M52-B Topologie & Calculs d'intégrales

Mr. Potyagailo → 1 qθ cours DS. DM.

Chapitre 0 : Rappels sur EV (espaces vectoriels)

Ⓓ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opéraθs suivantes définies entre les élts de V. (vecteurs)

I. Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \to V$ (opéraθ de l'addition.)

$\forall x,y \in V \ (x,y) \to x+y$

$+$ vérifie les axiomes.

$\forall x,y,z \in V$, on a :

a) $x+y = y+x$ (commutativité)

b) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associativité)

c) $\exists\, 0 \in V, \ 0 + x = x$ (élt neutre)

d) $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y = 0$

On note l'élt y : $-x$.

△ (exercice) • Mq 0 est l'élt uniq vérifiant c)

•• Mq $\forall x \ \exists!\, y \in V : x+y=0$

II. Multiplicaθ par scalaire

Cette opéraθ $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

$\lambda \in \mathbb{K}, x \in V \ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ou λx

L'opéraθ $\cdot$ vérifie les axiomes

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall x,y \in V$

a) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

b) $1 \cdot x = x$

c) $(\alpha+\beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivité) ∅ scalaires

d) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Rq On suppose presque toujours que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ⓓ • Un système fini de vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est dit libre si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

.. Un système quelconque de vecteurs $\{e_i : i \in I\} = E$ est dit <u>libre</u> si tout sous-système fini de E est libre.

(i.e. $\forall x \in E$, x n'est pas CL non-triviale des autres vecteurs).

D Soit V un e.v., on dit que V est de dimension $n \in \mathbb{N}$ s'il existe un système de n vecteurs libre et tt système de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

<u>e.g.</u>: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots, e_n = (0, 0 \dots 0, 1)$ sont libres & tt vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$. s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

.. On dit que $\dim V = \infty$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs libres.

<u>e.g.</u>: a) $\dim \mathbb{R}^n = n$

b) L'ens. des f continues $C[a, b] =$
$= \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ est continue} \}$

$C[a, b]$ est un espace vectoriel car si $f, g \in C[a, b] \Rightarrow f + g \in C[a, b]$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in C[a, b]$.

On note que $\dim C[a, b] = \infty$
car $C[a, b]$ contient les polynômes
$1, x, x^2, \dots, x^n$

& $\forall n$, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0$ dans $C[a, b]$

si $P_n = 0 \iff \forall x \in [a, b], P_n(x) = 0(x) = 0$

le TH Principal de l'Algèbre

$\Longrightarrow c_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ est libre.

En plus, $\mathbb{R}[X] = \{$polynômes de coeff de $\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^*[X]$: ens des polynômes sur $[a, b]$ est aussi un espace vectoriel et
$\dim(\mathbb{R}^*[X]) = \infty$.

Par contre $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq n\}$

$\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1$

car $\forall P_n \in \mathbb{R}_n[X] : P_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{R}$

Le système $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base de cet espace.

c) L'ensemble $\ell_2 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\right\}$

ℓ_2 est un espace vectoriel car si

$x, y \in \ell_2 \Rightarrow x+y \in \ell_2$.

En effet, $(x_i + y_i)^2 \leq 2x_i^2 + 2y_i^2$

$\Leftrightarrow x_i^2 + y_i^2 + 2x_iy_i \leq 2x_i^2 + 2y_i^2 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 \geq 0$.

En plus, on a égalité ssi $x_i = y_i \ \forall i$.

Alors $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i+y_i)^2}_{\substack{\Downarrow \\ \text{dc} < \infty}} \leq 2\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}_{\substack{\text{fini} \\ < \infty}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}_{\substack{\text{fini} \\ < \infty}}\right)$$

Somme CV.

En plus $\forall x \in \ell_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in \ell_2$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

$\rightarrow \dim \ell_2 = \infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{n \text{ élts libres}}$

$e_i \in \ell_2$ car $\sum (0 + 0 + \dots + 1 + 0) = 1$.

R9
- Algèbre linéaire traite le cas d'e.v. de dim. finie.
- Analyse traite le cas général.

(D) Deux espaces vectoriels : V & V^* sont isomorphes s'$\exists$ une applicat° bijective (sur $\mathbb{K}$)

$$\varphi : V \longrightarrow V^*$$

q respecte les opérations.

si $\varphi(v) = v^*$, $\varphi(u) = u^*$

alors $\varphi(u+v) = u^* + v^*$

$\varphi(\lambda u) = \lambda u^*$.

φ est une applicat° linéaire bijective.

(D) Un sous-ens. V_1 de l'e.v. V est dit sous-espace de V si V_1 est un e.v. aux mêmes opérat°s.

$\forall\, x, y \in V_1$, $x + y \in V_1$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V_1$, $\lambda x \in V_1$.

e.g. : 1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n \subset \ldots$

2) $\ell_2 \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} \subset \ell_\infty \subset \mathbb{R}^\infty$

où $\mathcal{C}_0 = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ s.e.v

$\mathcal{C} = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = d \in \mathbb{R}\}$ s.e.v.

l'ensemble des suites (CV).

- ℓ_∞ : les suites bornées
- $\mathbb{R}^\infty$: ttes les suites

ℓ^∞ (suites bornées) $\in \mathcal{C}$ (suites cv)

$\ell_2 \subset \mathcal{C}_0$?

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_i = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{C}_0$.

(P) Si $V_i \subset V$ $(i \in I)$

Un sous-espace vectoriel alors

$V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un sous-espace de V.

Preuve : Si $u, v \in V^*$ alors

$\forall i \in I : u, v \in V_i$.

$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i \cdot \forall i \in I$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow u+v \in V^*$

$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

● (D) Soit X un ~~s~~s-ensemble d'un e.v. V.

On note $Vect(X) = \{ v \in V :$
$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i , x_i \in K \}$.

→ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

● Ex Mq $Vect(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i \text{ sev de } X, X \subset V_i \}$

$Vect(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

Preuve : Si $u,v \in V^*$ alors
$\forall i \in I : u,v \in V_i$.
$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i \cdot \forall i \in I$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow u+v \in V^*$
$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

(D) Soit X un ss-ensemble d'un e.v. V.
On note $Vect(X) = \{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, x_i \in K \}$.

→ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

Ex Mq $Vect(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i \text{ sev de } X, X \subset V_i \}$

$Vect(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

$A \subset F \subset V$
$V_0 = Vect(A) = \{ \sum \lambda_i v_i = v, v_i \in A \}$

$\forall x,y,z$ ev

C1 Espaces Vectoriels normés

§1. Définio & exemples

(D) Soit V un (ev) sur $\mathbb{K}$, une fonction $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si elle vérifie
$\forall x,y,z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ - homogénéité
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(Cor 1) (Impliqué p l'Δ de norme)
L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ possède une distance (métriq) : $d(x,y) = \|x-y\|$.

On rappelle qu'une distance $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tq
a. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
b. $d(x,y) = d(y,x)$
c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Preuve Cor 1

a) $\|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$

b) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$

$= \|y-x\| = d(y,x)$

c) vient de 3.

Cor 2

$\forall x,y,z : \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Preuve $\|x-y\| = \|x+(-y)\| \leq \|x\| + \|-y\|$

$= \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

& idem $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$ $\square$

Exemples :

1. $V = \mathbb{R}^n$

a) La norme $\|\cdot\|$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norme euclidienne (1)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

On pose $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ dist ce euclidienne (2)

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est espace euclidien.

Prop $\|\cdot\|$ est une norme.

Preuve. $0 = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \, \|x\|$

L'inégalité triangul^{re} s'obtient de Lemme suivant.

L (Inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz)

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}} \quad \text{(CBS)}$$

ou bien $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$ (CBS).

où $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est produit scal^n euclidien.

$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(e) est une fonct° de 2 vecteurs linéaire sur les 2. (forme bilinéaire).

ex $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Preuve Lemme :

On commence de l'inégalité triviale :

$$\sqrt{a\cdot b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad (*), \quad a \geq 0,\ b \geq 0$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \right)$$

On pose $a = \frac{x_i^2}{\|x_i\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$

$$(*) \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2} \right) \quad (**)$$

On somme sur $i \in \{1,\dots,n\}$ dans $(**)$.

$f : t \to \|x+ty\|$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\frac{x_i^2}{\|x\|^2}$ $\sum x_i^2$

$$\frac{\sum |x_i y_i|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq \frac{1}{2}(1+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|\cdot\|y\| \qquad \square$$

(Rq) historiq

L'inégalité (CBS) pr les sommes a été dmqé en 1821 par Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Victor Bouniakowski l'a obtenu ss la forme intégrale en 1851. Russe (1804-1889).

G. Schwarz l'a redémontré ss la forme intégrale en 1884. (1843-1921).

Fin dm prop $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

on a $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

On obtient $\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ (CBS).

Les autres normes sur $\mathbb{R}^n$ sont :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad (2)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (3)$$

(2) & (3) st des normes. △ I

e.g. $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i|$

idem pr $\|\cdot\|_1$.

2. Cas Complexe

$V = \mathbb{C}^n$, on rappelle que sur $\mathbb{C}^n$,

le produit scalaire (hermitien) est linéaire sur x & en plus il vérifie

- $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x,y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$
- $\langle x,x \rangle \geqslant 0$

le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ est

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}}$$

& $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad (4)$

En remplaçant, x_i^2 par $|x_i|^2$, on obtient (CBS) Inég.

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ pr la norme (4).}$$

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ & $\|\cdot\|_1$ st les mêmes ds le cas complexe.

3. Suites

On considère 3 espaces vectoriels réels.

- $l_2 = \{ (x_i)_n : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$
- $l_1 = \{ \quad " \quad " \quad " \quad , \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \}$
- $l_\infty = \{ \quad " \quad " \quad " \quad , \exists\, c > 0 : |x_i| < c \} \; \forall i$

Dans ℓ_2, on pose $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$.

Tous les axiomes de la norme $\|\cdot\|$ st vérifiés, l'inégalité triangulaire, on obtient comme ceci :

Pour la partie 1), on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{dans } \ell_2.$$

Idem : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |x_i|$

st des normes.

<u>NB</u> : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in \ell_\infty$

car $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \infty$ & $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \infty$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1} \notin \ell_2$

2. Espaces de fonctions

(*) Mq $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p}$ est une norme. <u>(si $p \geq 1$)</u>

Pr cela dmq l'inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (M)$$

$1 < p < \infty$.

en utilisant la convexité (2° dérivée $\oplus$) de la f $t \mapsto t^p$ ($p > 1$).

