un champ n.u.p, elle en admet deux.
- (iii) Si l'ensemble des points où la courbure absolue ne s'annule pas est dense dans  $I$ , alors il existe au plus deux champs n.u.p.

Ⓟ **12.6 Lemme (“division de vecteurs”).** Soit  $U \subset \mathbf{R}^p$  un ouvert et soit  $f, g : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux fonctions de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$  telles que  $f$  ne s'annule jamais, c'est-à-dire, pour tout  $x \in U$  on a  $f(x) \neq 0$ . S'il existe une fonction  $\lambda : U \rightarrow \mathbf{R}$  telle que pour tout  $x \in U$  on a l'égalité

$$g(x) = \lambda(x) \cdot f(x) ,$$

alors  $\lambda$  est aussi de classe  $C^k$ .

Ⓟ **12.7 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière dans le plan. Alors l'application  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot R_{\pi/2}(\gamma'(t)) ,$$

où  $R_{\pi/2}$  est la rotation d'angle  $\pi/2$ , est un champ n.u.p. Autrement dit, toute courbe régulière dans  $\mathbf{R}^2$  est hyperrégulière. Et si  $\hat{\mathbf{n}} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est un champ n.u.p, alors il existe  $\varepsilon = \pm 1$  tel que pour tout  $t \in I$  on a  $\hat{\mathbf{n}}(t) = \varepsilon \cdot \mathbf{n}(t)$ .

**12.8 Convention.** Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est une courbe régulière dans  $\mathbf{R}^2$ , on choisira systématiquement le champ n.u.p  $\mathbf{n}$  donné par

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot R_{\pi/2}(\gamma'(t)) ,$$

ce qui se réduit à  $\mathbf{n}(t) = R_{\pi/2}(\gamma'(t))$  au cas où la courbe est paramétrée par longueur d'arc.

Ⓟ **12.9 Lemme.** La courbure qu'on a obtenu en dimension 2 en [9.6] est la courbure relative définie à l'aide du champ n.u.p donné en [12.7].

**Remarque pour les comparateurs.** Dans la littérature on confond souvent la courbure absolue avec la courbure relative qui sont reliées par  $\kappa_a(t) = |\kappa(t)|$  [12.2]. La plupart du temps cela ne pose aucun problème, en particulier quand on ne s'intéresse qu'à la valeur de la courbure dans un point donné. Car dans ce cas, si pour le choix d'un champ n.u.p  $\mathbf{n}$  on a trouvé une valeur négative pour la courbure relative, il suffit de prendre le champ n.u.p  $-\mathbf{n}$  pour obtenir une valeur positive. Autrement

dit : tant que la courbure relative a un signe constant, on peut toujours supposer que c'est positive. Ce n'est que dans les cas où la courbure relative change de signe que la différence devient important. On trouvera plus de détails sur cet aspect dans §13.

**Nota Bene.** Si on compare [12.4] avec [12.7], on voit qu'il y a une différence importante entre la dimension 2 et une dimension quelconque en ce qui concerne l'existence et "l'unicité" d'un champ n.u.p le long une courbe régulière  $\gamma$ . En dimension 2 il existe toujours exactement deux champs n.u.p (l'un l'opposé de l'autre), et en plus on peut en choisir un qui est déterminé d'une façon unique par la courbe. Par contre, ce choix unique dépend de l'orientation de la courbe dans le sens que si on change l'orientation de la courbe, alors on change le champ n.u.p de signe. Et donc la courbure (relative) changera aussi de signe. Ceci est implicite dans [12.9] quand on le compare avec [9.8].

Par contre, en dimension  $n > 2$  la situation est beaucoup moins claire. Si dans un point  $t \in I$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont dépendants, alors il est immédiat que tout vecteur unitaire orthogonal à  $\gamma'(t)$  est un vecteur n.u.p à la courbe au point  $\gamma(t)$ . Avec [12.4.i] on en déduit qu'en chaque point  $\gamma(t)$  il existe toujours plusieurs vecteurs n.u.p : au moins deux, sinon une infinité. Avec [12.4.ii] on pourra croire qu'il suffit de faire un choix convenable pour un vecteur n.u.p dans chaque point où  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont dépendants pour obtenir un champ n.u.p le long la courbe. Rien n'est moins vrai ! Le premier problème se voit déjà en dimension 2 avec la courbe  $\gamma(t) = (t, t^3)$ . Il n'y a qu'un seul point  $t = 0$  où  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont dépendants, mais il n'y a aucun choix d'un vecteur n.u.p au point  $\gamma(0)$  qui "recolle" les deux champs  $k_\gamma(t)/\|k_\gamma(t)\|$  pour  $t < 0$  et  $t > 0$  pour en faire une application continue sur tout  $\mathbf{R}$ . Mais bon, dans cet exemple il suffit de changer d'un côté ce champ  $k_\gamma/\|k_\gamma\|$  de signe pour le faire. Malheureusement ceci ne marchera pas en toute généralité en dimension  $n > 2$ . Dans [17.1] on donnera une courbe en dimension 3 (de classe  $C^\infty$ ) avec un seul point où  $\gamma''(t)$  et  $\gamma'(t)$  sont dépendants et pour laquelle il n'existe aucun champ n.u.p. Concernant l'existence d'un champ n.u.p, le résultat [12.4.ii] est donc optimal.

Concernant l'unicité d'un champ n.u.p, on sait déjà que s'il existe un champ n.u.p, alors il en existe deux. Mais en vu de [12.7] et [12.4.iv] on pourrait espérer que prendre l'opposé est le seul degré de liberté qu'on a. Mais comme pour l'existence, cette espoir est vain en dimension  $n > 2$  et le résultat [12.4.iv] est optimal. Voici pourquoi. L'ensemble  $J \subset I$  dans [12.4.iv] n'est pas dense si (et seulement si) il existe un intervalle  $]t_1, t_2[ \subset I$  tel que pour tout  $t_1 < t < t_2$  la courbure absolue  $\kappa_a(t) = 0$ . Selon [??] ceci est équivalente à dire que le morceau de courbe entre  $t_1$  et  $t_2$  est un morceau de droite. Et dans [17.2] on montre dans un exemple (d'une courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^\infty$  avec  $\kappa_a(t) = 0$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$ ) que dans cette situation on peut construire une infinité de champs n.u.p.

Malgré ces mis en garde, les "contre exemples" sont "construits" et les courbes qui ont une expression "normale" admettent, quand se ne sont pas des droites, exactement deux champs n.u.p et sont "donc" hyperrégulières. Mais même dans ces cas il reste une différence importante entre la dimension 2 et la dimension supérieure : en dimension 2 il y a un choix "canonique" pour un champ n.u.p (mais un choix qui dépend de l'orientation de la courbe), tandis que en dimension supérieure un tel choix n'existe pas. Étant donné que la liberté d'office pour un champ n.u.p (prendre l'opposé) change le signe de la courbure relative, la morale de cette histoire est que

le signe de la courbure relative dépend vraiment du choix d'un champ n.u.p, surtout en dimension  $n > 2$  et qu'il faut donc toujours préciser quel champ n.u.p on a utilisé.

### 13. Classification

L'idée intuitive derrière la classification des points d'une courbe (paramétrée) est le comportement du volant d'une voiture qui roule sur une autoroute. Si on roule tout droit, le volant est (en permanence) en position neutre et si on se trouve dans un virage, le volant est tourné vers la gauche ou vers la droite. Par contre, le fait que le volant se trouve en position neutre ne veut pas dire qu'on roule tout droit : il suffit de penser à une route de montagne qui zigzague de gauche à droite mais jamais droit. Pourtant, quand on passe d'un virage vers la gauche à un virage vers la droite, le volant passe (forcément) par la position neutre. Et avec ces idées on a trouvé les trois classifications d'un point d'une courbe paramétrée : le morceau de droite, le point ordinaire et le point d'inflexion. Pour mettre cela sous forme mathématiques, il y a deux façon de procéder : soit on utilise la (fonction de) courbure, soit on utilise une approche par la suite des dérivées (de la courbe en un point). La première a le désavantage qu'elle ne s'applique que à des points réguliers et le deuxième à le désavantage qu'elle est moins facile à déterminer.

**13.1 Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée. On dit que  $\gamma$  est un *morceau de droite* s'il existe une droite  $D \subset \mathbf{R}^n$  telle que  $\gamma(I) \subset D$ .

**13.2 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe régulière (de classe  $C^2$ ). Alors les énoncés suivants sont équivalents.

- (i)  $\gamma$  est un morceau de droite.
- (ii) Pour tout  $t \in I$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont dépendants/colinéaires.
- (iii) La fonction de courbure absolue  $\kappa_a : I \rightarrow \mathbf{R}$  est identiquement nulle.

Ⓟ **13.3 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe hyperrégulière pour laquelle l'ensemble  $J \subset I$  défini par

$$J = \{t \in I \mid \kappa(t) \neq 0\} ,$$

est dense dans  $I$ , i.e.,  $I \subset \overline{J} \subset \mathbf{R}$  (ce qui est en particulier le cas s'il n'y a qu'un nombre fini de points où  $\kappa$  est nulle). Alors pour tout  $s, t \in I$  le produit

$$\kappa(s) \cdot \kappa(t)$$

ne dépend pas du choix du champ n.u.p choisi pour définir la courbure relative.

Avec ces préparations, on peut finalement donner une classification de certains points sur une courbe régulière à l'aide de la courbure relative.

**13.4 Une première classification.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée régulière de classe  $C^2$ , soit  $t_o \in I$  et  $p = \gamma(t_o)$ .

- On dit que  $p$  est un *point d'un morceau de droite* s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$  on a  $\kappa_a(t) = 0$ .

• On dit que  $p$  est un *point ordinaire (régulier)* s'il existe  $\delta > 0$  tel que la restriction de  $\gamma$  à  $]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$  est une courbe hyperrégulière et tel que

$$s \in ]t_o - \delta, t_o[ \quad \text{et} \quad t \in ]t_o, t_o + \delta[ \quad \implies \quad \kappa(s) \cdot \kappa(t) > 0 .$$

Autrement dit, la courbure relative a le même signe des deux côtés de  $t_o$  (sur l'intervalle  $]t_o - \delta, t_o + \delta[$ ).

• On dit que  $p$  est un *point d'inflexion (régulier)* s'il existe  $\delta > 0$  tel que la restriction de  $\gamma$  à  $]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$  est une courbe hyperrégulière et tel que

$$s \in ]t_o - \delta, t_o[ \quad \text{et} \quad t \in ]t_o, t_o + \delta[ \quad \implies \quad \kappa(s) \cdot \kappa(t) < 0 .$$

Autrement dit, la courbure relative a un signe différent des deux côtés de  $t_o$  (sur l'intervalle  $]t_o - \delta, t_o + \delta[$ ).

Remarquons tout de suite que cette classification ne dépend pas du paramétrage ni du choix du champ n.u.p utilisé pour définir la courbure relative. Pour un point d'un morceau de droite c'est parce que la courbure absolue est invariant sous reparamétrage (ou par [13.2]) et pour un point ordinaire ou d'inflexion c'est parce que la courbure relative est définie à l'aide du vecteur de courbure qui est lui invariant sous reparamétrage et à l'aide d'un champ n.u.p dont le choix ne change pas la classification selon [13.3].

**13.5 Corollaire.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée régulière de classe  $C^2$  et soit  $t_o \in I$  tel que la courbure absolue  $\kappa_a(t_o)$  soit non-nulle. Alors  $\gamma(t_o)$  est un point ordinaire (régulier).*

Une interprétation géométrique de la classification donnée en [13.4] pour les courbes régulières planes (à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ ) est donnée par le comportement du graphe par rapport à la droite tangente. Si  $\gamma(t_o)$  est un point d'un morceau de droite, alors, selon [??] et [13.1], la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $J = ]t_o - \delta, t_o + \delta[$  est contenu dans une droite. En particulier ce morceau de droite coïncide avec la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$  (et ce résultat reste vrai pour une courbe dans n'importe quelle dimension).

Soit maintenant  $p = \gamma(t_o)$  un point (régulier) ordinaire ou d'inflexion d'une courbe plane  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Parce qu'on est en dimension 2, la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma \subset \mathbf{R}^2$  divise l'espace  $\mathbf{R}^2$  en deux demi-plans. La distinction entre un point ordinaire et un point d'inflexion est qu'il existe un (petit) voisinage de  $t_o$  tel que pour un point ordinaire la courbe se trouve dans un des deux demi-plans et que pour un point d'inflexion elle change de demi-plan en passant par  $t_o$  (et dans les deux cas il n'y a que le point  $p = \gamma(t_o)$  qui se trouve sur la droite tangente).

#### DESSIN

En dimension plus grande que 2 la droite tangente ne divise plus l'espace en deux morceaux, mais en utilisant l'hyperrégularité le même idée persiste. Par hypothèse d'un point régulier ordinaire ou d'inflexion, il existe un (petit) voisinage de  $t_o$  tel que la courbe est hyperrégulière sur ce voisinage. On peut donc considérer le plan engendré par  $\gamma'(t_o)$  et le vecteur n.u.p  $\mathbf{n}(t_o)$ . Après projection orthogonal de la courbe sur ce plan, la même distinction entre point ordinaire et d'inflexion s'applique. La formulation mathématiquement exacte de ce résultat est donnée en [13.7].



**13.6 Lemme.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^2$  une droite décrite par un point de base  $b$  et un vecteur directeur  $v$  et soit  $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^2$  un vecteur non-nul orthogonal à  $v$  :  $\langle v, \mathbf{n} \rangle = 0$ . Alors la droite  $D$  partage l'espace  $\mathbf{R}^2$  en trois morceaux : les deux demi-plans ouverts  $O_{\pm}$  de chaque côté de la droite et la droite  $D$  elle même. Ces trois morceaux sont décrits par (voir aussi [4.5])

$$\begin{aligned} O_+ &= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \langle x - b, \mathbf{n} \rangle > 0\} \\ D &= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \langle x - b, \mathbf{n} \rangle = 0\} \\ O_- &= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \langle x - b, \mathbf{n} \rangle < 0\} . \end{aligned}$$

**(P) 13.7 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe hyperrégulière (de classe  $C^2$ ), soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  un champ n.u.p le long  $\gamma$  et soit  $p = \gamma(t_o)$  un point sur la courbe.

- (i) Dans le plan  $P$  passant par  $p$  et engendré par les vecteurs  $\gamma'(t_o)$  et  $\mathbf{n}(t_o)$  (dans le cas  $n = 2$  on a  $P = \mathbf{R}^2$ , l'espace total) la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  est décrit par

$$DT_{t_o}\gamma = \{x \in P \mid \langle x - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle = 0\} .$$

En plus, il existe  $\delta > 0$  et  $\epsilon = \pm 1$  tels qu'on a les propriétés suivantes.

- (ii) Si  $p$  est un point ordinaire (régulier), alors pour tout  $t_o - \delta < s < t_o$  et tout  $t_o < t < t_o + \delta$  on a

$$\epsilon \cdot \langle \gamma(s) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \cdot \langle \gamma(t) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle > 0 .$$

Autrement dit, tous les points  $\gamma(s)$  et  $\gamma(t)$  se trouvent (strictement) du même côté de la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  (dans le plan  $P$ ).

- (iii) Si  $p$  est un point d'inflexion, alors pour tout  $t_o - \delta < s < t_o$  et tout  $t_o < t < t_o + \delta$  on a

$$\epsilon \cdot \langle \gamma(s) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \cdot \langle \gamma(t) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle > 0 .$$

Autrement dit, tous les points  $\gamma(s)$  se trouvent (strictement) d'un côté de la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  (dans le plan  $P$ ) et tous les points  $\gamma(t)$  se trouvent (strictement) de l'autre côté.

La classification donnée en [13.4] ne s'applique qu'aux points réguliers (d'une courbe de classe  $C^2$ ), mais n'est pas complète. Dans [13.5] on a vu que tous les points (réguliers) où la courbure est non nulle sont des points ordinaires. Supposons donc que la courbure est nulle en  $t_o$ . Si c'est un zéro isolé de  $\kappa$ , c'est-à-dire que dans un voisinage de  $t_o$  il n'y a pas d'autres zéros de  $\kappa$ , alors il n'y a que deux possibilités : soit le signe de  $\kappa$  est le même des deux côtés, soit le signe de  $\kappa$  change d'un côté à l'autre. Mais on ne peut pas pour autant conclure qu'il s'agit d'un point ordinaire ou d'inflexion, car on ne sait pas si la courbe est hyperrégulière dans un voisinage de  $t_o$  (dans le cas d'une courbe plane ça sera le cas [12.7]). Et l'absence de cette propriété empêche l'application de notre classification. Les "problèmes" de notre classification commencent donc quand  $\kappa$  a un zéro en  $t_o$ ; déjà pour des zéros isolés il y a des cas problématiques, mais cela devient encore plus problématique quand un tel zéro n'est pas isolé (sauf quand la courbure est identiquement nulle dans un voisinage, auquel cas il s'agit d'un point d'un morceau de droite).

Dans §17 on donne des exemples plus ou moins tordus pour montrer les limites de notre classification. Par exemple, dans [17.1] on donne une courbe régulière pour laquelle  $t = 0$  présente un zéro isolé de la courbure sans qu'il existe un voisinage de  $t = 0$  dans lequel la courbe est hyperrégulière. Ou bien dans [17.3], où on a une courbe hyperrégulière (car dans  $\mathbf{R}^2$ ) avec  $\kappa(0) = 0$ . Mais tout voisinage de 0 (aussi petit qu'il soit) contient des points avec courbure nulle **et** des points avec courbure non-nulle. Ce point ne rentre donc pas non plus dans notre classification. On peut aussi penser à un point où on passe d'un régime avec courbure non-nulle à un régime d'un morceau de droite (et oui, ceci est possible même avec des courbes de classe  $C^\infty$ ). D'un côté on aura donc des points ordinaires et de l'autre des points d'un morceaux de droite. Comment classer le point de transition ? Le problème de tous ces points est qu'il y a trop de sortes qu'on puisse en donner une classification. C'est plus ou moins un aveu d'incompétence.

Passons donc à l'approche d'une classification par la suite des dérivées. Cette approche s'applique aussi bien à des points réguliers que singuliers, mais n'est pas la solution miracle pour nos problèmes. On récupère une classifications de quelques points réguliers laissés de côté par la classification par la courbure et on pourrait espérer de classer au moins les points singuliers isolés. Mais même quand on se restreint aux points singuliers isolés, il y a trop de possibilités. Par exemple, dans [17.4] on a une courbe de classe  $C^\infty$  avec  $\gamma(0)$  le seul point singulier (donc isolé) où la courbe fait un angle (droit). Il se trouve que les seuls points (réguliers ou singuliers) qu'on peut raisonnablement classer à l'aide d'un développement limité sont les points où il y a (au moins) deux dérivées indépendantes.

L'hypothèse de l'existence de deux dérivées indépendantes a deux "avantages" bien précises. D'abord cela permet de donner l'allure de la courbe dans un voisinage du point concerné, plus précis que le simple constat qu'elle reste (ou non) du même côté de la droite tangente. Et ensuite on en déduit qu'un tel point est nécessairement entouré par des points réguliers avec une courbure (absolue) non-nulle (donc des points ordinaires) et qu'il existe un champ n.u.p qui se prolonge par continuité au point concerné (singulier ou non). Pour un point régulier on se trouve donc exactement dans les conditions utilisées dans [13.4], ce qui nous suggère fortement d'utiliser les mêmes noms selon le signe de la courbure relative autour du point concerné.

**Remarque pour le lecteur curieux.** Un début d'explication pourquoi on se limite à des points où il y a (au moins) deux dérivées indépendantes est comme suit. On remarque tout d'abord que tous les (contre) exemples tordus (de classe  $C^\infty$ ) qu'on présente dans §17 reposent sur l'existence de fonctions réelle non-constantes dont toutes les dérivées en un point s'annulent. Avec de telles fonctions on peut construire des courbes avec des points extrêmement variés : il "suffit" d'utiliser une telle fonction pour "ralentir" une courbe à un point donné pour pouvoir le recoller à un comportement complètement différent. Le prix à payer est qu'en ce point il n'y a plus qu'une seule dérivées indépendante (quelque chose qui ne changera pas en prenant une courbe équivalente par reparamétrage).

**13.8 Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il existe deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$ . On définit les entiers  $p$  et  $q$

tels que  $\gamma^{(p)}(t_o)$  est la première dérivée non-nulle en  $t_o$  et  $\gamma^{(q)}(t_o)$  la première dérivée qui est indépendante de  $\gamma^{(p)}(t_o)$  :

$$(13.9) \quad \begin{aligned} &\gamma^{(k)}(t_o) = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq k < p \\ &\gamma^{(p)}(t_o) \neq 0 \\ &\gamma^{(k)}(t_o) \text{ colinéaire avec } \gamma^{(p)}(t_o) \quad \text{pour tout } p < k < q \\ &\gamma^{(q)}(t_o) \text{ indépendant de } \gamma^{(p)}(t_o) . \end{aligned}$$

Le fait qu'il y a des dérivées indépendantes implique qu'il y en a qui ne sont pas nuls, et donc  $p$  existe. Et parce qu'il y a au moins deux dérivées indépendantes,  $q$  existe (car sinon toutes les dérivées seront colinéaires avec  $\gamma^{(p)}(t_o)$ ). Bien sûr, si on a  $p = 1$ , on sera dans le cas régulier, mais dès qu'on a  $p > 1$  on aura un point singulier.

Quand on regarde la définition des entiers  $p$  et  $q$  associés à un point  $\gamma(t_o)$  d'une courbe paramétrée, il faut tout d'abord se rappeler qu'on a montré dans [7.7] que s'il y a une dérivée non-nulle, alors on aura une droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  au point  $\gamma(t_o)$ . L'existence des deux entiers  $p$  et  $q$  est donc plus forte que l'existence de la droite tangente. Ensuite il faut se poser la question de la pertinence de ces deux entiers : si on fait le calcul pour une courbe équivalente par reparamétrage, trouve-t-on les mêmes entiers ?

Ⓟ **13.10 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il existe deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$ . Alors les entiers  $p$  et  $q$  définis par (13.9) sont invariant par reparamétrage. Plus précisément, soit  $\hat{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  une autre courbe paramétrée équivalente à  $\gamma$  par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : J \rightarrow I$  et soit  $s_o = \varphi^{-1}(t_o)$ . Alors il existe aussi deux dérivées indépendantes  $\hat{\gamma}^{(i')}(s_o)$  et  $\hat{\gamma}^{(j')}(s_o)$  et les entiers  $p$  et  $q$  définis pour la courbe  $\hat{\gamma}$  par (13.9) sont les mêmes que pour  $\gamma$ .

**13.11 Une deuxième classification.** Une fois qu'on sait que les entiers  $p$  et  $q$  associés à un point de la courbe où il y a (au moins) deux dérivées indépendantes sont "intrinsèques," on peut les utiliser pour classifier un tel point  $\gamma(t_o)$  selon le tableau suivant.

	$p$ impair	$p$ pair
$q$ impair	point d'inflexion	point de rebroussement de première espèce
$q$ pair	point ordinaire	point de rebroussement de deuxième espèce

Si  $\gamma(t_o)$  est un point sur une courbe paramétrée où il y a (au moins) deux dérivées indépendantes et où on a  $p > 1$ , alors on a déjà signalé qu'il s'agit d'un point singulier. Notre classification sera donc indépendante de la classification précédente dans le cas régulier. Par contre, pour  $p = 1$  on est dans le cas régulier et il peut y avoir des cas où les deux classifications s'appliquent. Il faut donc s'assurer que dans

un tel cas les noms “point ordinaire” et “point d’inflexion” correspondent bien avec la définition [13.4], ce qu’on fera dans [13.18].

Mais il y a d’autres arguments (autres que la correspondance quand les deux définitions s’appliquent) qui justifient le choix des noms “ordinaire” et “d’inflexion.” Dans [13.14] on montrera qu’on a les mêmes propriétés par rapport au comportement de la courbe vis-à-vis la droite tangente que dans le cas régulier [13.7] : pour un point ordinaire (et plus généralement dans le cas  $q$  pair) la courbe se trouve d’un seul côté de la droite tangente et pour un point d’inflexion (et plus généralement dans le cas  $q$  impair) la courbe passe d’un côté vers l’autre en passant par  $\gamma(t_o)$ . Encore une autre justification de ces noms dans le cas  $p > 1$  se trouve dans [14.3], où on montre qu’après reparamétrage par longueur d’arc (mais attention, ceci ne rentre pas dans notre notion d’équivalence, car ce n’est pas un difféomorphisme, même pas de classe  $C^1$ ) le point  $\gamma(t_o)$  devient un point régulier quand  $p$  est impair avec la classification ordinaire/d’inflexion (régulier) selon la parité de  $q$  (avec la contrainte  $q \geq 2p$ , car sinon la courbe reparamétrée n’est pas deux fois dérivable au point concerné et la courbe reparamétrée ne peut pas être hyperrégulière).

Commençons donc avec l’explication classique de notre deuxième classification d’un point  $\gamma(t_o)$  de la courbe où il existe deux dérivées indépendantes. On définit les entiers  $p, q \in \mathbf{N}$  comme dans (13.9) et on constate que, par hypothèse, il existe pour tout  $p < i < q$  un réel  $a_i \in \mathbf{R}$  tel que  $\gamma^{(i)}(t_o) = a_i \cdot \gamma^{(p)}(t_o)$ . On peut donc écrire un développement limité d’ordre  $q$  de  $\gamma$  au voisinage de  $t_o$  comme

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(t_o) + \frac{(t - t_o)^p}{p!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + \sum_{p < i < q} \frac{(t - t_o)^i}{i!} \cdot \gamma^{(i)}(t_o) \\ &\quad + \frac{(t - t_o)^q}{q!} \cdot \gamma^{(q)}(t_o) + (t - t_o)^q \cdot \varepsilon(t) \\ &= \gamma(t_o) + \frac{(t - t_o)^p}{p!} \cdot \left( 1 + \sum_{p < i < q} \frac{p! a_i (t - t_o)^{i-p}}{i!} \right) \cdot \gamma^{(p)}(t_o) \\ &\quad + \frac{(t - t_o)^q}{q!} \cdot \gamma^{(q)}(t_o) + (t - t_o)^q \cdot \varepsilon(t) , \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction vérifiant la condition  $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon(t) = 0$ .

Pour pouvoir plus facilement discuter le comportement de la courbe, on introduit quelques abréviations. On définit les vecteurs  $e_1, e_2 \in \mathbf{R}^n$  par

$$e_1 = \frac{1}{p!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{q!} \cdot \gamma^{(q)}(t_o) ,$$

qui sont, par hypothèse, deux vecteurs indépendants. On définit le plan  $P \subset \mathbf{R}^n$  comme le plan passant par  $\gamma(t_o)$  avec  $e_1$  et  $e_2$  comme vecteurs directeurs (dans le cas  $n = 2$ , i.e., une courbe plane,  $P$  sera tout l’espace). On décompose  $\varepsilon(t)$  en trois comme

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) \cdot e_1 + \varepsilon_2(t) \cdot e_2 + \varepsilon_\perp(t) ,$$

où  $\varepsilon_i$  est une fonction réelle et  $\varepsilon_\perp : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est orthogonal au plan  $P$ . Et finalement on introduit les fonctions  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$f(t) = 1 + \sum_{p < i < q} \frac{p! a_i (t - t_o)^{i-p}}{i!} + (t - t_o)^{q-p} \cdot \varepsilon_1(t) \quad \text{et} \quad g(t) = 1 + \varepsilon_2(t) .$$

Avec ces définitions on peut écrire le développement limité de  $\gamma$  au voisinage de  $t_o$  sous la forme plus compacte

$$(13.12) \quad \gamma(t) = \left( \gamma(t_o) + f(t) \cdot (t - t_o)^p \cdot e_1 + g(t) \cdot (t - t_o)^q \cdot e_2 \right) + (t - t_o)^q \cdot \varepsilon_{\perp}(t) ,$$

où la première partie est un point dans le plan  $P$  et la deuxième un vecteur orthogonal à ce plan. De plus, pour  $t$  proche de  $t_o$ , la longueur du vecteur orthogonal devient négligeable, car non seulement le facteur  $(t - t_o)^q$  devient très petit, mais on a en plus  $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_{\perp}(t) = 0$ .

On se concentre donc sur la partie dans le plan  $P$  et la remarque importante à faire est qu'on a les deux limites

$$\lim_{t \rightarrow t_o} f(t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_o} g(t) = 1 .$$

Avant d'énoncer le résultat précis, on commence avec quelques arguments heuristiques. Pour  $t$  proche de  $t_o$ , on prétend que les fonctions  $f$  et  $g$  sont constantes 1, on néglige la partie orthogonal à  $P$  et on écrit

$$\gamma(t) \approx \gamma(t_o) + (t - t_o)^p \cdot e_1 + (t - t_o)^q \cdot e_2 \equiv \gamma(t_o) + x \cdot e_1 + y \cdot e_2 .$$

Il est immédiat que les deux coefficients  $x$  et  $y$  vérifient la relation

$$(13.13) \quad |y| = |x|^{q/p} = \left( \sqrt[p]{|x|} \right)^q .$$

Dans le repère  $e_1, e_2$  (dans le plan  $P$ ) la courbe est donc le graphe de la fonction  $x \mapsto x^{q/p}$ . Sauf qu'il faut tenir compte des signes : pour  $t > t_o$  les deux coefficients  $x$  et  $y$  seront positifs, tandis que pour  $t < t_o$  les signes de  $x$  et de  $y$  dépendent de la parité de  $p$  et  $q$ . Ainsi on arrive aux allures heuristiques de la courbe  $\gamma$  au voisinage de  $t_o$  selon la parité de  $p$  et  $q$  comme présentées dans la figure 8.

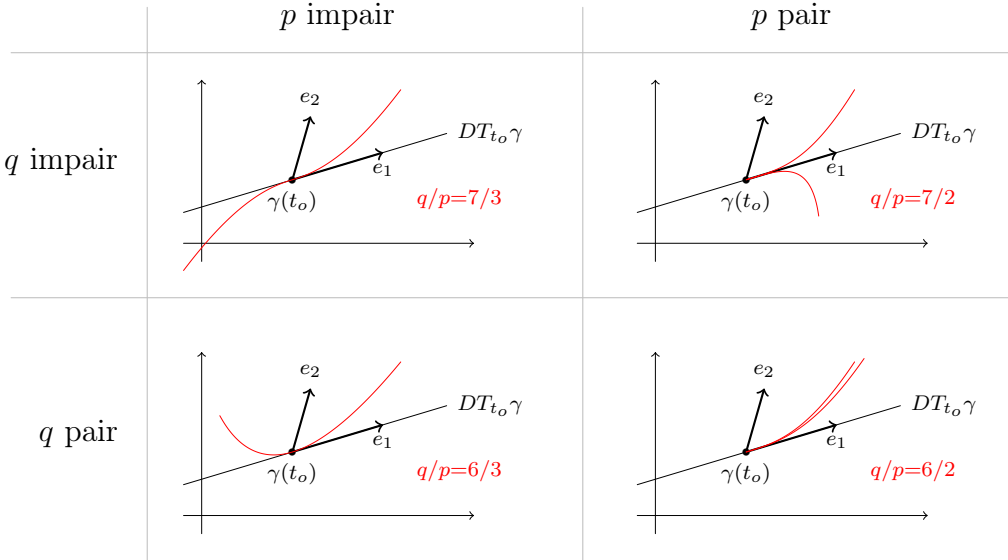


FIGURE 8. L'allure de  $\gamma$  au voisinage de  $t_o$

Concernant cette figure il y a plusieurs remarques à faire. D'abord qu'on a "triché" dans le cas  $p$  et  $q$  pairs : on aurait dû mettre la même courbe pour  $t > t_o$  et  $t < t_o$ . Mais en réalité il y aura une (toute) petite différence entre les deux cas (qui a disparue dans notre approximation), ce qu'on a montré en présentant les deux côtés légèrement différemment. Et ensuite que, selon [7.7], le vecteur  $e_1$  (un multiple de

$\gamma^{(p)}(t_o)$ ) est bien un vecteur directeur de la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  au point  $t_o$ . Ceci est en parfait accord avec le fait que c'est le graphe de la fonction  $x \mapsto x^{q/p}$ , car  $q > p$  et donc cette dernière à une dérivée nulle en  $x = 0$ . Et finalement on voit bien que pour  $q$  pair la courbe se trouve d'une seule côté de la droite tangente (avec seulement le point  $\gamma(t_o)$  sur la droite) et que pour  $q$  impair elle change de côté. Mais toutes ces conclusions sont faites dans une approximation, en remplaçant les fonctions  $f$  et  $g$  par la valeur constante 1. Que cela ne met pas nos conclusions en cause sera montré dans [13.14], où on donne des résultats "exactes" qui justifient nos conclusions heuristiques faites ci-dessus.

**Ⓟ 13.14 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et  $t_o \in I$  tel qu'il existe deux dérivées indépendantes de  $\gamma$  au point  $t_o$ . Avec les notations introduites ci-dessus et l'hypothèse supplémentaire que  $\gamma$  est de classe (au moins)  $C^{q+2}$ , il existe  $\delta, \delta_{\pm} > 0$  et deux fonctions  $E_{\pm} : ]0, \delta[ \rightarrow ]-1, \infty[$  avec les propriétés suivantes (où  $\pi_P$  désigne la projection orthogonale de  $\mathbf{R}^n$  sur le plan  $P$ ).

(i)  $\lim_{x \downarrow 0} E_{\pm}(x) = 0$ .

(ii) La projection orthogonale du bout de courbe entre  $t_o$  et  $t_o + \delta_+$  sur le plan  $P$  est, dans le repère  $e_1, e_2$  de ce plan, le graphe de la fonction  $x \mapsto x^{q/p} \cdot (1 + E_+(x))$ . En formule :

$$\pi_P(\gamma(]t_o, t_o + \delta_+[)) = \{ \gamma(t_o) + x \cdot e_1 + x^{q/p} \cdot (1 + E_+(x)) \cdot e_2 \mid x \in ]0, \delta[ \}.$$

(iii) La projection orthogonale du bout de courbe entre  $t_o - \delta_-$  et  $t_o$  sur le plan  $P$  est, dans le repère  $e_1, e_2$  de ce plan, aux signes près le graphe de la fonction  $x \mapsto x^{q/p} \cdot (1 + E_-(x))$ . En formule :

$$\begin{aligned} \pi_P(\gamma(]t_o - \delta_-, t_o[)) = \\ \{ \gamma(t_o) + (-1)^p \cdot x \cdot e_1 + (-1)^q \cdot x^{q/p} \cdot (1 + E_-(x)) \cdot e_2 \mid x \in ]0, \delta[ \} . \end{aligned}$$

**Remarques.** • Dans le plan  $P$ , dont un point  $p$  est déterminé par deux "coordonnées"  $x, y \in \mathbf{R}$  selon

$$p = \gamma(t_o) + x \cdot e_1 + y \cdot e_2 ,$$

les deux côtés de la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  (dont  $e_1$  est un vecteur directeur) sont déterminés par le signe de  $y$ . Le résultat [13.14] nous dit donc directement que pour  $q$  pair la courbe (la partie image de l'intervalle  $]t_o - \delta_-, t_o + \delta_+[$ ) se trouve d'un côté de la courbe avec seulement le point  $\gamma(t_o)$  dessus ( $E_{\pm} > -1$  donc  $1 + E_{\pm} > 0$ ) et que pour  $q$  impair ce bout de courbe change de côté.

• Quand on sait que la courbe a l'allure du graphe de la fonction  $x \mapsto x^{q/p}$ , on pourrait croire qu'elle est bien lisse au voisinage de  $\gamma(t_o)$ . Mais en général cela ne sera pas le cas, car si  $q/p$  n'est pas un entier, ce graphe ne sera pas infiniment dérivable. Par exemple le cas  $p = 3$  et  $q = 4$ , dont le dessin laisse facilement croire qu'elle est lisse, n'est qu'une fois dérivable; la deuxième dérivée du graphe de  $x \mapsto x^{4/3}$  n'existe pas pour  $x = 0$ . Et il est extrêmement facile de construire des exemples avec  $p < q$  arbitraire : la courbe plane  $\gamma(t) = (t^p, t^q)$  a exactement deux dérivées non-nulles en  $t = 0$  :  $\gamma^{(p)}(0) = (p!, 0)$  et  $\gamma^{(q)}(0) = (0, q!)$ . C'est une courbe de classe  $C^\infty$ , mais son image est le graphe de la courbe  $x \mapsto x^{q/p}$  (avec seulement  $x \geq 0$  dans le cas  $p$  pair). Cette analyse de la "dérivabilité" de  $\gamma$  au point singulier sera confirmé dans §14.

Si dans notre deuxième classification on a  $p = 1$ , le point  $\gamma(t_o)$  est un point régulier. Selon [13.14] la courbe aura l'allure du graphe de la fonction  $x \mapsto x^q$  et la classification dépend de la parité de  $q$  : un point ordinaire si  $q$  est pair, un point d'inflexion si  $q$  est impair. La question naturelle est donc : que dit notre première classification ? Plus précisément, peut-on affirmer que la courbe est hyperrégulière (dans un voisinage de  $t_o$ ) et que la courbure aura (au plus) un zéro isolé en  $t_o$  ? La réponse est affirmative et même meilleure que cela. On va montrer, dans l'ordre, les résultats suivants. On commence avec le constat (assez simple) que s'il existe une dérivée non-nulle en  $t_o$ , alors soit c'est un point régulier, soit il s'agit d'un point singulier isolé. Ensuite on montre que, s'il existe deux dérivées indépendantes en  $t_o$  (le cas de notre deuxième classification), alors dans un voisinage de  $t_o$  la courbure absolue ne s'annule pas, à l'exception éventuelle du point  $t_o$  même. Et finalement que dans ce cas il existe une application continue  $t \mapsto \mathbf{n}(t) \in \mathbf{R}^n$  dans un voisinage de  $t_o$  (et donc en particulier continue en  $t_o$  !) telle que, en dehors du point  $t_o$ , c'est un champ n.u.p. Si on a  $p = 1$  (c'est-à-dire  $\gamma(t_o)$  un point régulier), alors on en déduit que cette application  $\mathbf{n}$  est (forcément) un champ n.u.p sur tout le voisinage de  $t_o$  et que les deux classifications coïncident.

Ⓟ **13.15 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il existe  $i \in \mathbf{N}^*$  avec  $\gamma^{(i)}(t_o) \neq 0$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $J = ]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$  et

$$\forall t \in J \setminus \{t_o\} : \gamma'(t) \neq 0 .$$

En particulier, si  $\gamma(t_o)$  est un point régulier, alors  $\gamma$  est une courbe régulière dans le voisinage  $J$  de  $t_o$  et si  $\gamma(t_o)$  est un point singulier, c'est un point singulier isolé.

Ⓟ **13.16 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il y a deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$ . On définit  $p, q \in \mathbf{N}^*$  comme dans [13.8] et  $J \subset I$  comme dans [13.15]. Si on définit  $\gamma''_{\perp}$  comme la partie de  $\gamma''$  qui est orthogonale à  $\gamma'$  :

$$\gamma''_{\perp}(t) = \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \gamma'(t) ,$$

et si on définit  $\gamma^{(q)}_{\perp}$  comme la partie de  $\gamma^{(q)}(t_o)$  qui est orthogonale à  $\gamma^{(p)}(t_o)$  :

$$\gamma^{(q)}_{\perp} = \gamma^{(q)}(t_o) - \frac{\langle \gamma^{(q)}(t_o), \gamma^{(p)}(t_o) \rangle}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|^2} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) ,$$

alors  $\gamma''_{\perp}$  est bien défini sur  $J \setminus \{t_o\}$  et sur ce domaine on a le développement limité

$$\gamma''_{\perp}(t) = (t - t_o)^{q-2} \left[ \frac{q-p}{(q-1)!} \gamma^{(q)}_{\perp} + \varepsilon_{t_o}(t) \right] .$$

Ⓟ **13.17 Corollaire.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée, soit  $t_o \in I$  tel qu'il y a deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$  et soit  $\delta > 0$  et  $J \subset I$  comme dans [13.15]. Alors il existe  $0 < \delta' \leq \delta$  tel que

$$\forall t \in J' \setminus \{t_o\} \quad : \quad \gamma'(t) \text{ et } \gamma''(t) \text{ sont indépendants,}$$

où  $J' = ]t_o - \delta', t_o + \delta'[ \subset I$ .



Ⓟ **13.18 Corollaire.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il y a deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$ . Soit  $p, q \in \mathbf{N}^*$  comme dans [13.8], soit  $\gamma''_{\perp}(t)$  et  $\gamma_{\perp}^{(q)}$  comme dans [13.16] et soit  $J'$  comme dans [13.17]. Alors l'application  $\mathbf{n} : J' \rightarrow \mathbf{R}^n$  définie par

$$\mathbf{n}(t) = \begin{cases} (-1)^q \cdot \|\gamma''_{\perp}(t)\|^{-1} \cdot \gamma''_{\perp}(t) & t < t_o \\ \|\gamma_{\perp}^{(q)}\|^{-1} \cdot \gamma_{\perp}^{(q)} & t = t_o \\ \|\gamma''_{\perp}(t)\|^{-1} \cdot \gamma''_{\perp}(t) & t > t_o \end{cases}$$

est continue et sa restriction à  $J' \setminus \{t_o\}$  est un champ n.u.p; dans le cas  $p = 1$  c'est même un champ n.u.p sur tout  $J'$ . En particulier dans le cas  $p = 1$ , la classification point ordinaire/d'inflexion donnée dans [13.11] correspond avec la classification donnée dans [13.4].

Les point d'un morceau de droite à part, on peut constater que la première classification concerne les points où la première dérivée est non-nulle, où la deuxième dérivée n'a que des zéros (vectorielles) isolés (pour que la courbure n'a que des zéros isolés) et où il existe un champ (continue) n.u.p  $\mathbf{n}$ , c'est-à-dire des vecteurs unitaires tels que la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\gamma'(t_o)$ ,  $\gamma''(t_o)$  et  $\mathbf{n}(t_o)$  est inférieure ou égale à 2. Et la deuxième classification concerne les points où la première dérivée n'a que des zéros isolés, où la deuxième dérivée n'a que des zéros isolés (parmi les zéros de la première dérivée) et où il existe un champ continue  $\mathbf{n}$  de vecteurs unitaires tels que la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\gamma'(t_o)$ ,  $\gamma''(t_o)$  et  $\mathbf{n}(t_o)$  est inférieure ou égale à 2. Cette dernière affirmation se justifie car en dehors d'un point singulier (isolé) le champ  $\mathbf{n}$  qu'on trouve dans notre deuxième classification est bien un champ n.u.p, et dans le cas d'un point singulier on aura  $\gamma'(t_o) = 0$  et donc forcément la dimension ne dépasse pas 2. Les deux classifications se ressemblent donc beaucoup et on pourrait croire que la première est incluse dans la deuxième. Mais il y a une situation où seulement la première classification s'applique : là où toutes les dérivées sont des multiples de  $\gamma'(t_o) \neq 0$ .



## 14. Désingularisation d'un point singulier

Si on regarde les dessins de la figure 8 pour  $p$  impair dans la classification des point singuliers avec deux dérivées indépendantes [13.11], alors on a l'impression qu'il n'y a rien de singulier. Et si on regarde l'approximation (13.13), on a une formule assez sympathique : la courbe est (presque) le graphe de la fonction  $x \mapsto x^r$  pour  $r > 1$ . Pour quantifier cette impression, on reparamètre la courbe par longueur d'arc et pour cela on considère, comme d'habitude, la fonction  $L : I \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$L(t) = \int_{t_o}^t \|\gamma'(s)\| \, ds .$$

Parce que  $\gamma$  est au moins de classe  $C^2$  (on parle de deux dérivées indépendantes), la fonction  $\|\gamma'\|$  est certainement continue (mais elle risque de ne pas être dérivable en  $t_o$  si  $\gamma'(t_o) = 0$ ) et donc la fonction  $L$  est au moins de classe  $C^1$ , donc en particulier continue. Le fait que  $t_o$  est un point singulier isolé implique que  $L$  est une fonction strictement croissante dans un voisinage  $J = ]t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon[$  de  $t_o$  ; l'image  $K = L(J)$  est donc un intervalle ouvert contenant 0. C'est donc une bijection continue  $L : J \rightarrow K$ , et donc la réciproque  $L^{-1} : K \rightarrow I$  est aussi continue [33.2]. Par contre, étant donné qu'on a  $L'(t_o) = 0$ , cela implique que la réciproque  $L^{-1}$  n'est pas dérivable en 0. Mais rien nous empêche de regarder la courbe  $\hat{\gamma} : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  définie par

$$\hat{\gamma}(s) = \gamma(L^{-1}(s)) .$$

C'est la même courbe, mais reparamétrisée par longueur d'arc. Le seul problème est qu'on ne sais pas si cette courbe est dérivable en  $s = 0$ . La fonction  $L^{-1}$  ne l'est pas, ce qui nous empêche d'appliquer la dérivée de fonctions composées. Avant d'énoncer le résultat exact, commençons avec un calcul approximatif, en ne retenant que le fait que  $\gamma^{(p)}(t_o)$  est la première dérivée non nulle. Dans un voisinage de  $t_o$  on peut donc faire le calcul approximatif suivant :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\approx \gamma(t_o) + \frac{(t - t_o)^p}{p!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) \quad , \quad \gamma'(t) \approx \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) \\ L(t) &= \int_{t_o}^t \|\gamma'(s)\| \, ds \approx \int_{t_o}^t \frac{|s - t_o|^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\| \, ds \\ &= \frac{(t - t_o) \cdot |t - t_o|^{p-1}}{p!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\| . \end{aligned}$$

On trouve donc comme approximation pour l'application réciproque  $L^{-1}$  :

$$L^{-1}(s) \approx \begin{cases} t_o + \sqrt[p]{\frac{p! \cdot s}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|}} & , \quad s \geq 0 \\ t_o - \sqrt[p]{\frac{-p! \cdot s}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|}} & , \quad s < 0 \end{cases} ,$$

ce qui donne pour la courbe reparamétrée par longueur d'arc l'approximation

$$\gamma(L^{-1}(s)) \approx \begin{cases} \gamma(t_o) + \frac{s}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) & , \quad s \geq 0 \\ \gamma(t_o) + (-1)^{p-1} \cdot \frac{s}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) & , \quad s < 0 . \end{cases}$$

Ce calcul suggère que la courbe reparamétrée par longueur d'arc est dérivable à gauche et à droite en  $s = 0$  avec dérivée  $\pm \gamma^{(p)}(t_o)/\|\gamma^{(p)}(t_o)\|$  (ce qui est bien un vecteur de longueur 1), et ceci malgré le fait que la fonction réciproque  $L^{-1}$  n'est pas dérivable en  $s = 0$ .

**Ⓟ 14.1 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée et soit  $t_o \in I$  tel qu'il y a deux dérivées indépendantes  $\gamma^{(i)}(t_o)$  et  $\gamma^{(j)}(t_o)$ . On définit la courbe  $\hat{\gamma}(s) = \gamma(L^{-1}(s))$  avec  $L$  donné par

$$L(t) = \int_{t_o}^t \|\gamma'(s)\| ds .$$

Si on définit  $p, q \in \mathbf{N}^*$  comme dans [13.8], alors on a les deux limites suivantes :

$$\lim_{s \downarrow 0} \hat{\gamma}'(s) = \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} \quad \text{et} \quad \lim_{s \uparrow 0} \hat{\gamma}'(s) = (-1)^{p-1} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} .$$

En particulier  $\hat{\gamma}$  est dérivable à gauche et à droite en  $s = 0$  et dérivable en  $s = 0$  si et seulement si  $p$  est impair (auquel cas  $\hat{\gamma}$  est de classe  $C^1$ ).

**Ⓟ 14.2 Proposition.** Avec les mêmes hypothèses et notation qu'en [14.1], si  $q < 2p$ , alors  $\hat{\gamma}$  n'est pas deux fois dérivable en  $s = 0$ , ni à gauche ni à droite. Par contre, pour  $q = 2p$  on a la limite (avec  $\gamma_{\perp}^{(q)}$  défini en [13.16])

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{\gamma}''(s) = \frac{p!(p-1)!}{(2p-1)!} \cdot \frac{\gamma_{\perp}^{(q)}}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|^2} ,$$

et pour  $q > 2p$  on a  $\lim_{s \rightarrow 0} \hat{\gamma}''(s) = 0$ . Dans le cas  $q \geq 2p$ ,  $\hat{\gamma}$  est donc deux fois dérivable à gauche et à droite en  $s = 0$  avec la même dérivée seconde des deux côtés. En particulier  $\hat{\gamma}$  est de classe  $C^2$  si  $p$  est impair et  $q \geq 2p$ .

**14.3 Corollaire.** Si  $p$  est impair,  $\hat{\gamma}(0)$  est un point régulier de la courbe  $\hat{\gamma}$ . En plus, si  $q \geq 2p$ , alors  $\hat{\gamma}(0)$  est un point ordinaire (régulier) quand  $q$  est pair et un point d'inflexion (régulier) quand  $q$  est impair.

### 15. Torsion et le repère mobile

On a introduit la notion de courbure en suivant l'idée de la droite tangente : en cherchant le cercle qui fait la meilleure approximation de la courbe dans un voisinage du point. Mais il y a une toute autre approche qui nous amène au même résultat et qui a l'avantage qu'on peut la généraliser à des ordres supérieures. Pour expliquer cette approche, on prend donc une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  et une valeur  $t_o \in I$  avec le point  $p = \gamma(t_o)$ . Alors on a le développement limité

$$\begin{aligned} \gamma(t) - \gamma(t_o) &= (t - t_o) \cdot \gamma'(t_o) + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 \cdot \gamma''(t_o) \\ &\quad + \frac{1}{6} (t - t_o)^3 \cdot \gamma'''(t_o) + \mathcal{O}((t - t_o)^4) . \end{aligned}$$

Prenons maintenant un vecteur  $v \in \mathbf{R}^n$  qui est orthogonal à  $\gamma'(t_o)$ . Alors on peut calculer le nombre  $\langle v, \gamma''(t_o) \rangle$ , qu'on peut aussi définir comme étant la limite

$$\langle v, \gamma''(t_o) \rangle = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{2}{(t - t_o)^2} \cdot \langle v, \gamma(t) - p \rangle .$$

Rappelons maintenant que l'idée de la courbure était que c'est un nombre qu'on peut associer à un point de la courbe et que ce nombre ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe, mais seulement de son image. Plus précisément, on cherche des nombres qu'on peut associer à la courbe au point  $p = \gamma(t_o)$  mais qui ne changent pas si on remplace la courbe par une courbe équivalente par reparamétrage.

Pour tester l'indépendance du paramétrage, on prend donc une deuxième courbe  $\hat{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  qui est équivalente à  $\gamma$  par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : J \rightarrow I$  (et donc  $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ ). Pour cette courbe on a donc

$$\begin{aligned} (15.1) \quad \hat{\gamma}'(s) &= \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \quad \text{et} \\ \hat{\gamma}''(s) &= \gamma''(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^2 + \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s) . \end{aligned}$$

Si on note  $s_o \in J$  la valeur telle qu'on a  $\varphi(s_o) = t_o$  et donc  $\hat{\gamma}(s_o) = \gamma(t_o) = p$ , on a d'abord

$$\langle v, \hat{\gamma}'(s_o) \rangle = \langle v, \gamma'(\varphi(s_o)) \cdot \varphi'(s_o) \rangle = \langle v, \gamma'(t_o) \rangle \cdot \varphi'(s_o) = 0 .$$

Il s'ensuit que  $\hat{\gamma}'(s_o)$  est également orthogonal à  $v$ . Ensuite on calcule :

$$\begin{aligned} \langle v, \hat{\gamma}''(s_o) \rangle &= \langle v, \gamma''(\varphi(s_o)) \cdot (\varphi'(s_o))^2 + \gamma'(\varphi(s_o)) \cdot \varphi''(s_o) \rangle \\ &\stackrel{\langle v, \gamma'(t_o) \rangle = 0}{=} \langle v, \gamma''(\varphi(s_o)) \rangle \cdot (\varphi'(s_o))^2 \\ &\stackrel{\varphi(s_o) = t_o}{=} \langle v, \gamma''(t_o) \rangle \cdot (\varphi'(s_o))^2 . \end{aligned}$$

Et malheur ... ce n'est pas le même résultat que pour la courbe  $\gamma$ . Mais le fait que la seule différence est le facteur multiplicatif  $\varphi'(s_o)^2$  permet de remédier la situation : au lieu de regarder le nombre  $\langle v, \gamma''(t_o) \rangle$  on regarde le nombre

$$\frac{\langle v, \gamma''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} .$$

Pour  $\|\gamma'(t_o)\|$  on la correspondance

$$\|\hat{\gamma}(s_o)\| = \|\gamma'(t_o) \cdot \varphi'(s_o)\| = \|\gamma'(t_o)\| \cdot |\varphi'(s_o)| ,$$

et donc

$$\frac{\langle v, \hat{\gamma}''(s_o) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(s_o)\|^2} = \frac{\langle v, \gamma''(t_o) \rangle \cdot (\varphi'(s_o))^2}{(\|\gamma'(t_o)\| \cdot |\varphi'(s_o)|)^2} = \frac{\langle v, \gamma''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} .$$

On a donc trouvé un nombre indépendant du paramétrage, mais qui dépend d'un vecteur  $v$  orthogonal à  $\gamma'(t_o)$ . C'est donc facile de construire de tels nombres, mais est ce que tous ces nombres sont utiles ? La réponse est : certainement pas ! Par exemple, remplacer  $v$  par un multiple change ce nombre, mais l'intérêt paraît très limité. Et si  $v$  est aussi orthogonal à  $\gamma''(t_o)$ , ce nombre est nul, donc également sans beaucoup d'intérêt. Se pose donc la question s'il y a un vecteur  $v$  qui est plus intéressant que d'autres. Vu les arguments précédents et si on pense à la courbure, la réponse est qu'un vecteur unitaire dans le plan engendré par  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  pourrait être intéressant. Mais un vecteur unitaire orthogonal à  $\gamma'(t_o)$  et dans le plan engendré par  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$ , c'est un vecteur n.u.p !

Soit donc  $v = \mathbf{n}$  un vecteur n.u.p au point  $p$  de la courbe et soit

$$\gamma''(t_o) = \left( \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o) \right) + \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o)$$

la décomposition de  $\gamma''(t_o)$  en une partie orthogonale à  $\gamma'(t_o)$  et une partie parallèle. On reconnaît que la partie orthogonale est, au facteur  $\|\gamma'(t_o)\|^2$  près, le vecteur de courbure  $k_\gamma(t_o)$ . Alors on a :

$$\frac{\langle \mathbf{n}, \gamma''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} = \langle \mathbf{n}, k_\gamma(t_o) \rangle = \kappa(t_o) .$$

Le nombre qu'on a défini est donc la courbure relative !

En cherchant un nombre qui ne dépend pas du paramétrage, on a trouvé la courbure relative. La généralisation de cette méthode est facile : on prend un vecteur  $v$  orthogonal à  $\gamma'(t_o)$  et à  $\gamma''(t_o)$  et on calcule le nombre

$$\langle v, \gamma'''(t_o) \rangle = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{6}{(t - t_o)^3} \cdot \langle v, \gamma(t) - p \rangle .$$

Pour voir si ce nombre ne dépend pas du paramétrage, on commence avec l'observation que si  $v$  est orthogonal à  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$ , alors il l'est aussi à  $\hat{\gamma}'(s_o)$  et  $\hat{\gamma}''(s_o)$  (une conséquence quasi immédiat de (15.1)). Ensuite on pousse le calcul un petit peu plus loin pour obtenir

$$\hat{\gamma}'''(s) = \gamma'''(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^3 + 3 \gamma''(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s) \cdot \varphi'(s) + \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'''(s) .$$

On a donc

$$\begin{aligned} \langle v, \hat{\gamma}'''(s_o) \rangle &= \langle v, \gamma'''(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^3 + 3 \gamma''(t_o) \cdot \varphi''(s_o) \cdot \varphi'(s_o) + \gamma'(t_o) \cdot \varphi'''(s_o) \rangle \\ &= \langle v, \gamma'''(t_o) \rangle \cdot (\varphi'(s_o))^3 . \end{aligned}$$

Comme pour le cas de la dérivée seconde, ce n'est pas le même nombre. Mais comme précédemment, la différence n'est que le facteur multiplicatif  $\varphi'(s_o)^3$ . Il s'ensuit que si on considère le nombre

$$(15.2) \quad \frac{\langle v, \gamma'''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^3} ,$$

alors on trouve

$$(15.3) \quad \frac{\langle v, \hat{\gamma}'''(s_o) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(s_o)\|^3} = \frac{\langle v, \gamma'''(t_o) \rangle \cdot (\varphi'(s_o))^3}{(\|\gamma'(t_o)\| \cdot |\varphi'(s_o)|)^3} = \frac{\langle v, \gamma'''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^3} \cdot \frac{\varphi'(s_o)}{|\varphi'(s_o)|} .$$

Ceci est au signe près le même nombre. Et on a le signe "moins" seulement si le reparamétrage fait parcourir la courbe  $\gamma$  dans le sens opposé. Une solution est de prendre la valeur absolue, comme on a fait pour la courbure absolue, pour obtenir

un nombre qui ne dépend pas du paramétrage. Une autre solution est de faire un choix adapté pour le vecteur  $v$ .

Comme pour le cas de la dérivée seconde ci-dessus, il faut se poser la question s'il n'y a pas un choix judicieux pour le vecteur  $v$ . Il paraît évident qu'il faut se restreindre à des vecteurs unitaires. Si on est en dimension 2, alors en général il n'y aura pas de vecteur  $v$  (unitaire ou non), sauf si  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont parallèles. En dimension 3 il y aura en général exactement deux choix (unitaires) possibles, sauf si  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont parallèles, auquel cas il y aura une infinité de choix. Ou encore, si on a un champ n.u.p, on a de nouveau deux choix (unitaires) privilégiés (toujours en dimension 3). En dimension  $n > 3$  on peut utiliser la même idée que pour la courbure relative : prendre un vecteur  $v$  dans le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs  $\gamma'(t_o)$ ,  $\gamma''(t_o)$  et  $\gamma'''(t_o)$ . Cette approche, pourvu que ces trois vecteurs engendrent effectivement un sous-espace de dimension 3, restreint le choix d'un vecteur unitaire  $v$  à deux.

Dans la suite on se restreint à la dimension 3 et on suppose en plus l'existence d'un champ n.u.p  $\mathbf{n} : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  le long la courbe  $\gamma$  définie dans un voisinage ouvert  $J \subset I$  de  $t_o$  (ce qui implique que la restriction de  $\gamma$  à  $J$  doit être hyperrégulière). À noter que cette "restriction" est plus souple que la condition  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  indépendants, car dans ce cas les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants dans un voisinage de  $t_o$  (par un argument de continuité) et donc par [12.4.i] il existe un champ n.u.p dans ce voisinage. Étant donné que  $\gamma'(t_o)$  et  $\mathbf{n}(t_o)$  sont orthogonaux, les deux uniques vecteurs unitaires  $v$  qui sont perpendiculaires à ces deux vecteurs sont

$$(15.4) \quad v = \frac{\gamma'(t_o) \wedge \mathbf{n}(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|}.$$

et son opposé. Le choix (15.4) pour le vecteur  $v$  dépend a priori du paramétrage et du champ n.u.p  $\mathbf{n}$ . Dans [12.3] on a vu que si  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ n.u.p le long  $\gamma$ , alors  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \varphi : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ n.u.p le long  $\hat{\gamma}$ . Si on choisit ce champ n.u.p le long  $\hat{\gamma}$ , on trouve le lien

$$\frac{\hat{\gamma}'(s_o) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s_o)}{\|\hat{\gamma}'(s_o)\|} = \frac{\varphi'(s_o) \cdot \gamma'(t_o) \wedge \mathbf{n}(t_o)}{\|\gamma'(t_o) \cdot \varphi(s_o)\|} = \frac{\gamma'(t_o) \wedge \mathbf{n}(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|} \cdot \frac{\varphi'(s_o)}{|\varphi'(s_o)|}.$$

On s'aperçoit que le choix (15.4) pour le vecteur  $v$  est presque indépendant sous reparamétrage, sauf qu'il y a un signe quand  $\hat{\gamma}$  parcourt la courbe dans le sens opposé. Et c'était ce signe qui nous empêchait d'obtenir dans (15.3) un nombre indépendant du paramétrage avec un vecteur  $v$  fixe. Il s'ensuit que si on utilise ce choix pour le vecteur  $v$  dans (15.2), alors le nombre

$$\kappa_3 = \frac{\langle v, \gamma'''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^3} \stackrel{(15.4)}{=} \frac{\langle \gamma'''(t_o), \gamma'(t_o) \wedge \mathbf{n}(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^4}$$

est donc bien un nombre qui ne dépend pas du paramétrage de la courbe. Par contre, ce nombre dépend du choix pour le champ n.u.p  $\mathbf{n}$ . Dans la plupart des cas il n'y aura que deux choix possibles :  $\pm \mathbf{n}$ , et donc ce n'est que le signe de  $\kappa_3$  qui change (comme c'est le cas pour la courbure relative  $\kappa(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle$ ). Mais pour des (morceaux de) droites (dans  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ) il est facile de construire une infinité de champs n.u.p différents, voir [15.7].

Bien que  $\kappa_3$  est un nombre qu'on peut associer à la courbe au point  $p = \gamma(t_o)$  et qui ne dépend pas du paramétrage choisi, ce n'est pas le nombre qu'on privilégie. Pour obtenir le nombre privilégié (qu'on appellera la torsion), on fait d'abord

quelques petits calculs. On commence avec la remarque que, par définition d'un champ n.u.p, il existe deux fonctions  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbf{R}$  telles qu'on a

$$\gamma''(t) = \alpha(t) \cdot \gamma'(t) + \beta(t) \cdot \mathbf{n}(t) .$$

On a donc

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= \alpha'(t) \cdot \gamma'(t) + \alpha(t) \cdot \gamma''(t) + \beta'(t) \cdot \mathbf{n}(t) + \beta(t) \cdot \mathbf{n}'(t) \\ &= (\alpha'(t) + (\alpha(t))^2) \cdot \gamma'(t) + (\alpha(t) \cdot \beta(t) + \beta'(t)) \cdot \mathbf{n}(t) + \beta(t) \cdot \mathbf{n}'(t) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\langle \gamma'''(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle = \beta(t) \cdot \langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle .$$

D'autre part, si on prend la définition [10.7] du vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  et la définition [12.1] de la courbure relative  $\kappa(t)$ , on obtient l'égalité

$$\kappa(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \frac{\langle \gamma''(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{\beta(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} .$$

Si on rassemble ces résultats, on obtient l'égalité

$$\kappa_3(t) \equiv \frac{\langle \gamma'''(t_o), \gamma'(t_o) \wedge \mathbf{n}(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^4} = \kappa(t) \cdot \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} .$$

Avec ces préparations on est maintenant prêt pour la définition de la notion de torsion.

**15.5 Définitions.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière et soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ n.u.p le long  $\gamma$ .

- Le vecteur binormal (au point  $\gamma(t)$ ), noté  $\mathbf{b}(t)$ , est le vecteur défini par

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t)}{\|\gamma'(t)\|} .$$

À noter que ce vecteur dépend du choix du champ n.u.p.

- Si  $\mathbf{n}$  est de classe  $C^1$ , on appelle le nombre

$$\tau(t) = \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \equiv \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}$$

la torsion de  $\gamma$  au point  $p = \gamma(t)$  (pour chaque  $t \in I$ ). La torsion dépend aussi du choix du champ n.u.p.

- Si  $\gamma$  est (en plus) paramétrée par longueur d'arc, on appelle le triplet  $\gamma'(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$  le trièdre de Frenet ou le repère de Serret-Frenet. On parle aussi de repère mobile.

**Remarque.** La notion de binormal peut être définie dès qu'on a un vecteur n.u.p  $\mathbf{n}$  à la courbe  $\gamma$  en un seul point  $\gamma(t)$  : c'est l'unique vecteur unitaire  $\mathbf{b}$  tel que le triplet  $\gamma'(t), \mathbf{n}, \mathbf{b}$  soit une base directe de  $\mathbf{R}^3$ . Par contre, en dehors des courbes hyperrégulières, cette notion a tellement peu d'intérêt qu'on n'en parle pas.

Ⓟ **15.6 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière. Alors la torsion ne dépend pas du choix d'un paramétrage. Et s'il n'existe que deux champs n.u.p, alors la torsion  $\tau : I \rightarrow \mathbf{R}$  ne dépend pas non plus du choix du champ n.u.p.

**15.7 Exemple.** La condition qu'il n'y a que deux champs n.u.p le long une courbe hyperrégulière n'est pas satisfaite pour des morceaux de droites. Considérons par exemple la courbe (morceau de droite!)  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\gamma(t) = (t, 0, 0) .$$

Il est immédiat que l'application  $\mathbf{n} : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\mathbf{n}(t) = (0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$$

est un champ n.u.p le long  $\gamma$  pour tout choix de fonction  $\alpha : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$ . Et pour un tel champ n.u.p on a

$$\mathbf{n}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha'(t) \sin(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} .$$

La torsion est donc donnée par

$$\tau(t) = \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} = \alpha'(t) .$$

La fonction  $\alpha$  étant arbitraire, la fonction torsion est également arbitraire. La conclusion est donc que pour un morceau de droite la torsion n'est pas du tout unique.

Ⓟ **15.8 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière de classe  $C^3$  et soit  $t_o \in I$  tel que  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont indépendants. Alors la torsion  $\tau(t_o)$  au point  $p = \gamma(t_o)$  est donnée par

$$\tau(t_o) = \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o), \gamma'''(t_o))}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} .$$

Ⓟ **15.9 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière paramétrée par longueur d'arc et soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ n.u.p. Alors le trièdre de Frenet est une base orthonormée directe de  $\mathbf{R}^3$ .

Si  $\mathbf{n}$  est de classe  $C^1$ , alors le trièdre de Frenet vérifie les équations différentielles (dites de Serret-Frenet)

$$(15.10) \quad \begin{cases} (\gamma')'(t) &= \kappa(t) \cdot \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}'(t) &= -\kappa(t) \cdot \gamma'(t) + \tau(t) \cdot \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{b}'(t) &= -\tau(t) \cdot \mathbf{n}(t) \end{cases} .$$

où  $\kappa : I \rightarrow \mathbf{R}$  désigne la courbure relative et  $\tau : I \rightarrow \mathbf{R}$  la torsion.

## 16. Courbes : le problème inverse

Revenons sur l'idée que la courbure est liée à la position du volant quand on roule sur une route. Si on pense à des instructions pour arriver quelque part, style : 2 kilomètres tout droit, tourner à gauche, 800 mètres tout droit, tourner à droite, etc. etc., alors c'est presque dire comment et quand il faut tourner le volant. Mais pour le volant, ce n'est pas assez précis, car il y a des routes qui ne sont pas vraiment droites. Il faut donc tourner le volant même quand les directions données disent qu'il faut aller tout droit. Les directions qu'il faut donner pour "le volant" sont donc plus précises : c'est la courbure de la route qu'il faut suivre.

Maintenant tout le monde sera d'accord que si on donne les mêmes directions à deux personnes, ils vont arriver au même endroit. Bien que ... s'ils ne partent pas de la même position, ils ne vont certainement pas arriver au même endroit, ni s'ils ne partent pas dans la même direction. Partir de Paris et aller 2 kilomètres tout droit nous amène pas au même endroit que partir de Lille et aller 2 kilomètres tout droit. Et partir de Paris et aller 2 kilomètres tout droit direction nord ou sud nous amène aussi à des endroits différents. Mais deux personnes qui partent de la même position et dans la même direction vont arriver au même endroit quand ils suivent les mêmes directions.

Et là on arrive à la question mathématique : est-ce qu'une courbe est déterminée quand on connaît sa courbure ? Selon la discussion ci-dessus on dirait oui, à condition qu'on précise un point (de départ) et une direction (au point de départ). Quoique, après une petite réflexion, la réponse doit être plutôt non : quand on donne des directions, on donne des distances et des angles. Mais le paramètre de la courbe est le temps. Et si on dit : 30 minutes tout droit, ensuite tourner à gauche, ensuite 10 minutes tout droit etcætera, il est évident que deux personnes différentes vont arriver à des endroits différents, même s'ils partent du même point de départ et dans la même direction ! Il suffit que l'une marche plus vite que l'autre, ou à vitesse variable. D'autre part, si les deux personnes avancent à la même vitesse, les instructions données en temps vont conduire ces deux personnes au même endroit (toujours à condition qu'ils partent du même point de départ et dans la même direction).

Et cela est exactement qu'on peut démontrer en dimension 2 : il suffit de revenir à l'idée que la courbure  $\kappa(t)$  est le changement d'angle par distance parcourue (9.5), [12.9] :

$$\kappa(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\gamma'(t)\|} .$$

Si on prescrit la vitesse de marche  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ , c'est-à-dire une fonction  $v : I \rightarrow ]0, \infty[$  fixe, alors on a  $\alpha'(t) = v(t) \cdot \kappa(t)$  et

$$\gamma'(t) \stackrel{(9.4)}{=} v(t) \cdot (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) .$$

Il suffit donc de prendre des primitives pour trouver la courbe. Et si on regarde bien, on s'aperçoit qu'on a déjà fait la première intégration dans [9.7] ! Dans [16.1] on donne l'énoncé précis avec la preuve formelle, ainsi que la preuve que deux courbes qui ont la même courbure et qui sont parcourues à la même vitesse ne diffèrent que par le point de départ et une rotation globale, ce qui correspond à un changement de direction initiale. Ces degrés de libertés sont exactement les constantes d'intégration dans la prise des primitives : de  $\alpha'(t)$  à  $\alpha(t)$  on a une constante d'intégration qui correspond au choix d'une direction initiale et de  $\gamma'(t)$  à  $\gamma(t)$  on a le choix d'un point de départ.



**16.1 Proposition.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert, soit  $\kappa : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et  $v : I \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction de classe  $C^1$ .

- (i) Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une primitive de  $v\kappa$  et si ensuite  $x : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une primitive de  $v \cos \alpha$  et  $y : I \rightarrow \mathbf{R}$  une primitive de  $v \sin \alpha$ , alors la courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  est une courbe paramétrée telle que  $\kappa$  est sa courbure relative et  $v$  sa vitesse.
- (ii) Si  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  sont deux courbes paramétrées de classe  $C^2$  qui ont  $v$  comme vitesse et  $\kappa$  comme courbure, alors il existe une rotation  $R_\theta$  et un vecteur  $b \in \mathbf{R}^2$  tels que pour tout  $t \in I$  on a

$$\gamma_2(t) = b + R_\theta \gamma_1(t) .$$

**Remarque pour les comparateurs.** Dans la littérature on énonce le résultat [16.1] quasiment exclusivement avec la contrainte que la fonction vitesse  $v$  est constante égale à 1, c'est-à-dire, on énonce le résultat que pour toute fonction  $\kappa$  il existe une courbe paramétrée par longueur d'arc qui a cette fonction comme fonction de courbure relative. Et qu'une telle courbe est unique à une rotation et une translation près. Notre résultat avec une fonction de vitesse prescrite (mais pas forcément constante 1) n'est pas plus difficile à montrer et c'est plus naturel quand on interprète le paramètre  $t$  comme le temps et la fonction  $\kappa$  comme des instructions de directions, données par rapport au temps : il faut savoir à quelle vitesse on avance.

Si on veut passer à une dimension supérieure (à 2), alors une petite réflexion montre que les choses se compliquent. Quand on ne donne que des instruction du style “tourner à gauche ou à droite,” on ne sait pas s'il faut monter ou descendre : ces instructions manquent. Une autre façon de voir ce problème est qu'en dimension supérieure l'angle entre deux vecteurs n'est pas assez précis pour déterminer le deuxième quand on connaît le premier : on ne peut plus préciser “à droite” ou “à gauche” du premier vecteur et pire, il y aura tout un cône de possibilités. En dimension supérieure la courbure ne sera donc pas suffisante pour déterminer une courbe, même pas si on précise un point de départ et une direction de départ. D'autre part, il est facile de trouver dans  $\mathbf{R}^3$  des courbes qui ont une courbure prescrite : il suffit de prendre une courbe plane avec cette courbure et d'ajouter un coordonnée (constante) pour en faire une courbe dans  $\mathbf{R}^3$ . Mais il y en a certainement beaucoup d'autres qui ont la même courbure. Il s'avère qu'en dimension 3 la torsion est l'information manquante : si on connaît la courbure et la torsion d'une courbe dans  $\mathbf{R}^3$ , alors il existe une courbe hyperrégulière dans  $\mathbf{R}^3$  qui a cette courbure et cette torsion [16.2]. Contrairement à la dimension 2, il n'y a pas des formules explicites pour une telle courbe, on retombe sur des théorèmes généraux sur l'existence de solutions d'équations différentielles. Et deux courbes dans  $\mathbf{R}^3$  qui ont la même courbure et même torsion ne diffèrent que par le point de départ et une rotation globale [16.3], ce qui correspond à un changement de direction initiale (mais attention : en dimension 3 il y a beaucoup plus de rotations qu'en dimension 2).

**16.2 Proposition (admis).** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert et soit  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Alors il existe une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe

$C^{k+2}$ , hyperrégulière et paramétrée par longueur d'arc telle que  $\kappa$  est sa courbure relative et  $\tau$  sa torsion.

Ⓟ **16.3 Proposition.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert, soit  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  deux courbes hyperrégulières et paramétrées par longueur d'arc de classe  $C^{k+2}$  telles que  $\kappa$  est la courbure (relative) et  $\tau$  la torsion pour ces deux courbes. Alors il existe une rotation  $A \in \text{SO}(3)$  et un vecteur  $b \in \mathbf{R}^3$  tel que pour tout  $t \in I$  on a

$$\gamma_2(t) = A\gamma_1(t) + b .$$

**Nota Bene.** La torsion dépend en général du champ n.u.p et en conséquence dire que la torsion d'une courbe est donnée par la fonction  $\tau$  sous-entend qu'on a fourni un champ n.u.p. Ceci est vrai aussi bien dans [16.2] que dans [16.3], bien qu'il faut l'interpréter de deux façons différentes. Dans [16.2] il faut l'interpréter que la donnée des deux fonctions courbure  $\kappa$  et torsion  $\tau$  garantisse l'existence d'une courbe hyperrégulière **muni d'un champ n.u.p** par rapport à laquelle la fonction torsion est définie.

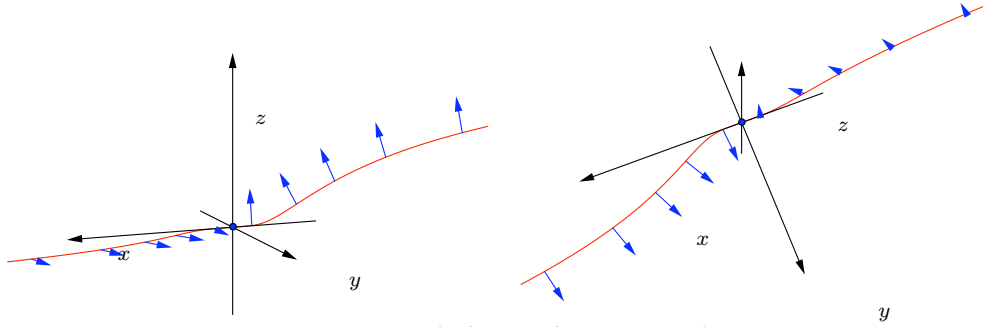
Par contre, dans [16.3] on présuppose que les deux courbes sont accompagnées chacune d'un champ n.u.p qui permet de définir leur torsion. Dans [15.6] on a vu que s'il n'existe que deux champs n.u.p, alors la torsion est unique, mais s'il y a un morceau de droite, alors il existe une multitude de champs n.u.p et la torsion dépend d'un tel choix. Le résultat de [16.3] dépend donc du choix des champs n.u.p utilisés pour définir la torsion de chaque courbe, pas seulement de l'image de ces courbes paramétrées.

**Remarque pour les comparateurs.** Beaucoup d'auteurs évitent la notion de courbe hyperrégulière/champ n.u.p quand ils parlent de la torsion d'une courbe (paramétrée). Pour pouvoir le faire, ils se restreignent à des courbes pour lesquelles la courbure absolue ne s'annule jamais. On a vu que cela implique qu'il existe exactement deux champs n.u.p le long la courbe [12.4] et donc que la torsion existe et est unique [15.6].

## 17. Un bestiaire de (contre-)exemples

**17.1 Une courbe régulière mais non-hyperrégulière.** Soit  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la courbe de classe  $C^\infty$  définie par

$$\gamma(t) = (t, J_0(t), J_0(-t)) \stackrel{[33.5]}{=} \begin{cases} (t, 0, e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \\ (t, e^{-1/t}, 0) & t > 0 \end{cases}.$$



Deux vues de la courbe avec quelques vecteurs n.u.p

Un calcul direct montre qu'on a

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, 0, -t^{-2} e^{1/t}) & t < 0 \\ (1, 0, 0) & t = 0 \\ (1, t^{-2} e^{-1/t}, 0) & t > 0 \end{cases} \quad \gamma''(t) = \begin{cases} (0, 0, (t^{-4} + 2t^{-3}) e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \\ (0, (t^{-4} - 2t^{-3}) e^{-1/t}, 0) & t > 0 \end{cases}.$$

Il s'ensuit que  $\gamma$  est une courbe régulière et que, pour tout  $t \neq 0$ , il n'y a que deux choix possibles pour un vecteur n.u.p  $\mathbf{n}(t)$ . Un calcul direct montre alors que, si  $\mathbf{n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ n.u.p, alors on doit avoir

$$\lim_{t \uparrow 0} \mathbf{n}(t) = (0, 0, \pm 1) \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow 0} \mathbf{n}(t) = (0, \pm 1, 0).$$

Ceci contredit la continuité de  $\mathbf{n}$ , ce qui montre qu'il ne peut pas exister un champ n.u.p pour cette courbe. C'est donc une courbe régulière qui n'est pas hyperrégulière.

**17.2 Une courbe hyperrégulière avec une infinité de champs n.u.p.** Si on change l'exemple précédent un petit peu, on peut en faire une courbe qui admet une infinité de champs n.u.p. Pour cela on définit la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^\infty$  par

$$\gamma(t) \stackrel{[33.5]}{=} (t, J_0(t-1), J_0(-t)) = \begin{cases} (t, 0, e^{1/t}) & t < 0 \\ (t, 0, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (t, e^{1/(1-t)}, 0) & t > 1 \end{cases}.$$

### DESSIN

Un calcul direct montre qu'on a

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, 0, -t^{-2} e^{1/t}) & t < 0 \\ (1, 0, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, (1-t)^{-2} e^{1/(1-t)}, 0) & t > 1 \end{cases}$$

et

$$\gamma''(t) = \begin{cases} (0, 0, (t^{-4} + 2t^{-3}) e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (0, ((1-t)^{-4} + 2(1-t)^{-3}) e^{1/(1-t)}, 0) & t > 1. \end{cases}$$

Comme dans l'exemple précédent, il n'existe que deux vecteurs n.u.p pour  $t > 1$  ou  $t < 0$  et si  $\mathbf{n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ n.u.p, on doit avoir

$$\lim_{t \uparrow 0} \mathbf{n}(t) = (0, 0, \pm 1) \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow 1} \mathbf{n}(t) = (0, \pm 1, 0) .$$

Contrairement à l'exemple précédent, ceci ne donne pas une contradiction, car entre  $t = 0$  et  $t = 1$  on a de la place pour faire tourner le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  de  $(0, 0, \pm 1)$  à  $(0, \pm 1, 0)$ . Par exemple, pour  $\ell \in \mathbf{N}$  on peut définir le morceau de courbe  $\mathbf{n}_\ell : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\mathbf{n}_\ell(t) = (0, \sin((\ell + \frac{1}{2})\pi t), \cos((\ell + \frac{1}{2})\pi t)) .$$

Ceci donne, pour tout  $\ell \in \mathbf{N}$ , un vecteur n.u.p à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Et avec le bon choix de signe pour  $\mathbf{n}$  sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, \infty[$  on obtient un champ n.u.p à  $\gamma$ .

Avec ce choix de  $\mathbf{n}_\ell$  sur  $[0, 1]$ , le champ n.u.p obtenu n'est que continue aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ . Si on veut le faire d'une façon  $C^\infty$ , il faut entrer dans plus de détails. Un calcul un peu pénible montre que le champ n.u.p  $\mathbf{n}$  défini par [12.4.ii] sur  $] -\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$  a les propriétés

$$\lim_{t \uparrow 0} \mathbf{n}(t) = (0, 0, 1) \quad , \quad \lim_{t \downarrow 1} \mathbf{n}(t) = (0, 1, 0) ,$$

ainsi que, pour tout  $k \geq 1$

$$\lim_{t \uparrow 0} \mathbf{n}^{(k)}(t) = \lim_{t \downarrow 1} \mathbf{n}^{(k)}(t) = (0, 0, 0) .$$

Pour s'assurer que cela s'accorde bien avec la définition sur l'intervalle manquant  $[0, 1]$ , on utilise la fonction  $J_1$  définie en [33.6]. On définit donc les applications  $\mathbf{n}_\ell : [0, 1]$  par

$$\mathbf{n}_\ell(t) = (0, \sin((2\ell + \frac{1}{2})\pi J_1(t)), \cos((\ell + \frac{1}{2})\pi J_1(t))) .$$

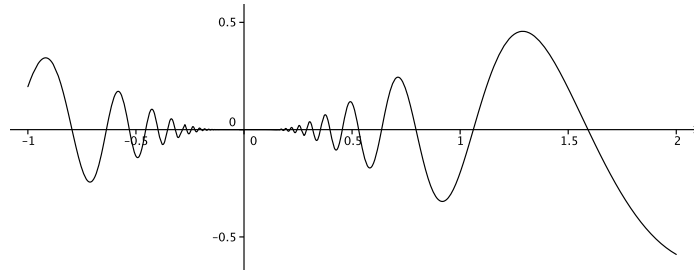
Le champ n.u.p obtenu ainsi pour la courbe  $\gamma$  sera de classe  $C^\infty$  sur tout  $\mathbf{R}$ . Le degré de liberté donné par  $\ell$  montre qu'il y en a une infinité. (Le changement de  $\ell$  en  $2\ell$  dans le sin est imposé car on a fixé le choix du signe de  $\mathbf{n}$  aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ .) Le lecteur aura compris que ceci ne sont que des exemples de champs n.u.p et qu'on peut en inventer beaucoup d'autres.

**17.3 Une courbe hyperrégulière avec un point non classifiable.** Soit  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  la courbe de classe  $C^\infty$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/|t|} \cdot \sin(1/t)) & t \neq 0 \\ (0, 0) & t = 0 . \end{cases}$$

La preuve que c'est bien une courbe de classe  $C^\infty$  se fait comme la preuve de [33.5]. Pour ne pas être gêné par la valeur absolue dans  $e^{-1/|t|}$ , on restreint la discussion à des valeurs  $t \geq 0$ . Mais il devrait être évident qu'un même discours est possible pour  $t < 0$ . Un calcul direct montre qu'on a

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, t^{-2} e^{-1/t} (\sin(1/t) - \cos(1/t))) & t > 0 \\ (1, 0) & t = 0 \end{cases}$$



et

$$\gamma''(t) = \begin{cases} (0, 2t^{-4} e^{-1/t} ((t-1) \cos(1/t) - t \sin(1/t))) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}.$$

Il s'ensuit que si  $\gamma''(t) \neq 0$ , alors  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  ne seront pas colinéaire, donc la courbure sera non-nulle. Par contre, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2t^{-4} e^{-1/t} ((t-1) \cos(1/t) - t \sin(1/t)) \\ = -2t^{-4} e^{-1/t} \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \cdot \cos\left(\frac{1}{t} - \alpha(t)\right), \end{aligned}$$

avec

$$\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{2t}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}\right).$$

On en déduit (presque évident pour le spécialiste, dur pour le novice) qu'il existe une suite  $t_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$  telle que  $\gamma''(t_n) = 0$  avec  $t_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-1} + o(1/n)$ . L'argument qu'on utilise est que si on néglige la correction  $\alpha(t)$ , la dérivée seconde s'annule pour  $t_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-1}$ . Et quand  $t$  tend vers 0, alors  $\alpha(t)$  tend aussi vers 0 et ne change le lieu du zéro que de (très) peu.

La conclusion est que  $\gamma$  est une courbe hyperrégulière (on est en dimension 2), mais on n'a pas de classification pour le point  $\gamma(0)$  : la courbure est nulle en ce point, mais il n'existe pas de voisinage de 0 tel que la courbure a un signe constant de chaque côté. Et l'analyse qu'on a utilisé pour un point singulier ne s'applique pas non plus, car à partir de la deuxième dérivée, toutes les dérivées en  $t = 0$  de  $\gamma$  sont nulles ; il n'y a donc pas deux dérivées indépendantes en  $t = 0$ .

**17.4 Une courbe avec un angle.** Soit  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  la courbe de classe  $C^\infty$  définie par

$$\gamma(t) = (J_0(t), J_0(-t)) ,$$

avec  $J_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie en [33.5]. On a  $\gamma([0, \infty[) = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\}$  et  $\gamma(]-\infty, 0]) = \{(0, y) \mid 0 \leq y < 1\}$ . Et en  $t = 0$  toutes les dérivées de  $\gamma$  s'annulent :  $\forall k \in \mathbf{N}^* : \gamma^{(k)}(0) = 0$ . C'est donc un point singulier qui ne rentre pas dans notre classification. Et pour cause, car en  $t = 0$  la courbe fait un angle (droit).



## Surfaces

### 18. Surfaces régulières

L'idée d'une surface régulière est assez simple : quelque chose qui ressemble à (une partie d') un plan déformé, mais pas trop. L'archetype d'une surface est le graphe d'une fonction  $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  donné par

$$\text{graphe}(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U \} \subset \mathbf{R}^3 .$$

La précision qu'on ne veut pas que ce soit trop déformé est rajoutée pour éviter des cas problématiques qui empêchent d'obtenir (facilement) des résultats. Certains de ces cas (les singularités) forment l'objet de recherches actuelles, mais ne feront pas (du tout) l'objet de ce texte. L'exemple type d'une surface régulière qui n'est pas le graphe d'une fonction est la sphère  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$  donnée comme

$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} .$$

On utilisera cet exemple presque partout pour illustrer des notions générales d'une surface. D'autre part, on montrera quelques situations qu'on veut éviter : des points où le graphe n'est pas dérivable (des pointes) dans [18.13], des croisements dans [18.14] et le phénomène de “toujours plus près” dans [18.16]. Une fois qu'on a donné une définition officielle d'une surface régulière, il sera visuellement évident que ces exemples ne vérifient pas la définition, bien qu'une preuve formelle peut être plus ou moins pénible selon la définition dont on part. Car il existe plusieurs façons de définir la notion de surface régulière, toutes équivalentes, mais pas toutes aussi facile à manipuler.

La définition qu'on va présenter ici n'est pas très courante, mais a plusieurs avantages : un certain nombre de preuves deviennent plus simples (et à ma connaissance il n'y en a pas qui deviennent plus compliquées), elle permet souvent de montrer facilement que certains sous-ensembles ne sont pas des surfaces régulières (comme pour [18.13] et [18.14]), et, plus important encore, elle montre clairement que la notion de surface régulière, et plus généralement la notion de sous-variété, est intimement liée au théorème des fonctions implicites. Ce lien peut être résumé par le slogan “localement un graphe.” Disons donc tout de suite ce qu'on entend par ce slogan. En toute généralité cette notion s'applique à un sous-ensemble  $M \subset \mathbf{R}^n$  où  $M$  peut être localement le graphe d'une fonction de  $k$  variables (et “donc” à valeurs dans  $\mathbf{R}^{n-k}$ ). On va se concentrer sur deux cas particuliers (mais voir aussi [18.6]) : dans  $\mathbf{R}^2$  où on regarde la notion d'être localement le graphe d'une fonction (réelle) de **une** variable, et dans  $\mathbf{R}^3$  où on regarde la notion d'être localement le graphe d'une fonction (réelle) de **deux** variables. Le premier cas nous permettra d'illustrer facilement l'idée et le deuxième sera le contexte pour les surfaces régulières.

**Définition.** Soit  $C \subset \mathbf{R}^2$  un sous ensemble et  $m \in C$ . Alors on dira que  $C$  est localement un graphe (de classe  $C^k$  d'une fonction d'une variable au voisinage de  $m$ ) s'il existe deux intervalles ouverts  $I_1, I_2 \subset \mathbf{R}$  avec  $m \in I_1 \times I_2$  tels qu'au moins une des deux propriétés suivantes soit vérifiée.

- (i) Il existe une fonction  $g : I_2 \rightarrow I_1$  de classe  $C^k$  telle que

$$C \cap I_1 \times I_2 = \{ (x, y) \in I_1 \times I_2 \mid x = g(y) \} .$$

- (ii) Il existe une fonction  $g : I_1 \rightarrow I_2$  de classe  $C^k$  telle que

$$C \cap I_1 \times I_2 = \{ (x, y) \in I_1 \times I_2 \mid y = g(x) \} .$$

L'idée de cette notion est comme suit. On part d'un sous-ensemble  $C \subset \mathbf{R}^2$ , un point  $m \in C$  et une fenêtre  $I_1 \times I_2 \subset \mathbf{R}^2$  contenant  $m$ , et on se demande si dans la fenêtre le sous-ensemble  $C$  peut être vu comme un graphe, soit que la première coordonnée est une fonction de la deuxième, soit que la deuxième est une fonction de la première. Évidemment cela dépend de  $C$ , du point  $m \in C$  choisi **et** de la fenêtre  $I_1 \times I_2$ . Regardons quelques situations explicites.

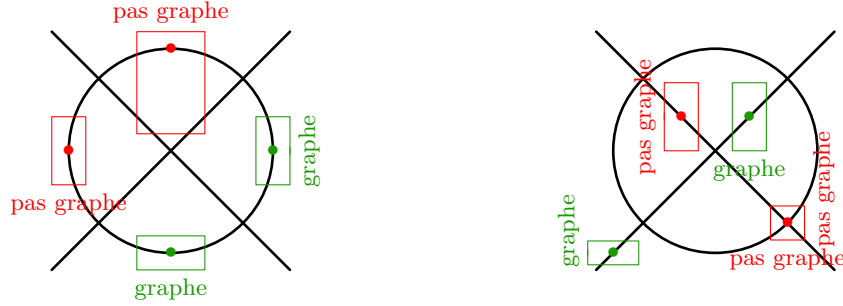


FIGURE 1. L'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 - x^2 = y^4 - y^2\}$  avec quelques fenêtres

On voit que les raisons pour que ce n'est pas un graphe peuvent être multiples, mais ils se séparent en deux catégories : on peut avoir mal choisi la fenêtre et avec un autre choix cela devient un graphe, ou (pour le point  $m$  fixé) il n'existe aucune fenêtre pour laquelle c'est un graphe.

Passons donc maintenant au cas d'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$  qu'on veut voir localement comme le graphe d'une fonction de deux variables.

**18.1 Définition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  un sous ensemble et  $m \in S$ . Alors on dira que  $S$  est localement un graphe (de classe  $C^k$  d'une fonction de deux variable au voisinage de  $m$ ) s'il existe trois intervalles ouverts  $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbf{R}$  avec  $m \in I_1 \times I_2 \times I_3$  tels qu'au moins une des trois propriétés suivantes soit vérifiée.

- (i) Il existe une fonction  $g : I_2 \times I_3 \rightarrow I_1$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = g(y, z) \} .$$

- (ii) Il existe une fonction  $g : I_1 \times I_3 \rightarrow I_2$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid y = g(x, z) \} .$$



(iii) Il existe une fonction  $g : I_1 \times I_2 \rightarrow I_3$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid z = g(x, y) \} .$$

La définition paraît longue, mais si on regarde bien, c'est simplement parce qu'on a détaillé les trois possibilités pour dire qu'une des trois variables  $x$ ,  $y$  ou  $z$  est une fonction des deux autres. Mettons maintenant la version classique et une version "permutée" du théorème des fonctions implicites dans ce même contexte.

**18.2 Théorème des fonctions implicites, version classique.** Soit  $f : U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^3$ , soit  $v \in \mathbf{R}$ ,  $S = \{m \in U \mid f(m) = v\}$  et  $m_o \in S$ . Si  $(\partial_z f)(m_o) \neq 0$ , alors il existe trois intervalles ouverts  $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbf{R}$  avec  $m_o \in I_1 \times I_2 \times I_3 \subset U$  et une fonction  $g : I_1 \times I_2 \rightarrow I_3$  de classe  $C^k$  tels que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid z = g(x, y) \} .$$

L'interprétation qu'on donne d'habitude à ce théorème est qu'on peut localement (dans le voisinage  $I_1 \times I_2 \times I_3$ ) résoudre la troisième coordonnée  $z$  en fonction des deux variables  $(x, y)$  sous la forme

$$f(x, y, z) = v \quad \Longleftrightarrow \quad z = g(x, y) .$$

Et on peut même "améliorer" l'énoncé avec la précision que la fonction  $\partial_z f$  ne s'annule pas sur le voisinage. Mais on peut aussi permuter les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour en déduire la version suivante.

**18.3 Théorème des fonctions implicites, version permutée.** Soit  $f : U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^3$ , soit  $v \in \mathbf{R}$ ,  $S = \{m \in U \mid f(m) = v\}$  et  $m_o \in S$ . Si  $\text{rang}(\text{Jac}(f)(m_o)) = 1$ , où  $\text{Jac}(f)(m_o)$  est la matrice Jacobienne (la différentielle) de  $f$  au point  $m_o$  donnée par

$$\text{Jac}(f)(m_o) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(m_o), \frac{\partial f}{\partial y}(m_o), \frac{\partial f}{\partial z}(m_o) \right) ,$$

alors il existe trois intervalles ouverts  $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbf{R}$  avec  $m_o \in I_1 \times I_2 \times I_3 \subset U$  tels qu'au moins une des trois propriétés suivantes soit vérifiée.

(i) Le cas  $(\partial_x f)(m_o) \neq 0$  : il existe une fonction  $g : I_2 \times I_3 \rightarrow I_1$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = g(y, z) \} .$$

(ii) Le cas  $(\partial_y f)(m_o) \neq 0$  : il existe une fonction  $g : I_1 \times I_3 \rightarrow I_2$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid y = g(x, z) \} .$$

(iii) Le cas  $(\partial_z f)(m_o) \neq 0$  : il existe une fonction  $g : I_1 \times I_2 \rightarrow I_3$  de classe  $C^k$  telle que

$$S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid z = g(x, y) \} .$$

Quand on voit le théorème des fonctions implicites sous cette forme, on voit immédiatement le lien avec la définition d'être localement un graphe.

**18.4 Théorème des fonctions implicites, reformulation.** Soit  $f : U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^3$ , soit  $v \in \mathbf{R}$ ,  $S = \{m \in U \mid f(m) = v\}$  et  $m_o \in S$ . Si  $\text{rang}(Df)(m_o) = 1$ , alors  $S$  est localement le graphe d'une fonction de classe  $C^k$  de deux variables au voisinage de  $m_o$ .

Après tout ce discours, on peut donner la définition d'une surface régulière sous la forme qui montre clairement son lien avec le théorème des fonctions implicites.

**18.5 Définition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  un sous ensemble. On dit que  $S$  est une surface régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  si  $S$  est localement le graphe d'une fonction de classe  $C^k$  de deux variables au voisinage de chaque point  $m \in S$ .

Formulé ainsi, on voit bien que la définition d'une surface régulière et le théorème des fonctions implicites sont deux facettes d'une même idée : pour une surface régulière on part d'un sous ensemble  $M \subset \mathbf{R}^3$  et on exige que c'est localement le graphe d'une fonction au voisinage de chaque point. Et pour le théorème des fonctions implicites le sous ensemble  $M$  est déterminé par une fonction et on donne une condition suffisante pour que c'est localement le graphe d'une fonction au voisinage d'un point.

**Nota Bene.** Comme pour la notion de courbe paramétrée, la plupart du temps la classe de dérivabilité d'une surface régulière ne nous intéresse pas tellement. On parlera donc simplement d'une surface (régulière), sans préciser la classe  $C^k$ , c'est-à-dire, le  $k$  qui pourrait être un entier non-nul, voire  $\infty$ . On supposera que  $k$  est suffisamment grand pour que les définitions et les calculs ont un sens. La plupart du temps  $k = 2$  suffit, mais il y aura des moments où on aura besoin de plus de dérivabilité. D'autre part, pour certains résultats venant d'analyse il est important de savoir qu'ils ne sont valables que si  $k$  est suffisamment grand. On le précisera à chaque fois que c'est important.

**18.6 Remarque pour le lecteur curieux.** La notion général d'être localement un graphe est une généralisation directe des deux cas particuliers discutés ci-dessus. Le seul "problème" est qu'il faut bien choisir les notations, sinon on aura du mal à décrire tous les cas de figure possible. Voici donc la définition du cas général.

• **La définition générale d'être localement un graphe.** Soit  $M \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble en  $m \in M$ . Alors on dit que  $M$  est localement un graphe (de classe  $C^\ell$  d'une fonction de  $k < n$  variables et à valeurs dans  $\mathbf{R}^{n-k}$ ) s'il existe  $n$  intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  avec  $m \in \prod_{i=1}^n I_i$ ,  $k$  indices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  et une fonction

$g : \prod_{p=1}^k I_{i_p} \rightarrow \prod_{q=1}^{n-k} I_{j_q}$  de classe  $C^\ell$  tels que

$$M \cap \prod_{i=1}^n I_i = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n I_i \mid (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right\},$$

où les indices  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} \leq n$  sont les indices restantes quand on enlève les  $i_1, \dots, i_k$ . Autrement dit, on a l'égalité

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Si on compare cette définition avec la forme du théorème des fonctions implicites (général) comme donnée dans [37.1], on voit directement qu'on peut le reformuler en termes d'être localement un graphe comme suit.

• **Une reformulation du théorème des fonctions implicites.** Soit  $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  une fonction de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \geq 1$  définie sur un ouvert  $U$ , soit  $m_o \in U$  et soit  $M = \{m \in U \mid f(m) = f(m_o)\}$ . Si  $\text{rang}(\text{Jac}(f)(m_o)) = p$ , alors  $M$  est localement le graphe d'une fonction de classe  $C^\ell$  de  $n - p$  variables au voisinage de  $m_o$ .

Une fois qu'on a la (une) définition d'une surface régulière, on peut s'intéresser à la question comment construire des exemples de surfaces. Dans la pratique, la plupart des surfaces sont construites à l'aide du théorème des fonctions implicites et avec notre définition d'une surface régulière, la preuve devient une trivialité comme on va voir. Mais pour cela il faut commencer avec une définition préalable.

**18.7 Définition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^k$  une application dérivable. On dit qu'un point  $p \in U$  est un *point critique pour  $F$*  si

$$\text{rang}(\text{Jac}(F)(p)) < k.$$

Une autre façon d'énoncer cette condition est de dire que l'application linéaire  $\text{Jac}(F)(p) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$  n'est pas surjective.

On dit que  $v \in \mathbf{R}^k$  est une *valeur régulière de  $F$*  si  $F^{-1}(\{v\})$  ne contient pas de points critiques. Autrement dit :

$$\forall p \in U : F(p) = v \implies \text{rang}(\text{Jac}(F)(p)) = k.$$

Ⓟ **18.8 Proposition.** Soit  $O \subset \mathbf{R}^3$  un ouvert,  $F : O \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et  $v \in \mathbf{R}$  une valeur régulière de  $F$ . Alors  $S \subset \mathbf{R}^3$  défini par

$$S = \{p \in O \mid F(p) = v\}$$

est une surface régulière (de classe  $C^k$ ).

Dans l'introduction aux courbes paramétrées on a argumenté qu'on s'intéresse à l'image d'une courbe paramétrée, mais qu'il est (la plupart du temps) plus facile de garder l'aspect d'une courbe paramétrée. Pour une surface régulière la situation est un petit peu différente. On n'a pas commencé avec l'équivalent d'une courbe

paramétrée, on a commencé directement avec une définition de quel genre d'image/surface on veut étudier. Par contre, il existe bien un équivalent de la notion de paramétrisation d'une courbe : la notion d'une carte (locale). Contrairement au cas d'une courbe paramétrée, où l'application  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  décrit (en principe) toute la courbe (image), pour une surface régulière la plupart du temps une carte (locale) ne peut pas décrire toute la surface. D'autre part, comme pour une courbe, souvent les calculs sont (beaucoup) plus facile avec une paramétrisation que sans. Donnons donc la définition d'une carte locale, suivi d'une proposition qui rassemble quelques propriétés de cette notion. Notons tout de suite que la propriété [18.10.iv] est d'une utilité surtout théorique : on en aura besoin pour justifier certaines définitions plus tard, on ne l'utilisera guère pour des calculs pratiques.

**18.9 Définition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ . Alors une *carte locale* (aussi appelé un *système local de coordonnées* ou simplement des *coordonnées locales*) de  $S$  est une application  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \geq k$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^2$  vérifiant les trois conditions

(CL1)  $\psi(U) \subset S$ ,

(CL2)  $\psi$  est injective et

(CL3)  $\forall (u, v) \in U : \text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u, v)) = 2$ .

Ici  $\text{Jac}(\psi)$  est la matrice Jacobienne de taille  $3 \times 2$  donnée par

$$\text{Jac}(\psi)(u, v) = \begin{pmatrix} (\partial_1 \psi_1)(u, v) & (\partial_2 \psi_1)(u, v) \\ (\partial_1 \psi_2)(u, v) & (\partial_2 \psi_2)(u, v) \\ (\partial_1 \psi_3)(u, v) & (\partial_2 \psi_3)(u, v) \end{pmatrix},$$

où  $\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v), \psi_3(u, v))$  est l'écriture de  $\psi$  en ses trois composantes. La condition (CL3) dit donc que les deux colonnes de cette matrice sont deux vecteurs indépendants. On a énoncé les deux propriétés (CL1) et (CL2) explicitement, mais on aurait pu dire qu'une carte locale est une application (au moins de classe  $C^k$ ) injective  $\psi : U \rightarrow S$  qui vérifie la condition (CL3).

Si  $p \in S$ , alors une *carte locale au voisinage de  $p$*  (on dit aussi *une carte locale contenant  $p$*  ou *une carte locale autour de  $p$* ) est une carte locale  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  telle que  $p \in \psi(U)$ .

L'idée d'une carte locale de  $S$  est qu'elle donne une façon de se repérer sur la surface. Dans un atlas (de la France ou du monde) ou sur une carte d'une ville, on met un quadrillage et dans l'index on dit que Nantes se trouve dans le "rectangle" G7, ou que la rue du Destin se trouve en K2-3. Une carte pour  $S$  fait exactement la même chose : chaque point  $p$  dans l'image d'une carte peut être repéré par deux coordonnées  $(u, v)$  selon  $p = \psi(u, v)$ . En termes d'un quadrillage, dans  $\mathbf{R}^2$  on a le quadrillage canonique formé par les lignes (horizontaux et verticaux)  $x$  ou  $y$  constant (le plus souvent on dessine ces droites pour des valeurs entières).

#### DESSIN

Et l'image de ce quadrillage de  $\mathbf{R}^2$  donne un "quadrillage" du morceau  $\psi(U)$  de la surface  $S$ . Évidemment les lignes ne sont plus droites, elles seront des courbes. Mais l'idée persiste. L'exemple historique sont les méridiens et les parallèles sur la terre :

ce sont les lignes correspondantes aux lignes  $\varphi$  (pour le méridiens) ou  $\theta$  (pour les parallèles) constants dans les coordonnées sphérique sur la terre vu comme sphère de rayon  $R \approx 6378$  km :

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

L'idée d'un "quadrillage" est aussi bien connu pour les courbes (où le mot quadrillage n'est plus vraiment adapté). Il suffit de penser aux marqueur à côté de l'autoroute qui indique un kilométrage (à partir du "début" de l'autoroute). Évidemment ces marqueurs ne forment pas une ligne droite, ils suivent les courbes de l'autoroute. Mais ils correspondent avec les marqueur de la droite réelle (en km) où à chaque entier (en km) on met un petit trait.

### DESSIN

Et dans les dessins de courbes paramétrées on l'utilise aussi, en mettant la valeur de  $t$  à côté du point  $\gamma(t)$ . Et on voit de nouveau le changement de point de vue entre courbes (paramétrées) et surfaces régulières : pour une courbe paramétrée, son image est une conséquence et mettre les valeurs du paramètre  $t$  à côté du point  $\gamma(t)$  n'est utile que pour établir (dans le dessin) le lien entre la courbe image et l'application  $\gamma$ . Pour les surfaces régulières, c'est la surface comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$  qui est le point de départ. Mettre un système de coordonnées est un choix libre. Cette différence est aussi liée au fait que pour une courbe paramétrée on a une notion de paramétrage canonique évidente : par longueur d'arc. Par contre, pour une surface (régulière, arbitraire) il n'existe pas un choix plus ou moins canonique de carte locale qui fournit un quadrillage "standard."<sup>1</sup> Ce qui fournit une autre explication pour le changement de point de vue entre les courbes paramétrées et les surfaces régulières.

**Remarque pour le lecteur curieux.** Si on regarde bien la définition d'une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ , on s'aperçoit vite que du moment qu'on sait que c'est bien une surface régulière d'une certaine classe de dérivabilité, alors cette classe est complètement déterminée par  $S$ . Car si  $S$  est localement le graphe d'une fonction, cette fonction est déterminée par  $S$  et donc sa classe de dérivabilité est également déterminée par  $S$ . Et oui, on peut montrer que s'il y a deux parmi les trois propriétés de [18.1] qui sont satisfaites, alors c'est forcément par des fonctions de la même classe de dérivabilité.

Maintenant on peut artificiellement déclarer que la classe de dérivabilité de  $S$  sera moindre, cela ne change rien pour la surface, mais cela change la notion de carte locale, car d'un coup il y aura plus d'applications  $\psi : U \rightarrow S$  qui satisfont la condition d'être une carte locale. Dans ce texte on ne rentre pas dans cette discussion, mais il faut savoir que dans le contexte de variétés différentiables abstraites (dont la classe de différentiabilité est essentiellement déterminée par des cartes locales) cette question a son importance (relative, car même là on peut l'ignorer). Entre autres dans la théorie des groupes de Lie, où dans certaines démarches on commence avec une structure de classe  $C^2$  et qu'on montre qu'on peut la "réduire" en  $C^\infty$ .

---

1. Il existe la notion de coordonnées géodésiques, mais ces coordonnées dépendent d'un point de base et changent avec le point. Elles sont utiles pour des raisonnements locaux, mais perdent vite leur utilité ailleurs.

Ⓟ **18.10 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ . Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout  $m \in S$  il existe une carte locale  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que  $m \in \psi(U)$ .
- (ii) Pour tout ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  l'ensemble  $S' = V \cap S$  est une surface régulière de classe  $C^k$ .
- (iii) Si  $\psi : U \rightarrow S$  est une carte locale pour  $S$  et  $U' \subset U$  un ouvert, alors  $\psi|_{U'} : U' \rightarrow S$ , la restriction de  $\psi$  à  $U'$ , est aussi une carte locale.
- (iv) Pour toute carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  de  $S$  il existe un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = V \cap S$ .

Ⓟ **18.11 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière (de classe  $C^k$ ) et soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale de  $S$ . Alors

- (i)  $S' = \psi(U) \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière (de classe  $C^k$ ) et
- (ii) l'application  $\psi : U \rightarrow S'$  est un homéomorphisme quand on munit  $S'$  de la topologie induite par  $\mathbf{R}^3$ .

**18.12 Nota Bene : une erreur à ne pas commettre.** Si on met [18.10.iv] et [18.10.ii] ensemble, on obtient le résultat que l'image  $\psi(U)$  d'une carte locale est une surface régulière. Il est donc tentant d'oublier que  $\psi$  est (déjà) la carte locale d'une surface, de ne retenir que  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une application injective vérifiant  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)) = 2$  sur  $U$  et de vouloir conclure que  $\psi(U)$  est une surface régulière. Malheureusement (ou heureusement, ça dépend de son point de vue) en général cette conclusion sera fausse, car les résultats de [18.10] sont montrés sous l'hypothèse qu'on dispose déjà d'une surface régulière ! Et effectivement, les exemples [18.14] et [18.16] (dont le but est de montrer des situations qu'on veut éviter) sont des images d'une telle application mais, comme on montrera, ce ne sont pas des surfaces régulières.

**Remarque pour le lecteur curieux.** Dans le langage de la théorie des variétés différentiables, une application dérivable injective  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  dont la matrice Jacobienne a partout rang 2 (la dimension de l'espace de départ) est appelée une *immersion*, tandis qu'une telle application qui établit un homéomorphisme  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  quand l'image  $\psi(U)$  est équipée de la topologie induite est appelée un *plongement*. Dans ce texte on n'étudiera pas les immersions, mais elles jouent un rôle important dans la théorie des feuilletages et dans le lien entre sous-algèbres de Lie et sous-groupes de Lie.

**18.13 Exemple : le cône pointu.** Le cône pointu est le sous-ensemble  $C \subset \mathbf{R}^3$  défini par

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 = z^2 \} .$$

#### DESSIN

Quand on regarde l'image, on voit bien que le sommet  $(0, 0, 0)$  est pointu, ce qu'on a dit vouloir éviter. On voit bien que  $C$  est (globalement) le graphe d'une fonction,

à savoir de la fonction  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$  :

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = g(x, y) \equiv -\sqrt{x^2 + y^2} \} .$$

Sauf que cette fonction  $g$  n'est pas dérivable en  $(0, 0)$  comme requis par la définition d'une surface régulière qui demande que la fonction doit être au moins de classe  $C^1$ . On ne peut donc pas satisfaire la propriété (iii) de [18.1], mais peut-être serait-il possible de satisfaire la propriété (i) ou (ii) ? Quand on regarde le dessin, on voit bien que ça ne sera pas possible, car dans tout voisinage de  $(0, 0, 0)$  il y a toujours pour un même couple  $(x, z)$  deux valeurs de  $y$  possible et pour un même couple  $(y, z)$  deux valeurs de  $x$ . Il ne sera donc pas possible qu'on puisse écrire  $y$  respectivement  $x$  comme une fonction de  $(x, z)$  respectivement  $(y, z)$ . L'argument rigoureux met cela au propre. On suppose (preuve par l'absurde) qu'il existe trois intervalles  $0 \in I_i \subset \mathbf{R}$  vérifiant l'une des propriétés (i) ou (ii) de [18.1]. Parce que les intervalles  $I_i$  sont des voisinages ouverts de 0, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\pm\varepsilon \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$ . Ensuite on remarque que les points  $(\pm\varepsilon, 0, \varepsilon)$  et  $(0, \pm\varepsilon, \varepsilon)$  appartiennent au cône, donc ni la propriété (i) ni la propriété (ii) peuvent être satisfaites, car pour un même couple  $(y, z) = (0, \varepsilon)$  respectivement  $(x, z) = (0, \varepsilon)$  il y a deux points dans  $C$ , donc une fonction  $g$  ne peut pas exister. La conclusion est donc que le cône pointu n'est pas une surface régulière et que c'est le sommet qui pose le problème (de non-dérivabilité). Car dès qu'on enlève le sommet, ça devient une surface régulière !

