M44 — Fiche 2 — Exercices corrigés

Les énoncés sont ceux de la fiche "TD2 : barycentres, alignement".
Les exercices non-traités sont laissés en travail personnel.
Les figures se trouvent à la fin du corrigé.

Remarque préliminaire. Nous avons déjà souligné, dans la fiche précédente, que tout problème de géométrie élémentaire peut se traiter par la méthode des coordonnées, même si c'est rarement la manière la plus élégante de s'y prendre… En géométrie affine tout spécialement, l'emploi des coordonnées est en règle générale fort efficace (ce qui ne le rend pas pour autant pertinent).

Exercice 1.

Plaçons-nous dans le repère qui attribue aux points A, B et C les coordonnées $(1, 0)$, $(0, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement. Les points D et E étant sur les axes de ce repère, ils ont des coordonnées respectives de la forme $(x, 0)$ et $(0, y)$; les conditions $BD : DA = 1 : 2$ et $CE : EB = 1 : 4$ permettent ensuite de calculer x et y. En effet, $BD : DA = 1 : 2$ peut encore s'écrire $2x = 1 - x$ d'où $x = 1/3$; et de même, $CE : CB = 1 : 4$ peut encore s'écrire $4(y - 1) = -y$ d'où $y = 4/5$. Maintenant que nous connaissons les coordonnées des cinq points de la figure, nous pouvons en déduire une équation affine de la droite (AE) : soit $4x + 5y = 4$, une équation affine de la droite (CD) : soit $3x + y = 1$, et résoudre le système formé par ces deux équations en les combinant pour obtenir $3(4x + 5y) - 4(3x + y) = 3 \times 4 - 4 \times 1$ soit $11y = 8$ d'où $y = 8/11$ et $(4x + 5y) - 5(3x + y) = 4 - 5 \times 1$ soit $-11x = -1$ d'où $x = 1/11$. Ainsi, les coordonnées de F sont $(1/11, 8/11)$. Puisque les points C, F, D sont alignés sur une droite qui n'est pas verticale, $CF : CD$ est le rapport des abscisses de ces points, soit $(x_F - x_C)/(x_D - x_C) = (1/11 - 0)/(1/3 - 0) = 3/11$.

Exercice 2.

Une résolution dans l'esprit de celle de l'exercice 1 est possible, et nous laissons au lecteur le soin de la rédiger (on se place dans le même repère qu'à l'exercice 1, on a donc $E(1/2, 1/2)$ et $O(t/2, t/2)$ pour un certain $t \in [0, 1]$…) Il est de loin préférable d'employer une méthode plus astucieuse, qui consiste à invoquer l'unique transformation affine f du plan qui fixe B et transpose A et C (elle est unique et elle existe parce que nous l'avons caractérisée par l'image (CBA) du triangle (ABC)). Puisque f transpose A et C, elle fixe le milieu E de $[AC]$; puisqu'elle fixe les deux points E et B elle fixe chaque point de la droite (EB), et en particulier O. De ce fait elle transpose (AO) et (CO), donc elle transpose $D = (AO) \cap (BC)$ et $F = (CO) \cap (BA)$. Comme les transformations affines respectent les rapports de points alignés, puisque $f(O) = O$, $f(C) = A$ et $f(D) = F$ on aura $OF : OC = OD : OA$. Nous connaissons trois des quatre termes de cette égalité, ce qui donne le quatrième $OD = 12 \times (5/15) = 4$.

Exercice 4.