1

4. Espaces de fonctions

On considère l'ens $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont} \}$

On introduit 3 normes sur $C[a,b]$:

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| f \|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} | f(x) | .$$

$$\| f \|_1 = \int_a^b | f(x) |\, dx .$$

ce sont des normes car e.g. pour $\| \cdot \|$ on a

$$(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2 \quad (\dagger)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f-g)^2 \geq 0$$

En intégrant $(\dagger)$ on obtient :

$$\int_a^b (f+g)^2(x)\, dx \leq 2 \int_a^b f^2(x)\, dx + 2 \int_a^b g^2(x)\, dx$$

On a $f, g \in (C[a,b], \| \cdot \|) \Longrightarrow f+g \in C[a,b]$

~~§2. Topologie des espaces vectoriels normés~~

$f \in (C[a,b], \| \cdot \|)$

$\lambda f \in (C[a,b], \| \cdot \|)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

On a $f+g$

4. Espaces de foncOs

On considère l'ens $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont}\}$

On introduit 3 normes sur $\mathcal{C}[a,b]$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

ce st des normes car e.g par $\|\cdot\|$ on a

$$(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2 \quad (\dagger)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f-g)^2 \geq 0$$

En intégrant $(\dagger)$ on obtient :

$$\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx \leq 2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

On a $f, g \in (\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|) \Rightarrow f+g \in C[a,b]$

~~§2. Topologie des espaces vectoriels normés~~

$f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$

$\lambda f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

On a ~~$f+g$~~ $(\|f\|$ ou $\|f\|_2)$

On prd l' $\triangle$:

on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $a \geq 0, b \geq 0$.

On pose $a = \frac{f^2}{\|f\|^2}$, $b = \frac{g^2}{\|g\|^2}$

D'où $$\frac{|f \cdot g|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{f^2}{\|f\|^2} + \frac{g^2}{\|g\|^2}\right) \quad (*)$$

On intègre $(*)$ sur $[a,b]$ & prd $\sqrt{\ }$.

$$\frac{\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx}{\|f\| \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\int_a^b f^2\,dx}}{\|f\|} + \frac{\sqrt{\int g^2\,dx}}{\|g\|}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

DM $\|f\|_p = \int_0^1 |f|^p$

si $f=0$ ou $g=0$ (clair) sppo $f\neq 0, g\neq 0$,

On pose $\|f\|_p = \alpha$ & $\|g\|_p = \beta$ & $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

dc $1-\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

ĉ $\|f\|_p = \alpha$, $\|g\|_p = \beta$, $\exists$ 2 fs f_0, g_0 tq
$|f| = \alpha f_0$, $|g| = \beta g_0$ & $\|f_0\| = \|g_0\| = 1$.

Puis $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = (\alpha f_0 + \beta g_0)^p$

$$= \left[(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} f_0 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} g_0\right)\right]^p$$

$$= (\alpha+\beta)^p (\lambda f_0 + (1-\lambda) g_0)^p$$

Puisque $f(t) = t^p$ est convexe pr $p \geq 1$

$(f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$.

Dc $|f+g|^p \leq (\alpha+\beta)^p$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^p = \int_0^1 |f+g|^p dx \leq (\alpha+\beta)^p \int_0^1 dx = (\alpha+\beta)^p = \underbrace{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p}_{1} \quad \square.$$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) g(x)|\, dx \leq \|f\| . \|g\|$

Inégalité (CBS) : $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| . \|g\|$

On a $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ⇐ même argument qu'avant

Cours 3 §2 - Topologie d'un espace vectoriel normé

(D) • soit V un e.v.n, un ss-ens $D \subset V$ est dit ouvert si $\forall x \in D$ la boule ouverte :

$B(x,\delta) = \{ y \in V : \|y-x\| < \delta \}$ centrée en x

de rayon δ est contenue dans D.

$B(x,\delta)$ est appelée voisinage de x noté U_x (si $\delta > 0$ n'est pas important)

•• Un ss-ens $F \subset V$ est dit fermé si son complémentaire : $F^c = \{ x \in V, x \notin F \}$ est ouvert.

Notat° - si $D \subset V$ est ouvert. On le note $D \overset{\circ}{\subset} V$

(a) • Les ensembles $\emptyset$ et V sont des ouverts & fermés.

($\emptyset$ est ouvert & $\emptyset^c = V$ est fermé

$\emptyset$ est fermé & V est ouvert).

•• La boule ouverte $B(a,r) = \{ x \in V \mid \|x-a\| < r \}$ est un ss-ens. ouvert.

En effet,

Posons $\delta = r - d(a,x) > 0$ où $x \in B(a,r)$

$\forall y \in \overbrace{B(x,\delta)}^{\|y-x\| < \delta}$, on a $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$

$< d(a,x) + \delta$

$r = d(a,x) + r - d(a,x)$

$\forall y \in B(x,\delta) : y \in B(a,r)$

••• La boule fermée $\overline{B(a,r)} = \{ x \in V, d(a,x) \leq r \}$ est un ss-ens fermé de V.

En effet, mq son complémentaire est ouvert.

$\left(\overline{B(a,r)}\right)^c = \{ x \in V, d(a,x) > r \}$

(δ) on pose $\delta = d(a,x) - r > 0$ pr $x \notin \overline{B(a,r)}$.

Mq $B(x,\delta) \subset (\overline{B(a,r)})^c$

$\forall y \in B(x,\delta)$, on a $d(y,a) \geq d(a,x) - d(x,y)$
$$> d(a,x) - \delta$$
$$= d(a,x) - d(a,x) + r = r$$

.... La sphère $S(a,r) = \overline{B(a,r)} - B(a,r)$ est fermé.
$$= \{x : \|x-a\| = r\}$$

En effet $S^c(a,r) = B(a,r) \cup (\overline{B(a,r)})^c$ est la réunion de 2 ss-ens ouverts (voir ci-dessus) est ouverte p Prop suivante.

Prop 1 : 1. La réunion quelconque de ss-ens ouverts est ouvert.
$\forall$ ens d'indices A, on a :
$$\forall \alpha \in A,\ D_\alpha \circledcirc V \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha}_{D} \circledcirc V.$$

NB : Aucune Restrict° sur la cardinalité de A (e.g. $A = \mathbb{R}$ est possible)

2. Si $D_i \circledcirc V$ $(i=1,\dots,k)$
$$\Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^{k} D_i \circledcirc V.$$

Rq : 2) n'est pas vraie en général pr intersect° d'un nombre infini d'ens
$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$
n'est pas ouvert.

Preuve : 1. soit $x \in D \Rightarrow \exists \alpha \in A$, $x \in D_\alpha$.
Puisque $D_\alpha \circledcirc V$ alors $\exists$ voisinage U_x de x tq $U_x \subset D_\alpha \subset D$.
Donc D est ouvert.

2. si $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,k\}$, $x \in D_i$
Puisque $D_i \circledcirc V$ alors $\exists \delta_i > 0$,
$$B(x,\delta_i) \subset D_i.$$
On pose $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i > 0$
on a $B(x,\delta) \subset D_i$, $\forall i \in \{1,\dots,k\}$
$B(x,\delta) \subset D$, cqfd

Prop 1'. • soit $F_\alpha \subset V$ un ens V fermé $\forall \alpha \in A$

alors $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé dans V.

•• si $F_i \subset V$ est fermé $(i = 1, \dots, k)$

alors $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ est fermé dans V.

Preuve $(\cup)^c = \cap$

indic lois de Morgan

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

(D) Une famille ss-ens ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V est appelée topologie si V si les axiomes suivts st vrais :

1. $\emptyset, V \in \mathcal{U}$
2. Une réunion qq d'ouverts est un ouvert.
3. Une intersectO fini d'ens ouverts est un ouvert.

(Rq) Prop 1 ns dit les boules ouvertes

$$\{B(a, r),\ a \in V,\ r \in \mathbb{R}_+\}$$

engendrent (p les opéra°s $\cup$ qq & $\cap$ fini).

Une famille d'ouverts si evn V.

(D) • soit $A \subset V$, un point $a \in V$ est dit adhérent de A si

$\forall$ voisinage U_a de a, on a $U_a \cap A \neq \emptyset$.

•• Un point $a \in V$ est dit point d'accumulatO de $A \subset V$ si $\exists$ voisinage U_a de a :

$$\mathrm{card}(U_a \cap A) \geq 2$$

••• Un point $a \in A$ est dit isolé si $\exists\, U_a : U_a \cap A = \{a\}$.

•••• Un point $b \in A$ est dit intérieur si $\exists\, U_b : U_b \subset A$.

L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ (ou bien $\mathrm{int}(A)$) est le ss-ens de pts intérieurs de A.

e.g. $A \subset V$ ssi $\mathring{A} = A$.

∴ L'ens $\overline{A} = \{x \in V : x$ est adhérent de $A\}$ est appelé adhérence de A.

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé bord de A.

(ou frontière de A, notée $Fr(A)$).

C Ex

Ex: $[0,1[\cup \{2\} := A$

Donner ts les objets de ① pr A.

Adhérent / pt isolé / pt d'accum / pt intérieur / bord

Bo. $\forall x \in A$, $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}; \|y-x\| < \delta\}$.

$A \in A$, adhérent ?

$\forall U_a$ de A, $U_a \cap A \neq \emptyset$

→ 1 est pt adhérent de A.

$\forall U_1$ de A, $\forall x \in A$, NON

$B(1,\delta) = \{y \in \mathbb{R}, \|y-1\| < \delta\}$

→ 2 pt isolé de A. $\exists U_2 : U_2 \cap A = \{2\}$

→ 0 pt int de A $\exists U_0 : U_0 \subset A$

→ ? $\mathring{A}$

→ 1 pt int de ...

→ PAC $Card(U_a \cap A) \geq 3$ sauf pt 1 ?

→ bord $\partial A = \overline{A} / \mathring{A}$

(P2) soit V un evn alors $\forall A, F \subset V$, on a

1) $x \in \partial A$ ssi $\forall$ voisinage U_x on a $U_x \cap A \neq \emptyset \wedge U_x \cap A^c \neq \emptyset$.

2) F est fermé ssi $\overline{F} = F$.

3) $\overline{A}$ est le plus petit ss-ens fermé contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \subset V \text{ est fermé} \\ A \subset F}} F$$

Preuve 1. (⇒) soit $x \in \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ et U_x tt voisinage de x.

$U_x \not\subset A$ car $x \notin \mathring{A}$

d'où $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.

Puis $x \in \overline{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset$

(⇐) On suppose $\forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

(⇒) $U_x \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow U_x \not\subset A \Rightarrow x \notin \mathring{A}$. ///

2) $F \subset \overline{F}$ par définition de $\overline{F}$

Mq $\overline{F} \subset F$, si $x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ - ouvert

$\exists U_x : U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{F}$.

(⇐) si $x \notin F = \overline{F}$; $\exists U_x : U_x \cap F = \emptyset$ car $x \notin \overline{F}$.

$U_x \subset F^c \Rightarrow F^c$ ⓞ V

dc F est fermé.

///

Preuve 3) Mq $\overline{A}$ est fermé, dc par (δ) :
il suffit de dmq que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

On a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$.

Mq $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, soit $x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow \forall U_x$
$U_x \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

Donc $\exists y \in U_x \cap \overline{A}$.

U_x est un voisinage de y aussi
puisque $y \in \overline{A}$, on a $U_x \cap A \neq \emptyset$.

$\Rightarrow x \in \overline{A}$, dc $\overline{A}$ est fermé.

→ Si F est un fermé q contient (contenant) A.

$F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$.

Soit $x \in F^c$ puisq F est fermé.

