M

AL

M-ALG

1.1. Connecteurs logiques

- Néga°, disjc°, conjc°, implica°, équivlce
  - Rs → ρ disjct cas.
  - P ou $Q = Q$ ou P / P et $Q = Q$ et P

LDM $\overline{P \text{ et } Q} \iff \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$ / $\overline{P \text{ ou } Q} \iff \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$.

Contraposée : $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

1.2. Langage ensembles

$\mathcal{P}(E)$ et produit cartésien $E_1 \times E_2$.

1.3. Opérations ensembles

$\overline{A} = \complement_E^A$ ou $E \setminus A$.

1. $A \subset B = A \cap B = A \iff A \cup B = B$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \iff \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$: y peut DÉPENDRE x.
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$: il existe 1 y + grd y tt nbr x.

1.4. Divers types raisonnements

R direct ; R contraposée ; R absurde ;
R par récurrence ; contre - exemple.

1.5. Applica°

$f : E \to F$ applica°

- graphe applica° : $Gf = \{x, f(x) ; x \in E\}$.
- Composée Applica°s : $g \circ f : E \to G$, $g \circ f(x) = g(f(x))$
- Restric° Applica° : $f_{/A}$.
- Prolong^t Applica° : $f_{/[0, +\infty[} = id_{[0, +\infty[}$

1.5. Image directe

A : partie de E ; $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$.

$f(E) = Im(f)$

B : partie de F ; $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

- f admet une applica° ssi f est BIJECTIVE.
- f est SURJECTIVE ssi $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
  (tt él^t de f admet au moins un antécédent par f)
- f est INJECTIVE ssi $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
  (admet au plus une solu°)

- f est bijective ssi $\forall y \in F, \exists!\, x \in E, y = f(x)$.
- f : surjective $\Leftrightarrow$ / f : injective : unicité
- si $f : E \to F$: bijective $\longrightarrow$ f admet une réciproque.

Si $f : E \to F$: bijective :

- $\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = id_E$
- $\forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = y = id_F$

1.6. Ens finis, Binôme Newton

E est fini s'il contient nbr fini elt : card E (card $\emptyset = 0$)

- Coeff binomial : $\boxed{\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$
- Binôme Newton : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \cdot a^p \cdot b^{n-p}}$

E ens fini de card n, nbr de parties de $\boxed{E = 2^n}$.

$C_n^0 = C_n^n = 1$ & $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$ & $C_n^p = C_n^{n-p}$.

@ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^{-k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(-\frac{1}{2}+1\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

@ Inégalité Bernoulli : $(1+nx) \leqslant (1+x)^n$.

Voir en 11

$f((x,y)) = (z,t) \iff \begin{cases} x+y = z \\ x.y = t \end{cases}$

$(x,y) \to (x+y, xy)$

$\iff \begin{cases} x = z - y \\ -y^2 + zy - t = 0 \end{cases}$

On a l'équaθ en l'inconnue y :

$E : y^2 - yz + t = 0 \longrightarrow \Delta = z^2 - 4t$

Si $\Delta > 0$, E admet 2 soluθs : $\begin{cases} y_1 = \frac{z - \sqrt{\Delta}}{2} \\ y_2 = \frac{z + \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = z \\ y_1 \cdot y_2 = t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{z^2 - \Delta}{4}$.

Si $\Delta = z^2 - 4t > 0$, alors $\exists ! (x,y) \in E$ tq $f(x,y) = (z,t)$

$\alpha = x = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4t}}{2}$, $\beta = y = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4t}}{2}$

$Im(f) = \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2, \ z^2 - 4t > 0 \}$. $S_y \subset \{\alpha, \beta\}$

$f : E \to Im(f)$ est bijective.
$(x,y) \to (x+y, xy)$

$f^{-1} : Im(f) \to E$
$(z,t) \to \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4t}}{2}, \frac{z - \sqrt{z^2 - 4t}}{2} \right)$.

Démo :

On procède par récurrence sur n.

$\underline{n=0}$ C_0^0 : nbr de parties $\Leftrightarrow E=\emptyset$.

$C_0^0 = 1 = \frac{0!}{0!0!} = 1$ $\Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=0$.

<u>Hypothèse de récurrence</u>

On suppose que la propriété est vraie au rang n.

Soit E, $\text{card } E = n+1$; soit $p \leq n+1$ et $B \subset E$

$\text{card } B = p$. Soit $a \in E$ on a $\in B$ ou $a \notin B$

Si $a \in B$, soit $B' = B \setminus \{a\}$, on a $B = B' \cup \{a\}$

$\text{card}' = p-1$.

Si $a \notin B$, $B \subset E \setminus \{a\}$; $\text{card } B = p$.

Or $\text{card } (E \setminus \{a\}) = n$.

D'après (H), nbr de parties B' est C_n^{p-1}. Le nbr de parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$ est C_n^p.

