

CM M44

I / Le plan cartésien

D1 On identifie plan de \mathbb{R}^2 : plan cartésien.

D2 Un élément du plan cartésien ie un couple de numéros réels: un point.

► on nomme un point P , $P := (x, y)$
on écrit $P(x, y)$.

► pas de sens de multiplier par 2 un point.

► soit $P(x, y)$, on note \vec{P} le vecteur (x, y) de l'espace euclidien \mathbb{R}^2 : vecteur sous-jacent à P .

► on ne peut pas additionner point, ni multiplier par des scalaires (M3) opérations possibles sur vecteurs sous-jacents.

D6 Un vecteur concret est la donnée couple ordonné de points. Au lieu de noter (A, B) : \overrightarrow{AB} .

D7 Un vecteur abstrait sous-jacent au vecteur concret \overrightarrow{AB} est le vecteur $\vec{B} - \vec{A}$.

\overrightarrow{AB} est une réalisation de \vec{u} si \vec{u} est le vecteur abstrait sous-jacent à \overrightarrow{AB} , ie $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A}$.

► Par abus notation, on identifie le vecteur concret \overrightarrow{AB} et son vecteur abstrait sous-jacent.

si on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on entend qu'il s'agit des opérations sur les vecteurs abstraits sous-jacents.

D9 (Règle du parallélogramme). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, on dit que ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$$

$$\underline{\text{RM}} \quad \overline{\frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}}{2}} = \overline{\frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}}{2}} = M \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

D10 (somme de vecteurs concrets)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad : \text{Règle de Chastles.}$$

$$\underline{\text{DM}} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{AC}$$

D11 Soit Q le point (x, y) .

On a $\overrightarrow{QP} = \vec{P}$ pour tout point Q .

$$\underline{\text{DM}} \quad \overrightarrow{QP} = \vec{P} - \vec{q} = \vec{P}$$

D12 La norme d'un vecteur abstrait (x, y) est

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y) | (x, y) \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

où $\langle (x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle$ est le produit scalaire entre vecteurs abstraits

D13 La distance AB entre deux points A et B est définie par $AB = \|\vec{AB}\|$.

D14 La distance entre un point A & un ensemble de points \mathcal{G} est définie par $d(A, \mathcal{G}) := \inf_{B \in \mathcal{G}} AB$.

II / Translations

D1 Une isométrie T est une application qui préserve les distances, i.e. $T(A)T(B) = AB$.

P2 Soit un point A , un vecteur \vec{u} . \exists unique point B tq $\vec{AB} = \vec{u}$. On note $A + \vec{u} = B$.

$$\text{D.M. } \vec{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{B} - \vec{A} = \vec{u} \\ \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{A} + \vec{u}.$$

Rq sens à "point" + "vecteur abstrait")
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{\vec{u}} \\ y_A + y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow B = A + \vec{u}$

$$\text{De même, } (\overrightarrow{A + \vec{u}}) = \vec{A} + \vec{u}.$$

$$\text{(P7)} A + \vec{u} = B \Leftrightarrow \forall P, \vec{PA} + \vec{u} = \vec{PB} \\ \Leftrightarrow \exists P, \vec{PA} + \vec{u} = \vec{PB}$$

$$\text{D.M. } \vec{PA} + \vec{u} = \vec{PB} \Leftrightarrow \vec{A} - \vec{P} + \vec{u} = \vec{B} - \vec{P} \\ \text{Par arbitraire: } \Leftrightarrow \vec{A} + \vec{u} = \vec{B} \\ \Leftrightarrow A + \vec{u} = B.$$

D2 L'application $T_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$ est appelée une translation par \vec{u} .

(P7) On a $T_{\vec{0}} = \text{Id.}$ (translation triviale).

$$T_{\vec{0}} = A + \vec{0} = B \\ \text{ou } \vec{B} = \vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$$

$$\Rightarrow B = A \Rightarrow T_{\vec{0}}(A) = A.$$

$$\text{(P8)} T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$$

DM P9 $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}(A) = T_{\vec{u}}(A + \vec{v})$$

$$= (A + \vec{v}) + \vec{u} =: B$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{(A + \vec{v}) + \vec{u}}$$

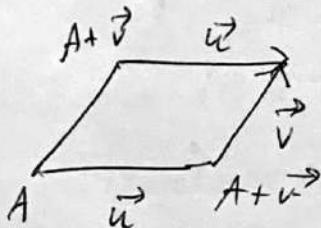
$$= \overrightarrow{A + v} + \vec{u} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{v} + \vec{u}$$

$$= \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{v} + \vec{u}) = \overrightarrow{A} + (\vec{v} + \vec{u})$$

$$\Rightarrow B = A + (\vec{v} + \vec{u})$$

et $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}(A) = T_{\vec{v} + \vec{u}}(A)$

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{u} + \vec{v}}(A)$$



$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = (A + \vec{v}) + \vec{u}$$

P9 Pour $\forall \vec{u}$ la translation $T_{\vec{u}}$ est une isométrie de $T_{-\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$.

DM

$$\Rightarrow T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}} = T_{\vec{u}} + (-\vec{u}) = T_0 = Id.$$

Donc $T_{\vec{u}}$ est une bijection et inverse $T_{-\vec{u}}$.

$$\Rightarrow T_{\vec{u}}(A) T_{\vec{u}}(B) = \|\overrightarrow{B + \vec{u}} - \overrightarrow{A + \vec{u}}\|$$

$$\|\overrightarrow{T_{\vec{u}}(A) T_{\vec{u}}(B)}\|'' = \|\overrightarrow{B + \vec{u}} - (A + \vec{u})\|$$

$$= \|AB\| = AB \Rightarrow T_{\vec{u}} \text{ isométrie.}$$

$$T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$$

P10 Si T est une translation & $B = T(A)$ alors $T = T_{AB}$.

esp $\exists A, T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(A)$ alors $\vec{u} = \vec{v}$ ($\Leftrightarrow T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}}$).

DM Soit $T = T_{\vec{u}}$, on cherche \vec{u} .

$$A + \vec{u} = T(A) = B \Leftrightarrow A + \vec{u} = B \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ par définition}$$

$$\Rightarrow T = T_{AB}$$

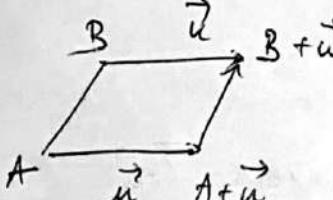
$$T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(A) := B. \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}. (\Rightarrow T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}})$$

$$T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}} \Rightarrow \forall A, T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(A)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

(3)

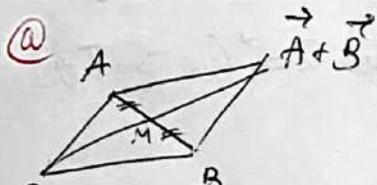
P11 Si T est une applica tq $\exists A, B$,
 $\forall \vec{u}$, $T(A + \vec{u}) = B + \vec{v}$ alors $T = T_{AB}$.



soit P quelconque.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T(P)} &= \overrightarrow{T(A + AP)} = \overrightarrow{B + AP} \\ &= \overrightarrow{B} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{A} \\ &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{T_{AB}(P)} \end{aligned}$$

P12 Les translatos nt affines, ie si T est une translat. A & B 2 points, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow T(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda T(A) + (1-\lambda)T(B)$.

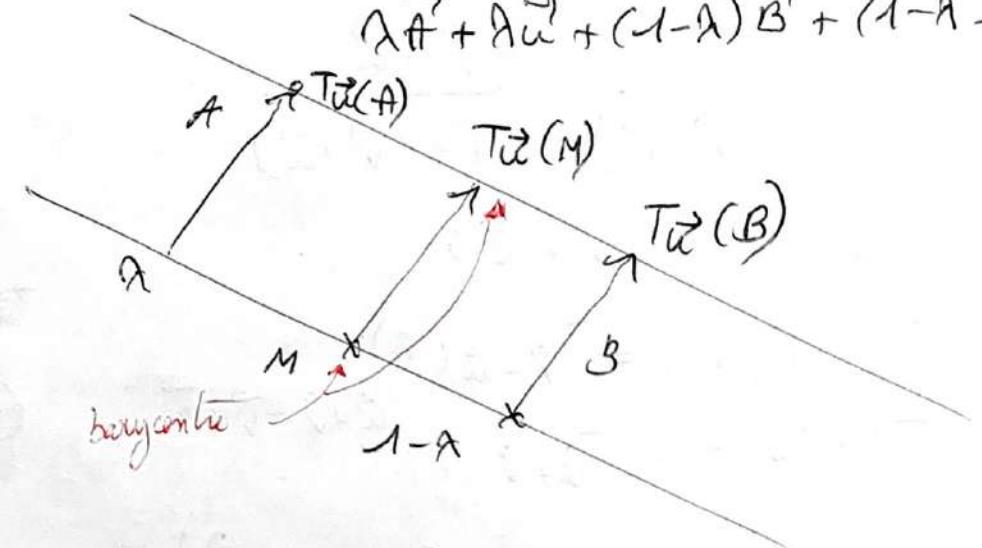
@ 
 $\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ est le milieu de $[AB]$
 a un sens.

$$\begin{aligned} T &= T_{\vec{u}} = T(\lambda A + (1-\lambda)B) \\ &= \lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda)T_{\vec{u}}(B) \end{aligned}$$

points coïncident?

Mq vecteurs sous-jacents coïncident.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T(\lambda A + (1-\lambda)B)} &\stackrel{?}{=} \overrightarrow{\lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda)T_{\vec{u}}(B)} \\ \overrightarrow{\lambda A + (1-\lambda)B + \vec{u}} &\stackrel{?}{=} \lambda (\overrightarrow{A + \vec{u}}) + (1-\lambda) (\overrightarrow{B + \vec{u}}) \\ \overrightarrow{\lambda A + (1-\lambda)B + \vec{u}} &= \lambda \overrightarrow{A} + (1-\lambda) \overrightarrow{B} + \vec{u} \\ \lambda \overrightarrow{A} + \lambda \vec{u} + (1-\lambda) \overrightarrow{B} + (1-\lambda) \vec{u}. \end{aligned}$$



III / Repères affines

D1 Un repère (affine) est (O, \vec{u}, \vec{v}) ,
où un point, \vec{u}, \vec{v} 2 vecteurs abstraits
indépendants. (\vec{u}, \vec{v}) est une base
du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

D2 Un repère (affine) (O, \vec{u}, \vec{v}) est
orthonomé si (\vec{u}, \vec{v}) est une base
orthonormée du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

D3 Le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ est le
repère canoniq. (il est orthonormé).

P5 Si (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère ; l'application
 $(x, y) \mapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijection
(isomorphisme affine) du \mathbb{R}^2 du plan cartésien. \Rightarrow c'est surjectif. $\forall A$ on a:

Si on + repère ortho. \Rightarrow isométrie.

I $\underline{\text{DM}}$ $(x, y) \mapsto x\vec{u} + y\vec{v}$.
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijection linéaire

isométrie si (\vec{u}, \vec{v}) BON.

$$\vec{w} \xrightarrow{\text{D}} O + \vec{w}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{B}} \mathbb{R}^2$$

(plan euclidien) (plan cartésien)

$$(x, y) \xrightarrow{\text{A}} x\vec{u} + y\vec{v} \xrightarrow{\text{B}} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$$

isomorphisme \vec{w}

3: isomorphisme isométrie

on va donc $\vec{w} \rightarrow O + \vec{w}$ est une bijection isométrique.

$$\Rightarrow \text{c'est injectif: } O + \vec{w}_1 = O + \vec{w}_2$$

$$\vec{o} + \vec{w}_1 \stackrel{\text{D}}{=} \vec{o} + \vec{w}_2$$

$$\vec{w}_1 \stackrel{\text{D}}{=} \vec{w}_2 \Rightarrow \text{B injective.}$$

$$A = O + \overrightarrow{OA} \Rightarrow A \in \text{Im } \text{B} \Rightarrow \text{B surjective.}$$

$$(O + \vec{w}_1)(O + \vec{w}_2) = \| \overrightarrow{O + \vec{w}_2 - O + \vec{w}_1} \|$$

$$= \| \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \| = \| \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \| \Rightarrow \text{B est une isométrie.}$$

$$(R) \text{ si } \underline{\Omega} = (0,0) \quad / \quad \vec{u} = \vec{e}_1^*(1,0)$$

$$\vec{v} = \vec{e}_2^*(0,1)$$

$$\text{ alors } P(x,y)_{\underline{\Omega}} \Leftrightarrow P = \underline{\Omega} + x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = (x,y)$$

(P7) Soit un repère $\mathcal{R} = (0, \vec{u}, \vec{v})$ et notons

$\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base associée.

Alors pour tout point $P(x_p, y_p)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}(x_w, y_w)_{\mathcal{B}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_p + x_w, y_p + y_w)_{\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{DM}}{=} P + \vec{w} &= (0 + x_p \vec{u} + y_p \vec{v}) + (x_w \vec{u} + y_w \vec{v}) \\ &= (0 + x_{p+w}) \vec{u} + (y_p + y_w) \vec{v} \\ &= (x_p + x_w, y_p + y_w)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{coord } P \\ \text{du repère} \end{array} + \begin{array}{c} \text{coord } w \\ \text{de la base} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{coord } P + w \\ \text{de la même.} \end{array}$$

III / Repères affines

(D1) Un repère (affine) est (O, \vec{u}, \vec{v}) ,
 O un point, \vec{u}, \vec{v} 2 vecteurs abstraits
 indépendants. (\vec{u}, \vec{v}) est une base
 du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

(D2) Un repère (affine) (O, \vec{u}, \vec{v}) est
 orthonormé si (\vec{u}, \vec{v}) est une base
 orthonormée du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

(D3) Le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \vec{e}(1, 0)$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}(0, 1)$ est le
 repère canonique (il est orthonormé).

(P5) Si (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère ; l'application
 $(x, y) \mapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijection
 (isomorphisme affine) de \mathbb{R}^2 du plan cartésien. \Rightarrow c'est surjectif. $\forall A$ on a :

Si on + repère orthonormé \Rightarrow isométrie.

I $\underline{\text{DM}}$ $(x, y) \mapsto x\vec{u} + y\vec{v}$.
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijection linéaire

isométrie si (\vec{u}, \vec{v}) BON.

$$\vec{w} \xrightarrow{\text{D}} O + \vec{w}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{plan euclidien}} \mathbb{R}^2$$

(plan cartésien)

$$(x, y) \xrightarrow{\text{A}} x\vec{u} + y\vec{v} \xrightarrow{\text{B}} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$$

B : isomorphisme isométrie

on va donc $\vec{w} \rightarrow O + \vec{w}$ est une bijection isométrique.

$$\Rightarrow \text{c'est injectif: } O + \vec{w}_1 = O + \vec{w}_2$$

$$\vec{O} + \vec{w}_1 \stackrel{\text{D}}{=} \vec{O} + \vec{w}_2$$

$$\vec{w}_1 \stackrel{\text{B}}{=} \vec{w}_2 \Rightarrow \text{B injective.}$$

c'est surjectif: $\forall A$ on a :

$$A = O + \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{w}} \Rightarrow A \in \text{Im } B \Rightarrow \text{B surjective.}$$

$$(O + w_1)(O + w_2) = \| \overrightarrow{O + w_2 - O + w_1} \|$$

$$= \| \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \| = \| \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \| \Rightarrow \text{B est une isométrie.}$$

(R9) si $\underline{Q} = (0,0)$ / $\vec{u} = \vec{e}_1^*(1,0)$
 $\vec{v} = \vec{e}_2^*(0,1)$

alors $P(x,y) \in Q \Leftrightarrow P = Q + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x,y)$

(P7) soit un repère $R = (0, \vec{u}, \vec{v})$ et notons

$\mathcal{D} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base axes-jacante.

