$M32$

$CM \ Scribus$

$S_3(nov - dec)$

(L) En général : $\lim_{h\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{h\to a} \|f(x)\| = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x).h}{h} = 0$$ tout ds $\mathbb{R}$.

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x).h|}{|h|} = 0$$

En plusieurs variables : m̂ ff :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x).h\|}{\|h\|} = 0$$

Q° : $f'(x).h$???

$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on doit avoir $f'(x).h \in \mathbb{R}^p$.

Pb : $h \in \mathbb{R}^m$.

On prend $f'(x)$ la mat de taille $\begin{smallmatrix} p \text{ lignes} \\ m \text{ col} \end{smallmatrix}$

Chgt de notaθ :

$f'(x)$ devient $Df(x)$ mat $(p\times m)$

→ on n'a pas une définiθ $Df(x) = ??$

↳ on ne pt pas l'écrire.

(D) $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, A ouvert, $x \in A$,

f est dérivable en x si $\exists$ une matrice M de taille $p\times m$ tq :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Mh\|}{\|h\|} = 0$$

6.3 (L) si $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Mh\|}{\|h\|} = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Nh\|}{\|h\|}$

alors forcément $M = N$.

Lien @ ∀ f $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $Df(x)$ mat (1×1) ; $Df(x) = (f'(x))$

(L) $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

∀ $f_i : A \to \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}^m$!!).

f dérivable en $x \iff \forall i$: f_i dériv. en x.

Écriture $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ et $Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_p(x) \end{pmatrix}$ $(p\times m)$.

et $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$Df_i(x)$ mat $1\times m$

$Df_i(x) =$ ième ligne de $Df(x)$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix}$$

$Df_i(x) = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{im})$

Ⓛ $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f, g : A \to \mathbb{R}^p$, $x \in A$,

si $Df(x)$ et $Dg(x)$ existent alors $h = f + g$

$[\forall x \in A,\ h(x) = f(x) + g(x)]$ est

dérivable en x & $Dh(x) = Df(x) + Dg(x)$

mat $(p \times n)$.

Ⓛ $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : A \to \mathbb{R}$,

$h = g \cdot f$ $\quad (h(x) = \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^p})$

$h : A \to \mathbb{R}^p$

si f et g st dérivables en $x \in A$ alors h est dérivable en x &

$$Dh(x) = g(x)\, Df(x) + \boxed{f(x) \cdot Dg(x)}$$

⚠ ordre

$(p \times n)$ $\quad \in \mathbb{R} \times (p \times n) + (p \times 1) \times (1 \times n)$

@ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times (1\ 2\ -1) = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.-1 \\ 3.1 & 3.2 & 3.-1 \\ 4.1 & 4.2 & 4.-1 \\ -1.1 & -1.2 & -1.-1 \end{pmatrix}$

(4×1) $\quad (1 \times 3)$ $\quad 4 \times 3$

same

@₂ $Dh(x) = g(x)\, Df(x) + f(x) \cdot Dg(x)$

On appliq à $v \in \mathbb{R}$

$Dh(x).v = g(x) . \underbrace{Df(x).v}_{\in \mathbb{R}^p} + f(x) . \underbrace{Dg(x).v}_{\in \mathbb{R}}$

$Dh(x)\, v = g(x) .\ Df(x) . v + [Dg(x) . v]\ f(x)$

$v \mapsto$ linéaire en v.

Ⓛ Composée :

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$g : B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$x \in A$, $y = f(x) \in B$ (hypothèse).

$f(A) \subset B$ pour que la composée a un sens

$h = g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$

Si f est dérivable en x, g dérivable en $y = f(x)$ alors h dérivable en x & :

$$\boxed{Dh(x) = Dg(f(x)) . Df(x)}$$

$(q \times n)$ $\quad (q \times p)$ $\quad p \times n$

⚠ impossible écrire $Dh(x) \cancel{=} Df(x) . Dg(f(x))$.

Ⓛ Quotient : $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$.

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, si f est dérivable en x alors g dérivable en x

& $Dg(x) = DI(f(x)) . Df(x)$

$= \left(-\dfrac{1}{f(x)^2}\right) Df(x) = \dfrac{-1}{f(x)^2} . Df(x)$.

(L) f coordonnées : $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\pi_i(x) = \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$.

π_i est dérivable en chq point $x \in \mathbb{R}^n$ & $D_{\pi_i}(x)$

$D_{\pi_i}(x) = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots 0)$

↑ $i$ème place.

Preuve : à vérifier :

- $$\lim_{h \to 0} \frac{\| \pi_i(x+h) - \pi_i(x) - D_{\pi_i}(x).h \|}{\|h\|} = 0$$

Vérificat° :

$$\pi_i(x+h) - \pi_i(x) - (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$(x_i + h_i) - (x_i) - h_i = 0$$

dc $$\frac{\| \pi_i(x+h) - \pi_i(x) - D_{\pi_i}(x).h \|}{\|h\|} = 0$$ ✓

- ⚠ $f_1(x,y) = x + y^2$, $f_2(y,x) = y + x^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x$

$g(x,y) = f(y, x)$

$\frac{\partial g}{\partial x} =$ en f ? ⚠

Dérivée directionnelle

$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$v \in \mathbb{R}^n$, $x \in A$, la dérivée directionnelle de f au point x ds la direction v est

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On prend $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$g(t) = x + tv$.

$h(t) = f(g(t)) = f(x+tv)$

$$h'(0) \underset{\text{pd}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$Dh(0) = Df(g(0)).\, Dg(0) = Df(x)\, v$ la dérivée directionnelle

Cas particulier : $v = e_i$ base canoniq de $\mathbb{R}^n$.

$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

↑ $i$ème place.