Donc nbr total élmts $C_n^{p-1} + C_n^p$

$$C_n^{p-1} + C_n^p = \frac{n!\,p + n!\,(n-p+1)}{p!\,(n-p+1)!}$$

Or $\left|\begin{array}{l} (p-1)! = \dfrac{p!}{p} \\ (n-p)! = \dfrac{(n-p+1)!}{(n-p)!} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow C_n^{p-1} + C_n^p = \frac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!}$$

$$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p \quad \blacksquare$$

Démo Astuce : Inégalité Bernoulli

$$\underbrace{1+(n+1)x \leq 1+nx+x}_{} \leq (1+x)^n + x$$

$$\text{H} \leq (1+x)^n + x \leq (1+x)^n + (1+x) \leq (1+x)^n(1+x)$$

II 2: Nombres complexes

Définitions & Opérations

- $\mathbb{C}$; i solu° de $x^2 = -1$.
- $\mathbb{C} = \{a+bi,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$.
- $z = a + bi$
- partie réel : $Re(z)$ / partie imaginaire : $Im(z)$.

Opérations ds $\mathbb{C}$:

- $z + z' = a + a' + (b+b')i$
- $z \times z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

① $z = 0 \iff Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

② z : nb réel $\iff Im(z) = 0$ / z : nb imgn^re pure : $Re(z) = 0$

$$\mathbb{R}, +, \times \longrightarrow \mathbb{C}, +, \times$$
$$a \longrightarrow a$$

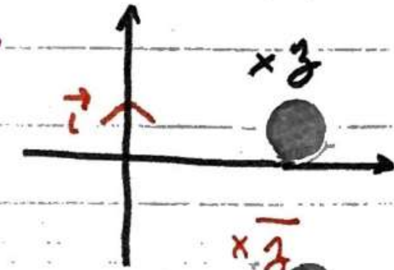
- Formule Binôme ds $\mathbb{C}$: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}}$

- Formule de FACTORISATION : $\boxed{a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k}$

3) Représentation géométrique de $\mathbb{C}$:

l'applica° $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$; $(a,b) \longrightarrow a+bi$ bijective.

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! (a,b)$ tq $z = a+bi$.



→ Axe abcisses : $\mathbb{R}$

→ Axe ordonnées : imagin^{rs} purs $\{i.b, b \in \mathbb{R}\}$
$= i.\mathbb{R}$.

5) Conjugué d'un nombre complexe

$$\bar{z} = Re(z) - i.\, Im(z)$$

① Si $z \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = z$.

② Si $z \in i\mathbb{R}$, $\bar{z} = -z$.

③ $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

④ module $|z|$

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ | $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$ | $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

---------- D-E-M-O ----------

$$\overline{zz'} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

$$\overline{z \times z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa' - bb' - i(a'b + ab')$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a-ib} = \frac{1}{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

2.2. Module & Argument d'un complexe

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Ptés :

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$

DM

Exponentielle imaginaire : $e^{i\theta} := \cos\theta + i \sin\theta$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Proposit° 2.4

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \quad [2\pi]$

FF Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

FF Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

DM

Forme polaire : $z = |z|.e^{i\theta} = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta)$

DM

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \& \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Prop. 2-6 :

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$
- $\arg(z^n) \equiv n.\arg(z) \quad (2\pi)$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad (2\pi)$

2. 3. Equations polynômiales dans $\mathbb{C}$

2.3.1. Racine carrées d'un nbr complexe

Tt nbr cplxe z admet EXACTEMENT 2 RACINES CARRÉES opposées, sont les solu°s équat° : $w^2 = z$.

Méthode géométriq : (voir DM)

- $w^2 = i$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $w = \rho \cdot e^{i\varphi}$

$$w^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right. \quad \left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Les racines de i sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{4}}$

- $w^2 = 1 + i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$; $w_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $w = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Méthode algébrique : (voir DM)

$$(x, y) = \left(\pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right)$$

selon le signe de b.

$$\boxed{\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2xy = y \end{cases}}$$

$z = x + iy$

L'équa° (E) : $z^2 - 3i \cdot z - 3 - i = 0$

admet comme discriminant $\Delta = (-3i)^2 - 4(-3-i)$

$\boxed{\Delta = 3 + 4i}$

Cherchons les racines carrées de $\Delta = 3 + 4i$.

Posons $\boxed{w^2 = \Delta} = 3 + 4i$ & $w = a + ib$.

$w^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \Delta$

$|w^2| = a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2b^2 = 1 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

D'où a vaut 2 ou -2 et b vaut 1 ou -1.

Par ailleurs, d'après $2ab = 4$, a & b st de mêmes signes

donc les racines carrées de Δ sont $\delta = 2 + i$ & $-\delta = -2 -$

$$z_1 = \frac{3i - \delta}{2} \quad \& \quad z_2 = \frac{3i + \delta}{2}$$

$$z_1 = \frac{3i - 2 - i}{2} = -1 + i \qquad z_2 = \frac{3i + 2 + i}{2} = 1 + 2i$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$

$$\cos^2 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

2.3.3. Racines nièmes d'un nbr cplxe

Prop 2-9 $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

z admet n racines nièmes, ce st soluts $w^n = z$
et les racines sont: $\boxed{w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}$

où $k = 0, \dots, n-1$.

Rq

- $w^n - z = \prod_{k=0}^{n-1} (w - w_k)$

- $\begin{cases} w_0 + \dots + w_{n-1} = 0 \\ z = (-1)^{n-1} \cdot w_0 \times \dots \times w_{n-1} \end{cases}$ Somme racines^t nul… Prod^t racines = -…

Posons $w = \rho \cdot e^{i\varphi}$

On aura $w^3 = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{i -\frac{\pi}{4}}$

$\iff \rho^3 \cdot e^{i3\varphi} = e^{i -\frac{\pi}{4}} \times 2\sqrt{2}$

car $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ / $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$.