Alors pour tout point $P(x_p, y_p)_R$ et tout vecteur $\vec{w}(x_w, y_w)_{\mathcal{D}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_p + x_w, y_p + y_w)_R$$

DM $P + \vec{w} = (0 + x_p \vec{u} + y_p \vec{v}) + (x_w \vec{u} + y_w \vec{v})$
 $= (0 + x_p + x_w) \vec{u} + (y_p + y_w) \vec{v}$
 $= (x_p + x_w, y_p + y_w)_R$.

coord P
 du repère + coord w \Rightarrow coord $P + w$
 de base de même.

§ 4 : Barycentre

(D1) w_1, \dots, w_n nbs ≥ 0 forment un système de poids
 si $w_1 + \dots + w_n \neq 0$.

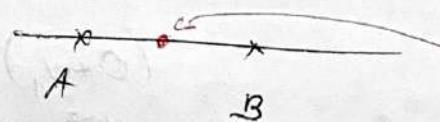
Puis $w := w_1 + \dots + w_n$: poids total.

(D2) si w_1, \dots, w_n est normalisé si
 poids total = 1.

$$\Leftrightarrow p.m. \overline{w_1}, \dots, \overline{w_n} \text{ & } \overline{w_i} = \frac{w_i}{w}$$

(D3) m points A_1, \dots, A_n ; w_1, \dots, w_n ,
 Barycentre de (A_1, \dots, A_n) de poids $(w_1 : \dots : w_n)$
 unq point G , $\vec{G} = \frac{1}{w} \sum w_i \vec{A}_i$.
 on note $\sum \overline{w_i} A_i := G$ le barycentre

$(w_1 : \dots : w_n)$ la classe d'équivalence de (w_1, \dots, w_n) par \Leftrightarrow Equiv.
 $(w_1, \dots, w_n) \sim (w'_1, \dots, w'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, (w_1, \dots, w_n) = \lambda(w'_1, \dots, w'_n)$
 $\Leftrightarrow (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}) = (\overline{w'_1}, \dots, \overline{w'_n})$



$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \text{Barycentre de } A, B \text{ avec poids } (1,1)$$

(P4) A_1, \dots, A_n, \dots

$$G = \sum w_i \vec{A}_i \Leftrightarrow \forall P, w\vec{PG} = \sum w_i \vec{PA}_i$$

$$\Leftrightarrow \exists P, w\vec{PG} = \sum w_i \vec{PA}_i.$$

$$\stackrel{D4}{=} w\vec{PG} = \sum w_i \vec{PA}_i$$

$$\Leftrightarrow w(\vec{G} - \vec{P}) = \sum w_i (\vec{A}_i - \vec{P}) = \sum w_i \vec{A}_i - (\sum w_i) \vec{P}$$

$$\Leftrightarrow w\vec{G} = \sum w_i \vec{A}_i$$

$$\Leftrightarrow \vec{G} = \sum \bar{w}_i \vec{A}_i \quad \Rightarrow \exists P \Rightarrow \forall P$$

$$\Leftrightarrow \vec{G} = \sum \bar{w}_i \vec{A}_i \quad (\text{ne d'pd pas pnd})$$

(P5) si w_1, \dots, w_m n'est pas adp i.e

$$w_1 + \dots + w_m = 0 \Rightarrow \forall P, \sum w_i \vec{PA}_i = \sum w_i \vec{A}_i$$

$$\stackrel{D5}{=} \sum w_i \vec{PA}_i = \sum w_i (\vec{A}_i - \vec{P})$$

$$= \sum w_i \vec{A}_i - (\sum w_i) \vec{P} = \sum w_i \vec{A}_i.$$

$$\Rightarrow \sum w_i \vec{PA}_i = \sum w_i \vec{PA}_i \quad \text{si } \sum w_i = 0.$$

(P6) on note $\sum w_i \vec{A}_i := \vec{\sum w_i A_i}$.

$$(R8) (-1)B + (-1)A = B - A = \vec{B} - \vec{A} = \vec{AB}.$$

$\triangle 2B$ n'a pas de sens: dipend pnd $\not\rightarrow$
mais $2B - A$ est un point. $2B - 2A$ est rectangle.

$$\sum \text{coeff} = 1.$$

→ si l'ensemble normalise la somme des poids.

(D11) si (w_i) (solp) nota abusiv:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

(D12) Un point pnd est donne (A, w) par vect \vec{u} :

$$(A+w) + \vec{u} = \left(A + \frac{1}{w}\vec{u}, w\right) \quad \text{si } w \neq 0$$

$$\triangleright \frac{A+B}{2} + \vec{u} = A + B. \quad \triangleright (A, 2) = "2A"$$

$$\triangleright (A, 2) + \vec{u} = "2A + \vec{u}" = 2(A + \frac{1}{2}\vec{u}) = (A + \frac{1}{2}\vec{u}, 2)$$

(D13) Somme (A_i, w_i) points pnd:

$$\sum (A_i, w_i) = \begin{cases} \left(\sum w_i \vec{A}_i, \sum w_i\right) & \text{si } \sum w_i \neq 0 \\ \sum w_i \vec{A}_i & \text{si } \sum w_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (M, 2) \\ \xrightarrow{\quad} \\ (A, 1) \quad (B, 1) \end{array}$$

$$(A, 1) + (B, 1) = \left(\frac{A+B}{2}, 2\right)$$

"point pnd"

$$\bullet (A, -1) + (B, 1) = B - A = \vec{AB} \rightarrow \sum \text{poids: } 0 \text{ vecteur.}$$

$$(P14) (A, 0) = \vec{0}. \quad (A, 0) = \sum \vec{0A} = \vec{0}.$$

$$(P15) si A_1 = \dots = A_m = A \Rightarrow \sum (A_i, w_i) = (A, \sum w_i)$$

$$\text{P(5)} \quad \sum (A_i, w_i) = ?$$

$$(A_i = A)$$

$$\rightarrow \text{si } \sum w_i \neq 0, \quad \sum A_i w_i = (\sum \bar{w}_i A_i, w) = (A, w)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum \bar{w}_i A_i = \sum \bar{w}_i \overset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \textcircled{2}}}{A_i} = (\sum \bar{w}_i) \vec{A}$$

$$\rightarrow \text{si } \sum w_i = 0, \quad \sum (A_i w_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \overset{\substack{\uparrow \\ 1}}{w_i} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \textcircled{2}}}{A_i} = (\sum w_i) \vec{A}.$$

ici on ne peut pas normaliser car $\sum w_i = 0$

$$= (\sum w_i) \vec{A} = \vec{0} = (A, 0)$$

(P17) Somme poids pondérés & additive,

$$\sum_{i=1}^m (A_i, w_i) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) \right) + \left(\sum_{i=k}^m (A_i, w_i) \right)$$

DM

$$\mu k = \{1, \dots, m\}.$$

$$\bullet \text{ 1er cas : } \sum_i w_i = w_1^n \neq 0, \quad \sum_i^{k-1} w_i = w_1^{k-1} \neq 0, \quad \sum_i^m w_i = w_k^n \neq 0$$

$$\text{Rq : } \sum_{i=1}^m w_i = \sum_{i=1}^{k-1} w_i + \sum_{i=k}^m w_i.$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^m (A_i, w_i)$$

$$\Delta = \left(\sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right) + \left(\sum \frac{w_i}{w_k^n} A_i, w_k^n \right)$$

$$\Delta = \left(\frac{w_1^{k-1}}{w_1^n} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \frac{w_k^n}{w_1^n} \sum_{i=k}^m \frac{w_i}{w_k^n} A_i, w_1^n \right)$$

calcul de coordonnées :

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w_1^n} A_i, w_1^n \right) = \sum_{i=1}^m (A_i, w_i)$$

on normalize par les poids totaux.

2^e cas : $w_1^n \neq 0, w_1^{k-1} \neq 0, w_k^n = 0$ (resp $w_1^n = 0$)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^m (A_i, w_i) = \sum \left(\frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right)$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum_{i=k}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A}_i, w_1^{k-1} \right) + \sum w_i \vec{A}_i$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum_{i=k}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A}_i = \vec{0}$$

$$\bullet = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A}_i + \sum_{i=k}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A}_i = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right)$$

$$\bullet \text{ 3° cas : } w_1^m = 0, w_1^{k-1} = 0, w_k^m = 0$$

$$\Delta \Delta \Delta = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^n (A_i, w_i)$$

$$\Delta \Delta \Delta = \sum_{i=1}^k w_i \vec{A_i} + \sum_{i=k}^n w_i \vec{A_i} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{A_i} = \sum_{i=1}^n (A_i, w_i)$$

$$\bullet \text{ 4° cas : } w_n^m = 0, w_1^{k-1} \neq 0 (\Rightarrow w_k^{k-1} = -w_1^{k-1} \neq 0)$$

$$\Delta \Delta \Delta = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^n (A_i, w_i)$$

$$\Delta \Delta \Delta = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right) + \left(\sum_{i=k}^n \frac{w_i}{w_k^m} A_i, w_k^m \right)$$

$$\Delta \Delta \Delta = w_1^k \overrightarrow{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i} + w_k^m \overrightarrow{\sum_{i=k}^n \frac{w_i}{w_k^m} A_i}$$

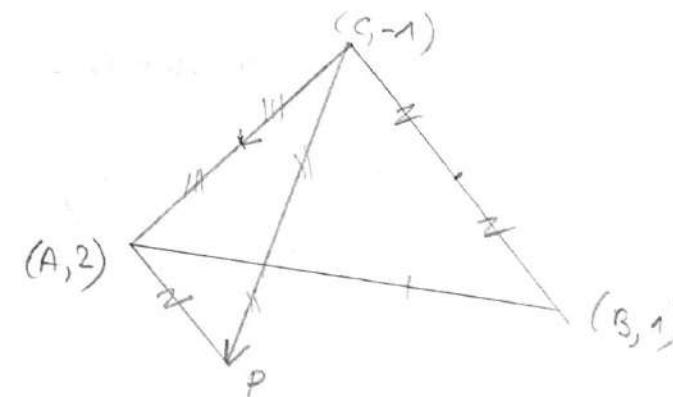
$$\Delta \Delta \Delta = \sum_{i=1}^n w_i \vec{A_i} = \sum_{i=1}^n (A_i, w_i)$$

nomme pondérée.

$$\bullet @ = \underbrace{(A, 2)}_{\text{p. pondr}} + \underbrace{(B, 1)}_{\text{vecteur } \vec{CB}} + \underbrace{(C, -1)}_{\text{p. pondr}} = P$$

$$= \underbrace{(A, 2)}_{\text{p. pondr}} + \underbrace{(B, 1)}_{\text{p. pondr}} + \underbrace{(C, -1)}_{\text{p. pondr}} = P$$

$$= \underbrace{(A, 1)}_{\left(\frac{A+B}{2}, 2\right)} + \underbrace{(B, 1)}_{\vec{CA}} + \underbrace{(A, 1)}_{\text{p. pondr}} + \underbrace{(C, -1)}_{\text{p. pondr}} = P$$



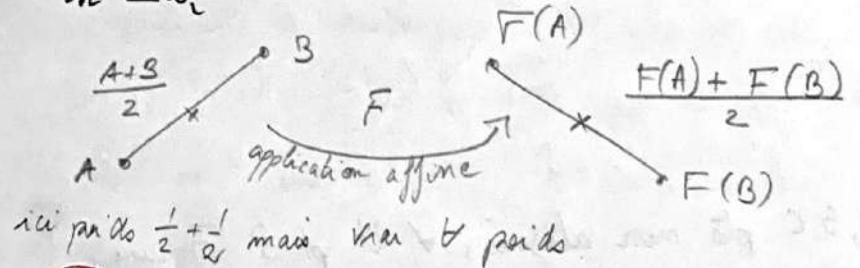
P18 Soit A, B, C pts non alignés, et tt pt P \exists unique triplet de poids normalisés (α, β, γ) tq $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$.

$$\begin{aligned} &\text{DM} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma \\ &P = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow P = (1 - \beta - \gamma)A + \beta B + \gamma C \\ &\Leftrightarrow P = A + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC} \\ &\Leftrightarrow P = (\beta, \gamma)_R. \quad \rightarrow R = (A, \vec{AB}, \vec{AC}) \end{aligned}$$

d'après Δ & unicité des coord de R $\Rightarrow \Delta$ & \exists de (α, β, γ) .

D19 A, B, C PNA (A, B, C) est repère barycentrique & poids normalisés $(\alpha : \beta : \gamma)$ st les coordonnées barycentriques de P ds cette base.

D20 Une appli F est affine si elle préserve les barycentres : ie $F(\sum w_i A_i) = \sum w_i F(A_i)$ si $\sum w_i = 1$.



P21 si F (42), appli $F_A : A + \vec{u} \mapsto A + F(\vec{u})$ est affine. On dit que F_A est "F de centre A".

$$\underline{\text{DM}} \quad F_A(A + \vec{u}) = A + F(\vec{u})$$

$$\begin{aligned} F_A(\sum w_i A_i) &= F_A(A + \sum w_i \overrightarrow{AA_i}) \\ &= A + F\left(\sum w_i \overrightarrow{AA_i}\right) \\ &= A + \sum w_i F(\overrightarrow{AA_i}) = \sum w_i (\underbrace{A + F(\overrightarrow{AA_i})}_{F_A(A + \overrightarrow{AA_i})}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_A(\sum w_i A_i) = \text{barycentre.}$$

sortir somme : appli affine

sortir coeff : appli linéaire.

P22 Une appli F est affine (42)

$$F(\lambda A + (1-\lambda) B) = \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B)$$

pr t p A et B, $\lambda \in \mathbb{R}$.

DM Par récurrence.

$$\Rightarrow F \text{ affine} \Rightarrow F(\lambda A + (1-\lambda) B) = \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B) \text{ def}$$

$$\Leftarrow H_k : "F\left(\sum_i^n w_i A_i\right) = \sum_i^n w_i F(A_i)" \text{ si } \sum w_i = 1$$

H₂: $\boxed{\checkmark}$

On suppose H_k réalisé. on va dmq H_{k+1} soit w_1, \dots, w_{k+1} tq $w_1 + \dots + w_{k+1} = 1$.

Sans généralité, on pt supposer $w_2 + \dots + w_{k+1} \neq 0$.

$$F(w_1 A_1 + \dots + w_{k+1} A_{k+1}) = F(w_1 A_1 + (1-w_1) \times$$

$$\times \left(\frac{w_2}{w_2^{k+1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1} \right)$$

$$= w_1 F(A_1) + (1-w_1) F\left(\underbrace{\frac{w_2}{w_2^{k+1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1}}_{\substack{\text{HDR} \\ \text{à points}}}\right)$$

$$= w_1 F(A_1) + (1-w_1) \left[\frac{w_2}{w_2^{k+1}} F(A_2) + \dots + \right]$$

$$= w_1 F(A_1) + w_2 F(A_2) + \dots$$

§ 5: Homothéties

(D1) Une similitude H de rapport λ est appliquée qui multiplie les distances par λ :
i.e. $T(A)T(B) = \lambda \cdot AB$ pr 2 pts A, B .

On dit que c'est λ -similitude.

(P2) Une 0-similitude est appliquée et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par déf

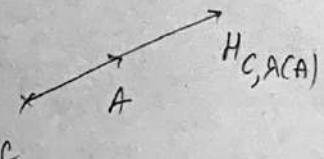
0-similitude : $\forall A, B : T(A)T(B) = 0 \cdot AB$
 $T(A) = T(B)$.

