

Fermé, point d'accumulat, point isolé

(i) A C Ā.
 (ii) Ā est fermé
 (iii) xi F est un feroné vérifiont A CF ⇒ Ā C F.
 → Ā est le plus petit fermé à contient A.

① $A \subset E$ un sous-ens, $n \in E$ est un point d'accumulat de A si $\forall \in >0$, $\exists a \in A$, $a \neq n$, $a \in B_{\epsilon}(n)$.

DACE, a EA alors & possibilités:

1) a est un point d'accumulat.

2) a EA et 3 E>0: SE(n) 1 A = {n}.

Lo a est un point isolé de A.

(Un paint adhérent est un point d'accumulat g m'est pas isolé). D (am) mETN E E, une suite () lim xm = l 2 => lim || xm - l|| = 0 dams E, $n: \mathbb{N} \rightarrow E$, $l \in E$, Convergence, limites In admet l'comme limite (lim an = 4 et qd m=+m, ni 4 8>0 BNEW, YneW:

 $\lim x_m = l_2$ alors ly = l2. Dim xm = 1 2=> V O Vaisinage ouvert de PEN, Ym>, N: am EO.

Que l'an mote lim $x_m = \ell$. \bigcirc A so-ens de $E, \alpha \in E$,

m>, N=> ||2m-11 < 8.

(i) a ∈ Ā => ∃ am suite de A, lim am = n.

(ii) x point d'accumulad de A L=> 3 am suite de A\{23, lim an = n.

P &m suite class RP, xo E IRP,..., xm = (2m, ..., nm); $l \in \mathbb{R}^p$, $l = (l^1, l^2, ..., l^p)$ alors $lim n_m = l$ pour $1 \le i \le p$ => lim xm = li

(lim pour sometion) J:ACE→F, a point accumulad de A. fim f(x) = l (=> ∀ €>0, 3 8>0, ∀x ∈ A, 0 < ||x-a|| < 5 ⇒ || f(x)-f|| < €

(fim f(x) = f 2=> lun || f(a)-1|| = 0 f à vala rectoriel de j= à un vecteur l

0< 11x-all <f (i) $\lim_{n \to a} f(n) = \ell$ (ii) + €>0, 3 €>0, ∀x € Bs (a) A A \{a}: f(n) & Be(t) (iii) Y O voisinage de 1, In voisin de a,

C) ASSE :

YnGul Alfag => f(x) & O. (iv) ∀ O voisimage de l, I u voisim de a, UNA 9 (03 C g-1(0).

Dfig: ACE→F, a point acc de A: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \lim_{x\to a} g(x) = m \implies \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + m$

D J: A→F, g: A→R, lum $f(x) = \ell$, lum $g(x) = m \Rightarrow L(g(x), f(x)) = m\ell$

P f:ACE→F, g:BCF→G, h=gof. a point acc de A, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \quad \lim_{y\to \ell} g(y) = m$

 $\implies \lim_{n \to a} g(f(n)) = m$

J: $A \subset E \rightarrow F$. $a \in A$, Continuité

J'est aontinue on $a \geq \forall E > 0$, $\exists S > 0$, $\forall x \in A$, $\|x-a\| \in S \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \in E$.

si a point acc de A alors: f est cont en a z=> $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. (i) I continue en a.

(ii) \(\text{ii)} \) \(\text{E} > 0, \(\frac{1}{2} \) \(\text{E} \) \(\text{G} \) \(\text{G} \) \(\text{E} \) \(\text{G} \) \(\text{G} \) \(\text{E} \) \(\text{E} \) \(\text{G} \) \(\text{E} \) \(

 $U \wedge A \subset f(0)$.

If $f:A \to F$,

f est continue en chaque point $a \in A$.

(i) on time our A.

(ii) ouvert de F, I u ouvert de E 1 (0) = A A U

(ii) ∀ O ouvert de F, I u ouvert de E, J (0) = A N U. (iii) ∀ W Jermé de F, I v Jermé de E, J-1(W) = A N V.

