Univ. de Lille Département de Mathématiques M.Fradon, G.Castellan, M-F.Barme
L2 Maths S4 **Probabilités Discrètes** 2020-2021

Partiel du 27 mars 2021

Durée : 2 heures. Sans document. Tout matériel électronique interdit.

Ex 1. Numéros à six chiffres

On tire au hasard un numéro à six chiffres, autrement dit un nombre entier de 000 000 à 999 999. Calculer la probabilité des évènements

1) A : *le nombre tiré commence par* 99
2) B : *le nombre tiré comporte uniquement des chiffres impairs*
3) C : *le nombre tiré comporte exactement deux fois le chiffre neuf*
4) D : *le nombre tiré ne comporte pas plus d'une fois le chiffre neuf*
5) E : *le nombre tiré est constitué de six chiffres différents*
6) F : *le nombre tiré est constitué de six chiffres différents et croissants* (comme par exemple 013 579 ou 236 789)

Justifier les réponses en précisant notamment quel espace de probabilité on utilise. Laisser les probabilités sous forme d'expressions simples, on ne demande pas les valeurs numériques.

Ex 1. Numéros à six chiffres

On tire au hasard un nombre à 6 chiffres. Le nombre N tiré suit la loi uniforme sur l'ensemble des entiers de 000 000 à 999 999. On note $\Omega = [0; 999\,999] \cap \mathbb{N}$ cet ensemble et P l'équiprobabilité sur Ω muni de la tribu de toutes ses parties. Pour chaque partie E de Ω, $P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(E)}{10^6}$. Calculons les probabilités que

1) le nombre tiré commence par 99 ?

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{10^6} = \frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100}$$

car il y a 10^4 nombres commençant par 99 : 990 000, 990 001, 990 002,...,999 999.

2) le nombre tiré comporte uniquement des chiffres impairs ?

Il y a 5 chiffres impairs (1, 3, 5, 7, 9) donc cinq choix pour chacun des 6 chiffres du numéros constitué uniquement des chiffres impairs, ce qui fait 5^6 numéros possibles :

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{10^6} = \frac{5^6}{10^6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

3) le nombre tiré comporte exactement deux fois le chiffre neuf ?

On a C_6^2 de choisir les deux emplacements où mettre un 9 parmi les 6 emplacements disponibles, puis 9^4 façons de remplir les quatre emplacements restant avec des chiffres de 0 à 8 (neuf chiffres possibles).

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{10^6} = \frac{C_6^2\ 9^4}{10^6} = \frac{\frac{6\times 5}{2}\ 9^4}{10^6} = \frac{3^9}{2.10^5}$$

4) le nombre tiré ne comporte pas plus d'une fois le chiffre neuf ?

Il a y 9^6 numéros qui ne comportent pas le chiffres 9. Pour constituer un numéro comportant une seule fois le chiffre 9, on a six façons de choisir la position de l'unique chiffre 9 et 9^5 façons de remplir les autres positions avec des chiffres autres que 9. Donc au total $\mathrm{Card}(D) = 9^6 + 6 \times 9^5$ numéros ne comportant pas plus d'une fois le chiffre neuf.

$$P(D) = \frac{\mathrm{Card}(D)}{10^6} = \frac{9^6 + 6 \times 9^5}{10^6} = \frac{9^5 \times 15}{10^6} = \frac{3^{11}}{2.10^5}$$

5) le nombre tiré est constitué de six chiffres différents ?

Il y a C_{10}^6 choix de six chiffres différents (puisqu'il existe dix chiffres en tout) et 6! façons de les ordonner donc $C_{10}^6 6! = \frac{10!}{4!}$ numéros possibles ayant six chiffres différents (c'est le nombre d'arrangements de six parmi dix).

$$P(E) = \frac{\mathrm{Card}(E)}{10^6} = \frac{\frac{10!}{4!}}{10^6} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 3}{10^4} = \frac{3^3 \times 7}{1250}$$

6) le nombre tiré est constitué de six chiffres différents et croissants ?

Il y a C_{10}^6 choix de six chiffres différents et une seule façons de les ordonner par ordre croissant donc $C_{10}^6 = \frac{10!}{(6!)(4!)}$ numéros possibles ayant six chiffres différents et croissants.

$$P(F) = \frac{\mathrm{Card}(F)}{10^6} = \frac{\frac{10!}{(6!)(4!)}}{10^6} = \frac{\frac{9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}}{10^5} = \frac{3 \times 7}{10^5} = \frac{21}{100\,000}$$

Remarque : On pouvait aussi travailler avec équiprobabilité sur $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}^6$. On obtenait bien sûr les mêmes résultats.

Ex 2. La variable aléatoire V suit la loi de Poisson de paramètre λ. L'évènement B est tel que pour chaque n de $\mathbb{N}$ on a $P(B \mid V = n) = 1/\beta^n$, avec $\beta > 1$ fixé.