$\exists U_x : U_x \subset F^c$ car F^c o V

$\Rightarrow U_x \cap F = \emptyset$.

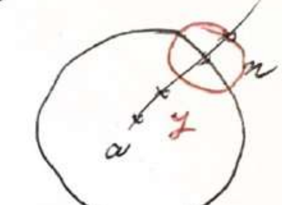
$\Rightarrow U_x \cap A = \emptyset$ car $A \subset F$.

$\Rightarrow x \notin \overline{A}$

On a dmqé $F^c \subset \overline{A}^c \Rightarrow \overline{A} \subset F$. □

Exemple - Prop

- $\overline{B(a,r)} = B(a,r) \cup S(a,r)$ claire
- $\partial B(a,r) = S(a,r)$ à mq



$S(a,r) = \{x \in V : \|x-a\| = r\}$.

Par Prop 2, on doit mq $\forall \delta > 0$, $B(x,\delta) \cap B(a,r) \neq \emptyset$

$\wedge$ $B(x,\delta) \cap B^c(a,r) \neq \emptyset$

On fixe $\delta > 0$ & on pose :
$y = a + \lambda(x-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$y-a$ est colinéaire de $x-a$.

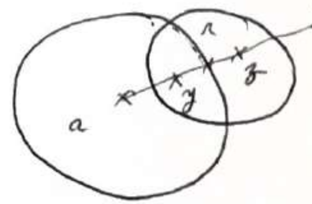
On cherche $\lambda > 0$ tq $y \in B(x,\delta) \cap B(a,r)$. (*)

$\|y-a\| = \lambda \|x-a\| = \lambda r < r$ si $\lambda < 1$

$\|y-x\| = \|a-x\| \, |\lambda-1| = r(1-\lambda)$ car $\lambda < 1$.

$r(1-\lambda) < \delta$
$r - r\lambda < \delta$ → $1 - \frac{\delta}{r} < \lambda < 1$. (*)

(2) Mq $\exists z \in B(x,\delta) \cap B^c(a,r)$



on pose $z = a + \mu(x-a)$

$\mu > 1 \Leftrightarrow \|z-a\| > r$.

$\|z-x\| = \|x-a\| (\mu-1)$, car $\mu > 1$

$r(\mu-1) < \delta$

$1 < \mu < 1 + \frac{\delta}{r} \Rightarrow$ (**). ///

Normes équivalentes

(D) soit V un ev & $\|\cdot\|_i : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 2 normes sur V $(i=1,2)$

$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, noté $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, si $\exists\ C_1, C_2 > 0$ tq $\forall x \in V$, on a :

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \quad (1)$$

ou bien $C = \max(C_1, C_2)$.

$$\frac{1}{C} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \quad (1')$$

⚠ M.q $\sim$ est une relat° d'équivalence.

Affirmat° : si V est de dimension finie alors les 3 normes introduites $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\| (= \|\cdot\|_2)$, $\|\cdot\|_\infty$ st équivalentes.

(Rq) 1 On pt démq une affirmat° + générale que toutes 2 normes sr V st équivalentes.

2 Une boule de r pr la norme $\|\cdot\|_1$ se trouve ds une boule de rayon $c.r$ pr $\|\cdot\|_2$ si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

ex $\|x_n - x\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \|x_n - x\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve de l'affirmat°

$$|x_i| \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$. $= \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$

$$|x_i| \leq \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$$

Par la transitivité, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

(voici une preuve directe p ineg CBS

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i| \leq \|x\|.\|y\|$$

On pose $y = (1,1,\dots,1)$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \|x\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|).$$

NB Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ & $\|\cdot\|_\infty$ ne st pas équivalentes ds $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$.

car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$. car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$ & $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \in \ell_\infty \setminus \ell_2$. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$

$\ell_1 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_1)$, $\ell_2 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2)$

$\ell_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \right\|_\infty = 1$$

§.3 Ss-ensembles denses & nulle part denses

Soit X un espace vectoriel normé ou plus généralement espace métriq muni de la distce $d(\,,\,)$.

(D) Un ss-ens $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

ie $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

(e) 1) $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{Q}^n$ — $\mathbb{R}^n$.

3) Dans $C[a,b]$ & la norme $\sup_{a\leq x\leq b} (f(x)-g(x)) = \|f-g\|_\infty$

$\forall f \in C[a,b], \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ polynôme P_n : $\|P_n - f\|_\infty < \varepsilon$. (Weierstrass)

L'ensemble des polynômes est dense dans $C[a,b]$,

$\forall P_n, \forall \varepsilon, \exists P'_n$ à coeff rationnels tq

$$\|P_n - P'_n\| < \varepsilon.$$

Dans $C[a,b]$, les polynômes à coeffs rationnels st denses

(D) Un espace X est $\boxed{\text{séparable}}$ s'$\exists$ un ss-ens dense dénombrable.

Les exemples 1),3) st séparables.

Par contre, $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable

En effet, on considère les suites

$A=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ tq $a_n\in\{0,1\}$

On sait que $\text{card}(A)=\text{card}(\mathbb{R})=\aleph_1 > \underset{\text{card}(\mathbb{N})}{\aleph_0}$ aleph

$(a_n)_n,(b_n)_n\in A$ $\|a_n-b_n\|_\infty = 1$ si $(a_n)_n\neq(b_n)_n$.

Les ens $A\cap B(a,\frac{1}{2})$, $a\in A$ st disjoints

si $B\subset(\mathbb{R}^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ est dense alors chaque boule $B(a,\frac{1}{2})$ contient un $b\in B$.

$\text{Card}(\{B(a,\frac{1}{2}), a\in A\}) = \text{card } A$.

Dc B n'est pas dénombrable.

(D) Un ss-ens A d'un espace métriq (ou evn) X est dit nulle part dense (n.p.d.) si $\forall$ boule $B(a,r)\subset X$, $\forall a\in X, \forall r>0$, $\exists$ sous-boule $B\subset B(a,r)$ tq $A\cap B=\emptyset$.

Rq 1) Cette ppté est opposée à la densité.

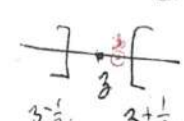
eg $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en étant dense ds $\mathbb{R}$ ne st pas npd.

2) $\mathbb{N}$ & $\mathbb{Z}$ st n.p.d ds $\mathbb{R}$.

Tout ss-ens ne contenant que des points isolés est n.p.d.

(Ds chq pt $\exists$ un voisinage :)

$z\in\mathbb{Z}$, $\text{card}(\mathbb{Z}\cap B(z,\frac{1}{2}))=1$



$]z_0-10^{-2021}, z_0+10^{-2021}[\,\cap\,\mathbb{Z}=\emptyset$

$z_0\in\,]z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}[$

$z_0\neq z$.

En TD on verra @ appelé ens de Cantor :

$\mathcal{C} \subset [0,1]$ m.p.d.

$\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable $\left(\text{card}\, \mathcal{C} = \text{card}\, \mathcal{C}[0,1] = \text{card}\, \mathbb{R} = \aleph_1\right)$

Longueur totale des intervalles disjoint de $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ est 1.

3) ⚠ La définiƟ de mpd d'un ens est équivalente à

A est mpd ssi $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

($\Leftarrow$) En effet si $B(a,r) \in X$ est une boule.

Puisque $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$, $B(a,r) \not\subset \overline{A}$.

$\Rightarrow \exists\, b \in B(a,r) \cap \overline{A}$

$\overline{A}^C$ est ouvert $\exists\, B' = B(b,r') \subset \overline{A}^C$.

Donc $B' \cap A = \emptyset$.

($\Rightarrow$) si $\forall$ boule $B(a,r)$ contient $B' \in B(a,r)$ tq $B' \cap A = \emptyset$ alors $\forall x \in B'$ on a $x \notin \overline{A}$.

$\Rightarrow B(a,r) \not\subset \overline{A} \Rightarrow \text{int}(\overline{A}) = \emptyset$

□

$\overline{A}^C$ est un ouvert.

4) Cette ppté sera usée ds Th de Baire.

Chapitre II : Espace de Banach

Leçon 1 : Espaces Métriques Complets

§1 : DéfiniƟs & exemples

En 1° année, on a vu tte suite de Cauchy ds $\mathbb{R}$ CV.

d distance de X

(fondamental)

D1 soit (X,d) un espace métriq (e.g. evn), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pts $x_n \in X$ est dite de Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n > n_0, m > n_0$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

@ Tte suite CV $x_n \to a \in X$ est de Cauchy.

On l'a par l' ⚠ I, en effet soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0$:

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \& \quad d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

□

→ La réciproque provoque la suivante def :

D2 Un espace (X,d) est dit complet si tte suite de Cauchy CV dans (X,d).

@ Principal (vu en 1ère année)

$\mathbb{R}$ est complet

@ Triviaux

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\cancel{d}$ distce $|\cdot|$.

En effet $\forall$ ensemble q ne contient que des pts isolés a la ppté :

TE suite de Cauchy se stabilise apcr.

$\exists n_0, \forall m, n \geq n_0 \quad , \quad x_n = x_{n_0}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}.$$

Notons que $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne st pas complets

car $\exists\ (q_n) \subset \mathbb{Q}$:

$$q_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

(q_n) est Cauchy q ne $\cancel{CV}$ ds $\mathbb{Q}$.

Rq / Prop, Un ss-ens $A \subset X$ est Complet ((X,d) est complet) ssi A est fermé ds X.

($\Leftarrow$) En effet, si $(x_n) \subset A$ est une suite de Cauchy puisque X est complet $\exists x \in X$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $x \in \overline{A}$; $\overline{A} = A$ (A est fermé) $\Rightarrow x \in A$.

($\Rightarrow$) si $x \in \overline{A}$, $\exists\ (x_n) \subset A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

(x_n) CV $\Rightarrow (x_n)$ est Cauchy $\Rightarrow x \in A$ car A est complet

dc $\overline{A} = A$.

$\rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ est complet.

$\rightarrow]0,1]$ n'est pas complet.

Encore un "non-exemple"

On considère l'ensemble des polynômes

$$\mathbb{P}[\mathbb{K}] = \{ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K} \}.$$

le sous-ensemble des fs sur $\mathbb{K}$.

On munit $\mathbb{P}[\mathbb{K}]$ de la norme :
$\|P\| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

→ $\mathbb{P}[\mathbb{K}]$ n'est pas complet. ←

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

On pose $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ est une suite de Cauchy.

En effet, $\underset{m>n}{\|P_n - P_m\|} = \left\| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{x^m}{m!} \right\|$

$= \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

D'autre part $\|e^x - P_m\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

& $e^x \notin \mathbb{P}[\mathbb{K}]$.

(Non)- Exemples plus conceptuels

1. $\mathbb{R}^n$ est complet pr chaque norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$
2. ℓ_2 est complet. (suites ∞).

Rq Puisq les 3 normes st équivalentes ds $\mathbb{R}^n$.
(x_n) est de Cauchy ~~p~~ à $\|\cdot\|_1$ ssi ~~p~~ $\|\cdot\|$ ssi p $\|\cdot\|_\infty$

Car eg $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ ssi $\|x_n - x_m\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

On va obtenir la complétude de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ de 2.

