TD- M52   Viet-Anh NGUYEN

4 TD

viet-anh.nguyen@univ-lille.fr

Exercices de remise à niveau :

Ex 1 : soit $\mathbb{K}$, mq les ens ci-dessous st des espaces vectoriels sr $\mathbb{K}$.

① $E_1 := \{ f : [0,1] \to \mathbb{K} \}$ muni de l'additiᵒ $f+g$ des fonctions & de la multiplicatᵒ par un nombre $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda f$,

ie : $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$.

② $E_2 := \{ (u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \}$ l'ens des suites à valeurs ds $\mathbb{K}$, muni de l'additᵒ des suites : $(u_n)+(v_n) := (u_n + v_n)$

& la multiplicatᵒ p nbr $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda (u_n) := (\lambda u_n)$.

③ $E_3 := \{ P \in \mathbb{K}[x] : \deg P \leq n \}$

où $n \in \mathbb{N}$ est donné. E_3 est muni de l'additᵒ des polynômes $P+Q$ et de la mltplᵒ p $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda.P$ pr $P, Q \in E_3$.

Solut ①

Vérifions que $(E, +)$ est un groupe abélien.

soit $f, g \in E_1$, observons

Associativité

$\forall x \in [0,1]$;

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= [f + (g+h)](x)$$

D'où $(f+g)+h = f + (g+h)$.

$\Rightarrow$ + est associative.

Neutre $\forall x \in [0,1]$

L'élément neutre de E_1 est la f zéro $0_{E_1}(x) = 0$,

En effet, $(f + 0_{E_1})(x) = f(x) + 0_{E_1}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

D'où $f + 0_{E_1} = f$; de même $0_{E_1} + f = f$.

Inverse $\forall x \in [0,1]$

Considérons $-f := (-1) \times f$

On a $[(-f)+f](x) = (-f)(x) + f(x)$

$$= (-1) f(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$$

D'où $(-f)+f = 0_{E_1}$.

De m̂ $f + (-f) = 0_{E_1}$.

On a mqé l'associativité, l'élt neutre, l'élt inverse.

Donc $(E,+)$ est un groupe.

D'autre part, pr $x \in [0,1]$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= g(x) + f(x) \quad \text{car } (\mathbb{K},+) \text{ est commutatif pr } \mathbb{K}.$$
$$= (g+f)(x)$$

D'où $f+g = g+f$

Donc $(E_1,+)$ est commutatif. (abélien).

Ensuite, vérifions que la multiplicat° scalaire est distributive par rapport à l'addit°,

ie pr $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ & $f, g \in E_1$, on a

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$
$$(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$$

En effet pr $x \in [0,1]$;

$$[\lambda(f+g)](x) = \lambda\big((f+g)(x)\big)$$
$$= \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$[\lambda(f+g)](x) = \underset{\in\mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in\mathbb{K}}{f(x)} + \underset{\in\mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in\mathbb{K}}{g(x)} \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est distributife pr } \mathbb{K}.$$
$$= (\lambda f + \lambda g)(x)$$

D'où $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

Puis $[\underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in\mathbb{K}} f](x) = \underset{\in\mathbb{K}}{(\lambda+\mu)} . \underset{\in\mathbb{K}}{f(x)}$

$$= \lambda f(x) + \mu f(x) \quad \text{car } \circledast$$

Enfin, il ne reste à vérifier que la multiplicat° associative, ie $(\lambda\cdot\mu) f = \lambda\cdot(\mu f)$

En effet, pr $x \in [0,1]$, on a :

$$[[\lambda\cdot\mu]\cdot f](x) = (\underset{\in\mathbb{K}}{\lambda}\cdot \underset{\in\mathbb{K}}{\mu})\cdot \underset{\in\mathbb{K}}{f(x)} = \lambda\,(\mu f(x)) \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est associatif.}$$
$$= \lambda\cdot((\mu\cdot f)(x))$$
$$= [\lambda\cdot(\mu\cdot f)](x)$$

$$\Rightarrow (\lambda\cdot\mu). f = \lambda(\mu . f)$$

Étapes :

- mq $(E,+)$ est un groupe. → associativité, → Élt neutre, → Élt inverse
- mq $(E,+)$ groupe abélien.
- mq distributivité mltpl° scalaire.
- mq mltplc° scalaire associative.

sol 2. Il suffit de remplacer ds sol 1, l'intervalle $[0,1]$ p $\mathbb{N}$ partout.
La preuve reste valable.

sol 3

Considérons $I := \{0, 1, \dots, n\}$ &
$F := \{f : I \longrightarrow \mathbb{K}\}$ muni de l'additiθ & la multiplicatθ scalaire ĉ ds 1).
On a vu ds Q1 que F est un esp. vect.
Mq F est équivalent à E_3.
Pr $P \in E_3$, on pt écrire :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

pr $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$.