(D3) Soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$H_{C, \lambda} : A \mapsto C + \lambda \vec{CA}$ est appelée

homothétie de centre C et de rapport λ .

RQ H $_\lambda$ est une opération vectorielle si $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



$$(P4) H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$$

$$(P5) H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2}(B) = H_{C,\lambda_2}(C + \lambda_2 \vec{CB})$$

$$(P6) H_{C,1}(B) = C + 1 \cdot \vec{CB} = C + \vec{CB} = B.$$

$$\Rightarrow H_{C,1} = \text{Id} \Rightarrow H_{C,1} = H_{C,1}$$

(P7) Les homothéties de rapport non nul sont des bijections

$$H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,1/\lambda}$$

$$(P8) \boxed{H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda \vec{u}} \circ H_{C,\lambda}}$$

$$H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda \vec{u}.$$

§ 5: Homothéties

(D1) Une similitude H de rapport λ est appliquée à multiplier les distances par λ :
i.e. $T(A)T(B) = \lambda \cdot AB$ pour 2 pts A, B .

On dit que c'est λ -similitude.

(P2) Une 0-similitude est appliquée et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par déf

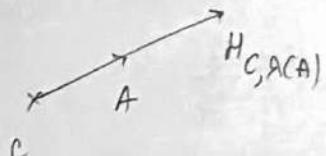
0-similitude : $\forall A, B : T(A)T(B) = 0 \cdot AB$
 $T(A) = T(B)$.

(D3) Soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$H_{C, \lambda} : A \mapsto C + \lambda \vec{CA}$ est appelée

homothétie de centre C et de rapport λ .

(R9) H_λ est une opération vectorielle si: $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



$$(P4) H_{C, \lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}.$$

$$(P5) H_{C, \lambda_1} \circ H_{C, \lambda_2}(B) = H_{C, \lambda_2}(C + \lambda_2 \vec{CB})$$

$$(P6) H_{C, 1}(B) = C + 1 \times \vec{CB} = C + \vec{CB} = B.$$

$$\Rightarrow H_{C, 1} = \text{Id} \Rightarrow H_{C, 1} = H_{C, 2}$$

(P7) Les homothéties de rapport non nul sont des bijections

$$H_{C, \lambda}^{-1} = H_{C, 1/\lambda}$$

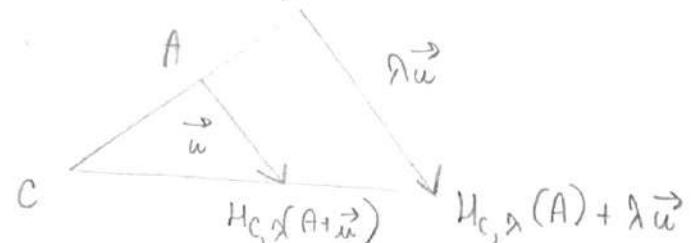
$$(P8) H_{C, \lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda \vec{u}} \circ H_{C, \lambda}$$

Théorème.

$$H_{C, \lambda}(A + \vec{u}) = H_{C, \lambda}(A) + \lambda \vec{u}.$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{DM}}{=} H_{C, \lambda} \circ T_{\vec{u}}(A) &= H_{C, \lambda}(A + \vec{u}) = H_{C, \lambda}(C + \vec{CA} + \vec{u}) = \\ &= C + \lambda(\vec{CA} + \vec{u}) = C + \lambda \vec{CA} + \lambda \vec{u} \end{aligned}$$

$$H_{C, \lambda}(A) = T_{\lambda \vec{u}}(C + \lambda \vec{CA}) = T_{\lambda \vec{u}} \circ H_{C, \lambda}(A).$$



(D9) Une Op de rapport -1 est symétrie centrale & notée $S_c := H_{c,-1}$.

(P10) Une Op $H_{\zeta, \lambda}$ est une $|A|$ -similitude

$$\text{i.e. } H_{\zeta, \lambda}(A) \circ H_{\zeta, \lambda}(B) = |\lambda| \cdot AB$$

et une Op & isom si $\lambda = \pm 1$, ainsi les symboles seules Op non triviales qui sont isométriques.

$$\begin{aligned} \text{DM: } H_{\zeta, \lambda}(A) \circ H_{\zeta, \lambda}(B) &= (C + \lambda \vec{CB}) - (C + \lambda \vec{CA}) \\ &= \lambda(\vec{CB} - \vec{CA}) = \lambda \cdot \vec{AB} \end{aligned}$$

$$H_{\zeta, \lambda}(A) H_{\zeta, \lambda}(B) = |\lambda| \cdot AB.$$

(P11) Toute similitude est la composition d'une isométrie & d'une Op .

$\text{DM: } \bullet T$ est 0-similitude ($\Leftrightarrow T(A) = B \Leftarrow \text{Id}$)

$$T = H_{B, 0} \circ \text{Id} \quad \text{isométrie}$$

$\bullet T$ est 1-similitude $\Leftrightarrow T$ est une isométrie.

$$T = \text{Id} \circ T = H_{\zeta_1} \circ T \quad \text{isométrie.}$$

\bullet si $\lambda \notin \{0, 1\}$, T est λ similitude

$$T = H_{\zeta, \lambda} \circ H_{\zeta, 1/\lambda} \circ T$$

$$H_{\zeta, \frac{1}{\lambda}} \circ T(A) \cdot H_{\zeta, \frac{1}{\lambda}} \circ T(B) = \frac{1}{\lambda} T(A) T(B) = \frac{1}{\lambda} \lambda AB = AB.$$

(P12) Le centre Op non trivial est son unique pt fixe, i.e. H est une Op non triviale et $H(c) = c$ alors c est l'unique pt fixe.

$$\text{DM: } H_{\zeta, \lambda}(A) = A, \quad (\lambda \neq 1)$$

$$H_{\zeta, \lambda}(C) H_{\zeta, \lambda}(A) = \lambda \vec{CA}$$

$$\vec{CA} = \lambda \vec{CA} \Rightarrow \vec{CA} = 0 \Rightarrow A = C$$

$A = c$ trivial obtenu (P10).

(P13) si $\lambda \neq 1$, $A \neq C$ et $H_{\zeta, \lambda}(A) = B \Rightarrow C \in (AB)$.

$$\text{DM: } H_{\zeta, \lambda}(A) = B \Leftrightarrow C + \lambda \vec{CA} = B \Leftrightarrow (1-\lambda)C + \lambda A = B$$

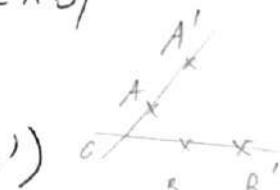
$$\Leftrightarrow (1-\lambda \neq 0) \Leftrightarrow C = \frac{-\lambda}{1-\lambda} A + \frac{1}{1-\lambda} B$$

car $\sum \text{coeff} = 1$.

$$\Leftrightarrow C \in (AB)$$

$$\text{R9: si } H_{\zeta, \lambda}(A) = A', \quad H_{\zeta, \lambda}(B) = B'$$

$$(AA') \neq (BB') \Rightarrow C = (AA') \cap (BB')$$



$$\text{P14: si } H_{\zeta_1, \lambda_1} = H_{\zeta_2, \lambda_2} \Leftrightarrow \zeta_1 = \zeta_2 \text{ et } \lambda_1 = \lambda_2.$$

$\text{DM: } H_{\zeta_1, \lambda_1} = H_{\zeta_2, \lambda_2} \Rightarrow \zeta_1$ et ζ_2 pts fixes de cette Op $\Rightarrow \zeta_1 = \zeta_2$.

$$H_{\zeta_1, \lambda_1} = H_{\zeta_2, \lambda_2} \mid \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Id} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad (\lambda_1 = \lambda_2).$$

$$\text{Id} = H_{\zeta, \frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{\zeta, \lambda_1} = H_{\zeta, \frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{\zeta, \lambda_2} = H_{\zeta, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

P15 Les droites sont affines.

Déf $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ est linéaire.

$$H_{\lambda,\mu}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u} = C + H_\lambda(\vec{u})$$

6 : Droites

(D1) Soit $A, \vec{u} \neq 0$, l'ens $\mathcal{D}_{A, \vec{u}}$:

$$\mathcal{D}_{A, \vec{u}} = \{A + \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ est une droite (affine)}$$

(D2) L'appli $\lambda \mapsto A + \lambda \vec{u} = T_A \vec{u}(\lambda)$ est une bijection de \mathbb{R} ds $\mathcal{D}_{A, \vec{u}}$ appelée paramétrisation affine.

Déf $\lambda \mapsto A + \lambda \vec{u}$ est surjective p. définit.

$$\text{soit } A + \lambda_1 \vec{u} = A + \lambda_2 \vec{u} \Leftrightarrow \vec{A} + \lambda_1 \vec{u} = \vec{A} + \lambda_2 \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \text{injective.}$$

(D3) Pk si vecteurs non nuls \vec{u} & \vec{v} , on note $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$$\text{si } \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad (\lambda \neq 0). \text{ On note } \vec{u} : \vec{v} := \lambda$$

(D4) Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors \vec{v} est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_{A, \vec{u}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{A, \vec{u}} &= \{A + t \vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{A + t \lambda \vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A + s \vec{v} \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{D}_{A, \vec{v}}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v}$ directeur aussi.

(P5) Soit $A \neq B$ d'une droite \mathcal{D} , alors $\vec{AB} \parallel \vec{u}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

$$\begin{aligned} \text{Déf} \quad \mathcal{D} &= \mathcal{D}_0, \vec{u}, \quad A, B \in \mathcal{D}_0, \vec{u}. \quad \boxed{\text{Mg}} \quad (\vec{AB}) \parallel \mathcal{D}_0, \vec{u} \\ A &= 0 + \lambda \vec{u} \Rightarrow \vec{AB} = (\mu - \lambda) \vec{u} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{u}. \\ B &= 0 + \mu \vec{u} \quad (A \neq B \Rightarrow \lambda \neq \mu \Rightarrow \mu - \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

(P6) $\mathcal{D}_{A, \vec{u}} = \mathcal{D}_{B, \vec{v}}$ si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ et $B \in \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$ ($A \in \mathcal{D}_{B, \vec{v}}$)
Ainsi si \vec{u} est vecteur directeur d'une droite, l'ens vectrs de mme droite est $\{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

$$\begin{aligned} \text{Déf} \quad B &\in \mathcal{D}_{A, \vec{u}}, \quad \vec{u} \parallel \vec{v}, \quad B = A + \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{A, \vec{u}} &= \{A + t \vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + \underbrace{\vec{BA} + t \vec{u}}_{-\lambda \vec{u}} \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{B + (t - \lambda) \vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + s \vec{u} \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{D}_{B, \vec{u}} = \mathcal{D}_{B, \vec{v}}. \quad \text{prop 4.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{A, \vec{u}} = \mathcal{D}_{B, \vec{v}} \Rightarrow B \in \mathcal{D}_{B, \vec{v}} = \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$$

soit $M \neq N \in \mathcal{D}_{A, \vec{u}} = \mathcal{D}_{B, \vec{v}}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{MN} &\parallel \vec{u} \\ \overrightarrow{MN} &\parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}. \end{aligned}$$

P7 si une droite contient une autre alors les 2 droites coïncident.

$$\overline{DM} \quad D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}} \text{ tout } M \neq N \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}} \\ \Rightarrow \vec{u} \parallel \overrightarrow{MN} \parallel \vec{v}.$$

$$A \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}} + \text{prop 6.} \Rightarrow D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}.$$

P8 \vec{u}, D alors $\forall A$, on a $D = D_{A,\vec{u}}$.
et si $A \neq B \in D$ alors $D = D_{A,B}$.

P9 Par 2 points passe une unq droite.

$$\text{et si } \#(D_1 \cap D_2) > 1 \text{ alors } D_1 = D_2.$$

DM $A \neq B \in D \Rightarrow D = D_{A,B}$ unq.
 $\#(D_1 \cap D_2) > 1 \Rightarrow \exists A \neq B \in D_1 = D_{A,B}$.
ens := nbr élts ens.

D10 L'unq droite passant par 2 points distincts $A \neq B$ est noté (AB) .

P11 soit $A \neq B$ 2 pts distincts d'une droite D , alors D est l'ens des barycentres de A et B .

$$\overline{DM} \quad M \in (AB) \Leftrightarrow M \in D_{A,B} \Leftrightarrow M = A + \lambda \vec{AB}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow M = (1-\lambda)A + \lambda B$$

P12 $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une biject de \mathbb{R} ds (AB) appelée paramétrisat barycentrig.

$$\overline{DM} \quad \lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda \vec{AB} \quad (\text{bijct d'après 2})$$

P13 L'image d'une droite p une applicat affine est une droite

$$\overline{DM} \quad T \text{ affine. } T((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)T(A) + \lambda T(B)$$

$$T((AB)) = \left\{ (1-\lambda)T(A) + \lambda T(B) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et si $\begin{cases} T(A) \neq T(B) \\ T(A) = T(B) \end{cases} ; \begin{cases} ((T(A) T(B)) \\ \{ T(A) \} \end{cases}$ barycentro lin- \hat{m}

D14 2 droites st \parallel si elles possèdent vecteurs directeur en commun (fals).

R9 $D_1 \parallel D_2$: relat équivalence / classes équivalences: droites
ens directs: espace projectif de dim 1.

(P16) $T_{\vec{v}}(\mathcal{D}_{A, \vec{u}}) = \mathcal{D}_{T_{\vec{v}}(A), \vec{u}}$

$\overline{\text{DM}}$ $T_{\vec{v}}(A + \lambda \vec{u}) = A + \lambda \vec{u} + \vec{v} = (A + \vec{v}) + \lambda \vec{u}$.

$$\begin{aligned} T_{\vec{v}}(\{A + \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}) &= \{A + \vec{v} + \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{D}_{A + \vec{v}, \vec{u}}. \end{aligned}$$

RQ Une droite est invariante par une translat θ $T_{\vec{v}}$
 $\Leftrightarrow \vec{v}$ est vecteur directeur de droite.

$$\mathcal{D}_{A + \vec{v}, \vec{u}} = \mathcal{D}_{A, \vec{u}} \Leftrightarrow A + \vec{v} \in \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$$

$$\vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{v}: \text{directeur de } \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$$

(P17) $H_{C, \lambda}(\mathcal{D}_{A, \vec{u}}) = \mathcal{D}_{H_{C, \lambda}(A), \vec{u}}$

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array} \quad H_{C, \lambda}(A)$$

$$A \quad \vec{u}$$

$$\begin{aligned} H_{C, \lambda}(\{A + t \vec{u}\}) &= \{H_{C, \lambda}(A + t \vec{u})\} \\ &= \{H_{C, \lambda}(A) + \lambda + t \vec{u}\} \\ &= \mathcal{D}_{H_{C, \lambda}(A), \lambda \vec{u}} = \mathcal{D}_{H_{C, \lambda}(A), \vec{u}}. \end{aligned}$$

RQ L'image non nulle d'une droite est une droite \parallel . Thales.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{A, \vec{u}} = \mathcal{D}_{H_{C, \lambda}(A), \vec{u}} &\Leftrightarrow H_{C, \lambda}(A) \in \mathcal{D}_{A, \vec{u}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{D}_{A, \vec{u}} = (A \ H_{C, \lambda}(A)) \ni C. \end{aligned}$$

↳ Droite est invariante par θ non nulle si un autre est sur une droite.