(a). Dans un repère tel que $A(1, 0)$ et $B(0, 0)$, les points de la droite (AB) ont une ordonnée nulle et sont placés dans le même ordre que leurs abscisses ; de plus, si $M = \lambda A + (1-\lambda)B$ alors M est le translaté de B par le vecteur $\lambda\vec{BA}$, donc son abscisse est λ. On en déduit que : si $\lambda < 0$, alors M est de l'autre côté de B par rapport à A ; si $\lambda = 0$, alors $M = B$; si $\lambda \in]0,1[$, alors $M \in]A, B[$ (et pour $\lambda = 1/2$, M est le milieu de $[A, B]$) ; si $\lambda = 1$, alors $M = A$; enfin si $\lambda > 1$, alors M est de l'autre côté de A par rapport à B. (b). Si $\gamma = 0$ alors $M \in (AB)$ et dans ce cas, la situation exacte de M sur cette droite est donnée par le point (a) ; de même, si $\alpha = 0$ alors $M \in (BC)$ et si $\gamma = 0$ alors $M \in (CA)$. Dans les cas restants, α, β et γ sont tous trois non-nuls.

Cas général. Soit M_A le point de (BC) tel que $(\beta+\gamma)M_A = \beta B + \gamma C$: puisque $\beta + \gamma = 1 - \alpha$, on peut écrire $M = \alpha A + (1-\alpha)M_A$, et par l'étude précédente, si $\alpha < 0$ alors M est de l'autre côté de A par rapport à M_A tandis que si $\alpha > 0$ les deux points M et A sont du même côté de M_A. Par conséquent, M est du même côté de (BC) que A si et seulement si $\alpha > 0$. De même, il est du même côté de (CA) que B si et seulement si $\beta > 0$, et du même côté de (AB) que C si et seulement si $\gamma > 0$. La situation est résumée par la figure, où dans chacune des sept composantes connexes du complémentaire de $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$ on a indiqué le nom de celles des coordonnées α, β, γ qui sont < 0 (remarquons au passage que l'intérieur du triangle est donné par la condition $\min(\alpha, \beta, \gamma) > 0$).

Cas particulier. Le point M_A n'existe pas lorsque $\beta + \gamma = 0$; mais dans ce cas, on a $M = A + \gamma(C - B) = A + \gamma\vec{BC}$ donc M est sur la parallèle à (BC) par A, que A découpe en deux demi-droites dont l'une est dans la zone $\gamma > 0, \beta < 0$ et l'autre dans la zone $\gamma < 0, \beta > 0$.

Exercice 6.

(a). Traitons cette question par le calcul barycentrique.[1] Nous savons qu'il existe des réels α, β et γ tels que $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$; l'exercice 4 appliqué à l'hypothèse que M est intérieur au triangle nous informe de ce que ces réels sont tous les trois strictement positifs. Nous savons que M est sur $[AA']$ donc il existe un réel t tel que $M = tA + (1-t)A'$; nous savons que A' est sur (BC) (et, en fait, dans $]BC[$) donc il existe un réel u tel que $A' = uB + (1-u)C$. Ainsi, $M = tA + (1-t)uB + (1-t)(1-u)C$. Par unicité des coordonnées barycentriques, cela implique que $t = \alpha$, que $(1-t)u = \beta$ et que $(1-t)(1-u) = \gamma$. En particulier, $(MA' : AA') = \alpha$. Mais comme les points A, M, A' sont placés dans cet ordre, le sens des vecteurs $\vec{MA'}$ et $\vec{AA'}$ étant le même, on peut écrire :

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \alpha$$

et en reprenant le raisonnement qui précède avec B puis C à la place de A, on obtient $MB'/BB' = \beta$ et $MC'/CC' = \gamma$: donc,

$$MA'/AA' + MB'/BB' + MC'/CC' = \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

(b). Choisissons notre repère pour que les points A, B et C aient les coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$; notons β l'ordonnée de B' et γ l'abscisse de C'. Alors, la droite (BB') a pour équation $\beta x + y = \beta$ tandis que (CC') a pour équation $x + \gamma y = \gamma$. En résolvant le système formé par ces deux équations, on

[1] Nous invitons le lecteur devenu adulte à imaginer la souffrance qui eût été la sienne si en classe de troisième, lorsqu'il était plus ignorant, un enseignant sadique lui eût infligé le présent exercice à traiter entièrement en coordonnées cartésiennes.