**18.14 Exemple : le ruban en forme de huit.** Considérons le sous-ensemble  $S8 \subset \mathbf{R}^3$  défini par

$$S8 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = 4x^2(1 - x^2) \} .$$

On vérifie facilement que 0 n'est pas une valeur régulière de la fonction  $f(x, y, z) = z^2 + 4x^2(x^2 - 1)$  : c'est les points  $(0, y, 0)$  qui font défaut. On ne peut donc pas appliquer [18.8], mais on ne peut pas pour autant conclure que ce n'est pas une surface régulière. D'autre part, en regardant le dessin de la surface, on voit bien que dans (par exemple) aucun voisinage de  $(0, 0, 0)$  on peut écrire l'un des coordonnées en fonction des deux autres, ce qui suggère fortement qu'effectivement  $S8$  n'est pas une surface régulière. Pour montrer cela rigoureusement, on raisonne comme dans l'exemple du cône pointu par l'absurde. Supposons donc que  $S8$  est localement le graphe d'une fonction au voisinage de  $(0, 0, 0)$  et soient  $I_i$  des intervalles ouverts contenant 0. Sachant que les intervalles  $I_i$  sont des voisinages ouverts de 0, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\pm 2\varepsilon \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$ . Ensuite on constate que les six points

$$(\pm\varepsilon, 0, 2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}) , \quad (\varepsilon, 0, \pm 2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}) , \quad (0, \pm\varepsilon, 0)$$

appartiennent à l'intersection  $S8 \cap (I_1 \times I_2 \times I_3)$ . Il s'ensuit immédiatement qu'aucun des trois propriétés de [18.1] peut être satisfaite : la première est impossible à cause des points  $(\pm\varepsilon, 0, 2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2})$ , la deuxième est impossible à cause des points  $(0, \pm\varepsilon, 0)$  et la troisième est impossible à cause des points  $(\varepsilon, 0, \pm 2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2})$ . La conclusion est donc que  $S8$  n'est pas une surface régulière.

D'autre part, c'est l'image d'une application injective  $\psi : ]0, 2\pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  vérifiant partout  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)) = 2$ , à savoir (par exemple)

$$(18.15) \quad \psi(u, v) = (\sin(u), v, \sin(2u)) .$$

Dans la limite  $u \downarrow 0$  et  $u \uparrow 2\pi$ , on a

$$\lim_{u \downarrow 0} \psi(u, v) = \psi(\pi, v) = \lim_{u \uparrow 2\pi} \psi(u, v) ,$$

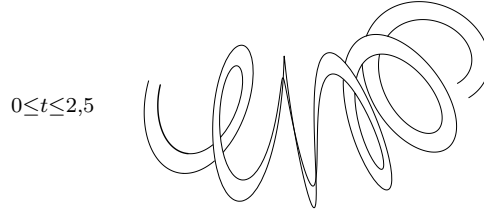
ce qui montre que l'image de  $\psi$  se touche elle-même (pour former la figure huit). La définition d'une surface régulière empêche donc ce sous-ensemble d'être une surface régulière, ce qui illustre le danger de croire que l'image d'une "carte" sera toujours une surface régulière [18.12].

Si on coupe cette surface, par exemple en ne regardant que la partie  $x \geq 0$ , on n'aura plus les mêmes contradictions qu'avant. Mais dans ce cas il y aura une pointe pour les points  $(0, y, 0)$  et on se retrouve dans la situation du cône pointu : dans un voisinage d'un tel point le sous-ensemble S8 est bien localement (dans un voisinage de  $(0, y, 0)$ ) le graphe d'une fonction, mais d'une fonction qui n'est pas dérivable.

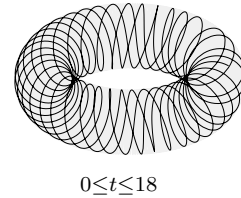
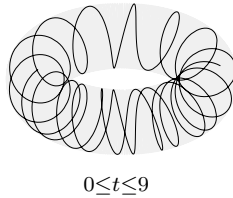
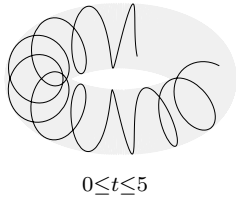
**18.16 Exemple : le ruban "irrationnel" sur un tore.** Comme troisième exemple d'un sous-ensemble qui n'est pas une surface régulière on considère l'application  $\psi : \mathbf{R} \times ]1, \frac{5}{4}[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$(18.17) \quad \psi(t, u) = \left( (3 + u \cdot \sin(\alpha t)) \cos(t), (3 + u \cdot \sin(\alpha t)) \sin(t), u \cdot \cos(\alpha t) \right)$$

avec son image  $\text{Rub} = \psi(\mathbf{R} \times ]1, \frac{5}{4}[)$ , où  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est un nombre irrationnel fixe (dans les dessin ci-dessous on a pris  $\alpha = \sqrt{186} \approx 13,64$ ). C'est un ruban en forme de spirale qui s'enroule sur un tore (voir [40.22.e]). Dans cet exemple il n'y a pas de points "limites," mais le ruban revient toujours de plus en plus près d'un point donné.



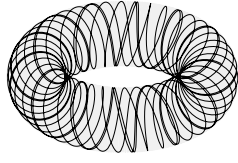
Dans le dessin di-dessus on n'a montré qu'une petite partie de la surface. Pour mieux saisir le phénomène que ce ruban revient toujours de plus en plus proche d'un point, on n'a dessiné dans les dessins qui suivent que le bord intérieur de cette surface pour des intervalles (en  $t$ ) de plus en plus grands.



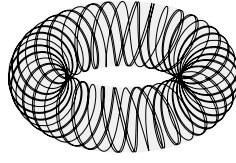
Remarquons que cette application  $\psi$  est injective et a partout  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)) = 2$ . Étant donné qu'on va montrer que cet sous-ensemble  $\text{Rub}$  n'est pas une surface régulière, cela nous donne un deuxième exemple qui illustre (encore une fois) le danger mentionné dans [18.12].

Pour montrer que ce ruban ne vérifie pas les conditions d'être une surface régulière, on donnera deux arguments différentes : le premier est basé directement sur la

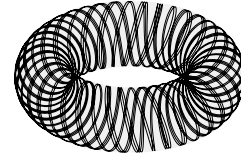




$$0 \leq t \leq 25$$



$$0 \leq t \leq 32$$



$$0 \leq t \leq 50$$

définition d'une surface régulière comme dans les exemples précédents, le deuxième basé sur [18.10.iv]. Dans les deux cas on fixe  $u_o \in ]1, \frac{5}{4}[$  et on se concentre sur le point  $\psi(0, u_o) = (3, 0, u_o)$ . Pour le *premier argument* (le plus long), on procède, comme dans les deux exemples précédents, par l'absurde en supposant qu'il existe trois intervalles ouverts  $I_i$  avec  $(3, 0, u_o) \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des trois propriétés de [18.1]. Quand on regarde les points  $\psi(0, u) = (3, 0, u)$ , on voit tout de suite qu'il sera impossible que c'est la propriété (iii) qui soit vérifié, car dans aucun voisinage de  $(3, 0, u_o)$  on peut exprimer  $z$  en fonction du couple  $(x, y)$  (pour les points de Rub).

Pour exclure aussi les cas (i) et (ii), on commence avec le constat qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel qu'on a

$$[3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon] \subset I_1, \quad [-\varepsilon, \varepsilon] \subset I_2 \quad \text{et} \quad [s_o - \varepsilon, s_o + \varepsilon] \subset I_3.$$

Si on arrive à trouver un point  $(3, y_o, u_o)$  avec  $0 < |y_o| < \varepsilon$ , alors la propriété (ii) ne peut pas être satisfaite (car pour le couple  $(x, z) = (3, u_o) \in I_1 \times I_3$  il existe deux points  $(x, y, z) \in \text{Rub} \cap (I_1 \times I_2 \times I_3)$  : avec  $y = 0$  et  $y = y_o$ ). Et si on arrive à trouver un point  $(x_o, 0, u_o)$  avec  $0 < |x_o - 3| < \varepsilon$ , alors la propriété (i) ne peut pas être satisfaite. Ainsi on aurait obtenu une contradiction et on peut conclure que Rub n'est pas une surface régulière.

Allons donc à la recherche de ces deux points ! Pour cela on a besoin d'un résultat concernant l'approximation Diophantienne d'un nombre irrationnel (pour nous donc le nombre  $\alpha$ ) par un rationnel : pour tout  $\delta > 0$  il existe  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$  tels que  $|q\alpha - p| < \delta$ . On le démontrera à la fin, mais continuons d'abord avec notre raisonnement. L'utilité de cette approximation est que cela permet de trouver une valeur de  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $t$  et  $\alpha t$  sont en même temps proche d'un multiple de  $2\pi$  (bien évidemment pas le même multiple). Trouver la valeur de  $x_o$  n'est maintenant pas difficile : il suffit de regarder le point  $\psi(t, u_o)$  pour  $t = 2\pi q$  :

$$\psi(2\pi q, u_o) = \left( 3 + u_o \cdot \sin(2\pi(q\alpha - p)), 0, u_o \right) \equiv (x_o, 0, u_o).$$

Sachant que  $\alpha$  est irrationnel,  $\alpha q - p \neq 0$  n'est pas de la forme  $\alpha q - p = n/2$  pour un  $n \in \mathbf{Z}$  et donc  $\sin(2\pi(q\alpha - p)) \neq 0$ . Sachant qu'on peut faire les majorations

$$|u_o \cdot \sin(2\pi(q\alpha - p))| \leq \frac{5}{4} \cdot |2\pi(q\alpha - p)| < \frac{5}{2} \pi \cdot \delta,$$

il s'ensuit qu'il suffit de choisir  $0 < \delta < 2\varepsilon/(5\pi)$  pour pouvoir exclure le cas (i).

Trouver le point  $(3, y_o, u_o)$  est un petit peu plus compliqué, mais l'idée est la même : on cherche un couple  $(t, u)$  tel que  $\psi(t, u) = (3, y_o, u_o)$  avec  $y_o$  vérifiant nos souhaits. Substituer l'égalité exigée pour  $z$  dans l'égalité pour  $x$  nous donne immédiatement les deux conditions

$$u = \frac{u_o}{\cos(\alpha t)} \quad \text{et} \quad (3 + u_o \cdot \tan(\alpha t)) \cdot \cos(t) = 3.$$

Pour trouver une solution convenable pour la deuxième équation (ce qui donnera automatiquement une solution pour la première équation), on introduit la fonction

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(t) = (3 + u_o \cdot \tan(\alpha t)) \cdot \cos(t)$$

et on constate qu'on a

$$\begin{aligned} f(2\pi q) &= 3 + u_o \cdot \tan(2\pi(\alpha q - p)) \\ f\left(2\pi q - \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha q - p)\right) &= 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}(\alpha q - p)\right) . \end{aligned}$$

Si donc  $\alpha q - p > 0$  (et pas trop grand), alors le premier sera plus grand que 3 et le deuxième plus petit. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $0 < \xi < 2\pi(\alpha q - p)/\alpha$  tel que  $f(2\pi q - \xi) = 3$ . On aura donc

$$\psi(2\pi q - \xi, s) = (3, y_o, u_o)$$

avec

$$\begin{aligned} |y_o| &\equiv \left| \left( 3 + u_o \cdot \tan(2\pi(\alpha q - p) - \alpha\xi) \right) \cdot \sin(2\pi q - \xi) \right| \\ &\leq |\xi| \cdot (3 + 2u_o \cdot |2\pi(\alpha q - p) - \alpha\xi|) \leq |\xi| \cdot (3 + 2u_o \cdot 4\pi \cdot |\alpha q - p|) \\ &\leq \delta \cdot \frac{3 + 8\pi u_o \delta}{\alpha} , \end{aligned}$$

où pour la première inégalité on a utilisé l'inégalité  $\tan z \leq 2z$ , valable pour  $0 \leq z \leq \pi/4$ . Il s'ensuit qu'il suffit de choisir  $\delta$  tel que  $\delta(3 + 8\pi u_o \delta)/\alpha < \varepsilon$  (ce qui est toujours possible!) pour pouvoir exclure aussi le cas (ii).

Reste donc le cas  $\alpha q - p < 0$ . Mais pour cela il "suffit" de changer les signes. Car on a

$$\begin{aligned} f(-2\pi q) &= 3 - u_o \cdot \tan(2\pi(\alpha q - p)) \\ f\left(\frac{2\pi}{\alpha}(\alpha q - p) - 2\pi q\right) &= 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}(\alpha q - p)\right) . \end{aligned}$$

Et de nouveau, mais maintenant parce que  $\alpha q - p < 0$ , le premier est plus grand que 3 et le deuxième plus petit. Il existe donc  $0 < \xi < 2\pi(\alpha q - p)/\alpha$  tel que  $f(\xi - 2\pi q) = 3$ . Le reste de l'argument ne change pas et on peut conclure que dans tous les cas la propriété (ii) de [18.1] n'est pas satisfaite. Et donc le sous-ensemble Rub n'est pas une surface régulière.

Pour le *deuxième argument*, on suppose toujours que Rub est une surface régulière, ce qui permet d'appliquer [18.10.iii] et de conclure que la restriction de l'application  $\psi$  à l'ouvert  $U_1 = ]-1, 1[ \times ]1, \frac{5}{4}[$  est une carte locale et donc par [18.10.iv] il doit exister un ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U_1) = \text{Rub} \cap V_1$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\varepsilon((3, 0, u_o)) \subset V_1$ . Maintenant on invoque de nouveau l'approximation Diophantienne de  $\alpha$  par un rationnel sous forme qu'il existe  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$  tel que  $|\alpha q - p| < \varepsilon/(4\pi u_o)$  (comme dit ci-dessus, la preuve sera donné à la fin). On rappelle aussi le théorème des accroissements finis qui dit en particulier pour la fonction  $\cos$  qu'on a, pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$ , l'inégalité

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \cdot \sup_{z \in [x, y]} |\cos'(z)| = |x - y| .$$

Avec cette remarque on fait le calcul suivant :

$$\|\psi(2\pi q, u_o) - \psi(0, u_o)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_o \sin(2\pi\alpha q) \\ 0 \\ u_o \cos(2\pi\alpha q) - u_o \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \begin{pmatrix} u_o \sin(2\pi\alpha q) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_o \cos(2\pi\alpha q) - u_o \end{pmatrix} \right\| \\
&= u_o \cdot \left( |\sin(2\pi(\alpha q - p))| + |\cos(2\pi(\alpha q - p)) - \cos(0)| \right) \\
&\leq u_o \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot |q\alpha - p| < \varepsilon .
\end{aligned}$$

On a donc  $(2\pi q, u_o) \notin U_1$  et  $\psi(2\pi q, u_o) \in V_1 \cap \text{Rub}$ . Parce que  $\psi$  est injective, ceci est en contradiction avec l'hypothèse  $\psi(U_1) = \text{Rub} \cap V_1$  et donc  $\text{Rub}$  ne peut pas être une surface régulière.

• **Approximation Diophantienne.** Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  in nombre irrationnel. Alors pour tout  $\delta > 0$  il existe  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N}$  tels que  $|\alpha q - p| < \delta$ .

*Preuve.* On montrera que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  il existe  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $|q\alpha - p| \leq 1/n$ . Une fois ce résultat montré, il suffit de prendre  $n$  tel que  $1/n < \delta$  pour obtenir  $|q\alpha - p| \leq 1/n < \delta$  comme voulu. Soit donc  $n \in \mathbf{N}^*$  un entier et considérons les  $n$  intervalles  $I_0, \dots, I_{n-1}$  définis comme

$$I_i = \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[ .$$

On note par  $y = [x]$  la partie fractionnelle de  $x \in \mathbf{R}$ , c'est-à-dire l'unique  $y \in [0, 1[$  tel qu'il existe  $p \in \mathbf{Z}$  avec  $y = x - p$ , et on considère les  $n+1$  nombres  $y_j = [j \cdot \alpha] \in [0, 1[$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Étant donné que les  $n$  intervalles  $I_i$  sont 2 à 2 disjoints et de réunion  $[0, 1[$  et que les  $n+1$  nombres  $y_j$  y appartiennent, il doit y avoir un intervalle  $I_k$  qui contient (au moins) deux de ces nombres.<sup>2</sup> Supposons qu'on a  $y_i, y_j \in I_k$  avec  $0 \leq i < j \leq n$ . Il existe donc  $p_i, p_j \in \mathbf{Z}$  tels que

$$-\frac{k+1}{n} < -(i\alpha - p_i) \leq -\frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \frac{k}{n} \leq j\alpha - p_j < \frac{k+1}{n}$$

et donc

$$-\frac{1}{n} < (j-i)\alpha - (p_j - p_i) < \frac{1}{n} .$$

Il suffit donc de poser  $q = j - i$  et  $p = p_j - p_i$  pour avoir le résultat voulu (car  $i < j$  implique  $q > 0$  et  $j \leq n$  implique  $q \leq n$ ).  $\boxed{\text{CQFD}}$

**18.18 Remarque : des courbes à la sauce surface.** Si on veut éviter des points doubles et des parties de courbes qui se rapprochent dangereusement, on peut définir la notion de courbe de la même façon qu'une surface régulière. Dans un tel contexte on parle de *sous-variété de dimension 1*, plutôt que de courbe (paramétrée) et on donne la définition suivante.

Un sous-ensemble  $C \subset \mathbf{R}^n$  est une *sous-variété de dimension 1* si  $C$  est localement le graphe d'une fonction (de classes  $C^k$ ) d'une (seule) variable au voisinage de chaque point  $p \in C$ .

Comme pour les surfaces régulières, c'est le fait d'être localement un graphe qui exclut les points de rebroussements, les points doubles et les parties qui se

2. Cet argument s'appelle le "principe des tiroirs" ou le "principe des tiroirs de Dirichlet." En anglais on parle du "pigeonhole principle." L'argument qu'on donne ici suit presque à la virgule près l'argument donné par Dirichlet dans [Dir63, §142].

rapprochent dangereusement. Et comme pour les surfaces régulières, on définit la notion de *carte* comme une application  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  (de classe  $C^k$ ) définie sur un intervalle  $I \subset \mathbf{R}$  vérifiant

- $\gamma(I) \subset C$ ,
- $\gamma$  est injective et
- $\forall t \in I : \text{rang}(\text{Jac}(\gamma)(t)) = 1$ .

Il est immédiat qu'un tel  $\gamma$  est une courbe paramétrée régulière. L'image d'une carte pour une sous-variété de dimension 1 est donc (par définition) l'image d'une courbe paramétrée régulière, ce qui exclut les points de rebroussements. Mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, l'image de la courbe paramétrée régulière et injective [40.1.iii] n'est pas une sous-variété de dimension 1 à cause du point limite au centre de la “figure huit.” Et la courbe injective donnée par

$$\gamma(t) = \left( (3 + \sin(\alpha t)) \cos t, (3 + \sin(\alpha t)) \sin t, \cos(\alpha t) \right)$$

(avec  $\alpha$  un nombre irrationnel) n'est pas non plus une sous-variété de dimension 1, malgré l'absence de “points doubles” ou “limites” comme dans [40.1.ii] ou [40.1.iii]. Cette courbe  $\gamma$  est le bord intérieur du ruban décrit en [18.16] (on y trouve donc des dessins de  $\gamma$ ) ; en tant que tel c'est son analogue pour la dimension 1. Elle “remplit” la surface d'un tore : c'est un solénoïde qui s'enroule sur lui-même sans se rencontrer.

## 19. Équivalence avec d'autres définitions

La définition qu'on a donné d'une surface régulière est inhabituelle, ce qui ne veut pas dire qu'il y a unanimité dans la littérature sur une telle définition, car on y trouve (au moins) deux définitions différentes. Bien sûr, ces trois définitions sont équivalentes, comme on montrera ci-dessous après avoir donné les deux autres ; les différences s'expliquent par les préoccupations de l'auteur.

Ⓟ **19.1 Lemme topologique préalable.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et injective. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $f : X \rightarrow f(X)$  est un homéomorphisme quand  $f(X)$  est muni de la topologie induite.
- (ii)  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  est continue quand  $f(X)$  est muni de la topologie induite.
- (iii) pour tout ouvert  $U$  de  $X$  il existe un ouvert  $V$  de  $Y$  tel que  $f(U) = f(X) \cap V$ .

**19.2 Définition alternative 1.** Un sous-ensemble  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une *surface régulière de classe  $C^k$* ,  $k \geq 1$  si pour tout  $p \in S$  il existe un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^2$  et une application  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ) vérifiant les conditions suivantes :

- (CL1)  $p \in \psi(U) \subset S$ ,
- (CL2)  $\psi$  est injective,
- (CL3)  $\forall (u, v) \in U : \text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u, v)) = 2$  et
- (CL4) pour tout ouvert  $U_1 \subset U$  il existe un ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  tel qu'on a l'égalité  $\psi(U_1) = S \cap V_1$ .

Selon l'auteur on remplace la condition (CL4) soit par la condition que l'application  $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset S$  est un homéomorphisme quand on munit  $\psi(U) \subset S$  de la topologie induite, soit par la condition que l'application réciproque  $\psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow U$  est continue (quand on munit  $\psi(U) \subset S$  de la topologie induite). Selon [19.1] ce sont des conditions équivalentes.

**19.3 Définition alternative 2.** Un sous-ensemble  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une *surface régulière de classe  $C^k$* ,  $k \geq 1$  si pour tout  $p \in S$  il existe un voisinage ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  de  $p$ , un ouvert  $W \subset \mathbf{R}^3$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : W \rightarrow V$  tels que

$$\phi(Z \cap W) = S \cap V ,$$

où  $Z = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R}\}$  est le sous-espace vectoriel  $z = 0$  utilisé comme surface de référence.

Ⓟ **19.4 Proposition.** *Les trois définitions d'une surface régulière [18.5], [19.2] et [19.3] sont équivalentes.*

**Nota Bene : une erreur à ne pas commettre bis.** Quand on lit bien la définition alternative [19.2], on voit que les trois premières conditions disent que chaque point  $p \in S$  admet une carte locale  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  avec  $p \in \psi(U)$ . Avec cette définition on pourrait donc tenir le discours suivant : on définit une surface régulière comme un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbf{R}^3$  tel qu'il existe (autour de chaque point de  $S$ ) des cartes locales vérifiant la condition supplémentaire (CL4). Ensuite on définit la notion de carte locale pour une surface régulière sans cette condition supplémentaire. Et on termine avec la preuve que toute carte locale pour une surface régulière a cette condition supplémentaire (dans ce texte on l'a fait par [18.10.iii-iv]).

Le lecteur insouciant a donc vite l'impression qu'on a montré que la condition (CL4) est superflue. Mais, comme on a déjà signalé dans [18.12], il n'en est rien. On montre qu'une carte locale vérifie (CL4) **sous l'hypothèse qu'on sait déjà que  $S$  est une surface régulière**. Si on ne sait pas que  $S$  est une surface régulière, on ne peut pas montrer qu'une carte locale a la propriété que c'est un homeomorphisme entre  $U \subset \mathbf{R}^2$  et son image dans  $\mathbf{R}^3$ . Il faut donc d'abord **imposer** que c'est vrai autour de chaque point, avant qu'on puisse montrer que c'est vrai pour une carte quelconque. Les exemples [18.14] et [18.16] montrent ce qui peut se passer si on ne sait pas qu'on est déjà dans une surface régulière.

## 20. Applications sur et vers des surfaces régulières

Une fois qu'on dispose de la notion de surface régulière, on s'intéresse à la question comment définir des fonctions différentiables sur et vers une telle surface. Le but sera de montrer que, avec la définition appropriée, on peut exprimer ces deux notions uniquement en termes de cartes locales. Bien sûr, pour une application  $f : O \subset \mathbf{R}^n \rightarrow S$  la notion de dérivabilité est simple, car rien nous empêche de la voir comme une application  $f : O \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Par contre, pour une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  la situation est différente, car en général la définition usuelle de la différentielle (ou d'une dérivée partielle) n'a pas de sens pour la simple raison que pour  $p \in S$  et  $h \in \mathbf{R}^3$  (aussi petit qu'il soit) il n'y a aucune garantie que  $p + h$  appartienne à  $S$ . Prenons comme exemple la température sur la surface de la terre (et on oublie que la température est aussi définie dans l'atmosphère et à l'intérieur de la terre ; on prétend qu'elle n'est définie qu'à la surface). Comment définir l'idée que cette fonction est dérivable ? L'idée "évidente" est de mettre des coordonnées locales sur la terre et d'exprimer la température en fonction de ces coordonnées. Une fois qu'on a eu cette idée, il faut vérifier que deux personnes qui choisissent deux systèmes de coordonnées différentes, obtiennent quand même le même verdict, à savoir : dérivable ou non. Et là on voit tout de suite un petit problème : si l'autre personne a choisi des coordonnées que nous trouvons bizarres, alors il y a peu de chance qu'on arrive à la même conclusion. Heureusement deux systèmes de coordonnées locales ne peuvent pas être si bizarres l'un par rapport à l'autre : dans [20.5] on montrera que passer de l'un à l'autre est une application de classe  $C^k$  pour une surface de classe  $C^k$ . L'idée de base pour la définition de la classe de dérivabilité d'une fonction  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  sera "donc" de le faire en termes de la composée avec une carte.

On voit donc l'intérêt d'exprimer une fonction  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  en termes de cartes locales (comme la courbure de Gauß), mais même pour une fonction  $f : O \subset \mathbf{R}^n \rightarrow S$  il y a un intérêt de l'exprimer en termes de cartes locales, notamment dans la description d'une courbe sur une surface. Un autre intérêt (à plus long terme) est que c'est une préparation à la notion d'une variété différentiable abstraite.

**20.1 Définitions.** • Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière (de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ), soit  $O \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et soit  $f : O \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$  une application. On dit (et cela ne sera pas une surprise) que  $f$  est une application de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \in \mathbf{N}$  si elle l'est comme application  $f : O \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

• Une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de classe  $C^\ell$  sur  $S$  si pour toute carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  l'application composée  $f \circ \psi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de classe  $C^\ell$ .

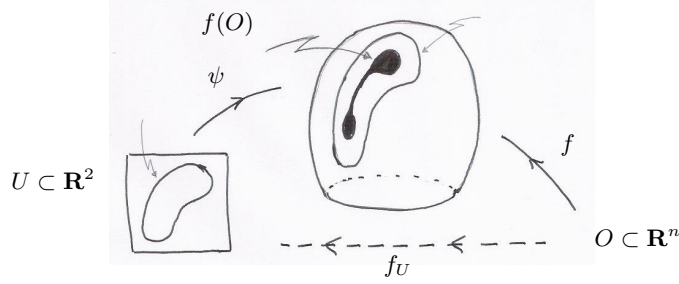
• Soit  $I$  un ensemble d'indices et soit  $\psi_i : U_i \rightarrow S$  une carte locale de  $S$  pour tout  $i \in I$ . Si la réunion  $\cup_{i \in I} \psi(U_i)$  des images de toutes ces cartes vaut  $S$ , on dit que la collection  $\mathcal{A} = \{\psi_i : U_i \rightarrow S \mid i \in I\}$  est un *atlas* pour  $S$ .

**Nota Bene.** Le lecteur attentif aura remarqué que notre définition d'une fonction  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^\ell$  sur une surface régulière  $S$  introduit une ambiguïté dans le cas  $\ell = 0$ . Car il existe déjà une notion d'une fonction continue sur  $S$  : par rapport à la topologie induite par  $\mathbf{R}^3$ . Heureusement ces deux notions coïncident, comme on le montre dans [20.2].



**20.2 Lemme.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$  et soit  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction. Alors  $f$  est continue par rapport à la topologie induite par  $\mathbf{R}^3$  sur  $S$  si et seulement si  $f$  est continue (de classe  $C^0$ ) dans le sens [20.1].

Ⓟ **20.3 Proposition (factorisation d’une application).** Soit  $S$  une surface régulière (de classe  $C^k$ ), soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale, soit  $O \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et soit  $f : O \rightarrow S$  une application de classe  $C^\ell$  vérifiant  $f(O) \subset \psi(U)$ . Alors il existe une unique application  $f_U : O \rightarrow U$  vérifiant  $f = \psi \circ f_U$  ; ce  $f_U$  est de classe  $C^p$  avec  $p \geq \min(k, \ell)$ .



Si  $f : O \subset \mathbf{R}^n \rightarrow S$  est une application qui prend ses valeurs dans  $\psi(U)$ , alors l’injectivité de  $\psi$  nous garantit automatiquement l’existence et unicité d’une application  $f_U : O \rightarrow U$  vérifiant  $f = \psi \circ f_U$ . L’intérêt de [20.3] réside dans le fait qu’il relie le degré de différentiabilité de  $f$  et de  $f_U$ . La restriction que  $f_U$  est “seulement” de classe  $C^p$  avec  $p \geq \min(k, \ell)$  s’explique directement par le fait que c’est essentiellement  $f$  composé avec (la réciproque de)  $\psi$  qui est de classe  $C^k$ . On aura régulièrement besoin de ce résultat quand on considère une courbe  $\gamma : I \rightarrow S$  sur la surface  $S$ . Pour définir une telle courbe, il faut donner les trois composantes  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  et en plus il faut vérifier que le résultat reste sur  $S$ . Par contre, quand on sait qu’on a nécessairement  $\gamma = \psi \circ c$  pour une courbe  $c : I \rightarrow U \subset \mathbf{R}^2$ , on voit qu’on n’a besoin que de deux composantes  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$  et qu’on n’a pas besoin de respecter une contrainte (sauf que le résultat doit rester dans l’ouvert  $U$ ).

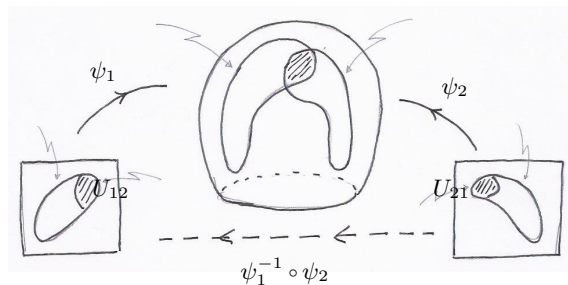
Ⓟ **20.4 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière (de classe  $C^k$ ), soit  $\mathcal{A}$  un atlas pour  $S$ , soit  $O \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et  $f : O \rightarrow S$  une application continue. Pour chaque carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  dans  $\mathcal{A}$ , on note  $O_U = f^{-1}(\psi(U))$  et, pour un  $O_U$  non vide,  $f_U : O_U \rightarrow U$  l’unique application vérifiant  $f = \psi \circ f_U$  sur  $O_U$ .

- (i)  $O_U \subset O$  est un ouvert, éventuellement vide.
- (ii)  $f$  est de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \leq k$  si et seulement si  $f_U : O_U \rightarrow U$  est de classe  $C^\ell$  pour tout carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  dans  $\mathcal{A}$  pour laquelle  $O_U$  n’est pas vide.

Ⓟ **20.5 Proposition (changement de carte).** Soit  $S$  une surface régulière et soit  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  deux cartes locales. On définit  $U_{12} = \psi_1^{-1}(\psi_2(U_2)) \subset U_1$  et  $U_{21} = \psi_2^{-1}(\psi_1(U_1)) \subset U_2$ . Alors  $U_{12}$  et  $U_{21}$  sont des ouverts et l’application



$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : U_{12} \rightarrow U_{21}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme qu'on appelle une fonction de changement de carte.



Le lecteur a déjà rencontré la notion de changement de carte dans le contexte des courbes paramétrées, sauf que là on l'a appelé “reparamétrage,” mais c'est exactement la même idée. Si  $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  sont deux courbes équivalentes par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  [5.1] et si (au moins) une d'elles est injective, alors on a par définition  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ . Mais parce que disons  $\gamma_2$  est injective, on peut réécrire cette égalité comme

$$\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \quad \text{ou} \quad \varphi^{-1} = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 .$$

Si on voit chaque paramétrage  $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  comme une carte locale (comme on le fait quand on les interprète comme des sous-variétés de dimension 1, voir [18.18]), alors on retrouve exactement le même résultat que dans [20.5] : la composée  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 = I_1 \rightarrow I_2$  est un  $C^k$  difféomorphisme. La “fonction de reparamétrage” change donc de nom pour les surfaces (et les variétés en général) en “fonction de changement de cartes.” Par contre, on n'a pas pu énoncer un vrai équivalent de [20.5] dans le contexte des courbes paramétrées, car on n'a jamais exigé qu'une courbe paramétrée est une application injective (et même si c'est injective, on n'a pas exigé les conditions supplémentaires pour que ce soit une sous-variété de dimension 1). On a donc dû introduire cette notion par une définition (d'équivalence par reparamétrage), plutôt que par un résultat.

Ⓟ **20.6 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ , soit  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application et soit  $\ell \leq k$ . Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $f$  est de classe  $C^\ell$ .
- (ii) Pour tout point  $p \in S$  il existe une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  contenant  $p$  telle que  $f \circ \psi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de classe  $C^\ell$ .
- (iii) Il existe un atlas  $\mathcal{A} = \{\psi_i : U_i \rightarrow S \mid i \in I\}$  pour  $S$  tel que pour toute carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  dans l'atlas  $\mathcal{A}$  la composée  $f \circ \psi$  est de classe  $C^\ell$ .

Ⓟ **20.7 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ , soit  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application et soit  $\ell \leq k$ . Si pour tout  $p \in S$  il existe une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  contenant  $p$  (c'est-à-dire  $p \in \psi(U)$ ) telle que  $f \circ \psi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de classe  $C^\ell$ , alors  $f$  est de classe  $C^\ell$ .

Si on compare le résultat de [20.6] avec la définition [20.1], on s'aperçoit vite que les trois propriétés ne diffèrent que par un petit détail : pour la définition il faut vérifier quelque chose pour toutes les cartes, tandis que selon [20.6] il suffit de le faire pour un atlas, c'est-à-dire un nombre limité de cartes locales, juste assez pour que les images  $\psi_i(U_i)$  couvrent toute la surface.

Et comme pour [20.3] et [20.5], on a déjà rencontré cette idée dans le contexte des courbes, et encore une fois sous un autre angle à cause du fait qu'on considère des courbes paramétrées et pas des sous-variétés de dimension 1. Car pour une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , on a montré (entre autres) que la courbure absolue  $\kappa$  est une quantité associée avec l'image  $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$ , indépendante du paramétrage. Autrement dit, on a montré que  $\kappa$  est une fonction définie sur  $\gamma(I)$ , plutôt que sur l'intervalle  $I$ . Mais on l'a exprimé comme fonction  $\kappa : I \rightarrow \mathbf{R}$ , qui est de classe  $C^{k-2}$  quand  $\gamma$  est de classe  $C^k$ . Si on applique l'esprit de la définition [20.1], on dira que  $\kappa$  est une fonction de classe  $C^{k-2}$  sur  $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$ .

**Remarque pour le lecteur attentif.** Ce lecteur aura certainement remarqué que dans [20.1] on définit la classe de dérivabilité  $C^\ell$  sans contrainte sur  $\ell$ , tandis que dans [20.4] et [20.6] on met la contrainte  $\ell \leq k$ . L'explication est assez simple. Pour [20.4] on compose une application  $f_U$  avec l'application  $\psi$  d'une carte. Sachant que (sans autres précisions)  $\psi$  est de classe  $C^k$ , on ne peut pas garantir que la composée  $\psi \circ f_U$  est d'une classe de dérivabilité plus grande que  $k$ . Bien sûr, dans des cas particulier ça pourrait se produire (par exemple pour une application constante), mais on ne peut pas le garantir en général. Pour [20.4] la raison est similaire : on compose l'application  $f$  avec l'application  $\psi$  d'une carte, donc (pour les mêmes raisons) on ne peut pas garantir que le résultat soit d'une classe de dérivabilité plus grande que  $k$ . D'où la restriction  $\ell \leq k$ .

**Remarque pour le lecteur curieux.** Revenons sur l'idée d'exprimer la notion d'une application vers ou sur une surface uniquement en termes de cartes locales. Pour cela prenons une surface régulière  $S$  (de classe  $C^k$ ) et un atlas  $\mathcal{A} = \{\psi_i : U_i \rightarrow S \mid i \in I\}$  de cartes locales de  $S$  et regardons d'abord le cas d'une application  $f : O \subset \mathbf{R}^n \rightarrow S$  de classe  $C^\ell$  (avec  $\ell \leq k$ ). Selon [20.4] on aura des ouverts  $O_i = f^{-1}(\psi_i^{-1}(U_i)) \subset O$  et des applications  $f_i : O_i \rightarrow U_i$  de classe  $C^\ell$  vérifiant  $f|_{O_i} = \psi_i \circ f_i$ .

Essayons maintenant de renverser la situation : on se donne des ouverts  $O_i \subset O$  vérifiant  $\cup_{i \in I} O_i = O$  et des applications  $f_i : O_i \rightarrow U_i$  de classe  $C^\ell$ . Peut-on en construire une application  $f : O \rightarrow S$  telle qu'on a  $f|_{O_i} = \psi_i \circ f_i$ ? La réponse est bien évidemment non, car il faut avoir la condition de compatibilité

$$x \in O_i \cap O_j \quad \implies \quad \psi_i(f_i(x)) = \psi_j(f_j(x)) ,$$

une condition qu'on peut reformuler comme

$$(20.8) \quad (\psi_j^{-1} \circ \psi_i) \circ f_i = f_j ,$$

une égalité qui doit être vérifiée sur l'ensemble  $f_i^{-1}(U_{ij}) \subset O_i$  avec  $U_{ij}$  défini comme dans [20.5] :  $U_{ij} = \psi_i^{-1}(\psi_j(U_j)) \subset U_i$ . On montre facilement que cette condition est nécessaire et suffisante pour que la collection d'applications  $f_i : O_i \rightarrow U_i$  définisse une application  $f : O \rightarrow S$  vérifiant  $f = \psi_i \circ f_i$ . Et donc par [20.4], si les applications  $f_i$  sont de classe  $C^\ell$ ,  $f$  le sera aussi. Autrement dit, une application  $f : O \rightarrow S$  de

classe  $C^\ell$  est équivalente à une collection d'applications  $f_i : O_i \rightarrow U_i$  de classe  $C^\ell$  vérifiant la condition de compatibilité (20.8).

Ensuite on regarde le cas d'une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \leq k$  (dans le sens de la définition [20.1]). Avec [20.6] on voit qu'on peut la transformer en une famille d'applications  $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^\ell$  (dans le sens ordinaire) définies sur les cartes de l'atlas  $\mathcal{A}$  de  $S$ . Évidemment ce n'est pas n'importe quelle famille  $f_i$  qui représente une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$ , mais il est facile de voir qu'une condition nécessaire est suffisante pour qu'une famille  $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  représente une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  est qu'elle doit vérifier

$$\forall p \in \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) \quad : \quad f_i(\psi_i^{-1}(p)) = f_j(\psi_j^{-1}(p)) ,$$

ce qui est équivalent à la condition

$$(20.9) \quad f_i|_{U_{ij}} = f_j \circ (\psi_j \circ \psi_i^{-1}) ,$$

où, comme avant, on a posé  $U_{ij} = \psi_i^{-1}(\psi_j(U_j))$  [20.5]. On peut donc conclure qu'une application  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^\ell$  est équivalente à une famille d'applications  $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  vérifiant la condition de compatibilité (20.9).

La remarque importante à faire est que dans les deux cas on remplace une application (vers ou sur  $S$ ) par une famille d'applications (vers ou sur des cartes) vérifiant une condition de compatibilité qui fait intervenir les fonctions de changement de cartes [20.5].

## 21. Le plan tangent à une surface régulière

**21.1 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et  $p \in S$  un point. Alors il existe un unique plan (affine)  $P \subset \mathbf{R}^3$  ayant la propriété

$$(21.2) \quad \lim_{q \rightarrow p, q \in S} \frac{d(q, P)}{\|q - p\|} = 0,$$

où  $d(q, P)$  désigne la distance du point  $q$  au plan  $P$ . Ce plan  $P$  peut être décrit de plusieurs façons différentes.

(i) Si  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une carte locale avec  $p \in \psi(U)$ , alors on a

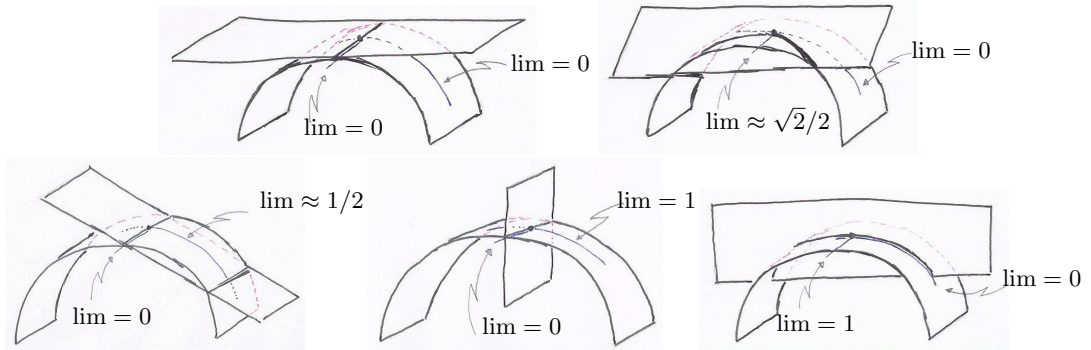
$$P = \left\{ p + \lambda \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) + \mu \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\},$$

où  $(u_o, v_o) \in U$  est l'unique point tel que  $\psi(u_o, v_o) = p$ .

(ii)  $P$  est la réunion de toutes les droites tangentes  $DT_{t_o} \gamma$  associées à des courbes  $\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$  (dérivables) pour lesquelles il existe  $t_o \in I$  tel que  $\gamma(t_o) = p$  et  $\gamma'(t_o) \neq 0$ .

(iii)  $P$  est l'ensemble des points de la forme  $p + \gamma'(t_o)$  associés à toutes les courbes dérivables  $\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$  pour lesquelles il existe  $t_o \in I$  tel que  $\gamma(t_o) = p$ .

Pour bien saisir la position du plan tangent, on montre quelques exemples de plans passant par un point  $p$  d'une surface régulière  $S$ , ainsi que des courbes (sur la surface, passant par  $p$ ) selon lesquelles on calcule  $\lim_{q \rightarrow p} d(q, P)/\|q - p\|$ .



**21.3 Définition.** L'unique plan  $P$  vérifiant (21.2) est appelé le *plan tangent* à la surface  $S$  au point  $p$  et pour être plus précis, on le note comme  $PT_p S$ . Comme pour une courbe, où on a fait une différence entre la droite tangente et l'espace tangent [7.8], on introduit ici la notion d'espace tangent à une surface : l'espace tangent à  $S$  au point  $p \in S$ , noté  $T_p S$ , est le sous-espace vectoriel (de dimension 2) parallèle à  $P$ .

**Nota Bene.** Comme pour les courbes avec la droite tangente et l'espace tangent, dans la littérature on confond souvent le plan tangent  $PT_p S$  avec l'espace tangent  $T_p S$  et on interprète  $PT_p S$  comme le "sous-espace vectoriel" dont l'origine se trouve au point  $p$ . Dans ce texte on utilisera les deux notations pour distinguer les deux cas de figure.

Ⓟ **21.4 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière,  $p \in S$  et  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale avec  $p = \psi(u_o, v_o)$ . Alors  $T_p S$ , l'espace tangent à  $S$  au point  $p$ , est engendré par les deux vecteurs

$$(\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \quad \text{et} \quad (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) .$$

**21.5 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et  $p \in S$ . Alors  $T_p S$ , l'espace tangent à  $S$  au point  $p$ , est l'ensemble des vecteurs  $\gamma'(t_o)$  associés à toutes les courbes  $\gamma : I \rightarrow S$  avec  $\gamma(t_o) = p$ . En formule :

$$T_p S = \{ \gamma'(t_o) \in \mathbf{R}^3 \mid \gamma : I \rightarrow S \text{ une courbe vérifiant } t_o \in I \text{ et } \gamma(t_o) = p \} .$$

**21.6 Proposition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^3$  un ouvert,  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $v \in \mathbf{R}$  une valeur régulière de  $F$ ,  $S = F^{-1}(v)$  la surface régulière associée [18.8] et soit  $p \in S$  arbitraire. Alors  $T_p S$ , l'espace tangent à  $S$  au point  $p$ , est le sous-espace orthogonal au vecteur gradient

$$\text{grad}(F)(p) \equiv ( (\partial_1 F)(p), (\partial_2 F)(p), (\partial_3 F)(p) ) .$$

**Remarque.** Malgré l'écriture souvent identique, il y a une différence subtile entre le gradient d'une fonction et la matrice Jacobienne : l'un est la transposée de l'autre. Plus précisément, la matrice Jacobienne est une matrice de taille  $1 \times 3$  (un vecteur ligne), tandis que le gradient est un élément de  $\mathbf{R}^3$ , c'est-à-dire une matrice de taille  $3 \times 1$  (un vecteur colonne). Dans des cas plus généraux, il n'est plus automatique que le gradient coïncide avec la matrice Jacobienne. Dans ces cas, le gradient  $\text{grad}(F)$  d'une fonction  $F$  est **défini** comme le vecteur qui est orthogonal aux surfaces  $F^{-1}(v)$ .

## 22. Intermezzo algébrique

Cet intermezzo devrait normalement venir plus tard et être réparti sur deux endroits différents : au plein milieu de la section suivante sur la première forme fondamentale et pour la deuxième forme fondamentale. Mais le répartir sur deux endroits différents pose un autre problème : on perd un peu la cohérence des résultats qu'on va présenter ici et en plus, ça perturbe le flot naturel de la discussion concernant la première forme fondamentale (et celle sur la deuxième). Une toute autre raison pour ne pas éparpiller ce discours est qu'une grande partie des résultats présentés ici est la généralisation quasiment directe des résultats de §1 sur le produit scalaire usuel et la norme associée. Que le lecteur me pardonne de commencer avec les notions "abstraites," pour donner les justifications après.

**22.1 Définitions.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ .

- Une *forme bilinéaire* sur  $E$  est une application  $B : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant les propriétés suivantes.

FB1  $\forall x, y, z \in E \forall \lambda \in \mathbf{R} : B(x + \lambda y, z) = B(x, z) + \lambda \cdot B(y, z)$  (linéarité dans la première variable).

FB2  $\forall x, y, z \in E \forall \lambda \in \mathbf{R} : B(x, y + \lambda z) = B(x, y) + \lambda \cdot B(x, z)$  (linéarité dans la deuxième variable).

- Une forme bilinéaire  $B$  sur  $E$  est dite *symétrique* si elle vérifie la condition supplémentaire

FB3  $\forall x, y \in E : B(x, y) = B(y, x)$  (symétrie).

Et une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  est dite *définie positive* si elle vérifie la condition supplémentaire

FB4  $\forall x \in E : x \neq 0 \Rightarrow B(x, x) > 0$  (définie positive).

Et finalement, un *produit scalaire* n'est rien d'autre qu'une forme bilinéaire symétrique définie positive. Le produit scalaire usuel dans  $\mathbf{R}^n$  défini dans [1.1] est l'exemple classique d'un produit scalaire.

- Si  $B : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  est un produit scalaire sur  $E$ , alors on dit qu'un vecteur  $x \in E$  est *unitaire* (par rapport au produit scalaire  $B$ ) s'il vérifie  $B(x, x) = 1$ . Et on dit que deux vecteurs  $x, y \in E$  sont *orthogonaux* (par rapport au produit scalaire  $B$ ) s'ils vérifient  $B(x, y) = 0$ .

- Une *norme* sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant les propriétés suivantes.

N1  $\forall x \in E : N(x) \geq 0$  (positivité).

N2  $\forall x \in E : N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  (non-dégénérée).

N3  $\forall x \in E \forall \lambda \in \mathbf{R} : N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$  (homogénéité).

N4  $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire).

Le plus souvent une norme n'est pas notée par une lettre (comme ici par la lettre "N"), mais par des doubles bars autour de l'élément comme  $\|x\|$ . Ou, s'il y a plusieurs normes, avec un indice comme  $\|x\|_E$  ou  $\|x\|_2$ .

**Exemples.** Comme déjà signalé, le produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbf{R}^n$  est l'exemple classique d'un produit scalaire sur un espace vectoriel. D'autre part, la notion d'une forme bilinéaire symétrique apparaît d'une façon naturelle dans la théorie du calcul différentiel : la différentielle seconde d'une fonction réelle est (par le théorème de Schwarz) une forme bilinéaire symétrique. Quand on cherche à classer les points critiques d'une fonction  $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  (pour trouver un extremum local de  $f$ ) on parle de *la matrice Hessienne*.

**Remarque pour les comparateurs.** On fait souvent le lien entre les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques. Étant donné que dans ce texte on n'explore pas vraiment ce lien, j'ai renoncé à "alourdir" la théorie avec une discussion de ce lien (pourtant important).

**22.2 Lemme.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  muni d'une forme bilinéaire symétrique  $B$  et une base  $e_1, \dots, e_n$ . Alors la matrice  $(b_{ij})$  (de taille  $n \times n$ ) donnée par

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad : \quad b_{ij} = B(e_i, e_j)$$

est une matrice symétrique :  $b_{ij} = b_{ji}$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ . Réciproquement, si  $(b_{ij})$  est une matrice symétrique (de taille  $n \times n$ ), alors l'application  $B : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  donnée pour deux vecteurs  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  par

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i B_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Ⓟ **22.3 Lemme (voir [1.2]).** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $g$  et soit  $x, y \in E$  deux vecteurs avec  $y \neq 0$ . Alors il existe une façon unique d'écrire

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp} ,$$

où  $x_{\parallel}$  est parallèle à  $y$  et  $x_{\perp}$  est orthogonal à  $y$  par rapport au produit scalaire  $g$ . On dit que c'est la décomposition orthogonale de  $x$  par rapport à  $y$  (par rapport au produit scalaire  $g$ ). Cette décomposition est donnée par

$$x_{\parallel} = \frac{g(x, y)}{g(y, y)} \cdot y = \quad \text{et} \quad x_{\perp} = x - x_{\parallel} = x - \frac{g(x, y)}{g(y, y)} \cdot y .$$

En plus, on a les égalités

$$g(x_{\parallel}, x_{\parallel}) = \frac{g(x, y)^2}{g(y, y)} \quad \text{et} \quad g(x_{\perp}, x_{\perp}) = \frac{g(x, x) \cdot g(y, y) - g(x, y)^2}{g(y, y)} .$$

Ⓟ **22.4 Corollaire (l'inégalité de Cauchy-Schwarz bis, voir [1.3]).** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $g$ . Alors pour tout  $x, y \in E$  on a l'inégalité

$$g(x, y)^2 \leq g(x, x) \cdot g(y, y) ,$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Remarque pour le lecteur curieux.** La façon “classique” de montrer l’inégalité de Cauchy-Schwarz est de regarder la fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(t) = g(x + ty, x + ty) .$$

Par la bilinéarité de  $g$  cela décrit une parabole, et parce que  $g$  est définie positive, le discriminant sera négative, ce qui donne l’inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais si on essaye de reproduire cette preuve dans le cadre d’un espace vectoriel complexe, la définition d’un produit scalaire contient quelque part un complexe conjugué, et la preuve de l’inégalité de Cauchy-Schwarz se complique (un peu). Par contre, la preuve qu’on en a donné ici via la décomposition orthogonale reste (quasiment) inchangée. La seule chose qui change dans [22.3] sont les expressions pour  $g(x_{\parallel}, x_{\parallel})$  et  $g(x_{\perp}, x_{\perp})$ , où il faut remplacer  $g(x, y)^2$  par  $g(x, y) \cdot g(y, x)$  (ce qui sera  $|g(x, y)|^2$ ).

Ⓟ **22.5 Corollaire.** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d’un produit scalaire  $g$  et soit  $\|\cdot\|_g : E \rightarrow \mathbf{R}$  l’application définie par

$$\|x\|_g = \sqrt{g(x, x)} .$$

Alors  $\|\cdot\|_g$  est une norme sur  $E$ , appelée la norme associée au produit scalaire  $g$ .

**22.6 Définition (voir [1.4]).** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d’un produit scalaire  $g$  et sa norme  $\|\cdot\|_g$  associée. Si  $x, y \in E \setminus \{0\}$  sont deux vecteurs non-nuls, alors par [22.4] le nombre

$$\frac{g(x, y)}{\|x\|_g \cdot \|y\|_g} \equiv \frac{g(x, y)}{\sqrt{g(x, x) \cdot g(y, y)}}$$

appartient à l’intervalle  $[-1, 1]$ . Il existe donc un unique  $\alpha \in [0, \pi]$  tel qu’on a l’égalité

$$\frac{g(x, y)}{\|x\|_g \cdot \|y\|_g} = \cos(\alpha) .$$

Le nombre/angle  $\alpha$  est appelé l’angle entre  $x$  et  $y$  (par rapport au produit scalaire  $g$ ).



### 23. La première forme fondamentale

Si  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière et  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe, alors il n'y a aucune raison de croire que l'image de  $\gamma$  est incluse dans la surface  $S$ . Si on veut parler d'une courbe **sur la surface**  $S$ , il faut donc prendre soin que pour tout  $t \in I$  on a bien  $\gamma(t) \in S$ . Une façon de contourner ce problème est d'utiliser une carte locale  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  pour la surface  $S$ . Alors il est évident que pour toute courbe  $c : I \rightarrow U$ , la composée  $\gamma = \psi \circ c$  est une courbe sur  $S$ . Même mieux, si  $\gamma : I \rightarrow S$  est une courbe sur  $S$  telle que  $\gamma(I) \subset \psi(U)$  (c'est-à-dire que la courbe est dans l'image de la carte), alors par [20.3] il existe une (unique) courbe  $c : I \rightarrow U$  telle que  $\gamma = \psi \circ c$ . La conclusion est donc que, tant qu'on reste dans l'image d'une carte locale, les courbes sur  $S$  sont en bijection avec les courbes à valeurs dans  $U$ . Et pour les courbes dans  $U$  on n'a pas besoin de vérifier qu'on reste sur  $S$ . Formellement on résume cette discussion dans le résultat suivant, où on précise en même temps la classe de dérivabilité.

Ⓟ **23.1 Lemme.** *Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$  et soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale (de classe  $C^k$ ). Alors pour tout  $\ell \leq k$ , l'application  $c \mapsto \gamma = \psi \circ c$  est une bijection de*

$$\{c : I \rightarrow U \mid I \subset \mathbf{R} \text{ un intervalle et } c \text{ de classe } C^\ell\}$$

dans

$$\{\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid I \subset \mathbf{R} \text{ un intervalle, } \gamma(I) \subset \psi(U) \text{ et } \gamma \text{ de classe } C^\ell\}.$$

En bonus, pour expliciter une courbe  $c : I \rightarrow U$ , il faut donner deux composantes, tandis que pour une courbe dans  $\mathbf{R}^3$  il en faut trois (et en plus, il faut s'assurer qu'on reste sur  $S$ ). Travailler avec des courbes à valeurs dans la carte  $U$  est donc (beaucoup) plus simple que travailler avec des courbes à valeurs dans la surface.

La question se pose alors si, pour calculer la longueur d'une courbe  $\psi \circ c$  sur  $S$ , il faut nécessairement connaître l'application  $\psi$  pour avoir la courbe  $\gamma$ , ou si on peut se contenter avec un calcul où n'intervient que la courbe  $c$  dans  $U$ . La première réponse est qu'on ne peut évidemment pas se débarrasser de l'application  $\psi$ , car la courbe  $\gamma$ , et donc sa longueur, dépend de cette application. Mais on peut coder l'information nécessaire en trois fonctions sur  $U$ , de sorte que, une fois qu'on connaît ces trois fonctions, on n'a plus besoin de l'application  $\psi$  pour calculer la longueur d'une courbe. Et le miracle est que ces trois fonctions suffisent pour calculer beaucoup d'autres objets pour lesquels a priori on a besoin de connaître  $\psi$ .

**23.2 Définition.** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ . Alors on définit les trois fonctions  $E, F, G : U \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$E(u, v) = \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_1 \psi)(u, v) \rangle$$

$$F(u, v) = \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle \equiv \langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_1 \psi)(u, v) \rangle$$

$$G(u, v) = \langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle.$$

Une fois qu'on a défini ces trois fonctions, on définit *la première forme fondamentale* (de la surface  $S$  associée à la carte  $\psi$ ) comme l'application  $\mathbf{I}$  définie sur  $U$  qui à chaque point  $(u, v) \in U$  fait correspondre la forme bilinéaire symétrique  $\mathbf{I}_{(u,v)} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{(u,v)}(x, y) &= E(u, v) x_1 y_1 + F(u, v) (x_1 y_2 + x_2 y_1) + G(u, v) x_2 y_2 \\ (23.3) \quad &\equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\equiv {}^t x \cdot \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \cdot y . \end{aligned}$$

Dans [23.5] on montrera que  $\mathbf{I}_{(u,v)}$ , la première forme fondamentale au point  $(u, v)$ , est un produit scalaire. Ceci ne devrait venir comme une surprise quand on regarde de plus près sa définition. On commence avec le produit scalaire ordinaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbf{R}^3$ . Il est presque évident que la restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel est un produit scalaire sur ce sous-espace. Dans notre situation le sous-espace en question est l'espace tangent  $T_{\psi(u,v)}S$ . En finalement on choisit la base  $e_1 = (\partial_1 \psi)(u, v)$ ,  $e_2 = (\partial_2 \psi)(u, v)$  pour ce sous-espace [21.4] et on l'utilise pour créer la matrice  $\langle e_i, e_j \rangle$  [22.2], ce qui donne la matrice de  $\mathbf{I}_{(u,v)}$ .

Ⓟ **23.4 Lemme.** *Pour chaque  $(u, v) \in U$  on a les inégalités strictes*

$$E(u, v) > 0 \quad , \quad G(u, v) > 0 \quad \text{et} \quad E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2 > 0 .$$

Ⓟ **23.5 Lemme.** *Pour tout  $(u, v) \in U$  la première forme fondamentale  $\mathbf{I}_{(u,v)}$  au point  $(u, v)$  est un produit scalaire sur  $\mathbf{R}^2$ .*

Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  sont deux courbes qui s'intersectent, c'est-à-dire qu'il existe  $t \in I$  et  $s \in J$  tels que  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$ , alors on peut se poser la question de l'angle  $\alpha$  entre ces deux courbes au point d'intersection. Il paraît naturel de prendre pour cela l'angle entre les deux vecteurs tangents  $\gamma'(t)$  et  $\tilde{\gamma}'(s)$ , un angle qui est déterminé par [1.4]. Par contre, contrairement à la définition d'un angle entre deux vecteurs, on a un problème pour l'angle entre deux courbes : si on dessine seulement l'image des deux courbes paramétrées  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  (dans un voisinage du point d'intersection), alors on voit deux possibilités pour l'angle entre ces deux courbes.

#### DESSIN

Si on prend en compte le paramétrage qui donne le vecteur tangent, on voit tout de suite que l'orientation de la courbe paramétrée [5.1] va jouer un rôle.

**23.6 Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  et  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux courbes qui s'intersectent, c'est-à-dire qu'il existe  $t \in I$  et  $s \in J$  tels que  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$ , alors l'angle  $\alpha \in [0, \pi]$  entre les deux courbes au point d'intersection  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$  est défini par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle}{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \cdot \langle \tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}'(s) \rangle}} = \frac{\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle}{\|\gamma'(t)\| \cdot \|\tilde{\gamma}'(s)\|} .$$

Cet angle dépend de l'orientation du paramétrage [5.1].

Dans notre contexte de courbes sur une surface, supposons qu'on a deux courbes  $c : I \rightarrow U$  et  $\tilde{c} : J \rightarrow U$  dans la carte  $U$  telles que  $\gamma = \psi \circ c$  et  $\tilde{\gamma} = \psi \circ \tilde{c}$  et que ces deux courbes s'intersectent au point  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$ . Alors la première forme fondamentale permet d'exprimer l'angle  $\alpha$  entre ces deux courbes en termes de  $c'(t)$  et  $\tilde{c}'(s)$ .

Ⓟ **23.7 Proposition.** Soit  $c : I \rightarrow U$  et  $\tilde{c} : J \rightarrow U$  deux courbes (de classe  $C^1$ ) dans la carte  $U$  et soit  $\gamma = \psi \circ c$  et  $\tilde{\gamma} = \psi \circ \tilde{c}$  les courbes associées sur la surface  $S \subset \mathbf{R}^3$ .

(i) Pour tout  $t \in I$  on a l'égalité  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\mathbf{I}_{c(t)}(c'(t), c'(t))}$  et en particulier la longueur de la courbe  $\gamma$  entre  $t = a \in I$  et  $t = b \in I$  est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt .$$

(ii) Si ces deux courbes s'intersectent au point  $c(t) = \tilde{c}(s) = (u, v) \in U$ , alors on a l'égalité

$$\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle = \mathbf{I}_{(u,v)}(c'(t), \tilde{c}'(s)) .$$

Avec [23.7] on a montré que la première forme fondamentale nous permet de calculer, non seulement la longueur d'un vecteur tangent  $\gamma'(t)$  (et donc la longueur d'une courbe) en termes du vecteur tangent  $c'(t)$  dans la carte  $U$ , mais aussi l'angle entre deux vecteurs tangents. Mais ce n'est pas tout. La première forme fondamentale, ou plutôt les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$ , permet aussi de calculer l'aire de la surface. On se contente ici de le définir à l'aide de la première forme fondamentale, mais on peut justifier la définition d'une façon analogue à la longueur d'une courbe.

**23.8 Définition.** Soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale de la surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et soit  $\mathcal{D} \subset \psi(U) \subset S$  un domaine dans  $S$  contenu dans l'image de la carte  $U$  (sans qu'on précise ce que "domaine" veut dire). Alors l'aire de  $\mathcal{D}$ , notée  $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ , est le nombre défini par

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\psi^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} du dv .$$

Plus généralement, si  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction, on définit l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  comme l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} f d\mathcal{A} = \iint_{\psi^{-1}(\mathcal{D})} f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} du dv .$$

Avec ces définitions, la notion de "domaine" devrait être telle que l'intégrale (double, dans le plan  $\mathbf{R}^2$ ) sur l'image réciproque  $\psi^{-1}(\mathcal{D}) \subset U$  a un sens. Ce qu'on peut remarquer est que l'expression  $EG - F^2$  qui apparaît sous la racine carrée est le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , la matrice associée à la première forme fondamentale.

## 24. Aire d'une surface

Avec [23.7] on a montré que la première forme fondamentale nous permet de calculer, non seulement la longueur d'un vecteur tangent  $\gamma'(t)$  (et donc la longueur d'une courbe) en termes du vecteur tangent  $c'(t)$  dans la carte  $U$ , et aussi l'angle entre deux vecteurs tangents. Mais ce n'est pas tout. La première forme fondamentale, ou plutôt les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$ , permet aussi de calculer l'aire d'une surface. On commence avec la remarque que, si on donne trois points non-alignés dans  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), il y a un unique plan qui passe par ces trois points et on peut déterminer l'aire du triangle déterminé par ces trois points. Par contre, si on donne plus que trois points, il n'y a pas (en général) un plan qui passe par ces points, et donc ces points ne déterminent pas une figure dans un plan, une figure dont on peut déterminer l'aire dans ce plan non-existant. L'analogue de l'approximation d'une courbe par des segments sera donc l'approximation d'une surface par des triangles. Plus précisément, pour une courbe on a subdivisé l'intervalle de définition en (petits) sous-intervalles, on a pris les images des "sommets" de ces sous-intervalles et on a calculé les longueurs des segments de droites correspondants dans  $\mathbf{R}^n$ . Pour une surface on va "donc" subdiviser le domaine dans la carte en (petits) triangles, on prends les images des sommets de ces triangles comme points sur la surface et on calcule les aires des triangles (dans  $\mathbf{R}^3$ ) correspondants aux triangles dans la carte. La somme des aires de ces triangles sera considérée comme une approximation de l'aire de la surface.

### DESSIN

Si on suit la même logique que pour la longueur d'une courbe, on a envie de dire que (le morceau de) la surface est "rectifiable" si l'ensemble de tous ces sommes pour toutes les façons possible de subdiviser le domaine dans la carte en triangles est borné, et, si c'est le cas, d'appeler le supremum de cet ensemble l'aire du morceau de la surface. Malheureusement ce n'est pas si simple que cela pour plusieurs raisons. La première est qu'en général ce n'est pas le supremum qui est l'aire de la surface. Il suffit de penser à l'exemple suivant. On prend l'application  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\psi(u, v) = (u, v(1 + u^2), 0) .$$

C'est une carte locale (même globale) pour la surface (un plan)  $S = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ . On s'intéresse maintenant à l'aire de l'image  $\psi([0, 1] \times [0, 1]) \subset S$ .

### DESSIN

Si on regarde le dessin, c'est élémentaire de calculer cette aire : elle est donnée par

$$\int_0^1 (1 + u^2) du = \frac{4}{3} .$$

D'autre part, si on prend une subdivision du carré  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$  en triangles et qu'on regarde les triangles formés par les images des sommets dans  $S$ , alors il est visuellement immédiat que la somme des aires de ces triangles est strictement supérieur à l'aire de  $\psi([0, 1] \times [0, 1])$  (qui vaut, comme on vient de voir,  $\frac{4}{3}$ ).

### DESSIN

Ce n'est donc certainement pas le supremum qu'il faut prendre, mais une limite quand la taille des triangles dans la subdivision tend vers zéro. Mais avec cette précision/changement on n'a pas résolu tous nos problèmes, car même pour des surfaces "gentilles" il n'est pas garanti qu'une telle limite existe. On traitera un

exemple explicite dans [24.9], mais on peut d'ores et déjà dire que le problème vient des triangles qui sont trop "pointus."<sup>3</sup>

Une fois qu'on a isolé ce problème, on va montrer que, sous l'hypothèse que les triangles dans une subdivision ne sont pas trop pointus et que la carte est de classe  $C^1$ , alors dans la limite où la taille des triangles dans une subdivision tend vers 0, la limite de la somme des aires des triangles images tend vers une intégrale (double) où n'interviennent que les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$ . C'est l'analogie de [23.7], où on a montré que la longueur d'un morceau d'une courbe (paramétrée de classe  $C^1$ ) est donnée par une intégrale où n'intervient que la première forme fondamentale (et la dérivée de la courbe dans la carte). Inspiré par ce résultat, on **définit** l'aire d'un morceau de surface par cette intégrale double et on montre que le résultat ne dépend pas de la carte utilisée.

**24.1 Définitions.** Soit  $A, B, C \in \mathbf{R}^n$  trois points.

- (i) Le *segment (fermé)*  $[AB]$  de sommets  $A$  et  $B$  est l'ensemble

$$[AB] = \{ \alpha A + \beta B \in \mathbf{R}^n \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 \} .$$

Si  $A$  et  $B$  sont distincts, alors c'est la partie de l'unique droite passant par  $A$  et  $B$  qui se trouve entre  $A$  et  $B$ .

- (ii) Le *triangle (fermé)*  $\Delta ABC$  de sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  est l'ensemble<sup>4</sup>

$$\Delta ABC = \{ \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathbf{R}^n \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1 \} .$$

### DESSIN

- (iii) La *taille* du triangle  $\Delta ABC$ , notée  $T^{\text{le}}(\Delta ABC)$ , est le plus petit diamètre d'un disque qui contient ce triangle; c'est le diamètre du cercle circonscrit du triangle (le centre du cercle circonscrit est donné par l'intersection des trois médiatrices des trois côtés du triangle). Autrement dit,

$$T^{\text{le}}(\Delta ABC) = \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in \Delta ABC \} .$$

- (iv) La *pointure* de  $\Delta ABC$ , noté  $P^{\text{re}}(\Delta ABC)$ , est le plus petit sinus parmi les sinus des trois angles du triangle :

$$P^{\text{re}}(\Delta ABC) = \min( \sin(\angle ABC), \sin(\angle BCA), \sin(\angle CAB) ) .$$

- (v) Le triangle  $\Delta ABC$  est *non-dégénéré* si les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés, ce qui s'exprime aussi par la condition que la pointure  $P^{\text{re}}(\Delta ABC)$  est non-nulle.

3. Pour la petite histoire, dans une version préliminaire je n'avais pas vu le problème avec les triangles trop pointus, je ne l'ai vu qu'après une relecture attentive suggéré par A. Léonard. Suite à cela j'ai trouvé l'exemple [24.9] qui montre clairement le problème. C'est par un hasard de circonstances (aidé par ma collègue R. Tazzioli) que je suis tombé sur un article de H.A. Schwarz (écrit en 1881 et publié en 1890 [Sch90]) où il explique qu'il y avait une erreur dans un cours de Serret (justement l'oubli du problème des triangles trop pointus) et qu'il avait trouvé un exemple pour montrer le problème (exactement l'exemple [24.9]). G. Peano avait trouvé ce même problème et le même exemple peu après Schwarz; il l'a publié dans [Pea90], voir aussi [Pea57a]. On trouve plus de détails de cette histoire dans [Ken80, p9-10], [GP09] et [Fri18, pp153–154].

4. Pour un segment comme pour un triangle on peut dire que c'est l'enveloppe convexe des sommets.

Ⓟ **24.2 Lemme.** Soit  $A, B, C \in \mathbf{R}^n$  trois points. Alors l'aire du triangle  $\Delta ABC$  est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Delta ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \|B - A\| \cdot \|C - A\| \cdot \sin \angle CAB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|B - A\|^2 \cdot \|C - A\|^2 - \langle B - A, C - A \rangle^2} .\end{aligned}$$

Dans le cas  $n = 3$  on peut écrire ceci comme

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot \|(B - A) \wedge (C - A)\| = \frac{1}{2} \cdot \|A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A\| ,$$

et dans le cas  $n = 2$  on peut l'écrire comme

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot |\det(B - A, C - A)| = \frac{1}{2} \cdot |\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)| .$$

**24.3 Définitions.** Soit  $D \subset \mathbf{R}^2$  un sous-ensemble. On dit que  $D$  est *triangulable* s'il existe un nombre fini de triangles non-dégénérés (fermés)  $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbf{R}^2$  avec les propriétés suivantes :

- (i)  $D = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$  ;
- (ii) pour deux triangles différentes  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$ ,  $i \neq j$  il n'y a que trois possibilités pour l'intersection  $\Delta_i \cap \Delta_j$  : (i) c'est vide, (ii) c'est un des sommets ou (iii) les deux triangles ont deux sommets en commun et l'intersection est (seulement) le segment entre ces deux sommets.

#### DESSIN

Dans ce cas la collection  $\mathcal{T} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  est appelé une *triangulation* de  $D$ . À noter qu'un ensemble triangulable  $D \subset \mathbf{R}^2$  est nécessairement fermé et borné comme réunion finie d'ensembles fermés et bornés (les triangles).

Pour une triangulation  $\mathcal{T}$  d'un ensemble triangulable  $D$  on définit la *taille* et la *pointure* par les formules

$$T^{\text{lle}}(\mathcal{T}) = \max_{\Delta \in \mathcal{T}} T^{\text{lle}}(\Delta) \quad \text{et} \quad \text{Pre}(\mathcal{T}) = \min_{\Delta \in \mathcal{T}} \text{Pre}(\Delta) .$$

Autrement dit, la taille d'une triangulation est la plus grande taille parmi les tailles des triangles dans la triangulation et la pointure de la triangulation est la plus petite pointure parmi les pointures de ces triangles. À noter que  $\text{Pre}(\mathcal{T}) > 0$ , car on suppose que les triangles dans une triangulation sont non-dégénérés.

En tant que réunion de triangles, un ensemble triangulable  $D \subset \mathbf{R}^2$  a une forme polygonale et on peut facilement calculer son aire  $\mathcal{A}(D)$  : il suffit d'additionner les aires des triangles d'une triangulation :

$$\mathcal{A}(D) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(\Delta) ,$$

où  $\mathcal{T}$  est une triangulation arbitraire de  $D$ . Le fait que  $\mathcal{A}(D)$  ne dépend pas du choix de la triangulation est assurée par le fait que c'est (aussi) la mesure de Lebesgue de  $D$ <sup>5</sup>.

**Définition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale, soit  $D \subset U$  un ensemble triangulable et soit  $\mathcal{T} = \{\Delta A_1 B_1 C_1, \dots, \Delta A_n B_n C_n\}$  une

5. C'est ici qu'il y a un "trou" dans la preuve, car on n'a pas montré cette indépendance, ni le fait que c'est donné par la mesure de Lebesgue.

triangulation de  $D$ . Alors on définit l'aire de  $\psi(\mathcal{T})$ , notée  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$ , par la formule

$$\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\Delta\psi(A_i)\psi(B_i)\psi(C_i)) .$$

L'idée est qu'on considère le triangle  $\Delta\psi(A_i)\psi(B_i)\psi(C_i) \subset \mathbf{R}^3$  comme une approximation de la partie de surface  $\psi(\Delta A_i B_i C_i) \subset S$  et que "donc"  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  est une approximation de l'aire de la partie de surface  $\mathcal{D} = \psi(D)$ .

**24.4 Théorème.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^1$ ,  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale et  $D \subset U$  un ensemble triangulable. Alors

$$\lim_{T^{lle}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \text{Pre}(\mathcal{T}) \cdot \left( \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \iint_D \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \, du \, dv \right) = 0 ,$$

ce qui nous dit qu'on a en particulier :

$$\forall \sigma > 0 : \quad \lim_{T^{lle}(\mathcal{T}) \rightarrow 0, \text{Pre}(\mathcal{T}) \geq \sigma} \mathcal{A}(\mathcal{T}) = \iint_D \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \, du \, dv .$$

Avec [24.4] on voit que l'idée d'approcher l'aire d'une surface de classe  $C^1$  (ou plus précisément une partie correspondant à un ensemble triangulable dans une carte) par l'aire de (beaucoup de) petits triangles dont les sommets se trouvent sur la surface nous donne une formule pour cette aire, à condition que la pointure des triangles utilisés ne devient pas arbitrairement petit. Que la contrainte sur la pointure n'est pas un artefact de notre façon de calculer l'approximation, mais qu'elle est réelle sera montré dans l'exemple explicite d'un cylindre dans [24.9]. On est donc amené à dire que l'aire d'une surface (une partie correspondant à un domaine triangulable dans une carte) est donné par une intégrale double d'une fonction qui ne dépend que de la première forme fondamentale sur un domaine dans une carte. La question naturelle est donc si on peut montrer qu'un résultat analogue est valable pour des domaines plus généraux que des ensembles triangulables. La réponse est affirmative, et l'approche qui vient naturellement à l'esprit est de définir l'aire d'une partie  $\mathcal{D} = \psi(D) \subset S$  comme

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \sup_{D_i \subset D} \mathcal{A}(\psi(D_i)) = \sup_{D_i \subset D} \iint_{D_i} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \, du \, dv ,$$

où les  $D_i$  sont des domaines triangulables (contenues dans  $D$ ). Mais une telle approche fait partie de la définition de l'intégrale de Lebesgue. On se contente donc ici de prendre le résultat attendu comme une définition.

**24.5 Définition.** Soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale de la surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  de classe  $C^1$  et soit  $\mathcal{D} \subset \psi(U) \subset S$  une partie de  $S$  contenu dans l'image de la carte  $U$ . Alors on dit que  $\mathcal{D}$  est un *domaine convenable* (terminologie non standard) si l'intégrale (double, dans le plan  $\mathbf{R}^2$ ) sur l'image réciproque  $\psi^{-1}(\mathcal{D}) \subset U$  a un sens.

Si  $\mathcal{D}$  est un domaine convenable, alors on définit l'aire de  $\mathcal{D}$ , notée  $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ , par

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\psi^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \, du \, dv .$$



Ce qu'on peut remarquer est que l'expression  $EG - F^2$  qui apparaît sous la racine carrée est le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , la matrice associée à la première forme fondamentale.

Une fois qu'on a défini l'aire d'un morceau  $\mathcal{D} \subset S$  on doit se poser la question si le résultat ne dépend pas du choix de la carte locale. On pourrait croire que le fait qu'on l'a obtenu par une approximation de la surface par des triangles dont les sommets sont sur la surface nous garanti automatiquement cette indépendance. Malheureusement notre choix n'était pas totalement indépendant de la carte locale, car on a dû imposer une contrainte sur la peinture de la triangulation dans la carte (elle doit être minoré par une constante non-nulle). Et il est possible que cette peinture change défavorablement dans une autre carte. Pour voir si on a indépendance de la carte il y a deux solutions. La première est de montrer que la contrainte sur la peinture est préservée quand on change de carte; la deuxième est de montrer que notre formule avec l'intégrale double donne le même résultat dans deux cartes différentes. On opte ici pour la deuxième solution, une solution qui se généralise facilement à des dimensions supérieures.

Ⓟ **24.6 Lemme.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\psi_i : U_i \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  deux cartes locales et soit  $E_i, F_i, G_i$  les coefficients de la première forme fondamentale associée à la carte  $\psi_i$ . Soit finalement

$$\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1 : U_{12} \subset U_1 \rightarrow U_{21} \subset U_2$$

le difféomorphisme de changement de carte défini en [20.5] de telle sorte qu'on a  $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$  sur  $U_{12}$ . Alors on a l'égalité entre fonctions sur  $U_{12}$

$$(24.7) \quad \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_1 \varphi_2 \\ \partial_2 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \circ \varphi & F_2 \circ \varphi \\ F_2 \circ \varphi & G_2 \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Ⓟ **24.8 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^1$ , soient  $\psi_1 : U_1 \rightarrow S$  et  $\psi_2 : U_2 \rightarrow S$  deux cartes locales pour la surface  $S$  de classe  $C^1$ , et soient  $E_i, F_i, G_i$  les "coefficients" de la première forme fondamentale dans la carte  $\psi_i$ . Si  $\mathcal{D} \subset S$  est un domaine convenable contenu dans  $\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$ , alors on a l'égalité

$$\begin{aligned} \iint_{\psi_1^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E_1(u, v) G_1(u, v) - F_1(u, v)^2} \, du \, dv \\ = \iint_{\psi_2^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E_2(u, v) G_2(u, v) - F_2(u, v)^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

**24.9 Exemple.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  le cylindre "horizontal" de rayon 1 donné par

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 1 \}.$$

L'application  $\psi : \mathbf{R} \times ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\psi(h, \theta) = (h, \cos \theta, \sin \theta)$$



est une carte locale pour  $S$  et la partie  $D = [0, 1] \times [0, \pi]$  est un domaine triangulable (donc convenable). Son image  $\mathcal{D} = \psi(D)$  dans  $S$  est un morceau d'un demi-cylindre.

### DESSIN

Il paraît “évident” qu'on peut coller le rectangle  $D$  sur ce morceau de cylindre  $\mathcal{D}$  sans déchirures ou plis. Ce qui nous dit que l'aire de  $\mathcal{D}$  est égale à l'aire de ce rectangle, c'est-à-dire  $\pi$ . Ceci est confirmé par le calcul de l'intégrale

$$\iint_D .$$

Essayons maintenant de l'obtenir par une approximation par des triangles dont les sommets sont sur  $\mathcal{D}$ , en prenant une triangulation de  $D$ . Pour cela on subdivise le domaine de la carte  $[0, 1] \times [0, \pi]$  en bandes de triangles en zig-zag comme suggéré dans le dessin.

### DESSIN

Plus précisément, on choisit  $n, m \in \mathbf{N}$  et on définit les sommets  $S_{k,\ell}$ ,  $S'_{k,\ell}$ ,  $G_\ell$  et  $D_\ell$  par

$$\begin{aligned} S_{k,\ell} &= \left( \frac{\ell}{m}, \frac{k\pi}{n} \right) , & \forall 0 \leq k \leq n , \ 0 \leq \ell \leq m \\ S'_{k,\ell} &= \left( \frac{2\ell+1}{2m}, \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) , & \forall 0 \leq k < n , \ 0 \leq \ell < m \\ G_\ell &= \left( \frac{2\ell+1}{2m}, 0 \right) , \quad D_\ell = \left( \frac{2\ell+1}{2m}, \pi \right) , & \forall 0 \leq \ell < m . \end{aligned}$$

Avec ces sommets on forme les triangles “génériques” de la manière suivante (avec des restrictions sur les indices  $k$  et  $\ell$  “évidentes”) :

$$(24.10) \quad \begin{aligned} &\Delta S_{k,\ell} S_{k+1,\ell} S'_{k,\ell} , & \Delta S_{k,\ell} S_{k+1,\ell} S'_{k,\ell-1} \\ &\Delta S'_{k,\ell} S'_{k+1,\ell} S_{k-1,\ell} , & \Delta S'_{k,\ell} S'_{k+1,\ell} S_{k-1,\ell-1} , \end{aligned}$$

et quelques triangles au bord :

$$(24.11) \quad \begin{aligned} &\Delta S_{0,\ell} S'_{0,\ell} G_\ell , & \Delta S_{0,\ell} S'_{0,\ell-1} G_{\ell-1} \\ &\Delta S_{n,\ell} S'_{n-1,\ell} D_\ell , & \Delta S_{n,\ell} S'_{n-1,\ell-1} D_{\ell-1} . \end{aligned}$$

Ⓟ **24.12 Lemme.** La triangulation  $\mathcal{T}$  de  $D = [0, 1] \times [0, \pi]$  définie par (24.10) et (24.11) a les (deux) propriétés suivantes :

$$\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) = (2n-1) \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{1 + 16m^2 \sin^4 \frac{\pi}{4n}} + 2 \sin \frac{\pi}{4n}$$

et

$$\text{Pre}(\mathcal{T}) = \min \left( \frac{\frac{n}{\pi m}}{\sqrt{1 + (\frac{n}{\pi m})^2}} , \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n}{\pi m})^2}} , \frac{2\frac{n}{\pi m}}{1 + (\frac{n}{\pi m})^2} \right) .$$

Une fois qu'on connaît l'aire  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$ , on peut se poser la question de la limite quand on diminue la taille des triangles, c'est-à-dire quand on prend la limite  $n, m \rightarrow \infty$ . Il est immédiate qu'on a

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} 2 \sin \frac{\pi}{4n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n,m \rightarrow \infty} (2n-1) \sin \frac{\pi}{2n} = \pi .$$

La valeur de la limite  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  dépend donc du comportement de

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 16 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{4n}} .$$

Et c'est dans ce terme qu'on voit les problèmes : le résultat dépend de l'ordre des limites  $n \rightarrow \infty$  et  $m \rightarrow \infty$ . Si on prend par exemple  $n = m$ , on trouve le “bon” résultat, c'est-à-dire

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) = \pi .$$

Mais si on prend par exemple  $m = kn^2$  pour  $k \in \mathbf{N}$  fixe on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) = \pi \cdot \sqrt{1 + \frac{k^2 \pi^4}{16}} ,$$

ce qui est plus grande que prévue. Et si on prend par exemple  $m = n^3$  on trouve  $\infty$  pour cette limite.

Regardons donc ce qui se passe avec la pointure. Dans le cas  $m = n$ , la pointure  $\text{Pre}(\mathcal{T})$  a une valeur fixe, indépendante de  $n$ . On respecte donc bien la contrainte que la pointure doit être minorée par une valeur strictement positive. Par contre, dans le cas  $m = kn^2$ , on trouve

$$\text{Pre}(\mathcal{T}) = \frac{\frac{n}{\pi m}}{\sqrt{1 + (\frac{n}{\pi m})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (k\pi n)^2}} .$$

Si on calcule maintenant l'approximation de la “vraie” valeur  $\pi$  par  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$ , mais cette fois-ci multipliée par la pointure, on trouve

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) - \pi \right) \cdot \text{Pre}(\mathcal{T}) \\ &= \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 16 k^2 n^4 \sin^4 \frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (k\pi n)^2}} = 0 . \end{aligned}$$

Et si on regarde ce qui se passe dans le cas  $m = n^3$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) - \pi \right) \cdot \text{Pre}(\mathcal{T}) \\ &= \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 16 n^6 \sin^4 \frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi n^2)^2}} = 0 . \end{aligned}$$

Ces calculs confirment [24.4] qui dit que ce n'est pas la différence entre  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  et l'intégrale double avec la première forme fondamentale qui tend vers 0, mais cette différence multiplié par la pointure. Et donc, quand la pointure est bien minorée par une valeur strictement positive, la valeur  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  sera une bonne approximation de la valeur “officielle” de l'aire.

Dans cet exemple il est facile de voir l'origine du “problème.” Pour cela on regarde un triangle générique, on fixe  $n$  et on fait tendre  $m$  vers l'infini. Quand on fait cela, le triangle image prend une position de plus en plus verticale par rapport au cylindre et dans la limite  $m \rightarrow \infty$  ça devient un triangle contenu dans un plan  $x = \text{const.}$  Mais dans cette limite, l'aire du triangle dans  $D$  tend vers 0 (sa hauteur devient 0, ainsi que sa pointure), tandis que l'aire du triangle image ne sera pas nul, à cause de la courbure du cylindre.

### DESSIN

Le rapport entre aire du triangle dans  $D$  et aire du triangle image tend donc vers l'infini (pour  $n$  fixé et  $m \rightarrow \infty$ ). C'est ce phénomène qui explique qu'en général il

n'est pas vrai que si la taille d'une triangulation tend vers zéro, alors l'aire  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  tend vers l'intégrale.

## 25. Intégrer une fonction sur une courbe ou sur une surface

Après la discussion sur l'aire d'une surface on attaque une question liée : celle d'intégrer une fonction le long d'une courbe ou sur une surface. Contrairement à la plupart des autres sections, ici on ne démontre (presque) rien ; on donne surtout des arguments heuristiques pour motiver les deux définitions [25.1] et [25.3]. Commençons avec l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe. Pour cela on se donne une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ , deux points  $a, b \in I$  et une fonction  $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbf{R}$  définie sur la courbe, c'est-à-dire sur l'image de  $\gamma$  (une telle fonction pourrait provenir de la restriction d'une fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  au sous-ensemble  $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^2$ ). Et on veut définir ce que veut dire l'intégrale de  $f$  le long de la courbe entre  $a$  et  $b$ . L'idée est identique à l'idée de l'intégrale de Riemann d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$ . Cette intégrale, notée  $\int_a^b f(x) dx$ , est définie comme l'aire en dessous du graphe entre  $a$  et  $b$ .

Strictement parlant cette description est fautive, car elle n'est valable que pour des fonctions positives. Une meilleure description serait de parler de l'aire entre le graphe et l'axe des abscisses. Mais même cela n'est pas correct, car il faut compter l'aire en-dessous de l'axe comme négative. La "justification" de cette décision — de compter la partie en-dessous de l'axe comme négative — est qu'on souhaite obtenir une opération qui est linéaire/additive en  $f$ . Si on prenait l'aire positive comprise entre le graphe et l'axe des abscisses, alors on n'aurait pas cette propriété. Notre raisonnement/description heuristique qui suit ne s'applique donc qu'aux fonctions positives.

Pour l'intégrale de  $f$  définie sur  $\gamma(I)$  entre  $a$  et  $b$  (et à valeurs positives) on procède de la même façon. On commence à s'imaginer qu'on construit un mur (vertical, dans  $\mathbf{R}^3$ ) au-dessus de la courbe. Mathématiquement cela veut dire qu'on considère l'image de l'application  $\psi : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\psi(t, z) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), z) .$$

Ensuite on dessine sur ce mur au-dessus de chaque point  $\gamma(t) \in \gamma(I)$  la valeur  $f(\gamma(t))$  qui va donner la hauteur du mur à cet endroit.

### DESSIN

Ainsi on obtient une partie  $S_{\gamma, f, a, b} \subset \mathbf{R}^3$  du mur décrit par

$$S_{\gamma, f, a, b} = \{ (\gamma_1(t), \gamma_2(t), z) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq z \leq f(\gamma(t)) \} .$$

Et on **définit** l'intégrale de  $f$  le long de la courbe entre  $a$  et  $b$  comme l'aire de ce morceau de mur/surface.

Quand on regarde ce que donne cette procédure pour la courbe particulière  $\gamma(t) = (t, 0)$  (l'axe des  $x$ 's), la surface  $S$  est contenue dans le plan vertical  $y = 0$  et est donnée par

$$S_{\gamma, f, a, b} = \{ (t, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq t \leq b, 0 \leq z \leq f(t) \} .$$

Si on oublie la deuxième coordonnée (qui est identiquement nulle), on se retrouve avec la surface délimitée par le graphe et l'axe des abscisses et son aire est exactement l'intégrale de Riemann de la fonction  $f$ .

Pour calculer l'aire de notre morceau de surface  $S_{\gamma, f, a, b}$  quand la courbe n'est pas l'axe des abscisses, il y a plusieurs façons de procéder qui toutes mènent au même résultat. La première est d'imiter la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction (continue)  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ . Rappelons que pour cette dernière on

montre qu'on peut approcher  $\int_a^b f(x) dx$  par

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) ,$$

où  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  est une subdivision de  $[a, b]$  (qu'on désigne par le symbole  $\Delta$ ) avec des points  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  arbitraires. De plus, l'approximation sera meilleure quand la taille  $T(\Delta)$  de la subdivision est plus petite [6.4]. L'idée derrière cette approximation est qu'on remplace l'aire en-dessous du graphe de  $f$  par des rectangles (étroits) dont on peut calculer l'aire facilement (produit base fois hauteur). Si on applique cette même idée à l'aire de notre mur, on remplace l'aire de  $S$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$ , plus précisément la partie

$$\{ (\gamma_1(t), \gamma_2(t), z) \in \mathbf{R}^3 \mid x_{i-1} \leq t \leq x_i, 0 \leq z \leq f(\gamma(t)) \} ,$$

par l'aire du rectangle (dans  $\mathbf{R}^3$ ) de base le segment de droite  $[\gamma(x_{i-1}), \gamma(x_i)]$  et de hauteur  $f(\gamma(\xi_i))$ . Autrement dit, on remplace notre mur ondulé par un mur de planches droites.

### DESSIN

Sachant que l'aire de nos planches est donnée par  $f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$ , on espère maintenant que la quantité

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$$

est une bonne approximation de l'aire de  $S_{\gamma, f, a, b}$ . Plus précisément, on espère que la limite

$$\lim_{T(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$$

existe (et qu'elle est donnée par une formule avec une intégrale). Pour avoir une idée de ce qu'on pourrait obtenir, faisons quelques approximations heuristiques. Si la taille  $T(\Delta)$  de la subdivision est petite, c'est-à-dire quand toutes les sous-intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  sont petits, on a les approximations

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \left\| \frac{\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right\| \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\approx \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \|\gamma'(x)\| dx . \end{aligned}$$

Et effectivement, on peut montrer que, si  $\gamma$  est de classe  $C^1$  et  $f$  continue, on a bien

$$\lim_{T(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| = \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \|\gamma'(x)\| dx .$$

La deuxième façon de procéder est une variante un petit peu plus sophistiquée de la précédente en imaginant que notre morceau de mur  $S_{\gamma, f, a, b}$  est une feuille de papier qu'on a "ondulé" pour le mettre au-dessus la courbe (comme quand on roule une feuille de papier pour en faire un cylindre, ce qui représente le mur quand la courbe est un cercle). Le bas de cette feuille de papier est "donc" droit, là où on le pose sur la courbe  $\gamma(I)$ , mais on a taillé la hauteur selon la fonction  $f$ . Pour mesurer

l'aire de cette feuille découpée, il suffit de le mettre à plat, auquel cas on se retrouve avec le cas classique de l'aire en-dessous du graphe d'une fonction sur  $\mathbf{R}$ . Sauf que dans ce cas, l'abscisse n'est pas l'intervalle  $I$ , mais son image  $\gamma(I)$ , ou plutôt son image rectifiée. Car quand on met la feuille à plat, la distance entre  $\gamma(x_{i-1})$  et  $\gamma(x_i)$  change de  $\|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$  en la longueur de la courbe entre ces deux points, ce qui est, selon [6.6], donnée par

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x)\| \, dx .$$

L'approximation de l'aire de  $S_{\gamma,f,a,b}$  sera donc donnée par

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x)\| \, dx .$$

Quand l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  est petite (et que la fonction  $f$  est continue) on peut faire l'approximation

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x)\| \, dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\gamma(x)) \cdot \|\gamma'(x)\| \, dx \\ &= \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \|\gamma'(x)\| \, dx . \end{aligned}$$

On obtient donc la même suggestion pour le résultat que précédemment. Et comme dans la première façon de procéder, on peut montrer que, si  $\gamma$  est de classe  $C^1$  et  $f$  continue, alors on a bien

$$\lim_{T(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x)\| \, dx = \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \|\gamma'(x)\| \, dx .$$

Cette même approche peut être décrite d'une autre façon, hautement suggestif pour la suite. Pour cela on commence avec la remarque qu'on peut écrire

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \text{avec} \quad I_i = [x_{i-1}, x_i] \text{ et } I_i \cap I_{i+1} = \{x_i\} .$$

et donc

$$\gamma([a, b]) = \bigcup_{i=1}^n J_i \quad \text{avec} \quad J_i = \gamma(I_i) \text{ et } J_i \cap J_{i+1} = \{\psi(x_i)\} .$$

Selon [6.6] la longueur  $L(J_i)$  du morceau de courbe  $J_i = \gamma(I_i)$  est donnée par

$$L(J_i) \equiv L_{I_i}(\gamma) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\| \, dt .$$

Notre approximation s'écrit donc comme

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i)) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x)\| \, dx = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot L(J_i) \quad \text{avec} \quad P_i \in J_i .$$

Si on prononce maintenant  $L(J_i)$  comme “la mesure de  $J_i$ ,” on est très proche de la définition de l'intégrale de Lebesgue, car on a découpé l'intervalle d'intégration en un nombre fini de morceaux qui sont presque 2-à-2 disjoints : quand une intersection n'est pas vide, c'est réduit à un point qui a longueur zéro.

Une troisième façon de procéder repose sur l'aire d'une surface qu'on a obtenu/défini dans [24.5]. Pour cela on considère notre mur comme une surface avec la carte  $\psi : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\psi(u, v) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), v) ,$$

quand la courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est donnée par  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Bien sûr, il y a le “petit” détail concernant la question si c'est bien une surface régulière, mais on va ignorer cela, le but n'est pas une preuve, mais d'obtenir une idée de ce qu'on peut attendre. On procède donc comme si on savait que c'est bien une surface régulière et on calcule la première forme fondamentale :

$$\text{Jac}(\psi)(u, v) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(u) & 0 \\ \gamma'_2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_1 \psi)(u, v) \rangle = \|\gamma'(u)\|^2 \\ F(u, v) &= \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle = 1 . \end{aligned}$$

D'autre part, la partie  $S_{\gamma, f, a, b}$  du mur qui nous intéresse est l'image du domaine  $D \subset I \times \mathbf{R}$  donné par

$$D = \{ (u, v) \in I \times \mathbf{R} \mid 0 \leq v \leq f(\gamma(u)) \} .$$

Selon [24.5] son aire est donc donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S_{\gamma, f, a, b}) &= \iint_D \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv \\ &= \iint_D \|\gamma'(u)\| \, du \, dv = \int_a^b \left( \int_0^{f(\gamma(u))} \|\gamma'(u)\| \, dv \right) du \\ &= \int_a^b f(\gamma(u)) \cdot \|\gamma'(u)\| \, du . \end{aligned}$$

Et encore une fois on obtient la même suggestion pour l'aire du morceau de surface  $S_{\gamma, f, a, b}$ . La différence avec les deux premières méthodes est qu'ici il n'y a pas d'approximation, mais un certain flou sur l'applicabilité des arguments : la surface n'est pas forcément régulière, il peut y avoir des points doubles pour la courbe, l'argument n'est pas rigoureux quand  $f$  prend des valeurs négatives etc. Mais tous nos approches heuristiques nous mènent à la même conclusion, ce qui nous donne une justification pour la définition qui suit.

**25.1 Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe de classe  $C^1$ ,  $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et  $[a, b] \subset I$ . Alors on définit *l'intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  entre  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$*  par

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt .$$

Ⓟ **25.2 Proposition.** *L'intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  entre  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$  est invariant sous re-paramétrage. Plus précisément, soit  $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $i = 1, 2$  deux courbes (de classe*

$C^1$ ) qui sont équivalentes par reparamétrage, soit  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  la fonction de reparamétrage, soit  $[c, d] \subset I_2$  et soit  $\varphi([c, d]) = [a, b] \subset I_1$ . Alors pour toute fonction (continue)  $f : \gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2) \rightarrow \mathbf{R}$  on a l'égalité

$$\int_a^b f(\gamma_1(u)) \cdot \|\gamma_1'(u)\| \, du = \int_c^d f(\gamma_2(t)) \cdot \|\gamma_2'(t)\| \, dt .$$

**Nota Bene.** Bien que la définition de l'intégrale d'une fonction (réelle) le long une courbe ressemble beaucoup à la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle sur un intervalle, il y a une différence (très) importante qui ne saute pas aux yeux : on n'a pas la relation de Chasles ! Dans [25.2] on a montré que l'intégrale de  $f$  le long une courbe  $\gamma$  est invariante sous reparamétrage. Cette intégrale est donc en particulier invariante sous changement d'orientation. Dans [25.2] on a donc bien pris soin de ne pas dire qu'on a  $a = \varphi(c)$  ou  $a = \varphi(d)$ , on a simplement dit qu'on a  $\varphi([c, d]) = [a, b]$ , sans préciser si  $\varphi$  préserve ou inverse l'orientation. Si on veut une explication “mathématique,” on peut remarquer que la dérivée  $\varphi'$  nécessaire dans le théorème de changement de variables (dans l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle sur un intervalle) apparaît via la norme de la vitesse  $\|\gamma'\|$ . Et donc cette dérivée sort avec la valeur absolue. Et c'est cette valeur absolue qui empêche la relation de Chasles de s'appliquer.

Une explication “géométrique” se trouve dans la remarque que pour la relation de Chasles, il faut regarder notre “mur” d'un côté, avec l'intégrale calculée de gauche à droite. Et donc si on “recule,” il faut diminuer l'intégrale. Mais il faut regarder notre mur de quelle côté ? Il y en a deux ! Et quand on regarde notre mur de l'autre côté, alors on a échangé gauche et droite. Autrement dit, regarder le mur de l'autre côté correspond à changer l'orientation de la courbe. Mais l'aire du mur ne change pas quand on le regarde de l'autre côté. Et donc heureusement notre intégrale ne le fait pas non plus.

Après la discussion comment définir l'intégrale d'une fonction le long une courbe, attaquons la question comment définir l'intégrale d'une fonction  $f$  définie sur une surface. Plus précisément, on se donne une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ , une fonction continue  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ , un domaine convenable  $\mathcal{D} \subset S$  [24.5] contenu dans l'image d'une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$ , et on veut définir l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ . Pour cela on procède par analogie avec l'intégrale de Riemann d'une fonction sur un domaine dans  $\mathbf{R}^2$  et par analogie avec l'intégrale d'une fonction sur une courbe. L'intégrale de Riemann d'une fonction  $f$  sur un domaine  $D$  dans  $\mathbf{R}^2$  est le volume de la partie  $V \subset \mathbf{R}^3$  défini par

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y) \} .$$

(À noter qu'ici comme avant, le raisonnement ne s'applique qu'aux fonctions positives.) Pour obtenir une approximation du volume de  $V$ , on coupe le domaine en (petits) rectangles  $R_i$  (qui couvrent aussi bien que possible  $D$ ), on prend des points  $\tau_i \in R_i$  arbitraire et on approche le volume de la partie de  $V$  au-dessus  $R_i$  par le volume du pavé  $R_i \times [0, f(\tau_i)] \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ . Ensuite on dit que la somme sur tous ces pavés de la volume de  $R_i \cdot [0, f(\tau_i)]$  est une approximation du volume de



$V$  :

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \text{Vol}(V) \approx \sum_i \text{Vol}(R_i \times [0, f(\tau_i)]) = \sum_i \mathcal{A}(R_i) \cdot f(\tau_i) ,$$

où  $\mathcal{A}(R_i)$  est l'aire du rectangle  $R_i$ . Et comme pour l'intégrale sur un intervalle, on montre que la limite (quand la taille du découpage de  $D$  en petits rectangles tend vers 0) existe. Ce qui donne la définition de l'intégrale (de Riemann) de  $f$  sur  $D$ .

Dans notre situation on va faire la "même" chose. Sauf qu'on aura du mal à dessiner la situation, contrairement au cas de l'intégrale d'une fonction sur une courbe ou l'intégrale d'une fonction sur un domaine de  $\mathbf{R}^2$ . Car ici la surface est déjà dans  $\mathbf{R}^3$ , et il nous faut une quatrième dimension pour rajouter la "hauteur" du volume qu'on veut calculer (comme on a rajouté une troisième dimension pour discuter l'intégrale d'une fonction sur une courbe dans  $\mathbf{R}^2$ ). On raisonne donc purement par analogie, sans dessin. Par hypothèse notre domaine convenable est contenu dans l'image d'une carte  $\psi : U \rightarrow S$  et on suppose que c'est l'image d'un domaine triangulable  $D \subset U$ . Ensuite on prend une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $D$  et pour chaque triangle  $\Delta ABC \in \mathcal{T}$  on considère le volume 3-dimensionnel du prisme triangulaire de base  $\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)$  et de hauteur  $f(\psi(P_{\Delta ABC}))$ , où  $P_{\Delta ABC}$  est un point arbitraire à l'intérieur du triangle  $\Delta ABC \subset \mathbf{R}^2$ . En prenant la somme sur tous les triangles dans la triangulation

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)) \cdot f(\psi(P_{\Delta ABC}))$$

on espère trouver quelque chose qui admet une limite (quand la taille de la triangulation tend vers 0) qu'on pourrait appeler l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{D} \subset S$ . Et effectivement, si  $f$  est continue on peut montrer qu'on a pour tout  $\sigma > 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0, \text{Pre}(\mathcal{T}) \geq \sigma} \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)) \cdot f(\psi(P_{\Delta ABC})) \\ = \iint_D f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv . \end{aligned}$$

Un raisonnement un petit peu plus sophistiqué (comme pour l'intégrale sur une courbe) utilise directement l'aire d'un petit morceau de la surface. Comme avant on prend une triangulation, mais cette fois-ci on prétend que l'intégrale de  $f$  sur l'image d'un des triangles  $\Delta ABC$  n'est pas approchée par le produit

$$\mathcal{A}(\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)) \cdot f(\psi(P_{\Delta ABC})) ,$$

ce qui est le volume du prisme triangulaire dont la base est le triangle  $\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)$  et de hauteur  $f(\psi(P_{\Delta ABC}))$ , mais par le produit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\psi(\Delta ABC)) \cdot f(\psi(P_{\Delta ABC})) \\ \stackrel{[24.5]}{=} f(\psi(P_{\Delta ABC})) \cdot \iint_{\Delta ABC} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv , \end{aligned}$$

ce qui est le volume d'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$  dont la base a une aire  $\mathcal{A}(\psi(\Delta ABC))$  et de hauteur  $f(\psi(P_{\Delta ABC}))$ . Quand on prend la somme sur tous les triangles dans la triangulation et qu'on prétend que les triangles sont suffisamment petits pour que  $f$  est quasiment constante sur chaque triangle, on obtient les approximations

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(\psi(\Delta)) \cdot f(\psi(P_{\Delta}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} f(\psi(P_\Delta)) \cdot \iint_{\Delta} \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv \\
&\approx \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \iint_{\Delta} f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv \\
&= \iint_D f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv .
\end{aligned}$$

On retrouve donc la même formule pour le volume en-dessous de  $f$  et au-dessus du domaine  $\mathcal{D}$ . Et comme dans le cas d'une courbe, cette façon de procéder est très proche de la définition de l'intégrale de Lebesgue, car on décompose le domaine  $\mathcal{D}$  comme une réunion

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{T}} \psi(\Delta)$$

et les morceaux dans cette décomposition sont presque 2-à-2 disjoints : quand l'intersection n'est pas vide, c'est soit un point, soit (l'image d') une courbe, et un point et une courbe ont une aire zéro. Notre approximation est donc la somme sur une partition du domaine de termes de la forme “mesure d'un élément de la partition” fois la valeur de la fonction dans un point de cet élément. Et cela ressemble bien à la définition de l'intégrale de Lebesgue. Le tout nous amène donc à la définition suivante.

**25.3 Définition.** Soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale de la surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  de classe  $C^1$ , soit  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et soit  $\mathcal{D} \subset \psi(U) \subset S$  un domaine convenable. Alors on définit l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  par

$$\iint_{\psi^{-1}(\mathcal{D})} f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv .$$

Comme pour la définition de l'aire d'un morceau de surface régulière, la suggestion de nos arguments heuristiques suggèrent que le résultat est intrinsèque et indépendant de la carte choisie. Mais comme pour la définition de l'aire, ce n'est pas complètement intrinsèque, et en plus, on n'a pas montré que les limites (quand la taille de la triangulation tend vers 0) existent. Il faut donc montrer séparément cette indépendance.

Ⓟ **25.4 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^1$ , soient  $\psi_1 : U_1 \rightarrow S$  et  $\psi_2 : U_2 \rightarrow S$  deux cartes locales pour la surface  $S$  de classe  $C^1$ , soient  $E_i, F_i, G_i$  les “coefficients” de la première forme fondamentale dans la carte  $\psi_i$ , et soit  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Si  $\mathcal{D} \subset S$  est un domaine convenable contenu dans  $\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$ , alors on a l'égalité

$$\begin{aligned}
&\iint_{\psi_1^{-1}(\mathcal{D})} f(\psi_1(u, v)) \cdot \sqrt{E_1(u, v) G_1(u, v) - F_1(u, v)^2} \, du \, dv \\
&= \iint_{\psi_2^{-1}(\mathcal{D})} f(\psi_2(u, v)) \cdot \sqrt{E_2(u, v) G_2(u, v) - F_2(u, v)^2} \, du \, dv .
\end{aligned}$$

**Et si. . .** On a défini l'intégrale d'une fonction (réelle)  $f$  sur un domaine convenable  $\mathcal{D}$  dans une surface régulière  $S$  quand ce domaine est inclus dans l'image d'une carte  $\psi : U \rightarrow S$ . Mais quoi faire quand  $\mathcal{D}$  n'est pas inclus dans l'image d'une carte ? La solution pratique est de couper le domaine en plusieurs morceaux (de préférence un nombre fini) qui chacun est contenu dans l'image d'une carte, de calculer l'intégrale sur chaque morceau et de prendre la somme des résultats. Pour que cela marche, il faut montrer que le résultat ne dépend pas de la façon dont on a découpé le domaine. Une telle preuve s'éloigne un peu trop des préoccupations de ce texte, donc on laisse de côté une discussion approfondie d'une telle situation. D'autant plus que dans des situations concrètes un domaines sera toujours inclus dans l'image d'une carte (ou presque : seulement une partie en forme d'une courbe ou quelques points qui sera exclue et une telle partie ne contribue pas à l'intégrale).

**Remarque pour le lecteur qui connaît l'intégrale de Lebesgue : un fil conducteur/unificateur.** Le lecteur pourrait avoir l'impression que les deux définitions de l'intégrale d'une fonction sur une courbe et sur une surface sont un peu ad hoc, bien qu'on utilise les mêmes idées. Mais ce n'est qu'une impression, car il y a bien une idée plus générale derrière ces constructions que voici. Le point de départ est une variété  $M$  muni d'une métrique/produit scalaire  $\mathbf{g}$ . L'étape suivante est de considérer une sous-variété  $S$  (de dimension  $n$ ) et de la munir de la métrique induite (aussi notée  $\mathbf{g}$ ). Ensuite on utilise la métrique pour construire une mesure  $\mu_{\mathbf{g}}$  sur la tribu Borélienne de la sous-variété  $S$  (ce qui constitue donc la collection des domaines convenables). Cette mesure s'exprime alors dans chaque carte (un ouvert dans  $\mathbf{R}^n$ ) comme une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue (de  $\mathbf{R}^n$ ). Et la fonction de densité est donnée par la racine carré du déterminant de la métrique exprimé dans la carte [22.2].

Dans notre situation la variété est  $M = \mathbf{R}^3$  muni du produit scalaire ordinaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si notre sous-variété  $S$  est une courbe (régulière, ou plus précisément une sous-variété de dimension 1), avec une "carte"  $\gamma : I \rightarrow S$ , alors on obtient une mesure à densité sur  $I \subset \mathbf{R}$  où la fonction de densité  $\text{dens}(t)$  est donnée par

$$\text{dens}(t) = \sqrt{\det(\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)} = \|\gamma'(t)\| .$$

Bien sûr, écrire "déterminant" dans cette formule en dimension 1 est inutile, mais servira comme comparaison avec la formule pour les surfaces. Car si notre sous-variété est une surface régulière, une sous-variété de dimension 2, avec une carte  $\psi : U \rightarrow S$ , alors on obtient une mesure à densité sur  $U \subset \mathbf{R}^2$  où la fonction de densité  $\text{dens}(u, v)$  est donnée par

$$\text{dens}(u, v) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \partial_1 \psi, \partial_1 \psi \rangle & \langle \partial_1 \psi, \partial_2 \psi \rangle \\ \langle \partial_2 \psi, \partial_1 \psi \rangle & \langle \partial_2 \psi, \partial_2 \psi \rangle \end{pmatrix}} \equiv \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} .$$

Et quand on regarde nos définitions des intégrales, on voit que pour l'intégrale sur une courbe on l'a défini comme

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \text{dens}(t) \, dt$$

et pour une surface comme

$$\iint_{\psi^{-1}(\mathcal{D})} f(\psi(u, v)) \cdot \text{dens}(u, v) \, du \, dv .$$

Que le lecteur soit rassuré qu'on n'a pas fait du travail en trop dans notre présentation ici. Car pour définir la mesure  $\mu_{\mathbf{g}}$  sur une sous-variété  $S$  associée à une métrique  $\mathbf{g}$ , on passe par les cartes : dans chaque carte on définit une mesure à densité avec la fonction de densité comme indiquée, et on montre ensuite que ces différentes définitions coïncident sur les parties qui sont dans plusieurs cartes (nos résultats [25.2] et [25.4] avec la fonction  $f$  identiquement 1, ou directement [6.7] et [24.8]).

## 26. Champs de vecteurs et le fibré tangent

On a déjà rencontré la notion de “champ de vecteurs” quand on a introduit la notion de champ normal unitaire principal le long une courbe [12.1]. Mais la notion de champ de vecteurs est beaucoup plus générale et on va rencontrer plusieurs manifestations différentes dans la suite. Il est donc grand temps de donner la notion générale pour que le lecteur ne soit pas perdu. Cette section (comme la section 25) prend une place un peu particulière dans le sens qu’on ne démontre rien du tout, on ne fait que du blablabla pour motiver et justifier les définitions.

Commençons avec une situation très simple : la courbe  $\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée par<sup>6</sup>

$$\gamma(t) = \left( \cos\left(\frac{1}{8}\pi t(1 + \frac{1}{4}t^2)\right), \sin\left(\frac{1}{8}\pi t(1 + \frac{1}{4}t^2)\right) \right).$$

Si on veut dessiner cette courbe  $\gamma$  et les vitesses associées  $\gamma'$ , on peut dessiner séparément la courbe  $\gamma$  et la courbe  $\gamma'$ . Mais même quand on met ces deux courbes l’un à côté de l’autre, le dessin sera incomparablement moins informatif par rapport au dessin dans lequel on a attaché le vecteur de vitesse  $\gamma'(t)$  au point  $\gamma(t)$ .

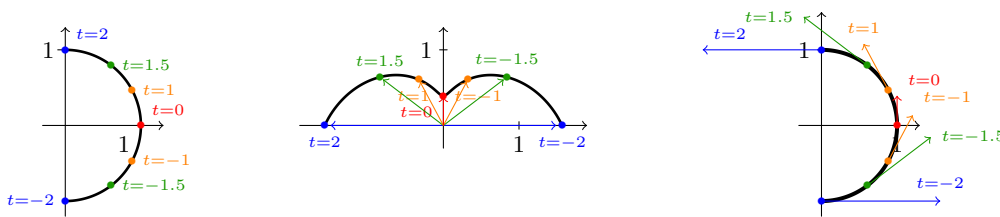


FIGURE 2.  $\gamma(t)$ ,  $\gamma'(t)$  et ensemble

C’est une façon très connue pour dessiner les vecteurs de vitesse, mais d’un point de vue strictement mathématique, c’est un dessin “faux,” car pour chaque vecteur de vitesse on déplace l’origine et officiellement il n’y a qu’une seule origine dans un espace vectoriel. Et pourtant !