$\iff \begin{cases} \rho^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

$\iff \begin{cases} \rho^3 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \\ \varphi = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} k\pi \end{cases}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Les racines cubiques de $2 - 2i$ st alors:

$w_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} k\pi\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Ex

$z^4 - (1-i)z^2 - i = 0$

$\Leftrightarrow Z^2 - (1-i)Z - i = 0$

• (E) a pr discriminant $\Delta = 2i$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=2 \\ 2xy=2 \end{cases}$

D'où $x=1$ & $y=1$ car st de m̂s signes.

Racines carrées de $2i$ sont $\delta = 1+i$ & $-\delta$.

$Z_1 = \dfrac{+1+i-\delta}{2}$, $Z_2 = \dfrac{+1-i+\delta}{2}$

$\boxed{Z_1 = -1}$, $\boxed{Z_2 = -2i}$

Z_1 : racines carrées de -1 st 1 & -1

• $w^2 = -2i = e^{i-\frac{\pi}{2}} = \rho^2 . e^{i2\varphi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\varphi = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \{0,1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

D'où $\boxed{S = \{1, -1, e^{-\frac{\pi}{4}}, e^{-\frac{3\pi}{4}}\}.}$

$(z^2-4z+5)^2 + (z+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z^2-4z+5)^2 - i^2(z+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(z^2-4z+5) - i(z+1)][(z^2-4z+5) + i(z+1)] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (z^2-4z+5) - i(z+1) = 0 \\ (z^2-4z+5) + i(z+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + Z(-4-i) + 5 - i = 0 \\ \overline{(1)} \end{cases}$

(1) $z^2 + z(-4-i) + 5 - i = 0$; $\Delta = -5 + 12i$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ x^2-y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}}_{DMS} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 2+3i \\ -\delta = -2-3i \end{cases}$

$\boxed{z_1 = 1 - i}$ & $\boxed{z_2 = 3 + 2i}$

z est une racine de $(E_1) \Leftrightarrow \bar{z}$ est racine de (E_2)

$\Rightarrow S = \{3+2i, 1-i, 3-2i, 1+i\}.$

$\boxed{M}$ géométriq : $z \neq 5$, $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \iff |z-3| = |z-5|$

$M(z)$, $A(3)$, $B(5)$ $\iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \iff AM = BM$

$\Rightarrow$ Dc ens points M est la droite Δ médiatrice sgmt $[AB]$.

$\boxed{M}$ algébriq : $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff |x-3+iy| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|x-5+iy|$

*

$$\left.\begin{aligned}
&\iff \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{(x-5)^2+y^2} \\
&\iff 2\left[(x-3)^2+y^2\right] = (x-5)^2+y^2 \\
&\iff x^2 - 2x - 7 + y^2 = 0. \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2
\end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Cercle} \\ \Omega(1,0) \\ R = 2\sqrt{2}.\end{array}$$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i}{1-i} \Rightarrow \left(\frac{|1+iz|}{|1-iz|}\right)^n = \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = 1$$

Pour $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i}{1-i}$

$$w^n = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \rho . e^{i\varphi}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n}k\pi, \end{cases} k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$\Rightarrow w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$w = \frac{1+ix}{1-ix} \iff x = \frac{w-1}{i(w+1)} \iff x_k = \frac{w_k - 1}{i(w+1)}$$

$\boxed{M* \text{ Bis}}$ $4.AM^2 - 2BM^2 = 0$

$$\iff \underbrace{(2\overrightarrow{AM} - \sqrt{2}.\overrightarrow{BM})}(2\overrightarrow{AM} + \sqrt{2}.\overrightarrow{BM}) = 0$$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$$

$\Rightarrow I = \text{bar}\{(A,2),(B,\sqrt{2})\}.$

avec $I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & \sqrt{2} \\ \hline\end{array}$, $J = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & \sqrt{2} \\ \hline\end{array}$

$\Rightarrow$ Ens pts $M(z)$ est $\mathcal{C}$ diamètre $[IJ]$.

C3 : Polynômes & Fractions rationnelles

1. Polynômes à une indéterminée (X)

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Ⓓ Polynôme à coeff ds K : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k . X^k$, $a_k \in K$

$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

- Si $a_n \neq 0$; a_n : cd (P) [coeff dominant]
- P : polynôme de $K[X]$
- a_0 : coeff cte

Ⓓ Degré polynôme : deg (P)

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k . X^k$, degré P est max. $\max\{0 \leq k \leq n, a_k \neq 0\}$

ⓔ $\deg(2 + X + X^5) = 5$ ‖ $\deg(P) = 0 \iff P$ est cte $\iff P \in K^*$

$\deg(0) = -\infty$

Opérat°s ds $K[X]$: $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$

$c_k = \sum_{0 \leq l \leq k} a_l . b_{k-l}$ $\quad P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k . X^k$

Multiplicat° par scalaire

$\lambda . P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda . a_k . X^k$

$\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q$

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Division euclidienne ds $K[X]$

Ⓓ $A, B \in K[A]$; $B|A$ si $\exists Q \in K[x]$ tq $A = B.Q$

ⓐ $X+i \,|\, X^2+1$ dans $\mathbb{C}[x]$; $X^2+1 = (X-i)(X+i)$

Ⓟ $A, B \in [K]$

$A|B$ & $B|A \iff \exists \lambda \in K^*, A = \lambda.B$ DM-1

Récipq^t, si $\exists \lambda \in K^*, A = \lambda.B$ Alors $B = \frac{1}{\lambda}.A$ dc $B|A$ et $A|B$.