Notat° : $$(\partial_i f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t.e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

↑ dérivées partielle ds la $i$ème direct°

dérivée partielle de f % à x_i.

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1+t, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}$$

$x_2, x_3, \dots, x_n$ paramètre et on dérive une f de x.

@ $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$.

$(\partial_1 f)(x,y) = \sin(y)$

↳ on dérive p/à x, y paramètre

$(\partial_2 f)(x,y) = x \cdot \cos(y)$.

on dérive p/à y, x paramètre

@ $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ \sin(y) \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$

$(\partial_1 f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$

$(\partial_2 f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3y^2 \\ \cos(y) \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$

(L) si f est différentiable en $x \in A$ alors

$$Df(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(x) & (\partial_2 f)(x) & \dots & (\partial_n f)(x) \end{pmatrix}$$

vecteur de $\mathbb{R}^p$

↳ connaître que f est différentiable en x !

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Si } Df(x) \text{ existe}}$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_p(x) & \partial_2 f_p(x) & \dots & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix}$$

à l'origine, on ne peut pas appliquer la $\mathcal{D}f$, donc il faut passer par définition.

Ⓓ (Dérivée directionnelle) :

en $(0,0)$: $(\partial_1 f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$

$(\partial_2 f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$

Si $\mathcal{D}f(0,0)$ $\exists$ alors on doit avoir

$\mathcal{D}f(0,0) = (\partial_1 f, \partial_2 f) = (0,0)$

à vérifier a-t-on :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \mathcal{D}f(0,0)\binom{h}{k}|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0 \ ?$$

à vérifier : $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|\sqrt{|hk|} - 0 - 0|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$

On choisit la norme 1 : $\|(h,k)\| = |h| + |k|$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{|h|+|k|} \overset{?}{=} 0$$

on devine NON
on prend $h = k > 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{|h|+|h|} = \frac{|h|}{2|h|} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Bonus : Dérivées directionnelles direct° (v_1, v_2).

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t}$$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|t| \cdot \sqrt{|v_1 v_2|}}{t}$ n'$\nexists$ si $v_1 v_2 \neq 0$.

@ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$f(0,0) = 0$.

(i) f est cont sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\boxed{SPQE}$ de f cont.

(ii) f est cont en $(0,0)$

à mq $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$

$$0 \leq \frac{|x^3 y|}{x^4+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt[4]{x^4+y^2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[2]{x^4+y^2}\right)^1}{x^4+y^2}$$

Par gendarmes :

oui $\lim = 0$.

$$\overset{\shortparallel}{(x^4+y^2)}^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{4}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Les dérivées partielles en $(0,0)$.

$$(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0.$$

$$(\partial_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0$$

(Si) f différentiable en $(0,0)$, on doit avoir

$Df(0,0) = (0,0)$

Vérifions les dérivées directionnelles :

$v = (v_1, v_2)$ direcθ.

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(tv_1)^3 \cdot (tv_2)}{(tv_1)^4 + (tv_2)^2} = \frac{t\, v_1^3 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \underset{(v_1,v_2)\neq(0,0)}{=} 0.$$

Donc les dérivées directionnelles $\exists$.

$Df(0,0)$ existe si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \overset{\text{mat }(0,0)}{Df(0,0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0 \ ?$$

À vérifier $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|h^3|}{(h^4+k^2)\,\|(h,k)\|} = 0$

On prend $k = h^2$; $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h^3(h^2)|}{(h^4+h^4)\,\|(h,h^2)\|} = \dfrac{|h|}{2 \cdot |h| \cdot \|(1,h)\|}$

#essayer mettre les m̂ puissances !

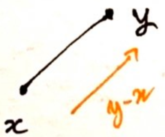
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\|(1,h)\|} = \frac{1}{2\|(1,0)\|} \neq 0 \Rightarrow f \text{ n'est pas différentiable en } (0,0)$$

Rq : $\|(h,h^2)\| = \|h(1,h)\| = |h| \, \|(1,h)\|$

(TH) Si $(\partial_i f)$ st <u>cont</u> $\Longrightarrow$ f est différentiable.

(D) Une f de classe C^1 $\Longleftrightarrow$ $(\partial_i f)$ <u>cont</u>.

(D) $x, y \in \mathbb{R}^n$,



$[x,y]$ = segment entre x et y

$= \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$.

(TH) Égalité des Accroissements finis :

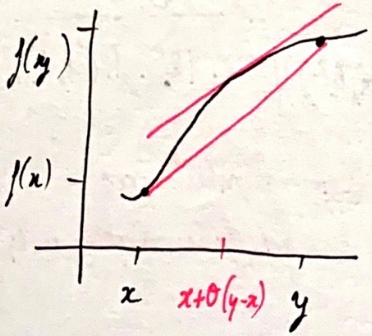
$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$x, y \in U$ tq $[x,y] \subset U$

f différentiable sur U

Alors il existe $\theta \in]0,1[$:

$$f(y) - f(x) = \underbrace{Df(x + \theta(y-x))}_{(1 \times n)} \cdot \underbrace{(y-x)}_{\text{vct}^{\text{r}} \in \mathbb{R}^n}$$



<u>$n=1$</u> : $f(y) - f(x) = Df(x + \theta(y-x))\underbrace{(y-x)}$

⚠ en plusieurs dim on ne pt pas diviser par ce vct$^{\text{r}}$.

Généralisat° à f vectorielle ?

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f(x) = (\cos(x), \sin(x))$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$f(y) - f(x) = Df(x + \theta(y-x))\ (y-x)$.

Prenons $y = 2\pi$, $x = 0$.