trouve les coordonnées (u, v) de O (données ci-dessous) ; la droite (AO) admet les équations paramétriques $x = ut, y = vt$ et comme l'équation de (BC) est $x + y = 1$, en remplaçant x par ut et y par vt on trouve la valeur $1/(u + v)$ de t puis les coordonnées du point $A_0 = (AO) \cap (BC)$, soit

$$O : \left(\frac{\beta\gamma - \gamma}{\beta\gamma - 1}, \frac{\beta\gamma - \beta}{\beta\gamma - 1} \right), \qquad A_0 : \left(\frac{\beta\gamma - \gamma}{2\beta\gamma - \beta - \gamma}, \frac{\beta\gamma - \beta}{2\beta\gamma - \beta - \gamma} \right).$$

Puisque $A : (0, 0)$, $B : (1, 0)$ et $C' : (\gamma, 0)$, on a $C'A : C'B = -\gamma/(1 - \gamma)$; par un calcul similaire, $B'C : B'A = (1 - \beta)/\beta$. Enfin, on a

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} = \frac{1 - \dfrac{\beta\gamma - \gamma}{2\beta\gamma - \beta - \gamma}}{\dfrac{\beta\gamma - \gamma}{2\beta\gamma - \beta - \gamma}} = \frac{\beta(\gamma - 1)}{\gamma(\beta - 1)}$$

d'où l'on tire l'égalité $(A_0B : A_0C).(B'C : B'A).(C'A : C'B) = -1$ par un calcul direct. A présent, de deux choses l'une : si $A' = A_0$, alors d'une part les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, d'autre part la relation de Céva est satisfaite ; si par contre $A' \neq A_0$, alors d'une part les droites (AA'), (BB') et (CC') ne sont pas concourantes puisque $(AA') \neq (AA_0)$ ne passe pas par O, d'autre part la relation de Céva n'est pas satisfaite car à sa place on a $(A'B : A'C).(B'C : B'A)(C'A : C'B) = -(A'B : A'C) : (A_0B : A_0C) \neq -1$. Ainsi, la relation de Céva est satisfaite précisément si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ; ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 7.

Pour varier les plaisirs, plutôt que de continuer à calculer bêtement, nous allons donner une solution astucieuse de cet exercice. Appelons α l'homothétie de centre D qui envoie B sur C, β l'homothétie de centre E qui envoie C sur A et γ l'homothétie de centre F qui envoie A sur B ; posons $\delta = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ et remarquons que $\delta(B) = B$ par construction : donc, δ est une homothétie de centre B, car la composée de deux ou plusieurs homothéties est toujours une homothétie ou une translation, et c'est une homothétie précisément s'il en existe un point fixe (qui est alors le centre de cette transformation). A présent, constatons que par construction le rapport de l'homothétie δ est le réel $r = (DB : DC).(EC : EA).(FA : FB)$. Il y a alors deux cas de figure possibles :

* si $r = 1$, alors δ est l'identité. Dans ce cas elle fixe tous les points et toutes les droites ; en particulier elle fixe la droite (DE). Mais comme α et β ont leurs centres sur cette droite, elles la fixent également ; donc $\delta((DE)) = \gamma(\beta(\alpha(DE))) = \gamma(DE)$, et puisque γ fixe (DE) c'est que son centre F est sur cette droite, donc que les points D, E et F sont alignés.

** Si $r \neq 1$, alors δ n'est pas l'identité ; comme la droite (DE) ne passe pas par le centre de δ, elle n'est alors pas invariante par δ. Mais comme elle est invariante par α et β, on aura $(DE) \neq \delta(DE) = \gamma(\beta(\alpha(DE))) = \gamma(DE)$, et par conséquent le centre F de γ ne sera pas sur la droite (DE).

Nous avons donc montré que $(DB : DC).(EC : EA).(FA : FB) = 1$ si et seulement si les points D, E et F sont alignés. Pour ce faire nous avons utilisé la propriété bien connue que "si une homothétie autre que l'identité fixe une droite donnée, cette droite passe par le centre d'homothétie" en l'appliquant aux homothéties non-triviales α, β et γ.

