PDN (TDE)

→ construcOs axiomatiqs naturelles.

→ réfuter 5° postulat d'Euclide

↳ géo hyperboliq.

deb XX°

→ Tiers-exclu

→ 0 | 1 : Mathématiques | Vrai ou Faux.

→ dmqO négaO proposiOs (démo p absurde)

Logique intuitioniste ¬¬1 ≠ 0.

↳ 7, 8 axiomes TDE : absolmt évident,

qui on les accepte.

↳ indoctriner p tt l'enseignement ⇒ naturel ?

↳ Est-ce vraiment naturel ?

fin XIX° :

- concept ens pas précis

- tentative de formaliser p Cantor & Russel.

- un ens q contient ts les ens. ?!?

↳ le sac est dans lui-m

- dPre de Russel :

→ visiblmt ens q contienn^t e-m^s

→ certains n'ont pas cette ppté.

- concept intuitif : ensemble. ("bon")

→ noO de collecO ("pas bon")

↳ la collecO est "le sac q contient ts les ensembles"

↳ comment construire collecO p étiquette ensemble

↳ des atomes → objet p tag ensemble.

2° axiome : 1 axiome q est l'ens vide. (22) AEV

• noO : ê élément de.

→ ens élt d'un autre ens.

→ noO :

$\exists$ ens$_1$, $\forall$ autre ens$_2$: ens$_1$ $\notin$ ens$_2$: $\exists A, \forall B : A \notin B$.

→ 2 objets ĉ ceci ?

2 ens égx s'ils contiennent m̂ élts.

1° axiome : (21) A EXT. p (⇒).

- Axiomes de constructⁿ : 23, 24, 25

→ si 2 ens on pt créer un sac q contient ces 2 ens.

→ si 2 fois m̂ ens ⓒ qd un seul ens,

23 A. de Paire.

$\exists$ ens q contient ens vide & ens vide. $\{\emptyset, \emptyset\} = A$

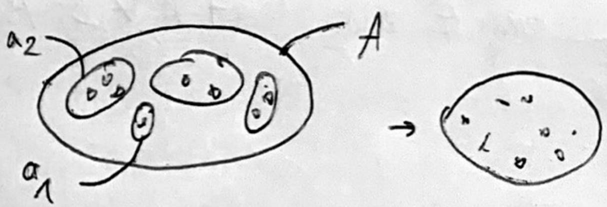
A.dP → ens q contient 1 élt. $\{\emptyset, A\}$

A.dP → on réitère ens vide + sac (1 élt)

ainsi de suite → $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots$

23 A de Paire $\{A, B\}$ notatⁿ

24 A.d Réunion



$A = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

$\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$

1 $\{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

2 $\{\{\{\emptyset\}\}\}$

3. $\{ \underbrace{\boxed{\{\{\emptyset\}\}}}_{1}, \underbrace{\boxed{\{\{\{\emptyset\}\}\}}}_{2} \}$

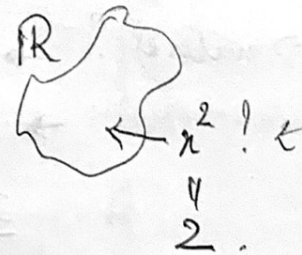
AdP & AdR
↳ on obtient des axiomes + grd

25 A. d Séparatⁿ. → rejeter les billes.

↳ on enlève élts de l'ens → ça reste un ens.

$\forall A \ \exists B \ \forall C : C \in B \iff [C \in A \text{ et } p(C)]$

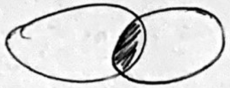
→ bille bleue



→ pr chaque critère appliqué à un ens, on pt obtenir un ens.

$$B \overset{\text{not}}{=} \{C \in A \mid p(C)\}$$

On pt définir l'intersecθ.



$\{x \in A \mid x \in B\}$

$A \cup B$ défini ?

la paire $\{A, B\}$.

- $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$\{A, B\} = \{\cancel{\{}a_1, a_2, a_3\cancel{\}}, \cancel{\{}b_1, b_2, b_3, b_4\cancel{\}}\}$.

par axiome réunion

$\cup\{A, B\} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

---

intersecθ $A \cap B$.

$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

- critère de sélecθ : $p(x) : x \in B$

Tout objet mathématique pt ê mis ss la forme d'ensemble.

