M62 Ex 0 $\quad I =]x_-, x_+[$

$-\infty \leq x_- \leq x_+ \leq \infty$

[a) Trouver ttes les soluOs de classe C^1 de
$y' = 0$ sur I.

$E = \{\underbrace{t \in I \mapsto c : c \in \mathbb{R}}_{F}\}$

$F \subset E$ car si $f(t) = c$,
on a $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{c - c}{h} = 0$

Donc $f \in E$.

- Réciproqmt, soit $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$
soit $y \in E$
Par identité des accroissements finis,
on a $y(t_1) - y(t_2) = \underbrace{y'(s)}_{0 \text{ car } y \in E} (t_2 - t_1)$ pr $s \in]t_1, t_2[$

Donc $y(t_2) = y(t_1)$ dc $y \in F$.

On pose $B(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\, dt$ où $x_0 \in I$.

$B \in E$ car $B' = b$.

$\dfrac{B(x+h) - B(x)}{h} = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x}^{x+h} b(t)\, dt$

$= \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x}^{x+h} b(x)\, dt + \underbrace{\dfrac{1}{h} \int_{x}^{x+h} \underbrace{[b(t) - b(x)]}_{|\cdot| \leq \varepsilon |t-x|} dt}_{\leq \varepsilon(|h|) \xrightarrow[h \to 0]{} 0}$

$\varepsilon \nearrow$ & $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
b continuité

Donc $\dfrac{B(x+h) - B(k)}{h} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} b(x)$

$\forall c \in \mathbb{R}$, $B + c \in E$

Réciprqt, soit $y \in E$: $(y - B)' = y' - B' = b - b = 0$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$, $y = c + B$.

$E = \{B + c, c \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}(I,]0,\infty[)$

$\tilde{a}y' + \tilde{a}'y \quad (\tilde{a}y)' = b$

Posons $z = ay$, $y \in E \Leftrightarrow z' = b \quad \forall t \in I.$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ z(t) = c + B(t)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{a(t)}(c + B(t))\ \forall t \in I.$$

- soit $a \in \mathcal{C}(I)$,

on note A une primitive de a.

Soluθs sur I de $y' + ay = 0 \quad (*)$

Rq : $\left(e^{A(t)}\right)' = A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)}$

$(*)e^A$: $\quad e^A y' + (e^A)'y = 0 \quad$ car e^A jamais nul

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } e^A y = c$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ y(t) = ce^{-A(t)} \quad \forall t \in I$$

$$= ce^{-\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$$

$$E = \{t \in I \mapsto ce^{-A(t)} : c \in \mathbb{R}\}$$

- $a, b \in \mathcal{C}(I)$, A primitive de a

soluθs de $y' + ay = b$. $(\square)$

$\to$ On résout d'abord le pb homog $\leftrightarrow$

$(*) \quad y' + ay = 0$

$$E_h = \{y_c : t \mapsto c.e^{-A(t)},\ c \in \mathbb{R}\}$$

$\to$ si on a une soluθ de $(\square)$ $\hat{y}$. Pr tte autre soluθ, on a par soustracθ : $(y - \hat{y})$ soluθ de $(*)$.

$$E = \hat{y} + E_h = \{\hat{y}_c : t \mapsto \hat{y}(t) + c.e^{-A(t)} : c \in \mathbb{R}\}$$

Espace affine

$\mathbb{R} \to E_h$ appli injective
$c \mapsto y_c$
droite vectorielle

$\mathbb{R} \to E$
$c \mapsto \hat{y}_c = \hat{y} + ce^{-A}$
Espace affine.

$\leadsto$ Pour trouver une soluθ $\hat{y}$, on la calcule ss la forme $\hat{y}(t) = z(t)\,e^{-A(t)} \quad \forall t \in I$

$\hat{y}$ soluθ de $(\square) \Leftrightarrow z'e^{-A} + z\underbrace{[(e^{-A})' + ae^{-A}]}_{=0 \text{ car soluθ pb homog}} = b(t)$

$\Leftrightarrow z'(t) = b(t)e^{A(t)} \quad \forall t \in I$.

$$\Leftarrow z(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{A(s)}\, ds = \hat{z}(t)$$

<u>Cl</u> $\hat{y}(t) = \hat{z}(t)\, e^{-A(t)}$ solut° de $(\square)$.

<u>Ex 3</u> : Trouver la solut° à $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y' = |y| + |t| \end{cases}$

Soit y solu° pb de Cauchy, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y' = |y| + |t| \end{cases}$ (PC)

<u>Rq</u> : $\dot{y} = |y| + |t| \geq |t|$ donc y est $S^T \nearrow$ sur son intervalle de déf°.

Comme $y(0) = 0$, on a $\begin{cases} y(t) < 0 & \text{pour } t < 0 \\ y(t) > 0 & \text{pr } t > 0. \end{cases}$

Posons $\check{y}(t) = -y(-t)$; $\check{y}$ est aussi solu° du (PC).

- $\check{y}(0) = -y(-0) = 0$
- $\check{y}'(t) = y'(-t) = |y(-t)| + |-t| = |\check{y}(t)| + |t|$

$E_h = \{ c.e^t : c \in \mathbb{R} \}$ et sol° part : $t \mapsto -t-1$

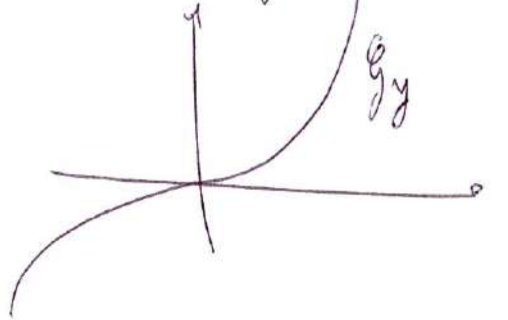
$E = \{ -t-1 + c e^t, \ c \in \mathbb{R} \}$

$-0-1+ce^0 = 0$
$-1+1 = 0$.

La seule qui vérifie $y(0) = 0$

$$y(t) = e^t - (1+t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

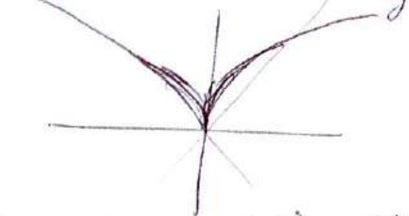
y est impaire dc $y(t) = -e^{-t} + (1-t)$ pr $t < 0$



Ex 1 PC $\begin{cases} \dot y = |y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\dot y = f(y)$ pb autonome.

$$\frac{f(y)}{y} = |y|^{-1/3} \xrightarrow[\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}]{} \infty$$

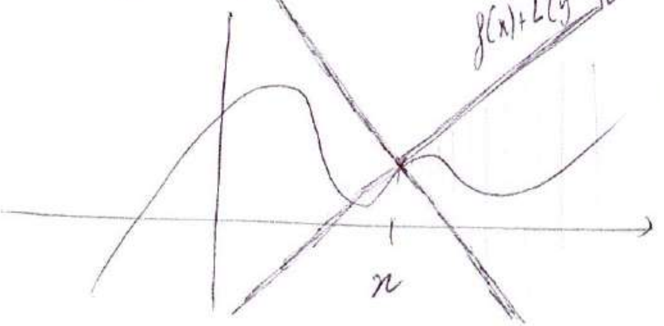


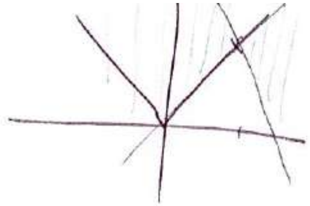
Pour $\varepsilon > 0$, $\dfrac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \varepsilon^{-1/3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$

Donc f n'est pas lipschitz.

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|y - x|$$

$$f(x) - L|y-x| \leq f(y) \leq f(x) + L\,|y - x|$$



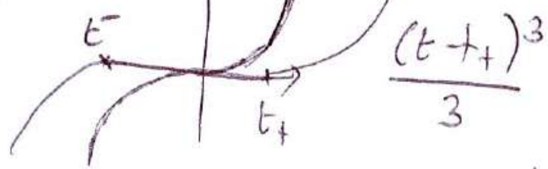


Dans l'ex4, 2) le Th de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas.

1) Mq f $y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$ est solu° du (pb).

$y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$. On a bien $y(0) = \frac{0^3}{3} = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \frac{1}{3} 3 \left(\frac{t}{3}\right)^2 = \left|\frac{t}{3}\right|^2 = \left|\left(\frac{t}{3}\right)^3\right|^{2/3}$
$= |y(t)|^{2/3}$.



<u>Famille de solu°</u>: $\{ y_{t_-, t_+} : -\infty \leq t_- \leq 0 \leq t_+ \leq \infty \}$

$$y_{t_-, t_+} = \begin{cases} \left(\frac{t - t_-}{3}\right)^3 & \text{pour } t < t_- \\ 0 & \text{si } t_- \leq t \leq t_+ \\ \left(\frac{t - t_+}{3}\right)^3 & \text{pour } t > t_+ . \end{cases}$$

$y_{\infty, \infty} = 0$.

Ex 5 (ED) 5.1 $\underbrace{(1+t+t^2)y' + (2t+1)y}_{[(1+t+t^2)y]'} = (1+t+t^2)^2$

& ci $y(0)=0$.

1) Écrire (PC) ssi (ci) équa D

$$(PC)\ \begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{aligned} F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,y) &\mapsto F(t,y) \text{ cont.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2t+1}{1+t+t^2}\, y + 1+t+t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2) En posant $z(t) = (1+t+t^2)y(t)$ trouver sol° particulière.

On a $z'(t) = (1+2t)y + (1+t+t^2)y'$

y solu° de 5.1 $\overset{\forall t}{\Leftrightarrow}$ $z' = (1+t+t^2)^2 = 1+2t+3t^2+2t^3+t^4$.

$\overset{\forall t}{\Leftrightarrow}$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $z(t) = c + t + t^2 + t^3 + \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^5}{5}$

y sol° du (PC) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ sol° de (5.1)} \\ y(0)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall t : z(t) = t + t^2 + t^3 + \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^5}{5}$

On a la solu° au pb de Cauchy.

$$y(t) = \frac{t+t^2+t^3+\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{5}}{1+t+t^2} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}$$

Ex 8 : 10) soit $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable tq $f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell$.

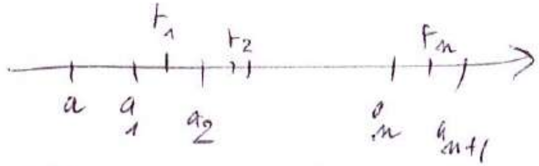
(Mq) $\exists\ (t_n) \to \infty$ tq $f'(t_n) \to 0$.

$a_n := a + n$ pour $n \geq 1$.

f est cont & dérivable sur $[a_n, a_{n+1}]$, $\forall n \geq 1$;

P. I Accroist Finis $\exists\ t_n \in]a_n, a_{n+1}[$ tq

$$f'(t_n) = \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = f(a_{n+1}) - f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell - \ell = 0$$



(Cor) si $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ cont dériv.

$f(t) \to \ell_0$ $t \to \infty$ alors $\ell_1 = 0$.
$f'(t) \to \ell_1$ $t \to \infty$

∃ le (Th) de Cauchy-Lipschitz s'appliq : c'est la seule solu°.

si $\ell_1 > 0 \Rightarrow \exists A, \forall t \geq A$, $f'(t) \geq \dfrac{\ell_1}{2}$.

Pour $t \geq a$, $f(t) = f(a) + \displaystyle\int_A^t \underbrace{f'(s)}_{\geq \frac{\ell_1}{2}}\, ds \geq f(a) + \dfrac{\ell_1}{2}(t-A)$

$= f(A) - \dfrac{\ell_1 A}{2} + \dfrac{\ell_1 t}{2} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

si y solut° de $y' = f(y)$ sur $]a,\infty[$ et $f \in C(\mathbb{R})$

alors si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell$ alors $y'(t) = f(y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} f(\ell)$

par cont de f.

Donc $y' \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $f(\ell) = 0$.

(la q° 2) est de mq $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$).

(4) $f \in C^1(\mathbb{R})$
$\lim_{t\to\infty} (f(t) + f'(t)) = 0$

$$y'(t) + y(t) = 0$$

$q(t) := f(t) + f'(t)$ $\qquad e^t q(t) = (y \cdot e^t)'$

$(y e^t)' = e^t q(t)$; $(y e^t) = y(0) e^0 + \int_0^t q(s) e^s \, ds$

$$\frac{y e^t}{e^t} = \frac{y(0)}{e^t} + \int_0^t e^{(s-t)} q(s) \, ds$$

$\to q$ est bornée sur $[0,\infty[$; $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$

Notons $M := \max_{[0,\infty[} |q|$, $\omega(t) = \max_{[t,\infty[} |q| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$|y(t)| \le |y(0)| e^{-t} + \int_0^{t/2} \underbrace{e^{s-t}}_{\le e^{-t/2}} \underbrace{|q(s)|}_{\le M} ds + \underbrace{\int_{t/2}^t e^{s-t} \underbrace{|q(s)|}_{\omega(t/2)} ds}_{\le \omega(t/2) e^{-t} \int_{t/2}^t e^s ds \; \le \omega(t/2)}$$

$\le M \cdot \frac{t}{2} e^{-t/2}$

$\Rightarrow \forall t \ge 0,\ y(t) \le |y(0)| e^{-t} + M_0 \frac{t}{2} e^{-t/2} + \omega\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

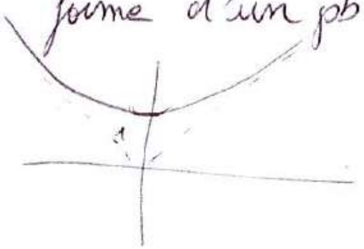
$\boxed{M2}$ $|y(t)| \le |y(0)| e^{-t} + \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{1}_{[0,t]}(r)\, q(t-r) e^{-r}}_{\le M e^{-r}} dr$ $\quad (r = t-s)$

$\longrightarrow 0$ par TCV (Conv) Dominée de Lebesgue.

1) Dmq $\exists!$ sol globale pr $\mathbb{1}$ (pc)

Ex 9 : Le pb s'écrit ss la forme d'un pb de Cauchy (autonome)

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Le $f(s) = \sqrt{1+s^2} \underset{+\infty}{\sim} s\left(1 + \frac{1}{2s^2} + \dots\right) = s + \frac{1}{2s} + \dots$

paire $\to$

soit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 < s_2$:

$$\left| \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} \right| = |f'(\xi)| \text{ pr un } \xi \in]s_1, s_2[$$

$\le \sup_{\mathbb{R}} |f'|$

Ici $f'(s) = \frac{|s|}{\sqrt{1+s^2}} \leq 1$.

Donc f est 1-lipschitzienne et le Th de Cauchy-Lipschitz global s'applique

$\Rightarrow \exists!$ solut maximale de (PC), définie sur $\mathbb{R}$.
($\approx$ globale

Résoudre $\begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\boxed{\text{autonome}}$

$y' = \sqrt{1+y^2} \iff \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1$
jamais nulle $\neq 0$

si $g(s) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, G est une primitive de g.

$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \iff g(y)\cdot y' = 1$
$\iff \frac{d}{dt}\left[G(y)\right] = 1 \iff \operatorname{argsh}(y(t)) = c+t$, $c \in \mathbb{R}$.
$\iff y(t) = \operatorname{sh}(c+t)$

Primitive de $s \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$.

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\, ds \xrightarrow[ds = \cosh u\, du]{s = \sinh u} = \int_0 \frac{\operatorname{ch} u}{\underbrace{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}}_{=1}}\, du$$

$= \operatorname{argsinh}(x)$

(PC) $\iff \exists\, c$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} y(t) = \operatorname{sh}(c+t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\iff y(t) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(1) + t)$

Ex6 On appelle solution du système différentiel

(6.1) $\begin{cases} x' = -4x - 2y + 2e^t \\ y' = 6x + 3y - 2e^t \end{cases}$ un couple (x,y) de fc C^1 sur $\mathbb{R}$ sol° de ce système.

1) Dmq' l'ens solutions est un espace affine (quelle dimension?

C'est un système diff linéaire est dim 2 à coefs cte et à second membre cont. Si on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(6.1) $\iff X' + AX = B(t)$ (∗) où $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = 2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'ens des soluts de (6.1) est & $\bar{Y}$: sol° particulière

$$E = \{ t \mapsto \bar{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 \ : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$$

$E = \bar{Y} + E_h$, $E_h = L(\mathbb{R}^2)$

où $L : Y_0 \mapsto (t \mapsto e^{-tA} Y_0)$

$L(Y_0) = 0 \Rightarrow L$ injective, or L est linéaire.

Dc E_h est un $\mathbb{R}$-ev de dim 2.

Donc E est un espace affine de dimension 2.

2) Trouver une solut° particulière à ce système différentiel.

On cherche une solut° de la forme $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\overline{Y}$ sol° de $(*)$ $\Leftrightarrow e^t\left[\begin{pmatrix} 1+4a+2b \\ 6a-2b \end{pmatrix}\right] = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ \forall t$

$\forall t \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ solut° parti.

3) Calculer toutes les soluts de ce système différentiel.

Calculons $t \longmapsto e^{-tA}$.

<u>Diagonalisons A :</u>

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id} - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 6 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

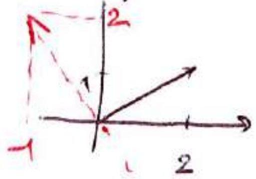
On a 2 Vp simples 0 et 1 dc A est diagonalisable

& $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = (e_0 \ e_1)$

↳ $e_0, e_1 \neq 0 \quad e_0 \in \mathrm{Ker}(A) \quad e_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}\ A)$

⚠ ici $\boxed{M}$ pr e_0, e_1 cf mat augmentée ne f pas ⓔ car $4x+2y$ '' $-6x-3y$.

$4x + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$



$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$.

$\mathrm{Ker}\, A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; on prend $e_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(A - \mathrm{Id})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ \cancel{-6x - 4y} = 0 \end{cases}$

$\ker(A - \mathrm{Id}) = \mathbb{R} e_1$ où $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- $e^{-tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(-tA)^n = \sum \frac{(-t)^n}{n!} A^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} P D^n P^{-1}$

$= P\left(\sum \frac{(-t)^n}{n!} D^n\right) P^{-1}$

$= P\left[\mathrm{Id} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$

Or $E_h = \{t \mapsto e^{-tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{t \mapsto P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} Y_0}_{Z_0} : Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{t \mapsto P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Z_0 : Z_0 \in \mathbb{R}^2\}$

ercice 2 1) Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = |t|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a $y' = f(t,y)$, or $\dfrac{f(t,y)}{y'} = |t|^{-1/3} \xrightarrow[t \neq 0]{t \to 0} \infty$ Voir corrigé

r $\varepsilon > 0$, $\dfrac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \varepsilon^{-1/3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$ Donc f n'est pas lipschitz.

(on n'a pas $|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$)

Ainsi ce problème ne rentre pas dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. Si !

2) $y'(t) = |t|^{2/3} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^t y'(x)\,dx = \int_0^t |x|^{2/3}\,dx$

t est un réel,

$\Leftrightarrow y(t) - y(0) = \begin{cases} \frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t < 0 \end{cases}}$ car $y(0) = 0$ d'après l'énoncé.

Defraiteur
Maxence

M62 - Travail à la Maison

Exercice 1 :

il faut aussi montrer que il n'y a pas d'autres solutions de la forme e^{xt}.

1) Soit (E) $y'' - 2y' + y = 0$, la solution de la forme $y(t) = e^{xt}$, x …
en prenant $x = 1$, cela convient car $e^t - 2e^t + e^t = 0$

2) Cherchons toutes les solutions de (E). Posons $y(x) = z(x)e^x$

$y'(x) = z'(x)e^x + z(x)e^x$ puis $y'' = z''e^x + z'e^x + z'e^x + ze^x = e^x[z'' + 2z' + …$

En remplaçant les expressions dans (E), on obtient :

$$y'' - 2y' + y = e^x[z'' + 2z' + z] - 2[z'.e^x + ze^x] + ze^x \iff y'' - 2y' + y = e^x z'' = …$$

$$\iff z''(x) = 0 \iff \int_0^x z''(t)\,dt = 0 \iff z'(x) - z'(0) = 0 \iff z'(x) = z'(0)$$

$$\iff \int_0^x z'(t)\,dt = xz'(0) \iff z(x) - z(0) = xz'(0) \iff z(x) = z(0) + xz'(0)$$

Ainsi comme $y(x) = z(x)e^x \iff y(x) = [z(0) + xz'(0)]e^x$

$$\iff y(x) = (k_1 + xk_2)e^x \quad \text{tq } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Defraiteur
Maxence

Ex 7 (7.1) $\begin{cases} x' = 4x + 3y - 7 \\ y' = 3x - 4y + 1 \end{cases}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(7.1) \Leftrightarrow X' + AX = B(t)$ $(\circledast)$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & +4 \end{pmatrix}$

$B(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'ensemble des solutions de (7.1) est $E = \{ t \longmapsto \overline{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

$E = \overline{Y} + E_h$, $E_h = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

Cherchons une solution particulière de la forme $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\overline{Y}$ solution de $(\circledast) \Leftrightarrow e^t \begin{bmatrix} -4a - 3b \\ -3a + 4b \end{bmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t.$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Danger

Donc $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution particulière.

Calculons toutes les solutions de (7.1) en cherchant $t \mapsto e^{-tA}$.

Diagonalisons A : $P_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$

On a 2 valeurs propres simples 3 et -3, donc A est diagonalisable.

Et $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = (e_0 \; e_1)$ avec $e_0, e_1 \neq 0$

$e_0 \in \mathrm{Ker}(3Id - A)$

$e_1 \in \mathrm{Ker}(-3Id - A)$

On calcule e_0 et e_1 par la méthode de Laman :

$\left|\begin{matrix} -7 & -3 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$ $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

$\left|\begin{matrix} -1 & -3 \\ -3 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$ $\left|\begin{matrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ & $\left|\begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e^{-tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-tA)^n = \sum \frac{(-t)^n}{n!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} P D^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ga $E_h = \{ t \longmapsto e^{-tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \} = \{ t \longmapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ t \longmapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Z_0 : Z_0 \in \mathbb{R}^2 \}.$

Ex 10 soit $ty'+y=0$ $(*)$

1) Cette équat° différentielle rentre-t-elle ds le cadre du Th de Cauchy-Lipschitz pour $t>0$? $t\in\mathbb{R}$?

Pour $t>0$, $(*)$ $y' = \frac{-y}{t} =: f(t,y)$.

$f\in\mathcal{C}(]0,\infty[\times\mathbb{R})$, or $|f(t,z_1)-f(t,z_2)| = \frac{|z_1-z_2|}{t}$

mais $\frac{|z_1-z_2|}{t} \not\leq L|z_1-z_2|$ $\forall t>0$, $z_1,z_2\in\mathbb{R}$.

f est L-Lipschitzienne est sa seconde variable sur $[\frac{1}{L},\infty[\times\mathbb{R}$.

En effet pour $t\geq\frac{1}{L}$, $z_1,z_2\in\mathbb{R}$

$|f(t,z_1)-f(t,z_2)| = \frac{1}{t}|z_1-z_2| \leq L|z_1-z_2|$.

ep $\forall$ compact $K\subset]0,\infty[$, $f: K\times\mathbb{R}$ est Lipschitzienne en sa seconde variable de constante de Lipschitz $\frac{1}{\min K}$.