Existe-t-il $\theta \in]0,1[$ tq

$$f(2\pi) - f(0) = Df(0 + \theta(2\pi)) \cdot (2\pi - 0) \ ?$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi \\ \sin 2\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(0 + \theta.2\pi) \\ \cos(0 + \theta.2\pi) \end{pmatrix} . (2\pi - 0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi\theta) \\ \cos(2\pi\theta) \end{pmatrix} . 2\pi \qquad \theta \in]0,1[.$$

$\boxed{\text{impossible}}$

↳ on pourrait si θ était $\neq$.

Th **Inégalité des Accroissements Finis.**

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable

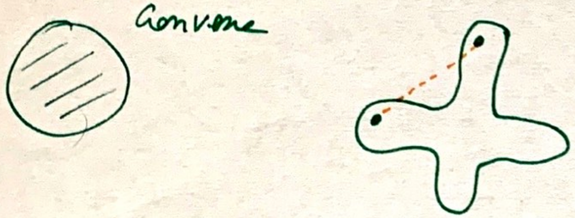
$x, y \in U$ tq $[x,y] \subset U$

Alors $\| f(y) - f(x) \| \leq n \cdot \left(\sup_{\theta \in]0,1[} \| Df(x + \theta(y-x)) \|_\infty \right) \|y - x\|$

D $U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert) est **convexe**

si $\forall x, y \in U$, on a $[x,y] \subset U$.

@ convexe



non-convexe.

ici tous les segments ne st pas inclus ds l'ens.

Th $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable.

U convexe.

Alors f est cte ssi $\forall x \in U : Df(x) = 0$ (matrice).

@ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

$f'(x) = 0$ partout

Contre-@

sur intervalle ?

ens convexe ?

$[\quad]$ $\mathbb{R}$

chq int. ds $\mathbb{R}$ est convexe.

Preuve : ($\Rightarrow$) si f cte, on prend $Df(x) = 0$ partout et on vérifie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h \|}{\|h\|} \overset{?}{=} 0 ?$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\| c - c - 0 \|}{\|h\|} = 0 \quad \text{oui}$$

($\Leftarrow$) Réciproqt, on suppose $Df(x) = 0$ partout.

À mq $\exists c \in \mathbb{R}^p$, $\forall x \in U$, $f(x) = c$.

(ici on ne vt pas que c dépd de x).

On choisit $a \in U$ arbitraire et on pose

$f(a) = c \in \mathbb{R}^p$.

Prenons $x \in U$ arbitraire $\Rightarrow [a, x] \subset U$.

$$\| f(x) - f(a) \| \leq n \cdot \left(\underbrace{\sup \| \underbrace{Df(a + \theta(x-a))}_{0} \|_\infty}_{0} \right) \|x - a\|$$

$$\leq 0 \cdot \|x - a\| = 0$$

$$\Rightarrow \| f(x) - f(a) \| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(a) = c$$

$\square$

$\rightarrow$

$$\boxed{\text{Mq} \quad \lim_{x \to a} \| f(x) - f(a) \| = 0}$$

$Df(a)(x-a)$

$$0 \leqslant \| f(x) - f(a) \| \leqslant \| f(x) - f(a) - Df(a).(x-a) \| \overset{+}{}$$

$$\leqslant \| f(x) - f(a) + Df(a).(x-a) \| + \| Df(a).(x-a) \|$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{\| f(x) - f(a) - Df(a).(x-a) \|}{\| x-a \|}}_{\text{hypothèse } \to 0} . \| x-a \| + q \, \| Df(a) \|_\infty \| x-a \|_\infty$$

$\xrightarrow[x \to a]{} 0$

6.1

□

7

Dérivées d'ordre supérieur

Intro :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

- $(Df)(x_1, x_2, x_3)$ mat 3 col, 2 lign

$$(Df)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1,x_2,x_3) & \partial_2 f_1(\dots) & \partial_3 f_1(\dots) \\ \partial_1 f_2(\dots) & \partial_2 f_2(\dots) & \partial_3 f_2(\dots) \end{pmatrix}$$

On peut voir $Df : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$

$$(Df)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(x_1, x_2, x_3) \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_1 \\ \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_3 f_2 \end{pmatrix}$$

- (Df) a 6 composantes $(11)(12)(22)(31)(21)(32)$

$$(Df)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} Df_{11}(x_1, x_2, x_3) \\ Df_{12} \\ Df_{22} \\ Df_{31} \\ Df_{21} \\ Df_{32} \end{pmatrix}$$

On calcule sa différentielle

$$D(Df)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_1 Df_{11}(x_1, x_2, x_3) & \partial_2 Df_{11}(\dots) & \partial_3 Df_{32}(\dots) \\ \partial_1 Df_{12} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \\ \partial_1 Df_{32}(x_1,x_2,x_3) & \partial_2 Df_{32}(\dots) & \partial_3 Df_{32}(\dots) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Df_{ij} = \underset{1\to 3}{\partial_i} \underset{1\to 2}{f_j}}$$

$$\boxed{\partial_i Df_{jk} = \partial_i(\partial_j f_k)}$$

$D(Df)(x_1, x_2, x_3)$ (AL) ou matrice de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^6$.

- $$D(Df)(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111} & A_{211} & A_{311} \\ A_{112} & A_{212} & A_{312} \\ A_{122} & A_{222} & A_{322} \\ A_{131} & A_{231} & A_{331} \\ A_{121} & A_{221} & A_{321} \\ A_{132} & A_{232} & A_{332} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111} \cdot h_1 + A_{211} \cdot h_2 + A_{311} \cdot h_3 \\ A_{112} \cdot h_1 + A_{212} \cdot h_2 + A_{312} \cdot h_3 \\ \vdots \\ A_{132} \cdot h_1 + A_{232} \cdot h_2 + A_{332} \cdot h_3 \end{pmatrix}$$

La composante (ij) du vecteur $D(Df)(x).h$, est donnée par $\sum_{k=1}^{3} h_k A_{kij} = h_1 + A_{1ij} + h_2 \cdot A_{2ij} + h_3 \cdot A_{3ij}$.