Ⓟ $A, B \in K[x]$, tq $B \neq 0$.

$\exists$ uniq couple (Q, R) ds $K[x]$,

$\boxed{A = BQ + R}$ avec $\deg R < \deg B$ ou $R = 0$

ⓐ

$$\begin{array}{l|l}
X^4 + 2X^2 + X - 1 & X^2 - X + 1 \\
\hline
-(X^4 - X^3 + X^2) & X^2 + X + 2 \\
\hline
X^3 + X^2 + X - 1 & \\
-(X^3 + X^2 + X) & \\
\hline
2X^2 - 1 & \\
-(2X^2 - 2X + 2) & \\
\hline
2X - 3 &
\end{array}$$

$A = B(X^2 + X + 2) + 2X - 3$

3. 2. Racines d'un polynôme

D $P \in K[X]$, $\alpha \in K$,

α : racine de P ssi $P(\alpha) = 0$.

@ $P(x) = X^3 + 2$ → $\sqrt[3]{2}$ est racine
→ $z^3 = -2$ admet 3 racines de $\mathbb{C}$

$z_1 = -\sqrt[3]{2}$; $z_2 = -\sqrt[3]{2} \cdot e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $z_3 = -\sqrt[3]{2} \cdot e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

P α : racine de $P \Leftrightarrow X - \alpha \mid P(X)$

@ $X^3 + 2 = (X + \sqrt[3]{2})(X^2 - \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4})$

$X^3 + 2 = (X + \sqrt[3]{2})(X + \sqrt[3]{2} \cdot e^{2i\frac{\pi}{3}})(X + \sqrt[3]{2} \cdot e^{4i\frac{\pi}{3}})$

@ $$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Racine multiple d'un polynôme

$m \in \mathbb{N}^*$

D α est une racine de multiplicité m de $P(X)$
ssi $(X-\alpha)^m \mid P(X)$ et $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P(X)$

car $(X-\alpha) \nmid Q$ puisq $Q(\alpha) \neq 0$

TH Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$: racines distinctes 2 à 2 P multiplicité $m_1, \dots, m_r$:

$$P(X) = (X-\alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_r)^{m_r} \cdot Q(X)$$

avec $Q(\alpha_i) \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, r$.

Corollaire : $P(x)$ de degré $\leq n$ Alors $P(x)$ admt n racines au plus

- Si nbr racines $P(x)$ > au degré alors P est nul.

D) Polynômes dérivés

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k.a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n.a_n.X^{n-1}$$

$$P^{m}(x) = (P^{m-1})(x)$$

TH
- $(X-\alpha)^m \mid P \iff P(\alpha) = 0 \quad P'(\alpha) = 0 \quad \ldots \quad P^{m-1}(\alpha) = 0$
- α est une racine de multiplicité de $P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{m}(\alpha) \neq 0$.

Ex Appli → Déterminer P / deg $P = 3$.

tq $\underbrace{P(1) = P'(1) = 0}_{\text{racine double}}$; $\underbrace{P(2) = 0}_{\text{racine simple}}$ et $P(0) = 2$.

$P(x) = a(X-1)^2 (X-2)^1$

$P(0) = -2a = 2 \implies a = -1 \implies P(x) = (2-X)(X-1)^2$

3.3. Factorisat°, polynômes irréductibles

↳ premiers

(D) $P(X)$ non constant,

$P(X)$: irréductible ds $K[X]$ si les seuls diviseurs de $P(X)$ st | les ctes $\lambda \in K$
| les polynômes de la forme $\lambda . P(X)$.

(e) Polynômes de degré 1 : $aX+b$; $a \neq 0$, $a, b \in K$.

(TH) D'Alembert-Gauss :

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet au moins une racine ds $\mathbb{C}$.

Rq : Seuls polynômes de degré 1 st irréductibles ds $\mathbb{C}$.

Corollaire : Décomposit° Facteur irréductibles ds $\mathbb{C}$.

$18 = 2 \times 3^2$

Tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$:

$$P(X) = cd(P) . (X-\alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X-\alpha_r)^{m_r}$$

Décomposit° Facteur irréductible ds $\mathbb{R}$.

$$P(X) = cd(P)(X-\alpha_1)^{m_1} \dots (X-\alpha_r)^{m_r} \times (X^2+b_1X+c_1)^{k_1} \times \dots \times (X^2+b_s X+c_s)^{k_s}$$

α_i : racines réelles $P(X)$, $\&$ $b_j^2 - 4c_j < 0$.
b_j & $c_j \in \mathbb{R}$

(e) $X^3+1 = (X+1)(X^2-1+1)$ irréd. ds $\mathbb{R}[X]$

$X^3+1 = (X+1)\left(X-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X-\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$w+\overline{w} = 2\,Re(w)$

$(X-w)(X-\overline{w}) = X^2-(w+\overline{w})X + w\overline{w}$

3. 4. Fractions rationnelles, élts simples

D Une fracθ rationnelle à coeff ds K est un quotient de 2 polynômes : $\boxed{F = \frac{A}{B}}$, $A \in K[X]$, $B \in K[X] \setminus \{0\}$.

@ $\frac{3X^3+5X+1}{(X+1)^2}$ est une fracθ rationnelle ds $\mathbb{R}(X)$.

