Exercice 2 page 14 :

Pour chacune des fonctions réelles f suivantes, donner son ensemble de définition$\mathcal{D}_f$, son ensemble image $Im(f)$, et, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, donner $S_y = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) = y\}$, l'ensemble des antécédents de f :

$$1.\ f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad 2.\ f(x) = -x^2 + 2x, \qquad 3.\ f(x) = \frac{x-1}{x+1},$$
$$4.\ f(x) = 1 + \sqrt{x} \qquad 5.\ f(x) = \sqrt{1-x}, \qquad 6.\ f(x) = \sqrt{1+x^2} - x.$$

Cet exercice revient à résoudre l'équation $y = f(x)$, en donnant au passage l'ensemble des y pour lesquels cette équation a une solution.

Méthode : on donne d'abord des conditions nécessaires sur y et x pour que $y = f(x)$ soit vrai (**analyse** du problème), puis on vérifie dans quels cas ces conditions sont bien suffisantes ((**synthèse**).

- Donner $\mathcal{D}_f$.
- **Analyse (ou conditions nécessaires) :** Supposer $y \in Im(f)$, et $x \in S_y$, et exprimer x en fonction de y à partir de l'équation $y = f(x)$. Au cours du calcul, on en déduira :
  1. Des conditions sur y, par exemple $y \neq 0$, ou $y \geq 0$. On trouve donc un sous-ensemble J tel que $y \in J$.

     En conséquence, il est **nécessaire** que $Im(f) \subset J$.
  2. Des conditions sur x, en général de la forme "$x = g(y)$", avec g une fonction réelle.

     On en déduit un ensemble
     $$E_y = \{ \text{ les expressions de } x \text{ en fonction de } y\}$$
     (Attention ! On peut obtenir plusieurs expressions différentes pour x en fonction de y, il faut toutes les prendre en compte !).

     On en déduit qu'il est **nécessaire** que $S_y \subset \{$ les expressions de x en fonction de y $\}$,
- **Synthèse (ou conditions suffisantes) :** On prend y satisfaisant les conditions trouvées dans la partie précédente, c'est-à-dire $y \in J$ et, pour chaque élément $x \in E_y$ (x s'exprime alors généralement par $x = g(y)$) :
  1. On vérifie que $x \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire que si $y \in J$, l'expression $g(y) \in \mathcal{D}_f$ aussi.
     - Si non : comme $S_y \subset \mathcal{D}_f$, $x = g(y)$ n'appartient pas à S_y : on passe à l'élément suivant de E_y et on recommence jusqu'à en trouver un qui soit bien dans $\mathcal{D}_f$.
     - Si oui, on continue le raisonnement.
  2. On calcule $f(x) = f(g(y))$.
     - Si on trouve $f(g(y)) = y$, alors $g(y)$ appartient bien à S_y. On passe à l'élément suivant de E_y et on recommence.
     - Si on trouve $f(g(y)) \neq y$: $g(y)$ n'appartient pas à S_y. On passe à l'élément suivant de E_y.
- Après avoir vérifié tous les éléments de E_y (en général, seulement un ou deux), deux possibilité :
  1. Aucun des éléments de E_y n'appartient à S_y. Comme nécessairement $S_y \subset E_y$, on en déduit que S_y est vide : y n'a pas d'antécédent, et ne peut pas appartenir à $\Im(f)$. $\Rightarrow$ nouvelle condition nécessaire pour que $y \in Im(f)$.
  2. S_y n'est pas vide. En particulier, $y \in Im(f)$ (on a donc une condition suffisante sur y), et on a identifié tous les éléments de E_y qui sont dans S_y. Comme $S_y \subset E_y$, on a bien S_y tout entier.
- **Conclusion :** on a identifié $Im(f)$ et S_y.

Attention ! La notation S_y pour l'ensemble des antécédents de y par f est à réintroduire à chaque fois, sauf si, comme ici, elle est donnée dans l'énoncé. Faire particulièrement attention si plusieurs fonctions (par exemple f_1 et f_2) ont été définies dans la même question, auquel cas il faut préciser s'il s'agit de l'ensemble des antécedents par f_1 ou par f_2.