(P18) Étant donnée une droite \mathcal{D} & un point A , \exists unique droite \parallel à \mathcal{D} passant par A .

$$\overline{\text{DM}} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_{B, \vec{u}}: \mathcal{D} \ni A, \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}_{B, \vec{u}} \rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$$

(P19) 2 droites \parallel st disjointes ou confondues.

$$\overline{\text{DM}} \quad \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset \Rightarrow \exists M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathcal{D}_{M, \vec{u}}$$

(P20) Un vecteur $\neq 0$ est normal à \mathcal{D} si il est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite. Deux droites st perpendiculaires si un (tout) vecteur directeur de l'une est un vecteur normal pour l'autre.

(P21) Deux droites perpendiculaires à une 3° st \parallel .

$$\overline{\text{DM}} \quad \mathcal{D}_{A, \vec{u}} \perp \mathcal{D}_{B, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{B, \vec{v}} \parallel \mathcal{D}_{C, \vec{w}}$$

(P22) Étant donné droite \mathcal{D} & point A , \exists unique droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A .

RQ $\vec{u}(x, y); \vec{u}^\perp(-y, x)$.

DH P22 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{B, \vec{u}} \Rightarrow \mathcal{D}_{A, \vec{u}^\perp} \ni A$ $\boxed{\mathbb{R}^q}$ Nota: $\{ax+by=d\} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$

et $\mathcal{D}_{A, \vec{u}^\perp} \perp \mathcal{D}_{A, \vec{u}}$ & vice-versa :

$\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}, A \in \mathcal{D}' \Rightarrow \vec{u}^\perp$ directeur de \mathcal{D}'

(P23) $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \neq (0, 0)$.

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$ est $\vec{m}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

équation cartésienne de cette droite.

DH soit $A(x_A, y_A) \in \{ax+by=d\}$

$$\Leftrightarrow ax_A + by_A = d.$$

$$M \in \{ax+by=d\} \Leftrightarrow ax_M + by_M = d.$$

$$\Leftrightarrow a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \perp (x_M - x_A, y_M - y_A).$$

soit $B = A + (-b, a)$.

$$a(x_A - b) + b(y_A + a) = ax_A - ab + by_A + ab = d.$$

$\Rightarrow B \in \{ax+by=d\}$

$$(-b, a) = \vec{AB} \perp (a, b) \Rightarrow \forall M, \vec{AM} \parallel \vec{AB} (\perp(a, b))$$

$$M = A + \vec{AM} = A + \lambda \vec{AB} \in \mathcal{D}_{A, \vec{AB}} = (AB)$$

$$\Rightarrow \{ax+by=d\} \subset (AB)$$

$$M \in (AB) \Rightarrow M = A + \lambda \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{AB} \perp (a, b)$$

$$\Leftrightarrow M \in \{ax+by=d\}.$$

⑯

Prop 25. Deux droites $\{ax + b_1y = d_1\}$ et $\{a_2x + b_2y = d_2\}$ st égales

(wp parallèles) $\Leftrightarrow (a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$

wp $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$

DM

$\{ax + b_1y = d_1\}$ admt (a_1, b_1) vect normal

et $(-b_1, a_1)$ vect direct $\Rightarrow D_1 \parallel D_2$

$\Leftrightarrow (a_1, b_1) \parallel (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$ ($\lambda \neq 0$)

$(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2) \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, d_1)$

$\Rightarrow \{a_2x + b_2y = d_2\} = \{\lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda d_1\}$

D_2

D_1

Si $D_1 = D_2 \Rightarrow D_1 \parallel D_2$, $\exists \lambda (a_2, b_2) = \lambda(a_1, b_1)$

$\Rightarrow D_2 = \{a_2x + b_2y = d_2\} = \{\lambda a_1x + \lambda b_1y = d_2\}$

$= \{a_1x + b_1y = \frac{d_2}{\lambda}\} = \{a_1x + b_1y = d_1\}$

$\Leftrightarrow d_2 = \lambda d_1 \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, d_1)$

$\Rightarrow (a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$

D₂₆ L'EC $ax + by = d$ est normalisée si $\|(a, b)\| = 1$.

P27 Tte droite possède vect' (EC) (ttes proportionnelles) dt exactement 2 st normalisées.

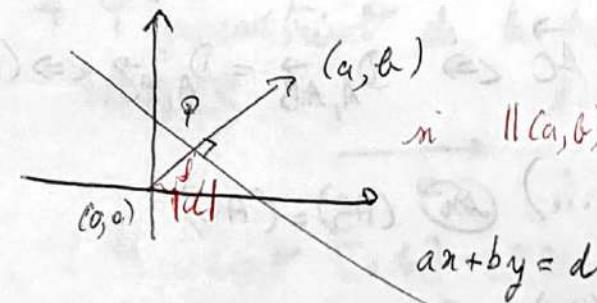
DM Toutes les EC $\{ax + by = d\}$ st de la forme $\{\lambda ax + \lambda by = \lambda d\}$ d'après 25

$\Rightarrow \exists$ une vect' ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$) mais une telle EC est normalisée (st)

$$\|\lambda(a, b)\| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|(a, b)\|} = \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

P28 Si l'EC $ax + by = d$ normalisée de D

$$\Rightarrow d(\mathcal{Q}, D) = |d|, d'$$
 où $\mathcal{Q}(0, 0)$



• $P(da, db)$ car $ada + bdb = d(a^2 + b^2) = d^2$
car normalisé

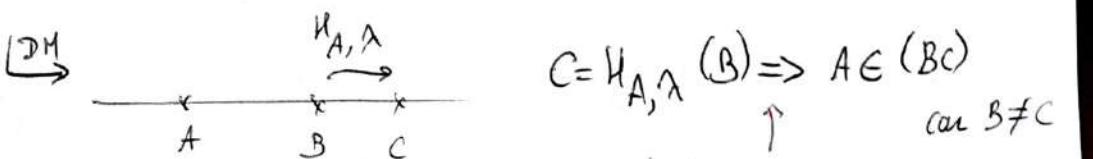
$$\Rightarrow P \in \{ax+by=d\}_{\mathbb{D}}$$

• $\overrightarrow{OP}(da, db) = d(a, b)$ normal à $\{ax+by=d\}$

$\Rightarrow (OP) \perp \mathcal{D}$, d'après le TD,

$$d(0, \mathcal{D}) = OP = \| (da, db) \| = |d|$$

(P5) $(ABC\dots) \Leftrightarrow C = H_{A,\lambda}(B)$ pour certain λ .



$(ABC\dots)$ par hypo,

$$\Rightarrow C \in (AB) = D_{A, \vec{AB}} \Rightarrow C = A + \lambda \vec{AB}$$

$\stackrel{\text{def}}{=} H_{A,\lambda}(B)$

vrai / § 5.

§ 7. Points Alignés

(P6) $(ABC\dots) \Leftrightarrow l'an est un barycentre des 2 autres.$

(D1) Des points st alignés s'ils appartiennent à la m^e droite. (On note : $(ABC\dots)$ si les pts st alignés.

DM Conséq^e directe de

$(AB) = \{ \text{les barycentres de } A \text{ et } B \}$ vrai § 6.

$C \in AB \Leftrightarrow C \text{ barycentre de } A \text{ et } B$

(P3) 3 pts distincts A, B, C st alignés si $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$.

$$\xrightarrow{\text{DM}} \vec{AB} \parallel \vec{AC} \Leftrightarrow D_{A, \vec{AB}} = D_{A, \vec{AC}} \Leftrightarrow (AB) = (AC).$$

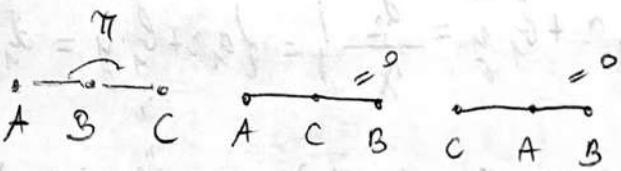
(P4) $(ABC\dots)$ si $(AB) = (AC)$

$\xrightarrow{\text{DM}} (AB) = (AC) = \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, C \in \mathcal{D}$.

$A, B, C \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} = (AB)$ car $A \neq B \Rightarrow (AB) = (AC)$
 $\mathcal{D} = (AC)$ car $A \neq C$ ②

(P7) $(ABC\dots) \Leftrightarrow \angle ABC = 0 \pmod{\pi}$

$$(ABC\dots) \Leftrightarrow \frac{\beta_A - \beta_B}{\beta_C - \beta_B} \in \mathbb{R}.$$



$\beta_A - \beta_B$ affine de \vec{BA} , $(ABC\dots) \Leftrightarrow \vec{BA} = \lambda \vec{BC} (\lambda \in \mathbb{R})$
 $\beta_C - \beta_B$ affine de \vec{BC} , $(ABC\dots) \Leftrightarrow \underline{\beta_A - \beta_B}$

§ 8. Segments & Demis-droites

P.1 $\forall I \subset \mathbb{R}$, on a $\{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in I\} = \{(1-\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$ et on dit que $\lambda \mapsto A + \lambda \vec{AB}$ est une **paramétrisation affine** et que $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une **paramétrisation barycentrique** de cet ens.

$$\stackrel{\text{DM}}{\rightarrow} A + \lambda \vec{AB} = A + \lambda(B - A) = (1-\lambda)A + \lambda B,$$

$$\mathbb{R} \rightarrow D_{A, \vec{AB}} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{Barycentres de } A \text{ et } B\}$$

$\varphi_{A,B} : \lambda \mapsto A + \lambda \vec{AB} = (1-\lambda)A + \lambda B$ est une bijection.

$$\varphi_{A,B} \Big|_I \text{ bijection sur } \varphi_{A,B}(I) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in I\} = \{(1+\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$$

R9 $\varphi_{A,B}$ est **affine** de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_{A,B}(\lambda a + \mu b) = \varphi_{A,B}(a)\lambda + \varphi_{A,B}(b)\mu$$

$\varphi_{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \text{linéaire et } \varphi_{A,B} \text{ "centre" en } A \\ \text{et } (\lambda + \mu) = 1 \end{cases}$

(12) Un ens $[AB] := \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in [0,1]\}$

on dit **segment fermé d'extrémités** A et B .

$\forall C \in [AB]$, on dit que C est **entre** A et B .

(P3) $[AB] = [BA]$.

$$\stackrel{\text{DM}}{\rightarrow} \underbrace{\{(1-\lambda)A + \lambda B\}}_{\lambda \in [0,1]} \quad \underbrace{\{(1-\mu)A + \mu B\}}_{\mu \in [0,1]}$$

$$\lambda \in [0,1] \Leftrightarrow \mu \in [0,1]$$

(P4) $[AB] = [CD] \Leftrightarrow \{A, B\} = \{C, D\}$

i.e. un segment n'a que 2 extrémités.

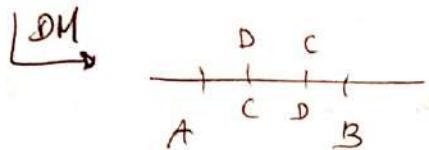
$$\stackrel{\text{DM}}{\rightarrow} [AB] = [CD] \Leftrightarrow [a, b] = [c, d]$$

et φ paramétrise de la droite.

$$\varphi(x) = X \quad A = 0 + au$$

d'après la convention $[a, b] := [b, a]$ si $a > b$.
(@ $[2, 1] := [1, 2]$)

(P5) $[AB] \supset [CD] \Leftrightarrow \{C, D\} \in [A, B]$.



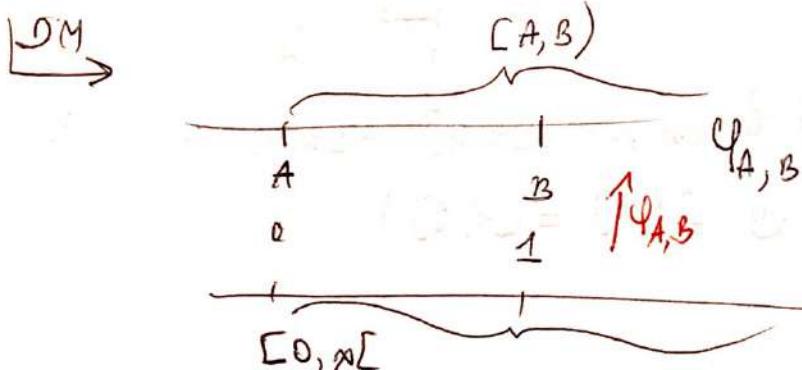
$[AB] \supset [CD] \Leftrightarrow [a, b] \supset [c, d]$
 $\Leftrightarrow \{c, d\} \in [a, b]$

(D6) Un ens de la forme $\overline{[AB]} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in]0, 1[\}$ est dit segment ouvert. Si $C \in \overline{[AB]}$, on dit que C est strictement entre A et B .

(R7) Ainsi $\overline{[AB]}$ et $[AB]$.

Notation $[A, B]$ ~ on peut ajouter virgule.

(D9) Un ens $[AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[\}$ est demi-droite fermée d'extrémité A & de direcc \vec{AB} .

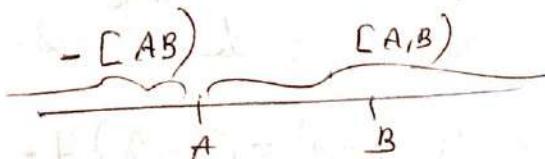


(D10) $\overline{[AB)} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[\}$ est demi-droite ouverte.

(D11) La demi-droite opposée à $[AB)$ est $-[AB)$

$-[AB) = \{A - \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[$ et allié

$-\overline{[AB)} = \{A - \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[$



(P12) La $\frac{1}{2}$ de $[AB)$ est $\frac{1}{2}d$ fermée de direcc \vec{BA} .

De plus $[AB) \cup -[AB) = (AB)$

et $[AB) \cap -[AB) = \{A\}$.

DM $\{A - \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geq 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geq 0\}$

$\overline{[AB')} \quad \overline{[A, B)}$ où $B' = A + \vec{BA}$
 $B' \quad A \quad B$ $B' = A - \vec{AB}$
 $= 2A - B$

En effet $A + \lambda(B' - A) = A + \lambda(2A - B - A)$
 $= A + \lambda(A - B) = A + \lambda \vec{BA} = A - \lambda \vec{AB}$

et comme $[AB')$ de direcc $\vec{AB}' = \vec{BA}$

$[AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geq 0\} \cup \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (AB)$

$\{A - \lambda \vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = -[AB)$

$$[AB) \cap -[AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda > 0\} \cap$$

$$\cap \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda = 0\} = \{A\}$$

P13 Le complémentaire $\frac{1}{2}$ d fermé (resp ouvert) est $\frac{1}{2}$ d ouvert (resp fermé) appelé la demi-droite complémentaire.

• $\hookrightarrow [AB) \setminus [AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda > 0\}$

$$= \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda < 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda > 0\}$$

$$= [AB)$$

P14 Pour tout $[AB) = [CD) \Leftrightarrow A = C$ et $\exists D \in [AB)$ (et/ou $B \in [C,D)$).

$\hookrightarrow \Psi_{A,B}([0, \infty]) = [A, B)$

$$\Psi_{A,B}(C) = D, \quad \Psi_{A,B}(D) = C.$$

Convenzione: $[cd) = \begin{cases} [c, \infty] & \text{si } d > 0 \\]\infty, c] & \text{si } d < 0 \end{cases}$

$$[A, B) = [C, D) \Leftrightarrow [0, \infty] = [c, d)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = A \\ D \in [AB) \end{cases}$$

§ 9. Demi-plans

D1 Si $(a, b) \neq (0, 0)$ un demi-plan ouvert (resp fermé) est pris de la forme $\{ax + by > d\}$ (resp $\{ax + by \geq d\}$). On dit que la droite $\{ax + by = d\}$ délimite ces $\frac{1}{2}$ -plans.