Le Th de Cauchy-Lipschitz local s'appliq :
$\forall t_0>0$, $\forall y_0\in\mathbb{R}$, $\exists!$ solut° maximale (y,I)
où I intervalle, $t_0\in I$, $I\subset]0,\infty[$.

tq $\begin{cases} y' = -\frac{1}{t}y \text{ sur } I \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ $(\square)$

$I=]0,\infty[$.

solut° maximale : ie si $(\tilde{y},\tilde{I})$ est une autre solu de $(\square)$ alors $\tilde{I}\subset I$ et $\tilde{y}=y_{\tilde{I}}$.

Sur $\mathbb{R}$? si $t=0$, $y=0$ n'est pas (ED)

On n'a pas pb de Cauchy sur $\mathbb{R}$.
pas équat° de la forme $y'=f(t,y)$.

Par contre, $t\mapsto0$ est une solu° sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver toutes les soluOs déf sur un intervalle ouvert en t inclus dans $]0,\infty[$.

Rq $\forall\lambda$: $y_\lambda : t\mapsto\frac{\lambda}{t}$ est solu°, c'est la seule solu° tq $y_\lambda(1)=\lambda$.

y_λ est la solu° du pb de Cauchy.

$\begin{cases} y' = -\frac{1}{t}y \\ y(1)=\lambda. \end{cases}$

$y'(t) + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)}y(t) = 0$

A primitive de a, $\mathcal{C}$ $A(t)=\ln(t)$.

$(*)\quad e^{A(t)} y' + a(t) e^{A(t)} y = 0$

$\Leftrightarrow \quad (e^{A(t)} y)' = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad e^{A(t)} y(t) = \lambda$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{-A(t)} = \frac{\lambda}{t}$

3) Parmi ces solu°s lesquelles se prolongent à tout t ds $\mathbb{R}$?

$y_{\lambda^+}(t) = \frac{\lambda}{t}$, $y_\mu(t) = \frac{\mu}{t}$.

solu° sur $]0,\infty[$; solu° sur $]-\infty, 0[$.

si $\lambda \neq 0$: $|y_{\lambda^+}| \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$

si $\mu \neq 0$ $\quad |y^\mu(t)| \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$

si $\lambda = \mu = 0$, on a $y_\lambda = y_\mu = 0$.

0 est la solu° sur $\mathbb{R}$.

Démonstrat° Th de Cauchy - Lipschitz

soit $T_- < 0 < T_+$ et $I =]T_-, T_+[$.

soit $f \in C(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tq $\exists L \geq 0$ tq

$\forall t \in I, \forall y^1, y^2 \in \mathbb{R}^N : \|f(t,y^1) - f(t,y^2)\| \leq L \|y^1 - y^2\|$

alors $\forall y_0 \in \mathbb{R}^N$, $\exists!$ solu° de

$(PC) \begin{cases} y' = f(t,y) & \text{sur } I \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $\qquad y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ de

1

$y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ solu° (PC)

$\Leftrightarrow y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ tq $\forall t \in I$,

$\boxed{y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds} \quad (\square)$

Preuve 1

$(\Leftarrow)$ si $y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ est solu° de $(\square)$ alors $y(0) = y_0 + \int_0^0 \ldots = y_0$.

et $y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ & $y'(t) = f(t, y(t))$

de y solu° C^1 de (PC).

$(\Rightarrow)$ Réciproq^t si $y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ est solu° de (PC)

alors $\forall t \in I$, $y(t) = \underbrace{y(0)}_{= y_0} + \int_0^t \underbrace{y'(s)}_{= f(s, y(s))} ds$

de y solu° de $(\square)$.

On applique le Th du point fixe de Banach

soit $(B, \|\cdot\|)$ un e.v.n complet (un Banach)

soit $F : B \to B$ une appli S^T contractante,

$\exists k \in [0,1[$ tq $\forall y_1, y_2 \in B$,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

alors $\exists!\, y \in B$ tq $F(y) = y$.

On pose $B = \mathcal{C}(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ et $\forall y \in B$:

$$F(y) : t \longmapsto y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

y solut° de $(\square) \iff F(y) = y$.

$(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Pour $y \in B$, $\|y\|_B = \sup\{e^{-L|t|} \|y(t)\|, t \in \overline{I}\}$

soit $\phi : (B, \|\cdot\|_\infty) \longmapsto (B, \|\cdot\|_B)$

$$z \longmapsto t \mapsto e^{L|t|} z$$

ϕ est linéaire et $\|\phi(z)\|_B = \sup\{e^{-L|t|} \underbrace{\|\phi(z)(t)\|}_{\|e^{L|t|} z(t)\|}\ t \in \overline{I}\}$

$$\boxed{\|\phi(z)\|_B = \|z\|_\infty}$$

R

$\Rightarrow \phi$ est injective.

ϕ est une isométrie de $(B, \|\cdot\|_\infty)$ sur $(\Phi(B), \|\cdot\|_B)$.

$$\Psi : (B, \|\cdot\|_B) \longrightarrow (B, \|\cdot\|_\infty) \text{ est tq } \Psi \circ \phi = \phi \circ \Psi = Id_B$$
$$y \longmapsto e^{-L|t|} y$$

Donc ϕ est une isométrie bijective de $(B, \|\cdot\|_B)$ sur $(B, \|\cdot\|_\infty)$, comme $(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach, $(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach aussi

△ Mq $F : (B, \|\cdot\|_B) \to (B, \|\cdot\|_B)$ est strictement contractante.

→ soit $y_1, y_2 \in B$ et $t \in [0, T^+]$,

$$\|F(y_1)(t) - F(y_2)(t)\|_{\mathbb{R}^N} \overset{\text{car } t \text{ fini}}{=} \left\| \int_0^t f(s, y_1(s))\, ds - \int_0^t f(s, y_2(s))\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]\, ds \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\left\| \int_0^t \left[f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))\right] ds \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\le \int_0^t \underbrace{\| f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)) \|_{\mathbb{R}^N}}_{\le L \|y_1(s) - y_2(s)\|} ds$$

$$\| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N} \le L \int_0^t \|y_1(s) - y_2(s)\|_{\mathbb{R}^N} ds$$

Rq $\|y_1(s) - y_2(s)\| e^{-L|s|} \le \|y_1 - y_2\|_B$.

d'où $\|y_1(s) - y_2(s)\| \le \|y_1 - y_2\|_B \, e^{L|s|}$

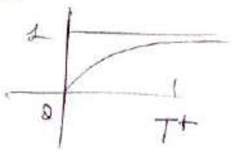
Donc $\| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N} \le \|y_1 - y_2\|_B \underbrace{\int_0^t L e^{Ls} ds}_{= (e^{Lt} - 1)}$

soit $y_1, y_2 \in B$ et $t \in [0, T^+]$

$$\sup_{t \in [0,T^+]} e^{-Lt} \| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\le \left[\sup_{t \in [0,T^+]} (1 - e^{-Lt}) \right] \|y_1 - y_2\|_B$$

$$= (1 - e^{-LT^+}) \|y_1 - y_2\|_B.$$



De même $\sup_{[T^-,0]} e^{-L|t|} \| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N}$

$$\le (1 - e^{LT^-}) \|y_1 - y_2\|_B$$

cl $\|F(y_1) - F(y_2)\|_B \le k \|y_1 - y_2\|_B$

où $k = \max(1 - e^{-LT^+}, 1 - e^{LT^-}) \in]0,1[$

Par Th de point fixe de Banach, (□) admet une uniq soluℓ.

□

---

soit $f : \underset{\text{compact}}{I} \times \underset{\subset \text{ compact ds } \mathbb{R}^N}{K} \longrightarrow \mathbb{R}$

f bornée cont & tq

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L \|y - z\| \quad \text{où } L > 0$$

Posons pr $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^N$.

$$\tilde{f}(t,z) = \sup \{ f(t,y) - L\|y - z\| : y \in K \}.$$

• Mq $\tilde{f}(t,z) = f(t,z)$ ici $y \in K$.

$\forall y \in K : f(t,y) - L\|y-z\| \leq f(t,z)$

car f L-lipschitz en y.

Donc $\tilde{f}(t,z) = \sup_{y \in K} f(t,y) - L\|y-z\| \leq f(t,z)$

$= f(t,z) - L\|z-z\|$

$\leq \tilde{f}(t,z)$.

Donc $\tilde{f}(t,z) = f(t,z)$

• $\tilde{f}$ est L-lipschitz en z, soit $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$.

soit $t \in I$, soit $y_1 \in K$ tq $f(t,y_1) - L\|y_1 - z_1\| \geq$

$\geq \tilde{f}(t,z_1) - \varepsilon$

On a $\tilde{f}(t,z_2) \geq f(t,y_1) - L\|y_1 - z_2\|$

$\geq \tilde{f}(t,z_1) + L(\|y_1 - z_1\| - \|y_1 - z_2\|) - \varepsilon$

$\rightsquigarrow \tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2) \leq \underbrace{L(\|y_1 - z_2\| - \|y_1 - z_2\|)}_{\leq \|z_1 - z_2\|} + \varepsilon$

On fait $\varepsilon \to 0$; on a $\tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2) \leq L\|z_1 - z_2\|$

En échangeant les rôles de z_1, z_2, on a

$|\tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2)| \leq L\|z_1 - z_2\|$

• $\tilde{f}$ est cont, $\tilde{f}(t,z) - \tilde{f}(s,z)$,

(on prend $y \in K$ tq $\tilde{f}(s,z) \geq f(s,y) - L\|y-z\| - \varepsilon$

soit $s, t \in I$, $z \in \mathbb{R}^N$

$\tilde{f}(t,z) \geq f(t,y) - L\|y-z\|$

$= [f(t,y) - f(s,y)] + \underbrace{f(s,y) - L\|y-z\|}_{\leq \tilde{f}(s,z) + \varepsilon}$

D'où $\tilde{f}(t,z) - \tilde{f}(s,z) \leq \sup_{y \in K} |f(t,y) - f(s,y)| + \varepsilon$

$f \in \mathcal{C}(I \times K)$

dc f est UN^t cont.

Donc $\xrightarrow[s \to t]{} 0$

Exo 4 (EDO) $2y' = y\left(1 - \frac{3}{y^2+2}\right)$

1) Vérifiez (H) (Th) Cauchy-Lipschitz.

- $f \in C^1(\mathbb{R})$ dc f localement lipschitzienne
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2+x^2} + \frac{6x^2}{(2+x^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-6+3x^2}{(2+x^2)^2}\right)$

$f' \in C^0(\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \frac{1}{2}$ dc f' est bornée

dc f est lipschitzienne.

$f''(x) = \frac{1}{(2+x^2)^3}\left(6x(2+x^2) - 4x(-6+3x^2)\right) = \frac{1}{(2+x^2)^3}\left(-6x^3 + 36x - 6x(x^2-6)\right)$

x	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$
f''	0	0	0
f' : $\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{19}{32}$ ↘	-1 ↗	$\frac{19}{32}$ ↘ $\frac{1}{2}$

cte de lipschitz ?
↓
chercher max $|f'|$

$f'(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{12}{8^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{16}\right) = \frac{19}{32}$

En fait f est 1 lipschitz

Le (Th) de Cauchy-Lipschitz global s'applique.

2) Mq Ips maximal positif d'$\exists$ des soluts $\forall t>0$

↳ $\mathbb{R}$.

3) Mq $y(t)$ reste $S^T > 0$ $\forall t > 0$.

soit $y_0 > 0$ & y la soluᵒ de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

soit $t \in \mathbb{R}$ tq $y(t) \le 0$,

y cont & $y(0) > 0$ dc par TVI

$\exists\, t_*$ tq $y(t_*) = 0_a$ ↳ $a \in \{-1, 0, 1\}$

or y soluᵒ de $\begin{cases} z' = f(z) \\ z(t_*) = 0_a \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$. (□)

Or 0 est soluᵒ de (□) dc par unicité (donnée par (Th) (C-L)) on a $y(t) = 0$ $\forall t$.

Contra : $y(0) = y_0 > 0$!?

Conclusion $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) > 0$

Les soluᵒs ctes sont les zéros de f. $y' = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$.

↳ $0, -1, 1$

• soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda$ est solu° de $y'=f(y)$

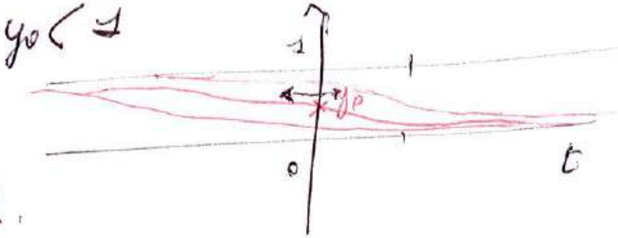
$\iff f(y)=0$

$\iff \lambda \in \{-1,0,1\}$

si $0<y_0<1$

$\forall t \Downarrow$

$0<y(t)<1$.



→ si $y_0>1 \Rightarrow \forall t,\ y(t)>1$.

• si $0<y_0<1$ alors $\forall t \in]0,1[$

on a $y'=f(y)<0$ car $0<y(t)<1$.

y	0		1		∞
$f(y)$	0	$\ominus$	0	$\oplus$	

Donc y est décroissante S^T sur $\mathbb{R}$ et $0<y<1$.

(R) si $g: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante.

si g est majorée et $\exists\, l$ tq $g(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} l$

sinon $g(t)\longrightarrow \infty$ qd $t\to\infty$.

Ici $y:\mathbb{R}\longrightarrow]0,1[$ est $\searrow$. Dc $\exists\, l^- \in [y_0,1]$

tq $y(t)\xrightarrow[t\to-\infty]{} l^-$.

$\exists\, l^+ \in [0,y_0]$ tq $y(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} l^+$.

→ $\forall t$: $y'(t)=f(y(t))$ et f cont dc $y'(t)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{} f(l^\pm)$

(R) si $y\longrightarrow l$, $y'\longrightarrow l_1$ en ∞ alors $l_1=0$

Donc $f(l^+)=f(l^-)=0 \Rightarrow l^+,l^-\in\{-1,0,1\}$

Or $l^+\in[0,y_0]\subset[0,1[$ dc $l^+=0$

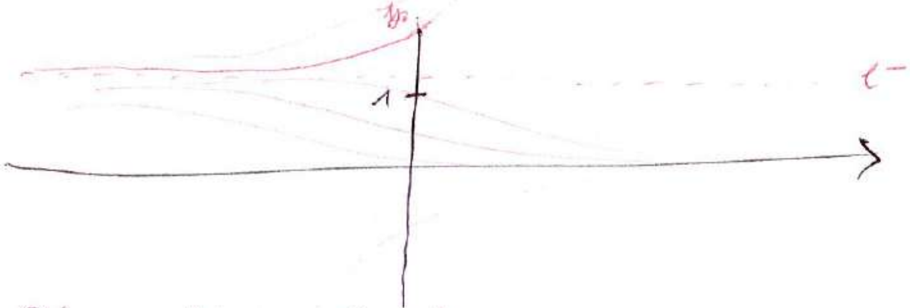
et $l^-\in[y_0,1]\subset]0,1]$ dc $l^-=1$.

• Si $y_0 > 1 \Rightarrow \forall t,\ y(t) > 1$ &

dc $y'(t) = f(\underbrace{y(t)}_{>1}) > 0$

$y \nearrow$ sur $\mathbb{R}$, $y(t) > 1\ \forall t$ dc $\exists\, \ell \in [1, y_0]$

tq $y(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \ell^-$



D'où $y'(t) = f(y(t)) \xrightarrow[\infty]{} f(\ell^-)$ p cont de f.

Donc $f(\ell^-) = 0$ dc $\ell^- \in \{-1, 0, 1\}$. Or $\ell^- \geq 1$.

Dc $\ell^- = 1$. $\lim\limits_{-\infty} y = 1$.

• En $+\infty$, 2 possibilités ⓐ $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

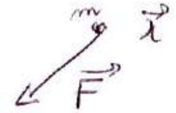
ⓑ $\exists\, \ell_+ \geq y_0 > 1$ tq $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \ell^+$, ds ce cas ĉ précédemment, on aurait $f(\ell^+) = 0$ dc $\ell^+ \in \{-1, 0, 1\}$

Impo car $\ell^+ > 1$

ccl $\lim\limits_{\infty} y(t) = \infty$.

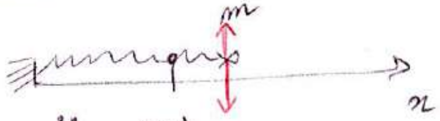
Ex 12 Contexte historiq : Newton

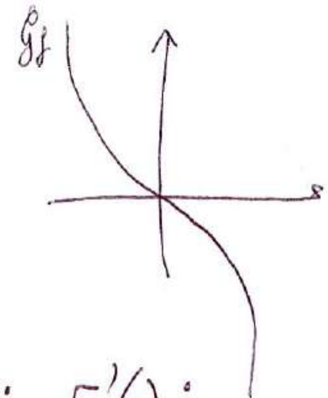
$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$ Relaθ Fondamentale D



$\vec{F_g} = -\dfrac{GMm}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$

Ressort





$\underbrace{m\ddot{x}}_{} = f(x)$

force exercée p ressort

$f = -F'$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F(x)}_{}\Big] = m\dot{x}\ddot{x} + F'(x)\dot{x} = \dot{x}\,(\underbrace{m\ddot{x} + F'(x)}_{=0})$$

$E(t) = E(0)$ énergie potentielle de ressort. p RFD

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F(x) = E(0)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E(0) - F(x)\right]} = G(x)$$

Dans le cas +, $\dfrac{\dot{x}}{G(x)} = \pm 1$.

$u = x(t)$
$du = x'(t)\,dt$

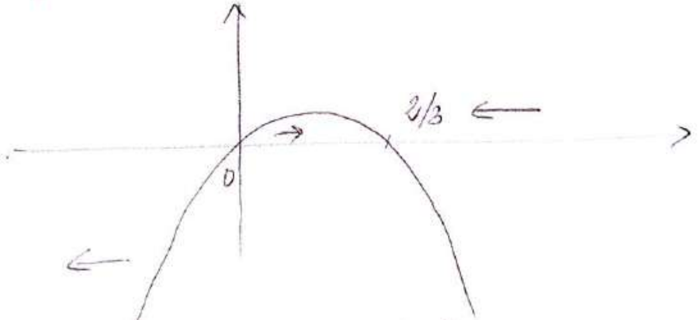
$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{G(u)} = t \Rightarrow H(x(t)) - H(x(0)) = t$$

où $H' = \frac{1}{G}$.

y de classe C^2.

$$(PC) \begin{cases} \ddot{y} = 4y - 6y^2 = 6y\left(\frac{2}{3} - y\right) \\ y(0) = 1 \text{ et } \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

4) Dmq $\exists!$ solut° à ce pb.



Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, et $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

y solut° de $(PC) \iff \{ Y' = F(Y)$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 4y - 6y^2 \end{pmatrix}$

$$(PC) \iff (PC') \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\boxed{F \text{ est } C^1} \Rightarrow$ localement lipschitzienne.

$$\|F(Y) - F(\tilde{Y})\|_2 \leq C \, \|Y - \tilde{Y}\|_2, \quad \forall\, Y, \tilde{Y} \in \overline{B(0,R)}$$

où $C = \max \||Df(Y)\||_2 \in \overline{B(0,R)}$.

DM $F(Y) - F(\tilde{Y}) = \phi(1) - \phi(0)$ où $\phi(t) = F((1-t)Y + t\tilde{Y})$ $= Y + t(\tilde{Y} - Y)$

$$= \int_0^1 \phi'(s)\,ds = \int_0^1 Df\,((1-s)Y + s\tilde{Y})(\tilde{Y} - Y)\,ds.$$

$$\|F(Y) - F(\tilde{Y})\|_2 \leq \int_0^1 \underbrace{\||Df((1-s)Y + s\tilde{Y})\||_2}_{\leq C} \|Y - \tilde{Y}\|_2 \, ds$$

$$= C. \|Y - \tilde{Y}\|$$

$\exists ? L$ tq $\forall y, z \in \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(z)| \leq L\,|y - z|$$

où $f(y) = 4y - 6y^2$

Faux car f n'est pas bornée.

... $\exists$ I interv. ouvert ... maximale & $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ solu° de (PC') sur I.
max

si $\tilde{Y} \in C^1(\tilde{I}, \mathbb{R}^2)$ autre solu° alors $\tilde{I} \subset I$ et $\tilde{Y} = Y|_{\tilde{I}}$.

(solu° maximale : (y, I))

e) Mq f $t \mapsto y(t)$ est paire.

$\boxed{(\text{dérivée } f \text{ paire}) = f \text{ impaire}}$

solu° uniq $\leftarrow$ a ttes sym du pb de départ.
cette solu° hérite de ttes les symétries du pb.

Posons $\check{y}(t) := y(-t)$ pour $t \in -I$

Mq $\check{y}$ solu° de $(*)$ (PC)

- Données initiales:
  - $\check{y}(0) = y(-0) = 1$ ✓
  - $\check{y}'(0) = -y'(-0) = 0$ ✓

On a $\forall t \in -I$, $\check{y}'(t) = -y'(t)$

et $\check{y}''(t) = y''(-t)$

D'où $\forall t \in -I$, $\check{y}''(t) = y''(-t) = f(y(-t)) = f(\check{y}(t))$ ✓

Donc $(\check{y}, -I)$ est solu° de $(*)$

Comme y est l'uniq sol° maximale de $(*)$, on a :

$-I \subset I$, $I =]-t_-, t_+[$, $-I =]-t_+, t_-[$, $t_-, t_+ > 0$

$-I \subset I \Rightarrow -t_- \leq -t_+$ et $t_- \leq t_+$
$t_- \geq t_+$

$-I \subset I \Rightarrow -I = I$

et $\check{y}(t) = y(t)$, $\forall t \in I$.

Donc $y(-t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

3) Dmq $y'^2 = 4y^2(1-y)$

On a $y'' = 4y - 6y^2$, multiplions par y'.

$y''y' = 4yy' - 6y^2y'$

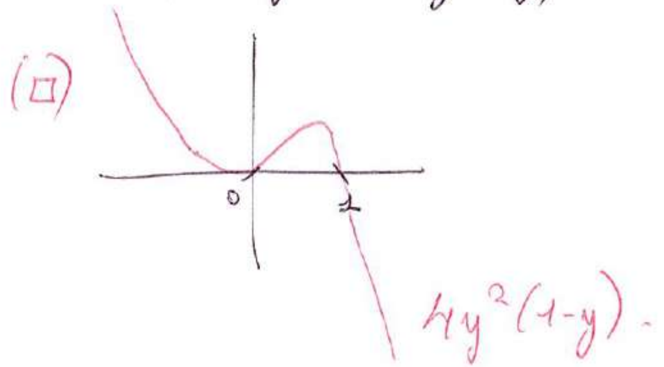
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'^2}{2}\right) = 2\frac{d}{dt}(y^2) - 2\frac{d}{dt}(y^3)$$

Donc $\forall t \in I$ $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(y'^2 - 4y^2 - 4y^3\right)}_{E(t)} = 0$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(y'^2 - 4y^2 + 4y^3\right)}_{E(t)} = 0$$

$\forall t,\ E(t) = E(0) = y'^2(0) - 4y^2(0) + 4y^3(0) = 0 - 4 + 4 = 0.$

Donc $\forall t \in I :\ y'^2 = 4(y^2 - y^3) = 4y^2(1-y)$



4) Dmq la soluθ ∃ pr tout tps, qu'elle vérifie $0 \leq y \leq 1$.

$\forall t \in I,\ 4y^2(1-y) = y'^2 \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 \ \forall t.$

Sppo $\exists t^* \in I$ tq $y(t^*) \leq 0$,

comme $y(0) = 1 > 0$. Par TVI, $\exists \bar{t},\ y(\bar{t}) = 0$.