Fracθ irréductible : Soit $F \in K(X)$, il existe 2 polynômes premiers entre eux A & B tq $F = \frac{A}{B}$.

A & B st premiers entre eux $\Leftrightarrow$ seuls diviseurs communs st les cte $\neq 0$.

Degré Fracθ rationnelle : $F = \frac{A}{B} \Rightarrow \deg F = \deg A - \deg B$.

Pie entière fracθ rationnelle : Soit $F = \frac{A}{B} \in K(X)$. Alors il existe un couple uniq (Q, G) avec Q un polynôme, G fracθ rationnelle tq
$F = Q + G$ & $\deg G < 0$. (Q : pie entière de F)

Élt simple ds $K(X)$ est fracθ rationnelle de la forme $\frac{A}{B^m}$.
(où B : irréductible & $\deg A < \deg B$)

ES de $\mathbb{C}(X)$: $\frac{\lambda}{(X-a)^m}$ | ES $\mathbb{R}(X)$: $\frac{\lambda}{(X-a)^m}$ ou $\frac{\lambda_1 X + \lambda_2}{(X^2+bX+c)^m}$

Décompositⁿ 1 fractⁿ rationnelle en ES

TH.3-6. Décompositⁿ ds $\mathbb{R}(X)$

Soit $G = \frac{R}{B} \in \mathbb{R}(X)$, $\deg R < \deg B$.

- $B = (X-a)^m . (X^2+bX+c)^m . B_1$
- Alors $G = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \dots + \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2+bX+c)} + \dots + \frac{\alpha_m X + \beta_m}{(X^2+bX+c)^m} + \frac{R_1}{B_1}$

$\deg R_1 < \deg B_1$. dq $b^2 - 4ac < 0$.

Décompositⁿ ds $\mathbb{C}(X)$:

$B = (X-a)^m . B_1$

$$G = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \dots + \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} + \frac{R_1}{B_1}$$

- Toute fractⁿ ds $K(X)$ se décompose en somme d'élts s. de $K(X)$.

@ $\frac{X^4+1}{X^3-X}$

$$\begin{array}{r|l} X^4+1 & X^3-X \\ \hline -X^4+X^2 & X \\ X^2+1 & \end{array}$$

calcul pie entière.

$$F = \frac{X^4+1}{X^3-X} = X + \frac{X^2+1}{X(X^2-1)}$$

- $F = X + \frac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$

$$F = X + \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}$$

- $\lambda_1 = \left.\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}\right|_{X=0} = -1$

$\lambda_2 = \left.\frac{X^2+1}{X(X+1)}\right|_{X=1} = 1$

$\lambda_3 = \left.\frac{X^2+1}{X(X-1)}\right|_{X=-1} = 1.$

Ex2 (DE) $P(X)$ par $X-a$.

$$P(X) = (X-a).Q(X) + R(X)$$

$\deg R < 1 \Rightarrow R : \text{cte}$

$P(a) = R$; $P(X) = (X-a).Q(X) + P(a)$

$$P(X) = (X-a)^2.Q(X) + R(X)$$

$\deg R < 2 \Rightarrow R(X) = cX + d$

$$P'(X) = 2(X-a).Q(X) + (X-a)^2.Q'(X) + R'(X)$$

$$\begin{cases} P'(a) = R'(a) = c \\ P(a) = ca + d \end{cases} \iff \begin{cases} c = P'(a) \\ d = P(a) - P'(a).a \end{cases}$$

$$R(X) = P'(a)X + P(a) - P'(a).a$$

$$F = \frac{X^2-X-1}{(X^2-3X+2)(X^2+1)} = \frac{X^2-X-1}{(X-1)(X-2)(X^2+1)}$$

$$F = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X-2} + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+1}$$

$$\lambda_1 = \left.\frac{X^2-X-1}{(X-2)(X^2+1)}\right|_{X=1} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \left.\frac{X^2-X-1}{(X-1)(X^2+1)}\right|_{X=2} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha i + \beta = \left.\frac{X^2-X-1}{(X-1)(X-2)}\right|_{X=i}$$

$\rightarrow$ identifier pie Re & Im.

③

$\boxed{P(X) = X^n + X^{n-1} + X + 1}$

$P(X) = (X-1)^2 Q(X) + R(X)$

$\deg R < 2 \Rightarrow R(X) = \alpha X + \beta.$

$P(1) = R(1) = \alpha + \beta$

$P'(X) = 2(X-1)Q(X) + Q'(X)(X-1)^2 + R'(X)$

$P'(1) = R'(1) = \alpha \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = P(1) \\ \alpha = P'(1) \end{cases}$ distinguer cas

Si $n \geq 2$: $P'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 1$

$P'(1) = 2n$

Si $n = 1$: $P(X) = 2X + 2$; $P'(X) = 2$; $P'(1) = 2$

Si $n \geq 2$: $\begin{cases} P(1) = \alpha + \beta \\ P'(1) = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 2n \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2n + 4 \\ \alpha = 2n \end{cases}$

$\boxed{R(X) = 2nX - 2n + 4}$ si $n \geq 2$

Si $n = 1$: $\begin{cases} P(1) = \alpha + \beta \\ P'(1) = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