Rq. On peut remplacer $>$ par \geq et $<$ par \leq .

$$ax + by > d \Leftrightarrow (-a)x + (-b)y < -d$$

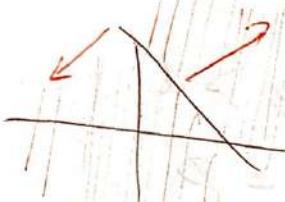
$$\text{délimité par } \{ax + by = d\} = \{(-a)x + (-b)y = -d\}$$

P3 Une droite "coupe" un plan en $\frac{1}{2}$ -plans, i.e. $\mathbb{R}^2 = \{ax + by > d\} \cup \{ax + by = d\} \cup \{ax + by < d\}$

\hookrightarrow Ensuite, il reste à vérifier $\{ax + by < d\}$ est $\frac{1}{2}$ -plan délimité par $\{ax + by = d\}$.

$$\{ax + by < d\} = \{(-a)x + (-b)y > -d\} \text{ délimité par } \{-ax - by = -d\}$$

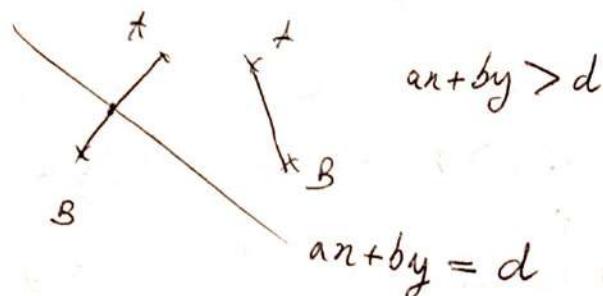
$$\{ax + by = d\}$$



(P4) Soit $D = \{ax+by=d\}$ est un point A et $B \in \{ax+by>d\}$ alors :

$$\Rightarrow B \in \{ax+by>d\} \Leftrightarrow [AB] \cap D = \emptyset$$

$$\Rightarrow B \in \{ax+by< d\} \Leftrightarrow [AB] \cap D \neq \emptyset$$



$$\begin{array}{l} \text{DM} \\ \Leftrightarrow B(x_B, y_B) \in \{ax+by>d\} \\ \Leftrightarrow ax_B + by_B > d \end{array}$$

$$A(x_A, y_A) \text{ tq } ax_A + by_A > d$$

$$a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B) > .$$

$$\bullet = (\lambda + (1-\lambda))d = d$$

$$\Rightarrow \forall C \in [AB] \text{ vérifie } ax+by > d$$

$$\Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\} = \emptyset$$

(P5) si $B(x_B, y_B)$, $ax_B + by_B < d$.

Considérons $\Psi: \mathbb{R} \mapsto a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B)$

$$[0,1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

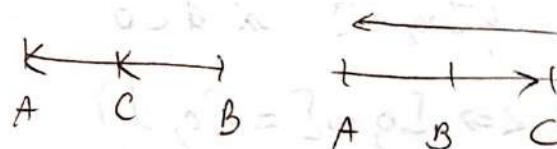
$$\begin{aligned} \Psi(0) &= ax_A + by_A > d && \text{TVI} \Rightarrow \exists \lambda, \Psi(\lambda) = d. \\ \Psi(1) &= ax_B + by_B < d && \begin{array}{l} \text{on appli cont} \\ \text{on appli affine.} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= \lambda A + (1-\lambda)B \quad \text{vérifie } C \in [AB] \quad ([AB]) \\ ax_C + by_C &= d \quad \Rightarrow C \in \{ax+by=d\} \\ \Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\} & \end{aligned}$$

5.10. Relations métriques || ☺||

(P1) Soit $C \in (AB)$, alors $C \in [AB]$

(resp. $C \in [AB]$) si $\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle \geq 0$
(resp. $\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle > 0$).



Def $C \in [AB] \quad (A \neq B)$

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \Leftrightarrow \vec{AC} = \lambda \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BC} = (1-\lambda) \vec{BA} = (\lambda-1) \vec{AB}.$$

$$\vec{CA} = -\lambda \vec{AB} = \lambda \vec{BA}$$

$$\vec{BC} = (\lambda-1) \vec{AB} = (1-\lambda) \vec{BA}.$$

• $\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle = \langle (1-\lambda) \vec{BA} | \lambda \vec{BA} \rangle$
 $= (1-\lambda)\lambda \parallel \vec{BA} \parallel^2$

$$\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle >_0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\lambda >_0 0$$

~~\int_0^1~~ $\Leftrightarrow \lambda \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow C \in [AB].$$

DMP $C \in [AB] \quad (A \neq B)$

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \Leftrightarrow \vec{AC} = A \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BC} = (1-\lambda) \vec{BA} = (A-1) \vec{AB}.$$

$$\vec{CA} = -\lambda \vec{AB} = \lambda \vec{BA}$$

$$\vec{BC} = (A-1) \vec{AB} = (1-\lambda) \vec{BA}.$$

$$\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle = \langle (1-\lambda) \vec{BA} | \lambda \vec{BA} \rangle$$

$$= (1-\lambda)\lambda \|\vec{BA}\|^2$$

$$\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle \geq 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\lambda \geq 0$$

~~$\circ / 1$~~ $\Leftrightarrow \lambda \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow C \in [AB]$$

Q2 soit $A, B, C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + \langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle + CB^2$

③ TH Pythag Étant 3 pts dots de A, B, C , droites AC & BC et perpendiculaires si

$$AB^2 = CA^2 + CB^2.$$

D'après ②, $AB^2 = AC^2 + CB^2$ si $\langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow \overset{\text{def}}{(AC) \perp (CB)}.$

④ (I) A, B, C dots ds.

$$(i) AB \leq BC + CA$$

$$(ii) AB = BC + CA \text{ si } C \in [AB].$$

D'après ② $AB^2 = AC^2 + \langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle + CB^2$

d'après Cauchy-Schwarz $\leq AC^2 + 2AC \cdot CB + CB^2 = (AC+CB)^2$

\Leftrightarrow "si $\vec{AC} \parallel \vec{CB}$ et $\langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle \geq 0$.

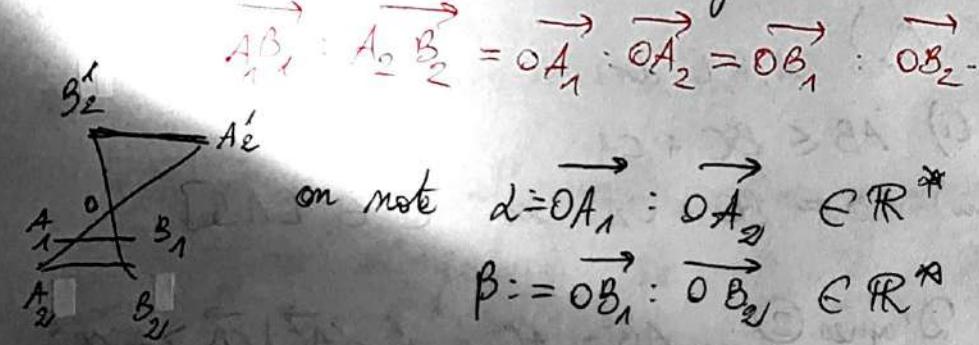
+ plus l) $\Leftrightarrow C \in [AB]$

$$\text{DM } AB^2 = \langle \vec{AB} | \vec{AB} \rangle = \langle \vec{AC} + \vec{CB} | \vec{AC} + \vec{CB} \rangle$$

$$= \langle \vec{AC} | \vec{AC} \rangle + \langle \vec{CB} | \vec{CB} \rangle + \langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle + \langle \vec{CB} | \vec{AC} \rangle$$

$$= AC^2 + 2 \langle \vec{AC} | \vec{CB} \rangle + CB^2$$

(P5) (Th Thales) pt dots A_1, A_2, B_1, B_2
et $\{AB = (A_1 A_2) \cap (B_1 B_2)\}$ alors on a
l'équivalence $(A_1 B_1) \parallel (A_2 B_2)$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}$
et si cette condi est vérifiée ns avons



on note $\alpha := \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} \in \mathbb{R}^*$

$\beta := \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2} \in \mathbb{R}^*$

$(A_1 B_1) \parallel (A_2 B_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,$

$\overrightarrow{A_1 B_1} = \lambda \overrightarrow{A_2 B_2}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OB_2} - \lambda \overrightarrow{OA_2}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{\lambda OA_2} - \overrightarrow{\lambda OA_1} = \overrightarrow{\lambda OB_2} - \overrightarrow{\lambda OB_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{(\lambda - \alpha)OA_2} = (\lambda - \beta) \overrightarrow{OB_2} \quad (\overrightarrow{OA_2} \parallel \overrightarrow{OB_2})$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda - \alpha = \lambda - \beta.$ libres

$\Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (= \lambda).$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2} \quad (= \overrightarrow{A_1 B_1} : \overrightarrow{A_2 B_2})$

11. Projection Orthogonale

(D) D droite, M point, $D' \perp D$ passant par M.
On note $P_D(M) := D \cap D'$. L'application P_D ainsi définie est appelée la projection orthogonale sur D.

(P2) $P_D(M) = M \Leftrightarrow M \in D$.

$$\overline{\overline{OM}} \quad M \in D \Rightarrow M \in D' \quad M \notin D \Rightarrow M \in f(M) \\ M = P_D(M) \supset D.$$

(P3) $P_D(M) = P \Leftrightarrow P \in D$ et \overrightarrow{MP} est nul ou vect normal à D.

$$\overline{\overline{MP}} \quad M \in D \Rightarrow M = P_D(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP_D(M)} = 0 \\ M \notin D \Rightarrow P_D(M) \supset D, \overrightarrow{MP_D(M)} \text{ normal à } D \text{ par def} \\ \text{ni } P_D \in D : \overrightarrow{MP} \perp D \text{ alors}$$

$$P \in D' \Rightarrow P \in D \cap D' \\ \Rightarrow P = P_D(M)$$

(P4) soit D_A, \vec{u} droite & \vec{v} un de ses actes normaux. Alors $P_D(A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = A + \lambda \vec{u}$.

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{\quad \vec{u} \quad} \end{array} \overset{M}{\overbrace{A + \vec{u}}} \underset{P_D(M)}{\xrightarrow{\quad \vec{D}M \quad}} \text{mit } P = A + \lambda \vec{u} \in D_{A, \vec{u}}$$

$$M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Rightarrow \vec{MP} = (A + \lambda \vec{u}) - (A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = -\mu \vec{v} + D_{A, \vec{u}}.$$

$$P_D(A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = A + \lambda \vec{u}$$

(P5) Les projos orthogonaux et des applicatifs affines idempotents, ie $P_D \circ P_D = P_D$.

$$\overset{\text{DM}}{\overbrace{P_D \circ P_D(M)}} = P_D(M) \quad \forall M \Rightarrow P_D \circ P_D = P_D$$

(P6) Si $D_1 \perp D_2$ sécantes en 0 alors $P_{D_1} \circ P_{D_2} = 0 = P_{D_2} \circ P_{D_1}$
ou 0 applicat de $A \mapsto 0$, $\forall A$.

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{\quad \vec{u} \quad} \end{array} \overset{M}{\overbrace{A + \vec{u}}} \underset{P_D(M)}{\xrightarrow{\quad \vec{D}M \quad}} \text{mit } M = 0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

où $D_1 = D_0, \vec{u}$, $D_2 = D_0, \vec{v}$
 $(D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v})$

$$P_{D_2} \circ P_{D_1}(M)$$

D'après (prop 4) : $P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) = 0$

$$= P_{D_1} \circ \underbrace{P_{D_2}(0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v})}_{0 + \mu \vec{v}} = 0$$

$$= P_{D_2} \circ \underbrace{P_{D_1}(0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v})}_{0 + \lambda \vec{u}} = 0$$

(P7) La réciproque n'est vraie que si $D_1 \neq D_2$, P_{D_1} et P_{D_2} commutent sur $D_1 \cap D_2$ ou $D_1 = D_2$.

$$\overset{\text{DM idée}}{\overbrace{P_{D_2} \circ P_{D_1}(M)}} \xrightarrow{\quad \vec{M} \quad} D_2$$

$$\xrightarrow{\quad \vec{P_{D_1}(M)} \quad} D_1$$

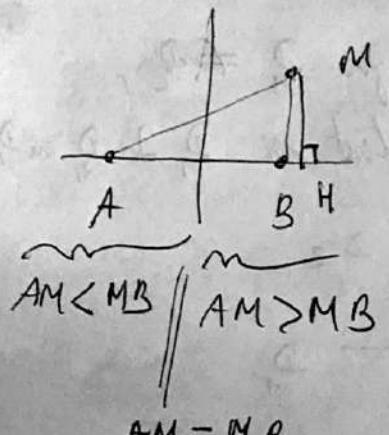
$$P_{D_2} \circ P_{D_1}(M) \neq 0, \quad P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) \in D_1$$

$$\Rightarrow P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) \neq P_{D_2} \circ P_{D_1}(M)$$

12. Médiatrices

(P1) Soit pts $A \neq B$. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par milieu de $[AB]$.

(P2) $A \neq B$, l'ens $\{M \mid AM = BM\}$ est la médiatrice, et $\frac{1}{2}$ plans délin. P méd. et $\{M \mid AM > BM\}$



$$\cancel{\{M \mid AM = BM\}}$$

\overline{DM} soit $H := P_{(AB)}(M)$
par Pythagore, $AM^2 = AH^2 + HM^2$
 $BH^2 = BM^2 + HM^2$

$$\text{Ainsi } AM \geq BM \text{ si}$$

$$AM^2 \geq BM^2 \text{ si}$$

$$AH^2 \leq BH^2 \text{ si}$$

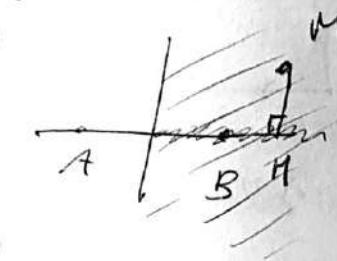
$$AH \leq BH$$

cl $AM = MB \Leftrightarrow P_{(AB)}(M)$ milieu de $[AB]$
 $\Leftrightarrow M \in \cancel{\{M \mid AM = BM\}}$ médiat. de $[AB]$

$$AM > MB \Leftrightarrow AM > HB$$

$$\Leftrightarrow M \in \frac{1}{2} \text{ plan de } B.$$

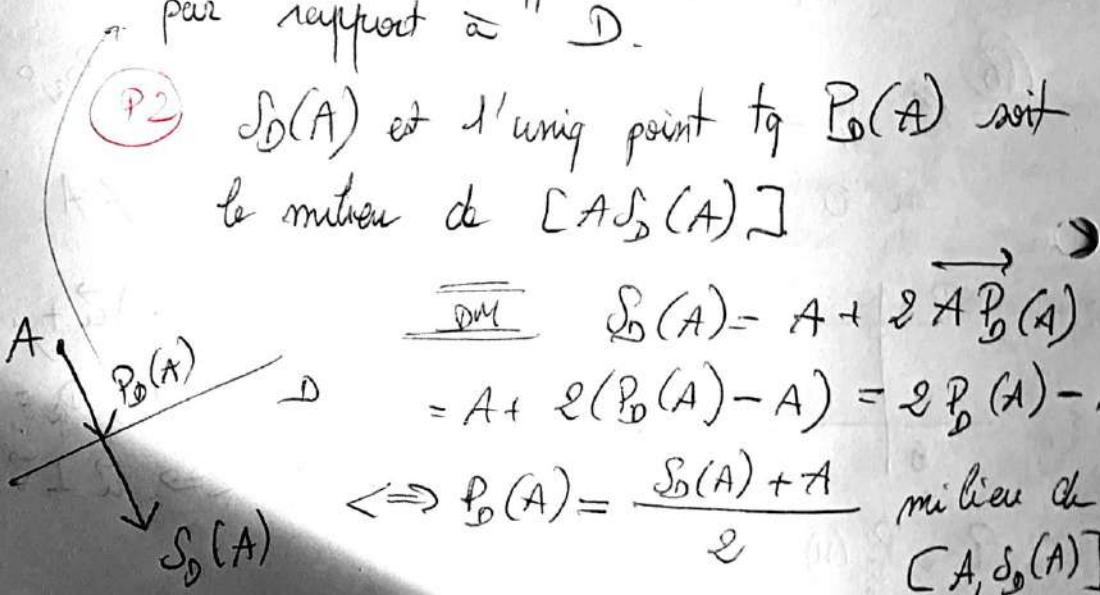
et inversement pr A.