Considérons $\phi : E_3 \longrightarrow F$

$$\phi(P) := f$$

où $f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(n) = a_n$.

ϕ est bijective.
D'autre part, pour $P, Q \in E_3$ et $\phi(P) = f$
$\phi(Q) = g$.

3

$\phi(P+Q) = h$ tq $h(i) = f(i) + g(i)$

car $P(x) = f(n) x^n + \dots + f(1) x + f(0). x^0$.
$Q(x) = g(n) x^n + \dots + g(0). x^0$.

$$(P+Q)(x) = (f(n) + g(n)) x^n + \dots + (f(0) + g(0)) x^0.$$

D'où $\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$.

On pt vérifier que $\phi(\lambda P) = \lambda \phi(P)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in E_3$.

De $(F, +, *)$ et $(E_3, +, *)$ st ≅ mⁿˢ.

Or $(F, +, *)$ est un esp. vect. d'après 1),
il en est de même pour $(E_3, +, *)$.

R D 2 ev s $\mathbb{K}$, V & V^* st isomorphes s'∃ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte ls opéraθs.

si $\varphi(v) = v^*$, $\varphi(u) = u^*$ $\Rightarrow$ $\varphi(u+v) = u^* + v^*$, $\varphi(\lambda u) = \lambda u^*$.

Bonus : Déterminer dim E_3.

$E_3 = \text{Vect}\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$,

car $P \in E_3$: $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$

Donc $\dim E_3 = \text{Card}\{1, X, \dots, X^n\}$
$= n + 1$.

Ex2 soit E un $\mathbb{K}$-ev

1) soit F & G des sous-espaces ev Vect de E.
Mq $F \cup G$ est un ss-espace
$\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

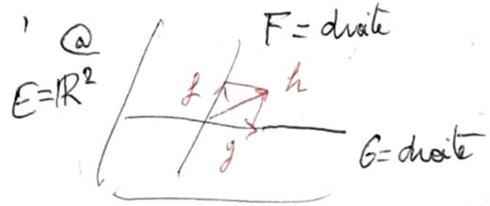
2) soit H un troisième ss-ev de E.
Mq $G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$

Rappel : soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $F \subset E$:

Par définition, F est sous-espace si
$(F, +, \underbrace{*}_{\text{induite}})$ est un ev.

On pt mq F est ss-esp. vect.
$\Leftrightarrow \forall u_1, u_2 \in F : u_1 + u_2 \in F$
& $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F : \lambda u \in F$.

(F est stable p/r à + & ×)

1) 

($\Leftarrow$) si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un ev
si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un ev.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde $F \cup G$ est sev
mais $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
$\exists f \in F : f \in G$.
$\exists g \in G : g \in F$.

Considérons $h := f + g$.
$h \in \text{Vect}(F, G) \subset F \cup G$ par hypothèse car $f \in F, g \in G$ & $h = f + g$.
Or $h \notin F$ car sinon $g = h - f \in F$
ce qui contredit $g \notin F$
$h \notin G$ car sinon $f = h - g \in G$
ce qui contredisant $f \notin G$.
Donc $h \in F \cup G$ mais $h \notin F$, $h \notin G \Rightarrow$?!

2)

Normes, normes équivalentes

Ex 1 : pr $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

on pose $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

$\|a\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$

$\|a\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$

i) Mq pr $p = 1, 2, \infty$; $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Rq soit esp. vect. normé.

On appelle **norme** sur E une applicaO notée $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ vérifiant

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

a) Mq $\|\cdot\|_1$ est une norme.

soit $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, posons $\vec{0} := (0, \dots, 0)$

$b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a $\|a\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 0 \iff |a_k| = 0 \ \forall k$

$\iff a_k = 0, \ \forall k$

$\iff a = \vec{0}$.

Donc $\|\cdot\|_1$ vérifie (i).

Ensuite, $\|\lambda a\|_1 = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Enfin, $\|a+b\|_1 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|$

$\leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)$ car $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$

$= \|a\|_1 + \|b\|_1$ Dc $\|\cdot\|_1$ vérifie (iii)

<u>cl</u> $\|\cdot\|_1$ est une norme.

De m̂ pr $\|\cdot\|_2$; $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$; m̂ raisonn^t que $\|\cdot\|_1$ pr i), ii)

(iii) $\|a+b\|_2 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_2$

$= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2\right)^{1/2}$.