- $$[D(Df)(x)](h)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} h_k A_{ij} = \sum_{k=1}^{3} h_k \, \partial_k Df_{ij}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} h_k \, \partial_k(\partial_i f_j)(x)$$

mat 3 col × 2 lignes

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$Df(x)$: mat 2 lig $\times$ 3 col

$Df : \mathbb{R}^3 \longrightarrow$ mat $(2\times 3) \cong \mathbb{R}^6$.

En général : $f : E \to F$, $a \in E$,

$Df(a)$ appli lin $E \to F$

$Df : E \to AL\,(E$ dans $F) = F'$

$D(Df)(a)$: AL $E \to F'$

$[D(Df)(a)](h) \in F' = AL\,(E \to F)$

$$h \in E$$

$$[D(Df)(x)](h)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} h_k (\partial_k \partial_i f_j)(x).$$

AL de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ = mat 2×3

On peut appliquer $[D(Df)(x)](h)$ à un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$.

Les composantes du résultat :

$$[D(Df)(x)\,h](v) = \begin{pmatrix} DDf(x)\,h_{11} & DDf(x)\,h_{21} & DDf(x)\,h_{31} \\ DDf(x)\,h_{12} & DDf(x)\,h_{22} & DDf(x)\,h_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$D(Df)(x).h)(v) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,(DDf(x)h)_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} v_i h_k \partial_k \partial_i f_j(x)$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$Df : \mathbb{R}^3 \to \underbrace{AL(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)}_{\text{ev.}}$ = mat $(2\times 3) \cong \mathbb{R}^6$

$D(Df) : \mathbb{R}^3 \to AL\,(\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{source}} \to \underbrace{AL(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)}_{\text{espace arrivée}}) =$ mat (6×3)

$\shortparallel$

$D^2 f : \mathbb{R}^3$

$a \in \mathbb{R}^3$: point, $D^2 f(a) \in AL(\mathbb{R}^3 \to AL(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2))$

$h \in \mathbb{R}^3$ vecteur

$D^2 f(a)h \in AL(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$

car $Df(a) : \mathbb{R}^3 \to AL(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$.

Donc $Df(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

v vecteur dans $\mathbb{R}^3$.

$(D^2 f(a)\,h)(v) \in \mathbb{R}^2$

applica° bi-linéaire

on constate que c'est linéaire en chaq h et v.

(L) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est 2 fois différentiable si $a \in U \iff \forall i = j$,

$f_i : U \to \mathbb{R}$ est deux fois diff en a.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Df(a).h - \frac{1}{2}(D^2 f)(a).h)(h) \|}{\|h\|^2} = 0.$$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(\partial_i \partial_j f)(x) \in \mathbb{R} \quad , i, j = 1, 2, \dots, n$

mat **Hessienne**
$$\begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 f)(x) & (\partial_1 \partial_2 f)(x) & & (\partial_1 \partial_n f)(x) \\ (\partial_2 \partial_1 f)(x) & & & \\ & & & \\ (\partial_n \partial_1 f)(x) & & \dots & (\partial_n \partial_n f)(x) \end{pmatrix}$$

- $Df(x)$: AL $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$D^2 f(x)$: ABL $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$D^2 f(x)(v, w) \in \mathbb{R}^p$?

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & & \partial_1 \partial_n f \\ & & \\ \partial_n \partial_1 f & & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Th de Schwartz :

- Mat Hessienne est symétriq.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x).\, h \|}{\| h \|} = 0$$

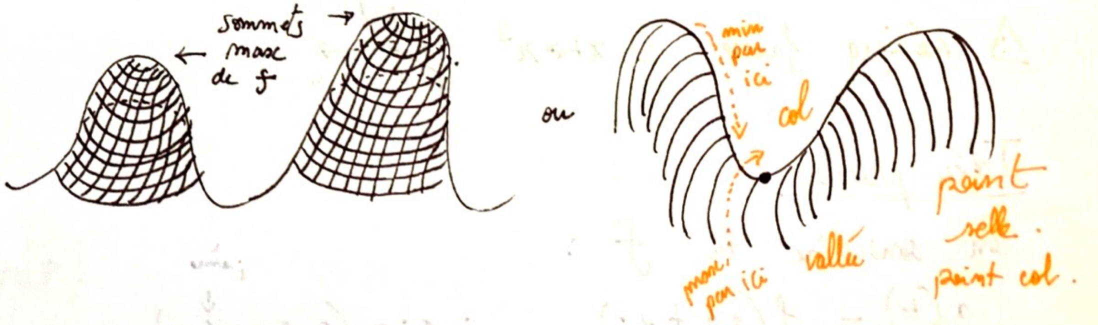
$f(x+h) = f(x) + Df(x).\, h + Df(x).h + \|h\| \varepsilon(h)$, $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

en 1 var $f(x+h) = f(x) + f'(x).\, h + \frac{1}{2} f''(x).\, h^2 + h^2 \varepsilon(h)$

DL d'ordre 2 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x).h - \frac{1}{2} D^2 f(x)(h, h) \|}{\| h \|^2} = 0$$

$$f(x+h) = f(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mat jacobienne}}}{Df(x)}\, h + \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mat Hessienne}}}{D^2 f(x)}.(h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$



Th si dériv part ∃ & cont ⇒ différentielle

⚠ cet 1 s cas dériv part ∃ pas tcmt différentiable

vecteur au carré ∄.

Extrema

(D) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$a \in U$ est un maximum (minimum) local.

si il $\exists$ V voisinage de a

$V \subset U$ tq $\forall x \in V$: $f(x) \leq f(a)$ ($\geq$)

Maximum global : $\forall x \in U$: $f(x) \leq f(a)$

(L) Si a est un max/min local

Alors $Df(a) = 0$ ← mat.