13. Symétrie axiale

(P1) Soit D droite, A point. On pose $S_D(A) := A + 2\vec{AP}_D(A)$. L'application S_D ainsi def est appelée **symétrie axiale** par rapport à D .

(P2) $S_D(A)$ est l'uniq point tq $P_D(A)$ soit le milieu de $[AS_D(A)]$



Q3 Si $A \notin D$, $S_D(A)$ est l'uniq point tq D soit médiatrice de $[AS_D(A)]$.

DM D'après 2), D passe par milieu de $P_D(A)$ de $[A \cdot S_D(A)]$. De +,

$$D \perp (AP_D(A)) = (AS_D(A)) \Rightarrow$$

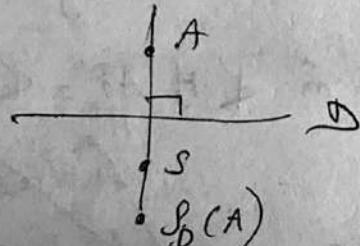
$\Rightarrow D$ médiat. de $[A \cdot S_D(A)]$.

Voulons l'unicité: Supposons D médiat. de $[A, S]$, $(AS) \perp D + (AS_D(A))$

$\Rightarrow A, S, S_D$ alignés sur D .

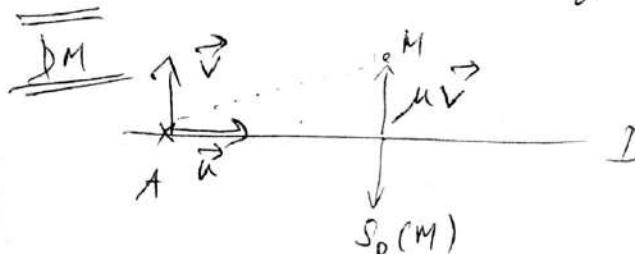
$$\frac{A+S}{2} = D \cap D \\ = \frac{A+S_D(A)}{2}$$

$$\Rightarrow S = S_D(A)$$



□

Q4 Soit $D = D_{A, \vec{u}}$, \vec{v} un de ses vect normes.
Alors $S_D: A + \mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v} \mapsto A + \mathbb{R}\vec{u} - \mu\vec{v}$.



$$\begin{aligned} S_{D_{A, \vec{u}}}(M) &= M + \mathbb{R}M P_D(M) = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v} + \\ &\quad + \mathbb{R}(A + \mathbb{R}\vec{u} - A - \mathbb{R}\vec{u} - \mu\vec{v}) \\ &= A + \mathbb{R}\vec{u} - \mu\vec{v} \end{aligned}$$

Q5 Les symétries axiales et des isométries affines q st l're mème inverse. (de m par projds)

DM $S(\mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v}) = \mathbb{R}\vec{u} - \mu\vec{v}$ la symétrie linéaire $P_{D_{A, \vec{u}}}(A + \mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v}) = A + S(\mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v})$ qui rapport à droite engendrée par $\langle \vec{u} \rangle$ est appli linéaire.

appli affine

$$\begin{aligned} S_{D_{A, \vec{u}}} \circ S_{D_{A, \vec{u}}}(A + \mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v}) &= S_{D_{A, \vec{u}}}(A + \mathbb{R}\vec{u} - \mu\vec{v}) \\ &= A + \mathbb{R}\vec{u} + \mu\vec{v} + \mathbb{R}\vec{u}, \end{aligned}$$

□

(P6) L'ens des points fixes de D_D et D_1
i.e. $S_{D_D}(A) = A \Leftrightarrow A \in D$.

$$\boxed{JM} S_{D_D, \vec{u}}(A) = S_{D_D, \vec{u}}(O + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v})$$

$$= O + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\text{si } \mu = -\mu$$

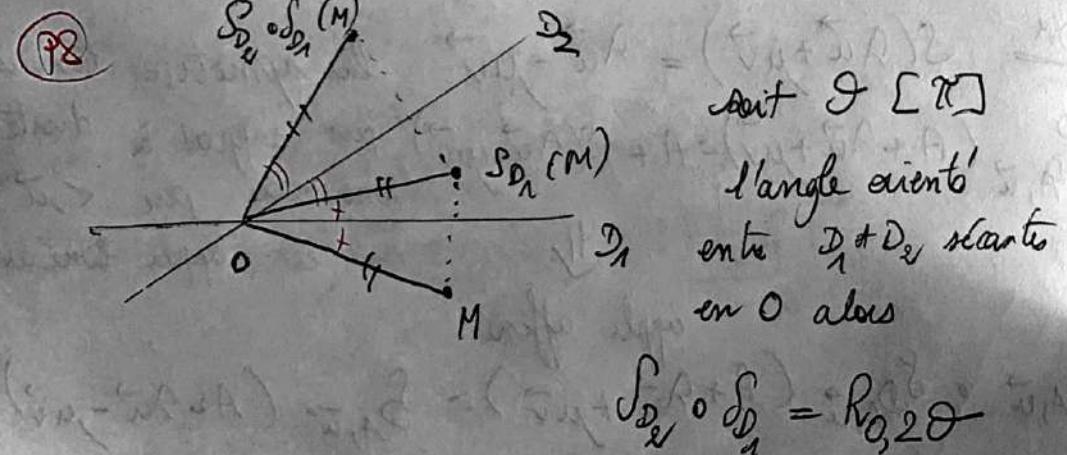
$$\text{si } \mu = 0$$

$$\text{si } A \in D, \vec{u} = \vec{0}.$$

(P7) $D_1 = D_2 \Leftrightarrow S_{D_1} = S_{D_2}$.

\Rightarrow "évident"

(\Leftarrow) Si $S_{D_1} = S_{D_2}$ d'après (6), $D_1 =$ "ens pts fixes"
 $= D_2$



(P8) Soit θ l'angle orienté entre $D_1 + D_2$ sécants en O alors

$$S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{O, 2\theta}$$

DM $OM = \odot S_{D_1}(M)$ car D_1 médiatrice de $(M S_D(M))$

De même, $\odot S_{D_1}(M) = \odot S_{D_2} \circ S_{D_1}(M)$
 $\Rightarrow OM = \odot S_{D_2} \circ S_{D_1}(M)$.

$\left\langle \begin{array}{l} M \in P_{D_1}(M) \\ = \left\langle \begin{array}{l} P_{D_1}(M) A S_{D_1}(M) \\ = \left\langle \begin{array}{l} P_{D_1}(M) A S_{D_1}(M) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$

$\triangle AMP_{D_1}(M) = \triangle P_{D_1}(M) A S_{D_1}(M)$

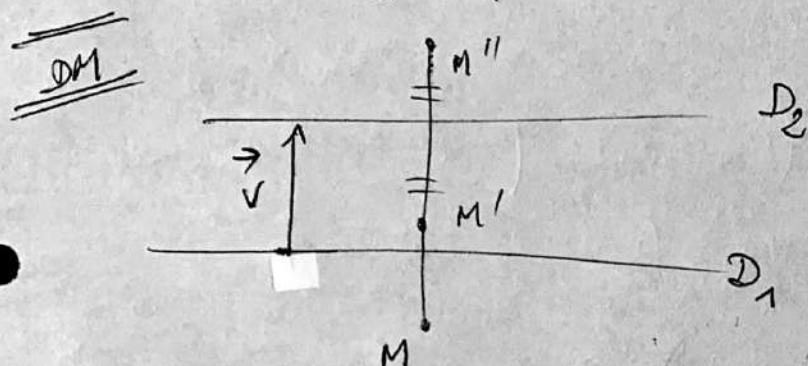
on 3 catés égals

De m $\angle M'AP'' = \angle P'AM''$

Ainsi $\angle MAM'' = \angle MAP' + \angle P'AM' + \angle M'AP''$

$\angle MAM'' = \angle MAP' + \angle P'AM' + \angle M'AP''$
 $= 2\angle PAM' + 2\angle M'AP'' = 2\angle PAP''$
 $= 2\theta (D_1, D_2)$.

29) Soit $D_1 \parallel D_2$ & $D_2 = D_1 + \vec{v}$ où
 \vec{v} est un vecteur normal aux droites
 $\Rightarrow S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{\vec{v}}$



(R9) $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow \exists \vec{v} \perp D_1 \text{ tq } D_2 = D_1 + \vec{v}$.

Soit $O \in D_1$, $(\vec{u} \perp \vec{v})$

$$\begin{aligned} S_{D_2} \circ S_{D_1} (O + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= S_{D_2} (O + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}) \\ &= S_{D_2} (O + \vec{v} + \lambda \vec{u} - (\mu + 1) \vec{v}) \\ &= O + \vec{v} + \lambda \vec{u} + (\mu + 1) \vec{v} \\ &= O + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + 2\vec{v} = M + 2\vec{v}. \end{aligned}$$

§ K. Circles

(D1) Point O , $R > 0$:

- $\triangleright C(O, R) = \{A \mid OA = R\}$, l'arc de centre O & rayon R
- $\triangleright D(O, R) = \{A \mid OA \leq R\}$, disque fermé de centre O & R .
- $\triangleright \{A \mid OA < R\}$, l'intérieur $C(O, R)$ → disque ouvert
- $\triangleright \{A \mid OA > R\}$, l'extérieur $C(O, R)$.

(D2) On dit que x est à l'intérieur (resp. à l'ext.) d'un cercle si il est contenu dans son intérieur (resp. ext.).

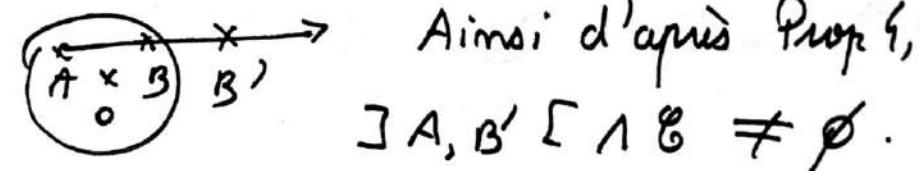
(P3) Soit A point, X ensemble de points $\Rightarrow d(A, X) \geq R$

(m) X n'a pas de points à l'intérieur $C(A, R)$.



- $\Leftrightarrow d(A, P) > R \wedge P \in X$
- $\Leftrightarrow \forall P \in X, d(A, P) \notin R$
- $\Leftrightarrow \forall P \in X, P \notin \text{intérieur } C(A, R)$

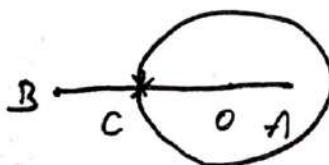
P4 C cercle, A pt int à C & B un pt ext à $C \Rightarrow C \cap]AB[\neq \emptyset$.



Ainsi d'après Prop 4,
]A, B' [\cap C \neq \emptyset.

R^M → l'appli $f: z \mapsto d((1-\lambda)A + \lambda B, 0)$
est cont tq $f(0) = d(A, 0) < R$
 $f(A) = d(B, 0) > R$, d'après TVI
 $\exists \lambda_0 \in]0, 1[$ tq $f(\lambda_0) = R$
 $\Rightarrow C := (1-\lambda_0)A + \lambda_0 B \in]A, B[$.
et $f(\lambda_0) = d(C, 0) = R \Rightarrow C \in \mathcal{C}(0, R)$

$C \in]A, B[\cap C \Rightarrow \neq \emptyset$ & ~~différents sur~~
~~voit que f est monotone~~ $\Rightarrow \lambda_0 = 1$



P6 C , A pt int à C , $B \neq A$,
 $C \cap]AB[\neq \emptyset$.

R^M $C \subset [A, B]$ est non bornée $\Rightarrow [AB]$
n'est pas int du $C \Rightarrow \exists B' \in [A, B]$
en dehors de C ,

(14)

[R4+] D'après P6, les]AB) et -]AB) rencontrent cercle C ds au moins 1 pt chacune, & $\#]AB) \cap -]AB) = 1$
 \Rightarrow il s'agit de 2 pts distincts de (AB) \cap C.
 $\& \# (AB) \cap C \leq 2 \Rightarrow$ ds 2t ns=2, ainsi
 $\#]AB) \cap C = 1$. & p consq un n B est
 $\#]AB) \cap C = 1$

D8 2s pts st cocycliqs s'ils E à m^e ordre

[R9 q] 3 pts distincts st cocycliqs
 \Leftrightarrow ils ne st pas alignés.

§(15) Courbes paramétrées.

D1 On appelle **courbe paramétrée**, l'appelle

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ où } I \subset \mathbb{R}.$$

L'ens $\Gamma := \gamma(I)$ s'appelle le **support** de γ .

- Δ courbe $\gamma \neq$ support Γ .
- support d'une courbe mais courbe = paramétrisat. point q le parcourt \downarrow de tps
- \checkmark possib.
- C^1, C^∞ analytiques polynomiales
- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ courbes complexes.

D6 on dit $\gamma_1: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un **reparamétrage** de $\gamma_0: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ si il existe difféomorphisme (de m qthé γ_0)

$$\phi: J \rightarrow I \text{ tq } \gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi.$$

P7 "et un reparamétrage" est \Leftrightarrow équivaut, dt les classes équivalentes st **courbes géométriques**, & le support d'une courbe géométrique est défini.

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_1 \circ \phi^{-1} \Rightarrow \text{"réflexive"}$$

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \Leftrightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0.$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi_1, \gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi_2 \Rightarrow \gamma_2 = \gamma_0 \circ \underbrace{\phi_1 \circ \phi_2}_{\text{diff'm en } c^1}$$

$$\gamma_1 \sim \gamma_0, \gamma_2 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_0 \Rightarrow \sim \text{transitif.}$$

$[\gamma_0]$ est courbe géométrique

$$\text{Supp}[\gamma_0] := \text{Supp } \gamma_0 = \text{Supp } \gamma_1 \text{ si } \gamma_0 \sim \gamma_1$$

on $\text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \gamma_0 \circ \phi$

Rq 8

qd limite des reparamétrages croissants on parle de **courbes géométriques orientées**.

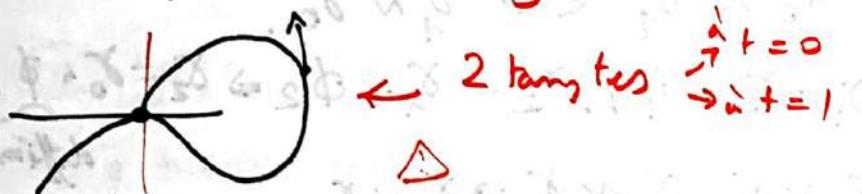
J  $\phi: \text{bijc} \text{ de } I \rightarrow J$

$\Rightarrow \phi$ monotone. $\int \Phi$ Φ croissante $\Rightarrow \phi \nearrow \Rightarrow \phi^{-1} \nearrow$

$$\phi_1, \phi_2 \nearrow \Rightarrow \phi_1 \circ \phi_2 \nearrow$$

$\gamma_0 \sim \gamma_1: \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi \wedge \phi \nearrow$ diff'ret C^1
est une \Leftrightarrow équivaut q mème q $\infty + \Phi$.