$A = \{a_1, a_2\}$ $\longrightarrow$ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

$a_1 \to 5$ images possibles
$a_2 \to 5$ images possibles $\to 5^2 = 25$

nbr applicaθ possibles

$A = \{a_1, \dots, a_5\}$ $\longrightarrow$ $B = \{a_1, \dots a_3\}$ $\longrightarrow 3^5$.

$A = \{\}$ $\longrightarrow$ $B = \{2\}$ $\longrightarrow 1$.

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\longrightarrow$ $B = \{\}$ $\Longrightarrow 0^3 = 0$.

nbr élt source

nbr élt arrivée

applicaθ

graphe

Produit cartésien de 2 ens :

→ graphe ss-ens du PC.

0° ds ce contexte donne 1.

Théorie des ensembles

Relaθ, relaθ d'ordre, ApplicaΘs.

$$\emptyset \xleftrightarrow{\text{notaΘ}} 0$$

$$\{\emptyset\} \xleftrightarrow[\text{not}]{} 1.$$

Produit Cartésien

$(a,b) \neq \{a,b\} = \{b,a\}$ il ne faut distinguer.

$\overset{\shortparallel}{\{\{a\}, \{a,b\}\}}$

① $\{x,y\} = \{x,z\} \Rightarrow y = z.$

a, b ens

→ $\{a,a\} = \{a\}$ ens

→ $\{a,b\}$ ens.

AdP $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ ens

La colleco de ts couples d'ordonnés : trop grd

~~R~~ Russel trop de choses dedans, ne pt pas avoir le label ensemble.

26 $\mathcal{P}(A)$ est un ens

$B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subset A$

$\Leftrightarrow \forall C : [C \in B \Rightarrow C \in A]$

---

en général $A \not\subset \mathcal{P}(A)$

on a $A \in \mathcal{P}(A)$ car $A \subset A$.

Ⓔ de $A \not\subset$ $A \subset \mathcal{P}(A)$.

$A = \{a\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\{a\} \subset \{\emptyset, \{a\}\}$?

$a \in \{\emptyset, \{a\}\}$

[Possible si $a = \emptyset$
$a \in \{\emptyset, \{a\}\}$.

$\nexists$ bijecO entre a & $\mathcal{P}(a)$?

Preuve non existence bijecO $A \to \mathcal{P}(A)$.
Supposons : $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ bijecO
$\forall a \in A$: $f(a) \subset \mathcal{P}(A)$; $f(a) \subset A$.
$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subset A$.

si f bijective $\exists\, b \in A : f(b) = B$.

Deux possibilités $b \in B$ ou $b \notin B$.
si $b \in B \underset{\text{def } B}{\Rightarrow} b \notin f(b) = B$ pb.

si $b \notin B \underset{\text{def } B}{\Rightarrow} b \notin f(b) \Rightarrow b \in B$.

pb

| $\infty^{té}$ nombrable
| $\infty^{té}$ nbr réels, cont

Les couples ordonnées (a,b) tq $a \in A$ et $b \in B$
st ds quel ens ?
$\{\{a\}, \{a,b\}\} \in$?
$a \in A$, $b \in B$.
$\{a,b\} \in$? $\qquad \{a,b\} \not\subset A$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \not\subset B$

$\to \{a,b\} \subset A \cup B$. $\quad \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$
$\to \{a\} \subset A \subset A \cup B$. $\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\{\{a\}, \{a,b\}\} \subset \cancel{A \cup B}$ $\quad \mathcal{P}(A \cup B)$
$\{\{a\}, \{a,b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ $\quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

$(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

→ On n'écrit jamais $\{\{a\}, \{a,b\}\}$.
on écrit toujours (a,b).

Produit cartésien $A \times B$

q° : $(A \times B) \times C$?

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

des couples premiers de $A \times B$
2° de C

dep de A
2° $B \times C$

on écrit $(a,b,c) \in A \times B \times C$.

→ Suite de Cauchy nbr rationnels

→ Coupure de ~~Cédégong~~ Dedekind

construcO nbr réels $\mathbb{R}$

ens, $+$, $\times$, $\mathbb{R}$ totale.