$\Leftrightarrow \forall i : \partial_i f(0) = 0$.

⚠ récipq fausse @ $x \mapsto x^3$

Idée preuve :

On considère la f :

$g(t) = f(a + t e_i)$; $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i^{\text{ème}}}{1}, 0)$

$g'(0) = (\partial_i f)(a)$

On suppose g dérivable et f.

Dmq dérivée est nulle ... def dérivée à droite / à gauche.

on sait max local ⟶ on sait qq chose signe.

(T4) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $Df(a) = 0$ $(1 \times n)$

On calcule H = mat Hessienne $D^2 f(a) = (\partial_i \partial_j f(a))_{i,j=1..n}$ $(n \times n)$ symétriq

On calcule les valeurs propres de H.

(i) si ttes vp st > 0 alors a : min local. ⊕

(ii) si ttes vp st < 0 alors a : max local. ⊖

(iii) on ne sait pas sinon.

(iv) si $\exists\ \lambda > 0$ et $\lambda' < 0$ alors a : ni max local ni min local : point selle

---

Astuces de calcul en plusieurs dimensions

(P) (Critère de Sylvester)

soit $H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ mat carrée symétriq et soit $M_1, \dots, M_n$ les mineurs principaux dominants de la mat $(H_{ij})_{i,j=1}^{n}$ def :

$$M_k = \det\left((H_{ij})_{i,j=1}^{k} \right).$$

(i) H est déf positive ssi $M_k > 0$ $\forall k$.

(ii) H est déf négative ssi $(-1)^k M_k > 0$ $\forall k$.

Ⓟ (Règle des signes de Descartes)

↳ nbr zéro f polynomiale · nbr zéros > 0 · nbr zéros < 0.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $z_+(P)$: zéros > 0

$z_-(P)$: zéros < 0.

On note $z_0(P)$ l'ordre de 0 comme racine de P.

On définit aussi $\sigma(P)$ ĉ nbr de chgts de signes parmi coeff non-nuls consécutifs de P.

Plus précisément pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$\exists$ entiers $0 \leq d_0 < d_1 < \dots < d_n$ & réels non-nuls $a_0, \dots, a_n$ tq : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{d_i}$.

Le nbr $\sigma(P)$ est alors le nbr de -1 ds la suite $s_1, \dots, s_n$ définie par $s_i = \text{signe}(a_{i-1} a_i)$.

(i) $z_+(P) \leq \sigma(P)$.

(ii) si on note $P_-(X) = P(-X)$ alors $z_-(P) = z_+(P_-) \leq \sigma(P_-)$

(iii) $\sigma(P) + \sigma(P_-) \leq \deg(P) - z_0(P) \equiv d_n - d_0$.

(iv) si P a ttes ses racines ds $\mathbb{R}$,

alors $z_+(P) = \sigma(P)$ et

$z_-(P) = \sigma(P_-) = \deg(P) - z_+(P) - z_0(P)$.

Q° : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire

$f(x) = y \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

Calculer x quand on donne y ?

$f \approx$ mat $n \times n$.

En pt ssi $\det(f) \neq 0$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ applicaθ

Calculer x qd on donne y @ $y = f(x)$.

On donne x_0 et $y_0 = f(x_0)$ pt fixé.

si on donne y dans $\mathcal{V}$ de y_0,

peut-on trouver x (proche de x_0) tq

$$f(x) = y.$$

DL ordre 1 : $x = x_0 + h$

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0).h + \underbrace{\ldots}_{\text{négligeable}}$$

$$= y$$

$$= y_0 + Df(x_0).h + \ldots$$

$$\Rightarrow y - y_0 \cong \underbrace{Df(x_0)}_{\text{mat}}.h$$

Réponse : oui à condiθ que $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Inversθ locale & f implicites.

(Th) Inversθ locale

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$

si $\det(Df(x_0)) \neq 0$, alors $\exists\ V \subset U$

$\mathcal{V}$ de x_0, $W \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{V}$ de y_0 tq

$\exists\ f^{-1} : W \to V$.

ie $\forall y \in W, \exists! x \in V$ tq $f(x) = y$.

$y_0 \in W$ $\quad y$ pas trop loin de y_0.

@ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. $\quad$ 2ʳ $x_0 = 1$, $y_0 = 1 = f(1)$.

Résoudre $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

$W = ?$ $\qquad V = ?$

$W =]0, \infty[$ $\qquad V =]0, \infty[$

↳ $\sqrt{0}$ pas diff

$\sqrt{-\ldots}$ ∄ $\mathbb{R}$.

si det ≠ 0 → vaut la peine chercher réciproq

Réciproq de la mat.

Q° simple :

Une équat° deux variables x, y.

$ax + by + c = 0$ $\quad x = \dfrac{-c-by}{a}$ $a \neq 0$

exprimer y en f de x ou

exprimer x en f de y. $\quad y = \dfrac{-c-ax}{b}$ $b \neq 0$

- Q° simple :

deux éq°s à 4 var $\quad x, y, z, t$

$$x + y + 2z + 2t = 2$$
$$x + 2y + 2z + 3t = 5$$

exprim (x,y) f (z,t).

exprim (x,z) f (y,t).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z-2t \\ 5-2z-3t \end{pmatrix}$$

- $\Delta = 1 \neq 0$

dc inversible $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2-2z-2t \\ 5-2z-3t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y-2t \\ 5-2y-3t \end{pmatrix}$$

mat non inversible

On regarde $f : \underbrace{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^{n+p}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{R}^n}$. $\quad$ n f réelles de p+n variables

On donne $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ tq $f(x_0, y_0) = 0$. $\quad$ n équat°s p+n var.