Par (□), on a aussi $y'(\bar{t}) = 0$

Donc y est solu de ...

$$(PC')\begin{cases} y'' = f(y) \\ y(\bar{t}) = 0,\ y'(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

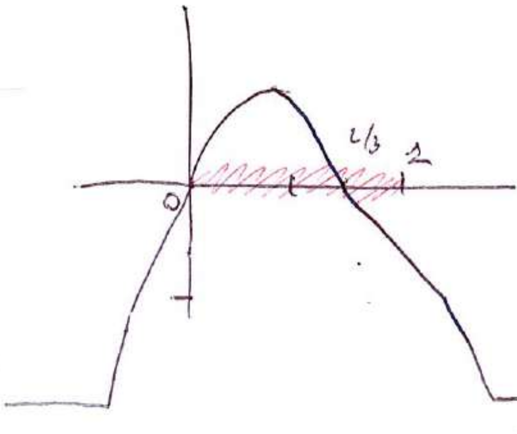
$f(0) = 0$.

Or 0 est soluθ de (PC').

Par unicité, on a $y \equiv 0$, ce q contredit $y(0) = 1$.

Ccl : $\forall t \in I,\ 0 < y(t) \leq 1$.

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in [0,1] \\ & \text{si } y > 2 \\ -10 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$



Comme $0 < y \leq 1$, on a $y'' = \tilde{f}(y)$ sr I.

$\tilde{f}$ est lipschitz

Le Th de Cauchy-Lipschitz global s'appliq à

$$(\widetilde{PC})\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \tilde{F}(Y) := \begin{pmatrix} z \\ \tilde{f}(y) \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

... sol° maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Si on note $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ z \end{pmatrix}$ cette sol° :

$\exists\ -\infty \leq T^- < T^+ \leq +\infty$ tq $T^- = \max\{t<0, \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$

$T^- = \sup\{t<0,\ \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$

$T^+ = \inf\{t>0,\ \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$

Convent°

$\sup \emptyset = -\infty$

$\inf \emptyset = +\infty$

$\tilde{f}(\tilde{y}(t)) \neq f(\tilde{y}(t))$.

On a $\tilde{y}$ est sol° de $(*)$ sur $]T^-, T^+[$.

Et donc on a $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ sur $]T^-, T^+[$.

si $T^- > -\infty$, par continuité de $\tilde{y}$, $\exists\ \varepsilon > 0$ tq $\tilde{y}(t) \in [-1,2]$ sur $]T^- - \varepsilon, T^+[$.

Cela contredit la déf de T^-

(En effet, on aurait $\tilde{f}(\tilde{y}) = f(\tilde{y})$ sur $]T^- - \varepsilon, T^+[$ ce q est faux)

ccl $T^- = -\infty$ et $T^+ = +\infty$ et $y = \tilde{y}$.

VI.2 Th d'explosion

si $F : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, U ouvert de $\mathbb{R}^N$, I intervalle ouvert, $U, I \neq \emptyset$, $F \in C(I \times U)$ & localem^t lipschitzienne p/ sa seconde variable.

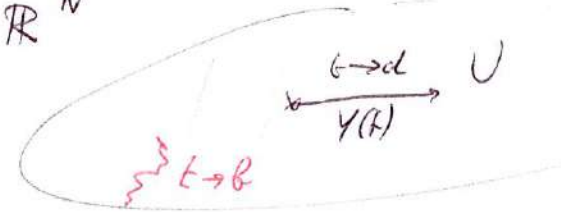
Soit $(t_0, Y_0) \in I \times U$ et (Y, J) la solu° maximale de $\begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

si $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$

alors $d < b \Rightarrow \|Y(t)\| + \dfrac{1}{\delta(Y(t))} \longrightarrow \infty$

où $\delta(Y) = \dfrac{1}{d(Y, \partial U)}$ si $\partial U \neq \emptyset$.

si $U \neq \mathbb{R}^N$



Ici $Y(t) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ f(y) \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ ↑ t

on a $0 \le y \le 1$, ← évalué en 2/3

$z^2 = y'^2 = 4(y^2 - y^3) \in [0, \frac{16}{27}]$ sur I.

D'où $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} \le z \le \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{cases}$ savoir que y et z st bornés..

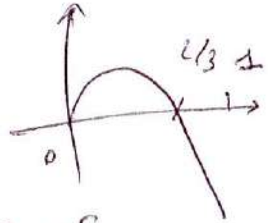
Donc $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ est borné sur I & par (TU) d'explosion $I = \mathbb{R}$.

Résumé y définie sur $\mathbb{R}$, y paire $0 \le y \le 1$

et $y'^2 = 4y^2(1-y)$.

Mq $\forall t > 0$, $y'(t) < 0$, on a $y'(0) = 0$

et $y''(t) = +6y\left(\frac{2}{3} - y\right)$

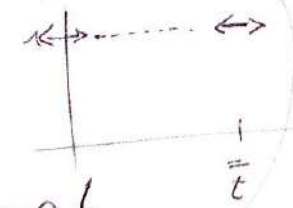


en 0 $y''(0) = -2 < 0$

Donc $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $y' < 0$ sur $]0, \varepsilon[$.

$6y(0)\left(\frac{2}{3} - y(0)\right) = 6\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -2 < 0$

Par (☐), $0 = 4\underbrace{y^2(\bar{t})}_{>0}(1 - y(\bar{t}))$



Donc $y(\bar{t}) = 1$.

(Par unicité : $y(t) = y(t - \bar{t})$

Prenons $\tilde{t} = \min\{\underbrace{\bar{t} \ge \varepsilon,\ y'(\bar{t}) = 0}_{\text{fermé (nv)}}\} \subset [\varepsilon, +\infty[$.

On a $y(\tilde{t}) = y(0) + \int_0^{\tilde{t}} \underbrace{y'(s)}_{<0}\, ds$

$< y(0) = 1$

Par (☐), $y'^2(\tilde{t}) = 0 = 4\underbrace{y^2(\tilde{t})}_{>0}(1 - y(\tilde{t})) \Rightarrow y(\tilde{t}) =$

$\Rightarrow$ Contredit $y(\tilde{t}) < 1$.

et $y' < 0$ sur $]0, \infty[$.

$0 < y \leq 1$.

D'où $y'(t) = -2y(t)\sqrt{1-y(t)}$

$$\frac{y'(t)}{y(t)\sqrt{1-y(t)}} = -2 \quad , \int_0^t \frac{y'}{y\sqrt{1-y}}\, dy$$

$u = y(t)$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{du}{u\sqrt{1-u}} = -2t$$

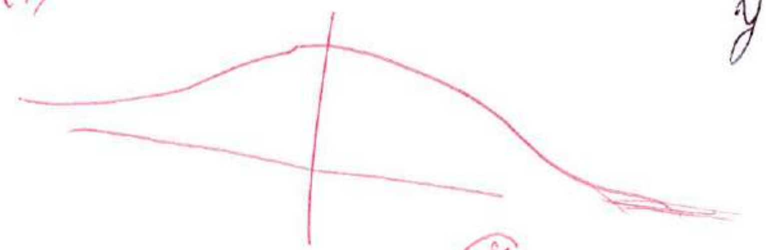
$u \neq 0, u \neq 1$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-u}} = -2\int \frac{1}{1-s^2}\frac{s}{s}\,ds \qquad s = \sqrt{1-u} \iff u = 1-s^2 \qquad ds = -\frac{1}{2}\frac{du}{s}$$

$$= -2\,\mathrm{arcth}(s)$$

D'où $\mathrm{arcth}(\sqrt{1-y(t)}) - \underbrace{\mathrm{arcth}(\sqrt{1-1})}_{=0} = t$.

$y(t) = 1 - \mathrm{th}^2(t)$



23

C^1 sur $\mathbb{R}$ solution de $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ... de classe

L'ensemble des solutions du pb homog est un espace vectoriel de dim 2.

Soit y_1, y_2 une base de solutions. On peut chercher une solution du pb à second membre sous la forme $y(t) = a_1(t)\,y_1(t) + a_2(t)\,y_2(t)$, en supposant que : $a_1'(t)\,y_1(t) + a_2'(t)\,y_2(t) = 0$.

Équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

-1 est racine double, une base de solutions est (y_1, y_2)

à $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = t e^{-t}$

On cherche une solution particulière sur $]-\infty, 0[$ et une sur $]0, \infty[$

On cherche une solution sur $]0, \infty[$ sous la forme

$y(t) = a_1(t)\,e^{-t} + a_2(t)\,t e^{-t}$

à $a_1'(t)\,e^{-t} + a_2'(t)\,t e^{-t} = 0$

Defraiteur
Maxence

Travail à la Maison n°2 :

Bien -

Exercice 14 :

1) $(SD)\begin{cases} x' = x+y+e^t \\ y' = x+y-e^t \end{cases}$

On pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(SD) \iff Y' + A.Y = B(t)$ avec • $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

• $B(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les solutions sont de la forme : $E = \{t \longmapsto \overline{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 \ , Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$.

$E = \overline{Y} + E_h$, $E_h = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2) Résolvons l'équation homogène associé à (SD) : $E_h : Y' + AY = 0$.

On prend $x = ae^t$, $y = be^t$; $x' = ae^t$, $y' = be^t$.

On injecte ces nouvelles expressions dans (SD) :

$$\begin{cases} ae^t - ae^t - be^t = e^t \\ be^t - ae^t - be^t = -e^t \end{cases} \iff \begin{cases} e^t(-b-1) = 0 \\ e^t(a+1) = 0 \end{cases} \underset{\uparrow}{\iff} \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

car $e^t > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

?

On a donc obtenu $\overline{Y} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, la solution particulière.

Puis on cherche la forme de $e^{-tA} Y_0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$e^{-tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \frac{(-tA)^n}{n!} = Id + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-t^n}{n!} A^n \right), \text{ cherchons } A^n :$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

On démontre facilement par récurrence que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} = (-2)^{n-1} A.$$

D'où $e^{-tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-t^n}{n!} (-2)^{n-1} A \right)$. $= e^{-2t} A$.

On a donc bien explicité tous les éléments de E.

<u>Exercice 15 :</u> Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

1) Calculons B^n et C^n, calculons les premières puissances de B et C.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$,

on peut le prouver facilement par récurrence.

Puis pour $C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, par Dunford et en posant $D = Id$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

on a bien les hypothèses vérifiées $DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

$D + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N + D$

D'où $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D\text{ : diagonale}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N\text{ : nilpotente}}$.

On a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Élevons C à la puissance n,

$$C^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \underset{\text{car } N \text{ est nilpotente pour } k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

$$C^n \underset{D^{n-k} \text{ vaut toujours l'identité!}}{=} \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N = I + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que de manière générale : $e^{tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} A^n$.

À partir de B^n et C^n, on peut en déduire les expressions de e^{tB} et e^{tC}.

- $e^{tB} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix} + Id$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1+(-1)^n)+1 & \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1-(-1)^n) \\ \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1-(-1)^n) & \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1+(-1)^n)+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & a+1 \end{pmatrix}$$

Defraiteur
Laurence

Travail à la Maison n°2

Suite exercice 15 :

- $$e^{tB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!}}_{b} + 1 & \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!}}_{a+1} \end{pmatrix}$$

Or $$a = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!} = e^t - 1 - e^{-t} + 1 = e^t - e^{-t}$$

$$b = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!} = e^t - 1 - e^{-t} - 1 = e^t - e^{-t} - 2$$

$$\Rightarrow e^{tB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} + 1 & e^t - e^{-t} - 2 \\ e^t - e^{-t} - 2 & e^t - e^{-t} + 1 \end{pmatrix}.$$

- $$e^{tC} = Id + \begin{pmatrix} \overset{e^t - 1}{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}} & \sum_{k=1}^{n}\frac{nt^n}{n!} \\ 0 & \underset{\to e^t - 1}{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cancel{+1} & te^t \\ 0 & e^t \cancel{+1} \end{pmatrix}$$?

car $$\sum_{n\geq 1}\frac{nt^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{u}\frac{t^{u+1}}{u!} = t\sum_{k=1}^{u}\frac{t^u}{u!} = te^t$$

2) Résoudre le système différentiel
$$(SD) : \begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases},$$

revient à résoudre les deux systèmes différentiels :

$$(SD_1) : \begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (SD_2) : \begin{cases} y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases}.$$

Soit (SD_1) : $\begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$, posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on veut résoudre

$Y' + B'Y = D(t)$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions est $E_1 = \{t \mapsto \overline{Y} + e^{tB} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$.

On n'a pas $e^{-tB'}$ car $B' = -B$ de la question 1).

Cherchons une solution particulière $\overline{Y}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$e^t \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -a & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \end{cases} \iff \overline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $E_1 = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} + 1 & e^t - e^{-t} - 2 \\ e^t - e^{-t} - 2 & e^t - e^{-t} + 1 \end{pmatrix} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

?

Soit (SD_2) $\begin{cases} y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases}$, on peut résoudre d'abord indépendamment $y_4' = y_4 + e^t$ car elle ne dépend que de y_4.

On trouve une solution particulière évidente $y_4(t) = te^t$.

$(te^t)' - te^t = e^t$ car $e^t + te^t - te^t = e^t \iff e^t = e^t$.

En remplaçant $y_4 = te^t$ dans la première équation, on trouve facilement $y_3(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$.

(car $\left(\frac{1}{2} t^2 e^t\right)' - \frac{1}{2} t^2 e^t = te^t$ donne $te^t + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} t^2 e^t = te^t$)

Donc $E_2 = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^t \\ te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+e^t & te^t \\ 0 & 1+e^t \end{pmatrix} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R} \right\}$.

On a $y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}$.

$$y'(t) = a_1(t)(e^{-t})' + a_2(t)(te^{-t})'$$

$$y''(t) = a_1'(t)(e^{-t})' + a_2'(t)(te^{-t})' + a_1(t)(e^{-t})'' + a_2(t)(te^{-t})''$$

On a $y'' + 2y' + y = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)\big[\underbrace{y_i'' + 2y_i' + y_i}_{=0}\big] + a_1'(t)(-e^{-t}) + a_2'(t)(1-t)e^{-t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

D'où (*) $\begin{cases} -a_1' + (1-t)a_2' = \dfrac{e^t}{\sqrt{t}} \\ a_1' + ta_2' = 0 \end{cases}$ $\iff$ $\boxed{a_2' = \dfrac{e^t}{\sqrt{t}}. \quad a_1' = -\sqrt{t}\,e^t.}$

On pose $a_1(t) = -\int_0^t \sqrt{s}\,e^s\,ds$

$a_2(t) = \int_0^t \dfrac{e^s}{\sqrt{s}}\,ds$.

$\boxed{y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}}$ est $C^1([0,\infty[)$.

Vérifions que $y \in C^1([0,\infty[)$,

on a $y \in C([0,\infty[)$. Et $y(0) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Pour $t > 0$, $y'(t) = \cancel{-\sqrt{t}} + e^{-t}\int_0^t \sqrt{s}\,e^s\,ds + \cancel{\sqrt{t}} + (1-t)e^{-t}\int_0^t \dfrac{e^s}{\sqrt{s}}\,ds$

$\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

$y'(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2\sqrt{t}$.

Donc $y \in C^1([0,\infty[)$ et $y'(0) = 0$

mais $\dfrac{y'(t) - y'(0)}{t - 0} \sim \dfrac{2}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \infty$

y n'est pas 2 fois dérivable en 0.

(De même en $]-\infty, 0]$).

Ex 16

$$(SD)\begin{cases}\dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t-1}\\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t-1}\end{cases}$$

1) L'ens des solu$^{\circ}$s forme un espace afine de dimension 2. $E = \{t \mapsto \overline{Y}(t) + e^{tA}Y_0, Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$.

$(SD) \iff \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \frac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$ $(*)$.

où $A = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ ⑤ $\dot{X} = AX + B(t)$

2) On résout l'E_h $\overset{A}{\longleftrightarrow}$ $(*)$, l'ens des solu$^{\circ}$s de E_h est $e^{tA}Y_0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^2$. Calculons e^{tA},

$A = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -6 & -3\end{pmatrix} = -A$, dc pr $n \geq 0$:

on voit le polynôme caract $X^2 + X = 0$ p Cayley-Hamilton

$A^n = -(-1)^n A$

Puis $e^{tA} = Id + \sum_{n\geq 1} \frac{(tA)^n}{n!} = Id + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}A^n$

$= Id - \left[\sum_{n\geq 1} \frac{t^n(-1)^n}{n!}\right]A$

$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - (e^{-t} - 1)\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$

$e^{tA} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4(1-e^{-t}) & -2(1-e^{-t})\\ -6(1-e^{-t}) & 3(1-e^{-t})\end{pmatrix}$

$e^{tA} = \begin{pmatrix}-3+4e^{-t} & -2+2e^{-t}\\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t}\end{pmatrix}$

ainsi l'ens des solu$^{\circ}$s de l'E_h $\overset{A}{\longleftrightarrow}$ est

$S_0 = \left\{\begin{pmatrix}-3+4e^{-t} & -2+2e^{-t}\\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Ensuite on cherche $\overline{Y}$.

Cherchons une solu$^{\circ}$ particulière $Z(t)$ de la forme $e^{tA}W(t)$.

On a : $\dot{Z}(t) = Ae^{tA}W(t) + e^{tA}\dot{W}(t)$.

Donc Z est solu$^{\circ}$ de $(*)$ ssi

$\dot{Z} = AZ + B(t) \iff \cancel{Ae^{tA}W(t)} + e^{tA}\dot{W}(t) = \cancel{Ae^{tA}W(t)} + B(t)$

$\iff e^{tA}\dot{W}(t) = B(t) \iff \dot{W}(t) = e^{-tA}B(t)$ $(*)$

On calcule $e^{-tA} = Id + \sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n A^n}{n!} =$

$= Id - \left[\sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n(-1)^n}{n!}\right]A = Id - (e^t - 1)A$

Ex 16

(SD) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

Nous considérons le (SD) de deg 1 & de dim 2.

$$\dot{Y} = AY + B$$

& $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B(t) = \dfrac{1}{e^t - 1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il s'agit d'un système à coeff. cte & second membre défini et cont sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Nous devons donc considérer les 2 pbs distincts.

$(*_-)$ $\dot{Y} = AY + B$ sur I^-, $(*_+)$ $\dot{Y} = AY + B$ sur I^+

où $I^- =]-\infty, 0[$ et $I^+ =]0, \infty[$.

Les soluts maximales de $(*_-)$ (resp. $(*_+)$) st définies sr I_- (resp I_+) et forment un espace affine de dim 2. On a:

$$E_- = \{ t \longmapsto \overline{Y}_-(t) + e^{tA} Y_{0-} , Y_{0-} \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$E_+ = \{ t \longmapsto \overline{Y}_+(t) + e^{tA} Y_{0+} , Y_{0+} \in \mathbb{R}^2 \}$$

où $\overline{Y}_-$ (resp. $\overline{Y}_+$) est une solut particulière de $(*_-)$ (resp de $(*_+)$)

• Commençons par diagonaliser le système.

On a $\det(\lambda Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -6 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)$

A admet 2 vp distinctes 0 et -1, elle est dc diagonalisable

• $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker A \Leftrightarrow -2y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow \ker A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker(A + Id) \Leftrightarrow -3y_1 - 2y_2 = 0 \Rightarrow \ker(A + Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a dc $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

On calcule $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{\det P} (\operatorname{com} P)^T} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

où $\operatorname{com} A = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Faisons le changement d'inconnue $Y = PZ$, $Z = P^{-1}Y$.

Y solut de $(*)$ sur I

$\Leftrightarrow \dot{Z} = P^{-1}\dot{Y} = P^{-1}AY + P^{-1}B$

$= P^{-1}APZ + P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z + \dfrac{1}{e^t - 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc Y solut de $(*)$ sur I:

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = 0 & \text{sur } I \quad (\alpha) \\ \dot{z}_2 + z_2 = \dfrac{1}{e^t - 1} & \text{sur } I \quad (\beta) \end{cases}$

Les solutS du pb homog sont

$z_1(t) = a$, $z_2(t) = b e^{-t}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

On cherche une solu° particulière de (β) sur $I = I^-$ ou $I = I^+$ sous la forme

$$z_2(t) = b(t)e^{-t}.$$

On a (β) $\Leftrightarrow \dot b(t)e^{-t} - \cancel{b(t)e^{-t}} + \cancel{b(t)e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1}$

$$\dot b(t) = \frac{e^t}{e^t-1} \text{ sur } I.$$

On peut prendre $b(t) = \ln|e^t - 1|$.

En résumé les soluts de (*−) sont

$$t \in I_- \mapsto P\begin{pmatrix} a_- \\ b_- + \ln|e^t-1| \end{pmatrix} \text{ pour } a_-, b_- \in \mathbb{R}.$$

$$= a_-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \left(b_- + \ln(1-e^{-t})\right)\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \text{ p } a_-, b_- \in \mathbb{R}.$$

Les soluts de (*+) sont

$$t \in I_+ \mapsto a_+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \left(b_+ + \ln(e^t-1)\right)\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \text{ p } a_+, b_+ \in \mathbb{R}.$$

NB R: $ch(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $sh(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ex 15 (Δ) $\dot Z = CZ + \begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$, Les soluts du pb homog associé à (Δ) st les fs $t \mapsto c.e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + d e^t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$, $Z_0 = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Cherchons une solut particulière de (Δ) cf $\boxed{MVC}$.

On cherche une solu° ss la forme $Z(t) = e^{tC}W(t)$

Z solu° de (Δ) $\Leftrightarrow e^{tC}\dot W(t) = \begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \dot W(t) = \underbrace{e^{-tC}}_{\begin{pmatrix}e^{-t} & -te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot W(t) = \begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$

Une primitive est $\overline{W}(t) = \begin{pmatrix}-t^2/2\\t\end{pmatrix}$

On a sol° particulière :

$$\overline{Z}(t) = e^{tC}\,\overline{W}(t)$$

$$= -\frac{t^2}{2}e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}t^2/2\\t\end{pmatrix}$$

Dc sol° de (Δ) st

$$t \mapsto e^t\left[\begin{pmatrix}t^2/2\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}dt+c\\d\end{pmatrix}\right] \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^t-1)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t-4 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^t-3 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+4 \end{pmatrix}$$

On a donc (*') $\Leftrightarrow \dot{W}(t) = \dfrac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix} 4e^t-3 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 8e^t-6-6e^t+6 \\ -12e^t+12+9e^t-12 \end{pmatrix}$

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2e^t}{e^t-1} \\[2ex] \dfrac{-3e^t}{e^t-1} \end{pmatrix}.$$

On a une primitive de $\dfrac{-3e^t}{e^t-1}$: $\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$

Et donc dans $e^{tA}W(t) = Z(t)$, on en déduit de $\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$

que $Z(t) = \begin{pmatrix} -3+4e^t & -2+2e^{-t} \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$.

On ed finalement que l'ens des soluts de (*) est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3+4e^{-t} & -2+2e^{-t} \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2\ln|e^t-1| \\ b-3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

E & D soit $f(t)$ f cont & bornée sr $\mathbb{R}$.

Soit (ED) : $\ddot{x} - x = f(t)$. $(*)$

1) Mq cette équa° admet au plus une solu° bornée sr $\mathbb{R}$.

$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(*) \Leftrightarrow \dot{Y} = \begin{pmatrix} y \\ x + f(t) \end{pmatrix} = F(t, Y)$.

$(*)$ ED à coef cte de d°2 & à 2nd mb cont.

$\Rightarrow$ Les solu°s st définies sr $\mathbb{R}$ & forment un espace affine de dim 2.

Notons E_h l'espace des solu°s au pb homog $\ddot{x} - x = 0$.

Son équa° caractéristiq $\chi(r) = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$

χ a 2 racines distinctes -1 et 1 dc $y_-(t) = e^{-t}$, $y_+(t) = e^t$ forme une base de E_h.

