UFR de Mathématiques

Feuille d'exercices No 2

M41 - année 2020-2021

M.Mbekhta

Exercice 1. *(1) Etudier la convergence (simple, normale, uniforme) des séries* $(\sum_n u_n)$ *:*

$$(1)\ u_n(x) = \exp(-x^2\sqrt{n}),\ n \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^*; \quad (2)\ u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3},\ n \geq 1,\ x \in \mathbb{R};$$

$$(3)\ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2},\ n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}; \quad (4)\ u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2},\ n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

(2) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \sum_n u_n(x)$.

Exercice 2. *Soit* $u_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{n^n}$, $n \geq 1$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}$.
(1) Montrer que la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Soit* $u_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3}$, $n \geq 1$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}^+$.
(1) Montrer que

$$u_n^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{n^2(x+n)^{k+1}},\quad k \geq 1.$$

(2) En déduire que f *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. *Soit* $u_n(x) = \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$, $n \geq 2$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
(1) Montrer que la série $(\sum_n u_n)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$.
(2) Montrer pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

(On remarquera que $\exp(x) - 1 \geq x$ *pour tout* $x \geq 0$*).*
En déduire que f *est continue sur* $\mathbb{R}^+$
(3) Montrer que la série $(\sum_n u_n)$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}^+$.
(On montrera que $\sup_{x\geq 0} |u_n(x)| = \frac{e-1}{n\ln(n)}$*).*

Exercice 5. *Soit* $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$, $n \geq 1$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
(1) Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
(2) Soit $x > 0$ *et* $n \geq 1$. *Montrer que*

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\,dt.$$

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. *Soit* $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(x^{2n} - x^{2n+1})$, $n \geq 1$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
(1) Etudier la convergence simple et uniforme de la série $(\sum_n u_n)$ *sur* $[0,1]$.
(On pourra calculer le maximum de u_n*).*
(2) Etudier la continuité de f.

Exercice 7. *Soit* $u_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0,2]$ *et* $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
(1) Etudier la convergence simple de la série $(\sum_n u_n)$.
(2) la convergence de la série $(\sum_n u_n)$ *est-elle uniforme ?*
(3) Calculer

$$\int_0^1 (\sum_{n\geq 0} u_n(x))dx \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \int_0^1 u_n(x)dx.$$

Exercice 8. *Soit* $u_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{1+n^2}$, $n \geq 1$, *et* $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
(1) Montrer que les séries $f(x)$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}^+$.
(2) Montrer que les séries $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *convergent normalement sur* $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.
(3) En déduire que f *est solution de l'equation*

$$y'' + y = \frac{1}{1-\exp(-x)}$$