$x \leq y$

corps

Ppté - BWeierstrass -

traducO entre êlt produit cartésien,

2.7 Une équivalence en logique

- $A \times B = \{C \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A\ \exists b \in B : C = (a,b)\}$
- $\forall C : C \in A \times B \Rightarrow p(C)$
- $\forall C : \left[\exists a \in A\ \exists b \in B : C = (a,b)\right] \Rightarrow p(C)$

$\forall C : \left[\exists a \in A\ \exists b \in B : C = (a,b)\right] \Rightarrow p((a,b))$

Autre approche.

$\boxed{\Rightarrow}$ on sait $\forall C \in A \times B : p(C)$
à mq $\forall a \in A\ \forall b \in B : p((a,b))$

Prenons $a \in A$ et $b \in B$ & mq $p((a,b))$.

Preuve $a \in A, b \in B \Rightarrow C : (a,b) \in A \times B$

$\boxed{\Leftarrow}$ on sait $\forall a\ \forall b\ p((a,b))$
à mq $\forall C : p(C)$

prenons $C \in A \times B$ & mq $p(C)$

Preuve

Preuve $a \in A$, $b \in B \Rightarrow$ par hypothèse $p((a,b))$

$(a,b) = C \Rightarrow p(C)$ $\square$.

2.8

$\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

c'est quoi un entier naturel ?

$\hookrightarrow$ produit cartésien de $A \times B \times C$

C3 Relat° d'ordre

Relat° $R \subset A \times B$ entre A et B.

Notat° : $(a,b) \in R$.

Notat° : $a R b$.

$a \leq b$ relat° d'ordre

$\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ → symbole comme R.

$a R b$: a en relat° R & b.

Condit°s relat° d'ordre :

1) $a R a$ pr tt a réflexivité

2) $a R b$ et $b R a \Rightarrow a = b$ antisymétrie

3) $a R b$ et $b R c \Rightarrow a R c$ transitivité

4) $\forall a, b \in A$: $a R b$ ou $b R a$

@ $A = \mathcal{P}(B)$ toutes les parties de B.

$R \subset A \times A$.

$(x,y) \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \subset y$.

$B = \{1,2,3\}$, $x = \{1,2\}$, $y = \{2,3\}$.

ni $(x,y) \in R$ ni $(y,x) \in R$.

Relat° d'ordre non-total

$R \subset A \times B$ relat°, changer l'ordre ds un couple

$R^{-1} \subset B \times A$:

$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$

Domaine & Image d'une relat°

$R \subset A \times B$

$dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a,b) \in R\}$

$im(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a,b) \in R\}$

Image directe / Image réciproque

A, B 2 ensembles

$R \subset A \times B$

$X \subset A$, image directe de X par R.

$R[X] = \{b \in B \mid \exists a \in X \mid (a,b) \in R\}$

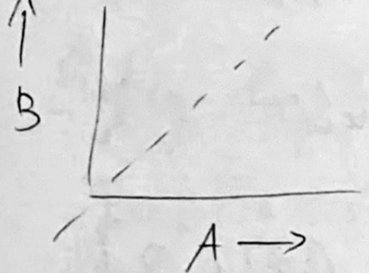
"toutes les b q figurent ds rela° qd a sont ds X.

Image réciproque : $Y \subset B$

$R^{-1}[Y] =$ image directe de B par la relaθ R^{-1}

$= \{a \in A \mid \exists b \in Y : (b,a) \in R^{-1}\}$

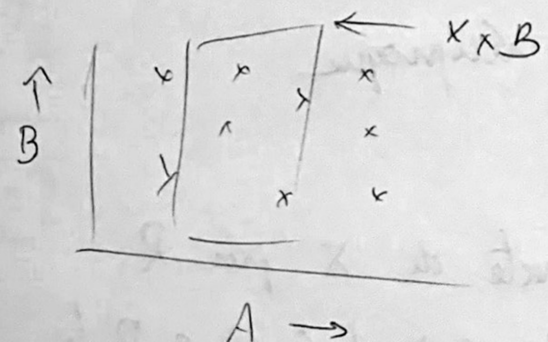
$= \{a \in A \mid \exists b \in Y : (a,b) \in R\}$



$R \longrightarrow R^{-1}$

symétrie par rapport à la diagonale.

$R[X] = \mathrm{Im}(R \cap (X \times B))$



Noθ de f / applicaθ

$f : A \to B$ applicaθ

pour $a \in A$ il y a une image $f(a) \in I$.

graphe $(f) = \{(a,b) \mid a \in A,\ b = f(a)\}$

$\Rightarrow$ graphe (f) est une relaθ entre A & B.

qθ Condiθs à une relaθ entre A et B pour que R soit le graphe d'une applicaθ : $f : A \to B$.