Mq ℓ_2 est complet.

On spps $(x_n) \subset \ell_2$ est Cauchy,
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m > n_0$
$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2$ (*)

NB : $x_n = (x_1^n, \dots, x_k^n, \dots)$.
Les indices inférieurs st les coordonnées de x_n
pr le vecteur x_n d'indice n est mis en bas.

Dans (*), $x_i \in \mathbb{R}$, on a

(**) $|x_i^n - x_i^m|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall i \in \{1, \dots\}$

Par (**), $(x_i^n)_n$ est une suite de Cauchy $\forall i \in \{1, \dots, \}$

$\mathbb{R}$ est complet $\Rightarrow \exists\, x_i \in \mathbb{R} : x_i = \lim\limits_{n \to \infty} x_i^n$

On pose $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$

En passant à la limite si $m \to \infty$ dans (*) on a $\|x_n - x\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall n > n_0$.

Il reste à dmq $x \in \ell_2$ ie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ (***)

Pour $\mathbb{R}^n$, on l'a dmqé qu'il est complet.

(***) vient $(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2$

$$\underbrace{x_i^2}_{a+b} = (\underbrace{x_i - x_i^n}_{a} + \underbrace{x_i^n}_{b})^2 \leq 2(x_i - x_i^n)^2 + 2(x_i^n)^2$$

→ On a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \infty$ par (*)

& $\sum (x_i^n)^2 < \infty$ car $x_n \in \ell_2$.

Par le critère de comparaison de séries à termes positifs.

(si $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$)

Donc $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $x \in \ell_2$.

Non-exemple : ici espace de fs cont

$C[a,b]$ n'est pas complet p/r à $\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2\, dt$.

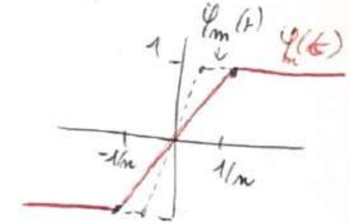
muni de la distance :

$$\|f - g\| = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(on le note $C_2[a,b]$) n'est pas complet.

On considère la suite :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$



On va mq (φ_n) est de Cauchy ds $C_2[-1,1]$ q n'y CV pas.

- (φ_n) est de Cauchy, soit $m > n$,

$\varphi_n = \varphi_m$ si $1 \geq t \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$

$-1 \leq t \leq -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n}$

$$\| \varphi_n(t) - \varphi_m(t) \|^2 = \int_{-1/m}^{1/m} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 \, dt$$

$$= \int_{-1/m}^{1/m} (m-n)^2 t^2 \, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2 dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (-1-nt)^2 dt$$

$$= \frac{(m-n)^2}{3} \frac{2}{m^3} + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{1/n} (1 - 2nt + n^2t^2) \, dt \qquad \frac{\text{CDV}}{t := -1}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(m-n)^2}{m^3} + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - 2n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) + \frac{2n^2}{3}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right)\right)$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{4m^2}{m^3} + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{2n^2}{3} \frac{2}{n^3}\right)$$

$$\leq \frac{8}{3} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{8}{3}\frac{1}{n} = \left(\frac{16}{3} + 2\right) \frac{1}{n} = \frac{8}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\| \varphi_n - \varphi_m \| \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

$$\forall t \in [-1,1], \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$

$\varphi \notin C[-1,1]$, elle est discontinue en 0.

Sppos par contradiction (!!) $\exists f \in C[-1,1]$ tq $\| f - \varphi_n \| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Par l'inégalité de Minkowski (CBS)

$$(*) \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 \right)^{1/2}$$

elle est vraie par la même preuve même si φ est discontinue en 0.

or $\left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\rightsquigarrow f(t) \neq \varphi(t)$ car $f(t)$: continue & $\varphi(t)$: discontinue.

$\psi(t) = \underbrace{(f(t) - \varphi(t))^2}_{\geq 0}$ est cont sur $\mathbb{R}^*$

$\exists t_0 \in \mathbb{R}^* : \psi(t_0) \overset{"c_0"}{>} 0$

Par la continuité de ψ en 0, $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon$

$$\psi(t) \geq 0.$$

L'intégrale à gauche de $(*)$ est minorée par

$$c = \sqrt{2\varepsilon c_0} > 0$$

Donc à droite, on doit avoir :

(23) $\| f - \varphi_n \| \not\to 0$ & $f \notin C[a,b]$

Rq 1) L'ens $C_2[a,b]$ a été remplacé par l'espace $L^2[a,b]$ de foncθ Lebesgue par Henri Lebesgue intég au début du XX^e s.

2) $C_1[a,b] = \left(C[a,b], \int_a^b |f(t)|\, dt = \|f\| \right)$

n'est pas complet à non plus (vu @ livre DU)

$C_\infty[a,b] = \left(C[a,b], \max_{a \le t \le b} |f(t)| \right)$

est complet.

§ 2 : Th sur les boules emboîtées

Th de Baire

Th (sur les boules emboîtées)

soit (X,d) espace métriq complet $(X \neq \emptyset)$

alors $\forall$ suite de boules fermées B_n, emboîtées $B_n \subset B_{n-1}$ $(n \geq 1)$

tq le rayon r_n de $B_n \longrightarrow 0$,

$\exists!$ point $x \in X$ tq

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Preuve Puisque $B_m \subset B_n$ le centre x_m de B_m appartient à B_n, $\forall m > n$

Donc $d(x_n, x_m) \leq r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Alors (x_n) est de Cauchy.

Par la complétude de X :

$$\exists x \in X : x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

D'autre part $\forall n$ fixé, $x_m \in B_n$ & $x = \lim_{\substack{m \to \infty \\ m > n}} x_m$

Dc x est un pt adhérent de B_n.

$\overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n \quad \forall n$.

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ car $x, y \in B_n$ $\forall n$.

Par le m̂ argument alors $d(x,y) \leq 2 r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

cqfd

Rq ① 1° année, on mq m̂ Th pr interv fermés emboîtés dt longueur $\longrightarrow 0$

affirmant qu'il $\exists$ pt commun pr ts les intervalles

C'est le principe de Cauchy - Cantor qi impliq la construcθ de $\mathbb{R}$.

(George Cantor (1845-1918 : allmd), fondt^eur de la Th des ens)

VB.

2) La réciproq du Th est aussi vraie :

si tte suite de boules fermées emboîtées, de rayon $\longrightarrow 0$ possède un pt commun alors l'espace (X, d) est complet.

↳ Idée preuve : soit (x_n) une suite de Cauchy
On pt construire une suite de boules fermées

$$B_n = B_n\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \ \& \text{ mq } \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

où $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

Th de Baire

1874-1932 voir aussi preuve Th de Baire. si analyse & topologie.

soit (X, d) un espace métrique complet (m)
alors toute réunion dénombrable F de ss-ensembles F_n fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

$$\left.\begin{array}{l} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ \text{int}(F_n) = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{int}(F) = \emptyset$$

Corollaire

$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ où A_n est un ss-ens n.p.d

X n'est pas une réunion dénombrable de sous-ensembles n.p.d.

Preuve corollaire.

A_n est npd ssi $F_n = \overline{A_n}$ est d'int vide.

si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ mais $\text{int}(F_n) = \emptyset$

Par le Th de Baire : $\text{int}(X) = \emptyset$ $\boxed{c?!c}$
car $\forall x \in X, \forall r > 0, \ B(x, r) \subset X$. ∎

Rq si $X = \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\}$ réunion dénombrable.
En plus, $\mathbb{Z}$ est complet car chq suite de Cauchy se stabilise $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n, m > n_0 \ ; x_n = x_m$

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_{n_0 + 1}$

$\overline{B_{\mathbb{Z}}\left(m,\frac{1}{2}\right)} = \{m \in \mathbb{Z} : \|m-n\| \leq \frac{1}{2}\} = \{n\}$

$B\left(m,\frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{Z}$ $\left(\begin{array}{l}\text{si on considère } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ \text{int } \mathbb{Z} = \emptyset \text{ ds } \mathbb{R}\end{array}\right)$.

(ds l'échelle de $\mathbb{Z}$, int $\mathbb{Z} \neq \emptyset$).

Preuve Th de Baire

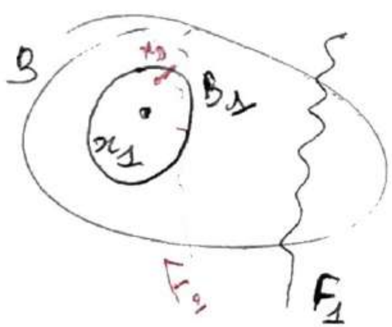
Rp Th de Baire : X est espace métriq complet, mv,

$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $F_i \subset X$ fermé, int $F_i = \emptyset$

$\Rightarrow$ int $F = \emptyset$

Spps que ce n'est pas vrai & int $F \neq \emptyset$

$\exists$ boule ouverte $B \subset F$



On a int$(F_1) = \emptyset$

dc $B \not\subset F_1$.

$\exists x_1 \in B \setminus F_1$.

On note F_1 est fermé dc $F_1^c = X \setminus F_1$ est ouvert

alors $B \cap F_1^c$ est ouvert.

(intersecO de 2 ouverts).

$\exists$ boule ouverte $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

Quitte à diminuer r_1, ops (on pt suppo) la boule fermée

$\overline{B_1} = \overline{B(x_1, r_1)} \subset B \setminus F_1$.

Idem int $F_2 = \emptyset$, $B_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ dc $\exists x_2 \in B_1 \setminus F_2$.

On pose $r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1 - d(x_1,x_2)}{2}\right)$ ~~$d(x_2, \partial B_1)$~~ > 0 car B_1 est ouverte.

Alors $B_2 = B(x_2, r_2)$ vérifie $\overline{B_2} \subset B_1$.

En effet, si $y \in B_2$, $d(y, x_2) < r_2$.

dc $d(y, x_1) \overset{IT}{\leq} d(y, x_2) + d(x_2, x_1)$

$\leq \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{2} + d(x_2, x_1) < r_1$

Donc $\overline{B_2} \subset B_1 \subset \overline{B_1}$.

PR sur k (k le numéro de F_k)

On a une boule $\overline{B_k} = \overline{B(x_k, r_k)}$

tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$.

$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$

(PR) sur k (pour F_k), on a une boule
$\overline{B_k} = \overline{B}(x_k, r_k)$ tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$.

$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$

$\text{int } F_{k+1} = \emptyset \Rightarrow \exists x_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$.

On pose $r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{r_k - d(x_k, x_{k+1})}{2}\right)$

Par la m̂ raison $\overline{B_{k+1}} \subset B_k \subset \overline{B_k}$

& on obtient une suite de boules fermées embôitées

$\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$ tq $\text{rayon}(B_k) = r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Par le (Th) $\boxed{BFE}$ boules fermées embôitées

$\exists_1 (\exists!)\ x \in \bigcap^{\infty} \overline{B_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $x \in B_i \subset F_i^c$ (*)

$\Rightarrow x \notin F_i$

D'autre part $x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ (**)

Contradiction (* & **). $\square$

Annexe (Th) BFE affirme que X est complet

nv $\Rightarrow \forall$ suite de boules fermées embôitées,

tq leur rayon td vers 0 a une intersect° nv.