• si y et $\tilde{y}$ st 2 solu°s bornées alors $z = y - \tilde{y}$ vérifie $\ddot{z} - z = (\ddot{y} - y) - (\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y}) = f - f = 0$

Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $z(t) = ae^t + be^{-t}$,

Or z est bornée.

Or $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = \text{signe}(a).\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$

Donc $a = 0$, de m $\lim\limits_{t \to -\infty} z(t) = \text{signe}(b).\infty$

$\Rightarrow b = 0$.

→ Cherchons une solu° particulière ss la forme

$y(t) = a_-(t)\, y_-(t) + a_+(t)\, y_+(t)$

& $\dot{a}_-\, y_- + \dot{a}_+\, y_+ = 0$ $(**)$

On calcule :

$\dot{y}(t) = a_-\dot{y}_- + a_+\dot{y}_+ + 0$

$\ddot{y}(t) = \underbrace{a_-\ddot{y}_- + a_+\ddot{y}_+}_{\text{car } y_-,\, y_+ \text{ sol partic}} + \dot{a}_-\dot{y}_- + \dot{a}_+\dot{y}_+$

$(*), (**) \iff \begin{cases} \dot{a}_- y_- + \dot{a}_+ \dot{y}_+ = f \\ \dot{a}_- y_- + \dot{a}_+ y_+ = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -e^{-t}\dot{a}_- + e^{t}\dot{a}_+ = f \\ e^{-t}\dot{a}_- + e^{t}\dot{a}_+ = 0. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dot{a}_+ = \frac{1}{2} e^{-t} f(t) \\ \dot{a}_- = -\frac{1}{2} e^{t} f(t) \end{cases}$ $(\square)$

Posons $a_+(t) = -\frac{1}{2} \int_t^{\infty} \underbrace{e^{-s} f(s)}_{|\cdot| \leq M.e^{-s}} ds$.

car $\frac{a_+(t+h) - a_+(t)}{h} =$

$= \frac{-1}{2h}\left(\int_{t+h}^{\infty} - \int_t^{\infty} e^{-s} f(s)\, ds\right)$

$= \frac{1}{2h} \int_t^{t+h} e^{-s} f(s)\, ds \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2} e^{-t} f(t)$

$a_-(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} e^{s} f(s)\, ds$

$y(t) = a_-(t) e^{-t} + a_+(t) e^{t}$ ainsi définie est solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Vérifions qu'elle est bornée.

Notons $M = \sup_{\mathbb{R}} |f| < \infty$

$|a_+(t) e^{t}| \leq \frac{e^{t}}{2} \int_t^{\infty} M e^{-s} ds = \frac{M}{2}$.

De même $|a_-(t) e^{-t}| \leq \frac{M}{2}$. Donc $\|y\|_\infty \leq M$.

Ex 13 Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f cont, $S^T > 0$.

$y(t) \in C^2(\mathbb{R})$ et $(*)$ $\ddot{y} + q(t)y = 0$

1) Mq ens des soluOs S est ev de dim 2.

On pose $\boxed{z = \dot{y}}$, $y \in C^2$.

$\ddot{y} + q(t)y \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ vérifie $\dot{Y} = F(t, Y)$

avec $F\left(t, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ -q \cdot y \end{pmatrix}$

$\boxed{\Rightarrow}$ si $z = \dot{y}$ et $y \in C^2$ soluO de $(*)$

alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ & $\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -qy \end{pmatrix}$

et y soluO de $(*)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ si $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ & vérifie $\dot{Y} = F(t, Y)$

alors $\dot{y} = z$ et $\dot{z} = -q(t)y$ de $y \in C^2$

et $\ddot{y} = \dot{z} = -q(t)y$ et y est soluO de $(*)$.

On a $\dot{Y} = AY + B$. $\Leftrightarrow$ $\dot{Y} = F(t, Y)$

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(t) & 0 \end{pmatrix}$ coef cont.

système linéaire homog de dim 2 à

Donc l'ens des soluOs est un ev de dim 2

Les soluOs maximales st définies sur $\mathbb{R}$

& forment un ev de dim 2.

$\boxed{M2}$ 1) $\boxed{\Leftarrow}$ soit $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$,

on a $^{(**)}$ $\dot{Y} + A(t)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A(t)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} - z = 0 \\ \dot{z} + q(t)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dot{y} \\ \ddot{y} + q(t)y \end{cases} \Leftrightarrow z = \dot{y} \Rightarrow y \in C^2$ y soluO de $(*)$

$\boxed{\Rightarrow}$ idem

$(**)$ est un (SD) linéaire homog. à coeff cnts sur $\mathbb{R}$ &

de dim 2. $\Rightarrow$ les soluOs max st déf sur $\mathbb{R}$

& forment un ev de dim 2.

Pour $y \in \mathcal{S}$, on note $\mathcal{Z}(y)=\{t : y(t)=0\}$!

2) Mq si t pt d'accumulat° de $Z(y)$ $\Rightarrow$ $\dot{y}(t)=0$.

(D1) t (pa) si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, t_n \in Z(y) : 0<|t-t_n| \leq \frac{1}{n}$.

(D2) t (pa) de $Z(y)$ si $\forall \varepsilon>0$, $(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\setminus \{t\}) \cap \mathcal{Z}(y) \neq \emptyset$.

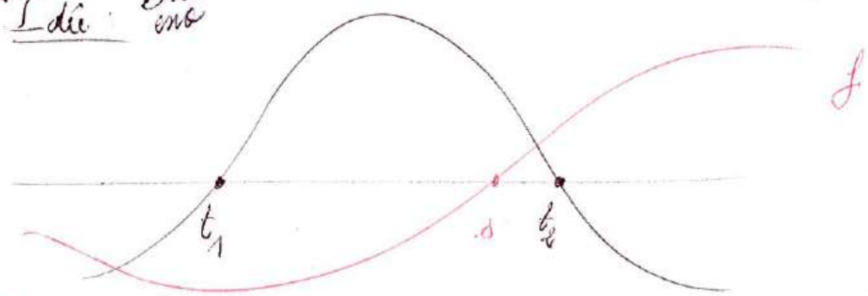
t (pa) de $\mathcal{Z}(y)$ $\Leftrightarrow$ $\exists (t_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{Z}(y)$ tq

$$0<|t-t_n| \leq \frac{1}{n},$$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, (t_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{Z}(y)$ tq $(|t-t_n|)$ est S^T décroissante & $t_n \longrightarrow t$.

~~ep~~ $\forall\, n \geq 1$, $t_{n+1} \neq t_n$.

Idée: But exo



3) Mq si $y \in \mathcal{S}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $Z(y)$ n'a pas de point d'accumulat°.

2) soit $y \in \mathcal{S}$ et t (pa) de $\mathcal{Z}(y)$

▸ mq $t \in Z(y)$.

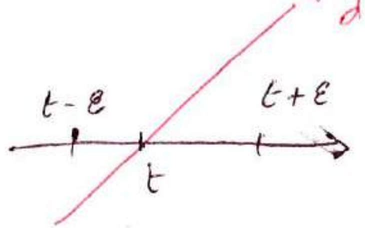
$\boxed{M1}$ $Z(y) = y^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$ fermé car y cont sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{M2}$ soit $t_n \to t$ & $y(t_n)=0$ par continuité de y, on a $y(t)=0$, dc $t \in Z(y)$.

▸▸ mq $\dot{y}(t) = 0$

$\boxed{M1}$ Spps p contradic° que $\dot{y}(t) \neq 0$, par continuité de $\dot{y}$, $\exists\ \varepsilon>0$ & $\sigma \in \{-1,1\}$, $\sigma\dot{y}>0$ sur $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$. Donc σy est $S^T \nearrow$ sur $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$.
Comme $\sigma y(t) = 0$, on a : $\sigma y < 0$ pr $s \in]t-\varepsilon, t[$

$\sigma y > 0$ pr $s \in]t, t+\varepsilon[$



Contredit le fait que t (pa) de $\mathcal{Z}(y)$.

M2 Par DL pr $s \neq 0$,

$$\underset{\text{car } t_m \in Z(y)}{0} = y(t_m) = y(t + (t_m - t))$$

$$= y(t) + y'(t)(t_m - t) + o(t_m - t)$$

Donc $y'(t) = \dfrac{-o(t_m - t)}{t_m - t} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow y'(t) = 0$.

M3 soit $(t_m)_{m \geq 1} \subset Z(y)$ & $t_m \to t$

& $\forall m \geq 1$, $t_{m+1} \neq t_m$.

Dans l'intervalle $I_m =]t_m, t_{m+1}[$ ou $]t_{m+1}, t_m[$,

on a $y(t_m) = y(t_{m+1})$ $(= 0)$.

Comme $y \in C(\tilde{I}_m)$ & y est dérivable sur I_m,

B Th de Rolle : $\exists\, s_m \in I_m$ tq $y'(s_m) = 0$.

$t_m \to t \Rightarrow s_m \to t$. Par continuité de y', on a

$y'(s_m) = 0 \Rightarrow y'(t) = 0$.

3) ed $Z(y)$ ne contient pas de pt d'accumulaO

soit $e(t)$, $f(t)$ une base de S

Soit $w(t) = \dot{e}(t) f(t) - \dot{f}(t) e(t)$.

soit $y \in S \setminus \{0\}$, mq les points de $Z(y)$ st isolés. (i.e. $Z(y)$ n'a pas de pt d'accumulaO)

RQ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est soluO sur $\mathbb{R}$ de (PC) $\begin{cases} \dot{Y}(t) + A(t)\,Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\leadsto$ le Th de Cauchy-Lipschitz s'appliq au (PC)

$\Leftrightarrow \dot{Y} = F(t, y)$ où $F(t, Y) = -A(t)\,Y$

mat A cont & loclt lipschitzien $\not\approx$ y.

(△) Ccl $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'uniq soluO de (PC)

soit $y \in S$, soit t_0 un pt de $Z(y)$.

Par la 2), on a $\begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D+, $Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ est soluO de $\dot{Y} + A(t)\,Y = 0$.

Donc (81) P (△) $\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y \equiv 0$

soit $e(t)$, $f(t)$ une base de S, volume, dét

soit $w(t) = \dot{e}(t) f(t) - \dot{f}(t) e(t)$ &

soit $t_1 \in Z(e)$, si $Z(e) \cap]t_1, \infty[\neq \emptyset$

& $t_2 = \min\left[Z(e) \cap]t_1, \infty[\right]$

4) Dmq $w(t) = C =$ cte

$$w(t) = \dot{e}(t) f(t) - \dot{f}(t) e(t) = \det\begin{pmatrix} f(t) & e(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{e}(t) \end{pmatrix}$$

$e, f \in S$ de e & f est de classe C^2.

Donc w est dérivable.

$$\dot{w}(t) = \dot{e}(t)\dot{f}(t) - \dot{e}(t)\dot{f}(t) + \underbrace{\ddot{e}(t)}_{-q(t)e(t)} f(t) - e(t) \overbrace{\ddot{f}(t)}^{-q(t)f(t)}$$

D'où $\dot{w}(t) = -q(t)\left(e(t)f(t) - e(t)f(t)\right) = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $w(t) = w(0)$

5) Dmq cette cte ne pt pas ê nulle.

Soit $t_1 < t_2$ 2 élts consécutifs ds $Z(e)$

ie $Z(e) \cap]t_1, t_2[= \emptyset$

Mq $w(0) \neq 0$, si $w(0) = 0$ alors

$\det\begin{pmatrix} f(0) & e(0) \\ \dot{f}(0) & \dot{e}(0) \end{pmatrix} = 0$, dc $\exists\ \lambda, \mu$ tq $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

tq $\lambda \begin{pmatrix} e(0) \\ \dot{e}(0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\square)$

Posons $Y(t) = \lambda \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix}$

Y est solu° de $(**)$ & par $(\square)$, on a

$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par (Δ), on a $Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall t$.

ep $\lambda e + \mu f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, cela contredit

le fait que (e, f) est une base de S.

Ccl : $w(0) \neq 0$.

6) Dmq $w(t_1) w(t_2) > 0$

$$\underbrace{w(t_1)w(t_2)}_{= w(0)^2} > 0 \text{ car } w \text{ constant.}$$

7) cd qu'entre t_1 & t_2, $\exists$ un & un seul zéro de f.

car $]s_1, s_2[\cap Z(e) \subset]t_1,t_2[\cap Z(e) = \emptyset$.

$$0 < w(t_1) w(t_2) = \dot{e}(t_1)\dot{e}(t_2) f(t_1) f(t_2) \quad (\diamond)$$

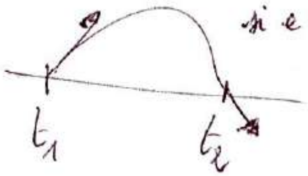
Première cd° : $t_1, t_2 \notin Z(f)$

2nde conséquence : $\dot{e}(t_1) \neq 0$ et $\dot{e}(t_2) \neq 0$.

Or e est de signe constant sur $]t_1, t_2[$,

si $e > 0$ sur $]t_1, t_2[$ alors $\dot{e}(t_1) > 0$, $\dot{e}(t_2) < 0$

si $e < 0$ sur $]t_1, t_2[\Rightarrow \dot{e}(t_1) < 0$, $\dot{e}(t_2) > 0$



Ds les 2 cas $\dot{e}(t_1)\dot{e}(t_2) < 0$.

Par $(\diamond)$, on a alors $f(t_1) f(t_2) < 0$; p Th des TVI (f est cont), $\exists s \in]t_1, t_2[\cap Z(f)$

Pour finir, supps p contradic° qu' $\exists s_1, s_2 \in Z(f)$ tq $t_1 < s_1 < s_2 < t_2$.

→ en échangeant les rôles de e & f, on voit qu' $\exists$ $t \in]s_1, s_2[\cap Z(e)$ mais c'est faux

Fiche 2

Ex 1

S I R

seins / infectés / removed

(1) $\frac{dS}{dt} = -r\, I S$, (2) $\frac{dI}{dt} = r I S - a I$
$= a(\underbrace{\frac{r}{a} S}_{r_0} - 1)\ I = (rS - a) I$

(3) $\frac{dR}{dt} = a I$

si on améliore : $I(t) \longrightarrow I(t,s)$ ← tps depuis l'infect°.

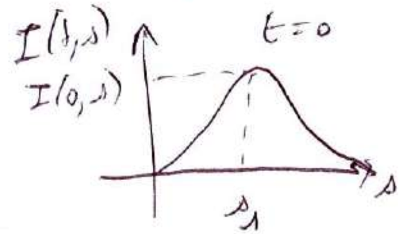
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\left[\int r(s)\, I(t,s)\, ds\right] S(t)$$

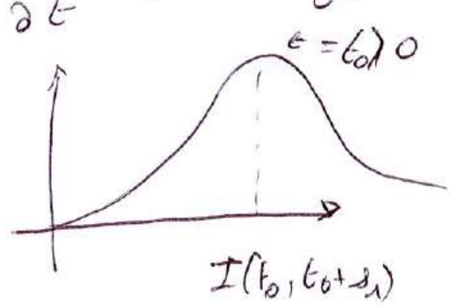
$$\frac{\partial I(t,s)}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial s} + \delta_{t=0} - a(s) I(t,s)$$

$S(t)$

$I(t, t+s) = cte$ & $\frac{dR}{dt}(t) = \int a(s)\, I(t,s)\, dt$

$$0 = \frac{d}{dt}\left[I(t, t+s)\right] = \frac{\partial I}{\partial t}(t, t+s) + \frac{\partial I}{\partial s}(t, t+s)$$





P1) 1) Établir que l'on est bien ds le cadre du (Th) de (CL).

On pose $Y = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}$. Le système se réécrit ss la forme

$\dot{Y} = F(Y)$ où $F(Y) = \begin{pmatrix} -r Y_2 Y_1 \\ (rY_1 - a) Y_2 \\ a Y_2 \end{pmatrix} = Y_2 \begin{pmatrix} -r Y_1 \\ rY_1 - a \\ a \end{pmatrix}$

$F \in C^\infty$ ← car polynôme

de localt lipschizienne mais

$\frac{\partial F}{\partial Y_2} = \begin{pmatrix} -r Y_1 \\ r Y_1 - a \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas borné. (!)

Donc F n'est pas globalt lipschit.

& (Th) de Cauchy Lipschitz local s'appliq.

On va considérer une sol° max déf sr $]T^-, T^+[$

où $-\infty \leq T^- < 0 < T^+ \leq \infty$.

2) Dmq $S + I + R = cte = N$

On a $\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$ dc $S + I + R = cte = N$

3) Dmq si $I(0)>0$, $R(0)\geq 0$ & $S(0)>0$ alors les 3 qtés restent positives $\forall t\in]0,T^+[$ $S(t), I(t), R(t)$

si $\exists\, t\in]0,T^+[$ tq $I(t)\leq 0$ alors $\exists\, t^*\in]0,T^+[$ tq $I(t^*)$.

$Y=(S,I,R)$ est soluO du (PC) :

$$(PC_1)\begin{cases} \dot{Y}=F(Y) \\ Y(t^*)=\begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*)\end{pmatrix}\end{cases}$$

Or $\tilde{Y}(t)=\begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*)\end{pmatrix}$ est soluO de (PC_1) sur $\mathbb{R}$.

$\left(\text{car } F\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

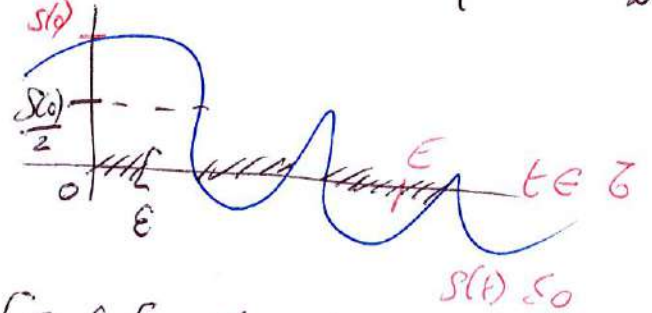
Par unicité, on a $Y=\tilde{Y}$. Ep $\tilde{Y}(0)=\begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S(0) \\ I(0) \\ R(0)\end{pmatrix}=Y(0)$

Contredit $I(0)>0$. Donc $\forall t\in [0,T^+[$, $I(t)>0$.

Par (3), on déduit $R(t)>0$ sur $]0,T^+[$

~~Soit $J\subset [0,T^*[$ l'intervalle maximal contenant 0 tq $S\geq 0$ sur J~~

Suppo p contradicO, qu'$\exists\, t\in]0,T^+[$ tq $S(t)\leq 0$. Posons $E=\{t\in]0,T^*[: S(t)\leq 0\}$ et $t^*=\inf E$. Donc $E\neq\emptyset$ par hypo, et $\hat{c}$ $\boxed{S(0)>0}$ & S est cont. $\exists\,\varepsilon>0$ tq $S\geq\frac{S(0)}{2}>0$ sur $[0,\varepsilon[$.



D'où $E\cap[0,\varepsilon[=\emptyset$ & $t^*\geq\varepsilon>0$.

Sur $[0,t^*[$, $S(t)>0$ car $E\cap[0,t^*[=\emptyset$

$\forall\,\eta>0$, $\exists\, s\in E\cap[t^*,t^*+\eta[$.

Donc $S(s)\leq 0$.

En faisant $\eta\longrightarrow 0$, on a $S(t^*)\leq 0$.

Par continuité de S :

$S(t^*)\leq 0$ et $S>0$ sur $[0,t^*[\Rightarrow S(t^*)=0$

Sur $[0,t^*[$; on a $S, I, R \geq 0$

et $S+I+R=N$

Donc $0 \leq I \leq N$ sur $[0,t^*[$

Pour $t \in [0,t^*[$,

$$\dot{S} = -xIS \Rightarrow \dot{S} \geq -xNS.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{xNt}S(t)\right] = e^{xNt}\left[xNS+\dot{S}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } t \in [0,t^*] \\ e^{xNt}S(t) \geq S(0) \end{cases} \Rightarrow S(t) \geq e^{-xNt}S(0)$$

$\Rightarrow S(t^*)>0$ $\boxed{c?!c!}$

Kq impose Ppe d'exploo $\Rightarrow$ sol° globale

par (3) si $R(0) \geq 0$, $S(0)>0$, $I(0)>0$ alors

$R, S, I > 0$ sur $]0,T^+[$ (tps max d'$\exists$)

par (2) $S+I+R=N$

dc $S = N - \underbrace{(I+R)}_{\geq 0} \leq N$

De m̂ $I \leq N$, $R \leq N$ sur $]0,T^+[$

Donc sur $[0,T_+[$, $0 \leq S, I, R \leq N$.

Par principe d'explosion : $T_+ = +\infty$.

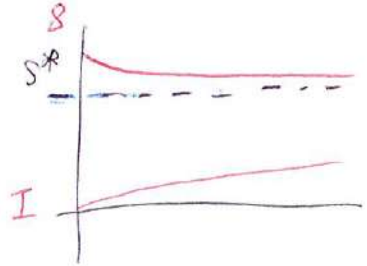
4) $$\begin{cases} \dot{S} = -xSI = (-xI)S \\ \dot{I} = xSI - aI = (xS-a)I \\ \dot{R} = aI \end{cases} \qquad a, x>0$$

On suppose $S(0)>0$; $R(0)=0$, $I(0)>0$.

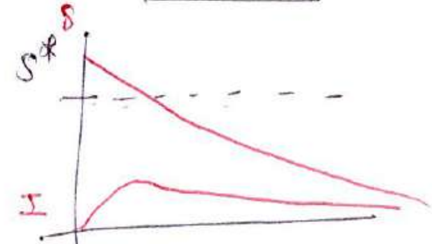
$xS(0)-a>0 \iff S(0) > \frac{a}{x} = S^*$

4) Dmq nbr de malades $\nearrow$ puis décroit après un pic.

Scénario 1



Scénario 2



⊙ Spps $\forall t \geq 0$ $S(t) \geq S^* \Rightarrow \forall t \geq 0$, $xS(t)-a \geq 0$ dc $\dot{I} \geq 0$ dc $\forall t$ $I(t) \geq I(0) > 0$

Revenons à $\dot{S} = -(xI)S$, on a $\forall t \geq 0$;

$\dot{S} \leq -[xI(0)]S \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\exp(xI(0)t)S\right] =$

$= e^{xI(0)t}\left[\dot{S} + xI(0)S\right] \leq 0$

$\to \exists \; \exp(r I(0) t)\, S \leq S(0)$

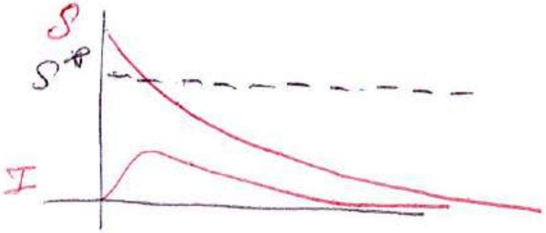
$\to \exists \; S(t) \leq S(0)\, e^{-r I(0) t}$

Pour t assez grand, on a $S(t) < S^*$.

D'où $\exists\, t_*$ tq $S^*(t) = S^*$ $\boxed{c?!c}$ et $S(t) > S^*$ pr $t < t^*$.

Or S S^T $\searrow$

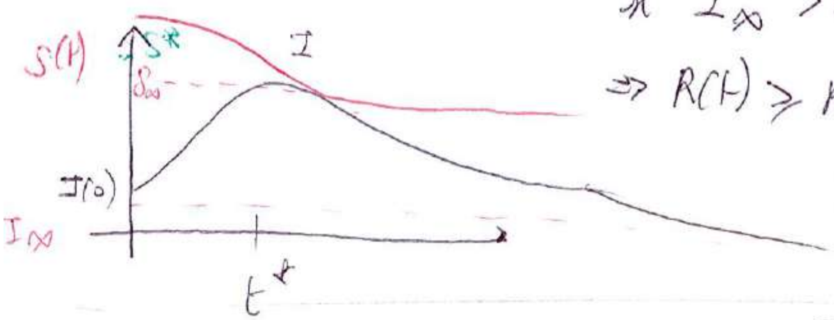
dc $S(t) < S^*$ $\forall\, t > t^*$.