Calculer pour chaque entier n la probabilité que V vaille n quand on sait que B est réalisé.

$V \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$ donc $P(V = n) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. La formule de conditionnement par tous les cas possibles asure que

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid V = n)P(V = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n}\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/\beta)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda/\beta}$$

d'où en utilisant la formule de Bayes

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(V = n \mid B) = \frac{P(B \mid V = n)P(V = n)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\beta^n}\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}}{e^{-\lambda}e^{\lambda/\beta}} = e^{-\lambda/\beta}\,\frac{(\lambda/\beta)^n}{n!}$$

Remarque : Le calcul ci-dessus en conditionnant par une infinité de cas est très rapide car tous les $P(B \mid V = n)$ sont connus. La formule en conditionnant par deux cas seulement est vraie aussi. Elle s'écrit $P(B) = P(B \mid V = n)P(V = n) + P(B \mid V \neq n)P(V \neq n)$. Mais $P(B \mid V \neq n)$ est beaucoup plus compliqué à calculer. Dès qu'on maitrise les séries, conditionner par un grand nombre de cas très simples conduit souvent à des calculs plus faciles.

Ex 2. **En allant acheter du beurre**

Une laiterie produit des mottes de beurre de 250g emballées dans du papier. Les mottes sont ensuite suremballées par trois et vendues. L'emballage et le suremballage sont faits par deux machines, qui absorbent chacune la moitié de la production. La première est usée et chaque motte de beurre a trois chances sur quatre d'y être emballée avec un papier un peu froissé. L'autre machine est plus récente et elle n'a qu'une chance que quatre de froisser l'emballage. Le froissement ne nuit pas à la conservation du beurre. Il ne nuit pas non plus à la vente, le suremballage dissimulant le léger défaut d'esthétique.

1) Quelle est la loi du nombre X de mottes de beurre à emballage froissé dans un paquet de 3 mottes sorti de la machine usée ? On précisera quelle hypothèse vraisemblable on fait dans cette modélisation.

2) Quelle est la loi du nombre Y de mottes de beurre à emballage froissé dans un paquet de 3 mottes sorti de la machine récente ? (sous la même hypothèse).

3) On achète un paquet de trois mottes de beurre. Il contient un emballage froissé et deux non-froissés. Quelle est la probabilité qu'il vienne de la machine récente ?

4) Quelle est la loi du nombre Z d'emballages froissés dans un paquet de 3 mottes choisi au hasard parmi la production de la laiterie ? La représenter sous forme d'un tableau dont on justifiera le contenu.

Ex 2. 1) On suppose l'indépendance entre les opérations successives d'emballage. Sous cette hypothèse, le nombre X d'emballages froissés dans un paquet de 3 mottes de beurre sorties de la machine usée est le nombre de succès en 3 expériences indépendantes qui ont toutes une probabilité $3/4$ de succès. Ici, on appelle succès le fait que l'emballage soit froissé. Par définition, X suit donc la loi binomiale de paramètres 3 et $3/4$.

2) De même, le nombre Y d'emballages froissés dans un paquet de 3 mottes de beurre sorties de la machine récente suit la loi $\mathcal{B}in(3, \frac{1}{4})$.

3) On choisit un paquet de beurre au hasard. Notons R l'évènement *le paquet vient de la machine récente* et Z le nombre d'emballages froissés dans le paquet. On sait que $P(R) = 1/2$ puisque chaque machine assure la moitié de la production. On doit calculer la probabilité de R sachant que $Z = 1$. La formule de conditionnement par tous les cas possibles et le fait que Z coïncide avec Y quand les mottes sortent de la nouvelle machine et avec X sinon donnent

$$P(Z = 1) = P(Z = 1 \mid R)P(R) + P(Z = 1 \mid R^c)P(R^c) = \frac{1}{2}P(Y = 1) + \frac{1}{2}P(X = 1)$$

$$P(R \mid Z = 1) = \frac{P(Z = 1 \mid R)P(R)}{P(Z = 1)} = \frac{\frac{1}{2}P(Y = 1)}{\frac{1}{2}P(Y = 1) + \frac{1}{2}P(X = 1)}$$

On a déterminé précédemment les lois de X et Y

$$P(R \mid Z = 1) = \frac{P(Y = 1)}{P(Y = 1) + P(X = 1)} = \frac{C_3^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2}{C_3^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_3^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

4) la loi du nombre Z d'emballages froissés dans un paquet de 3 mottes est donnée par les $P(Z = k)$ pour toutes les valeurs k de $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3)\}$. On fixe k et on procède comme à la

queqtion précédente en conditionnant par les deux cas possibles :

$$P(Z=k)=P(Z=k\mid R)P(R)+P(Z=k\mid R^c)P(R^c)=P(Y=k)\times\frac{1}{2}+P(X=k)\times\frac{1}{2}$$

$$P(Z=k)=C_3^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}\times\frac{1}{2}+C_3^k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}\times\frac{1}{2}=\frac{C_3^k}{2}\ \frac{3^{3-k}+3^k}{4^3}=\frac{C_3^k\ (3^{3-k}+3^k)}{128}$$

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{3^3+1}{2^7}=\frac{7}{32}$	$3\frac{3^2+3^1}{2^7}=\frac{9}{32}$	$3\frac{3^1+3^2}{2^7}=\frac{9}{32}$	$\frac{1+3^3}{2^7}=\frac{7}{32}$

Remarque : attention à ne pas confondre la loi d'une v.a., représentée par un tableau unidimensionnel, avec la loi d'un couple de v.a., qu'on représente par un tableau bidimensionnel.