Q° résoudre y f de x de l'équat° $f(x,y) = 0$.

Donc des voisinages de (x_0, y_0).

DL : $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{négligeable}}$

$$Df(x_0, y_0) = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}}_{\in \mathbb{R}^n} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_p}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial y_n}}_{\text{mat } (n\times n)} \right)$$

$$Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}}_{\text{mat } n\times p} h + \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}}_{\text{mat } n\times n} k + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{néglig.}}$$

il faut qu'il y ait mat $\quad$ inversible.

Q° simple :

Une équa° deux variables x, y.

$$ax + by + c = 0 \qquad x = \frac{-c-by}{a} \quad a \neq 0$$

exprimer y en f de x ou

exprimer x en f de y. $\quad y = \dfrac{-c-ax}{b} \quad b \neq 0$

Q° simple :

deux éq°s à 4 var x, y, z, t

$$x + y + 2z + 2t = 2$$
$$x + 2y + 2z + 3t = 5$$

expr (x,y) f (z,t).

exprim (x,z) f (y,t).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z-2t \\ 5-2z-3t \end{pmatrix}$$

$\Delta = 1 \neq 0$

dc inversible $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2-2z-2t \\ 5-2z-3t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y-2t \\ 5-2y-3t \end{pmatrix}$$

mat non inversible

On regarde $f : \underbrace{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^{n+p}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad$ n f réelles de p+n variables

$\mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

On donne $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ tq $f(x_0, y_0) = 0$. $\quad$ n équa°s p+n var.

Q° résoudre y f de x de l'équa° $f(x,y) = 0$.

Donc des voisinages de (x_0, y_0).

DL : $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{négligeable}}$

$$Df(x_0, y_0) = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}}_{\in \mathbb{R}^n} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_p}, \ \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial y_n}\Big)$$

$$Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}}_{\text{mat } n \times p} h + \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}}_{\text{mat } n \times n} k + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{néglig.}}$$

mat (n×n)

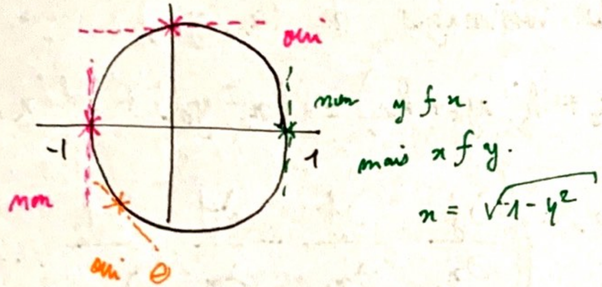
il faut qu'il y ait mat inversible.

@ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Résoudre y ou x en f de x ou y de l'éq° $f(x,y)=0$.

(dérivable ?)

* $x = \pm\sqrt{-y^2+1}$ ou $y = \pm\sqrt{1-x^2}$



Q° : $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. on cherche à savoir si on pt résoudre $y \in \mathbb{R}^p$ de l'équa° $f(x,y) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+p}$, y en f de x. (en général, trop diff ⊗)

Plus de détails : on sait déjà $f(a,b) = 0$; résoudre y en f de x pour $\underset{x}{y}$ proche de $\underset{a}{b}$

@ $f(x,y,u,v) = (x^3 - 3xy^2 - u,\ 3x^2y - y^3 - v)$.

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

· $f(1,0,1,0) = (0,0)$

Peut-on résoudre : $x^3 - 3xy^2 - u = 0$
$3x^2y - y^3 - v = 0$.

(x,y) en f de (u,v) ?...

→ on cherche une solu° $(x,y) = (1+h, k)$ a/ h,k petit.

On veut aussi (u,v) proche de $(1,0)$.

· $f(1+h,k,u,v) = \left((1+h)^3 - 3(1+h)k^2 - u,\ 3(1+h)^2k - k^3 - v\right)$

$= (1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3k^2 - 3hk^2 - u,\ 3k + 6hk + 3h^2k - k^3 - v)$

$\approx (1 + 3h - u,\ 3k - v) = (0,0)$

h^2, k^2, hk trop petit

On pt résoudre : $3h = u-1$, $3k = v$; $h = \frac{1}{3}(u-1)$, $k = \frac{1}{3}v$.

Sol° approx^tve : $\boxed{x = 1 + \frac{1}{3}(u-1) \quad y = \frac{1}{3}v}$: DL en $(u-1, v)$ 1° ordre.

→ $x = 1 + \frac{1}{3}(u-1) + ?(u-1)^2 + ?v^2 + ?v(u-1)$

$y = \frac{1}{3}v + ?v^2 + ?(u-1)^2 + ?(u-1)v$

On a aussi $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1, 0\right) = (0,0)$.

Nvlle approximat° $\Rightarrow$ solut°.

$x = -\frac{1}{2} + h$

$y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + k$

$\Rightarrow$ résoudre $f(x,y,u,v) = (0,0)$

$\forall$ tjrs h, k petit

(u,v) proche de $(1,0)$.

- $f(x,y,u,v) = (0,0)$

  $f(a,b,1,0) = (0,0)$

  $f(a+h, b+k, u, v) = (0,0)$

  $\downarrow$ DL

$$f(a,b,1,0) + \underbrace{Df(a,b,1,0)\begin{pmatrix} h \\ k \\ u-1 \\ v \end{pmatrix}}_{\overset{?}{=}(0,0)} + \dots = (0,0)$$

On pt résoudre (h,k) en f de $(u-1, v)$ si ?

- équat° approximative $Df(a,b,1,0)\begin{pmatrix} h \\ k \\ u-1 \\ v \end{pmatrix} = (0,0)$

- $Df(a,b,1,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\dots) & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 & \partial_4 f_1 \\ \partial_1 f_2(\dots) & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 & \partial_4 f_2 \end{pmatrix}$.

