TD1 : Le plan euclidien

Métrique euclidienne

Le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathcal{P}$. Il est muni de la distance euclidienne

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

pour tous $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dans $\mathcal{P}$.

Pour un point M et un ensemble $\mathcal{X}$ on note la distance de M à $\mathcal{X}$ par

$$d(M, \mathcal{X}) \coloneqq \inf_{X \in \mathcal{X}} MX.$$

Et on dit que $N \in \mathcal{X}$ réalise la distance $d(M, \mathcal{X})$ si $MN = d(M, \mathcal{X})$.

Exercice 1 (Projeté orthogonal)

Soient A un point et $\mathcal{D}$ une droite du plan. On rappel que le *projeté orthogonal* $\pi_{\mathcal{D}}(A)$ de A sur $\mathcal{D}$ est l'intersection de l'unique droite perpendiculaire[1] à $\mathcal{D}$ passant par A.

a) Exprimer les coordonnées du projeté H en fonction de celles de A et d'une équation de $\mathcal{D}$.

b) Montrer que H réalise la distance de A à $\mathcal{D}$.

c) Montrer que H réalise la distance de A au demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ et ne contenant pas A. Quelle est le point qui réalise la distance entre A et l'autre demi-plan ?

d) Etant donnés deux points $B, C \in \mathcal{D}$, quel est le point qui réalise la distance de A au segment $[BC]$?

Exercice 2 (Intersection droite/cercle)

a) Étudier l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}(A, r)$.

b) Montrer que quand $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(A, r) = \{H\}$ (resp. $\{M, N\}$), alors le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est H (resp. le milieu de $[M, N]$).

1. Deux droites sont perpendiculaires si elles se coupent en formant un angle droit, ou encore si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

Exercice 3 (Inégalité triangulaire)

Soient A, B, C trois points du plan.

a) Donner une paramétrisation de la droite (BC). Comment est paramétré le segment $[BC]$?

b) Montrer que si $A \in (BC)$, alors $AB + BC \geqslant AC$ avec égalité si et seulement si $A \in [BC]$.

c) Pour $A \neq C$, en considérant le projeté orthogonal de B sur (AC), montrer que

$$AC \leqslant AB + BC,$$

avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$. Et si $A = C$?

d) Retrouver cette inégalité (et le cas d'égalité) en rappelant que $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 4 (Intersections de cercles)

a) Étudier l'intersection des deux cercles $\mathcal{C}(A_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(A_2, r_2)$ en fonction de la distance $d \coloneqq A_1A_2$ entre les centres et des deux rayons r_1 et r_2.

b) Sous quelle condition sur les réels a, b, c existe-t-il un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c ? Comment se simplifie cette condition si $a \leqslant b$? et si $a \leqslant b \leqslant c$?

Exercice 5 (Convexes et inéquations)

a) Donner un système d'inéquations linéaires dont l'ensemble de solutions est le carré unité.

b) Soient $A(1, 2)$,$B(4, 1)$ et $C(3, 4)$ trois points du plan euclidien. Donner un système d'inéquations linéaires dont la solution est l'intérieur du triangle $\triangle ABC$.

Exercice 6 (Projection sur un convexes)

a) Montrer que $O(0, 0)$ réalise la distance de $M(-1, -1)$ au carré unité. Combien vaut cette distance ?

b) Soient $A(1, 2)$,$B(4, 1)$ et $C(3, 4)$ trois points du plan euclidien. Montrer que A réalise la distance de $M(-1, -1)$ au triangle $\triangle ABC$. Combien vaut cette distance ?

c) Quel point réalise la distance de $N(1, 0)$ au triangle $\triangle ABC$. Combien vaut cette distance ?

Le théorème de Pythagore

Exercice 7

Dans le triangle $\triangle ABC$, la médiane AD est perpendiculaire à la médiane BE. Trouver AB en sachant que $BC = 6$ et $AC = 8$.

Exercice 8

Sur l'hypoténuse AB du triangle rectangle $\triangle ABC$, tracer à l'extérieur du traiangle le carré $ABLH$. En sachant que $AC = 6$ et $BC = 8$, trouver CH.

Exercice 9

Les mesures des côtés d'un triangle rectangle sont 60, 80 et 100. Soit un point sur l'hypoténuse, qui divise le triangle en deux triangles de périmètre égal. Trouvez la distance entre ce point et le sommet de l'angle droit.

Exercice 10

Sur les côtés AB et DC du rectangle $ABCD$, les points F et E sont choisis de manière à ce que $AFCE$ soit un losange. Si $AB = 16$ et $BC = 12$, trouvez EF.

Exercice 11

Soient un triangle $\triangle ABC$, P un point à l'intérieur du triangle dont les projections sur les côtés du triangles sont respéctivement $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$ et $C' \in [AB]$. En sachant que $AC' = 12$, $C'B = 6$, $BA' = 8$, $A'C = 14$ et $CB' = 13$, déterminer la longeur de $B'A$.

Exercice 12

Un cercle de rayon 3 est inscrit dans un carré. Un deuxième cercle est inscrit entre le carré et le premier cercle. Déterminer le rayon du deuxième cercle.