$\boxed{R(X) = 2X + 2}$

$X - \alpha \mid P(X) \iff P(\alpha) = 0$

$(X-\alpha)^m \mid P(X) \iff P(\alpha) = P'(\alpha) + \dots + P^{(m-1)}(\alpha) = 0$

④ $A = X - i$ & $B = X^3 - 2iX^2 - i = 0$

$B(i) = i^3 - 2i \times i^2 - i = -i + 2i - i = 0$

$B(i) = 0 \iff X - i \mid B(X)$

$A = X^2 - 1$ & $B = X^3 + X^2 - X - 1$

$B(1) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$ & $B(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 - 1 = 0$

$B(1) = 0$ et $B(-1) = 0$ d'où $X^2 - 1 \mid X^3 + X^2 - X - 1$

⑤ $A = X^2 + 2$ & $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$

- $X^2 + 2 = (X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2})$
- $P(X) = Q(X)(X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2})$
- $P(i\sqrt{2}) = 0$ et $P(-i\sqrt{2}) = 0$
- $P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^4 + (i\sqrt{2})^3 + a(i\sqrt{2})^2 + b(i\sqrt{2}) + 2 = 0$

$P(i\sqrt{2}) = 4 - 2i\sqrt{2} - 2a + bi\sqrt{2} + 2 = 0$

$\iff \mathrm{Re}(P(i\sqrt{2})) = 0$ et $\mathrm{Im}(P(i\sqrt{2})) = 0$

$\iff 2a = 4 + 2$ et $b\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\iff a = 3$; $b = 2$

Dans $\mathbb{R}[X]$

Rq $P(X) \in \mathbb{R}[X]$

$\alpha \in \mathbb{C}$; $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

⑥

① $X^4 - 5X^2 + 4$; on pose $Y = X^2 \Rightarrow Y^2 - 5Y + 4$

$\Delta = 25 - 4\times 4 = 3^2 \Rightarrow Y_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ & $Y_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

$\Rightarrow Y^2 - 5Y + 4 = (Y-1)(Y-4)$ car $1 = \pm 1^2$, $4 = \pm 2^2$

$X^4 - 5X^2 + 4 = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ ds $\mathbb{R}[X]$.

② $X^4 + 5X^2 + 6 \Rightarrow$ on pose $Y = X^2 \Rightarrow Y^2 + 5Y + 6$.

$\Delta = 25 - 4\times 6 = 1$; $Y_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ & $Y_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$

$P(X) = Q(X^2) = (X^2+3)(X^2+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$

• Dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X+i\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})$.

③ $X^4 + X^2 + 1$; on pose $Y = X^2 \Rightarrow Y^2 + Y + 1$.

$Q(Y) = Y^2 + Y + 1$; $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

Les racines de $Y^2 + Y + 1$ sont $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Décompositⁿ ds $\mathbb{C}[X]$

$Y_1 = X_1^2$ et $Y_2 = X_2^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = X_1^2$ et $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = X_2^2$

D'où $X_2^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$, de la forme $\rho\, e^{i\varphi}$.

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0,1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \{0,1\}. \end{cases}$$

$w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad w_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P(X) = \left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$(X - w_1)(X - \overline{w_1}) = X^2 - \underset{2\,\mathrm{Re}(w_1)}{\underset{\shortparallel}{(w_1 \overline{w_1})}}X + \underset{|w_1|^2}{\underset{\shortparallel}{w_1 \overline{w_1}}}$

Dc $P(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ ds $\mathbb{R}[X]$.

CT 4 : Géométrie élémentaire

Algèbre vectorielle

- $\lambda.\vec{u} = |\lambda|.\|\vec{u}\|$
- $\vec{u}$ & $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} = \lambda.\vec{v}$.
- $\vec{w}$ combinaison linéaire de $\vec{u}$ & $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta.\vec{v}$.
- 3 vecteurs coplanaires : l'un est combi lin. des 2 autres.

Vecteurs du plan

Modes de repérage

Coordonnées cartésiennes : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\to \mathbb{R}^2 \\ M &\to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$ bijective.

$\vec{u} + \vec{v} = (a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j}$ avec $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

Coordonnées polaires : $\vec{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{OM}})$. où $r = \|\vec{OM}\|$

Produit scalaire, déterminant

$\vec{u}.\vec{v} = ac + bd$	$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$
BILINÉARITÉ : $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda.\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	BILINÉARITÉ : $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \lambda.\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$
SYMÉTRIQ : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	ANTISYMÉTRIQ :
Définie POSITIVE : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$	$\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$

Rq : • $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

• $\det(\alpha \vec{u}, \beta \vec{u}) = \alpha\beta \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

• $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ & $\vec{v}$ colinéaires.

• $\vec{u}^{\perp} . \vec{v} = -bc + ad = \det(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos\theta$ $\qquad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \sin\theta$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^{\perp} . \vec{v}$

• 2 vecteurs st orthognx si $\vec{u} . \vec{v} = 0$

• $(\vec{u}, \vec{v})$ base orthonormée ssi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$

• 2 vecteurs st colinéaires ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

• Base ON : directe si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ / indirecte $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$

$|\det(\vec{u}, \vec{v})|$: aire du parallélogramme côtés $\vec{u}$ & $\vec{v}$.