Exercice 8.

En tournant dans le sens trigonométrique, nommons les carrés $ADEF$, $BGFH$ et $CIHJ$. La droite (AB) n'étant pas horizontale, elle coupe en un certain point O la droite (EF) qui passe également par les points H et J. L'homothétie h de centre O et de rapport AD/BG transforme $ADEF$ en $BGFH$ et $BGFH$ en $CIHJ$; puisqu'il en est ainsi, les points A, B, C et O sont alignés.

Exercice 9.

Plaçons-nous dans le repère affine pour lequel les points O, A et B ont les coordonnées respectives $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$; constatons qu'alors, les coordonnées (x, y) de M sont des réels tels que $x+y = 1$ tandis que celles de N sont $(-x, y)$ et que celles de P sont $(x, -y)$: donc le milieu de $[NP]$ est le point de coordonnées $(x, -y) + (-x, y)$, c'est-à-dire O.

Exercice 11.

Par une application directe du théorème de Thalès, si l'on avait $E \in (AC)$ on aurait $6/11 = FE/BC = AF/AB = 7/13$, ce qui est bien sûr inexact : donc le point E n'est pas sur l'hypoténuse du triangle. L'intérêt de l'exercice est que E semble être sur cette hypoténuse lorsque l'on trace la figure sans y mettre un soin extrême : en effet, la quantité $6/11 - 7/13 = 1/143$ est négligeable par rapport à l'unité au regard des faiblesses de l'oeil qui voit trouble, de la main qui tremble, de la règle qui n'est pas tout à fait droite et de l'épaisseur du trait de crayon (particulièrement si l'on aime les feutres).

Exercice 14.

Utilisons des coordonnées barycentriques : puisque D est le translaté de C par le vecteur $\vec{BA}$, nous avons $D = A - B + C$; d'autre part $M = A/2 + B/2$ puis $K = D/3+2M/3$. Ceci mène à $K = (A-B+C)/3+(A/3+B/3) = 2A/3+C/3$, prouvant que M est sur la droite (AC).

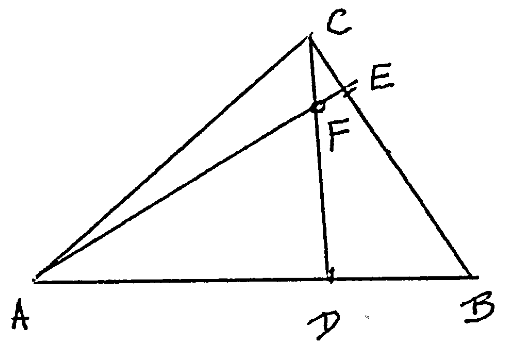
Exercice 16.

Soit d la droite qui relie les centres O de $\mathcal{C}$ et O' de $\mathcal{C}'$: alors, en prenant d pour axe des abscisses et en plaçant A sur l'axe des ordonnées, les coordonnées de A auront la forme $(0, a)$; puisque B est le symétrique de A par d, les coordonnées de B seront $(0, -a)$; puisque O et O' sont sur d, ils auront des coordonnées de la forme $(k, 0)$ et $(k', 0)$; puisque M est le symétrique de A par O, ce point aura les coordonnées $(2k, -a)$ et de même, M' aura les coordonnées $(2k', -a)$: donc M, M' et B seront alignés sur la droite d'équation $y = -a$.

Exercice 17.