D9 Une courbe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite régulière en $t \in I$ si $\gamma'(t) \neq 0$. Dans ce cas la droite passant par $\gamma(t)$ & de vecteur direct $\gamma'(t)$ est tangente de courbe. par am. γ en t . si $d\gamma$, γ injective on parle de tangente en $\gamma(t)$.



D10 Une courbe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite singulière en $t \in I$ si elle n'y est pas régulière ie si $\gamma'(t) = 0$.

D11 Une courbe est dite régulière si elle est régulière en tte valeur du param.

P12 Nous de régularité & tangente et bien des pn courbes géométriques.

RM $\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t))$ & ϕ diff⁰ $\Rightarrow \phi'(t) \neq 0 \forall t \in I$

$$\gamma_1'(t) = \gamma_0'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \neq 0$$

\Rightarrow

- 1) $\gamma_0' \neq 0$ partout $\Rightarrow \gamma_1'$ aussi
- 2) $\gamma_0'(\phi(t)) \parallel \gamma_0'(\phi(t))$ la tangente en t pr γ_1 est m^{me} q celle de γ_0 en $\phi(t)$.

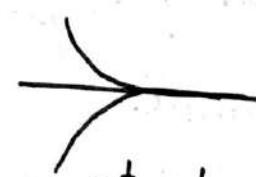
$$(\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t)))$$

R4

m^{me} si la courbe n'a pas de tangente en t le support I peut avoir tangente en $\gamma(t)$.



pt inflection



pt rebroussement



pt ordinaire

on ne discute pas angles & branchements ∞ .

§ 16. Longueur courbe paramétrée

D1 soit $I = [a, b]$ & $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ courbe C^1 .

La longueur de γ est alors positif

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

D2 L'abscisse curviligne est $f \mapsto \int_0^f \|\gamma'(t)\| dt$ qui mesure distance parcourue entre départ à l'origine et l'abscisse curviligne f .

D3 on dit courbe γ est paramétrée par (t) longueur d'arc (ou par l'abscisse curviligne) si $\forall t$ on a $\|\gamma'(t)\| = 1$.

$$\rightarrow \text{si } \|\gamma'(t)\| = 1$$

$$\rightarrow \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt = s-a.$$

P4 Toute courbe régulière possède un reparamétrage par longueur d'arc.

DM soit $\ell(s) = \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt$ $\gamma \in C^1$

(*) $\gamma'(s) = \underbrace{\|\gamma'(s)\|}_{\text{cont p composé}} \neq 0 \Rightarrow \text{difféo } C^1$

de $\gamma: I \mapsto [0, |\gamma|]$

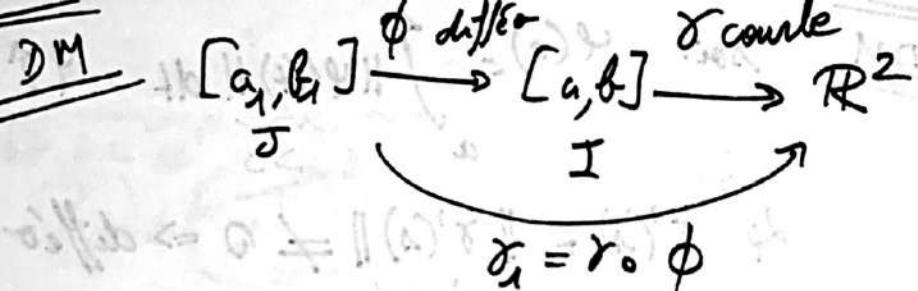
on pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi^{-1}: [0, |\gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^2$
↑ reparamétrisation de γ

$$\|\gamma_1'(t)\| = \underbrace{\|\gamma'(\varphi^{-1}(t))\|}_{\psi'(t)} |\varphi^{-1}'(t)|$$

$$\oplus \xrightarrow{s=\varphi^{-1}(t)} \psi'(\varphi^{-1}(t))$$

$$= \left| [\varphi_0 \varphi^{-1}(t)]' \right| = |t'| = 1$$

P5 La longueur d'une courbe géométrique est bien def car longueur d'une courbe est invariant par reparamétrisation



on vt donc $|\gamma_1| = |\gamma|$.

$$|\gamma_1| = \int ||\gamma'(t)| | \phi'(t) | dt =$$

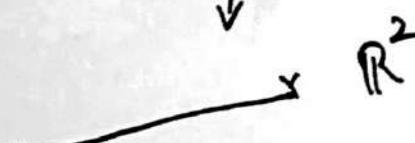
$$\stackrel{ds = \phi'(t) dt}{\int_a^b} ds = \phi'(t) dt$$

CDV $s = \phi(t)$
 $\phi(a_1) = a, \phi(b_1) = b$

$$= \int_a^b ||\gamma'(s)|| ds = |\gamma|$$

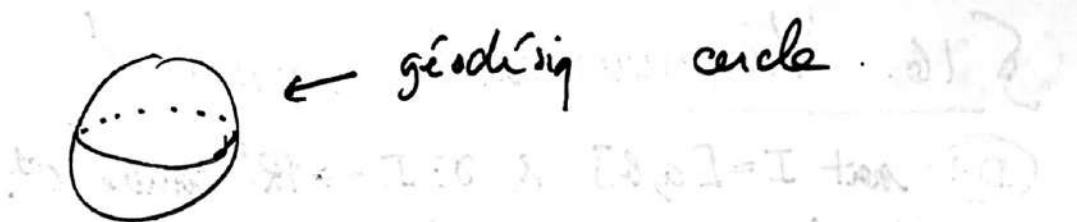
(R9) longeur support \neq longeur courbe.

\rightarrow géodésiq



courbure ?

$$\text{dist} = \min_{\text{arcs } \leftrightarrow \text{pt}} (\text{dist}).$$



(P9) si Φ est isométrie (resp. à-similitude) affine de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ 2 courbes $\gamma, \Phi \circ \gamma$:
 $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ont m̂e long k (resp. long^α rapport β)

$$\xrightarrow{\gamma} [\alpha, \beta] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2$$

$$\|\gamma'\| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi(\gamma(t+\epsilon)) - \Phi(\gamma(t))\|}{\epsilon}$$

||Φ-isométrie (transf^γ)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t+\epsilon) - \gamma(t)\|}{\epsilon} = \|\gamma'\|$$

$$\text{Par conséq } |\Phi \circ \gamma| = \int_a^b \|\Phi'(\gamma(t)) \gamma'(t)\| dt$$

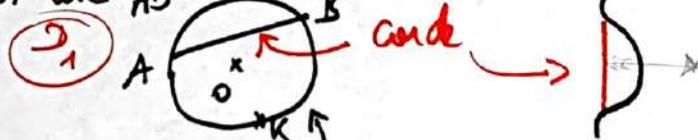
$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = |\gamma|$$



(R9) Ainsi longueur arc est invariant f. rotat, symétrie, symétrie, translat.

17. Arcs & leurs mesures

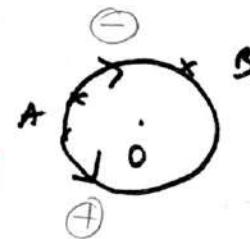
petit arc \widehat{AB}



grand arc $\widehat{AB}^g = \widehat{AKB}$.

- D3 Un arc orienté
⊕ orienté en \ominus orienté

\oplus n → sens inverse des aiguilles d'une montre

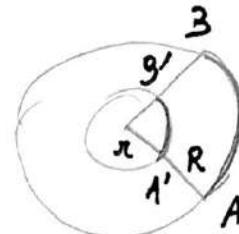


Rq la longueur $l(\widehat{AB})$ d'un arc de corde \widehat{AB} est longueur d'une corde à la parallèle. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt le pas tend vers 0.



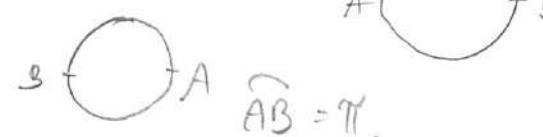
D5 La mesure en radian arc \widehat{AB} $\rho(O, R)$ est longueur arc \div le rayon :

$$\widehat{AB} = \frac{l(\widehat{AB})}{R}$$



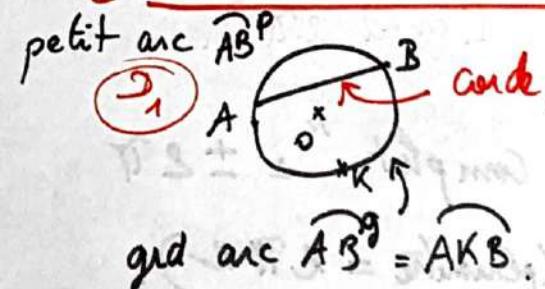
$\widehat{A'B'} = \frac{\pi}{R}$ mesure ici MS pas m long

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$



D6 La mesure algébrique d'un arc est un nbre dt la vlr abs. est mesure de l'arc & signe \oplus (resp \ominus) si l'arc \oplus (resp \ominus).

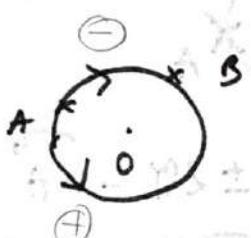
§ 17. Arcs & leurs mesures



D3 Un arc orienté

\oplus orienté ou \ominus orienté

\oplus n sens inverse
aug



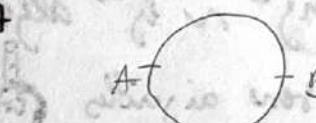
R9 La longueur $l(\widehat{AB})$ d'un arc de corde \widehat{AB} est longueur d'une corde à la parallèle. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt la pas tend vers 0.

D5 La mesure en rad. arc \widehat{AB} $\rho(O, R)$ est long^e arc \div R rayon :

$$\widehat{AB} = \frac{l(\widehat{AB})}{R}$$

$\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$. mesure ici MS pas m long^e

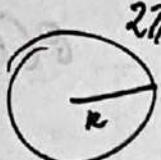
$$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$



$$\widehat{AB} = \gamma$$

D6 La mesure algébrique d'un arc est un nbr dt la v^e R abs. est mesure de l'arc & signe \oplus (resp \ominus) si l'arc \oplus (resp \ominus).

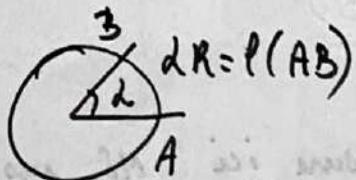
Ré



$$2\pi R$$



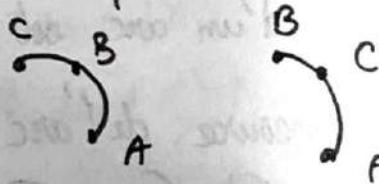
$$\frac{l(AB)}{R} = \frac{\pi}{2}$$



$$2R = l(AB)$$

P abas \mathcal{D}^P , longe \sim l^g algébriq
 $\widehat{AB} = -\pi$ (sens aiguilles)

\Rightarrow Chacune de mesures algébriques.



$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC} \quad [2\pi]$$

considérez RDC p les intégrales :

$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ def p intégrales & le R sur m

$$\widehat{l}(\widehat{AB}) + \widehat{l}(\widehat{BC}) = \widehat{l}(\widehat{AC})$$

(P9) Petit & grand arc \Rightarrow m^h corde : ont m^h mesure algébriq [mod 2π].

$\widehat{AB}^P + \widehat{BA}^g =$ "tour complet" $= \pm 2\pi$
cor (périmètre = lπR).



$$\widehat{AB}^P = \pm 2\pi - \widehat{BA}^g = \widehat{AB}^g \pm 2\pi$$

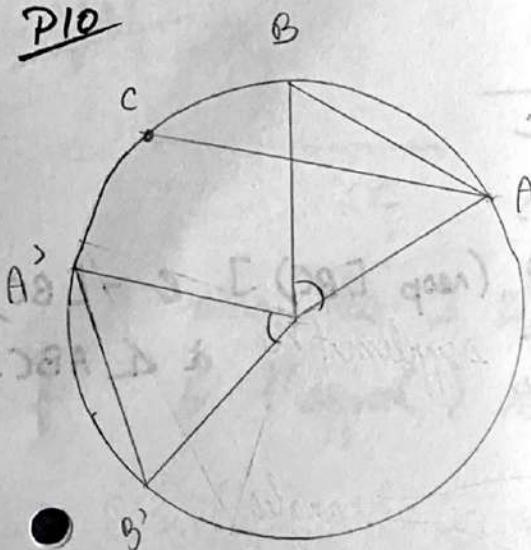
$$\widehat{AB}^P = \widehat{AB}^g \quad (2\pi)$$

(P10) Soit [AB] & [CD] 2 cordes sur m^h corde.
Alors si on note \widehat{AB} et \widehat{CD} les 2 petits (resp)
arcs ; on a

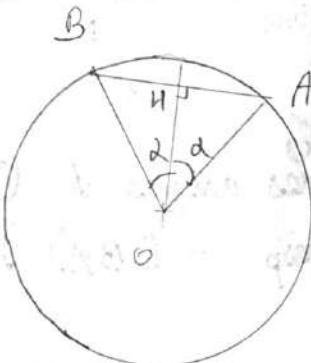
$$\rightarrow AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\rightarrow AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD} \quad (\text{resp } <)$$

P10



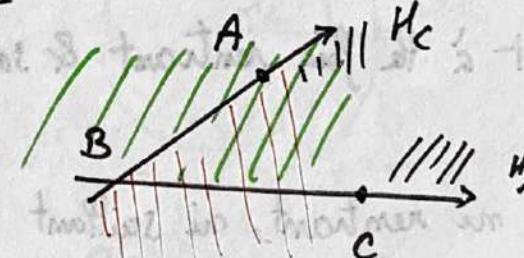
+ grand angle \Rightarrow + petit arc



§ 18. Angles

$$\text{////} \cap \text{///} = \widehat{ABC}$$

soit



angle saillant

convexe

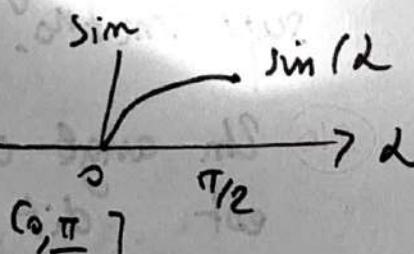
$$\angle AOB (\leq \pi) \Leftrightarrow \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$HA = R \sin(\alpha)$$

$$AB = 2R \sin(\alpha)$$

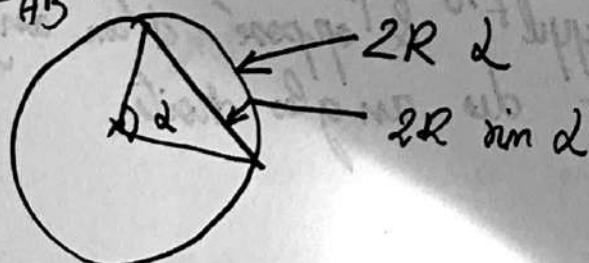
$$l(\widehat{AB}) = R^2 \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \sin \end{array} \right\}$$



• Ainsi du fait $\sin \uparrow \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]$

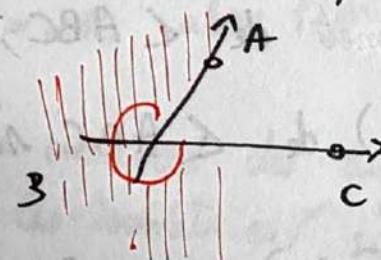
$$l(\widehat{AB}) = 2\pi - \widehat{AP}$$



D2 L'angle saillant $\angle ABC := H_A \cap H_C$

\rightarrow Un angle α secteur angulaire, mât \widehat{ABC} .