Ex 3. On a vu des canards

Dans un parc naturel vivent des canards. Les trois quarts sont des colverts (canards bruns à cou vert) et les autres sont blancs. On suppose pour simplifier que les canards sont indépendants les uns des autres.

1) Un ornithologue observe les canards pendant un mois (30 jours). On note V le nombre de jours où le premier canard qu'il voit est blanc. Donner la loi de V .

2) Un randonneur traverse le parc. Il photographie tous les canards qu'il voit jusqu'à ce qu'il obtienne une photo d'un canard blanc. Quelle est la loi du nombre X de photos ? Quelle est la probabilité que X vaille 5 ?

3) Dans un pré hors du parc, un chasseur repère un groupe de 5 canards blancs et 7 canards colverts. Il en abat deux choisis au hasard. Quelle est la loi du nombre Y de canards blancs tués ? Quelle est la probabilité que les deux canards abattus soient de couleurs différentes ?

4) *(question bonus hors barème)*

Un autre randonneur traverse le parc en photographiant tous les canards qu'il croise jusqu'à ce qu'il possède une photo d'un canard colvert *et* une photo d'un canard blanc. Déterminer la loi du nombre W de photos prises.

On justifiera les réponses, on donnera les noms et paramètres des lois si elles en ont, et on laissera les valeurs sous forme de fraction simplifiée.

Ex 3. 1) Un ornithologue note pendant 30 jours la couleur du premier canard qu'il voit ce jour-là. Chaque jour il y a une chance sur quatre que ce premier canard soit blanc, indépendamment des autres jours. Le nombre V de jours où le premier canard est blanc est donc le nombre de succès en 30 espériences indépendantes de probabilité de succès $1/4$: $V \sim \mathcal{B}in(30, 1/4)$.

2) A chaque rencontre avec un canard, le randonneur a (indépendamment des autres rencontres) une probabilité $1/4$ que le canard soit blanc. Le nombre X de photos est donc le nombres d'expériences indépendantes avec probabilité de succès $1/4$ nécessaires pour obtenir le premier succès : $X \sim \mathcal{G}eom(1/4)$.

$$P(X=5) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^5} = \frac{81}{1024}$$

3) On tue au hasard deux canards dans un groupe de 5 canards blancs et 7 canards colverts. Le nombre Y de canards blancs tués est le nombres de choses remarquables (canard blanc) obtenues quand on prend 2 choses au hasard sans remise parmi 12 choses dont 5 sont remarquables (12 canards dont 5 blancs). Y suit donc la loi hypergéométrique de paramètres 12, 5 et 2.

La probabilité que les deux canards abattus soient de couleurs différentes est la probabilité qu'un seul canard soit blanc parmi les deux abattus :

$$P(Y=1) = \frac{C_5^1\ C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{5 \times 7}{\frac{12\times 11}{2}} = \frac{35}{66}$$

4) Ce randonneur traverse le parc en photographiant tous les canards qu'il croise jusqu'à ce qu'il ait une photo d'un canard colvert *et* une photo d'un canard blanc. Le nombre W de photos prises sera un entier supérieur ou égal à 2.

Notons B l'évènement *la première photo est celle d'un canard blanc*. On sait que $P(B) = 1/4$.

Si la première photo est celle d'un canard blanc, la loi du nombre $W-1$ de clichés supplémentaires pour obtenir une photo d'un canard colvert est la loi du nombres de tentatives indépendantes nécessaires pour obtenir le premier succès quand la probabilité de succès est chaque fois $3/4$. Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(W-1=k \mid B) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

De même, si la première photo est celle d'un canard colvert, la loi du nombre $W-1$ de clichés supplémentaires pour obtenir une photo d'un canard blanc est la loi du nombres de tentatives indépendantes nécessaires pour obtenir le premier succès quand la probabilité de succès est chaque fois $1/4$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(W-1=k \mid B^c) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

En conditionnant par les deux cas possibles B et B^c,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(W-1=k) = P(W-1=k \mid B)P(B) + P(W-1=k \mid B^c)P(B^c)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(W=k+1) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{3}{4} = \frac{3+3^k}{4^{k+1}}$$

ce qui donne la loi

$$\forall n \in \{2,3,4,\ldots\} \qquad P(W=n) = \frac{3+3^{n-1}}{4^n}$$