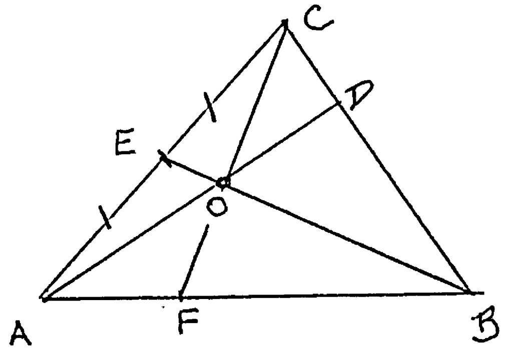
Utilisons le repère orthonormé dans lequel A, B et D ont les coordonnées $(0, 0)$, $(\ell, 0)$ et $(0, \ell)$ respectivement, où ℓ est la longueur du côté du carré : alors, C a les coordonnées (ℓ, ℓ). Souvenons-nous d'autre part que $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$: donc, les coordonnées de E sont $(\ell/2, \sqrt{3}\ell/2)$ et celles de F sont $(\ell + \ell\sqrt{3}/2, \ell/2)$. De là on déduit que D, E et F sont alignés parce que le déterminant $(x_E - x_D)(y_F - y_D) - (x_F - x_D)(y_E - y_D)$ est nul.

I.



$CF : CD = ?$

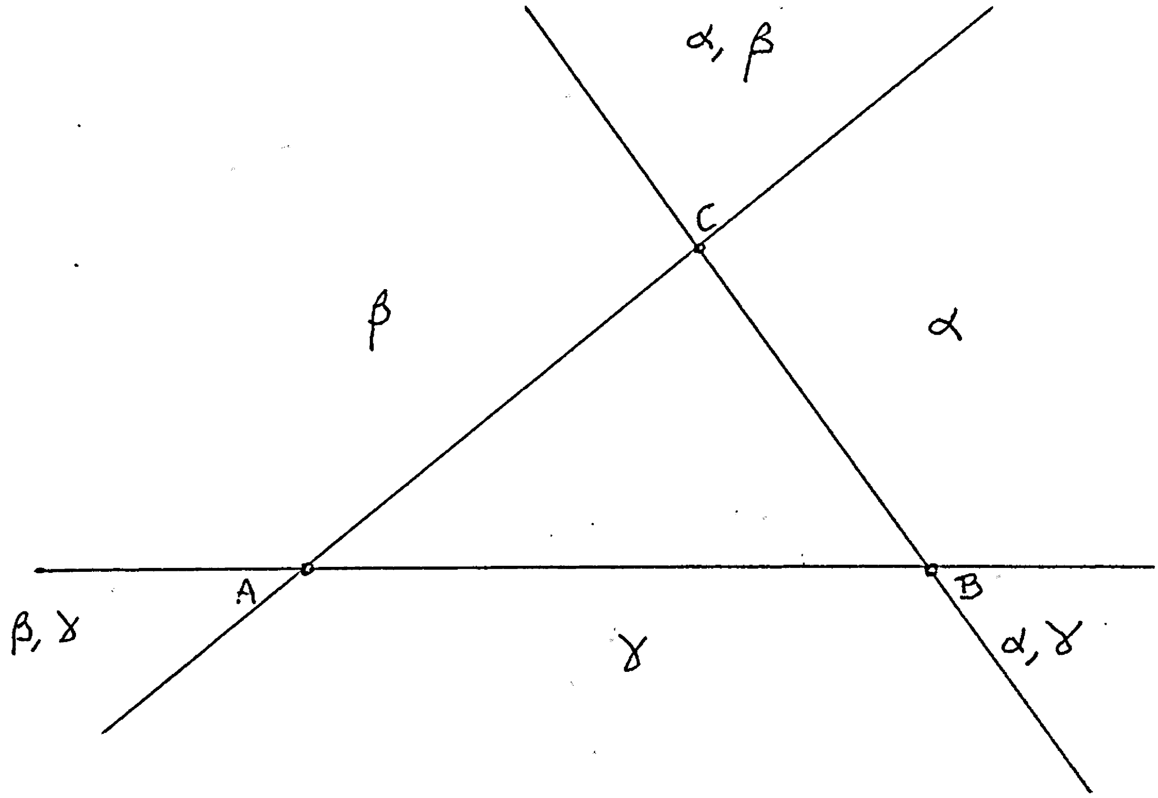
II.