On rencontre une situation analogue dans le contexte des équations différentielles, où on étudie des équations de la forme

$$y'(t) = f(y(t)) ,$$

pour une fonction inconnue  $y : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  et une fonction connue  $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  qu’on appelle le plus souvent un champ de vecteurs sur  $U$ . L’image qui vient avec (dans le cas  $n = 2$ ) est le suivant. On s’imagine qu’on a dessiné sur le sol en “chaque” point une flèche avec (donc) une direction et une longueur. On se positionne quelque part au sol et on va suivre les flèches : on prend un pas dans la direction de la flèche au point où on se trouve et la “taille” du pas est proportionnelle à la taille de la flèche. On atterrit à un nouveau point et on répète l’opération. Ainsi on va donc se promener dans le plan selon une courbe qui est déterminée par les flèches.

Tel qu’on l’a décrit, la “courbe” sera une ligne brisée, mais dans la limite de pas de plus en plus petits (et de plus en plus souvent), on obtiendra une courbe dérivable. Et c’est cette courbe, une fonction de  $t$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  (dans notre description donc  $\mathbf{R}^2$ ) qui sera solution de l’équation différentielle. Car en chaque point  $\gamma(t)$  on

6. Les valeurs numériques n’ont pas trop d’importance ; elle sont choisies pour rendre le dessin “joli/lisible.” Le but est d’avoir un morceau d’un cercle parcouru à une vitesse variable.

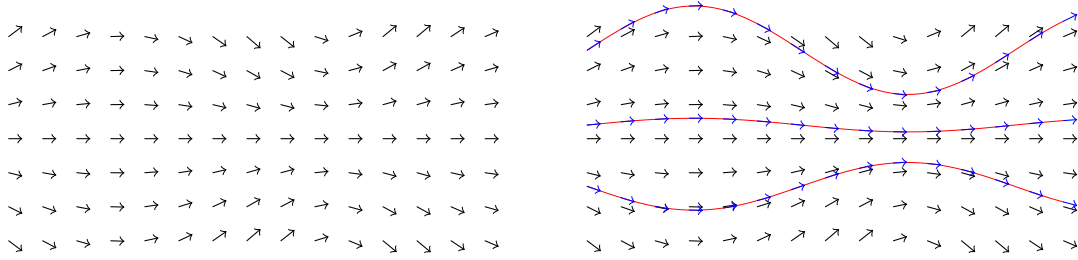


FIGURE 3. Un champ de vecteurs, sans et avec courbe

a pris un pas dans la direction de la flèche d’une taille proportionnelle à la longueur de la flèche ; autrement dit notre “vitesse” est donnée par la flèche.

Dans cette deuxième situation on voit de nouveau l’intérêt de dessiner le vecteur  $f(x)$ , pas comme un élément officiel de  $\mathbf{R}^n$ , mais comme un vecteur dont l’origine se trouve au point  $x \in \mathbf{R}^n$ . Et dans les deux situations décrites, les vecteurs qu’on veut dessiner sont des **dérivées** de courbes. La suggestion forte est donc qu’il faut associer ces vecteurs “dérivés” aux points de l’espace. Autrement dit, il faut considérer un espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$  en chaque point  $x \in \mathbf{R}^n$ . Ainsi on arrive à l’idée de considérer pour tout ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  l’espace  $TU = U \times \mathbf{R}^n$  avec l’interprétation qu’un point  $(x, v) \in U \times \mathbf{R}^n$  représente un point  $x \in U$  et un vecteur  $v \in \mathbf{R}^n$  dont l’origine se trouve au point  $x$ . Autrement dit, pour chaque vecteur de vitesse/dérivée  $v \in \mathbf{R}^n$ , on rajoute le point de l’espace  $x \in U$  où il faut attacher ce vecteur. Ou encore, à chaque point  $x \in U$  on associe l’espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$  des vitesses/dérivées potentiellement possibles. Avec cette définition, il faut donc voir la courbe  $\gamma'(t)$ , pas comme courbe en soi, mais comme la “deuxième” composante de la courbe  $\Gamma : I \rightarrow T\mathbf{R}^n$  définie comme

$$\Gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t)) .$$

Dans ce même contexte, il faut voir le champ normal unitaire principal  $\mathbf{n}$  associé à une courbe comme la deuxième composante d’une application  $N : I \rightarrow T\mathbf{R}^n$  définie par

$$N(t) = (\gamma(t), \mathbf{n}(t)) .$$

Et il faut voir un champs de vecteurs (qui définit une équation différentielle), pas comme une application  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ , mais comme la deuxième composante d’une application  $F : U \rightarrow TU$  définie comme

$$F(x) = (x, f(x)) ,$$

où le couple  $(x, f(x))$  désigne donc le vecteur  $f(x)$  attaché au point  $x \in U$ . Ce qu’il faut retenir de cette discussion est que l’introduction de l’espace  $TU = U \times \mathbf{R}^n$  ne fait que confirmer l’habitude de dessiner un vecteur, pas par rapport à l’origine fixe de l’espace  $\mathbf{R}^n$ , mais par rapport à un point d’attache variable. Ainsi on arrive à la définition (officieuse et officielle) avec quelques noms.

**Définition officieuse.** Un *vecteur tangent* est un vecteur dont on a déplacé l’origine ; un vecteur tangent est donc toujours tangent en un point donné qui sera son origine.

**Définitions.** • Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, alors le *fibré tangent* à  $U$ , noté  $TU$  est l’espace  $TU = U \times \mathbf{R}^n$ . Associé au fibré tangent  $TU$  on a la *projection canonique*

$\pi : TU \rightarrow U$  définie par

$$(x, v) \in U \times \mathbf{R}^n \implies \pi(x, v) = x .$$

Pour chaque  $x \in U$  on définit l'espace tangent à  $U$  au point  $x$  par  $T_x U = \mathbf{R}^n$ . Un élément de  $T_x U$  est appelé un *vecteur tangent* (à  $U$ ) en  $x$  (on parle aussi d'un vecteur tangent au point  $x$ ). Il est évident que tous les  $T_x U$  sont le même espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$ . Pourtant il faut les "distinguer" en pensant que  $T_x U = \mathbf{R}^n$  est l'espace vectoriel dont l'origine se trouve au point  $x \in U$ .

• Si  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière, on définit le *fibré tangent* à (la surface)  $S$ , noté  $TS \subset T\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ , par

$$TS = \{ (p, v) \in T\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid p \in S \text{ et } v \in T_p S \} ,$$

où  $T_p S \subset \mathbf{R}^3$  est l'espace tangent à  $S$  au point  $p$  [21.3]. Un élément de  $T_p S$  est appelé un *vecteur tangent* à  $S$  au point  $p$ . Comme pour le fibré tangent à un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  on définit la *projection canonique*  $\pi : TS \rightarrow S$  par

$$(p, v) \in TS \implies \pi(p, v) = p .$$

(Et oui, toutes les projections canoniques sont notées par  $\pi$  ; d'habitude cela ne pose pas de problèmes et s'il y a possibilité de confusion, on ajoutera un indice pour les distinguer.)

**Remarque pour le lecteur curieux.** Si  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière, c'est-à-dire une sous-variété de  $\mathbf{R}^3$  de dimension 2, alors  $TS$  est bien une sous-variété de  $T\mathbf{R}^3$  de dimension 4. Autrement dit,  $TS$ , vu comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}^6$ , est localement le graphe d'une fonction de 4 variables. Le seul "détail" auquel il faut faire attention est que si  $S$  est de classe  $C^k$ , alors  $TS$  sera de classe  $C^{k-1}$ .

Ⓟ **26.1 Proposition : une description unificateur.** Les deux définitions de  $TU$  avec  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et de  $TS$  avec  $S \subset \mathbf{R}^3$  peuvent être mis sur pied d'égalité par les formules suivantes :

$$T_p S = \{ \gamma'(t_o) \in \mathbf{R}^3 \mid \gamma : I \rightarrow S \text{ une courbe vérifiant } t_o \in I \text{ et } \gamma(t_o) = p \}$$

$$T_x U = \{ \gamma'(t_o) \in \mathbf{R}^n \mid \gamma : I \rightarrow U \text{ une courbe vérifiant } t_o \in I \text{ et } \gamma(t_o) = x \}$$

et

$$TS = \{ (p, v) \in T\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid p \in S \text{ et } v \in T_p S \}$$

$$TU = \{ (x, v) \in T\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid x \in U \text{ et } v \in T_x U \} .$$

**Nota Bene : une identification habituelle.** Pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  ou un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  on a défini les espaces tangent  $T_p S$  et  $T_x U$  comme des espaces vectoriels. Avec la définition des fibrés tangent  $TS$  et  $TU$  et les projections canoniques  $\pi_S : TS \rightarrow S$  et  $\pi_U : TU \rightarrow U$  on peut donc écrire

$$\pi_S^{-1}(p) = \{p\} \times T_p S \quad \text{et} \quad \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times T_x U .$$

En vu de ces égalités, il est d'usage d'**identifier** ces espaces vectoriels avec ces pré-images. On dit donc que  $\pi_S^{-1}(p)$  **est** l'espace tangent à  $S$  au point  $p$  et que  $\pi_U^{-1}(x)$  **est** l'espace tangent à  $U$  au point  $x$ .

Cette identification est “renforcée” par une notation d’un élément  $(p, v)$  de  $TS$  (ou un élément  $(x, v) \in TU$ ) comme

$$v_p \quad \text{ou} \quad v|_p \quad \text{ou (s’il n’y a pas confusion possible) simplement} \quad v .$$

Autrement dit, au lieu d’écrire le vecteur  $v$  et son point d’attache  $p$  comme un couple  $(p, v)$ , on écrit le point d’attache  $p$  en indice “attaché” au vecteur  $v$ . Et avec cette écriture, la structure d’espace vectoriel de  $T_pS$  (ou  $T_xU$ ) s’écrit simplement comme

$$v|_p + \lambda w|_p = (v + \lambda w)|_p .$$

Cette écriture nous met en garde qu’en général on ne peut pas additionner des vecteurs dans des espaces tangents différents : la formule  $v|_p + w|_q$  n’aura pas de sens (sauf avec des explications supplémentaires) : la somme d’un élément  $v \in T_pS$  avec un élément  $w \in T_qS$  est bien un vecteur dans  $\mathbf{R}^3$ , mais ne sera en général ni dans  $T_pS$ , ni dans  $T_qS$ .

La situation semble être différente pour les espaces tangents  $T_xU = \mathbf{R}^n$  (qui sont bien tous le même  $\mathbf{R}^n$ ), mais on continuera à distinguer ces différents espaces tangents pour des  $x$  différents, comme on le fait pour les espaces tangents à une surface régulière. Quoi que ... on dérogera à cette règle de temps en temps pour donner des justifications heuristiques, surtout dans la discussion sur le transport parallèle (mais voir aussi ci-dessous).

**Un lien avec la géométrie affine.** En géométrie affine on parle d’un espace affine  $X$  de direction l’espace vectoriel  $E$  (voir [Tis83]) s’il existe une application  $V : X \times X \rightarrow E$ ,  $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} \equiv V(x, y)$  vérifiant les deux conditions suivantes.

A1 Pour tout  $x, y, z \in X$  on a  $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ .

A2 Pour tout  $x \in X$  l’application  $\Theta_x : X \rightarrow E$ ,  $\Theta_x(y) = \overrightarrow{xy}$  est une bijection.

L’image qu’on a du vecteur  $\overrightarrow{xy}$  est que c’est un vecteur dont l’origine se trouve au point  $x$  (et “donc” l’autre bout du vecteur au point  $y$ ).

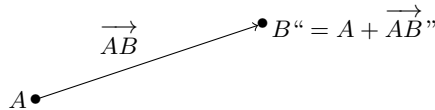


FIGURE 4. Deux points avec le vecteur associé

Cette interprétation devrait rappeler notre définition de l’espace tangent : un vecteur  $v_x \in \mathbf{R}^n$  représente un vecteur dont le point d’attache est le point  $x \in \mathbf{R}^n$ .

Essayons de mettre un petit peu plus de détails. L’espace  $X = \mathbf{R}^n$  devient un espace affine de direction  $E = \mathbf{R}^n$  quand on définit l’application  $V : X \times X \rightarrow E$  par

$$V(x, y) \equiv \overrightarrow{xy} \stackrel{\text{déf.}}{=} y - x .$$

Pour  $x \in X$  fixé, on a donc l’application  $\Theta_x : X \rightarrow E$  donnée par  $\Theta_x(y) = y - x$  et ce vecteur  $v = y - x$  représente un vecteur dont l’origine se trouve en  $x$  et l’autre bout en  $y$ . Le point  $x$  étant fixé, ce vecteur est donc, de notre point de vue, un élément de l’espace tangent  $T_xX \equiv T_x\mathbf{R}^n$ . On peut donc voir l’application  $\Theta_x$  comme une application  $\Theta_x : X \rightarrow T_xX$ . De notre point de vue les applications  $\Theta_x$  prennent leurs valeurs dans des espaces vectoriels différents pour des  $x$  différents, tandis que du point de vue de la géométrie affine elles prennent toutes leurs valeurs dans le même



espace vectoriel  $E = \mathbf{R}^n$ . De notre point de vue, quand on tient compte du point d'attache, on devrait définir l'application  $\Theta_x : X = \mathbf{R}^n \rightarrow T_x \mathbf{R}^n$  par

$$\Theta_x(y) = (y - x)|_x \equiv (x, y - x) \in T_x \mathbf{R}^n .$$

Quand on écrit maintenant la propriété A2 dans notre langage, cela devient

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz} \quad \Longleftrightarrow \quad (y - x)|_x + (z - y)|_y = (z - x)|_x .$$

Et on voit clairement que dans notre langage on additionne deux vecteurs dans deux espaces différents. De notre point de vue on peut “expliquer” cela en disant qu'en géométrie affine on identifie tous les espaces vectoriels tangents avec un même espace vectoriel. Cette explication/remarque n'est pas simplement une remarque gratuite, elle trouve sa place dans la théorie des variétés muni d'un parallélisme absolue. En plus, on va s'en servir dans la discussion sur le transport parallèle.

**Nota Bene : l'oublie des courbes n'en est pas un.** Le lecteur a certainement remarqué qu'on n'a pas défini le fibré tangent d'une courbe, bien qu'on a parlé de l'espace tangent à une courbe (paramétrée). La raison est assez simple : c'est dû à la différence entre une sous-variété de dimension 1 (l'équivalent en dimension 1 d'une surface régulière) et une courbe paramétrée. Pour une sous-variété de dimension 1 la définition de l'espace tangent est la même que pour une courbe paramétrée et la définition du fibré tangent est complètement analogue à la définition du fibré tangent d'une surface régulière ; pas de surprises, pas de pièges. Par contre, pour une courbe paramétrée (même une courbe régulière) on a des (petits) soucis, surtout liés aux points doubles et aux points limites. C'est exactement pour cette raison qu'on a désigné l'espace tangent à une courbe paramétrée par  $T_t \gamma$  avec la mention explicite de l'application  $\gamma$  (voir [7.8] et la discussion qui y suit). C'est aussi la raison pour laquelle on fait une différence entre des courbes paramétrées et d'autres situations dans les définitions concernant la notion de champ de vecteurs.

**26.2 Définitions.** Comme on déjà signalé dans l'introduction, la notion de “champ de vecteurs” se décline en plusieurs variantes, le seul point en commun est qu'il s'agit toujours de vecteurs tangents.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée. Alors un *champ de vecteur le long  $\gamma$*  est une application  $v : I \rightarrow T\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  vérifiant la condition

$$v(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbf{R}^n .$$

Autrement dit, avec le point d'attache en indice,

$$v(t) \equiv v(t)|_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} \mathbf{R}^n .$$

On a déjà rencontré un champ de vecteur le long une courbe : le champ normal unitaire principal  $\mathbf{n}$ . Dans §12 on l'a simplement noté  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , mais on savait qu'il fallait le dessiner avec le point  $\gamma(t)$  comme origine. Ici on apprend qu'il vaut mieux l'écrire comme  $\mathbf{n}(t)|_{\gamma(t)}$ .

Si  $U \subset \mathbf{R}^n$  est un ouvert, alors un *champ de vecteurs sur  $U$*  est une application  $v : U \rightarrow TU$  vérifiant la condition  $\pi \circ v = \text{Id}_U$ . Autrement dit

$$v(x) \equiv v(x)|_x \in T_x U \equiv \mathbf{R}^n .$$

Si  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière, alors un *champ de vecteurs sur  $S$*  (vu comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$ ) est une application  $v : S \rightarrow T\mathbf{R}^3$  vérifiant  $\pi \circ v = \text{Id}_S$ , ce qui

revient à dire

$$v(p) \equiv v(p)|_p \in T_p \mathbf{R}^3 \equiv \mathbf{R}^3 .$$

Et un *champ de vecteurs tangents* à  $S$  est une application  $v : S \rightarrow TS$  vérifiant  $\pi \circ v = \text{Id}_S$ , ou encore

$$v(p) \equiv v(p)|_p \in T_p S \subset T_p \mathbf{R}^3 \equiv \mathbf{R}^3 .$$

**26.3 Nota Bene : notation officielle versus notation pratique.** Officiellement un champ de vecteurs prend ses valeurs dans un fibré tangent et un point dans un fibré tangent a deux composantes : le point d’attache et le vecteur dans un espace tangent. Mais le fait que c’est un champ de vecteurs détermine complètement la première composante : pour un champ le long une courbe c’est le point  $\gamma(t)$  et pour les autre cas, c’est le point dans la source de l’application. Pour connaître un tel champ, il suffit donc de préciser la deuxième composante. Et si on regarde bien, on voit que cette deuxième composante, qu’elle soit définie le long une courbe, sur un ouvert ou sur une surface régulière, peut toujours être vu comme une application à valeurs dans un même espace vectoriel :  $\mathbf{R}^n$  pour les premiers et  $\mathbf{R}^3$  pour les derniers.

D’un point de vue pratique on dira donc qu’un champ de vecteurs le long une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , qu’un champ de vecteurs sur un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  est une application  $v : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ , qu’un champ de vecteurs sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une application  $v : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  et qu’un champ de vecteurs tangents à une surface régulière est une application  $v : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  avec la contrainte que  $v(p) \in T_p S \subset \mathbf{R}^3$ . Et si on veut se rapprocher de la notation officielle, on rajoute le point d’attache en indice. Ainsi on obtient donc le tableau suivant pour les différentes façons de noter ces champs de vecteurs.

		officielle	pratique	amélioré
le long une courbe $\gamma$	$t \mapsto$	$(\gamma(t), v(t))$	$v(t)$	$v(t) _{\gamma(t)}$
sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$	$x \mapsto$	$(x, v(x))$	$v(x)$	$v(x) _x$
sur une surface $S \subset \mathbf{R}^3$	$p \mapsto$	$(p, v(p))$	$v(p)$	$v(p) _p$

Dans la suite on adoptera la notation pratique “améliorée” dans le sens qu’on va parler d’un champ de vecteurs comme une application dans un espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$  ou  $\mathbf{R}^3$ , mais qu’on va attacher en indice le point d’attache (autant que possible) pour indiquer explicitement que c’est un vecteur dont l’origine est à ce point d’attache. Une fois qu’on a dit cela, on peut s’interroger sur la nécessité du discours sur les fibrés tangents, les espaces tangents et la définition officielle d’un champs comme application à valeurs dans un fibré tangent, si après coup, on l’oublie. La réponse est qu’on ne l’oublie pas vraiment, car on a maintenant dit explicitement qu’il faut voir ces vecteurs comme étant attaché à un point de l’espace/surface, même si on ne l’écrit pas toujours.

**Définition de la classe de dérivabilité d’un champ.** Soit  $v$  un des quatre types de champ de vecteurs défini dans [26.2]. Alors  $v$  est de classe  $C^k$  si elle l’est comme application à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  (avec  $n = 3$  pour les deux dernières variantes sur une surface régulière).

**Remarque pour le lecteur curieux.** La définition d’un champ de vecteurs le long une courbe est légèrement différente des définitions d’autres types de champs

de vecteurs dans le sens que le point d'attache n'est pas le point dans l'espace source. Dans des "bonnes" conditions on peut la mettre sous la même forme que les autres en changeant le point de vue. Pour cela on définit l'image  $C = \gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$  et (en supposant que la courbe est injective, sinon cela ne marche pas) on définit un champ  $\hat{v}$  le long la courbe  $C$  comme une application  $\hat{v} : C \rightarrow T\mathbf{R}^n$  vérifiant la condition  $\pi \circ \hat{v} = \text{Id}_C$ , c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\hat{v}(p) \equiv \hat{v}(p)|_p .$$

Ou, avec notre approche pratique, on le définit comme une application  $\hat{v} : C \rightarrow T\mathbf{R}^n$ . Le lien avec la définition "précédente" est évidemment donné par  $v(t) = \hat{v}(\gamma(t))$ .

Comme déjà dit, cela ne marche que si la courbe  $\gamma$  est injective. Mais même quand la courbe est injective, on aura des "problèmes" avec la notion de continuité/dérivabilité. Car même si l'application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est continue et si  $\gamma$  est injective pour qu'il existe une application  $\hat{v} : C \rightarrow T\mathbf{R}^n$  vérifiant  $v(t) = \hat{v}(\gamma(t))$ , même dans ces conditions, il n'y aucune garantie que cette fonction  $\hat{v}$  soit continue. La condition que  $C = \gamma(I)$  est une sous-variété de dimension 1 le garantit, mais justement, on n'a pas exigé cela. Et donc il faut vivre avec le fait qu'on ne peut pas (en général) mettre la définition d'un champ le long une courbe paramétrée sur pied d'égalité avec les autres.

## 27. Orientabilité

**27.1 Définitions.** • Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière,  $p \in S$  un point sur la surface et  $PT_p S$  le plan tangent de  $S$  au point  $p$ . Un *vecteur (tangent à  $\mathbf{R}^3$ ) (unitaire) normal à la surface au point  $p$*  est un vecteur tangent (unitaire)  $\mathbf{n} \in T_p \mathbf{R}^3 \equiv \mathbf{R}^3$  qui est orthogonal au plan tangent  $PT_p S$ . Une définition équivalente est d'exiger que  $\mathbf{n}$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_p S$ . Vu qu'on est en dimension 3, le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à  $PT_p S/T_p S$  est de dimension 1, donc engendré par un seul vecteur. Si on demande que ce générateur est unitaire, alors il y a exactement deux possibilités qui diffèrent par un signe.

• Un *champ de vecteurs (unitaires) normaux à la surface  $S$*  est une application  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  (mais voir [26.3]) telle que pour tout  $p \in S$  le vecteur  $\mathbf{n}(p)|_p$  est un vecteur tangent à  $\mathbf{R}^3$  (unitaire) normal à  $S$  au point  $p$ . Si  $\gamma : I \rightarrow S$  est une courbe sur  $S$  et  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une application telle que  $\mathbf{n}(t)|_{\gamma(t)}$  est un vecteur (unitaire) normal à  $S$  au point  $\gamma(t)$ , alors on dit que  $\mathbf{n}$  est un *champ de vecteurs (unitaires) normaux à  $S$  le long la courbe  $\gamma$* .

• On dit qu'une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ) est *orientable* s'il existe un champ de vecteurs  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  unitaires normaux à  $S$  de classe  $C^{k-1}$ . Si une telle application n'existe pas, on dit que la surface est *non-orientable*. Pour une surface orientable on parle aussi de *surface à deux côtés* et pour une surface non-orientable de *surface à une seule côté*.

Ⓟ **27.2 Lemme.** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour la surface  $S$  et soit  $\mathbf{n} : \psi(U) \rightarrow \mathbf{R}^3$  défini par

$$(27.3) \quad \psi^{-1}(p) = (u, v) \in U \quad \implies \quad \mathbf{n}(p)|_p = \frac{(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)}{\|(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)\|}.$$

Alors  $\mathbf{n}$  est un champ de vecteurs unitaires normaux à la surface  $\psi(U) \subset S$  de classe  $C^{k-1}$ . La (partie de) surface  $\psi(U)$  est donc orientable.

Ⓟ **27.4 Proposition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^3$  un ouvert,  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $v \in \mathbf{R}$  une valeur régulière de  $F$  et soit  $S = F^{-1}(v)$  la surface régulière associée [18.8]. Alors  $S$  est orientable.

Ⓟ **27.5 Lemme.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \geq 0$ . Alors il existe un champ de vecteurs unitaires normaux à la surface le long  $\gamma$  de classe  $C^p$ ,  $p = \min(k-1, \ell)$   $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ . En plus, si  $\hat{\mathbf{n}} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un autre champ de vecteurs unitaires normaux à  $S$  le long  $\gamma$ , alors on a  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$  (en tant qu'application sur  $I$ ) ou  $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$ .

**Remarque.** Le résultat [27.5] a un côté trivial et un côté un peu surprenant. Pour une surface orientable [27.1] c'est trivial, car en composant le champ de vecteurs unitaires normaux  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  (dont l'existence est garanti par l'orientabilité) avec la courbe  $\gamma$  on obtient ce résultat. Ce qui est un peu surprenant c'est que ce résultat reste vrai quand la surface n'est pas orientable. En même temps, c'est avec ce résultat qu'on démontre le plus facilement qu'une surface n'est pas orientable.

Ⓟ **27.6 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière,  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe et  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs unitaires normaux continue le long  $\gamma$ . Si  $S$  est orientable alors on a l'implication

$$\forall t_0, t_1 \in I \quad : \quad \gamma(t_0) = \gamma(t_1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}(t_0)|_{\gamma(t_0)} = \mathbf{n}(t_1)|_{\gamma(t_1)} .$$

**27.7 Exemple : le ruban de Möbius.** L'exemple classique d'une surface non-orientable est le *ruban de Möbius*. Pour la fabrication d'un tel ruban (et pour préparer d'autres tours de "magie"), on prend un ruban de papier dont on colle les deux extrémités pour en faire un cylindre. Mais avant de coller, on retourne une des deux extrémités. Une façon plus mathématique est de le considérer comme un baton qui "tourne" à l'intérieur d'un tore. Avec la description d'un tore donnée dans [40.22.e] on définit l'application  $\mu : \mathbf{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\mu(\varphi, t) = \left( (3 + t \sin(\varphi/2)) \cos(\varphi), (3 + t \sin(\varphi/2)) \sin(\varphi), t \cos(\varphi/2) \right) .$$

Le ruban de Möbius est alors l'image  $M = \mu(\mathbf{R} \times ]-1, 1[)$  de cette application. Les batons sont les courbes  $\varphi$  constant, mais on s'aperçoit facilement qu'on a l'égalité

$$\mu(\varphi + 2\pi, t) = \mu(\varphi, -t) ,$$

ce qui représente le fait qu'on retourne l'extrémité du ruban de papier avant de le coller sur l'autre extrémité.

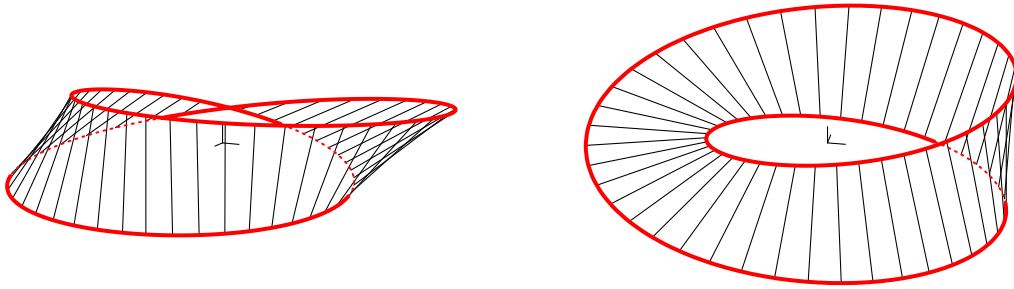


FIGURE 5. Le ruban de Möbius

Pour montrer que  $M$  n'est pas orientable, on considère la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$  définie par

$$\gamma(\varphi) = \mu(\varphi, 0) = (3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi, 0) .$$

On montre facilement que l'application  $\mathbf{n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^\infty$ ) définie par

$$\mathbf{n}(\varphi)|_{\gamma(\varphi)} = \frac{(\partial_1 \mu)(\varphi, 0) \wedge (\partial_2 \mu)(\varphi, 0)}{\|(\partial_1 \mu)(\varphi, 0) \wedge (\partial_2 \mu)(\varphi, 0)\|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos(\varphi/2) \\ \sin \varphi \cos(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) \end{pmatrix}$$

donne un vecteur normal unitaire à la surface  $M$  au point  $\gamma(\varphi)$ . Étant donné qu'on a  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (3, 0, 0)$  mais

$$\mathbf{n}(0)|_{(3,0,0)} = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}(2\pi)|_{(3,0,0)} = (-1, 0, 0) ,$$

il s'ensuit, avec [27.6], que  $M$  ne peut pas être orientable.

Un des tours de "magie" qu'on peut faire avec ce ruban est de le couper au milieu. Le résultat n'est pas deux rubans, mais toujours un seul ! Mathématiquement cela correspond à l'enlèvement des points avec  $t = 0$ , c'est-à-dire l'image par l'application  $\mu$  de  $\mathbf{R} \times (]-1, 0[ \cup ]0, 1[)$ . On laisse aux bons soins du lecteur la vérification que

cette image est une surface orientable (qui correspond à recoller les deux extrémités d'un ruban, mais de retourner une des deux extrémités deux fois avant de coller).

## 28. La deuxième forme fondamentale

**28.1 Définitions.** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ ) et soit  $\mathbf{n} : \psi(U) \subset S \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs unitaires normaux à la surface  $\psi(U)$  de classe  $C^{k-1}$ . Alors on définit les trois fonctions  $L, M, N : U \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \langle (\partial_1^2 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle \\ M(u, v) &= \langle (\partial_1 \partial_2 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle \equiv \langle (\partial_2 \partial_1 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle \\ N(u, v) &= \langle (\partial_2^2 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle . \end{aligned}$$

Une fois qu'on connaît ces trois fonctions, on définit *la deuxième forme fondamentale* (de la surface associée à la carte  $\psi$ ) comme l'application  $\mathbf{II}$  définie sur  $U$  qui à chaque point  $(u, v) \in U$  fait correspondre la forme bilinéaire symétrique  $\mathbf{II}_{(u,v)} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\mathbf{II}_{(u,v)}(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

où  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  appartiennent à  $\mathbf{R}^2$ .

On classe les points de la surface (qui appartiennent à l'image de la carte) selon la valeur du déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ . Plus précisément, en abrégant ce déterminant comme  $LN - M^2$  en n'écrivant pas la dépendance du point  $(u, v)$ , on dit qu'un point  $p = \psi(u, v)$  est

<i>elliptique</i>	si $LN - M^2 > 0$
<i>hyperbolique</i>	si $LN - M^2 < 0$
<i>parabolique</i>	si $LN - M^2 = 0$ sans qu'on a $L = M = N = 0$
<i>ombilic (parabolique) ou plat</i>	si $(LN - M^2 = 0 \text{ et } L = M = N = 0)$

**Remarque pour les comparateurs.** La définition des trois fonctions  $L, M$  et  $N$  qu'on a donné ici n'est pas la définition qu'on trouve dans la littérature. Il est d'habitude de considérer la fonction  $\mathbf{n} \circ \psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  et ses dérivées partielles  $(\partial_1(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v)$  et  $(\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v)$ . Le fait que  $\mathbf{n}(\psi(u, v))$  est un vecteur unitaire, c'est-à-dire qu'on a  $\langle \mathbf{n}(\psi(u, v)), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle = 1$  pour tout  $(u, v) \in U$ , implique (en dérivant) qu'on a

$$\langle (\partial_1(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle = 0 .$$

Les deux dérivées partielles  $(\partial_1(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v)$  et  $(\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v)$ , étant orthogonales à  $\mathbf{n}(\psi(u, v))$ , appartiennent donc à l'espace tangent  $T_{\psi(u,v)}S$ . Cet espace est engendré par les vecteurs tangents  $(\partial_1 \psi)(u, v)$  et  $(\partial_2 \psi)(u, v)$ . Pour comparer les deux dérivées partielles avec cette base de  $T_{\psi(u,v)}S$  on définit les fonctions  $L, M$  et  $N$  par

$$\begin{aligned} L(u, v) &= -\langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_1(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v) \rangle \\ M(u, v) &= -\langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v) \rangle \\ N(u, v) &= -\langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v) \rangle . \end{aligned}$$

Mais si on dérive les identités

$$\langle (\partial_1 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (\partial_2 \psi)(u, v), \mathbf{n}(\psi(u, v)) \rangle = 0$$

par rapport à  $u$  et  $v$ , on obtient l'égalité de cette définition des fonctions  $L$ ,  $M$  et  $N$  avec la définition [28.1]. Et en plus on trouve l'égalité (qui ne saute pas aux yeux)

$$\langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_1(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v) \rangle = \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2(\mathbf{n} \circ \psi))(u, v) \rangle = -M(u, v) .$$

J'ai préféré la définition [28.1], parce qu'elle colle mieux avec l'utilisation que je fais de la deuxième forme fondamentale.

La deuxième forme fondamentale est intimement liée au caractère local de la surface autour d'un point. Plus précisément, c'est le développement limité à l'ordre 2 de la distance (signée) de la surface à son plan tangent.

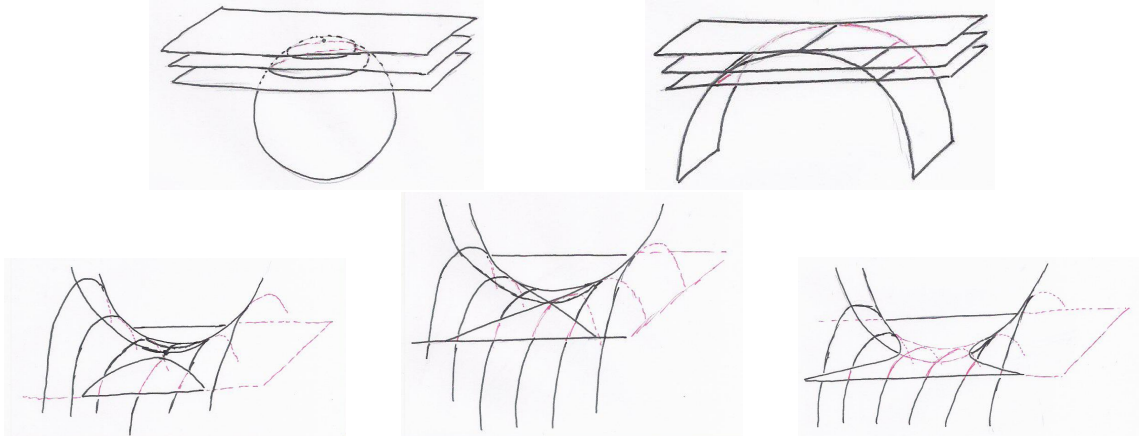
- Ⓟ **28.2 Lemme.** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ ). Soit  $(u_o, v_o) \in U$  un point fixe,  $p = \psi(u_o, v_o) \in S$  son image,  $PT_p S$  le plan tangent à  $S$  au point  $p$  et  $\mathbf{n}_p \in \mathbf{R}^3$  un vecteur tangent unitaire normal à  $PT_p S$ . Alors on a

$$d(\psi(u, v), PT_p S) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{II}_{(u_o, v_o)} \left( \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right) + o(\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \|^2) ,$$

où  $d(x, PT_p S) = \langle x - p, \mathbf{n}_p \rangle$  désigne la distance signée du point  $x$  au plan  $PT_p S \subset \mathbf{R}^3$  [4.16].

- Ⓟ **28.3 Corollaire vague.** Soit  $p \in S$  un point sur une surface régulière et soit  $PT_p S$  le plan tangent à  $S$  au point  $p$ . Soit  $P$  un plan parallèle à  $PT_p S$  et proche de  $PT_p S$  et notons  $C = P \cap S$  l'intersection de  $P$  avec  $S$ . Alors, dans un voisinage de  $p$  :

$C$ ressemble à une ellipse	si $p$ est un point elliptique
$C$ ressemble à (deux branches d') un hyperbole	si $p$ est un point hyperbolique
$C$ ressemble à deux droites parallèles	si $p$ est un point parabolique.





## 29. La courbure normale

Si  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière et  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe sur  $S$ , alors en général il n'y a pas espoir que  $\gamma$  sera sans courbure (sauf si  $S$  est un plan). Si on pense à une sphère (la terre!), alors toutes les courbes auront partout une courbure non-nulle. Cette courbure est dû à la surface qui n'est pas plate. Pour distinguer la part de la courbure qui est dû à la surface et la part qui est liée au choix de la courbe, on s'inspire par le fait qu'on peut considérer le plan tangent comme une première approximation de la surface. Intuitivement, plus que la surface est plate, plus qu'elle ressemble à son plan tangent.

Pour être un petit peu plus précis, on prend  $t_o \in I$ , le point  $p = \gamma(t_o) \in S$  correspondant sur la surface et  $T_p S$  l'espace tangent à  $S$  au point  $p$ . Par définition de l'espace tangent, le vecteur  $\gamma'(t_o)$  appartient à  $T_p S$ . Par contre, même dans des exemples simples, la deuxième dérivée  $\gamma''(t_o)$  n'appartient en général plus à  $T_p S$ . Et dans ces cas, le vecteur de courbure  $k_\gamma(t_o)$  n'appartient pas non plus à l'espace tangent. Il est donc naturel de vouloir décomposer le vecteur de courbure  $k_\gamma(t_o)$  en une partie orthogonal à l'espace tangent  $T_p S$  et une partie dans cet espace tangent. Ceci nous amène à la définition suivante.

**29.1 Définitions.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur  $S$ . Pour  $t \in I$  on note  $p = \gamma(t) \in S$  le point correspondant sur la surface,  $k_\gamma(t)$  le vecteur de courbure de la courbe  $\gamma$  au point  $p$ ,  $T_p S$  l'espace tangent à  $S$  au point  $p$  et  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire normal à  $S$  au point  $p$ . Avec ces ingrédients on peut décomposer  $k_\gamma(t)$  en une partie  $k_\gamma^\perp(t)$  orthogonal à l'espace tangent et appelé *le vecteur de courbure normale de  $\gamma$  au point  $p \in S$* , et une partie  $k_\gamma^\parallel(t)$  parallèle à/dans l'espace tangent et appelé *le vecteur de courbure géodésique de  $\gamma$  au point  $p \in S$*  :

$$k_\gamma(t) = k_\gamma^\perp(t) + k_\gamma^\parallel(t) \quad \text{avec} \quad k_\gamma^\parallel(t) \in T_p S \quad \text{et} \quad k_\gamma^\perp(t) \perp T_p S .$$

Selon [1.2] cette décomposition est donnée par

$$(29.2) \quad k_\gamma^\perp(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad k_\gamma^\parallel(t) = k_\gamma(t) - \langle k_\gamma(t), \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n} .$$

La courbe  $\gamma$  étant régulière, on peut définir le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  comme

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n} \wedge \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} .$$

(Que ce vecteur est bien unitaire est une conséquence immédiate du fait qu'on a  $\langle \mathbf{n}, \gamma'(t) \rangle = 0$ .) Il s'ensuit que le triplet  $\mathbf{n}, \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|, \mathbf{u}$  est une base orthonormée directe [2.1], [2.6.v]. Et selon [3.5.ii]  $\mathbf{u}$  est l'unique vecteur unitaire qui fait cela à partir des deux vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ . On a donc l'égalité

$$k_\gamma(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n} + \frac{\langle k_\gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \gamma'(t) + \langle k_\gamma(t), \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{u} .$$

Étant donné que  $k_\gamma(t)$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$  [10.8], cette égalité et (29.2) nous disent qu'on a

$$k_\gamma^\parallel(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{u} .$$

On définit maintenant les deux nombres  $\kappa_n(t)$ , appelé *la courbure normale de  $\gamma$  au point  $p$* , et  $\kappa_{\text{géo}}(t)$ , appelé *la courbure géodésique de  $\gamma$  au point  $p \in S$* , par

$$\kappa_n(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{n} \rangle \quad \text{et} \quad \kappa_{\text{géo}}(t) = \langle k_\gamma(t), \mathbf{u} \rangle .$$

Ces nombres sont uniques au signe près, car il est immédiat qu'on a  $|\kappa_n(t)| = \|k_\gamma^\perp(t)\|$  et  $|\kappa_{\text{géo}}| = \|k_\gamma^\parallel(t)\|$ . Ils dépendent du choix du vecteur normal  $\mathbf{n}$  (il n'y a que deux choix possibles qui diffèrent par un signe) et de l'orientation de la courbe  $\gamma$  (une autre orientation change le signe du vecteur unitaire  $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$  et donc le signe du vecteur  $\mathbf{u}$ ). L'explication de l'adjectif "géodésique" est donnée par [30.9].

**Ⓟ 29.3 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière,  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière,  $t_o \in I$  et  $p = \gamma(t_o) \in S$ . Soit  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  une carte locale pour la surface telle qu'il existe  $(u_o, v_o) \in U$  avec  $\gamma(t_o) = \psi(u_o, v_o) = p$  et soit  $J \subset I$  un intervalle tel que  $t_o \in J$  et  $\gamma(J) \subset \psi(U)$ . Alors la courbure normale  $\kappa_n$  de  $\gamma$  au point  $p = \psi(u_o, v_o)$  est donnée par la formule

$$\kappa_n = \frac{\mathbf{II}_{(u_o, v_o)}(c'(t_o), c'(t_o))}{\mathbf{I}_{(u_o, v_o)}(c'(t_o), c'(t_o))} ,$$

où  $c : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  est l'unique courbe vérifiant  $\gamma = \psi \circ c$  [20.3], [23.1].

En particulier, la courbure normale de  $\gamma$  au point  $p = \gamma(t_o) \in S$  ne dépend que de la direction de  $\gamma'(t_o)$ . Plus précisément, si  $\bar{\gamma} : \bar{I} \rightarrow S$  est une autre courbe régulière sur  $S$ , et  $s \in \bar{I}$  telle que  $\bar{\gamma}(s) = p = \gamma(t_o)$  et telle que  $\bar{\gamma}'(s)$  et  $\gamma'(t_o)$  sont colinéaires, alors  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  ont la même courbure normale au point  $p$ .

Une fois qu'on sait que la courbure normale d'une courbe passant par un point  $p$  ne dépend pas trop de la courbe, mais seulement de la direction de son vecteur tangent, il devient intéressant de regarder la variation de cette courbure normale en fonction de ce vecteur tangent. On fixe donc le point  $p \in S$  et on regarde des courbes qui passent par  $p$ . Avec la carte  $\psi$ , il suffit de décrire ces courbes dans la carte et selon [29.3] la courbure normale est donnée par

$$\kappa_n = \frac{\mathbf{II}_{(u_o, v_o)}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}_{(u_o, v_o)}((a, b), (a, b))} ,$$

où  $(a, b) = c'(t_o)$  est le vecteur tangent de la courbe dans la carte et où  $p = \psi(u_o, v_o)$ .

**Ⓟ 29.4 Lemme.** Soit  $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par

$$f(a, b) = \frac{\mathbf{II}_{(u_o, v_o)}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}_{(u_o, v_o)}((a, b), (a, b))}$$

et soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $\kappa \in \mathbf{R}$ . Alors  $(a, b)$  est un point critique de  $f$  et  $\kappa = f(a, b)$  si et seulement si  $\kappa$  est une valeur propre de la matrice

$$(29.5) \quad \begin{pmatrix} E(u_o, v_o) & F(u_o, v_o) \\ F(u_o, v_o) & G(u_o, v_o) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L(u_o, v_o) & M(u_o, v_o) \\ M(u_o, v_o) & N(u_o, v_o) \end{pmatrix}$$

et  $(a, b)$  un vecteur propre associé.

**Remarque.** Le fait qu'un point extrémal pour la courbure normale est un vecteur propre d'une matrice confirme que la courbure normale ne dépend que de la **direction** du vecteur tangent, car un vecteur propre n'est déterminé qu'à un multiple près.

Ⓟ **29.6 Proposition.** *La matrice (29.5) a toujours deux valeurs propres réelles.*

Si on combine [29.4] et [29.6] on voit qu'il y a exactement deux valeurs extrémales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  possible pour la courbure normale en un point  $p \in S$ . Si ces deux valeurs coïncident ( $\kappa_1 = \kappa_2$ ), alors la matrice (29.5) aura deux valeurs propres égales. La forme de cette matrice et le fait qu'on a  $EG \neq 0$  [23.4] impliquent qu'elle est diagonalisable et donc qu'elle est un multiple de l'identité. Il s'ensuit que tous les vecteurs  $(a, b)$  sont des vecteurs propres, ce qui implique (avec [29.4]) que tous les vecteurs  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  sont critiques, c'est-à-dire que la fonction  $f$  (la courbure normale) est constante. Si on est dans le cas contraire  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , alors chaque sous-espace propre de la matrice (29.5) est de dimension 1, c'est-à-dire que tous les points/vecteurs critiques  $(a, b)$  pour une valeur propre  $\kappa_i$  sont un multiple d'un même vecteur.

**Définition.** Les deux valeurs  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  dont l'existence est garantie par [29.6] sont appelées *les courbures principales* de la surface  $S$  au point  $p = \psi(u_o, v_o)$ . Associé à ces deux valeurs on définit *la courbure de Gauss*  $K$  et *la courbure moyenne*  $H$  (toujours de la surface au point  $p$ ) comme

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) .$$

Comme on a vu, le signe d'une courbure normale (et  $\kappa_i$  est un cas particulier de la courbure normale!) dépend du choix d'un vecteur normale. Par contre, le signe de la courbure de Gauss ne dépend pas de ce choix.

Si on est dans le cas  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , et si  $(a_i, b_i)$  est un point critique avec  $f(a_i, b_i) = \kappa_i$ , alors le vecteur  $v = a_i \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) + b_i \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$  est appelé *une direction principale* (pour la courbure principale  $\kappa_i$ ) de la surface au point  $p$ . C'est un vecteur dans l'espace tangent  $T_p S$  à la surface au point  $p$ . Par abus de langage on dit aussi que c'est  $(a_i, b_i)$  qui est une direction principale.

Ⓟ **29.7 Corollaire.** *La courbure de Gauss est donné par la formule*

$$K = \frac{L(u_o, v_o)N(u_o, v_o) - M(u_o, v_o)^2}{E(u_o, v_o)G(u_o, v_o) - F(u_o, v_o)^2} \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2} .$$

**29.8 Définition.** Avec [29.7] on peut affiner la classification des points de la surface  $S$  donnée en [28.1]. Étant donné que  $EG - F^2$  est toujours strictement positif, le signe de la courbure de Gauss est le même que le signe de  $LN - M^2$  qui figure dans la classification [28.1]. À l'aide des courbures principales on dit qu'un point  $p \in S$  est un point

<i>elliptique</i>	si $K > 0$ et $\kappa_1 \neq \kappa_2$
<i>hyperbolique</i>	si $K < 0$
<i>parabolique</i>	si $K = 0$ et $\kappa_1 \neq \kappa_2$
<i>ombilic (elliptique)</i>	si $\kappa_1 = \kappa_2$ et $K > 0$
<i>ombilic (parabolique) ou plat</i>	si $\kappa_1 = \kappa_2$ et $K = 0$ .

Dans [29.9] on montrera que la condition “ $K = 0$  et  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ” est équivalente à la condition donnée dans [28.1] pour un point parabolique. La précision qu’on apporte réside donc dans la classification des points elliptiques, qu’on a séparé en points elliptique et points ombilics (elliptiques). À noter que si on ne précise pas la nature d’un point ombilic (elliptique ou parabolique), alors c’est un point avec les deux courbures principales égales.

Ⓟ **29.9 Lemme.** *Les conditions pour être un point parabolique données en [28.1] et [29.8] sont équivalentes.*

Ⓟ **29.10 Proposition.** *Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et  $p \in S$  un point qui n’est pas ombilic. Alors les deux directions principales sont orthogonales.*

### 30. Géodésiques, distance et droites

On associe le plus souvent la notion d'une géodésique sur une surface régulière avec une courbe qui réalise la plus courte distance entre deux points. Pour voir quelle courbe réalise la plus courte distance, on s'inspire de l'expérience physique suivante. On s'imagine la surface régulière comme la surface d'un objet dans  $\mathbf{R}^3$ , comme un ballon de foot (une sphère), un ballon de rugby (un ellipsoïde), un rouleau de papier de toilette (un cylindre), une bouée (un tore). Pour trouver la courbe qui réalise la longueur minimale entre deux points donnés, on prend un élastique qu'on fixe entre ces deux points (en imposant que l'élastique reste sur la surface). Parce que c'est un élastique, il cherche à minimiser sa longueur. Et donc la position prise par l'élastique sera la courbe qui minimise la distance (sur la surface).

Deux questions s'imposent : si on se donne deux points sur une surface régulière, existe-t-il une courbe qui réalise la longueur minimale, et si oui, cette courbe est-elle unique ? Si on est dans  $\mathbf{R}^n$ , les réponses à ces deux questions sont affirmatives : oui, une telle courbe existe (le segment de droite dont les deux extrémités sont les deux points donnés) et oui, c'est unique : toute autre courbe a une longueur plus grande. Une petite réflexion montre que pour une surface arbitraire les réponses sont négatives.

Commençons avec l'existence (ou plutôt, la non-existence). Pour cela on considère la surface  $S \subset \mathbf{R}^3$  définie comme

$$S = \{ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 > 1 \} .$$

C'est le plan avec un trou. Sur cette surface on considère les deux points  $(-2, 0, 0)$  et  $(2, 0, 0)$ . Le chemin le plus court entre ces deux points est le segment de droite  $c(t) = (t, 0, 0)$ ,  $-2 \leq t \leq 2$ , mais elle n'est pas contenu dans notre surface.

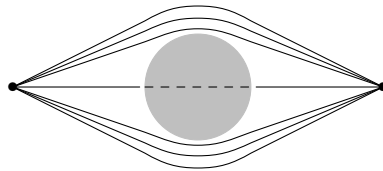


FIGURE 6. Contourner un trou

Si on cherche la courbe la plus courte reliant ces deux points, il est plus ou moins évident que cette courbe doit toucher le bord du trou. Il suffit de penser à notre élastique ! Mais le bord n'appartient pas à la surface : pour toute courbe qui est tout près de ce bord, il y a une autre qui est encore plus près du bord. Il n'existe donc pas une courbe qui réalise la plus courte longueur.

Pour la non-unicité (quand il y a existence), on considère la sphère unité  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$  (un modèle pour la terre !) définie comme

$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} .$$

On peut montrer que les “grands cercles” sur  $\mathbf{S}^2$ , c'est-à-dire les intersections de  $\mathbf{S}^2$  avec un sous-espace vectoriel de dimension 2 (des plans qui passent par l'origine), réalisent le plus court chemin entre deux points. Si on considère maintenant deux points diamétralement opposés (par exemple les deux pôles nord et sud sur la terre), alors tous les grands cercles passant par ces deux points (les méridiens !) réalisent la longueur minimale (à savoir  $\pi$ ). Si on pense à notre élastique, avec les deux extrémités fixées sur deux points diamétralement opposés, l'élastique n'aura pas de

préférence ; on peut le déplacer sur la sphère sans qu'il se remette sur son ancienne position.

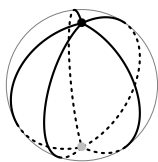


FIGURE 7. Non unicité d'un géodésique

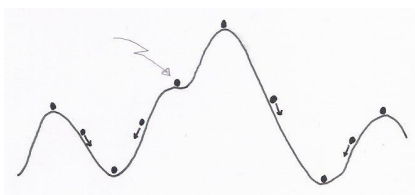
D'autre part, si on accepte que les grands cercles sont les géodésiques sur la sphère  $S$ , alors on constate que deux points sur un tel grand cercle divisent le cercle en deux morceaux d'arc, un petit et un grand. Et sur la sphère, le petit morceau d'arc/grand cercle réalise la courbe avec la longueur minimale. Par contre, le grand morceau d'arc réalise (plus ou moins) une courbe avec la longueur maximale (et la somme de ces deux longueurs, minimale plus maximale, est constant  $2\pi$ ).



FIGURE 8. Le court et le long chemin

Dans notre expérience avec un élastique, si on fixe les deux extrémités sur des points pas trop éloignés, l'élastique va automatiquement réaliser le plus court chemin : si on essaye de le déplacer, il se remet sur le chemin initial. D'autre part, avec un peu d'habileté, on arrive à mettre l'élastique sur le chemin le plus long sans qu'il saute vers la solution minimale. Mais c'est une situation instable : le moindre déplacement, aussi petit que ce soit, provoque le saut de l'élastique vers la solution minimale.

Cette situation fait penser à une bille sur un terrain montagneux en une dimension : on interprète le graphe d'une fonction comme la hauteur d'un terrain sur lequel on met une bille.



Si on pose la bille sur une pente (un point où la dérivée n'est pas nulle), elle va glisser / rouler vers le point le plus bas (le plus près). Si on le met dans une vallée, la bille reste au repos. Et si on essaie de le mettre sur un sommet, il faut beaucoup d'habileté, car sur un sommet la bille sera en équilibre instable : le moindre déplacement provoque sa chute. On reconnaît les points où la bille reste au repos comme les points où la dérivée de la fonction est nulle. Pour un maximum le repos sera instable, pour un minimum ça sera stable (et oui, on a ignoré les points d'inflexion). Ceci représente le fait que dans un minimum la dérivée de la fonction est nulle, mais si la dérivée est nulle, ce n'est pas forcément un minimum.

Avant de transformer cette idée en une exigence mathématique, revenons un petit instant sur l'idée qu'une géodésique réalise le plus court chemin et mettons un petit

peu de précision. On considère donc une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et deux points  $p, q \in S$  et on cherche une courbe  $\gamma_o : [a, b] \rightarrow S$  entre  $p$  et  $q$  (c'est-à-dire  $\gamma_o(a) = p$  et  $\gamma_o(b) = q$ ) dont la longueur  $L(\gamma_o)$  est minimale :

$$\forall \gamma : [a, b] \rightarrow S \quad : \quad \gamma(a) = p \text{ et } \gamma(b) = q \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) \geq L(\gamma_o) .$$

Pour trouver une telle courbe, on fouille parmi les courbes pour lesquelles la dérivée de la fonction  $L$  est nulle. Et notre discussion ci-dessus nous suggère d'élargir la notion de géodésique à toutes les courbes pour lesquelles cette dérivée est nulle. Mais comment dériver dans l'espace de toutes les courbes? L'idée de base est la dérivée directionnelle. Pour une fonction  $f : O \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$  on définit la dérivée directionnelle  $(D_v f)(x)$  de  $f$  au point  $x \in O$  dans la direction  $v \in \mathbf{R}^n$  comme

$$(D_v f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} .$$

Et si la fonction est de classe  $C^1$ , alors la dérivée de  $f$  au point  $x$  est nulle si et seulement si les dérivées directionnelles dans toutes les directions sont nulles.

Pour la fonction de longueur sur l'ensembles de toutes les courbes on fait pareil. Si  $L(\gamma)$  est la longueur de la courbe  $\gamma$ , alors la dérivée directionnelle de la fonction  $L$  au point  $\gamma$  dans la direction  $\delta$  est donnée par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\gamma + \varepsilon \cdot \delta) - L(\gamma)}{\varepsilon} .$$

Dans cette formule, la direction  $\delta$  est aussi une courbe  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$  et la courbe  $\gamma + \varepsilon \cdot \delta$  est naturellement définie par

$$(30.1) \quad (\gamma + \varepsilon \cdot \delta)(t) = \gamma(t) + \varepsilon \cdot \delta(t) .$$

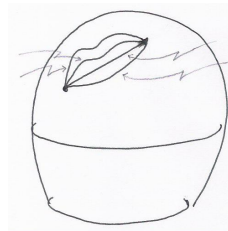
Malheureusement il y a un petit problème avec cette définition "naturelle" : il n'y a aucune garantie que la courbe  $\gamma + \varepsilon \delta$  est sur la surface  $S$ . Pour corriger ce défaut, on va d'abord réécrire la courbe  $\gamma + \varepsilon \delta$  comme la fonction  $\Gamma$  définie sur  $[a, b] \times \mathbf{R}$  par

$$\Gamma(t, \varepsilon) = \gamma(t) + \varepsilon \cdot \delta(t) .$$

Sous cette forme il devient facile d'exiger que cela reste sur la surface : il suffit d'imposer que  $\Gamma$  prend ses valeurs dans  $S$ . Et on récupère la courbe/direction  $\delta$  simplement par la formule

$$\delta(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0) .$$

Et pour s'assurer qu'on ne parle que des courbes qui vont de  $p$  vers  $q$ , il suffit d'imposer la condition que  $\Gamma(a, \varepsilon) = p$  et  $\Gamma(b, \varepsilon) = q$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ . Ainsi on arrive à la définition [30.2].



**30.2 Définition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Pour  $a, b \in I$ ,  $a < b$  on dit que  $\gamma$  est une *géodésique*

entre  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$  si pour toute application de classe  $C^2$   $\Gamma : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow S$  vérifiant

$$\forall t \in [a, b] : \Gamma(t, 0) = \gamma(t) \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R} : \Gamma(a, \varepsilon) = p \text{ et } \Gamma(b, \varepsilon) = q ,$$

on a

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\gamma_\varepsilon) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\gamma_\varepsilon) - L(\gamma)}{\varepsilon} = 0 ,$$

où  $\gamma_\varepsilon : [a, b] \rightarrow S$  est la courbe définie par  $\gamma_\varepsilon(t) = \Gamma(t, \varepsilon)$  (et donc par hypothèse on a  $\gamma = \gamma_0$ ). On dit que  $\gamma : I \rightarrow S$  est une *géodésique* si elle est une géodésique entre  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$  pour tout  $a, b \in I$ .

**Remarque.** La définition d'une géodésique n'est donc pas tout à fait la définition d'une courbe qui réalise la plus courte distance entre deux points. C'est une courbe pour laquelle la distance entre deux points est "critique" dans le sens que la "dérivée" de la fonction longueur est nulle. Pourtant, cette définition de géodésique, qui est donc plus faible que d'être une courbe réalisant la plus courte distance, est mieux adaptée aux applications et à notre intuition (un grand cercle reste une géodésique, même si on le suit dans le "mauvais" sens). En plus, comme on verra dans la suite, cette définition est équivalente à d'autres définitions qui ne parlent pas du tout de longueur, mais plutôt de courbure ou d'être "droite."

### 30.3 Proposition : être une géodésique est invariant sous reparamétrage.

Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow S$  une courbe régulière sur  $S$  et soit  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow S$  une courbe régulière équivalente par reparamétrage à  $\gamma_1$  avec fonction de reparamétrage  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ . Si  $\gamma_2$  est une géodésique entre  $p = \gamma_2(a)$  et  $q = \gamma_2(b)$ , alors  $\gamma_1$  est une géodésique entre  $p = \gamma_1(\varphi(a))$  et  $q = \gamma_1(\varphi(b))$ .

**Nota Bene.** La définition d'une géodésique qu'on trouve généralement dans la littérature est un petit peu plus restrictive que la définition qu'on a donné ici. Soit on exige qu'une géodésique est paramétrée à vitesse constante (sous forme de la condition donnée en [30.6], soit en imposant des équations différentielles d'ordre 2 comme en [30.13]), soit (encore plus restrictive) qu'elle est paramétrée par longueur d'arc. Dans tous ces cas une géodésique est donc a fortiori une courbe *paramétrée*. Pour ces auteurs, être une géodésique n'est donc pas une propriété de l'image de la courbe paramétrée, mais est intimement lié au paramétrage. On a privilégié ici la notion plus faible, car une droite (dans  $\mathbf{R}^n$ ) ou un grand cercle sur la sphère reste une géodésique, même quand on le parcourt à une vitesse variable. Notre définition est donc "intrinsèque" dans le sens qu'elle ne dépend que de l'image et pas du paramétrage. Et les autres descriptions qu'on va trouver ([30.9] et [31.16]) seront elles aussi intrinsèques. C'est vrai que la description intrinsèque ne permet pas de **trouver** facilement des géodésiques. Par contre, une description intrinsèque permet plus facilement de vérifier si oui ou non une courbe donnée est une géodésique oui ou non. Car en général, quand on donne une courbe explicite, elle ne sera pas paramétrée à vitesse constante (et donc a fortiori pas paramétrée par longueur d'arc).

Ⓟ **30.4 Théorème.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$  et soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$  paramétrée à vitesse constante. Alors  $\gamma$



est une géodésique entre  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$  (avec  $a, b \in I$ ,  $a < b$ ) si et seulement si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in ]a, b[$ .

Selon [30.4], si  $\gamma : I \rightarrow S$  (qu'on suppose paramétrée à vitesse constante) est une géodésique entre  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$ , alors c'est une géodésique entre  $p' = \gamma(a')$  et  $q' = \gamma(b')$  pour tout  $a \leq a' < b' \leq b$ . Simplement parce que si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in ]a, b[$ , alors c'est a fortiori vrai pour tout  $t \in ]a', b'[ \subset ]a, b[$ . Ce résultat est tout à fait conforme à notre intuition : si on connaît le plus court chemin entre deux points  $p$  et  $q$  et si  $p'$  et  $q'$  sont deux points sur ce chemin entre  $p$  et  $q$ , alors le plus court chemin entre  $p'$  et  $q'$  est le (morceau de) chemin initial ; pour deux points intermédiaires on n'a pas tout d'un coup besoin de changer de route.

Par contre, ce qu'on ne devine pas tout d'un coup, c'est que la condition d'être paramétrée à vitesse constante n'est qu'à moitié nécessaire. Il reste vrai que si  $\gamma$  est une géodésique, alors il n'est nullement nécessaire qu'elle soit paramétrée à vitesse constante. Si elle l'est, alors  $\gamma''$  sera orthogonal à l'espace tangent. Par contre, si  $\gamma''$  est orthogonal à l'espace tangent, alors  $\gamma$  est forcément paramétrée à vitesse constante, et donc elle sera une géodésique par [30.4].

Ⓟ **30.5 Lemme.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière de classe  $C^2$  sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ . Si pour tout  $t \in I$  le vecteur  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$ , alors  $\gamma$  est paramétrée à vitesse constante.

**30.6 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur  $S$ . Alors  $\gamma$  est une géodésique et paramétrée à vitesse constante si et seulement si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in I$ .

On obtient une autre interprétation de la notion de géodésique quand on sait que dans  $\mathbf{R}^n$  les courbes qui réalisent la plus courte distance entre deux points sont (presque par définition) les droites.

Ⓟ **30.7 Proposition.** Soit  $p, q \in \mathbf{R}^n$  deux points distincts et soit  $\gamma_o : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  la courbe définie par

$$\gamma_o(s) = p + s \cdot (q - p) .$$

Alors pour toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  vérifiant  $\gamma(a) = p$  et  $\gamma(b) = q$  on a l'inégalité

$$L(\gamma) \geq L(\gamma_o) = \|q - p\| ,$$

avec l'inégalité stricte dès qu'il y a  $c \in [a, b]$  avec  $\gamma(c) \notin \gamma_o([0, 1])$  (autrement dit, dès qu'il y a un point dans l'image de la courbe  $\gamma$  qui n'est pas contenu dans le segment de droite  $\gamma_o([0, 1])$ ).

**DESSIN**

Bien que dans  $\mathbf{R}^n$  (et donc a fortiori dans un plan  $\mathbf{R}^2$ ) les courbes qui réalisent la plus courte distance sont des morceaux de droites, il est peu probable qu'une

droite (ou un morceau de droite) sera contenu dans une surface régulière arbitraire (bien qu'il y a parfois des petites surprises). Une géodésique ne sera donc pas (en général) un segment de droite. Dans [??] on a vu qu'une droite est une courbe pour laquelle  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont parallèles. On vient donc d'argumenter que ce critère n'est pas le critère d'être une géodésique. D'autre part, comme on a déjà remarqué,  $\gamma'(t)$  appartient toujours (presque par définition) à l'espace tangent  $T_p S$ , tandis qu'en général  $\gamma''(t)$  n'y appartient pas. Quand  $\gamma''(t)$  n'appartient pas à l'espace tangent, il y a des cas où on est plus près de la situation " $\gamma'$  et  $\gamma''$  parallèles" que d'autres : pour un vecteur  $\gamma''(t)$  fixé, on a bien l'impression que le vecteur  $\gamma'(t)$  qui fait le plus petit angle avec ce  $\gamma''(t)$  est "plus parallèle" que les autres.

### DESSIN

L'angle entre  $\gamma''(t)$  et  $\gamma'(t)$  est minimal (ou maximal) pour les vecteurs dont la projection orthogonale sur le plan tangent est colinéaire avec  $\gamma'(t)$ . On est donc tenté de dire que les courbes sur une surface régulière qui ressemblent le plus à une droite sont les courbes pour lesquelles la projection orthogonale de  $\gamma''(t)$  sur le plan tangent (au point  $\gamma(t)$ ) est parallèle à  $\gamma'(t)$ .

Un autre argument qui nous amène aussi à la projection orthogonale est de partir de la caractérisation d'une droite comme une courbe pour laquelle la courbure est (identiquement) nulle [13.2], ce qui équivaut la condition que le vecteur de courbure  $k_\gamma$  est (identiquement) nul. Dans la décomposition

$$k_\gamma = k_\gamma^\parallel + k_\gamma^\perp = k_\gamma^\parallel + \kappa_n \mathbf{n} ,$$

la partie  $k_\gamma^\parallel$  est la projection orthogonale de  $k_\gamma$  sur le plan tangent. En plus, on a vu que la partie  $\kappa_n \mathbf{n}$  n'a pas grand chose à faire avec la dérivée seconde : la courbure normale  $\kappa_n$  ne dépend que de la direction de  $\gamma'(t)$ , indépendant de  $\gamma''(t)$  et de la longueur de  $\gamma'(t)$ . Le plus près qu'on peut donc être de "courbure nulle" est de demander  $k_\gamma^\parallel = 0$ , car on ne peut pas se débarrasser de la partie  $\kappa_n \mathbf{n}$ . La condition  $k_\gamma^\parallel = 0$  est équivalente à la condition "courbure géodésique nulle" et à la condition que la projection orthogonale de  $k_\gamma$  est nulle. On a donc deux raisonnements qui nous conduisent de l'idée d'une droite vers la notion de projection orthogonale. Mais être une géodésique s'écrit aussi avec cette projection orthogonale : sous réserve que la courbe soit paramétrée à vitesse constante c'est équivalent à la condition que la projection orthogonale de  $\gamma''$  est nulle. Le lecteur ne devrait pas être trop surpris d'apprendre que ces trois approches sont équivalentes, ce qui explique en même temps le choix du nom "courbure géodésique" pour cette composante du vecteur de courbure.

**Ⓟ 30.8 Proposition (à comparer avec [13.2]).** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow S$  une courbe régulière sur la surface, soit  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe paramétrée à vitesse constante et équivalente à  $\gamma_1$  par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ , soit  $t \in I_1$  avec  $u = \varphi^{-1}(t)$  et soit  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow T_p S$  la projection orthogonale sur  $T_p S$ , l'espace tangent au point  $p = \gamma_1(t) = \gamma_2(u) \in S$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) Les vecteurs  $\gamma_1'(t)$  et  $\pi(\gamma_1''(t))$  sont dépendants/colinéaires.
- (ii)  $k_{\gamma_1}^\parallel(t) = 0$  (ce qui équivaut  $\kappa_{géo}^{\gamma_1}(t) = 0$ ).
- (iii)  $\gamma_2''(u)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_p S$  (ce qui équivaut  $\pi(\gamma_2''(u)) = 0$ ).

**30.9 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur  $S$ . Alors  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si sa courbure géodésique  $\kappa_{\text{géo}}$  est identiquement nulle (ce qui est équivalent à la condition que le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in I$ ).

Avec [30.2] et [30.9] on a deux façons différentes d'interpréter la notion de géodésique : comme un point critique pour la longueur (on a envie de dire un minimum) ou comme une courbe sans courbure géodésique (une courbe qui est “le plus droit” possible). Mais il y a une question qu'on n'a pas du tout abordé : existe-t-il des géodésiques ? On a vu un exemple où il n'y avait pas une géodésique entre deux points donnés (le plan avec un trou), mais même dans cet exemple on a bien l'impression qu'entre deux points proches, il existe toujours une géodésique. Mieux encore : si on s'imagine quelque part sur la terre, on a bien l'impression que dans toute direction on peut marcher “droit,” et donc dans toutes les directions il devrait y avoir des géodésiques. Ceci sera confirmé par [30.15]. Ce résultat repose sur l'existence de solutions d'équations différentielles. Et donc il faut transformer la condition d'être une géodésique sous une forme d'équation différentielle.

**Définition.** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ ) et soit  $p = \psi(u, v) \in \psi(U) \subset S$ . Dans [28.1] on a défini trois fonctions  $L$ ,  $M$  et  $N$  sur  $U$  en prenant les produits scalaires entre les dérivées secondes de  $\psi$  et un vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}(p)$  à la surface au point  $p$ . Mais ce vecteur unitaire fait partie de la base de  $\mathbf{R}^3$  formée des trois vecteurs  $(\partial_1\psi)(u, v)$ ,  $(\partial_2\psi)(u, v)$  et  $\mathbf{n}(p)$ . Il est donc “naturel” de “compléter” ces produits scalaires par les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ijk}(u, v)$  (de première espèce, dans la carte  $\psi$ , avec  $i, j, k = 1, 2$ ) définis par (attention l'ordre des indices !)

$$(30.10) \quad \Gamma_{ijk}(u, v) = \langle (\partial_j \partial_k \psi)(u, v), (\partial_i \psi)(u, v) \rangle .$$

Associé aux symboles de Christoffel de première espèce on définit les symboles de Christoffel de deuxième espèce  $\Gamma^i_{jk}(u, v)$  par

$$(30.11) \quad \begin{pmatrix} \Gamma^1_{jk} \\ \Gamma^2_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{1jk} \\ \Gamma_{2jk} \end{pmatrix} ,$$

où on n'a pas écrit la dépendance du point  $(u, v) \in U$ , ni pour les symboles de Christoffel, ni pour les fonctions  $E, F, G$  formant la première forme fondamentale.

Ⓟ **30.12 Lemme.** Contrairement aux fonctions  $L, M$  et  $N$  formant la deuxième forme fondamentale [28.1], on peut exprimer les symboles de Christoffel (de première espèce) en termes des (dérivées partielles des) fonctions  $E, F$  et  $G$  formant la première forme fondamentale :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_j \langle \partial_i \psi, \partial_k \psi \rangle + \partial_k \langle \partial_i \psi, \partial_j \psi \rangle - \partial_i \langle \partial_j \psi, \partial_k \psi \rangle) ,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2} \partial_1 E & , & \quad \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \frac{1}{2} \partial_2 E & , & \quad \Gamma_{122} = \partial_2 F - \frac{1}{2} \partial_1 G \\ \Gamma_{211} &= \partial_1 F - \frac{1}{2} \partial_2 E & , & \quad \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2} \partial_1 G & , & \quad \Gamma_{222} = \frac{1}{2} \partial_2 G \end{aligned}$$

Par conséquent les symboles de Christoffel de deuxième espèce s'expriment eux aussi en termes des fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$ .

Ⓟ **30.13 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale, soit  $E, F, G$  les coefficients de la première forme fondamentale associée à la carte  $\psi$ , soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière vérifiant  $\gamma(I) \subset \psi(U)$  et soit  $c : I \rightarrow U$  tel que  $\psi \circ c = \gamma$  [23.1]. Alors  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in I$  si et seulement si la courbe  $c$  (avec  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ ) vérifie les équations différentielles d'ordre 2 suivantes (qu'on appellera "les équations géodésiques") :

$$(30.14) \quad c''_i(t) = - \sum_{j,k=1}^2 \Gamma^i_{jk}(c(t)) c'_j(t) c'_k(t) .$$

Ⓟ **30.15 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $p \in S$  un point arbitraire et soit  $V \in T_p S \setminus \{0\}$  un vecteur tangent arbitraire non-nul (au point  $p$ ). Alors il existe  $\varepsilon > 0$  et une géodésique  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = V$ .

À l'aide de la théorie des équations différentielles on a montré, dans [30.15], l'existence de (petits bouts de) géodésiques, mais cette théorie permet aussi d'énoncer l'unicité. Par contre, l'énoncé exact de l'unicité est un petit peu plus longue, à cause des précautions qu'on doit prendre. L'idée de l'unicité est la suivante.

**Unicité simpliste :** Si deux géodésiques passent par un même point et s'ils ont la même droite tangente en ce point, alors ces deux géodésiques coïncident.

Malheureusement, cette formulation simpliste est presque trivialement fausse. Il suffit de regarder les exemples suivantes. On considère les trois courbes (planes)  $\gamma_i$  données par

$$\begin{aligned} \gamma_1 : ]-3, 1[ &\rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma_1(t) &= (t+1, 0) & \gamma_1(]-3, 1[) &= ]-2, 2[ \times \mathbf{R} \\ \gamma_2 : ]-1, 3[ &\rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma_2(t) &= (2-t, 0) & \gamma_2(]-1, 3[) &= ]-1, 3[ \times \mathbf{R} \\ \gamma_3 : ]-2, 2[ &\rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma_3(t) &= (t-1, 0) & \gamma_3(]-2, 2[) &= ]-3, 1[ \times \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Il est immédiat que ces trois courbes déterminent tous les trois un bout de la droite  $\mathbf{R} \times \{0\}$  qui est une géodésique dans  $\mathbf{R}^2$ . En plus, ces trois courbes passent toutes les trois par le point  $p = (0, 0) = \gamma_1(-1) = \gamma_2(2) = \gamma_3(1)$ . Et finalement, elles ont toutes les trois la même droite tangente au point  $p$ . Et pourtant, ces trois bouts de droite ne sont pas les mêmes. Par contre, la seule différence est que, à droite ou à gauche, l'un prolonge l'autre. Mais attention, la notion droite/gauche n'a pas de sens dans  $\mathbf{R}^2$  (et surtout pas en dimension supérieure), il faut donc l'utiliser dans les domaines/intervalles de définition. Et dans les domaines de définition, il faut préciser de quelle courbe : la partie "gauche" de la courbe  $\gamma_2$  est plus longue que la partie "droite" de la courbe  $\gamma_3$ . Autrement dit, la partie "gauche" de la courbe  $\gamma_2$  prolonge la partie "droite" de la courbe  $\gamma_3$ . À part ces prolongements à droite et/ou à gauche, l'idée simpliste de l'unicité des géodésiques est vraie ; l'énoncé exact est [30.16].

**30.16 Proposition (unicité de géodésiques).** Soit  $\gamma_i : I_i \rightarrow S$ ,  $i = 1, 2$  deux géodésiques sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ . Supposons en plus que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées.

- (i) Les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  passent par un même point  $p$ , c'est-à-dire qu'il existe  $t_o \in I_1$  et  $s_o \in I_2$  tels que  $p = \gamma_1(t_o) = \gamma_2(s_o)$ .
- (ii) Les deux courbes ont la même droite tangente au point  $p$ , c'est-à-dire  $DT_{t_o}\gamma_1 = DT_{s_o}\gamma_2$ .

Alors il existe  $\lambda \in \mathbf{R}^*$  tel que  $\gamma_1'(t_o) = \lambda \gamma_2'(s_o)$ . En plus, si  $\lambda$  est positif, on a les inclusions

$$\gamma_1(I_1^+) \subset \gamma_2(I_2^+) \quad \text{ou} \quad \gamma_2(I_2^+) \subset \gamma_1(I_1^+)$$

et

$$\gamma_1(I_1^-) \subset \gamma_2(I_2^-) \quad \text{ou} \quad \gamma_2(I_2^-) \subset \gamma_1(I_1^-) ,$$

où on a introduit les intervalles

$$\begin{aligned} I_1^+ &= I_1 \cap [t_o, \infty[ \quad , \quad I_1^- = I_1 \cap ]-\infty, t_o] \\ I_2^+ &= I_2 \cap [s_o, \infty[ \quad , \quad I_2^- = I_2 \cap ]-\infty, s_o] , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $I_1^+$  est la partie de  $I_1$  à droite de  $t_o$ ,  $I_1^-$  est la partie à gauche de  $t_o$ ,  $I_2^+$  est la partie de  $I_2$  à droite de  $s_o$  et  $I_2^-$  est la partie à gauche de  $s_o$ . Ces inclusions disent donc que la partie à droite de  $\gamma_2$  prolonge la partie à droite de  $\gamma_1$  ou vice-versa, et une même interprétation à gauche.

Et si  $\lambda$  est négatif, on a les inclusions

$$\gamma_1(I_1^+) \subset \gamma_2(I_2^-) \quad \text{ou} \quad \gamma_2(I_2^-) \subset \gamma_1(I_1^+)$$

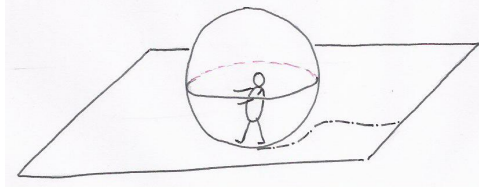
et

$$\gamma_1(I_1^-) \subset \gamma_2(I_2^+) \quad \text{ou} \quad \gamma_2(I_2^+) \subset \gamma_1(I_1^-) .$$

Autrement dit, la partie à gauche de  $\gamma_2$  prolonge la partie à droite de  $\gamma_1$  ou vice-versa, et la partie à droite de  $\gamma_2$  prolonge la partie à gauche de  $\gamma_1$  (ou vice-versa).

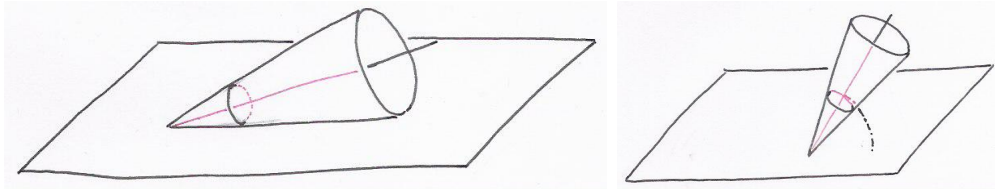
### 31. Géodésiques et le plan tangent basculant

Une troisième interprétation de la notion de géodésique est donnée par l'idée du "plan tangent basculant." L'idée derrière la notion du plan tangent basculant est le jeu de l'homme dans un ballon. Imaginons un grand ballon (de rugby pour le rendre plus intéressant), transparent avec à l'intérieur une personne qui peut se promener. À chaque instant, ce ballon ne repose par terre que par un seul point : le point où sont posés les pieds de notre personne. Quand la personne fait un pas, il doit "pousser" le ballon par terre à un autre endroit. Par ce fait, le ballon bascule et roule sur la terre dans la direction prise par la personne.



Imaginons ensuite qu'on a tracé une courbe sur la surface du ballon et que la personne à l'intérieur suit cette courbe : à chaque pas il met ses pieds un petit peu plus loin sur la courbe. Ainsi il va suivre cette courbe et il va tracer une autre courbe par terre : là où le ballon a touché par terre. Par exemple, si le ballon est une sphère et si la courbe tracée sur ce ballon est un grand cercle (l'équateur), alors la trace par terre sera une droite. Mais si la courbe sur ce ballon est un petit cercle, alors la trace sera aussi un cercle.

Un autre exemple est un ballon tellement déformé qu'il y a une pointe conique (un ballon de rugby bien pointu ou une toupie classique). Si la courbe est un cercle autour de ce cône, alors (comme pour le petit cercle sur une sphère) la trace par terre sera aussi un cercle. Et le mouvement de ce ballon est décrit par une rotation autour de la pointe du cône (qui touche aussi par terre).

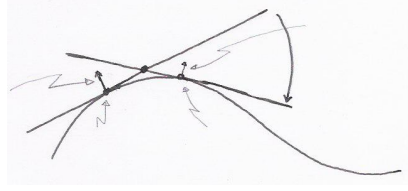


Si on veut transcrire ce jeu en termes mathématiques, on renverse la situation dans le sens que ce n'est plus le ballon qui roule sur la surface terre, mais c'est la surface (le plan tangent) qui roulera sur le ballon. Une fourmi sur ce ballon qui pense que le ballon est le centre de l'univers et donc immobile voit la surface de la terre faire des mouvements autour de lui : c'est le mouvement du plan tangent basculant. Et, bien sûr, on remplace le ballon par une surface régulière quelconque.

On a donc les données suivantes : une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et une courbe  $\gamma : I \rightarrow S$  sur la surface. Et on cherche le mouvement du plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$  à  $S$  au point  $\gamma(t)$  qui "bascule" d'instant à instant selon la courbe. Pour trouver les équations qui vont nous fournir ce mouvement, on se place dans deux points voisins  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t + \delta)$ . En chacun des points on a un vecteur unitaire normal à  $S$  :  $\mathbf{n}(t)$  au point  $\gamma(t)$  et  $\mathbf{n}(t + \delta)$  au point  $\gamma(t + \delta)$ . Les plans tangents correspondants sont les plans passant par ces points et orthogonaux aux vecteurs unitaires normaux :

$$PT_{\gamma(t)}S \cong \langle x - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad PT_{\gamma(t+\delta)}S \cong \langle x - \gamma(t + \delta), \mathbf{n}(t + \delta) \rangle = 0 .$$

L'idée la plus naturelle pour basculer le plan  $PT_{\gamma(t)}S$  vers le plan  $PT_{\gamma(t+\delta)}S$  sans le faire glisser est d'effectuer une rotation de l'espace  $\mathbf{R}^3$  autour de la droite d'intersection de ces deux plans. Cette droite est orthogonale aux deux vecteurs  $\mathbf{n}(t)$  et  $\mathbf{n}(t + \delta)$ .



Si on note  $R_\delta$  la matrice de rotation qui envoie le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  sur  $\mathbf{n}(t + \delta)$  et dont l'axe est orthogonale à ces deux vecteurs et si on note  $p(\delta)$  un point sur la droite d'intersection des deux plan tangents, alors la rotation de l'espace  $\mathbf{R}^3$  autour de cette droite d'intersection est donnée par

$$x \mapsto p(\delta) + R_\delta(x - p(\delta)) = R_\delta(x) + p(\delta) - R_\delta(p(\delta)) .$$

Si  $x(t) \in \mathbf{R}^3$  est la position d'un point au moment  $t \in I$  en suivant les mouvements induits par le plan tangent basculant, alors on aura l'équation

$$x(t + \delta) = R_\delta(x(t)) + p(\delta) - R_\delta(p(\delta)) .$$

En prenant la dérivée par rapport à  $\delta$  (ou, ce qui revient au même, en calculant un développement limité par rapport à  $\delta$ ), on obtient l'équation différentielle

$$x'(t) = R'_0(x(t)) + p'(0) - R'_0(p(0)) - R_0(p'(0)) .$$

Il semble tout-à-fait raisonnable qu'on a  $R_0 = \text{Id}$  : si on ne fait pas de (petit) pas, alors la rotation qui amène le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  au même vecteur  $\mathbf{n}(t)$  est l'identité. Par contre, bien qu'un dessin suggère fortement qu'on a  $\lim_{\delta \rightarrow 0} p(\delta) = \gamma(t)$  (l'axe de rotation se trouve quelque part entre  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t + \delta)$ , donc quand  $\delta$  tend vers 0,  $p(\delta)$  tend vers  $\gamma(t)$ ), il existe des exemples où cette limite n'existe pas. Néanmoins, on fait cette hypothèse, ce qui nous donne au final l'équation

$$(31.1) \quad x'(t) = R'_0(x(t) - \gamma(t)) .$$

### Une digression.

Au lieu d'étudier directement en détail l'équation (31.1), on fait d'abord une "petite" digression en dimension 2 pour montrer que l'idée du plan basculant nous est déjà connue en dimension 2 sous la forme d'une développante d'une courbe. Pour cela on se donne une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  avec son image et on va étudier le mouvement de la droite tangente basculante  $DT_t\gamma$ . Comme pour le plan tangent basculant, on se place en deux points voisins  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t + \delta)$ . En regardant le dessin utilisé pour le cas dimension 3, on voit que le mouvement pour basculer la droite tangente  $DT_t\gamma$  vers la droite tangente  $DT_{t+\delta}\gamma$  est une rotation autour du point d'intersection  $p(\delta)$  de ces deux droites. En plus, l'angle de rotation est l'angle entre les deux vecteurs directeurs  $\gamma'(t)$  de  $DT_t\gamma$  et  $\gamma'(t + \delta)$  de  $DT_{t+\delta}\gamma$ . Depuis §9 on sait que la direction d'un vecteur directeur  $\gamma'(t)$  dans  $\mathbf{R}^2$  peut être décrite par un angle  $\alpha(t)$  [9.3] selon

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) .$$



L'angle de rotation pour aller de  $DT_t\gamma$  vers  $DT_{t+\delta}\gamma$  est donc  $\alpha(t+\delta) - \alpha(t)$ . Un point  $x(t)$  qui suit le mouvement des droites tangentes basculants vérifie "donc"

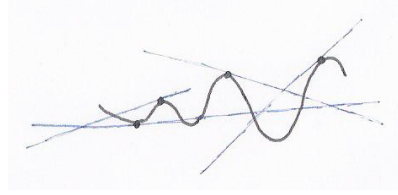
$$x(t+\delta) - p(\delta) = R_{\alpha(t+\delta)-\alpha(t)}(x(t) - p(\delta)) .$$

Avec le même raisonnement heuristique qu'en dimension 3 et en utilisant la formule (3.2) explicite pour une rotation en dimension 2, on arrive à l'équation différentielle

$$(31.2) \quad x'(t) = \alpha'(t) \cdot R_{\pi/2}(x(t) - \gamma(t)) \quad \text{avec} \quad R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Que notre raisonnement est heuristique se voit encore plus facilement en dimension 2 qu'en dimension 3, surtout pour la limite  $\lim_{\delta \rightarrow 0} p(\delta) = \gamma(t)$ , quand on considère la courbe

$$\gamma(t) = (t, t^2 \sin(t^{-1})) \quad \text{avec} \quad \gamma(0) = (0, 0) .$$



En s'approchant du point  $t = 0$ , il y aura toujours des droites tangentes horizontales, donc sans point d'intersection avec la droite tangente au point  $\gamma(0)$ . Et donc il n'existe pas de point limite pour les points d'intersections  $p(\delta)$  quand  $\delta$  tend vers 0.

Revenons à l'équation (31.2). Il y a plusieurs façon différentes de l'aborder ; on choisit ici la méthode directe/brute, contrairement au cas de dimension 3, où on utilisera des moyens un peu plus sophistiqués. Pour l'équation (31.2) il est facile de voir que les solutions sont toutes de la forme

$$x(t) = R_{\alpha(t)}(v - w(t)) ,$$

où  $v \in \mathbf{R}^2$  est un vecteur arbitraire et  $w : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une solution (fixe) de l'équation différentielle (une simple primitive)

$$w'(t) = \alpha'(t) R_{\pi/2-\alpha(t)}(\gamma(t)) .$$

Une fois qu'on connaît ces solutions, on peut et on doit se poser la question si ces mouvements font bien ce qu'on veut. Car il ne faut pas oublier qu'on a obtenu l'équation (31.2) d'une façon heuristique qui n'est pas rigoureusement justifiable (voir l'exemple ci-dessus) ! Mais qu'est ce qu'on veut vraiment ? Après réflexion, les points suivants semblent être naturels :

- (i) Tous les points de l'espace bougent.
- (ii) Quand on bouge tous les points entre un moment  $t_o$  et un moment  $t$ , on ne déforme pas l'espace, c'est-à-dire qu'on a une isométrie (de  $\mathbf{R}^2$ ) [3.6].
- (iii) Si à un moment  $t_o$  un point appartient à la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$ , alors à tout autre moment  $t$  le point (bougé) appartient à la droite tangente  $DT_t\gamma$ .

Vérifions donc ces trois propriétés pour nos solutions. Pour le premier point il est facile à voir que pour  $t_o \in I$  et  $x_o \in \mathbf{R}^2$  donné, il existe une et une seule solution  $x(t)$  qui vérifie  $x(t_o) = x_o$ . Donc oui, tous les points de l'espace bougent, et en plus à partir de tout moment  $t_o \in I$ .

Pour le deuxième point il faut changer/adapter la notation un petit peu. On vient de voir que pour tout  $t_o \in I$  et tout  $x_o \in \mathbf{R}^2$  il existe une solution  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  de



l'équation (31.2) qui vérifie  $x(t_o) = x_o$ . On notera cette solution par  $\varphi_{(t_o, x_o)} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  et on introduit l'application  $\Phi_{t, t_o} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  par

$$\Phi_{t, t_o}(x) = \varphi_{(t_o, x)}(t) .$$

La solution  $\varphi_{(t_o, x)}$  étant la solution qui vérifie  $\varphi_{(t_o, x)}(t_o) = x$ , on voit que  $\Phi_{t_o, t}(x)$  est l'image du point  $x$  quand on le bouge selon la solution de (31.2) jusqu'au moment  $t$ . L'application  $\Phi_{t, t_o}$  est donc bien l'application qui fait bouger tous les points entre le moment  $t_o$  et le moment  $t$ . Un petit calcul montre que  $\Phi_{t, t_o}(x)$  est donné par

$$\Phi_{t, t_o}(x) = R_{\alpha(t) - \alpha(t_o)}(x) + R_{\alpha(t)}(w(t_o) - w(t)) ,$$

c'est-à-dire une rotation (d'angle  $\alpha(t) - \alpha(t_o)$ ) suivi d'une translation (sur le vecteur  $R_{\alpha(t)}(w(t_o) - w(t))$ ). C'est donc bien une isométrie de l'espace  $\mathbf{R}^2$  comme voulu.

Pour le troisième point, on commence avec l'observation qu'un point  $x \in \mathbf{R}^2$  appartient à la droite tangente  $DT_t\gamma$  si et seulement si le vecteur  $x - \gamma(t)$  est parallèle au vecteur directeur  $\gamma'(t)$  de cette droite. Étant donné que la direction de ce vecteur est donnée par l'angle  $\alpha(t)$  et qu'être parallèle à cette direction équivaut être orthogonal à la direction orthogonale, c'est-à-dire à la direction d'angle  $\alpha(t) + \pi/2$ , on trouve que  $x$  appartient à  $DT_t\gamma$  si et seulement si on a

$$\left\langle x - \gamma(t), \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 .$$

On considère donc la fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(t) = \left\langle \varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t), \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

et on calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left\langle \varphi'_{(t_o, x)}(t) - \gamma'(t), \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad - \alpha'(t) \cdot \left\langle \varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t), \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \alpha'(t) \cdot \left\langle R_{\pi/2}(\varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t)), \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad - \alpha'(t) \cdot \left\langle \varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t), \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0 , \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence de l'équation (31.2) et le fait que  $\gamma'(t)$  est (par définition de l'angle  $\alpha(t)$ ) orthogonal à la direction  $(-\sin \alpha(t), \cos \alpha(t))$  et la troisième est le simple fait qu'on a l'égalité

$$\left\langle R_{\pi/2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\rangle .$$

La fonction  $f$  est donc constante (car  $I$  est un intervalle, donc connexe). Il s'ensuit que si  $x = \varphi_{(t_o, x)}(t_o)$  appartient à la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$ , alors  $\varphi_{(t_o, x)}(t)$  appartient à la droite tangente  $DT_t\gamma$  pour tout  $t \in I$ .

Maintenant on sait que notre mouvement de la droite tangente basculante défini par l'équation (31.2) fait bien ce qu'on pense, on peut regarder de plus près son effet. Prenons donc un point  $x$  sur la droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  et suivons sa trajectoire  $c$  sous le mouvement de la droite tangente basculante  $c(t) = \varphi_{(t_o, x)}(t)$ . On sait déjà

que  $c(t)$  appartient à la droite tangente  $DT_t\gamma$  pour tout  $t \in I$ . Et si on calcule  $c'(t)$  on trouve

$$c'(t) = \alpha'(t) \cdot R_{\pi/2}(\varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t)) .$$

Mais  $\varphi_{(t_o, x)}(t)$  appartient à la droite tangente  $DT_t\gamma$  (on vient de le montrer), donc la différence  $\varphi_{(t_o, x)}(t) - \gamma(t)$  est parallèle au vecteur directeur  $\gamma'(t)$  de cette droite. La rotation  $R_{\pi/2}$  en fait un vecteur orthogonal à  $\gamma'(t)$ . Autrement dit,  $c'(t)$  est orthogonal à la droite  $DT_t\gamma$ . Si on regarde la définition d'une développante de la courbe  $\gamma$  [11.4], on voit que c'est bien cela : le mouvement de la droite tangente basculante est exactement le mouvement d'une développante (quand on part d'un point sur une droite tangente). Et pour une développante on avait l'image/interprétation de (dé)coller un ruban adhésif sur la courbe  $\gamma$ .

### Fin de la digression

Après cette digression on attaque le mouvement du plan tangent basculant, en commençant avec quelques vérifications et précisions.

Ⓟ **31.3 Lemme.** *Si l'application  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est de classe  $C^1$ , alors l'application  $R'_0$  dans (31.1) est donné par*

$$R'_0 = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) ,$$

où  $j(v)$  est la matrice de l'opération "produit vectoriel avec  $v$ " [3.11], c'est-à-dire qu'on a

$$R'_0(y) = (\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \wedge y \equiv \langle y, \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}'(t) - \langle y, \mathbf{n}'(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t) .$$

**Définition.** En s'inspirant de la discussion précédente, on **définit** maintenant le mouvement du plan tangent basculant comme suit. Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière (de classe  $C^2$ ), soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière (de classe  $C^1$ ) sur la surface et soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^1$ ) tel que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$  au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in I$ . Alors une courbe/point qui suit le mouvement du plan tangent basculant est une courbe  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  qui vérifie l'équation

$$\begin{aligned} x'(t) &= j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t))(x(t) - \gamma(t)) \\ (31.4) \quad &\equiv (\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \wedge (x(t) - \gamma(t)) \\ &\equiv \langle x(t) - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}'(t) - \langle x(t) - \gamma(t), \mathbf{n}'(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t) . \end{aligned}$$

Associée à la notion de ce mouvement est la notion de champ parallèle : on dit qu'une application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un *champ de vecteurs parallèles le long de la courbe  $\gamma$*  si elle vérifie l'équation

$$(31.5) \quad v'(t) = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t))(v(t)) \equiv (\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \wedge v(t) .$$

L'explication du nom "champ de vecteurs parallèles" sera donné dans §32, mais on peut déjà remarquer que l'équation (31.5) est l'équation différentielle linéaire homogène associée à l'équation (différentielle linéaire) inhomogène (31.4).

Ⓟ **31.6 Lemme (trivial mais important).** *L'application  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$ .*

Ⓟ **31.7 Lemme.** Soit  $x, y, v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  trois applications.

- (i) Si  $x$  et  $y$  suivent le mouvement du plan tangent basculant, alors  $x - y$  est un champ de vecteurs parallèles le long de  $\gamma$ .
- (ii) Si  $x$  suit le mouvement du plan tangent basculant et si  $v$  est un champ de vecteurs parallèles le long de  $\gamma$ , alors  $x + v$  suit le mouvement du plan tangent basculant.

**Remarque.** Le résultat [31.7] est une façon pompeuse de dire que si on a deux solutions d'une équation différentielle linéaire inhomogène, alors leur différence est une solution de l'équation différentielle homogène. Et réciproquement, si on a une solution de l'équation inhomogène et une solution de l'équation homogène, alors leur somme est une solution de l'équation inhomogène.

Une fois qu'on a défini le mouvement du plan basculant, il faut vérifier que ce mouvement a bien les propriétés qu'on attende, car on n'a pas **déduit** ce mouvement, on l'a **postulé**. Comme pour le mouvement de la droite tangente basculante, il faut donc vérifier (au moins) les trois points suivants.

- (i) Tous les points de l'espace bougent (et même aussi longtemps que la courbe). Ça sera fait en [31.8].
- (ii) Si à un moment  $t_o$  un point appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$ , alors à tout autre moment  $t$  le point (bougé) appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$ . Ça sera fait en [31.10].
- (iii) Quand on bouge tous les points entre un moment  $t_o$  et un moment  $t$ , on ne déforme pas l'espace, c'est-à-dire qu'on a une isométrie (de  $\mathbf{R}^3$ ). Ça sera fait en [31.12].

Revenons un petit instant aux justifications de ces conditions. Le premier point semble naturel, car quand on bascule le plan tangent, on peut basculer tout l'espace. Et bien sûr on veut le faire entre chaque couple de "temps"  $t_o, t \in I$ . Le deuxième point c'est notre point de départ : on veut rester dans le plan tangent. Et finalement, pour bien comprendre le dernier point, on revient à l'idée que c'est la surface (le ballon avec l'homme à l'intérieur) qui bouge et que c'est le plan tangent (la surface de la terre) qui reste immobile. Pendant que le ballon roule, les points sur la terre ne bougent pas. En particulier, leurs distances et les angles ne changent pas. Et si c'est le plan tangent (en son entièreté) qu'on fait rouler sur la surface, tous les points bougent, mais leurs distances relatives et les angles (dans ce plan) ne changent pas.

**31.8 Proposition (admis).** Soit  $t_o \in I$  et  $x \in \mathbf{R}^3$  arbitraire. Alors il existe une unique courbe  $\varphi_{(t_o, x)} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  vérifiant l'équation du plan tangent basculant (31.4) avec la condition initiale  $\varphi_{(t_o, x)}(t_o) = x$  et il existe un unique champ de vecteurs parallèles  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  avec condition initiale  $v(t_o) = x$ .

**Nota Bene.** Ce qu'il faut surtout remarquer dans le résultat [31.8] est que les solutions sont définies sur tout l'intervalle  $I$ .

- Ⓟ **31.9 Corollaire.** Les solutions  $\varphi_{(t_o, x)} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  ont la propriété pour tout  $x \in \mathbf{R}^3$  et tout  $t_o, t \in I$  :

$$\varphi_{(t, \varphi_{(t_o, x)}(t_o))} = \varphi_{(t_o, x)} : I \rightarrow \mathbf{R}^3 .$$

- Ⓟ **31.10 Lemme.** Si une courbe  $b : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  suit le mouvement du plan tangent basculant et si  $b(t_o)$  appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  à  $S$  au point  $\gamma(t_o)$ , alors  $b(t)$  appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in I$ .

- Ⓟ **31.11 Lemme.** Soient  $v, w : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  deux champs de vecteurs parallèles le long  $\gamma$ , alors leur produit scalaire  $\langle v(t), w(t) \rangle$  ne dépend pas de  $t$ .

**Définitions.** On commence avec un petit changement de point de vue. Quand on écrit  $\varphi_{(t_o, x)}(t)$ , on considère une courbe  $\varphi_{(t_o, x)}$  paramétrée par  $t$  avec une condition initiale  $x$  au “temps”  $t = t_o$  :  $\varphi_{(t_o, x)}(t_o) = x$ . Mais on peut aussi le voir comme une application de  $\mathbf{R}^3$  vers lui-même comme le basculement entre le temps  $t_o$  et le temps  $t$ , c’est-à-dire l’application qui à la condition initiale  $x$  au temps  $t_o$  associe le point basculé  $\varphi_{(t_o, x)}(t)$  au temps  $t$ . Vu de cet œil, on définit l’application  $\Phi_{t, t_o} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  qui représente ce basculement par

$$\Phi_{t, t_o}(x) = \varphi_{(t_o, x)}(t) .$$

Soit maintenant  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbf{R}^3$  une base orthonormée (par exemple la base canonique) et considérons les trois champs de vecteurs parallèles  $v_1, v_2, v_3$  vérifiant les conditions initiales  $v_i(t_o) = e_i$  [31.8]. En appliquant [31.11], on a donc

$$\langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \langle v_i(t_o), v_j(t_o) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle .$$

Étant donné que  $e_1, e_2, e_3$  est orthonormé, il s’ensuit que, pour tout  $t \in I$ , le triplet  $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$  est une base orthonormée de  $\mathbf{R}^3$ . Selon [3.5] il existe donc une unique matrice  $A_{t, t_o} \in O(3)$  telle que  $A_{t, t_o}(e_i) = v_i(t)$ .

- Ⓟ **31.12 Proposition.** Avec les définitions données ci-dessus on a les propriétés suivantes.

- (i)  $\Phi_{t_o, t_o} = \text{Id}(\mathbf{R}^3)$  et pour tout  $t_o, t, t' \in I$  on a

$$\Phi_{t', t} \circ \Phi_{t, t_o} = \Phi_{t', t_o} ,$$

et (donc) en particulier  $\Phi_{t, t_o}^{-1} = \Phi_{t_o, t}$ .

- (ii) Pour tout  $t \in I$  la matrice  $A_{t, t_o}$  appartient à  $SO(3)$ ,  $A_{t_o, t_o} = \text{Id}(\mathbf{R}^3)$  et l’application  $t \mapsto A_{t, t_o}$  est (au moins) de classe  $C^1$  avec dérivée

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{t, t_o} = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \cdot A_{t, t_o} .$$

- (iii) Une application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$  si et seulement si pour tout  $t, t_o \in I$  on a l’égalité

$$v(t) = A_{t, t_o}(v(t_o)) .$$

- (iv) L’application  $A_{t, t_o}$  envoie l’espace tangent  $T_{\gamma(t_o)}S$  sur l’espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  et  $\mathbf{n}(t_o)$  sur  $\mathbf{n}(t)$ .

- (v) Les courbes  $\varphi_{(t_o, x)} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  et (ce qui revient au même) les applications  $\Phi_{t, t_o} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  sont données par

$$\Phi_{t, t_o}(x) \equiv \varphi_{(t_o, x)}(t) = A_{t, t_o}(x) + \varphi_{(t_o, 0)}(t) .$$

Avec [31.12.v] on voit clairement que le mouvement du plan tangent basculant est une isométrie : une rotation  $A_{t, t_o} \in \text{SO}(3)$  suivi d'une translation sur  $\varphi_{(t_o, 0)}(t)$ . Mais contrairement à la situation avec le mouvement de la droite tangente basculante en dimension 2, on n'a pas d'expression (presque) explicite pour cette isométrie.

Après cette petite parenthèse on s'intéresse à la courbe trace par terre, ou plutôt à sa trace **dans le plan tangent**. Si on fixe le plan tangent et fait rouler la surface, cette courbe trace est fixe (la trace laissée par terre par le ballon qui roule). Mais si c'est le plan tangent qui bascule, chaque plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  aura sa courbe trace, notons la  $\tilde{\gamma}_{t_o} : I \rightarrow PT_{\gamma(t_o)}S$ . Pour trouver l'expression de cette courbe, regardons les propriétés souhaitées.

En termes du ballon qui roule par terre, on veut que quand on “avance” en temps de  $t_o$  vers  $t$  en suivant la courbe sur le ballon, alors le nouveau point de contact doit être le point de la courbe tracée par terre. Du point de vue de la fourmi, le roulement/basculement du ballon est représenté par le mouvement du plan tangent basculant. On applique donc le mouvement du plan tangent basculant au point  $\tilde{\gamma}_{t_o}(t)$  et au temps  $t$  on doit arriver au point de contact  $\gamma(t)$ , ce qui donne l'équation

$$(31.13) \quad \Phi_{t, t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t)) = \gamma(t) .$$

Avec [31.12] on en déduit l'expression “explicite” de cette courbe trace comme

$$\tilde{\gamma}_{t_o}(t) = \Phi_{t_o, t}(\gamma(t)) .$$

Une petite réflexion montre que ce résultat est tout-à-fait naturel : l'application/basculement  $\Phi_{t_o, t}$  bouge le point  $\gamma(t) \in PT_{\gamma(t)}S$  (le point de contact du plan tangent au temps  $t$ ) vers le point  $\tilde{\gamma}_{t_o}(t)$  de la courbe trace dans le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  au temps  $t_o$ .

Une fois qu'on a l'expression de la courbe trace, on veut comparer cette courbe trace avec la courbe originale, et en particulier on veut comparer la courbure géodésique  $\kappa_{\text{géo}}(s)$  de la courbe initiale  $\gamma$  avec la courbure (relative)  $\tilde{\kappa}(s)$  de la courbe trace  $\gamma_{t_o}$  dans un plan tangent fixe  $PT_{\gamma(t_o)}S$ . Pour définir la courbure relative de  $\tilde{\gamma}_{t_o}$ , on a besoin d'un champ n.u.p. En général on ne peut pas affirmer qu'une courbe régulière dans  $\mathbf{R}^3$  admet toujours un champ n.u.p. (voir [17.1]), mais quand on sait que c'est une courbe plane (c'est-à-dire contenue dans un plan), alors il y a toujours un choix naturel (actuellement il y en a deux) pour un champ n.u.p. L'idée de base est la même que la preuve du fait que toute courbe régulière dans  $\mathbf{R}^2$  est hyperrégulière [12.7].

- Ⓟ **31.14 Lemme.** Soit  $P \subset \mathbf{R}^3$  un plan, soit  $n \in \mathbf{R}^3$  un vecteur unitaire normal à  $P$  et soit  $\gamma : I \rightarrow P \subset \mathbf{R}^3$  une courbe régulière contenue dans ce plan  $P$ . Alors l'application  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\mathbf{u}(s) = \frac{n \wedge \gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$$

est un champ n.u.p pour  $\gamma$ .

**Remarque pour les curieux.** Pour un plan  $P \subset \mathbf{R}^3$  il y a exactement deux choix possible pour un vecteur unitaire  $n$  normal à  $P$  (l'un l'opposé de l'autre), ce qui nous donne dans [31.14] deux champs n.u.p pour une courbe plane. Dans  $\mathbf{R}^2$  on avait vu qu'il y a un choix canonique [12.8] et on peut se poser la question pourquoi pour un plan dans  $\mathbf{R}^3$  il n'y a pas de choix canonique. La raison est tout simple : pour une courbe dans  $\mathbf{R}^2$  on a tourné le vecteur tangent sur un angle droit dans le sens "positif." Ceci est possible grâce à l'orientation canonique de l'espace  $\mathbf{R}^2$ . Mais quand on voit un plan  $P$  dans  $\mathbf{R}^3$ , le sens positif vu d'un côté devient le sens négatif quand on regarde ce plan de l'autre côté.

**31.15 Proposition.** Pour  $t_o \in I$  fixé, soit  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  la courbe trace de la courbe  $\gamma$  sur le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  par le mouvement du plan tangent basculant. Alors pour tout  $t \in I$  on a les égalités

$$A_{t,t_o}(\tilde{\gamma}'_{t_o}(t)) = \gamma'(t) \quad \text{et} \quad A_{t,t_o}(\tilde{\gamma}''_{t_o}(t)) = \gamma''(t)^\parallel,$$

où  $\gamma''(t)^\parallel = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t)$  est la projection orthogonale de  $\gamma''(t)$  sur l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$ . En particulier, si on note  $\tilde{\kappa}$  la fonction de courbure (relative) de la courbe (plane)  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  définie à l'aide du champ n.u.p  $\tilde{\mathbf{u}}$  défini comme (voir [31.14], mais attention au placement des paramètres  $t_o$  et  $t$ )

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \frac{\mathbf{n}(t_o) \wedge \tilde{\gamma}'_{t_o}(t)}{\|\tilde{\gamma}'_{t_o}(t)\|},$$

alors on a l'égalité  $\tilde{\kappa}(t) = \kappa_{g_{t_o}}(t)$  où  $\kappa_{g_{t_o}}$  est la fonction de courbure géodésique de la courbe  $\gamma$  [29.1].

**(P) 31.16 Corollaire.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière et  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe sur  $S$ . Alors  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si (pour  $t_o \in I$  fixé) sa trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  sur le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  par le mouvement du plan tangent basculant est une droite.

Avec [31.16] on a une troisième interprétation d'une géodésique sur une surface : une courbe dont la trace sur un plan tangent par le mouvement du plan tangent basculant est une droite. Dans un certain sens c'est l'interprétation la plus satisfaisante ! Voici pourquoi.

Un habitant (très) myope de la surface ne voit qu'une toute petite partie de la surface, tellement petite qu'il pense que la surface/son monde est un plan (c'est le cas pour l'homme sur la Terre !). Quand cet habitant se promène, il a donc l'impression qu'il se promène dans un plan et il ne s'aperçoit pas que son monde est en réalité "courbe." Selon cet habitant, ce plan imaginaire sur lequel il se promène ne bouge pas. Mais en réalité, ce qu'il voit **dans son champ de vision très restreint** est le plan tangent à la surface au point où il se trouve. Et ce plan tangent bouge. Vu de l'extérieur c'est donc le plan tangent qui bouge, vu par l'habitant, ce plan tangent ne bouge pas ; pour lui c'est comme il se déplace dans le plan par terre et que la surface roule autour de lui. C'est exactement l'image du début de cette section de l'homme dans un ballon. Cet homme se promène sur la surface plate de la terre et le ballon/la surface tourne autour de lui. Si on revient à notre habitant myope, il ne s'aperçoit pas que c'est la surface qui bouge autour de lui quand il se déplace. Autrement dit, il habite un/le plan tangent basculant. Quand il se promène, ce qu'il

voit est la courbe trace laissé par terre/le plan tangent basculant. Et dans ce plan (tangent basculant identifié avec le plan de la terre fixe), les chemins les plus courts sont les droites. C'est donc très satisfaisant de constater que cette notion de droite comme perçue par notre habitant myope de la surface coïncide avec la notion de géodésique sur la surface telle qu'on l'a défini précédemment.

Bien évidemment, l'idée de notre habitant myope que son monde est un plan doit conduire à des contradictions quelque part (si la surface n'est pas un plan). Par exemple, si la surface est une sphère (la Terre) et si notre habitant se déplace (dans ce qu'il pense être un plan) selon une droite, il revient sur son point de départ après un temps fini. Ou s'il trace des "grands" triangles, il peut constater que la somme des angles ne fait pas  $\pi$ . Ces idées (et d'autres) sont illustrées d'une façon ludique dans la bande dessinée [Pet] (fortement recommandée).



### 32. Transport parallèle et la dérivée covariante

Le nom “champ de vecteurs parallèles” (le long une courbe) est particulièrement mal choisi. D’un certain point de vue, un meilleur nom serait “champ de vecteurs constants,” mais d’un autre point de vue c’est encore pire. Car en général un champ de vecteurs parallèles le long une courbe ne consistera ni de vecteurs constants ni de vecteurs parallèles. Mais commençons au début.

**Définitions.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble, alors un *champ de vecteurs sur  $U$*  est une application  $v : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Si  $U = S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière et si pour tout  $p \in S$  le vecteur  $v(p)$  appartient à l’espace tangent  $T_p S$  de  $S$  au point  $p$  [21.3], c’est-à-dire  $v(p) \in T_p S$ , alors on dit que  $v$  est un *champ de vecteurs tangents sur  $S$* .

Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une courbe, alors un *champ de vecteurs le long  $\gamma$*  est une application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Ceci est légèrement plus général qu’un champ de vecteurs sur l’image  $\gamma(I) \subset \mathbf{R}^n$ , car il peut y avoir des points doubles. Quand la courbe est régulière, on dispose de la notion d’espace tangent à la courbe [7.8] et on dit qu’un champ de vecteurs le long  $\gamma$  est un *champ de vecteurs tangents le long  $\gamma$*  si pour tout  $t \in I$  le vecteur  $v(t)$  appartient à l’espace tangent au point  $\gamma(t)$ , c’est-à-dire  $v(t) \in T_{\gamma(t)}\gamma$ .

