T.D. M51.

Emmy DUCLOS.

R1 E, F des ens.

applicaO

D Une applicaO f de E vers F, notée $f : E \longrightarrow F$, c'est la donnée pr tt élt $x \in E$, d'un élmt $f(x) \in F$.

→ E est appelé ens de définiO de f

→ F est appelé ens d'arrivée

image pré appli

D Soit $A \subseteq E$, $B \subseteq F$,

l'image de A par f, notée $f(A)$, est

$$f(A) = \{ f(a) \text{ pour } a \in A \}.$$

L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E,\ f(x) \in B \}.$$

tous les antécédts

restrictO

D La restrictO de f à A, notée $f|_A$ est l'applicaO

$$f|_A : A \longrightarrow F$$
$$a \longmapsto f(a)$$

D La corestrictO de f à B, notée $f|^B$ est l'applicaO

$$f|^B : f^{-1}(B) \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Ex 1 : Soit $f : E \to F$ une applicaO. $A \subseteq E$, $C \subseteq F$, $B \subseteq E$, $D \subseteq F$.

a) Mq $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (& égalité lorsque f est injective).

→ Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ dc $x \in f^{-1}(f(A))$.

On a bien mqé $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Supposons f injective,

→ Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, $\exists\, y \in A$ tq $f(x) = f(y)$.

ĉ f est injective, on a $x = y$.

D'où $x \in A$, dc $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

Par double inclusion : $A = f^{-1}(f(A))$.

(e) Mq $f(f^{-1}(C)) \subset C$ (éq égalité lsq f est surjective)

soit $y \in f(f^{-1}(C))$ alors $\exists x \in f^{-1}(C)$ tq $y = f(x)$.

Comme $x \in f^{-1}(C)$, on a $f(x) \in C$, dc $y \in C$.

cel $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$.

Supposons f est surjective, soit $y \in C$, alors comme f est surjective, $\exists x \in E \mid y = f(x)$.

Puisque $y \in C$, on a $x \in f^{-1}(C)$ & dc

$y \in f(f^{-1}(C))$.

On a dc mqé lorsque f est surjective,

$C \subseteq f(f^{-1}(C))$.

& p double-inclusion : $C = f(f^{-1}(C))$.

c) Mq $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B$ tq $y = f(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A \mid y = f(x))$ ou $(\exists x \in B \mid y = f(x))$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.

Dc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) Mq $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (éq égalité lorsque f est injective)

soit $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B \mid y = f(x)$

Comme x est à la fois dans A et B, on a

$y = f(x) \in f(A)$ et $y \in f(B)$.

Donc $y \in f(A) \cap f(B)$; d'où $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Sppo f injective, soit $y \in f(A) \cap f(B)$ alors

$y \in f(A)$, dc $\exists x \in A$ tq $y = f(x)$

$y \in f(B)$, dc $\exists x' \in B$ tq $y = f(x')$

ĉ f est injective & $f(x) = f(x')$; on a $x = x'$.

ep, $x \in A \cap B$; d'où $y \in f(A \cap B)$, & dc

$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Par double inclusion, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

e) Mq $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\
&\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)
\end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) Mq $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\
&\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)
\end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

voir ex2

e) Mq $f^{-1}(C\cup D) = f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C\cup D) \Leftrightarrow f(x)\in C\cup D$

$\Leftrightarrow f(x)\in C$ ou $f(x)\in D$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(C)$ ou $x\in f^{-1}(D)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

D'où $f^{-1}(C\cup D) = f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

f) Mq $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

$x\in f^{-1}(C\cap D) \Leftrightarrow f(x)\in C\cap D$

$\Leftrightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(C)$ et $x\in f^{-1}(D)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

D'où $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

<u>Ex2</u> : Que dire de l'ens $\mathcal{F}(E,F)$ lorsque $E=\emptyset$ ou $F=\emptyset$!

• <u>$E\neq\emptyset$ mais $F=\emptyset$</u>

$\boxed{M1}$ $|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|} = 0^{|E|} = 0$ dc $\mathcal{F}(E,F)=\emptyset$

card$(\cdot) := |\cdot|$

$\boxed{M2}$ soit $f\in\mathcal{F}(E,F)$, soit $x\in E$,

alors $f(x)\in F=\emptyset$

Dc f n'$\nexists$, $\mathcal{F}(E,F)=\emptyset$.

• <u>$E=\emptyset$</u>

$\left(|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|} = |F|^0 = 1\right)$

ex $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-|x|}}$, $\mathcal{D}_f=\emptyset$. (on n'importe q^e f)

Définir une applica $\emptyset\to F$, c'est donner $\forall x\in\emptyset$, une image $f(x)$. Comme le vide ne contient pas d'élt, on pt tjrs le faire & d'une seule façon.

$\mathcal{F}(\emptyset,F)$ ne contient de qu'un sl élt.

voir <u>ex2</u>

Ex 4 soit E un ens. **TH Cantor.**

Mq $\nexists$ appli surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$

Indic° : considérer $X = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

SppS p l'absurde qu'il existe $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.

Considérons $X = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$

Puisq f est surjective, $\exists x \in E$ tq $X = f(x)$.

Est-ce que $x \in X$?

→ sppS $x \in X$ alors $x \in f(x)$. dc $x \notin X$. ?!

→ sppS $x \notin X$ alors $x \notin f(x)$ dc $x \in X$. ?!

On a dc ds les 2 cas une absurdité.

Dc f ne pt pas ê surjective.

Ex 5 : TH Cantor - Bernstein

a) $G : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ f croissante.

$M = \bigcup_{A \in S} A$ où $S = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset G(A)\}$

Mq $M \subset G(M)$, soit $x \in M$ alors $\exists A \in S$ tq $x \in A$.

Donc $A \subset G(A)$, cq $x \in G(A)$

Dc $x \in \bigcup_{A \in S} G(A) = G(M)$ d'où $M \subset G(M)$.

Mq $G(M) \subset M$:

soit $G(x) \in G(A)$ $\forall A \in S$.

on sait que $A \subset G(A)$, dc comme G est croissante $G(A) \subset G^2(A) = G(G(A))$.

Donc $G(A) \in S$. Donc $G(x) \in \bigcup_{A \in S} A = M$

D'où $G(M) \subset M$.

Par double inclusion :

$\boxed{M = G(M)}$ c'est bien un point fixe.