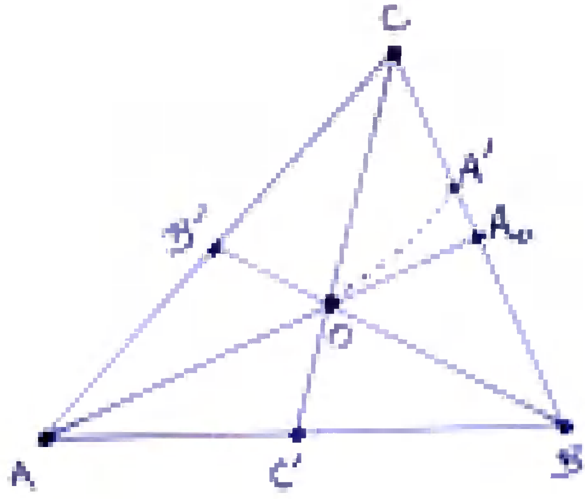
$CO = 15,\ OF = 5,\ AO = 12.$

$OD = ?$

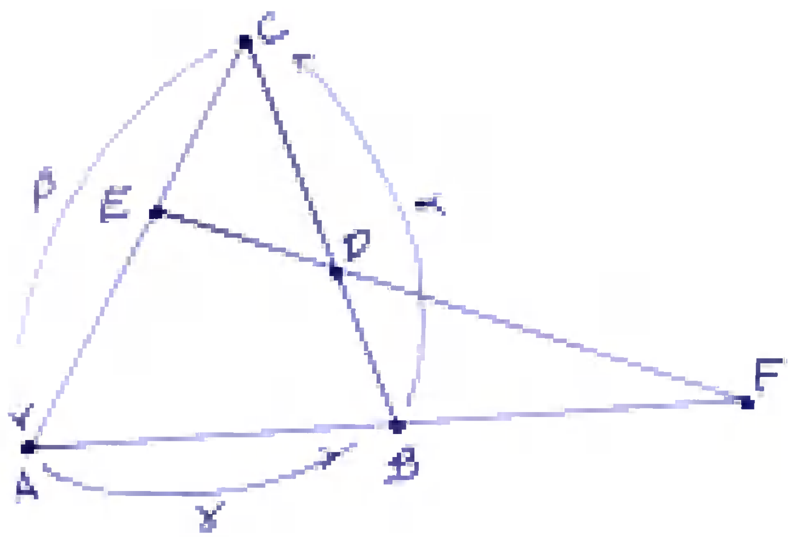
IV.



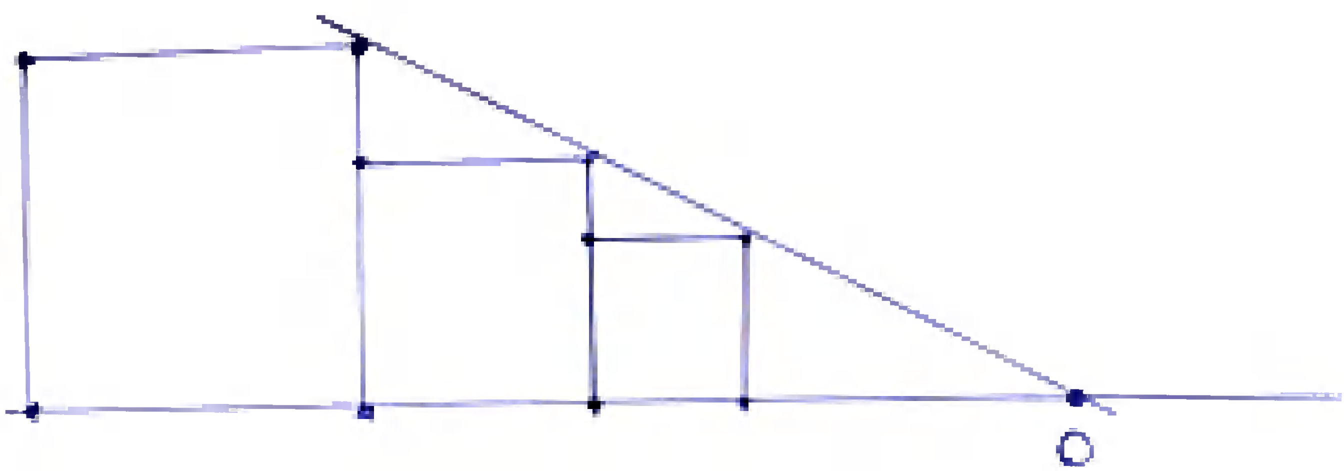
VI.