↳ La réciproque est vraie.

Preuve soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy.

Mq (x_n) (CV), (But) construire une suite de

boules fermées embôitées centrées en $(x_{n_k}) \subset (x_n)$

de rayons $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soit $B_1 = \overline{B(x_1, 1)}$

$\exists n_1\ \forall n > n_1$, $d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2^2}$.

$B_2 = B(x_{n_1}, \frac{1}{2})$

$B_2 \subset B_1$ car $d(y, x_1) \leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_1) \leq$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1$.

$B_2 \subset \text{int}(B_1)$

(PR) ...

$B_2 \subset \mathrm{int}(B_1)$

(PR) si $B_k = B\left(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ est choisie

$\exists n_k, \forall n > n_k, d(x_n, x_k) < \frac{1}{2^{k+1}}$

et $B_{k+1} \subset \mathrm{int}\, B_k \subset B_k$

rayon $(B_k) \longrightarrow 0$ par l'hypothèse.

$\exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$,

on a $d(x - x_k) \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Or $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x$.

Fait : Une suite de Cauchy q ss-(CV) (ie une sous-suite (CV)) (CV).

En effet $\forall \varepsilon > 0$ fixé, on a $\exists k_0$ $\forall k > k_0$; $d(x_{m_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\exists n_0, \forall m > m_0$; $d(x_m, x_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\ell > m_0$.

On pose $n_0 = \max(m_0, k_0)$
$m_k > n_0$.

$\forall m > n_0$; on a

$$d(x_m, x) \leq \underbrace{d(x_m, x_{m_k})}_{\substack{\text{Cauchy} \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{d(x_{m_k}, x)}_{\substack{\text{Cauchy} \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} < \varepsilon.$$

§3. Fonctions cont entre les espaces métriques

soit $f : X \longrightarrow Y$, une f entre 2 espaces métriqs X, Y munis de distances d_x & d_y

(Rq) on dit que :

(D1) $\lim_{\substack{x\to a \\ a\in X}} f(x) = A \in Y \overset{\text{df}}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X$
$0 < d_x(a, x) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), A) < \varepsilon$

(Rq) S'il est clair ds quel espace on est, on note d la distance d_x (ou d_y)

(D2) $f : X \to Y$ est cont en $x_0 \in X$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Donc f est cont en x_0 si la limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\exists$ & est égale à $f(x_0)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$ f n'est pas cont en 0.

D3 $f : X \to Y$ est cont sur X si $\forall x_0 \in X$ f est cont en x_0.

Prop $f : X \to Y$ est cont sur X ssi $\forall$ ouvert $V \subseteq Y$ $f(X)$ l'ens $f^{-1}(V) \subseteq X$.

⚠ ed f cont ssi $\forall$ fermé $F \subset f(X) = Y$, $f^{-1}(F)$ est fermé ds X.

Preuve : ($\Rightarrow$) $y_0 \in V \subseteq f(X)$

$\exists \varepsilon > 0$, $B(y_0, \varepsilon) \subset V$ car $V \subseteq Y$, soit $x_0 \in X \cap f^{-1}(V)$, $f(x_0) = y_0$.

Par continuité de f sur X pr ce $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

ie $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset V$

Donc $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$. ///

($\Leftarrow$) soit $x_0 \in X$ & $y_0 = f(x_0)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ alors $\exists \delta > 0$ tq $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$

car par hypothèse $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ est ouvert.

Donc $\exists \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$

On a obtenu pr $\varepsilon > 0$ qq un $\delta > 0$ tq $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ///

$\square$

DS jeu (TH) Brive.

§4. Le principe d'applicat° contractantes

Th. du pt fixe de Banach

D • soit $f : X \longrightarrow Y$, une applicat° entre 2 espaces métriqs (X, d_X), (Y, d_Y) :
f est appelé k-Lipschitzienne si
$\forall x_1, x_2 \in X$; $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k \, d_X(x_1, x_2)$.

Rq Une applicat° k-lipschitzienne est cont.
$\left(d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \text{ si } \delta < \frac{\varepsilon}{k} \right)$.

•• Une applic $f : X \to X$ est dite S^T contractante si f est k-Lipschitzienne ds $k \in]0,1[$

$(k<1)$

Rq Le mot "Strictement" signifie que les constante $k < 1$

L'applicat° $f : X \to X$ vérifiant
$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ est Contractante.

@ négatif :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

f est contractante mais pas S^T contractante.

$\left(f(x) = \frac{x}{2} \text{ est S}^T \text{ contractante} \right)$.

↳ f est de Classe C^1 sr $\mathbb{R}$, p le TAF,
$\forall x, y$; $\exists c \in [x, y]$

$f(x) - f(y) = f'(c)\,(x-y)$

$$|f'(c)| = \left| \frac{2c}{2\sqrt{c^2+1}} \right| = \left| \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \right| < 1 \quad , \forall c \in \mathbb{R}.$$

Donc $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ dc f est contractante.

Mais si $y \longrightarrow x$, $y \neq x$;

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = |f'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

Mais si $x \to \infty$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

Dc une cte uniforme $k < 1$ tq $|f'(x)| \leq k$ ∄ ici

(Th) (S. Banach[1], 1920)

1) S.B. (1892-1945) : mathn polonais, fondatr grd chapi. de l'analyse fle : espaces de Banach (ev complets) à sa ville de Lwow (ancienne Pologne, mtn Ukraine) le livre de pb ouverts "Scottish book".

(B) a eu 6 ans d'occupat° : 39-41 Soviétiq ; 41-44 Allemand ; 44-45 (3) directr départ Maths

Soit (X,d) un espace métriq complet & $f: X \to X$ est une applicat° s^t contractante alors f possède un uniq point fixe $c \in X$ tq $f(c) = c$.

DM $\exists\, \alpha \in]0,1[$ tq $\forall x,y \in X$

$$d(f(x), f(y)) < \alpha \cdot d(x,y)$$

soit $x_0 \in X$, on pose $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$

$$x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$$

• (x_n) est de Cauchy, en effet pr $m \geq n$, on a :

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha\, d(x_{m-1}, x_{n-1}) < \alpha^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) < \cdots < \alpha^n d(x_{m-n}, x_{n-n})$$

$$= \alpha^n d(f^n(x_0), f^{m-n}(x_{m-n})) \underset{\triangle}{\leq} \alpha^n \left[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \right]$$

$$\leq \alpha^n \left[d(x_0,x_1) + \alpha\, d(x_0,x_1) + \alpha^2 d(x_0,x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-1} d(x_0,x_1) \right]$$

$$\leq \alpha^n d(x_0,x_1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Par la complétude de (X,d) : $\exists\, c \in X$: $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. La f f est cont de

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(c).$$

D'autre part $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} c \Rightarrow \boxed{f(c) = c}$

•• Unicité S'il y a 2 pts fixes c', c'', $d(c', c'') > 0$. alors par contractance de f, on a :

$d(f(c'), f(c'')) < d(c', c'')$;

d'autre part $f(c') = c'$; $f(c'') = c''$

& $d(c', c'') < d(c', c'')$ $\boxed{C^{\text{dic}}}$

□

Rq 1) Le Th du pt de fixe de Banach a bcp d'applicaOs : les preuves des gds ThOs suivant se démontrent de ce Th :

- Th Cauchy-Lipschitz de l'∃ des solutiOs des équas diff.
- Th fs implicites

On en verra encore un ci-bas. (i.e. dem Th de Picard)

Charles Emile Picard (1856 - 1941) l'a usé pr les équaOs intégrales, on appelle ce Th du pt fixe Th de Banach-Picard aussi.

(1912)

2) Il y a d'autres Th de pts fixes Th de Brouwer

$f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n$ cont, $\mathbb{B}^n$ boule fermée ds $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists$ point fixe.

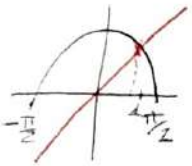
ex $\cos(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$|\cos'(x)| = |\sin(x)| \leq 1$$

si $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $|\sin(x)| = 1$

Banach ne s'applique pas si $\mathbb{R}$,

par contre $\cos : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, on peut appliquer Brouwer.



Puisq $[-1,1]$ un ss-ens fermé de $\mathbb{R}$ & $[-1,1]$ est complet

$\cancel{d}$ $|x-y|$. (⚠)

Un ss-ens fermé ds un espace complet est complet lui-m.

ApplicaO du Th de Banach.

On considère l'applicaO $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$y = f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y, b \in \mathbb{R}^n$.

si $\forall i,j$, $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

alors f est S^T contractante

$\cancel{d}$ à $\|x - y\| = d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

En effet $\|y' - y''\|^2 = \|f(x') - f(x'')\|^2$

$$= \|Ax' - Ax''\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i'')^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x_i' - x_i'')\right)\right)^2}_{BCS}$$

soc
espace complet est complet
: $(Ph)_n$ pas de limite ds ens fermé (...)

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(x'_i - x''_i)\right)\right)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(x'_j - x''_j)^2\right)$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right) d^2(x', x'') = d^2(x', x'') \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

si $|a_{ij}| < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{ij}^2 < \frac{1}{n^2}$,

<u>NB</u>: si $\forall i,j \in \{1, .., n\}$, $|a_{ij}| \geq \frac{1}{n}$

ce n'est pas contractant.

où $d^2(f(x'), f(x'')) \leq \alpha^2 d^2(x', x'')$ → $\underline{\alpha < 1}$.

⚠ (1) Faire idem pr

a) $\mathbb{R}^n_\infty$ de la norme $\|x-y\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

<u>indic</u> mq $d(y', y'') \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \cdot d(x', x'')$

b) $\mathbb{R}^n_1$, $\|x-y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

<u>indic</u> $d(y', y'') \leq \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot d(x', x'')$

→ la cn° que $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ suffit pr la contractante ST ! (33 cnt)

(2) $f : (X,d) \longrightarrow (X,d)$ complet,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq f^{n_0} est ST contractante alors

$\exists !$ pt fixe pr f.

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x_j' - x_j'') \right) \right)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j' - x_j'')^2 \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) d^2(x', x'') = d^2(x', x'') \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

si $|a_{ij}| < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{ij}^2 < \frac{1}{n^2}$,

<u>NB</u>: si $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{ij}| \geq \frac{1}{n}$

le n'est pas contractant.

où $d^2(f(x'), f(x'')) \leq \alpha^2 d^2(x', x'')$ → <u>$\alpha < 1$</u>.

⚠ (1) Faire idem pr

a) $\mathbb{R}^n_\infty$ de la norme $\|x-y\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ que de base

<u>indic</u> mq $d(y', y'') \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \cdot d(x', x'')$

b) $\mathbb{R}^n_1$, $\|x-y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

<u>indic</u> $d(y', y'') \leq \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot d(x', x'')$

→ le cas qd $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ suffit pr la contractante S^T!

S4 Pre contracte (6) PF&B (5) lip (3) S^T contr (4) Banach (TH) Brouwer

(2) $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ complet,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq f^{n_0} est S^T contractante alors

$\exists!$ pt fixe pr f.