 $P f: A \longrightarrow \mathbb{R} cont, b \in \mathbb{R},$

· INEAI f(x) < & g = A NU per un ouvert U C E.

· {n ∈ A | f(x) (b-g=A 1 V pr un fermé VCE.

· In & A | f(n) = & y = A 1 V pr un fermé V C E.

D(E, 11.11) (evm) ACE;

I'm dono so-eno X, V m E M: 2m E X. Compacité

Whe suite yn do X est sous-suite de 2m ou

suite estraite de 2m si 3 A ST 1:

h: N -> N to en ait- ym = 2h(n) = 2hm.

- · A sot bouné (2/11.11), si = R & R tq A C Bn (0) LS + n & A, ||n|| < R.
- · Une suit un do E est borner (FIII) re quient 3 R E R, V m ETN, Un II < R.
- · si X est un eno et $f: X \to E$, f est f bornée si l'eno $f(x) \mid x \in X f$ est borné, on a $\mid f(x) \mid \langle R \rangle$.
- · A est compact si the suite de A admt une so- suite ev dans A.

O31 soit h: TV -> TV, A ST / also GMENV, k(m) > m.

O32 E@, A C E so-ono, N, N, E = → R

deun mormes sur E. Si N, Ne st

équivalentes alors A est borné pà

Norme N, Ossi il -ust borné pà N.

Compacité The A CRP est COMPACT voi A est Jerné & borné.

 $\text{W}_{3,4}$ soit $f: A \subset E \longrightarrow F$ cont & A compact alors f(A) wt compact.

P3.5 soit $A \subset E$ compact it $f: A \to IR$ cont alors $\exists x_m, x_M \in A, \forall y \in A: f(x_m) \in f(y) \in f(x_M)$

P3.6. soit N une norme sur \mathbb{R}^P alors $N: \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ est cont \mathbb{F} norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

Det N et norme su \mathbb{R}^P , alors N est Équivalente à $11\cdot 11_{\infty}$.

Cos soit $N_1, N_2 : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ deux mormes alors $N_1, N_2 \to \mathbb{R}$ équivalentes.

· f cont (=> & O ouvert 1 51(0) ouvert (Continuité on for(0) = U A A. ouvat. · fant cas & F forme: J-N(F) formé. M Si formé ou overt so forme $f(x) \stackrel{?}{=} C$ -> justifier of cost. → DD si Df ouvert/fermi. → invoguer Lemme. $T_i(x_1, x_2, ..., x_m) = x_i$ set ant.

My fcont: IT;: R → R

-> produit, somme, quotient, composée de f cont est cont. + d mi mo f vectoriello à ploso composantes. My for ot pas cont:

(1) J: A-> R cont on a EA aloss si an suite do A of time an = a alow time f(um) = f(a)

Can=a, 5n=b; s(a) ≠ s(b) • ToUTE suites DC insulte µ my continuité.

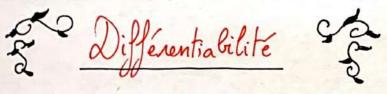
1 > dej : VE>0, 35>0 (on cherche ballen) J: R - > (R).

Compacité

(TU 3.5) A C Rf compact con Jeuné & bouné.

Adimension finie.

omonité'



· Ds @ , f'(x) devient Df(x)

· f dévable en x x 3 M (pxm), lim 11 s(x+A) - s(a) - MAIL = 0

. Cette mat M est uniq.