On a $\dot{I} = r(S - S^*) I$ dc $I \nearrow$ sur $[0, t^*]$

et $I \searrow$ sur $[t^*, \infty[$.

RQ taux Immunité collective $= \dfrac{S^*}{N}$.



si $I_\infty > 0$, $\dot{R} = a I$

$\Rightarrow R(t) \geq R(t_*) + a I_\infty (t - t^*)$

$\forall\, t \geq t^* \longrightarrow \infty$

$\dot{Y} = F(Y) = \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}$

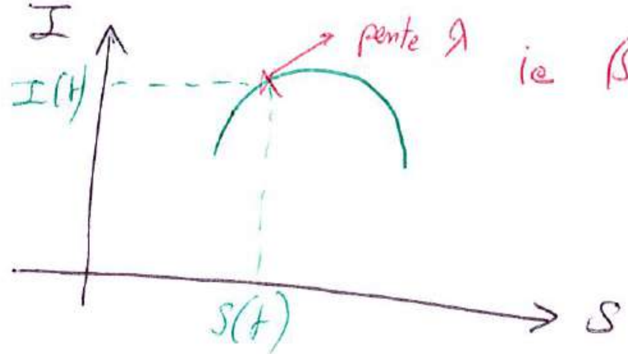
ici $F_1(S, I) = -r S I$
$F_2(S, I) = (rS - a) I$

Seconde Partie

Dans $\mathbb{R}^2$, $I(0) > 0$, $S(0) > 0$,

$\dot{S} = -rSI$, $\dot{I} = rSI - aI$

5) Déterminer les isoclines du système.



ie $(S(t), I(t)) \in J_\lambda$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} J_\lambda &= \left\{ (S,I) : F_1(S,I) \neq 0, \frac{F_2(S,I)}{F_1(S,I)} = \lambda \right\} \\ J_\infty &= \left\{ (S,I) : F_1(S,I) = 0 \right\} \end{aligned}}$$

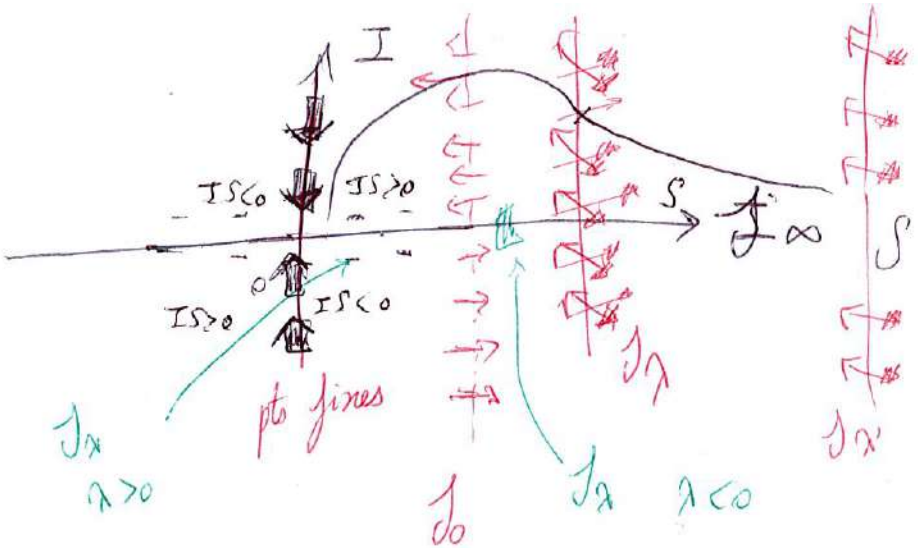
$J_\infty = \{(S,I) : S = 0 \text{ ou } I = 0\}$

$J_\lambda = \left\{(S,I) : S \neq 0,\ I \neq 0,\ \dfrac{rS - a}{rS} = -\lambda \right\}$

$1 - \dfrac{a}{rS} = -\lambda \iff 1 + \lambda = \dfrac{a}{rS}$

$\iff rS = \dfrac{a}{1+\lambda} \iff S = \dfrac{a}{r(1+\lambda)}$

$\to J_{-1} = \emptyset$



6) Tous les pts fixes du type $\begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = Y_0$.

Nature des pts fixes ?

$$Y = Y_0 + Z$$

$$\dot Y = \dot Z = F(Y_0+Z) = F(Y_0) + DF(Y_0)\,Z + o(\|Z\|^2)$$

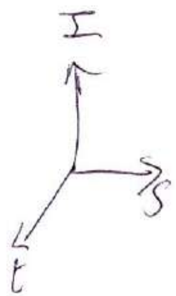
$$\Rightarrow \dot Z \simeq DF(Y_0)\,Z \quad (SL).$$

La nature du (PF) est la nature du (SL) linéarisé.

→ Regarder $S_\lambda = \dfrac{a}{x(1+\lambda)}$, $\quad \dot Y = \begin{pmatrix} F_1(S,I) \\ F_2(S,I) \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} -xS \\ xS-a \end{pmatrix}$

$$Z = \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix}$$

$$F(Y_0+Z) = F\begin{pmatrix} S+s \\ 0+i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -xS-xs \\ xS-a+xs \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -xS \\ xS-a \end{pmatrix} + O(si)$$



où est $\mathcal{J}_\lambda$ en f λ.

$s(0)$

sx ?

À l'ordre 1,

$$\dot Z = \begin{pmatrix} \dot s \\ \dot i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -xS \\ xS-a \end{pmatrix}$$

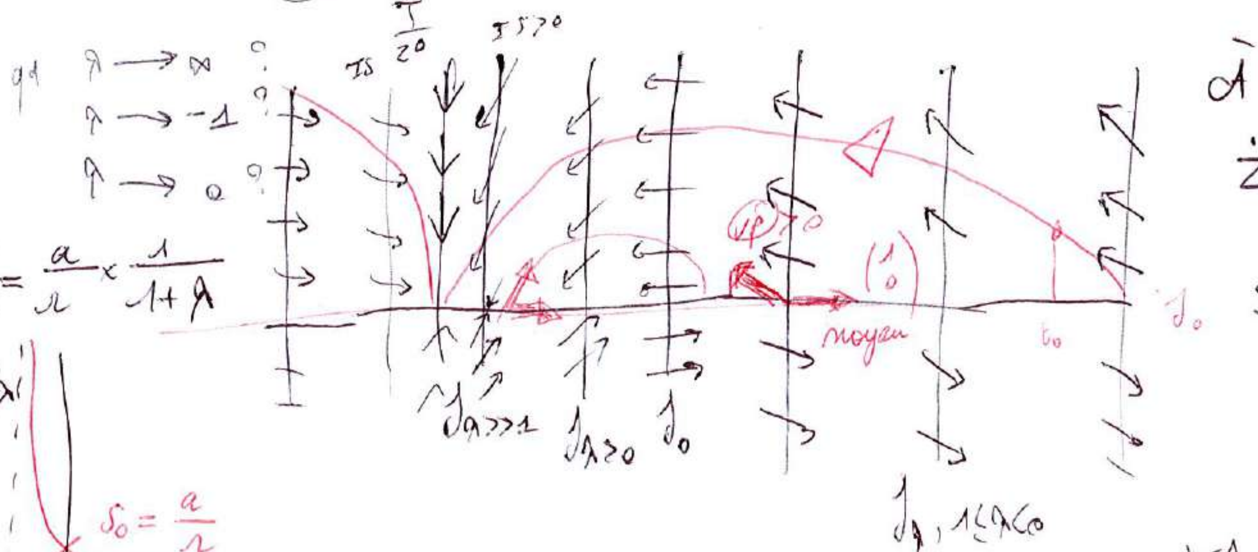
$$DF(Y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -xS \\ 0 & xS-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial S} & \dfrac{\partial F_1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial S} & \dfrac{\partial F_2}{\partial I} \end{pmatrix}$$

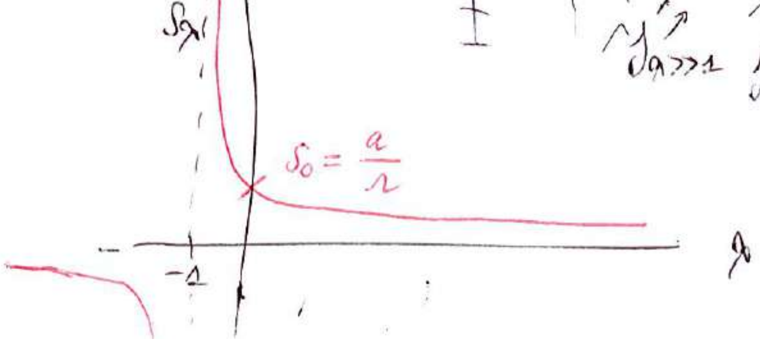
qd $\lambda \to \infty$

$\lambda \to -1$

$\lambda \to 0$

$$S_\lambda = \frac{a}{x} \times \frac{1}{1+\lambda}$$





à l'∞, la pente vaut -1

$DF(Y_0)$ admet pr noyau $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}-xS = (xS-a)\times\dfrac{(-xS)}{(xS-a)}\\ (xS-a)\times 1\end{matrix}$$

Un $\vec{vp}$ $\begin{pmatrix}\frac{-xS}{xS-a}\\1\end{pmatrix}$ $\leftrightarrow$ à $\textcircled{vp}$ $(xS-a)$.

$DF(Y_0)$ est diagonalisable de $\textcircled{vp}$ 0, $\vec{vp}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$(xS-a)$, $\vec{vp}\begin{pmatrix}\frac{-xS}{xS-a}\\1\end{pmatrix}$

accélération Force

$$\ddot{y} + \sin y = 0 \qquad (*)$$

1) (CL) est-il applicable ?

2) Déterminer f F tq si y soluθ de $(*)$ alors

$$F(y) + \frac{\dot{y}^2}{2} = cte$$

E_p $\qquad$ E_c

Sep, Sec

1) On pose $Y = \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\\dot{y}\end{pmatrix}$ où $F(Y) = \begin{pmatrix}z\\-\sin y\end{pmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow \dot{Y} = F(Y) \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\dot{y} = z\\ \dot{z} = -\sin y.\end{cases}$

$(**)$ $(S\overset{E}{D}O_I)$ de dim 2. (n'est pas linéaire $\underline{\Delta}$ sinus)

Autonome. De plus F est C^1 et

$$DF(Y) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos(y) & 0\end{pmatrix}$$

tous les coeffs st bornés.

DF est borné sr $\mathbb{R}^2$ de F et globalement lipschitzienne

ie $\forall\, Y_0 " \begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\exists!\, Y \in C^1(\mathbb{R})$ soluθ du pb de Cauchy

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{y} + \sin(y) = 0\\ y(0) = y_0 \text{ et } \dot{y}(0) = z_0.\end{cases}$$

De plus, si $\tilde{Y}$ autre soluθ déf sr un intervalle $I \ni 0$

$\dot{\tilde{Y}} = F(\tilde{Y})$ sur I

$\tilde{Y}(0) = Y_0$ $\qquad$ alors $\tilde{Y} = Y|_I$

sol locale $\tilde{Y} \subset Y$.

2) $\ddot{y} + \sin(y) = 0$ (⊛).

soit y une solu° de (⊛) sur $\mathbb{R}$,
on multiplie (⊛⊛) par $\dot{y}$, on a

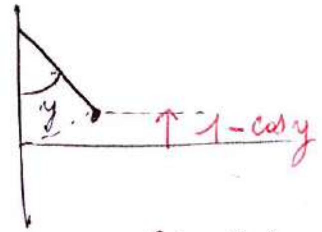
$$\ddot{y}\,\dot{y} + \underbrace{(\sin y)}_{f(y) = F'(y)}\dot{y} = 0$$

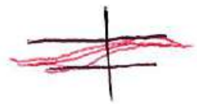
On pt prendre $F(y) = 1 - \cos y$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left[F(y)\right] = 0$$

ça fait 0 au pt équilibre stable.

d'où $\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}}{2} + F(y)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{2} + F(y) = cte$





NB TRAJECT^{Rs} Syst Autonome ne se croisent pas

Soit $g \in C(\mathbb{R}), g$

(⊛) $\dot{y} = g(y)$ $\sin(y) = f(y)$ $y(0) = y_0$.

1) CL ?

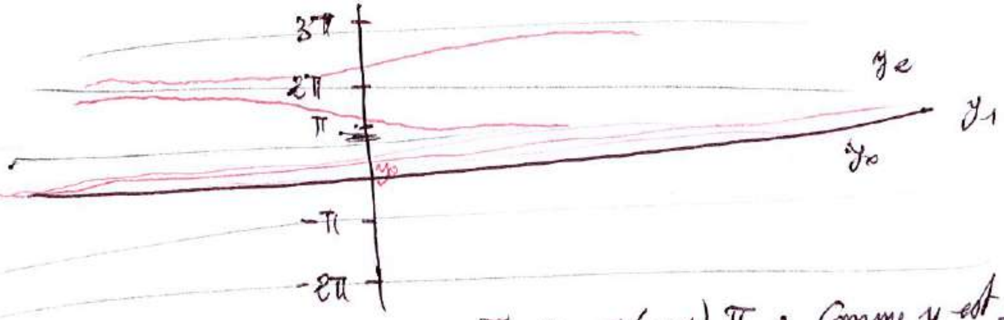
2) Solu°s stationn^{Rs}

3) Monotonie, tps d'∃, limites en $\pm\infty$?

solu°s ↗,↘ ? Mq ∃ sur $\mathbb{R}$.

1) Th CL local s'applique
$\exists!\ y \in [-T_{min}, T_{max}]$

2) $\dot{y} = 0 \iff y(t) = c \ \forall t$ et $f(c) = 0$
$\iff y(t) = c$ et $\sin c = 0$
$c = \pi\mathbb{Z}$



En prenant $n \in \mathbb{Z}$ tq $n\pi < y_0 < (n+1)\pi$. Comme y est cont sur I, on a $n\pi < y(t) < (n+1)\pi$ $\forall t \in I$.
Dc y est bornée sur I, par ppe d'explos°, on a $I = \mathbb{R}$.

- si $y_0 \in \pi\mathbb{Z}$, $y_0 = n\pi$, la solu° de (PC) est y_n.
$\{y_n(t) = n\pi, \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$
- si $y_0 \notin \pi\mathbb{Z}$; (y, I) la sol° max de (PC) alors $\forall t \in I$, $y(t) \notin \pi\mathbb{Z}$ sinon y est cte & $y(0) = y_0 \in \pi\mathbb{Z}$ ce qui est faux

Supp $0 < y_0 < \pi$, on a $\forall t$:

$0 < y(t) < \pi$ de $\sin(y(t)) > 0$,

d'où par $(*)$, $\dot{y} > 0 \quad \forall t$

De plus $n\pi < y < (n+1)\pi$.

Donc $\exists \; 0 \leq \ell^- < y_0 < \ell^+ \leq \pi$:

où $\ell^\pm = \lim_{t \to \pm\infty} y(t)$

Donc $\dot{y}(t) = f(y(t)) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} f(\ell^\pm)$

par continuité de f.

Dc $f(\ell^-) = f(\ell^+) = 0$.

$\Rightarrow \ell^-, \ell^+ \in \pi\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \ell^- = 0$ et $\ell^+ = \pi$

Supp $g(y) = 1$, puis $0 < y_0 < \pi \Rightarrow 0 < y(t) < \pi$

$$\dot{y} = \sin y \iff \frac{\dot{y}}{\sin y} = 1$$

$$\iff \int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{\sin y(s)} \, ds = t \qquad \left(\begin{array}{l} x = y(s) \\ dx = \dot{y}(s) ds \end{array} \right)$$

$$\iff \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{\sin x} = t$$

Posons $\boxed{\tau = \tan \frac{x}{2}}$

$$d\tau = \frac{1}{2}(1 + \tau^2) \, dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+\tau^2} \, d\tau$$

$$\sin x = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$$

$$\iff \int_{\tan(\frac{y_0}{2})}^{\tan(\frac{y(t)}{2})} \frac{d\tau}{\tau} = t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)} \right) = t.$$

$$y(t) = 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^t \right)$$

NB Sol^ns autonomes et MONOTONES.

Énoncé bonus : $a = (a_{n-1} \dots a_0) \in \mathbb{R}^n$.

E_a espace des soluOs de

$P_a(D)(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

$P_a(r) = 0$, si r réel racine d'ordre k

$e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{k-1} e^{rt}$ famille libre de sol$^{\circ}$

si $r = a + ib$, $b \neq 0$ racine d'ordre k

alors $\bar{r}$ est aussi racine d'ordre k.

$e^{at}\cos(bt), e^{at}\sin(bt), te^{at}\cos(bt), te^{at}\sin(bt),$

$\dots, t^{k-1}e^{at}\cos(bt), t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$.

base de E_a, $\dim E_a = n$.

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y(t) = P_a(r) e^{rt}$

$= t P_a(r) e^{rt}$
$+ t P'_a(r) e^{rt}$

E_a est invariant par translat$^{\circ}$:

si $y \in E_a$ & $t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \tau_{t_0} y(t) \mapsto y(t+t_0) \in E_a$

$(\tau_{t_0} y)'(t) = (\tau_{t_0} y')(t)$

$P_a(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

$P_a(D)(\tau_{t_0} y) = \tau_{t_0} [\underbrace{P_a(D) y}_{=0}] = 0$

Mq si $E \subset C^1(\mathbb{R})$ tq $\forall f \in E, f' \in E$, & de dim finie n alors $\exists a \in \mathbb{R}^n$ tq

$E = E_a$.

Par récurrence $\forall f \in E$, $f^{(k)} \in E$, $\forall k \geq 0$

de $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}$+, $D : E \to E$, $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E d' Endom(E).

Par Th Cayley-Hamilton,

$\chi_D(D) = 0$ où $\chi_D(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + \dots$

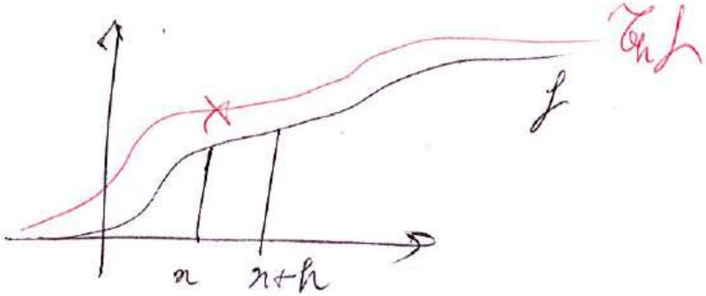
$\Rightarrow \chi_D(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 Id = 0$

$\Rightarrow \forall f \in E$, $f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = 0$

$\Rightarrow f \in E_a$ de $E \subset E_a$. or $\dim E = \dim E_a = n$ de $E = E_a$

42

Puis $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\tau_h f - f\right](x)$



si $f \in C^1$ et $h \geq 0$, $\frac{1}{h}\left[\tau_h f - f\right] \longrightarrow f'$

$$\frac{1}{h}\left(e^{h+t} - e^{t}\right) = \frac{e^h-1}{h} \times e^t \longrightarrow e^t.$$

$G \subset C(\mathbb{R})$ de dim finie, $\|\cdot\|_G$ norme sur G.

$\forall k : R_k : G \longrightarrow C([-2^k, 2^k])$, $g \longmapsto g|_{[-2^k,2^k]}$

R_k linéaire & et dim $G < \infty$, $\exists\, C_k > 0$ tq

$\max_{[-2^k,2^k]} |g| = \|R_k g\|_{L^\infty([-2^k,2^k])}$

$C_k = \max(1, |||R_k|||)$

$C_k > 0$, $C_k \nearrow$ de k.

Pour $g \in G$,

$$\|g\|_* := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k C_{k+1}} \underbrace{\|g\|_{L^\infty([-2^k,2^k])}}_{\|R_k f\|_\infty}$$

• $\forall g \in G$, $\|g\|_* \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} \frac{1}{C_{k+1}} \times C_k \|f\|_G$

$$\leq \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}\right) \|g\|_G$$

• $\forall g, h \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda g\|_* = |\lambda|\, \|g\|_*$

$\|g+h\|_* \leq \|g\|_* + \|h\|_*$

si $\|g\|_* = 0$ alors $\forall k$:

$\|g\|_{L^\infty([-2^k,2^k])} = 0$

$\Rightarrow g = 0$ sur $[-2^k, 2^k]$ $\forall k$

$\Rightarrow g \equiv 0$.

Donc $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_\infty)$ est evn.

soit $E \subset C^1(\mathbb{R})$ de dim finie convient par translatO f dans $\forall f \in E, f' \in E$

($\Rightarrow E = E_a$).

Posons $F = \{f' : f \in E\}$, dim $F \le$ dim E

et $G = E + F$, dim $G \le 2$ dim E.

Sur G, on considère $\|\cdot\|_*$

soit $f \in E$, $\in C^1$, soit $k \geq 0$ et $h > 0$; $|h| \le 1$.

$$D_h f(x) = \frac{\tau_h f - f}{h}(x) = \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] = \frac{1}{h}\int_0^{+h} f'(x+s)\, ds$$

$$= \int_0^1 f'(x+sh)\, ds \quad (*)$$

$D_h f \in E$ car e.v. & translatO.

$\|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}$

$$\forall x,\ D_h f(x) - f'(x) = \int_0^1 \underbrace{\left[f'(x+sh) - f'(x)\right]}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} ds$$

Par continuité de f', tend U.N sur $[-2^k, 2^k]$.

Par ailleurs $\|D_h f(x) - f'(x)\|_{L^\infty[-2^k, 2^k]}$

$\le 2\|f'\|_{L^\infty([-2^{k+1}, 2^{k+1}])}$

$$\|D_h f - f'\|_* = \underbrace{\sum_{k \le k_0} \frac{1}{2^k} c_{k+1} \|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}}_{k_0 \text{ fixé } \to 0 \text{ par } (*)}$$

$$+ \sum_{k > k_0} \frac{1}{2^k} c_{k+1} \underbrace{\|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}}_{\le 2\|R_{k+1} f'\| \le 2c_{k+1}\|f'\|}$$

$$\le \frac{2}{2^{k_0}} \|f'\|_G < \varepsilon \text{ pr } k_0 \text{ assez gd}$$

Donc $\|D_h f - f'\|_* < 2\varepsilon$ pr $h > 0$ assez petit.

On a $D_h f \in E \longrightarrow f'$ ds G mais de dim finie dc fermé dc $f' \in E$

---

si $E \subset C^0(\mathbb{R})$, $\tilde{E} := \{$primitive d'elt de $E\} = \{x \mapsto \int_0^x f(s)\, ds,\ f \in E\}$

$\lambda, f \longmapsto F_\lambda f$

$\tilde{E}$ @ dim finie invariant p translatO

$E = \tilde{E}' \subset \tilde{E} \subset C^1$

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin t$

$z = \dot{x}$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exists!$ sol°

$I = \mathbb{R}$

$\ddot{x} = -4\dot{x} - 4x$

$\dot{x} = \dot{x}$

$a\cos t + b\sin t$?