Leçon n°2 : Espaces de Banach

(D) Un <u>evn</u> complet est appelé espace de Banach.

(Rq) 1. Un espace de Banach est un cas particulier d'un espace métriq complet.

cf 3 (TH)s vrais/démontrés en Leçon 1 et vrais pr les espaces de Banach : les fermés emboîtés, (TH) de Baire & le (TH) du pt fixe de Banach.

2. Un coroll^r spécifiq pr les espaces de Banach (vu examen)

" un espace de Banach de dim infinie est (nd).

La preuve est basée sur 3 faits :

si $E_n \subset E$, $\dim E_n = n < \infty$,

$\mathrm{int}(E_n) = \emptyset \wedge E_n$ est fermé ds E ; ensuite

le (TH) de Baire implique le résultat. "

Espaces de Banach

@ 1. $\mathbb{R}^n$, l_2, $C_\infty[a,b]$

2. ▸ Négatifs : $C_2[a,b]$ n'est pas complet.

▸▸ $\mathbb{P}[a,b] = \text{Vect}\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ n'est pas complet. On connaît 2 preuves :

a) P le Th de Weierstrass, tt f (eg. e^x) est une limite d'une suite de polynômes. Cette suite est Cauchy ds $C_\infty[a,b]$ car elle cv mais pas vers un polynôme.

b) P le Th de Baire puisq $\mathbb{P}[a,b]$ a une base dénomb.

$\mathbb{P}[a,b]$ n'est pas complet.

En manque de tps de continuer ds les espaces de Banach de dim ∞.

(Voir cours Analyse fonctionnelle M1)

Mtn on descend ds $\mathbb{R}^n$, ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Chapitre III : / Calcul intégral ds $\mathbb{R}^n$:

Leçon 1 : Intégrale sur un pavé de $\mathbb{R}^n$

§1. Déf° de l'intégrale de Riemann & ppté élt

Ⓓ Un pavé I (ou $I_{a,b}$) est l'ens.

$$I = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i\}$$

où les vecteurs $a = (a_1, \dots, a_n)$ & $b = (b_1, \dots, b_n)$ st fixés. Le volume (ou mesure) de I, noté $|I|$ est la qté :

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad (1)$$

Le pavé ouvert $\mathring{I}$ a le m volume

$$|\mathring{I}| = |I|.$$

Ppté élt^{R}

1. $|\lambda I_{a,b}| = |I_{\lambda a, \lambda b}| = \lambda^n |I|$, $\lambda \geq 0$

2. si $I = \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k$ tq $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_m = \phi$ (★)

$$\Rightarrow |I| = \sum_{k=1}^{\ell} |I_k|$$

3. si $I \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k \Rightarrow |I| \le \sum_{k=1}^{\ell} |I_k|$

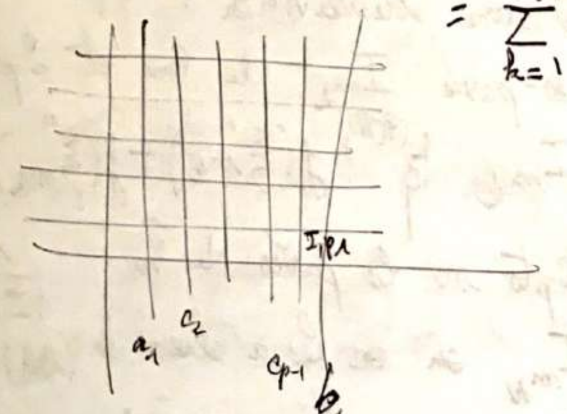
* **Subdivision** := Réunion de ss-pavés d'intérieurs disjoints.

En dim $1 \leq i \leq n$; on a $a_i = c_1 < c_2 < \dots < c_{p_i} = b_i$

$$b_i - a_i = \sum_{i=2}^{p_i} (c_i - c_{i-1})$$

On a $\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{i=2}^{p_i} (c_i - c_{i-1})$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} |I_k|$$

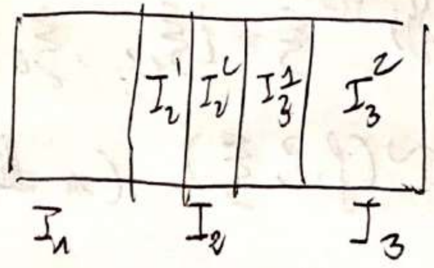


* En effet 1) est évident.

2) μ chaq subdivision de I donnée par I_k (voir ★)

3. si $I \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k$, quitte à subdiviser

I_k ops $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_m = \emptyset$



Alors $I = \bigcup_{k=1}^{\ell} (I \cap I_k)$ qui est une subdivis° de I

3/ 2), $|I| = \sum_{k=1}^{\ell} |I \cap I_k| \leq \sum_{k=1}^{\ell} |I_k|$

car $I \cap I_k$ un ss-pavé de I_k de $|I \cap I_k| \leq |I_k|$.

Sommes intégrales d'une f : $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D Une subdivision P d'un pavé I est donné p (★)

$$I = \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k \ , \ \mathring{I}_k \cap \mathring{I}_m = \emptyset \quad , \ \forall k, m \in \{1, \dots, \ell\}$$

Le diamètre de P noté $\lambda(P)$ est

$$\lambda(P) = \max_{1 \leq k \leq \ell} |I_k| .$$

$P = \{I_1, \dots, I_\ell\}$, l'ens de ttes les subdivis° de I, on noté $\mathcal{P}(I)$.

$\mathcal{P}$

① Pr une f $f : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$,

la somme $\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_i) \cdot |I_i|$

où $P = \{I_1, \dots, I_\ell\} \in \mathcal{P}(I)$, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$.

Ⓓ (principale)

La quantité $\lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$ (si elle $\exists$)

est appelée intégrale de Riemann de f s/ I. & f est dite intégrable s/ I.

On la note $\int_I f(x)\, dx$.

Autres notations $\int_I f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$

ou $\underbrace{\iint \cdots \int}_{n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$
I

intégrales multiples ou double en $\mathbb{R}^2$ ou triple en $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{R}(I)$: l'ens des fs intégrables s/ I.

Prop si $f \in \mathcal{R}(I)$ alors f est bornée s/ I.

Preuve Sppsons que f n'est pas bornée.

Alors $\underbrace{\forall P \in \mathcal{P}(I)}_{\text{subdivision}}$, $\exists$ pavé

$I_{k_0} \in P$: $f|_{I_{k_0}}$ n'est pas bornée.

$\exists\ \xi_1, \xi_2 \in I_{k_0}$: $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| > \frac{1}{|I_{k_0}|}$

$\forall m$, soit $P_m \in \mathcal{P}(I)$ une subdivision :

$\lambda(P_m) < \frac{1}{m}$, $\exists$ ss-pavé I_{m_k} de P_m et 2 pts

$\xi'_{m_k}, \xi''_{m_k} \in I_{m_k}$ tq $(**)$ $|f(\xi'_{m_k}) - f(\xi''_{m_k})| > \frac{1}{|I_{m_k}|}$

soit ξ', ξ'' 2 ~~ens~~ vecteurs de pts s/ les pavés de P_m

qui st les mêmes sauf I_{m_k} où on les a choisi ds $(**)$.

On a $|\sigma(f, P_m, \xi') - \sigma(f, P_m, \xi'')| =$

$= |f(\xi'_{m_k}) - f(\xi''_{m_k})| \cdot |I_{m_k}| > 1$.

La suite mixte suivante

$(\sigma(f, P_m, \xi'_m), \sigma(f, P_m, \xi''_m))_m$

n'est pas Cauchy.

car $\forall m$, $|\sigma(f, P_m, \xi'_m) - \sigma(f, P_m, \xi''_m)|$

et elle ne ⓐ pas. cqfd ≥ 1 $\square$

§2 : Ens de mesure 0

Ⓓ Un ens. $E \subset \mathbb{R}^n$ est dite de mesure 0 si $\forall \varepsilon > 0$ s'$\exists$ un recouvrement de E par un ens au plus dénomb. de pavés $I_1, \dots, I_m$ tq $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ & $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$. //

Fait de la vie (à dmq).

- Un point est de mesure 0.
- Un ens. dé est de mesure 0 (eg. $\mathbb{Q}$).

ⓐ (important)

si $f : I \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une f cont

I est compacte alors son graphe

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in I \subset \mathbb{R}^{n-1}, y = f(x)\}$$

est de mesure 0 (nulle).

⚠ Faire pr $D = [a, b]$  (St)

Preuve : Un fait important (Th de Cantor) : une f cont sur un compact est UN cont :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' : \|x - x'\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Preuve de ce fait. Fixons $\varepsilon > 0$ & notons $\delta(x_0)$ le δ correspondant à ε & à $x_0 \in I$ pr la cont de f en x_0.

Alors $\bigcup_{x_0 \in I} B\left(x_0, \frac{\delta(x_0)}{2}\right)$ est un recouvrement de I par des ouverts.

I est compact $\Rightarrow \exists$ s-recouvrement fini

$$I \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, l\}} B\left(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2}\right)$$

On pose $\delta = \min_{1 \leq i \leq l} \left\{ \frac{\delta(x_i)}{2} \right\}$ tq $\|x - x'\| \leq \frac{\delta}{2}$

si $x, x' \in I$, $\exists i \in \{1, \dots, l\}$, $\|x' - x_i\| < \frac{\delta(x_i)}{2}$

Par $\triangle$ $\|x - x_i\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta(x_i)}{2} < \delta(x_i)$

On a $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$, $|f(x') - f(x_i)| < \varepsilon$ $\Rightarrow |f(x) - f(x')| < 2\varepsilon$.

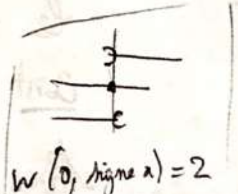
le fait est dmqé

Fixons $\varepsilon > 0$.

On subdivise I en I_i tq $\mathrm{diam}(I_i) < \overset{\delta(\varepsilon)}{\overset{\shortparallel}{\delta}}$ donné par le fait (Cantor).

$$\Gamma_f \subset \underbrace{\bigcup_{i \in \{1,\dots,k\}} I_i \times [-\varepsilon, \varepsilon]}_{C} \text{ , où}$$

$$\mathrm{Vol}(C) \leq \underbrace{2\varepsilon \cdot \delta}_{\varepsilon'} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$



$w(0, \text{signe } x) = 2$

f intégrable

(D) soit $f : I \to \mathbb{R}$ une f & $x_0 \in I$, $U \Subset I$,

La quantité $\sup\limits_{x, x' \in U} |f(x) - f(x')| = w(u)$

est appelée oscillat° de f sur U.

$w(x_0, f) = \lim\limits_{\delta \to 0} w(U_\delta(x_0))$ est oscillat° de f en x_0,

$U_\delta(x_0)$ – δ-voisinage de x_0.

Rq : 1) $w(x_0, f)$ est bien défini car $w(U_\delta(x_0))$ est décroissante p/à δ.