Vecteurs Dans l'espace

Produit scal^R : $\vec{u} . \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$

Prodt vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$

où $a = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ où $b = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ où $c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Pptés produit vectoriel :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$
- Produit vectoriel : bilinéaire, antisymétriq

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos\theta$ & $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . |\sin\theta|$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$: Aire parallélogã engendré par $\vec{u}$ & $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ & $\vec{v}$ st colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Déterminant des vecteurs (Produit mixte)

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Calcul
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Produit mixte : trilinéaire & antisymétriq

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

$$\det(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}, \gamma\vec{w}) = \alpha\beta\gamma \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est base $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ coplanaires $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v} + \beta\vec{w}$.

• Si $\vec{u}$ & $\vec{v}$ sont unitaires orthogonaux alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est base orthonormée.

• $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$: volume parallélépipède côté $\vec{u}, \vec{v},$

$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$: volume cube.

• Si $\vec{u}$ & $\vec{v}$ st unitaires orthogonaux alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est base orthonormée.

• $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$: volume parallélépipède côté $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$: volume cube.

Droites dans Plan

(D) $D(A, \vec{u})$ ens points M tq $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ st colinéaires.

$\exists t \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Equa° paramétriq : $\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \end{cases}$

(DM) $M\binom{x}{y} \in D(A, \vec{u}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ st colinéaires

$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \end{cases}$

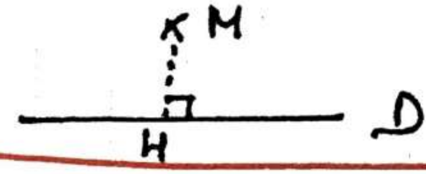
$A(\alpha, \beta)$

(P) $D(A, \vec{n}) : c(x-\alpha) + d(y-\beta) = 0$ où $n = c\vec{i} + d\vec{j}$.

$D(A, \vec{n}) : cx + dy + e = 0$

Rq • $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}^{\perp} = 0 = \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$: (équa° cartésienne) lien

(D) $d(M, D) = \|\overrightarrow{MH}\|$



Distce point à une droite

$$\boxed{d(M,D) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

DM $d(M,D) = \|\overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{AM}\|\,|\sin\theta| = \|\overrightarrow{AM}\| \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}\,|\sin\theta| = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}$

$$d(M,D) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}^{\perp}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_0-\alpha)+b(y_0-\beta)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

• 2 droites // si $\vec{u} = k\vec{u}'$ ou $\vec{n} = k\vec{n}'$ | 2 droites $\perp$ si $\vec{u}\cdot\vec{u}' = 0 = \vec{n}\cdot\vec{n}'$

Ex 1 $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \rightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}_1 = (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2)\vec{u}_1$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_1 = \alpha\vec{u}_1\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2\vec{u}_1 = \alpha$$

$\alpha = \vec{v}\cdot\vec{u}_1 = 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ | $\beta = \vec{v}\cdot\vec{u}_2 = 2\times\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ex 2 $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ne st pas colinéaires.

Aire $(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{22}{2} = 11$

Ex 11 : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A, \overrightarrow{AB}) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff x-2+3y-9=0 \Rightarrow D : x+3y-11=0$ EC

EP $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A, \overrightarrow{AB}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ st colinéaires.

$\iff \exists t \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x-2 = -3t \\ x-3 = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3t+2 \\ y = t+3. \end{cases}$

Plans de l'espace

(D) $\vec{u}, \vec{v}$ non colin. Plan passant par A & engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$ est ens pts tq $\overrightarrow{AM}$ combi. linéaire de $M \in \mathcal{P}(A, (\vec{u}, \vec{v}))$.

$\exists s, t \in \mathbb{R}^2, \ \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$

(P) $M(x, y, z) \in \mathcal{P}(A, (\vec{u}, \vec{v})) \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}^2, \ \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$

$\Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + s\alpha + t\alpha' \\ y = b + s\beta + t\beta' \\ z = c + s\gamma + t\gamma' \end{cases}$ Représentat° param. plan P.

(P) • $M \in P \Leftrightarrow \det(AM, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

• Tout vecteur colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$.

(P) $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-d \\ y-e \\ z-f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow a(x-d) + b(y-e) + c(z-f) = 0$

$\boxed{ax + by + cz + g = 0}$ Équat° Cartésienne

Droites de l'espace

(D) La droite D passant par A, vecteur directeur $\vec{u}$ est ens pts M tq $\overrightarrow{AM}$ & $\vec{u}$ st colinéaires.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AM} = \lambda . \vec{u}$

Représentat° paramétriq droite ds l'espace

$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ ds $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A,\vec{u})$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \lambda\alpha + a \\ y = \lambda\beta + b \\ z = \lambda\gamma + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta x - \alpha y = \beta a - \alpha b \\ \gamma y - \beta z = \gamma b - \beta c \end{cases}$$

1 intersect° 2 plans est 1 droite

(P) $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ & $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ & $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifiant les équat°s :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Représent° cartésienne droite de vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

→ 2 droites orthogonales ⇔ vect. direct°s orthogonaux

→ 2 droites $\perp$ ⇔ ~~se~~ sécantes & orthogonales

(P) D_1 & D_2 deux droites non parallèles. (vtr dir : $\vec{v_1}$ & $\vec{v_2}$)

$\exists$ uniq droite Δ perpendicul^r à D_1 & D_2.

Alors $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ est un vecteur directeur de Δ.

(D) Distance entre D_1 & D_2.

& Δ : perp. commune D_1, D_2.

$d(D_1, D_2) = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|$ où $H_1 = D_1 \cap \Delta$ & $H_2 = D_2 \cap \Delta$.