· f dérivable en a <=> Vi : f dérivable en 2.

h=gr/d. Dh(x) = Df(x) + Dg(x)

h=g.f . Dh(x) = g(x). Df(x) + f(x). Dg(x)

 $l = g \circ f$. Dh(x) = Dg(f(x)). $Df(x) = \Delta$ water $f \circ f$ some

 $\theta'\hat{j}$ • $Dg(x) = -\frac{1}{f(x)^2}$ · Df(x)

· f coordonnées: Mi dévir en chq pt: Dy; (n)=(9,...,1,0,0)

represente : lim f(x+tv) - g(x)

· Cas particulier V= ei base camoniq Rm, ei = (0,0,...,1,0,...,0)

• $(\partial_i f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

dérive partielle do j'eme direct délivée partielle de g p à x: 9

· si f est différentiable en a ∈ A alors Df(x)=(6,1) x....(3,1)x · si fo (di f) st tont on a also

B at differentiable on a of 29(a)=5.

Hethodologie: Différentiable ou non?

Cas 1 Dérivées partielles \ => [NON] pas différt.

Cas 2) Dérivées partielles 3:

(i) que de point & pas ailfeurs (ii) 3 portout.

Lo st-elles cont! si Ovi alors different.

(Cas 3) Dérivées partielles pas cont, prendre matrice: la Différentielle, calculer si $\lim \frac{\|f(a+b)-f(a)-Hh\|}{\|h\|} = 0$ si lim = 0 alors OUi different.

M Valeurs approchée:

-> calcul f(a+h) = f(a) + Df(a). h

Ex 32 i) calcul $(\partial_{1}f)(n,y)$, $(\partial_{2}f)(n,y)$?.

ii) cont? putt? point? SPQR si becom

derive distribut $(\partial_{1}f)(\mathcal{D},0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t+1,0)-f(0,0)}{t} \stackrel{?}{=} 0$.

iii) $\lim_{(k,k)\to(0,0)} \frac{J(k,k)}{||(k,k)||} \stackrel{?}{=} 0$?

of $Of(x) \ni j$ $Df(x) = \begin{cases} \partial_{x}f_{1}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \\ \partial_{x}f_{2}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \end{cases}$ $\begin{cases} \partial_{x}f_{1}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \\ \partial_{x}f_{2}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \end{cases}$ $\begin{cases} \partial_{x}f_{1}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \\ \partial_{x}f_{2}(x) & \partial_{x}f_{2}(x) \end{cases}$

Dérivée directionnelle en (0,0): (0,0) = $\lim_{t\to 0} \frac{g(0+t,0)-g(0,0)}{t}$

 $(\delta_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} f(0,0+t) - f(0,0) = 0$

si $\mathcal{D}_{J}(0,0) \exists$, on d+a avoir $\mathcal{D}_{J}(0,0) = (\partial_{1}J_{1},\partial_{2}J_{2}) = (0,0)$

d vhiser lim (8,k) = (0,0) - 18(0,0) (1) ? = 0?

of virifier: divine directionnelle: $V = (V_1, V_2)$

 $D_{\nu} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t_{\nu}, t_{\nu}) - f(0,0)}{t} \stackrel{?}{=} 0$

Si oui alas chivées directionnelles 3. ma+(0,0)

Of(0,0) = 3 if lim $\frac{|f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)(h)|}{(h+k) - g(0,0)} = 0$?

Si O oui différentiable simon mon.

(The Si (2,3) st cont => fest différentiable.

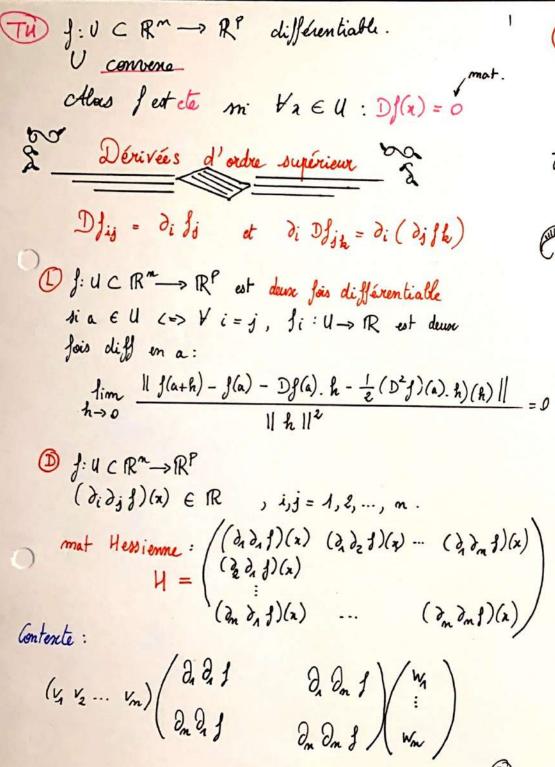
De Une f de clare (de dif) cont.