Observons que $\|a+b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$

$\iff \|a+b\|_2^2 \leq \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2\|a\|_2 \|b\|_2$

$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \leq \cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$

En utilisant l'identité, pr $z, w \in \mathbb{C}$

$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$

Le membre de gauche de la dernière ligne est

$\cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + \sum a_k \bar{b_k} + \sum \bar{a_k} b_k$

Par conségt, la dernière égalité est équivlte à

$\sum a_k \bar{b_k} + \sum \bar{a_k} b_k \leq 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$

Par Cauchy-Schwarz,

$|\sum a_k \bar{b_k}| \leq \sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$

Il vient de :

$|\sum a_k \bar{b_k} + \sum \bar{a_k} b_k| \leq |\sum a_k \bar{b_k}| + |\sum \bar{a_k} b_k|$

$= 2|\sum a_k \bar{b_k}|$ car $\sum \bar{a_k} b_k = \overline{(\sum a_k \bar{b_k})}$

$\leq 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$

Dc la dernière inégalité est valable.

D'où iii) vérifiée pr $\|\cdot\|_2$.

Rq Inégalité de Cauchy-Schwarz,

si $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)$$

Considérons enfin la $\|\cdot\|_\infty$,

(i) $\|a\|_\infty = 0 \iff \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = 0$

$\iff |a_k| = 0, \forall k \iff a_k = 0, \forall k \iff a = \vec{0}$.

Dc $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (i)

Puis $\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_\infty$

$= \max_{1\leq k\leq n} |\lambda a_k| = |\lambda| \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |\lambda| \, \|a\|_\infty$

D'où $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (ii).

Ensuite vérifions $\triangle$ I,

$\|a+b\|_\infty = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k+b_k|$

Observons pr $1\leq k\leq n$,

$|a_k+b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| + \max_{1\leq i\leq n} |b_i|$

$= \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$

dc $\|a+b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$.

Ainsi (iii) est vérifié.

D'où $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

b) Mq ces 3 normes st équivalentes.

R.1 Deux normes $\|\cdot\|_I$ & $\|\cdot\|_{II}$ st équivalentes s'$\exists$ 2 constantes $c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E$,

$$c_1 \|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq c_2 \|x\|_I$$

$$\iff \quad c_1 \leq \frac{\|x\|_{II}}{\|x\|_I} \leq c_2.$$

Il suffit de mq $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ (1)

& $n\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_1$ (2)

Pr $\underset{(a_1,\dots,a_n)}{a} \in \mathbb{K}^n$, on a : $\|a\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |a_{k_0}|$ pr 1 cert$_1$ $1\leq k_0 \leq n$

$= \sqrt{|a_{k_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} = \|a\|_2$

Ensuite $\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \iff \|a\|_2^2 \leq \|a\|_1^2$

$\iff \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\cancel{1/2 \times 2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right)^2 = \cancel{\sum |a_k|^2} + 2\sum_{1\leq i, j\leq n} |a_i||a_j|$

$\iff 2\sum |a_i||a_j| \geq 0$ est vrai.

Dc $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$.

Ainsi on a mqé inégalité (1).

Mq $n\|\cdot\|_\infty \geqslant \|\cdot\|_1$,

on a $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|a\|_\infty$

car $|a_k| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| = \|a\|_\infty$

$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n$,

de $\|a\|_1 \leqslant n\|a\|_\infty$ d'où 2).

en concluant (1), (2), (3) : les 3 normes st équivalentes.

c) On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ & $n=2$.
Dessiner les boules unités pr chacune des 3 normes.

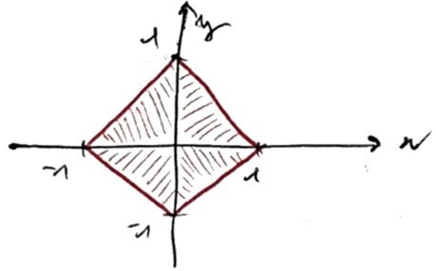
$E=\mathbb{K}^2$. $a(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{B}^1 := \{a\in E,\ \|a\|_1 < 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\}$

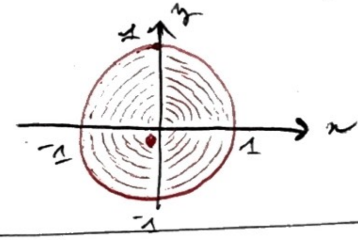
= l'intérieur des carré de sommets (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1). &

Norme 1



$\mathbb{B}^2 := \{a\in E,\ \|a\|_2 < 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|^2+|y|^2} < 1\}$ = le disque unité



$\mathbb{B}^\infty := \{a\in E,\ \|a\|_\infty < 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<1\ \&\ |y|<1\}$

= l'intérieur du carré de sommets (1,1), (-1,-1), (-1,1), (1,-1)