$\dot{X} = AF(X) + B(t)$

$e^{tA} Y_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad e^{tA}\begin{pmatrix} z_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$\forall \; X_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \; \exists! \; X \in C^1(\mathbb{R})$ solu° (PC)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin x \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = z_0 \end{cases}$$

$Y' = AY + B(t)$

$\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA} Z(t)\right) = A e^{tA} Z(t) + B(t)$

$x^2 + 4x + 4 = 0 : \quad (x+2)^2 \quad \to -2$

$\{ e^{-2t}, t e^{-2t} \}$

ok : $\boxed{e^{tA} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{pmatrix}}$

$y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} l \Rightarrow l = 0$

$\dot{y}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} L$

$\dot{y} = f(y) \to f(l)$

$(A + 2Id)^2 = 0 \Rightarrow D = -2Id$

$N = A + 2Id$

$\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA} Z(t)\right) = A e^{tA} Z(t) + e^{tA} \dot{Z}(t)$

$e^{tA} \dot{Z}(t) = B(t)$

$\dot{Z}(t) = e^{-tA} B(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+2t) & 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ -t\sin t \, e^{2t} \end{pmatrix}$$

$a(t) = -\mathrm{Im}\int_0^t e^{2s+is}\,ds = e^{2t}\left(\left(\frac{3}{25} - t\right)\sin t - \frac{4}{25}\cos t\right) + c$

$b(t) = e^{2t}\left(\left(\frac{10}{25} + 2t\right)\sin t + \frac{8}{25}\cos t\right) + c$.

$\mathcal{E} = x(t) = \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \frac{3}{25}\sin t - \frac{4}{25}\cos t$

$-\mathrm{Im}\int_0^t e^{s(2+i)}\,ds = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2+i} e^{s(2+i)}\right]_0^t$

$\dot{Z}(t) = e^{-tA} B(t)$

$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \ldots$

$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

AVEC $x(t) = x(0)e^{-2t} + (\dot{x}(0) + 2x(0))te^{-2t}$

$= (1+2t)e^{-2t}x(0) + \dot{x}(0)te^{-2t}$

$\dot{x}(t) = -4te^{-2t}x(0) + (1-2t)e^{-2t}\dot{x}(0)$.

$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Semaine mol

Domande vélo angell. bike.

RegCage

Aide

$\hookrightarrow$ Support

$e^{tA} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{\dot{y}}{\sin(y)} = 1 \iff \int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{\sin(y(s))}\, ds = t$$

$x = y(s)$

$\dot{y}(s) = \frac{dx}{ds}$

$dx = \dot{y}(s)\, ds$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dx}{\sin(x)} = t$$

$\tau = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$d\tau = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+\tau^2)\, dx$

$dx = \frac{2}{1+\tau^2}\, d\tau$

$\sin(x) = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$

$$\int_{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{2d\tau}{1+\tau^2} \times \frac{1+\tau^2}{2\tau} = \int_{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}\right| = t.$$

$$\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)} = e^t.$$

$$y(t) = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^t\right)$$

$u = v$ $\quad \frac{\dot{y}(s)}{dx} = ds$ $\quad \tan(u) = 1+\tan^2(u)$

$\frac{d}{ds} y(s) = \frac{d}{ds} x = \frac{dx}{ds}$

$\boxed{10}$

$$(PC)\begin{cases} t\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(EDO_I) polynôme 1e deg

cont

TH CL

~~lo~~ glob $\to$ à t fixé

$\neq 0.$

$$\begin{cases} \dot{y} + \frac{1}{t} y = 0 & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

I^-, I^+

$]-\infty, 0[,]0, +\infty[$ $t \in \mathbb{R}$. non

$\forall y_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \exists! y \in J$, y solu° (PC).

unicité

$\dot{y} = -\frac{1}{t} y$ $\quad \to \frac{c^{te}}{t}.$

$\frac{c}{t}.$

(L) si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y$ alors y (PP).

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 7 \\ \dot{y} = 3x - 4y + 1 \end{cases}$$

(TM) (CL) g

I ?

$\exists !$ soluθ

$\dot{Y} = AY + B(t) \longrightarrow E_h = \{k.e^{tA}, k \in \mathbb{R}\}$

$\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = E_0 + E_h.$

$A = PD'$
$A = PDP^{-1}$
$A^n = PD^nP^{-1}$

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

$Sp(A) = \{-5, 5\} \qquad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Id + \sum_{k \geq 1} \frac{(tA)^k}{k!} = Id + \sum_{k \geq 1} \frac{(tPD^kP^{-1})}{k!}$$

$$e^{tA} = e^{tD} \sum_{n \geq 0}^{q-1} \frac{t^k N^k}{k!} \text{ tq } N^q = 0.$$

---

(5) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ker(A - 5Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(-5) $\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \ker(A + 5Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ entraîn... par ... pas ... pas pédence 3 $\cancel{4}$ $\cancel{4}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$

$-x + 3y = 0$
$3x - 4y = 5y$
$3y = x$
$3x = y$

$\begin{pmatrix} \cancel{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

$\circ\ 1 \qquad A$
$-1\ -2 \qquad \lambda - 2 \qquad \lambda(\lambda-2)+1$
$\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5^n & 5^n \\ -5^n & 5^n \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Id + P\left[\sum_{n \geq 0} \frac{t^n D^n}{n!}\right]P^{-1}$$

$= \cancel{I} + P\begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & 0 \\ 0 & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$

$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & 0 \\ 0 & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$

$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & -3(e^{5t} \cancel{-1}) \\ 3(e^{-5t} \cancel{-1}) & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$

$E_h = \left\{\begin{pmatrix} e^{-5t} & -3e^{5t} \\ 3e^{-5t} & e^{5t} \end{pmatrix}P^{-1}Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} Z_0 \mid Z_0 \in \mathbb{R}^2.\right.$ par inversibilité de P^{-1} (CDV $Z_0 = P^{-1}Y_0$ bijectif))

$$\begin{cases} x(t) = 1 + c_1 -3e^{5t} + c_2 e^{-5t} \\ y(t) = 1 + c_1 3e^{-5t} + c_2 e^{5t}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \to \text{vp } -1.$$

$$\left|\begin{matrix} +1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\ker\left((A-\lambda Id)^2\right) = \ker\left((A+Id)^2\right) = N_{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si e_2 vecteur de $N_2 \setminus E_2$

$$N_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ds base (e_1, e_2) de la forme $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On choisit $e_2 \in N_2 \setminus E_2$:

$$(A+Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = 0$, $y = 0$

de $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$e^{tD} = \sum \frac{(tD)^n}{n!} = \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

On a $e_2 \in N_2 \setminus E_2$, calcule Ae_2 :

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2.$$

$$Ae_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1 \cancel{+} e_2.$$

$$\Rightarrow \underline{a = 1}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad DN = ND$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = 0.$$

$$e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}\sum_{n \geq 0}^{q-1} \frac{t^k N^k}{k!} \qquad \text{tq } N^q = 0$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\left[I + tN\right] = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = -y \\ -x = y \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$x = 1$, $y = -1$.

$\triangle 12$ $y \in C^2$ $\begin{cases} \ddot y = 4y - 6y^2 = f(y) \\ \ddot y = y(4-6y). \end{cases}$ conf ! (H) loc lip. $\exists !$ solᵒ max.

I interv.ᵉ sous.

$F(Y) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = ($

$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\dot Y = F(Y)$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \ddot y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot y \\ y \end{pmatrix}$ ou C^2 $\forall t \in I$,

$\begin{cases} \ddot y = 4y - 6y^2 \\ \dot y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \ddot y \\ \dot y \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y \\ \dot y \end{pmatrix}\right) \iff \begin{pmatrix} \dot y \\ z \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$

~~$Y = \begin{pmatrix} \dot y \\ z \end{pmatrix}; \dot Y = \begin{pmatrix} \ddot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot y \\ z \end{pmatrix}$~~

$(yy)' = y\dot y + \dot y y$

$(y^2)' = 2y'y$

2) Mq $t \mapsto y(t)$ est paire

$\ddot y(-t) = 4y(-t) - 6y(-t)^2$

$(f \text{ paire})' = f$ impaire.

$\boxed{\text{Pas de Matrices en LINÉAIRE}}$.

3) $\ddot y = 4y - 6y^2$

$\ddot y \dot y = \dot y(4y - 6y^2) = 4y\dot y - 6y^2 \dot y$

$= 4y\dot y - 6 \dot y y y$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y^2}{2}\right) = \cancel{\frac{d}{dt}(2y\dot y)}\ 2\frac{d}{dt}(y^2) - 3\frac{d}{dt}(y^3)$

$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(y'^2 - 4y^2 - 4y^3\right)}_{E(t)} = 0$

$\forall t$

$E(t) - E(0) = y'^2(0) - 4y^2(0) + 4y^3(0) = 0 - 4 + 4 = 0$

$\forall t \in I,\ y'^2 = 4y^2(1-y)$.

$\frac{1}{2}(\dot y)^2 = 2\dot y - 2y^3$

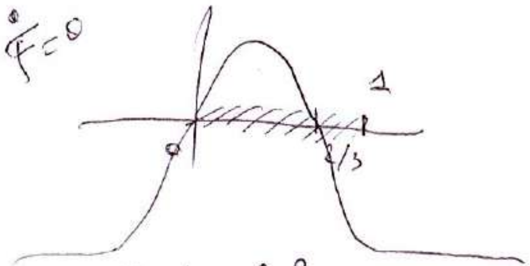
3) Mq $\dot y^2 = 4y^2(1-y)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{2}\right) - 2\frac{d}{dt}(y^2) - 3\frac{d}{dt}(y^3)$

4) Dmq solu° $\exists \forall t$, q'lle vérifie

a.l.p.s stat.^{RS} $0 \leq y(t) \leq 1$

$\dot{F} = 0$



$$\begin{cases} \ddot{y} = 4y - 6y^2 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{0 \text{ pt fixe}}$ TVI

$4y - 6y^2 = y(4-6y)$.

$-6y^2 + 4y$

$4 - 6y = 0$
$4 = 6y$
$\frac{2}{3} = y$

$\dot{y}^2 = 4y^2(1-y)$

$\Leftrightarrow 1 - y \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y \leq 1}$.

$y'' = \tilde{f}(y)$, $\tilde{f}$ est lipschitz.

Thm C.L (g) s'appliq à

$$(\tilde{PC}) \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \tilde{F}(y) := \begin{pmatrix} z \\ \tilde{f}(y) \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$y = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{-x}{x^2}$, $y'' = \frac{-\left[\dot{x}x^2 + 2x^3\right]}{x^4}$

$\dot{y}^2 = 4y^2(1-y) \Leftrightarrow |\dot{y}| = \sqrt{4y^2(1-y)}$

$\dot{y} = e \cancel{y} y\sqrt{1-y}$.

$\int_0^t \dot{y}(s)\,ds = 2\int_0^t y(s)\sqrt{1-y(s)}\,ds$

$\boxed{\text{Mq } 0 \leq y}$

Spps par l'absurde $\exists t^* \in I$, $y \leq 0$, comme $y(0) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ (TVI) $\exists \bar{t}$, $y(\bar{t}) = 0$, par (I), on a aussi $y'(\bar{t}) = 0$.

Donc y solu° I (PC) $\begin{cases} y'' = f(y) \\ y(\bar{t}) = 0,\ y'(\bar{t}) = 0 \end{cases}$

Or 0 solu° (PC)

Par unicité, on a $y \equiv 0$ ce q contredit $y(0) = 1$

$\Rightarrow \forall t \in I$, $0 \leq y(t) \leq 1$

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in [0,1] \\ & \text{si } y > 2 \\ & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

$0 \leq y \leq 1$. $\nearrow \mathbb{R}$

$$\dot{y} = 2y\sqrt{1-y}$$

$$\frac{\dot{y}}{y\sqrt{1-y}} = 2 \quad , \quad \int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y(s)\sqrt{1-y(s)}}\, ds = 2$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{du}{u\sqrt{1-u}}$$

$s = \sqrt{1-u}$

$\Leftrightarrow u = 1 - s^2$

$u = y(s)$

$du = \dot{y}(s)\, ds$

$\cancel{\dot{y}(s) = \frac{du}{ds}}$

$$-2 \int \frac{1}{1-s^2}\, \frac{s}{s}\, ds = \cancel{\ } = -2\,\mathrm{arcth}(s)$$

$$\left[\mathrm{arcth}(s)\right]_{y(0)}^{y(t)} \quad \mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(t)}\right) - \mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(0)}\right) = t$$

$$y(t) = 1 - th^2(t)$$

$\frac{d}{ds} 1 - s^2 = \frac{du}{ds}$

$du = -2s\, ds$

$\frac{d}{du} \sqrt{1-u} = \frac{ds}{du}$

$$\left(\sqrt{v}\right)' = \frac{v'}{2\sqrt{v}} \quad : \quad \sqrt{1-u} = \frac{-1}{2\sqrt{1-u}} \,,$$

$u = y(t)$

$\frac{d\dot{y}(s)}{ds} = \frac{du}{ds} \Rightarrow \dot{y}\, du = \dot{y}(s)\, ds$

$x = y(s)$

$$\mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(t)}\right) - \mathrm{arcth}\left(\cancel{\sqrt{1-y(0)}}\right) = t$$

$$\sqrt{1-y(t)} = \tanh^2(t)$$

$$y(t) = -th^2(t) + 1$$

$$\arccos = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan = \int \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{arcsinh} = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \mathrm{arctanh} = \int \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int_0^{\mathrm{arcsinh}(x)} \frac{\mathrm{ch}\, u}{\sqrt{1+sh^2(u)}}\, du$$

$$\text{"} \; s$$

$\dot{y}(s) = \frac{d}{ds} y(s) = \frac{d}{ds} x$

$$1 + sh^2(t) = ch^2(t)$$

Ex 2 Proies / Prédat^{rs}

Modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$

$$(SD)\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

$\frac{\dot{x}}{x}$ est le taux de croissance $= a - by = a(1 - \frac{b}{a}y)$

$\frac{\dot{y}}{y} = dx - c = -d(1 - \frac{c}{d}x)$

On peut se ramener à $\begin{cases} \dot{x} = x(1-y) \\ \dot{y} = d'y(x-1) \end{cases}$

où $x = X\tilde{x}(\lambda t)$, $y = Y\tilde{y}(\lambda t)$

1) Vérifier (SD) rentre ds le cadre du Th de CL

$\Leftrightarrow \dot{Y} = F(Y)$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 - by_1y_2 \\ -by_2 + dy_1y_2 \end{pmatrix}$

$F \in C^\infty \Rightarrow F \in C^1$ donc F est loc. lips.

& $DF\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by_2 & -by_1 \\ dy_2 & -c + dy_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_1 \\ \leftarrow F_2 \end{matrix}$ non bornée sur $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ F n'est pas glob. lipschitzienne,

$\rightarrow$ le Th de CL s'applique.

$\forall Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\exists -\infty \leq T^- < 0 < T^+ \leq \infty$

et $Y \in C^1(]T^-; T^+[)$ tq $Y(0) = Y_0$ et $\dot{Y} = F(Y)$

sur $]T^-; T^+[$. De plus si $\tilde{Y}$ est solut° :

$\dot{\tilde{Y}} = F(\tilde{Y})$ sur $]\tilde{T}^-; \tilde{T}^+[$

de $]\tilde{T}^-, \tilde{T}^+[\subset]T^-; T^+[$

et $\tilde{Y} = Y|_{]T^-; T^+[}$.

2) Étudier si $\emptyset$ prédat^{rs} ie $\forall t$ $y(t) = 0$

(SD) $\dot{Y} = F(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = ax \\ 0 = 0. \end{cases}$

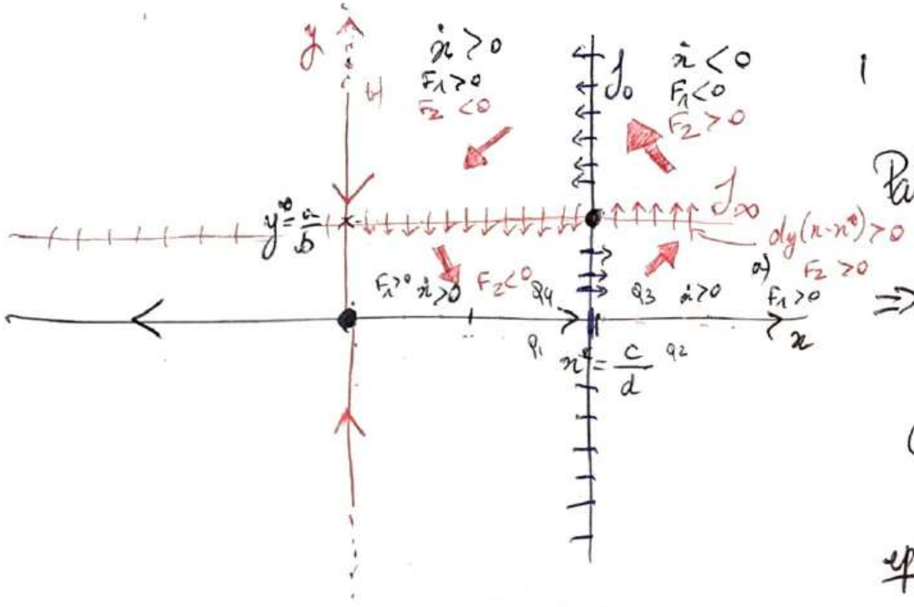
Solut°s $\begin{cases} x(t) = x(0)e^{at} \\ y(t) = 0 \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

3) si $x(t) = 0$,

$\dot{Y} = F(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \dot{y} = -cy \end{cases}$

Solut°s $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y(0)e^{-ct} \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

orbite : $\frac{1}{2}$ droite point



a) est une orbite : $x(t) = x(0) e^{at}$

b) $y(t) = y(0) e^{-ct}$

On suppose $\overset{x_0}{x(0)} > 0$, $\overset{y_0}{y(0)} > 0$.

4) Dmq $\forall t \in$ interv. maximal d'existence, on a $x(t) > 0$, $y(t) > 0$.

Spps par contradiction qu'$\exists t \in]T^-; T^+[$ tq

$[x(t)]_- + [y(t)]_- \leq 0$

où $a = \frac{1}{2}(a - |a|) \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - byx = -bx(y - y^*) \\ \dot{y}(t) = -cy + dxy = dy(x - x^*) \end{cases}$$

tq $x(t) \leq 0$. Comme x est continue & $x(0) > 0$,

Par TVI, $\exists t^* \in]T^-; T^+[$ tq $x(t^*) = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sol° de $(*) \begin{cases} \dot{Y} = F(Y) \\ Y(t^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*) \end{pmatrix} \end{cases}$ sur $]T^-; T^+[$.

Or l'uniq solut de $(*)$ est $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*) e^{-c(t-t^*)} \end{pmatrix}$

& $x(0) = 0$. Contradic° $\Rightarrow x > 0$ sur $]T^-; T^+[$

De m̂, $y > 0$ $\forall t \in]T^-; T^+[$.

5) Tracer les isoclines I_0 & I_∞

$I_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (a - by)x = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b}\} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\frac{a}{b}\}$

$I_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{\frac{c}{d}\} \times \mathbb{R}$

6) Déterminer les points fixes

Pts fixes $= I_0 \cap I_\infty = \{(0,0), (x^*, y^*)\}$

$Q_1 =]0, x^*[\times]0, y^*[\,;\, Q_2 =]x^*, \infty[\times]0, y^*[$

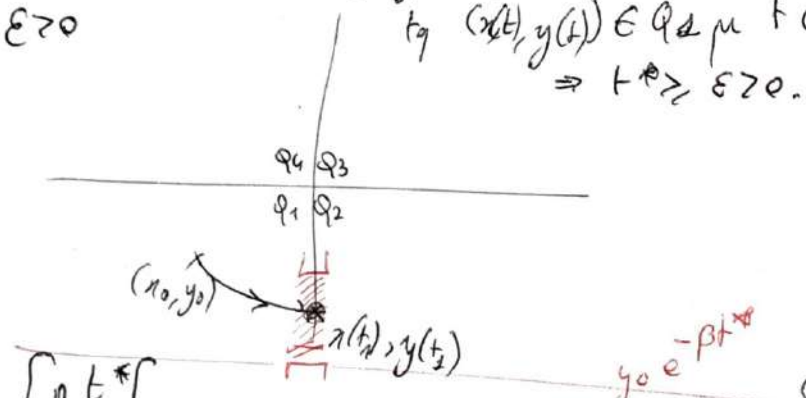
Mq si $(x_0, y_0) \in Q_1$ $\exists\, t_1 < T^+$ tq $(x(t), y(t)) \in Q_1$ sur $]0, t_1[$ et $x(t_1) = x^*$, et $0 < y(t_1) \leq y^*$.

soit t^* max tq $(x(t), y(t)) \in Q_1$ sur $[0, t^*[$.

Q_1 est ouvert et $(x(0), y(0)) \in Q_1$

dc $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $(x(t), y(t)) \in Q_1$ pr $t \in [0, \varepsilon[$.

$\Rightarrow t^* \geq \varepsilon > 0$.



Sur $[0, t^*[$,

on a $\dot y \leq 0$ dc $y \leq y(0) < y^*$

dc $\dot x = b(\underbrace{y^* - y}_{\geq -y(0)})x \geq \underbrace{b(y^* - y(0))}_{\alpha > 0} x$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} x) = e^{-\alpha t}(\underbrace{-\alpha x + \dot x}_{\geq 0}) \geq 0$

$\dot x = -bx(y - y^*) = b(y^* - y)x$

$\Rightarrow x(t) \geq e^{\alpha t} x_0$ pr $t \in]0, t^*[$.

Or $x(t) < x^*$ sur $]0, t^*[$.

$\Rightarrow x(0) e^{\alpha t} < x^*$ sr $]0, t^*[$

$t^* \leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x^*}{x_0}$

$0 < y < y_0$ sur $]0, t^*[$

et $x_0 < x < x^*$ ~~$x(t) \xrightarrow[t \to t^*]{} x^*$~~

si $t^* = T^+$, la trajectoire serait bornée et par principe d'explosion, on aurait $T^+ = \infty$, contredit $t^* < \infty$.

Pour $t^* < T^+$

Sur $]0, t^*[$, $\dot y = dy(x - x^*) \geq \underbrace{-d(x^* - x_0)}_{\beta} y$

$\Rightarrow y(t) \geq y(0) e^{-\beta t}$.

Sur $]0, t^*[$,

$x_0 e^{\alpha t} \leq x(t)$, $y_0 \geq y(t) \geq e^{-\beta t} y_0$

$\Rightarrow y(t) \geq y_0 e^{-\beta t^*}$

$x(t) \geq x_0 e^{\alpha t}$

42

$\Rightarrow (x(t^*), y(t^*)) \in \{x^*\} \times \underbrace{[y_0 e^{-\beta t^*}, y_0]}_{\subset]0, y^*[}$

On prend $t_1 = t_*$ et ok.

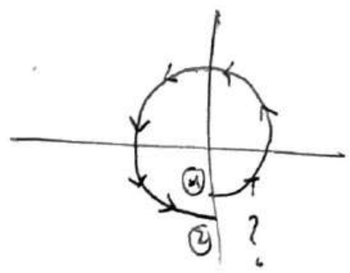
Lotka-Volterra Régionnement

En t_1, $\dot{x}(t_1) = -bx(t_1)(y(t_1) - y^*)$
$= b\dot{x}(t_2)(y^* - y(t_1)) > 0$.

$\dot{y}(t_1) = dy(t_2)\underbrace{(x(t_1) - x^*)}_{=0}$

Pour $h > 0$ assez petit, $(x(t), y(t)) \in Q_2$ pour $t \in]t_1, t_2[$.

$$\begin{pmatrix} x(t_1+\varepsilon) \\ y(t_1+\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y(t_1) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon)$$



Si un tps fini, ça reste borné, ça n'explose pas assez vite.

