
Analyse Combinatoire

1) Équipes

On dispose d'un groupe de cinq personnes.

- a) Combien d'équipes de trois personnes peut-on former ?
- b) Combien d'équipes avec un chef, un sous-chef et un adjoint ?
- c) Combien d'équipes avec un chef et deux adjoints peut-on former ?

2) Village

Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit certain que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

On définira avec précision ce qu'on appelle des initiales.

3) Encyclopédie

Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés sur une même étagère.

- a) Combien y a-t-il de manières différentes de les classer sur cette étagère ?
- b) Parmi ces classements, combien y en a-t-il, où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre sur l'étagère ?

4) Dés

On jette trois dés A , B , C ayant chacun 6 faces numérotées de 1 à 6.

- a) Dénombrer les résultats ne comportant aucun as.
- b) Dénombrer les résultats comportant au moins un as.
- c) Dénombrer les résultats comportant exactement un as.
- d) Dénombrer les résultats comportant exactement deux as.

5) Poker

Combien y a-t-il de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 32 cartes contenant :

- a) **Un Carré** *4 cartes de même hauteur*
- b) **Une Couleur** *5 cartes de même couleur*
- c) **Une Quinte** *5 cartes dont les hauteurs se suivent*
- d) **Une Quinte Flush** *à la fois quinte et couleur*

Probabilités

1) Poker

Au Poker, chaque joueur reçoit une «main» de 5 cartes prises au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- a) Quelle est la probabilité de recevoir un Carré? («main» de 5 cartes dont 4 ont la même hauteur)?
- b) Quelle est la probabilité de recevoir une Quinte Floche? («main» de 5 cartes de la même couleur et de hauteurs consécutives).

2) Dé pipé

On utilise un dé «pipé» pour lequel la probabilité d'obtenir une face paire comme résultat d'un lancer, est les trois quarts de la probabilité d'obtenir une face impaire.

Chaque face paire a la même chance de sortir, et chaque face impaire aussi.

- a) Définir l'univers et la probabilité avec précision.
- b) Quelle est la probabilité de l'événement «obtenir As ou Six»?
- c) On joue maintenant deux fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir des nombres dont la somme fait 5?

3) Sac de billes

Un sac contient 10 billes. Il y a des billes rouges et des billes blanches.

Le nombre des billes blanches est x , celui des billes rouges est y avec : $2 \leq x \leq 8$.

- a) Calculer d'abord en fonction de x et y , puis en fonction de x seulement, la probabilité p pour que, en tirant simultanément deux billes, elles soient toutes les deux de la même couleur.

(Application : $x = 4$)

- b) Quel doit être le nombre x de billes blanches, pour que cette probabilité soit minimale, et quel est ce minimum?

- c) Vérifier que la formule donnant p en fonction de x est encore valable pour : $x = 0$ et $x = 1$.

4) Deux dés

On jette deux dés simultanément. Soient les événements suivants :

- A = «la somme des points est un multiple de 3»
- B = «la somme des points est divisible par 4»

- a) Calculer les probabilités : $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
- b) Les événements A et B sont-ils indépendants?
- c) Calculer : $P(A/B)$, $P(B/A)$.

Analyse Combinatoire (Solutions)

1) Équipes

On dispose d'un groupe de cinq personnes.

- a) Combien d'équipes de trois personnes peut-on former ?
- b) Combien d'équipes avec un chef, un sous-chef et un adjoint ?
- c) Combien d'équipes avec un chef et deux adjoints peut-on former ?

a) Dans ce cas, une «équipe» est un sous-ensemble de trois personnes prises dans un ensemble de cinq personnes ; c'est une «Combinaison de 3 parmi 5»

Dans ce cas il y a donc $C_5^3 = 10$ équipes distinctes possibles.

b) Maintenant, une «équipe» est une liste ordonnée de trois personnes prises dans un ensemble de cinq personnes ; c'est un «Arrangement de 3 parmi 5»

Maintenant il y a donc $A_5^3 = 60$ équipes distinctes possibles.

c) Cette fois-ci, pour constituer une «équipe», il faut choisir un chef (il y a 5 cas possible), puis il faut prendre deux adjoints, c'est à dire est un sous-ensemble de deux personnes prises dans l'ensemble de quatre personnes qui restent ; c'est à dire une «Combinaison de 2 parmi 4».

Cette fois-ci il y a donc $5 \times C_4^2 = 5 \times 6 = 30$ équipes distinctes possibles.

2) Village

Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit certain que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

On définira avec précision ce qu'on appelle des initiales.

il est possible de définir les initiales de différentes façons.

Nous allons décider de définir les initiales ainsi : «initiales» = «2-liste de lettres prise dans un alphabet de 26 lettres»

Il y a donc $26^2 = 676$ «initiales» distinctes.