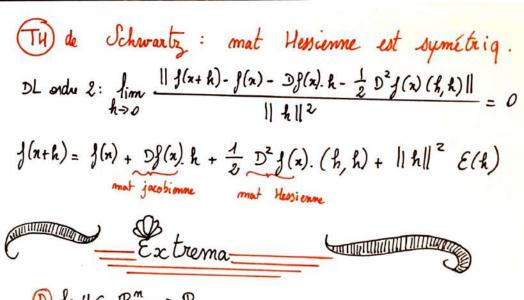
The (Egalite' Accross Jime) $\int_{\mathbb{R}} U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, x,y \in U \mid [n,y] \subset U.$ $\int_{\mathbb{R}} differentiable sur U alors <math>\exists \theta \in J_{0,1}[:]$ $\int_{\mathbb{R}} (y) - \int_{\mathbb{R}} (x) = \int_{\mathbb{R}} (n+\theta(y-x)) - (y-x)$ (in pas géméralisable à f vectorietle).

In (Inegalité Accroisements Finis) $f: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad différentiable,$ $x, y \in U \neq_q \quad \underline{[x, y]} \subset U.$ abors $||f(y) - f(x)|| \leq m. \left(\sup_{\theta \in Jails} ||f(x+\theta(g-x))||_{\infty}\right) ||g-x||$

 $\mathfrak{D} \cup \subset \mathbb{R}^{m}$ (ouvert) est [convexe]. $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \in \mathcal{U}$, on a $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \subset \mathcal{U}$.







D $f: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ▶ $a \in U$ est maximum local (ou min local)

ni il $\exists V$ vsisinage de $a \lor C \lor U tq$ $\forall x \in V : f(x) < f(a)$ (ou f(x) >, f(a)).

▶ Maximum global: $\forall x \in U: f(x) < f(a)$.

() si a cot un max/min local alors If(a) = 0 = mat <=> Vi : dif(o) = 0.

f: U C R^m R, a & U, Dg(a) = 0. On calcule H (most heosioner)

Gon calcule les valeurs propres de H.