1) $\forall a \in A\ \exists b \in B : (a,b) \in R$ Δ

2) $\forall a \in A\ \forall b, c \in B : [(a,b) \in R$ et $(a,c) \in R]$

$\Rightarrow b = c$. 3θ

Si R vérifie ces 2 condiθs, on pt définir une applicaθ $f : A \to B$ par : pour tous $a \in A$: $f(a)$ c'est l'uniq élément de B tq $(a, f(a)) \in R$.

9°) $R \subset A \times B$ représente une applicat° $f : A \to B$. On regarde R^{-1} ; vérifie les condit°s :

- $\forall a \in A \ \exists b \in B : (b, a) \in R^{-1}$. S
- $\forall a \in A \ \forall b, c : B : (b, a) \in R^{-1}$ et $(c, a) \in R^{-1}$ $\Rightarrow b = c$

$\to \forall a \in A \ \exists b \in B : a = f(b)$ surjective

$\to \forall a \in A, \forall b, c \in B : f(b) = a = f(c) \Rightarrow b = c$.

$f : A \to B$, $f^{-1} : B \to A$ existe en tant qu'applicat° si f^{-1} vérifie les condit°s une applicat° $\Leftrightarrow f$ inj & surj.

Rq° après 3.B.

Chgt de nom :

$\mathcal{P}(A)$ = l'ens des parties de A par axiome

On définit $Inc \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ par $(X, Y) \in Inc \overset{def}{\Leftrightarrow} X \subset Y$.

Inc est une relat° entre $\mathcal{P}(A)$ et (A)

on vérifie que Inc est une relat° d'ordre sur $\mathcal{P}(A)$

1) $(X, X) \in Inc$

2) $(X, Y) \in Inc$ et $(Y, X) \in Inc \Rightarrow X = Y$.

3) $(X, Y) \in Inc$ et $(Y, Z) \in Inc \Rightarrow (X, Z) \in Inc$

$Inc \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$

$X \, Inc \, Y \overset{not}{\Leftrightarrow} (X, Y) \in Inc \Leftrightarrow X \subset Y$.

on pourrait remplacer Inc par $\subset$

et on écrit "dc."

$\subset \ \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$

inclusion ensembliste

autre not pr relat°

$Inc = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subset Y\}$

$\subset = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subset Y\}$.

noter inclu° ensemb liste

sous ensemble

Ds la pratiq on note tjrs Inc par $\subset$.

sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$), on devrait écrire

$$\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$\leqslant = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y \}.$$

si on note la relat° par Infeg on dit

$$\text{Infeg} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$\text{InfEg} = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \subseteq y \}.$$

C5 → q°s ?????

La Restricθ

$f : A \to B$ "veut dire" $f \subset A \times B$

vérifiant 2 condiθs :

(i) $\forall a \in A.\ \exists b \in B : (a,b) \in f$

(on écrit $b = f(a)$).

(ii) $\forall a \in A \quad \forall b, c \in B : (a,b) \in f$ et $(a,c) \in f \Rightarrow b = c$.

ce q justifie relaθ $b = f(a)$

Restricθ $X \subset A$ sous-ensemble

On regarde $f \cap (X \times B) \subset X \times B$.

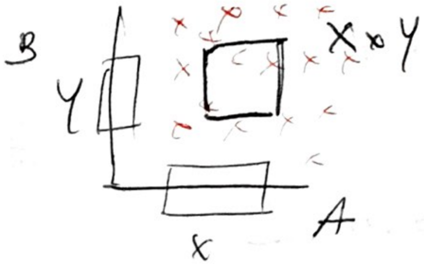
Est restricθ de f à $X \times B$.

Pour f on dit que c'est la restricθ de f à X.

Plus génᵗ

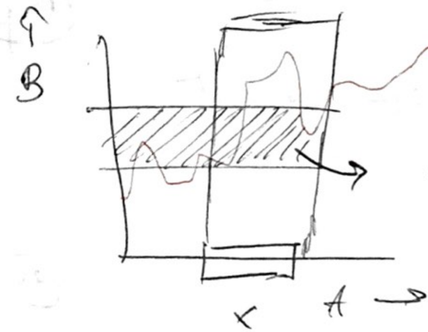
→ $X \subset A$, $Y \subset B$, f relaθ entre A et B

f relaθ entre A et B, alors $f \cap (X \times Y)$ est une relaθ entre X et Y.