On pt résoudre (approx) si $\det\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

$f_1 = x^3 - 3xy^2 - u$

$f_2 = 3x^2y - y^3 - v$.

$\partial_1 f_1 = 3x^2 - 3y^2$

$\partial_2 f_1 = -6xy$

$\partial_1 f_2 = 6xy$

$\partial_2 f_2 = 3x - 3y^2$.

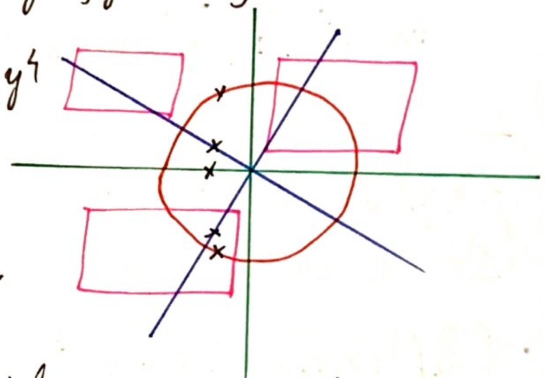
$\boxed{(a,b,1,0)} \to (1,0)$ ou $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Reformulat° de la Question.

Q°: $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$

@ $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 - y^4$



Q°: Est-ce que M est le graphe f $y = g(x)$:

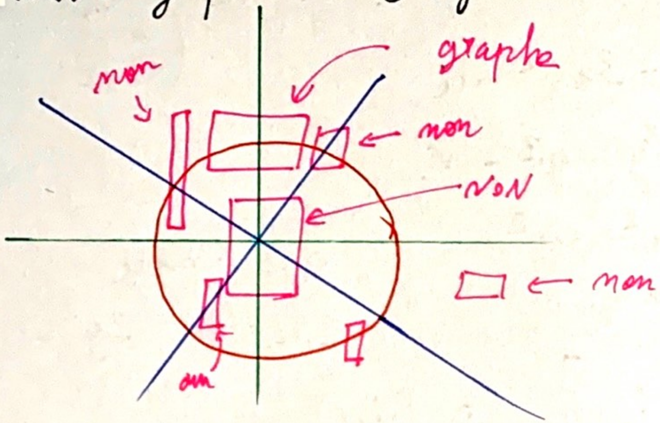
il ne faut 1 seule valeur pr une abscisse.

En général : NON (ici aussi NON).

Plus souple : dans une fenêtre ? $\boxed{}$ $V \times W$

deux ouverts.

• $M \cap (V \times W)$ graphe d'une f $g : V \longrightarrow W$.



En général, pr fenêtre arbitraire tjrs NON

(Th) (dim 2) $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$

$f(a,b) = 0$, $(a,b) \in U$.

si $(\partial_2 f)(a,b) \neq 0$ Alors $\exists$ une fenêtre $V \times W \subset U$

$(a,b) \in V \times W$ et $g : V \to W$ de classe C^k

tq $\forall (x, y) \in V \times W$: $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

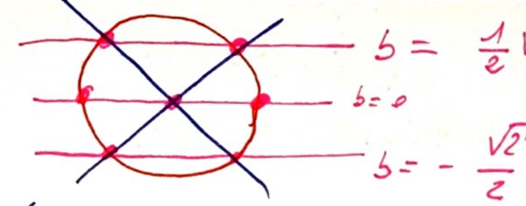
$f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 - y^4$.

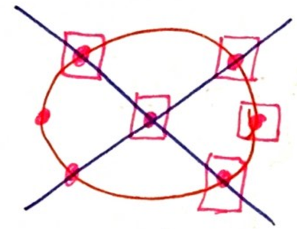
Est-ce que ça marche pour (a,b) ?

• $(\partial_2 f)(x,y) = 2y - 4y^3$.

$(\partial_2 f)(a,b) = 2b - 4b^3 \neq 0$?

$2b - 4b^3 = 0 \iff b = 0$ ou $b^2 = \frac{1}{2} \to b = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$.





(Th) (Fonctions implicites)

$U \subset \mathbb{R}^{n+p}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^p$.

$f(a,b) = 0$, f de classe C^k, $k \geq 1$.

si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ mat $p \times p$ inversible ← pie de $Df(a,b)$.

$$\iff \det \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1(a,b) & \cdots & \partial_{n+p} f_1(a,b) \\ \vdots & & \\ \partial_{n+1} f_p(a,b) & \cdots & \partial_{n+p} f_p(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

Alors $\exists$ une fenêtre $V \times W$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^p$,

$(a,b) \in V \times W \subset U$ et $g : V \to W$ de C^k

tq $\forall (x,y) \in V \times W$: $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

@ Thermodynamiq , P, V, T.

$f(p, V, T) = 0$.

gaz parfait $f(p, V, T) = pV - RT$.

on pt ? exprimer V f de $(p, T) \to V = g_1(p, T)$

T ——— $(p, V) \to T = g_2(p, V)$

p ——— $(V, T) \to p = g_3(V, T)$.

$$\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_{T\,cte} \cdot \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{V\,cte} \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_{p\,cte} = -1.$$

$$(\partial_1 g_1) \cdot (\partial_2 \cdot g_3) \cdot (\partial_2 g_2) = -1$$

Trouver le DL de g en f déri. part. de f

$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$. 2 var

$\Rightarrow h(x) = f(x, g(x)) = 0$ partant

$\Rightarrow h'(x) = 0, \quad h''(x) = 0$.