Donc si un village compte $676 + 1 = 677$ habitants il y aura obligatoirement au moins deux personnes ayant les mêmes initiales.

3) Encyclopédie

Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés sur une même étagère.

a) Combien y a-t-il de manières différentes de les classer sur cette étagère ?

b) Parmi ces classements, combien y en a-t-il, où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre sur l'étagère ?

a) Un classement des douze tomes d'une encyclopédie sur une même étagère est une «permutation de 12 éléments»

Il y a donc $12! = 479001600$ «classements» distincts.

b) Il suffit de «coller» ensemble les tomes 1 et 2 dans cet ordre, il ne rester plus alors qu'à classer onze tomes sur l'étagère ;

Il y a donc cette fois $11! = 39916800$ cas possibles.

4) Dés

On jette trois dés A, B, C ayant chacun 6 faces numérotées de 1 à 6.

a) Dénombrer les résultats ne comportant aucun as.

b) Dénombrer les résultats comportant au moins un as.

c) Dénombrer les résultats comportant exactement un as.

d) Dénombrer les résultats comportant exactement deux as.

Le résultat d'un jet de 3 dés est une 3-liste d'éléments pris parmi les 6 faces.

Il y a $6^3 = 216$ résultats distincts possibles.

a) Pour les résultats ne comportant aucun as, il suffit de choisir parmi 5 faces.

Il y a donc $5^3 = 125$ résultats distincts

b) Pour les résultats comportant au moins un as, on considère tous les cas, sauf ceux vu en a)

Il y a donc $6^3 - 5^3 = 91$ résultats distincts

c) Pour les résultats comportant exactement un as, on choisit un as de 3 façons, puis les deux derniers parmi les 5 autres faces.

Il y a donc $3 \times 5^2 = 75$ résultats distincts

d) Pour les résultats comportant exactement deux as, on choisit deux as de 3 façons, puis le dernier parmi les 5 autres faces.

Il y a donc $3 \times 5 = 15$ résultats distincts

Vérification, pour 0, 1, 2 ou 3 as : $125 + 75 + 15 + 1 = 216$

5) Poker

Combien y a-t-il de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 32 cartes contenant :

- a) **Un Carré** *4 cartes de même hauteur*
- b) **Une Couleur** *5 cartes de même couleur*
- c) **Une Quinte** *5 cartes dont les hauteurs se suivent*
- d) **Une Quinte Flush** *à la fois quinte et couleur*

a) Un «carré» se construit en choisissant une hauteur pour le carré, 8 cas possibles (7 8 9 X V D R A) puis ensuite une carte parmi les $32 - 4 = 28$ cartes restantes.

Il y a donc $\boxed{8 \times 28 = 224}$ «carrés» possibles

b) Une «couleur» est constituée par un ensemble 5 cartes prises parmi les 8 d'une même couleur (combinaison de 5 parmi 8), et ceci dans les 4 couleurs disponibles.

Il y a donc $\boxed{C_8^5 \times 4 = 65 \times 4 = 224}$ «couleur» possibles

c) Une «quinte» peut être une des quatre configurations suivantes (789XV) ou (89XVD) ou (9XVDR) ou (XVDRA) mais pour chaque carte de la configuration il y a 4 choix possibles donc 4^5 choix de la configuration.

Il y a donc $\boxed{4^5 \times 4 = 1024 \times 4 = 4096}$ «quintes» possibles

d) Une «quinte flush» peut être une des quatre configurations suivantes (789XV) ou (89XVD) ou (9XVDR) ou (XVDRA) et il y a 4 couleurs possibles.

Il y a donc $\boxed{4 \times 4 = 16}$ «quintes flush» possibles

Probabilités (Solutions)

1) Poker

Au Poker, chaque joueur reçoit une «main» de 5 cartes prises au hasard dans un jeu de 32 cartes.

a) Quelle est la probabilité de recevoir un Carré? («main» de 5 cartes dont 4 ont la même hauteur)?

b) Quelle est la probabilité de recevoir une Quinte Floche? («main» de 5 cartes de la même couleur et de hauteurs consécutives).

Une main au Poker est un ensemble de 5 cartes prises parmi 32, c'est à dire une «combinaison de 5 parmi 32».

Il y a donc $C_{32}^5 = 201376$ mains distinctes

a) On a vu précédemment qu'il y a $8 \times 28 = 224$ carrés distincts.

La probabilité de recevoir un Carré est donc : $\frac{224}{C_{32}^5} = \frac{1}{899} \simeq 0,11\%$

b) On a vu précédemment qu'il y a $4 \times 4 = 16$ quintes flush distinctes.