1 (Rédaction très détaillée) : $f(x) = \frac{1}{x+1}$

- Pour x réel, $f(x)$ est définie si $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq -1$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- **Analyse :**
Soit y un réel, que nous supposons dans $Im(f)$, et soit alors $x \neq -1$ tel que $x \in S_y$. On obtient

$$\begin{aligned} y &= f(x) &= \frac{1}{x+1} \\ \Rightarrow xy + y &= 1 & \\ \Rightarrow xy &= 1 - y. & \end{aligned}$$

Pour exprimer x en fonction de y, on veut diviser par y, mais il faudrait que y soit différent de 0, ce qu'on n'a pas supposé à priori !
Cela dit, si $y = 0$ alors que $xy = 1 - y$, on obtiendrait $0 = 1$, une contradiction. Notre hypothèse que $y \in Im(f)$ implique donc $y \neq 0$. On peut ainsi diviser par y et obtenir

$$x = \frac{1-y}{y}.$$

Au cours des calculs, on voit que si $y \in Im(f)$, alors
  1. $y \in \mathbb{R}^*$ (conditions sur y), d'où $Im(f) \subset \mathbb{R}^*$.
  2. $x = \frac{1-y}{y}$, d'où

$$S_y \subset \underbrace{\left\{\frac{1-y}{y}\right\}}_{=E_y},$$

  et a donc au plus un élément.
- **Synthèse :**
Réciproquement, soit $y \in \mathbb{R}^*$, et $x \in \{\frac{1-y}{y}\}$, ce qui veut dire que $x = \frac{1-y}{y}$.
  1. Vérifions que $x \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire que $x = \frac{1-y}{y} \neq -1$. Si on avait $\frac{1-y}{y} = -1$, on en déduirait $1 - y = -y$, d'où $1 = 0$: contradiction. Donc $x = \frac{1-y}{y} \in \mathcal{D}_f$.
  2. Vérifions que $f(x) = y$:

$$f(x) = f\left(\frac{1-y}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1-y}{y} + 1} = \frac{1}{\frac{1-y+y}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

  Donc $\frac{1-y}{y} \in S_y$ et $y \in Im(f)$, autrement dit

$$\mathbb{R}^* \subset Im(f) \quad \text{et} \quad \left\{\frac{1-y}{y}\right\} \subset S_y.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{Im(f) = \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^*,\ S_y = \left\{\frac{1-y}{y}\right\}.}$$

2 (Rédaction très détaillée) : $f(x) = -x^2 + 2x$

- Pour x réel, $f(x)$ est définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Analyse :**
  Soit y un réel, que nous supposons dans $Im(f)$, et soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in S_y$. On obtient

$$\begin{aligned} y &= f(x) = -x^2 + 2x \\ \Rightarrow x^2 - 2x + y &= 0. \end{aligned}$$

  Donc x est solution de cette équation du second degré, dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4y = 4(1-y)$. Cette équation a une ou plusieurs solutions si et seulement si $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$, et ces solutions sont

$$\frac{2 - 2\sqrt{1-y}}{2} = 1 - \sqrt{1-y} \quad \text{et} \quad \frac{2 + 2\sqrt{1-y}}{2} = 1 + \sqrt{1-y}.$$

  Ainsi, au cours des calculs, on voit que si $y \in Im(f)$, alors
  1. l'équation $x^2 - 2x + y = 0$ a une solution, et donc $y \leq 1$ (conditions sur y), d'où $Im(f) \subset]-\infty, 1]$.
  2. x est solution de l'équation, et donc $x = 1 - \sqrt{1-y}$ ou $x = 1 + \sqrt{1-y}$, d'où

$$S_y \subset \underbrace{\left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\}}_{=E_y}$$

     et a donc au plus deux éléments.
- **Synthèse :**
  Réciproquement, soit $y \in]-\infty, 1]$, et $x \in \{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\}$.
  1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $x \in \mathcal{D}_f$.
  2. Vérifions que $f(x) = y$: on sait que comme $x \in \{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\}$, alors x est solution de $x^2 - 2x + y = 0$. Donc on a bien $y = -x^2 + 2x = f(x)$.

     Donc $y \in Im(f)$ et $x \in S_y$, autrement dit

$$]-\infty, 1] \subset Im(f) \quad \text{et} \quad \left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\} \subset S_y.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{Im(f) =]-\infty, 1] \quad \text{et} \quad S_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad \forall y < 1, S_y = \left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\}.}$$

2 (Rédaction très détaillée) : $f(x) = -x^2 + 2x$

- Pour x réel, $f(x)$ est définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Analyse :**
  Soit y un réel, que nous supposons dans $Im(f)$, et soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in S_y$. On obtient

$$\begin{aligned} y &= f(x) = -x^2 + 2x \\ \Rightarrow x^2 - 2x + y &= 0. \end{aligned}$$

  Donc x est solution de cette équation du second degré, dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4y = 4(1-y)$. Cette équation a une ou plusieurs solutions si et seulement si $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$, et ces solutions sont

$$\frac{2 - 2\sqrt{1-y}}{2} = 1 - \sqrt{1-y} \quad \text{et} \quad \frac{2 + 2\sqrt{1-y}}{2} = 1 + \sqrt{1-y}.$$