$\boxed{M}$ ① & ②

$h(x) = f(\underbrace{x}_{1^\circ\, var}, \underbrace{g(x)}_{2^\circ\, var})$

$h'(x) = (\partial_1 f)(x, g(x)) \times 1 + (\partial_2 f)(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{(\partial_1 f)(x, g(x))}{(\partial_2 f)(x, g(x))}$$

$g(a) = b \Rightarrow g'(a) = \dots$

$h''(x) = (\partial_1\partial_1 f)(x, g(x)) + (\partial_2\partial_1 f)(x, g(x)) \cdot g'(x)$

$+ (\partial_1\partial_2 f)(x, g(x)) \cdot g'(x)$.

$+ (\partial_2\partial_2 f)(x, g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x)$

$+ (\partial_2 f)(x, g(x)) \cdot g''(x) = 0$.

$$\Rightarrow g''(a) = \frac{-\left[\begin{array}{l}(\partial_1\partial_1 f)(a, g(a)) + (\partial_2\partial_1 f)(a, g(a)) \cdot g'(a) \\ + (\partial_1\partial_2 f)(a, g(a)) \cdot g'(a) + (\partial_2\partial_2 f)(a, g(a)) \cdot g'(a) \cdot g'(a)\end{array}\right]}{(\partial_2 f)(a, g(a))}$$

En plus var $\underbrace{f(x,y) = 0}_{\in \mathbb{R}^p} \iff y = g(x) \in \mathbb{R}^p$

$h(x) = f(x, g(x)) \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$Dh(x) \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot Dg(x)$

$$Df(x,y) = \Bigg(\underbrace{\begin{array}{ccc} \partial_1 f_1(x,y) & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p & \dots & \partial_n f_p \end{array}}_{\substack{p \times n \\ \frac{\partial f}{\partial x}}} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ccc} \partial_{n+1} f_1 & \dots & \partial_{n+p} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_1 & \dots & \partial_{n+p} f_p \end{array}}_{\substack{p \times p \\ \frac{\partial f}{\partial y}}} \Bigg)$$

$$F(x) = (x, g(x)).$$

$$DF(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & Dg(x) & \end{pmatrix}$$

$$h = f \circ F$$

$$Dh(x) = Df(F(x)) . DF(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_m f_p \\ \partial f_p & \partial_m f_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_{m+1} f_1 & \partial_{m+p} f_1 \\ \partial_{m+1} f_1 & \partial_{m+p} f_p \end{pmatrix} Dg$$

ccl

$$0 = Dh(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) . Dg(x).$$

$$\Rightarrow Dg(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} . \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

$\Rightarrow Dg(a)$ est calculable.

@ Mécanique classique - Équa°s de Newtown.

éq Newton $\to$ éq Euler - Lagrange.

L : Lagrangien.

$$L(x, v) : (\partial_1 \partial_2 L)(x, v) . v + (\partial_2 \partial_2 L)(x, v) . \frac{dv}{dt}$$

$$= (\partial_1 L)(x, v) \quad \& \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

$$\hat{L}(x, v) = L(\varphi(x), \varphi'(x) . v)$$

@ Mécanique quantique - Éq. Schrödinger

$$\Psi(x, y, z) = \hat{\Psi} = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

coord. sphériq. $\mathbb{R}^3$.

Q° : exprimer $(\partial_1 \partial_1 \Psi)(x, y, z) + (\partial_2 \partial_2 \Psi) + (\partial_3 \partial_3 \Psi)$.

en f des dériv. partielles de $\hat{\Psi}$.

s, p, d, f...

atome hydrog

@ ex 9.16 soit $f : \mathbb{R} \times]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (x + y^2 + zx + \ln(y),\ z - xy + xyz).$$

Mq éq $f(x,y,z) = (1,0)$ permet px (y,z) ds un V de $(1,0)$, d'exprimer y et z en f x.

Ref°: Résoudre (y,z) en f de x ds fenêtre autour (?) $\times (1,0)$.

- soit $y = 1$, $z = x = 0$

$$f(x,y,z) = (1,0)$$
$$f(\underset{a}{0}, \underbrace{1,0}_{b}) = (1,0)$$

Le TU s'appliq si

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \boxed{\partial_2 f_1 \quad \partial_3 f_1} \\ \partial_1 f_2 & \boxed{\partial_2 f_2 \quad \partial_3 f_2} \end{pmatrix} \longrightarrow \det \begin{pmatrix} (\partial_2 f_1)(0,1,0) & \partial_3 f_1 \\ (\partial_2 f_2)(0,1,0) & \partial_3 f_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} (\partial_2 f)(x,y,z) & \partial_3 f_1 \\ (\partial_2 f_2)(x,y,z) & \partial_3 f_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y + \frac{1}{y} & x \\ -x + xz & 1 + xz \end{pmatrix} \overset{?}{\neq} 0.$$

- $(\partial_2 f \quad \partial_3 f)(0,1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ =★ inversible.

ccl $\exists$ fenêtre $V \times W$,
$V \subset \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^2$, $(0,1,0) \in V \times W$.
et $g : V \to W$ tq $\forall (x,y,z) \in V \times W$:
$\underline{f(x,y,z) = (1,0)} \iff \underline{(y,z) = g(x)}$. (23)

Bonus Calculer $Dg(1,0)$

⚠ notat° x et y.

$$Dg(x,y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

★"

$$0 = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_1 g_1 \\ \partial_1 g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_2 f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 \\ \partial_1 g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(x, g_1(x), g_2(x))$$

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0,1,0) \\ \partial_1 f_2(0,1,0) \end{pmatrix}$$

Explicat° $f(x,y,z) = (1,0)$

TU : $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$; $f(x,y) = \underset{\in \mathbb{R}^p}{0}$ à résoudre.
$f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$.

Situa° ex : on vt résoudre $f(x,y) = v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$.
on pose $\hat{f}(x,y) = f(x,y) - v \iff$ résoudre $\hat{f}(x,y) = 0$.
les dérivées partielles st égales : $\boxed{D\hat{f} = Df}$