**Exemples.** On a déjà rencontré plusieurs exemples de champs de vecteurs, aussi bien sur des surfaces que le long une courbe. Pour toute courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , l’application  $\gamma' : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un champ de vecteurs tangents le long  $\gamma$ . Et si  $\gamma$  est hyperrégulière, tout champ n.u.p est un champ de vecteurs le long  $\gamma$  (mais pas un champ de vecteurs tangents). Si  $\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$  est une courbe régulière sur une surface régulière  $S$ , alors l’application  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie en [27.5] est un champ de vecteur le long  $\gamma$ . Plus généralement, toute application  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que  $\mathbf{n}(p)$  est un vecteur unitaire normal à la surface est un champ de vecteurs sur  $S$ . S’il existe un tel champ de classe  $C^{k-1}$  (quand  $S$  est de classe  $C^k$ ), alors  $S$  est orientable [27.1].

En lisant ces définitions, le lecteur pourrait se poser la question pourquoi on donne un autre nom à des objets qui en ont déjà un : un champ de vecteurs n’est rien d’autre qu’une application et un champ de vecteurs le long une courbe est de nouveau une courbe. Donc pourquoi donner un autre nom ? La raison est que le changement de nom nous indique qu’il faut changer le regard sur l’objet ! Si on donne par exemple les deux courbes  $\gamma, v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définies par

$$\gamma(t) = (3 + \cos(t^2), \sin(t^2)) \quad \text{et} \quad v(t) = (-2t \sin(t^2), 2t \cos(t^2)) ,$$

alors le dessin sera différent quand on les voit comme deux courbes ou quand on voit  $v$  comme champ le long  $\gamma$  :

#### DESSIN

Dans le dessin avec  $v$  un champ le long  $\gamma$ , on voit “clairement” que  $v(t)$  est tangent à la courbe au point  $\gamma(t)$ . (Mais attention : rien nous empêche de dire que  $\gamma$  est un champ de vecteurs le long la courbe  $v$ , ce qui donnera un troisième dessin.) Autrement dit, bien que les objets ne changent pas, le changement de nom nous fait interpréter ces objets d’une façon différente ; on est guidé dans notre interprétation de l’objet, ce



qui nous aide (on l'espère) dans la compréhension des démarches mathématiques que subissent ces objets.

Revenons sur la définition d'un champ de vecteurs  $v : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  : on interprète le vecteur  $v(p)$ , pas comme le point  $v(p)$  dans l'espace  $\mathbf{R}^n$ , mais comme le vecteur dont l'origine se trouve au point  $p \in \mathbf{R}^n$ .

### DESSIN

Pour un champ de vecteurs le long une courbe on a “donc” l'image suivant

### DESSIN

Et si ce champ est l'application constante, on obtient l'image

### DESSIN

On voit la courbe avec partout des flèches qui pointent dans la même direction et qui ont la même longueur. Il paraît naturel de dire que c'est un champ de vecteurs parallèles, même si l'appellation “constant” serait plus juste. C'est cette image qui est à l'origine du nom “champs de vecteurs parallèles le long une courbe.”

Les choses deviennent un peu moins claires quand on s'intéresse à une courbe  $\gamma$  sur une surface  $S \subset \mathbf{R}$  et qu'on regarde un champ de vecteurs  $v$  le long  $\gamma$  tel que chaque vecteur  $v(t)$  est tangent à la surface  $S$  au point  $\gamma(t)$ , c'est-à-dire  $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ . On dira que  $v$  est un champ le long  $\gamma$  et tangent à  $S$  (à ne pas confondre avec un champ de vecteurs tangents le long  $\gamma$ ). En général un tel champ ne pourra pas être constant, car l'espace tangent (comme le plan tangent) bouge d'un point à l'autre. Mais ceci n'est pas le point de vue d'un habitant myope sur la surface ! Pour lui (voir la fin de §31), son monde est un plan, le plan tangent basculant. Pour lui, un vecteur tangent **est** un vecteur dans son plan et dont l'origine se trouve au point de contact. S'il dessine le champ de vecteurs le long la courbe, il dessine des vecteurs dans son plan (tangent basculant) à lui. Et donc pour lui, c'est tout-à-fait possible que ce champ soit constant.

La question importante devient donc : c'est quoi le lien entre le champ de vecteurs  $v$  le long  $\gamma$  et tangent à  $S$  d'un côté, et le champ de vecteurs  $\tilde{v}_{t_o}$  dessiné par notre habitant myope (dans son plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$ ) ? Il est évident qu'il dessine ce champ comme un champ de vecteurs le long la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  dans le plan tangent (fixe)  $PT_{\gamma(t_o)}S$  à lui. Plus précisément, le vecteur  $\tilde{v}_{t_o}(t)$  appartient à l'espace tangent (fixe)  $T_{\gamma(t_o)}S$  et il dessine le vecteur  $\tilde{v}_{t_o}(t)$  comme le segment de droite (flèche)  $\vec{CD}$  dans le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  avec  $C = \tilde{\gamma}_{t_o}(t) \in PT_{\gamma(t_o)}S$  le point d'origine (le point de la courbe trace) et  $D = \tilde{\gamma}_{t_o}(t) + \tilde{v}_{t_o}(t) \in PT_{\gamma(t_o)}S$ .

### DESSIN

Quand on fait bouger le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  par le mouvement du plan tangent basculant vers le plan tangent au temps  $t : PT_{\gamma(t)}S$ , le point  $C$  de la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}(t)$  se déplace vers le point de contact  $C' = \gamma(t)$ , ce qui nous a donné la définition de la courbe trace (dans le plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$  fixe au temps  $t_o$ ) comme (31.13)

$$\gamma(t) = \Phi_{t,t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t)) .$$

En même temps, le point  $D$  bouge vers son image par le mouvement du plan tangent basculant vers un point  $D'$  dans la plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$ . Ainsi on obtient un segment de droite (flèche)  $\vec{C'D'}$  dans le plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$  au temps  $t$  avec

$$C' = \Phi_{t,t_o}(A) = \Phi_{t,t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t)) = \gamma(t)$$

et

$$\begin{aligned} D' &= \Phi_{t,t_o}(B) = \Phi_{t,t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t) + \tilde{v}_{t_o}(t)) \\ &\stackrel{[31.12.v]}{=} A_{t,t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t) + \tilde{v}_{t_o}(t)) + \varphi_{(t_o,0)}(t) = \Phi_{t,t_o}(\tilde{\gamma}_{t_o}(t)) + A_{t,t_o}(\tilde{v}_{t_o}(t)) \end{aligned}$$

$$= \gamma(t) + A_{t,t_o}(\tilde{v}_{t_o}(t)) \equiv C' + A_{t,t_o}(\tilde{v}_{t_o}(t)) .$$

Ainsi on a obtenu un segment de droite (flèche) dans le plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$  au point de contact  $\gamma(t)$ . Ce segment de droite (flèche) doit donc être le vecteur  $v(t)$  de notre champ de vecteurs le long  $\gamma$ . Ainsi on obtient le lien entre le champ de vecteurs  $\tilde{v}_{t_o}$  le long la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  tel que l'habitant myope l'aperçoit et le champ de vecteurs  $v$  le long  $\gamma$  et tangent à  $S$  :

$$v(t) = D' - C' = A_{t,t_o}(\tilde{v}_{t_o}(t)) .$$

**32.1 Proposition.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe sur la surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$ , soit  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs le long  $\gamma$  et tangent à  $S$ , et soit  $t_o \in I$  arbitraire. Alors on a l'égalité (à comparer avec [31.15])*

$$A_{t,t_o}(\tilde{v}'_{t_o}(t)) = v'(t)^\parallel ,$$

où  $v'(t)^\parallel = v'(t) - \langle v'(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t)$  est la projection orthogonale de  $v'(t)$  sur le espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$ . En particulier les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $v$  est un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$ .
- (ii)  $v'(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in I$ .
- (iii) Le champ de vecteurs trace  $\tilde{v}_{t_o}$  le long la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  est constant.

**Nota Bene.** La condition que les vecteurs  $v(t)$  sont tangents à  $S$  (dans le sens  $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ ) est essentielle dans [32.1]. Il est bien possible (sans difficulté supplémentaire) de définir une champ de vecteurs trace  $\tilde{v}_{t_o}$  le long la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  pour un champ de vecteurs le long  $\gamma$  qui n'est pas tangent à  $S$ . Mais dans ce cas seulement l'équivalence entre (i) et (iii) dans [32.1] reste vraie. D'autre part, il est facile de vérifier qu'un champ de vecteurs parallèles  $v$  le long  $\gamma$  et orthogonal à la surface est forcément une constante fois  $\mathbf{n}$  (il existe  $c \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $t \in I$  on a  $v(t) = c \cdot \mathbf{n}(t)$ ) et cela ne présente pas un grand intérêt.

**32.2 Corollaire.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur  $S$ , paramétrée à vitesse constante. Alors  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si l'application  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $v(t) = \gamma'(t)$  est un champ de vecteurs parallèles le long de  $\gamma$ . On dit aussi qu'une géodésique est une courbe auto-parallèle.*

Avec [32.1] on a l'explication du nom "champ de vecteurs parallèles" : c'est un champ de vecteurs le long la courbe dont la trace le long la courbe trace dans un plan tangent basculant est constant. Pour un habitant myope de la surface qui "vit" dans un plan tangent basculant, un champ de vecteurs parallèles **est** un champ de vecteurs constant. D'où la remarque au début de ce chapitre qu'un meilleur nom serait "champ constant," bien qu'un champ de vecteurs parallèles le long une courbe sera en général pas du tout constant (et donc que ce n'est vraiment pas une bonne idée de l'appeler ainsi).

Associées à la notion de champ de vecteurs parallèles et plus particulièrement avec le résultat [32.1] sont deux autres notions : le transport parallèle et la dérivée covariante. Commençons avec le transport parallèle. Le but de l'opération est comme

suit. On a une courbe  $\gamma : I \rightarrow S$  sur la surface, deux temps  $s, t \in I$  et un vecteur  $v$  tangent à la surface au point  $\gamma(s)$ , c'est-à-dire  $v \in T_{\gamma(s)}S$ . Et on veut lui associé, d'une façon bien déterminée, un vecteur  $w$  tangent à la surface au point  $\gamma(t)$ , c'est-à-dire  $w \in T_{\gamma(t)}S$ . Autrement dit, on veut "transporter" le vecteur tangent  $v$  au point  $\gamma(s)$  via la courbe  $\gamma$  vers un vecteur  $w$  tangent au point  $\gamma(t)$ . Et cela de sorte que  $w$  est essentiellement le même que  $v$ . L'idée pour le faire est que l'habitant myope, qui "vit" dans l'espace tangent basculant et qui voit la courbe trace, prend ce vecteur  $v$ , un vecteur qu'il voit dans son plan tangent (basculant) comme un segment de droite dont une des extrémités est le point  $\tilde{\gamma}_{t_o}(s)$ , et il le déplace parallèlement vers le point  $\tilde{\gamma}_{t_o}(t)$  : c'est le même segment placé à un nouveau endroit de façon parallèle à l'original.

### DESSIN

Autrement dit, il construit le champ de vecteurs constant le long la courbe trace dont la valeur (constant) est le vecteur  $v$  (ou plutôt son image dans le plan tangent basculant). Quand on transporte cela à la surface, on obtient la définition officielle du transport parallèle le long une courbe.

**Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et soit  $v_o \in T_{\gamma(s)}S$  un élément de l'espace tangent au point  $\gamma(s) \in S$ . Alors  $w \in T_{\gamma(t)}S$  est le transport parallèle le long de la courbe  $\gamma$  du vecteur  $v_o$  vers l'espace tangent au point  $\gamma(t)$  si on a  $w = v(t)$ , où  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est l'unique champs de vecteurs parallèles le long de  $\gamma$  vérifiant  $v(s) = v_o$ .

En variant  $v \in T_{\gamma(s)}$  on obtient donc une application

$$\text{transport parallèle (le long } \gamma \text{ entre } \gamma(s) \text{ et } \gamma(t)) : T_{\gamma(s)}S \rightarrow T_{\gamma(t)}S .$$

**32.3 Corollaire.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur la surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et soit  $s, t \in I$ . Alors l'application de transport parallèle le long  $\gamma$  entre  $\gamma(s)$  et  $\gamma(t)$  est l'application/isométrie  $A_{t,s}$  :

$$\text{transport parallèle (le long } \gamma \text{ entre } \gamma(s) \text{ et } \gamma(t)) = A_{t,s} : T_{\gamma(s)}S \rightarrow T_{\gamma(t)}S .$$

**Remarque pour les curieux.** La notion de transport parallèle peut paraître naturel : l'habitant myope prend le vecteur, l'amène avec lui en suivant la courbe (trace) en le gardant parallèle à l'original et le dépose à l'endroit final. Mais cela peut conduire à des surprises, car s'il s'agit d'une courbe fermée, où le point final  $\gamma(t)$  est le même que le point de départ  $\gamma(s)$ , il n'est nullement garanti que le vecteur transporté parallèlement sera le même qu'au départ ! Ainsi, si sur la Terre on se promène le long un parallèle, c'est-à-dire un cercle dont le centre est le Pôle Nord, alors quand on est très proche du pôle, ça reste bien parallèle. Mais sur le parallèle qui passe par Paris (par exemple), après avoir fait le tour, le vecteur déplacé "parallèlement" ne revient pas à l'identique (voir l'exercice [??]). Que c'est ainsi peut se comprendre en regardant deux cas extrêmes : un tout petit cercle autour du pôle, et l'équateur. Si on prend au point de départ un vecteur tangent à ce cercle, alors en le déplaçant parallèlement le long le petit cercle autour du pôle on voit qu'après un quart de tour il est orthogonal au cercle, après un demi tour il est de nouveau tangent au cercle (mais dans l'autre sens par rapport à la façon de parcourir le cercle), et quand on a

fait le tour, on a obtenu le même vecteur (tout près du Pôle Nord, la Terre est bien un plan).

### DESSIN

Par contre, si on suit l'équateur et qu'au début on a un vecteur tangent, alors le déplacement parallèle reste un vecteur tangent (l'équateur est un géodésique, donc auto-parallèle).

C'est ainsi qu'on arrive à la notion de l'*holonomie* d'une courbe fermée : le fait que le transport parallèle le long la courbe fermée d'un vecteur tangent ne donne pas le même vecteur à l'arrivée qu'au départ. Autrement dit, l'application de transport parallèle le long une courbe fermée n'est pas l'identité. Et pour cela, ce n'est pas nécessaire que la courbe soit de classe  $C^1$  partout, ce qui se voit déjà dans le fait qu'on n'a pas posé de condition comment la courbe fermée se referme. On peut (et on le fait) généraliser pour des courbes fermées qui sont composées d'une succession finie de courbes de classe  $C^1$   $\gamma_i : ]a_i, b_i[ \rightarrow S$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de sorte que ces courbes se touchent aux extrémités :

$$\lim_{t \uparrow b_i} \gamma_i(t) = \lim_{t \downarrow a_{i+1}} \gamma_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow b_n} \gamma_n(t) = \lim_{t \downarrow a_1} \gamma_1(t),$$

où on suppose bien entendu que ces limites existent dans  $S$ . Le transport parallèle le long cette courbe fermée est simplement le transport parallèle le long chaque courbe  $\gamma_i$  successivement : on prend  $v \in T_{\gamma(a_1)}S$ , on le transporte parallèlement le long  $\gamma_1$  vers  $v_1 \in T_{\gamma(b_1)}S$  (avec sous-entendu le fait qu'on a posé  $\gamma(a_1) = \lim_{t \downarrow a_1} \gamma(t)$  et cætera). Par hypothèse on a  $T_{\gamma(b_1)}S = T_{\gamma(a_2)}S$ , ce qui fait qu'on peut transporter le vecteur  $v_1$  parallèlement le long  $\gamma_2$  vers  $v_2 \in T_{\gamma(b_2)}S$ . Et ainsi de suite, jusqu'au point  $\gamma_n(b_n) = \gamma(a_1)$ , ce qui boucle l'affaire. Avec cette notion d'holonomie d'une courbe fermée (de classe  $C^1$  par morceaux), il est vaguement évident que si cette courbe est "petite," alors la différence entre le vecteur au départ et à l'arrivée ne sera pas très grande (l'application de transport parallèle le long la courbe sera "proche" de l'identité). Mais si cette courbe entoure/borde une petite surface, on pourrait diviser par l'aire de cette (petite) surface. Et on peut se poser la question s'il existe une limite quand l'aire de la (petite) surface bordée tend vers zéro. Avec ces questions/idées on se rapproche dangereusement du théorème de Gauss-Bonnet et plus généralement de la notion de courbure associée à une connexion.

Jusqu'à maintenant la notion de transport parallèle ne nous a donné rien de neuf, sauf une reformulation de la notion de géodésique. Mais cette notion nous permet de généraliser un résultat pour des courbes dans le plan  $\mathbf{R}^2$ . Dans [9.7] on avait pris la courbure (relative) d'une courbe dans le plan et on avait calculé  $\int \kappa(s) \|\gamma'(s)\| ds$  et on avait montré que c'est l'angle que le vecteur vitesse a tourné entre le moment initial et le moment final. Évidemment un même résultat ne peut pas être vrai tel quel pour une courbe sur une surface, car ces deux vecteurs de vitesse ne vivent pas dans le même plan (tangent). Et pourtant, avec l'idée du transport parallèle, on a un résultat analogue qui relie (l'intégrale de) la courbure géodésique à une rotation.

**32.4 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière sur la surface et soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  tel que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$  au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in I$ . Soit  $\kappa_{\text{géo}} : I \rightarrow \mathbf{R}$  la courbure géodésique

de  $\gamma$ , soit  $t_o, t \in I$  deux temps et soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  l'angle défini par

$$\alpha = \int_{t_o}^t \kappa_{géo}(s) \|\gamma'(s)\| \, ds .$$

Alors entre le moment  $s = t_o$  et le moment  $s = t$  la direction de la courbe a tourné d'un angle  $\alpha$  dans le sens suivant. On note  $w \in T_{\gamma(t)}S$  le transport parallèle le long  $\gamma$  du vecteur  $\gamma'(t_o) \in T_{\gamma(t_o)}S$  et on note  $R_{\mathbf{n}(t),\alpha}$  la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathbf{n}(t)$  [3.9]. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} &= R_{\mathbf{n}(t),\alpha} \left( \frac{w}{\|w\|} \right) \equiv R_{\mathbf{n}(t),\alpha} \left( \text{transport parallèle de } \frac{\gamma'(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|} \right) \\ &\stackrel{[32.3]}{\equiv} R_{\mathbf{n}(t),\alpha} \left( A_{t,t_o} \left( \frac{\gamma'(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|} \right) \right) . \end{aligned}$$

**Nota Bene.** La courbure géodésique dépend du choix d'un vecteur normal [29.1] : si on change le vecteur normal en son opposé, la courbure géodésique change de signe. Dans ce cas, l'angle  $\alpha$  défini en [32.4] change lui aussi de signe, et en conséquence la rotation  $R_{\mathbf{n}(t),\alpha}$  **ne change pas**.

Comme pour la notion de géodésique, il est bien beau d'avoir des résultats généraux les concernant, mais cela ne nous dit pas comment les calculer. Et la même chose est valable pour le transport parallèle : c'est bien beau d'avoir un joli résultat qui relie l'intégrale de la courbure géodésique avec une rotation, mais il faut aussi pouvoir calculer le transport parallèle d'un vecteur tangent. Et la formule avec l'isométrie  $A_{t,t_o}$  est jolie, mais comment la déterminer ? Quand on commence à y penser, on voit qu'il faut déterminer la (une) courbe  $\mathbf{n}$ , qu'il faut déterminer l'équation différentielle (31.5) pour les champs de vecteurs parallèles, et qu'il faut la résoudre. Ce qui risque d'être difficile.

Un raccourci (mais c'est loin d'être la panacée pour toutes les difficultés !) est donné par la notion de dérivée covariante, une idée qui est déjà implicitement présente dans [32.1]. Pour un champ de vecteurs  $v$  le long une courbe  $\gamma$  sur la surface  $S$ , un habitant myope voit essentiellement la courbe trace  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  dans un plan tangent basculant  $PT_{\gamma(t_o)}S$  avec le champ de vecteurs trace  $\tilde{v}_{t_o}$  le long  $\tilde{\gamma}_{t_o}$  (et tangent à  $S$ ). En tant que tel, cet habitant peut calculer la dérivée  $\tilde{v}'_{t_o}(t)$  (pour cela il suffit d'être myope, on n'a pas besoin de connaître les valeurs de  $\tilde{v}_{t_o}$  ailleurs que (très) proche de  $\tilde{\gamma}_{t_o}(t)$ ). Selon [32.1] il a calculé essentiellement la projection orthogonale de  $v'(t)$  sur l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$ . Ce qui nous amène à la définition [32.5] de la dérivée covariante (un meilleur nom serait "dérivée apparente", car c'est la dérivée telle que notre habitant myope la voit/calculé) du champ de vecteurs  $v$  le long la courbe  $\gamma$ . L'avantage de cette dérivée covariante est qu'on peut l'exprimer complètement dans une carte. On évite donc la détermination du champ  $\mathbf{n}$  le long  $\gamma$ , et on n'aura à résoudre une équation différentielle d'une fonction vectorielle à deux composantes au lieu de trois.

**32.5 Définition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  et soit  $v$  un champ de vecteurs le long  $\gamma$  et tangent à  $S$ . Alors on définit la *dérivée covariante de  $v$  le long  $\gamma$* , notée  $\nabla_{\gamma'}v$ , comme le champ de vecteurs le long  $\gamma$  et

tangent à  $S$  définie par

$$(\nabla_{\gamma'} v)(t) = v'(t)^{\parallel} ,$$

la projection orthogonale de  $v'(t)$  sur l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$ .

**Remarque pour les comparateurs.** Dans la littérature on trouve d'autre notations pour la dérivée covariante et celle choisie ici n'est pas (très) courante. La raison est que la dérivée covariante n'est pas très souvent utilisé dans cette forme ; elle est surtout utilisée dans une carte ou sur une variété, sans qu'on utilise le fait qu'on est dans un espace ambiant de dimension supérieure (pour nous donc dans  $\mathbf{R}^3$ ). La notation qu'on a choisi ici est la plus proche de la notation "habituelle" utilisée dans une carte où on écrit  $\nabla_v w$  avec  $v$  et  $w$  des (champs de) vecteurs tangents. D'autres façons d'écrire la dérivée covariante sont  $\nabla_{\gamma} v$  ou  $Dv/dt$ , cette dernière surtout dans la littérature à dominante physique.

**32.6 Proposition.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , soit  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  une carte locale de  $S$ , soit  $p \leq k - 1$  et soit  $c : I \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^p$  et  $\gamma = \psi \circ c : I \rightarrow S$  la courbe associée sur la surface. Soit finalement  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs le long  $\gamma$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $v$  est un champ de vecteurs le long  $\gamma$  et tangent à  $S$  de classe  $C^p$ .
- (ii) Il existe un champ de vecteurs  $\bar{v} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  le long  $c$  de classe  $C^p$  tel que pour tout  $t \in I$  on a l'égalité

$$v(t) = \bar{v}_1(t) \cdot (\partial_1 \psi)(c(t)) + \bar{v}_2(t) \cdot (\partial_2 \psi)(c(t)) .$$

Ⓟ **32.7 Proposition.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe de classe  $C^\ell$  sur une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  de classe  $C^k$ , soit  $v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs de classe  $C^p$ ,  $p < k$ , le long  $\gamma$  et tangent à  $S$  et soit  $w = \nabla_{\gamma'} v : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  la dérivée covariante de  $v$  le long  $\gamma$ . Alors  $w$  est un champ de vecteurs de classe  $C^{\min(\ell, p-1)}$  le long  $\gamma$  et tangent à  $S$ .

Si en plus  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  est une carte locale de  $S$  et si  $\gamma(I) \subset \psi(U)$ , alors il existe  $c : I \rightarrow U$  telle que  $\gamma = \psi \circ c$  [20.3]. Et si on définit les champs  $\bar{v}, \bar{w} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  le long  $c$  par

$$(32.8) \quad v(t) = \bar{v}_1(t) \cdot (\partial_1 \psi)(c(t)) + \bar{v}_2(t) \cdot (\partial_2 \psi)(c(t))$$

$$(32.9) \quad w(t) = \bar{w}_1(t) \cdot (\partial_1 \psi)(c(t)) + \bar{w}_2(t) \cdot (\partial_2 \psi)(c(t)) ,$$

alors on a pour  $i = 1, 2$  les égalités

$$\bar{w}_i(t) = \bar{v}'_i(t) + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(c(t)) \cdot \bar{v}_j(t) \cdot c'_k(t) .$$

Avec [32.7] on voit qu'effectivement la notion de champ de vecteurs parallèles se calcule dans une carte et qu'on n'a besoin que de la première forme fondamentale (les symboles de Christoffel dépendent seulement de cette première forme fondamentale). Ce qu'on voit aussi est que le résultat dépend uniquement de la (première) dérivée de la courbe  $c$  ainsi que de la courbe  $\bar{v}$  et sa dérivée  $\bar{v}'$ . Bien sûr, le tout dépend

aussi du point où on se trouve via le point  $c(t)$ , mais cela est plus ou moins implicite dans le fait qu'on obtient un champ de vecteurs le long  $c$ .

Si on compare la forme de la dérivée covariante dans une carte telle qu'elle est donnée dans [32.7] avec les équations géodésiques [30.14], on voit la confirmation qu'une géodésique est une courbe auto-parallèle : les équations géodésiques sont exactement l'équation

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0 ,$$

à condition de réaliser qu'on a bien

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^2 c'_i(t) \cdot (\partial_i \psi)(c(t)) .$$





## Appendices

### 33. Fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

**33.1 Lemme (une petite amélioration de composée de limites).** Soit  $I, J \subset \mathbf{R}$  deux intervalles,  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction,  $\varphi : I \rightarrow J$  une application bijective croissante continue,  $t_o \in I$  un point arbitraire et  $\ell \in \mathbf{R}$  un réel.

- $\lim_{t \downarrow t_o} f(\varphi(t)) = \ell$  si et seulement si  $\lim_{s \downarrow \varphi(t_o)} f(s) = \ell$ .
- $\lim_{t \uparrow t_o} f(\varphi(t)) = \ell$  si et seulement si  $\lim_{s \uparrow \varphi(t_o)} f(s) = \ell$ .

**33.2 Proposition.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et injective. Alors on a les propriétés suivantes.

- (i)  $J = f(I)$  est un intervalle et  $f : I \rightarrow J$  est une bijection.
- (ii)  $f : I \rightarrow J$  est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.
- (iii)  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est aussi continue.

**33.3 Lemme.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle,  $t_o \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction.

- Si  $f$  est continue à droite en  $t_o$ , si  $f$  est dérivable pour tout  $t > t_o$  et si la limite à droite de  $f'(t)$  existe en  $t_o$ , disons

$$\lim_{t \downarrow t_o} f'(t) = \ell_d ,$$

alors  $f$  est dérivable à droite en  $t_o$  avec dérivée  $f'_d(t_o) = \ell_d$ .

- Si  $f$  est continue à gauche en  $t_o$ , si  $f$  est dérivable pour tout  $t < t_o$  et si la limite à gauche de  $f'(t)$  existe en  $t_o$ , disons

$$\lim_{t \uparrow t_o} f'(t) = \ell_g ,$$

alors  $f$  est dérivable à gauche en  $t_o$  avec dérivée  $f'_g(t_o) = \ell_g$ .

**33.4 Corollaire.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et  $t_o \in I$ . Si  $f$  est dérivable en tout point  $t \in I \setminus \{t_o\}$  et si la limite de  $f'$  en  $t_o$  existe, disons

$$\lim_{t \uparrow t_o} f'(t) = \lim_{t \downarrow t_o} f'(t) = \ell ,$$

alors  $f$  est dérivable en  $t_o$  avec  $f'(t_o) = \ell$  et  $f'$  est continue au point  $t_o$ .

**Exemple.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x < 0.$$

Il est évident que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  et que sur ce domaine on a  $f'(x) = 0$ . On a donc en particulier

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 0 ,$$

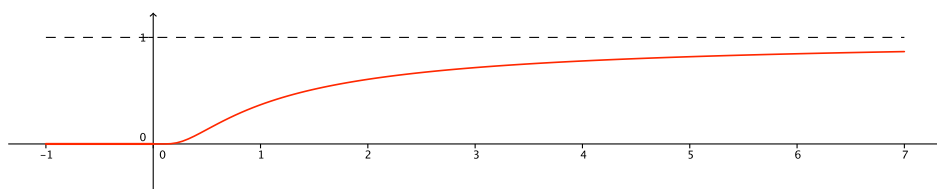
mais  $f$  n'est pas pour autant dérivable en  $x = 0$ . Simplement parce que  $f$  n'est pas continue en  $x = 0$ .

Ⓟ **33.5 Lemme.** La fonction  $J_0 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1[ \subset \mathbf{R}$  définie par

$$J_0(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0 \quad \text{et} \quad J_0(x) = e^{-1/x} \quad \text{si } x > 0$$

est de classe  $C^\infty$ , croissante et vérifie  $\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) = 1$ . En particulier toutes les dérivées de  $J$  en  $x = 0$  existent et sont nulles :

$$\forall k \in \mathbf{N} : J_0^{(k)}(0) = 0 .$$

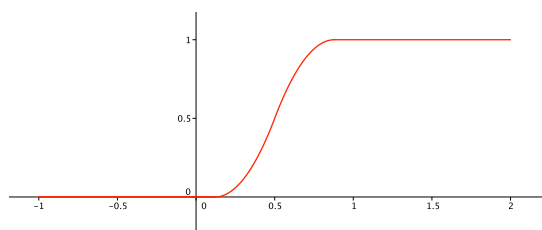


Ⓟ **33.6 Lemme.** Soit  $J_0$  la fonction définie en [33.5]. Alors la fonction  $J_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$J_1(x) = \frac{\int_0^x J_0(t(1-t)) \, dt}{\int_0^1 J_0(t(1-t)) \, dt}$$

est de classe  $C^\infty$ , croissante et a la propriété<sup>1</sup>

$$\forall x \leq 0 : J_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1 : J_1(x) = 1 .$$



1. Pour le dessin on a triché : c'est une approximation par des courbes de degré 2.

### 34. Développements limités en une variable

Les développements limités ont leur utilité dans le calcul des limites, surtout quand on est dans la situation où on veut calculer la limite d'un quotient  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  tandis qu'on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

**Définitions.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ ,  $k \geq 1$ , si  $f$  est  $k$  fois dérivable et que sa  $k$ -ième dérivée  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ . En particulier, si  $a \in I$  est un point du bord gauche, ceci veut dire que  $f$  est  $k$  fois dérivable à droite en  $a$ ; et si  $b$  est un point du bord droite, ceci veut dire que  $f$  est  $k$  fois dérivable à gauche en  $b$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^0$  si elle est (simplement) continue sur  $I$ .

Si  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et  $a \in I$ , on définit  $P_{k,a}(x)$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $k$  de  $f$  au point  $a$  par

$$P_{k,a}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} \cdot f^{(i)}(a) .$$

**Remarque.** On a défini le polynôme de Taylor d'ordre  $k$  sous l'hypothèse que la fonction est de classe  $C^k$ . Mais on peut le définir déjà quand la fonction est  $k$  fois dérivable sans que  $f^{(k)}$  soit continue. Vu que (dans ce texte) on ne se place jamais dans une telle situation, on a préféré mettre la condition plus forte pour avoir partout des conditions de même style.

**34.1 Théorème de base des développements limités.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle, soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $a, x \in I$  deux points arbitraires. Alors on a l'égalité

$$f(b) = P_{k-1,a}(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot f^{(k)}(t) dt .$$

**34.2 Corollaire.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle fermé et borné, soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Alors il existe une constante  $M \in \mathbf{R}$  telle que pour tout  $a, x \in I$  on a l'inégalité

$$|f(x) - P_{k-1,a}(x)| \leq M \cdot |x-a|^k .$$

**Remarque.** On écrit cette propriété aussi comme

$$f(x) = P_{k-1,a}(x) + O((x-a)^k) ,$$

où on prononce la formule  $O((x-a)^k)$  comme "grand oh de  $x-a$  à la puissance  $k$ ." Plus généralement on écrit  $f = g + O(h)$ , qu'on prononce " $f$  est égale à  $g$  plus grand oh de  $h$ ," quand il existe une constante  $M \in \mathbf{R}$  telle que

$$|f(x) - g(x)| \leq M \cdot |h(x)|$$

pour tout  $x$  dans le domaine de définition des trois fonctions.

**34.3 Corollaire.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Alors pour tout  $a \in I$  il existe une fonction continue  $\varepsilon_a : I \rightarrow \mathbf{R}$  telle qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I \quad : \quad f(x) = P_{k,a}(x) + (x - a)^k \cdot \varepsilon_a(x) .$$

**Remarques.** • Pour tout  $x \neq a$  on a évidemment

$$\varepsilon_a(x) = \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{(x - a)^k} ,$$

ce qui est évidemment continue en  $x$  en dehors de  $x = a$ . Le corollaire dit donc simplement que la limite  $x \rightarrow a$  de ce quotient existe et est égale à 0.

• On écrit cette propriété aussi comme

$$f(x) = P_{k,a}(x) + o((x - a)^k) ,$$

où on prononce la formule  $o((x - a)^k)$  comme “petit oh de  $x - a$  à la puissance  $k$ .” Mais il faut bien comprendre qu’il y a un sous-entendu dans l’écriture  $o(f(x))$  (le petit oh de  $f(x)$ ), car sans précision, on ne sait pas en quel point il faut prendre la limite. L’écriture  $(x - a)^k$  suggère (implicitement) que c’est la limite  $x \rightarrow a$ .

Plus généralement on écrit “ $f = g + o(h)$  au voisinage de  $a \in I$ ” si on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0 ,$$

ce qui suppose que la fonction  $h$  ne s’annule pas en dehors de  $a$ .

Si on compare le résultat avec le “grand oh” avec le résultat avec le “petit oh,” on s’aperçoit vite que c’est presque la même chose, à part le degré de différentiabilité nécessaire. Plus précisément, si  $f$  est de classe  $C^{k+1}$  on a

$$|f(x) - P_{k,a}(x)| \leq M \cdot |x - a|^{k+1} .$$

Si on divise par  $(x - a)^k$ , on voit qu’on a l’encadrement

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{(x - a)^k} \right| \leq M \cdot |x - a|$$

et donc par le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{(x - a)^k} = 0 ,$$

ce qui est le résultat

$$f(x) = P_{k,a}(x) + o((x - a)^k) .$$

On obtient donc le résultat avec le “petit oh” à partir du résultat avec le “grand oh,” sauf qu’on a besoin que  $f$  soit de classe  $C^{k+1}$  au lieu de de classe  $C^k$ . Et si on part du résultat avec le “grand oh” et  $f$  de classe  $C^k$ , on obtient l’encadrement

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - P_{k-1,a}(x)}{(x - a)^k} \right| \leq M ,$$

qui n’a pas le même degré pour le polynôme de Taylor, et ne permet pas de conclure sur la limite  $x \rightarrow a$ .

Mais si on revient sur le résultat avec le “petit oh,” on a l’encadrement

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{(x-a)^k} \right| \leq |\varepsilon_a(x)| ,$$

où on sait (seulement) q’on a  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0$ . En particulier, on ne sait pas si le quotient  $\varepsilon_a(x)/(x-a)$  est borné dans un voisinage de  $a$ , ce qui est vrai (presque par définition) dans l’encadrement obtenu à partir du résultat avec le “grand oh.” Cette petite amélioration dans le comportement du quotient

$$\frac{f(x) - P_{k-1,a}(x)}{(x-a)^k}$$

s’obtient donc grâce à la condition plus forte que  $f$  doit être de classe  $C^{k+1}$  au lieu de (seulement) de classe  $C^k$ .

Un exemple simple de ce qui se passe est la fonction  $f(x) = x^{4/3}$  sur  $\mathbf{R}$  qui est de classe  $C^1$ , car  $f'(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$  est une fonction continue. Par contre,  $f'$  n’est pas dérivable en  $x = 0$ , donc  $f$  n’est pas de classe  $C^2$ . Et on a bien

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + x \cdot \varepsilon_0(x) = 0 + x \cdot 0 + x \cdot \sqrt[3]{x} ,$$

car  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$ . Mais on n’a pas

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2) = 0 + x \cdot 0 + O(x^2) ,$$

car il n’existe pas de constante  $M \in \mathbf{R}$  telle que

$$|f(x) - (f(0) + x \cdot f'(0))| = |x^{4/3}| \leq M \cdot x^2 .$$

**34.4 Proposition (unicité du développement).** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle avec  $a \in I$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction et  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ .

- Si on a  $f(x) = P(x) + o((x-a)^k)$  et  $f(x) = Q(x) + o((x-a)^k)$ , alors  $P = Q$ .
- Si on a  $f(x) = P(x) + O((x-a)^{k+1})$  et  $f(x) = Q(x) + O((x-a)^{k+1})$ , alors  $P = Q$ .

**34.5 Corollaire.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle avec  $a \in I$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ .

- Si on a  $f(x) = P(x) + o((x-a)^{k-1})$  où  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k-1$ , alors  $P$  est le polynôme de Taylor d’ordre  $k-1$  de  $f$  au point  $a \in I$ .
- Si on a  $f(x) = P(x) + O((x-a)^k)$  où  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ , alors  $P$  est le polynôme de Taylor d’ordre  $k$  de  $f$  au point  $a \in I$ .

**34.6 Lemme.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un sous-ensemble et  $f, g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$  trois fonctions. Si on a  $f = g + O(h)$ , alors on a aussi  $|f| = |g| + O(h)$ .

**34.7 Lemme.** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et  $f, g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$  trois fonctions. Si on a  $f = g + o(h)$  au voisinage de  $a \in I$ , alors on a aussi  $|f| = |g| + o(h)$  au voisinage de  $a$ .

Ⓟ **34.8 Proposition (dériver et intégrer un “Oh”).** Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle avec  $a \in I$  et soit  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions au moins continues.

- Si on a  $f(x) = g(x) + o((x - a)^k)$ , alors on a

$$\int_a^x f(y) \, dy = \int_a^x g(y) \, dy + o((x - a)^{k+1})$$

et, si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$ ,

$$f'(x) = g'(x) + o((x - a)^{k-1}) \quad .$$

- Si on a  $f(x) = g(x) + O((x - a)^k)$ , alors on a

$$\int_a^x f(y) \, dy = \int_a^x g(y) \, dy + O((x - a)^{k+1})$$

et, si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$ ,

$$f'(x) = g'(x) + O((x - a)^{k-1}) \quad .$$

**Nota Bene.** Les résultats concernant le développement limité d’une fonction (d’une variable) à valeurs dans  $\mathbf{R}$  sont valables, mutatis mutandis, pour des fonctions (d’une variable) à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Il suffit de les appliquer composante par composante.

### 35. Développement limités en plusieurs variables

**35.1 Définition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$ , si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  inclus existent et sont continues sur  $U$ . À noter que pour  $n > 1$  on ne considère que des fonctions de classe  $C^k$  définies sur des ouverts.

Si  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $C^k$  sur  $U$  et  $a \in U$  arbitraire, on définit  $P_{k,a}(x)$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $k$  de  $f$  au point  $a \in U$  par

$$P_{k,a}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n \frac{(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_d} - a_{i_d})}{d!} \cdot \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_d}}(a) .$$

**Des cas particuliers.** Pour bien comprendre le polynôme de Taylor en plusieurs variables, écrivons quelques cas "explicitement." Pour  $k = 0$  on a

$$P_{0,a}(x) = f(a) .$$

Pour  $k = 1$  on a :

$$P_{1,a}(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) .$$

Pour  $k = 2$  il faut rajouter le cas  $d = 2$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{2,a}(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n \frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_i)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(a) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) , \end{aligned}$$

où, pour la deuxième égalité, on a utilisé le théorème de Schwarz qui dit que les dérivées partielles commutent quand elles sont continues.

Pour  $k = 3$  et  $n = 2$  on obtient

$$\begin{aligned} P_{3,a}(x_1, x_2) &= f(a) + (x_1 - a_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (x_1 - a_1)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) + 2(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \right. \\ &\quad \left. + (x_2 - a_2)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(a) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left( (x_1 - a_1)^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_1}(a) + 3(x_1 - a_1)^2 \cdot (x_2 - a_2) \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}(a) \right. \\ &\quad \left. + 3(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial^2 x_2}(a) + (x_2 - a_2)^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_2}(a) \right) . \end{aligned}$$

Si  $f : U \subset \mathbf{R}^n$  est une fonction de classe  $C^k$  et  $a \in U$ , on peut fabriquer une fonction  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  sur un intervalle  $I \subset \mathbf{R}$  contenant 0 de la façon suivante. On prend  $v \in \mathbf{R}^n$  non-nul et on considère la droite  $D$  passant par  $a$  de direction  $v$  :

$$D = \{ a + tv \mid t \in \mathbf{R} \} .$$

Parce que  $U$  est un ouvert, il existe un intervalle  $I \subset \mathbf{R}$  contenant 0 tel qu'on a

$$\{ a + tv \mid t \in I \} \subset U .$$

On peut donc définir la fonction  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$g(t) = f(a + tv) .$$

Évidemment la fonction  $g$  est aussi de classe  $C^k$ . On peut donc parler d'un côté de  $P_{k,a}$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $k$  de  $f$  au point  $a$ , et d'autre côté de  $\overline{P}_{k,0}$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $k$  de  $g$  au point 0.

Ⓟ **35.2 Lemme.** *On a l'égalité  $\overline{P}_{k,0}(t) = P_{k,a}(a + tv)$ .*

Ⓟ **35.3 Corollaire.** *Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$ . Alors pour tout  $a \in U$  il existe une fonction continue  $\varepsilon_a : U \rightarrow \mathbf{R}$  telle qu'on a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in U : f(x) = P_{k,a}(x) + \|x - a\|^k \cdot \varepsilon_a(x) .$$

**Remarque pour le lecteur très attentif.** Dans la preuve de [35.3] on a supposé implicitement que le segment

$$(35.4) \quad \{ a + s(x - a) \mid 0 \leq s \leq 1 \}$$

est inclus dans  $U$ . Mais ceci n'est pas garanti, même si on sait que  $a$  et  $x$  appartiennent à  $U$ . La fonction  $g$  n'est donc pas forcément définie sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour rendre l'argument valable, il suffit de remarquer que  $U$  est un ouvert. Il existe donc  $\delta' > 0$  tel que la boule ouverte

$$\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| < \delta' \}$$

est incluse dans  $U$ . Si on prend donc  $\delta > 0$  défini comme

$$\delta = \min(\delta', \min_{i_1, \dots, i_k} \delta_{i_1 \dots i_k}) ,$$

alors on est sûr que pour  $\|x - a\| < \delta$ , le segment (35.4) est contenu dans  $U$ .

**Remarque.** Comme pour le cas de dimension 1, on écrit la propriété de ce corollaire comme

$$f(x) = P_{k,a}(x) + o(\|x - a\|^k)$$

et les mêmes remarques concernant la prononciation et les sous-entendus s'appliquent.



**35.5 Corollaire.** *Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^k$  et  $K \subset U$  un compact convexe (par exemple une boule fermée) contenu dans  $U$ . Alors il existe une constante  $M \in \mathbf{R}$  telle que pour tout  $x, a \in K$  on a l'inégalité*

$$|f(x) - P_{k-1,a}(x)| \leq M \cdot \|x - a\|^k .$$

**Remarque.** Comme pour le cas de dimension 1, on écrit la propriété de ce corollaire comme

$$f(x) = P_{k-1,a}(x) + O(\|x - a\|^k)$$

et les mêmes remarques concernant la prononciation et la généralisation s'appliquent.

### 36. Être $C^k$ est une propriété locale

Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application continue. Alors il est évident que pour tout sous-ensemble  $V \subset U$  la restriction  $f|_V$  de  $f$  à  $V$  est continue. Par contre, si  $f$  est continue sur  $V_i \subset U$ ,  $i = 1, 2$ , alors il n'est nullement garanti que  $f$  soit continue sur la réunion  $V_1 \cup V_2$ . Il suffit de penser à la fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x < 0 .$$

On a  $\mathbf{R} = V_1 \cup V_2$  avec  $V_1 = ]-\infty, 0[$  et  $V_2 = [0, \infty[$  et la restriction de  $f$  à  $V_i$  est constante (0 sur  $V_1$  et 1 sur  $V_2$ ), donc continue. Par contre,  $f$  n'est pas continue sur son domaine de définition  $\mathbf{R}$ .

Un même phénomène se produit avec la dérivée. La fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = |x|$  est dérivable sur  $[0, \infty[$  avec une dérivée (à droite) en zéro donnée par  $f'(0) = 1$  et elle est également dérivable sur  $]-\infty, 0]$  avec une dérivée (à gauche)  $f'(0) = -1$ . Par contre,  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$  sur  $\mathbf{R}$ .

La conclusion est donc que la continuité ou dérivabilité sur des parties (séparément) ne garantit pas la continuité ou la dérivabilité sur la réunion de ces parties. Le but est de montrer que si on rajoute la condition que les parties soient des ouverts, alors la continuité ou dérivabilité sur chaque partie implique la continuité ou dérivabilité sur la réunion (qui est donc également un ouvert).

**Définition (rappel).** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un sous-ensemble,  $a \in \mathbf{R}^n$  un point d'accumulation de  $U$  (c'est-à-dire  $a$  un point adhérent à  $U \setminus \{a\}$  ou encore  $a \in \overline{U \setminus \{a\}}$ ), soit  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application et  $\ell \in \mathbf{R}^m$ . Alors on dit que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon .$$

Les problèmes signalés ci-dessus proviennent de la condition  $x \in U$ , une condition qui peut exclure des points voisins de  $a$ . Rappelons aussi qu'on a besoin de la condition que  $a$  soit un point d'accumulation de  $U$ , car sans cette condition on n'aura pas unicité de la limite.

**36.1 Lemme.** Soit  $a \in O \subset U \subset \mathbf{R}^n$  avec  $a$  un point d'accumulation de  $O$  (donc de  $U$ ), soit  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application, soit  $g = f|_{O \setminus \{a\}} : O \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}^m$  la restriction de  $f$  à  $O \setminus \{a\}$  et soit  $\ell \in \mathbf{R}^m$ .

- (i) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .
- (ii) Si  $O$  est un ouvert et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

**Exemple.** Soit  $U = \mathbf{R}$ ,  $O = [0, \infty[$ ,  $a = 0$  et soit  $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction  $f(x) = x/|x|$ . Alors avec  $g = f|_{]0, \infty[} : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par  $g(x) = 1$ , on a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ , mais la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  n'existe pas, et en particulier on n'a pas  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . La condition que  $O$  soit un ouvert dans [36.1.ii] n'est donc pas superflue.

- Ⓟ **36.2 Proposition.** *Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application. Alors  $f$  est de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$  sur  $U$  si et seulement si pour tout  $a \in U$  il existe un ouvert  $O \subset \mathbf{R}^n$  tel que  $a \in O \subset U$  et tel que  $f|_O$ , la restriction de  $f$  à  $O$ , est de classe  $C^k$  sur  $O$ .*

**Remarque pour les curieux et les comparateurs.** On a “simplifié” la discussion en ne regardant que des fonctions de classe  $C^k$  (voir [35.1]). Autrement dit, on n’a pas considéré des fonctions qui sont  $k$  fois différentiables sans qu’une telle  $k$ -ième différentielle soit continue. Ceci nous a permis de ne parler que des dérivées partielles sans entrer dans les détails de la notion de différentielle. Par contre, cette restriction n’est pas nécessaire pour le caractère “local” de la différentielle, car la preuve de l’existence d’une différentielle sur  $U$  à partir des différentielles sur des ouverts  $O$  se fait exactement de la même manière.

### 37. Algèbre linéaire et le théorème des fonctions implicites

“Résoudre des équations” est une expression vague, car cela signifie autre chose selon celui qui parle et selon le sujet. En général on entend par cette expression l’idée de trouver une façon d’écrire un ensemble qui est plus simple. Par exemple, résoudre l’équation

$$3x + 2 = 5$$

veut dire qu’on cherche une façon plus simple de décrire l’ensemble

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 = 5\}.$$

Et tout le monde s’accorde que dans ce cas il faut écrire

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 = 5\} = \{1\},$$

ou de dire que la solution est  $x = 1$ .

On peut aussi considérer des équations à paramètre du style : résoudre pour tout valeur du paramètre  $a \in \mathbf{R}$  l’équation

$$3x + 2 = a - 1.$$

Et dans ce cas, il faut écrire

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 = a - 1\} = \{\frac{1}{3}a - 1\}.$$

Mais comment faut-il interpréter la demande de résoudre l’équation  $3x + 2 = a - 1$  quand on ne dit pas que  $a$  est un paramètre ? Il y a donc deux variables et l’équation décrit l’ensemble

$$\{(x, a) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + 2 = a - 1\}.$$

Si on décide de traiter quand même  $a$  comme une sorte de paramètre, on aura tendance à écrire

$$\{(x, a) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + 2 = a - 1\} = \{(\frac{1}{3}a - 1, a) \mid a \in \mathbf{R}\},$$

car de cette façon on voit directement les solution en  $x$  quand on précise le paramètre  $a$ . Par contre, si on décide de traiter le  $x$  comme paramètre et qu’il faut “résoudre” la variable  $a$ , on aura tendance à écrire

$$\{(x, a) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + 2 = a - 1\} = \{(x, 3x + 3) \mid x \in \mathbf{R}\},$$

pour qu’on voit clairement les solution en  $a$  quand on a donné la valeur de  $x$ .

Une autre façon d’exprimer l’idée qu’une des deux variables doit être considéré comme un paramètre est de demander : “résoudre  $x$  en fonction de  $a$ ” (ce qui implique qu’on traite  $a$  comme paramètre) ou “résoudre  $a$  en fonction de  $x$ .” Dans ce style on pourrait donner l’équation

$$2x - 3y + 4z = 5$$

et demander de résoudre  $x$  et  $z$  en fonction de  $y$ . Le problème avec cette question est que ce n’est pas possible : si on connaît la valeur de  $y$  (considéré comme paramètre), il n’y a pas une solution unique pour  $x$  et  $z$ . Ce n’est qu’une seule équation, et avec une seule équation on ne peut résoudre qu’une seule variable. Par contre, la question de simplifier la description de l’ensemble des solution a bien un sens et donne (entre autres possibilités) :

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 5\} &= \{(\frac{1}{2}(3y - 4z + 5), y, z) \mid y, z \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(x, \frac{1}{3}(2x + 4z - 5), z) \mid x, z \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(x, y, \frac{1}{4}(3y - 2x + 5)) \mid x, y \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

La première peut être décrite comme “résoudre  $x$  en fonction de  $y$  et  $z$ ,” la deuxième comme “résoudre  $y$  en fonction de  $x$  et  $z$ ” et la troisième comme “résoudre  $z$  en fonction de  $x$  et  $y$ .”

Regardons maintenant une situation un tout petit peu plus compliquée en posant le système d'équations

$$x + y + z + t = 5$$

$$x + 2y + 3z + 4t = 2$$

ce qu'on peut écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux équations, donc on peut en toute légitimité espérer qu'on peut résoudre deux variables en fonction des deux autres. Si on demande de résoudre  $x$  et  $y$  en fonction de  $z$  et  $t$ , on réécrit ces deux équations sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - z - t \\ 2 - 3z - 4t \end{pmatrix}$$

et on constate qu'on peut effectivement résoudre ces équations, car la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible. On obtient  $x$  et  $y$  en fonction de  $z$  et  $t$  comme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 - z - t \\ 2 - 3z - 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + z + 2t \\ -3 - 2z - 3t \end{pmatrix}.$$

Et si on veut résoudre  $y$  et  $t$  en fonction de  $x$  et  $z$ , on réécrit ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x - z \\ 2 - x - 3z \end{pmatrix}$$

et de nouveau on constate qu'on peut effectivement résoudre ce système.

Que la situation n'est pas toujours aussi sympathique se voit dans l'exemple des équations

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si ici on demande de résoudre  $x$  et  $y$  en fonction de  $z$  et  $t$ , on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2z - 2t \\ 2 - 2z - 4t \end{pmatrix},$$

ce qui est résoluble et donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 - 2z - 2t \\ 2 - 2z - 4t \end{pmatrix}.$$

Par contre, si on demande de résoudre  $y$  et  $t$  en fonction de  $x$  et  $z$ , on tombe sur le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x - 2z \\ 2 - x - 2z \end{pmatrix}.$$

qui n'a pas de solution unique, car la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible. Pour ce système de deux équations en quatre variables on ne peut donc pas choisir librement quels deux variables on veut résoudre en fonction des deux autres.

Pour mieux cerner le problème on introduit le vecteur  $b$  et on va écrire la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  sous forme de quatre vecteurs  $A = (v_x, v_y, v_z, v_t)$  définis comme

$$v_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et on réécrit le système des équations sous la forme

$$v_x \cdot x + v_y \cdot y + v_z \cdot z + v_t \cdot t = b \quad .$$

Avec cette écriture on constate qu'on peut résoudre  $x$  et  $y$  en fonction de  $z$  et  $t$  parce que la matrice carré (de taille  $2 \times 2$ ) formée des deux vecteurs  $v_x$  et  $v_y$  est inversible. Et on ne peut pas résoudre  $y$  et  $t$  en fonction de  $x$  et  $z$ , car la matrice carré formée des deux vecteurs  $v_y$  et  $v_t$  n'est pas inversible.

Passons à la situation générale : on considère un système de  $k$  équations en  $m$  variables  $x_1, \dots, x_m$  écrits sous forme vectorielle comme

$$v_1 \cdot x_1 + \dots + v_m \cdot x_m = b \quad ,$$

où  $v_1, \dots, v_m, b$  sont des vecteurs dans  $\mathbf{R}^k$ . S'il y a plus d'équations que de variables, il y a peu d'espoir de pouvoir résoudre quoi que ce soit. On suppose donc qu'il y a plus de variables que d'équations :  $m \geq k$  et on pose la question si on peut résoudre  $k$  parmi les  $m$  variables en fonction des variables qui restent. Plus précisément, on choisit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$  et on demande si on peut résoudre les variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  en fonction des autres. La réponse est que c'est possible si et seulement si la matrice carré (de taille  $k \times k$ ) formée des  $k$  vecteurs  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  est inversible. L'argument est simple : on définit  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$  et son complémentaire  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$  et on réécrit le système des équations sous la forme

$$(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \cdot \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix} = \sum_{i \in I} v_i \cdot x_i = b - \sum_{i \in J} v_i \cdot x_i \quad .$$

Ce système a une solution unique si et seulement si la matrice (de taille  $k \times k$ )  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  est inversible.

Après la situation linéaire, on considère la situation générale : on se donne un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^m$ , une application  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$  et un vecteur  $b \in \mathbf{R}^k$  et on demande si, dans le système de  $k$  équations

$$f(x_1, \dots, x_m) = b \quad ,$$

on peut résoudre  $k$  variables en fonction des autres. Pour que la question a un sens, il faut évidemment qu'il y a plus variables que d'équations :  $m \geq k$ . Mais même avec cette hypothèse, on ne peut pas dire grand chose dans cette situation très générale. Si on pense au cas  $k = 1$  et  $m = 2$  avec l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad ,$$

il est clair qu'il n'y a pas du tout des solutions (réelles). Pour s'assurer qu'il y a au moins **une** solution, on prend  $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$  et on regarde le système d'équations

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(a_1, \dots, a_m) \quad .$$

La question reste la même : peut-on résoudre  $k$  variables en fonction des autres. Sauf qu'ici on est sûr qu'il y a au moins une solution :  $x = a$ . Mais le problème reste aussi le même : on n'a aucune idée si on peut écrire  $k$  variables en fonction des autres, surtout parce qu'on ne sait rien sur la fonction  $f$ .

Pour s'approcher de la situation linéaire, on fait (donc) un développement limité à l'ordre 1 autour de  $a$  et on écrit approximativement (en négligeant les ordres supérieurs)

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(x_1, \dots, x_m) \approx f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(a) \cdot (x_i - a_i) ,$$

ce qui se réduit aux équations linéaires

$$\sum_{i=1}^m (\partial_i f)(a) \cdot (x_i - a_i) \approx 0 .$$

Et pour ce système on connaît la réponse : on peut résoudre  $k$  variables en fonction des autres si et seulement si la matrice carrée formée des  $k$  vecteurs correspondants est inversible. Plus précisément : on peut résoudre  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  en fonction des autres si et seulement si la matrice de taille  $k \times k$

$$\left( (\partial_{i_1} f)(a) \dots (\partial_{i_k} f)(a) \right)$$

est inversible. Et si on note, comme avant,  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  et son complémentaire  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ , le système d'équations s'écrit comme

$$\left( (\partial_{i_1} f)(a) \dots (\partial_{i_k} f)(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} - a_{i_k} \end{pmatrix} \approx - \sum_{i \in J} (\partial_i f)(a) \cdot (x_i - a_i)$$

dont les solutions approximatives sont données par

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} - a_{i_k} \end{pmatrix} \approx - \left( (\partial_{i_1} f)(a) \dots (\partial_{i_k} f)(a) \right)^{-1} \cdot \sum_{i \in J} (\partial_i f)(a) \cdot (x_i - a_i)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_k} \end{pmatrix} - \left( (\partial_{i_1} f)(a) \dots (\partial_{i_k} f)(a) \right)^{-1} \cdot \sum_{i \in J} (\partial_i f)(a) \cdot (x_i - a_i) ,$$

ce qui donne une expression explicite approximative pour les  $x_i$  avec  $i \in I$  en fonction des  $x_i$  avec  $i \in J$ . Mais ce n'est qu'une solution approximative qu'on a fait sous l'hypothèse que les ordres supérieurs sont négligeables. Cette solution ne sera qu'une (bonne?) approximation que si les  $x_i - a_i$  seront petits.

Le théorème des fonctions implicites globalise nos calculs approximatifs dans un (petit) voisinage de  $a \in U$  en disant que si une certaine sous-matrice carrée de la matrice Jacobienne de  $f$  au point  $a$  est inversible (celui correspondant aux  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ ), alors on peut résoudre les variables correspondants en fonction des autres d'une façon dérivable, à condition qu'on ne s'éloigne pas trop du point  $a$ .

**37.1 Théorème des fonctions implicites.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^m$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ ,  $k < m$  une application de classe  $C^\ell$ , soit  $a \in U$  arbitraire et soit  $1 \leq i_1 < \dots <$

$i_k \leq m$  un choix de  $k$  indices parmi  $m$ . Notons finalement  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  et son complémentaire  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ .

Si la matrice de taille  $k \times k$

$$\left( (\partial_{i_1} f)(a) \dots (\partial_{i_k} f)(a) \right)$$

est inversible, alors il existe un voisinage ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^k$  de  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = (a_i)_{i \in I}$ , un voisinage ouvert  $V_2 \subset \mathbf{R}^{m-k}$  de  $(a_i)_{i \in J}$  et une fonction  $g : V_2 \rightarrow V_1$  de classe  $C^\ell$  vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$  : si  $(x_i)_{i \in I}$  appartient à  $V_1$  et si  $(x_i)_{i \in J}$  appartient à  $V_2$ , alors  $(x_1, \dots, x_m)$  appartient à  $U$  ;
- pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$  tel que  $(x_i)_{i \in I}$  appartient à  $V_1$  et tel que  $(x_i)_{i \in J}$  appartient à  $V_2$ , on a l'équivalence

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(a) \iff (x_i)_{i \in I} = g((x_i)_{i \in J}) .$$

En plus, la matrice Jacobienne de  $g$  au point  $(a_i)_{i \in J}$  est donnée par

$$\left( (\partial_i g)((a_j)_{j \in J}) \right)_{i \in J} = - \left( ((\partial_i f)(a))_{i \in I} \right)^{-1} \cdot ((\partial_i f)(a))_{i \in J} .$$

## DESSIN

**Remarque.** La forme qu'on a donné ici au théorème des fonctions implicites n'est pas la forme habituelle, malgré le fait que la forme donnée ici est mieux adaptée aux applications. Dans la forme habituelle on écrit explicitement  $m = n + k$  avec  $n \geq 1$ , on suppose qu'on prend le choix  $I = \{i_1, \dots, i_k\} = \{n+1, \dots, n+k\}$  (c'est-à-dire qu'on prend les  $k$  dernières variables qu'on veut résoudre en fonction des  $n$  premiers).

En plus, on sépare les  $n$  premières variables des  $k$  dernières en écrivant  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$  avec (donc)  $x \in \mathbf{R}^n$  et  $y \in \mathbf{R}^k$ , là où ci-dessus on a écrit simplement  $(x_1, \dots, x_m)$ . Dans le même esprit on écrit le point  $(a_1, \dots, a_m)$  sous la forme  $(a, b)$  avec  $a \in \mathbf{R}^n$  et  $b \in \mathbf{R}^k$ . Avec ces hypothèses, le théorème des fonctions implicites s'énonce comme suit.

Si la matrice Jacobienne  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  (de taille  $k \times k$ ) est inversible, alors il existe deux voisinages  $V_1 \subset \mathbf{R}^k$  de  $b$  et  $V_2 \subset \mathbf{R}^n$  de  $a$  et une application  $g : V_2 \rightarrow V_1$  de classe  $C^\ell$  tels que

- $V_2 \times V_1 \subset U$  ;
- $\forall x \in V_2 \forall y \in V_1 : f(x, y) = f(a, b) \iff y = g(x)$ .

L'avantage de cette formulation est qu'on n'a pas besoin de se fatiguer avec une suite arbitraire d'indices  $i_1, \dots, i_k$  et qu'on peut formuler la première propriété simplement comme l'inclusion  $V_2 \times V_1 \subset U$ , au lieu de parler des points et d'extraire un certain nombre de coordonnées pour en former un sous-système de variables.

Le désavantage est que dans la pratique la fonction  $f$  n'est en général pas définie sur un gentil produit du type  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$  déjà scindé en deux et qu'on ne sait pas quelle sous-matrice de taille  $k \times k$  de la matrice Jacobienne est inversible. La "solution" de ce désavantage est simplement de changer l'ordre des coordonnées si nécessaire et d'appliquer le théorème sous sa forme habituelle. Mais si on veut faire cela d'une façon rigoureuse, il faut quand même introduire une suite d'indices  $i_1, \dots, i_k$  et en plus, on se perd vite dans les dérivées partielles concernées.



- Ⓟ **37.2 Théorème d'inversion locale.** Soit  $O \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $F : O \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $p \in O$  tel que la matrice Jacobienne  $\text{Jac}(F)(p)$  de  $F$  en  $a$  est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert  $V_1 \subset O$  de  $p$  et un ouvert  $V_2 \subset \mathbf{R}^n$  tels que  $F : V_1 \rightarrow V_2$  est bijective et  $F^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  aussi de classe  $C^k$ .
- Ⓟ **37.3 Corollaire.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$  dont la matrice Jacobienne est partout inversible. Alors  $V = f(U)$  est un ouvert et si  $f$  est en plus injective, alors  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est aussi de classe  $C^k$ .

### 38. Équations différentielles ordinaires

**Définition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application et soit  $p \in U$  un point arbitraire. Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle,  $t_o \in I$  un point arbitraire et  $\gamma : I \rightarrow U$  une application dérivable. Si  $I$  contient des points de bord (au plus deux), il faut interpréter la dérivée comme la dérivée à gauche/droite. On dit que  $\gamma$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  si elle vérifie la condition

$$\forall t \in I : \gamma'(t) = f(\gamma(t)) .$$

On dit que  $\gamma$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  avec condition initiale  $p$  à temps  $t = t_o$  si elle est solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  et vérifie en plus la condition

$$\gamma(t_o) = p .$$

#### DESSIN

**38.1 Théorème (rappel).** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $p \in U$  un point arbitraire. Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Il existe  $\varepsilon > 0$  et une application de classe  $C^{k+1}$   $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow U$  tels que  $\gamma$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  avec condition initiale  $p$  à temps  $t = 0$ . Autrement dit :

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ : \gamma'(t) = f(\gamma(t)) .$$

- (ii) Pour tout intervalle  $I$  contenant 0 (ouvert ou non) et toute application dérivable  $\hat{\gamma} : I \rightarrow U$  qui est solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  avec condition initiale  $p$  à temps  $t = 0$  on a l'égalité  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in I \cap ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

**38.2 Corollaire.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow U$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow U$  deux solutions de l'équation différentielle  $y' = f(y)$ . S'il existe  $t_o \in I$  tel que  $\gamma_1(t_o) = \gamma_2(t_o)$ , alors

$$\forall t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)$$

et l'application  $\gamma_3 : I_3 = I_1 \cup I_2 \rightarrow U$  définie par

$$\gamma_3(t) = \gamma_1(t) \text{ si } t \in I_1 \quad \text{et} \quad \gamma_3(t) = \gamma_2(t) \text{ si } t \in I_2$$

est aussi une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$ .

**38.3 Corollaire.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit, pour tout  $j \in J$  l'application  $\gamma_j : I_j \rightarrow U$ ,  $j \in J$  une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  (autrement dit, on a une famille de solutions indexée par l'ensemble  $J$ ). S'il existe  $t_o \in \bigcap_{j \in J} I_j$  vérifiant

$$\forall j, k \in J : \gamma_j(t_o) = \gamma_k(t_o) ,$$

alors l'application  $\gamma : \bigcup_{j \in J} I_j \rightarrow U$  définie par

$$\gamma(t) = \gamma_j(t) \text{ si } t \in I_j$$

est aussi une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$ .

**Définition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $p \in U$ . Alors on définit l'ensemble  $\mathcal{S}$  comme l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  avec condition initiale  $p$  à temps  $t = 0$  :

$$\mathcal{S} = \{ \gamma : I \rightarrow U \mid 0 \in I, \gamma(0) = p, \forall t \in I : \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \} .$$

Selon [38.1] cet ensemble n'est pas vide. Si on considère  $\mathcal{S}$  comme un ensemble abstrait, on peut dire que pour tout  $j \in \mathcal{S}$  on a une solution  $\gamma_j : I_j \rightarrow U$  de l'équation différentielle  $y' = f(y)$ . Autrement dit, on a une famille de solutions qui en plus vérifie la condition de [38.3] avec  $t_o = 0$ . Il existe donc une solution  $\gamma_p$  de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  qui est définie sur la réunion  $I_p = \cup_{j \in \mathcal{S}} I_j$  et qui vérifie la condition  $\gamma_p(0) = p \in U$ . Cette solution est appelée *la solution maximale (de l'équation différentielle  $y' = f(y)$ ) passant par  $p \in U$* . La justification du nom "solution maximale" sera donné dans [38.4].

**38.4 Lemme.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $p \in U$ . Si  $\gamma_p : I_p \rightarrow U$  est la solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  passant par  $p$  et si  $\gamma : I \rightarrow U$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  vérifiant  $0 \in I$  et  $\gamma(0) = p$ , alors  $I \subset I_p$  et  $\gamma = \gamma_p|_I$ .

**38.5 Proposition.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert, soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , soit  $p \in U$  et soit  $\gamma_p : I_p \rightarrow U$  la solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  passant par  $p$ . Si on écrit  $I_p = ]a, b[$ , alors au moins une des deux possibilités suivantes (concernant  $\lim_{t \uparrow b} \gamma_p(t)$ ) est vraie :

- il existe une suite  $t_i \in I$  vérifiant  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = b$  telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\gamma_p(t_i)\| = \infty ;$$

- il existe  $\ell \in \mathbf{R}^n \setminus U$  et une suite  $t_i \in I$  vérifiant  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = b$  telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_p(t_i) = \ell .$$

Un résultat analogue est vrai pour le bord gauche de  $I$ . À noter qu'il est possible que les bords sont  $\pm\infty$  : on peut avoir  $a = -\infty$  et/ou  $b = \infty$ .



## Les preuves

### Les preuves de §1

**Preuve de [1.2].** Si  $x_{\parallel}$  est parallèle à  $y$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $x_{\parallel} = \lambda y$ . On a donc

$$\langle x, y \rangle = \langle \lambda y + x_{\perp}, y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle + \langle x_{\perp}, y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle$$

et donc

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \equiv \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} .$$

Il s'ensuit que  $x_{\parallel} = \lambda y$  est complètement déterminé par  $x$  et  $y$ . Et donc  $x_{\perp} = x - x_{\parallel}$  aussi.

Pour les normes au carré, on calcule d'abord  $\|x_{\parallel}\|^2$  :

$$\|x_{\parallel}\|^2 = \langle x_{\parallel}, x_{\parallel} \rangle = \left\langle \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \cdot y, \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \cdot y \right\rangle = \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \cdot \langle y, y \rangle = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} .$$

Pour  $\|x_{\perp}\|^2$  on calcule :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x_{\parallel} + x_{\perp}, x_{\parallel} + x_{\perp} \rangle = \langle x_{\parallel}, x_{\parallel} \rangle + 2 \langle x_{\parallel}, x_{\perp} \rangle + \langle x_{\perp}, x_{\perp} \rangle \\ &= \langle x_{\parallel}, x_{\parallel} \rangle + \langle x_{\perp}, x_{\perp} \rangle , \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $x_{\parallel}$  et  $x_{\perp}$  sont orthogonaux par définition. On a donc

$$\|x_{\perp}\|^2 = \|x\|^2 - \|x_{\parallel}\|^2 . \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [1.3].** Si  $y = 0$  on a égalité et  $x$  et  $y$  sont (trivialement) colinéaires. Supposons donc qu'on a  $y \neq 0$ . Selon [1.2] on a donc

$$0 \leq \|x_{\perp}\|^2 = \frac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}$$

et donc  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$  comme voulu. Et on a égalité si et seulement si  $\|x_{\perp}\| = 0$ , ce qui est le cas si et seulement si  $x_{\perp} = 0$ , ce qui veut dire que  $x = x_{\parallel}$ , c'est-à-dire que  $x$  est colinéaire avec  $y$ .  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §2

**Preuve de [2.2].** Soit  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , alors par linéarité de  $f$  on a, pour tout  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{R}^n$ , les égalités

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \cdot e_i \quad \text{et} \quad f(w) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(e_i) .$$

Il s'ensuit que si on pose  $v = \sum_{i=1}^n f(e_i) \cdot e_i = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ , alors on a

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n f(e_i) \cdot w_i = f(w)$$

comme voulu. CQFD

**Preuve de [2.3].** • (i) : Si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont dépendants, alors  $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$  pour tout  $v_n \in \mathbf{R}^n$  et donc, par unicité de  $w$ , on doit avoir  $w = 0$ .

• (ii) : Pour tout  $v_n$  appartenant au sous-espace engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_{n-1}$  on a  $\langle w, v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_n) = 0$ , ce qui veut dire que  $w$  est orthogonal à ce sous-espace. Et parce que  $0 < \langle w, w \rangle = \det(v_1, \dots, w)$ , il s'ensuit que  $v_1, \dots, v_{n-1}, w$  est une base orientée directe [2.1]. CQFD

**Preuve de [2.4].** On écrit  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ ,  $w = (w_1, w_2)$  et la condition  $\det(u, v) = \langle w, v \rangle$  se traduit par

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = w_1 v_1 + w_2 v_2 .$$

Pour que cela soit vrai pour tout  $v_1, v_2 \in \mathbf{R}$ , il faut et il suffit qu'on ait  $w_1 = -u_2$  et  $w_2 = u_1$ , autrement dit :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R_{\pi/2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} . \quad \text{CQFD}$$

**Preuve de [2.6].** Si on note  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$  l'unique vecteur tel que

$$\langle x, w \rangle = \det(u, v, w) ,$$

alors, en utilisant les composantes des vecteurs  $u, v$  et  $w$ , cette égalité s'écrit comme

$$\begin{aligned} x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = \\ u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_3 v_2 w_1 , \end{aligned}$$

d'où on déduit directement les égalités

$$x_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 , \quad x_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 \quad \text{et} \quad x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_3 .$$

La preuve des propriétés du produit vectoriel peut se faire par un calcul explicite en coordonnées, mais dans la plupart des cas on peut aussi utiliser la définition et ainsi éviter ces calculs. Ainsi, pour la propriété (i) il suffit de remarquer que le

produit scalaire est bilinéaire et que le déterminant est tri-linéaire. L'unicité du produit vectoriel fait le reste. Par exemple :

$$\begin{aligned}\langle (u_1 + \lambda u_2) \wedge v, w \rangle &= \det(u_1 + \lambda u_2, v, w) = \det(u_1, v, w) + \lambda \det(u_2, v, w) \\ &= \langle u_1 \wedge v, w \rangle + \lambda \langle u_2 \wedge v, w \rangle = \langle (u_1 \wedge v) + \lambda(u_2 \wedge v), w \rangle .\end{aligned}$$

Pour la propriété (ii) il suffit de faire le calcul

$$\langle -u \wedge v, w \rangle = \langle u \wedge v, -w \rangle = \det u, v, -w = \det(v, u, w)$$

et d'invoquer l'unicité du produit vectoriel pour obtenir l'égalité  $-u \wedge v = v \wedge u$ .

Pour la propriété (iii) il suffit de remarquer qu'on a

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0 = \det(u, v, v) = \langle u \wedge v, v \rangle .$$

Pour la propriété (iv) on commence avec la remarque que si  $u$  et  $v$  sont dépendants, alors pour tout  $w \in \mathbf{R}^3$  on a

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w) = 0 ,$$

car les trois colonnes dans le déterminant sont dépendantes. Et donc, toujours par l'unicité du produit vectoriel, on a  $u \wedge v = 0$ . Par contre, si  $u$  et  $v$  sont indépendants, on peut invoquer le théorème de la base incomplète pour obtenir un troisième vecteur  $w \in \mathbf{R}^3$  tel que le triplet  $u, v, w$  forme une base de  $\mathbf{R}^3$ . On a donc

$$0 \neq \det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle$$

et donc on ne peut pas avoir  $u \wedge v = 0$ .

Pour la propriété (v) on calcule

$$\det(u, v, u \wedge v) = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0 .$$

La propriété (vi) se fait par un calcul direct qu'on laisse aux bons soins du lecteur. La propriété (vii) est une simple réécriture de la propriété (vi), ce qui est aussi le cas pour la propriété (viii), une fois qu'on a fait la remarque que l'aire d'un parallélogramme est le produit de la base fois la hauteur, que la base est la longueur d'un des deux vecteurs et que la hauteur est la longueur de l'autre vecteur multipliée par le sinus de l'angle entre les deux vecteurs.

La première égalité de la propriété (ix) se fait par un calcul direct qu'on laisse aux bons soins du lecteur. La deuxième égalité est une simple application des propriétés (ii) et (i) :

$$(w \wedge v) \wedge u = -(u \wedge (w \wedge v)) = u \wedge (-(w \wedge v)) = u \wedge (v \wedge w) . \quad \boxed{CQFD}$$

### Les preuves de §3

**Preuve de [3.3].** • On peut écrire le produit scalaire canonique  $\langle v, w \rangle$  à l'aide de l'opération transposée comme

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i = {}^t v \cdot w = {}^t v \cdot \text{Id}_n \cdot w ,$$

où on voit  $v$  et  $w$  comme des vecteurs colonnes, ou plutôt comme des matrices de taille  $n \times 1$  et (donc)  ${}^t v$  comme une matrice de taille  $1 \times n$  (un vecteur ligne). On a donc l'égalité

$$\langle v, Aw \rangle = {}^t v \cdot Aw = {}^t({}^t A v) \cdot w = \langle {}^t A v, w \rangle .$$

Avec le même argument on peut écrire la condition sur  $A$  d'appartenir à  $O(n)$  comme

$$\forall v, w \in \mathbf{R}^n : {}^t v \cdot w = {}^t(Av) \cdot \text{Id}_n \cdot (Aw) = {}^t v \cdot {}^t A \cdot A \cdot w .$$

Et ceci n'est vrai que si  ${}^t A \cdot A$  est la matrice identité (il suffit de prendre pour  $v$  et  $w$  les vecteurs  $e_i$  et  $e_j$  de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ).

• (iii) On écrit la matrice  $A$  en termes de ses coefficients et on regroupe cela en  $n$  vecteurs colonnes  $v_1, \dots, v_n$  comme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

avec

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} .$$

Dans cette écriture la matrice transposée  ${}^t A$  et le produit  ${}^t A \cdot A$  prennent la forme

$${}^t A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ {}^t v_2 \\ \vdots \\ {}^t v_n \end{pmatrix} , \quad {}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \cdot v_1 & {}^t v_1 \cdot v_2 & \dots & {}^t v_1 \cdot v_n \\ {}^t v_2 \cdot v_1 & {}^t v_2 \cdot v_2 & \dots & {}^t v_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t v_n \cdot v_1 & {}^t v_n \cdot v_2 & \dots & {}^t v_n \cdot v_n \end{pmatrix} .$$

Mais  ${}^t v \cdot w = \langle v, w \rangle$ , donc l'égalité  ${}^t A \cdot A = \text{Id}_n$  nous dit qu'on doit avoir les égalités

$$\forall 1 \leq i \leq n : \langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j : \langle v_i, v_j \rangle = 0 .$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice  $A$  forment une base orthonormée de vecteurs. Et réciproquement, si  $v_1, \dots, v_n$  est une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$ , alors la matrice  $A$  formée par les  $n$  colonnes des coefficients des  $v_i$  vérifie la condition  ${}^t A \cdot A = \text{Id}_n$ .

• Si  $A$  appartient à  $O(n)$ , on a donc  ${}^t A \cdot A = \text{Id}_n$ . En prenant le déterminant de cette égalité et en utilisant l'égalité  $\det({}^t A) = \det(A)$ , il s'ensuit qu'on a  $\det(A)^2 = 1$ . Le fait qu'on a aussi  $\det(A) \in \mathbf{R}$  permet de conclure qu'on a  $\det(A) = \pm 1$ .

• La condition  ${}^t A \cdot A = \text{Id}_n$  montre que la matrice  ${}^t A$  est la réciproque de  $A$ . On a donc  $\text{Id}_n = A \cdot A^{-1} = A \cdot {}^t A = {}^t({}^t A) \cdot {}^t A$ , ce qui montre  ${}^t A \in O(n)$ .  $\square$



**Preuve de [3.4].** Il est immédiat que les deux colonnes de la matrice  $R_\theta$  forment une base orthonormée de  $\mathbf{R}^2$ , donc par [3.3.iii] c'est une élément de  $\text{SO}(2)$ .  $\boxed{\text{CQFD}}$

**Preuve de [3.5].** Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter les vecteurs indépendants  $v_1, \dots, v_k$  en une base  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathbf{R}^n$ . En appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on peut supposer que cette base est orthonormée. De la même manière on peut compléter les vecteurs  $w_1, \dots, w_k$  en une base orthonormée  $w_1, \dots, w_n$  de  $\mathbf{R}^n$ .

Si on note  $V$  la matrice formée par les colonnes des vecteurs  $v_i$  et si on note  $W$  la matrice formée par les colonnes des vecteurs  $w_i$ , alors  $V, W \in O(n)$ . On définit maintenant la matrice  $A$  par  $A = W \cdot {}^tV$  et on calcule :

$${}^tA \cdot A = {}^t(W \cdot {}^tV) \cdot (W \cdot {}^tV) = V \cdot {}^tW \cdot W \cdot {}^tV \stackrel{W \in O(n)}{=} V \cdot \text{Id}_n \cdot {}^tV \stackrel{[3.3]}{=} \text{Id}_n .$$

La matrice  $A$  appartient donc à  $O(n)$ . Mais on a aussi

$$A \cdot V = W \cdot {}^tV \cdot V \stackrel{V \in O(n)}{=} W .$$

Autrement dit, on a l'égalité

$$(w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) = A \cdot (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) .$$

Mais cela nous dit qu'on a les égalités  $w_i = Av_i$ . Dans le cas  $k = n$  on aura donc montré l'existence. Mais l'unicité de  $A$  est une conséquence immédiate du fait qu'une application linéaire est déterminée d'une façon unique par les images des vecteurs d'une base.

Considérons donc le cas  $k < n$ . Si  $\det(A) = 1$  on aura montré l'existence dans ces cas. Et si  $\det(A) = -1$ , on raisonne comme suit. En remplaçant  $v_n$  par  $-v_n$ , on aura toujours une base orthonormée, mais (parce qu'on a changé une colonne de signe) on aura changé la valeur de  $\det(V)$  de signe. La matrice  $A$  changera donc aussi de signe. Ceci montre qu'en changeant le signe de  $v_n$  si nécessaire, on peut supposer qu'on a bien  $\det(A) = 1$ , c'est-à-dire qu'on a bien  $A \in \text{SO}(n)$ .

Reste à montrer l'unicité dans le cas  $k = n - 1$ . On commence avec la remarque qu'il est facile de montrer que si  $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$  et  $v_1, \dots, v_{n-1}, z_n$  sont deux bases orthonormées, alors  $z_n = \pm v_n$ . On suppose maintenant que  $A_1$  et  $A_2$  sont deux éléments de  $\text{SO}(n)$  qui font l'affaire :  $A_1 v_i = w_i = A_2 v_i$  pour  $i < n$ . Le fait que  $A_1$  et  $A_2$  préservent le produit scalaire implique que les systèmes  $w_1, \dots, w_{n-1}, A_1 v_n$  et  $w_1, \dots, w_{n-1}, A_2 v_n$  sont deux bases orthonormées de  $\mathbf{R}^n$ . Par le même raisonnement on doit donc avoir  $A_2 v_n = \pm A_1 v_n$ . Si on note  $B$  l'application linéaire qui envoie  $w_i$  sur lui-même pour  $i < n$  et  $A_1 v_n$  sur  $A_2 v_n$ , alors on a l'égalité  $A_2 = B \cdot A_1$  (car ces deux applications prennent les mêmes valeurs sur la base  $(v_i)_{i=1}^n$ ). Si on est dans le cas  $A_2 v_n = -A_1 v_n$ , alors  $\det(B) = -1$  (ayant  $n - 1$  valeurs propres 1 et une seule valeur propre  $-1$ ). Et donc on a  $\det(A_2) = \det(B \cdot A_1) = -\det(A_1)$ , ce qui est exclu par le fait que ces deux déterminants sont 1. On a donc  $A_1 v_i = A_2 v_i$  pour tout  $i$ , donc  $A_1 = A_2$ .  $\boxed{\text{CQFD}}$

**Preuve de [3.6].** S'il existe  $A \in O(n)$  et  $b \in \mathbf{R}^n$ , alors un calcul direct donne :

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \left\langle (A(x) + b) - (A(y) + b), (A(x) + b) - (A(y) + b) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle A(x-y), A(x-y) \rangle \stackrel{\text{déf. de } O(n) \text{ [3.1]}}{=} \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \|x-y\|^2 .
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que  $f$  est une isométrie. Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  et définissons  $v_i \in \mathbf{R}^n$  par

$$v_i = f(e_i) - f(0) .$$

On a donc :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\langle v_i, v_j \rangle &= \frac{1}{2} ( \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_j, v_j \rangle - \langle v_i - v_j, v_i - v_j \rangle ) \\
&= \frac{1}{2} ( \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2 ) \\
&= \frac{1}{2} ( \|f(e_i) - f(0)\|^2 + \|f(e_j) - f(0)\|^2 - \|f(e_i) - f(e_j)\|^2 ) \\
&\stackrel{f \text{ isométrie}}{=} \frac{1}{2} ( \|e_i - 0\|^2 + \|e_j - 0\|^2 - \|e_i - e_j\|^2 ) = \langle e_i, e_j \rangle .
\end{aligned}$$

Étant donné que  $e_1, \dots, e_n$  est une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$ , il s'ensuit que  $v_1, \dots, v_n$  l'est aussi. Selon [3.5.iii] il existe donc un (unique)  $A \in O(n)$  tel que  $A(e_i) = v_i$ . (Si  $e_1, \dots, e_n$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , alors les colonnes de la matrice  $A$  seront les vecteurs  $v_i$ .) Maintenant on fait la remarque que pour toute base orthonormée  $b_1, \dots, b_n$  de  $\mathbf{R}^n$  et tout vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$  on a l'égalité

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle \cdot b_i .$$

En utilisant cela, on calcule :

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \sum_{i=1}^n \langle f(x) - f(0), v_i \rangle \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \langle x - 0, e_i \rangle \cdot A(e_i) \\
&= A \left( \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) = A(x) .
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $b = f(0)$  pour obtenir le résultat souhaité.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [3.7].** • (i) : Si on écrit  $u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2)$ , alors l'égalité à montrer est l'égalité "évidente"

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 .$$

• (ii) : On commence à réécrire la condition  $R_\theta(u) = v$  sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta \\ u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} .$$

Si on résout  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  de ces deux équations (en utilisant  $1 = \|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$ ), on trouve directement

$$\sin \theta = u_1v_2 - u_2v_1 = \det(u, v) \quad \text{et} \quad \cos \theta = u_1v_1 + u_2v_2 = \langle u, v \rangle .$$

Selon (i) et le fait que  $u$  et  $v$  sont supposés être unitaires, on a

$$\det(u, v)^2 + \langle u, v \rangle^2 = 1$$

---

1. On applique ici sans le dire la formule qui exprime le produit scalaire en termes de la norme sous la forme  $2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ .

et donc il existe un unique angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  vérifiant ces équations.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [3.9].** Pour commencer, il faut d'abord établir ce que c'est la rotation d'axe  $n$  et d'angle  $\alpha$ . L'idée généralement acceptée est qu'on donne une base orthonormée directe  $n, e_2, e_3$  de  $\mathbf{R}^3$  dont le premier élément est (comme c'est écrit)  $n$ . Et qu'on effectue la rotation  $R_\alpha$  d'angle  $\alpha$  dans le plan engendré par  $e_2$  et  $e_3$ , en laissant la direction  $n$  inchangée.

Trouver une telle base orthonormée n'est pas évident et on ne peut pas donner des vecteurs  $e_2$  et  $e_3$  qui ne dépendent pas du vecteur  $n$ . Il est bien possible de définir de tels vecteurs selon les coefficients de  $n$  (du style : si le premier coefficient n'est pas nul, alors ...), mais le calcul pour trouver la matrice de  $R_{n,\alpha}$  sera un peu pénible. Une approche plus profitable est de calculer directement l'image  $R_{n,\alpha}x$  et d'utiliser une base qui dépend de  $x$ . Pour le faire, on commence avec la décomposition orthogonale de  $x$  par rapport à  $n$  [1.2]. Cette décomposition est donnée par

$$x = x_\perp + x_\parallel \quad \text{avec} \quad x_\parallel = \langle x, n \rangle \cdot n \quad \text{et} \quad x_\perp = x - x_\parallel .$$

Si  $x_\perp = 0$ , alors par définition on aura  $R_{n,\alpha}x = R_{n,\alpha}x_\parallel = x_\parallel = x$ . Dans le cas contraire on peut définir le vecteur unitaire  $e_2 = x_\perp / \|x_\perp\|$ , ainsi que le vecteur  $e_3 = n \wedge e_2$ . Parce que  $n$  et  $x_\perp$  sont orthogonaux, il s'ensuit que  $n, e_2, e_3$  est une base orthonormée directe [2.6]. Et il est immédiate que  $x_\perp$  appartient au plan engendré par  $e_2$  et  $e_3$  et qu'il a le couple  $(\|x_\perp\|, 0)$  comme coordonnées par rapport à cette base. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} R_\alpha(x_\perp) &\cong \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x_\perp\| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \|x_\perp\| \\ \sin \alpha \|x_\perp\| \end{pmatrix} \\ &\cong \cos \alpha \|x_\perp\| e_2 + \sin \alpha \|x_\perp\| n \wedge e_2 = \cos \alpha \cdot x_\perp + \sin \alpha \cdot n \wedge x_\perp . \end{aligned}$$

Avec la définition de  $R_{n,\alpha}$  qui laisse  $x_\parallel$  invariant et qui applique  $R_\alpha$  à  $x_\perp$  dans le plan orthogonal à  $n$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned} R_{n,\alpha}(x) &= x_\parallel + R_\alpha x_\perp = x_\parallel + \cos \alpha x_\perp + \sin \alpha n \wedge x_\perp \\ &= \langle x, n \rangle \cdot n + \cos(\alpha) \cdot (x - \langle x, n \rangle \cdot n) + \sin(\alpha) \cdot n \wedge (x - \langle x, n \rangle \cdot n) \\ &= \cos(\alpha) \cdot x + (1 - \cos(\alpha)) \cdot \langle x, n \rangle \cdot n + \sin(\alpha) \cdot n \wedge x . \end{aligned} \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [3.12].** Comme dit dans l'énoncé, l'axe de rotation est le vecteur unitaire  $n$  donné par

$$n = \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|} .$$

Quant à l'angle  $\alpha$ , c'est l'angle entre les deux vecteurs  $u$  et  $v$ , donc on a les formules

$$\cos(\alpha) \stackrel{[1.5]}{=} \langle u, v \rangle \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) \stackrel{[2.6.vii]}{=} \|u \wedge v\| .$$

Selon (3.10) on a donc

$$\begin{aligned} R(x) &= \cos(\alpha) \cdot x + (1 - \cos(\alpha)) \cdot \langle x, n \rangle \cdot n + \sin(\alpha) \cdot n \wedge x \\ &= \langle u, v \rangle \cdot x + (1 - \langle u, v \rangle) \cdot \frac{\langle x, u \wedge v \rangle}{\|u \wedge v\|^2} \cdot u \wedge v + (u \wedge v) \wedge x . \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que pour deux vecteurs unitaires on a l'égalité  $\|u \wedge v\|^2 = 1 - \langle u, v \rangle^2$  pour obtenir la formule annoncée. Reste à noter que la preuve donnée ci-dessus n'est valable que si  $u \wedge v \neq 0$ , c'est-à-dire  $u \neq \pm v$ . Mais dans le cas  $u = v$ , la formule donnée se réduit à l'identité, ce qui fait l'affaire.  $\square$

**Preuve de [3.13].** On utilise la définition du produit vectoriel et [3.3] pour faire le calcul

$$\begin{aligned} \langle w, (Au) \wedge (Av) \rangle &= \det(w \ Au \ Av) = \det(AA^{-1}w, Au, Av) \\ &= \det(A \cdot (A^{-1}w, u, v)) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}w, u, v) \\ &= \det(A) \cdot \langle A^{-1}w, u \wedge v \rangle = \langle w, \det(A) \cdot {}^t(A^{-1})(u \wedge v) \rangle . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $w \in \mathbf{R}^3$ , il s'ensuit qu'on a l'égalité annoncée.  $\square$

## Les preuves de §4

**Les preuves de §5**

### Les preuves de §6

**Preuve de [6.2].** On considère les subdivisions  $\Delta_m$  de  $[0, 1]$  définies par

$$\Delta_m = \{0, 1\} \cup \{ (k\pi)^{-1} \mid 1 \leq k < m \} .$$

C'est une subdivision avec  $m + 1$  éléments et si on les met dans l'ordre, on a

$$t_0 = 0 \quad , \quad t_i = \frac{1}{(m-i)\pi} \quad \text{pour } 1 \leq i < m \quad , \quad t_m = 1 .$$

Pour les points correspondant dans  $\mathbf{R}^2$  on trouve donc

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) &= (0, 0) \quad , \quad \gamma(t_m) = (1, \cos(1)) \\ \text{et } \gamma(t_i) &= \left( \frac{1}{(m-i)\pi}, \frac{(-1)^{m-i}}{(m-i)\pi} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i < m . \end{aligned}$$

#### DESSIN

Pour  $L(\Delta_m)$  on obtient donc

$$\begin{aligned} L(\Delta_m) &= \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \sum_{i=2}^{m-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_m) - \gamma(t_{m-1})\| \\ &\geq \sum_{i=2}^{m-1} \left\| \left( \frac{1}{(m-i)\pi}, \frac{(-1)^{m-i}}{(m-i)\pi} \right) - \left( \frac{1}{(m-i+1)\pi}, \frac{(-1)^{m-i+1}}{(m-i+1)\pi} \right) \right\| \\ &\geq \sum_{i=2}^{m-1} \left( \frac{1}{(m-i)\pi} + \frac{1}{(m-i+1)\pi} \right) = \sum_{k=1}^{m-2} \left( \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{m-2} \frac{1}{k\pi} . \end{aligned}$$

Il est connu que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  est divergente, ou plus précisément que la suite des sommes partielles tend vers  $\infty$ . Il s'ensuit immédiatement que l'ensemble

$$\{ L(\Delta) \mid \Delta \text{ une subdivision de } [0, 1] \}$$

n'est pas borné pour cette courbe.

CQFD

**Preuve de [6.6].** On commence avec un calcul qui compare l'intégrale de  $\|\gamma'\|$  avec la valeur  $L(\Delta)$  associée à une subdivision. On expliquera les justifications après ce calcul.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - L(\Delta) \right| &\stackrel{(1)}{=} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right| \\ &\stackrel{(2)}{=} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^n (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1})) \cdot e_j \right\| \right| \\ &\stackrel{(3)}{=} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \gamma'_j(\xi_{ij}) \cdot e_j \right\| \right| \\ &\stackrel{(4)}{=} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \gamma'_j(\xi_{ij}) \cdot e_j \right\| \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5)}{\leq} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \gamma'_j(x_i) \cdot e_j \right\| \right| \\
& \quad + \left| \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \left( \left\| \sum_{j=1}^n \gamma'_j(x_i) \cdot e_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^n \gamma'_j(\xi_{ij}) \cdot e_j \right\| \right) \right| \\
& \stackrel{(6)}{\leq} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \|\gamma'(x_i)\| \right| \\
& \quad + \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \left\| \sum_{j=1}^n (\gamma'_j(x_i) - \gamma'_j(\xi_{ij})) \cdot e_j \right\| \\
& \stackrel{(7)}{\leq} \left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \|\gamma'(x_i)\| \right| \\
& \quad + \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(x_i) - \gamma'_j(\xi_{ij})|.
\end{aligned}$$

Voici les explications :

- (1) : Ceci est simplement la définition de  $L(\Delta)$  pour  $\Delta = \{t_i \mid 0 \leq i \leq m\}$ .
- (2) : Ici on écrit simplement un vecteur  $\gamma(t_i)$  ou  $\gamma(t_{i-1})$  comme combinaison linéaire des vecteurs de base de  $\mathbf{R}^n$  :  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  avec comme coefficients  $\gamma_j(t_i)$  ou  $\gamma_j(t_{i-1})$ .
- (3) : Ici on applique le théorème des accroissements finis aux fonctions  $\gamma_j$  (à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ) avec des points  $\xi_{ij} \in ]t_{i-1}, t_i[$  qui dépendent de l'intervalle  $i$  et de la composante  $j$ .
- (4) : Les facteurs  $(t_i - t_{i-1})$  sont positifs et ne dépendent pas de la composante  $j$ , on peut les sortir.
- (5) : Ici on applique simplement l'inégalité  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$  avec  $c = \sum_{j=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \gamma'_j(x_i) \cdot e_j \right\|$ , où les  $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$  sont arbitrairement choisis.
- (6) : Ici on a fait trois choses à la fois : on a remplacé  $\sum_{j=1}^n \gamma'_j(x_i) \cdot e_j$  par  $\gamma'(x_i)$  et (dans la deuxième partie) on a d'abord appliqué l'inégalité triangulaire sous la forme  $|\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) A_i| \leq \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) |A_i|$  (en profitant du fait qu'on a  $t_i - t_{i-1} > 0$ ). Et ensuite on a appliqué l'inégalité  $||v| - |w|| \leq \|v - w\|$ , valable pour toute norme et vecteurs  $v, w$  (c'est une variante de l'inégalité triangulaire sous forme  $\|v\| \leq \|v - w\| + \|w\|$  ainsi que  $\|w\| \leq \|v - w\| + \|v\|$ ).
- (7) : Ici on a simplement appliqué l'inégalité triangulaire, en utilisant que les vecteurs de base sont de longueur 1 :  $\|e_j\| = 1$ .

Si on regarde maintenant bien la dernière ligne, on voit d'abord un terme qui ressemble au terme qui apparaît dans [6.4] et qu'on peut faire plus petit que  $\varepsilon$ . Et le deuxième terme contient un facteur  $|\gamma_j(x_i) - \gamma_j(\xi_{ij})|$ , où  $x_i, \xi_{ij} \in [t_{i-1}, t_i]$ . Selon [6.3], ceci sera plus petit que  $\varepsilon$  dès que  $T(\Delta)$  est plus petit que  $\delta$  (car dans ce cas on aura  $|x_i - \xi_{ij}| \leq t_i - t_{i-1} \leq T(\Delta)$ ).

Avec ces préparations on attaque la preuve proprement dit. Les grandes lignes de cette preuve sont les suivantes. On trouve une constante  $C \in \mathbf{R}_+$  tel que pour  $\varepsilon > 0$



arbitraire et pour toute subdivision arbitraire  $\Delta'$  on aura l'inégalité

$$L(\Delta') \leq \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz + C \cdot \varepsilon .$$

Il s'ensuit immédiatement que  $\gamma$  est rectifiable. Étant donné que  $\varepsilon$  est arbitraire, on doit aussi avoir l'inégalité  $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz$ .

Ensuite on montre qu'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une subdivision  $\Delta$  vérifiant l'inégalité

$$\int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - C \cdot \varepsilon \leq L(\Delta) .$$

Il s'ensuit qu'on doit avoir l'inégalité  $L(\gamma) \geq \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - C \cdot \varepsilon$ . Mais  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, donc on obtient l'inégalité  $L(\gamma) \geq \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz$ . Et donc on doit avoir l'égalité annoncée.

Voici les détails. Pour la première partie on prend donc  $\varepsilon > 0$  et  $\Delta'$  une subdivision. Par [6.4], appliqué à la fonction continue  $\|\gamma'(z)\|$ , on obtient un  $\delta_0 > 0$  (avec certaines propriétés). Et si on applique [6.3] à la fonction continue  $\gamma'_j(t)$  sur l'intervalle fermé et borné  $[a, b]$ , on obtient un  $\delta_j > 0$  (avec d'autres propriétés).

Maintenant on choisit une subdivision  $\tilde{\Delta}$  telle que

$$T(\tilde{\Delta}) < \min_{j=0, \dots, d} (\delta_j) .$$

Avec cela, on définit  $\Delta = \Delta' \cup \tilde{\Delta}$ , la réunion des deux subdivisions. C'est de nouveau une subdivision selon [6.5]. Mais selon ce même lemme (et le choix de  $\tilde{\Delta}$ ) on a aussi l'inégalité  $T(\Delta) < \delta_0$ . On peut donc appliquer [6.4] et obtenir l'inégalité

$$\left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \|\gamma'(x_i)\| \right| < \varepsilon .$$

D'autre part, la subdivision  $\Delta$  vérifie aussi l'inégalité  $T(\Delta) < \delta_j$  (toujours par le choix de  $\tilde{\Delta}$  et [6.5]). On a donc l'inégalité  $|x_i - \xi_{ij}| < \delta_j$  et donc par [6.3] on en déduit l'inégalité

$$|\gamma'_j(x_i) - \gamma'_j(\xi_{ij})| < \varepsilon .$$

On peut donc faire le calcul

$$\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(x_i) - \gamma'_j(\xi_{ij})| < \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon = n \cdot (b - a) \cdot \varepsilon .$$

En résumant, on obtient donc, selon nos calculs au début, l'inégalité suivante :

$$\left| \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - L(\Delta) \right| < \varepsilon + n \cdot (b - a) \cdot \varepsilon = (1 + n \cdot (b - a)) \cdot \varepsilon .$$

Selon [6.5] on aura donc en particulier

$$L(\Delta') \leq L(\Delta) < \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz + (1 + n \cdot (b - a)) \cdot \varepsilon ,$$

ce qui montre la première partie de nos grandes lignes. Mais on a aussi l'inégalité

$$L(\Delta) > \int_a^b \|\gamma'(z)\| \, dz - (1 + n \cdot (b - a)) \cdot \varepsilon ,$$

ce qui montre la deuxième partie de nos grandes lignes.

CQFD

**Preuve de [6.7].** Par définition on a  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$  et donc on a l'égalité

$$\|\gamma_2'(t)\| = \|\gamma_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = |\varphi'(t)| \cdot \|\gamma_1'(\varphi(t))\| .$$

Par [6.6] on a donc

$$L_{[c,d]}(\gamma_2) = \int_c^d \|\gamma_2'(t)\| \, dt = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| \, dt .$$

Ceci sent le théorème de changement de variables, sauf qu'on a la valeur absolue de  $\varphi'$ . Pour montrer que c'est bien cela qu'il nous faut, on fait appel à [33.2]. L'application  $\varphi : [c, d] \rightarrow I_1$  est continue. L'image de l'intervalle fermé et borné  $[c, d]$  est donc bien un intervalle fermé et borné qu'on peut noter  $[a, b]$ . Mais  $\varphi$  est aussi injective (car bijective entre  $I_2$  et  $I_1$ ), donc elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Sa dérivée est donc soit positive, soit négative. Dans le premier cas on a  $a = \varphi(c)$  et  $b = \varphi(d)$ , tandis que dans le deuxième cas on a  $a = \varphi(d)$  et  $b = \varphi(c)$ . Dans le premier cas on peut donc faire le calcul (avec le théorème de changement de variables)

$$\begin{aligned} L_{[c,d]}(\gamma_2) &= \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| \, dt = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t) \, dt \\ &\stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma_1'(s)\| \, ds = \int_a^b \|\gamma_1'(s)\| \, ds = L_{[a,b]}(\gamma_1) . \end{aligned}$$

et dans le deuxième cas on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} L_{[c,d]}(\gamma_2) &= \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| \, dt = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot (-\varphi'(t)) \, dt \\ &= \int_d^c \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t) \, dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} \|\gamma_1'(s)\| \, ds = L_{[a,b]}(\gamma_1) . \end{aligned}$$

Dans les deux cas on a donc bien  $L_{[c,d]}(\gamma_2) = L_{[a,b]}(\gamma_1)$ .

CQFD

### Les preuves de §7

**Preuve de [7.3].** Remarquons d'abord que les deux limites ont un sens car pour  $t \neq t_o$  le dénominateur ne sera pas nul (dans le voisinage de  $]t_o, t_o + \varepsilon[$ ). Supposons maintenant qu'une telle droite  $D$  existe et que cette droite soit déterminée par un point de base  $b \in \mathbf{R}^n$  et un vecteur directeur  $v \in \mathbf{R}^n$  comme

$$D = \{ b + \lambda v \mid \lambda \in \mathbf{R} \} .$$

Avec ces données, la distance  $d(q, D)$  est donnée par la formule [4.14.ii]

$$d(q, D) = \left\| q - b - \frac{\langle q - b, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v \right\| .$$

Vu qu'on a aussi  $\lim_{t \downarrow t_o} \|\gamma(t) - \gamma(t_o)\| = 0$ , notre hypothèse implique qu'on a

$$d(\gamma(t_o), D) = \lim_{t \downarrow t_o} d(\gamma(t), D) = \lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} \cdot \|\gamma(t) - \gamma(t_o)\| = 0 .$$

Ceci n'est possible que si on a

$$\gamma(t_o) - b = \frac{\langle \gamma(t_o) - b, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda_o \in \mathbf{R} : \gamma(t_o) = b + \lambda_o \cdot v .$$

Autrement dit,  $\gamma(t_o)$  appartient à la droite  $D$ . Selon [4.1] la droite  $D$  peut être décrite par le vecteur directeur  $v$  et le point de base  $\gamma(t_o)$ . Dans la suite on remplacera donc  $b$  par  $\gamma(t_o)$  dans la formule pour  $d(q, D)$ .

Pour simplifier la notation on introduit la fonction  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) - \gamma(t_o)$ , qui sera donc non-nulle pour  $t \in ]t_o, t_o + \varepsilon[$ . On aura donc

$$\frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = \frac{\left\| \hat{\gamma}(t) - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v \right\|}{\|\hat{\gamma}(t)\|} \equiv \left\| \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\| .$$

Pour  $t \in ]t_o, t_o + \varepsilon[$  on pose

$$\alpha(t) = \arccos\left(\frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|}\right) ,$$

de sorte que la fonction  $\alpha$  soit continue sur  $]t_o, t_o + \varepsilon[$  et qu'on ait

$$\frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = \left\| \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \cos(\alpha(t)) \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\| .$$

Maintenant on fait la remarque que les vecteurs

$$\frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{v}{\|v\|}$$

sont orthogonaux, ce qui permet d'obtenir les égalités

$$\begin{aligned} 1 &= \left\| \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} + \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 + \left\| \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 \\ &= \frac{d(\gamma(t), D)^2}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2} + \cos^2(\alpha(t)) . \end{aligned}$$

Avec notre hypothèse sur  $D$  on en déduit qu'on doit avoir

$$\lim_{t \downarrow t_o} \cos(\alpha(t))^2 = 1 ,$$

ce qui implique (avec la continuité de  $\alpha$ ) qu'il existe  $\sigma = \pm 1$  tel qu'on ait

$$\lim_{t \downarrow t_o} \cos(\alpha(t)) = \sigma .$$

Pour terminer on considère l'égalité

$$\frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} = \left( \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \hat{\gamma}(t), v \rangle}{\|\hat{\gamma}(t)\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) + \cos(\alpha(t)) \cdot \frac{v}{\|v\|} .$$

Selon l'hypothèse et notre résultat sur  $\alpha$ , on en déduit par passage à la limite qu'on doit avoir

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} = \sigma \cdot \frac{v}{\|v\|} .$$

Ainsi on a montré que, s'il existe une droite  $D$  vérifiant l'hypothèse (7.4), alors (7.5) est vérifié pour  $w = \sigma \cdot v/\|v\| = \pm v/\|v\|$ .

Pour l'implication dans l'autre sens, supposons que (7.5) soit vrai. Alors on définit la droite  $D$  comme la droite décrite par le point de base  $\gamma(t_o)$  et le vecteur directeur  $w$  (qui vérifie  $\|w\| = 1$ ). Avec les mêmes notations que ci-dessus, on peut donc faire le calcul

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), D)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|} = \lim_{t \downarrow t_o} \left\| \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} - \left\langle \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|}, w \right\rangle \cdot w \right\| = \|w - \langle w, w \rangle \cdot w\| = 0 .$$

Ainsi on a montré que la propriété (ii) implique l'existence d'une droite  $D$  vérifiant (7.4).

• Si l'une des deux propriétés est vraie, alors par la première on sait que  $\gamma(t_o)$  est un point de base et que son vecteur directeur normalisé est (au signe près) le vecteur  $w$  de la deuxième propriété. Il s'ensuit que  $D$  est complètement déterminé par  $\gamma(t_o)$  et  $w$ , donc unique (si elle existe). CQFD

**Preuve de [7.6].** Ce résultat est une conséquence directe de la limite d'une composée. On fera la quatrième équivalence, les trois autres étant similaires. Par définition de reparamétrage on a les égalités

$$(39.1) \quad \begin{aligned} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} &= \frac{d(\gamma_1(\varphi(s)), D)}{\|\gamma_1(\varphi(s)) - \gamma_1(\varphi(s_o))\|} \\ \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} &= \frac{d(\gamma_2(\varphi^{-1}(t)), D)}{\|\gamma_2(\varphi^{-1}(t)) - \gamma_2(\varphi^{-1}(t_o))\|} . \end{aligned}$$

Si l'orientation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est opposée, alors  $\varphi' < 0$  partout et on a l'équivalence

$$s > s_o \quad \Longleftrightarrow \quad t = \varphi(s) < \varphi(s_o) = t_o .$$

Par composée de limites on aura donc l'égalité

$$\lim_{t \uparrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), D)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|} = \lim_{s \downarrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), D)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|} ,$$

ce qui donne l'équivalence voulue.

Strictement parlant l'argument qu'on vient de donner est un raccourci (dangereux?), car le résultat sur la composée de limites dit que **si** on a  $\lim_{s \downarrow s_o} \varphi(s) = t_o$  et **si**  $\lim_{t \uparrow t_o} f(t) = \ell$ , alors la limite  $\lim_{s \downarrow s_o} f(\varphi(s))$  existe et est égale à  $\ell$ . On n'aura donc que l'implication dans un sens. Pour l'implication dans l'autre sens il faut utiliser qu'on a  $\lim_{t \uparrow t_o} \varphi^{-1}(t) = s_o$ . On a donc bien besoin des deux égalités dans (39.1).  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [7.9].** Si on définit la fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  par  $f(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2$ , alors on a  $f'(t) = 2 \cdot \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$ . Sachant que  $I$  est un intervalle, donc connexe, il est immédiat que  $\gamma$  est paramétrée à vitesse constante si et seulement si  $f'$  est identiquement nulle.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [7.10].** Il est évident qu'on a  $L'(t) = \|\gamma'_1(t)\| > 0$  (l'hypothèse que la courbe est régulière exclut le cas  $\|\gamma'_1(t)\| = 0$ ), et donc la fonction  $L$  est strictement croissante. En plus, si  $\gamma_1$  est de classe  $C^k$ , alors  $\gamma'_1$  est de classe  $C^{k-1}$ . Le produit scalaire étant une application de classe  $C^\infty$ , il est immédiat que l'application  $t \mapsto \langle \gamma'_1(t), \gamma'_1(t) \rangle$  est de classe  $C^{k-1}$ . Sachant que la fonction "racine carré" est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, \infty[$  et que  $\gamma'_1$  ne s'annule jamais, on en déduit que l'application

$$t \mapsto \|\gamma'_1(t)\| = \sqrt{\langle \gamma'_1(t), \gamma'_1(t) \rangle}$$

est aussi de classe  $C^{k-1}$  et donc  $L$  est de classe  $C^k$  comme primitive de cette fonction. La fonction  $L$  étant strictement croissante,  $I_2 = L(I_1)$  est un intervalle ouvert et  $L : I_1 \rightarrow I_2$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Il s'ensuit que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ L^{-1} : I_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une courbe équivalente à  $\gamma_1$  par reparamétrage (de même classe de dérivabilité que  $\gamma_1$ ). Pour montrer qu'elle est paramétrée par longueur d'arc on calcule sa dérivée :

$$\gamma'_2(s) = (\gamma_1 \circ L^{-1})'(s) = \gamma'_1(L^{-1}(s)) \cdot (L^{-1})'(s) = \frac{\gamma'_1(L^{-1}(s))}{L'(L^{-1}(s))} = \frac{\gamma'_1(L^{-1}(s))}{\|\gamma'_1(L^{-1}(s))\|}$$

et donc on a bien  $\|\gamma'_2(s)\| = 1$ . Finalement, parce que  $L' > 0$ , ces deux courbes ont la même orientation.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §8

**Preuve de [8.4].** Étant donné qu'on a  $\|\gamma_u(t)\| = 1$ , on en déduit, par passage à la limite et la continuité de la norme, qu'on doit avoir  $\|v\| \equiv \|(v, 0)\| = 1$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\left\langle \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|}, \gamma_u(t) + (v, 0) \right\rangle = \frac{\langle \gamma_u(t), \gamma_u(t) \rangle - \langle v, v \rangle}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = 0 ,$$

et donc, par passage à la limite et la continuité du produit scalaire, on a aussi

$$2 \cdot \langle w, v \rangle = \langle (w, \zeta), (v, 0) + (v, 0) \rangle = \lim_{t \downarrow a} \left\langle \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|}, \gamma_u(t) + (v, 0) \right\rangle = 0 .$$

Et parce que la dernière composante de  $\gamma_u(t)$ , à savoir  $(\|\gamma(t)\|^2 + 1)^{-1/2}$ , est toujours (strictement) positive, il s'ensuit qu'on doit avoir (dans la limite)  $\zeta \geq 0$ .