7) Trouver une intégrale première pour le système.

intég première: On cherche $E \in C^1(]0,\infty[\times]0,\infty[)$ tq si (x,y) sol° de $]0,\infty[^2$ alors $t \mapsto E(x(t), y(t))$ est constante.

$$0 = e'(t) = \frac{\partial E}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \underset{F_1(x,y)}{x'(t)} + \frac{\partial E}{\partial y}(x(t), y(t)) \underset{F_2(x,y)}{y'}$$

$$0 = \left(\frac{\partial E}{\partial x} F_1 + \frac{\partial E}{\partial y} F_2\right)(x(t), y(t)) \qquad (\square)$$

Si on veut $(\square)$ vrai $\forall t$, pr tte trajectoire, on veut en fait

$$(\Delta) \quad \boxed{\frac{\partial E}{\partial x} F_1 + \frac{\partial E}{\partial y} F_2 = 0} \quad \text{sur }]0,\infty[^2.$$

$\Leftrightarrow -\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)\, bx(y - y^*) + \frac{\partial E}{\partial y} dy(x - x^*) \quad \forall x, y > 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial x} b \frac{y - y^*}{y} = \frac{\partial E}{\partial y} d \frac{x - x^*}{x}$

On cherche E ss la forme $E(x,y) = G(x) + H(y)$.

Dans ce cas,

$$(\Delta) \Leftrightarrow \forall x,y \quad G'(x)\,\frac{by-y^*}{y} = H'(y)\,\frac{dx-x^*}{x}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} G'(x) = \lambda\,\dfrac{dx-x^*}{x} \\ H'(y) = \lambda\,\dfrac{by-y^*}{y} \end{cases}$$

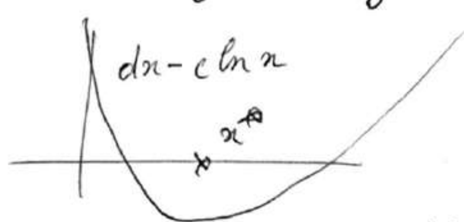
j'résouds ça & on trouve une sol°.

Posons $\lambda = 1$.

$$G(x) = dx - \overset{c}{dx^*}\ln(x) \quad \text{pr } x>0.$$

$$H(y) = by - \underset{a}{by^*}\ln(y) \quad \text{pr } y>0$$

$$E(x,y) = dx - c\ln x + by - a\ln y.$$



Supposons t_1 tq $(x(t_1), y(t_1)) \in \{x^*\} \times \,]0, y^*[$.

On a $E(x(t_1), y(t_1)) = E(x(t_2), y(t_2))$ car E intég première.

$$\cancel{G(x^*)} + H(y(t_1)) = \cancel{G(x^*)} + H(y(t_2))$$

$$H(y(t_1)) = H(y(t_2)) \quad (\otimes)$$

Mais $y(t_1), y(t_2) \in \,]0, y^*[$

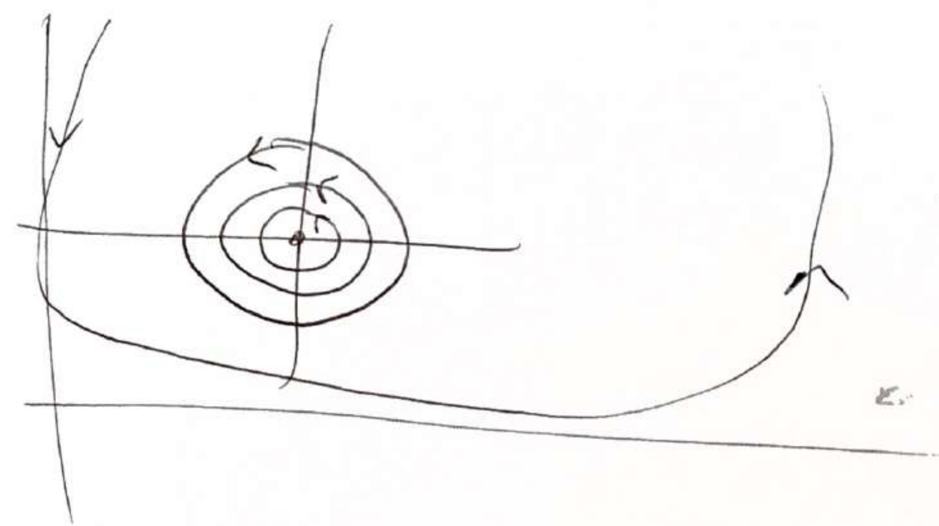
& pour $y \in \,]0, y^*[$,

$$H'(y) = b - \frac{a}{y} = \frac{b}{y}(y - y^*) < 0$$

Donc H ST $\nearrow$ sur $]0, y^*[$ &

on a $\otimes \Rightarrow y(t_1) = y(t_2)$

$\Rightarrow$ les trajectoires sont périodiqs



Ex 3 : (SD) $(*)$ $\begin{cases} \dot{x} = x\left(1+\frac{3}{x^2+y^2+2}\right) \\ \dot{y} = -y\left(1-\frac{3}{x^2+y^2+2}\right) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$ SDA

1) Global?

$Y=\binom{x}{y}$; $\dot{Y} = F(Y)$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ (TH) (CL) local s'applique

$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{3}{2+x^2+y^2} + \frac{-3x\,2x}{(x^2+y^2+2)^2}$ borné

$\vdots$

DF est bornée sur $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ globalement lipschitzienne.

(TH) global s'applique.

$\forall\ x_0,y_0 \in \mathbb{R}$, $\exists!$ sol^o max^{le} de $\begin{cases}(*)\\ x(0)=x_0, y(0)=y_0.\end{cases}$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Mq $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) \leq 5(x^2+y^2)$ et trajectoires $\exists$ $\forall t \geq 0$, ie $T_{max} = \infty$

soit x,y une solu^o de $(*)$, $(x,y \in C^1(\mathbb{R}))$.

On calcule $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2(x\dot{x}+y\dot{y})$

$= 2\left(x^2 + \frac{3x^2}{x^2+y^2+2} - y^2 + \frac{3y^2}{x^2+y^2+2}\right)$

$= 2\Big(x^2\underbrace{\left(1+\frac{3}{x^2+y^2+2}\right)}_{1\leq\ \cdot\ \leq\frac{5}{2}} - y^2\underbrace{\left(1-\frac{3}{x^2+y^2+2}\right)}_{-\frac{1}{2}\leq\ \cdot\ \leq 1}\Big)$

$\leq 2\left(\frac{5}{2}x^2+y^2\right) \leq 5(x^2+y^2)$.

En posant $N(t) = (x^2+y^2)(t)$, on a $N' \leq 5N$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-5t}N) \leq 0$

$\Rightarrow N(t) \leq N(0)e^{5t}$ pour $t \geq 0$.

On Rq aussi $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) \geq -5N$.

(On peut le mq aussi pour les négatifs)

$\Rightarrow N(t) \leq N(0)\,e^{-5t}$ pour $t \leq 0$.

3) Mq ens trajectoires est sym. p/r à $(0,0)$ ie p/r la symétrie centrale $M \to -M$.

$\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$; soit (x,y) une solu^o

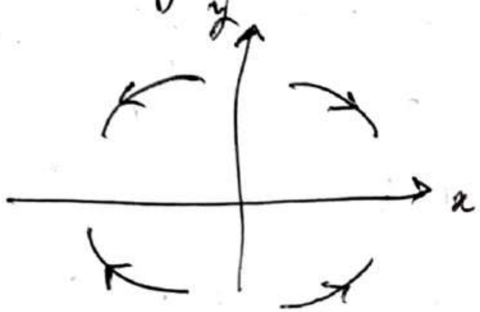
On pose $\check{x}(t) = \varepsilon_1 x(t)$, $\check{y}(t) = \varepsilon_2 y(t)$

alors $\check{x},\check{y}$ est solu^o de $(*)$.

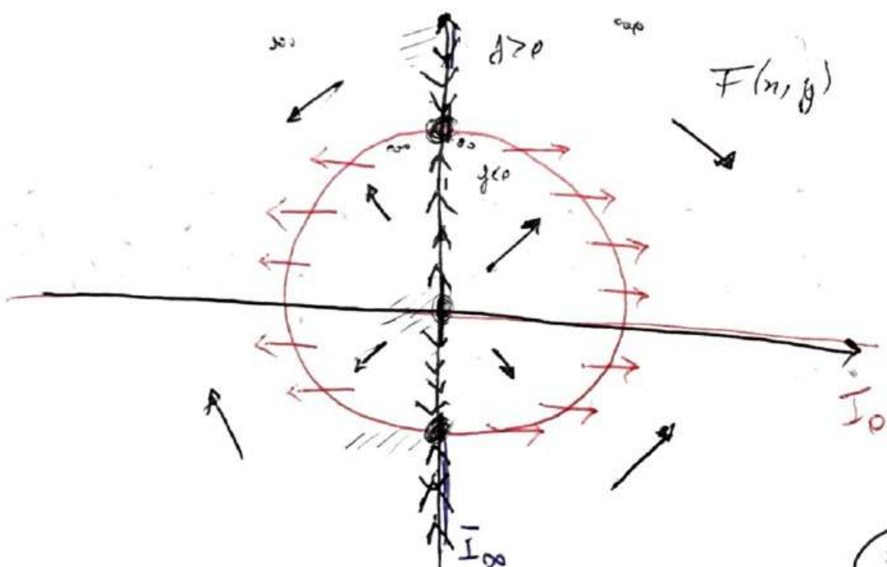
En effet, $\dot{\tilde{x}} = \varepsilon_1 \dot{x} = \underbrace{\varepsilon_1 x}_{\tilde{x}}\left(1+\frac{3}{\underbrace{x^2+y^2}_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}+2}\right)$

$= \tilde{x}\left(1+\frac{3}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+2}\right)$

De même pour $\dot{\tilde{y}}$.



4) Tracer I_0, I_∞ et pts fixes.



$\dot y<0$

3) $\dot x$

$I_\infty = \{(x,y) : F_1(x,y)=0\} = \{(x,y) : x=0\}$
$= \{0\}\times\mathbb{R}$.

$I_0 = \{(x,y) : F_2(x,y)=0\} = \{(x,y) : y=0 \text{ ou } x^2+y^2=1\}$
$= \mathbb{R}\times\{0\} \cup S^1$.

$\to \dot{x} = \underbrace{x}_{>0}$. ξ^a s'éloigne.

$\dot{y} = -y\underbrace{\left(1-\frac{3}{2+x^2+y^2}\right)}_{<0 \text{ ds } D_1}$

$\dot{y} = -y f(x^2+y^2)$, $f(x^2) = 1-\frac{3}{2x^2}$

5) Quelle est la nature des points fixes ?

x_p, y_p PF, ~~on regarde~~ $\cancel{\begin{cases} x = x_p + w \\ y = y_p + z \end{cases}}$

Le système satisfait par Z, $Y = Y_p + Z$.

$\dot{Z} = \dot{Y} = F(Y) = F(Y_p+Z)$
$= \underbrace{F(Y_p)}_{=0 \text{ car PF}} + DF(Y_p)Z + O(\|Z\|^2)$

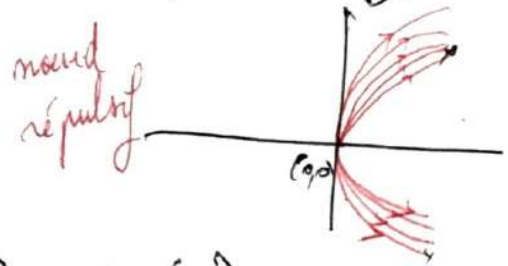
et $\dot{Z} \simeq DF(Y_p)Z$

Ici pr $Y_p=(0,0)$

$$DF(Y_p)=\begin{pmatrix}5/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Point fixe de type noeud répulsif

(ni ✳ ni Y_p)

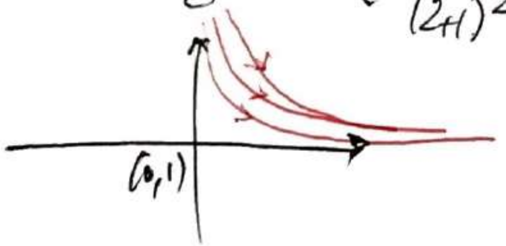


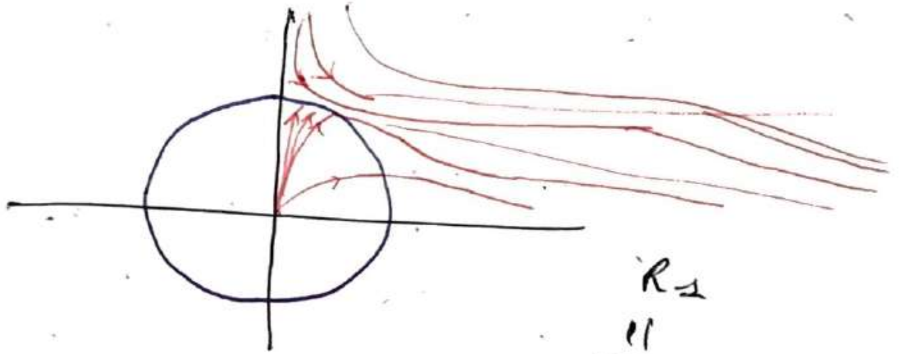
Pour $Y_p=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $DF(Y_p)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\left(1-\frac{3}{2+x^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\left(1-\frac{3}{2+x^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}$$

$$=-1\left(1-\frac{3}{3}\right)-1\left(\frac{6}{(2+1)^2}\right)=\frac{-2}{3}$$





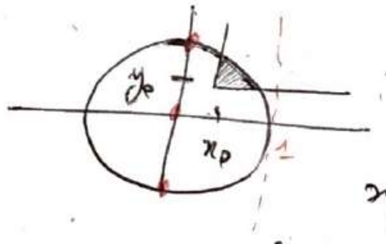
→ Spps $(x_0,y_0)\in\overbrace{D_1\cap\{x>0,y>0\}}^{R_1}$

(x,y) soluᶿ de $(*)$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

soit $0<t^*\leq\infty$ maximal tq $x(t),y(t)\in D_1\cap\{x>0,y>0\}$

Sur $[0,t^*[$, $(x(t^*),y(t^*))\in\partial R_1$.

Pour $t\in[0,t^*[$, $\dot{x}\geq 0$ et $\dot{y}\geq 0$.



R_1 est borné, et $x\uparrow, y\uparrow$

dc $\exists\ l_1, l_2$ tq

$x\xrightarrow[t\to t^*]{} l_1$, $y\xrightarrow[t\to t^*]{} l_2$.

si $t^*=\infty$, on a alors $(\dot{x},\dot{y})\longrightarrow F(l_1,l_2)$

dc $F(l_1,l_2)=0$. Impossible car F ne s'annule pas ds $[x_0,\infty[\times[y_0,\infty[$.

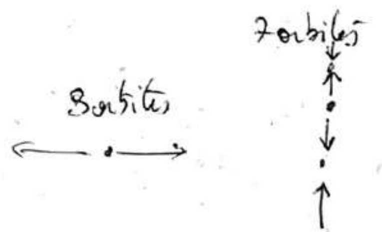
Autre raisonnement $\quad x>0 \Rightarrow \dot{x} \geq x$

$x(t) \geq x_0 e^t$ pr $t \geq 0$.

On a pr $0 \leq t \leq t^*$, $1 \geq x(t) \geq x_0 e^t$.

$\Rightarrow t \leq \ln \frac{1}{x_0}$ de $t^* \leq \ln \frac{1}{x_0}$.

Rq si $x_0 > 0 \Rightarrow x(t) \geq x_0 e^t \quad \forall t \geq 0$.



$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1+\frac{3}{2+x^2+y^2}\right) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$

Mq $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

Pr t assez grd : $x^2(t) + y^2(t) \geq 1$. $t \geq T$.

Pr $t \geq T$: $\dot{x} \geq x(T) e^{t-T}$ (□).

et $\dot{y}(t) < 0$. & de plus $y(t) > 0$.

Pr (□), Pr t assez grd, $t \geq T^*$, $1 - \frac{3}{2+x^2+y^2} \geq \frac{1}{2}$.

Pr $t \geq T^*$, $\dot{y} \leq \frac{-y}{2}$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{t/2} y\right) = \left(\dot{y} + \frac{y}{2}\right) e^{t/2}$

Donc $0 < y(t) \leq y(T^*) e^{-\frac{t-T^*}{2}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

Exercice 4 : (SD) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ 1) Est-il (Th) (CL) ?

1) $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (SD) $\Leftrightarrow$ $\dot{Y} = F(Y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$

$F(Y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de a fortiori C^1 car ses composantes st polynômiales.
On pt appliquer (Th) CL- local.

$(DF)(Y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas bornée dc F n'est pas lipschitzienne.

2) Dmq ens trajectoires est symétriq / axe $\{x=0\}$

Soit (x,y) sol° de (SD), posons $\begin{cases} \tilde{x}(t) = -x(-t) \text{ est sol}^{\circ} \\ \tilde{y}(t) = y(t) \end{cases}$

$\dot{\tilde{x}} = \dot{x}(-t) = (x^2 - y)(-t) = (-x(-t))^2 - y(t) = \tilde{x}^2(t) - y(t)$

$\dot{\tilde{y}} = -y(t) = \tilde{x}(t)$. OK

3) Déterminer I_0 & I_∞.

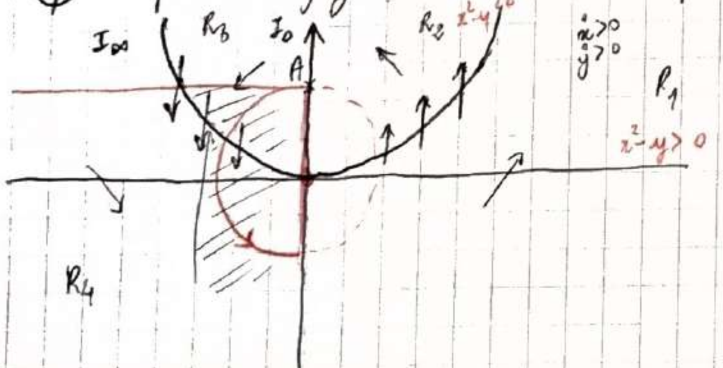
$I_0 = \{(x,y), F_2(x,y) = 0\} = \{(x,y), x = 0\}$

$I_\infty = \{(x,y), F_1(x,y) = 0\} = \{(x,y), y = x^2\}$.

4) Déterminer qu'$\exists$ pt fixe pr ce système. Nature pf ?

On un uniq pf $(0,0)$. Calculons $(DF)(Y)|_{\binom{0}{0}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ 2 vp complexes conjuguées i et $-i$ $\Rightarrow$ pt dégénéré



5) Représenter sens de variat° de $x(t)$, $y(t)$ suivant les régions :

On considère la trajectoire $M(t)$ issue de $A = (0, \sigma)$ $\forall \sigma > 0$ à $t = 0$. ✓ un fixe.

$x(t) = 0 + \dot{x}(0).t + O(t^2) = -\sigma t + o(t^2)$
$= -t(\underbrace{\sigma + o(t)}_{>0 \text{ pr } t \text{ petit}})$.

Dc on est ds R_3 $\forall t > 0$ petit. (■)

Dans R_3, $y \searrow$ et $x \searrow$; soit $t^* \in]0, T_{max}]$ maximal, tq sur $]0, t^*[$, $x(t), y(t) \in R_3$, par (■) $t^* > 0$

Alors sachant que $x, y \searrow$, on a sur $]0, t^*[$:

$x(t), y(t) \in R_3 \cap]-\infty, 0[\times]-\infty, \sigma[$ ↙ borné (*)

si $t^* = T_{max}$, par principe d'explosion, $T_{max} = \infty$ car solut° bornée

Donc $t^* < T_{max}$.

Avoir en tête (t^* n'est pas de dans par maximalité) $\geq \frac{1}{2}$.

$S = \{0 < T \leq T_{max}, x(t), y(t) \in R_3 \text{ sur }]0, T[\}$, car $S \neq \emptyset$ $\frac{t^2}{1}$.

par (■), $S \neq \emptyset$; $t^* = \sup S \in [0, \infty[$, $t^* > 0$

& $t^* \in S$. soit $t \in]0, t^*[$, $\exists T$ tq $t < T < t^*$,

dc $x(t), y(t) \in R_3$ dc $t^* \in S$.

Sppo $x(t^*), y(t^*) \in R_3$ alors par continuité de x, y et comme R_3 est un ouvert. On aurait $x, y \in R_3$ au $\mathcal{V}$ de t^*, ce q contredit la maximalité de t^*.

Donc $x(t^*), y(t^*) \notin R_3$.

Donc $x(t^*), y(t^*) \notin R_3$. Et $x(t^*), y(t^*) \in \overline{R_3}$, par continuité de x & y.

Donc $x(t^*), y(t^*) \in \partial R_3$

Or $x(t^*) < 0$ car $x \searrow$ st.

Dc $x(t^*), y(t^*) \in \partial R_3 \cap]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$

$" \; I_\infty \cap]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$.

Mq $\exists \varepsilon > 0$ tq $x(t), y(t) \in R_4$ sur $]t^*, t^*+\varepsilon[$.

$(x^2 - y)(t^* + h) = 0 + (2x\dot{x} - \dot{y})(t^*)h + o(h^2)$

$= -\dot{y}(t^*)h + o(h^2) = -x(t^*)h + o(h^2) = h\underbrace{(-x(t^*) + o(h))}_{>0} > 0$

pour h assez petit car $x(t^*) < 0$.

et $x(t^* + h) = x(t^*) + o(h) < 0$ pr h assez petit.

Pr $h > 0$ assez petit, $x(t^*+h), y(t^*+h) \in R_4$.

Soit $\bar{t} \in]t^*, T_{max}]$ maximal, tq $\forall t \in]t^*, \bar{t}[$, $x(t), y(t) \in R_4$. Si $\bar{t} = T_{max}$,

dans R_4, $x \nearrow$ et $y \searrow$ et $x < 0$.

On a sur $]t^*, \bar{t}[$, $\dot{y} = x \geq x(t^*)$.

$$y(t) = y(t^*) + \int_{t^*}^{t} \dot{y} \geq x(t^*)(t - t^*) + y(t^*)$$

Donc $x(t^*) \leq x < 0$ sur $]t^*, \bar{t}[$.

$y(t^*) + x(t^*)(t - t^*) \leq y \leq y(t^*)$.

Donc si $\bar{t} = T_{max}$; on a $T_{max} = \infty$ par ppe d'explo°.

Supps $\bar{t} = \infty$, on a $x(t^*) \leq x \leq 0$ sur $[t^*, \infty[$ et $y \searrow$.

Supps $y \searrow -\infty$, $\exists t' > t^*$, tq $y(t) \leq -1 - x(t^*)^2$ $\forall t \geq t'$.

Ds ce cas, on a pr $x \geq t'$,

$\dot{x}(t) = x^2(t) - y(t) \geq 1$ $\quad x^2(t) - x^2(t^*) \leq 0$

$x \nearrow$ sur $[t^*, \infty[$.

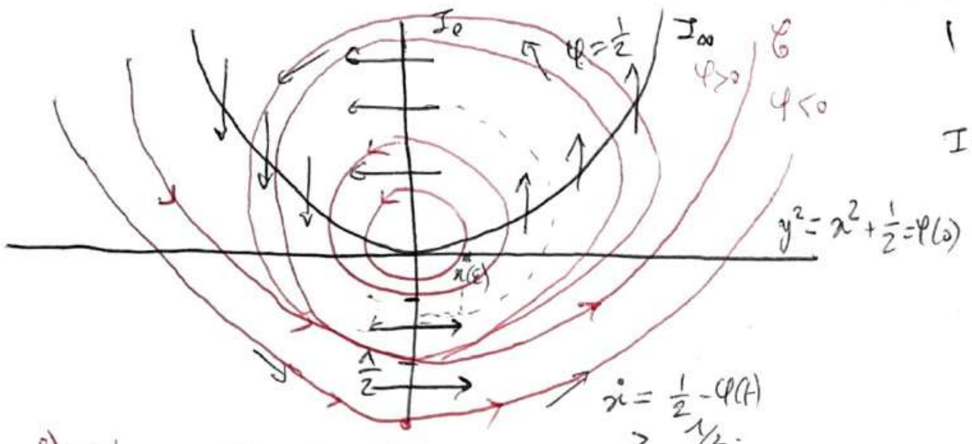
$\Rightarrow x(t) \geq x(t^*) + (t - t^*) > 0$ pr t assez grd.

