M54 - Analyse Numériq Matricielle

$B = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 5 \end{pmatrix}$.

DM Fact Schur : PR

$\exists \lambda \in Sp(A)$ ie $\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid Ax = \lambda x$

TH compléter tire base ornée

DM C.2.3. A^*A Vp réelles $\oplus$

→ $B = A^*A$, hermition, élt propre, spectre

→ $Bx = \cdots$ $\qquad \lambda = \frac{\cdots}{\cdots}$

DM Décomposi° VS SVD.

M54 - Analyse Numériq Matricielle

$$B = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 5 \end{pmatrix}.$$

DM Fact Schur : PR

$\exists \lambda \in Sp(A)$ ie $\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid Ax = \lambda x$

TH compléter tire base orné

DM C.2.3. A^*A vp réelles +

$\to B = A^*A$, hermitien, élt propre, spectre

$\to Bx = \dots \qquad \lambda = \frac{\dots}{\dots}$

DM Décompo° VS SVD.

$A^*A v_j = \lambda_j v_j \quad (\lambda_j \geq 0 \;\&\; \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1})$ ($\lambda_m = \dots = 0$)

et $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \mu_r = \sqrt{\lambda_r}$

$V_j = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ u car $V^*V = I$.

Pose $u_j = \frac{Av_j}{\mu_j}$, mq $\{u_1, \dots, u_r\}$ est orné.

$(u_i, u_j) = u_j^* u_i = \frac{1}{\mu_i \mu_j} v_j^* A^*A v_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i \mu_j} v_j^* v_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!] : u_i \in \operatorname{Im} A$. $\{u_1, \dots, u_r\}$ est SL $\subset \operatorname{Im}(A)$.

Vect$\{u_1, \dots, u_r\}$ sev de $\operatorname{Im} A \Rightarrow r \leq \dim(\operatorname{Im}(A)) = rg(A)$

$\dim(\ker(A^*)) = m - \dim \operatorname{Im} A \leq m - r$

Ms $v_{r+1}, \dots, v_m \in \ker A$ libres : $\dim \ker(A) \geq m - r$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A^*) \leq r \Rightarrow rg(A) = r$

1

D Rg matrice est rg AL q'elle représente, ou encore le rg de la famille des vecteurs colonnes.

(ie. nbr max de vct$^{\text{rs}}$ lignes (ou col$^{\text{nnes}}$) lin$^{\text{ıt}}$ indp) libre

(+ grd ordre mat carrées inv extraites de A)

$\Rightarrow$ Famille libre $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ si $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 = \dots = \alpha_n = 0$$

- A normale : $AA^* = A^*A$ / A u $AA^* = A^*A$ / A h $A^* = A$
- A ◁ $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ ~~md h~~ md u !!
- $Ax = b$, A ti $\Rightarrow A^{-1}$ ti $\quad b_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j$ PR mq $x_{j+1} = 0$
- mat nond : bloc de Jordan
- TH Schur : $A = UTU^*$
- vp d1 $\Rightarrow$ A d
- A d ssi A possd n $\vec{vp}$ li

?! spps $v_1, \dots, v_k$ li et $v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ et $A_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}$.

Suite DM :

$\{u_1, \dots, u_r\}$ ornées / libres ; on pt tirer $u_{r+1}, \dots, u_m \in \mathbb{K}^m$ p^r form bse ornée de $\mathbb{K}^m$. $\Rightarrow U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est u.

$AV = (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_e) = (\mu_1 u_1, \dots, \mu_r u_r, 0, \dots, 0)$

$= U.\Sigma = U. \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

En multipl$^{\text{t}}$ p V^* : $AVV^* = A = U\Sigma V^*$