Par le même argument que pour  $v$  on a  $\|(w, \zeta)\| = 1$  et donc si  $\zeta = 0$  on aura  $\|w\| \equiv \|(w, 0)\| = 1$ . Et dans le cas  $\zeta > 0$  on aura

$$1 = \|(w, \zeta)\| = \sqrt{\|w\|^2 + \zeta^2} \quad \Rightarrow \quad (w, \zeta) = \frac{(w, \zeta)}{\sqrt{\|w\|^2 + \zeta^2}} = \frac{(\zeta^{-1} \cdot w, 1)}{\sqrt{\|\zeta^{-1} \cdot w\|^2 + 1}} ,$$

ce qui est, avec  $b = \zeta^{-1} \cdot w$ , le résultat annoncé.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [8.5].** (ii)  $\Rightarrow$  (i) : Pour cette implication réciproque on doit montrer que la droite  $D$  décrite par le vecteur de base  $b$  et vecteur directeur  $v$  est une asymptote pour la branche infinie en  $a$ . Pour cela on commence avec la remarque que, selon [8.4], on a  $\|v\| = 1$  et  $\langle b, v \rangle = 0$ . Sachant cela, la projection orthogonale  $p$  de  $\gamma(t)$  sur  $D$  est donnée par [4.14.ii]

$$p = b + \frac{\langle \gamma(t) - b, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = b + \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v$$

et donc la distance  $d(\gamma(t), D)$  est donnée par

$$d(\gamma(t), D) = \|\gamma(t) - p\| \equiv \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| .$$

Pour montrer que  $D$  est une asymptote de la branche infinie en  $a$ , il faut donc montrer qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| = 0 .$$

Si on substitue la définition de la courbe  $\gamma_u$  dans la deuxième limite, on obtient

$$\lim_{t \downarrow a} \left( \frac{\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}} \right) = \frac{(b, 1)}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} ,$$

La dernière composante nous donne

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} \neq 0 ,$$

ce qui implique qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v = b$$

et donc

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t) - b - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v\| = 0 .$$

Sachant qu'on a  $\langle \gamma(t) - p, v \rangle = 0$ , on peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), D)^2 &\equiv \|\gamma(t) - p\|^2 \\ &\leq \|\gamma(t) - p\|^2 + \|(\langle \gamma(t), v \rangle - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}) \cdot v\|^2 \\ &= \|\gamma(t) - p + \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v\|^2 \\ &\equiv \|\gamma(t) - b - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v\|^2 . \end{aligned}$$

Le résultat souhaité en découle immédiatement.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Selon la conclusion supplémentaire il faut montrer que l'asymptote  $D$  admet un point de base  $b$  et un vecteur directeur  $v$  tels que (ii) soit vrai. Pour y arriver on procède de la façon suivante. On montre d'abord que l'hypothèse que  $D$  est une asymptote pour la branche infinie en  $a$ , ce qui se traduit comme

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t)\| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} d(\gamma(t), D) = 0 ,$$

implique qu'on peut décrire l'asymptote  $D$  par un point de base  $b$  et un vecteur directeur  $v$  vérifiant

$$(39.2) \quad \|v\| = 1 \quad , \quad \langle b, v \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} \langle \gamma(t), v \rangle = +\infty .$$

Avec ces propriétés de  $b$  et  $v$  on montre qu'on a

$$(39.3) \quad \lim_{t \downarrow a} \gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v = b .$$

Et on termine avec la preuve que ceci implique (ii).

Pour réaliser ce programme, on commence avec la remarque que si la droite  $D$  est décrite par un point de base  $b$  et un vecteur directeur  $v$ , alors, selon [4.1], elle est aussi décrite par le point de base  $\hat{b}$  et le vecteur directeur  $\hat{v}$  définis par

$$\hat{b} = b - \frac{\langle b, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v \quad \text{et} \quad \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} .$$

Avec cette définition on aura  $\|\hat{v}\| = 1$  et  $\langle \hat{b}, \hat{v} \rangle = 0$ , ce qui implique qu'on peut supposer sans perte de généralité que notre couple  $(b, v)$  de départ avait cette propriété. Avec ces hypothèses supplémentaires et [4.14.ii], l'hypothèse de départ que  $D$  est une asymptote de la branche infini en  $a$  se traduit comme

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t)\| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| = 0 .$$

D'autre part on a l'inégalité

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| + \|b\| + |\langle \gamma(t), v \rangle| ,$$

ce qui donne la minoration

$$|\langle \gamma(t), v \rangle| \geq \|\gamma(t)\| - \|b\| - \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} |\langle \gamma(t), v \rangle| = +\infty .$$

Par continuité de  $\gamma$  et du produit scalaire on en déduit qu'il existe  $\varepsilon = \pm 1$  tel que  $\lim_{t \downarrow a} \varepsilon \langle \gamma(t), v \rangle = +\infty$ . En remplaçant  $v$  par  $\varepsilon v$  on peut donc supposer qu'on a bien  $\lim_{t \downarrow a} \langle \gamma(t), v \rangle = +\infty$  comme souhaité.

Maintenant qu'on sait qu'il existe un point de base  $b$  et un vecteur directeur  $v$  pour  $D$  vérifiant (39.2), on veut en déduire qu'on a bien (39.3). Pour cela on constate qu'on a les majorations

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v - b\| &\leq \|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| \\ &\quad + \|\langle \gamma(t), v \rangle \cdot v - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v\| \end{aligned}$$

et **DESSIN**

$$\begin{aligned} \|\langle \gamma(t), v \rangle \cdot v - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v\| &\stackrel{\|v\|=1 \text{ et [1.3]}}{=} \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} - \langle \gamma(t), v \rangle \\ &= \frac{\|\gamma(t)\|^2 - \langle \gamma(t), v \rangle^2 + 1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} + \langle \gamma(t), v \rangle} = \frac{\|\gamma(t) - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\|^2 + 1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} + \langle \gamma(t), v \rangle} \\ &\leq \frac{(\|\gamma(t) - b - \langle \gamma(t), v \rangle \cdot v\| + \|b\|)^2 + 1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} + \langle \gamma(t), v \rangle} . \end{aligned}$$

Avec [4.14.ii] on trouve donc la majoration

$$\|\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v - b\| \leq d(\gamma(t), D) + \frac{(d(\gamma(t), D) + \|b\|)^2 + 1}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} + \langle \gamma(t), v \rangle} .$$

En prenant la limite et en utilisant nos hypothèses on a

$$\lim_{t \downarrow a} \|\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v - b\| \leq 0 + \frac{(0 + \|b\|)^2 + 1}{+\infty + \infty} = 0 ,$$

ce qui veut dire qu'on a bien  $\lim_{t \downarrow a} \gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v = b$  comme souhaité.

Une fois qu'on a montré (39.3), on peut diviser par  $\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}$  pour en déduire (sachant qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} (\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1})^{-1} = 0$ ) :

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) - (v, 0) \equiv \lim_{t \downarrow a} \frac{(\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v, 1)}{\sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1}} = (0, 0) ,$$

autrement dit :  $\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) = (v, 0)$ . Si on considère ensuite la courbe  $\hat{\gamma}(t)$  définie par

$$\hat{\gamma}(t) = \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot (\gamma_u(t) - (v, 0)) = (\gamma(t) - \sqrt{\|\gamma(t)\|^2 + 1} \cdot v, 1) ,$$

alors il est immédiat qu'on a l'égalité

$$\frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} = \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} .$$

D'autre part, on a

$$\lim_{t \downarrow a} \hat{\gamma}(t) = (b, 1)$$

et donc

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\hat{\gamma}(t)}{\|\hat{\gamma}(t)\|} = \frac{(b, 1)}{\|(b, 1)\|} = \frac{(b, 1)}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} ,$$

ce qui termine la preuve que (39.3) implique (ii).

CQFD



**Preuve de [8.6].** Selon [8.5] il existe  $v, b \in \mathbf{R}^n$  tels qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \gamma_u(t) = (v, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma_u(t) - (v, 0)}{\|\gamma_u(t) - (v, 0)\|} = \frac{(b, 1)}{\sqrt{\|b\|^2 + 1}} .$$

Mais ce même résultat dit que  $b$  est un point de base de l'asymptote et  $v$  un vecteur directeur. Et donc  $D_1 = D_2$  parce qu'elles ont un point de base et un vecteur directeur en commun.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [8.8].** • *Première partie.* S'il y a une direction asymptotique, alors par définition il existe  $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$  tels que

$$(39.4) \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{(x(t), y(t))}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = (\xi, \eta) .$$

Il est immédiat qu'on doit avoir  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , donc au moins un des deux est non-nuls. Si on a  $\xi \neq 0$ , alors on déduit de (39.4) qu'on doit avoir

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\eta}{\xi} \in \mathbf{R} .$$

Et si on a  $\eta \neq 0$ , alors on aura

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\xi}{\eta} \in \mathbf{R} .$$

Réciproquement supposons qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} y(t)/x(t) = m \in \mathbf{R}$ . Alors on peut écrire

$$x(t)^2 = \frac{x(t)^2 + y(t)^2}{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}} = \frac{\|\gamma(t)\|^2}{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}} .$$

Avec l'hypothèse et le fait qu'il s'agit d'une branche infinie, on en déduit qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} x(t)^2 = \frac{+\infty}{1 + m^2} = +\infty .$$

En prenant  $M = \sqrt{\pi}$  dans [8.1] on trouve  $T \in ]a, b[$  tel que pour tout  $t \in ]a, T[$  on a  $x(t)^2 > \sqrt{\pi}$ . Il s'ensuit que la fonction continue  $x(t)$  ne s'annule pas sur  $]a, T[$  et donc qu'il existe un signe  $\epsilon = \pm 1$  tel que, pour  $t \in ]a, T[$ , on a

$$\epsilon \cdot x(t) > 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \downarrow a} x(t) = \epsilon \cdot \infty .$$

On en déduit qu'on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} &= \lim_{t \downarrow a} \left( \frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}, \frac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \right) \\ &= \lim_{t \downarrow a} \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}}}, \frac{\epsilon \cdot \frac{y(t)}{x(t)}}{\sqrt{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}}} \right) = \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{\epsilon \cdot m}{\sqrt{1 + m^2}} \right) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la direction asymptotique est donnée par un multiple du vecteur  $(1, m)$ .

Dans le deuxième cas où  $\lim_{t \downarrow a} x(t)/y(t) = m^* \in \mathbf{R}$  existe, il suffit d'échanger les rôles de  $x(t)$  et  $y(t)$  dans l'argument précédent pour obtenir le résultat annoncé.

• *Deuxième partie avec  $\lim_{t \downarrow a} y(t)/x(t) = m \in \mathbf{R}$ .* Sachant qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} x(t) = \epsilon \cdot \infty$  et qu'on a une direction asymptotique donnée par

$$v \equiv \lim_{t \downarrow a} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\epsilon \cdot m}{\sqrt{1+m^2}} \right),$$

la définition [8.7] nous dit que l'existence d'une asymptote ou une branche parabolique est déterminée par l'existence de la limite

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = (w, \zeta),$$

où  $\Gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  est la courbe définie par

$$\Gamma(t) = \gamma_u(t) - (v, 0) = \frac{(x(t), y(t), 1)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}} - \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\epsilon \cdot m}{\sqrt{1+m^2}}, 0 \right).$$

La distinction entre asymptote et branche parabolique se fait par la valeur de  $\zeta$  (nul ou non). L'idée de la preuve des équivalences (i) et (ii) se fait en réécrivant  $\Gamma(t)/\|\Gamma(t)\|$  de sorte qu'on isole un maximum de termes avec une limite bien définie. On commence avec l'observation que  $\epsilon \cdot x(t)$  est positif pour  $t$  proche de  $a$  et donc qu'on a l'égalité

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\epsilon \cdot x(t) \cdot \Gamma(t)}{\|\epsilon \cdot x(t) \cdot \Gamma(t)\|}.$$

Ceci nous amène à introduire la courbe  $\bar{\Gamma} : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t), \bar{\Gamma}_3(t)) \equiv \bar{\Gamma}(t) = \epsilon \cdot x(t) \cdot \Gamma(t).$$

Ensuite on introduit l'abréviation

$$N(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{x(t)^2} + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}}$$

pour éviter que les formules deviennent trop longues et on remarque en passant qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} N(t) = \sqrt{1+m^2}$ . Avec ces préparations on peut exprimer les trois composantes  $\bar{\Gamma}_i(t)$  comme :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1(t) &= \epsilon \cdot x(t) \cdot \frac{x(t) \cdot \sqrt{1+m^2} - \epsilon \cdot \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}}{\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}} \\ &= x(t) \cdot \frac{\sqrt{1+m^2} - N(t)}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t)} = \frac{m^2 x(t) - \frac{1}{x(t)} - \frac{y(t)^2}{x(t)}}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot (\sqrt{1+m^2} + N(t))} \\ &= \frac{-(y(t) - m \cdot x(t)) \cdot \left(m + \frac{y(t)}{x(t)}\right) - \frac{1}{x(t)}}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot (\sqrt{1+m^2} + N(t))} \\ \bar{\Gamma}_2(t) &= \epsilon \cdot x(t) \cdot \frac{y(t) \cdot \sqrt{1+m^2} - \epsilon \cdot m \cdot \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}}{\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}} \\ &= x(t) \cdot \frac{\frac{y(t)}{x(t)} \cdot \sqrt{1+m^2} - m \cdot N(t)}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y(t)^2}{x(t)} - m^2 x(t) - \frac{m^2}{x(t)}}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot \left( \frac{y(t)}{x(t)} \cdot \sqrt{1+m^2} + m \cdot N(t) \right)} \\
&= \frac{(y(t) - m \cdot x(t)) \cdot \left( \frac{y(t)}{x(t)} + m \right) - \frac{m^2}{x(t)}}{\sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot \left( \frac{y(t)}{x(t)} \cdot \sqrt{1+m^2} + m \cdot N(t) \right)} \\
\bar{\Gamma}_3(t) &= \frac{\epsilon \cdot x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}} = \frac{1}{N(t)} .
\end{aligned}$$

Après ces préparations on attaque la preuve proprement dite des équivalences (i) et (ii) et on commence avec les implications inverses : on suppose que les limites existent et on en déduit l'existence d'une asymptote ou d'une branche parabolique. Dans le cas (i) on a  $\lim_{t \downarrow a} (y(t) - m \cdot x(t)) = \ell$  et donc avec l'expressions des composantes  $\bar{\Gamma}_i(t)$  on obtient

$$\lim_{t \downarrow a} \bar{\Gamma}(t) = \left( \frac{-m\ell}{(1+m^2)^{3/2}}, \frac{\ell}{(1+m^2)^{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \neq (0,0,0) ,$$

ce qui nous donne

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}(t)}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} = \frac{(-m\ell, \ell, 1+m^2)}{\sqrt{(1+m^2+\ell^2)(1+m^2)}} .$$

Étant donné que  $1+m^2 \neq 0$ , on peut appliquer [8.5] et conclure qu'il existe un asymptote avec

$$\text{vecteur directeur } (1, m) \quad \text{et point de base } \frac{(-m\ell, \ell)}{1+m^2} ,$$

dont l'équation cartésienne est bien  $y = mx + m$ .

Si on regarde bien, alors on voit que notre analyse ne s'applique pas dans le cas  $m = 0$ , car dans ce cas la limite de  $\bar{\Gamma}_2(t)$  présente une forme indéterminée  $m/m$ . Mais dans ce cas l'expression pour  $\bar{\Gamma}_2(t)$  se simplifie comme

$$\bar{\Gamma}_2(t) = \frac{\epsilon \cdot x(t) \cdot y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + 1}} = \frac{y(t)}{N(t)} \equiv \frac{y(t) - m \cdot x(t)}{N(t)} ,$$

ce qui donne

$$\lim_{t \downarrow a} \bar{\Gamma}_2(t) = \frac{\ell}{\sqrt{1+m^2}} \stackrel{m \equiv 0}{=} \frac{\ell}{(1+m^2)^{3/2}} .$$

La formule finale pour cette limite reste donc valable dans le cas  $m = 0$ .

Dans le deuxième cas (ii) on a l'hypothèse  $\lim_{t \downarrow a} |y(t) - m \cdot x(t)| = +\infty$ , ce qui implique (avec la continuité) qu'il existe  $\eta = \pm 1$  tel que  $\eta \cdot (y(t) - mx(t)) > 0$  pour  $t$  proche de  $a$ . Avec l'expression explicite pour la courbe  $\bar{\Gamma}(t)$  on obtient facilement (avec le même caveat concernant le cas  $m = 0$  pour la deuxième composante)

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}(t)}{\eta \cdot (y(t) - mx(t))} = \left( \frac{-\eta m}{(1+m^2)^{3/2}}, \frac{\eta}{(1+m^2)^{3/2}}, 0 \right) \neq (0,0,0) ,$$

et donc

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\frac{\bar{\Gamma}(t)}{\eta \cdot (y(t) - mx(t))}}{\left\| \frac{\bar{\Gamma}(t)}{\eta \cdot (y(t) - mx(t))} \right\|} = \eta \cdot \frac{(-m, 1, 0)}{\sqrt{(1+m^2)}}.$$

Selon la définition il s'agit donc bien d'une branche infinie parabolique (car la dernière composante de cette limite est nulle).

Pour montrer les implications directes on suppose qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}(t)}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} = (w, \zeta)$$

et on est censé en déduire que  $\lim_{t \downarrow a} (y(t) - m \cdot x(t))$  existe dans  $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Dans le premier cas la branche infinie a une asymptote et donc  $\zeta \neq 0$  [8.5]. Sachant qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} \bar{\Gamma}_3(t) = (1+m^2)^{-1/2}$ , on en déduit qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \|\bar{\Gamma}(t)\| = \lim_{t \downarrow a} \left( \frac{\bar{\Gamma}_3(t)}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} \right)^{-1} \cdot \bar{\Gamma}_3(t) = \frac{1}{\zeta \sqrt{1+m^2}}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} (\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t)) = \lim_{t \downarrow a} \frac{(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} \cdot \|\bar{\Gamma}(t)\| = \frac{w}{\zeta \sqrt{1+m^2}} \equiv \frac{(w_1, w_2)}{\zeta \cdot \sqrt{1+m^2}}.$$

Étant donné que le dénominateur de l'expression explicite de  $\bar{\Gamma}_2(t)$  admet une limite quand  $t$  tend vers  $a$  et que dans le numérateur les facteurs autres que l'expression  $y(t) - m \cdot x(t)$  admettent également une limite, on peut exprimer  $y(t) - m \cdot x(t)$  en termes de  $\bar{\Gamma}_2(t)$  et d'autres termes qui admettent une limite. On en déduit qu'on doit avoir

$$\lim_{t \downarrow a} (y(t) - m \cdot x(t)) = (1+m^2)^{3/2} \cdot \frac{w_2}{\zeta \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{(1+m^2)w_2}{\zeta}.$$

Ce résultat est valable dans tous les cas, bien que pour  $m = 0$  il faut utiliser l'expression simplifiée de  $\Gamma_2(t)$  pour éviter une forme indéterminée  $m/m$ .

Dans le deuxième cas avec  $\zeta = 0$  on commence avec l'introduction de quelques abréviations supplémentaires pour alléger la notation des formules. Ainsi on définit  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  et  $\Delta(t)$  comme

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot (\sqrt{1+m^2} + N(t)) \\ N_2(t) &= \sqrt{1+m^2} \cdot N(t) \cdot \left( \frac{y(t)}{x(t)} \cdot \sqrt{1+m^2} + m \cdot N(t) \right) \\ \Delta(t) &= y(t) - m \cdot x(t), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1(t) &= \frac{-\Delta(t) \cdot \left( m + \frac{y(t)}{x(t)} \right) - \frac{1}{x(t)}}{N_1(t)} \\ \bar{\Gamma}_2(t) &= \frac{\Delta(t) \cdot \left( \frac{y(t)}{x(t)} + m \right) - \frac{m^2}{x(t)}}{N_2(t)}. \end{aligned}$$

Le but est donc de montrer que le fait qu'on a  $\zeta = 0$  permet de conclure qu'on a  $\lim_{t \downarrow a} |\Delta(t)| = +\infty$ . Pour le faire on montre d'abord l'implication

$$\lim_{t \downarrow a} \bar{\Gamma}_3(t) = (1 + m^2)^{-1/2} \neq 0 \quad \implies \quad \lim_{t \downarrow a} \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| = +\infty .$$

Notre hypothèse nous dit qu'on a

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}(t)}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} = \lim_{t \downarrow a} \frac{\Gamma(t)}{\|\Gamma(t)\|} = (w, 0)$$

et donc en particulier

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}_3(t)}{\|\bar{\Gamma}(t)\|} = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \lim_{t \downarrow a} \frac{\bar{\Gamma}_3(t)^2}{\|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\|^2 + \bar{\Gamma}_3(t)^2} = 0 .$$

Pour  $\varepsilon > 0$  il existe donc  $T_\varepsilon \in I$  tel que pour tout  $t \in ]a, T_\varepsilon[$  on a l'inégalité

$$\frac{\bar{\Gamma}_3(t)^2}{\|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\|^2 + \bar{\Gamma}_3(t)^2} < \varepsilon .$$

Mais par définition de  $\lim_{t \downarrow a} \bar{\Gamma}_3(t)^2 = (1 + m^2)^{-1} \neq 0$ , il existe  $T_o \in ]a, b[$  tel que pour tout  $t \in ]a, T_o[$  on a l'inégalité

$$\bar{\Gamma}_3(t)^2 > \frac{1}{2} \cdot (1 + m^2)^{-1} .$$

En combinant ces deux inégalités (et en supposant qu'on a  $\varepsilon < 1$ ) on a donc pour tout  $t \in ]a, b[$ ,  $t < \min(T_\varepsilon, T_o)$  les inégalités

$$\frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \cdot (1 + m^2)^{-1} < \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \bar{\Gamma}_3(t)^2 < \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\|^2 .$$

Soit maintenant  $M \in \mathbf{R}$  arbitraire. Si on pose

$$\varepsilon = \frac{1}{2M^2(1 + m^2) + 1} < 1 ,$$

alors on trouve donc  $T = \min(T_\varepsilon, T_o)$  tel que pour tout  $t \in ]a, T[$  on a l'inégalité

$$\|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\|^2 > \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon(1 + m^2)} = M^2 \quad \text{et donc} \quad \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| > M ,$$

ce qui montre qu'on a bien  $\lim_{t \downarrow a} \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| = +\infty$ . Ensuite on utilise l'inégalité classique

$$\|(\alpha, \beta)\| \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq |\alpha| + |\beta| ,$$

pour déduire les majorations

$$\begin{aligned} \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| &\leq |\bar{\Gamma}_1(t)| + |\bar{\Gamma}_2(t)| \\ &\leq |\Delta(t)| \cdot |N_1(t)|^{-1} \cdot \left| m + \frac{y(t)}{x(t)} \right| + |N_1(t)|^{-1} \cdot \frac{1}{|x(t)|} \\ &\quad + |\Delta(t)| \cdot |N_2(t)|^{-1} \cdot \left| m + \frac{y(t)}{x(t)} \right| + |N_2(t)|^{-1} \cdot \frac{m^2}{|x(t)|} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (39.5) \quad &|\Delta(t)| \cdot (|N_1(t)|^{-1} + |N_2(t)|^{-1}) \cdot \left| m + \frac{y(t)}{x(t)} \right| \\ &\geq \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| - \frac{1}{|x(t)|} \cdot (|N_1(t)|^{-1} + m^2 |N_2(t)|^{-1}) . \end{aligned}$$

Mais on a

$$\lim_{t \downarrow a} \|(\bar{\Gamma}_1(t), \bar{\Gamma}_2(t))\| = +\infty$$

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{1}{|x(t)|} \cdot (|N_1(t)|^{-1} + m^2 |N_2(t)|^{-1}) = 0$$

$$\lim_{t \downarrow a} (|N_1(t)|^{-1} + |N_2(t)|^{-1}) \cdot \left| m + \frac{y(t)}{x(t)} \right| = (1 + m^2)^{-3/2} (1 + |m|) \neq 0$$

et donc on aura forcément  $\lim_{t \downarrow a} |\Delta(t)| = +\infty$  comme voulu.

Dans le cas  $m = 0$  il faut, comme dans les autres cas, reprendre la forme de  $\bar{\Gamma}_2(t)$  pour éviter qu'on divise par zéro. Ça changera en particulier le facteur de  $|\Delta(t)|$  dans (39.5), mais le résultat pour la limite  $t \downarrow a$  de ce facteur reste valable, donc la conclusion également.

Avec ce résultat on a fini la preuve des équivalences annoncées dans (i) et (ii). Pour les équivalences énoncées dans (iii) et (iv) il suffit d'échanger les rôles de  $x(t)$  et  $y(t)$  dans l'argument précédent pour les obtenir.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §9

**Preuve de [9.3].** La preuve se fait en plusieurs étapes. On commence avec la preuve que deux solutions sur une même intervalle diffèrent par un multiple global de  $2\pi$ . Ensuite on montre l'existence locale (sur des petits intervalles) de solutions/applications  $\alpha$ . Et on finit avec la preuve que l'intervalle le plus grand sur lequel il existe une solution est forcément tout l'intervalle  $I$ .

• Pour la première étape on suppose qu'on a un intervalle  $J \subset I$  et deux applications  $\alpha_i : J \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2$  de classe  $C^{k-1}$  vérifiant (9.4) pour tout  $t \in J$ . On a donc en particulier l'égalité

$$(\cos \alpha_1(t), \sin \alpha_1(t)) = (\cos \alpha_2(t), \sin \alpha_2(t)) ,$$

et donc

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_2(t) - \alpha_1(t)) &= \cos \alpha_2(t) \cos \alpha_1(t) + \sin \alpha_2(t) \sin \alpha_1(t) \\ &= \cos \alpha_1(t) \cos \alpha_1(t) + \sin \alpha_1(t) \sin \alpha_1(t) = 1 . \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe  $k(t) \in \mathbf{Z}$  tel que

$$\alpha_2(t) - \alpha_1(t) = 2k(t)\pi .$$

Mais  $\alpha_i$  est en particulier continue, donc  $(\alpha_1 - \alpha_2)/(2\pi)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $J$  à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , et donc elle est constante. On a donc montré qu'il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que pour tout  $t \in J$  on a

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t) + 2k\pi .$$

La deuxième partie de l'énoncé est le cas particulier  $J = I$ .

• Pour l'existence locale, on écrit

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (x(t), y(t)) .$$

Alors l'hypothèse que  $\gamma$  est de classe  $C^k$  et régulière implique que les fonctions  $x, y : I \rightarrow \mathbf{R}$  sont de classe  $C^{k-1}$ . Si on veut résoudre  $\alpha(s)$  de l'équation  $\cos \alpha(s) = x(s)$  sous la forme  $\alpha(s) = \pm \arccos(x(s))$  modulo  $2\pi$ , alors il faut éviter les points  $|x(s)| = 1$ , car pour ces points l'arccosinus n'est pas dérivable. De la même façon, si on veut résoudre  $\alpha(s)$  de l'équation  $\sin \alpha(s) = y(s)$  sous la forme  $\alpha(s) = \arcsin(y(s))$  ou  $\alpha(s) = \pi - \arcsin(y(s))$  modulo  $2\pi$ , alors il faut éviter les points  $|y(s)| = 1$ . Vu qu'on a  $x(s)^2 + y(s)^2 = 1$ , ces deux cas ne peuvent pas arriver en même temps, donc on peut toujours choisir l'un ou l'autre approche pour résoudre  $\alpha(s)$ .

Soyons donc un petit peu plus précis et prenons  $t \in I$  arbitraire. On commence avec le cas où on a  $|x(t)| \neq 1$ , et donc  $|x(t)| < 1$ . Dans la définition de la continuité on prend  $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |x(t)|) > 0$  ce qui nous donne :

$$\exists \delta > 0 \forall s \in I : |s - t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(s) - x(t)| < \varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |x(t)|)$$

et donc

$$\begin{aligned} |x(s)| - |x(t)| &\leq |x(s) - x(t)| < \frac{1}{2}(1 - |x(t)|) \\ &\Rightarrow \quad |x(s)| < \frac{1}{2}(1 + |x(t)|) = 1 - \varepsilon < 1 . \end{aligned}$$

L'arccosinus prenant ses valeurs dans  $[0, \pi]$ , là où le sinus est positif, il s'ensuit que le choix de solution  $\alpha(s) = \pm \arccos(x(s))$  dépend du signe du sinus, c'est-à-dire du signe de  $y(s)$ . Mais si  $|x(s)| \neq 1$  pour  $|t - s| < \delta$ , alors on a  $y(s) \neq 0$  pour  $|t - s| < \delta$ . Par continuité de  $y$ , cette fonction est donc soit partout positive sur

l'intervalle  $]t - \delta, t + \delta[$ , soit partout négative. Le signe de  $y(s)$  est donc le même que le signe de  $y(t)$  pour tout  $s$  dans cet intervalle. Le raisonnement dans le cas  $|y(t)| \neq 1$  est analogue et nous amène au résultat suivant :

pour  $t \in I$  fixé il existe  $\delta > 0$  et  $k \in \mathbf{Z}$  tels que pour tout  $s \in ]t - \delta, t + \delta[$  on a

$$\begin{aligned} \text{si } |x(t)| \neq 1, \text{ alors } \quad \alpha(s) &= \begin{cases} 2k\pi - \arccos(x(s)) & \text{si } y(t) < 0 \\ 2k\pi + \arccos(x(s)) & \text{si } y(t) > 0 \end{cases} \\ \text{ou si } |y(t)| \neq 1, \text{ alors } \quad \alpha(s) &= \begin{cases} (2k+1)\pi - \arcsin(y(s)) & \text{si } x(t) < 0 \\ 2k\pi + \arcsin(y(s)) & \text{si } x(t) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Avec le fait qu'on n'applique pas l'arccosinus ou l'arcsinus là où ces fonctions ne sont pas dérivable, il s'ensuit que ces solutions pour  $\alpha(s)$  sont de la même classe de dérivabilité que  $x$  et  $y$ , à savoir de classe  $C^{k-1}$  (car les fonctions arcsin et arccos sont de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ ).

En résumé : on vient de montrer que pour tout  $t \in I$  il existe un voisinage  $]t - \delta, t + \delta[$  sur lequel il existe une fonction/solution  $\alpha$  de classe  $C^{k-1}$ . Autrement dit, on a montré l'existence locale de la fonction  $\alpha$ .

• Pour l'existence globale on choisit d'abord arbitrairement  $t_o \in I$  et ensuite on invoque la deuxième étape pour trouver un intervalle ouvert  $J_o \ni t_o$  et une application  $\alpha_o : J_o \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{k-1}$  vérifiant (9.4). Avec ces ingrédients on définit  $\mathcal{J}$  comme

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{ J \subset I \mid J \text{ un intervalle ouvert, } t_o \in J \\ &\quad \& \exists \alpha : J \rightarrow \mathbf{R} \text{ de classe } C^{k-1} \text{ vérifiant (9.4) \& } \alpha(t_o) = \alpha_o(t_o) \} . \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\mathcal{J}$  est la collection de tous les intervalles ouverts contenant  $t_o$  et inclus dans  $I$  sur lesquels il existe une application  $\alpha$  de classe  $C^{k-1}$  vérifiant (9.4) et qui coïncide avec  $\alpha_o$  au point  $t_o$ . Évidemment  $\mathcal{J}$  n'est pas vide, car il contient  $J_o$ . On peut donc prendre la réunion de tous ces intervalles :

$$J_m = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J .$$

On veut maintenant montrer que  $J_m$  appartient à  $\mathcal{J}$ . Pour cela on commence avec la définition de l'application  $\alpha_m : J_m \rightarrow \mathbf{R}$  par la procédure suivante :

$$\begin{aligned} t \in J_m &\xrightarrow{\text{déf. d'une réunion}} \exists J \in \mathcal{J} : t \in J \\ &\xrightarrow{\text{déf. de } \mathcal{J}} \exists \alpha : J \rightarrow \mathbf{R} \text{ de classe } C^{k-1} \text{ vérifiant (9.4) et } \alpha(t_o) = \alpha_o(t_o) \\ &\quad \xrightarrow{\text{on pose}} \alpha_m(t) = \alpha(t) . \end{aligned}$$

Si  $J' \in \mathcal{J}$  est un autre intervalle avec  $t \in J'$  et une application  $\alpha' : J' \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{k-1}$  vérifiant (9.4), alors  $J \cap J'$  est un intervalle contenant  $t_o$  et  $t$ . Donc par la première étape il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que

$$\alpha'|_{J \cap J'} = \alpha|_{J \cap J'} + 2k\pi .$$

Mais on a  $\alpha'(t_o) = \alpha_o(t_o) = \alpha(t_o)$  et donc  $k = 0$ . Il s'ensuit qu'on doit avoir  $\alpha'(t) = \alpha(t)$ . La fonction  $\alpha_m$  est donc bien définie par notre procédure et elle vérifie, par construction, (9.4). En plus, elle est de classe  $C^{k-1}$  par [36.2]. Plus précisément, par définition de  $\alpha_m$ , si  $\alpha_m(t) = \alpha(t)$ , alors  $\alpha_m|_J = \alpha$  et donc la restriction de  $\alpha_m$  à  $J \subset J_m$  est de classe  $C^{k-1}$ . Les conditions de [36.2] sont donc vérifiées, ce qui permet de conclure que  $\alpha_m$  est de classe  $C^{k-1}$ . Comme réunion d'intervalles ouverts, c'est un ouvert et, parce que chaque  $J \in \mathcal{J}$  contient  $t_o$ , on a aussi  $t_o \in J_m$ .



Pour finalement montrer que c'est un intervalle, on pourrait invoquer un résultat de topologie générale qui dit qu'une réunion d'ensembles connexes contenant tous un même point est connexe. Mais on peut aussi le montrer directement. Pour cela on suppose que  $t_1 < t_2$  sont deux éléments de  $J_m$ . Par définition de  $J_m$  il existe donc  $J_i \in \mathcal{J}$  avec  $t_o, t_i \in J_i$ . Maintenant on raisonne selon la position de  $t_o$  par rapport à  $t_i$  : (i)  $t_o \leq t_1$ , (ii)  $t_1 < t_o < t_2$  et (iii)  $t_2 \leq t_o$ . Dans le premier cas on a donc les inclusions

$$[t_1, t_2] \subset [t_o, t_2] \stackrel{J_2 \text{ intervalle}}{\subset} J_2 \subset J_m .$$

Dans le deuxième cas on a les inclusions

$$[t_1, t_2] = [t_1, t_o] \cup [t_o, t_2] \stackrel{J_i \text{ intervalle}}{\subset} J_i \cup J_2 \subset J_m ,$$

et dans le troisième cas on les inclusions

$$[t_1, t_2] \subset [t_1, t_o] \stackrel{J_1 \text{ intervalle}}{\subset} J_1 \subset J_m .$$

Dans tous les cas on a donc  $[t_1, t_2] \subset J_m$ , ce qui montre que  $J_m$  est un intervalle. Ainsi on a donc montré que  $J_m$  appartient à  $\mathcal{J}$  (avec l'application  $\alpha_m$ ).

Pour terminer, il suffit donc de montrer qu'on a  $J_m = I$ . Pour cela on suppose qu'il existe  $s_o \in I \setminus J_m$  vérifiant  $s_o > t_o$  (le raisonnement pour  $s_o < t_o$  sera analogue). Parce que  $J_m$  est un intervalle, on doit avoir

$$\forall t \in J_m : t < s_o .$$

On a donc  $T = \sup J_m \in I$ . Alors, par la deuxième étape, il existe  $\delta > 0$  et une solution  $\alpha_1 : ]T - \delta, T + \delta[ \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant (9.4). Mais par définition du sup il existe  $t \in J_m$  avec  $t > T - \delta$ . Il s'ensuit que les deux solutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_m$  sont tous les deux définies sur l'intervalle  $J_m \cap ]T - \delta, T + \delta[$  (qui est non-vide car contenant  $t$ ). Par la première étape il existe donc  $k \in \mathbf{Z}$  tel que

$$\forall s \in J_m \cap ]T - \delta, T + \delta[ \quad : \quad \alpha_m(s) = \alpha_1(s) + 2k\pi .$$

Il s'ensuit que l'application  $\alpha_2 : J_m \cup ]T - \delta, T + \delta[ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\alpha_2(s) = \begin{cases} \alpha_m(s) & \text{si } s \in J_m \\ \alpha_1(s) + 2k\pi & \text{si } s \in ]T - \delta, T + \delta[ \end{cases}$$

est de classe  $C^{k-1}$  [36.2] et vérifie (9.4). En plus on a  $t_o \in J_m$  et donc  $\alpha_2(t_o) = \alpha_m(t_o) = \alpha_o(t_o)$ . Il s'ensuit que  $J_m \cup ]T - \delta, T + \delta[$  appartient à  $\mathcal{J}$  et qu'il est strictement plus grand que  $J_m$ . Ceci contredit la construction de  $J_m$  comme la réunion de **tous** les éléments de  $\mathcal{J}$ . La conclusion est donc qu'il n'existe pas  $s_o \in I \setminus J_m$  avec  $s_o > t_o$ . Un argument similaire montre qu'il n'existe pas non plus  $s_o \in I \setminus J_m$  avec  $s_o < t_o$ . On doit donc avoir  $J_m = I$ , ce qui termine la preuve de l'existence globale.

CQFD

**Preuve de [9.6].** Pour calculer  $\alpha'(t)$  on a deux façons de procéder : ou bien on trouve une expression explicite pour  $\alpha(t)$  qu'on dérive, ou bien on se sert de (9.4). Commençons avec la première approche.

La direction au temps  $t$  est donné par la direction du vecteur  $\gamma'(t)$ . Le changement de direction  $\alpha(t) - \alpha(t_o)$  est donc donné par l'angle sur lequel il faut tourner la direction de  $\gamma'(t_o)$  pour obtenir la direction de  $\gamma'(t)$ . Si  $t$  est proche de  $t_o$ , alors  $\gamma'(t)$  sera aussi différent de 0 ; on peut donc unitariser les deux vecteurs (en divisant par

leurs normes) et appliquer [3.7.ii] pour trouver cet angle. En supposant que l'angle est proche de 0, on peut l'exprimer comme

$$\alpha(t) - \alpha(t_o) = \arcsin\left(\frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\| \cdot \|\gamma'(t_o)\|}\right).$$

Il suffit maintenant de dériver cette expression pour obtenir

$$\begin{aligned} \alpha'(t_o) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma'(t_o))}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t_o)\|}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\| \cdot \|\gamma'(t_o)\|}\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0}{\|\gamma'(t_o)\|^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o))}{\|\gamma'(t)\| \cdot \|\gamma'(t_o)\|} - \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma'(t_o))}{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma'(t_o)\|} \cdot \|\gamma'(t)\|'\right) \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o))}{\|\gamma'(t_o)\|^2} - \frac{0}{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t_o)\|} \cdot \|\gamma'(t)\|' \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o))}{\|\gamma'(t_o)\|^2}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième approche on réécrit (9.4) à l'aide des composantes de  $\gamma$  comme

$$\left(\frac{\gamma'_1(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma'_2(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)),$$

ce qui a comme dérivée

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma''_1(t) \|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'_1(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \frac{\gamma''_2(t) \|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'_2(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \end{pmatrix} = \alpha'(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \end{pmatrix} = \alpha'(t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'_2(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ \frac{\gamma'_1(t)}{\|\gamma'(t)\|} \end{pmatrix}.$$

Si on prend le produit scalaire avec le vecteur  $(-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t))/\|\gamma'(t)\|$ , on obtient l'égalité

$$\alpha'(t) = \frac{(\gamma'_1(t) \gamma''_2(t) - \gamma'_2(t) \gamma''_1(t)) \|\gamma'(t)\|^2}{\|\gamma'(t)\|^4} = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^2}. \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [9.7].** Selon [9.6] on a  $\alpha'(t) = \kappa(t) \cdot \|\gamma'(t)\|$  et donc

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \alpha'(t) dt = \alpha(t_1) - \alpha(t_0).$$

D'autre part on a les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha(t_1) \\ \sin \alpha(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t_0) + A) \\ \sin(\alpha(t_0) + A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha(t_0) \cos A - \sin \alpha(t_0) \sin A \\ \sin \alpha(t_0) \cos A + \cos \alpha(t_0) \sin A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha(t_0) \\ \sin \alpha(t_0) \end{pmatrix} = R_A \left( \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right) \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [9.10].** Pour le développement limité de  $|S(t) - S(t_o)|$  on a

$$|S(t) - S(t_o)| = \left| \int_{t_o}^t \|\gamma'(s)\| \, ds \right| = |t - t_o| \cdot (\|\gamma'(t_o)\| + \varepsilon_{t_o}(t)) .$$

Pour calculer la limite  $t \rightarrow t_o$  de l'angle  $\alpha(t) = \angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$ , on commence avec la remarque que cet angle (compris entre 0 et  $\pi$ ) est déterminé par le produit scalaire via la formule

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{\langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t)\|}$$

et qu'on a "donc"

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \cos(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{\langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t)\|} = \frac{\langle \gamma'(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t_o)\|} = 1 .$$

Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \alpha(t) = 0$$

et en particulier pour  $t$  suffisamment proche de  $t_o$  on aura  $\alpha(t) < \frac{1}{2}\pi$ . Mais pour  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  on peut écrire

$$\alpha = \arcsin(\sin \alpha) = \arcsin(\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}) ,$$

ce qui nous donne la formule (pour  $t$  suffisamment proche de  $t_o$ )

$$\begin{aligned} \angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t)) &= \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{\langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2}{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2}} \right) \\ &= \arcsin \left( \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t)\|} \right) . \end{aligned}$$

Pour faire un développement limité de  $\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$  à l'ordre 1 au voisinage de  $t = t_o$ , on commence avec un développement limité à l'ordre 2 de l'expression en-dessous la racine carrée :

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t_o) \rangle + 2(t - t_o) \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle \\ &\quad + (t - t_o)^2 (\langle \gamma'(t_o), \gamma'''(t_o) \rangle + \langle \gamma''(t_o), \gamma''(t_o) \rangle) + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2 &= \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t_o) \rangle \cdot \left( \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t_o) \rangle + 2(t - t_o) \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^2 \langle \gamma'(t_o), \gamma'''(t_o) \rangle \right) \\ &\quad + (t - t_o)^2 \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2 + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) , \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2 =$$

$$(t - t_o)^2 \left( \|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right) .$$

Pour la racine carrée on obtient donc

$$\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2} =$$

$$|t - t_o| \cdot \left( \sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2} + \varepsilon_{t_o}(t) \right) .$$

Si on développe le dénominateur, les puissances en  $(t - t_o)$  ne font qu'augmenter l'ordre, ce qui nous permet d'écrire pour le quotient :

$$\frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t)\|} =$$

$$|t - t_o| \cdot \left( \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^2} + \varepsilon_{t_o}(t) \right) .$$

Avec le développement  $\arcsin(x) = x + x \varepsilon_0(x)$ , on obtient donc le développement de  $\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$  pareil comme

$$\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t)) = |t - t_o| \cdot \left( \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^2} + \varepsilon_{t_o}(t) \right)$$

Avec les deux développements limités de  $\angle(\gamma'(t_o), \gamma'(t))$  et  $S(t) - S(t_o)$  on peut finalement calculer la valeur de  $\kappa_a(t_o)$ , ce qui donne

$$\kappa_a(t_o) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{|t - t_o| \cdot \left( \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^2} + \varepsilon_{t_o}(t) \right)}{|t - t_o| \cdot (\|\gamma'(t_o)\| + \varepsilon_{t_o}(t))}$$

$$= \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma''(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_o)\|^3} . \quad \boxed{CQFD}$$

## Les preuves de §10

**Preuve de [10.2].** On donnera deux preuves : une géométrique et une analytique. On commence avec la preuve géométrique, où l'idée est qu'on construit un point  $c \in C$  et qu'on montre que pour tout  $c' \in C$  on a  $\|x - c\| \leq \|x - c'\|$ . Par définition de la distance  $d(x, C)$  on aura  $d(x, C) = \|x - c\|$ .

### DESSIN

La construction de  $c$  commence en définissant  $p \in P$  comme la projection orthogonale de  $x$  sur le plan  $P$ . Par définition [4.10] et [4.15] ceci veut dire que pour tout  $y, z \in P$  on a  $\langle x - p, y - z \rangle = 0$ . Si on a  $p = M$ , alors

$$\begin{aligned} \|x - c\|^2 &= \|(x - M) + (M - c)\|^2 \\ &= \|x - M\|^2 + \|M - c\|^2 + 2 \langle x - M, M - c \rangle = \|x - M\|^2 + R^2, \end{aligned}$$

car par l'hypothèse  $p = M$  on a  $\langle x - p, M - c \rangle = 0$ . La distance à un point arbitraire du cercle est donc constante, ce qui implique qu'on a

$$(39.6) \quad d(x, C)^2 = \|x - c\|^2 = \|x - M\|^2 + R^2.$$

Si  $p \neq M$ , alors on définit la droite  $D \subset P$  comme la droite de point de base  $M$  et vecteur directeur  $p - M$ . On définit aussi la demi-droite  $D_+$  comme

$$D_+ = \{ M + t \cdot (p - M) \mid t \geq 0 \}.$$

Cette demi droite est contenu dans le plan  $P$  et coupe le cercle  $C$  en un point unique  $c \in C$  donné par

$$c = M + \frac{R}{\|p - M\|} \cdot (p - M) = p + \frac{\|p - M\| - R}{\|p - M\|} \cdot (M - p).$$

Reste à montrer que ce point  $c$  a bien la propriété  $\|x - c\| \leq \|x - c'\|$  pour tout  $c' \in C$ .

On prend donc  $c' \in C$  arbitraire et on lui associe le point  $p'$ , la projection orthogonale de  $c'$  sur la droite  $D$ . Par définition de  $D$  il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que

$$p' = M + \lambda \cdot (p - M)$$

et on a  $p' = c$  si et seulement si on a  $\lambda = R/\|p - M\|$ . Par définition de la projection orthogonale on a  $\langle p' - M, c' - p' \rangle = 0$ , d'où l'égalité

$$R^2 = \|c' - M\|^2 = \|c' - p'\|^2 + \|p' - M\|^2 = \|c' - p'\|^2 + \lambda^2 \cdot \|p - M\|^2.$$

En négligeant  $\|c' - p'\|^2$  on obtient en particulier l'inégalité

$$(39.7) \quad \lambda^2 \leq \frac{R^2}{\|p - M\|^2} \iff -\frac{R}{\|p - M\|} \leq \lambda \leq \frac{R}{\|p - M\|}.$$

Maintenant on remarque que les points  $p$  et  $c'$  appartiennent à  $P$ , donc (par définition de la projection orthogonale)  $\langle x - p, p - c' \rangle = 0$ , et que les points  $p$  et  $p'$  appartiennent à la droite  $D$ , donc  $\langle c' - p', p - p' \rangle = 0$ . Avec ces préparations on calcule :

$$\begin{aligned} \|x - c'\|^2 &= \|x - p\|^2 + \|p - c'\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 + \|p' - c'\|^2 + \|p - p'\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 + \|p' - c'\|^2 + (\lambda - 1)^2 \cdot \|p - M\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 + (\|p - M\| - R)^2 + 2 \left( \frac{R}{\|p - M\|} - \lambda \right) \cdot \|p - M\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|x - c\|^2 + 2 \left( \frac{R}{\|p - M\|} - \lambda \right) \cdot \|p - M\|^2 ,$$

où la dernière égalité est une conséquence du fait que dans le cas particulier  $c' = c$  on a  $p' = c' = c$  (car  $c \in D$ ) et donc  $\lambda = R/\|p - M\|$ . Par (39.7) on a donc l'inégalité  $\|x - c'\|^2 \geq \|x - c\|^2$ , ce qui montre que  $c$  réalise la plus courte distance de  $x$  au cercle  $C$ .

Pour terminer il suffit de remarquer qu'on a  $\langle x - p, p - M \rangle = 0$ , ce qui permet de faire le calcul

$$\begin{aligned} (39.8) \quad \|x - c\|^2 &= \|x - p\|^2 + (\|p - M\| - R)^2 \\ &= \|x - M\|^2 - \|p - M\|^2 + (\|p - M\| - R)^2 \\ &= \|x - M\|^2 + R^2 - 2R\|p - M\| . \end{aligned}$$

Dans le cas où on a  $p = M$ , cette formule coïncide avec (39.6), ce qui implique que c'est la formule générale.

Selon [4.15] et le fait que les vecteurs  $e_1, e_2$  sont orthonormés, le point  $p$  est donné par

$$p = M + \langle x - M, e_1 \rangle e_1 + \langle x - M, e_2 \rangle e_2 .$$

Il suffit de substituer ce résultat dans (39.8) pour obtenir la deuxième formule pour  $d(x, C)$ .

• Pour la preuve analytique, on commence avec la remarque que, parce que les vecteurs directeurs  $e_1, e_2$  de  $P$  sont orthonormés, le cercle  $C$  est décrit par la courbe

$$c(t) = M + R \cos(t) e_1 + R \sin(t) e_2$$

et qu'on cherche donc le minimum de la fonction  $d(t) = \|x - c(t)\|$ . Mais la fonction carré est strictement croissante, donc on peut aussi bien chercher le minimum de la fonction  $f(t) = \|x - c(t)\|^2$ , qui est donné par

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle M - x + R \cos(t) e_1 + R \sin(t) e_2, M - x + R \cos(t) e_1 + R \sin(t) e_2 \rangle \\ &= \|x - M\|^2 + R^2 + 2R \cos(t) \langle M - x, e_1 \rangle + 2R \sin(t) \langle M - x, e_2 \rangle . \end{aligned}$$

L'équation  $f'(t) = 0$  s'écrit donc comme

$$\sin(t) \langle M - x, e_1 \rangle = \cos(t) \langle M - x, e_2 \rangle .$$

Si on a  $\langle M - x, e_1 \rangle = 0 = \langle M - x, e_2 \rangle$ , alors  $f$  est constante et tout choix de  $t$  convient. Sinon, il existe  $r > 0$  et  $\alpha \in [0, 2\pi[$  tels que

$$\langle M - x, e_1 \rangle = r \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \langle M - x, e_2 \rangle = r \sin(\alpha) .$$

Avec ces définitions on peut réécrire l'équation  $f'(t) = 0$  comme

$$r \sin(t - \alpha) = 0 ,$$

qui a deux solutions :  $t = \alpha$  et  $t = \alpha + \pi$ . Pour  $t = \alpha$  on trouve le maximum, tandis que pour  $t = \alpha + \pi$  on trouve le minimum, ce qui donne (comme avant)

$$\begin{aligned} f(\alpha + \pi) &= \|x - M\|^2 + R^2 - 2Rr \cos^2(\alpha) - 2Rr \sin^2(\alpha) \\ &= \|x - M\|^2 + R^2 - 2R \sqrt{\langle x - M, e_1 \rangle^2 + \langle x - M, e_2 \rangle^2} . \quad \boxed{CQFD} \end{aligned}$$

**Preuve de [10.3].** Si on avait  $k_\gamma(t_o) = 0$ , alors par l'indépendance de  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  on devrait avoir

$$\frac{1}{\|\gamma'(t_o)\|^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^4} = 0 ,$$

ce qui est impossible car  $\gamma'(t_o) \neq 0$ .

Supposons maintenant que le cercle  $C$  de plan  $P$ , de centre  $M$  et de rayon  $R$  vérifie l'hypothèse de l'énoncé. Vu que la limite est égale à 0, cette condition est équivalente à la condition

$$(39.9) \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), C)^2}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^4} = 0 .$$

Pour en déduire que le triplet  $(P, C, R)$  est unique, on procède par étape, en utilisant que le produit de limites est égale à la limite du produit. Avec  $\lim_{t \rightarrow t_o} \|\gamma(t) - \gamma(t_o)\| = 0$ , on en déduit en particulier qu'on doit avoir

$$0 = \lim_{t \rightarrow t_o} d(\gamma(t), C)^2 = d(\gamma(t_o), C)^2 .$$

Selon [10.2] cette distance est donnée par

$$\|\gamma(t_o) - c\|^2 = \|\gamma(t_o) - p\|^2 + (\|p - M\| - R)^2 ,$$

où  $p$  est la projection orthogonale de  $\gamma(t_o)$  sur  $P$ . Si cela est nul, alors on doit avoir  $\gamma(t_o) = p$  et  $\|p - M\| = R$ . La première égalité dit que  $\gamma(t_o) = p$  appartient au plan  $P$  et la deuxième dit (donc) que  $\gamma(t_o)$  appartient au cercle  $C$ .

Les points  $\gamma(t_o)$  et  $M$  appartenant au plan  $P$  avec  $\|\gamma(t_o) - M\| = R > 0$  et donc  $\gamma(t_o) \neq M$ , il s'ensuit que le vecteur  $e_1$  défini comme

$$e_1 = R^{-1} (\gamma(t_o) - M)$$

est un vecteur directeur du plan  $P$  de longueur 1. Une fois qu'on a défini  $e_1$ , on choisit le deuxième vecteur directeur  $e_2 \in \mathbf{R}^n$  de  $P$  d'une telle façon que  $e_1, e_2$  soient orthonormés (ceci est toujours possible et en fait il n'y a que deux choix possibles). Avec ces deux vecteurs on invoque [10.2] pour écrire  $d(\gamma(t), C)^2$  comme

$$d(\gamma(t), C)^2 = \|\gamma(t) - M\|^2 + R^2 - 2R \sqrt{\langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 + \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2}$$

La deuxième étape est d'invoquer de nouveau le résultat sur les limites (avec  $\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2$ ) pour dire qu'on doit aussi avoir

$$(39.10) \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), C)^2}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2} = 0 .$$

Si on écrit le développement limité de  $\gamma(t)$  on trouve

$$(39.11) \quad \begin{aligned} \gamma(t) - \gamma(t_o) &= (t - t_o) \cdot \gamma'(t_o) + \frac{1}{2} (t - t_o) \cdot \gamma''(t_o) \\ &+ \frac{1}{6} (t - t_o)^3 \cdot \gamma'''(t_o) + \frac{1}{24} (t - t_o)^4 \cdot \gamma^{(4)}(t_o) + (t - t_o)^4 \cdot \varepsilon_{t_o}(t) . \end{aligned}$$

On en déduit le développement limité du dénominateur à l'ordre 2 comme

$$(39.12) \quad \begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2 &= \langle (t - t_o)(\gamma'(t_o) + \varepsilon_{t_o}(t)), (t - t_o)(\gamma'(t_o) + \varepsilon_{t_o}(t)) \rangle \\ &= (t - t_o)^2 \|\gamma'(t_o)\|^2 + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) , \end{aligned}$$

ce qui suggère qu'on doit faire un développement limité à l'ordre 2 du numérateur. On le fait petit bout par petit bout, en utilisant ce qu'on sait déjà :  $\gamma(t_o) - M = R e_1$ ,

ainsi que le fait que  $e_1, e_2$  sont orthonormés. Pour les trois parties figurant dans l'expression de  $d(\gamma(t), C)^2$  on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - M\|^2 &= \langle \gamma(t) - \gamma(t_o) + Re_1, \gamma(t) - \gamma(t_o) + Re_1 \rangle \\
&= R^2 + 2R(t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle \\
&\quad + (t - t_o)^2 [\|\gamma'(t_o)\|^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \\
\langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 &= \left( R + (t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \right)^2 \\
&= R^2 + 2R(t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle \\
&\quad + (t - t_o)^2 [\langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \\
\langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2 &= \left( (t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle + (t - t_o) \varepsilon_{t_o}(t) \right)^2 \\
&= (t - t_o)^2 \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) .
\end{aligned}$$

Si on rassemble les deux derniers résultats pour la racine carrée et qu'on utilise le développement limité  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_0(x)$ , on trouve

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 + \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2} \\
&= \left( R^2 + 2R(t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle + (t - t_o)^2 [\langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \right)^{1/2} \\
&= R + (t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2R} (t - t_o)^2 [\langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle^2 + \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] \\
&\quad - \frac{4}{8R} (t - t_o)^2 \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle^2 + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \\
&= R + (t - t_o) \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2R} (t - t_o)^2 [\langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t)
\end{aligned}$$

Si on rassemble les résultats, on trouve au final :

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - M\|^2 + R^2 - 2R \sqrt{\langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 + \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2} \\
&= (t - t_o)^2 [\|\gamma'(t_o)\|^2 + \langle Re_1, \gamma''(t_o) \rangle] \\
&\quad - (t - t_o)^2 [\langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + R \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t) \\
&= (t - t_o)^2 [\|\gamma'(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t)
\end{aligned}$$

Avec ces résultats, la condition (39.10) devient la condition

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma(t), C)^2}{\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{(t - t_o)^2 [\|\gamma'(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2] + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t)}{(t - t_o)^2 \|\gamma'(t_o)\|^2 + (t - t_o)^2 \varepsilon_{t_o}(t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{\|\gamma'(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 + \varepsilon_{t_o}(t)}{\|\gamma'(t_o)\|^2 + \varepsilon_{t_o}(t)}
\end{aligned}$$



$$= \frac{\|\gamma'(t_o)\|^2 - \langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2}{\|\gamma'(t_o)\|^2} .$$

On a donc l'égalité

$$\langle \gamma'(t_o), e_2 \rangle^2 = \|\gamma'(t_o)\|^2 = \|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|e_2\|^2 ,$$

ce qui est le cas si et seulement si  $\gamma'(t_o)$  et  $e_2$  sont colinéaires [1.3]. Il existe donc  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\gamma'(t_o) = \lambda e_2$ . Ceci a trois conséquences importantes : pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$  on a

$$(39.13) \quad \langle x, e_2 \rangle \cdot e_2 = \frac{\langle x, \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o) \quad , \quad \langle x, e_2 \rangle \cdot \langle e_2, \gamma'(t_o) \rangle = \langle x, \gamma'(t_o) \rangle$$

et, car  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ,

$$(39.14) \quad \langle \gamma'(t_o), e_1 \rangle = 0 .$$

La troisième et dernière étape consiste à prendre en compte la condition complète (39.9). Pour le dénominateur on trouve (en prenant le carré de (39.12)) le développement limité

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_o)\|^4 = (t - t_o)^4 \|\gamma'(t_o)\|^2 + (t - t_o)^4 \varepsilon_{t_o}(t) ,$$

ce qui suggère de faire un développement limité à l'ordre 4 du numérateur. Comme dans la deuxième étape, on le fait petit bout par petit bout, en utilisant ce qu'on sait déjà :  $\gamma(t_o) - M = R e_1$ , (39.13) et (39.14). Pour une meilleure lecture des formules, on introduit les vecteurs  $\hat{e}_i$  comme

$$\hat{e}_1 = R^{-1} e_1 \quad \text{et} \quad \hat{e}_2 = R^{-1} e_2$$

et on n'écrit pas la dépendance  $(t_o)$  pour les dérivées de  $\gamma$  : on écrit  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma'''$  et  $\gamma^{(4)}$  pour  $\gamma'(t_o)$ ,  $\gamma''(t_o)$ ,  $\gamma'''(t_o)$  et  $\gamma^{(4)}(t_o)$ . Avec (39.11) on trouve :

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - M\|^2 &= \langle \gamma(t) - \gamma(t_o) + R e_1, \gamma(t) - \gamma(t_o) + R e_1 \rangle \\ &= R^2 + (t - t_o)^2 [ \|\gamma'\|^2 + R^2 \langle \hat{e}_1, \gamma'' \rangle ] \\ &\quad + (t - t_o)^3 [ \langle \gamma', \gamma'' \rangle + \frac{R^2}{3} \langle \hat{e}_1, \gamma''' \rangle ] \\ &\quad + (t - t_o)^4 [ \frac{1}{4} \|\gamma''\|^2 + \frac{1}{3} \langle \gamma', \gamma''' \rangle + \frac{R^2}{12} \langle \hat{e}_1, \gamma^{(4)} \rangle + \varepsilon_{t_o}(t) ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 &= \left( R + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 \langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle + \frac{1}{6} (t - t_o)^3 \langle \gamma'''(t_o), e_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} (t - t_o)^4 \langle \gamma^{(4)}(t_o), e_1 \rangle + (t - t_o)^4 \varepsilon_{t_o}(t) \right)^2 \\ &= R^2 \left( 1 + (t - t_o)^2 \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle + (t - t_o)^3 \frac{1}{3} \langle \gamma''', \hat{e}_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^4 \left( \frac{1}{12} \langle \gamma^{(4)}, \hat{e}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2 &= \left( (t - t_o) \langle \gamma', e_2 \rangle + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 \langle \gamma'', e_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (t - t_o)^3 \langle \gamma''', e_2 \rangle + (t - t_o)^4 \varepsilon_{t_o}(t) \right)^2 \\ &= R^2 \left( (t - t_o)^2 \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + (t - t_o)^3 \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{3} \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma''', \hat{e}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right] \right) . \end{aligned}$$

Pour la racine carrée on trouve donc

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\langle \gamma(t) - M, e_1 \rangle^2 + \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2} \\
&= R \cdot \left( 1 + (t - t_o)^2 [\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle] \right. \\
&\quad (t - t_o)^3 \left[ \frac{1}{3} \langle \gamma''', \hat{e}_1 \rangle + \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle \right] \\
&\quad (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{12} \langle \gamma^{(4)}, \hat{e}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma''', \hat{e}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right] \right)^{1/2} \\
&= R \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \left( (t - t_o)^2 [\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle] \right. \right. \\
&\quad (t - t_o)^3 \left[ \frac{1}{3} \langle \gamma''', \hat{e}_1 \rangle + \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle \right] \\
&\quad (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{12} \langle \gamma^{(4)}, \hat{e}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma''', \hat{e}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle^2 \right] \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} \left( (t - t_o)^2 [\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle] \right)^2 + (t - t_o)^4 \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\
&= R \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 [\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (t - t_o)^3 \left[ \frac{1}{3} \langle \gamma''', \hat{e}_1 \rangle + \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle \right] \\
&\quad + (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{24} \langle \gamma^{(4)}, \hat{e}_1 \rangle + \frac{1}{4} \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle^2 + \frac{1}{6} \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma''', \hat{e}_2 \rangle \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle^2 - \frac{1}{8} (\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle)^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right] \right) .
\end{aligned}$$

On rassemble et on applique (39.13), ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \|\gamma(t) - M\|^2 + R^2 - 2R \sqrt{\langle \gamma(t) - M, \hat{e}_1 \rangle^2 + \langle \gamma(t) - M, e_2 \rangle^2} \\
&= 2R^2 + (t - t_o)^2 [\|\gamma'\|^2 + R^2 \langle \hat{e}_1, \gamma'' \rangle] \\
&\quad + (t - t_o)^3 [\langle \gamma', \gamma'' \rangle + \frac{R^2}{3} \langle \hat{e}_1, \gamma''' \rangle] \\
&\quad (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{4} \|\gamma''\|^2 + \frac{1}{3} \langle \gamma', \gamma''' \rangle + \frac{R^2}{12} \langle \hat{e}_1, \gamma^{(4)} \rangle \right] \\
&\quad - 2R^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} (t - t_o)^2 [\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (t - t_o)^3 \left[ \frac{1}{3} \langle \gamma''', \hat{e}_1 \rangle + \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle \right] \\
&\quad + (t - t_o)^4 \left[ \frac{1}{24} \langle \gamma^{(4)}, \hat{e}_1 \rangle + \frac{1}{4} \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle^2 + \frac{1}{6} \langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle \cdot \langle \gamma''', \hat{e}_2 \rangle \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \langle \gamma'', \hat{e}_2 \rangle^2 - \frac{1}{8} (\langle \gamma', \hat{e}_2 \rangle^2 + \langle \gamma'', \hat{e}_1 \rangle)^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right] \right) \\
&= \frac{1}{4} (t - t_o)^4 \left( \|\gamma''\|^2 - \langle \gamma'', e_1 \rangle^2 - \langle \gamma'', e_2 \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + (R^{-1} \|\gamma'\|^2 + \langle \gamma'', e_1 \rangle)^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\
&= \frac{1}{4} (t - t_o)^4 \left( \|\gamma'' - \langle \gamma'', e_1 \rangle e_1 - \langle \gamma'', e_2 \rangle e_2\|^2 \right. \\
&\quad \left. + (R^{-1} \|\gamma'\|^2 + \langle \gamma'', e_1 \rangle)^2 + \varepsilon_{t_o}(t) \right) .
\end{aligned}$$

Si on substitue nos résultats pour numérateur et dénominateur dans (39.9), on trouve l'égalité

$$\frac{\|\gamma'' - \langle \gamma'', e_1 \rangle e_1 - \langle \gamma'', e_2 \rangle e_2\|^2 + (R^{-1} \|\gamma'\|^2 + \langle \gamma'', e_1 \rangle)^2}{\|\gamma'\|^4} = 0$$

On doit donc avoir

$$\gamma'' - \langle \gamma'', e_1 \rangle e_1 - \langle \gamma'', e_2 \rangle e_2 = 0 \quad \text{et} \quad R^{-1} \|\gamma'\|^2 + \langle \gamma'', e_1 \rangle = 0 .$$

La première égalité dit qu'on doit avoir  $\gamma''(t_o) \in P$ . Étant donné que  $\gamma'(t_o)$  est colinéaire avec  $e_2$  et que  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont indépendants, on ne peut pas avoir  $\langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle = 0$ . En utilisant (39.13) on peut donc réécrire ces deux égalités comme

$$\langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle e_1 = \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o) \quad \text{et} \quad R = - \frac{\|\gamma'(t_o)\|^2}{\langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle} .$$

En prenant la norme de la première égalité, on trouve

$$|\langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle| = \left\| \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o) \right\| .$$

Mais le rayon est strictement positif, donc  $\langle \gamma''(t_o), e_1 \rangle < 0$ , ce qui nous permet (avec  $\|e_1\| = 1$ ) d'exprimer  $e_1$  et  $R$  comme

$$e_1 = - \frac{\gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o)}{\left\| \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o) \right\|}$$

$$R = \frac{\|\gamma'(t_o)\|^2}{\left\| \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o) \right\|} ,$$

ce qui nous donne pour  $M$  le vecteur

$$M = \gamma(t_o) - R e_1 = \gamma(t_o) + \frac{R^2}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \left( \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \gamma'(t_o) \right) .$$

Avec ce dernier calcul on a fini de montrer que si le cercle  $C$  décrit par le triplet  $(P, R, M)$  vérifie l'hypothèse de l'énoncé sous la forme (39.9), alors le plan  $P$  est décrit par le point de base  $\gamma(t_o)$  et les vecteurs directeurs  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  (car  $e_1, e_2$  sont combinaisons linéaires de ces deux vecteurs) et le rayon  $R$  et le centre  $M$  sont aussi déterminés par ces trois vecteurs. Autrement dit,  $C$  est complètement déterminé par la courbe  $\gamma$ , ce qui montre l'unicité. D'autre part, comme dans la preuve de [??], le même calcul montre que si on prenait ce cercle, alors (39.9) est vérifié, ce qui montre donc l'existence.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [10.5].** Il suffit de comparer les expressions pour  $\kappa_a(t_o)$  et  $R$  données dans [9.10] et [10.3].  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [10.6].** On a  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$  et donc

$$\gamma_2'(s_o) = \gamma_1'(\varphi(s_o)) \cdot \varphi'(s_o) = \gamma_1'(t_o) \cdot \varphi'(s_o)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2''(s_o) &= \gamma_1''(\varphi(s_o)) \cdot \varphi'(s_o)^2 + \gamma_1'(\varphi(s_o)) \cdot \varphi''(s_o) \\ &= \gamma_1''(t_o) \cdot \varphi'(s_o)^2 + \gamma_1'(t_o) \cdot \varphi''(s_o) , \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\gamma_2'(s_o), \gamma_2''(s_o)$  sont des combinaisons linéaires de  $\gamma_1'(t_o), \gamma_1''(t_o)$ . Il s'ensuit que si les premiers sont indépendants, alors les seconds le sont aussi. En échangeant les rôles et en écrivant  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi^{-1}$  on obtient l'implication dans l'autre sens.

Si c'est le cas, soit  $C$  le cercle associé à la courbe  $\gamma_1$  au point  $\gamma_1(t_o)$  par [??]. Alors par hypothèse on a

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), C)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|^2} = 0 .$$

Mais par continuité de la fonction  $\varphi$  on a aussi

$$\lim_{s \rightarrow s_o} \varphi(s) = \varphi(s_o) = t_o .$$

Par la composée de limites on a donc

$$\lim_{s \rightarrow s_o} \frac{d(\gamma_2(s), C)}{\|\gamma_2(s) - \gamma_2(s_o)\|^2} = \lim_{s \rightarrow s_o} \frac{d(\gamma_1(\varphi(s)), C)}{\|\gamma_1(\varphi(s)) - \gamma_1(t_o)\|^2} = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{d(\gamma_1(t), C)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_o)\|^2} = 0 .$$

Il s'ensuit que  $C$  vérifie la condition donnée dans [10.3] pour la courbe  $\gamma_2$  au point  $\gamma_2(s_o)$ . Par unicité c'est donc le cercle associé à la courbe  $\gamma_2$  au point  $\gamma_2(s_o)$ . CQFD

### Les preuves de §11

**Preuve de [11.2].** La condition que  $c(t)$  appartient à  $D_t$  se traduit immédiatement comme l'existence d'un nombre  $\lambda(t)$  tel que

$$c(t) = b(t) + \lambda(t) \cdot v(t) .$$

La condition que  $c'(t)$  est parallèle à  $D_t$  est équivalente à la condition que  $c'(t)$  et  $v(t)$  sont parallèles. Et dans  $\mathbf{R}^2$  deux vecteurs sont parallèles si et seulement s'ils sont dépendants, ce qui est le cas si et seulement si leur déterminant est nulle. Ainsi on obtient l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= \det(b'(t) + \lambda'(t) \cdot v(t) + \lambda(t) \cdot v'(t), v(t)) \\ &= \det(b'(t), v(t)) + \lambda'(t) \cdot \det(v(t), v(t)) + \lambda(t) \cdot \det(v'(t), v(t)) \\ &= \det(b'(t), v(t)) + \lambda(t) \cdot \det(v'(t), v(t)) . \end{aligned}$$

Le résultat annoncé en découle directement.  $\square$  CQFD

**Preuve de [11.3].** La droite  $D_t$  est décrite par le point de base  $\gamma(t)$  et le vecteur directeur  $v(t) = R_{\pi/2}\gamma'(t)$ . L'hypothèse que la courbure  $\kappa(t)$  ne s'annule pas est équivalente à la condition que  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants [10.8]. Il s'ensuit que  $v(t)$  et  $v'(t)$  ne sont jamais colinéaire, ce qui permet d'appliquer [11.2] et de conclure que la caustique est donnée par

$$\begin{aligned} c(t) &= \gamma(t) - \frac{\det(\gamma'(t), R_{\pi/2}\gamma'(t))}{\det(R_{\pi/2}\gamma''(t), R_{\pi/2}\gamma'(t))} \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t) \\ &= \gamma(t) - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}{\det(\gamma''(t), \gamma'(t))} \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t) , \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence immédiate de l'égalité  $R_{\pi/2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ . D'autre part, le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$  [10.8], donc un multiple de  $R_{\pi/2}\gamma'(t)$ , disons

$$(39.15) \quad k_\gamma(t) = \lambda \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t) .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\kappa_a(t) = \|k_\gamma(t)\| = |\lambda| \cdot \|\gamma'(t)\|$$

et donc le centre du cercle osculateur est donné par

$$\begin{aligned} M(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_a(t)^2} \cdot k_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{\lambda}{|\lambda|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2} \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t) \\ &= \gamma(t) + \frac{1}{\lambda \cdot \|\gamma'(t)\|^2} \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t) . \end{aligned}$$

Mais si on prend le déterminant avec  $\gamma'(t)$  dans (39.15) et qu'on substitue l'expression explicite pour  $k_\gamma(t)$  [10.7], on trouve

$$\lambda \cdot \|\gamma'(t)\|^2 = \det(\gamma'(t), k_\gamma(t)) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^2} = -\frac{\det(\gamma''(t), \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^2} .$$

On a donc :

$$M(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\lambda \cdot \|\gamma'(t)\|^2} \cdot R_{\pi/2}\gamma'(t)$$

$$= \gamma(t) - \frac{\|\gamma'(t)\|^2}{\det(\gamma''(t), \gamma'(t))} \cdot R_{\pi/2} \gamma'(t) = c(t) . \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [11.5].** La condition que  $c(t)$  appartient à  $D_t$  se traduit immédiatement comme l'existence d'un réel  $\lambda(t)$  tel qu'on a (11.6). La condition que  $c'(t)$  est orthogonal à  $D_t$  se traduit en  $\langle c'(t), v(t) \rangle = 0$ , ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= \langle b'(t) + \lambda'(t) \cdot v(t) + \lambda(t) \cdot v'(t), v(t) \rangle \\ &= \langle b'(t), v(t) \rangle + \lambda'(t) \cdot \langle v(t), v(t) \rangle + \lambda(t) \cdot \langle v'(t), v(t) \rangle . \end{aligned}$$

En divisant par  $\|v(t)\|^2$  on obtient le résultat annoncé.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [11.8].** La droite tangente est décrite par un point de base  $\gamma(t)$  et un vecteur directeur  $\gamma'(t)$ . Selon [11.5] il faut donc résoudre l'équation différentielle (11.7) avec  $b(t) = \gamma(t)$  et  $v(t) = \gamma'(t)$ . Mais pour une courbe paramétrée par longueur d'arc on a  $\|\gamma'(t)\| = 1$  et  $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$ . L'équation différentielle (11.7) se réduit donc à l'équation

$$\lambda'(t) = -1 ,$$

qui a comme solutions les fonctions  $\lambda(t) = -t + t_o$  avec  $t_o \in \mathbf{R}$  une constante (d'intégration) arbitraire.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §12

**Preuve de [12.4].** • (i). Si  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants, alors il est immédiat que  $\gamma'(t)$  et  $k_\gamma(t)$  sont aussi indépendants et qu'ils engendrent le même plan. Un vecteur n.u.p  $\mathbf{n}$  à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  est donc un vecteur de la forme  $\mathbf{n} = \lambda\gamma'(t) + \mu k_\gamma(t)$  vérifiant  $\langle \mathbf{n}, \gamma'(t) \rangle = 0$  et  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ . Avec l'orthogonalité  $\langle \gamma'(t), k_\gamma(t) \rangle = 0$  [10.8] ces conditions se transforment en  $\lambda = 0$  et  $\mu^2 = \langle k_\gamma(t), k_\gamma(t) \rangle$ , ce qui donne les deux résultats annoncés.

• (ii). On a vu ci-dessus que le vecteur  $\mathbf{n}(t) = k_\gamma(t)/\|k_\gamma(t)\|$  est un vecteur n.u.p à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Si  $\gamma$  est de classe  $C^2$ , alors  $k_\gamma$  est de classe  $C^{k-2}$ , donc (au moins) continue car  $k \geq 2$ . Il s'ensuit que  $\|k_\gamma\|$  est aussi continue, donc que le champ  $\mathbf{n}$  est continue (car  $\|k_\gamma(t)\|$  ne sera jamais nulle [10.8]).

• (iii). Si  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur n.u.p à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ , alors il est immédiat que  $-\mathbf{n}(t)$  l'est aussi.

• (iv). Soient  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  deux champs n.u.p le long  $\gamma$  et considérons la fonction (au moins) continue  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  définie comme

$$f(t) = |\langle \mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t) \rangle| .$$

Pour tout point  $t \in J$  on sait par (i) ci-dessus qu'on doit avoir  $\mathbf{n}_i(t) = \pm k_\gamma(t)/\|k_\gamma(t)\|$  et donc  $f(t) = 1$ . Par continuité de  $f$  et le fait que  $J \subset I$  est dense, on en déduit que  $f$  est constante égale à 1. Il s'ensuit que pour tout  $t \in I$  on a  $f(t) = \pm 1$ . Par continuité de  $f$  et le fait que  $I$  est un intervalle (donc connexe) il s'ensuit que  $f$  est soit constante égale à 1 ou constante égale à  $-1$ .

Si  $f$  est constante égale à 1, on sait de nouveau par (i) ci-dessus qu'on doit avoir  $\mathbf{n}_1(t) = \mathbf{n}_2(t)$  pour tout  $t \in J$ . Et donc par continuité des champs  $\mathbf{n}_i$  et le fait que  $J$  est dense dans l'ensemble connexe  $I$  on doit avoir  $\mathbf{n}_1(t) = \mathbf{n}_2(t)$  pour tout  $t \in I$ . Dans le cas  $f$  constante égale à  $-1$  le raisonnement est analogue en nous dira que  $\mathbf{n}_1(t) = -\mathbf{n}_2(t)$  pour tout  $t \in I$ . La conclusion est donc que si on a deux champs n.u.p  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$ , alors forcément  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$  ou  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ .  $\boxed{\text{CQFD}}$

**Preuve de [12.6].** On voudrait bien écrire  $\lambda(x) = g(x)/f(x)$ , mais on ne peut pas diviser par un vecteur, même pas si ce vecteur est non-nul. Pour contourner ce problème, on utilise une composante du vecteur, sauf qu'on ne sait pas laquelle. Et même si le vecteur  $f(x)$  est non-nul pour tout  $x \in U$ , il est hautement improbable qu'une de ces composantes est non-nulle pour tout  $x \in U$ . On va "donc" utiliser [36.2] pour recoller les différents endroits.

Soit  $a \in U$  arbitraire, alors, parce que  $f(a) \neq 0$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $f_i(a) \neq 0$ . Par continuité de la composante  $f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $f_i(x) \neq 0$  pour tout  $x \in B_\delta(a)$ .<sup>2</sup> Il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\forall x \in B_\delta(a) : \lambda(x) = \frac{g_i(x)}{f_i(x)} .$$

En tant que quotient de deux fonctions de classe  $C^k$  dont le dénominateur ne s'annule jamais, la restriction de la fonction  $\lambda$  à  $B_\delta(a)$  est de classe  $C^k$ . Par [36.2] on en déduit que  $\lambda$  est de classe  $C^k$  sur  $U$ .  $\boxed{\text{CQFD}}$

2. Strictement parlant il faut s'assurer que cette boule  $B_\delta(a)$  est contenu dans le domaine de définition  $U$ . Pour cela il faut invoquer le fait que  $U$  est ouvert, donc qu'il existe  $\delta_o > 0$  tel que  $B_{\delta_o}(a) \subset U$ . Et ensuite il faut remplacer  $\delta$  par  $\min(\delta, \delta_o)$ .

**Preuve de [12.7].** La matrice de la rotation d'angle  $\pi/2$  dans le plan est donnée par

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il s'ensuit que, si on note  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , alors que l'application  $\mathbf{n}$  est donnée par

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} .$$

Il est immédiat que ce  $\mathbf{n}(t)$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$ , unitaire et que  $\gamma''(t)$  appartient au plan engendré par  $\gamma'(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  (forcément, car ce plan est l'espace total). En plus, si  $\gamma$  est de classe  $C^k$ , alors  $\mathbf{n}$  est de classe  $C^{k-1}$  et donc certainement de classe  $C^{k-2}$ . C'est donc bien un champ n.u.p.

D'autre part, il est élémentaire de montrer que, pour un  $t \in I$  fixé,  $\pm \mathbf{n}(t)$  sont les seuls vecteurs unitaires orthogonaux à  $\gamma'(t)$ . Il s'ensuit que, si  $\hat{\mathbf{n}} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est un champ n.u.p, alors il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}$  telle que

$$\forall t \in I : \hat{\mathbf{n}}(t) = \varepsilon(t) \cdot \mathbf{n}(t) .$$

Par [12.6] cette fonction est (au moins) continue. Vu qu'elle ne s'annule jamais, elle est donc de signe constante, donc constante (car ne prenant que des valeurs  $\pm 1$ ).

CQFD

**Preuve de [12.9].** On calcule la courbure relative [12.1] à l'aide du champ n.u.p défini en [12.7] :

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \langle k_\gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \left( \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \gamma'(t) \right), \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} R_{\pi/2}(\gamma'(t)) \right\rangle \\ &= \frac{\langle \gamma''(t), R_{\pi/2}(\gamma'(t)) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} , \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence directe de l'égalité  $\det(v, w) = \langle w, R_{\pi/2}v \rangle$ , valable pour deux vecteurs  $v, w \in \mathbf{R}^2$ . On constate qu'on retrouve la courbure obtenue en [9.6].

CQFD



### Les preuves de §13

**Preuve de [13.3].** Selon [10.8] et [12.2] l'ensemble  $J$  est aussi décrit par

$$J = \{ t \in I \mid \gamma'(t) \text{ et } \gamma''(t) \text{ indépendants} \} .$$

On peut donc invoquer [12.4.iv] pour conclure qu'il n'y a que deux champs n.u.p possibles qui diffèrent par un signe global. Il s'ensuit que le produit de deux courbures relatives ne change pas de signe.  $\square$  CQFD

**Preuve de [13.7].** • (i). La droite tangente  $DT_{t_o}\gamma$  est décrite par le point de base  $\gamma(t_o)$  et le vecteur directeur  $\gamma'(t_o)$ , c'est-à-dire qu'un point de  $DT_{t_o}\gamma$  est de la forme  $\gamma(t_o) + \lambda \cdot \gamma'(t_o)$ . D'autre part, un point de  $P$  est de la forme  $\gamma(t_o) + \alpha \cdot \gamma'(t_o) + \beta \cdot \mathbf{n}(t_o)$ . Sachant que  $\mathbf{n}(t_o)$  est orthogonal à  $\gamma'(t_o)$ , il est immédiat qu'on a

$$DT_{t_o}\gamma = \{ x \in P \mid \langle x - \gamma(t_o), \mathbf{n}(t_o) \rangle = 0 \} .$$

• (ii-iii). L'idée de la preuve est d'écrire la quantité  $\langle \gamma(t) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle$  comme l'intégrale d'une fonction avec un signe constant, ce qui permettra d'avoir une conclusion concernant son signe. On le fait en trois étapes. On commence à trouver un voisinage de  $t_o$  dans lequel la courbure (relative) a un signe constant à gauche et à droite de  $t_o$ . Ensuite on trouve un voisinage de  $t_o$  dans lequel le produit scalaire  $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t_o) \rangle$  ne s'annule pas. Et pour conclure on exprime  $\langle \gamma(t) - p, \mathbf{n}(t_o) \rangle$  comme une intégrale dans laquelle figurent les deux quantités précédentes, ce qui permettra de conclure. Mais cette idée sera modifiée dès le début, car la dernière étape se fait pour une courbe paramétrée par longueur d'arc. On remplacera donc dès le début notre courbe par une courbe hyperrégulière équivalente par reparamétrage et paramétrée par longueur d'arc.<sup>3</sup>

Commençons donc avec la remarque que selon [12.3] notre courbe  $\gamma$  est équivalente à une courbe hyperrégulière paramétrée par longueur d'arc  $\hat{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  (avec essentiellement le même champ n.u.p), soit  $\varphi : J \rightarrow I$  la fonction de reparamétrage et soit  $u_o = \varphi^{-1}(t_o)$  de sorte qu'on a  $\gamma(t_o) = \hat{\gamma}(u_o)$ . Si  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est le champ n.u.p le long la courbe  $\gamma$ , alors  $\hat{\mathbf{n}} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  défini par  $\hat{\mathbf{n}}(u) = \mathbf{n}(\varphi(u))$  est un champ n.u.p le long la courbe  $\hat{\gamma}$ . Et si  $k_\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est le vecteur de courbure associé à la courbe  $\gamma$ , alors le vecteur de courbure  $k_{\hat{\gamma}} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  associé à la courbe  $\hat{\gamma}$  est donné par  $k_{\hat{\gamma}}(u) = k_\gamma(\varphi(u))$  [10.9]. La fonction de courbure relative  $\hat{\kappa} : J \rightarrow \mathbf{R}$  de la courbe  $\hat{\gamma}$  est donc donnée par

$$\hat{\kappa}(u) = \langle k_{\hat{\gamma}}(u), \hat{\mathbf{n}}(u) \rangle = \langle k_\gamma(\varphi(u)), \mathbf{n}(\varphi(u)) \rangle = \kappa(\varphi(u)) .$$

Supposons maintenant que  $p = \gamma(t_o) = \hat{\gamma}(u_o)$  est un point ordinaire ou d'inflexion. Alors selon la définition il existe  $\delta_o > 0$  tel que pour tout  $0 < |t - t_o| < \delta_o$  on a  $\kappa(t) \neq 0$ , ce qui est équivalente à l'existence d'un  $\delta'_o > 0$  tel que pour tout  $0 < |u - u_o| < \delta'_o$  on a  $\hat{\kappa}(u) \neq 0$  (simplement parce que  $\varphi$  est en particulier un homéomorphisme). La fonction de courbure (relative) étant continue, il s'ensuit qu'il existe  $\epsilon = \pm 1$  tel que pour tout  $u \in ]u_o, u_o + \delta'_o[$  (un intervalle, donc connexe) on a  $\epsilon \cdot \hat{\kappa}(u) > 0$ . Selon la définition on aura donc pour  $v \in ]u_o - \delta'_o, u_o[$  la propriété

$$p \text{ point ordinaire} \Rightarrow \epsilon \cdot \hat{\kappa}(v) > 0 \quad \text{et}$$

$$p \text{ point d'inflexion} \Rightarrow \epsilon \cdot \hat{\kappa}(v) < 0 .$$

Ensuite on remarque que la fonction  $f(u) = \langle \hat{\mathbf{n}}(u), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle$  est continue et qu'elle vaut 1 pour  $u = u_o$  (le champ  $\hat{\mathbf{n}}$  est unitaire). Il existe donc  $0 < \delta'_1 \leq \delta'_o$  tel que

3. J'ai essayé de trouver un calcul "direct convenable" sans passer par le reparamétrage par longueur d'arc, mais je ne l'ai pas trouvé.

$f(u) > 0$  pour tout  $u \in ]u_o - \delta'_1, u_o + \delta'_1[$ . Et on “termine” avec la remarque qu’on a les égalités

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(u) - \hat{\gamma}(u_o) &= \int_{u_o}^u \hat{\gamma}'(v) \, dv = \int_{u_o}^u \left( \hat{\gamma}'(u_o) + \int_{u_o}^v \hat{\gamma}''(w) \, dw \right) dv \\ &= (u - u_o) \cdot \hat{\gamma}'(u_o) + \int_{u_o}^u (u - w) \cdot \hat{\gamma}''(w) \, dw ,\end{aligned}$$

ce qui est essentiellement la formule de Taylor-Laplace avec reste intégrale. Sachant que  $\hat{\mathbf{n}}(u_o)$  est orthogonal à  $\hat{\gamma}'(u_o)$ , on en déduit l’égalité

$$\langle \hat{\gamma}(u) - \hat{\gamma}(u_o), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle = \int_{u_o}^u (u - w) \cdot \langle \hat{\gamma}''(w), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle \, dw .$$

Avec ces préparations, c’est l’heure de la récolte. Pour une courbe paramétrée par longueur d’arc on a l’égalité  $\hat{\gamma}''(u) = k_{\hat{\gamma}}(u)$  [10.8] et la définition de la courbure relative nous donne l’égalité  $k_{\hat{\gamma}}(u) = \hat{\kappa}(u) \cdot \hat{\mathbf{n}}(u)$  [12.1]. On a donc l’égalité

$$\epsilon \cdot \langle \hat{\gamma}(u) - \hat{\gamma}(u_o), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle = \int_{u_o}^u (u - w) \cdot \epsilon \cdot \hat{\kappa}(w) \cdot \langle \hat{\mathbf{n}}(w), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle \, dw .$$

Mais pour  $u \in ]u_o, u_o + \delta'_1[$  et “donc”  $w \in ]u_o, u_o + \delta'_1[$  (il n’y a que  $w = u_o$  où ça pourrait être nul, mais cela ne contribue pas à l’intégrale) on a  $\epsilon \cdot \hat{\kappa}(w) > 0$  et  $\langle \hat{\mathbf{n}}(w), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle > 0$  et donc on prend l’intégrale d’une fonction strictement positive, donc

$$\epsilon \cdot \langle \hat{\gamma}(u) - \hat{\gamma}(u_o), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle > 0 .$$

Par continuité de  $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$  il existe  $\delta > 0$  tel qu’on a

$$|t - t_o| < \delta \quad \implies \quad |\varphi^{-1}(t) - u_o| < \delta'_1 .$$

Pour tout  $t \in ]t_o, t_o + \delta[$  on aura donc

$$\epsilon \cdot \langle \gamma(t) - \gamma(t_o), \mathbf{n}(t_o) \rangle \equiv \epsilon \cdot \langle \hat{\gamma}(\varphi^{-1}(t)) - \hat{\gamma}(u_o), \hat{\mathbf{n}}(u_o) \rangle > 0 ,$$

ce qui est la conclusion souhaitée.

Pour  $u \in ]u_o - \delta'_1, u_o[$  l’argument est similaire, sauf que là il faut distinguer le cas d’un point ordinaire d’un point d’inflexion, où il y a une différence de signe pour  $\epsilon \cdot \hat{\kappa}(w)$ , ce qui donnera la différence de signe dans la conclusion entre un point ordinaire et un point d’inflexion.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [13.10].** On commence avec une formule qui relie les dérivées de  $\hat{\gamma}$  aux dérivées de  $\gamma$  qui dit que pour tout  $1 \leq i$  et tout  $s \in J$  on a

$$(39.16) \quad \hat{\gamma}^{(i)}(s) = \gamma^{(i)}(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^i + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma^{(j)}(\varphi(s)) \cdot P_{i,j}^\varphi ,$$

où  $P_{i,j}^\varphi$  est un polynôme en les dérivées de  $\varphi$ .

Strictement parlant il faut préciser la classe de dérivabilité des fonctions concernées et se limiter à cette classe. Si  $\gamma$ ,  $\hat{\gamma}$  et  $\varphi$  sont de classe  $C^\infty$ , il n’y a pas de contrainte, mais si elles sont de classe  $C^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , alors il faut limiter  $i \leq k$ . Ceci ne pose pas de problèmes, car l’hypothèse dit qu’il y a deux dérivées indépendantes qui sont “donc” des dérivées d’ordre inférieur ou égale à  $k$ .

La preuve de (39.16) se fait par récurrence en  $i$ . Étant donné qu’on a  $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , on a

$$\hat{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^1 ,$$

ce qui est bien le cas  $i = 1$ . Supposons donc que c'est vrai au rang  $i$  et calculons le rang  $i + 1$  :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^{(i+1)}(s) &= (\hat{\gamma}^{(i)}(s))' = \left( \gamma^{(i)}(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^i + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma^{(j)}(\varphi(s)) \cdot P_{i,j}^\varphi \right)' \\ &= \gamma^{(i+1)}(s) \cdot (\varphi'(s))^{i+1} + \gamma^{(i)}(s) \cdot i \cdot (\varphi'(s))^{i-1} \cdot \varphi''(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \gamma^{(j+1)}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \cdot P_{i,j}^\varphi \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \gamma^{(j)}(\varphi(s)) \cdot (P_{i,j}^\varphi)' \right) .\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que les trois termes

$$i \cdot (\varphi'(s))^{i-1} \cdot \varphi''(s) \quad , \quad \varphi'(s) \cdot P_{i,j}^\varphi \quad \text{et} \quad (P_{i,j}^\varphi)'$$

sont des polynômes en les dérivées de  $\varphi$ , et qu'ils sont le coefficient d'une dérivée de  $\gamma$  d'ordre strictement inférieur à  $i + 1$ . Ce qui montre que la formule est vrai au rang  $i + 1$ .

Si on applique cette formule à la définition de  $p$  pour la courbe  $\gamma$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\gamma^{(k)}(t_o) = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq k < p \quad \text{et} \quad \gamma^{(p)}(t_o) \neq 0 ,$$

alors on voit que pour  $1 \leq i < p$  on a

$$\hat{\gamma}^{(i)}(s_o) = \gamma^{(i)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^i + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma^{(j)}(t_o) \cdot P_{i,j}^\varphi = 0 ,$$

simplement parce qu'il n'y a que des dérivées  $\gamma^{(j)}(t_o)$  avec  $j < p$  qui interviennent. Pour  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$  on trouve :

$$\hat{\gamma}^{(p)}(s_o) = \gamma^{(p)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^p + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma^{(j)}(t_o) \cdot P_{p,j}^\varphi = \gamma^{(p)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^p \neq 0 ,$$

parce que les termes dans la somme  $\sum_{j=1}^{p-1}$  sont tous nuls à cause des dérivées  $\gamma^{(j)}(t_o)$  avec  $j < p$  et parce que  $\gamma^{(p)}(t_o) \neq 0$  par hypothèse  $((\varphi'(s_o))^p \neq 0$  car  $\varphi$  est un difféomorphisme). La conclusion est donc que  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$  est aussi la première dérivée non-nulle de  $\hat{\gamma}$  en  $s_o$  et que les vecteurs  $\gamma^{(p)}(t_o)$  et  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$  sont colinéaire.

Passons maintenant à la définition de  $q$  avec l'hypothèse sur  $\gamma$  qu'on a

$$\begin{aligned}\gamma^{(k)}(t_o) &\text{ colinéaire avec } \gamma^{(p)}(t_o) \quad \text{pour tout } p < k < q \\ \gamma^{(q)}(t_o) &\text{ indépendant de } \gamma^{(p)}(t_o) .\end{aligned}$$

Pour  $\hat{\gamma}^{(k)}(s_o)$  avec  $p < k < q$  on trouve :

$$\hat{\gamma}^{(k)}(s_o) = \gamma^{(k)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma^{(j)}(t_o) \cdot P_{k,j}^\varphi ,$$

ce qui ne contient que des dérivées  $\gamma^{(j)}(t_o)$  avec  $j < q$  qui sont donc soit nulles, soit colinéaires avec  $\gamma^{(p)}(t_o)$ , ce qui est colinéaire avec  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$ . Il s'ensuit que  $\hat{\gamma}^{(k)}(s_o)$  pour  $k < q$  est colinéaire avec  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$ . Et pour  $\hat{\gamma}^{(q)}(s_o)$  on trouve :

$$\hat{\gamma}^{(q)}(s_o) = \gamma^{(q)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^q + \sum_{j=1}^{q-1} \gamma^{(j)}(t_o) \cdot P_{q,j}^\varphi .$$

Tous les termes dans la somme  $\sum_{j=1}^{q-1}$  contiennent que des dérivées  $\gamma^{(j)}(t_o)$  avec  $j < q$  qui sont donc toutes colinéaires avec  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$ . Si  $\hat{\gamma}^{(q)}(s_o)$  était dépendant de  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$ , alors le vecteur  $\gamma^{(q)}(t_o) \cdot (\varphi'(s_o))^q$  devrait l'être aussi. Mais c'est un multiple de  $\gamma^{(q)}(t_o)$ , qui est, par hypothèse, indépendant de  $\gamma^{(p)}(t_o)$ , donc aussi indépendant de  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$  qui en est colinéaire. Cette contradiction montre que  $\hat{\gamma}^{(q)}(s_o)$  est aussi la première dérivée de  $\hat{\gamma}$  indépendante de  $\hat{\gamma}^{(p)}(s_o)$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [13.14].** On reprend la discussion du développement limité de la courbe  $\gamma$  au voisinage de  $t_o$  après la formule compacte (13.12). On en déduit immédiatement que la projection orthogonale de  $\gamma(t)$  sur  $P$  est donnée par

$$\pi_P(\gamma(t)) = \gamma(t_o) + f(t) \cdot (t - t_o)^p \cdot e_1 + g(t) \cdot (t - t_o)^q \cdot e_2 .$$

Si on veut exprimer cela comme le graphe d'une fonction dans le repère  $e_1, e_2$ , il faut exprimer la fonction  $g(t) \cdot (t - t_o)^q$  en termes de la fonction  $f(t) \cdot (t - t_o)^p$ . L'idée qui vient directement à l'esprit est de résoudre  $t$  de l'équation  $x = f(t) \cdot (t - t_o)^p$  et de substituer le résultat dans  $y = g(t) \cdot (t - t_o)^q$ . Pour cela le théorème des fonctions implicites est l'outil indiqué, sauf que ce théorème ne s'applique pas (directement) dans ce cas, à cause de la puissance  $p > 1$ . Au lieu de regarder l'équation  $x = f(t) \cdot (t - t_o)^p$  on va regarder l'équation

$$\xi = (t - t_o) \cdot \sqrt[p]{f(t)} ,$$

ce qui aura un sens dans un voisinage de  $t_o$ , car  $f(t)$  sera proche de 1.

Plus précisément, la formule de Taylor-Laplace (avec reste intégrale) montre que si  $\gamma$  est de classe  $C^{q+2}$ , alors le reste  $\varepsilon(t)$  dans le développement limité d'ordre  $q$  de  $\gamma$  sera une fonction de classe  $C^1$  (elle s'exprime comme une intégrale de  $\gamma^{(q+1)}$ ). Il s'ensuit que les fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont de classe  $C^1$ , donc les fonctions  $f$  et  $g$  également. La fonction  $f$  étant en particulier continue et vérifiant  $\lim_{t \rightarrow t_o} f(t) = 1$ , on en déduit l'existence d'un  $\delta_1 > 0$  tel qu'on a

$$|t - t_o| < \delta_1 \quad \implies \quad f(t) > 0 .$$

Il s'ensuit que la fonction  $\sqrt[p]{f(t)}$  est bien définie et de classe  $C^1$  sur ce voisinage  $I_1 = ]t_o - \delta_1, t_o + \delta_1[ \subset I$  de  $t_o$ .

Strictement parlant on ne peut pas (directement) affirmer qu'on a l'inclusion  $I_1 \subset I$ . Mais  $I \subset \mathbf{R}$  est un ouvert, donc on peut toujours réduire  $\delta_1$  pour rester dans  $I$ .

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, on introduit la fonction  $F : \mathbf{R} \times I_1 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$F(\xi, t) = (t - t_o) \cdot \sqrt[p]{f(t)} - \xi ,$$

et on constate qu'on a  $F(0, t_o) = 0$  et  $(\partial_2 F)(0, t_o) = \sqrt[p]{f(t_o)} = 1$ . Le théorème des fonctions implicites [37.1] nous donne alors  $\delta_2, \delta_3 > 0$  et une fonction  $h : ]-\delta_2, \delta_2[ \rightarrow ]t_o - \delta_3, t_o + \delta_3[$  de classe  $C^1$  vérifiant

- (i)  $]-\delta_2, \delta_2[ \times ]t_o - \delta_3, t_o + \delta_3[ \subset \mathbf{R} \times I_1$ .
- (ii)  $\forall (\xi, t) \in ]-\delta_2, \delta_2[ \times ]t_o - \delta_3, t_o + \delta_3[ : \quad F(\xi, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = h(\xi)$ .
- (iii)  $\forall \xi \in ]-\delta_2, \delta_2[ : \quad h'(\xi) = -\frac{(\partial_1 F)(\xi, h(\xi))}{(\partial_2 F)(\xi, h(\xi))} \equiv \frac{1}{(\partial_2 F)(\xi, h(\xi))}$ .

Sachant qu'on a  $h(0) = t_o$  et donc  $h'(0) = 1$ , on déduit de (iii) que  $h'(\xi) > 0$  pour tout  $\xi \in ]-\delta_2, \delta_2[$  (la dérivée existe, ne peut pas s'annuler et est positive en  $\xi = 0$ ). La fonction  $h$  est donc strictement croissante, ce qui implique qu'il existe  $0 < \delta_{\pm} \leq \delta_3$  tel que

$$h : ]-\delta_2, \delta_2[ \rightarrow ]t_o - \delta_-, t_o + \delta_+[ \quad \text{est un } C^1\text{-difféomorphisme.}$$

Avec ceci on peut établir le lien entre les coefficient  $x$  et  $y$  définis par

$$f(t) \cdot (t - t_o)^p \cdot e_1 + g(t) \cdot (t - t_o)^q \cdot e_2 = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 .$$

Pour  $t \in ]t_o, t_o + \delta_+[$  on a  $\xi = h^{-1}(t) \in ]0, \delta_2[$  et donc

$$0 < x = \xi^p < \delta_2^p \quad \text{avec} \quad t = h(\xi) = h(x^{1/p}) .$$

Pour  $y$  on trouve donc l'expression

$$y = g(t) \cdot (t - t_o)^q = (\sqrt[p]{f(t)} \cdot (t - t_o))^q \cdot \frac{g(t)}{(f(t))^{q/p}} = x^{q/p} \cdot \frac{g(h(x^{1/p}))}{(f(h(x^{1/p})))^{q/p}} .$$

Si on définit  $\delta = \delta_2^p$  et la fonction  $E_+$  par

$$E_+(x) = \frac{g(h(x^{1/p}))}{(f(h(x^{1/p})))^{q/p}} - 1 ,$$

alors on aura montré l'égalité

$$\pi_P(\gamma(]t_o, t_o + \delta_+[)) = \{ \gamma(t_o) + x \cdot e_1 + x^{q/p} \cdot (1 + E_+(x)) \cdot e_2 \mid x \in ]0, \delta[ \} .$$

Reste donc à montrer que la fonction  $E_+$  prend ses valeurs dans  $] -1, \infty[$  et qu'on a  $\lim_{x \downarrow 0} E_+(x) = 0$ . Mais cela est "évident," car  $f$  et  $g$  sont positives, donc automatiquement  $E_+(x) > -1$ . Et pour la limite il suffit de remarquer qu'on a

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{1/p} = 0 \quad , \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} h(\xi) = t_o \quad , \quad \lim_{t \rightarrow t_o} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_o} g(t) = 1 ,$$

dont on déduit immédiatement le résultat voulu.

Pour le cas  $t \in ]t_o - \delta_-, t_o[$ , on aura  $\xi = h^{-1}(t) \in ]-\delta_2, 0[$ . En tenant compte des signes, on aura donc

$$x = \xi^p = (-1)^p \cdot |\xi|^p \quad , \quad x = (-1)^p \cdot |x| \quad \text{et} \quad 0 < |x| \equiv |\xi|^p < \delta_2^p$$

avec

$$\xi = -|x|^{1/p} \quad \text{et} \quad t = h(\xi) = h(-|x|^{1/p}) .$$

Ceci nous donne pour  $y$  l'expression

$$\begin{aligned} y &= g(t) \cdot (t - t_o)^q = (\sqrt[p]{f(t)} \cdot (t - t_o))^q \cdot \frac{g(t)}{(f(t))^{q/p}} \\ &= (-|x|^{1/p})^q \cdot \frac{g(h(-|x|^{1/p}))}{(f(h(-|x|^{1/p})))^{q/p}} = (-1)^q \cdot |x|^{q/p} \cdot \frac{g(h(-|x|^{1/p}))}{(f(h(-|x|^{1/p})))^{q/p}} . \end{aligned}$$

Et donc, si on définit la fonction  $E_- : ]0, \delta[ \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$E_-(x) = \frac{g(h(-x^{1/p}))}{(f(h(-x^{1/p})))^{q/p}} - 1 ,$$

alors on aura démontré la formule (en remplaçant  $|x|$  par  $x > 0$ )

$$\begin{aligned} \pi_P(\gamma(]t_o - \delta_-, t_o[)) &= \\ \{ \gamma(t_o) + (-1)^p \cdot x \cdot e_1 + (-1)^q \cdot x^{q/p} \cdot (1 + E_-(x)) \cdot e_2 \mid x \in ]0, \delta[ \} . \end{aligned}$$

Le fait qu'on a  $\lim_{x \downarrow 0} E_-(x) = 0$  et  $E_-(x) > -1$  se démontre comme pour la fonction  $E_+$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [13.15].** Soit  $p \in \mathbf{N}^*$  tel que  $\gamma^{(p)}(t_o) \neq 0$  et tel que  $\gamma^{(j)}(t_o) = 0$  pour tout  $1 \leq j < p$  (un tel  $p$  existe par hypothèse). On a “donc” le développement limité d'ordre  $p - 1$  de la fonction  $\gamma'$  au voisinage de  $t_o$  :

$$\gamma'(t) = \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t - t_o)^{p-1} \varepsilon_{t_o}(t) ,$$

avec  $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_{t_o}(t) = 0$ . En particulier on a

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \frac{(p-1)!}{(t - t_o)^{p-1}} \cdot \gamma'(t) = \gamma^{(p)}(t_o) \neq 0 .$$

En prenant  $\varepsilon = \|\gamma^{(p)}(t_o)\|$  dans la définition de limite, il existe  $\delta > 0$  tel qu'on a

$$\forall t \in I : 0 < |t - t_o| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\left| \left\| \frac{(p-1)!}{(t - t_o)^{p-1}} \cdot \gamma'(t) \right\| - \|\gamma^{(p)}(t_o)\| \right| \leq \left\| \frac{(p-1)!}{(t - t_o)^{p-1}} \cdot \gamma'(t) - \gamma^{(p)}(t_o) \right\| < \varepsilon$$

et donc en particulier (avec la définition de  $\varepsilon$ )

$$(39.17) \quad \forall t \in I : 0 < |t - t_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{(p-1)!}{(t - t_o)^{p-1}} \cdot \gamma'(t) \right\| > 0 .$$

Étant donné que  $I$  est ouvert, il existe  $\delta' > 0$  tel que  $]t_o - \delta', t_o + \delta'[ \subset I$ . En remplaçant  $\delta$  par  $\min(\delta, \delta')$ , on déduit immédiatement de (39.17) qu'on a bien  $J = ]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$  et

$$\forall t \in J \setminus \{t_o\} : \gamma'(t) \neq 0 . \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [13.16].** En imitant le raisonnement qui nous a amené à (13.12), on trouve les développements limités de  $\gamma'(t)$  (d'ordre  $q - 1$ ) et  $\gamma''(t)$  (d'ordre  $q - 2$ ) au voisinage de  $t_o$  comme

$$\gamma'(t) = (t - t_o)^{p-1} \cdot g(t) \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + \frac{(t - t_o)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot \gamma^{(q)}(t_o) + (t - t_o)^{q-1} \varepsilon_{t_o}(t) ,$$

où  $g(t)$  désigne le polynôme

$$g(t) = \frac{1}{(p-1)!} + \sum_{p < i < q} \frac{(t - t_o)^{i-p}}{(i-1)!} \cdot a_i$$

et

$$\gamma''(t) = (t - t_o)^{p-2} \cdot h(t) \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + \frac{(t - t_o)^{q-2}}{(q-2)!} \cdot \gamma^{(q)}(t_o) + (t - t_o)^{q-2} \varepsilon_{t_o}(t) ,$$

où  $h(t)$  désigne le polynôme

$$h(t) = \frac{p-1}{(p-1)!} + \sum_{p < i < q} \frac{(t - t_o)^{i-p}}{(i-2)!} \cdot a_i ,$$

avec bien évidemment  $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_{t_o}(t) = 0$ .

À ce stade il y a deux remarques importantes à faire. D'abord qu'il est d'habitude de noter toutes les fonctions "reste" dans un développement limité par le même symbole  $\varepsilon_{t_o}(t)$ , bien que, à chaque ligne d'un calcul il s'agit d'une fonction différente. C'est déjà le cas ici avec les définitions des développements limités de  $\gamma'$  et de  $\gamma''$  où les deux fonctions  $\varepsilon$  ne seront pas les mêmes; et cela sera le cas dans les calculs qui suivent. La raison de cette habitude est qu'une telle fonction ne nous intéresse pas du tout, seulement le fait qu'elle a la propriété  $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_{t_o}(t) = 0$ .

La deuxième remarque concerne le développement limité de  $\gamma''$ . À première vue on a l'impression que cette formule doit être fausse dans le cas  $p = 1$ , car un développement limité ne commence pas avec une puissance négative  $-1 = 1 - 2 = p - 2$  de  $t - t_o$ . Mais ce n'est qu'une illusion d'optique, car le fait qu'on n'a pas simplifié le terme  $(p - 1)/(p - 1)!$  en  $1/(p - 2)!$  dans l'expression pour la fonction  $h$  permet de dire qu'elle existe aussi dans le cas  $p = 1$  (où elle donne la valeur 0) et que "donc" les termes suivantes  $\sum_{p < i < q} a_i (t - t_o)^{i-p}/(i - 2)!$  contiennent tous (au moins) un facteur  $(t - t_o)$  qui compense le facteur  $(t - t_o)^{p-2} = (t - t_o)^{-1}$ . Le développement limité donné pour  $\gamma''$  est donc bien valable dans tous les cas.

Pour trouver le développement limité de  $\gamma''_{\perp}$  on calcule les différentes composantes de la formule donnant  $\gamma''_{\perp}$ . Pour alléger les formules et (donc) améliorer la lisibilité, on introduit  $\Delta = q - p$  et on notera les vecteurs fixes  $\gamma^{(p)}(t_o)$  et  $\gamma^{(q)}(t_o)$  comme  $\gamma_o^{(p)}$  et  $\gamma_o^{(q)}$ . Certains détails seront expliqués à la fin pour ne pas interrompre le fil conducteur du calcul.

- On commence avec le produit scalaire dans le numérateur.