Contradic°

Donc $\bar{t} < \infty$ et $\bar{t} < T_{max}$.

(*) Ajout : x, y bornés, $x \searrow$, $y \searrow$; on a $x(t), y(t) \xrightarrow{t\to\infty} \ell_1, \ell_2$

$\Rightarrow$ tq $\ell_1 < 0$ & (ℓ_1, ℓ_2) pt fixe impossib.



9) Mq cette trajectoire est périodiq

soit $\varphi(t) = y(t) - x^2(t) + \frac{1}{2}$. où (x,y) solution

$\dot{\varphi}(t) = 2x(t)\varphi(t)$

$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0)\, e^{+2\int_0^t x(s)\,ds}$

Donc φ ne change pas de signe.

si $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0$.

Ds ce cas la trajectoire $\subset \{(u,v) : v = u^2 - \frac{1}{2}\} = \mathcal{C}$.

soit (x,y) la solution maximale de $\begin{cases} * \\ x(0) = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\varphi \equiv 0$ sur l'intervalle d'Δ.

$\forall t \in \;(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \forall t \in I,\; \dot{x}(t) = x^2(t) - y(t) = -\underbrace{\varphi(t)}_{=0} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow x(t) = \frac{t}{2}$.

- L'intervalle d'Δ est $\mathbb{R}$ sinon

$I =]T_-, T_+[$ $\quad x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{T_+}{2}$ $\quad$ or $\begin{pmatrix} \frac{T_+}{2} \\ \frac{T_+^2}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pas un pt fixe.

$y(t) = x^2(t) - \frac{1}{2} = \frac{T_+^2}{4} - \frac{1}{2}$.

De m pr T_-.

Dc $I = \mathbb{R}$: la trajectoire parcourt $\mathcal{C}$.

- Toute trajectoire partant de $(x_0, y_0) = (0, \sigma)$
si $\sigma < -\frac{1}{2}$ on a $\varphi(t)$ du signe de $\varphi(0)$
ie $\varphi(t) < 0$.

- Raisonnement : pr $(x_0, y_0) = (0, \sigma)$ ay $\sigma < -\frac{1}{2}$.

$\rightarrow \varphi(t) < 0 \;\; \forall t \in I$ et $\dot{x}(t) = \frac{1}{2} - \varphi(t) \geq \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Pour $t \geq 0$, $x(t) \geq \frac{t}{2} \Rightarrow e^{-\int_0^t x(s)\,ds} \leq e^{-\frac{t^2}{4}}$.

$\Rightarrow$ pr $t \geq 0$, $\varphi(0)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \leq \varphi(t) < 0$

$\varphi(0) \leq \varphi(t) < 0$.

$\Rightarrow y(t) \geq \varphi(t) + x^2(t) + \sigma$.

Les trajectoires ne se coupent pas.

$x^2(t) - \frac{1}{2} \geq y(t)$.

$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{2} - \varphi(t)$ d'où $\frac{1}{2} \leq \dot{x}(t) \leq \frac{1}{2}\varphi(0)$

$\Rightarrow T_+ = \infty$ ∄ Th d'explosion

(φ n'explose pas, y est borné par x^2 ; x reste borné en tps ∞, ∄ Th d'explosion, le Tps d'∃ est ∞).

si x, y solut de (✱) $\begin{vmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = \sigma \end{vmatrix}$, $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$

$\varphi(0) > 0$.

Sppo qu'on reste pr $t \geq 0$ dans $0 > y - x^2 > -\frac{1}{2}$

où car φ ne change pas de signes.

de $\dot{x} \geq 0$ $\forall t \Rightarrow x \geq x(t) > 0$

$\varphi(t) = \varphi(0) e^{2\int_0^t x(s)ds} \geq \lambda e^{2t x(\varepsilon)}$ pour $t \geq \varepsilon$. $\lambda > 0$.

$\varphi \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow \varphi(t) \geq 0$ pr un certain $t > 0$ Contradict°.

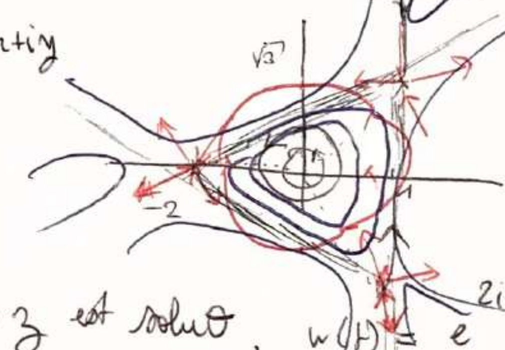
Ex 5 $\begin{cases} \dot{x} = -y + xy \\ \dot{y} = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$

∃ Th CL Local.

Pts fixes $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -y + xy \\ 0 = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{et} \\ x + \frac{1}{2}x^2 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ \text{et} \\ y^2 = 3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$z = x + iy$



x, y sol° $\Theta \Leftrightarrow$

$\dot{z} = iz + \frac{i}{2}\bar{z}^2$

Si z est solut°, $w(t) = e^{2i\frac{\pi}{3}} z(t)$

$\dot{w}(t) = e^{2i\frac{\pi}{3}} \dot{z}(t) = ie^{2i\frac{\pi}{3}} z + \frac{i}{2} \underbrace{e^{2i\frac{\pi}{3}} \bar{z}^2}$

$= iw(t) + \frac{i}{2}\bar{w}^2(t)$

$\dfrac{e^{-4i\frac{\pi}{3}}}{\underbrace{e^{2i\frac{\pi}{3}}}^{2}}$ $\bar{w}^2$

$\Rightarrow$ vp i & $-i$ dégénéré.

$\check{z}(t) = -\bar{z}(-t)$

$= -\overline{\left(iz + \frac{i}{2}\bar{z}^2(-t)\right)}$

$= i\bar{z}(-t) + \frac{i}{2} z^2(-t)$

$= i\check{z}(t) + \frac{i}{2}\bar{\check{z}}^2(t)$

Linéarisat° autour de $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = -2+u \\ y = v \end{cases}$$

$$\dot u = -v - 2v + uv$$
$$\dot v = -2 + u + \frac{1}{2}(4 - 4u + u^2 - v^2).$$

$$\dot u = -3v \qquad (DF)\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$
$$\dot v = -u$$

vp $\pm\sqrt{3}$ $\quad \vec{\varphi} \leftrightarrow \sqrt{3} \to \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{\varphi} \leftrightarrow -\sqrt{3} \quad \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

Ex 6 $\varepsilon \geq 0$ $\quad (S_\varepsilon) \begin{cases} \dot x = -y \\ \dot y = x + \varepsilon(x^2-1)y \end{cases}$

1) Mq $O = (0,0)$ est un pt fixe μ S_ε

(S_ε) est SD non linéaire autonome d'ordre 1 & de dim 2. On pt réécrire (S_ε) comme $\dot Y = F(Y)$ où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-y\\ x + \varepsilon(x^2-1)y\end{pmatrix}.$$

F est cont loc. lipschit

$\Rightarrow$ de Th $\mathscr{C}$ $\Rightarrow \exists!$ sol max

Déterminons les pts fixes soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pt fixe de $(S_\varepsilon) \Leftrightarrow F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x + \varepsilon(x^2-1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ pt fixe de (S_ε).

2) Pr quelles val^{rs} de ε ce pt fix est-il hyperbliq?

↳ On regarde le linéarisé de $(*)$:

$(**)$ $\begin{cases} \dot u = -v \\ \dot v = u - 2v \end{cases}$, on détermine l'hyperbolicité de $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ μ (S_ε) à celle de $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

On appelle $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ x - \varepsilon y\end{pmatrix}$

Alors $DG\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -\varepsilon\end{pmatrix}$.

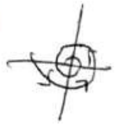
Le poly car de $DG\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\varepsilon-\lambda\end{vmatrix}$

$= \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1.$

• 3 cas possibles pr racines en f ε^2-4.

▸ Si $\varepsilon^2-4<0$ on veut $\underset{0<\varepsilon<2}{\varepsilon\neq 0}$, $\dfrac{-\varepsilon\pm\sqrt{-\Delta}}{2}$

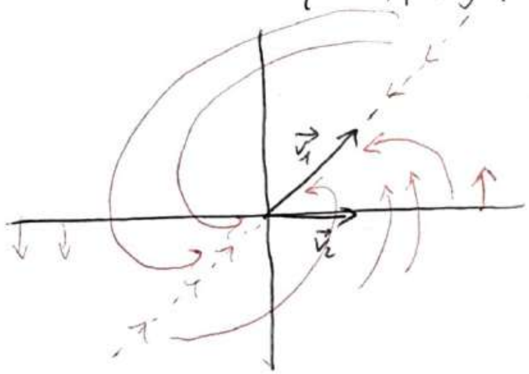
▸ si $\underset{\Leftrightarrow\ \varepsilon=2}{\varepsilon^2-4=0}$, on est bien hyperboliq



$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-y=x\\x-2y=-y\end{cases}$ $\begin{matrix}x=y\\y\in\mathbb{R}\end{matrix}$ $E_{-1}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=v_1$

$\dfrac{-2}{2}=-1.$

$\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix}$ ds base $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ posons $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.



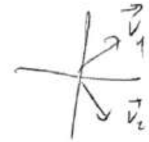
$\varepsilon=2$

▸ si $\varepsilon^2-4>0 \Leftrightarrow \varepsilon>2$,

on veut $\dfrac{-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$ et $\dfrac{-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$

vp ≠ distinctes & négatives.

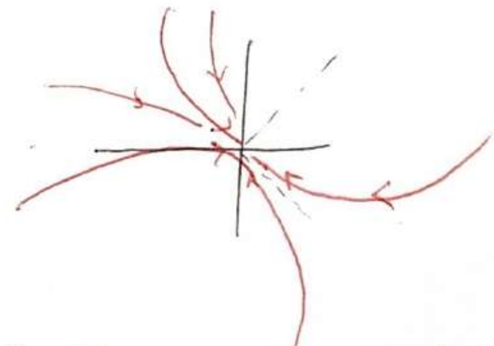
mat diagonalisable & semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ ds la base (v_1,v_2)



$y_{0,1}e^{\lambda_1 t}v_1+y_{0,2}e^{\lambda_2 t}v_2=Y(t)$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

$Y_0=\begin{pmatrix}y_{0,1}\\y_{0,2}\end{pmatrix}_{v_1,v_2} \hookrightarrow \dot{Y}_1=\lambda_1 Y_1$

$Y(t)=-e^{\lambda_2 t}\left(Y_{0,1}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+Y_{0,2}v_2\right)$



On dit O est asymptotiqt stable si ∃ V ω de O tq ∀ $(x_0,y_0)\in\omega \Rightarrow$ trajectoire issue de (x_0,y_0) ∃ ∀ $t\geq 0$ & cv qd $t\longrightarrow\infty$ vers O.

3) Mq $\forall \varepsilon > 0$, f $V(x,y) = x^2 + y^2$ est f de Lyapunov pr un $\mathcal{V}$ de O.

On vérifie (i) V est minorée

(ii) V $\searrow$ S^T le long des traject^{ns}

$I =]t_0, t_0+\varepsilon[$ (iii) si $\exists\ ]t_0, t_0+\varepsilon[$ tq $V \equiv cte$ alors (x,y) pt fixe.

(i) ok.

(ii) $\dfrac{dV}{dt} = 2xx' = 2yy' = -2xy + 2xy + 2y^2\varepsilon(x^2-1)$
$= 2y^2\varepsilon(x^2-1)$.

→ Pour $|x| < \frac{1}{2}$, c'est bien < 0.

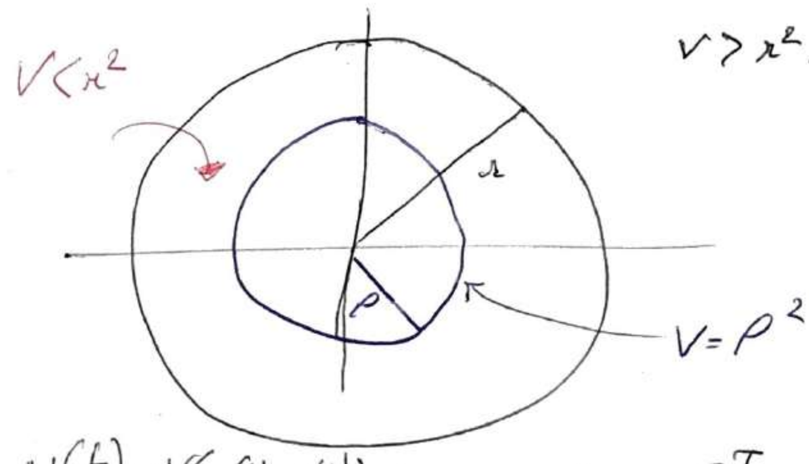
On sppo $|x| < \frac{1}{2}$.

(iii) Spp $\exists\ ]t_0, t_0+\varepsilon[$ tq $V(x(s), y(s)) = cte\ \forall s \in I$

alors $\dfrac{dV}{dt} = 0$ sur I $\Leftrightarrow y^2\varepsilon(x^2-1) = 0$ sur I $\Rightarrow y = 0$ sur $I \Rightarrow x = 0$ s I car (S_ε)

et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pt fixe.

D'où V de Lyapunov (sur $\{x^2+y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2\}$)



$N(t) = V(x(t), y(t)) \geq 0$ $\searrow$ S^T.

$\Rightarrow$ si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in B(0, \frac{1}{\varepsilon})$, c'est vrai pr $t > 0$.

$V \overset{\shortparallel}{<} \frac{1}{4}$.

Donc $V \searrow S^T$ sr $[0, \infty[\Rightarrow N(t) \xrightarrow{cv} N_*$

La trajectoire est bornée.

→ $\exists (x^*, y^*)$ & $(t_n) \nearrow \infty$ $x(t_n), y(t_n) \to (x^*, y^*)$

$N(t_n) \longrightarrow N_* = V(x^*, y^*) \underset{TH}{\overset{par}{\Longrightarrow}} (x^*, y^*)$ pt fixe.

$V(x(t_n), y(t_n))$

de $(x^*, y^*) = (0,0)$.

Dc $N_* = V(x^*, y^*) = 0^2 + 0^2 = 0$.

Dc $V(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t) \longrightarrow 0$

60

Exercice 7 : (SD) $\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = 2xy - y \end{cases}$ $x,y \geq 0$

1) (SD) (CL) ?

$F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a\,b \\ 2a-1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2a \\ 2a-1 \end{pmatrix}$

→ (SD) AO_I, de dim 2.

→ F est C^1 de local^t lipschitzienne. (TH) CL local s'applique. On calcule $(DF)(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ 2y & 2x-1 \end{pmatrix}$.

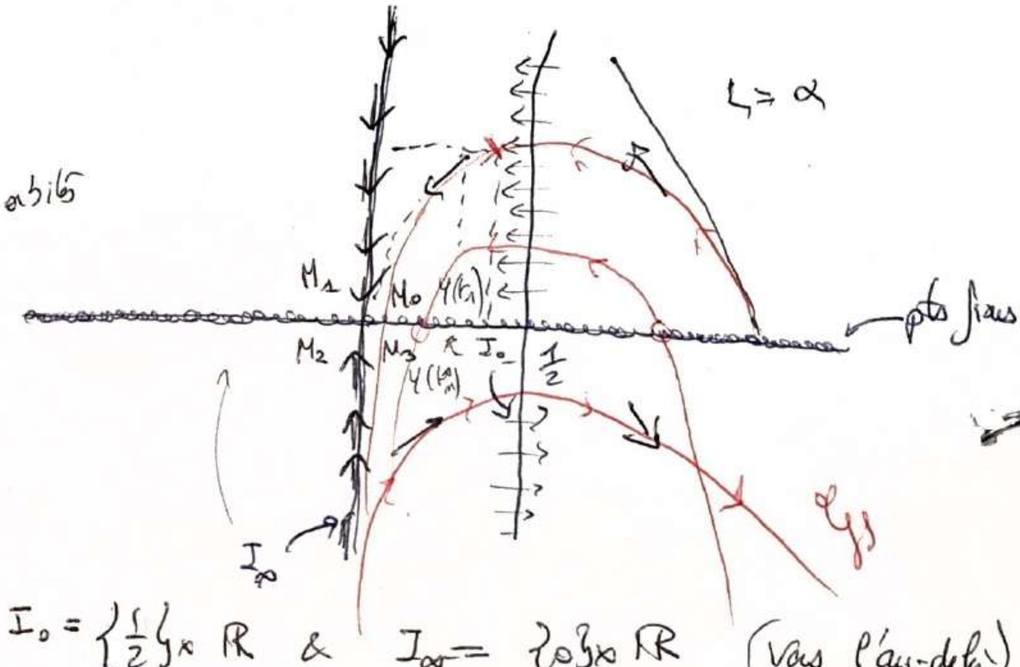
⇒ On ne pt pas invoquer le TH CL g.

$\forall\, Y_0 \in \mathbb{R}^2_{(a)}\ \exists\ I =]T_-, T_+[\ \ni 0$ tq $-\infty \leq T^- < 0 < T^+ \leq \infty$ & $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ solu du pb de Cauchy : $\begin{cases} \dot{Y} = F(Y) \text{ sur } I \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$

(b) Si J intervalle contenant 0 et $Z \in C^1(J)$ solu de $\begin{cases} \dot{Z} = F(Z) \text{ sur } J \\ Z(0) = Y_0 \end{cases}$

alors $Z = Y_{|J}$.

2) Déterminer I_0 & I_∞



$I_0 = \{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}$ & $I_\infty = \{0\} \times \mathbb{R}$ (vers l'au-delà)

$x=0$ et y solu de $\dot{y} = -y$ de $y(0) = y_0$] α

Donne une solu de $\begin{cases} \dot{Y} = F(Y) \\ Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$ β.

Par unicité la solu de (α) est la solu de β

ie $x(t) = 0$, $y(t) = y_0 e^{-t}$. (On a solu globale

On voit que $\{0\} \times \mathbb{R}$ est l'union des 3 orbites :

- $\{0\} \times]0, \infty[$
- $\{0\} \times]-\infty, 0[$
- $\{(0,0)\}$

L'axe est stable par le flot.

Donc (Y, I) est solu° maximale de $\dot{Y} = F(Y)$,

en notant $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, si $\exists\, t_0 \in I$ tq $x(t_0) = 0$ donc $x(t) = 0 \quad \forall t \in I$.

De m̂ si $\exists\, t_0 \in I$ tq $y(t_0) = 0$ alors $\forall t$, $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}$ pt fixe.

° ep si $Y(0) \in M_0 :=]0, \infty[\times]0, \infty[$ alors $\forall t \in I \quad Y(t) \in M_0$. $\begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$.

i) Dmq tte trajectoire issue de M_0 dans D à $t = 0$ y demeure pr le reste de son existence.

$D := \{ (x,y) : 0 < x < \frac{1}{2}, y > 0 \} \subset M_0$.

soit $Y_0 \in D$, $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

D est ouvert dc par continuité de Y $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $Y(t) \in D$ pr $t \in [0, \varepsilon]$

Sppo $\exists\, t^* < T_{max}$ tq $Y(t_*) \notin D$.

$t_1 = \inf \underbrace{\{ t^* > 0, Y(t_*) \notin D \}}_{E}$

$t_1 \geq \varepsilon$; t_1 bien défini p hypo car $E \subset \mathbb{R}_+$ & $E \neq \emptyset$.

On a $Y(t) \in D$ pr $t < t_1$ dc $Y(t_1) \in \overline{D}$ par continuité de Y.

Par minimalité de t_1, $\forall n \geq 1 \quad \exists\, t_n^* \in]t_1, t_1 + \frac{1}{n}[$ tq $Y(t_n^*) \notin D \Rightarrow Y(t_n^*) = \mathbb{R}^2 \setminus D$ par continuité

$t_n^* \xrightarrow[n \to \infty]{} t_1$. On a $Y(t_1) \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus D}$.

Dc $Y(t_1) \in \overline{D} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus D} \rightarrow \overline{D} \cap \mathbb{R}^2 \setminus \mathring{D} = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

$\overline{D} \setminus \mathring{D} = \partial D$

$= \underbrace{\{0\} \times]0, \infty[}_{\text{union orbites}} \cup \underbrace{[0, \frac{1}{2}] \times \{0\}}_{\text{union orbites}} \cup \{\frac{1}{2}\} \times]0, \infty[$

Sppo $Y(t_1) \in \{\frac{1}{2}\} \times]0, \infty[\Rightarrow$ pr $\varepsilon > 0$ petit.

$$D \ni Y(t_1 - \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ y(t_1) \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} -y(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ y(t_1) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \overset{>0}{y(t_1)} \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon^2)$$

Pr $\varepsilon > 0$ assez petit $x(t_1 - \varepsilon) > \frac{1}{2}$ dc $Y(t_1 - \varepsilon) \notin D$. ?!

cal $\forall t \in [0, T_{max}[$, $Y(t) \in D$.

Forme
Intégrale
première : [illegible]

Exercice 2

Si $Y_0 \in D \Rightarrow \forall t \in$ $Y(t) \in D$, $0 < x(t) < \frac{1}{2}$,
$y(t) > 0$; on a aussi $\dot{y}(t) = \underbrace{y(t)}_{>0}\underbrace{(-1+2x(t))}_{<0}$

dc $y \searrow$ et $0 < y(t) < y_0$.
Dc Y est bornée $\forall t \in [0, T_{max}[$:
par ppe d'explosion $T_{max} = \infty$.

5) Exiber une intégrale première pr (SD).

On cherche une intégrale première ss la forme
$E(x,y) = H(x) + G(y)$ $\quad x, y > 0$.
On a la condi° $\frac{\partial}{\partial t}\big(E(x(t), y(t))\big) = 0$.

$0 = \frac{\partial E(x,y)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E(x,y)}{\partial y}\dot{y}$ sr tte traj. de M_0

$\Leftrightarrow 0 = H'(x)(-2xy) + G'(y)\underbrace{(2xy - y)}_{=(2x-1)y}$

$\Leftrightarrow H'(x) = \frac{-1+2x}{2x} G'(y) \quad \forall x, y > 0$.

On prend $G(y) = y$ (pas important)

et $H(x) = -\frac{1}{2}\ln x + x$.

Donc $y + x - \frac{1}{2}\ln(x)$ est constante sr tte trajectoire $\subset M_0$

Sur la trajectoire qui part de $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in M_0$; on a :

$y(t) + x(t) - \frac{1}{2}\ln(x(t)) = y_0 + x_0 - \frac{1}{2}\ln(x_0)$.

$\Rightarrow y(t) = -x(t) + \frac{1}{2}\ln(x(t))$.

Donc $\{(x(t), y(t)),\ t \in I\}$ $G_x : x \mapsto \underbrace{f(x)}_{\leq 0} = x + \frac{1}{2}\ln(x) + c_0$

x	0		$\frac{1}{2}$		∞
f_0' $\left(-1+\frac{1}{2x}\right)$		$+$	0	$-$	
f_0	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{(1+\ln 2)}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

6) Dmq $V(x,y) = x + y$ est une f^ce de Lyapunov pr les traj. dans M_0.

$L(x,y) = x + y$; $V(t) = L(x(t), y(t)) \in C^\infty$

Sur une traj. $\subset M_0$: $\dot{V}(t) = -y(t) < 0$

dc V décroît ST