$f|_X = f \cap (X \times B)$

si $f \subset A \times B$ est une f alors $f \cap (X \times B)$ est aussi une f.



graphe de f

intersecθ n'est pas graphe d'une f.

VI. Ens ∞ & Constructθ de ℕ

Dedekind | Toutes les autres tentatives de distinguer l'infini du fini dont j'ai eu connaissance ont eu tellement peu de succès me semble-t-il que je pense qu'il m'est permis de m'abstenir de les critiquer.

A est ∞ s'il $\exists$ $f: A \to A$ injective non-surjective.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$

Idée $1, 2, 3, 4, \ldots$ l'idée suivant ?

Idée : $0 = \emptyset$ $\emptyset$ contient 0 élt

$1 = \{\emptyset\}$ car 1 contient un élt

? $2 = \{\{\emptyset\}\}$

2° idée $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ contient 2 élts

$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$

$3 = \{0, 1, 2\}$

Suivant de a est $a \cup \{a\}$.

$2 = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}$

$3 = \{0, 1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}$

On pose $S(a) = a \cup \underbrace{\{a\}}_{\text{ens pr axiome de paire}}$

ens paire + axiome réunion.

2

Axiome de l'∞

$\exists A : \emptyset \in A$ et $\forall a : a \in A \Rightarrow S(a) \in A$.

→ on cherche le + petit ens q vérifie cela, veut dire quoi ?

Rep A est + petit si $\forall$ B q vérifie $\begin{cases} \emptyset \in B \\ b \in B \Rightarrow S(b) \in B \end{cases} \Rightarrow A \subset B$.

en dim qq, 1 2 famille génératrice, q'elle Fg + petite de sorte qu'aucun ss-ens soit génératrice.

Q° $\exists$ & $\exists!$?

$\exists!$

$\underset{\uparrow \text{ + petit}}{A}$ et $\underset{\uparrow \text{ ppté}}{B}$ $\Rightarrow A \subset B$ $\Rightarrow A = B$

$\underset{\uparrow \text{ + petit}}{B}$ et $\underset{\uparrow \text{ ppté}}{A}$ $\Rightarrow B \subset A$

$\exists$ en tant q'ens.

On va chercher tq ens à int de A celui donné p l'axiome de l'∞

$X = \{ B \in \mathcal{P}(A) \mid B$ vérifie 2 pptés $\}$

↳ $\emptyset \in B$.

↳ $b \in B \Rightarrow S(b) \in B$.

1° $\boxed{Rq}$: $X = \emptyset$ car $A \in X$.

2° on pose $\mathbb{N} = \cap X = \bigcap_{B \in X} B$.

idée $X = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

$\cap X = B_1 \cap B_2 \dots \cap B_n$.

$x \in \cap X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A \in X : x \in A$.

R X consiste de ss-ens de A q vérifient ces 2 ppté' $B_1, B_2, \dots \in X$

$\mathbb{N} = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots$

1°/ $\mathbb{N} \neq \emptyset$ car $\forall B \in X : \emptyset \in B$

dc $\emptyset \in \bigcap_{i=1}^{\dots} B_i$

2°/ si $n \in \mathbb{N}$ alors $S(n)$ aussi

$\underline{DM}$ $n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \forall B \in X : n \in B$

par déf de X : $n \in B \Rightarrow S(n) \in B$

$\Rightarrow \forall B \in X : S(n) \in B$

$\Rightarrow S(n) \in \bigcap_{i=1}^{\dots} B_i = \mathbb{N}$.

ccl $\mathbb{N}$ vérifie aussi les pptés.

Dans $\mathbb{N}$: $0 = \emptyset$

1 : $S(0) = \{\emptyset\} = \{0\}$

2 : $\{0, 1\}$

3 : $\{0, 1, 2\}$ dc

Thm de Récurrence :

si A vérifie $0 \in A$ et $n \in A \Rightarrow S(n) \in A$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset A$.

ex si $P \subset \mathbb{N}$ vérifie $0 \in P$
et $[n \in P \Rightarrow S(n) \in P]$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset P$ (minimalité de $\mathbb{N}$)

par double inclusion $P = \mathbb{N}$.

---

ex $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)\}$

$0 \in P$ et si $n \in P$ alors $n+1$ dans P

Alors (preuve par récurrence) $P = \mathbb{N}$.