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle &= (t - t_o)^{2p-3} \cdot \left\langle g(t) \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{\Delta}}{(q - 1)!} \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t), \right. \\ &\quad \left. h(t) \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{\Delta}}{(q - 2)!} \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right\rangle \\ &= (t - t_o)^{2p-3} \cdot \left[ g(t) h(t) \|\gamma_o^{(p)}\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^{\Delta} \left( \frac{g(t)}{(q - 2)!} + \frac{h(t)}{(q - 1)!} \right) \langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right] \end{aligned}$$

- Ensuite on traite le dénominateur

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= (t - t_o)^{2p-2} \cdot \left\langle g(t) \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{\Delta}}{(q - 1)!} \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t), \right. \\ &\quad \left. g(t) \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{\Delta}}{(q - 1)!} \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right\rangle \\ &= (t - t_o)^{2p-2} \cdot \left( g(t)^2 \|\gamma_o^{(p)}\|^2 + (t - t_o)^{\Delta} \frac{2g(t)}{(q - 1)!} \langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\ &= (t - t_o)^{2p-2} \cdot g(t)^2 \|\gamma_o^{(p)}\|^2 \cdot \left( 1 + \frac{2(t - t_o)^{\Delta}}{g(t)(q - 1)!} \cdot \frac{\langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2} \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right) \end{aligned}$$

- Suit le quotient

$$\begin{aligned} \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} &= \frac{1}{(t - t_o) \cdot g(t)^2 \|\gamma_o^{(p)}\|^2} \cdot \left[ g(t) h(t) \|\gamma_o^{(p)}\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (t - t_o)^{\Delta} \left( \frac{g(t)}{(q - 2)!} + \frac{h(t)}{(q - 1)!} \right) \langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle + (t - t_o)^{\Delta} \varepsilon_{t_o}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( 1 - \frac{2(t-t_o)^\Delta}{g(t)(q-1)!} \cdot \frac{\langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2} + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\
& = \frac{1}{(t-t_o) \cdot g(t)^2 \|\gamma_o^{(p)}\|^2} \cdot \left[ g(t) h(t) \|\gamma_o^{(p)}\|^2 \right. \\
& \quad \left. + (t-t_o)^\Delta \langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle \left( \frac{g(t)}{(q-2)!} - \frac{h(t)}{(q-1)!} \right) + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right]
\end{aligned}$$

- et la partie dans la direction de  $\gamma'(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \gamma'(t) &= \frac{(t-t_o)^{p-2}}{g(t)^2 \|\gamma_o^{(p)}\|^2} \cdot \left[ g(t) h(t) \|\gamma_o^{(p)}\|^2 \right. \\
&\quad \left. + (t-t_o)^\Delta \cdot \langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle \cdot \left( \frac{g(t)}{(q-2)!} - \frac{h(t)}{(q-1)!} \right) \right. \\
&\quad \left. + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right] \\
&\quad \cdot \left( g(t) \gamma_o^{(p)} + \frac{(t-t_o)^\Delta}{(q-1)!} \gamma_o^{(q)} + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\
&= (t-t_o)^{p-2} \left\{ h(t) \gamma_o^{(p)} + (t-t_o)^\Delta \cdot \left[ \frac{h(t)}{g(t)(q-1)!} \gamma_o^{(q)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle}{g(t) \|\gamma_o^{(p)}\|^2} \cdot \left( \frac{g(t)}{(q-2)!} - \frac{h(t)}{(q-1)!} \right) \gamma_o^{(p)} \right] \right. \\
&\quad \left. + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right\} \\
&= (t-t_o)^{p-2} \left\{ h(t) \gamma_o^{(p)} + (t-t_o)^\Delta \cdot \left[ \frac{\langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle}{(q-2)! \|\gamma_o^{(p)}\|^2} \gamma_o^{(p)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h(t)}{g(t)(q-1)!} \left( \gamma_o^{(q)} - \frac{\langle \gamma_o^{(p)}, \gamma_o^{(q)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2} \gamma_o^{(p)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) \right\} .
\end{aligned}$$

- Et finalement le développement limité de  $\gamma''_\perp$  :

$$\begin{aligned}
\gamma''_\perp(t) &= \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \gamma'(t) \\
&= (t-t_o)^{q-2} \cdot \left( \frac{1}{(q-2)!} - \frac{h(t)}{g(t)(q-1)!} \right) \cdot \gamma_\perp^{(q)} + (t-t_o)^{q-2} \varepsilon_{t_o}(t) \\
&= (t-t_o)^{q-2} \frac{q-p}{(q-1)!} \gamma_\perp^{(q)} + (t-t_o)^{q-2} \varepsilon_{t_o}(t) .
\end{aligned}$$

On a gardé jusqu'à la fin les fonctions/polynômes  $g$  et  $h$ , bien que à certains endroits dans les développements limités on aurait pu les remplacer par leurs termes constants  $g(t_o)$  et  $h(t_o)$  respectivement. Par exemple, il n'est pas faux d'écrire (comme on l'a fait)

$$(t-t_o)^\Delta g(t) + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) ,$$

mais vu l'ordre du développement, on aurait pu le "simplifier" en

$$(t-t_o)^\Delta g(t_o) + (t-t_o)^\Delta \varepsilon_{t_o}(t) .$$



Qu'on ne l'a pas fait est parce que à d'autres endroits ces polynômes contribuent au développement limité, des contributions qui disparaissent dans le résultat final. On a donc préféré de les garder partout pour ne pas "mutiler" le flot du calcul. Ce n'est que dans la dernière ligne qu'on a effectué le développement limité (du quotient  $h/g$ , dont on n'a besoin que de l'ordre 0).  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [13.17].** Soit  $p, q \in \mathbf{N}^*$  comme dans [13.8] et soit  $\gamma''_{\perp}(t)$  comme dans [13.16]. Alors on déduit de ce même [13.16] et l'hypothèse que  $\gamma^{(p)}(t_o)$  et  $\gamma^{(q)}(t_o)$  sont indépendants qu'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_o} (t - t_o)^{2-q} \cdot \gamma''_{\perp}(t) = \frac{q-p}{(q-1)!} \cdot \left( \gamma^{(q)}(t_o) - \frac{\langle \gamma^{(p)}(t_o), \gamma^{(q)}(t_o) \rangle}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|^2} \gamma^{(p)}(t_o) \right) \neq 0 .$$

Comme dans la preuve de [13.15] on en déduit qu'il existe  $0 < \delta' \leq \delta$  tel qu'on a

$$\forall t \in J_1 : 0 < |t - t_o| < \delta \implies \gamma''_{\perp}(t) \neq 0 .$$

Il s'ensuit que les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants sur  $J' \setminus \{t_o\}$ , car  $\gamma'(t) \neq 0$  sur  $J \setminus \{t_o\} \supset J' \setminus \{t_o\}$  [13.15] et la partie de  $\gamma''(t)$  orthogonal à  $\gamma'(t)$  est non-nul sur  $J' \setminus \{t_o\}$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [13.18].** Selon [13.17] on a  $\gamma''_{\perp}(t) \neq 0$  pour  $t \in J' \setminus \{t_o\}$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{n}$  est bien définie sur  $J'$  et continue sur  $J' \setminus \{t_o\}$ . En plus, selon [13.16] on a les limites

$$\lim_{t \downarrow t_o} \frac{\gamma''_{\perp}(t)}{\|\gamma''_{\perp}(t)\|} = \frac{\gamma^{(q)}_{\perp}}{\|\gamma^{(q)}_{\perp}\|} \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_o} \frac{\gamma''_{\perp}(t)}{\|\gamma''_{\perp}(t)\|} = (-1)^q \cdot \frac{\gamma^{(q)}_{\perp}}{\|\gamma^{(q)}_{\perp}\|} .$$

La continuité de  $\mathbf{n}$  sur  $J'$  en découle immédiatement.

Sur  $J' \setminus \{t_o\}$  les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont indépendants et  $\gamma''_{\perp}(t)$  est dans le plan engendré par ces deux vecteurs. Mais  $\gamma''_{\perp}(t)$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$ . Il s'ensuit immédiatement que  $\gamma''(t)$  est dans le plan engendré par  $\gamma'(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  et que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur n.u.p. Et donc  $\mathbf{n}$  est un champ n.u.p sur  $J' \setminus \{t_o\}$ .

Dans le cas  $p = 1$  et  $q = 2$  l'application  $\gamma''_{\perp}$  est définie, continue et non-nulle sur tout  $J'$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{n}$  est définie comme  $\mathbf{n}(t) = \gamma''_{\perp}(t) / \|\gamma''_{\perp}(t)\|$  pour tout  $t \in J'$  et donc  $\mathbf{n}$  est un champ n.u.p sur tout  $J'$ . Dans le cas  $p = 1$  et  $q > 2$  le vecteur  $\gamma''(t_o)$  est dépendant de  $\gamma'(t_o) \neq 0$ . Et donc a fortiori  $\gamma''(t_o)$  est dans le plan engendré par  $\gamma'(t_o)$  et  $\mathbf{n}(t_o)$ . Et de nouveau il s'ensuit que  $\mathbf{n}$  est un champ n.u.p sur tout  $J'$ .

Selon [10.7], le vecteur de courbure  $k_{\gamma}(t)$  (pour  $t \in J' \setminus \{t_o\}$ ) est donné par

$$k_{\gamma}(t) = \|\gamma'(t)\|^{-2} \cdot \gamma''_{\perp}(t) .$$

Il s'ensuit (avec notre définition du champ n.u.p  $\mathbf{n}$ ) que pour  $s, t \in J'$  vérifiant  $s < t_o < t$  on a

$$\kappa(s) \cdot \kappa(t) = (-1)^q \cdot \frac{\|\gamma''_{\perp}(s)\| \cdot \|\gamma''_{\perp}(t)\|}{\|\gamma'(s)\|^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^2} .$$

On en déduit que  $\gamma(t_o)$  est un point ordinaire selon [13.4] si  $q$  est pair et qu'il est un point d'inflexion si  $q$  est impair.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §14

**Preuve de [14.1].** La fonction  $L : J \rightarrow K$  est strictement croissante, bijective et continue. Selon [33.1] il suffit donc de montrer qu'on a les limites

$$\lim_{t \downarrow t_o} \hat{\gamma}'(L(t)) = \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} \quad \text{et} \quad \lim_{t \uparrow t_o} \hat{\gamma}'(L(t)) = (-1)^{p-1} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|} .$$

D'autre part, on sait qu'on a le développement limité

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (\gamma')^{(p-1)}(t_o) + (t - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \\ &= \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) . \end{aligned}$$

Sachant qu'on a  $\gamma(t) = \hat{\gamma}(L(t))$ , on a

$$(39.18) \quad \gamma'(t) = \hat{\gamma}'(L(t)) \cdot L'(t) = \hat{\gamma}'(L(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| .$$

On peut donc calculer :<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}'(L(t)) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)}{\left\| \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right\|} \\ &= \frac{(t - t_o)^{p-1}}{|t - t_o|^{p-1}} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o) + \varepsilon_{t_o}(t)}{\|\gamma^{(p)}(t_o) + \varepsilon_{t_o}(t)\|} \end{aligned}$$

Avec [33.3], le résultat annoncé en découle immédiatement.

Bien qu'on vient de terminer la preuve, on note (pour le lecteur curieux), qu'on peut démontrer la dérivabilité (à gauche et à droite) de  $\hat{\gamma}$  en  $s = 0$  aussi par un calcul direct en utilisant la même technique (avec [33.1]) :

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\hat{\gamma}(s) - \hat{\gamma}(0)}{s} = \lim_{t \downarrow t_o} \frac{\hat{\gamma}(L(t)) - \hat{\gamma}(L(0))}{L(t)}$$

et

$$\frac{\hat{\gamma}(L(t)) - \hat{\gamma}(L(0))}{L(t)} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_o)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} \cdot \left( \frac{(t - t_o)^p}{p!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t - t_o)^p \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right) .$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{t_o}^t \|\gamma'(s)\| \, ds = \int_{t_o}^t \left\| \frac{(s - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (s - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(s) \right\| \, ds \\ &= \int_{t_o}^t \frac{|s - t_o|^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o) + \varepsilon_{t_o}(s)\| \, ds \\ &\stackrel{\|\gamma^{(p)}(t_o)\| \neq 0}{=} \int_{t_o}^t \frac{|s - t_o|^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (\|\gamma^{(p)}(t_o)\| + \varepsilon_{t_o}(s)) \, ds \\ (39.19) \quad &\stackrel{[34.8]}{=} \frac{(t - t_o) \cdot |t - t_o|^{p-1}}{p!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\| + (t - t_o)^p \cdot \varepsilon_{t_o}(t) . \end{aligned}$$

4. Attention : comme dans la preuve de [13.16], les fonctions “reste” dans un développement limité qu'on note avec le symbole  $\varepsilon_{t_o}(t)$  sont en général différentes d'une ligne à un autre. On en abuse aussi dans cette preuve !

Avec ces préparations on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\gamma}(L(t)) - \hat{\gamma}(L(0))}{L(t)} &= \frac{\left( \frac{(t-t_o)^p}{p!} \cdot \gamma^{(p)}(t_o) + (t-t_o)^p \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right)}{\frac{(t-t_o) \cdot |t-t_o|^{p-1}}{p!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\| + (t-t_o)^p \cdot \varepsilon_{t_o}(t)} \\ &= \frac{(t-t_o)^{p-1}}{|t-t_o|^{p-1}} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o) + \varepsilon_{t_o}(t)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\| + \varepsilon_{t_o}(t)} . \end{aligned}$$

Les limites à gauche et à droite  $\lim_{t \uparrow t_o}$  et  $\lim_{t \downarrow t_o}$  découlent immédiatement de cette approximation. Ce calcul montre donc que  $\hat{\gamma}$  est dérivable à gauche et à droite en  $s = 0$  et que ces deux dérivées sont égales si et seulement si  $p$  est impair. Par contre, ce calcul ne montre pas que, avec ces valeurs, la dérivée de  $\hat{\gamma}$  est continue jusqu'au bord sur les intervalles  $[0, \infty[ \cap K$  et  $]-\infty, 0] \cap K$ , ce qui est une conséquence immédiate du calcul des limites de  $\hat{\gamma}'$  en  $s = 0$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [14.2].** Pour montrer la non-dérivabilité, il faut partir de la définition de dérivée. On le fera dans le cas “à gauche,” le cas à droite étant similaire.

Attention : dans la deuxième partie on montre que pour  $q < 2p$  les limites à gauche et à droite  $\lim_{t \uparrow t_o} \hat{\gamma}''(t)$  et  $\lim_{t \downarrow t_o} \hat{\gamma}''(t)$  n'existent pas. Ceci ne permet pourtant pas de conclure que  $\hat{\gamma}''$  n'est pas dérivable (à gauche ou à droite) en  $t_o$ . L'existence d'une telle limite est une condition suffisante pour la dérivabilité [33.3], mais ce n'est pas une condition nécessaire. L'exemple classique de la fonction  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  le montre : les limites à gauche et à droite de  $f'$  n'existent pas et pourtant  $f$  est bien dérivable en  $x = 0$ .

Pour la deuxième dérivée à gauche, il faut donc partir de la fonction dérivée et en particulier de la valeur à gauche en  $s = 0$ . On calcule donc la quantité

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow 0} \frac{\hat{\gamma}'(s) - \hat{\gamma}'_g(0)}{s} &\stackrel{[33.1]}{=} \lim_{t \uparrow t_o} \frac{\hat{\gamma}'(L(t)) - \hat{\gamma}'_g(t_o)}{L(t)} \\ &\stackrel{(39.18), [14.1]}{=} \lim_{t \uparrow t_o} \frac{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} - (-1)^{p-1} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|}}{L(t)} . \end{aligned}$$

On reprend les notations de la preuve de [13.16] où on a trouvé le développement limité d'ordre  $q - 1$  de  $\gamma'$  au voisinage de  $t_o$  comme

$$(39.20) \quad \gamma'(t) = (t - t_o)^{p-1} \cdot g(t) \cdot \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)$$

avec le polynôme  $g$  défini par

$$g(t) = \frac{1}{(p-1)!} + \sum_{p < i < q} \frac{(t - t_o)^{i-p}}{(i-1)!} \cdot a_i .$$

Étant donné qu'on veut calculer une limite  $t \rightarrow t_o$ , on peut se restreindre à un petit voisinage de  $t_o$ . La fonction  $g$  étant  $1/(p-1)!$  en  $t_o$ , on peut donc supposer que  $g$  est une fonction positive. En particulier on a <sup>5</sup>

---

5. Comme dans la preuve de [13.16] et [14.1], le symbole  $\varepsilon_{t_o}$  (pour le terme de “reste” dans un développement limité) désigne à chaque ligne (et même à l'intérieur d'une ligne) un autre fonction !

$$\|\gamma'(t)\| = |t - t_o|^{p-1} \cdot g(t) \cdot \left\| \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{q-p}}{(q-1)! g(t)} \cdot \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{q-p} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right\|.$$

La formule entre les normes est de la forme

$$\|a + (t - t_o)^k \cdot b + (t - t_o)^k \cdot \varepsilon_{t_o}(t)\|.$$

Avec le développement de la racine carrée

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$$

et l'égalité

$$\|x+y\| = \sqrt{\|x+y\|^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle}$$

on en déduit le développement limité

$$\begin{aligned} & \left\| \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{q-p}}{(q-1)! g(t)} \cdot \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{q-p} \varepsilon_{t_o}(t) \right\| \\ &= \|\gamma_o^{(p)}\| + \frac{(t - t_o)^{q-p}}{(q-1)! g(t)} \cdot \frac{\langle \gamma_o^{(q)}, \gamma_o^{(p)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|} + (t - t_o)^{q-p} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= |t - t_o|^{p-1} \cdot g(t) \cdot \|\gamma_o^{(p)}\| \\ (39.21) \quad &+ \frac{|t - t_o|^{p-1} \cdot (t - t_o)^{q-p}}{(q-1)!} \cdot \frac{\langle \gamma_o^{(q)}, \gamma_o^{(p)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|} + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t). \end{aligned}$$

Sachant qu'on est dans le cas  $t < t_o$  et qu'on a donc l'égalité

$$(-1)^{p-1} |t - t_o|^{p-1} = (t - t_o)^{p-1},$$

on peut faire les calculs (intermédiaires) suivants :

$$\begin{aligned} & \|\gamma_o^{(p)}\| \cdot \gamma'(t) - (-1)^{p-1} \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot \gamma_o^{(p)} \\ &= \|\gamma_o^{(p)}\| \cdot \left( (t - t_o)^{p-1} \cdot g(t) \cdot \gamma_o^{(p)} + \frac{(t - t_o)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot \gamma_o^{(q)} + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\ &\quad - (-1)^{p-1} \cdot \left( |t - t_o|^{p-1} \cdot g(t) \cdot \|\gamma_o^{(p)}\| + \frac{|t - t_o|^{p-1} \cdot (t - t_o)^{q-p}}{(q-1)!} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\langle \gamma_o^{(q)}, \gamma_o^{(p)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|} + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right) \cdot \gamma_o^{(p)} \\ &= \|\gamma_o^{(p)}(t_o)\| \cdot \frac{(t - t_o)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot \left( \gamma_o^{(q)} - \frac{\langle \gamma_o^{(q)}, \gamma_o^{(p)} \rangle}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2} \cdot \gamma_o^{(p)} \right) + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t). \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur entre parenthèses est le vecteur  $\gamma_{\perp}^{(q)}$  [13.16], la partie de  $\gamma_o^{(q)}$  qui est orthogonal à  $\gamma_o^{(p)}$ ; c'est donc un vecteur non nul, car on a supposé que ces deux vecteurs sont indépendants.

D'autre part, on peut utiliser (39.21), (39.19) et le fait qu'on a  $g(t) = 1/(p-1)! + \varepsilon_{t_o}(t)$  pour obtenir

$$\|\gamma_o^{(p)}\| \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot L(t) = \|\gamma_o^{(p)}\| \cdot \left( \frac{|t - t_o|^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \|\gamma_o^{(p)}\| + (t - t_o)^{p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( \frac{(t - t_o) \cdot |t - t_o|^{p-1}}{p!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\| + (t - t_o)^p \cdot \varepsilon_{t_o}(t) \right) \\
&= \frac{(t - t_o)^{2p-1}}{p! (p-1)!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\|^3 + (t - t_o)^{2p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)
\end{aligned}$$

Au final on trouve donc

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} - (-1)^{p-1} \cdot \frac{\gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|}}{L(t)} &= \frac{\|\gamma^{(p)}(t_o)\| \cdot \gamma'(t) - (-1)^{p-1} \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot \gamma^{(p)}(t_o)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\| \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot L(t)} \\
&= \frac{\|\gamma^{(p)}(t_o)\| \cdot \frac{(t - t_o)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot \gamma_{\perp}^{(q)} + (t - t_o)^{q-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)}{\frac{(t - t_o)^{2p-1}}{p! (p-1)!} \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\|^3 + (t - t_o)^{2p-1} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)} \\
&= \frac{p! (p-1)! (t - t_o)^{q-2p}}{(q-1)!} \cdot \frac{\gamma_{\perp}^{(q)} + \varepsilon_{t_o}(t)}{\|\gamma^{(p)}(t_o)\|^2 + \varepsilon_{t_o}(t)} .
\end{aligned}$$

À part le facteur  $(t - t_o)^{q-2p}$ , les autres termes ont une limite bien définie et non nulle quand  $t$  tend vers  $t_o$ . Il s'ensuit que cette dérivée (à gauche) n'existe pas pour  $q < 2p$ , qu'elle est non nulle pour  $q = 2p$  et qu'elle est nulle pour  $q > 2p$ .

Pour calculer  $\lim_{s \uparrow 0} \hat{\gamma}''(s)$ , il suffit selon [33.1] de calculer  $\lim_{t \uparrow t_o} \hat{\gamma}''(L(t))$ . Si on dérive l'égalité (39.18), on trouve l'égalité

$$\begin{aligned}
\gamma''(t) &= (\hat{\gamma}'(L(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|)' = \hat{\gamma}''(L(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|^2 + \hat{\gamma}'(L(t)) \cdot (\|\gamma'(t)\|)' \\
&= \hat{\gamma}''(L(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|^2 + \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} ,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\hat{\gamma}''(L(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \cdot \left( \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t) \right) \stackrel{[13.16]}{=} \frac{\gamma_{\perp}''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} .$$

Dans [13.16] on a (déjà) calculé le développement limité de  $\gamma_{\perp}''(t)$  et si on prend le carré de (39.21) (et qu'on utilise qu'on a  $g(t) = 1/(p-1)! + \varepsilon_{t_o}(t)$ ) on trouve pour le dénominateur le développement limité

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{(t - t_o)^{2p-2}}{((p-1)!)^2} \cdot \|\gamma_o^{(p)}\|^2 + (t - t_o)^{2p-2} \cdot \varepsilon_{t_o}(t) .$$

Pour  $\hat{\gamma}_{\perp}''(L(t))$  on trouve donc le développement limité

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}''(L(t)) &= \frac{\frac{(q-p) \cdot (t - t_o)^{q-2}}{(q-1)!} \cdot \gamma_{\perp}^{(q)} + (t - t_o)^{q-2} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)}{\frac{(t - t_o)^{2p-2}}{((p-1)!)^2} \cdot \|\gamma_o^{(p)}\|^2 + (t - t_o)^{2p-2} \cdot \varepsilon_{t_o}(t)} \\
&= (t - t_o)^{q-2p} \cdot \frac{(q-p) \cdot ((p-1)!)^2}{(q-1)!} \cdot \frac{\gamma_{\perp}^{(q)} + \varepsilon_{t_o}(t)}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2 + \varepsilon_{t_o}(t)}
\end{aligned}$$

À part le facteur  $(t - t_o)^{q-2p}$ , tous les autres facteurs ont une limite finie non-nulle quand  $t \rightarrow t_o$ . Pour  $q < 2p$  la limite  $\lim_{t \rightarrow t_o} \hat{\gamma}''(L(t))$  n'existe donc pas, pour  $q > 2p$  elle existe et vaut 0 et pour  $q = 2p$  elle existe et est non-nulle donnée par

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \hat{\gamma}''(L(t)) = \frac{(q-p) \cdot ((p-1)!)^2}{(q-1)! \cdot \|\gamma^{(p)}(t_o)\|^2} \cdot \frac{\gamma_{\perp}^{(q)}}{\|\gamma_o^{(p)}\|^2} ,$$

ce qui est bien le résultat annoncé à cause de l'égalité  $q = 2p$ .

On constate que ce résultat est conforme au résultat obtenu en première partie où on a calculé la dérivée (à gauche et à droite) de  $\hat{\gamma}'$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{\gamma}'(s) = \hat{\gamma}_{g/d}''(0) = \lim_{h \uparrow \downarrow 0} \frac{\hat{\gamma}'(h) - \hat{\gamma}_{g/d}'(0)}{h} .$$

Ceci confirme (aussi) le résultat de [33.3] que  $\hat{\gamma}''$  est continue en  $s = 0$  et donc que, si  $\hat{\gamma}'$  est bien définie en un voisinage de  $s = 0$  (c'est-à-dire si  $p$  est impair), alors  $\hat{\gamma}$  est de classe  $C^2$ .  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §15

**Preuve de [15.6].** Soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ n.u.p le long  $\gamma$  et soit  $\hat{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe équivalente par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : J \rightarrow I$ . Par [12.3]  $\hat{\gamma}$  est aussi hyperrégulière et  $\hat{\mathbf{n}} : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \varphi$  est un champ n.u.p le long  $\hat{\gamma}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{\mathbf{n}}'(s), \hat{\gamma}'(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(s)\|^2} &= \frac{\langle \mathbf{n}'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s), \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \wedge \mathbf{n}(\varphi(s)) \rangle}{\|\gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\|^2} \\ &\stackrel{\text{en notant } t = \varphi(s)}{=} \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la torsion ne dépend pas du paramétrage.

S'il n'y a que deux champs n.u.p possibles le long  $\gamma$ , alors l'autre est forcément  $\tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$ . Mais si on définit  $\tau(t)$  à l'aide de  $\tilde{\mathbf{n}}$ , on a  $\tilde{\mathbf{n}}'(t) = -\mathbf{n}'(t)$  et donc les deux signes s'annulent mutuellement.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [15.8].** On remarque d'abord que si  $\gamma'(t_o)$  et  $\gamma''(t_o)$  sont indépendants, alors l'application  $\mathbf{n}$  définie dans un voisinage de  $t_o$  (où on garde l'indépendance) par

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}$$

est un champ n.u.p et au signe près c'est le seul [12.4.iv]. Selon [15.6], la torsion ne dépend pas du choix du champ n.u.p dans ce voisinage. Pour calculer  $\tau(t_o)$  on commence avec  $\mathbf{n}'(t_o)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(t_o) &= \left( \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} \right)'(t_o) \\ \gamma'' \wedge \gamma'' &\stackrel{=}{=} 0 \quad \frac{\gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o)}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|} - \frac{\langle \gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o), \gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^3} \cdot (\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)) \\ &= \frac{\gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o)}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|} - \frac{\langle \gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o), \gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} \cdot \mathbf{n}(t_o) \end{aligned}$$

En utilisant que  $\mathbf{n}(t_o)$  est orthogonal à  $\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)$  [2.6.iii] on a donc :

$$\begin{aligned} \tau(t_o) &= \frac{\left\langle \left( \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} \right)'(t_o), \gamma'(t_o) \wedge \frac{\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|} \right\rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \frac{\gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o)}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|}, \gamma'(t_o) \wedge (\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)) \right\rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|} \\ &\stackrel{[2.6.ix]}{=} \frac{\left\langle \gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o), \langle \gamma'(t_o), \gamma''(t_o) \rangle \cdot \gamma'(t_o) - \langle \gamma'(t_o), \gamma'(t_o) \rangle \cdot \gamma''(t_o) \right\rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2 \cdot \|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} \\ &\stackrel{[2.6.iii]}{=} - \frac{\left\langle \gamma'(t_o) \wedge \gamma'''(t_o), \gamma''(t_o) \right\rangle}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} \stackrel{[2.5]}{=} - \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma'''(t_o), \gamma''(t_o))}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\det(\gamma'(t_o), \gamma''(t_o), \gamma'''(t_o))}{\|\gamma'(t_o) \wedge \gamma''(t_o)\|^2} . \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [15.9].** Que le trièdre de Frenet est une base orthonormée directe est une conséquence immédiate des propriétés du produit vectoriel [2.6]. Pour les équations différentielles, on commence à regarder certains produits scalaires, qui nous donnent les implications

$$(39.22) \quad \begin{array}{l} \langle \mathbf{n}(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \langle \mathbf{n}(t), \gamma''(t) \rangle + \langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \\ 2 \cdot \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0 . \end{array}$$

Sachant que  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, les définitions de la courbure et de la torsion s'écrivent comme

$$(39.23) \quad \gamma''(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{n}(t) \quad \text{et} \quad \tau(t) = \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle ,$$

ce qui nous donne l'implication

$$(39.24) \quad \langle \mathbf{n}(t), \gamma''(t) \rangle + \langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \rangle = -\kappa(t) .$$

Parce que  $\gamma'(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$  est un repère orthonormé, on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(t) &= \langle \mathbf{n}'(t), \gamma'(t) \rangle \cdot \gamma'(t) + \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t) + \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle \cdot \mathbf{b}(t) \\ &\stackrel{(39.22), (39.23), (39.24)}{=} -\kappa(t) \cdot \gamma'(t) + \tau(t) \cdot \mathbf{b}(t) . \end{aligned}$$

Pour terminer on considère la dérivée du vecteur  $\mathbf{b}(t)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(t) &= (\gamma' \wedge \mathbf{n})'(t) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} (\gamma')'(t) \wedge \mathbf{n}(t) + \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}'(t) \\ &= \kappa(t) \cdot \mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}(t) + \gamma'(t) \wedge (-\kappa(t) \cdot \gamma'(t) + \tau(t) \cdot \mathbf{b}(t)) \\ &\stackrel{[2.6.iv]}{=} \tau(t) \cdot \gamma'(t) \wedge \mathbf{b}(t) = \tau(t) \cdot \gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t)) \\ &\stackrel{[2.6.ix]}{=} -\tau \cdot \mathbf{n}(t) . \end{aligned} \quad \boxed{CQFD}$$



### Les preuves de §16

**Preuve de [16.3].** Soit  $\mathbf{n}_i : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  le champ n.u.p le long la courbe  $\gamma_i$  utilisé pour la définition de la torsion et soit  $t_o \in I$  arbitraire. Si on regarde les deux couples de vecteurs  $(\gamma'_1(t_o), \mathbf{n}_1(t_o))$  et  $(\gamma'_2(t_o), \mathbf{n}_2(t_o))$ , alors ce sont deux systèmes de vecteurs orthonormés. Par [3.5.ii] il existe un (unique)  $A \in \text{SO}(3)$  tel que  $\gamma'_2(t_o) = A\gamma'_1(t_o)$  et  $\mathbf{n}_2(t_o) = A\mathbf{n}_1(t_o)$ . Selon [3.13] on a donc aussi  $b_2(t_o) = Ab_1(t_o)$ .

On définit maintenant l'application  $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times I \rightarrow \mathbf{R}^{10}$  par

$$f(u, v, w, t) = (\kappa(t) \cdot v, -\kappa(t) \cdot u + \tau(t) \cdot w, -\tau(t) \cdot v, 1) ,$$

ainsi que les applications  $\hat{\gamma}_i : I \rightarrow \mathbf{R}^9 \times I$  définies par

$$\hat{\gamma}_1(t) = (A\gamma'_1(t), A\mathbf{n}_1(t), Ab_1(t), t) \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_2(t) = (\gamma'_2(t), \mathbf{n}_2(t), b_2(t), t) .$$

Selon les équations de Serret-Frenet et le choix de  $A$ , ces deux applications sont deux solutions de l'équation différentielle  $y' = f(y)$  qui coïncident au point  $t = t_o$ . Par [38.2] on a donc égalité partout  $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$  et en particulier  $\gamma'_2(t) = A\gamma'_1(t)$  pour tout  $t \in I$ .

Pour finir, on considère la fonction  $d : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$d(t) = \gamma_2(t) - A\gamma_1(t) .$$

Il est immédiate qu'on a  $d'(t) = \gamma'_2(t) - A\gamma'_1(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ . Étant donné que  $I$  est connexe (c'est un intervalle), il s'ensuit que  $d$  est une fonction constante. Il existe donc  $b \in \mathbf{R}^3$  tel que

$$\forall t \in I : b = d(t) = \gamma_2(t) - A\gamma_1(t) .$$

Autrement dit,  $\gamma_2(t) = A\gamma_1(t) + b$  pour tout  $t \in I$ .

*CQFD*

**Les preuves de §17**

### Les preuves de §18

**Preuve de [18.8].** Soit  $m \in S$ , alors parce que  $v$  est une valeur régulière de  $F$  [18.7] on a  $\text{rang}(\text{Jac}(F)(m)) = 1$ . Par le théorème des fonctions implicites [18.4]  $S$  est alors localement le graphe d'une fonction de deux variables (de classe  $C^k$ ) au voisinage de  $m$ . Donc  $S$  vérifie les conditions d'être une surface régulière (de classe  $C^k$ ).  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [18.10].** • (i). Par définition d'une surface régulière, il existe des intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  avec  $m \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des trois propriétés de [18.1]. Supposons d'abord que c'est la deuxième qui soit vérifiée. Il existe donc une fonction  $g : I_1 \times I_3 \rightarrow I_2$  de classe  $C^k$  telle que

$$(39.25) \quad S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid y = g(x, z) \} .$$

Il suffit maintenant de définir  $U = I_1 \times I_3$  et l'application  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\psi(u, v) = (u, g(u, v), v) ,$$

pour avoir notre carte locale : l'injectivité et la propriété (CL3) sont immédiat à partir de la définition de  $\psi$ , et le fait qu'on a  $m \in \psi(U) \subset S$  est une conséquence immédiate de (39.25) (et le fait qu'on a  $m \in I_1 \times I_2 \times I_3$ ). Les cas où c'est la première ou la troisième propriété de [18.1] qui soit vérifiée est traité de la même façon.

• (ii). Soit  $m_o \in S' \subset S$ . Parce que  $S$  est une surface régulière, il existe des intervalles ouverts  $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbf{R}$  avec  $m_o \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des conditions de [18.1]. Sachant qu'on a  $m_o \in S' \subset V$  et que  $V$  est un ouvert, il existe des intervalles ouverts  $I'_i \subset I_i$  tels qu'on a

$$m_o \in I'_1 \times I'_2 \times I'_3 \subset V .$$

On a donc aussi

$$S' \cap I'_1 \times I'_2 \times I'_3 = S \cap (V \cap I'_1 \times I'_2 \times I'_3) = S \cap I'_1 \times I'_2 \times I'_3 .$$

Il s'ensuit immédiatement que les intervalles  $I'_i$  vérifient l'une des conditions de [18.1] avec  $S'$  à la place de  $S$ .

• (iii). Si  $\psi : U \rightarrow S$  est une carte locale pour  $S$ , alors c'est une application injective à valeurs dans  $S$  vérifiant (CL3). Il est immédiat que la restriction à  $U' \subset U$  est également une application injective à valeurs dans  $S$  vérifiant (CL3).

• (iv). Le déroulement de la construction de l'ouvert  $V$  est comme suit : pour chaque  $m \in \psi(U)$  on construit un ouvert  $V_m \subset \mathbf{R}^3$  contenant  $m$  avec la propriété

$$(39.26) \quad S \cap V_m = \psi(U) \cap V_m .$$

On en déduit facilement que l'ouvert  $V = \cup_{m \in \psi(U)} V_m$  fait l'affaire : de (39.26) on déduit l'égalité  $S \cap V = \psi(U) \cap V$  et de  $m \in V_m$  on déduit l'égalité  $\psi(U) \cap V = \psi(U)$ .

Pour construire les ouverts  $V_m$ , on prend  $m_o = \psi(u_o, v_o) \in \psi(U)$  et on invoque la définition d'une surface régulière pour trouver trois intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  avec  $m_o \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des trois propriétés de [18.1], disons la première. Il existe donc une fonction (de classe  $C^k$ )  $g : I_2 \times I_3 \rightarrow I_1$  vérifiant

$$(39.27) \quad S \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = g(y, z) \} .$$

L'idée est maintenant qu'on veut réduire les intervalles  $I_2$  et  $I_3$  en  $I'_2$  et  $I'_3$  pour qu'on ait l'égalité

$$S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) = \psi(U) \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) .$$

Le problème principal ici est qu'il faut s'assurer qu'un point de  $S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3)$  appartient à  $\psi(U)$  et pour cela il faut maîtriser mieux l'image  $\psi(U)$ . On le fait en utilisant le théorème de l'inversion locale pour pouvoir trouver ces intervalles ouverts.

Si on définit l'ouvert  $U' \subset U$  par  $U' = \psi^{-1}(I_1 \times I_2 \times I_3)$ , alors, parce que  $\psi(U') \subset S$ , il s'ensuit qu'on a pour  $(u, v) \in U'$  l'égalité

$$(39.28) \quad \psi_1(u, v) = g(\psi_2(u, v), \psi_3(u, v)) .$$

On en déduit que pour  $(u, v) \in U'$  on a l'égalité (en supprimant partout l'écriture du couple  $(u, v)$  !)

$$\text{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1 & \partial_2 \psi_1 \\ \partial_1 \psi_2 & \partial_2 \psi_2 \\ \partial_1 \psi_3 & \partial_2 \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 g)(\psi_2, \psi_3) & (\partial_2 g)(\psi_2, \psi_3) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_2 & \partial_2 \psi_2 \\ \partial_1 \psi_3 & \partial_2 \psi_3 \end{pmatrix} .$$

Sachant cela, on définit l'application  $\varphi : U' \rightarrow I_2 \times I_3$  par

$$\varphi(u, v) = (\psi_2(u, v), \psi_3(u, v)) ,$$

et on déduit de l'expression de  $\text{Jac}(\psi)(u, v)$  et le fait que son rang vaut 2 que pour tout  $(u, v) \in U'$  la matrice  $\text{Jac}(\varphi)(u, v)$  est inversible. En particulier  $\text{Jac}(\varphi)(u_o, v_o)$  est inversible, ce qui permet d'invoquer le théorème de l'inversion locale [37.2] et de conclure qu'il existe des ouverts  $(u_o, v_o) \in O_1 \subset U'$  et  $O_2 \subset \mathbf{R}^2$  tels que  $\varphi : O_1 \rightarrow O_2$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Sachant qu'on a  $\varphi(u_o, v_o) \in I_2 \times I_3$  et que ce dernier est aussi un ouvert, il s'ensuit qu'il existe des intervalles  $I'_i \subset I_i$ ,  $i = 2, 3$  tels qu'on a

$$\varphi(u_o, v_o) \in I'_2 \times I'_3 \subset O_2 .$$

On prétend maintenant qu'on a bien l'égalité recherchée

$$\psi(U) \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) = S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) .$$

L'inclusion  $\subset$  étant évident (car  $\psi(U) \subset S$ ), on prend  $m \in S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3)$  et on veut montrer qu'on a  $m \in \psi(U)$ . Pour cela on écrit  $m = (x, y, z)$  et on raisonne :

$$m \in S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) \stackrel{(39.27)}{\Rightarrow} m = (g(y, z), y, z)$$

$$I'_2 \times I'_3 \subset O_2 \quad \varphi : O_1 \xrightarrow{\text{difféo}} O_2 \quad \exists (u, v) \in O_1 \subset U' : \varphi(u, v) = (y, z)$$

$$(u, v) \in U' \stackrel{(39.28)}{\Rightarrow} \psi(u, v) = (g(\varphi(u, v)), \varphi(u, v)) = (g(y, z), y, z) = m .$$

On a donc trouvé  $(u, v) \in U$  tel que  $m = \psi(u, v)$ , montrant l'inclusion  $S \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3) \subset \psi(U) \cap (I_1 \times I'_2 \times I'_3)$ . Ainsi on a trouvé pour chaque  $m_o \in \psi(U)$  un voisinage  $V_{m_o} = I_1 \times I'_2 \times I'_3 \subset \mathbf{R}^3$  tel qu'on a l'égalité  $S \cap V_{m_o} = \psi(U) \cap V_{m_o}$  comme voulu.

Si les intervalles  $I_1, I_2, I_3$  vérifient la deuxième ou troisième propriété de [18.1], alors le raisonnement est analogue en permutant les indices. CQFD

**Preuve de [18.11].** La preuve de (i) est la concaténation de [18.10.iv] et [18.10.ii] et la partie essentielle de la preuve de (ii) est la concaténation de [18.10.iii] et [18.10.iv]. Plus précisément, parce que  $\psi$  est injective, l'application  $\psi : U \rightarrow S' = \psi(U)$  est

bijective. Par définition de la topologie induite, tout ouvert  $V'$  de  $S'$  est de la forme  $V' = S' \cap V$  pour un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^3$ . On déduit donc immédiatement de la continuité de  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  qu'elle est (aussi) continue vue comme application  $\psi : U \rightarrow S'$ . D'autre part, pour un ouvert  $U' \subset U$ , la restriction  $\psi : U' \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une carte locale pour  $S$  par [18.10.iii], donc par [18.10.iv] il existe un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U') = S \cap V = S' \cap V$ . Autrement dit,  $\psi(U')$  est un ouvert de  $S'$ . On a donc montré que  $\psi : U \rightarrow S'$  est bijective, continue et ouverte, c'est-à-dire qu'elle est un homéomorphisme.  $\square$  *CQFD*

### Les preuves de §19

**Preuve de [19.1].** L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) est immédiate, car  $f : X \rightarrow f(X)$  est bijective et continue (par rapport à la topologie induite) par hypothèse. C'est donc un homéomorphisme si et seulement si sa réciproque est aussi continue.

Pour l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii), on remarque que la définition que  $f^{-1}$  soit continue par rapport à la topologie induite s'écrit comme

$$\forall U \text{ ouvert de } X : (f^{-1})^{-1}(U) \text{ ouvert de } f(X) .$$

Par définition de la topologie induite ceci est équivalent à

$$\forall U \text{ ouvert de } X \quad \exists V \text{ ouvert de } Y : (f^{-1})^{-1}(U) = f(X) \cap V .$$

Mais parce que  $f$  est injective, on a l'égalité  $(f^{-1})^{-1}(U) = U$ , et donc on a montré l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). CQFD

**Preuve de [19.4].** On montre les équivalences en boucle : [18.5]  $\Rightarrow$  [19.3]  $\Rightarrow$  [19.2]  $\Rightarrow$  [18.5]. Et on termine avec deux preuves (superflues) de l'implication directe [18.5]  $\Rightarrow$  [19.2].

• [18.5]  $\Rightarrow$  [19.3]. Supposons que  $S \subset \mathbf{R}^3$  vérifie les conditions de [18.5] et soit  $p \in S$ . Alors  $S$  est localement le graphe d'une fonction de classe  $C^k$  de deux variables au voisinage de  $p$ . Plus précisément, il existe trois intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  avec  $p \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des trois propriétés de [18.1]. On suppose que c'est la propriété (i) qui est satisfaite (les deux autres cas se traitent de la même manière et sont laissés aux bons soins du lecteur), c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $g : I_2 \times I_3 \rightarrow I_1$  de classe  $C^k$  tel que

$$S \cap (I_1 \times I_2 \times I_3) = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = g(y, z) \} .$$

On définit maintenant l'application  $\phi : I_2 \times I_3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times I_2 \times I_3$  par

$$\phi(u, v, w) = (w + g(u, v), u, v) .$$

Il est immédiat que  $\phi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme (sa réciproque est donnée par  $\phi^{-1}(x, y, z) = (y, z, x - g(y, z))$ ). Il suffit maintenant de définir les ouverts  $V = I_1 \times I_2 \times I_3$  et  $W = \phi^{-1}(V)$  pour satisfaire les conditions de [19.3]. Presque par définition  $\phi : W \rightarrow V$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Et on a l'égalité

$$\begin{aligned} \phi(Z \cap W) &= \{ \phi(u, v, 0) \mid (u, v, 0) \in W = \phi^{-1}(V) \} \\ &= \{ \phi(u, v, 0) \mid \phi(u, v, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 = V \} \\ &= \{ (g(u, v), u, v) \mid (g(u, v), u, v) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \} \\ &= S \cap (I_1 \times I_2 \times I_3) \equiv S \cap V . \end{aligned}$$

• [19.3]  $\Rightarrow$  [19.2]. Supposons que  $S \subset \mathbf{R}^3$  vérifie les conditions de [19.3] et soit  $p \in S$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  de  $p$ , un ouvert  $W \subset \mathbf{R}^3$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : W \rightarrow V$  tels que

$$\phi(Z \cap W) = S \cap V .$$

Il suffit maintenant de définir  $U \subset \mathbf{R}^2$  par

$$U = \{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid (u, v, 0) \in W \}$$

et  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\psi(u, v) = \phi(u, v, 0) .$$

Essentiellement on a  $U = Z \cap W$  et  $\psi = \phi|_U$ , mais on ne peut pas le dire officiellement, car on doit avoir  $U \subset \mathbf{R}^2$  et on a  $Z \cap W \subset \mathbf{R}^3$ . L'application  $\phi$  étant un  $C^k$ -difféomorphisme, il est immédiat que  $\psi$  est injective, de classe  $C^k$  et qu'elle vérifie partout  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u, v)) = 2$  (sinon  $\text{rang}(\text{Jac}(\phi)(u, v, 0))$  ne pourrait pas être 3). Et parce que  $W$  est un voisinage de  $p$ , on a  $p \in \psi(U)$ . Ainsi on a déjà vérifié les conditions (CL1–3) de [19.2]. Pour montrer (CL4) on prend un ouvert  $U_1 \subset U$ , on définit l'ouvert  $W_1 \subset W$  par

$$W_1 = \{ (u, v, w) \in W \mid (u, v) \in U_1 \}$$

et l'ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  par  $V_1 = \phi(W_1)$  (rappelons que  $\phi$  est un difféomorphisme, donc en particulier un homéomorphisme). Avec ces ingrédients on calcule :

$$\begin{aligned} \psi(U_1) &= \{ \psi(u, v) \mid (u, v) \in U_1 \} = \{ \phi(u, v, 0) \mid (u, v) \in U_1 \} \\ &= \{ \phi(u, v, 0) \mid (u, v, 0) \in W_1 \} = \{ \phi(u, v, w) \mid (u, v, w) \in Z \cap W_1 \} \\ &= \{ \phi(u, v, w) \mid (u, v, w) \in Z \cap W \text{ et } (u, v, w) \in W_1 \} \\ &= \phi(Z \cap W) \cap \phi(W_1) = S \cap V \cap V_1 = S \cap V_1 . \end{aligned}$$

• [19.2]  $\Rightarrow$  [18.5]. Supposons que  $S \subset \mathbf{R}^3$  vérifie les conditions de [19.2] et soit  $p \in S$ . Alors il existe une application  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^k$  vérifiant les conditions (CL1–4). Il existe donc  $(u_o, v_o) \in U$  tel que  $p = \psi(u_o, v_o)$  et  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u_o, v_o)) = 2$ . Ceci implique qu'au moins un des trois déterminants (au point  $(u_o, v_o)$ )

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1 & \partial_2 \psi_1 \\ \partial_1 \psi_2 & \partial_2 \psi_2 \end{pmatrix} , \quad \det \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1 & \partial_2 \psi_1 \\ \partial_1 \psi_3 & \partial_2 \psi_3 \end{pmatrix} , \quad \det \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_2 & \partial_2 \psi_2 \\ \partial_1 \psi_3 & \partial_2 \psi_3 \end{pmatrix}$$

est non-nul. On va supposer que c'est la deuxième, les deux autres possibilités se traiteront de la même façon et sont laissées aux bons soins du lecteur. L'idée qu'on va poursuivre est la suivante : si  $\det \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1 & \partial_2 \psi_1 \\ \partial_1 \psi_3 & \partial_2 \psi_3 \end{pmatrix} \neq 0$ , alors par le théorème de l'inversion locale l'application  $\Phi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_3(u, v))$  est inversible dans un voisinage de  $(u_o, v_o)$ . Dans ce cas on peut définir la fonction  $g(x, z) = \psi_2(\Phi^{-1}(x, z))$  et constater qu'on a l'équivalence

$$\psi(u, v) = (x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x, z) .$$

On a donc trouvé la fonction  $g$  qui fait que  $S$  est localement le graphe d'une fonction (la propriété (ii) dans [18.1] ; si un des deux autres déterminants est non-nul, on tombe sur un des deux autres propriétés). Reste à montrer qu'on peut trouver des intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  pour que tous les détails soient vérifiés.

Reprenons donc l'argument dès le début avec tous les détails nécessaires. On définit l'application  $\Phi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$  par

$$\Phi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_3(u, v))$$

et on constate que notre hypothèse dit qu'on a

$$\det(\text{Jac}(\Phi)(u_o, v_o)) \neq 0 .$$

On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale [37.2] et conclure qu'il existe deux ouverts  $(u_o, v_o) \in U_1 \subset U$  et  $O_1 \subset \mathbf{R}^2$  tels que  $\Phi : U_1 \rightarrow O_1$  soit un  $C^k$  difféomorphisme. On peut donc définir l'application  $g = \psi_2 \circ \Phi^{-1} : O_1 \rightarrow \mathbf{R}$  qui

sera de classe  $C^k$ . Il est alors immédiat que l'application  $\phi = \psi \circ \Phi^{-1} : O_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  (de classe  $C^k$ ) est donnée par

$$\phi(x, z) = \psi(\Phi^{-1}(x, z)) = (x, g(x, z), z) .$$

Maintenant on invoque la propriété (CL4) qui nous donne un ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  tel que

$$(p_1, p_2, p_3) \equiv p \in \psi(U_1) = S \cap V_1 .$$

En regardant la définition de l'application  $\phi$  on voit tout de suite qu'on a

$$\phi(O_1) = S \cap V_1 \quad \text{et} \quad p \equiv (p_1, p_2, p_3) = \phi(p_1, p_3) .$$

Parce que  $V_1$  est un ouvert, il existe trois intervalles  $J_i \subset \mathbf{R}$  tels qu'on a

$$p \in J_1 \times J_2 \times J_3 \subset V_1 .$$

À cet endroit on aurait bien envie de dire que c'est ces trois intervalles qui font l'affaire, mais on ne peut pas : on ne maîtrise pas la taille de l'intervalle  $J_2$  et il est possible qu'elle sera trop petite pour qu'on n'enlève pas des points de  $S$ . Il faut donc réduire la taille des intervalles  $J_1$  et  $J_3$  pour s'assurer que  $S$  reste dedans.

Voici l'argument précis. Par continuité de l'application  $\phi$  il existe deux intervalles  $I_1, I_3 \subset \mathbf{R}$  tels qu'on a

$$(p_1, p_3) \in I_1 \times I_3 \subset O_1 \quad \text{et} \quad \phi(I_1 \times I_3) \subset J_1 \times J_2 \times J_3 .$$

Mais la forme de l'application  $\phi$  et l'inclusion  $\phi(I_1 \times I_3) \subset I'_1 \times I'_2 \times I'_3$  nous donnent immédiatement les inclusions  $I_1 \subset J_1$  et  $I_3 \subset J_3$  et donc l'inclusion  $\phi(I_1 \times I_3) \subset I_1 \times J_2 \times I_3$ . On a donc les inclusions

$$\begin{aligned} \phi(I_1 \times I_3) &\subset \phi(O_1) \cap (I_1 \times J_2 \times I_3) = S \cap V_1 \cap (I_1 \times J_2 \times I_3) \\ &= S \cap (I_1 \times J_2 \times I_3) . \end{aligned}$$

D'autre part on peut faire le raisonnement

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\in S \cap (I_1 \times J_2 \times I_3) \subset S \cap V_1 = \phi(O_1) \\ \Rightarrow \exists (x', z') &\in O_1 : (x, y, z) = \phi(x', z') \Rightarrow x' = x \text{ et } z' = z \\ \Rightarrow (x, y, z) &= \phi(x, z) \in \phi(I_1 \times I_3) . \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$S \cap (I_1 \times J_2 \times I_3) = \phi(I_1 \times I_3) = \{ (x, y, z) \in I_1 \times J_2 \times I_3 \mid y = g(x, z) \} ,$$

ce qui montre qu'on a bien la propriété (ii) de [18.1].

• [18.5]  $\Rightarrow$  [19.2]. Supposons que  $S \subset \mathbf{R}^3$  vérifie les conditions de [18.5] et soit  $p \in S$ . Alors  $S$  est localement le graphe d'une fonction de classe  $C^k$  de deux variables au voisinage de  $p$ . Plus précisément, il existe trois intervalles  $I_i \subset \mathbf{R}$  avec  $p \in I_1 \times I_2 \times I_3$  et vérifiant l'une des trois propriétés de [18.1]. On suppose que c'est la propriété (i) qui est satisfaite (les deux autres cas se traitent de la même manière), c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $g : I_2 \times I_3 \rightarrow I_1$  de classe  $C^k$  tel que

$$S \cap (I_1 \times I_2 \times I_3) = \{ (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = g(y, z) \} .$$

Il suffit maintenant de définir  $U = I_2 \times I_3$  et l'application  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\psi(u, v) = (g(u, v), u, v)$$

pour avoir les ingrédients de [19.2]. Il est immédiat que  $\psi$  est de classe  $C^k$  et injective, qu'on a  $p \in \psi(U) \subset S$  et que  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u, v)) = 2$  pour tout  $(u, v) \in U$ .



Reste donc la condition (CL4). Mais cela est “immédiat” avec la remarque qu’on a, pour tout ouvert  $U_1 \subset U$ , l’égalité

$$\psi(U_1) = S \cap (I_1 \times U_1) .$$

Une deuxième façon de montrer cette implication est de s’appuyer sur [18.10] : pour un point  $p \in S$  il existe une carte locale  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  avec  $p \in \psi(U)$  [18.10.i], ce qui montre qu’on a déjà les trois propriétés (CL1–3). Et selon [18.11.ii] c’est un homéomorphisme entre  $U$  et  $\psi(U)$ , ce qui est l’une des conditions équivalentes de (CL4).  $\square$  CQFD

### Les preuves de §20

**Preuve de [20.3].** Le fait que l'application  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  est injective et qu'on a l'inclusion  $f(O) \subset \psi(U)$ , impliquent immédiatement l'existence et unicité de l'application  $f_U$ . Reste donc à montrer la classe de dérivabilité.

Pour le faire, on veut utiliser [36.2] qui dit qu'il suffit de vérifier la dérivabilité localement. On prend donc  $a \in O$  et on note  $p = f(a) \in \psi(U)$ . Par injectivité de  $\psi$  il existe  $(u_o, v_o) \in U$  avec  $\psi(u_o, v_o) = p$  et en plus on a  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)(u_o, v_o)) = 2$ . On suppose maintenant qu'on a

$$\det \begin{pmatrix} (\partial_1 \psi_1)(u_o, v_o) & (\partial_2 \psi_1)(u_o, v_o) \\ (\partial_1 \psi_2)(u_o, v_o) & (\partial_2 \psi_2)(u_o, v_o) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

(Les deux autres possibilités se traitent de la même manière et sont laissées aux bons soins du lecteur.) On définit alors l'application  $\Phi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$  par

$$\Phi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$$

et on constate que notre hypothèse dit qu'on a  $\det(\text{Jac}(\Phi)(u_o, v_o)) \neq 0$ . On peut donc invoquer le théorème de l'inversion locale [37.2] et conclure qu'il existe deux ouverts  $(u_o, v_o) \in U_1 \subset U$  et  $W_1 \subset \mathbf{R}^2$  tels que  $\Phi : U_1 \rightarrow W_1$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Ensuite on invoque [18.10.iii-iv] pour obtenir un ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U_1) = S \cap V_1$ .

Avec ces préparations on définit  $O_1 = f^{-1}(V_1)$  et on prétend qu'on a pour tout  $b \in O_1$  l'égalité

$$(39.29) \quad f_U(b) = \Phi^{-1}(f_1(b), f_2(b)) ,$$

ce qui est évidemment une application de classe  $C^p$  avec  $p \geq \min(k, \ell)$  comme composée de  $\Phi^{-1}$  de classe  $C^k$  avec les composantes  $F_1, f_2$  de  $f$  de classe  $C^\ell$ . Reste donc de montrer que (39.29) est correct. Pour cela on commence avec l'observation qu'on a pour  $(s, t) \in W_1$  :

$$\Phi^{-1}(s, t) = (u, v) \quad \Rightarrow \quad \psi(\Phi^{-1}(s, t)) = (s, t, \psi_3(\Phi^{-1}(s, t))) .$$

Ensuite on observe qu'on a

$$(\psi \circ \Phi^{-1})(W_1) = \psi(U_1) = S \cap V_1 \quad \text{et} \quad f(O_1) \subset S \cap V_1 .$$

Pour  $b \in O_1$  il existe donc  $(s, t) \in W_1$  tel que

$$f(b) = (f_1(b), f_2(b), f_3(b)) = \psi(\Phi^{-1}(s, t)) = (s, t, \psi_3(\Phi^{-1}(s, t))) .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a l'égalité

$$(s, t) = (f_1(b), f_2(b)) \quad \text{et} \quad f(b) = \psi(\Phi^{-1}(f_1(b), f_2(b))) ,$$

ce qui montre en même temps qu'on a bien  $(f_1(b), f_2(b)) \in W_1$  et le fait que  $f_U|_{O_1}$  est donnée par (39.29).

Pour résumer : pour tout  $a \in O$  on a trouvé un ouvert  $a \in O_1 \subset O$  tel que la restriction de  $f_U$  à  $O_1$  est une application de classe  $C^p$ . Par [36.2] on peut donc conclure que  $f_U$  est de classe  $C^p$  sur  $O$ .  $\square$  CQFD

**Preuve de [20.4].** Que  $O_U$  est un ouvert est une conséquence directe de [18.10.iv] : il existe un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = S \cap V$  et donc, parce qu'on a  $f(O_U) \subset \psi(U)$ ,

on a l'égalité

$$f^{-1}(\psi(U)) = f^{-1}(V) ,$$

ce qui est un ouvert parce que  $f$  est continue.

Si  $f$  est de classe  $C^\ell$  (vu comme application de  $O \subset \mathbf{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$ ), alors sa restriction  $f|_{O_U} : O_U \rightarrow S$  est de classe  $C^\ell$ . Par [20.3] il s'ensuit que l'application  $f_U : O_U \rightarrow U$  est de classe  $C^\ell$ . Réciproquement, supposons que toutes les applications  $f_U : O_U \rightarrow U$  sont de classe  $C^\ell$ . Parce que  $\mathcal{A} = \{\psi_i : U_i \rightarrow S \mid i \in I\}$  est un atlas, on a

$$O = f^{-1}(S) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(U_i)\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\psi_i(U_i)) = \bigcup_{i \in I} O_{U_i} .$$

Pour tout  $a \in O$  il existe donc un ouvert  $a \in O_{U_i} \subset O$  sur lequel on a l'égalité

$$f = \psi \circ f_{U_i} .$$

Mais  $\psi$  est de classe  $C^k$  et  $f_{U_i}$  est de classe  $C^\ell$  avec  $\ell \leq k$ , donc la composée est de classe  $C^\ell$ . On a donc montré que pour tout  $a \in O$  il existe un voisinage ouvert sur lequel  $f$  est de classe  $C^\ell$ . Par [36.2] on peut conclure que  $f$  est de classe  $C^\ell$ . CQFD

**Preuve de [20.5].** Pour montrer que  $U_{12}$  est un ouvert, on invoque [18.10.iv] pour obtenir des ouverts  $V_i \subset \mathbf{R}^3$  tels qu'on a  $\psi_i(U_i) = V_i \cap S$ . Il s'ensuit immédiatement qu'on a l'égalité  $U_{12} = \psi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ , ce qui est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Une fois qu'on sait que  $U_{12}$  est un ouvert, on constate que  $\psi_1 : U_{12} \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une application de classe  $C^k$  vérifiant  $\psi_1(U_{12}) \subset \psi_2(U_2)$ . Par [20.3] il s'ensuit que l'application  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$  est de classe  $C^k$  (car c'est l'unique application  $g : U_{12} \rightarrow U_2$  vérifiant  $\psi_2 \circ g = \psi_1$ ).

En changeant les rôles de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  on obtient, mutatis mutandis, que  $U_{21}$  est un ouvert et que  $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$  est de classe  $C^k$ . Étant donné que ces deux applications sont réciproque l'un l'autre, ce sont des  $C^k$ -difféomorphismes. CQFD

**Preuve de [20.6].** • (i)  $\Rightarrow$  (ii). Selon [18.10.i], pour tout  $p \in S$  il existe une carte locale contenant  $p$ . Et si  $f$  est de classe  $C^\ell$ , alors par définition la composée  $f \circ \psi$  est de classe  $C^\ell$  pour toute carte locale, donc certainement pour cette carte contenant  $p$ .

• (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Si pour tout  $p \in S$  on a une carte locale  $\psi_p : U_p \rightarrow S$  contenant  $p$  telle que  $f \circ \psi_p$  est de classe  $C^\ell$ , alors la collection  $\{\psi_p : U_p \rightarrow S \mid p \in S\}$  est un atlas vérifiant (iii).

• (iii)  $\Rightarrow$  (i). Selon la définition [20.1] il faut montrer que pour une carte locale arbitraire  $\psi_o : U_o \rightarrow S$  la composée  $f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$ . Pour cela on prend une carte  $\psi_i : U_i \rightarrow S$  dans l'atlas et on applique [20.5] pour obtenir un ouvert  $U_{oi} \subset U_o$  défini par  $U_{oi} = \psi_o^{-1}(\psi_i(U_i))$  et une application  $\varphi_{io} : U_{oi} \rightarrow U_i$  de classe  $C^k$  définie par  $\varphi_{io} = \psi_i^{-1} \circ \psi_o$ . Il est immédiat de la définition de  $U_{oi} \subset U_o$  que pour  $x \in U_{oi}$  on a l'égalité

$$(f \circ \psi_o)(x) = ((f \circ \psi_i) \circ (\psi_i^{-1} \circ \psi_o))(x) = ((f \circ \psi_i) \circ \varphi_{io})(x) .$$

La restriction de  $f \circ \psi_o$  à  $U_{oi}$  est donc de classe  $C^\ell$  comme composée de l'application  $f \circ \psi_i$  de classe  $C^\ell$  et l'application  $\varphi_{io}$  de classe  $C^k$ . D'autre part, parce que  $\mathcal{A}$  est un atlas, on a

$$U_o = \psi_o^{-1}(S) = \psi_o^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(U_i)\right) = \bigcup_{i \in I} \psi_o^{-1}(\psi_i(U_i)) = \bigcup_{i \in I} U_{oi} .$$

On a donc montré que pour tout  $x \in U_o$  il existe un voisinage ouvert  $x \in U_{oi} \subset U_o$  tel que la restriction de  $f \circ \psi$  à  $U_{oi}$  est de classe  $C^\ell$ . Par [36.2] on peut conclure que  $f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$  sur  $U_o$  comme voulu.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [20.7].** Soit  $\psi_o : U_o \rightarrow S$  une carte locale quelconque et soit  $(u, v) \in U_o$  un point arbitraire avec  $p = \psi_o(u, v)$ . Alors par hypothèse il existe une carte locale  $\psi_p : U_p \rightarrow S$  contenant  $p$  telle que  $f \circ \psi_p$  est de classe  $C^\ell$ . Selon [20.5] l'ensemble  $U_{op} = \psi_o^{-1}(\psi_p(U_p)) \subset U_o$  est un ouvert et  $\psi_p^{-1} \circ \psi_o : U_{op} \rightarrow U_p$  est de classe  $C^k$ . Il s'ensuit que la composée  $(f \circ \psi_p) \circ (\psi_p^{-1} \circ \psi_o) = f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$  comme composée avec  $\ell \leq k$ . Mais attention : ceci ne montre que  $f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$  **sur l'ouvert**  $U_{op}$ , pas sur tout  $U_o$ . Par contre, parce que la carte  $\psi_p$  contient  $p$ , on doit avoir  $(u, v) \in U_{op}$ . On vient donc de montrer que pour tout  $(u, v) \in U_o$  il existe un ouvert  $U_{op} \subset U_o$  contenant  $(u, v)$  tel que la restriction de  $f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$  sur  $U_{op}$ . Par [36.2] il s'ensuit que  $f \circ \psi_o$  est de classe  $C^\ell$  sur  $U_o$  entier.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §21

**Preuve de [21.1].** On commence avec la preuve de l'unicité en supposant qu'on a trouvé un plan  $P \subset \mathbf{R}^3$  vérifiant (21.2). Un tel plan  $P$  est décrit par une seule équation de la forme

$$P = \{ v \in \mathbf{R}^3 \mid \langle v - b, n \rangle = 0 \} ,$$

où  $b \in \mathbf{R}^3$  est un point (arbitraire) dans le plan et  $n \in \mathbf{R}^3$  un vecteur (non-nul!) normal au plan. Avec cette description, la distance  $d(q, P)$  est donnée par la formule

$$d(q, P) = \frac{|\langle q - b, n \rangle|}{\|n\|} .$$

Vu qu'on a  $\lim_{q \rightarrow p, q \in S} \|q - p\| = 0$ , la propriété (21.2) implique (en multipliant par  $\|q - p\|$ ) qu'on doit au moins avoir  $\lim_{q \rightarrow p, q \in S} d(q, P) = 0$ . Selon notre formule, on doit donc avoir

$$0 = \lim_{q \rightarrow p, q \in S} \frac{|\langle q - b, n \rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle p - b, n \rangle|}{\|n\|} \Leftrightarrow \langle p - b, n \rangle = 0 ,$$

c'est-à-dire  $p \in P$ . On a donc l'égalité

$$\langle v - b, n \rangle = \langle (v - p) + (p - b), n \rangle = \langle v - p, n \rangle + \langle p - b, n \rangle = \langle v - p, n \rangle ,$$

ce qui veut dire qu'on peut écrire

$$P = \{ v \in \mathbf{R}^3 \mid \langle v - p, n \rangle = 0 \} \quad \text{et} \quad d(q, P) = \frac{|\langle q - p, n \rangle|}{\|n\|} .$$

Autrement dit, on peut supposer que le point de base  $b$  est le point  $p$ . Notre hypothèse que  $P$  vérifie (21.2) est donc équivalent à

$$\lim_{q \rightarrow p, q \in S} \frac{|\langle q - p, n \rangle|}{\|n\| \cdot \|q - p\|} = 0 .$$

Pour cette limite, le facteur  $1/\|n\|$  n'a pas d'importance, ni la valeur absolue. Notre hypothèse est donc équivalente à

$$\lim_{q \rightarrow p, q \in S} \frac{\langle q - p, n \rangle}{\|q - p\|} = 0 .$$

Pour analyser cette formule, on choisit (en invoquant [18.10.i]) une carte locale  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que  $p \in \psi(U)$  et on note  $(u_o, v_o) \in U$  tel que  $\psi(u_o, v_o) = p$ . On remarque maintenant que, parce que  $\psi$  est continue, on a

$$\forall u \in \mathbf{R} : (u, v_o) \in U \Rightarrow \psi(u, v_o) \in S \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow u_o} \psi(u, v_o) = p .$$

Selon notre hypothèse on doit donc avoir

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u \rightarrow u_o} \frac{|\langle \psi(u, v_o) - \psi(u_o, v_o), n \rangle|}{\|\psi(u, v_o) - \psi(u_o, v_o)\|} \\ &= \lim_{u \rightarrow u_o} \frac{\left| \left\langle \frac{\psi(u, v_o) - \psi(u_o, v_o)}{u - u_o}, n \right\rangle \right|}{\left\| \frac{\psi(u, v_o) - \psi(u_o, v_o)}{u - u_o} \right\|} = \frac{|\langle (\partial_1 \psi)(u_o, v_o), n \rangle|}{\|(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)\|} . \end{aligned}$$

Le dénominateur étant non-nul, on doit donc avoir

$$\langle (\partial_1 \psi)(u_o, v_o), n \rangle = 0 .$$

En considérant  $\lim_{v \rightarrow v_o} \psi(u_o, v) = p$  on obtient, avec un calcul très similaire au calcul précédent, qu'on doit avoir

$$\langle (\partial_2 \psi)(u_o, v_o), n \rangle = 0 .$$

La conclusion est donc que le vecteur  $n$  doit être orthogonal aux deux vecteurs

$$(39.30) \quad (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \quad \text{et} \quad (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) .$$

Ces deux vecteurs étant indépendants (ce sont les deux colonnes de la matrice Jacobienne de  $\psi$  qui est de rang 2), le vecteur  $n$  est donc unique à un multiple près. Mais un multiple ne change pas le plan  $P$ . La conclusion est donc que le plan  $P$  est unique, car il doit passer par  $p$  et son vecteur normal est unique à un multiple près.

On a donc montré que, s'il existe un plan  $P$  vérifiant (21.2), alors c'est unique. Malheureusement le calcul précédent ne suffit pas pour montrer l'existence, car pour l'existence il faut montrer qu'une limite **dans  $\mathbf{R}^3$**  est nulle. Et on n'a calculé que deux limites selon deux directions bien précises. D'autre part, si le plan  $P$  existe, on connaît sa description ! On va donc montrer que le plan  $P$  décrit par le point de base  $b = p$  et vecteur normal

$$n = (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \wedge (\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$$

vérifie la condition (21.2). Avec notre formule pour  $d(q, P)$  et la remarque que le facteur constant  $\|n\|$  n'a pas d'importance, la définition de limite nous dit qu'il faut montrer

$$(39.31) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_3 > 0 \quad : \quad \|q - p\| < \delta_3 \text{ et } q \in S \quad \Rightarrow \quad \frac{|\langle q - p, n \rangle|}{\|q - p\|} < \varepsilon .$$

La stratégie pour montrer (39.31) commence avec le découpage en deux étapes en passant par la carte locale  $\psi$ . Plus précisément, on va montrer les deux affirmations

$$(39.32) \quad \forall \delta_2 > 0 \exists \delta_3 > 0 \forall q \in S \quad : \quad \|q - p\| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad \exists (u, v) \in U : \psi(u, v) = q \text{ et } \|(u, v) - (u_o, v_o)\| < \delta_2$$

et

$$(39.33) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall (u, v) \in U \quad : \quad \|(u, v) - (u_o, v_o)\| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|\langle \psi(u, v) - \psi(u_o, v_o), n \rangle|}{\|\psi(u, v) - \psi(u_o, v_o)\|} < \varepsilon .$$

La preuve de (39.31) se fait alors par le raisonnement suivant : pour  $\varepsilon > 0$  on trouve  $\delta_2 > 0$  par la deuxième affirmation ; avec ce  $\delta_2 > 0$  on trouve  $\delta_3 > 0$  par la première affirmation ; et donc si  $\|q - p\| < \delta_3$  on trouve par la première affirmation  $(u, v) \in U$  et par la deuxième affirmation on aura la conclusion voulu.

La preuve de (39.32) est une simple transcription du fait que  $\psi$  établit un homéomorphisme entre  $U$  et son image dans  $S$  muni de la topologie induite. Voici les détails de cela. Pour  $\delta_2 > 0$ , l'ensemble

$$U_1 = U \cap \{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid \|(u, v) - (u_o, v_o)\| < \delta_2 \}$$

est un ouvert dans  $U$  contenant  $(u_o, v_o)$ . Par [18.10.iii-iv] il existe donc un ouvert  $V_1 \subset \mathbf{R}^3$  contenant  $p$  tel que  $\psi(U_1) = V_1 \cap S$ . Par définition des ouverts dans  $\mathbf{R}^3$ , il existe  $\delta_3 > 0$  tel que

$$\{ q \in \mathbf{R}^3 \mid \|q - p\| < \delta_3 \} \subset V_1 .$$

Pour  $q \in S$  vérifiant  $\|q - p\| < \delta_3$  il existe donc  $(u, v) \in U_1$  tel que  $q = \psi(u, v)$ . Par définition de  $U_1$  on a aussi  $\|(u, v) - (u_o, v_o)\| < \delta_2$  comme voulu.

La preuve de (39.33) est un petit peu plus compliquée, car pour majorer le quotient, il faut majorer le numérateur, mais il faut minorer le dénominateur, ce qui est plus délicat. Mais on commence avec la remarque que (39.33) est la formulation avec quantificateurs de la limite

$$(39.34) \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \frac{|\langle \psi(u, v) - \psi(u_o, v_o), n \rangle|}{\|\psi(u, v) - \psi(u_o, v_o)\|} = 0 .$$

Pour calculer cette limite, on fait un développement limité à l'ordre 1 de  $\psi$  autour  $(u_o, v_o)$  :

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \psi(u_o, v_o) + (u - u_o) \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \\ &\quad + (v - v_o) \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v) . \end{aligned}$$

Pour le numérateur on a donc l'égalité (en utilisant que  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$  sont orthogonaux à  $n$ )

$$(39.35) \quad \langle \psi(u, v) - \psi(u_o, v_o), n \rangle = \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \langle \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v), n \rangle .$$

Par définition du développement limité on a

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v) = 0 \in \mathbf{R}^3$$

et donc

$$(39.36) \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \langle \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v), n \rangle = 0 \in \mathbf{R} .$$

Pour minorer le dénominateur, on commence avec la remarque que les trois vecteurs  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$ ,  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$  et  $n$  sont indépendants et donc forment une base de  $\mathbf{R}^3$ . On peut donc décomposer le vecteur  $\varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v)$  selon cette base comme

$$\varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v) = \varepsilon^{(1)}(u, v) \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) + \varepsilon^{(2)}(u, v) \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) + \varepsilon^{(3)}(u, v) \cdot n$$

avec  $\varepsilon^{(i)}(u, v)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois fonctions réelles. On a donc :

$$\begin{aligned} \psi(u, v) - \psi(u_o, v_o) &= (u - u_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(1)}(u, v)) \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \\ &\quad + (v - v_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(2)}(u, v)) \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) \\ &\quad + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(3)}(u, v) \cdot n . \end{aligned}$$

Étant donné que  $n$  est orthogonal aux vecteurs  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$ , on a la minoration (par Pythagore si on veut)

$$\begin{aligned} \|\psi(u, v) - \psi(u_o, v_o)\| &\geq \left\| (u - u_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(1)}(u, v)) \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) \right. \\ &\quad \left. + (v - v_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(2)}(u, v)) \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) \right\| . \end{aligned}$$

Si les vecteurs  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$  étaient orthogonaux, on pourrait sans trop de difficulté relier cette minoration à une minoration en termes du seul vecteur  $(u, v)$ . Mais on ne le sait pas.

On interrompt donc l'argument un petit instant pour établir un résultat intermédiaire dont on a besoin, à savoir : soit  $v, w \in \mathbf{R}^3$  deux vecteurs indépendants, alors il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$  on a  $\|xv + yw\| \geq c \cdot \|(x, y)\|$ . Pour

le montrer on remarque d'abord que c'est vrai pour tout  $c > 0$  et  $(x, y) = (0, 0)$ . Et pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  on a l'égalité

$$\|xv + yw\| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left\| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}v + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}w \right\|$$

avec

$$\left\| \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\| = 1 .$$

Il s'ensuit que, si on a trouvé  $c > 0$  tel qu'on a

$$\|(x, y)\| = 1 \implies \|xv + yw\| \geq c ,$$

alors on a le résultat pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Pour trouver un tel  $c > 0$  on remarque que l'ensemble  $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  (le cercle unité) est fermé et borné. La fonction continue  $(x, y) \mapsto \|xv + yw\|$  admet donc en particulier un minimum :

$$\exists (x_o, y_o) \in \mathbf{S}^1 \forall (x, y) \in \mathbf{S}^1 : c = \|x_o v + y_o w\| \leq \|xv + yw\| .$$

Mais ce minimum  $c$  ne peut pas être nul, car cela voudrait dire que  $v$  et  $w$  sont dépendants. On a donc  $c > 0$  comme voulu.

Pour le lecteur qui ne se sent pas à l'aise avec l'argument de compacité, on peut aussi paramétrer le cercle par un angle  $\alpha$  comme  $(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  et regarder la fonction

$$f(\alpha) = \|\cos \alpha v + \sin \alpha w\| .$$

Si on développe  $f(\alpha)^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} f(\alpha)^2 &= (\cos \alpha)^2 \langle v, v \rangle + 2 \sin \alpha \cos \alpha \langle v, w \rangle + (\sin \alpha)^2 \langle w, w \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) + \frac{1}{2} (\|v\|^2 - \|w\|^2) \cos(2\alpha) + \langle v, w \rangle \sin(2\alpha) . \end{aligned}$$

Si on considère le couple  $Q = (\frac{1}{2} (\|v\|^2 - \|w\|^2), \langle v, w \rangle)$  comme un point dans  $\mathbf{R}^2$ , alors il existe  $r \in [0, \infty[$  et  $\beta \in [0, 2\pi[$  tels que  $Q = (r \cos \beta, r \sin \beta)$  (c'est l'écriture en coordonnées polaires). En plus,  $r$  est donné par

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4} (\|v\|^2 - \|w\|^2)^2 + \langle v, w \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} (\|v\|^2 + \|w\|^2)^2 - (\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2) . \end{aligned}$$

Étant donné que les vecteurs  $v$  et  $w$  ne sont pas colinéaires, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz [1.3] qu'on doit avoir

$$r^2 < \frac{1}{4} (\|v\|^2 + \|w\|^2)^2 \iff r < \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) .$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(\alpha)^2 &= \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) + r \cos \beta \cos(2\alpha) + r \sin \beta \sin(2\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) + r \cos(2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

avec  $r < \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2)$ . Il s'ensuit que le minimum de  $f(\alpha)^2$  est donné par  $\frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) - r > 0$ . Et donc on a

$$\|(x, y)\| = 1 \implies \|xv + yw\| \geq c = \sqrt{\frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) - r} > 0 .$$

Si on applique ce résultat (intermédiaire) à notre situation avec les vecteurs  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$ , on en déduit l'existence d'un  $c > 0$  tel qu'on a la



minoration

$$\begin{aligned}
 \|\psi(u, v) - \psi(u_o, v_o)\| &\geq c \cdot \left\| \begin{pmatrix} u - u_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ v - v_o + \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| \\
 (39.37) \qquad &= c \cdot \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| .
 \end{aligned}$$

Avec ce résultat on a presque terminé la preuve, car sous réserve qu'on montre

$$(39.38) \qquad \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| = 1 ,$$

on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \frac{|\langle \psi(u, v) - \psi(u_o, v_o), n \rangle|}{\|\psi(u, v) - \psi(u_o, v_o)\|} \\
 &\stackrel{(39.35), (39.37)}{\leq} \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \langle \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v), n \rangle}{c \cdot \left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\|} \\
 &= \lim_{(u,v) \rightarrow (u_o, v_o)} \frac{\langle \varepsilon_{(u_o, v_o)}(u, v), n \rangle}{c \cdot \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\|} \\
 &\stackrel{(39.36), (39.38)}{=} \frac{0}{c \cdot 1} = 0 .
 \end{aligned}$$

Reste donc à montrer (39.38). On peut faire vite en disant que

$$(39.39) \qquad \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}$$

est un vecteur unitaire et que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix}$$

est un vecteur qui tend vers  $0 \in \mathbf{R}^2$  quand on prend la limite  $(u, v) \rightarrow (u_o, v_o)$ . Mais il faut bien noter que la limite du vecteur (39.39) n'existe pas. Une preuve détaillée passe donc par les étapes suivantes. Par définition de limite (dans le développement limité), pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| < \delta \quad \implies \quad \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon .$$

Avec l'hypothèse  $\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| < \delta$  et l'inégalité triangulaire on peut donc faire l'encadrement :

$$\begin{aligned}
 1 - \varepsilon &< \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\|
 \end{aligned}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} u-u_o \\ v-v_o \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} u-u_o \\ v-v_o \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(u, v) \\ \varepsilon^{(2)}(u, v) \end{pmatrix} \right\| < 1 + \varepsilon .$$

Cet encadrement démontre (39.38), ce qui termine la preuve que le plan  $P$  passant par  $p \in S$  et orthogonal au vecteur  $n$  (qui lui est orthogonal aux vecteurs  $(\partial_1\psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2\psi)(u_o, v_o)$ ) vérifie bien la condition (21.2).

Montrons maintenant les différentes façons de décrire ce plan  $P$ . Du fait que  $(\partial_1\psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2\psi)(u_o, v_o)$  sont orthogonaux au vecteur  $n$  (par définition de  $n$ ), il s'ensuit que ce sont deux vecteurs directeurs de  $P$ . Avec la remarque que le choix de la carte qu'on a utilisé était arbitraire on a donc montré que  $P$  est bien décrit par (i).

Pour les deux descriptions utilisant des courbes, on commence avec une carte locale  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ , on prend  $(u_1, v_1) \in \mathbf{R}^2$  arbitraire et on regarde la courbe

$$\gamma(t) = \psi(u_o + tu_1, v_o + tv_1) .$$

On constate qu'on a

$$\gamma'(0) = u_1 \cdot (\partial_1\psi)(u_o, v_o) + v_1 \cdot (\partial_2\psi)(u_o, v_o) .$$

La droite tangente au point  $p$  associée à cette courbe est donnée par

$$D = \{ p + \lambda \cdot \gamma'(0) \mid \lambda \in \mathbf{R} \} .$$

En variant le vecteur  $(u_1, v_1)$  il est évident que les ensembles décrits dans (ii) et (iii) contiennent au moins  $P$  entier. Mais a priori les ensembles décrits là contiennent plus, car on n'a pas épuisé toutes les possibilités pour les courbes  $\gamma$ .

Pour exclure qu'il y a d'autres vecteurs dans les ensembles décrits dans (ii) et (iii), supposons que  $\gamma : I \rightarrow S$  est une courbe avec  $\gamma(t_o) = p$ . Selon [18.10.iii-iv] il existe un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = V \cap S$ . L'ensemble  $\gamma^{-1}(V)$  est donc un ouvert de  $I \subset \mathbf{R}$  contenant  $t_o$ . Il s'ensuit qu'il existe un intervalle  $J \subset \gamma(V)$  contenant  $t_o$ . Par [20.3] il existe donc une application  $c : J \rightarrow U$  telle que  $\gamma = \psi \circ c$ . On a donc

$$\gamma'(t_o) = c'_1(t_o) \cdot (\partial_1\psi)(u_o, v_o) + c'_2(t_o) \cdot (\partial_2\psi)(u_o, v_o) .$$

Ceci veut dire que  $\gamma'(t_o)$  est dans le sous-espace engendré par les deux vecteurs  $(\partial_1\psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2\psi)(u_o, v_o)$ . Il s'ensuit que la droite tangente au point  $p$  est contenu dans  $P$ , ainsi que le point  $p + \gamma'(t_o)$ . On a donc montré que les deux ensembles ne peuvent pas contenir plus de points que  $P$  et donc on a égalité.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [21.4].**  $T_p S$  est le sous-espace vectoriel parallèle au plan tangent  $PT_p S$  qui est décrit par le point de base  $p$  et les deux vecteurs directeurs  $(\partial_1\psi)(u_o, v_o)$  et  $(\partial_2\psi)(u_o, v_o)$  [21.1.ii].  $T_p S$  est donc engendré par ces deux vecteurs.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §22

**Preuve de [22.3].** Si  $x_{\parallel}$  est parallèle à  $y$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $x_{\parallel} = \lambda y$ . On a donc

$$g(x, y) = g(\lambda y + x_{\perp}, y) = \lambda g(y, y) + g(x_{\perp}, y) = \lambda g(y, y)$$

et donc  $\lambda = g(x, y)/g(y, y)$ . Il s'ensuit que  $x_{\parallel} = \lambda y$  est complètement déterminé par  $x$  et  $y$ . Et donc  $x_{\perp} = x - x_{\parallel}$  aussi.

Pour  $g(x_{\parallel}, x_{\parallel})$  et  $g(x_{\perp}, x_{\perp})$ , on calcule d'abord le premier :

$$g(x_{\parallel}, x_{\parallel}) = g\left(\frac{g(x, y)}{g(y, y)} \cdot y, \frac{g(x, y)}{g(y, y)} \cdot y\right) = \left(\frac{g(x, y)}{g(y, y)}\right)^2 \cdot g(y, y) = \frac{g(x, y)^2}{g(y, y)}.$$

Pour  $g(x_{\perp}, x_{\perp})$  on calcule :

$$\begin{aligned} g(x, x) &= g(x_{\parallel}, x_{\parallel}) + 2g(x_{\parallel}, x_{\perp}) + g(x_{\perp}, x_{\perp}) \\ &= g(x_{\parallel}, x_{\parallel}) + g(x_{\perp}, x_{\perp}), \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $x_{\parallel}$  et  $x_{\perp}$  sont orthogonaux (par rapport au produit scalaire  $g$ ) par définition. On a donc bien  $g(x_{\perp}, x_{\perp}) = g(x, x) - g(x_{\parallel}, x_{\parallel})$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [22.4].** Si  $y = 0$  on a égalité et  $x$  et  $y$  sont (trivialement) colinéaires. Supposons donc qu'on a  $y \neq 0$ . Selon [22.3] on a donc

$$0 \leq g(x_{\perp}, x_{\perp}) = \frac{g(x, x) \cdot g(y, y) - g(x, y)^2}{g(y, y)}$$

et donc  $g(x, y)^2 \leq g(x, x) \cdot g(y, y)$  comme voulu. Et on a égalité si et seulement si  $g(x_{\perp}, x_{\perp}) = 0$ , ce qui est le cas si et seulement si  $x_{\perp} = 0$ , ce qui veut dire que  $x = x_{\parallel}$ , c'est-à-dire que  $x$  est colinéaire avec  $y$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [22.5].** La positivité et non-dégénérée de  $\|\cdot\|_g$  sont une conséquence directe de la propriété (FB4) d'un produit scalaire et l'homogénéité est une conséquence de la bilinéarité (FB1-2) de  $g$ . Pour l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x + y\|_g^2 &= g(x + y, x + y) = g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y) \\ &\leq g(x, x) + 2 \cdot \sqrt{g(x, x) \cdot g(y, y)} + g(y, y) = (\|x\|_g + \|y\|_g)^2. \end{aligned} \quad \boxed{CQFD}$$

### Les preuves de §23

**Preuve de [23.1].** Commençons avec la remarque que si  $c$  est de classe  $C^\ell$ , alors la composée  $\gamma = \psi \circ c$  est aussi de classe  $C^\ell$  comme composée d'une application de classe  $C^\ell$  et une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq \ell$ . La courbe  $\gamma$  vérifie donc bien les conditions requises.

Pour montrer l'injectivité, supposons qu'on a  $\psi \circ c_1 = \psi \circ c_2$  et tant que courbes pour deux courbes  $c_1, c_2 : I \rightarrow U$ . Ceci veut dire qu'on a

$$\forall t \in I : \psi(c_1(t)) = \psi(c_2(t)) .$$

Mais parce que  $\psi$  est injective, on a l'implication

$$\psi(c_1(t)) = \psi(c_2(t)) \implies c_1(t) = c_2(t) .$$

On a donc  $c_1(t) = c_2(t)$  pour tout  $t \in I$ , c'est-à-dire  $c_1 = c_2$  comme voulu pour l'injectivité.

Pour la surjectivité, soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe de classe  $C^\ell$  vérifiant  $\gamma(I) \subset \psi(U)$ . Alors selon [20.3] il existe une application  $c : I \rightarrow U$  vérifiant  $\gamma = \psi \circ c$  qui est de classe  $C^p$  avec  $p = \min(k, \ell) = \ell$ . CQFD

**Preuve de [23.4].** Par définition on a

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_1 \psi)(u, v) \rangle = \|(\partial_1 \psi)(u, v)\|^2 \\ G(u, v) &= \langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle = \|(\partial_2 \psi)(u, v)\|^2 . \end{aligned}$$

Ces vecteurs étant non-nuls, ces normes sont strictement positives. Et selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} F(u, v)^2 &= \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle^2 \\ &\leq \|(\partial_1 \psi)(u, v)\|^2 \cdot \|(\partial_2 \psi)(u, v)\|^2 = E(u, v) \cdot G(u, v) , \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires. Par hypothèse d'une carte ces deux vecteurs ne le sont pas, d'où l'inégalité stricte. CQFD

**Preuve de [23.5].** Sachant que  $\mathbf{I}_{(u,v)}$  est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de montrer qu'elle est définie positive pour qu'elle soit un produit scalaire [22.1]. Pour cela on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{(u,v)}(x, x) &= x_1^2 E(u, v) + 2 x_1 x_2 F(u, v) + x_2^2 G(u, v) \\ &= x_1^2 \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_1 \psi)(u, v) \rangle + 2 x_1 x_2 \langle (\partial_1 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle \\ &\quad + x_2^2 \langle (\partial_2 \psi)(u, v), (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle \\ &= \langle x_1 (\partial_1 \psi)(u, v) + x_2 (\partial_2 \psi)(u, v), x_1 (\partial_1 \psi)(u, v) + x_2 (\partial_2 \psi)(u, v) \rangle \\ &= \|x_1 (\partial_1 \psi)(u, v) + x_2 (\partial_2 \psi)(u, v)\|^2 . \end{aligned}$$

De ce calcul il s'ensuit immédiatement qu'on a  $\mathbf{I}_{(u,v)}(x, x) \geq 0$  et que le résultat est nul si et seulement si le vecteur  $x_1 (\partial_1 \psi)(u, v) + x_2 (\partial_2 \psi)(u, v) \in \mathbf{R}^3$  est nul. Mais les deux dérivées partielles  $(\partial_1 \psi)(u, v)$  et  $(\partial_2 \psi)(u, v)$  sont indépendants par hypothèse d'une carte.  $\mathbf{I}_{(u,v)}(x, x)$  est donc nulle si et seulement si  $x = 0$ . CQFD

**Preuve de [23.7].** Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\psi \circ c)' = (\psi(c_1(t), c_2(t)))' \\ &= (\partial_1 \psi)(c(t)) \cdot c'_1(t) + (\partial_2 \psi)(c(t)) \cdot c'_2(t)\end{aligned}$$

et de même

$$\tilde{\gamma}'(s) = (\partial_1 \psi)(\tilde{c}(s)) \cdot \tilde{c}'_1(s) + (\partial_2 \psi)(\tilde{c}(s)) \cdot \tilde{c}'_2(s) .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a

$$\begin{aligned}\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle &= c'_1(t) \cdot \tilde{c}'_1(s) \cdot \langle (\partial_1 \psi)(c(t)), (\partial_1 \psi)(\tilde{c}(s)) \rangle \\ &\quad + c'_1(t) \cdot \tilde{c}'_2(s) \cdot \langle (\partial_1 \psi)(c(t)), (\partial_2 \psi)(\tilde{c}(s)) \rangle \\ &\quad + c'_2(t) \cdot \tilde{c}'_1(s) \cdot \langle (\partial_2 \psi)(c(t)), (\partial_1 \psi)(\tilde{c}(s)) \rangle \\ &\quad + c'_2(t) \cdot \tilde{c}'_2(s) \cdot \langle (\partial_2 \psi)(c(t)), (\partial_2 \psi)(\tilde{c}(s)) \rangle \\ &\stackrel{c(t) = \tilde{c}(s)}{=} c'_1(t) \cdot \tilde{c}'_1(s) \cdot E(c(t)) + (c'_1(t) \cdot \tilde{c}'_2(s) + c'_2(t) \cdot \tilde{c}'_1(s)) \cdot F(c(t)) \\ &\quad + c'_2(t) \cdot \tilde{c}'_2(s) \cdot G(c(t)) \\ &\stackrel{(23.3)}{=} \mathbf{I}_{c(t)}(c'(t), \tilde{c}'(s)) .\end{aligned}$$

Si on prend  $I = J$  et  $c = \tilde{c}$ , alors pour tout  $t \in I$  on a (trivialement)  $c(t) = \tilde{c}(t)$ . Et donc notre formule donne l'égalité

$$\|\gamma'(t)\|^2 \equiv \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \mathbf{I}_{c(t)}(c'(t), c'(t)) .$$

La formule pour la longueur de  $\gamma$  en découle immédiatement.  $\square$  CQFD

### Les preuves de §24

**Preuve de [24.2].** L'aire d'un triangle est donné par la moitié du produit de la longueur d'une base et la hauteur. Si on prend le côté  $AB$  comme base, alors sa longueur est  $\|B - A\|$  et la hauteur associée est donnée par  $\|C - A\| \cdot \sin(\angle CAB)$ .

#### DESSIN

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \|B - A\| \cdot \|C - A\| \cdot \sin(\angle CAB) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|B - A\|^2 \cdot \|C - A\|^2 - \|B - A\|^2 \cdot \|C - A\|^2 \cdot \cos^2(\angle CAB)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|B - A\|^2 \cdot \|C - A\|^2 - \langle B - A, C - A \rangle^2} . \end{aligned}$$

Le cas  $n = 3$  est une conséquence immédiate de la propriété [2.6.vii] du produit vectoriel (ou [2.6.viii], ou [2.6.vi], ou un calcul élémentaire). Le cas  $n = 2$  est un calcul très élémentaire qu'on trouve dans [3.7.i]. Les deuxièmes formules pour les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  sont une conséquence immédiate de la bilinéarité et l'anti-symétrie du déterminant et du produit vectoriel.  $\square$  *CQFD*

**Preuve de [24.4].** La traduction de la limite  $T^{\text{lle}}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$  est donné par la formulation plus précise que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute triangulation  $\mathcal{T}$  de  $D$  on a l'implication

$$T^{\text{lle}}(\mathcal{T}) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) - \iint_D \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv \right| < \frac{\varepsilon}{\text{Pre}(\mathcal{T})} ,$$

où on a utilisé le fait que la pointure d'une triangulation est toujours strictement positive.

On commence donc avec le choix d'un  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Ensuite, pour simplifier / raccourcir la notation, on introduit la fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  définie comme

$$f(u, v) = \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2} .$$

Comme la surface  $S$  est de classe  $C^1$ , la fonction  $f$  et les six fonctions  $\partial_i \psi_j$  ( $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2, 3$ ) sont continues. L'hypothèse que  $D$  est triangulable implique que c'est un ensemble fermé et borné. On peut donc appliquer [6.3.i] aux six fonctions  $\partial_i \psi_j$  ( $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2, 3$ ) pour conclure qu'il existe des constantes  $M_{ij}$

$$\forall x \in D \quad : \quad |(\partial_i \psi_j)(x)| \leq M_{ij} .$$

Si on pose

$$M = \max_{i=1,2, j=1,2,3} M_{ij} ,$$

alors on a les majorations

$$(39.40) \quad \forall x \in D \, \forall i = 1, 2, \, j = 1, 2, 3 \quad : \quad |(\partial_i \psi_j)(x)| \leq M .$$

On définit maintenant  $\varepsilon' > 0$  par

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(1 + 18M) \cdot \mathcal{A}(D)} ,$$

et on invoque [6.3.ii] avec les fonctions  $f$  et  $\partial_i \psi_j$  pour obtenir  $\delta_f > 0$  et  $\delta_{ij} > 0$  tels qu'on a

$$\forall x, y \in D \quad : \quad \begin{cases} \|x - y\| < \delta_f & \Rightarrow & |f(x) - f(y)| < \varepsilon' \\ \|x - y\| < \delta_{ij} & \Rightarrow & |(\partial_i \psi_j)(x) - (\partial_i \psi_j)(y)| < \varepsilon' . \end{cases}$$

Si on définit  $\delta > 0$  par

$$\delta = \min_{i,j} (\delta_{ij}, \delta_f) ,$$

alors on aura donc les implications

$$(39.41) \quad \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |f(x) - f(y)| < \varepsilon' \\ \forall i, j : |(\partial_i \psi_j)(x) - (\partial_i \psi_j)(y)| < \varepsilon' . \end{cases}$$

Il “suffit” maintenant de montrer que ce  $\delta > 0$  est le bon.

On prend donc une triangulation  $\mathcal{T} = \{ \Delta A_1 B_1 C_1, \dots, \Delta A_n B_n C_n \}$  qui vérifie la condition  $T^{\text{le}}(\mathcal{T}) < \delta$ . Ensuite on utilise l'additivité de l'intégrale pour écrire :

$$\iint_D f(u, v) \, du \, dv = \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta A_i B_i C_i} f(u, v) \, du \, dv ,$$

ce qui nous permet de “découper” la différence  $\mathcal{A}(\mathcal{T}) - \iint_D f(u, v) \, du \, dv$  comme

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \iint_D f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A_i) \psi(B_i) \psi(C_i)) - \iint_{\Delta A_i B_i C_i} f(u, v) \, du \, dv \right| . \end{aligned}$$

Pour obtenir notre estimation, il “suffit” donc de majorer convenablement chaque terme

$$\left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A_i) \psi(B_i) \psi(C_i)) - \iint_{\Delta A_i B_i C_i} f(u, v) \, du \, dv \right| .$$

On se concentre donc sur un (seul) triangle  $\Delta ABC$  dans la triangulation  $\mathcal{T}$  et on introduit un terme intermédiaire<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A) \psi(B) \psi(C)) - \iint_{\Delta ABC} f(u, v) \, du \, dv \right| \\ (39.42) \quad & \leq \left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A) \psi(B) \psi(C)) - f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) \right| \\ & \quad + \left| f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) - \iint_{\Delta ABC} f(u, v) \, du \, dv \right| . \end{aligned}$$

Par hypothèse le triangle  $\Delta ABC$  vérifie  $T^{\text{le}}(\Delta ABC) < \delta$ , ce qui permet d'appliquer (39.41) pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned} & \left| f(A) \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC) - \iint_{\Delta ABC} f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \iint_{\Delta ABC} |f(A) - f(u, v)| \, du \, dv \leq \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC) . \end{aligned}$$

6. Tout autre choix de la forme  $f(X) \mathcal{A}(\Delta ABC)$  avec  $X \in \Delta ABC$  aurait donné le même résultat ; le choix d'un sommet du triangle pour  $X$  ne simplifie nullement le calcul. Seul le dessin ?? se simplifie légèrement.

Regardons maintenant l'expression  $f(A) \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)$  de plus près. Pour cela on introduit des noms pour les coordonnées et quelques autres abréviations. On note :

$$A = (u_A, v_A) \quad , \quad B = (u_B, v_B) \quad , \quad C = (u_C, v_C) \quad ,$$

on introduit les vecteurs  $\beta, \gamma \in \mathbf{R}^2$  comme

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1, \beta_2) = (u_B - u_A, v_B - v_A) = B - A \\ \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2) = (u_C - u_A, v_C - v_A) = C - A \quad , \end{aligned}$$

on introduit les vecteurs  $V, W \in \mathbf{R}^3$  comme

$$V = \psi(B) - \psi(A) \quad \text{et} \quad W = \psi(C) - \psi(A)$$

et on introduit les vecteurs  $V', W' \in \mathbf{R}^3$  comme<sup>7</sup>

$$V' = (\partial_1 \psi)(A) \beta_1 + (\partial_2 \psi)(A) \beta_2 \quad \text{et} \quad W' = (\partial_1 \psi)(A) \gamma_1 + (\partial_2 \psi)(A) \gamma_2 \quad .$$

Si on regarde la définition de  $\mathcal{A}(\Delta \psi(A)\psi(B)\psi(C))$ , on voit que c'est donnée par

$$\mathcal{A}(\Delta \psi(A)\psi(B)\psi(C)) = \frac{1}{2} \|V \wedge W\| \quad .$$

Et si on calcule  $\|V' \wedge W'\|^2$  on trouve :

$$\begin{aligned} \|V' \wedge W'\|^2 &= \langle V', V' \rangle \langle W', W' \rangle - \langle V', W' \rangle^2 \\ &= (\beta_1^2 E(A) + \beta_2^2 G(A) + 2\beta_1 \beta_2 F(A)) \cdot (\gamma_1^2 E(A) + \gamma_2^2 G(A) + 2\gamma_1 \gamma_2 F(A)) \\ &\quad - (\beta_1 \gamma_1 E(A) + \beta_2 \gamma_2 G(A) + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) F(A))^2 \\ &= (E(A) G(A) - F(A)^2) \cdot (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 \\ &= f(A)^2 \cdot \left( \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right)^2 = f(A)^2 \cdot \left( \det(B - A, C - A) \right)^2 \\ &\stackrel{[24.2]}{=} 4 f(A)^2 \cdot (\mathcal{A}(\Delta ABC))^2 \quad . \end{aligned}$$

Autrement dit, on a montré l'égalité

$$f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \|V' \wedge W'\| \stackrel{[24.2]}{=} \mathcal{A}(\Delta \psi(A)B'C') \quad ,$$

où on a défini les points  $B' = \psi(A) + V'$  et  $C' = \psi(A) + W'$ . Pour le premier terme dans notre estimation (39.42) on a donc l'égalité

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta \psi(A)\psi(B)\psi(C)) - f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) \\ = \mathcal{A}(\Delta \psi(A)\psi(B)\psi(C)) - \mathcal{A}(\Delta \psi(A)B'C') \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il faut comparer l'aire de deux triangles qui ont le point  $\psi(A)$  en commun.

### DESSIN

Pour le faire, on fait d'abord les majorations

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A)\psi(B)\psi(C)) - f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \|V \wedge W\| - \|V' \wedge W'\| \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|V \wedge W - V' \wedge W'\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|V \wedge W - V' \wedge W + V' \wedge W - V' \wedge W'\| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|(V - V') \wedge W\| + \frac{1}{2} \cdot \|V' \wedge (W - W')\| \end{aligned}$$

7. Le lecteur qui connaît la notion de différentielle reconnaîtra les vecteurs  $V$  et  $W$  comme les images  $V = ((D\psi)(A))(B - A) \equiv \psi'(A)(B - A) \equiv (T_A\psi)(B - A)$  et  $W = ((D\psi)(A))(C - A)$  des vecteurs  $B - A$  et  $C - A$  par la différentielle  $(D\psi)(A)$  de l'application  $\psi$  au point  $A$ .



$$\stackrel{[2.6.vii]}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|V - V'\| \cdot \|W\| + \frac{1}{2} \cdot \|V'\| \cdot \|W - W'\| .$$

Et on termine avec une majoration de chaque composante des quatre vecteurs dont il faut connaître les normes, ce qu'on fait en utilisant le théorème des accroissements finis. (À noter que le point intermédiaire  $\xi$  donné par ce théorème sera différent pour chaque fonction considérée!) On commence avec les composantes de  $W$  :

$$\begin{aligned} |W_i| &= |\psi_i(C) - \psi_i(A)| \\ &\stackrel{(39.40)}{=} |(\partial_1 \psi_i)(\xi) \cdot (C - A)_1 + (\partial_2 \psi_i)(\xi) \cdot (C - A)_2| \\ &\leq M \cdot (|(C - A)_1| + |(C - A)_2|) \\ &\leq M \cdot (\|C - A\| + \|C - A\|) = 2M \|C - A\| , \end{aligned}$$

et donc

$$\|W\| \leq 6M \cdot \|C - A\| .$$

On poursuit avec les composantes de  $V'$  :

$$\begin{aligned} |V'_i| &\stackrel{(39.40)}{=} |(\partial_1 \psi_i)(A) \beta_1 + (\partial_2 \psi_i)(A) \beta_2| \\ &\leq M \cdot (|\beta_1| + |\beta_2|) \\ &\leq M \cdot \left( \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right) = 2M \|B - A\| , \end{aligned}$$

et donc

$$\|V'\| \leq 6M \cdot \|B - A\| .$$

Ensuite on considère les composantes de  $V - V'$  :

$$\begin{aligned} |V_i - V'_i| &= |\psi_i(B) - \psi_i(A) - (\partial_1 \psi_i)(A) \beta_1 - (\partial_2 \psi_i)(A) \beta_2| \\ &= |(\partial_1 \psi_i)(\xi) \beta_1 + (\partial_2 \psi_i)(\xi) \beta_2 - (\partial_1 \psi_i)(A) \beta_1 - (\partial_2 \psi_i)(A) \beta_2| \\ &\stackrel{(39.41)}{\leq} |(\partial_1 \psi_i)(\xi) - (\partial_1 \psi_i)(A)| \cdot |\beta_1| + |(\partial_2 \psi_i)(\xi) - (\partial_2 \psi_i)(A)| \cdot |\beta_2| \\ &< \varepsilon' \cdot (|\beta_1| + |\beta_2|) \leq 2\varepsilon' \|B - A\| , \end{aligned}$$

et donc

$$\|V - V'\| < 6\varepsilon' \cdot \|B - A\| .$$

Et on termine avec les composantes de  $W - W'$  :

$$\begin{aligned} |W_i - W'_i| &= |\psi_i(C) - \psi_i(A) - (\partial_1 \psi_i)(A) \gamma_1 - (\partial_2 \psi_i)(A) \gamma_2| \\ &= |(\partial_1 \psi_i)(\xi) \gamma_1 + (\partial_2 \psi_i)(\xi) \gamma_2 - (\partial_1 \psi_i)(A) \gamma_1 - (\partial_2 \psi_i)(A) \gamma_2| \\ &\stackrel{(39.41)}{\leq} |(\partial_1 \psi_i)(\xi) - (\partial_1 \psi_i)(A)| \cdot |\gamma_1| + |(\partial_2 \psi_i)(\xi) - (\partial_2 \psi_i)(A)| \cdot |\gamma_2| \\ &< \varepsilon' \cdot (|\gamma_1| + |\gamma_2|) \leq 2\varepsilon' \|C - A\| , \end{aligned}$$

et donc

$$\|W - W'\| < 6\varepsilon' \cdot \|C - A\| .$$

Quand on met tous nos résultats ensemble on trouve donc la majoration

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{A}(\Delta \psi(A) \psi(B) \psi(C)) - f(A) \mathcal{A}(\Delta ABC) \right| \\ &< 18 M \varepsilon' \cdot \|B - A\| \cdot \|C - A\| \leq \frac{18 M \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)}{\text{Pre}(\Delta ABC)} \\ &\leq \frac{18 M \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)}{\text{Pre}(\mathcal{T})} . \end{aligned}$$

En revenant sur (39.42) on trouve donc la majoration

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}(\Delta\psi(A)\psi(B)\psi(C)) - \iint_{\Delta ABC} f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC) \cdot \left( 1 + \frac{18M}{\text{Pre}(\mathcal{T})} \right) \leq \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC) \cdot \frac{1 + 18M}{\text{Pre}(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

et au final on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \iint_D f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \mathcal{A}(\Delta\psi(A_i)\psi(B_i)\psi(C_i)) - \iint_{\Delta A_i B_i C_i} f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC) \cdot \frac{1 + 18M}{\text{Pre}(\mathcal{T})} = \varepsilon' \cdot \mathcal{A}(D) \cdot \frac{1 + 18M}{\text{Pre}(\mathcal{T})} \\ & = \frac{\varepsilon}{\text{Pre}(\mathcal{T})} , \end{aligned}$$

comme annoncé.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [24.6].** Avec l'égalité  $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$  on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned} \langle (\partial_i \psi_1)(u, v), (\partial_j \psi_1)(u, v) \rangle &= \langle (\partial_i (\psi_2 \circ \varphi))(u, v), (\partial_j (\psi_2 \circ \varphi))(u, v) \rangle \\ &= \sum_{p,q=1}^2 \langle (\partial_p \psi_2)(\varphi(u, v)) \cdot (\partial_i \varphi_p)(u, v), (\partial_q \psi_2)(\varphi(u, v)) \cdot (\partial_j \varphi_q)(u, v) \rangle \\ &= \sum_{p,q=1}^2 (\partial_i \varphi_p)(u, v) \cdot \langle (\partial_p \psi_2)(\varphi(u, v)), (\partial_q \psi_2)(\varphi(u, v)) \rangle \cdot (\partial_j \varphi_q)(u, v) , \end{aligned}$$

ce qui se résume sous forme matricielle (en supprimant la dépendance des arguments  $(u, v)$  ou  $\varphi(u, v)$ ) comme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \langle \partial_1 \psi_1, \partial_1 \psi_1 \rangle & \langle \partial_1 \psi_1, \partial_1 \psi_2 \rangle \\ \langle \partial_2 \psi_1, \partial_1 \psi_1 \rangle & \langle \partial_1 \psi_2, \partial_1 \psi_2 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_1 \varphi_2 \\ \partial_2 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \partial_1 \psi_2, \partial_1 \psi_2 \rangle \circ \varphi & \langle \partial_1 \psi_2, \partial_2 \psi_2 \rangle \circ \varphi \\ \langle \partial_2 \psi_2, \partial_1 \psi_2 \rangle \circ \varphi & \langle \partial_2 \psi_2, \partial_2 \psi_2 \rangle \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [24.8].** La preuve est une simple application de la formule de changement de variables dans une intégrale multiple. Si on définit  $U_{12} = \psi_1^{-1}(\psi_2(U_2)) \subset U_1$  et  $U_{21} = \psi_2^{-1}(\psi_1(U_1)) \subset U_2$ , alors selon [20.5] l'application  $\varphi \equiv \psi_2^{-1} \circ \psi_1 : U_{12} \rightarrow U_{21}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme. Par hypothèse  $D_1 = \psi_1^{-1}(\mathcal{D}) \subset U_{12}$ ,  $D_2 = \psi_2^{-1}(\mathcal{D}) \subset U_{21}$  et donc  $\phi : D_1 \rightarrow D_2$  est un  $C^1$  difféomorphisme vérifiant  $\psi_2 \circ \varphi = \psi_1$ . En appliquant [24.6] et en prenant le déterminant de l'égalité (24.7) on obtient l'égalité (entre

fonctions)

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}} &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} E_2 \circ \varphi & F_2 \circ \varphi \\ F_2 \circ \varphi & G_2 \circ \varphi \end{pmatrix}} \\ &\equiv \left| \det(\text{Jac}(\varphi)) \right| \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} E_2 \circ \varphi & F_2 \circ \varphi \\ F_2 \circ \varphi & G_2 \circ \varphi \end{pmatrix}} . \end{aligned}$$

Si on substitue ce résultat dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} &\iint_{\psi_1^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E_1(u, v) G_1(u, v) - F_1(u, v)^2} \, du \, dv \\ &= \iint_{D_1} \sqrt{E_2(\varphi(u, v)) G_2(\varphi(u, v)) - F_2(\varphi(u, v))^2} \\ &\quad \cdot \left| \det(\text{Jac}(\varphi)(u, v)) \right| \, du \, dv \\ &= \iint_{\varphi(D_1)} \sqrt{E_2(\hat{u}, \hat{v}) G_2(\hat{u}, \hat{v}) - F_2(\hat{u}, \hat{v})^2} \, d\hat{u} \, d\hat{v} \\ &= \iint_{\psi_2^{-1}(\mathcal{D})} \sqrt{E_2(u, v) G_2(u, v) - F_2(u, v)^2} \, du \, dv , \end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité on a invoqué le théorème de changement de variables.

CQFD

**Preuve de [24.12].** Un petit calcul montre qu'il y a  $m \cdot (4n - 2)$  triangles génériques (24.10) et  $4m$  triangles au bord (24.11). En plus, il est presque évident que chaque triangle générique a le même aire et pointure, ainsi que chaque triangle au bord. Il suffit donc de calculer l'aire et la pointure d'un seul triangle générique et un seul triangle au bord.

Commençons avec le triangle générique  $\Delta S_{0,0} S_{1,0} S'_{0,0}$  dont les sommets sont donc

$$S_{0,0} = (0, 0) \quad , \quad S_{1,0} = \left(0, \frac{\pi}{n}\right) \quad , \quad S'_{0,0} = \left(\frac{1}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) ,$$

avec images sur  $S$  :

$$(0, 1, 0) \quad , \quad \left(0, \cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2m}, \cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}\right) .$$

### DESSIN

On établit facilement qu'on a

$$\text{Pre}(\Delta S_{0,0} S_{1,0} S'_{0,0}) = \min \left( \frac{\frac{n}{\pi m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{\pi m}\right)^2}} , \frac{2 \frac{n}{\pi m}}{1 + \left(\frac{n}{\pi m}\right)^2} \right)$$

et

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\Delta \psi(S_{0,0}) \psi(S_{1,0}) \psi(S'_{0,0})) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|(\psi(S_{1,0}) - \psi(S_{0,0})) \wedge (\psi(S'_{0,0}) - \psi(S_{0,0}))\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \left(0, \cos \frac{\pi}{n} - 1, \sin \frac{\pi}{n}\right) \wedge \left(\frac{1}{2m}, \cos \frac{\pi}{2n} - 1, \sin \frac{\pi}{2n}\right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \left\| \left( 0, -\sin \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{\pi}{2n} \right) \wedge \left( \frac{1}{2m}, \cos \frac{\pi}{2n} - 1, \sin \frac{\pi}{2n} \right) \right\| \\
&\stackrel{[2.6.vi]}{=} \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right)^2} .
\end{aligned}$$

Ensuite on regarde le triangle au bord  $\Delta S_{0,0} S'_{0,0} G_0$  dont les sommets sont donc

$$S_{0,0} = (0, 0) \quad , \quad S'_{0,0} = \left( \frac{1}{2m}, \frac{\pi}{2n} \right) \quad , \quad G_0 = \left( \frac{1}{2m}, 0 \right)$$

avec images sur  $S$

$$(0, 1, 0) \quad , \quad \left( \frac{1}{2m}, \cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n} \right) \quad , \quad \left( \frac{1}{2m}, 1, 0 \right) .$$

Et on établit facilement qu'on a

$$\text{Pre}(\Delta S_{0,0} S'_{0,0} G_0) = \min \left( \frac{\frac{n}{\pi m}}{\sqrt{1 + \left( \frac{n}{\pi m} \right)^2}} , \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{n}{\pi m} \right)^2}} \right)$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\Delta \psi(S_{0,0}) \psi(S'_{0,0}) \psi(G_0)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\| (\psi(S'_{0,0}) - \psi(S_{0,0})) \wedge (\psi(G_0) - \psi(S_{0,0})) \right\| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\| \left( \frac{1}{2m}, \cos \frac{\pi}{2n} - 1, \sin \frac{\pi}{2n} \right) \wedge \left( \frac{1}{2m}, 0, 0 \right) \right\| \\
&\stackrel{[2.6.vi]}{=} \frac{1}{4m} \cdot \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2m} \cdot \sin \frac{\pi}{4n} .
\end{aligned}$$

La pointure de la triangulation se déduit directement de ces résultats. Pour l'aire total  $\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T}))$  on multiplie par le nombre de triangles concernés :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\psi(\mathcal{T})) &= m(4n - 2) \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right)^2} + 4m \cdot \frac{1}{2m} \cdot \sin \frac{\pi}{4n} \\
&= (2n - 1) \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{1 + 16 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{4n}} + 2 \sin \frac{\pi}{4n} ,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §25

**Preuve de [25.2].** Par définition du reparamétrage, on a les égalités pour tout  $t \in I_2$  :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)) \quad \text{et donc} \quad \gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) .$$

Le résultat sera maintenant une conséquence directe du théorème de changement de variables dans l'intégrale, avec un petit détail en plus concernant l'orientation. On a défini l'intervalle  $[a, b]$  comme l'image de l'intervalle  $[c, d] \subset I_2$ , avec  $c < d$  et  $a < b$ . Si  $\varphi$  est croissante, on aura  $\varphi'(t) > 0$  pour tout  $t \in I_2$  ainsi que  $a = \varphi(c)$  et  $\varphi(d) = b$ . Mais si  $\varphi$  est décroissante, on aura  $\varphi'(t) < 0$  pour tout  $t \in I_2$  avec  $b = \varphi(c)$  et  $a = \varphi(d)$ . Avec cette précision on calcule d'abord dans le cas  $\varphi$  croissante :

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\gamma_2(t)) \cdot \|\gamma_2'(t)\| \, dt &= \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t))) \cdot \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(u)) \cdot \|\gamma_1'(u)\| \, du \end{aligned}$$

et ensuite dans le cas  $\varphi$  décroissante :

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\gamma_2(t)) \cdot \|\gamma_2'(t)\| \, dt &= \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t))) \cdot \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| \, dt \\ &= - \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t))) \cdot \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t) \, dt \\ &= - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma_1(u)) \cdot \|\gamma_1'(u)\| \, du \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(u)) \cdot \|\gamma_1'(u)\| \, du . \end{aligned} \quad \boxed{CQFD}$$

**Preuve de [25.4].** La preuve est une copie conforme de la preuve de [24.8], avec la seule différence qu'il faut rajouter la fonction  $f$  dans les intégrales.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §26

**Preuve de [26.1].** L'expression pour  $T_p S$  est déjà montré dans [21.5]. Pour l'expression pour  $T_x U$  on commence avec l'observation qu'on a évidemment l'inclusion

$$\{ \gamma'(t_o) \in \mathbf{R}^n \mid \gamma : I \rightarrow U \text{ une courbe vérifiant } t_o \in I \text{ et } \gamma(t_o) = x \} \subset \mathbf{R}^n .$$

Pour l'inclusion réciproque on prend donc  $v \in \mathbf{R}^n$  et on invoque le fait que  $U$  est un ouvert pour en déduire l'existence de  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset U$ . Ensuite on définit  $\varepsilon = \delta/\|v\|$  et la courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow U$  par

$$\gamma(t) = x + tv .$$

Vu qu'il est évident qu'on a  $\gamma'(0) = v$ , on en déduit qu'on a l'inclusion réciproque, donc égalité. La description de  $TU$  en termes de  $T_x U$  en découle immédiatement.