2) f est cont en x_0 ssi $w(x_0, f) = 0$.

L'ens de pts de discontinuité de f, on note $\mathcal{D}_f$.

(Th 1) (H. Lebesgue)

$f \in \mathcal{R}(I)$ $\left(\begin{smallmatrix} f \\ \text{intégrable} \end{smallmatrix}\right)$ ssi f est bornée & $\mathcal{D}_f$ est de mesure 0.

Rq 1) si $\mathcal{D}_f$ est de mesure 0. On dit que f est presque partout (p.p.) cont ou $\mathcal{D}_f$ est négligeable.

2) Henri Lebesgue (1875–1941) – gd mathx français fondateur de la Th moderne d'intégrale (intégrale de Lebesgues, espaces de Lebesgue L_2, L_∞).

Preuve (Th) de Lebesgue

voir feuille n°3 de TD.) pas exam.

(D) soit $P \in \mathcal{P}(I)$ une subdivision de $I = \{I_i\}_i$. On pose

$$s(f, P) = \sum_i m_i |I_i| \quad \text{où } m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$$

$$s(f, P) = \sum_i \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

$$s(f, P) = \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$$

$$S(f, P) = \sum_i \underbrace{M_i}_{\sup_{x \in I_i} f(x)} |I_i| = \sup_{\xi \in I} \sigma(f, P, \xi)$$

On a $\forall P \in \mathcal{P}(I)$, on a

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P) \quad (*)$$

$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I)$,

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \quad (**)$$

$(*) \Rightarrow (**)$ en l'appliquant à $P = P_1 \cap P_2$.

(D) Les quantités

$$\underline{J} = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P), \quad \overline{J} = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

s'appellent intégrales inférieures & supérieures (de Darboux)

(TH 2) (Darboux)

si $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}^n$ (pavé) est bornée alors

$$\underline{J} = \lim_{\lambda(P) \to 0} s(f, P) \quad \& \quad \overline{J} = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P)$$

Rq Gaston Darboux (1842 – 1917)
grd mathx français
(TH) des fs, équas diffs.

Preuve : voir feuille TD.

Cor (Darboux) $f \in \mathcal{R}(I)$ ssi f est bornée & $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$.

Preuve Corollaire :

$(\Rightarrow)$ $f \in \mathcal{R}(I)$ (prop, §1) implique que f est bornée.

Alors le fait que $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi)$ $\exists$ implique

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \sup_{\xi \in P} \sigma(f,P,\xi)$$

$$= \underline{S} = \overline{\mathcal{J}} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$(\Leftarrow)$ si $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$ alors par le TH de Darboux

sppse f est bornée

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$$

car $f \in \mathcal{R}(I)$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0,\ \xi \in P} \sigma(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \square$$

§3 : TH de Fubini

(G. Fubini 1879-1943) un gd prof italien, l'un des fondateurs de l'intégrat° fctvs géom en analyse

TH Fubini

soit $I = X \times Y$ un pavé dans $\mathbb{R}^{n+m}$, où $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ des pavés de dim n & m resp. est intégrable (au sens de Riemann) alors

$$\int_I f(x,y)\, dx\, dy = \int_X dx \int_Y f(x,y)\, dy \quad (1)$$

$x \in X, y \in Y$, $I = X \times Y$

$$= \int_Y dy \int_X f(x,y)\, dx$$

et les intégrales $\int_X dx \int_Y f(x,y)\, dy$ & $\int_Y dy \int_X f(x,y)\, dx$ existent.

Rq : On pose

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,dy \ , \quad G(y) = \int_X f(x,y)\,dx$$

alors (1) se réécrit
$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X F(x)\,dx = \int_Y G(y)\,dy.$$

Si $n = m = 1$, on a :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$
$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Preuve soit $P \in \mathcal{P}(I = X\times Y)$

$P = P_x \times P_y$ où P_x est la restriction $P/_X$

P_y ——— $P/_Y$

$$I = X\times Y = \bigcup_{i,j} X_i \times Y_j \ , \quad X_i \in P/_X ,\ Y_j = P/_Y$$

$$s(f,P) = \sum_{i,j} \inf_{\substack{x\in X_i \\ y\in Y_j}} f(x,y)\cdot [X_i\times Y_j]$$

$$\le \sum_i \inf_{x\in X} \Big(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)\,|Y_j|\Big) \times |X_i|$$

$$\le \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x_i)\times |X_i| \le \sum_i \sup_{x\in X} F(x)\cdot |X_i|$$

$$\le \sum_i \sup_{x\in X_i} \Big(\int_Y f(x,y)\,dy\Big)\,|X_i|$$

$$\le \sum_i \sup_{x\in X_i} \Big(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)\,|Y_j|\Big)\times |X_i|$$

$$\le \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i \\ y\in Y_j}} f(x,y)\cdot |Y_j|\cdot |X_i| = S(f,P)$$

f est intégrable sur $X \times Y \xRightarrow{\text{Darboux}}$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \int_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

De l'inégalité ci-dessus

le Th de Fubini vient.

$\square$

@ $f(x,y,z) = z \cdot \sin(x+y)$

$$\int_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad I = [0,\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \times [0,1]$$

$$\text{Fubini} \Rightarrow \int_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\pi} z \sin(x+y)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\left(\int_0^1 z(\sin(x+y))\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\left[-\cos(x+y)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\,dx\right) = 2.$$

$\ldots = 2$ (42)

→ $\mathbb{R}$ correct : ds preuve Fubini : $F(x) = \int_Y f(x,y)\,dy$

Elle est $=$ à $\begin{cases} \underline{J}(x) & \text{si } \underline{J}(x) = \overline{J}(x) \\ q \in [\underline{J}(x), \overline{J}(x)] & \text{où } \underline{J}(x) < \overline{J}(x) \end{cases}$ $\hat{M}$ si $\exists x$:

$\underline{J}(x) < \overline{J}(x)$, le Th affirme $\int_X F(x)\,dx$ $\exists$ & égale à $\iint_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy$

On verra ci-bas que $\underline{J}(x) = \overline{J}(x)$ presque partout.

⚠ $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}. \end{cases}$

Mq si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

1) $\underline{J}(x) = \overline{J}(x) = |X|$ où $x \in \mathbb{Q}$, $\underline{J}(x) = (1 - \frac{1}{q})|X|$, $\overline{J} = |X|$

si on pose $F(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ alors ⊙ F n'est pas intégrable.

$F(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

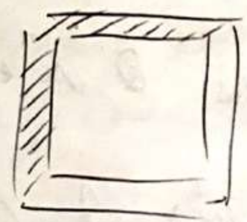
///

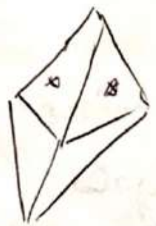
§4. Intégrale sur ens admissible

(D) Un ss-ens borné $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit **admissible** si le bord ∂D de D est de mesure de Lebesgue 0.

@$_1$ Les bords du cube tétraèdre ou plus général d'un polyèdre convexe, compact.

Ds chq cas le bord est constitué d'un nbr fini de morcx bornés de codim 1.



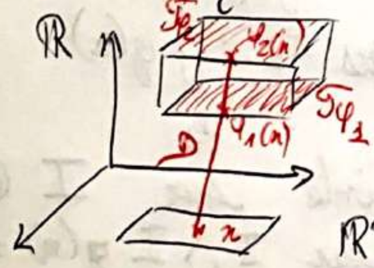


Convexe := interx©θ d'un nbr fini de ss-espaces affines.

$x, y \in C \Rightarrow x + ty \in C, \ \forall t \in [0,1]$

@$_2$ $D = \{(x,t) : x \in I \subset \mathbb{R}^{n-1}, \varphi_1(x) \leq t \leq \varphi_2(x)\} \subset \mathbb{R}^n$

φ_i cont sur I



D est admissible car il est bordé par 2 graphes Γ_{φ_i} des fs <u>cont</u> φ_i & on a @ (cours précdt) que le graphe d'une f <u>cont</u> est de mesure 0.

On a $\partial D = \Gamma_{\varphi_1} \cup \Gamma_{\varphi_2} \cup G$,

$G \subset (\partial I) \times [\ell, L]$.

$\ell = \min\limits_{x \in D} \varphi_1(x)$, $L = \max\limits_{x \in D} \varphi_2(x)$

$\rightarrow$ mesure$(G) = 0$ car ∂I est une réunion finies de pavés de dim $n-1$.

$\partial I \times [\ell, L]$ est dim $n-1$ & de de mesure 0.

@$_3$ Non-exemple.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas admissible car $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ & mesure$(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = [0,1]$ est de mesure 1. (mesure positive).

Stats / Histoire Maths stiff cwd? Ste M52 1)

Rq : 1) Le bord ∂D d'un ens borné est un ens fermé & borné & de compact (voir fiche 2 de TD) & chq recouvrement de ∂D par des ouverts possède un sous-recouvrement fini.

mesure $(\partial D) = 0$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ recouvrement fini $\partial D \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$: $\sum_{i=1}^{\ell} |P_i| < \varepsilon$

2) Un ensemble admissible est souvent appelé **quarrable** (si son bord est de mesure 0)

Ⓓ (Principale)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, un ens admissible alors l'intégrale (de Riemann) $\int_D f(x)\,dx$ de f, $D \to \mathbb{R}$ est la quantité (1) $\int_D f(x)\,dx := \int_{I \supset D} (f \circ \chi_D)(x)\,dx$

où I est n'importe quel pavé contenant D

$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ //

f caractéristiq du domaine

→ La définition ne dépend pas de I selon le lemme suivant :

Ⓛ si I_i $(i=1,2)$ st 2 pavés contenant D alors $\int_{I_1} (f\chi_{D(x)})\,dx$ & $\int_{I_2} (f\chi_{D(x)})(x)\,dx$

existent en même temps & si elles existent elles sont égales.

Preuve : On pose $g(x) = f(x) \cdot \chi_D(x)$.

$I_i \supset D$ $(i=1,2)$.

$I = I_1 \cap I_2 \supset D$.

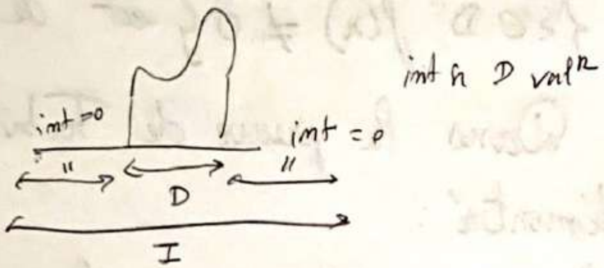
La somme intégrale $\sigma(P_{I_1}, g, \xi)$ Ⓒⓥ vers $\int_{I_1} g(x)$

ssi cette somme restreinte sur I Ⓒⓥ vers $\int_I g(x)\,dx$ car sur $I_1 \setminus I$ $g(x) = 0$

2)

$\iff \sigma(P_{I_2}, g, \xi)$ CV.

On a $\int_{I_1} f(x)\,dx = \int_{I} f(x)\,dx = \int_{I_2} f(x)\,dx$ ///.