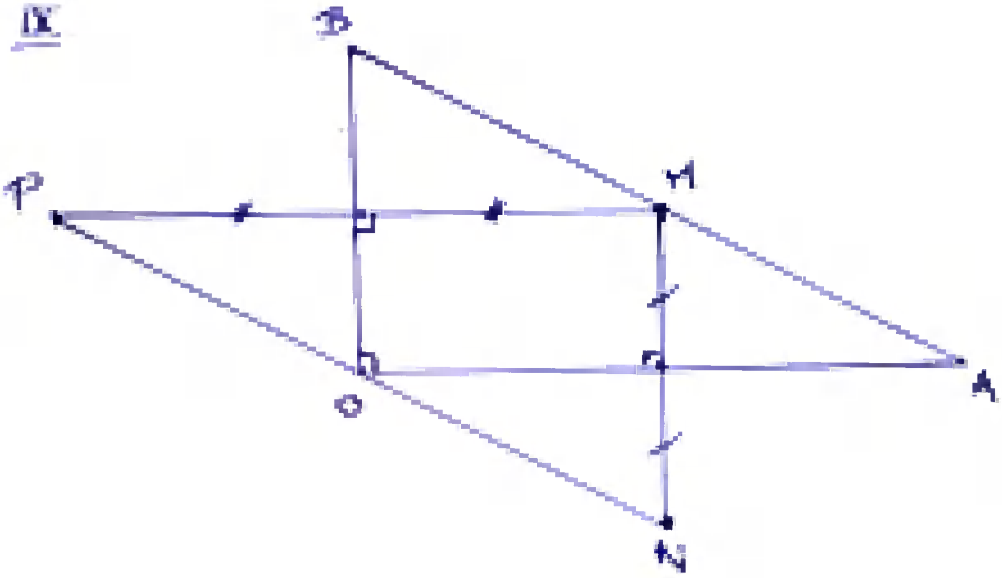
VII.