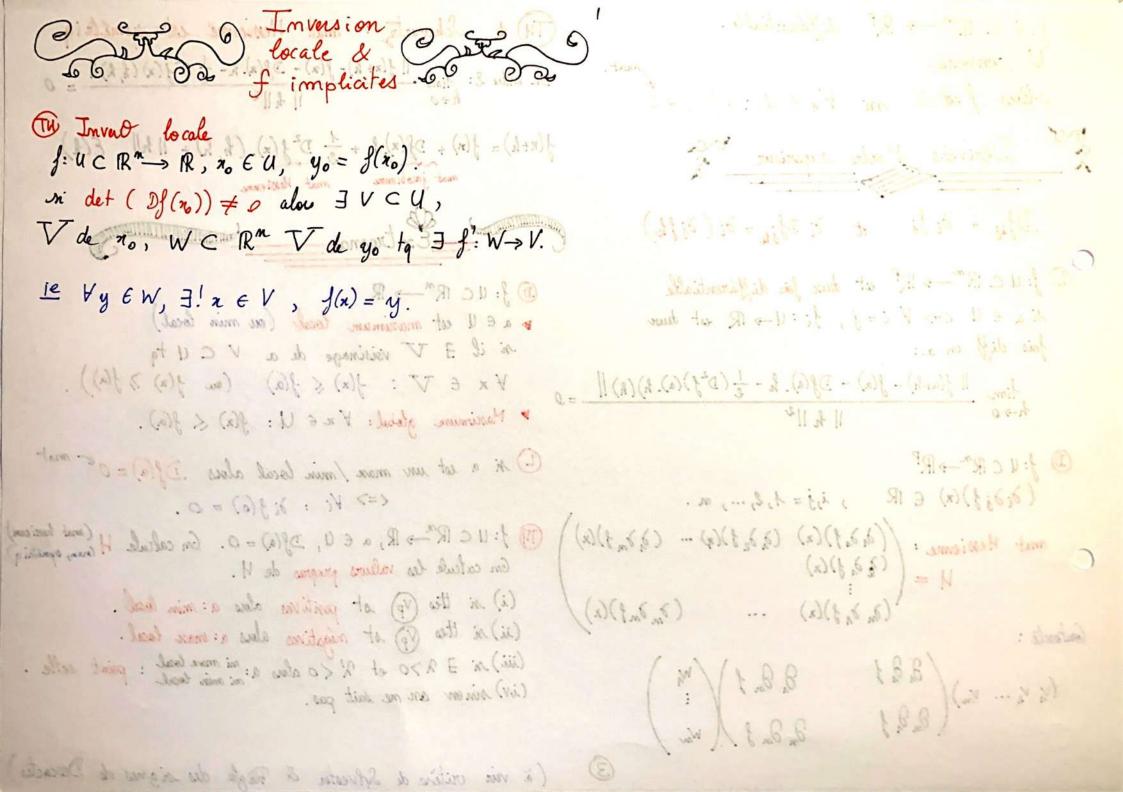
(i) si the (p) st positives alors a: min local.

(ii) si the (p) st mégatives alors a: man local.

(iii) si I 2 >0 et 2 <0 alors a: mi more local: point sette.

(iv) sinon on me sait pas.

(à voir critère de Sylvester & Règle des signes de Descartes)



Totale & Courtes of impliates of impliates

The Invaro locale $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_0 \in U$, $y_0 = f(\pi_0)$. In det $(Df(\pi_0)) \neq 0$ alou $\exists V \subset U$, $V \neq \pi_0$, $W \subset \mathbb{R}^m \quad \nabla \neq 0$ de $y_0 \neq 0$ $\exists f': W \rightarrow V$.

ie by EW, I! x EV, f(x) = y.

The dim s. $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , k > 1, f(u,b) = 0, $(a,b) \in U$.

M $(2g)(a,b) \neq 0$ Abus \exists une fenite $V \times W \in U$ $(a,b) \in V \times W \text{ et } g: V \rightarrow W \text{ de classe } C^k$ $\forall (a,y) \in V \times W : \underbrace{f(a,y) = 0}_{===} c \Rightarrow y = g(x)$

To Fonces implicates: $U \subset \mathbb{R}^{m+p}$, $j: U \to \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, $b \in \mathbb{R}^p$. j(a,b)=0, j de classe (a,b)=0.

ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ (a,h) must pxp inversible \iff det $\begin{pmatrix} \partial_{m+1} J_1(yb) & \cdots & \partial_{m+p} J_1(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$ Also $\exists unit J_1(x,b)$ $(\neg a,b)$

Also I use ferrite $V_X W$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$, $(a,b) \in V_X W \subset U$ et $g: V \to W$ de class (b) to $(a,y) \in V_X W: f(a,y) = 0 \implies y = g(a)$.

Thouver extrema: providure.

calcul dir. part. premières

Révouche système { 2,8 = 0 } 2 f = 0

Don trouve wond. pt viti qs

calcul dir. part. mando. / mot Herrime

calcul De selon #teo mot Herrime

calcul docx ou globa? [160] (50)?

(calcul val 18 f en pt vites)

of the end of the fine of the first of

and the control of the control of