TH (Lebesgue) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine admissible (ie bord est de mesure 0) et $f : D \to \mathbb{R}$ une f $f \in \mathcal{R}(D)$ ssi $\mathcal{D}_f$ est de mesure 0 où $\mathcal{D}_f = \{x \in D,\ f$ n'est pas continue en $x\}$.

[Ens de pts de discontinuité de f]

Preuve : $\int_D f(x)\,dx = \int_{I \supset D} (\underbrace{f \circ \chi_D}_{g})(x)\,dx$

$= \int_I g(x)\,dx$

On a $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f \cup \partial D$ car il faut ajouter les points de discontinuité de χ_D q est l'ensemble ∂D.

Mesure $(\mathcal{D}_g) = 0$ ssi mesure $(\mathcal{D}_f)$ est 0. car D est admissible et mesure $(\partial D) = 0$

Par le TH de Lebesgue appliqué à g définie sur I, on obtient le TH. □

D La mesure (de Jordan) d'un ensemble admissible $D \subset \mathbb{R}^n$ est la quantité

$$m(D) := \int_D 1 \,.\, dx = \int_{I \supset D} \chi_D(x)\,dx$$

Camille Jordan (1838 - 1922)

→ TH de Jordan en algèbre,

→ topologie

→ analyse.

D admissible

$m_J(D) = 0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ recouvrement fini $D \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ tq $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon$

⇝ si int = 0, $I \supset D$, subdiv° ⇒ nbre finis vol^d

recouvr^t $< \varepsilon \Rightarrow \sum$ int $< \varepsilon$

Ptés de l'intégrale :

1. L'ens de f intégrable $\mathcal{R}(D)$ sur un domaine admissible $D \subset \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

2. L'intégrale est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{R}(D)$.

$\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$ $\displaystyle\int_D (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_D f(x)\, dx + \mu \int_D g(x)\, dx$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

3. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ tq $m_L(E) = 0$ (mesure de Lebesgue de E)

alors $\displaystyle\int_E f(x)\, dx = 0$ si $f \in \mathcal{R}(E)$.

4. Si D_i $(i = 1, 2)$ st admissibles $m_L(D_1 \cap D_2) = 0$, $f \in \mathcal{R}(D_i)$

alors $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} f(x)\, dx = \int_{D_1} f(x)\, dx + \int_{D_2} f(x)\, dx.$

5. si $f \in \mathcal{R}(D)$, D- admissible, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D$ alors $\displaystyle\int_D f(x)\, dx = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ pour presque tout $x \in D$

(ie $\{x \in D, f(x) \neq 0\}$ est de mesure 0.

Rq : Dans la preuve de Fubini, on a démontré :

(pour Fubini) $\displaystyle\int_X \underline{J}(x)\, dx = \int_X F(x)\, dx = \int_X \overline{J}(x)\, dx$

$\displaystyle = \iint_{X \times Y} f(x, y)\, dx\, dy$

On a $\forall x \in$ $\overline{J}(x) \geq \underline{J}(x)$

Par Fubini, $\int_X (\bar{J} - \underline{J})(x)\, d\lambda = 0$

et $\bar{J} \geq \underline{J}$ alors par 5) : $\bar{J} = \underline{J}$ p.p.

Donc $F(x) = \bar{J}(x) = \underline{J}(x)$ p.p.

At pie Ens admissible : ajouter cette leçon

Leçon 2 : Intégrales multiples sur des ens quelconques

§1 : Intégrale sur un ens. admissible

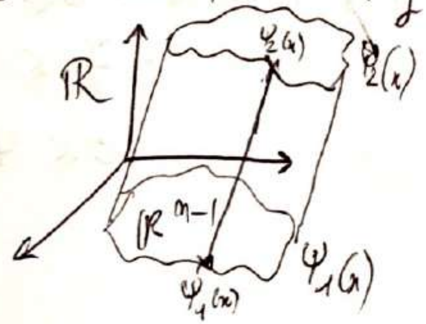
§2 : Pptés de l'intégrale

Voir preuves sur Moodle / voir q° théoriq.

Th de Fubini ds le cas général

soit $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ens borné et

$$E = \{\underbrace{(x,y)}_{\text{vecteurs}} \in \mathbb{R}^n : x \in D,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$



$$f \in \mathcal{R}(E) \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Rq : $f \in \mathcal{R}(E)$ signifie que f est p.p. cont sur E & mesure $(\partial E) = 0$ (E est admissible)
en pie si φ_i $(i=1,2)$ est cont de E est admissible. (voir cours §1)

DM Th Fubini

Pr déf° de l'intégrale $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \iint_{I \supset E} \underbrace{\chi_E(x,y)\cdot f(x,y)}_{g(x,y)}\,dx\,dy$

$$= \iint_I g(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{Fubini pour pavés}}{=} \int_{I_1} dx \int_{I_2} g(x,y)\,dy$$

où $I_1 = I \cap \mathbb{R}^{n-1}$, $I_2 = I \cap \mathbb{R}$

$$= \int_{I_1 \supset D} \chi_D(x)\,dx \int_{I_2 \supset E_x} f(x,y)\,\chi_{E_x}\,dy$$

$E_x = \{(\cdot,y) \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

$$= \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \quad \square$$

§3. Changement de Variable

soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ 2 ouverts, une appli $\varphi : U \longrightarrow V$ est dite difféomorphisme de classe C^1

si φ est bijective de classe C^1 (elle est différentiable & sa dérivée est cont)

($\varphi'(x)$: mat Jacob $\exists$ & cont)

et φ^{-1} est de classe C^1.

ep $Jac(\varphi'(x))$ est une matrice inversible $\forall x \in U$ où $Jac\, \varphi(x) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice jacobienne de φ.

$$\det(Jac(\varphi(x))) \neq 0 \quad \forall x \in U.$$

Th (Changement de Variable)

$\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1,

$D \subset U$ admissible et borné,

$f : \varphi(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ est f bornée

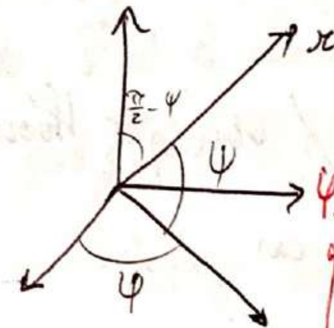
$$\overset{CDV}{\Longrightarrow} \int_{\varphi(D)} f(y)\, dy = \int_D f(\varphi(x))\, |\det \underbrace{\varphi(x)}_{Jac}|\, dx \quad (1)$$

Soit $B = (0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \leq R\}$

Calculons $Vol(B(0,R))$, par la définition :

$$Vol(B(0,R)) = \iiint_{B(0,R)} dx\, dy\, dz$$

On utilise le CDV donné par les coordonnées sphériques



$0 \leq r < \infty$

$$\varphi : \begin{cases} z = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = r \sin \psi \\ x = r \cos \psi \cdot \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Sur $B(0,R)$, on a $0 \leq r \leq R$

$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\det(\mathrm{Jac}\,\Psi) = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos\psi$$

$$\mathrm{Vol}(B(0,R)) = \int_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r^2 |\cos\psi|\, d\psi$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2\, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos\psi|\, d\psi$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi + \int_{-\pi/2}^{0} -\cos\psi\, d\psi\right)$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{4\pi^2 R^3}{3}$$

//

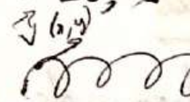
Leçon 3 Intégrales curvilignes. Formule de Green-Riemann.

(On se limite à $\mathbb{R}^2$ bien qu'on puisse le faire en $\mathbb{R}^n$)

Un champ de vecteur $\vec{V} = (P,Q)$ donné sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ est la donnée d'une f vectorielle

$$\forall (x,y) \in D \longrightarrow \vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \in \mathbb{R}^2.$$

Une courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ est une applicat° différentiable (lisse).



Un exemple de $\vec{V}$ est le champ gradient

$$\vec{V}(x,y) = \operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}_{P}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}_{Q}\Big)$$

où $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2.

Par le Thm de Schwarz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ (1)

$(f \in C^2(D))$.

ce q implique que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (2)

⚠ $D = [0,1]\times[0,1]$ alors (2) implique que le champ $\vec{V}=(P,Q)$ est un champ de gradient de $\exists$ la f f (potentielle du champ) tq $\nabla f = \vec{V}$. Ceci n'est plus vrai sur des domaines non simplement connexes.

Intégrales Curvilignes

Soit $\vec{V}=(P,Q)$ un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ une courbe lisse. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$.

Alors la quantité : ← est appelée integ curviligne de $\vec{V}$ sur courbe γ.

(3) $\int_\gamma <\vec{V}, d\gamma>$ où $<\vec{V}, d\gamma>$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{V} = (P(x,y), Q(x,y))$

et $d\gamma(t) = (dx(t), dy(t))$.

Donc $\int_\gamma <\vec{V}, d\gamma> = \int_\gamma <(P,Q),(dx(t),dy(t))>$

$$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy \quad (4)$$

$$= \int_0^1 \left[P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\,\underline{y'(t)}\right] dt$$

Ex $\int_C y\,dx - x\,dy$; $C = S((a,b),r)$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$

$= -2\pi r^2$

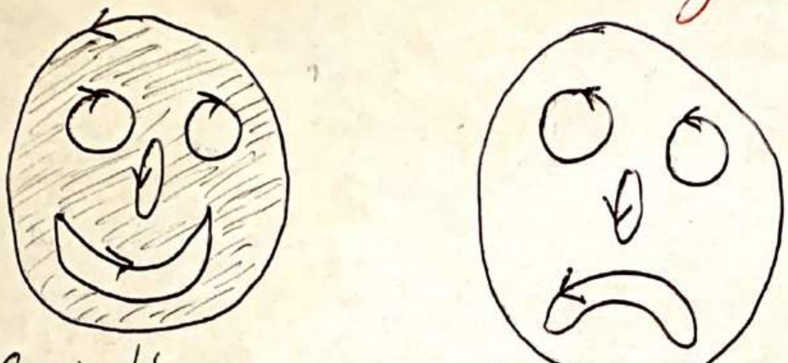
Th (Green - Riemann)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine bordé p un nbr fini de courbes lisses γ_i $(i=1,\dots,k)$ co-orientées avec D alors $\forall$ champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ de classe C^1 on a :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$\partial D = \bigcup_{i}^{k} \gamma_i.$$

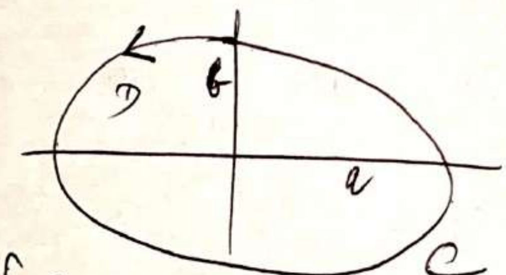
Coorienté := lorsqu'on parcourt γ_i le domaine reste sur la gauche.



Coorienté

Non-coorienté.

ⓐ C est une ellipse



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\int_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy \underset{(GR)}{=} \iint_D (-1-1)\,dx\,dy$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} -2\int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy = \dots = -8ab\,.$$

51