CQFD

**Nota Bene : une identification habituelle.** Pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  ou un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  on a défini les espaces tangent  $T_p S$  et  $T_x U$  comme des espaces vectoriels. Avec la définition des fibrés tangent  $TS$  et  $TU$  et les projections canoniques  $\pi_S : TS \rightarrow S$  et  $\pi_U : TU \rightarrow U$  on peut donc écrire

$$\pi_S^{-1}(p) = \{p\} \times T_p S \quad \text{et} \quad \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times T_x U .$$

En vu de ces égalités, il est d'usage d'**identifier** ces espaces vectoriels avec ces pré-images. On dit donc que  $\pi_S^{-1}(p)$  **est** l'espace tangent à  $S$  au point  $p$  et que  $\pi_U^{-1}(x)$  **est** l'espace tangent à  $U$  au point  $x$ .

Cette identification est "renforcée" par une notation d'un élément  $(p, v)$  de  $TS$  (ou un élément  $(x, v) \in TU$ ) comme

$$v_p \quad \text{ou} \quad v|_p \quad \text{ou (s'il n'y a pas confusion possible) simplement} \quad v .$$

Autrement dit, au lieu d'écrire le vecteur  $v$  et son point d'attache  $p$  comme un couple  $(p, v)$ , on écrit le point d'attache  $p$  en indice "attaché" au vecteur  $v$ . Et avec cette écriture, la structure d'espace vectoriel de  $T_p S$  (ou  $T_x U$ ) s'écrit simplement comme

$$v|_p + \lambda w|_p = (v + \lambda w)|_p .$$

Cette écriture nous met en garde qu'en général on ne peut pas additionner des vecteurs dans des espaces tangents différents : la formule  $v|_p + w|_q$  n'aura pas de sens (sauf avec des explications supplémentaires) : la somme d'un élément  $v \in T_p S$  avec un élément  $w \in T_q S$  est bien un vecteur dans  $\mathbf{R}^3$ , mais ne sera en général ni dans  $T_p S$ , ni dans  $T_q S$ .

La situation semble être différente pour les espaces tangents  $T_x U = \mathbf{R}^n$  (qui sont bien tous le même  $\mathbf{R}^n$ ), mais on continuera à distinguer ces différents espaces tangents pour des  $x$  différents, comme on le fait pour les espaces tangents à une surface régulière. Quoi que ... on dérogera à cette règle de temps en temps pour donner des justifications heuristiques, surtout dans la discussion sur le transport parallèle (mais voir aussi ci-dessous).

### Les preuves de §27

**Preuve de [27.2].** Les deux vecteurs  $(\partial_1\psi)(u, v)$  et  $(\partial_2\psi)(u, v)$  engendrent l'espace tangent  $T_p S$  au point  $p = \psi(u, v)$  et donc par [2.6.iii] le vecteur  $\mathbf{n}(p)|_p$  est bien un vecteur tangent normal unitaire à  $S$  au point  $p$ . En plus, il est immédiat que la composée  $\psi \circ \mathbf{n}$  est l'application

$$(u, v) \mapsto \frac{(\partial_1\psi)(u, v) \wedge (\partial_2\psi)(u, v)}{\|(\partial_1\psi)(u, v) \wedge (\partial_2\psi)(u, v)\|} ,$$

qui est donc de classe  $C^{k-1}$  car  $\psi$  est de classe  $C^k$ . Selon [18.10.iv-ii]  $\psi(U)$  est une surface régulière et  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  est une carte locale de  $\psi(U)$ . Avec [20.6] il s'ensuit (en prenant l'atlas qui consiste de l'unique carte  $\psi$ ) que l'application  $\mathbf{n} : \psi(U) \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une application de classe  $C^{k-1}$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [27.4].** Par définition d'une valeur régulière, l'ensemble  $V \subset U \subset \mathbf{R}^3$  défini par

$$V = \{ x \in U \mid \text{grad}(F)(x) \neq \mathbf{0} \}$$

est un ouvert qui contient  $S$ . L'application  $\mathbf{n} : V \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\mathbf{n}(p)|_p = \frac{\text{grad}(F)(p)}{\|\text{grad}(F)(p)\|}$$

est donc de classe  $C^{k-1}$  et selon [21.6], elle donne en chaque point  $p \in S \subset V$  un vecteur tangent unitaire normal à la surface  $S$ . La restriction de  $\mathbf{n}$  à  $S$  est donc un champ de vecteurs unitaires normaux à  $S$ . Si  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  est une carte locale, alors la composée  $\mathbf{n} \circ \psi$  sera de classe  $C^{k-1}$  comme composée de l'application  $\psi$  de classe  $C^k$  avec l'application  $\mathbf{n}$  de classe  $C^{k-1}$ . La restriction de  $\mathbf{n}$  à  $S$  est donc une application de classe  $C^{k-1}$  sur  $S$  selon [20.6] (en prenant l'atlas qui consiste de l'unique carte  $\psi$ ).  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [27.5].** La preuve suit le même schéma que la preuve de [9.3] : on commence avec la preuve que deux solutions sur une même intervalle diffèrent par un signe global. Ensuite on montre l'existence locale (sur des petits intervalles) de solutions/applications  $\mathbf{n}$ . Et on finit avec la preuve que l'intervalle le plus grand sur lequel il existe une solution est forcément tout l'intervalle  $I$ .

- Pour la première étape on suppose qu'on a un intervalle  $J \subset I$  et deux applications  $\mathbf{n}_i : J \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  de classe  $C^p$  ayant la propriété que  $\mathbf{n}_i(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in J$ . Mais dans un point  $p \in S$  il n'existe que deux vecteurs normaux unitaires qui diffèrent par un signe. Il existe donc une fonction  $\epsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}$  telle qu'on a

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = \epsilon(t) \cdot \mathbf{n}(t) .$$

Par [12.6] cette fonction  $\epsilon$  est aussi de classe  $C^p$ . Donc, parce que  $J$  est un intervalle, elle est constante. La deuxième partie de l'énoncé est le cas particulier  $J = I$ .

- Pour l'existence locale on prend  $t_o \in I$  et on note  $p = \gamma(t_o)$ . Par [18.10.i] il existe une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  telle que  $p \in \psi(U)$ . Selon [18.10.iii-iv] il existe

un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = S \cap V$ , et donc  $J = \gamma^{-1}(\psi(U)) = \gamma^{-1}(V)$  est un ouvert contenant  $t_o$ . Et ensuite, selon [20.3] ou [23.1], il existe une courbe  $c : J \rightarrow U$  de classe  $C^p$  telle qu'on a  $\gamma = \psi \circ c$  sur  $J$ . Il s'ensuit que la courbe  $\mathbf{n} : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par (voir (27.3))

$$\mathbf{n}(t)|_p = \frac{(\partial_1 \psi)(c(t)) \wedge (\partial_2 \psi)(c(t))}{\|(\partial_1 \psi)(c(t)) \wedge (\partial_2 \psi)(c(t))\|}$$

est de classe  $C^p$  comme composée d'une fonction de classe  $C^p$  (l'application  $c$ ) avec des fonctions de classe  $C^{k-1}$ . Et en plus,  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t) = \psi(c(t))$ . Ceci montre qu'il existe, pour tout  $t_o$  une application  $\mathbf{n}$  ayant les propriétés requises dans un voisinage ouvert de  $t_o$ .

• Pour l'existence globale, on choisit, comme dans la preuve de [9.3], d'abord arbitrairement  $t_o \in I$  et ensuite on invoque la deuxième étape pour trouver un intervalle ouvert  $J_o \ni t_o$  et une application  $\mathbf{n}_o : J_o \rightarrow \mathbf{R}^3$  ayant les propriétés requises (c'est-à-dire qu'elle est de classe  $C^p$  et pour tout  $t$  dans l'intervalle concerné  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t)$ ). Avec ces ingrédients on définit  $\mathcal{J}$  comme

$$\mathcal{J} = \{ J \subset I \mid J \text{ un intervalle ouvert, } t_o \in J \\ \& \exists \mathbf{n} : J \rightarrow \mathbf{R} \text{ ayant les propriétés requises et } \mathbf{n}(t_o) = \mathbf{n}_o(t_o) \} .$$

Autrement dit,  $\mathcal{J}$  est la collection de tous les intervalles ouverts  $J$  contenant  $t_o$  et inclus dans  $I$  sur lesquels il existe une application  $\mathbf{n}$  de classe  $C^p$  qui coïncide avec  $\mathbf{n}_o$  au point  $t_o$  et telle que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in J$ . Évidemment  $\mathcal{J}$  n'est pas vide, car il contient  $J_o$ . On peut donc prendre la réunion de tous ces intervalles :

$$J_m = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J .$$

On veut maintenant montrer que  $J_m$  appartient à  $\mathcal{J}$ . Pour cela on commence avec la définition de l'application  $\mathbf{n}_m : J_m \rightarrow \mathbf{R}^3$  par la procédure suivante :

$$\begin{array}{ll} t \in J_m & \xrightarrow{\text{déf. d'une réunion}} \exists J \in \mathcal{J} : t \in J \\ \text{déf. de } \mathcal{J} & \xrightarrow{\quad} \exists \mathbf{n} : J \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ ayant les propriétés requises et } \mathbf{n}(t_o) = \mathbf{n}_o(t_o) \\ & \xrightarrow{\text{on pose}} \mathbf{n}_m(t) = \mathbf{n}(t) . \end{array}$$

Si  $J' \in \mathcal{J}$  est un autre intervalle avec  $t \in J'$  et une application  $\mathbf{n}' : J' \rightarrow \mathbf{R}^3$  ayant les propriétés requises, alors  $J \cap J'$  est un intervalle contenant  $t_o$  et  $t$ . Donc par la première étape il existe  $\epsilon = \pm 1$  tel que

$$\mathbf{n}'|_{J \cap J'} = \epsilon \mathbf{n}|_{J \cap J'} .$$

Mais on a  $\mathbf{n}'(t_o) = \mathbf{n}_o(t_o) = \mathbf{n}(t_o)$  et donc  $\epsilon = 1$ . Il s'ensuit qu'on doit avoir  $\mathbf{n}'(t) = \mathbf{n}(t)$ . La fonction  $\mathbf{n}_m$  est donc bien définie par notre procédure et, par construction,  $\mathbf{n}_m(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in J_m$ . En plus, elle est de classe  $C^p$  par [36.2]. Plus précisément, par définition de  $\mathbf{n}_m$ , si  $\mathbf{n}_m(t) = \mathbf{n}(t)$ , alors  $\mathbf{n}_m|_J = \mathbf{n}$  et donc la restriction de  $\mathbf{n}_m$  à  $J \subset J_m$  est de classe  $C^p$ . Les conditions de [36.2] sont donc vérifiées, ce qui permet de conclure que  $\mathbf{n}_m$  est de classe  $C^p$ . Comme réunion d'intervalles ouverts, c'est un ouvert et, parce que chaque  $J \in \mathcal{J}$  contient  $t_o$ , on a aussi  $t_o \in J_m$ . Pour finalement montrer que c'est un intervalle, on pourrait invoquer un résultat de topologie générale qui dit qu'une réunion d'ensembles connexes contenant tous un même point est connexe.



Mais on peut aussi le montrer directement. Pour cela on suppose que  $t_1 < t_2$  sont deux éléments de  $J_m$ . Par définition de  $J_m$  il existe donc  $J_i \in \mathcal{J}$  avec  $t_o, t_i \in J_i$ . Maintenant on raisonne selon la position de  $t_o$  par rapport à  $t_i$  : (i)  $t_o \leq t_1$ , (ii)  $t_1 < t_o < t_2$  et (iii)  $t_2 \leq t_o$ . Dans le premier cas on a donc les inclusions

$$[t_1, t_2] \subset [t_o, t_2] \stackrel{J_2 \text{ intervalle}}{\subset} J_2 \subset J_m .$$

Dans le deuxième cas on a les inclusions

$$[t_1, t_2] = [t_1, t_o] \cup [t_o, t_2] \stackrel{J_i \text{ intervalle}}{\subset} J_i \cup J_2 \subset J_m ,$$

et dans le troisième cas on les inclusions

$$[t_1, t_2] \subset [t_1, t_o] \stackrel{J_1 \text{ intervalle}}{\subset} J_1 \subset J_m .$$

Dans tous les cas on a donc  $[t_1, t_2] \subset J_m$ , ce qui montre que  $J_m$  est un intervalle. Ainsi on a donc montré que  $J_m$  appartient à  $\mathcal{J}$  (avec l'application  $\mathbf{n}_m$ ).

Pour terminer, il suffit donc de montrer qu'on a  $J_m = I$ . Pour cela on suppose qu'il existe  $s_o \in I \setminus J_m$  vérifiant  $s_o > t_o$  (le raisonnement pour  $s_o < t_o$  sera analogue). Parce que  $J_m$  est un intervalle, on doit avoir

$$\forall t \in J_m : t < s_o .$$

On a donc  $T = \sup J_m \in I$ . Alors, par la deuxième étape, il existe  $\delta > 0$  et une solution  $\mathbf{n}_1 : ]T - \delta, T + \delta[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  ayant les propriétés requises. Mais par définition du sup il existe  $t \in J_m$  avec  $t > T - \delta$ . Il s'ensuit que les deux solutions  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_m$  sont tous les deux définies sur l'intervalle  $J_m \cap ]T - \delta, T + \delta[$  (qui est non-vide car contenant  $t$ ). Par la première étape il existe donc  $\epsilon = \pm 1$  tel que

$$\forall s \in J_m \cap ]T - \delta, T + \delta[ \quad : \quad \mathbf{n}_m(s) = \epsilon \mathbf{n}_1(s) .$$

Il s'ensuit que l'application  $\mathbf{n}_2 : J_m \cup ]T - \delta, T + \delta[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\mathbf{n}_2(s) = \begin{cases} \mathbf{n}_m(s) & \text{si } s \in J_m \\ \epsilon \mathbf{n}_1(s) & \text{si } s \in ]T - \delta, T + \delta[ \end{cases}$$

est de classe  $C^p$  [36.2] et telle que  $\mathbf{n}_2(t)$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in J_m \cup ]T - \delta, T + \delta[$ . En plus on a  $t_o \in J_m$  et donc  $\alpha_2(t_o) = \alpha_m(t_o) = \alpha_o(t_o)$ . Il s'ensuit que  $J_m \cup ]T - \delta, T + \delta[$  appartient à  $\mathcal{J}$  et qu'il est strictement plus grand que  $J_m$ . Ceci contredit la construction de  $J_m$  comme la réunion de **tous** les éléments de  $\mathcal{J}$ . La conclusion est donc qu'il n'existe pas  $s_o \in I \setminus J_m$  avec  $s_o > t_o$ . Un argument similaire montre qu'il n'existe pas non plus  $s_o \in I \setminus J_m$  avec  $s_o < t_o$ . On doit donc avoir  $J_m = I$ , ce qui termine la preuve de l'existence globale.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [27.6].** Si  $S$  est orientable, il existe un champ de vecteurs unitaires normaux à  $S$  continue  $\hat{\mathbf{n}} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$ . La composée  $\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est donc un champ de vecteurs unitaires normaux à  $S$  continue. Selon [27.5] il existe  $\epsilon = \pm 1$  tel que  $\mathbf{n} = \epsilon \cdot (\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma)$ . Et si on a  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ , alors

$$\mathbf{n}(t_0) = \epsilon \cdot \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t_0)) = \epsilon \cdot \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t_1)) = \mathbf{n}(t_1) . \quad \boxed{CQFD}$$

### Les preuves de §28

**Preuve de [28.2].** Le plan tangent  $PT_pS$  est décrit par l'équation  $\langle x - p, \mathbf{n}_p \rangle = 0$  et le développement limité de  $\psi$  à l'ordre 2 est donné par

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \psi(u_o, v_o) + (u - u_o) \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) + (v - v_o) \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left( (u - u_o)^2 \cdot (\partial_1^2 \psi)(u_o, v_o) + 2(u - u_o)(v - v_o) \cdot (\partial_1 \partial_2 \psi)(u_o, v_o) \right. \\ & \left. + (v - v_o)^2 \cdot (\partial_2^2 \psi)(u_o, v_o) \right) + o\left(\left\|\begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Si on substitue ceci dans la formule pour  $d(\psi(u, v), PT_pS)$  en réalisant que  $p = \psi(u_o, v_o)$  et que les vecteurs  $(\partial_i \psi)(u_o, v_o)$  sont orthogonaux à  $\mathbf{n}_p$  (car ils engendrent l'espace tangent), on obtient la formule annoncée avec la définition des fonctions  $L, M, N$  et la définition de la deuxième forme fondamentale.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [28.3].** Un plan parallèle à  $PT_pS$  est donné par l'équation  $\langle x - p, \mathbf{n}_p \rangle = \lambda$ , où  $\mathbf{n}_p$  est un vecteur tangent unitaire normal à  $S$  au point  $p$  et où  $\lambda \in \mathbf{R}$  est la distance entre les deux plans. Si on prend une carte locale  $\psi$  contenant  $p$ , alors, selon [28.2], l'intersection  $C$  est décrite par l'équation

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{II}_{(u_o, v_o)}\left(\begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}\right) + o\left(\left\|\begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}\right\|^2\right) = \lambda.$$

Si on oublie le terme en petit-oh, ceci s'écrit comme

$$(39.43) \quad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 2\lambda,$$

où on n'a pas précisé qu'il faut prendre les fonctions  $L, M, N$  au point  $(u_o, v_o) \in U$  et où on a abrégé  $x = u - u_o$  et  $y = v - v_o$ .

Si  $L \neq 0$ , ceci peut être réécrit comme

$$\left(x + \frac{M}{L}y\right)^2 + (LN - M^2) \cdot \left(\frac{y}{L}\right)^2 = \frac{2\lambda}{L}.$$

Pour  $LN - M^2 > 0$  ceci est l'équation d'une ellipse dans les coordonnées  $x + My/L$  et  $y$ , pour  $LN - M^2 < 0$  ceci est l'équation d'une hyperbole et pour  $LN - M^2 = 0$  c'est l'équation de deux droites parallèles :  $x + My/L = \pm \sqrt{2\lambda/L}$ .

Dans le cas  $N \neq 0$  le raisonnement est analogue avec la réécriture de (39.43) comme

$$\left(y + \frac{M}{N}x\right)^2 + (LN - M^2) \cdot \left(\frac{x}{N}\right)^2 = \frac{2\lambda}{N}.$$

Dans le cas  $L = N = 0$ , on a écarté la possibilité  $M = 0$  (un point plat) et donc  $p$  est un point hyperbolique  $LN - M^2 = -M^2 < 0$ . Il s'ensuit que (39.43) se réduit à l'équation

$$xy = \lambda/M,$$

qui, elle aussi, est l'équation d'une hyperbole.  $\boxed{CQFD}$

## Les preuves de §29

**Preuve de [29.3].** En termes des applications  $\psi$  et  $c$ , les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\psi \circ c)''(t) = (\partial_1 \psi)(c(t)) \cdot c'_1(t_o) + (\partial_2 \psi)(c(t)) \cdot c'_2(t_o) \\ \gamma''(t) &= (\partial_1^2 \psi)(c(t)) \cdot c'_1(t)^2 + 2 \cdot (\partial_2 \partial_1 \psi)(c(t)) \cdot c'_1(t_o) \cdot c'_2(t) + (\partial_2^2 \psi)(c(t)) \cdot c'_2(t_o)^2 \\ &\quad + (\partial_1 \psi)(c(t)) \cdot c''_1(t_o) + (\partial_2 \psi)(c(t)) \cdot c''_2(t_o)\end{aligned}$$

Soit maintenant  $\mathbf{n}|_p$  le vecteur normal unitaire au point  $p \in S$  qui est utilisé pour la définition de la deuxième forme fondamentale. Étant donné que les vecteurs  $(\partial_1 \psi)(u_o, v_o)$ ,  $(\partial_2 \psi)(u_o, v_o)$  et a fortiori  $\gamma'(t_o)$  appartiennent à l'espace tangent  $T_p S$ , leur produit scalaire avec  $\mathbf{n}|_p$  est nul. Il s'ensuit que la courbure normale  $\kappa_n$  est donnée par

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \langle k_\gamma, \mathbf{n}|_p \rangle = \left\langle \frac{1}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \left( \gamma''(t_o) - \frac{\langle \gamma''(t_o), \gamma'(t_o) \rangle}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \gamma'(t_o) \right), \mathbf{n}|_p \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t_o)\|^2} \cdot \left\langle (\partial_1^2 \psi)(u_o, v_o) \cdot c'_1(t)^2 + 2 \cdot (\partial_2 \partial_1 \psi)(u_o, v_o) \cdot c'_1(t_o) \cdot c'_2(t) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_2^2 \psi)(u_o, v_o) \cdot c'_2(t_o)^2, \mathbf{n}|_p \right\rangle \\ &= \frac{\mathbf{II}_{(u_o, v_o)}(c'(t_o), c'(t_o))}{\|\gamma'(t_o)\|^2} .\end{aligned}$$

Mais selon [23.7] on a l'égalité  $\|\gamma'(t_o)\|^2 = \mathbf{I}_{(u_o, v_o)}(c'(t_o), c'(t_o))$ , ce qui termine la première partie.

Pour le cas particulier, il suffit de remarquer d'abord que  $\gamma'(t_o)$  et  $\bar{\gamma}'(s)$  sont colinéaire si et seulement si les vecteurs  $c'(t_o)$  et  $\bar{c}'(s)$  sont colinéaires, où  $\bar{c}$  est l'unique courbe vérifiant  $\bar{\gamma} = \psi \circ \bar{c}$ . Et ensuite que si on remplace  $c'(t_o)$  par un multiple  $\bar{c}'(s) = \lambda \cdot c'(t_o)$ , alors le quotient de la première et deuxième forme fondamentale ne change pas, car numérateur et dénominateur changent en  $\lambda^2$  fois l'original. CQFD

**Preuve de [29.4].** Un point critique de  $f$  est un point où les deux dérivées partielles s'annulent. Par définition de la première et deuxième forme fondamentale on a l'égalité

$$f(a, b) = \frac{a^2 L + 2ab M + b^2 N}{a^2 E + 2ab F + b^2 G} \equiv \frac{\mathbf{II}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}((a, b), (a, b))} ,$$

où on n'a plus écrit la dépendance du point  $(u_o, v_o) \in U$  des six fonctions  $E, F, G, L, M, N$ . La nullité des deux dérivées partielles s'écrit donc comme

$$\begin{aligned}(\partial_1 f)(a, b) &= \frac{2(aL + bM) \cdot \mathbf{I}((a, b), (a, b)) - 2(aE + bF) \cdot \mathbf{II}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}((a, b), (a, b))^2} = 0 \\ (\partial_2 f)(a, b) &= \frac{2(aM + bN) \cdot \mathbf{I}((a, b), (a, b)) - 2(aF + bG) \cdot \mathbf{II}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}((a, b), (a, b))^2} = 0 .\end{aligned}$$

Étant donné que la première forme fondamentale ne s'annule pas sur un vecteur non-nul, ce système est équivalent aux équations

$$\begin{aligned} aL + bM - \frac{\mathbf{II}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}((a, b), (a, b))} \cdot (aE + bF) &= 0 \\ aM + bN - \frac{\mathbf{II}((a, b), (a, b))}{\mathbf{I}((a, b), (a, b))} \cdot (aF + bG) &= 0 . \end{aligned}$$

Mais on a  $\mathbf{II}((a, b), (a, b))/\mathbf{I}((a, b), (a, b)) = f(a, b)$ . Ce système s'écrit donc sous forme matricielle comme

$$(39.44) \quad \left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ce qu'on peut réécrire (car la matrice associée à la première forme fondamentale est inversible [23.4]) comme

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Il s'ensuit que si  $(a, b)$  est un point critique et  $\kappa = f(a, b)$ , alors  $\kappa$  est une valeur propre de la matrice (29.5) et  $(a, b)$  est un vecteur propre associé.

Réciproquement, si  $\kappa$  est une valeur propre de la matrice (29.5) et  $(a, b)$  un vecteur propre associé, alors on a

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \kappa \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ,$$

ce qui est équivalent à l'équation matricielle

$$(39.45) \quad \left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a donc en particulier

$$0 = (a \ b) \cdot \left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{II}((a, b)) - \kappa \cdot \mathbf{I}((a, b), (a, b)) .$$

Il s'ensuit qu'on a  $\kappa = \mathbf{II}((a, b), (a, b))/\mathbf{I}((a, b), (a, b)) = f(a, b)$ . Et alors (39.45) s'écrit comme le système (39.44), ce qui veut dire que  $(a, b)$  est un point critique pour  $f$ . CQFD

**Preuve de [29.6].**  $\kappa$  est une valeur propre de la matrice (29.5) si et seulement si on a l'égalité

$$\det \left[ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 ,$$

ce qui est équivalent à l'égalité (car la matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  est inversible)

$$\det \left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] = 0 .$$

Il est immédiat qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned} \det \left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \\ = (EG - F^2) \kappa^2 - (GL + EN - 2FM) \kappa + (LN - M^2) . \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation quadratique est donné par

$$\begin{aligned} (GL + EN - 2FM)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2) \\ = 4 \frac{EG - F^2}{E^2} (EM - FL)^2 + \left( EN - GL - \frac{2F}{E} (EM - FL) \right)^2 . \end{aligned}$$

Cette égalité montre que le discriminant est toujours positif (car  $EG - F^2 > 0$  [23.4]), ce qui montre que la matrice (29.5) a toujours deux valeurs propres réelles.

CQFD

**Preuve de [29.7].** Le produit des valeurs propres d'une matrice est le déterminant de cette matrice. Et il est immédiat que le déterminant de la matrice (29.5) est donné par  $(LN - M^2)/(EG - F^2)$ .

CQFD

**Preuve de [29.9].** Vu l'égalité  $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ , la condition  $LN - M^2 = 0$  est équivalente à  $K = 0$ . Si on a  $L = M = N = 0$ , alors la matrice (29.5) est identiquement nulle et donc  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ . Par contraposé il s'ensuit que la condition dans [29.8] implique celle de [28.1]. Dans l'autre sens, si on a  $\kappa_1 = \kappa_2$ , alors la matrice (29.5) est  $\kappa_1$  fois l'identité, ce qu'on peut réécrire comme l'égalité

$$(39.46) \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \kappa_1 \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} .$$

On a donc en particulier  $LN - M^2 = \kappa_1^2 \cdot (EG - F^2)$ , et donc  $\kappa_1 = 0$  car par hypothèse on a  $LN - M^2 = 0$  et  $EG - F^2 > 0$ . Et donc, par (39.46), on a  $L = M = N = 0$ . Ainsi on a montré, de nouveau par contraposé, que la condition dans [28.1] implique celle de [29.8].

CQFD

**Preuve de [29.10].** Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte locale pour  $S$  contenant  $p$  et soit  $(a_i, b_i) \in \mathbf{R}^2$  deux vecteurs correspondants aux deux directions principales  $v_i \in \mathbf{R}^3$  définis par

$$v_i = a_i \cdot (\partial_1 \psi)(u_o, v_o) + b_i \cdot (\partial_2 \psi)(u_o, v_o) \in \mathbf{R}^3$$

associées aux deux courbures principales  $\kappa_i$ . La propriété que  $(a_i, b_i)$  est un vecteur propre de la matrice (29.5) pour la valeur propre  $\kappa_i$  se réécrit comme

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \kappa_i \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} .$$

Alors à l'aide de [23.7] on peut faire le calcul suivant :

$$\kappa_2 \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = \kappa_2 \cdot (a_1 \quad b_1) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 \ b_1) \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_2 \ b_2) \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \kappa_1 \cdot (a_2 \ b_2) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \kappa_1 \cdot \langle v_2, v_1 \rangle .
\end{aligned}$$

On a donc  $(\kappa_2 - \kappa_1) \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ . Par hypothèse  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , donc  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ . *CQFD*

## Les preuves de §30

**Preuve de [30.4].** Soit  $\Gamma : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow S$  une application vérifiant les conditions données en [30.2]. Pour cette application on calcule une expression explicite de  $L(\gamma_\varepsilon)$  comme

$$L(\gamma_\varepsilon) = \int_a^b \|\gamma'_\varepsilon(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, \varepsilon) \right\| \, dt .$$

Pour calculer la dérivée par rapport à  $\varepsilon$ , on remarque que la fonction à intégrer  $\partial \Gamma / \partial t$  est de classe  $C^1$  sur le pavé fermé et borné  $[a, b] \times [-1, 1]$ , ce qui permet d'intervertir intégrale et dérivée par rapport à  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$  (aussi bien pour l'intégrale de Riemann que pour celle de Lebesgue). On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} L(\gamma_\varepsilon) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, \varepsilon) \right\| \, dt = \int_a^b \frac{\langle \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial \varepsilon}(t, 0), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, 0) \rangle}{\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, 0) \right\|} \, dt \\ &= \int_a^b \frac{\langle \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial \varepsilon}(t, 0), \gamma'_0(t) \rangle}{\|\gamma'_0(t)\|} \, dt \end{aligned}$$

Mais par hypothèse  $t \mapsto \|\gamma'_0(t)\| = \|\gamma'(t)\|$  est une fonction constante. La condition  $\frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon) = 0$  est donc équivalente à la condition

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial \varepsilon}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle \, dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle \, dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \right\rangle \, dt \\ &= \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(b, 0), \gamma'(b) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(a, 0), \gamma'(a) \right\rangle - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \right\rangle \, dt \\ &= - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \right\rangle \, dt , \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé l'hypothèse qu'on a  $\Gamma(a, \varepsilon) = p$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  et donc en particulier  $(\partial_\varepsilon \Gamma)(a, 0) = 0$  (et de même  $(\partial_\varepsilon \Gamma)(b, 0) = 0$ ).

Pour relier cette condition à la condition que  $\gamma''$  est orthogonal à l'espace tangent, on fait la remarque que, pour  $t \in [a, b]$  fixé, l'application  $\varepsilon \mapsto \Gamma(t, \varepsilon)$  est une courbe sur la surface  $S$ . En particulier sa dérivée en  $\varepsilon = 0$  est donc un élément de l'espace tangent :

$$\forall t \in [a, b] : \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0) \in T_{\Gamma(t, 0)} S = T_{\gamma(t)} S .$$

Il s'ensuit immédiatement que, si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à l'espace tangent  $T_{\gamma(t)} S$ , alors on a  $\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \rangle = 0$ . Et donc par conséquence son intégrale sur  $[a, b]$  sera nulle, ce qui démontre la partie "si" de l'énoncé.

Pour la partie "seulement si," il faut montrer que le fait que cette intégrale soit nulle pour toute application  $\Gamma$  vérifiant les conditions implique que  $\gamma''(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)} S$ , ce qu'on fera par l'absurde. Esquissons d'abord les grandes lignes avant d'écrire les détails. On suppose qu'il existe  $t_o \in [a, b]$  tel que  $\gamma''(t_o)$  n'est pas orthogonal à  $T_{\gamma(t_o)} S$ . Pour obtenir une contradiction, on construit une application  $\Gamma$  vérifiant les conditions avec  $\frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon) \neq 0$ . Pour s'assurer que  $\Gamma$  prend ses valeurs dans  $S$ , on passe par une carte. Mais vu qu'il n'est nullement

garantit que l'image de la courbe  $\gamma$  est contenu dans l'image d'une seule carte, on choisit une carte qui contient  $\gamma(t_o)$  et on "modifie"  $\gamma$  seulement sur cette carte.

### DESSIN

Autrement dit, on définit  $\Gamma(t, \varepsilon)$  d'une telle façon que ce n'est différente de  $\gamma(t)$  que quand  $\gamma(t)$  est dans cette carte, ce qui implique que  $(\partial_\varepsilon \Gamma)(t, 0)$  sera certainement nul (et donc a fortiori  $\langle (\partial_\varepsilon \Gamma)(t, 0), \gamma''(t) \rangle$ ) quand  $\gamma(t)$  n'est pas dans cette carte. Et même dans cette carte on définit  $\Gamma(t, \varepsilon)$  d'une telle façon que c'est différent de  $\gamma(t)$  seulement dans un petit intervalle contenant  $t_o$ . Et dans ce petit intervalle on s'arrange que  $t \mapsto \langle (\partial_\varepsilon \Gamma)(t, 0), \gamma''(t) \rangle$  est une fonction strictement positive. De cette façon l'intégrale  $\int_a^b \langle (\partial_\varepsilon \Gamma)(t, 0), \gamma''(t) \rangle dt$  est strictement positive, contraire à l'hypothèse qu'elle est nulle pour tout choix (autorisé) de  $\Gamma$ .

Pour les détails, on commence avec l'invocation de [18.10.i] qui nous assure qu'il existe une carte locale  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  pour  $S$  telle que  $\gamma(t_o) \in \psi(U)$ . Selon [18.10.iii-iv] il existe un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = V \cap S$ . L'ensemble  $\gamma^{-1}(V)$  est donc un ouvert de  $I \subset \mathbf{R}$  contenant  $t_o$ . Il s'ensuit qu'il existe  $\delta' > 0$  tel que  $J = ]t_o - \delta', t_o + \delta'[ \subset I$  et  $\gamma(J) \subset \psi(U)$ . Selon [23.1] il existe  $c : J \rightarrow U$  tel que  $\gamma|_J = \psi \circ c$ .

### DESSIN

Selon [21.4], l'espace tangent  $T_{\gamma(t_o)}S$  au point  $\gamma(t_o) = \psi(c(t_o))$  est engendré par les deux vecteurs  $(\partial_1 \psi)(c(t_o))$  et  $(\partial_2 \psi)(c(t_o))$ . Donc si  $\gamma''(t_o)$  n'est pas orthogonal à  $T_{\gamma(t_o)}S$ , au moins un des deux produits scalaires  $\langle (\partial_1 \psi)(c(t_o)), \gamma''(t_o) \rangle$  ou  $\langle (\partial_2 \psi)(c(t_o)), \gamma''(t_o) \rangle$  doit être non-nul. Disons que c'est le premier. Pour alléger la notation on introduit la fonction  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  comme l'abréviation

$$f(t) = \langle (\partial_1 \psi)(c(t)), \gamma''(t) \rangle .$$

C'est donc une fonction (au moins) continue telle que  $f(t_o) \neq 0$ . En prenant  $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |f(t_o)|$  dans la définition de la continuité de  $f$  au point  $t_o$ , on trouve  $\delta > 0$  tel que

$$\forall t \in J : |t - t_o| < \delta \quad \implies \quad |f(t) - f(t_o)| < \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |f(t_o)| .$$

Ceci implique en particulier qu'on a (en utilisant la continuité pour passer aux inégalités larges)

$$(39.47) \quad \forall t \in J : |t - t_o| \leq \delta \quad \implies \quad \frac{f(t)}{f(t_o)} \geq \frac{1}{2} .$$

L'idée est maintenant de changer la courbe  $\gamma$  seulement sur l'intervalle  $[t_o - \delta, t_o + \delta]$ . Le problème est qu'on doit s'assurer de deux choses : qu'on ne sort pas de l'intervalle  $J$  (sinon on ne peut pas appliquer (39.47)) et qu'on respecte la contrainte qu'on ne change pas la courbe aux points  $t = a$  et  $t = b$ . Pour le faire on introduit  $a', b' \in J$  par

$$a' = \max(a, t_o - \frac{1}{2}\delta', t_o - \delta) \quad \text{et} \quad b' = \min(b, t_o + \frac{1}{2}\delta', t_o + \delta) .$$

La présence de  $a$  et  $b$  dans ces définitions garantit qu'on a l'inclusion  $[a', b'] \subset [a, b]$ , la présence de  $t_o \pm \frac{1}{2}\delta'$  qu'on a l'inclusion  $[a', b'] \subset J$  et la présence de  $t_o \pm \delta$  qu'on a l'inclusion  $[a', b'] \subset [t_o - \delta, t_o + \delta]$ . En plus, l'hypothèse (implicite)  $a < b$  garantit qu'on a  $a' < b'$ . En particulier on a donc

$$(39.48) \quad \forall t \in [a', b'] : \frac{f(t)}{f(t_o)} \geq \frac{1}{2} .$$



Avec ce  $a'$  et  $b'$  on définit, à l'aide de la fonction  $J_0$  de [33.5], la fonction (de classe  $C^\infty$ )  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$g(t) = J_0((t - a')(b' - t)) = \begin{cases} 0 & t \notin ]a', b'[ \\ \exp\left(\frac{1}{(t-a')(t-b')}\right) & t \in ]a', b'[ \end{cases}.$$

Finalement, pour définir une application  $\Gamma$  qui nous convient, l'idée est de définir d'abord l'application  $\hat{c} : J \times \mathbf{R} \rightarrow U$  par

$$(39.49) \quad \hat{c}(t, \varepsilon) = (c_1(t) + \varepsilon \cdot f(t_o)^{-1} \cdot g(t), c_2(t))$$

et ensuite de définir l'application  $\Gamma : I \times \mathbf{R} \rightarrow S$  par

$$\Gamma(t, \varepsilon) = \begin{cases} \psi(\hat{c}(t, \varepsilon)) & t \in J \\ \gamma(t) & t \notin J \end{cases}.$$

Ainsi on aura bien  $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in I$  et on aura  $\Gamma(a, \varepsilon) = \gamma(a)$  et  $\Gamma(b, \varepsilon) = \gamma(b)$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ , simplement parce que  $g(a) = g(b) = 0$  (car  $a \leq a' < b' \leq b$ ). En plus, la restriction de  $\Gamma$  à l'ouvert  $J \times \mathbf{R}$  est la composée d'applications (au moins) de classe  $C^k$  (à savoir  $\psi$ ,  $c$  et  $g$ ), donc de classe  $C^k$ . Et sur l'ouvert  $(I \setminus [a', b']) \times \mathbf{R}$  c'est l'application  $\gamma$  (indépendant de  $\varepsilon$ ), donc aussi de classe  $C^k$ . Par [36.2]  $\Gamma$  est de classe  $C^k$  sur  $I \times \mathbf{R}$ . Et, cerise sur le gâteau, on a l'égalité

$$(39.50) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \begin{cases} (0, 0) & t \notin ]a', b'[ \\ f(t_o)^{-1} \cdot g(t) \cdot (\partial_1 \psi)(c(t)) & t \in ]a', b'[ \end{cases}.$$

On peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \right\rangle dt &= \int_{a'}^{b'} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon}(t, 0), \gamma''(t) \right\rangle dt \\ &= \int_{a'}^{b'} f(t_o)^{-1} \cdot g(t) \cdot \langle (\partial_1 \psi)(c(t)), \gamma''(t) \rangle dt \\ &= \int_{a'}^{b'} f(t_o)^{-1} \cdot g(t) \cdot f(t) dt \\ &\stackrel{(39.48)}{\geq} \frac{1}{2} \cdot \int_{a'}^{b'} g(t) dt > 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité stricte montre que l'hypothèse  $f(t_o) \neq 0$  ne peut pas être vraie. Et donc que  $\gamma''(t)$  doit être orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

À première vue ce raisonnement paraît inparable. Mais en deuxième instance, on s'aperçoit qu'il y a un petit hic : on n'a pas vérifié que l'application  $\hat{c}$  (39.49) prend ses valeurs dans  $U$  ! Et effectivement, la fonction  $g$  n'étant pas identiquement nulle, le produit  $\varepsilon \cdot g(t)$  peut être arbitrairement grand sur  $J \times \mathbf{R}$ . Donc si  $U$  est borné, l'application  $\hat{c}$  ne prendra pas ses valeurs partout dans  $U$ , elle sort.

Pour remédier la situation, on a l'idée de remplacer le coefficient  $\varepsilon$  par une fonction  $h(\varepsilon)$  de  $\varepsilon$  et de définir  $\hat{c}$  par

$$(39.51) \quad \hat{c}(t, \varepsilon) = (c_1(t) + h(\varepsilon) \cdot f(t_o)^{-1} \cdot g(t), c_2(t)).$$

Regardons de quoi on a besoin. Tout d'abord que  $h(0) = 0$  pour qu'on a bien  $\hat{c}(t, 0) = c(t)$  et donc  $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ . Ensuite qu'on a  $h'(0) = 1$  pour qu'on obtient toujours (39.50). Et, last but not least,  $\hat{c}(t, \varepsilon) \in U$  pour tout  $(t, \varepsilon) \in J \times \mathbf{R}$ . C'est cette dernière condition qui nous empêche de prendre simplement  $h(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Pour trouver une fonction  $h$  qui fait l'affaire, on commence avec l'observation que  $c : J \rightarrow U$  est continue, que  $[a', b'] \subset J$  est un compact et que donc  $C = c([a', b'])$  est un compact contenu dans l'ouvert  $U$ . Dans le cas  $U = \mathbf{R}^2$  on n'avait pas de problèmes, donc supposons que  $F = \mathbf{R}^2 \setminus U \neq \emptyset$ . La fonction  $x \mapsto d(x, F)$ , la distance d'un point  $x \in \mathbf{R}^2$  à l'ensemble fermé  $F$ , est une fonction continue à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ . Sa restriction au compact  $C$  admet donc un minimum  $r$  (et un maximum, mais celui là ne nous intéresse pas). Si ce minimum  $r$  est nul, alors le fait que  $C$  et  $F$  sont fermés implique qu'on doit avoir  $C \cap F \neq \emptyset$ . Ceci n'étant pas possible, on a donc  $r > 0$ . Il s'ensuit que pour tout  $x \in C$  la boule ouverte de rayon  $r$  est contenue dans  $U$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\forall t \in [a', b'] \quad \forall y \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad \|y\| < r \implies c(t) + y \in U .$$

Pour que  $\hat{c}(t\varepsilon)$  reste donc dans  $U$ , il suffit de s'assurer qu'on a l'inégalité

$$|h(\varepsilon) \cdot f(t_o)^{-1} \cdot g(t)| < r .$$

La fonction  $g$  étant majorée par 1 [33.5], il suffit donc d'avoir  $|h(\varepsilon)| < r \cdot |f(t_o)| = R$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ . On définit donc, toujours à l'aide de la fonction  $J_0$  de [33.5], la fonction  $h$  (de classe  $C^\infty$ ) par

$$h(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{J_0(R^2 - \varepsilon^2)}{J_0(R^2)} .$$

Il est immédiat qu'on a bien  $h(0) = 0$  et il est presque immédiat qu'on a  $h'(0) = 1$ . En plus, pour  $|\varepsilon| \geq R$  on a  $R^2 - \varepsilon^2 \leq 0$ , donc  $J_0(R^2 - \varepsilon^2) = 0$  et donc a fortiori  $h(\varepsilon) = 0$ . D'autre part, la fonction  $J_0$  étant croissante, il est immédiat que  $J_0(R^2 - \varepsilon^2)/J_0(R^2) \leq 1$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ . De ces deux observations on déduit qu'on a bien

$$|h(\varepsilon)| < R$$

pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ .

La conclusion est que, si on remplace la définition (39.49) de  $\hat{c}$  par (39.51), alors notre raisonnement tient bien la route. Et donc on a bien montré que si  $\gamma$  est une géodésique entre  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$ , alors  $\gamma''(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t \in [a, b]$  comme voulu.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [30.5].** Si on dérive la fonction  $f(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$  on trouve

$$f'(t) = 2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle .$$

Si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$ , alors ce produit scalaire est nul, car  $\gamma'(t)$  appartient à  $T_{\gamma(t)}S$ . Il s'ensuit que  $f$  est une fonction constante.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [30.7].** Commençons avec le calcul de  $L(\gamma_o)$  :

$$L(\gamma_o) = \int_0^1 \|\gamma'_o(s)\| \, ds = \int_0^1 \|q - p\| \, ds = \|q - p\| .$$

Si on considère maintenant la subdivision (minimale)  $\Delta = \{a, b\}$  de l'intervalle  $[a, b]$ , on obtient tout de suite l'inégalité

$$L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \equiv \|q - p\| = L(\gamma_o) ,$$

simplement parce que  $L(\gamma)$  est le sup sur toutes les subdivisions [6.1].

Pour montrer qu'on a l'inégalité stricte quand on a  $\gamma(c) \notin \gamma_o([0, 1])$ , on considère la subdivision  $\Delta = \{a, c, b\}$ . Pour montrer (rigoureusement) que pour cette subdivision on a l'inégalité stricte

$$\|p - \gamma(c)\| + \|\gamma(c) - q\| \equiv \|\gamma(c) - \gamma(a)\| + \|\gamma(b) - \gamma(c)\| > \|q - p\| ,$$

il faut distinguer deux cas :  $\gamma(c)$  sur la droite passant par  $p$  et  $q$  ou non. S'il appartient à cette droite, il existe  $s \in \mathbf{R}$  tel que  $\gamma(c) = p + s(q - p)$ , et l'hypothèse que  $\gamma(c)$  n'est sur le segment  $\gamma_o([0, 1])$  implique qu'on doit avoir  $s \notin [0, 1]$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned} \|p - \gamma(c)\| + \|\gamma(c) - q\| &= \|-s(q - p)\| + \|(s - 1)(q - p)\| \\ &= (|s| + |s - 1|) \cdot \|q - p\| \\ &= \begin{cases} (2s - 1) \cdot \|q - p\| & s > 1 \\ (1 - 2s) \cdot \|q - p\| & s < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dans les deux cas le coefficient devant  $\|q - p\|$  est plus grand que 1.

Dans le cas où  $\gamma(c)$  n'appartient pas à la droite passant par  $p$  et  $q$  on définit le point  $r$  comme la projection orthogonale de  $\gamma(c)$  sur cette droite. Par Pythagore on a donc

$$\|p - \gamma(c)\|^2 = \|p - r\|^2 + \|r - \gamma(c)\|^2 > \|p - r\|^2$$

et

$$\|\gamma(c) - q\|^2 = \|\gamma(c) - r\|^2 + \|r - q\|^2 > \|r - q\|^2 .$$

Autrement dit, on a l'inégalité stricte

$$\|p - \gamma(c)\| + \|\gamma(c) - q\| > \|p - r\| + \|r - q\| .$$

Comme dans le premier cas, il existe  $s \in \mathbf{R}$  tel que  $r = p + s(q - p)$ , sauf qu'ici on n'a pas la contrainte  $s \notin [0, 1]$ . On a donc

$$\|p - r\| + \|r - q\| = \begin{cases} (2s - 1) \cdot \|q - p\| & s > 1 \\ \|q - p\| & 0 \leq s \leq 1 \\ (1 - 2s) \cdot \|q - p\| & s < 0 \end{cases} \geq \|q - p\| .$$

On a donc toujours l'inégalité stricte  $\|p - \gamma(c)\| + \|\gamma(c) - q\| > \|p - q\|$ . Par définition de  $L(\gamma)$  on a donc a fortiori l'inégalité stricte  $L(\gamma) > \|q - p\|$ . CQFD

**Preuve de [30.8].** Soit  $v = \|\gamma'_2(t)\|$  la vitesse constante de la courbe  $\gamma_2$ . De l'égalité  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$  on obtient les égalités

$$\gamma'_2(u) = \gamma'_1(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \quad \text{et} \quad \gamma''(u) = \gamma''_1(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)^2 + \gamma'_1(\varphi(u)) \cdot \varphi''(u) .$$

On a donc  $v = \|\gamma'_1(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|$ , d'où

$$\varphi'(u)^2 = \frac{v^2}{\|\gamma'_1(\varphi(u))\|^2} = \frac{v^2}{\langle \gamma'_1(\varphi(u)), \gamma'_1(\varphi(u)) \rangle}$$

et donc

$$2 \varphi'(u) \varphi''(u) = \frac{-2 v^2 \langle \gamma''_1(\varphi(u)), \gamma'_1(\varphi(u)) \rangle \cdot \varphi'(u)}{\|\gamma'_1(\varphi(u))\|^4} ,$$

ce qui se réduit à

$$\varphi''(u) = -v^2 \cdot \frac{\langle \gamma_1''(\varphi(u)), \gamma_1'(\varphi(u)) \rangle}{\|\gamma_1'(\varphi(u))\|^4} .$$

Avec l'abréviation  $t = \varphi(u)$  on trouve donc

$$(39.52) \quad v^{-2} \cdot \gamma_2''(u) = \frac{1}{\|\gamma_1'(t)\|^2} \cdot \left( \gamma_1''(t) - \frac{\langle \gamma_1''(t), \gamma_1'(t) \rangle}{\|\gamma_1'(t)\|^2} \cdot \gamma_1'(t) \right) = k_{\gamma_1}(t) .$$

De l'égalité  $\gamma_2''(u) = v^2 k_{\gamma_1}(t)$  on déduit directement l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).

Pour l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), on remarque d'abord que, par définition de la projection orthogonale, on a l'égalité  $k_{\gamma_1}^{\parallel}(t) = \pi(k_{\gamma_1})$ . Si on applique la projection  $\pi$  à l'égalité (39.52) on trouve

$$(39.53) \quad k_{\gamma_1}^{\parallel}(t) = \pi(k_{\gamma_1}) = \frac{1}{\|\gamma_1'(t)\|^2} \cdot \left( \pi(\gamma_1''(t)) - \frac{\langle \gamma_1''(t), \gamma_1'(t) \rangle}{\|\gamma_1'(t)\|^2} \cdot \gamma_1'(t) \right) ,$$

où on a utilisé l'égalité évidente  $\pi(\gamma_1'(t)) = \gamma_1'(t)$ . On en déduit immédiatement que si on a  $k_{\gamma_1}^{\parallel}(t) = 0$ , alors  $\pi(\gamma_1''(t))$  est un multiple de  $\gamma_1'(t)$ . Ainsi on a montré l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Pour l'implication dans l'autre sens on suppose (i), c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\pi(\gamma_1''(t)) = \lambda \cdot \gamma_1'(t)$ . Selon [4.15] la projection orthogonale  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow T_p S$  est donnée par la formule explicite (pour un sous-espace vectoriel, le coefficient  $d$  est nul)

$$\pi(x) = x - \langle x, \mathbf{n}_p \rangle \cdot \mathbf{n}_p ,$$

où  $\mathbf{n}_p$  est un vecteur normal unitaire à la surface au point  $p$ . Avec le fait que  $\gamma_1'(t)$  est orthogonal à  $\mathbf{n}_p$ , on déduit

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1''(t), \gamma_1'(t) \rangle &= \langle \gamma_1''(t) - \langle \gamma_1''(t), \mathbf{n}_p \rangle \cdot \mathbf{n}_p, \gamma_1'(t) \rangle = \langle \pi(\gamma_1''(t)), \gamma_1'(t) \rangle \\ &= \langle \lambda \cdot \gamma_1'(t), \gamma_1'(t) \rangle = \lambda \cdot \|\gamma_1'(t)\|^2 . \end{aligned}$$

Si on substitue ceci dans l'expression (39.53) pour  $k_{\gamma_1}^{\parallel}(t)$ , on trouve 0, ce qui termine la preuve.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [30.12].** Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions vectorielles de  $(u, v)$ , il est immédiat qu'on a l'égalité

$$\partial_i \langle f, g \rangle = \langle \partial_i f, g \rangle + \langle f, \partial_i g \rangle .$$

En utilisant cela plusieurs fois en combinaison avec le lemme de Schwarz (les dérivées partielles secondes commutent) on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \langle \partial_j \partial_k \psi, \partial_i \psi \rangle = \partial_j \langle \partial_k \psi, \partial_i \psi \rangle - \langle \partial_k \psi, \partial_j \partial_i \psi \rangle \\ &= \partial_j \langle \partial_k \psi, \partial_i \psi \rangle - \partial_i \langle \partial_k \psi, \partial_j \psi \rangle + \langle \partial_i \partial_k \psi, \partial_j \psi \rangle \\ &= \partial_j \langle \partial_k \psi, \partial_i \psi \rangle - \partial_i \langle \partial_k \psi, \partial_j \psi \rangle + \partial_k \langle \partial_i \psi, \partial_j \psi \rangle - \langle \partial_i \psi, \partial_k \partial_j \psi \rangle . \end{aligned}$$

La symétrie du produit scalaire donne alors immédiatement le résultat annoncé. Sachant que les produits scalaires entre les vecteurs  $\partial_i \psi$  et  $\partial_j \psi$  nous donnent la première forme fondamentale, on obtient directement les formules en termes des fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [30.13].** Soit  $c : I \rightarrow U$  la courbe vérifiant  $\gamma = \psi \circ c$  [23.1]. Selon [21.4] l'espace tangent  $T_{\gamma(t)}S$  est engendré par les deux vecteurs  $(\partial_1\psi)(c(t))$  et  $(\partial_2\psi)(c(t))$ . Il s'ensuit que  $\gamma''(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  si et seulement si on a les deux équations

$$(39.54) \quad \langle \gamma''(t), (\partial_1\psi)(c(t)) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \gamma''(t), (\partial_2\psi)(c(t)) \rangle = 0 .$$

Si on calcule  $\gamma''(t)$  en termes des dérivées de  $c$  et  $\psi$ , on trouve d'abord :

$$\gamma'(t) = \sum_{j=1}^2 (\partial_j\psi)(c(t)) \cdot c'_j(t)$$

et donc

$$\gamma''(t) = \sum_{j=1}^2 (\partial_j\psi)(c(t)) \cdot c''_j(t) + \sum_{j,k=1}^2 (\partial_k\partial_j\psi)(c(t)) \cdot c'_k(t) \cdot c'_j(t) .$$

Quand on substitue cette expression dans (39.54), et quand on utilise la définition de la première forme fondamentale et des symboles de Christoffel de première espèce, on trouve directement les équations

$$\begin{aligned} 0 &= E(c(t)) \cdot c''_1(t) + F(c(t)) \cdot c''_2(t) + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{1kj}(c(t)) \cdot c'_k(t) \cdot c'_j(t) \\ 0 &= F(c(t)) \cdot c''_1(t) + G(c(t)) \cdot c''_2(t) + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{2kj}(c(t)) \cdot c'_k(t) \cdot c'_j(t) . \end{aligned}$$

Étant donné que la matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  est inversible [23.4], on peut réécrire ces équations comme l'équation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c''_1(t) \\ c''_2(t) \end{pmatrix} &= - \sum_{j,k=1}^2 c'_k(t) \cdot c'_j(t) \cdot \begin{pmatrix} E(c(t)) & F(c(t)) \\ F(c(t)) & G(c(t)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{1kj}(c(t)) \\ \Gamma_{2kj}(c(t)) \end{pmatrix} \\ &= - \sum_{j,k=1}^2 c'_k(t) \cdot c'_j(t) \cdot \begin{pmatrix} \Gamma^1_{kj}(c(t)) \\ \Gamma^2_{kj}(c(t)) \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ce qui sont les équations géodésiques (30.14) de l'énoncé.  $\square$  CQFD

**Preuve de [30.15].** Soit  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une carte locale pour  $S$  vérifiant  $p \in \psi(U)$  [18.10.i] et soit  $(u, v) \in U$  tel que  $\psi(u, v) = p$ . Par [21.4] il existe  $a, b \in \mathbf{R}$  tels qu'on a

$$V = a \cdot (\partial_1\psi)(u, v) + b \cdot (\partial_2\psi)(u, v) .$$

Il "suffit" maintenant de montrer que les équations géodésiques (30.14) admettent des solutions convenables. Pour cela on veut utiliser [38.1], ce qui nous oblige d'avoir à transformer les équations différentielles d'ordre 2 (30.14) en un système d'équations différentielles d'ordre 1. L'astuce pour le faire est classique et consiste à introduire deux nouvelles variables pour les dérivées premières. On commence avec l'observation qu'il existe deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  de quatre variables  $x_1, x_2, y_1, y_2$  définies sur  $U \times \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^4$  telles que les équations géodésiques s'écrivent comme

$$c''_i(t) = g_i(c_1(t), c_2(t), c'_1(t), c'_2(t)) .$$

Par exemple, la fonction  $g_1$  est donnée par

$$g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Gamma^1_{11}(x_1, x_2) \cdot (y_1)^2 + 2 \Gamma^1_{12}(x_1, x_2) \cdot y_1 \cdot y_2 + \Gamma^1_{22}(x_1, x_2) \cdot (y_2)^2 .$$

Maintenant on définit l'application  $f : U \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$  par

$$(39.55) \quad f(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, g_1(z), g_2(z))$$

et on constate que l'équation différentielle  $z' = f(z)$  s'écrit comme

$$z'_1 = z_3 \quad , \quad z'_2 = z_4 \quad , \quad z'_3 = g_1(z_1, z_2, z_3, z_4) \quad \text{et} \quad z'_4 = g_2(z_1, z_2, z_3, z_4) .$$

Si on substitue les deux premières équations dans les deux dernières, on obtient

$$z''_1 = g_1(z_1, z_2, z'_1, z'_2) \quad \text{et} \quad z''_2 = g_2(z_1, z_2, z'_1, z'_2) ,$$

qui sont exactement les équations différentielles d'ordre 2 qu'on veut résoudre. Selon [38.1] il existe, pour le quadruplet  $(u, v, a, b) \in U \times \mathbf{R}^2$  et pour la fonction  $f$  définie en (39.55), une (unique) solution  $z(t)$  de l'équation différentielle  $z' = f(z)$  définie sur un (petit) intervalle  $J = ]-\varepsilon, \varepsilon[$  et vérifiant  $z(0) = (u, v, a, b)$ . Il s'ensuit que la courbe  $c : J \rightarrow U$  définie par

$$c(t) = (z_1(t), z_2(t))$$

vérifie les équations géodésiques (30.14) avec les conditions initiales

$$c(0) = (u, v) \quad \text{et} \quad c'(0) = (a, b) .$$

Avec [30.13] il s'ensuit immédiatement que la courbe  $\gamma : J \rightarrow S$  définie par  $\gamma(t) = \psi(c(t))$  est une géodésique vérifiant les conditions initiales requises.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §31

**Preuve de [31.3].** Selon [3.12], la rotation  $R_\delta$  est donnée par la formule

$$R_\delta(y) = \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t+\delta) \rangle \cdot y + (\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}(t+\delta)) \wedge y \\ + \frac{\langle y, \mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}(t+\delta) \rangle}{1 + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t+\delta) \rangle} \cdot \mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}(t+\delta) .$$

Sachant qu'on a  $\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}(t) = 0$ , on obtient pour la dérivée par rapport à  $\delta$  la formule

$$R'_0(y) = \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}'(t) \rangle \cdot y + (\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \wedge y .$$

Mais  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire pour tout  $t$ , c'est-à-dire  $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 1$ . Il s'ensuit qu'on a  $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}'(t) \rangle = 0$ , ce qui donne le résultat annoncé.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.6].** Vérifions l'équation (31.5) avec  $v(t) = \mathbf{n}(t)$  :

$$(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \wedge \mathbf{n}(t) = \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}'(t) - \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}'(t) ,$$

où on a utilisé que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire pour tout  $t$ , donc  $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 1$  et donc, en dérivant,  $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}'(t) \rangle = 0$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.7].** Un calcul direct (sans écrire la dépendance de  $t$ ) montre :

$$(x - y)' = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge (x - \gamma) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge (y - \gamma) \\ = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge (x - y)$$

et

$$(x + v)' = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge (x - \gamma) + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge v \\ = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge (x + v - \gamma) .$$

$\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.9].** La courbe  $\varphi_{(t, \varphi_{(t_o, x)})}$  est l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale  $\varphi_{(t, \varphi_{(t_o, x)}(t))}(t) = \varphi_{(t_o, x)}(t)$  [31.8]. Mais la courbe  $\varphi_{(t_o, x)}$  est aussi une solution de l'équation différentielle qui au moment  $t$  passe par ce point (trivialement). Par l'unicité on a donc égalité des deux courbes.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.10].** Le point  $b(t)$  appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$  si et seulement s'il vérifie l'équation

$$\langle b(t) - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0 .$$

On regarde donc la fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(t) = \langle b(t) - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle$$

et on calcule sa dérivée (sans écrire la dépendance de  $t$ )

$$f' = \langle b' - \gamma', \mathbf{n} \rangle + \langle b - \gamma, \mathbf{n}' \rangle \\ \stackrel{(31.4)}{=} \langle \langle b - \gamma, \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n}' - \langle b - \gamma, \mathbf{n}' \rangle \cdot \mathbf{n} - \gamma', \mathbf{n} \rangle + \langle b - \gamma, \mathbf{n}' \rangle$$

$$= \langle b - \gamma, \mathbf{n} \rangle \cdot \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle - \langle b - \gamma, \mathbf{n}' \rangle \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma', \mathbf{n} \rangle + \langle b - \gamma, \mathbf{n}' \rangle .$$

Mais  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire, donc  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$  et  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle = 0$ . En plus,  $\gamma'$  appartient à l'espace tangent, donc  $\langle \gamma', \mathbf{n} \rangle = 0$ . Il s'ensuit qu'on a  $f'(t) = 0$  et donc  $f$  est une fonction constante (car  $I$  est un intervalle, donc connexe). Si  $b(t_o)$  appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t_o)}S$ , alors on a  $f(t_o) = 0$ , et donc  $f(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ , ce qui est équivalent à la propriété que  $b(t)$  appartient au plan tangent  $PT_{\gamma(t)}S$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.11].** Si on calcule la dérivée de  $f(t) = \langle v(t), w(t) \rangle$ , on trouve (sans écrire la dépendance de  $t$ ) :

$$\begin{aligned} f' &= \langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle \equiv \langle v', w \rangle + \langle w', v \rangle \\ &\stackrel{(31.4)}{=} \langle (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge v, w \rangle + \langle (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge w, v \rangle \\ &\stackrel{[2.5]}{=} \det(\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}', v, w) + \det(\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}', w, v) = 0 . \end{aligned}$$

La dérivée étant nulle, la fonction est donc constante (car  $I$  est un intervalle, donc connexe).  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.12].** • (i). Par définition des courbes  $\varphi_{(t_o, x)}$  on a  $\Phi_{t_o, t_o}(x) = \varphi_{(t_o, x)}(t_o) = x$ . Et si on applique [31.9] avec  $t'$  on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} \Phi_{t', t_o}(x) &\equiv \varphi_{(t_o, x)}(t') = \varphi_{(t, \varphi_{(t_o, x)}(t))}(t') = \Phi_{t', t}(\varphi_{(t_o, x)}(t)) \\ &= \Phi_{t', t}(\Phi_{t, t_o}(x)) = (\Phi_{t', t} \circ \Phi_{t, t_o})(x) . \end{aligned}$$

• (ii). Si les vecteurs  $e_i$  sont les vecteurs de la base canonique, alors les colonnes de la matrice  $A_{t, t_o}$  sont les (coefficients des) vecteurs  $v_i(t)$ , ce qui montre que les éléments de matrice sont des fonctions (au moins) de classe  $C^1$  comme les solutions de l'équation différentielle (31.5). Pour une base orthonormée arbitraire, il "suffit" de multiplier la matrice précédente (formée des colonnes des  $v_i$ ) par la transposée de la matrice (constante) dont les colonnes sont les vecteurs  $e_i$  (voir la preuve de [3.5]).

Pour la dérivée, on constate qu'on a les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_{t, t_o}(e_i)) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(t) = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t))(v_i(t)) = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t))(A_{t, t_o}(e_i)) .$$

Étant donné que les vecteurs  $e_i$  sont constants, on peut réécrire cela comme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} A_{t, t_o} \right)(e_i) = \left( j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \cdot A_{t, t_o} \right)(e_i) ,$$

ce qui donne le résultat.

Vu qu'on a, par définition,  $A_{t, t_o}(e_i) = v_i(t)$  et que par définition on a  $v_i(t_o) = e_i$ , l'égalité  $A_{t_o, t_o} = \text{Id}(\mathbf{R}^3)$  s'ensuit. Et parce que l'application  $t \mapsto \det(A_{t, t_o})$  est continue, prend ses valeurs dans  $\{\pm 1\}$  avec la valeur 1 en  $t = t_o$ , la connexité de  $I$  implique alors que c'est constant éhgal à 1, c'est-à-dire qu'on a  $A_{t, t_o} \in \text{SO}(3)$ .



- (iii). Si on dérive l'application  $w(t) = A_{t,t_o}(v(t_o))$  à l'aide de (ii) on trouve

$$w'(t) = \left( j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \cdot A_{t,t_o} \right) (v(t_o)) = j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) (w(t)) .$$

C'est donc un champ de vecteurs parallèle le long  $\gamma$ . En plus on a l'égalité/condition initiale  $w(t_o) = v(t_o)$ . Si  $v$  est donc un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$ , l'unicité dans [31.8] implique l'égalité  $w = v$ . Réciproquement, si on part de l'hypothèse  $v = w$ , alors on en déduit que  $v$  est un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$ .

- (iv). On a vu que  $\mathbf{n}$  est un champ de vecteurs parallèles le long  $\gamma$  [31.6], donc selon (iii) on a bien  $A_{t,t_o}(\mathbf{n}(t_o)) = \mathbf{n}(t)$ . D'autre par,  $A_{t,t_o}$  est un élément de groupe orthogonal  $O(3)$ . Il s'ensuit que si  $x \perp y$ , alors  $A_{t,t_o}(x) \perp A_{t,t_o}(y)$ . Si on applique ceci avec  $x \in T_{\gamma(t_o)}S$  et  $y = \mathbf{n}(t_o)$ , on obtient que  $A_{t,t_o}(x)$  est orthogonal à  $\mathbf{n}(t)$ , c'est-à-dire  $A_{t,t_o}(x) \in T_{\gamma(t)}S$ .

- (v). Si on dérive la courbe  $\varphi(t) = A_{t,t_o}(x) + \varphi_{(t_o,0)}(t)$  on trouve

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\stackrel{(ii), (31.4)}{=} \left( j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) \cdot A_{t,t_o} \right) (x) + j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) (\varphi_{(t_o,0)}(t) - \gamma(t)) \\ &= j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) (A_{t,t_o}(x) + \varphi_{(t_o,0)}(t) - \gamma(t)) \\ &= j(\mathbf{n}(t) \wedge \mathbf{n}'(t)) (\varphi(t) - \gamma(t)) . \end{aligned}$$

En plus on a l'égalité  $\varphi(t_o) = A_{t_o,t_o}(x) + \varphi_{(t_o,0)}(t_o) = x + 0 = x$ . Par unicité des solutions [31.8] on a donc l'égalité  $\varphi = \varphi_{(t_o,x)}$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.14].** Par définition d'un plan, il existe une constante  $d \in \mathbf{R}$  telle que  $\langle n, \gamma(s) \rangle = d$  pour tout  $s \in I$ . En prenant la dérivée il s'ensuit qu'on a  $\langle n, \gamma'(s) \rangle = \langle n, \gamma''(s) \rangle = 0$  pour tout  $s \in I$ . De  $\langle n, \gamma'(s) \rangle = 0$  on déduit immédiatement que  $\mathbf{u}(s)$  est unitaire et orthogonale à  $\gamma'(s)$ . D'autre part,  $\gamma'(s)$  et  $\mathbf{u}(s)$  sont deux vecteurs orthogonaux entre eux et orthogonaux à  $n$ . Ils forment donc une base pour le sous-espace vectoriel (de dimension 2) orthogonal à  $n$ . Mais  $\gamma''(s)$  appartient à ce sous-espace, ce qui termine la preuve.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [31.16].** Dans [30.9] on a vu que  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si sa courbure géodésique est identiquement nulle. Selon [31.15] la courbure géodésique est identiquement nulle si et seulement si la courbure absolue de la courbe trace est identiquement nulle. Et selon [13.2] la courbure absolue d'une courbe est identiquement nulle si et seulement si c'est une droite.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §32

**Preuve de [32.7].** Si  $v$  est de classe  $C^p$ , alors  $v'$  est de classe  $C^{p-1}$ . Selon [27.5] le champ de vecteurs  $\mathbf{n}$  le long  $\gamma$  et normal à la surface est de classe  $C^{\min(k-1, \ell)}$ . Il s'ensuit que la projection orthogonale de  $v'(t)$  sur l'espace tangent est donnée par

$$(39.56) \quad w(t) \equiv v'(t)^\parallel = v'(t) - \langle v'(t), \mathbf{n}(t) \rangle \cdot \mathbf{n}(t)$$

et qu'elle est de classe  $C^{\min(\ell, p-1)}$  comme composée de fonctions de classe  $C^{p-1}$  et de classe  $C^{\min(k-1, \ell)}$  avec  $p \leq k-1$ .

Pour la deuxième partie, on dérive l'égalité (32.8), on le substitue dans (39.56), qu'on substitue à son tour dans (32.9) et on prend le produit scalaire avec les vecteurs  $(\partial_i \psi)(c(t))$ . Cela donne (sans écrire la dépendance de  $t$  ou de  $c(t)$  et en utilisant que ces vecteurs sont orthogonaux à  $\mathbf{n}(t)$  et la définition des symboles de Christoffel de première espèce (30.10)) le système d'équations

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 \cdot E + \bar{w}_2 \cdot F &= \langle v', \partial_1 \psi \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^2 \bar{v}'_j \cdot \partial_j \psi + \sum_{j,k=1}^2 \bar{v}_j \cdot \partial_k \partial_j \psi \cdot c'_k, \partial_1 \psi \right\rangle \\ &= \bar{v}'_1 \cdot E + \bar{v}'_2 \cdot F + \sum_{j,k=1}^2 \bar{v}_j \cdot \Gamma_{1kj} \cdot c'_k \\ \bar{w}_1 \cdot F + \bar{w}_2 \cdot G &= \langle v', \partial_2 \psi \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^2 \bar{v}'_j \cdot \partial_j \psi + \sum_{j,k=1}^2 \bar{v}_j \cdot \partial_k \partial_j \psi \cdot c'_k, \partial_2 \psi \right\rangle \\ &= \bar{v}'_1 \cdot F + \bar{v}'_2 \cdot G + \sum_{j,k=1}^2 \bar{v}_j \cdot \Gamma_{2kj} \cdot c'_k . \end{aligned}$$

Si on réécrit ces équations sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 - \bar{v}'_1 \\ \bar{w}_2 - \bar{v}'_2 \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^2 \bar{v}_j \cdot c'_k \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{1kj} \\ \Gamma_{2kj} \end{pmatrix} ,$$

et si on applique la définition des symboles de Christoffel de deuxième espèce (30.11), on obtient le résultat annoncé.  $\boxed{CQFD}$

### Les preuves de §33

**Preuve de [33.5].** On commence à montrer par récurrence que, pour  $x > 0$  la dérivée  $k$ -ième de  $J_0$  est de la forme

$$J_0^{(k)}(x) = P_k(1/x) \cdot e^{-1/x} ,$$

où  $P_k(y)$  est un polynôme de degré  $2k$  en  $y$ . Pour  $k = 0$  c'est la définition de  $J_0(x)$  avec  $P_0(y) = 1$  le polynôme constant de degré 0. Supposons donc que c'est vrai pour  $k$ . Alors on calcule la dérivée  $k + 1$ -ième :

$$\begin{aligned} J_0^{(k+1)}(x) &= (J_0^{(k)}(x))' = P_k'(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{-1/x} + P_k(1/x) \cdot e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (P_k(1/x) - P_k'(1/x)) \cdot e^{-1/x} = P_{k+1}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-1/x} , \end{aligned}$$

où le polynôme  $P_{k+1}(y)$  est défini par

$$P_{k+1}(y) = y^2 \cdot (P_k(y) - P_k'(y)) .$$

Si  $P_k$  est de degré  $2k$ , alors  $P_k'$  sera de degré  $k - 1$  et  $P_{k+1}$  sera de degré  $2k + 2 = 2(k + 1)$ . La propriété est donc aussi vraie au rang  $k + 1$ , ce qui termine la preuve par récurrence.

La deuxième étape est de calculer  $\lim_{x \downarrow 0} J_0^{(k)}(x)$  :

$$\lim_{x \downarrow 0} J_0^{(k)}(x) \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} J_0^{(k)}(1/y) = \lim_{y \rightarrow \infty} P_k(y) \cdot e^{-y} = 0 ,$$

car l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme. Par définition  $J$  est constante nulle sur  $] -\infty, 0[$ , donc pour  $x < 0$  on a  $J_0^{(k)}(x) = 0$  et donc en particulier

$$\lim_{x \uparrow 0} J_0^{(k)}(x) = 0 .$$

Dans la troisième et dernière étape on invoque par récurrence [33.4] pour montrer que  $J_0$  est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ . On commence avec  $k = 0$  avec la remarque qu'on a

$$\lim_{x \uparrow 0} J_0(x) = 0 = J_0(0) = \lim_{x \downarrow 0} J_0(x)$$

et donc  $f$  est bien continue en  $x = 0$ . Vu qu'il est évident que  $J_0$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  (car constante sur  $x > 0$  et composée de fonctions  $C^\infty$  sur  $x > 0$ ), il s'ensuit que  $J_0$  est continue sur tout  $\mathbf{R}$ . Supposons donc que  $J_0$  est de classe  $C^k$  et tentons de montrer qu'elle est de classe  $C^{k+1}$ . Comme avant, il est évident que  $J_0^{(k+1)}$  existe et est continue sur  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . En plus on a montré l'égalité

$$\lim_{x \downarrow 0} J_0^{(k+1)}(x) = \lim_{x \uparrow 0} J_0^{(k+1)}(x) .$$

Par [33.4] on peut conclure que  $J_0^{(k+1)}(0)$  existe et que  $J_0^{(k+1)}$  est continue en  $x = 0$ . La fonction  $J_0^{(k+1)}$  existe donc sur tout  $\mathbf{R}$  et est continue en chaque point de  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire que  $J_0$  est de classe  $C^{k+1}$ . Ainsi s'achève la preuve par récurrence que  $J_0$  est de classe  $C^\infty$ .  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [33.6].** L'argument  $t(1 - t)$  de la fonction  $J_0$  n'est positive que pour  $t \in [0, 1]$  et donc  $J_0(t(1 - t))$  est nul sur  $] -\infty, 0] \cup [0, \infty[$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\forall x \leq 0 : \int_0^x J_0(t(1-t)) \, dt = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \geq 1 : \int_0^x J_0(t(1-t)) \, dt = \int_0^1 J_0(t(1-t)) \, dt .$$

La fonction  $J_0$  étant positive,  $J_1$  est croissante et le résultat est immédiat. *CQFD*

## Les preuves de §34

**Preuve de [34.8].** • La condition  $f(x) = g(x) + o((x-a)^k)$  veut dire qu'il existe une fonction (continue)  $\varepsilon_a(x)$  telle qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0 = \varepsilon_a(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in I : f(x) = g(x) + (x-a)^k \varepsilon_a(x) .$$

En particulier on a donc

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : |x-a| < \delta \implies |\varepsilon_a(x)| < \epsilon .$$

Pour  $\epsilon > 0$  fixe et  $|x-a| < \delta$  on a donc aussi

$$\left| \int_a^x (x-a)^k \varepsilon_a(y) dy \right| \leq \int_a^x |(x-a)^k \varepsilon_a(x)| dy \leq \frac{\epsilon}{k+1} \cdot |x-a|^{k+1} ,$$

où après la première inégalité il faut lire  $\int_x^a$  dans le cas  $x < a$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x (f(y) - g(y)) dy}{(x-a)^{k+1}} = 0 ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$ , alors  $h = f - g$  est aussi de classe  $C^k$  et le fait qu'on a  $h(x) = (x-a)^k \varepsilon_a(x)$  implique que son polynôme de Taylor d'ordre  $k$  est égale à zéro [34.5]. Autrement dit, on a

$$h(a) = h'(a) = h^{(2)}(a) = \dots = h^{(k)}(a) = 0 .$$

Mais alors on a en particulier

$$h'(a) = (h')'(a) = (h')^{(2)}(a) = \dots = (h')^{(k-1)}(a) = 0 ,$$

ce qui veut dire que le polynôme de Taylor d'ordre  $k-1$  de la fonction  $h'$  est nul. Autrement dit, qu'on a

$$h'(x) = (x-a)^{k-1} \bar{\varepsilon}_a(x) .$$

• La condition  $f(x) = g(x) + O((x-a)^k)$  veut dire qu'il existe une fonction  $b : I \rightarrow \mathbf{R}$  et une constante  $M \in \mathbf{R}$  telles qu'on a

$$\forall x \in I : |b(x)| \leq M \quad \text{et} \quad \forall x \in I : f(x) = g(x) + (x-a)^k b(x) .$$

On a donc aussi

$$\left| \int_a^x (x-a)^k b(y) dy \right| \leq \int_a^x |(x-a)^k b(x)| dy \leq \frac{M}{k+1} \cdot |x-a|^{k+1} ,$$

où après la première inégalité il faut de nouveau lire  $\int_x^a$  dans le cas  $x < a$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\left| \int_a^x (f(y) - g(y)) dy \right| \leq \overline{M} \cdot |x-a|^{k+1} ,$$

avec  $\overline{M} = M/(k+1)$ , ce qui est le résultat annoncé.

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$ , alors  $h = f - g$  est aussi de classe  $C^k$  et le fait qu'on a  $h(x) = (x-a)^k b(x)$  implique que son polynôme de Taylor d'ordre  $k-1$  est égale à zéro [34.5]. Autrement dit, on a

$$h(a) = h'(a) = h^{(2)}(a) = \dots = h^{(k-1)}(a) = 0 .$$

Mais alors on a en particulier

$$h'(a) = (h')'(a) = (h')^{(2)}(a) = \dots = (h')^{(k-2)}(a) = 0 ,$$

ce qui veut dire que le polynôme de Taylor d'ordre  $k - 2$  de la fonction  $h'$  est nul. Autrement dit, qu'on a

$$h'(x) = (x - a)^{k-1} \bar{b}(x) ,$$

pour un certain fonction bornée  $\bar{b}$ .

CQFD

## Les preuves de §35

**Preuve de [35.2].** Un calcul direct par récurrence donne les dérivées successives de  $g$  comme

$$g^{(d)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n v_{i_1} \cdots v_{i_d} \cdot \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_d}}(a + tv)$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,0}(t) &= \sum_{d=0}^k \frac{t^d}{d!} \cdot g^{(d)}(0) = \sum_{d=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n \frac{t^d}{d!} \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_d} \cdot \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_d}}(a) \\ &= \sum_{d=0}^k \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n \frac{(tv_{i_1}) \cdots (tv_{i_d})}{d!} \cdot \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_d}}(a) = P_{k,a}(a + tv) . \quad \boxed{CQFD} \end{aligned}$$

**Preuve de [35.3].** Sur  $U \setminus \{a\}$  la fonction  $\varepsilon_a$  est définie par la formule

$$\varepsilon_a(x) = \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} ,$$

ce qui est manifestement une fonction continue. Il suffit donc démontrer qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0 ,$$

pour pouvoir conclure qu'une telle fonction existe, simplement en prolongeant le quotient par 0 en  $a$ .

Par définition de la limite, il faut donc montrer l'assertion suivante

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U \quad : \quad \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} \right| < \epsilon .$$

On prend donc  $\epsilon > 0$  et on cherche un  $\delta > 0$  convenable. Pour cela on utilise la continuité des dérivées partielles d'ordre  $k$  au point  $a$  avec un  $\hat{\epsilon} > 0$  qu'on déterminera plus tard, ce qui nous donne des  $\delta_{i_1 \dots i_k} > 0$  tels qu'on a

$$\forall x \in U \quad : \quad \|x - a\| < \delta_{i_1 \dots i_k} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right| < \hat{\epsilon} .$$

Avec ces  $\delta_{i_1 \dots i_k}$  on pose

$$\delta = \min \{ \delta_{i_1 \dots i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \} .$$

Ensuite on prend  $x \in U$  tel que  $\|x - a\| < \delta$  et on définit la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$g(t) = f(a + t(x - a)) .$$

Selon [34.1] on a donc l'égalité

$$\begin{aligned} (39.57) \quad g(t) - \bar{P}_{k,0}(1) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot g^{(k)}(s) \, ds - \frac{t^k}{k!} \cdot g^{(k)}(0) \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (g^{(k)}(s) - g^{(k)}(0)) \, ds . \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la quantité  $|g^{(k)}(s) - g^{(k)}(0)|$  pour  $s \in [0, 1]$ . On remarque d'abord que pour un tel  $s$  on a

$$\|(a + s(x - a)) - a\| = s \cdot \|x - a\| < \delta$$

et qu'on a aussi les inégalités pour tout  $1 \leq i \leq n$

$$|(x - a)_i| \leq \|x - a\| .$$

Avec ces remarques, on constate qu'on peut faire la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |g^{(k)}(s) - g^{(k)}(0)| &= \left| \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (x - a)_{i_1} \cdots (x - a)_{i_k} \cdot \left( \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a + s(x - a)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \|x - a\|^k \cdot \hat{\epsilon} = n^k \cdot \|x - a\|^k \cdot \hat{\epsilon} . \end{aligned}$$

En utilisant (39.57) et [35.2], on a donc la majoration

$$\begin{aligned} |f(x) - P_{k,a}(x)| &= |g(1) - \overline{P}_{k,0}(1)| \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot |g^{(k)}(s) - g^{(k)}(0)| \, ds \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot n^k \cdot \|x - a\|^k \cdot \hat{\epsilon} \, ds \\ &= \frac{n^k}{k!} \cdot \|x - a\|^k \cdot \hat{\epsilon} . \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir  $\hat{\epsilon} = k! \cdot \epsilon / n^k$  pour qu'on a la majoration

$$\left| \frac{f(x) - P_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} \right| < \epsilon .$$

On a donc trouvé le  $\delta > 0$  qui convient, ce qui montre qu'on a bien la limite voulue.

CQFD



### Les preuves de §36

**Preuve de [36.1]. • (i).** Par définition,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  veut dire qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon .$$

Étant donné qu'on a l'inclusion  $O \subset U$  on en déduit immédiatement la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon ,$$

ce qui est, sachant qu'on a  $g = f|_{O \setminus \{a\}}$ , l'énoncé  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

• (ii). Réciproquement, supposons qu'on a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ , c'est-à-dire (en utilisant de nouveau l'égalité  $g = f|_{O \setminus \{a\}}$ )

$$(39.58) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon .$$

Sachant que  $O$  est un ouvert contenant  $a$ , il existe  $\delta_o > 0$  tel que  $B_{\delta_o}(a) \subset O \subset U$ . Pour un  $\varepsilon > 0$  la propriété (39.58) nous donne  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in O : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon .$$

Si on pose maintenant  $\delta' = \min(\delta, \delta_o)$ , alors on peut faire le raisonnement

$$\|x - a\| < \delta' \leq \delta_o \Rightarrow x \in B_{\delta_o}(a) \subset O \subset U$$

et donc

$$\begin{aligned} x \in U \text{ et } 0 < \|x - a\| < \delta' &\Rightarrow x \in O \text{ et } 0 < \|x - a\| < \delta' \leq \delta \\ &\Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon . \end{aligned}$$

Ainsi on arrive à la conclusion

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' = \min(\delta, \delta_o) > 0 \forall x \in U : 0 < \|x - a\| < \delta' \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon ,$$

c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  comme voulu.

CQFD

**Preuve de [36.2].** Si  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$ , il est évident que pour tout  $a \in U$  il existe  $O = U$  tel que  $f|_O = f$  est de classe  $C^k$  sur  $O = U$ . Pour la réciproque, supposons donc que pour tout  $a \in U$  il existe un ouvert  $O \subset \mathbf{R}^n$  tel que  $a \in O \subset U$  et tel que  $f|_O$  est de classe  $C^k$  sur  $O$ . On fait la preuve que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$  par récurrence sur  $k \in \mathbf{N}$ , en commençant par le cas  $k = 0$ . Pour montrer que  $f$  est continue sur  $U$ , il faut montrer que  $f$  est continue en chaque point  $a \in U$ . Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $a$  tel que la fonction  $g = f|_O$  est continue en  $a$ , c'est-à-dire qu'on a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = f(a)$ . Sachant que  $O$  est un ouvert, on peut appliquer [36.1.ii] et conclure qu'on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)$ , c'est-à-dire que  $f$  est continue en  $a$  comme voulu.

Supposons ensuite qu'on a montré la propriété pour  $k$  et considérons le cas  $k + 1$ . Dans ce cas l'hypothèse dit que pour tout  $a \in U$  il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $a$  tel que  $f|_O$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $O$  et donc en particulier de classe  $C^k$  sur  $O$ . Par notre hypothèse de récurrence,  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$  et il suffit de montrer qu'elle est de classe  $C^{k+1}$  sur  $U$ . Pour cela il faut montrer deux choses : d'abord que les dérivées partielles d'ordre  $k + 1$  existent sur  $U$  et ensuite que ces dérivées partielles d'ordre  $k + 1$  sont continues sur  $U$ .

Par définition, une dérivée partielle d'ordre  $k + 1$  est la dérivée partielle d'une dérivée partielle d'ordre  $k$ . Soit donc  $g$  une dérivée partielle d'ordre  $k$  de la fonction  $f$  :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) .$$

Une dérivée partielle de  $g$  au point  $a$ , disons par rapport à  $x_i$ , est définie par

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_d) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - g(a)}{h} .$$

Plus précisément la dérivée partielle de  $g$  par rapport à  $x_i$  sur  $U$  est donnée par

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_d) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) ,$$

où  $\Delta : I \setminus \{0\} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$  est définie par

$$\Delta(h) = \frac{g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - g(a)}{h}$$

avec  $I \subset \mathbf{R}$  le sous-ensemble défini par

$$I = \{ h \in \mathbf{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) \in U \} .$$

Ceci nous amène à introduire l'ensemble  $I' \subset I$  défini par

$$I' = \{ t \in \mathbf{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) \in O \} \subset I ,$$

ainsi que la fonction  $\Delta' : I' \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^m$ , la restriction de  $\Delta$  à  $I' \setminus \{0\}$ . Parce que  $O$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $I'$  est un ouvert de  $\mathbf{R}$ . Par définition, si on note  $g' = g|_O$  la restriction de  $g$  à  $O$ , alors on a

$$\frac{\partial g'}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta'(h) ,$$

une limite qui existe par l'hypothèse que  $f$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $O$ . On peut donc appliquer [36.1.ii] pour conclure que  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h)$  existe également et a la même valeur. Ainsi on a montré que les dérivées partielles de  $f$  d'ordre  $k + 1$  existent sur  $U$  et qu'elles coïncident avec les dérivées partielles des restrictions aux ouverts  $O$ .

Une fois qu'on sait que les dérivées partielles d'ordre  $k + 1$  existent sur  $U$ , il faut montrer qu'elles sont continues. Mais cela se montre exactement comme on a montré le cas  $k = 0$ .  $\square$  CQFD

### Les preuves de §37

**Preuve de [37.2].** Trouver la réciproque de  $F$  (pour pouvoir dire qu'elle est de classe  $C^k$ ) veut dire qu'on regarde l'équation  $y = f(x)$  et qu'on essaye d'exprimer  $x$  en fonction de  $y$ . C'est donc un cas particulier du théorème des fonctions implicites. Pour rentrer dans le cadre de ce théorème, on définit l'ouvert  $U = O \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$  et l'application  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  par

$$F(x, y) = f(x) - y .$$

Ensuite on veut appliquer le théorème des fonctions implicites [37.1] avec ce  $U$ , ce  $f$ ,  $m = 2n$ ,  $k = n$ ,  $a = (p, F(p))$ ,  $I = \{1, \dots, n\}$  et  $J = \{n+1, \dots, 2n\}$ .

Avec ces données on a

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}(a) \right) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \right) ,$$

ce qui est bien une matrice inversible par hypothèse. Selon [37.1] il existe donc un voisinage  $V_1 \subset \mathbf{R}^n$  de  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = p$ , un voisinage ouvert  $V_2 \subset \mathbf{R}^{2n-n} = \mathbf{R}^n$  de  $(a_i)_{i \in J} = (a_{n+1}, \dots, a_{2n}) = F(p)$  et une fonction  $g : V_2 \rightarrow V_1$  de classe  $C^k$  tels que

- pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$  : si  $x \in V_1$  et  $y \in V_2$ , alors  $(x, y) \in U = O \times \mathbf{R}^n$  ;
- pour tout  $(x, y) \in V_1 \times V_2$  on a l'équivalence

$$f(x, y) = f(p, F(p)) \iff x = g(y) .$$

Mais la première propriété se traduit immédiatement en  $V_1 \subset O$  et la définition de  $f$  nous dit que la deuxième propriété se traduit comme l'équivalence  $F(x) = y \iff x = g(y)$ , c'est-à-dire que  $g$  est la réciproque de  $F$ . Le fait que cette équivalence est vrai sur tout le produit  $V_1 \times V_2$  se traduit par le fait que  $F : V_1 \rightarrow V_2$  est bijective avec  $g : V_2 \rightarrow V_1$  comme réciproque. Étant donné que  $g$  est de classe  $C^k$ , on a donc montré que  $F : V_1 \rightarrow V_2$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.  $\boxed{CQFD}$

**Preuve de [37.3].** Prenons  $q \in V = f(U)$  et  $p \in f^{-1}(\{q\})$  arbitraire. Alors selon [37.2] il existe deux ouverts  $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^n$  tels que  $p \in V_1$  et  $f : V_1 \rightarrow V_2$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Il s'ensuit que  $q \in V_2 \subset V$  et donc tout point de  $V$  contient un voisinage ouvert contenu dans  $V$ , ce qui montre que  $V$  est un ouvert.

Si  $f$  est en plus injective, alors  $f : U \rightarrow V$  est bijective. La réciproque d'une application bijective étant unique, on vient de montrer que chaque point  $q \in V$  admet un voisinage ouvert  $V_2$  sur lequel  $f^{-1}$  est de classe  $C^k$ . Par [36.2] on en déduit que  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est de classe  $C^k$ .  $\boxed{CQFD}$

**Les preuves de §38**

## Les exercices

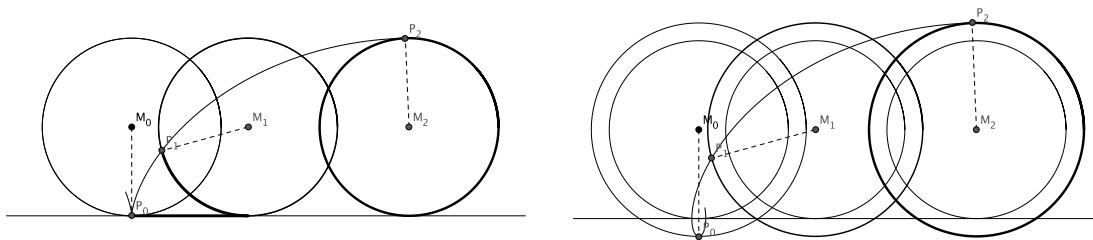
### Les exercices de §5

④ **40.1 Exercice.** Tracer dans le plan  $\mathbf{R}^2$  les courbes suivantes :

- (i)  $\gamma(t) = (t^3 - t, 1 - t^2)$  ;
- (ii)  $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(2t))$  ;
- (iii)  $\gamma(t) = \left( \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^4 + 1} \right)$  (le lemniscate de Bernoulli<sup>1</sup>) ;
- (iv)  $\gamma(t) = \left( \frac{2t}{1 + t^3}, \frac{2t^2}{1 + t^3} \right)$  (le folium de Descartes).
- (v)  $\gamma(t) = \left( \frac{2t^2}{1 + t^2}, \frac{2t^3}{1 + t^2} \right)$  (la cissoïde de Diocles) ;
- (vi)  $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(t/2)))$  (la tractrice) ;

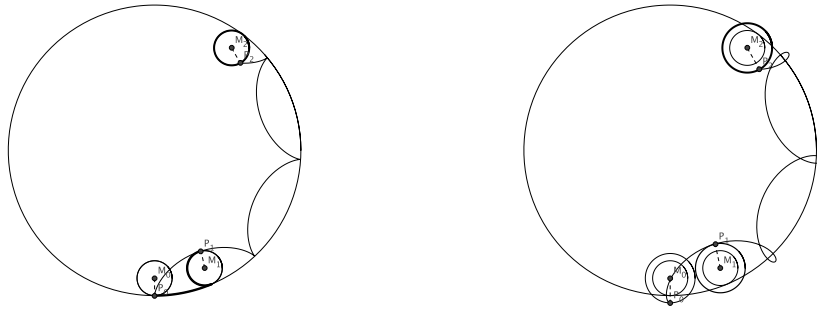
④ **40.2 Exercice.** Trouver une application/courbe  $\hat{\gamma} = \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  (donc définie sur tout  $\mathbf{R}$ ) qui a le même image que la courbe [40.1.iv] (le folium de Descartes).

④ **40.3 Exercice (rouler sans glisser : une cycloïde).** On veut décrire le mouvement d'un point sur la roue d'un train qui roule sans glisser sur les rails. Pour cela on suppose que le rail est la droite  $\{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$  et que le rayon de la roue est  $r$ . En superposant le mouvement circulaire d'un point à distance  $d$  du centre de la roue autour de son axe et le mouvement rectiligne de l'axe, trouver le mouvement d'un tel point en fonction de  $d$  (et de  $r$ ). Dans le cas  $d = r$  on appelle cette courbe une *cycloïde*.



1. Attention à la pronociation de ce nom : il n'y a pas de "i" devant les "ll." Comme on dit : il n'y a pas de nouilles dans Bernoulli

**40.4 Exercice (le spirographe : une hypotrochoïde).** Au lieu de faire rouler (sans glisser) un cercle sur une droite comme dans [40.3], on considère maintenant un cercle de rayon  $r$  qui touche de l'intérieur un cercle de rayon  $R$  (et on suppose qu'on a  $r < R$ , bien que les formules seront valables pour tout  $r$ ). Ensuite on fait rouler ce “petit” cercle de rayon  $r$  sur le “grand” cercle de rayon  $R$  sans glisser. Décrire le mouvement d'un point sur un disque attaché au petit cercle qui se trouve à distance  $d$  du centre du petit cercle. Dans le cas  $d = r$  on appelle cette courbe une *hypotrochoïde*. Si vous prenez la limite  $R \rightarrow \infty$ , dans un sens à préciser, retrouvez-vous les résultat de [40.3] ?



## Les exercices de §6

**40.5 Exercice.** Calculer la longueur des courbes suivantes :

- (a) le parabole  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  ;
- (b) la tractrice [40.1.vi] entre  $t = 0$  et  $t = T \in ]0, \pi[$  ;
- (c) la cycloïde [40.3] (c'est-à-dire le cas  $d = r$ ) entre  $t = 0$  et  $t = T \in [0, 2\pi]$  ;
- (d) le solénoïde  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  défini par

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, \alpha t)$$

entre  $t = 0$  et  $t = T$ , où  $R \in \mathbf{R}^*$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$  sont deux paramètres ;

- (e) l'astroïde  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (a(\cos t)^3, a(\sin t)^3)$ ,  $a > 0$  entre  $t = 0$  et  $t = T \in [0, 2\pi]$  ;
- (f) la cardioïde  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (a(1 + \cos t) \cos t, a(1 + \cos t) \sin t)$ ,  $a > 0$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  ;
- (g) la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (\tanh(t/2) \cos t, \tanh(t/2) \sin t)$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  ;
- (h) la courbe  $\gamma : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (t, \frac{2}{t} + \frac{t^3}{24})$  entre  $t = 2$  et  $t = T \in [2, \infty[$ .

### Les exercices de §7

**40.6 Exercice.** Soit  $\gamma$  la tractrice [40.1.vi], soit  $D_t \equiv DT_t\gamma$  la droite tangente à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  et soit  $P_t$  le point d'intersection de  $D_t$  avec l'axe des ordonnées  $\{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$ . Montrer que la distance  $\|P_t - \gamma(t)\|$  est constante, c'est-à-dire, ne dépend pas de  $t \in ]0, \pi[$ .

- ④ **40.7 Exercice.** Soit  $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $i = 1, 2$  deux courbes paramétrées par longueur d'arc et équivalentes par reparamétrage avec fonction de reparamétrage  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ . Alors il existe  $\epsilon = \pm 1$  et  $s_o \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $s \in I_2$  on a  $\varphi(s) = \epsilon s + s_o$ . Autrement dit :

$$\forall s \in I_2 \quad : \quad \gamma_2(s) = \gamma_1(\epsilon s + s_o) .$$

Dans notre interprétation d'une courbe paramétrée comme une voiture qui roule sur une autoroute, on peut résumer ce résultat comme suit. On considère deux voitures roulant sur une même autoroute à vitesse constante égale 1. Les deux seules façons pour ces deux voitures pour ne pas rouler ensemble est de partir à des moments différents ( $s_o \neq 0$ ) ou de rouler en sens inverse ( $\epsilon = -1$ ). On peut aussi remarquer que si  $\epsilon = 1$ , les deux courbes paramétrées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont la même orientation [5.1], et si  $\epsilon = -1$ , elles ont une orientation opposée.



**Les exercices de §8**

**40.8 Exercice.** Déterminer les asymptotes éventuelles pour les courbes données dans [40.1].

**Les exercices de §9**

**40.9 Exercice.** Calculer la courbure (relative) des courbes planes [40.1.i], [40.1.ii], [40.1.vi] et [40.3].

## Les exercices de §10

- ④ **40.10 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe dans l'espace tri-dimensionnel. Montrer que la courbure absolue et le vecteur de courbure sont donnés par

$$\kappa_a(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{et} \quad k_\gamma(t) = \frac{(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \wedge \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4} .$$

**40.11 Exercice.** Calculer le vecteur de courbure des courbes planes [40.1.i], [40.1.ii], [40.1.vi] et [40.3].

**40.12 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée. Montrer qu'elle est paramétrée à vitesse constante si et seulement si on a  $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in I$ .

## Les exercices de §11

**40.13 Exercice.** Calculer les développées des courbes suivantes et tracer leurs images dans  $\mathbf{R}^2$ .

- (a)  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ .
- (b) Les courbes données en [40.1.i], [40.1.ii], [40.1.vi], [40.5.d] et [40.3] (le cas  $d = r$ ).

**40.14 Exercice de pliage.** On choisit le point  $F = (0, 1) \in \mathbf{R}^2$  et on choisit le point  $P = (t, -1)$ .

- (a) Déterminer en fonction de  $t \in \mathbf{R}$  la médiatrice  $D_t$  du segment  $\overline{PF}$ .
- (b) Déterminer la caustique de la famille de droites  $D_t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
- (c) Dédurre que la courbe qu'on observe par le pliage de la feuille décrit ci-dessus est une parabole. Fournir son équation.

⑤ **40.15 Exercice.** Soit  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière (plane) et soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe régulière (plane) dont la courbure ne s'annule jamais. Montrer que  $c$  est la développée de  $\gamma$  si et seulement si  $\gamma$  est une développante de  $c$ .

**40.16 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe paramétrée régulière (plane).

- (a) Soit  $D_t$  la droite tangente à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Déterminer la caustique (si elle existe) de la famille de droites  $D_t$ ,  $t \in I$ .
- (b) Soit  $D_t$  la droite perpendiculaire à la droite tangente à  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Déterminer les ortho-caustiques de la famille  $D_t$ ,  $t \in I$ .

**40.17 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe régulière. Écrire l'équation différentielle à résoudre pour trouver les développantes quand on décrit la droite tangente par le point de base  $\gamma(t)$  et le vecteur directeur (unitaire)  $v(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ . Le résultat est-il compatible avec [11.8] quand  $\gamma$  n'est pas paramétrée par longueur d'arc ?

**40.18 Exercice.** Déterminer pour les courbes suivantes les développantes.

- (a) Le cercle  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .
- (b) La parabole  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ .
- (c) La tractrice [40.1.vi].
- (d) Le solénoïde [40.5.d].

## Les exercices de §15

- ⑤ **40.19 Exercice.** Soit  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  le solénoïde [40.5.d].
- (a) Déterminer la courbure (relative) et la torsion de  $\gamma$ .
  - (b) Trouver une courbe paramétrée par longueur d'arc  $\hat{\gamma} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  qui est équivalente à  $\gamma$  par reparamétrage.
  - (c) Montrer que  $\hat{\gamma}$  vérifie les équations de Serret-Frenet.
- ⑤ **40.20 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière dont la fonction de torsion est identiquement nulle. Montrer que  $\gamma$  est une courbe plane, c'est-à-dire, qu'il existe un plan  $P \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\gamma(I) \subset P$ .

## Les exercices de §16

**40.21 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière dont la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  sont des fonctions constantes (avec  $\kappa \neq 0$ ). Montrer qu'il existe une rotation  $A \in \text{SO}(3)$  et un vecteur  $b \in \mathbf{R}$  tels que la courbe  $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\hat{\gamma}(t) = A\gamma(t) + b$$

a son image  $\hat{\gamma}(I)$  contenu dans l'image du solénoïde [40.5.d] pour des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $R$  à déterminer. Que se passe-t-il quand  $\kappa = 0$  ?

On reformule ce résultat souvent en disant que les seules courbes avec courbure et torsion constantes sont les solénoïdes (les images du solénoïde de référence [40.5.d] par une rotation et translation de l'espace).

## Les exercices de §18

**40.22 Exercice.** Montrer que les sous-ensembles suivants sont des surfaces régulières et que les applications sont des cartes locales. Vérifier que les noms correspondent avec les formules et déterminer l'image de chaque carte locale. Pour tous les cartes,  $\alpha$  (ainsi que  $\beta$ ) est un paramètre réel fixe. Si dans la suite on ne le précise pas, on le prend zéro.

(a) La sphère unité  $\mathbf{S}^2$  avec l'application  $\psi : ]0, \pi[ \times ]\alpha, 2\pi + \alpha[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définies par

$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$$\psi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) ;$$

(b) Le cylindre  $C$  avec l'application  $\psi : ]\alpha, 2\pi + \alpha[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définis par

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$\psi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) ;$$

(c) L'hyperboloïde à deux nappes  $\mathbf{H}^2$  avec l'application  $\psi : ]\alpha, 2\pi + \alpha[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définis par

$$\mathbf{H}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \}$$

$$\psi(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \sqrt{r^2 + 1}) ;$$

(d) L'hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{N}$  avec l'application  $\psi : ]\alpha, 2\pi + \alpha[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définis par

$$\mathcal{N} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}$$

$$\psi(\varphi, z) = (\sqrt{z^2 + 1} \cos \varphi, \sqrt{z^2 + 1} \sin \varphi, z) ;$$

(e) Le tore  $\mathbf{T}^2$  avec l'application  $\psi : ]\alpha, 2\pi + \alpha[ \times ]\beta, 2\pi + \beta[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définis par

$$\mathbf{T}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 10)^2 + 36z^2 = 36 \}$$

$$\psi(\theta, \varphi) = ((3 + \sin \theta) \cos \varphi, (3 + \sin \theta) \sin \varphi, \cos \theta) .$$

⑤ **40.23 Exercice (surfaces de révolution 1 : des vases).** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  une fonction strictement positive de classe  $C^1$  et soit  $G_f \subset \mathbf{R}^2$  son graphe :

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in ]a, b[ \} .$$

Si on rajoute une troisième dimension et si on tourne  $G_f$  autour de l'axe des abscisses, on obtient l'ensemble  $S_f \subset \mathbf{R}^3$  défini comme

$$S_f = \{ (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi) \mid x \in ]a, b[ \ \& \ \varphi \in \mathbf{R} \} .$$

**DESSIN**

(a) Trouver un ouvert  $O \subset \mathbf{R}^3$  et une fonction  $F : O \rightarrow \mathbf{R}$  tels qu'on a  $S_f = F^{-1}(0)$ .

(b) En déduire que  $S_f$  est une surface régulière.

(c) Montrer que (pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ) l'application  $\psi : ]a, b[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[ \rightarrow S_f$  définie par

$$\psi(x, \varphi) = (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi)$$

est une carte locale.

- ④ **40.24 Exercice (surfaces de révolution 2 : des assiettes).** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^1$  avec  $a \geq 0$  et soit  $G_f \subset \mathbf{R}^2$  son graphe :

$$G_f = \{ (r, f(r)) \mid r \in ]a, b[ \} .$$

Si on rajoute une troisième dimension et si on tourne  $G_f$  autour de la deuxième axe, on obtient l'ensemble  $S_f \subset \mathbf{R}^3$  défini comme

$$S_f = \{ (r \cos \varphi, f(r), r \sin \varphi) \mid r \in ]a, b[ \text{ \& } \varphi \in \mathbf{R} \} .$$

#### DESSIN

- (a) Trouver un ouvert  $O \subset \mathbf{R}^3$  et une fonction  $F : O \rightarrow \mathbf{R}$  tels qu'on a  $S_f = F^{-1}(0)$ .  
 (b) En déduire que  $S_f$  est une surface régulière.  
 (c) Montrer que (pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ) l'application  $\psi : ]a, b[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[ \rightarrow S_f$  définie par

$$\psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, f(r), r \sin \varphi)$$

est une carte locale.

- ④ **40.25 Exercice.** Montrer que l'application  $\psi : ]0, 2\pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par (18.15) est une application injective vérifiant partout  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)) = 2$  (bref, une immersion). Même question pour l'application  $\psi : \mathbf{R} \times ]1, \frac{5}{4}[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par (18.17).

- ④ **40.26 Exercice.** Soit  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'application définie par

$$\psi(u, v) = \left( \frac{u}{(u^2 + v^2)^2 + 1}, \frac{v}{(u^2 + v^2)^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2 + 1} \right)$$

et soit  $S = \psi(\mathbf{R} \times ]0, 2\pi[)$ . Montrer que  $\psi$  est une application injective vérifiant  $\text{rang}(\text{Jac}(\psi)) = 2$  partout. Montrer que  $S$  n'est pas une surface régulière. Vérifier que le nom "kouglehopf" (ou kouglof, nom d'un gâteau alsacien) n'est pas trop mal pour l'image  $S$ .



## Les exercices de §20

**40.27 Exercice (la projection stéréographique).** Soit  $P = (0, 0, 1) \in \mathbf{S}^2$  le pôle nord de la sphère unité.

- (a) Pour chaque point  $Q = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  avec  $z \neq 1$  déterminer l'intersection  $Q' = (p, q, 0)$  de la droite passant par  $P$  et  $Q$  avec le plan  $Z \subset \mathbf{R}^3$ .
- (b) Montrer que l'application  $Q \mapsto Q'$  établit une bijection entre  $\mathbf{S}^2 \setminus \{P\}$  et  $Z$  et donner une formule explicite pour sa réciproque  $\psi_N : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{P\}$ .
- (c) Montrer que  $\psi_N$  est une carte locale pour la sphère unité.
- (d) Faire la même chose en remplaçant le pôle nord  $P$  par le pôle sud  $S = (0, 0, -1)$  pour obtenir une autre carte locale  $\psi_S : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{S\}$ .
- (e) Déterminer les applications  $\psi_N^{-1} \circ \psi_S$  et  $\psi_S^{-1} \circ \psi_N$  [20.5].
- (f) Déterminer les applications  $\psi_N^{-1} \circ \psi$ ,  $\psi_S^{-1} \circ \psi$  ainsi que leurs réciproques et leurs domaines de définitions avec  $\psi$  la carte donnée en [40.22.a].

**Les exercices de §21**

**40.28 Exercice.** Déterminer, pour les surfaces données en [40.22], le plan tangent en chaque point de la surface, aussi bien par un point de base et deux vecteurs directeurs, que par une équation.

## Les exercices de §23

⑤ **40.29 Exercice.** Calculer la première forme fondamentale pour les cartes des surfaces données en [40.22], [40.23] et [40.24]. Calculer aussi la première forme fondamentale dans les cartes de la sphère  $\mathbf{S}^2$  données par les projections stéréographiques du pôle nord et du pôle sud [40.27].

⑤ **40.30 Exercice.** Soit  $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^3$  l'hyperboloïde à une nappe [40.22.d].

- (a) Montrer que pour chaque point  $p \in \mathcal{N}$  il y a deux droites distinctes  $D_1$  et  $D_2$  passant par  $p$  qui sont contenues dans  $\mathcal{N}$ .
- (b) En déduire qu'il y a deux façons d'écrire  $\mathcal{N}$  comme une réunion disjointe de droites (réunion sur un cercle) et donner des expressions explicites pour une telle réunion.
- (c) Montrer que (pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ) l'application  $\psi : ]\alpha, \alpha + 2\pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\psi(\varphi, z) = (\cos \varphi - z \sin \varphi, \sin \varphi + z \cos \varphi, z)$$

est une carte locale pour  $\mathcal{N}$ .

- (d) Calculer la première forme fondamentale dans cette carte.

**40.31 Exercice.**

**40.32 Exercice.**

**Nota Bene : une identification habituelle.** Pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  ou un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  on a défini les espaces tangent  $T_p S$  et  $T_x U$  comme des espaces vectoriels. Avec la définition des fibrés tangent  $TS$  et  $TU$  et les projections canoniques  $\pi_S : TS \rightarrow S$  et  $\pi_U : TU \rightarrow U$  on peut donc écrire

$$\pi_S^{-1}(p) = \{p\} \times T_p S \quad \text{et} \quad \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times T_x U .$$

En vu de ces égalités, il est d'usage d'**identifier** ces espaces vectoriels avec ces pré-images. On dit donc que  $\pi_S^{-1}(p)$  **est** l'espace tangent à  $S$  au point  $p$  et que  $\pi_U^{-1}(x)$  **est** l'espace tangent à  $U$  au point  $x$ .

Cette identification est "renforcée" par une notation d'un élément  $(p, v)$  de  $TS$  (ou un élément  $(x, v) \in TU$ ) comme

$$v_p \quad \text{ou} \quad v|_p \quad \text{ou (s'il n'y a pas confusion possible) simplement} \quad v .$$

Autrement dit, au lieu d'écrire le vecteur  $v$  et son point d'attache  $p$  comme un couple  $(p, v)$ , on écrit le point d'attache  $p$  en indice "attaché" au vecteur  $v$ . Et avec cette écriture, la structure d'espace vectoriel de  $T_p S$  (ou  $T_x U$ ) s'écrit simplement comme

$$v|_p + \lambda w|_p = (v + \lambda w)|_p .$$

Cette écriture nous met en garde qu'en général on ne peut pas additionner des vecteurs dans des espaces tangents différents : la formule  $v|_p + w|_q$  n'aura pas de sens (sauf avec des explications supplémentaires) : la somme d'un élément  $v \in T_p S$  avec

un élément  $w \in T_q S$  est bien un vecteur dans  $\mathbf{R}^3$ , mais ne sera en général ni dans  $T_p S$ , ni dans  $T_q S$ .