— Autre formulation —

$P(n)$ une proposition q dépd de n si

on a $P(0)$

et l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\Rightarrow P(n)$ vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

$Q = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ vrai}\}$

L'opération S n'est pas une application ds le sens ensembliste, car agit s. collection de ts les ens.

P_m, $S_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(m, n) \in S_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow n = S(m)$

est une application.

Thm $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective mais pas surjective.

illustration de 67

$5 = \{0,1,2,3,4\}$, $2 \in 5$.
$2 = \{0,1\} \subset 5$

Idée bizarre : A ensemble

$\in_A \subset A \times A$ une relation

$(a, b) \in \in_A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in B$.

Déf Un ordinal est un ens A tq $\in_A$ est une relation d'ordre stricte.

$2+1 = S(2) = 3$ définiϑ de 3 !
Mais $1+2=3$ est un Théorème.

ans commutativité de addiϑ.

Addiϑ : qq chose $+1$.

$2+1 = S(2) = S(S(1)) = S(S(S(0)))$.

la définiϑ mq donne q formule

- $1+2 = S(0) + S(1)$
  $n + S(p) \stackrel{déf}{=} S(n+p)$

& $n+0=n$.

Pr $1+2 = 1+S(1) = S(1+1)$
$= S(1+S(0))$
$= S(S(1+0)) = S(S(1))$
$= S(S(S(0)))$

- Pr $2+1 = 2 + S(0) = S(2+0) = S(2)$

Autre façon de mq suite déf. p récurrence est bien déf !

applicaϑ

Les données A : ens $a_0 \in A$ & $g : A \to A$

On vt mq $\exists !$ applicaϑ de $f : \mathbb{N} \to A$
tq $f(0) = a_0$, $f(n+1) = g(f(n))$.

M

f applicaϑ (si ça existe) vt dire $f \subset \mathbb{N} \times A$ tq pptés (q ça représente un graphe) on va ① ①

des ss-ens F de $\mathbb{N} \times A$ tq la ppté
$(0, a_0) \in F$ & $(n, x) \in F \Rightarrow (n+1, g(x)) \in F$.

$\mathcal{F} = \{ F \subset \mathbb{N} \times A \mid F$ a ttes ces pptés $\}$.

$\mathcal{F}$ n'est pas vide car $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$.

On mq + pt élt ds $\mathcal{F}$ est le graphe d'1 f.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a_0, $a_{n+1} = f(a_n)$.

si f est $\nearrow$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\exists$.

⚠ Ne pas confondre le graphe de f (dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) et le graphe de la suite a_n (dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$).

Les opéraOs sur $\mathbb{N}$.

8.17 | soit $A \subset \mathbb{N}$ un ss ens non-vide. Alors A contient un + petit élt : $\exists\, l \in A, \forall k \in A : l \le k$.

1. $\mathbb{N}$ = le + petit ens tq $0 \in \mathbb{N}$ & $\forall n \in \mathbb{N}$: $S(n) \in \mathbb{N}$, $S(A) = A \cup \{A\}$.

2. On pt remplacer S p l'opéraO $S(A) = \{A\}$

Rq : La définiO de $\mathbb{N}$ est en principe la définiO de récurrence.

Toutes les S^{ces} sur $\mathbb{N}$ st à construire !

1) additO
2) multiplicaO
3) RelaO d'ordre

(pas la soustracO
pas la division)

Ensuite à mq les pptés !
Cela se fait par récurrence.

SoustracO $n-m$ pour $n \geq m$? on le fait via la déf de la RelaO d'ordre.

D (AdditO)

Prop préalable

Si on a $a_0 \in A$ et $f: A \to A$ applicaO
$\Rightarrow$ $\exists$ uniq appli $\varphi: \mathbb{N} \to A$ vérifiant
$\varphi(0) = a_0$ & $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\varphi(S(n)) = f(\varphi(n))$.

Pr l'additO on prd $A = \mathbb{N}$, $a_0 = k \in \mathbb{N}$,
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = S(n)$

Alors par (TH) : $\exists$ uniq $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = A$

tq $\varphi(0) = k$ & $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(S(n)) = S(\varphi(n))$.

Interprétat° : on note $\varphi(n) = k + n$

k fixé ; on a suite récurrente.