La probabilité de recevoir une Quinte Floche est donc : $\frac{16}{C_{32}^5} = \frac{1}{12586} \simeq 0,008\%$

2) Dé pipé

On utilise un dé «pipé» pour lequel la probabilité d'obtenir une face paire comme résultat d'un lancer, est les trois quarts de la probabilité d'obtenir une face impaire.

Chaque face paire a la même chance de sortir, et chaque face impaire aussi.

a) Définir l'univers et la probabilité avec précision.

b) Quelle est la probabilité de l'événement «obtenir As ou Six»?

c) On joue maintenant deux fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir des nombres dont la somme fait 5?

a) On a un dé à six faces, donc six résultats possibles :

$$\Omega = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$$

La probabilité est P :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ \{F_i\} & \longmapsto & P(\{F_i\}) = p_i \end{cases}$$

Avec : $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$ et $p_2 = \frac{3}{4} p_1$ ce qui donne :

$$\boxed{p_1 = p_3 = p_5 = \frac{4}{21}} \quad \text{et} \quad \boxed{p_2 = p_4 = p_6 = \frac{3}{21}}$$

- b) L'événement «obtenir As ou Six» = $\{F_1, F_6\} = A$

$$P(A) = \frac{4}{21} + \frac{3}{21} = \frac{1}{3}$$

- c) Pour cette question il est nécessaire de redéfinir l'univers et la probabilité.

$$\Omega = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}^2$$

La probabilité est P :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ \{(F_i, F_j)\} & \longmapsto P(\{(F_i, F_j)\}) = p_{i,j} \end{cases}$$

L'événement «obtenir 5» = $\{(F_1, F_4), (F_2, F_3), (F_3, F_2), (F_4, F_1)\} = B$

$$P(B) = \frac{4}{21} \times \frac{3}{21} + \frac{3}{21} \times \frac{4}{21} + \frac{4}{21} \times \frac{3}{21} + \frac{3}{21} \times \frac{4}{21} = \frac{16}{147} \simeq 10,88\%$$

3) Sac de billes

Un sac contient 10 billes. Il y a des billes rouges et des billes blanches.

Le nombre des billes blanches est x , celui des billes rouges est y avec : $2 \leq x \leq 8$.

- a) Calculer d'abord en fonction de x et y , puis en fonction de x seulement, la probabilité p pour que, en tirant simultanément deux billes, elles soient toutes les deux de la même couleur.

(Application : $x = 4$)

- b) Quel doit être le nombre x de billes blanches, pour que cette probabilité soit minimale, et quel est ce minimum ?

- c) Vérifier que la formule donnant p en fonction de x est encore valable pour : $x = 0$ et $x = 1$.

- a) Si on tire deux billes dans un sac de dix billes, il s'agit d'une «combinaison de 2 parmi 10», il y a donc $C_{10}^2 = 45$ cas possibles.

Pour tirer deux billes de même couleur, on peut tirer deux blanches «combinaison de 2 parmi x » ou deux rouges «combinaison de 2 parmi y », il y a donc $C_x^2 + C_y^2$ tirages possibles.

La probabilité pour que les deux billes, soient de la même couleur est :

$$\frac{C_x^2 + C_y^2}{C_{10}^2} = \frac{x^2 - x + y^2 - y}{90} = \frac{C_x^2 + C_{10-x}^2}{C_{10}^2} = \frac{x^2 - 10x + 45}{45} \quad \text{et si } x = 4 \quad p = \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$$

- b) On cherche le minimum de la fonction $x \mapsto y = x^2 - 10x + 45 \quad x \mapsto y'2x - 10$

$$\text{Le minimum est pour : } \boxed{x = 5} \quad p = \frac{C_5^2 + C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{9}$$

- c) La vérification se fait cas par cas pour : $x = 0$ et $x = 1$.

4) Deux dés

On jette deux dés simultanément. Soient les événements suivants :

- A = «la somme des points est un multiple de 3»
- B = «la somme des points est divisible par 4»

- a) Calculer les probabilités : $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
- b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- c) Calculer : $P(A/B)$, $P(B/A)$.

- a) On représente Ω par le tableau ci-dessous : $\Omega = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}^2$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1	2	3	<u>4</u>	5	6	7
F_2	3	<u>4</u>	5	6	7	<u>8</u>
F_3	<u>4</u>	5	6	7	<u>8</u>	9
F_4	5	6	7	<u>8</u>	9	10
F_5	6	7	<u>8</u>	9	10	11
F_6	7	<u>8</u>	9	10	11	<u>12</u>

On associe à l'univers des possibles les valeurs du total des points. Chaque case contient le total des points. Pour les visualiser, on représente en gras l'événement A , et en souligné l'événement B .

Par simple dénombrement on calcule :

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

- b) Les événements A et B sont dépendants, en effet :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

- c) Calcul des probabilités conditionnelles :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{9}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{12}$$