  Ainsi, au cours des calculs, on voit que si $y \in Im(f)$, alors
  1. l'équation $x^2 - 2x + y = 0$ a une solution, et donc $y \leq 1$ (conditions sur y), d'où $Im(f) \subset]-\infty, 1]$.
  2. x est solution de l'équation, et donc $x = 1 - \sqrt{1-y}$ ou $x = 1 + \sqrt{1-y}$, d'où

$$S_y \subset \underbrace{\left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\}}_{=E_y}$$

     et a donc au plus deux éléments.
- **Synthèse :**
  Réciproquement, soit $y \in]-\infty, 1]$, et $x \in \{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\}$.
  1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $x \in \mathcal{D}_f$.
  2. Vérifions que $f(x) = y$: on sait que comme $x \in \{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\}$, alors x est solution de $x^2 - 2x + y = 0$. Donc on a bien $y = -x^2 + 2x = f(x)$.

     Donc $y \in Im(f)$ et $x \in S_y$, autrement dit

$$]-\infty, 1] \subset Im(f) \quad \text{et} \quad \left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\} \subset S_y.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{Im(f) =]-\infty, 1] \quad \text{et} \quad S_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad \forall y < 1, S_y = \left\{1 - \sqrt{1-y}, 1 + \sqrt{1-y}\right\}.}$$

4 (Rédaction très détaillée) : un exemple où on élimine certains y dans la partie synthèse $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

- pour x réel, $f(x)$ est définie si $\sqrt{x}$ l'est. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.
- **Analyse :**
  Soit y un réel, que nous supposons dans $Im(f)$, et soit alors $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \in S_y$. On obtient
  $$\begin{aligned} y = f(x) = \sqrt{x} + 1 &\Rightarrow \sqrt{x} = y - 1 \\ &\Rightarrow x = (y-1)^2. \end{aligned}$$
  Ainsi, au cours des calculs, on voit que si $y \in Im(f)$, alors
  1. pour l'instant, pas de condition sur y : $y \in \mathbb{R}$.
  2. $x = (y-1)^2$, d'où
     $$S_y \subset \underbrace{\{(y-1)^2\}}_{=E_y}.$$
     et a donc au plus un éléments.
- **Synthèse :**
  Réciproquement, soit $y \in \mathbb{R}$, et $x \in \{(y-1)^2\}$, de sorte que $x = (y-1)^2$.
  1. $x = (y-1)^2 \geq 0$ donc $x = (y-1)^2 \in \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_f$.
  2. Vérifions que $f(x) = f((y-1)^2) = y$:
     $$f(x) = f((y-1)^2) = \sqrt{(y-1)^2} + 1 = \begin{cases} y - 1 + 1 = \ y & \text{si } y - 1 \geq 0, \quad \text{c-à-d si } y \geq 1 \\ -y + 1 + 1 = \ -y + 2 & \text{si } y - 1 < 0, \quad \text{c-à-d si } y < 1 \end{cases}$$
     On voit donc que
     - Si $y < 1$, alors $f((y-1)^2) = -y + 2$.
       Or, $y = -y + 2$ implique $y = 1$, contradiction avec $y < 1$.
       On en déduit que $f(x) = f((y-1)^2) \neq y$.
       Ainsi, $(y-1)^2$ n'est pas dans S_y.
     - Si $y \geq 1$, alors on a bien $f((y-1)^2) = y$.

  Finalement, on a :
  1. Si $y < 1$, comme $S_y \subset \{(y-1)^2\}$ et $(y-1)^2$ n'appartient pas à S_y, S_y est vide, et y n'a pas d'antécédent. $\Rightarrow$ Si $y < 1$, y n'est pas dans $Im(f)$.

     Donc $Im(f) \subset [1, +\infty[$.
  2. Si $y \geq 1$ $f((y-1)^2) = y$, donc $(y-1)^2 \in S_y$ et $y \in Im(f)$.

  Ainsi
  $$[1, +\infty[\subset Im(f) \quad \text{et} \quad \{(y-1)^2\} \subset S_y.$$
- **Conclusion**
  $$\boxed{Im(f) = [1, +\infty[\quad \text{et} \quad S_y = \{(y-1)^2\}}.$$

Remarque/astuce : On aurait pu réduire la preuve en remarquant, dans la partie analyse, que si $y = 1 + \sqrt{x}$, comme $\sqrt{x} \geq 0$, alors forcément $y \geq 1$, d'où $Im(f) \subset [1, +\infty[$. Dans ce cas, dans la partie synthèse, on suppose tout de suite $y \geq 1$, ce qui donne immédiatement $f((y-1)^2) = y$, et donc

$$[1, +\infty[\subset Im(f) \quad \text{et} \quad \{(y-1)^2\} \subset S_y.$$