La situation semble être différente pour les espaces tangents  $T_x U = \mathbf{R}^n$  (qui sont bien tous le même  $\mathbf{R}^n$ ), mais on continuera à distinguer ces différents espaces tangents pour des  $x$  différents, comme on le fait pour les espaces tangents à une surface régulière. Quoi que ... on dérogera à cette règle de temps en temps pour donner des justifications heuristiques, surtout dans la discussion sur le transport parallèle (mais voir aussi ci-dessous).

## Les exercices de §27

- ④ **40.33 Exercice.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et soit  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs unitaires normaux à  $S$ . Alors  $\mathbf{n}$  est de classe  $C^{k-1}$  si et seulement si elle est continue.

**Les exercices de §28**

**40.34 Exercice.** Calculer la deuxième forme fondamentale pour les cartes des surfaces données en [40.22], [40.23] et [40.24].

### Les exercices de §29

**40.35 Exercice.** Calculer, en chaque point de la surface, les courbures principales et les directions principales associées pour les surfaces données en [40.22], [40.23] et [40.24]. Mais avant de faire ces calculs, dressez un tableau intuitif de ces quantités selon les points de la surface. Confrontez ce tableau avec les résultats de vos calculs. Y-a-t-il des différences qualitatives ? Si oui, les expliquer.

**40.36 Exercice (la pseudo-sphère).** Soit  $\gamma : ]\frac{1}{2}\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  la tractrice [40.1.vi] donnée par

$$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(t/2))) .$$

On considère son image  $G = \gamma(] \frac{1}{2}\pi, \pi[ ) \subset \mathbf{R}^2$ , on rajoute une dimension et on le tourne autour de l'axe des  $y$ . Ainsi on obtient l'ensemble  $S \subset \mathbf{R}^3$  donné par

$$S = \{ (\sin t \cos \varphi, \cos(t) + \ln(\tan(t/2)), \sin t \sin \varphi) \mid t \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[ \text{ \& } \varphi \in \mathbf{R} \} .$$

#### DESSIN

- (a) Trouver une fonction  $f$  telle que  $G$  s'écrit comme le graphe de  $f$ .
- (b) En déduire que  $S$  est une surface régulière (voir [40.24]).
- (c) Montrer que (pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ) l'application  $\psi : ]\alpha, \alpha + 2\pi[ \times ]\frac{1}{2}\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  donnée par

$$\psi(\varphi, t) = (\sin t \cos \varphi, \cos(t) + \ln(\tan(t/2)), \sin t \sin \varphi)$$

est une carte locale pour  $S$ .

- (d) Calculer la première forme fondamentale et la deuxième forme fondamentale dans cette carte et calculer les courbures principales et les directions principales associées en chaque point de la surface.

### Les exercices de §30

**40.37 Exercice.** Montrer que les grands cercles sont des géodésiques sur la sphère  $\mathbf{S}^2$  [40.22.a], où un *grand cercle* est l'intersection de  $\mathbf{S}^2$  avec un plan passant par l'origine (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2).

**40.38 Exercice.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{S}^2$  une géodésique sur la sphère [40.22.a]. Dédurre de [30.16] et [40.37] que l'image  $\gamma(I)$  est incluse dans un grand cercle. Dit d'une façon simpliste : montrer que les grands cercles sont les seules géodésiques sur  $\mathbf{S}^2$ .

**40.39 Exercice.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue avec  $a < b$ . En s'inspirant de la preuve de [30.4], montrer que si l'intégrale  $\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$  est nulle pour tout choix d'une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$  vérifiant  $g(a) = g(b) = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

**40.40 Exercice.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière, soit  $\psi_i : U_i \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  deux cartes locales, soit  $E_i, F_i, G_i$  les coefficients de la première forme fondamentale associée à la carte  $\psi_i$ , soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière vérifiant  $\gamma(I) \subset \psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$  et soit  $c_i : I \rightarrow U_i$  tel que  $\psi_i \circ c_i = \gamma$  [23.1]. Soit finalement

$$\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1 : U_{12} \subset U_1 \rightarrow U_{21} \subset U_2$$

le difféomorphisme défini en [20.5] de telle sorte qu'on a  $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$  sur  $U_{12}$  ainsi que  $c_1 = c_2 \circ \varphi$ . En utilisant [24.6], montrer que si  $c_2$  vérifie les équations (30.14) avec les fonctions  $E_2, F_2$  et  $G_2$ , alors  $c_1$  vérifie les équations (30.14) avec les fonctions  $E_1, F_1$  and  $G_1$ .

**40.41 Exercice.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  est une surface régulière, soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe sur  $S$  et soit  $t_o \in I$ . Notons  $P : \mathbf{R}^3 \rightarrow PT_p S$  la projection orthogonale de  $\mathbf{R}^3$  sur  $PT_p S$ , le plan tangent à la surface  $S$  au point  $p = \gamma(t_o)$  (à ne pas confondre avec la projection orthogonale sur l'espace tangent) et  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow PT_p S$  la projection de la courbe  $\gamma$  sur ce plan tangent :

$$\tilde{\gamma}(t) = P(\gamma(t)) .$$

(a) Montrer que l'application  $P$  est donnée par

$$P(x) = x - \langle x - p, \mathbf{n}_p \rangle \cdot \mathbf{n}_p .$$

(b) Montrer que le vecteur de courbure géodésique  $k_\gamma^\parallel(t_o)$  défini en (29.2) est égal au vecteur de courbure  $k_{\tilde{\gamma}}(t_o)$  de la courbe (plane)  $\tilde{\gamma}$ .

**40.42 Exercice.** Écrire les équations géodésiques (30.14) dans les cartes des surfaces données en [40.22].

**40.43 Exercice.** Soit  $\psi_N : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la carte de la sphère unité  $\mathbf{S}^2$  obtenu par la projection stéréographique [40.27].



- (a) Écrire les équations géodésiques [30.14] dans cette carte.
- (b) Résoudre ces équations pour les courbes  $c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  de la forme  $c(t) = r(t) \cdot (a, b)$  pour un vecteur  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  donné et une fonction  $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  à déterminer.
- (c) Déterminer les valeurs de  $r \in \mathbf{R}$  telles que la courbe  $c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée par  $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$  vérifie les équations géodésiques.
- (d) Est-ce que vos résultats obtenus dans (b) et (c) sont compatibles avec le résultat obtenu dans [40.38] ?

⑤ **40.44 Exercice (Pythagore sphérique).** Sur la sphère unité  $\mathbf{S}^2$  on fixe trois points  $A, B$  et  $C$  données par

$$A = (\cos \varphi_A, \sin \varphi_A, 0) \quad , \quad B = (\sin \theta_B, 0, \cos \theta_B) \quad , \quad C = (1, 0, 0) \quad ,$$

où  $\varphi_A \in ]0, \pi[$  et  $\theta_B \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$  sont des valeurs arbitraires mais fixes. On note  $\gamma_{AB}$  la géodésique passant par  $A$  et  $B$  (le morceau de grand cercle passant par ces deux points),  $\gamma_{BC}$  la géodésique passant par  $B$  et  $C$  et  $\gamma_{AC}$  la géodésique passant par  $A$  et  $C$ .

- (a) Déterminer une paramétrisation pour les trois courbes  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BC}$  et  $\gamma_{AC}$  (facile pour les deux derniers, un peu moins facile pour le premier).
- (b) Déterminer les trois angles  $\angle ABC$ ,  $\angle BCA$  et  $\angle CAB$  faits par ces trois géodésiques. (Mais attention à l'orientation des géodésiques [5.1]. Par exemple, pour calculer l'angle  $\angle ABC$  [23.6] il faut paramétrer les courbes  $\gamma_{AB}$  et  $\gamma_{BC}$  telles qu'elles partent tous les deux de  $B$  vers l'autre sommet.) En déduire que  $\triangle ABC$  est un triangle géodésique rectangle, plus précisément que les trois sommets sont reliés par des géodésiques et  $\angle ACB = \frac{1}{2}\pi$ .
- (c) Montrer qu'on a l'égalité

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - \pi = \arccos\left(\frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\right) .$$

- (d) Calculer la longueur  $c$  de la courbe  $\gamma_{AB}$  entre  $A$  et  $B$ , la longueur  $a$  de  $\gamma_{BC}$  entre  $B$  et  $C$  et la longueur  $b$  de  $\gamma_{CA}$  entre  $A$  et  $C$ . Montrer qu'on a l'égalité

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c .$$

Retrouver le théorème de Pythagore  $a^2 + b^2 = c^2$  comme cas limite de cette formule quand  $a, b$  et  $c$  sont petits (c'est-à-dire, quand  $(\varphi_A, \theta_B)$  est proche de  $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ ).

- (e) En utilisant la formule donnée en [24.5], calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle géodésique  $\triangle ABC$ . Montrer qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \arcsin\left(\frac{\cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\right) = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - \pi . \end{aligned}$$

⑤ **40.45 Exercice.** Soit  $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^3$  l'hyperboloïde à une nappe [40.22.d].

- (a) Dans [40.30] on a montré que  $\mathcal{N}$  s'écrit (de deux façons) comme une réunion (disjointe) de droites. Montrer que ces droites sont des géodésiques sur  $\mathcal{N}$ .

- (b) Montrer que la courbe  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{N}$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  est une géodésique sur  $\mathcal{N}$ .
- (c) On prend deux points  $A = (1, 0, 0)$  et  $B = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  (avec  $\theta \in ]0, \pi[$ ) sur  $c = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\} \cap \mathcal{N}$ . Par  $A$  on considère la droite de vecteur directeur  $(0, 1, 1)$  contenue dans  $\mathcal{N}$  (une des deux droites qui passent par  $A$  et qui sont contenues dans  $\mathcal{N}$ , voir [40.30]), qu'on note  $b$  et par  $B$  on considère "l'autre" droite contenue dans  $\mathcal{N}$ , qu'on note  $a$ . Ces deux droites  $a$  et  $b$  ont un point d'intersection  $C \in \mathcal{N}$ . Ainsi on obtient un triangle géodésique  $\Delta ABC$  sur l'hyperboloïde. Calculer les angles  $\angle CAB$ ,  $\angle ABC$  et  $\angle BCA$  à chaque sommet de ce triangle et montrer qu'on a l'égalité

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA - \pi = -\arcsin(\sin^2(\theta/2)) .$$

Que se passe-t-il quand on prend  $\theta \in ]\pi, 2\pi[$  ?

- (d) Calculer  $\iint_{\Delta ABC} K \, d\mathcal{A}$  [24.5], où  $K$  désigne la courbure de Gauss de la surface et  $\Delta ABC$  le triangle de la question précédente. Montrer que cette intégrale est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta ABC} K \, d\mathcal{A} &= 2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}\right) \\ &= -\arcsin(\sin^2(\theta/2)) . \end{aligned}$$

## Les exercices de §32

**40.46 Exercice.** Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  une surface régulière de classe  $C^2$  et orientable. Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe (de classe  $C^1$ ) sur  $S$  et soit  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  tel que pour tout  $t \in I$  le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  est unitaire et orthogonal à la surface au point  $\gamma(t)$ . Montrer que si  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$  pour  $t_0, t_1 \in I$ , alors  $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}(t_1)$ . En déduire une preuve que le ruban de Möbius [27.7] n'est pas orientable.

**40.47 Exercice.** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction strictement positive de classe  $C^2$  et soit  $S_f \subset \mathbf{R}^3$  la surface de révolution autour de l'axe des abscisses associée [40.23]. Sur  $S_f$  on considère la courbe  $\gamma_x : \mathbf{R} \rightarrow S_f$ ,  $x \in ]a, b[$  définie par

$$\gamma_x(t) = (x, f(x) \cos t, f(x) \sin t) .$$

- Calculer la (fonction de) courbure géodésique de  $\gamma_x$ .
- Déterminer une courbe  $\mathbf{n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire normal à la surface au point  $\gamma_x(t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .
- Déterminer les champs parallèles le long de la courbe en fonction d'une condition initiale à  $t = 0$ .
- En déduire l'application de transport parallèle  $A_{s,t}$  le long de la courbe entre l'espace tangent  $T_{\gamma_x(s)}S_f$  et  $T_{\gamma_x(t)}S_f$  pour  $s, t \in \mathbf{R}$ .
- Si dans la question précédente on prend  $t = s + 2\pi$ , alors  $\gamma_x(t) = \gamma_x(s + 2\pi) = \gamma_x(s)$ . L'application  $A_{s,s+2\pi}$  est donc une application définie sur  $T_{\gamma_x(s)}S_f$  vers lui-même. A-t-on  $A_{s,s+2\pi} = \text{Id}$  ?
- Déterminer la courbe trace  $\tilde{\gamma}_0$  (de la courbe  $\gamma_x$ ) sur le plan tangent  $PT_{\gamma_x(0)}S_f$ .
- Soit  $C \subset S_f$  la partie de  $S_f$  entre  $x = x_0$  et  $x = x_1$  :

$$C = \{ (x, y, z) \in S_f \mid x_0 \leq x \leq x_1 \} .$$

Calculer  $\iint_C K \, d\mathcal{A}$  l'intégrale de la courbure de Gauss sur la partie  $C$  de  $S_f$ . Indication : prendre la carte  $\psi$  donnée en [40.23] avec  $\alpha = 0$  et considérer la partie  $[x_0, x_1] \times ]0, 2\pi[$  comme domaine d'intégration.

- Calculer l'intégrale de la courbure géodésique le long du cercle  $\gamma_x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , c'est-à-dire

$$I_x = \int_0^{2\pi} \kappa_{\text{géo}}(t) \|\gamma'_x(t)\| \, dt .$$

- Comparer le résultat de la question (g) avec  $I_{x_0}$  et  $I_{x_1}$ . Voyez-vous un lien ?

**40.48 Exercice.** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$  avec  $a \geq 0$  et soit  $S_f \subset \mathbf{R}^3$  la surface de révolution autour de l'axe des ordonnées associée [40.24]. Sur  $S_f$  on considère la courbe  $\gamma_r : \mathbf{R} \rightarrow S_f$ ,  $r \in ]a, b[$  définie par

$$\gamma_r(t) = (r \cos t, f(r), r \sin t) .$$

- Calculer la (fonction de) courbure géodésique de  $\gamma_r$ .
- Déterminer une courbe  $\mathbf{n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que  $\mathbf{n}(t)$  est un vecteur unitaire normal à la surface au point  $\gamma_r(t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

- (c) Déterminer les champs parallèles le long de la courbe en fonction d'une condition initiale à  $t = 0$ .
- (d) En déduire l'application de transport parallèle  $A_{s,t}$  le long de la courbe entre l'espace tangent  $T_{\gamma_r(s)}S_f$  et  $T_{\gamma_r(t)}S_f$  pour  $s, t \in \mathbf{R}$ .
- (e) Si dans la question précédente on prend  $t = s + 2\pi$ , alors  $\gamma_r(t) = \gamma_r(s + 2\pi) = \gamma_r(s)$ . L'application  $A_{s,s+2\pi}$  est donc une application définie sur  $T_{\gamma_r(s)}S_f$  vers lui-même. A-t-on  $A_{s,s+2\pi} = \text{Id}$  ?
- (f) Déterminer la courbe trace  $\tilde{\gamma}_0$  (de la courbe  $\gamma_r$ ) sur le plan tangent  $PT_{\gamma_r(0)}S_f$ .
- (g) Soit  $A \subset S_f$  la partie de  $S_f$  entre  $r = r_0$  et  $r = r_1$  :

$$C = \{ (x, y, z) \in S_f \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \} .$$

Calculer  $\iint_A K \, d\mathcal{A}$  l'intégrale de la courbure de Gauss sur la partie  $A$  de  $S_f$ . Indication : prendre la carte  $\psi$  donnée en [40.23] avec  $\alpha = 0$  et considérer la partie  $[r_0, r_1] \times ]0, 2\pi[$  comme domaine d'intégration.

- (h) Calculer l'intégrale de la courbure géodésique le long du cercle  $\gamma_r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , c'est-à-dire

$$I_r = \int_0^{2\pi} \kappa_{\text{géo}}(t) \|\gamma_r'(t)\| \, dt .$$

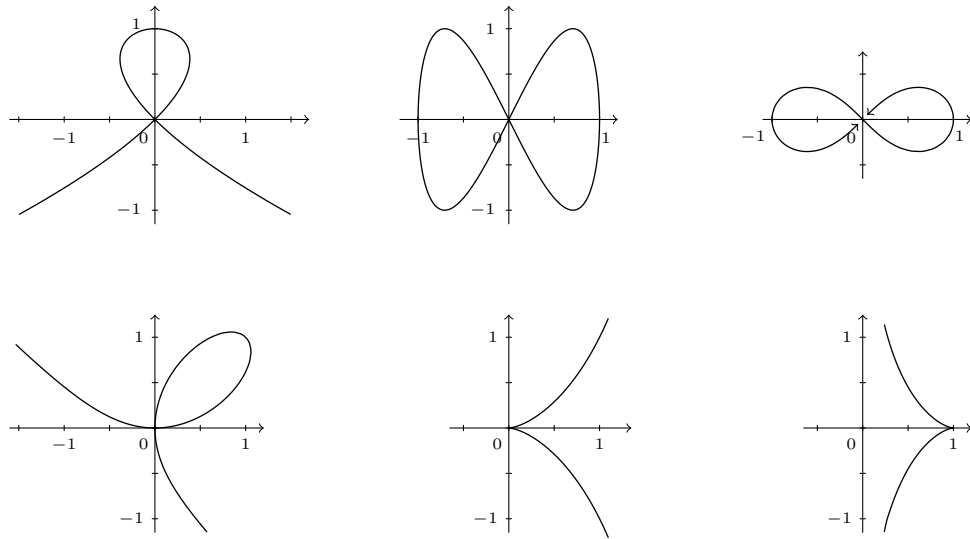
- (i) Comparer le résultat de la question (g) avec  $I_{r_0}$  et  $I_{r_1}$ . Voyez-vous un lien ?

## Chapitre 7

### Les solutions

#### Les solutions de §5

**Solution de [40.1].**



**Solution de [40.2].** La courbe  $\gamma$  donnée dans [40.1.iv] n'est pas définie pour  $t = -1$ . Et on a  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = (0, 0)$ , autrement dit, la courbe est bien définie pour  $t = \pm\infty$ . Ceci suggère de remplacer le paramètre  $t$  par  $s = (t + 1)^{-1}$ . Quand  $t$  tend vers sa valeur interdite  $-1$ ,  $s$  tend vers  $\pm\infty$ . Et quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$  (où la courbe est donc définie),  $s$  tend vers 0. En inversant les rôles on a  $t = (1 - s)/s$ . Si on substitue cela dans la définition de  $\gamma$ , on trouve

$$\hat{\gamma}(s) = \gamma((1 - s)/s) = \left( \frac{2s^2(1 - s)}{3s^2 - 3s + 1}, \frac{2s(1 - s)^2}{3s^2 - 3s + 1} \right).$$

Cette courbe n'est qu'une réponse parmi d'autres. Par exemple, si on pose  $s = (1 + u)/2$ , on trouve la courbe  $\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie comme

$$\tilde{\gamma}(u) = \hat{\gamma}((1 + u)/2) = \left( \frac{(1 + u)^2(1 - u)}{3u^2 + 1}, \frac{(1 + u)(1 - u)^2}{3u^2 + 1} \right).$$

**Solution de [40.3].** Quand l'axe s'est déplacé une distance  $t$ , alors la roue a roulé sur un morceau de rails de longueur  $t$ . Parce que la roue n'a pas glissé, un morceau de circonférence de longueur  $t$  a roulé sur les rails. Pour un cercle de rayon  $r$ , cela

veut dire que la roue a tourné d'un angle  $\alpha = t/r$ . Si au moment  $t = 0$  le centre de la roue se trouve au point  $(0, 0)$  et le point qu'on veut suivre se trouve en bas au point  $(0, -d)$ , alors au moment  $t$ , le centre de la roue se trouve au point  $(t, 0)$  et le point se trouve au point  $(-d \sin(\alpha), -d \cos(\alpha))$  **par rapport au centre de la roue**. Les coordonnées du point sont donc

$$\gamma(t) = (t - d \sin(t/r), -d \cos(t/r)) .$$

**Les solutions de §7**

**Solution de [40.7].** Par définition on a l'égalité  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ , ce qui nous donne pour la dérivée :

$$\gamma_2'(s) = \gamma_1'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) .$$

Mais  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tous les deux paramétrés par longueur d'arc, donc on a

$$1 = \|\gamma_2'(s)\| = \|\gamma_1'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| = \|\gamma_1'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| = 1 \cdot |\varphi'(s)| .$$

Il s'ensuit qu'on a  $|\varphi'(s)| = 1$  pour tout  $s \in I_2$ . Mais  $\varphi'$  est une fonction continue qui ne s'annule jamais. Elle est donc soit partout positive, soit partout négative. Il existe donc  $\epsilon = \pm 1$  tel que  $\varphi'(s) = \epsilon$  pour tout  $s \in I_2$ . L'intervalle  $I_2$  étant connexe, on en déduit qu'il existe  $s_o$  tel que  $\varphi(s) = \epsilon s + s_o$ .

**Les solutions de §10**

**Solution de [40.10].** La formule pour  $\kappa_a$  est une conséquence immédiate de [2.6.vi] et [10.7]. Pour le vecteur de courbure on utilise [2.6.ix] qui nous donne

$$\left( \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \right) \wedge \gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|^2 \cdot \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \cdot \gamma'(t) .$$

L'expression pour  $k_\gamma$  découle maintenant directement de [10.7].



## Les solutions de §11

**Solution de [40.15].** Si  $c$  est la développée de  $\gamma$ , alors selon [11.3]  $c$  est la caustique de la famille de droites  $D_t$  décrites par un point de base  $\gamma(t)$  et vecteur directeur  $v(t) = R_{\pi/2}\gamma'(t)$ . En tant que telle le point  $c(t)$  appartient à  $D_t$  et  $c'(t)$  est parallèle à  $D_t$ . Mais  $c'(t) \neq 0$  et donc  $D_t$  est la droite tangente de la courbe  $c$  au point  $c(t)$  [7.7], [7.8]. Autrement dit,  $\gamma(t)$  est un point sur la droite tangente à  $c$  au point  $c(t)$  et  $\gamma'(t)$  est orthogonal à cette droite. Ce qui veut dire que  $\gamma$  est une développante de  $c$ .

Réciproquement, si  $\gamma$  est une développante de  $c$ , alors par définition  $\gamma(t)$  appartient à la droite tangente  $D_t$  à  $c$  au point  $c(t)$  et  $\gamma'(t)$  est orthogonal à  $D_t$ . Sachant que  $\gamma$  est régulière, il s'ensuit que  $D_t$  est la droite passant par  $\gamma(t)$  qui est orthogonal à la droite tangente de  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ . Autrement dit,  $c(t)$  appartient à  $D_t$  et  $c'(t)$  est parallèle à  $D_t$ , c'est-à-dire que  $c$  est la caustique de la famille des droites  $D_t$ . Par [11.3] il s'ensuit que  $c$  est la développée de  $\gamma$ .

## Les solutions de §15

**Solution de [40.19].** • (a) : On a  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, \alpha t)$  avec  $R \neq 0$  et donc

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, \alpha) \quad \text{et} \quad \gamma''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0) .$$

Il s'ensuit que le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  [10.7] est donné par

$$k_\gamma(t) = \frac{\gamma''(t)}{R^2 + \alpha^2} .$$

Pour déterminer la courbure relative, il faut faire un choix pour un champ n.u.p. Étant donné que  $\gamma'$  et  $\gamma''$  sont indépendants ( $R \neq 0$ ) et même orthogonaux, il n'y a que deux champs n.u.p  $\mathbf{n}$  possibles [12.4.iv] :

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

ou son opposé. Avec ce choix de  $\mathbf{n}$  on trouve pour la courbure relative :

$$\kappa(t) = \langle \mathbf{n}(t), k_\gamma(t) \rangle = \frac{R}{R^2 + \alpha^2} .$$

Pour calculer la torsion, on peut utiliser soit la définition [15.5] ou [15.8]. Pour la première approche on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(t) &= (\sin t, -\cos t, 0) \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \wedge \mathbf{n}(t) = (\alpha \sin t, -\alpha \cos t, R) \\ \implies \tau(t) &= \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2} . \end{aligned}$$

Pour la deuxième approche on calcule

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= (R \sin t, -R \cos t, 0) \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (\alpha R \sin t, -\alpha R \cos t, R^2) \\ \implies \tau(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\alpha^2 R^2 + R^4} = \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2} . \end{aligned}$$

• (b) : Dans [40.5.d] on a calculé la longueur d'arc  $L : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  comme

$$L(T) = \int_0^T \|\gamma'(t)\| \, dt = \sqrt{R^2 + \alpha^2} T .$$

Selon [7.10], la courbe  $\hat{\gamma} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\hat{\gamma}(s) = \gamma(L^{-1}(s)) = \left( R \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), R \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), \frac{\alpha s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right)$$

est paramétrée par longueur d'arc et équivalente par reparamétrage à  $\gamma$ .

• (c) : On calcule :

$$\hat{\gamma}'(s) = \left( \frac{-R \sin(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, \frac{R \cos(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(L^{-1}(s)) = \left( -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), 0 \right)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(s) = \hat{\gamma}'(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s) = \left( \frac{\alpha \sin(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, \frac{-\alpha \cos(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right)$$

$$\hat{\gamma}''(s) = \left( \frac{-R \cos(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{R^2 + \alpha^2}, \frac{-R \sin(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{R^2 + \alpha^2}, 0 \right)$$

$$\hat{\mathbf{n}}'(s) = \left( \frac{\sin(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, \frac{-\cos(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}, 0 \right)$$

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) = \left( \frac{\alpha \cos(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{R^2 + \alpha^2}, \frac{\alpha \sin(s/\sqrt{R^2 + \alpha^2})}{R^2 + \alpha^2}, 0 \right).$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a les égalités

$$\hat{\gamma}''(s) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)$$

$$\hat{\mathbf{n}}'(s) = -\frac{R}{R^2 + \alpha^2} \cdot \hat{\gamma}'(s) + \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2} \cdot \hat{\mathbf{b}}(s) = -\kappa(s) \cdot \hat{\gamma}'(s) + \tau(s) \cdot \hat{\mathbf{b}}(s)$$

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(s) = \tau(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s),$$

ce qui sont les équations de Serret-Frenet.

**Solution de [40.20].** Soit  $\hat{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe hyperrégulière paramétrée par longueur d'arc et équivalente à  $\gamma$  par reparamétrage [12.3]. Alors  $\hat{\gamma}$  a la même fonction de torsion [15.6], c'est-à-dire constante. Mais le trièdre de Frenet associé à  $\hat{\gamma}$  vérifie les équations de Serret-Frenet. En particulier  $\mathbf{b}'(t) = -\tau(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{b}(t)$  est une fonction (vectorielle) constante, disons  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_o$  pour tout  $t \in J$ .

On considère maintenant la fonction  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(t) = \langle \hat{\gamma}(t), \mathbf{b}_o \rangle$$

et on calcule :

$$f'(t) = \langle \hat{\gamma}'(t), \mathbf{b}_o \rangle = \langle \hat{\gamma}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle = 0$$

parce que le triplet  $\hat{\gamma}'(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$  est un repère orthonormé. Il existe donc une constante  $d \in \mathbf{R}$  tel que  $f(t) = d$  pour tout  $t \in J$ . Autrement dit,  $\hat{\gamma}(t)$  appartient au plan  $P$  défini par l'équation  $\langle x, \mathbf{b}_o \rangle = d$  pour tout  $t \in J$ . Par construction  $\hat{\gamma}$  et  $\gamma$  ont le même image, donc  $\gamma(I)$  est aussi contenu dans ce plan.

### Les solutions de §18

**Solution de [40.23].** Si on prend un point  $(x, y, z) \in S_f$ , on s'aperçoit directement qu'on a l'égalité

$$y^2 + z^2 = f(x)^2 .$$

Ceci suggère de définir l'ouvert  $O \subset \mathbf{R}^3$  comme

$$O = ]a, b[ \times \mathbf{R}^2$$

et la fonction  $F \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$F(x, y, z) = y^2 + z^2 - f(x)^2 .$$

On vient de montrer qu'on a  $S_f \subset F^{-1}(0)$ . Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens on prend donc  $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\left(\frac{y}{f(x)}\right)^2 + \left(\frac{z}{f(x)}\right)^2 = 1$$

et donc il existe  $\varphi \in \mathbf{R}$  tel qu'on a

$$\frac{y}{f(x)} = \cos \varphi \quad \text{et} \quad \frac{z}{f(x)} = \sin \varphi ,$$

ce qui montre qu'on a bien  $(x, y, z) \in S_f$  et donc l'égalité  $S_f = F^{-1}(0)$ .

La fonction  $f$  étant de classe  $C^1$ ,  $F$  l'est aussi. Si on calcule sa dérivée/gradient on trouve

$$F'(x, y, z) = (-2f(x)f'(x), 2y, 2z) .$$

Maintenant on remarque que pour  $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$  on a  $y^2 + z^2 = f(x)^2 > 0$  (car  $f$  est strictement positive). Il n'est donc pas possible que  $y$  et  $z$  sont en même temps nuls. Et donc pour  $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$  on a  $F'(x, y, z) \neq 0$ . Ce qui montre que 0 est une valeur régulière et donc par [18.8]  $S_f = F^{-1}(0)$  est une surface régulière.

Pour l'application  $\psi$ , l'injectivité est immédiate, car  $f(x) > 0$ . On calcule donc la matrice Jacobienne :

$$\text{Jac}(\psi)(x, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) \cos \varphi & -f(x) \sin \varphi \\ f'(x) \sin \varphi & f(x) \cos \varphi \end{pmatrix} .$$

La première colonne est visiblement non-nulle et parce que  $f(x) > 0$ , la deuxième colonne ne peut pas être nulle non plus. Étant donné que le produit scalaire entre les deux colonnes est nul, il s'ensuit qu'elles sont indépendantes.

**Solution de [40.24].** Si on prend un point  $(x, y, z) \in S_f$ , on s'aperçoit directement qu'on a l'égalité

$$f(\sqrt{x^2 + z^2}) = y .$$

Ceci suggère de définir l'ouvert  $O \subset \mathbf{R}^3$  comme

$$O = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a^2 \leq x^2 + z^2 < b^2 \}$$

et la fonction  $F \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$F(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + z^2}) - y .$$

On vient de montrer qu'on a  $S_f \subset F^{-1}(0)$ . Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens on prend donc  $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$ . Si on note  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ , alors par définition de  $O$  on a  $r \in ]a, b[$  et donc il existe  $\varphi \in \mathbf{R}$  tel qu'on a

$$\frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \cos \varphi \quad \text{et} \quad \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \sin \varphi .$$

Il s'ensuit qu'on a  $(x, y, z) = (r \cos \varphi, f(r), r \sin \varphi) \in S_f$  (car  $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$ ) et donc on a l'inclusion dans l'autre sens aussi.

La fonction  $f$  étant de classe  $C^1$ ,  $F$  l'est aussi. Si on calcule sa dérivée/gradient on trouve

$$F'(x, y, z) = \left( \frac{x f'(\sqrt{x^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + z^2}}, -1, \frac{z f'(\sqrt{x^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) .$$

Il s'ensuit immédiatement que  $F'(x, y, z)$  n'est jamais nul et donc 0 est une valeur régulière pour  $F$ . Alors par [18.8]  $S_f = F^{-1}(0)$  est une surface régulière.

Pour l'injectivité de l'application  $\psi$ , il suffit de se concentrer sur la première et dernière coordonnée. Si on a

$$(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (r' \cos \varphi', r' \sin \varphi') ;$$

alors en prenant les normes au carré on trouve  $r^2 = (r')^2$  et donc  $r = r'$ . En substituant ceci dans l'égalité, on trouve les égalités

$$\cos \varphi = \cos \varphi' \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \sin \varphi'$$

ce qui implique qu'on doit avoir  $\varphi = \varphi'$  parce qu'ils sont tous les deux dans le même intervalle de longueur  $2\pi$ . Pour le rang de la matrice Jacobienne on calcule :

$$\text{Jac}(\psi)(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ f'(r) & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} .$$

Les normes au carrés des deux colonnes sont  $1 + (f'(r))^2$  et  $r^2 > a^2 \geq 0$  et donc ces deux colonnes ne sont pas nulles. Leur produit scalaire étant nul, elles sont donc indépendantes.

**Solution de [40.25].** • Commençons avec le cas (18.15). Pour l'injectivité de  $\psi$  on suppose qu'on a

$$(\sin(u), v, \sin(2u)) = \psi(u, v) = \psi(u', v') = (\sin(u'), v', \sin(2u')) .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a  $v = v'$  et pour  $u$  et  $u'$  qu'on a

$$\begin{aligned} \sin(u) = \sin(u') \text{ et } \sin(2u) = \sin(2u') & \iff \\ (u = u' \text{ ou } u = \pi - u') \text{ et } (2u = 2u' \text{ ou } 2u = \pi - 2u') & . \end{aligned}$$

Si on a  $u = \pi - u'$  (modulo  $2\pi$  bien sûr), la deuxième condition nous donne

$$2\pi - 2u' = 2u' \text{ ou } 2\pi - 2u' = \pi - 2u' \iff u' = \pi/2 \text{ ou } 2\pi = \pi .$$

Mais si  $u' = \pi/2$ , alors  $u = \pi - u' = \pi/2 = u'$ . On a donc toujours  $u = u'$  et donc  $\psi$  est injective.

Pour le rang de la matrice Jacobienne on calcule :

$$\text{Jac}(\psi)(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 \cos(2u) & 0 \end{pmatrix} ,$$

ce qui est une matrice de rang 2 pour tout choix de  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ , simplement parce que  $\cos(u)$  et  $\cos(2u)$  ne s'annulent pas simultanément.

• Dans le cas (18.17) l'approche ne change pas. Pour l'injectivité on suppose qu'on a

$$\begin{aligned} & \left( (3 + v \sin(\alpha u)) \cos u, (3 + v \sin(\alpha u)) \sin u, v \cos(\alpha u) \right) \\ &= \left( (3 + v' \sin(\alpha u')) \cos u', (3 + v' \sin(\alpha u')) \sin u', v' \cos(\alpha u') \right). \end{aligned}$$

Si on prend la somme des carrés des deux premières composantes, on trouve l'égalité

$$(3 + v \sin(\alpha u))^2 = (3 + v' \sin(\alpha u'))^2$$

ce qui se réduit, tenant compte du fait que  $v < \frac{5}{4}$  et donc  $3 + v \sin(\alpha u) \geq 3 - \frac{5}{4} > 0$ , à l'égalité

$$v \sin(\alpha u) = v' \sin(\alpha u').$$

En prenant la somme des carrés de cette égalité et celle de la troisième composante, on trouve l'égalité  $v^2 = (v')^2$  et donc (parce que  $v > 1$ )  $v = v'$ . Une fois qu'on sait cela, on constate (toujours parce que  $v > 1 > 0$ , ce qui permet d'éliminer les  $v = v'$ ) qu'on a donc les égalités

$$\sin(\alpha u) = \sin(\alpha u') \quad \text{et} \quad \cos(\alpha u) = \cos(\alpha u').$$

On en déduit qu'on doit avoir  $\alpha u = \alpha u'$  modulo  $2\pi$ , c'est-à-dire qu'il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que  $u - u' = 2k\pi/\alpha$ . Mais quand on substitue les égalités trouvées dans les deux premières composantes (et qu'on utilise que  $3 + v \sin(\alpha u) > 3 - \frac{5}{4} > 0$ ), on trouve les égalités

$$\sin(u) = \sin(u') \quad \text{et} \quad \cos(u) = \cos(u'),$$

ce qui implique qu'il existe  $\ell \in \mathbf{Z}$  tel que  $u - u' = 2\ell\pi$ . On a donc  $2\ell\pi = 2k\pi/\alpha$ , ce qui est équivalent à  $\ell\alpha = k$ . Si on a  $\ell \neq 0$ , alors on a  $\alpha = k/\ell \in \mathbf{Q}$ , ce qui contredit l'irrationalité de  $\alpha$ . On doit donc avoir  $\ell = 0$  (et donc  $k = 0$ ), ce qui dit qu'on a  $u - u' = 0$ . Ainsi s'achève la preuve que  $\psi$  est injective.

Pour la matrice Jacobienne, on calcule :

$$\text{Jac}(\psi)(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha v \cos(\alpha u) \cos(u) - (3 + v \sin(\alpha u)) \sin(u) & \sin(\alpha u) \cos(u) \\ \alpha v \cos(\alpha u) \sin(u) + (3 + v \sin(\alpha u)) \cos(u) & \sin(\alpha u) \sin(u) \\ -\alpha v \sin(\alpha u) & \cos(\alpha u) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que le rang est 2, on procède comme dans le cas précédent en calculant le produit vectoriel des deux colonnes :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha v \cos(\alpha u) \cos(u) - (3 + v \sin(\alpha u)) \sin(u) \\ \alpha v \cos(\alpha u) \sin(u) + (3 + v \sin(\alpha u)) \cos(u) \\ -\alpha v \sin(\alpha u) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin(\alpha u) \cos(u) \\ \sin(\alpha u) \sin(u) \\ \cos(\alpha u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 + v \sin(\alpha u)) \cos(u) \cos(\alpha u) + \alpha v \sin(u) \\ (3 + v \sin(\alpha u)) \sin(u) \cos(\alpha u) - \alpha v \cos(u) \\ -(3 + v \sin(\alpha u)) \sin(\alpha u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que ce vecteur soit nul, il faut déjà que la troisième composante soit nulle, c'est-à-dire  $\sin(\alpha u) = 0$ . Mais dans ce cas on a  $\cos(\alpha u) = \pm 1$  et la somme des carrés des deux premières composantes donne :

$$(\pm 3 \cos(u) + \alpha v \sin(u))^2 + (\pm 3 \sin(u) - \alpha v \cos(u))^2 = 9 + \alpha^2 v^2 \neq 0.$$

La conclusion est donc que si la troisième composante est nulle, il n'est pas possible que les deux premières soient toutes les deux nulles. Et donc ce vecteur n'est jamais nul, ce qui montre que la matrice Jacobienne a rang 2 partout.

**Solution de [40.26].** Pour l'injectivité on suppose qu'on a

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u}{(u^2+v^2)^2+1}, \frac{v}{(u^2+v^2)^2+1}, \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2+1} \right) \\ &= \left( \frac{u'}{((u')^2+(v')^2)^2+1}, \frac{v'}{((u')^2+(v')^2)^2+1}, \frac{(u')^2+(v')^2}{((u')^2+(v')^2)^2+1} \right). \end{aligned}$$

Si  $u^2+v^2=0$ , alors on a forcément  $(u')^2+(v')^2=0$  et donc  $u=u'=0=v=v'$ . Dans la suite on peut donc supposer qu'on a  $u^2+v^2>0$ . En prenant la somme des carrés des deux premières composantes, on obtient l'égalité

$$\frac{u^2+v^2}{((u^2+v^2)^2+1)^2} = \frac{(u')^2+(v')^2}{((u')^2+(v')^2)^2+1}.$$

Avec l'égalité de la troisième composante (et le fait qu'on a  $u^2+v^2>0$ ) on le simplifie en

$$\frac{1}{(u^2+v^2)^2+1} = \frac{1}{((u')^2+(v')^2)^2+1}.$$

Substituant ceci dans les égalités des deux premières composantes on simplifie directement en  $u'=u$  et  $v'=v$ , ce qui montre que  $\psi$  est injective.

Pour le rang de la matrice Jacobienne on calcule :

$$\text{Jac}(\psi)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{(v^2-3u^2)(u^2+v^2)+1}{((u^2+v^2)^2+1)^2} & \frac{-4uv(u^2+v^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{-4uv(u^2+v^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} & \frac{(u^2-3v^2)(u^2+v^2)+1}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{2u(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} & \frac{2v(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que cette matrice a rang 2, on montre que ses deux colonnes sont indépendants, ce qui est équivalent à la condition que le produit vectoriel de ces deux colonnes est non-nul [2.6.iv]. On calcule donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{(v^2-3u^2)(u^2+v^2)+1}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{-4uv(u^2+v^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{2u(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{-4uv(u^2+v^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{(u^2-3v^2)(u^2+v^2)+1}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \\ \frac{2v(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2u(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^3} \\ \frac{-2v(1-(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^3} \\ \frac{(1-3(u^2+v^2)^2)}{((u^2+v^2)^2+1)^3} \end{pmatrix}.$$

Si on a  $u^2+v^2=1$ , on a le vecteur  $(0,0,-1)$  et si on a  $u^2+v^2 \neq 1$ , alors la seule façon d'avoir les deux premières composantes nulles est quand on a  $u=v=0$ , auquel cas la troisième composante est 1. Dans tous les cas ce vecteur n'est pas le vecteur nul, et donc la matrice Jacobienne est de rang 2 partout comme annoncé.

Pour avoir une idée de l'allure de  $S$ , il est utile de passer en coordonnées polaire dans  $\mathbf{R}^2$  et d'écrire  $(u, v) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ , ce qui donne pour  $\psi$  l'expression

$$\psi(r \cos \phi, r \sin \phi) = \left( \frac{r \cos \phi}{r^4+1}, \frac{r \sin \phi}{r^4+1}, \frac{r^2}{r^4+1} \right).$$

On voit qu'il y a une symétrie rotationnelle autour de l'axe des  $z$ . Il "suffit" donc de tracer la courbe  $\gamma(r) = \left( \frac{r}{r^4+1}, \frac{r^2}{r^4+1} \right)$  pour avoir une idée de l'allure de  $S$ . Tout compte fait, on trouve le dessin suivant

### DESSIN

Pour montrer que  $S$  n'est pas une surface régulière, on voit bien que c'est l'origine  $p = (0, 0, 0) = \psi(0, 0)$  qui pose problèmes. Comme pour l'exemple [18.16], il y a deux façon de procéder. La première est de montrer directement que  $S$  n'est pas localement le graphe d'une fonction au voisinage de l'origine  $p = (0, 0, 0) = \psi(0, 0)$ . Il est assez facile de montrer que dans aucun voisinage de  $(0, 0, 0)$  on peut exprimer  $x$  en fonction de  $(y, z)$  ni  $y$  en fonction de  $(x, z)$ . Par contre, montrer rigoureusement que  $z$  ne peut pas être exprimé en fonction de  $(x, y)$  est un petit peu plus pénible, malgré le fait que c'est visuellement évident.

La deuxième façon est d'utiliser [18.10], qui nous dit que **si**  $S$  est une surface régulière, alors pour toute carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  autour de l'origine on peut trouver un ouvert  $p \in V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = S \cap V$ . Prenons maintenant l'ouvert  $U = \{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1 \}$  et regardons la restriction de la carte  $\psi : U \rightarrow S$ , ce qui est aussi une carte locale de  $S$ . Il devrait donc exister un ouvert  $V \subset \mathbf{R}^3$  tel que  $\psi(U) = S \cap V$  et en particulier  $p \in V$ , ce qui implique qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\varepsilon(p) \subset V$ . Maintenant on constate qu'on a  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u, 0) = (0, 0, 0)$ . Par définition de cette limite, pour le  $\varepsilon > 0$  donné ci-dessus, il existe donc  $M > 0$  tel que

$$\forall u > M : \|\psi(u, 0) - (0, 0, 0)\| < \varepsilon .$$

Si on pose  $u_o = 2 \max(M, 1)$ , alors on aura  $(u_o, 0) \in \mathbf{R}^2 \setminus U$  et  $\psi(u_o, 0) \in B_\varepsilon(p) \subset V$ . Comme dans l'exemple [18.16], ceci contredit  $\psi(U) = S \cap V$  et on en déduit que  $S$  n'est pas une surface régulière.



## Les solutions de §23

**Solution de [40.29].** • [40.22.a] la sphère : on a les dérivées

$$(\partial_1 \psi)(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$(\partial_2 \psi)(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) ,$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(\theta, \varphi) = 1 \quad , \quad F(\theta, \varphi) = 0 \quad , \quad G(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta .$$

- [40.22.b] le cylindre : on a les dérivées

$$(\partial_1 \psi)(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \text{et} \quad (\partial_2 \psi)(\varphi, z) = (0, 0, 1) ,$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(\varphi, z) = 1 \quad , \quad F(\varphi, z) = 0 \quad , \quad G(\varphi, z) = 1 .$$

- [40.22.c] l'hyperboloïde à deux nappes : on a les dérivées

$$(\partial_1 \psi)(\varphi, r) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) \quad \text{et}$$

$$(\partial_2 \psi)(\varphi, r) = \left( \cos \varphi, \sin \varphi, \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \right) ,$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(\varphi, r) = r^2 \quad , \quad F(\varphi, r) = 0 \quad , \quad G(\varphi, r) = 1 + \frac{r^2}{r^2 + 1} = \frac{2r^2 + 1}{r^2 + 1} .$$

- [40.22.d] l'hyperboloïde à une nappe : on a les dérivées

$$(\partial_1 \psi)(\varphi, z) = (-\sqrt{z^2 + 1} \sin \varphi, \sqrt{z^2 + 1} \cos \varphi, 0) \quad \text{et}$$

$$(\partial_2 \psi)(\varphi, z) = \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \cos \varphi, \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \sin \varphi, 1 \right) ,$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(\varphi, z) = z^2 + 1 \quad , \quad F(\varphi, z) = 0 \quad , \quad G(\varphi, z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} + 1 = \frac{2z^2 + 1}{z^2 + 1} .$$

- [40.22.e] le tore : on a les dérivées

$$(\partial_1 \psi)(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$(\partial_2 \psi)(\theta, \varphi) = (-(3 + \sin \theta) \sin \varphi, (3 + \sin \theta) \cos \varphi, 0) ,$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(\theta, \varphi) = 1 \quad , \quad F(\theta, \varphi) = 0 \quad , \quad G(\theta, \varphi) = (3 + \sin \theta)^2 .$$

- [40.27.N/S] la projection stéréographique : la carte est donnée par la formule

$$\psi_\epsilon(p, q) = \left( \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} , \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} , \epsilon \cdot \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right) ,$$

avec  $\epsilon = 1$  pour la projection du pôle nord et  $\epsilon = -1$  pour la projection du pôle sud. On obtient donc pour les dérivées

$$(\partial_1 \psi_\epsilon)(p, q) = \left( \frac{2(q^2 - p^2 + 1)}{(p^2 + q^2 + 1)^2} , \frac{-4pq}{(p^2 + q^2 + 1)^2} , \epsilon \cdot \frac{4p}{(p^2 + q^2 + 1)^2} \right)$$

$$(\partial_2 \psi_\epsilon)(p, q) = \left( \frac{-4pq}{(p^2 + q^2 + 1)^2}, \frac{2(p^2 - q^2 + 1)}{(p^2 + q^2 + 1)^2}, \epsilon \cdot \frac{4q}{(p^2 + q^2 + 1)^2} \right),$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  (dans les deux cas) comme

$$E(p, q) = \frac{4}{(p^2 + q^2 + 1)^2}, \quad F(p, q) = 0, \quad G(p, q) = \frac{4}{(p^2 + q^2 + 1)^2}.$$

- [40.23] les vases : on a les dérivées

$$\begin{aligned} (\partial_1 \psi)(x, \varphi) &= (1, f'(x) \cos \varphi, f'(x) \sin \varphi) \\ (\partial_2 \psi)(x, \varphi) &= (0, -f(x) \sin \varphi, f(x) \cos \varphi), \end{aligned}$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(x, \varphi) = 1 + (f'(x))^2, \quad F(x, \varphi) = 0, \quad G(x, \varphi) = (f(x))^2.$$

- [40.24] les assiettes : on a les dérivées

$$\begin{aligned} (\partial_1 \psi)(r, \varphi) &= (\cos \varphi, f'(r), \sin \varphi) \\ (\partial_2 \psi)(r, \varphi) &= (-r \sin \varphi, 0, r \cos \varphi), \end{aligned}$$

ce qui donne les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  comme

$$E(r, \varphi) = 1 + (f'(r))^2, \quad F(r, \varphi) = 0, \quad G(r, \varphi) = r^2.$$

**Solution de [40.30].** • (a) Soit  $p = (x, y, z) \in \mathcal{N}$  un point arbitraire et  $v = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  un vecteur (directeur) non-nul. Pour que la droite  $D$  décrite par le point de base  $p$  et vecteur directeur  $v$  soit contenue dans  $\mathcal{N}$ , il faut que  $p + \lambda v \in \mathcal{N}$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ . On calcule donc

$$\begin{pmatrix} x + \lambda a \\ y + \lambda b \\ z + \lambda c \end{pmatrix} \in \mathcal{N} \iff (x + \lambda a)^2 + (y + \lambda b)^2 - (z + \lambda c)^2 = 1$$

et donc on doit avoir pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  :

$$(x^2 + y^2 - z^2) + 2\lambda(ax + by - cz) + \lambda^2(a^2 + b^2 - c^2) = 1.$$

Mais  $(x, y, z) \in \mathcal{N}$ , donc pour que c'est vrai pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , les coefficients de  $\lambda$  et de  $\lambda^2$  doivent être nuls :

$$ax + by - cz = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Si  $c = 0$ , la deuxième équation implique qu'on doit avoir  $a = b = 0$ , ce qui est exclu parce que  $v \neq 0$ . On peut donc supposer que  $c \neq 0$ . Et parce que changer la longueur d'un vecteur directeur ne change pas la droite, on peut supposer que  $c = 1$ . On se retrouve donc avec les deux équations

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad ax + by = z.$$

Selon la définition de  $\mathcal{N}$ , il n'est pas possible que  $x = y = 0$  (car  $x^2 + y^2 = z^2 + 1 \geq 1$ ), donc au moins un des deux est non-nuls. Si on a  $x \neq 0$ , on obtient  $a = (z - by)/x$  et donc

$$\frac{z^2}{x^2} - 2 \frac{yz}{x^2} b + \frac{x^2 + y^2}{x^2} b^2 = 1 \iff b = \frac{yz \pm \sqrt{y^2 z^2 - (x^2 + y^2)(z^2 - x^2)}}{x^2 + y^2} = \frac{yz \pm x}{z^2 + 1}.$$

On a donc exactement deux solutions pour  $b$  qui ne sont pas identiques, car on a supposé  $x \neq 0$ . Avec les solutions correspondantes pour  $a$  on trouve donc les deux vecteurs directeurs (en multipliant par  $z^2 + 1$ )

$$\begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ z^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xz + y \\ yz - x \\ z^2 + 1 \end{pmatrix} .$$

Écrit de cette manière, la condition  $x \neq 0$  n'a plus d'importance et ces deux vecteurs sont bien distincts, car on n'a pas en même temps  $x = y = 0$ .

• (b) On prend les points sur le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ , qu'on décrit par un angle  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , on choisit le "premier" vecteur directeur et on considère la réunion des droites passant par  $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  avec vecteur directeur  $(-\sin \varphi, \cos \varphi, 1)$ , ce qui donne

$$\bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[, \lambda \in \mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda \sin \varphi \\ \sin \varphi + \lambda \cos \varphi \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \equiv \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[} \left[ \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

Pour montrer que c'est une réunion disjointe, on suppose qu'on a

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi' - \lambda' \sin \varphi' \\ \sin \varphi' + \lambda' \cos \varphi' \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda \sin \varphi \\ \sin \varphi + \lambda \cos \varphi \\ \lambda \end{pmatrix} .$$

De la troisième composante on déduit immédiatement qu'on a  $\lambda' = \lambda$ . Ensuite on réécrit l'égalité des deux premières composantes comme

$$\cos \varphi' - \cos \varphi = \lambda(\sin \varphi' - \sin \varphi) \quad \text{et} \quad \sin \varphi' - \sin \varphi = -\lambda(\cos \varphi' - \cos \varphi) .$$

Il s'ensuit qu'on a les deux égalités

$$(1 + \lambda^2)(\cos \varphi' - \cos \varphi) = 0 = (1 + \lambda^2)(\sin \varphi' - \sin \varphi)$$

et donc on doit avoir  $\cos \varphi' = \cos \varphi$  et  $\sin \varphi' = \sin \varphi$ , ce qui implique  $\varphi' = \varphi$  (car  $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi[$ ).

Pour montrer que la réunion fait tout  $\mathcal{N}$ , on prend  $(x, y, z) \in \mathcal{N}$  et on cherche  $\lambda, \varphi$  tels qu'on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda \sin \varphi \\ \sin \varphi + \lambda \cos \varphi \\ \lambda \end{pmatrix} .$$

On obtient immédiatement  $\lambda = z$  et les deux équations

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - z \sin \varphi \\ \sin \varphi + z \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} ,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+yz}{z^2+1} \\ \frac{y-xz}{z^2+1} \end{pmatrix} .$$

Parce que  $(x, y, z) \in \mathcal{N}$ , le couple  $(\frac{x+yz}{z^2+1}, \frac{y-xz}{z^2+1})$  appartient bien au cercle unité, et donc il existe une solution pour  $\varphi$  (unique dans  $[0, 2\pi[$ ). On a donc bien

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[} \left[ \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

comme réunion disjointe. Si on choisit le “deuxième” vecteur directeur, on obtient de la même façon la réunion disjointe

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[} \left[ \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right] \equiv \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi[, \lambda \in \mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi + \lambda \sin \varphi \\ \sin \varphi - \lambda \cos \varphi \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} .$$

• (c) Dans la carte  $\psi$  on reconnaît la première réunion disjointe de  $\mathcal{N}$ . L’injectivité et le fait que l’image est dans  $\mathcal{N}$  en découlent immédiatement. Reste donc de montrer que la matrice Jacobienne a rang 2.

$$\text{Jac}(\psi)(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi - z \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \varphi - z \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Les normes au carrés des deux colonnes sont  $1 + z^2$  et 2, donc elles ne sont pas nulles. Et donc, à cause de la troisième ligne, elles ne peuvent pas être dépendantes.

• (d) Les colonnes de la matrice  $\text{Jac}(\psi)$  sont exactement les dérivées partielles  $\partial_1 \psi$  et  $\partial_2 \psi$ . Il suffit de prendre les produits scalaires correspondants pour trouver

$$E(\varphi, z) = z^2 + 1 \quad , \quad F(\varphi, z) = 1 \quad , \quad G(\varphi, z) = 2 .$$

**Nota Bene : une identification habituelle.** Pour une surface régulière  $S \subset \mathbf{R}^3$  ou un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  on a défini les espaces tangent  $T_p S$  et  $T_x U$  comme des espaces vectoriels. Avec la définition des fibrés tangent  $TS$  et  $TU$  et les projections canoniques  $\pi_S : TS \rightarrow S$  et  $\pi_U : TU \rightarrow U$  on peut donc écrire

$$\pi_S^{-1}(p) = \{p\} \times T_p S \quad \text{et} \quad \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times T_x U .$$

En vu de ces égalités, il est d’usage d’**identifier** ces espaces vectoriels avec ces pré-images. On dit donc que  $\pi_S^{-1}(p)$  **est** l’espace tangent à  $S$  au point  $p$  et que  $\pi_U^{-1}(x)$  **est** l’espace tangent à  $U$  au point  $x$ .

Cette identification est “renforcée” par une notation d’un élément  $(p, v)$  de  $TS$  (ou un élément  $(x, v) \in TU$ ) comme

$$v_p \quad \text{ou} \quad v|_p \quad \text{ou (s’il n’y a pas confusion possible) simplement} \quad v .$$

Autrement dit, au lieu d’écrire le vecteur  $v$  et son point d’attache  $p$  comme un couple  $(p, v)$ , on écrit le point d’attache  $p$  en indice “attaché” au vecteur  $v$ . Et avec cette écriture, la structure d’espace vectoriel de  $T_p S$  (ou  $T_x U$ ) s’écrit simplement comme

$$v|_p + \lambda w|_p = (v + \lambda w)|_p .$$

Cette écriture nous met en garde qu’en général on ne peut pas additionner des vecteurs dans des espaces tangents différents : la formule  $v|_p + w|_q$  n’aura pas de sens (sauf avec des explications supplémentaires) : la somme d’un élément  $v \in T_p S$  avec un élément  $w \in T_q S$  est bien un vecteur dans  $\mathbf{R}^3$ , mais ne sera en général ni dans  $T_p S$ , ni dans  $T_q S$ .

La situation semble être différente pour les espaces tangents  $T_x U = \mathbf{R}^n$  (qui sont bien tous le même  $\mathbf{R}^n$ ), mais on continuera à distinguer ces différents espaces tangents pour des  $x$  différents, comme on le fait pour les espaces tangents à une surface régulière. Quoi que ... on dérogera à cette règle de temps en temps pour donner des justifications heuristiques, surtout dans la discussion sur le transport parallèle (mais voir aussi ci-dessous).

## Les solutions de §27

**Solution de [40.33].** Si  $\mathbf{n}$  est de classe  $C^{k-1}$  elle sera certainement continue. Supposons donc qu'elle soit continue. Prenons un point  $p_o \in S$  et une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  avec  $p_o \in \psi(U)$ . En ne regardant que la composante connexe de  $U$  qui contient  $\psi^{-1}(p_o)$ , on peut supposer que  $U$  est connexe. Alors selon [27.2] l'application  $\hat{\mathbf{n}} : \psi(U) \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$p = \psi(u, v) \quad \implies \quad \hat{\mathbf{n}}(p)|_p = \frac{(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)}{\|(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)\|}$$

est un champ de vecteurs unitaires normaux à la surface de classe  $C^{k-1}$ . Parce que deux vecteurs normaux à la surface au point  $p$  sont colinéaires, il existe  $\lambda : \psi(U) \rightarrow \mathbf{R}$  tel que

$$\forall p \in \psi(U) : \hat{\mathbf{n}}(p)|_p = \lambda(p) \cdot \mathbf{n}(p)|_p .$$

Mais  $\mathbf{n}$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  ne s'annulent jamais, donc par [12.6]  $\lambda$  est continue et ne s'annule pas (sur  $\psi(U)$ ). Le fait que  $\mathbf{n}$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  sont unitaires implique que  $|\lambda(p)| = 1$  et donc par continuité et le fait que  $U$  est connexe,  $\lambda$  est constante 1 ou constante  $-1$ . Dans les deux cas l'application  $\mathbf{n} \circ \psi$  est donnée par

$$(\mathbf{n} \circ \psi)(u, v) = \lambda \cdot \frac{(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)}{\|(\partial_1 \psi)(u, v) \wedge (\partial_2 \psi)(u, v)\|} ,$$

ce qui est une application de classe  $C^{k-1}$  (parce que  $\lambda$  est constant). Pour tout point  $p_o \in S$  on a donc trouvé une carte locale  $\psi : U \rightarrow S$  contenant  $p_o$  telle que  $\mathbf{n} \circ \psi$  est de classe  $C^{k-1}$ . Par [20.6]  $\mathbf{n}$  est donc de classe  $C^{k-1}$  sur  $S$ .

## Les solutions de §30

**Solution de [40.44].** • (a) : Les deux points  $B$  et  $C$  se trouvent dans le plan  $y = 0$ . La géodésique est donc l'intersection de ce plan avec  $\mathbf{S}^2$ , c'est-à-dire les points  $(x, 0, z)$  avec  $x^2 + z^2 = 1$ . La géodésique est “donc” donnée par

$$\gamma_{BC}(t) = (\sin t, 0, \cos t) .$$

Les points  $A$  et  $C$  se trouvant dans le plan  $z = 0$ , un argument similaire donne la formule

$$\gamma_{AC}(t) = (\cos t, \sin t, 0) .$$

Pour la géodésique passant par  $A$  et  $B$  il y a plusieurs façons de le faire. On en présente trois, qui ont tous les trois leur intérêt. La première façon est celle qui vient tout de suite à l'esprit. Elle est un peu laborieuse et a l'inconvénient qu'elle n'est pas applicable dans tous les cas. La deuxième, un peu plus laborieuse encore, comble le défaut de la première approche ; on en aura besoin pour une autre question. La troisième est plus astucieuse et plus courte.

— *Une première façon de paramétrer  $\gamma_{AB}$ .* On commence avec l'observation que le sous-espace vectoriel de dimension 2 contenant les points  $A$  et  $B$  est (forcément) orthogonal à ces deux vecteurs, donc ce plan est décrit par le vecteur normal  $\mathbf{n}$  donné par

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin \theta_B \\ 0 \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_A \cos \theta_B \\ -\cos \varphi_A \cos \theta_B \\ -\sin \varphi_A \sin \theta_B \end{pmatrix} .$$

La géodésique passant par  $A$  et  $B$  est donc décrite par les deux équations

$$(41.1) \quad \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \\ & x \sin \varphi_A \cos \theta_B - y \cos \varphi_A \cos \theta_B - z \sin \varphi_A \sin \theta_B = 0 . \end{aligned}$$

De la deuxième équation on peut résoudre soit  $x$  en fonction de  $y$  et  $z$ , soit  $z$  en fonction de  $y$  et  $z$  (mais pas  $y$  en fonction de  $x$  et  $z$ , car le coefficient  $\cos \varphi_A$  peut être nul). Les deux possibilités sont équivalentes, mais en vu de l'utilisation ultérieure on choisit de résoudre  $z$  en fonction de  $x$  et  $y$  et de le substituer dans la première équation. Cela nous donne

$$z = x \cdot \frac{\cos \theta_B}{\sin \theta_B} - y \cdot \frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sin \varphi_A \sin \theta_B}$$

et

$$\begin{aligned} 0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= \frac{x^2}{\sin^2 \theta_B} - 2xy \cdot \left( \frac{\cos \varphi_A \cos^2 \theta_B}{\sin \varphi_A \sin^2 \theta_B} \right) \\ &\quad + y^2 \cdot \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B}{\sin^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} \right) - 1 . \end{aligned}$$

Si on résout  $x$  en fonction de  $y$  à partir de cette équation de degré 2, on trouve

$$\begin{aligned} x &= y \cdot \cot \varphi_A \cos^2 \theta_B \\ &\quad \pm \sqrt{y^2 \cdot \cot^2 \varphi_A \cos^4 \theta_B + \sin^2 \theta_B - y^2 \cdot (\sin^2 \theta_B + \cot^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B)} \\ &= y \cdot \cot \varphi_A \cos^2 \theta_B \pm \sin \theta_B \cdot \sqrt{1 - y^2 \cdot (1 + \cot^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B)} \end{aligned}$$

Pour  $y = 0$  et  $y = \sin \varphi_A$  on trouve

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm \sin \theta_B$$

et

$$\begin{aligned} y = \sin \varphi_A \quad \Longrightarrow \quad x &= \cos \varphi_A \cos^2 \theta_B \pm \sin \theta_B \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} \\ &= \cos \varphi_A \cos^2 \theta_B \pm |\cos \varphi_A| \sin^2 \theta_B . \end{aligned}$$

Si on veut récupérer le point  $B$  pour  $y = 0$  et le point  $A$  pour  $y = \sin \varphi_A$ , il faut donc choisir le signe  $+$  pour  $B$  et le même signe que le signe de  $\cos \varphi_A$  pour  $A$ . Dans le cas  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$  il n'y a donc pas un choix cohérent pour le faire.

On pourrait croire qu'un autre choix pour résoudre ces deux équations nous amène à une formule valable pour toute valeur de  $\varphi_A \in ]0, \pi[$ . Malheureusement, ce n'est pas le cas. Ni l'approche alternative de décrire le plan par les deux vecteurs directeurs  $A$  et  $B$ . Si on prend un point de la forme  $\lambda A + \mu B$  et qu'on substitue cela dans l'équation de la sphère, alors on obtient une équation de degré 2 en  $\lambda$  et  $\mu$ . La solution de l'un en fonction de l'autre présente un choix de signe de la racine carré du discriminant qui n'est pas le même dans le cas  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$  si on veut passer par  $A$  et par  $B$ .

Avant de présenter une approche qui évite ce problème, soyons têtu et supposons qu'on a  $\cos \varphi_A > 0$ . Dans ce cas on obtient une paramétrisation de la courbe  $\gamma_{AB}$  comme la courbe définie sur l'intervalle  $[0, \sin \varphi_A]$  par

$$\gamma_{AB,1}(y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cot \varphi_A \cos^2 \theta_B + \sin \theta_B \cdot \sqrt{1 - y^2 \cdot (1 + \cot^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B)} \\ y \\ \cos \theta_B \cdot \left( \sqrt{1 - y^2 \cdot (1 + \cot^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B)} - y \cdot \cot \varphi_A \sin \theta_B \right) \end{pmatrix} .$$

— *Une deuxième façon de paramétrer  $\gamma_{AB}$ .* Revenons sur le cas général, où, pour éviter le problème du signe de la racine du discriminant, il vaut mieux utiliser les coordonnées sphérique de la carte donnée en [40.22.a] (avec le choix  $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$ ). On écrit donc  $(x, y, z) = \psi(\theta, \varphi)$  avec  $0 < \theta < \pi$  et  $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ . L'équation décrivant la sphère étant automatiquement vérifiée, il suffit de substituer ce point dans l'équation du plan (41.1), ce qui donne l'équation

$$\sin \theta \cos \varphi \sin \varphi_A \cos \theta_B - \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi_A \cos \theta_B - \cos \theta \sin \varphi_A \sin \theta_B = 0 ,$$

ce qui est équivalent à l'équation

$$\tan \theta \sin(\varphi_A - \varphi) = \sin \varphi_A \tan \theta_B .$$

On sait que cette courbe est censée de passer par  $A = \psi(\frac{1}{2}\pi, \varphi_A)$  et  $B = \psi(\theta_B, 0)$ , c'est-à-dire que les points  $\theta = \frac{1}{2}\pi, \varphi = 0$  et  $\theta = \theta_B, \varphi = 0$  devraient être solution de cette équation. Il est presque immédiat que la solution

$$(41.2) \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sin(\varphi_A - \varphi)}\right)$$

a ces propriétés : pour  $\varphi \uparrow \varphi_A$  on a bien  $\theta \uparrow \frac{1}{2}\pi$  et pour  $\varphi = 0$  on a bien  $\theta = \theta_B$ . Ce qu'on déduit immédiatement de cette formule est que cette fonction  $\varphi \mapsto \theta$  n'est pas inversible pour  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$  : elle est croissante pour  $0 \leq \varphi \leq \varphi_A - \frac{1}{2}\pi$  et décroissante pour  $\varphi_A - \frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \varphi_A$ . Il s'ensuit qu'on ne peut pas résoudre  $\varphi$  en fonction de  $\theta$  dans ce cas. Dans le cas  $\varphi_A \leq \frac{1}{2}\pi$  on obtient directement la solution

$$\varphi = \varphi_A - \arcsin(\cot \theta \sin \varphi_A \tan \theta_B) .$$

Reprenons maintenant (41.2) qui exprime  $\theta$  en fonction de  $\varphi$ . Étant donné que l'arctangente prend ses valeurs dans  $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$  et que pour  $\varphi \in [0, \varphi_A[$  son argument est toujours positive, on en déduit qu'on a les égalités

$$(41.3) \quad \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} . \end{aligned}$$

Avec ces expressions on trouve la paramétrisation de  $\gamma_{AB}$  comme la courbe définie sur l'intervalle  $[0, \varphi_A]$  par

$$\gamma_{AB,2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \\ \frac{\sin \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \\ \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \end{pmatrix} .$$

— *Une troisième façon de paramétrer  $\gamma_{AB}$ .* Une toute autre idée de paramétrisation vient du fait que l'intersection du plan passant par  $A$  et  $B$  avec la sphère  $\mathbf{S}^2$  est un cercle de rayon 1 et de centre l'origine. On peut donc le décrire par deux vecteurs orthonormés  $e_1$  et  $e_2$  comme  $\gamma_{AB}(t) = \cos t e_1 + \sin t e_2$  (voir [10.1] et la discussion qui y suit). Pour trouver ces deux vecteurs, on prend simplement  $e_1 = A$  et  $e_2$  la partie de  $B$  orthogonale à  $A$  et normé :

$$e_2 = \frac{B - \langle A, B \rangle \cdot A}{\|B - \langle A, B \rangle \cdot A\|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} .$$

Ainsi on obtient la paramétrisation de  $\gamma_{AB}$  comme la courbe définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$\gamma_{AB,3}(t) = \cos t \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} .$$

L'avantage de ce troisième paramétrage  $\gamma_{AB,3}$  est qu'elle est automatiquement paramétrée par longueur d'arc, comme c'est le cas pour les paramétrages donnés pour  $\gamma_{AC}$  et  $\gamma_{BC}$ .

Pour  $t = 0$  on a le point  $A$ , mais pour trouver la valeur  $t_B$  de  $t$  pour laquelle on obtient le point  $B$  il faut travailler un petit peu. Le plus rapide est de remarquer que  $t$  représente l'angle avec le vecteur  $A$  dans le cercle passant par  $A$  et  $B$  de centre l'origine. Étant donné que  $A$  et  $B$  sont des vecteurs unitaires, cet angle  $t_B$  est donc déterminé par le produit scalaire :

$$\cos t_B = \langle A, B \rangle = \sin \varphi_A \sin \theta_B ,$$

et donc on obtient le point  $B$  pour la valeur  $t_B = \arccos(\sin \varphi_A \sin \theta_B)$ .



On peut obtenir cette valeur aussi par un calcul directe en posant  $B = \gamma(t_B)$ , ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_B \\ 0 \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} = \cos t_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin t_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} .$$

La troisième composante nous donne (car  $\cos \theta_B \neq 0$ ) l'égalité

$$\sin t_B = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}$$

et ensuite la deuxième composante nous donne

$$\cos t_B = \cos \varphi_A \sin \theta_B .$$

Les solutions de cette équation sont  $t_B = \pm \arccos(\cos \varphi_A \sin \theta_B)$ , mais son sinus est donné par une racine carré qui est positive, ce qui ne nous laisse que la solution  $t_B = \arccos(\cos \varphi_A \sin \theta_B)$ . À noter qu'on ne peut pas résoudre  $t_B$  de la troisième composante directement, car ses solutions sont  $t_B = \arcsin(\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B})$  et  $t_B = \pi - \arcsin(\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B})$  et on n'a pas de critère pour choisir l'une ou l'autre solution.

• (b) : Pour l'angle  $\angle ABC$  il faut déterminer les vecteurs tangents aux géodésiques  $\gamma_{AB}$  et  $\gamma_{BC}$  au point  $B$ . Pour cela on constate d'abord qu'on a  $\gamma_{BC}(\theta_B) = B$ , et que cette courbe va de  $B = \gamma_{BC}(\theta_B)$  à  $C = \gamma_{BC}(\frac{1}{2}\pi)$ . Le vecteur tangent  $\gamma'_{BC}(\theta_B)$  pointe donc dans la bonne direction. Pour la géodésique  $\gamma_{AB}$  on utilise la dernière paramétrisation  $\gamma_{AB,3}$  qui va de  $A = \gamma_{AB,3}(0)$  à  $B = \gamma_{AB,3}(t_B)$  et donc le vecteur tangent  $\gamma'_{AB}(t_B)$  pointe dans la mauvaise direction.

Ces vecteurs tangents sont donnés par

$$\begin{aligned} \gamma'_{AB,3}(t_B) &= \frac{\cos t_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} - \sin t_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin \theta_B \cos \varphi_A}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} \\ &\quad - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \cos \varphi_A \sin^2 \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B \\ \cos \varphi_A \sin \theta_B \cos \theta_B \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} (1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B) \cos \varphi_A \\ (1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B) \sin \varphi_A \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi_A \cos^2 \theta_B \\ -\sin \varphi_A \\ \cos \varphi_A \sin \theta_B \cos \theta_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\gamma'_{BC}(\theta_B) = (\cos \theta_B, 0, -\sin \theta_B) .$$

L'angle  $\angle ABC$  est donc déterminé par la formule [23.6]

$$\cos(\angle ABC) = \frac{\langle -\gamma'_{AB}(t_B), \gamma'_{BC}(\theta_B) \rangle}{\|\gamma'_{BC}(\theta_B)\| \cdot \|-\gamma'_{AB}(t_B)\|} = \frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} ,$$

et donc

$$\angle ABC = \arccos\left(\frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right) .$$

Pour l'angle  $\angle BCA$  on rappelle que la courbe  $\gamma_{BC}$  va de  $B = \gamma_{BC}(\theta_B)$  à  $C = \gamma_{BC}(\frac{1}{2}\pi)$  et donc que le vecteur tangent  $\gamma'_{BC}(\frac{1}{2}\pi)$  pointe dans la mauvaise direction. Par contre, la courbe  $\gamma_{AC}$  va de  $C = \gamma_{AC}(0)$  à  $A = \gamma_{AC}(\varphi_A)$  et donc le vecteur tangent  $\gamma'_{AC}(0)$  pointe dans la bonne direction. Ces vecteurs tangents sont donnés par

$$\gamma'_{BC}(\frac{1}{2}\pi) = (0, 0, -1) \quad \text{et} \quad \gamma'_{AC}(0) = (0, 1, 0) .$$

L'angle  $\angle BCA$  est donc déterminé par

$$\cos(\angle BCA) = \frac{\langle -\gamma'_{BC}(\frac{1}{2}\pi), \gamma'_{AC}(\varphi_A) \rangle}{\|-\gamma'_{BC}(\frac{1}{2}\pi)\| \cdot \|\gamma'_{AC}(\varphi_A)\|} = 0 ,$$

et donc  $\angle BCA = \frac{1}{2}\pi$ .

Pour l'angle  $\angle CAB$  on rappelle que la courbe  $\gamma_{AC}$  va de  $C$  à  $A$  et donc que le vecteur tangent  $\gamma'_{AC}(\varphi_A)$  pointe dans la mauvaise direction. Par contre, la courbe  $\gamma_{AB,3}$  va de  $A$  à  $B$  et donc le vecteur tangent  $\gamma_{AB,3}(0)$  pointe dans la bonne direction. Ces vecteurs sont donnés par

$$\gamma'_{AB,3}(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_A \sin \theta_B \\ -\sin \varphi_A \cos \varphi_A \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma'_{AC}(\varphi_A) = (-\sin \varphi_A, \cos \varphi_A, 0) .$$

L'angle  $\angle CAB$  est donc déterminé par

$$\cos(\angle CAB) = \frac{\langle \gamma'_{AB,3}(0), -\gamma'_{AC}(\varphi_A) \rangle}{\|\gamma'_{AB,3}(0)\| \cdot \|-\gamma'_{AC}(\varphi_A)\|} = \frac{\sin \varphi_A \sin \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} ,$$

et donc

$$\angle CAB = \arccos\left(\frac{\sin \varphi_A \sin \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right) .$$

• (b) : *Un calcul des angles sans dériver.* Sur la sphère on peut court-circuiter le calcul des vecteurs tangents aux géodésiques pour obtenir les angles. Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points sur la sphère, ce sont trois vecteurs unitaires. La géodésique qui passe par  $A$  et  $B$  (appelons la  $\gamma$ ) est “donc” un cercle de rayon 1 contenu dans le plan/sous-espace vectoriel engendré par  $A$  et  $B$ . Un vecteur tangent  $T_{AB}$  au point  $A$  est donc aussi contenu dans ce plan. En plus, il est orthogonal à  $A$ , car la géodésique est sur la sphère ( $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$  et donc  $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ ). Il s'ensuit qu'un vecteur tangent  $T_{AB}$  à cette géodésique au point  $A$  est la partie de  $B$  orthogonal à  $A$  :

$$T_{AB} = B - \langle B, A \rangle A .$$

Le même argument s'applique pour la géodésique allant de  $A$  à  $C$ , qui a donc le vecteur tangent

$$T_{AC} = C - \langle C, A \rangle A .$$

Il s'ensuit que l'angle  $\angle CAB$  est déterminé par

$$\begin{aligned}\cos(\angle CAB) &= \frac{\langle B - \langle B, A \rangle A, C - \langle C, A \rangle A \rangle}{\|B - \langle B, A \rangle A\| \cdot \|C - \langle C, A \rangle A\|} \\ &= \frac{\langle B, C \rangle - \langle B, A \rangle \cdot \langle C, A \rangle}{\sqrt{(1 - \langle B, A \rangle^2)(1 - \langle C, A \rangle^2)}}.\end{aligned}$$

Avec  $\langle A, B \rangle = \cos \varphi_A \sin \theta_B$ ,  $\langle A, C \rangle = \cos \varphi_A$  et  $\langle B, C \rangle = \sin \theta_B$  on retrouve donc bien

$$\cos(\angle CAB) = \frac{\sin \theta_B - \cos^2 \varphi_A \sin \theta_B}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B)(1 - \cos^2 \varphi_A)}} = \frac{\sin \varphi_A \sin \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}.$$

En permutant les rôles de  $A$ ,  $B$  et  $C$  on retrouve aussi le cosinus des deux autres angles.

• (c) : L'arccosinus prenant ses valeurs dans  $[0, \pi]$ , on a  $\angle CAB, \angle ABC \in [0, \pi]$  et donc leur sinus est positif (entre parenthèses : c'est toujours le cas pour des angles entre deux vecteurs dans  $\mathbf{R}^n$  avec  $n > 2$ ; seulement dans  $\mathbf{R}^2$  a-t-on des angles orientés). On a donc

$$\sin(\angle CAB) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle CAB)} = \frac{\cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}$$

et

$$\sin(\angle ABC) = \frac{\sin \varphi_A}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}.$$

Avec ces résultats on peut donc calculer le sinus et cosinus de l'angle

$$\mathbf{A} = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA - \pi = \angle CAB + \angle ABC - \frac{1}{2}\pi$$

comme

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{A}) &= \sin(\angle CAB + \angle ABC) \\ &= \sin(\angle CAB) \cos(\angle ABC) + \cos(\angle CAB) \sin(\angle ABC) \\ &= \frac{\cos \varphi_A \cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} + \frac{\sin^2 \varphi_A \sin \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} = \frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\mathbf{A}) &= -\cos(\angle CAB + \angle ABC) \\ &= \sin(\angle CAB) \sin(\angle ABC) - \cos(\angle CAB) \cos(\angle ABC) \\ &= \frac{\sin \varphi_A \cos \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} - \frac{\sin \theta_B \cos \varphi_A \cos \theta_B \sin \varphi_A}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} = \frac{\sin \varphi_A \cos \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\end{aligned}$$

Avec  $\angle CAB, \angle ABC \in [0, \pi]$  on sait qu'on a  $\mathbf{A} \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ . En plus, avec  $\varphi_A \in ]0, \pi[$  et  $\theta_B \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$  on a  $\cos \theta_B \sin \varphi_A > 0$  et donc

$$\sin(\mathbf{A}) > 0.$$

Il s'ensuit qu'on a  $\mathbf{A} \in ]0, \pi[$  et "donc" l'arccosinus donne la bonne valeur :

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - \pi \equiv \mathbf{A} = \arccos\left(\frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\right),$$

ce qui n'est pas vrai pour l'arcsinus, car on ne peut pas affirmer qu'on a l'inégalité  $\cos(\mathbf{A}) > 0$ .

• (d) : *D'abord une solution rapide.* Les courbes/géodésiques  $\gamma_{AB,3}$ ,  $\gamma_{BC}$  et  $\gamma_{AC}$  étant paramétrées par longueur d'arc, il s'ensuit immédiatement qu'on a les longueurs

$$a = \frac{1}{2}\pi - \theta_B \quad , \quad b = \varphi_A \quad \text{et} \quad c = t_B - 0 = t_B = \arccos(\cos \varphi_A \sin \theta_B) \quad .$$

On peut formuler cette solution sans parler de courbe paramétrée par longueur d'arc. Pour cela on remarque que chacune des géodésiques est un cercle de rayon 1 et que donc la longueur d'un morceau d'une telle géodésique est égale à l'angle entre les deux vecteurs (unitaires) donnant les deux extrémités.

### DESSIN

Et le cosinus de cet angle est donné par le produit scalaire. Ainsi on a immédiatement

$$\begin{aligned} \cos a &= \langle B, C \rangle = \sin \theta_B \quad , \quad \cos b = \langle A, C \rangle = \cos \varphi_A \\ \text{et} \quad \cos c &= \langle A, B \rangle = \cos \varphi_A \sin \theta_B \quad . \end{aligned}$$

La formule

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c$$

s'en déduit immédiatement.

Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont petits, le développement limité du cosinus nous donne l'égalité approximatif

$$1 - \frac{1}{2}c^2 \approx \cos c = \cos a \cdot \cos b \approx (1 - \frac{1}{2}a^2)(1 - \frac{1}{2}b^2) \approx 1 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$$

et donc on retrouve bien la relation de Pythagore  $c^2 = a^2 + b^2$  dans le triangle rectangle  $ABC$ .

• (d) : *Une solution pour le calcul de  $c$ , moins rapide mais très instructive.* Si par malchance on se retrouve avec la paramétrage  $\gamma_{AB,2}$ , alors le calcul de  $c$  se fait d'une façon un petit peu plus compliquée (mais toujours faisable!). On commence avec le vecteur tangent :

$$\begin{aligned} \gamma'_{AB,2}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \\ \frac{\cos \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \\ \frac{-\cos(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B \sin(\varphi_A - \varphi) \cos(\varphi_A - \varphi)}{(\tan^2 \theta_B \sin^2 \varphi_A + \sin^2(\varphi_A - \varphi))^{3/2}} \\ \frac{\sin \varphi \sin \varphi_A \tan \theta_B \sin(\varphi_A - \varphi) \cos(\varphi_A - \varphi)}{(\tan^2 \theta_B \sin^2 \varphi_A + \sin^2(\varphi_A - \varphi))^{3/2}} \\ \frac{\sin^2(\varphi_A - \varphi) \cos(\varphi_A - \varphi)}{(\tan^2 \theta_B \sin^2 \varphi_A + \sin^2(\varphi_A - \varphi))^{3/2}} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire nous donne alors

$$\|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\|^2 = \frac{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B (\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1)}{(\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi))^2} ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| = \frac{\sin \varphi_A \tan \theta_B \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}.$$

Pour calculer la longueur de la courbe  $\gamma_{AB,2}$  entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \varphi_A$ , il faut trouver une primitive de  $\|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\|$ . Un calcul naïf procède ainsi :

$$\begin{aligned} \int \|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| d\varphi &= \int \frac{\sin \varphi_A \tan \theta_B \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)} d\varphi \\ &= \int \frac{\sin \varphi_A \tan \theta_B \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\cos^2(\varphi_A - \varphi) (\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \tan^2(\varphi_A - \varphi) (\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1))} d\varphi \end{aligned}$$

un changement de variables  $u = \tan(\varphi_A - \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1} / (\sin \varphi_A \tan \theta_B)$

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{1}{1+u^2} du = -\arctan(u) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\varphi - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B}\right). \end{aligned}$$

Le problème avec cette primitive est qu'elle n'est pas définie pour  $\varphi - \varphi_A = \frac{1}{2}\pi$  (modulo  $\pi$ ) et que cela peut arriver dès qu'on a  $\varphi_A \geq \frac{1}{2}\pi$ . Par contre, la fonction à intégrer  $\|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\|$  est définie partout et donc sa primitive existe aussi partout. Si on utilise cette primitive (pas toujours correcte), on trouve pour la longueur

$$\begin{aligned} L(\gamma_{AB,2}) &= \int_0^{\varphi_A} \|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| d\varphi \\ &= \left[ \arctan\left(\frac{\tan(\varphi - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B}\right) \right]_0^{\varphi_A} \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\cos \varphi_A \tan \theta_B}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}{\cos \varphi_A \sin \theta_B}\right). \end{aligned}$$

Et maintenant il suffit de remarquer que pour  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$ , l'argument de l'arctangent est négatif et donc cette longueur sera négative, ce qui est absurde.

La solution de ce problème passe par la distinction du cas  $\varphi_A < \frac{1}{2}\pi$  et  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$ . Dans le premier cas la primitive est bien définie sur tout l'intervalle  $[0, \varphi_A]$  et la réponse ci-dessus pour la longueur est correcte. Dans le deuxième cas on sépare l'intégrale en deux morceaux et on remarque que sur chaque morceau la primitive donnée ci-dessus est bien définie, ce qui permet de finir le calcul. Ainsi on obtient (dans le cas  $\varphi_A > \frac{1}{2}\pi$ ) :

$$L(\gamma_{AB,2}) = \int_0^{\varphi_A} \|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \uparrow \varphi_A - \pi/2} \int_0^T \|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| \, d\varphi + \lim_{T \downarrow \varphi_A - \pi/2} \int_T^{\varphi_A} \|\gamma'_{AB,2}(\varphi)\| \, d\varphi \\
&= \lim_{T \uparrow \varphi_A - \pi/2} \left[ \arctan \left( \frac{\tan(\varphi - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B} \right) \right]_0^T \\
&\quad + \lim_{T \downarrow \varphi_A - \pi/2} \left[ \arctan \left( \frac{\tan(\varphi - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B} \right) \right]_T^{\varphi_A} \\
&= \arctan \left( \frac{\tan(\varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B} \right) \\
&\quad + \lim_{T \uparrow \varphi_A - \pi/2} \arctan \left( \frac{\tan(T - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B} \right) \\
&\quad - \lim_{T \downarrow \varphi_A - \pi/2} \arctan \left( \frac{\tan(T - \varphi_A) \sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}{\sin \varphi_A \tan \theta_B} \right) \\
&= \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}{\cos \varphi_A \sin \theta_B} \right) + \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) .
\end{aligned}$$

Et maintenant on voit que pour  $\varphi_A \uparrow \frac{1}{2}\pi$  on a  $L(\gamma_{AB,2}) \uparrow \frac{1}{2}\pi$  et pour  $\varphi_A \downarrow \frac{1}{2}\pi$  on a  $L(\gamma_{AB,2}) \downarrow -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\pi$ , ce qui est cohérent. On laisse au bons soins du lecteur la vérification que dans les deux cas la réponse pour  $L(\gamma_{AB,2})$  est égale à la réponse trouvée précédemment, à savoir  $\arccos(\cos \varphi_A \sin \theta_B)$ .

• (e) : Pour calculer l'aire on choisit la carte donnée en [40.22.a]. Dans cette carte le point  $C$  est représenté par  $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ , le point  $B$  par  $(\theta_B, 0)$  et le point  $A$  par  $(\frac{1}{2}\pi, \varphi_A)$ . En même temps, la géodésique  $\gamma_{AC}$  est représentée (dans cette carte) par la courbe  $c_{AC}(t) = (\frac{1}{2}\pi, t)$  et la géodésique  $\gamma_{BC}$  par la courbe  $c_{BC}(t) = (t, 0)$  (il est immédiat de vérifier qu'on a  $\gamma_{AC}(t) = \psi(c_{AC}(t))$  et  $\gamma_{BC}(t) = \psi(c_{BC}(t))$ ). Pour la géodésique  $\gamma_{AB}$  il faut trouver le lien entre  $\varphi$  et  $\theta$ , mais cela a déjà été calculé pour le paramétrage  $\gamma_{AB,2}$ . Là on a trouvé (41.3)

$$\cos \theta = \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}}$$

et donc (car  $\theta \in ]0, \pi[$ )

$$\theta = \arccos \left( \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \right) .$$

Étant donné qu'on a  $\varphi_A \in ]0, \pi[$  et  $\varphi \in [0, \varphi_A]$ , on a  $\sin(\varphi_A - \varphi) \geq 0$  et donc  $\theta \leq \frac{1}{2}\pi$ . Si on donne le nom  $f$  à la fonction qui décrit  $\theta$ , c'est-à-dire qu'on pose

$$f(\varphi) = \arccos \left( \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} \right) ,$$

alors la géodésique  $\gamma_{AB,2}$  est représentée par la courbe  $c_{AB,2}(\varphi) = (f(\varphi), \varphi)$ .

Selon [40.29], la première forme fondamentale de cette carte est donnée par  $E(\theta, \varphi) = 1$ ,  $F(\theta, \varphi) = 0$  et  $G(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta$ . L'aire  $\mathcal{A}$  du triangle géodésique  $\Delta ABC$

est donc donné par l'intégrale double

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_0^{\varphi_A} \int_{f(\varphi)}^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\varphi_A} [-\cos \theta]_{f(\varphi)}^{\pi/2} d\varphi \\
 &= \int_0^{\varphi_A} \cos(f(\varphi)) \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\varphi_A} \frac{\sin(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + \sin^2(\varphi_A - \varphi)}} d\varphi
 \end{aligned}$$

on pose  $u = \cos(\varphi_A - \varphi)$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1 - u^2}} du \\
 &= \left[ \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}\right) \right] \\
 &= \left[ \arcsin\left(\frac{\cos(\varphi_A - \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}\right) \right]_0^{\varphi_A} \\
 &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos \varphi_A}{\sqrt{\sin^2 \varphi_A \tan^2 \theta_B + 1}}\right) \\
 &= \arcsin\left(\frac{\cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right).
 \end{aligned}$$

Reste à montrer la dernière égalité avec la réponse à la question (c). On calcule donc :

$$\begin{aligned}
 \cos(\mathcal{A}) &= \cos\left(\arcsin\left(\frac{\cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right)\right) \\
 &\quad \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right)\right) \\
 &\quad + \sin\left(\arcsin\left(\frac{\cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right)\right) \\
 &\quad \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{\cos \varphi_A \cos \theta_B}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

sur  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ , l'image de la fonction arcsinus, le cosinus est positif et donc

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi_A \cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}} \\
 &\quad + \frac{\cos \varphi_A \cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sin^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B)(\sin^2 \varphi_A)}}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} + \frac{\cos \varphi_A \cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin^2 \varphi_A \sin \theta_B + \cos \varphi_A \cos^2 \theta_B}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} \\
&= \frac{(\cos \varphi_A + \sin \theta_B)(1 - \cos \varphi_A \sin \theta_B)}{1 - \cos^2 \varphi_A \sin^2 \theta_B} = \frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B} .
\end{aligned}$$

Sachant que  $\mathcal{A}$  est positif et que l'arcsinus prend ses valeurs dans  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ , il s'ensuit (de l'expression de  $\mathcal{A}$  comme différence de deux arcsinus) qu'on a  $0 \leq \mathcal{A} \leq \pi$  et donc la valeur  $\cos \mathcal{A}$  détermine d'une façon unique la valeur de  $\mathcal{A}$ . Et donc on peut conclure qu'on a l'égalité

$$\mathcal{A} = \arccos\left(\frac{\cos \varphi_A + \sin \theta_B}{1 + \cos \varphi_A \sin \theta_B}\right) .$$

**Solution de [40.45].** • (a) La courbure absolue d'une droite est nulle, donc la courbure géodésique aussi. Et donc ces droites sont des géodésiques sur  $\mathcal{N}$ .

• (b) Dans la carte de  $\mathcal{N}$  donnée en [40.22.d] (avec  $\alpha = -\pi$ ) la courbe  $\gamma$  s'écrit comme  $\gamma(t) = \psi(c(t))$  avec

$$c(t) \equiv (c_1(t), c_2(t)) = (t, 0) .$$

En substituant ceci dans les équations géodésiques obtenues en [40.42] on voit directement qu'elles sont vérifiées. Un tout autre argument consiste à dire que  $\gamma$  est un cercle dans le plan  $z = 0$  et de centre l'origine. Le vecteur de courbure  $k_\gamma(t)$  pointe vers le centre, c'est-à-dire qu'il est parallèle au vecteur  $\gamma(t)$ . Mais pour ce cercle, le vecteur normal à la surface au point  $\gamma(t)$  est aussi parallèle à  $\gamma(t)$  (c'est le vecteur gradient de la fonction  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  en ce point) et donc  $k_\gamma$  est orthogonal à l'espace tangent et donc  $\gamma$  est une géodésique. (Le même argument n'est plus vrai pour les cercles/intersections avec les plans  $z = c$  avec  $c \neq 0$ , car pour ces cercles le vecteur de courbure est (toujours) horizontal, tandis que le vecteur gradient ne l'est pas.)

• (c) La droite  $b$  passant par le point  $A = (1, 0, 0)$  est donnée par

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La droite  $b$  appartenant à la "première" famille, la droite  $a$  passant par le point  $B = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  appartient à la "deuxième" famille et est donnée par

$$a = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Pour trouver le point d'intersection  $C$  il faut résoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La troisième composante donne  $\lambda = \mu$ , avec quoi les deux premières composantes donnent les équations

$$2 \sin^2(\theta/2) = 1 - \cos \theta = \lambda \sin \theta = 2 \lambda \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

$$2 \cos^2(\theta/2) \lambda = (1 + \cos \theta) \lambda = \sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) .$$



Ces deux équations nous donnent la solution  $\lambda = \tan(\theta/2)$  et donc le point  $C$  comme

$$C = (1, \tan(\theta/2), \tan(\theta/2)) .$$

Avec ces trois points (et le fait qu'on a  $0 < \theta < \pi$  et donc  $\tan(\theta/2) > 0$ ) les côtés du triangle  $\Delta ABC$  sont donnés par les courbes

$$\gamma_c : [0, \theta] \rightarrow \mathcal{N}, \quad \gamma_c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\gamma_b : [0, \tan(\theta/2)] \rightarrow \mathcal{N}, \quad \gamma_b(t) = (1, t, t)$$

$$\gamma_a : [0, \tan(\theta/2)] \rightarrow \mathcal{N}, \quad \gamma_a(t) = (\cos \theta + t \sin \theta, \sin \theta - t \cos \theta, t) .$$

Les deux vecteurs tangents au point  $A$  sont  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 1, 1)$ , ce qui donne

$$\cos(\angle CAB) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \angle CAB = \pi/4 .$$

Au point  $B$  les deux vecteurs tangents sont  $(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$  (avec un signe supplémentaire, car il faut parcourir la courbe  $\gamma_c$  dans l'autre sens pour aller à  $A$ ) et  $(\sin \theta, -\cos \theta, 1)$ , ce qui donne

$$\cos(\angle ABC) = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ABC = \pi/4 .$$

Et finalement au point  $C$  les deux vecteurs tangents sont donnés par  $(0, -1, -1)$  et  $(-\sin \theta, \cos \theta, -1)$ , ce qui donne

$$\cos(\angle BCA) = \frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sin^2(\theta/2) \Rightarrow \angle BCA = \arccos(\sin^2(\theta/2)) .$$

Au final on trouve donc

$$\begin{aligned} \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA - \pi &= \arccos(\sin^2(\theta/2)) - \pi/2 \\ &= -\arcsin(\sin^2(\theta/2)) . \end{aligned}$$

Si on prend  $\theta > \pi$ , alors le point  $C$  se trouve en-dessous le plan  $z = 0$  (dans  $\mathbf{R}^3$ ) et le triangle  $\Delta ABC$  change de côté par rapport à  $A$  et par rapport au plan  $z = 0$ . Par contre, les angles ne changent pas et sont donnés par les mêmes formules (on vérifie aisément que changer  $\theta$  en  $\theta + \pi$  ne change pas la valeur de  $\angle BCA$ ).

#### DESSIN

• (d) Pour calculer cette intégrale, on prend (de nouveau) la carte [40.22.d] (toujours avec  $\alpha = -\pi$ ) et on commence avec la remarque que selon [40.35] (ou en combinant les résultats de [40.29], [40.34] et [29.7]) la courbure de Gauss dans cette carte est donnée par la formule

$$K(\varphi, z) = \frac{-1}{(2z^2 + 1)^2}$$

et selon [40.29] l'expression  $\sqrt{EG - F^2}$  est donnée par

$$\sqrt{E(\varphi, z) \cdot G(\varphi, z) - F(\varphi, z)^2} = \sqrt{2z^2 + 1} .$$

Selon [24.5] il faut donc calculer l'intégrale double

$$\iint_{\Delta ABC} K \, d\mathcal{A} = \iint_{\psi^{-1}(\Delta ABC)} \frac{-1}{(2z^2 + 1)^2} \cdot \sqrt{2z^2 + 1} \, d\varphi \, dz .$$

Pour trouver  $\psi^{-1}(\Delta ABC)$ , le domaine d'intégration dans cette carte, on commence avec la description de ces bords  $a$ ,  $b$  et  $c$  par des courbes  $c_a, c_b, c_c$  à valeurs dans  $U = ]-\pi, \pi[ \times \mathbf{R}$  vérifiant  $\gamma_a = \psi \circ c_a$ ,  $\gamma_b = \psi \circ c_b$  et  $\gamma_c = \psi \circ c_c$  (un léger abus de

notation, car la lettre “c” est utilisé dans plusieurs sens). Il est évident que la courbe  $c_c$  est donnée par

$$c_c(t) = (t, 0) ,$$

ce qui dit que le bord  $c$  est décrite dans la carte  $\psi$  de coordonnées  $(\varphi, z)$  par l'équation  $z = 0$ .

Pour trouver la courbe  $c_b$  on résout l'équation

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \gamma_b(t) = \psi(c_{b,1}(t), c_{b,2}(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{c_{b,2}(t)^2 + 1} \cos c_{b,1}(t) \\ \sqrt{c_{b,2}(t)^2 + 1} \sin c_{b,1}(t) \\ c_{b,2}(t) \end{pmatrix} ,$$

ce qui nous donne immédiatement  $c_{b,2}(t) = t$  et ensuite les équations

$$\cos c_{b,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad , \quad \sin c_{b,1}(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} .$$

Si on note  $\beta = \arctan t \in ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ , alors on a  $\sin \beta = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$  et  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$  et donc on a les équations

$$\cos c_{b,1}(t) = \cos \beta \quad , \quad \sin c_{b,1}(t) = \sin \beta ,$$

ce qui a comme solution <sup>1</sup>

$$c_{b,1}(t) = \beta + 2k\pi = \arctan t + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbf{Z} ,$$

où il faut déterminer  $k \in \mathbf{Z}$  tel qu'on a  $c_{b,1}(t) \in ]-\pi, \pi[$  (car on a  $\alpha = -\pi$ ). Ainsi on obtient la solution pour la courbe  $c_b$  :

$$c_b(t) = (\arctan(t), t) ,$$

ce qui dit que le bord  $b$  est décrite dans la carte  $\psi$  de coordonnées  $(\varphi, z)$  par l'équation  $\varphi = \arctan z$  ou  $z = \tan \varphi$  (mais dans ce dernier cas avec la contrainte  $|\varphi| < \frac{1}{2}\pi$ ).

Pour le troisième bord on fait pareil en écrivant l'équation

$$\begin{pmatrix} \cos \theta + t \sin \theta \\ \sin \theta - t \cos \theta \\ t \end{pmatrix} = \gamma_a(t) = \psi(c_{a,1}(t), c_{a,2}(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{c_{a,2}(t)^2 + 1} \cos c_{a,1}(t) \\ \sqrt{c_{a,2}(t)^2 + 1} \sin c_{a,1}(t) \\ c_{a,2}(t) \end{pmatrix} ,$$

ce qui nous donne immédiatement  $c_{a,2}(t) = t$  et ensuite les équations

$$\cos \theta + t \sin \theta = \sqrt{t^2 + 1} \cos c_{a,1}(t) \quad \text{et} \quad \sin \theta - t \cos \theta = \sqrt{t^2 + 1} \sin c_{a,1}(t) .$$

Inspiré par la réponse précédente on introduit l'angle  $\beta \in ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$  comme

$$\beta = \arctan t \quad \implies \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} .$$

Ainsi on obtient les équations

$$\begin{aligned} \cos c_{a,1}(t) &= \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta = \cos(\theta - \beta) \\ \sin c_{a,1}(t) &= \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \cos \theta = \sin(\theta - \beta) , \end{aligned}$$

ce qui nous donne comme solution

$$c_{a,1}(t) = \theta - \beta + 2k\pi = \theta - \arctan t + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbf{Z} .$$

1. Si on n'introduit pas l'angle  $\beta$ , mais qu'on écrit directement l'unique équation  $\tan c_{b,1}(t) = t$ , on obtient la solution  $c_{b,1}(t) = \arctan t + k\pi$ , ce qui introduit donc la solution fautive  $c_{b,1}(t) = \arctan t + \pi$ .

Pour trouver la bonne description de la courbe  $c_a(t)$ , il faut distinguer les cas  $\theta \leq \frac{1}{2}\pi$  et  $\theta > \frac{1}{2}\pi$ . Dans le premier cas la courbe  $c_a(t)$  est donnée par

$$c_a(t) = (\theta - \arctan t, t) ,$$

tandis que dans le deuxième cas (où  $\tan \theta < 0$  et donc  $\arctan(\tan \theta) = \theta - \pi$ ) elle est donnée par

$$c_a(t) = \begin{cases} (\theta - \arctan t, t) & t > \tan(\theta) \\ (\theta - \arctan t - 2\pi, t) & t < \tan(\theta) . \end{cases}$$

Et effectivement, dans le cas  $\theta > \frac{1}{2}\pi$ , le point  $\gamma_a(\tan \theta) = (1/\cos \theta, 0, \tan \theta)$  ne se trouve pas dans l'image de la carte  $\psi$ . Il s'ensuit que le bord  $a$  est décrit dans la carte  $\psi$  de coordonnées  $(\varphi, z)$  par l'équation  $\varphi = \theta - \arctan z$  ou  $z = \tan(\theta - \varphi)$ .

### DESSIN

La discussion ci-dessus nous dit que le triangle géodésique  $\Delta ABC$  est décrit dans la carte  $\psi$  par

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\Delta ABC) &= \{ (\varphi, z) \mid [ 0 < \varphi \leq \tfrac{1}{2}\theta \ \& \ 0 < z < \tan \varphi ] \text{ ou} \\ &\quad [ \tfrac{1}{2}\theta \leq \varphi < \theta \ \& \ 0 < z < \tan(\theta - \varphi) ] \} \\ &= \{ (\varphi, z) \mid 0 < z < \tan(\theta/2) \ \& \ \arctan z < \varphi < \theta - \arctan z \} . \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale double  $\iint_{\Delta ABC} K \, d\mathcal{A}$  se calcule à l'aide des intégrales répétées au choix

$$\int_{\varphi=0}^{\theta/2} \int_{z=0}^{\tan(\varphi)} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} \, dz \, d\varphi + \int_{\varphi=\theta/2}^{\theta} \int_{z=0}^{\tan(\theta-\varphi)} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} \, dz \, d\varphi$$

ou

$$\int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \int_{\varphi=\arctan z}^{\theta-\arctan z} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} \, d\varphi \, dz .$$

Commençons avec la deuxième :

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \int_{\varphi=\arctan z}^{\theta-\arctan z} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} \, d\varphi \, dz &= \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \frac{2 \arctan z - \theta}{(2z^2+1)^{3/2}} \, dz \\ &= \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \frac{2 \arctan z}{(2z^2+1)^{3/2}} \, dz - \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \frac{\theta}{(2z^2+1)^{3/2}} \, dz \end{aligned}$$

avec  $(z/\sqrt{2z^2+1})' = (2z^2+1)^{-3/2}$  et une intégration par parties pour la première intégrale

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{2z \arctan z}{\sqrt{2z^2+1}} \right]_{z=0}^{\tan(\theta/2)} - \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{2z^2+1}} \, dz \\ &\quad - \left[ \frac{z\theta}{\sqrt{2z^2+1}} \right]_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \\ &= - \int_{z=0}^{\tan(\theta/2)} \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{2z^2+1}} \, dz \end{aligned}$$

un changement de variables  $u = \sqrt{2z^2+1}$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{u=1}^{\sqrt{2 \tan^2(\theta/2)+1}} \frac{2}{u^2+1} du \\
&= -2 \left[ \arctan u \right]_{u=1}^{\sqrt{2 \tan^2(\theta/2)+1}} \\
&= 2 \arctan 1 - 2 \arctan \left( \sqrt{2 \tan^2(\theta/2)+1} \right) .
\end{aligned}$$

Et si on calcule la première intégrale on obtient

$$\int_{\varphi=0}^{\theta/2} \int_{z=0}^{\tan(\varphi)} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} dz d\varphi + \int_{\varphi=\theta/2}^{\theta} \int_{z=0}^{\tan(\theta-\varphi)} \frac{-1}{(2z^2+1)^{3/2}} dz d\varphi$$

un changement de variables  $u = \theta - \varphi$  dans la deuxième intégrale

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \int_{z=0}^{\tan(\varphi)} \frac{1}{(2z^2+1)^{3/2}} dz d\varphi - \int_{u=0}^{\theta/2} \int_{z=0}^{\tan(u)} \frac{1}{(2z^2+1)^{3/2}} dz du \\
&= -2 \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \int_{z=0}^{\tan(\varphi)} \frac{1}{(2z^2+1)^{3/2}} dz d\varphi \\
&= -2 \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \left[ \frac{z}{\sqrt{2z^2+1}} \right]_{z=0}^{\tan(\varphi)} d\varphi = -2 \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{2 \tan^2 \varphi + 1}} d\varphi \\
&= -2 \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{2 \tan^2 \varphi + 1}} d\varphi
\end{aligned}$$

car pour  $\varphi \in ]0, \theta/2[ \subset ]0, \pi/2[$  on a  $\cos \varphi > 0$

$$= -2 \int_{\varphi=0}^{\theta/2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

un changement de variables  $u = \cos \varphi$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{u=1}^{\cos(\theta/2)} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} du = 2 \left[ \arcsin(u/\sqrt{2}) \right]_{u=1}^{\cos(\theta/2)} \\
&= 2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - 2 \arcsin(1/\sqrt{2}) .
\end{aligned}$$

Reste à montrer que les trois expressions désignent effectivement le même nombre.  
Pour montrer l'égalité

$$2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = -\arcsin(\sin^2(\theta/2)) ,$$

on commence à vérifier où se trouvent ces valeurs :

$$\theta \in ]0, \pi[ \Rightarrow \sin^2(\theta/2) \in ]0, 1[ \Rightarrow -\arcsin(\sin^2(\theta/2)) \in ]-\pi/2, 0[$$

et

$$\begin{aligned}
\theta \in ]0, \pi[ &\Rightarrow \cos(\theta/2)/\sqrt{2} \in ]0, 1/\sqrt{2}[ \\
&\Rightarrow 2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} \in ]-\pi/2, 0[ .
\end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité, il suffit donc de montrer que leurs sin sont égaux. Pour cela on calcule :

$$\begin{aligned}
 \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
 &= 2 \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)\right) - 1 \\
 &= 2\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = \cos^2(\theta/2) - 1 = -\sin^2(\theta/2) \\
 &= \sin\left(-\arcsin(\sin^2(\theta/2))\right) .
 \end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité

$$2 \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}\right) ,$$

on le transforme d'abord en l'égalité

$$(41.4) \quad \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}\right)$$

et on rappelle que pour  $x \in ]0, \infty[$  on a l'égalité  $\pi/2 - \arctan x = \arctan(1/x)$ . On rappelle aussi qu'on a

$$\theta \in ]0, \pi[ \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right) \in ]0, \pi/4[$$

et

$$\begin{aligned}
 \theta \in ]0, \pi[ &\Rightarrow \sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1} \in ]1, \infty[ \\
 &\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}\right) \in ]0, \pi/4[ .
 \end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité (41.4) il suffit donc de montrer que leurs tangents sont égaux. En plus, pour  $\alpha \in ]0, \pi/4[$  on a l'égalité  $\tan \alpha = \sin \alpha / \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}$ . Avec ces préparations on calcule :

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)\right) &= \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2}}\right)\right)}} \\
 &= \frac{\cos(\theta/2)/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - (\cos(\theta/2)/\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}} \\
 &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{2 \tan^2(\theta/2) + 1}\right)\right) .
 \end{aligned}$$



## Bibliographie

Pour écrire ce texte, j’ai consulté plusieurs ouvrages. Je me suis inspiré en particulier du livre de Martin Lipschutz [Lip69], mais le lecteur trouvera certainement des traces de mes consultations des livres [BG87, DC76, Küh15, LFA74, Pre10].

- [AF90] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse, *Cours de mathématiques - 4, Algèbre bilinéaire et géométrie*, Dunod, Paris, 1990.
- [BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [BG88] ———, *Differential geometry : Manifolds, curves, and surfaces*, GTM 115, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translation into english of [BG87].
- [DC76] Manfredo P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [Dir63] P.G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1863.
- [Dir99] ———, *Lectures on number theory*, History of Mathematics 16, AMS, Providence, RI, 1999, Translation into english of [Dir63].
- [Fri18] Michael Friedman, *A history of folding in mathematics*, Science Networks Historical Studies, vol. 59, Birkhäuser, Cham, 2018.
- [GP09] Sébastien Gandon and Yvette Perrin, *Le problème de la définition de l’aire d’une surface gauche: Peano et Lebesgue*, Arch. Hist. Exact Sci. **63** (2009), 665–704.
- [Ken80] Hubert C. Kennedy, *Peano*, Studies in the History of Modern Science, vol. 4, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980.
- [Küh15] Wolfgang Kühnel, *Differential geometry*, third ed., Student Mathematical Library, vol. 77, AMS, Providence, Rhode Island, 2015.
- [LFA74] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 3 : Géométrie et cinématique*, Dunod, Paris, 1974.
- [Lip69] Martin M. Lipschutz, *Differential geometry*, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1969.
- [Pea90] Giuseppe Peano, *Sulla definizione dell’area d’una superficie*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Cl. sci. fis. mat. nat. **6** (1890), 54–57, Reprinted in [Pea57b].
- [Pea03] ———, *Formulaire mathématique IV*, Fratres Bocca Editores, Torino, 1903.
- [Pea57a] ———, *L’esempio di Peano per dimostrare l’inesattezza della definizione di Serret di area di una superficie curva*, *Opere scelte I, Analisi Matematica - Calcolo Numerico* (Roma) (a cura dell’UMI, Ugo Cassina, Giovanni Sansone, and Alessandro Terracini, eds.), Edizioni Cremonese, 1957, Reprint of [Pea03, pp300-301], pp. 107–109.
- [Pea57b] ———, *Sulla definizione dell’area d’una superficie*, *Opere scelte I, Analisi Matematica - Calcolo Numerico* (Roma) (a cura dell’UMI, Ugo Cassina, Giovanni Sansone, and Alessandro Terracini, eds.), Edizioni Cremonese, 1957, pp. 102–106.
- [Pet] Jean-Pierre Petit, *Le géométricon*, Bélin, Téléchargement gratuit sur le site “Savoir sans Frontière” : <http://www.savoir-sans-frontieres.com>.
- [Pre10] Andrew Pressley, *Elementary differential geometry*, second ed., Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London, 2010.

- [Sch90] Hermann Amandus Schwarz, *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*, Gesammelte mathematische Abhandlungen von H.A. Schwarz (Berlin), J. Springer, 1890, pp. 309–311.
- [Tis83] Claude Tisseron, *Géométrie affine, projective et euclidienne*, Hermann, Paris, 1983.



## Index

cercle osculateur, [45](#), [46](#)  
courbe  
  régulière, [33](#)  
courbure  
  absolue, [46](#)  
  vecteur de, [46](#)  
droite, morceau de, [55](#)  
  point d'un, [55](#)  
espace tangent  
  à une surface, [100](#), [127](#)  
isolé  
  point singulier, [33](#)  
osculateur  
  cercle, [45](#), [46](#)  
  plan, [46](#)  
paramétrée  
  à vitesse constante, [33](#)  
  par longueur d'arc, [33](#)  
plan osculateur, [46](#)  
point  
  régulier, [33](#)  
  singulier, [33](#)  
  singulier isolé, [33](#)  
point d'inflexion, [56](#)  
point ordinaire, [56](#)  
régulier  
  point, [33](#)  
singulier  
  point, [33](#)  
vecteur tangent, [126](#), [127](#)  
  à une surface, [127](#)