$\Rightarrow \varphi(S(n)) = S(\varphi(n))$ devient $k + S(n)$

$k + S(n) = S(k+n)$.

m̂ ???

Si on note ssi $S(n) = n+1$.

On obtient $k + (n+1) = (k+n) + 1$.

IQ m̂ addit° ?

$\to$ si on prend $k = 0$, on obtient

$$\underset{\varphi}{0 +} (n \underset{S}{+} 1) = (0 \underset{\varphi}{+} n) \underset{S}{+} 1$$

On revient en arrière :

$\forall k$, on def suite p récurrence.

On vt on faire une applicat°

$\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi_k(0) = k$,

$\varphi_k(S(n)) = S(\varphi_k(n))$.

7.8 $\boxed{\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}}$, $\varphi(k, n) = \varphi_k(n)$.

(Pb) Mettre tous les applicat°s φ_k ds m̂ ens

Deux appli $\varphi_1 : \mathbb{N} \to A$, $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow A$

On pt construire une appli $F : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to A$

$F(1, n) = \varphi_1(n)$ & $F(2, n) = \varphi_2(n)$

$\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

on définit $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$F(0, n) = \varphi_0(n)$

$F(1, n) = \varphi_1(n)$

$F(2, n) = \varphi_2(n)$

$\vdots$

suite d'appli

$\downarrow$

transcrire en une applicat° sr le produit.

 de Banatarski

 $\div 5$

→ découpage en 5 morceaux qq^l

on ne p^t pas attribuer un volume.

→ qd on déplace un ens p rotat° & translat° ça ne change pas de volumes (il faut poser au préalable que le morceau a un volume).

→ Famille de suite déf. p récurrence indexé p élt de N : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suite déf p récurrence.

On en fait une applicat° :

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$F(k,n) = \varphi_k(n)$$

Si on a un ens P de paramètre $\forall p \in P$ une suite déf p récurrence.

$\varphi_p : \mathbb{N} \longrightarrow A$, on p^t former une applicat°.

$$F : P \times \mathbb{N} \longrightarrow A$$

$$F(p,n) = \varphi_p(n)$$

Ptés addit° à mq

$k+n = \varphi_k(n)$ via $\varphi_k(0)=k$,

$\varphi_k(S(n)) = S(\varphi_k(n))$

1° $k+0 = k$? oui

2° $k+1 = S(k)$? déf de 1.

$k+1 = \varphi_k(1) = \varphi_k\, S(0) = S(\varphi_k(0)) = S(k)$

3° $0+k = k$?

$\varphi_0(k) = k$? par récurrence !

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi_0(n) = n \}$

$0 \in A$ car $\varphi_0(0) = 0$ par déf.

$\varphi_k(0) = k$

Si $n \in A$, $\varphi_0(n) = n$ alors par la déf de suite p récurrence :

$\varphi_0(S(n)) = S(\varphi_0(n)) = S(n)$

↳ car $n \in A \Leftrightarrow \varphi_0(n) = n$

Dc par récurrence $A = \mathbb{N}$.

- Mq commutatif :

on fixe $m \in \mathbb{N}$ on ① $A = \{n \in \mathbb{N} / n+m = m+n\}$

on a mqé $0 \in A$,

Supposons $n \in A \Rightarrow m + S(n) = \varphi_m(S(n)) = S(\varphi_m(n))$

$= S(m+n) = S(n+m) = S(\varphi_n(m))$

$= \varphi_n(S(m)) = n + m + 1$?

- chg^t de base

(AL) → $P^{-1}AP$

(FB)

$Mat_{\mathcal{B}}(q)$ ^tPAP

Diagonal$^{\text{ion}}$, v$^{\text{le}}$ propres.

(FB) → tjs trouver base en $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

si (vp) 2,3

(AL) → (vp) pas bonne.

chger long^R base.

chgt base de Mat :

P hasard $P^{-1} = {}^tP$ ⇒ ça marche.

(TH) si mat sym$^{\text{é}}$triq alors ∃ une AL : $E \to E$

base de vct$^{\text{rs}}$ base orthonormée.

↳ $^tP = {}^tP$ ← ppté

(TH) si mat symétq 2 (vp) 2 v$^{\text{rs}}$ propres ≠ 5 alors il (vp) st orthgnx, normé's 1.

dim(sep) > 1, 2 vp pr m̂ v$^{\text{rs}}$ propres → procédure Gram - Schmidt.