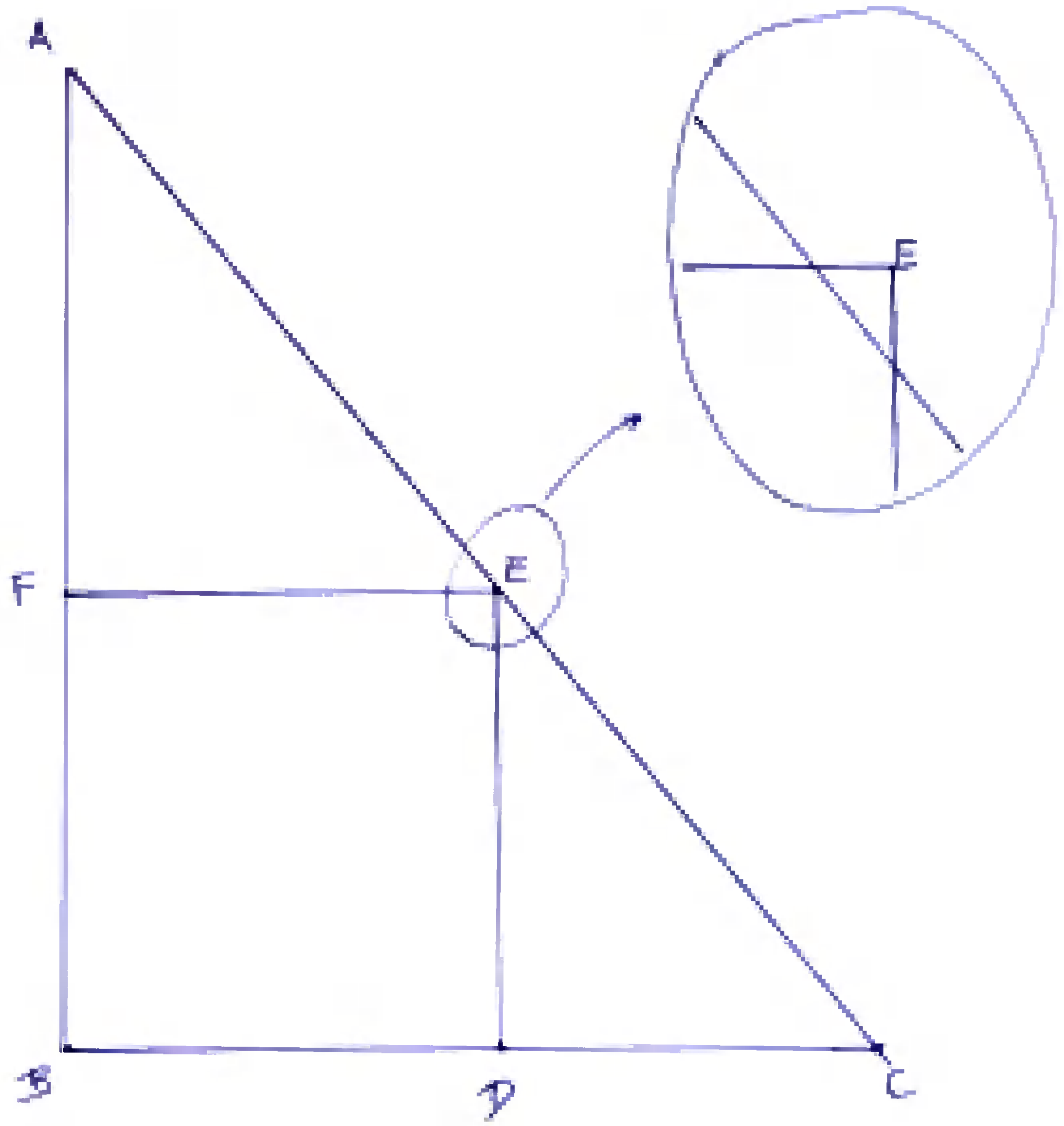
VIII.



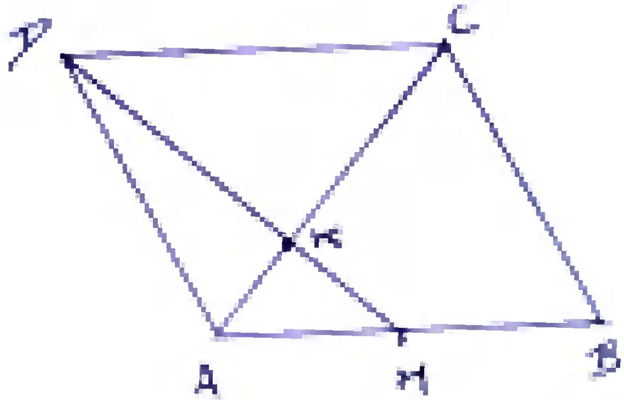
IX



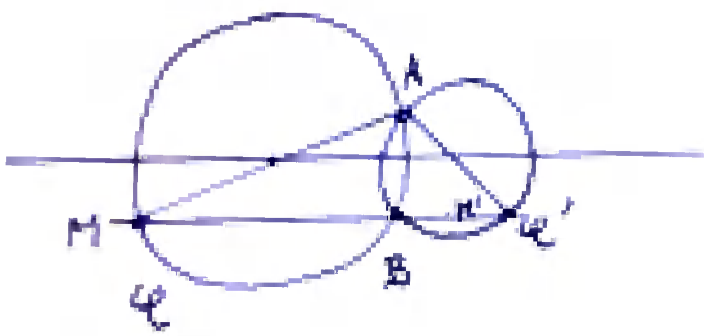
XI



XV.



XVI.



XVII.