Calcul Distances

Dist Point / Plan

$$d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|} = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dist Point / Droite

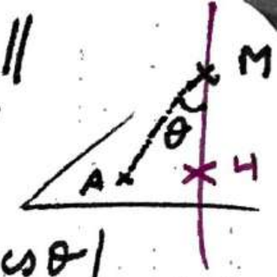
$$d(M,D) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

Dist Droite / Droite

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}\|} = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|$$

DM

$\theta = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{AM})$ où $|\cos\theta| = \dfrac{\|\overrightarrow{MH}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

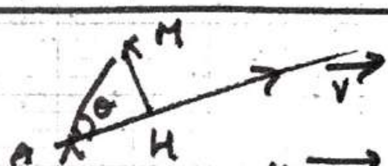


$$d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{AM}\| . |\cos\theta| = \|\overrightarrow{AM}\| \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} |\cos\theta|$$

- $$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\vec{u}.\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

- $$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$



$$\|\overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{AM}\| . |\sin\theta| = \|\overrightarrow{AM}\| . \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} . |\sin\theta| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

D'après Relation Chasles : $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}$

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) = \det(\overrightarrow{A_1H_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + \det(\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + \det(\overrightarrow{H_2A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$$

Puis A_1 & $H_1 \in D_1$ donc $\overrightarrow{A_1H_1}$ & $\vec{v_1}$ sont colinéaires.

- $$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) = 0 + \det(\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) + 0 = \overrightarrow{H_1H_2}.(\vec{v_1}\wedge\vec{v_2})$$

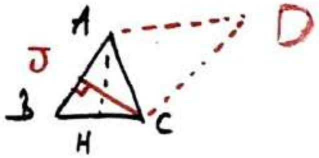
- $$|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})| = \|\overrightarrow{H_1H_2}\| . \|\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}\|$$

$$\|\overrightarrow{H_1H_2}\| = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}\|} = d(D_1, D_2)$$

14 $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ & $C(3,-3)$. $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$

1) Calcul Aire triangle ABC, déduire $d(A, BC)$.

Aire triangle $= \dfrac{\text{Aire parallélog}}{2}$



$$\text{Aire } ABC = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{BC})|}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -6\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times|-22| = 11$$

$$d(A, BC) = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{BC})|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{22}{\sqrt{1^2+(-6)^2}} = \frac{22}{\sqrt{37}}.$$

---

2) $M(x,y) \in D(A, \vec{AB}) \iff \det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$
$\iff \vec{AM} \cdot \vec{AB}^{\perp} = 0$

$$\begin{vmatrix}x+1 & 3\\ y+1 & 4\end{vmatrix} = 4(x+1) - 3(y+1) = 0 \iff \underline{4x - 3y + 1 = 0 : AB.}$$

ou $\vec{AB}^{\perp} \cdot \vec{AM} = 0 \iff \begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = 0 \iff \underline{AB : 4x - 3y + 1 = 0.}$

---

3) JC ? On a $AB : 4x - 3y + 1 = 0$ & $h = d(C, AB) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$h = d(C, AB) = \frac{|4\times3 - 3(-3) + 1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{22}{5}$$

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{\|\vec{AB}\|.h}{2} = \frac{22.5}{10} = 11$$

16

4) $A(1,-1,1)$ & $\perp$ à $D \begin{cases}2x - y + 1 = 0\\ x - y + z = 2\end{cases}$; $P \perp D$.

$$\vec{v} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ est un vecteur normal à P.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P \iff \vec{AM}.\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = -x - 2y - z = 0$$

$$\begin{cases}x = -2s - t\\ y = s\\ z = t\end{cases}$$

---

5) $A(1,1,0)$; $D \begin{cases}2x - y - 1 = 0\\ 3x + z - 1 = 0\end{cases}$; $D \in P$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Pour $y = 0$, $\begin{cases}2x - y - 1 = 0\\ 3x + z - 1 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x = -\frac{1}{2}\\ z = \frac{1}{2}\end{cases}$ Soit $B\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} \in D$.

$\vec{AB}$ est aussi un vecteur q engendre le plan P. $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\-1/2\end{pmatrix}$

$$P : \begin{cases}x = 1 - s - \frac{1}{2}t\\ y = 1 - 2s - t\\ z = 3s - \frac{1}{2}t\end{cases} \iff -2L_1 + L_2 \begin{cases}-2x = -2 + 2s + t\\ y = 1 - 2s - t\end{cases}$$

$P : -2x + y = -1.$

23

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ y = 3 + \frac{x-1}{2} \\ z = -2 + \frac{3x-3}{2} \end{cases} \iff D : \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0. \end{cases}$

2) Trouver m tq $(\overrightarrow{AB}) \perp D$. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$.

$\iff \begin{pmatrix} m-2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \iff 2m - 4 - 2 + 12 = 0 \iff \boxed{m = -3}$

3) Déterminer P q contient D & $P \perp (AB)$

D où $\overrightarrow{AB}$ est vect^{r} normal de P.

Dc P : $ax + by + cz + d = 0 \iff P : -5x - 2y + 4z + d = 0$

• $D \subset P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in P$. $\quad -5 \times (-1) - 2 \times 3 + 4(-2) = -d$

$d = 19$

$\Rightarrow \boxed{P : -5x - 2y + 4z + 19 = 0}$