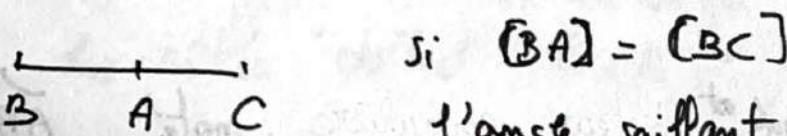
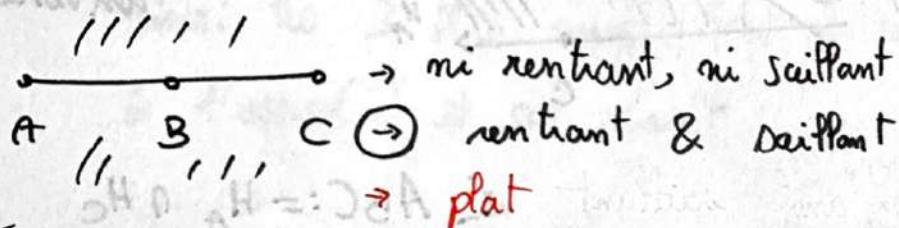
D3 Complément α d'un angle saillant est angle rentrant (pas convexe).



⚠ on ne pas collige angle complément

D5 qd $\beta \in [AB]$, $\angle ABC$

Un angle plat est à la fois rentrant & saillant.

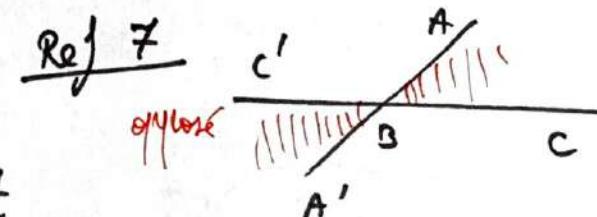


$\angle ABC = [BA] = [BC]$
appelé angle nul.

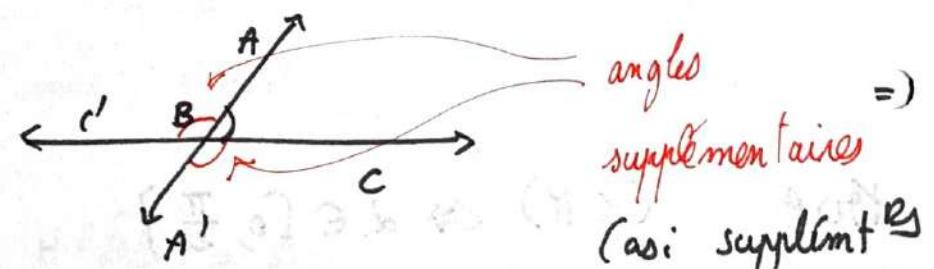
D6 Le pt B est sommet de $\angle ABC$;

$[BA]$ & $[BC]$ de $\angle ABC$ son les côtés.

D7 L'angle de $-[BA]$ & $-[BC]$ est l'angle opposé à $\angle ABC$.



D8 Les angles de $[BA]$ (resp $[BC]$) & $-[BC]$ (resp $-[BA]$) st supplémentaires à $\angle ABC$.



D9 Deux droites sécantes coupent le plan en 4 angles, 2 à 2 opposés & 2 à 2 supplémentaires.

D10 Un angle dit les 2 côtés st perpendiculaire est dit droit.

D11 Le supplément & l'opposé d'un angle droit st des angles droits.

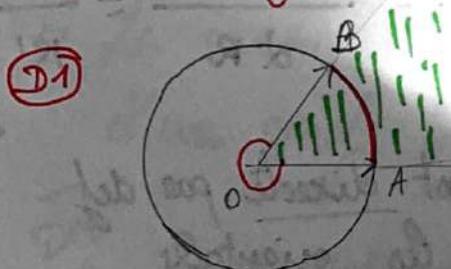
Réu

\widehat{ABC} droit $\Leftrightarrow \vec{BA} \perp \vec{BC}$
 $\Leftrightarrow \langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow \langle \pm \vec{BA}, \pm \vec{BC} \rangle = 0$

ainsi les 3 stes angles (les 2 supplémentaires & l'opposé) stt osi droit.

• **D12** Un angle orienté est un angle dt un des côtés "début" & "fin".

§ 1.3. Mesures d'angles



Ainsi le petit arc est éclairé. α angle saillant

ord

angle rentrant.

Retour § 16.7

$$\int_{\text{a.-simpl}}^{\phi} \gamma$$

$$|\gamma| = \int_I \|\gamma'(t)\| \quad ; \quad |\phi \cdot \gamma| = \int_I \|\phi(\gamma)'(t)\|$$

D2
 Mesure d'un angle est la mesure (resp. mesure algébrique) d'un arc q'il éclaire au centre.

D3 Cette D2 ne cl'pd pas cercle choisi.

$$\text{soit } H = H_0, \frac{r'}{R} \quad H(A) = A' \quad H(B) = B'$$

$$H(\widehat{AB}) = \widehat{A'B'}$$

$$\Rightarrow \ell(\widehat{AB}) \cdot \frac{r'}{R} = \ell(\widehat{A'B'})$$

$$\Rightarrow \text{si } \widehat{AB} = 2R \text{ alors } \ell(\widehat{A'B'}) = 2R \frac{r'}{R} = 2r'$$

P5 Les mesures des angles st préservees par les isométries / similitudes.

$$\text{on va montrer } \|\phi \circ \gamma'(t)\| = \alpha \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow |\gamma'| \alpha = |\phi \circ \gamma|.$$

$$\lim \|\phi \circ \gamma'(t)\| = \left\| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi \circ \gamma(t+\epsilon) - \phi \circ \gamma(t)}{\epsilon} \right\|$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\phi \circ \gamma(t+\epsilon) - \phi \circ \gamma(t)|}{|\epsilon|}$$

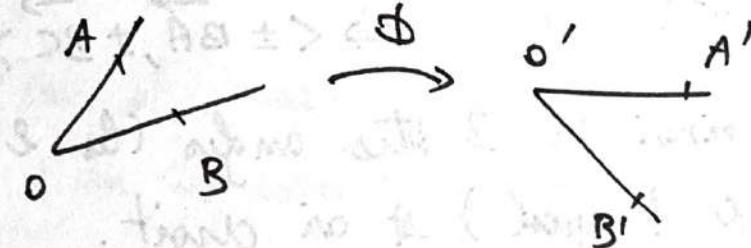
$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\alpha| \|\gamma(t+\epsilon) - \gamma(t)\|}{|\epsilon|}$$

$$= \alpha \left\| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+\epsilon) - \gamma(t)}{\epsilon} \right\| = \alpha \|\gamma'(t)\|$$

P7 Si Φ isométrie (resp α -similitude) affine de \mathbb{R}^2

alors courbes, γ , $\Phi \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ont m^{ême} longueur (resp. longeur rapport α).

P5 Les mesures des angles sont préservées par les isométries / similitudes.



$$\phi(A) = A'$$

$$\phi(O) = O' \Rightarrow f(\overrightarrow{AB}) = \alpha f(\overrightarrow{A'B'})$$

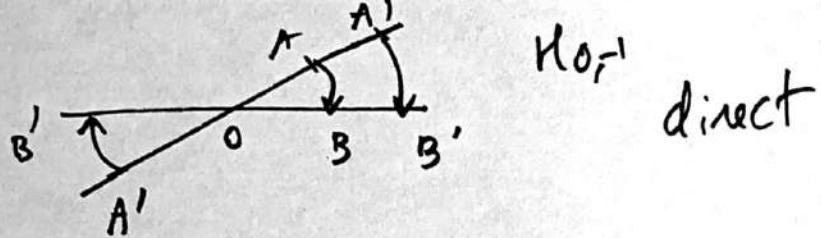
$$\phi(B) = B'$$

$$\alpha \angle OAB = \alpha R = R' = \alpha \angle O'B'$$

$$\Rightarrow \frac{f(\overrightarrow{AB})}{R} = \frac{\alpha f(\overrightarrow{AB})}{\alpha R} = \frac{f(\overrightarrow{A'B'})}{R'}$$

P6 Une similitude est directe par déf si elle préserve les orientations et indirecte sinon.

- @ \rightarrow translations et directes
- \rightarrow rotations directes
- \rightarrow symétrie centrale = rotation π
- \rightarrow homothétie $H_{0,-1}$ directes



2) la mesure d'un angle droit & de son supplément est la même



(P6) Un angle est égal à son opposé, i.e. sa mesure orientée.

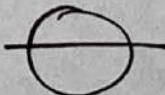


car l'angle opposé est l'image de l'angle par symétrie centrale (isom. directe)

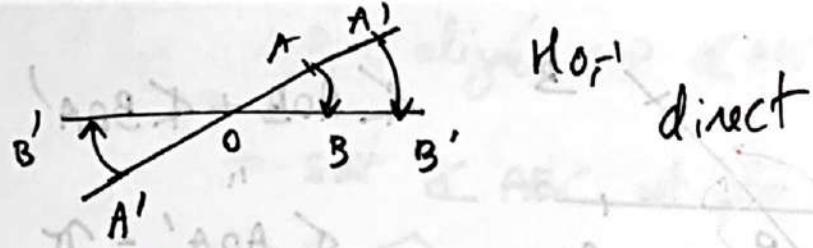
de centre le sommet de l'angle

(P7) La mesure d'un angle droit est $\frac{\pi}{2}$ & d'un angle plat est π .

Dm 1) Un angle plat a la même mesure que son opposé & la somme des 2 est 2π
 \Rightarrow mesure π



(car si on fait la symétrie d'axe d'un des côtés) & la somme est π
 \Rightarrow l'angle droit = $\frac{\pi}{2}$.



⑥ Un angle est égal à son opposé, ie \hat{m} mesure orienté.

car l'angle opposé
est l'image de
l'angle par symétrie
centrale (imm. directe)

de centre de sommet de l'angle

⑦ La mesure d'un angle droit $\frac{\pi}{2}$ &
d'un angle plat est π .

⑧ 1) Un angle plat a la m^e mesure que son
opposé & la somme des 2 est 2π
 \Rightarrow mesure π

2) La mesure d'un angle droit & de son
supplément est la m^e

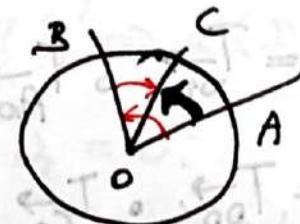
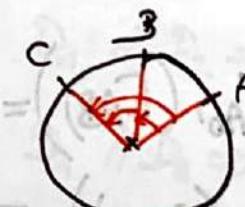


(car si images par la symétrie d'axe
d'un des côtés) & la somme est π

$$\Rightarrow \angle \text{ droit} = \frac{\pi}{2}$$

Abus de Nota \leftrightarrow mesure & mesure
orientée.

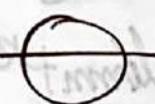
• $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ [2π] Ref^d Charles

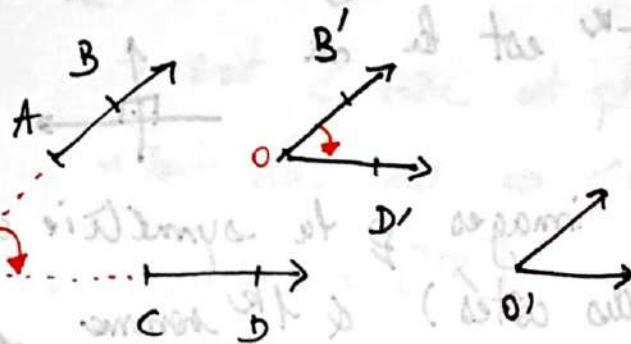


⑨ La mesure d'angle (orienté ou pas)
 $\angle ([AB], [CD])$ entre 2 droites
est la mesure (orienté ou pas) de l'angle

$$\angle B'QD' \text{ où } T_{AO}([AB]) = [QB']$$

$$\text{et } T_{CO}([CD]) = [OD']$$





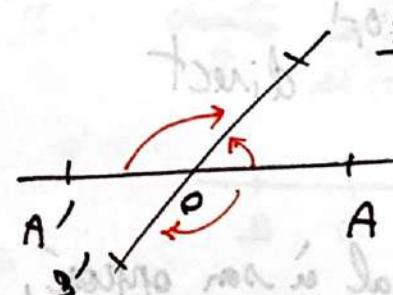
(P11) $\text{D}10$ ne dépend pas de la choix de O & les mesures d'angles orientés entre $\frac{1}{2}$ -droites respecte la règle de Chasles.

$$\overrightarrow{T_{AO'}} = \overrightarrow{T_{OO'}} \circ \overrightarrow{T_{AO}} \Rightarrow T_{AO'}([\alpha_{AB}]) = T_{OO'}([\alpha_{OB'}])$$

$$\overrightarrow{T_{CO'}} = \overrightarrow{T_{OO'}} \circ \overrightarrow{T_{CO}} \Rightarrow T_{CO'}([\alpha_{CD}]) = T_{OO'}([\alpha_{OD'}])$$

et comme $T_{OO'}([\alpha_{BOD'}]) = [\alpha_{BOD}]$

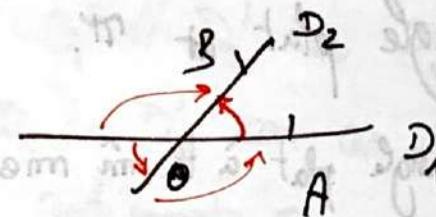
(P12) Si la mesure orientée d'un angle est $\alpha [2\pi]$ la mesure orientée de son angle supplémentaire est $\alpha - \pi [2\pi]$. Ainsi un angle & son supplément ont la même mesure algébrique $[\pi]$.



$$\begin{aligned}\angle AOB + \angle BOD' \\ \angle AOA' = \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle AOB = \pi - \angle BOD' \\ \angle AOB = \pi + \angle A'OB\end{aligned}$$

La mesure d'angle orienté entre 2 droites sécantes est def $[\pi]$ à sait $\angle(D_1, D_2) = \angle AOB [\pi]$ si $O_1 = (OA)$, $D_2 = (OB)$. La mesure d'angle orienté \leftrightarrow 2 droites // (confondues ou pas) est $\alpha [\pi]$.



$$\angle(D_1, D_2) = \angle AOB [\pi].$$

\curvearrowleft droites non orientées

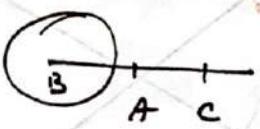
Q15 A, B, C alignés $\Leftrightarrow \angle ABC = 0 [\pi]$

\rightarrow soit $\angle ABC$ ut plat $\Rightarrow \angle ABC = \pi$.

\rightarrow soit \widehat{ABC} nul $\Rightarrow \angle ABC = 0 \Rightarrow 0 [\pi]$

$\therefore \angle ABC = 0 [\pi]$

- soit $\widehat{ABC} = 0$



$$\Rightarrow [BA] \cap S(B, R) = A'$$

$$[BC] \cap S(B, R) = C'$$

$$\Rightarrow \widehat{A'C'} = 0 \Rightarrow A' \equiv C'$$

$$\Rightarrow [BA] = [BA'] = [BC] = [BC']$$

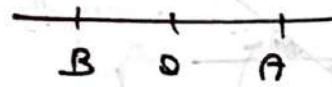
- soit $\widehat{ABC} = \pi$

$$\overline{ABA}' = \pi \stackrel{\text{d'après}}{\Rightarrow} \widehat{ABC} = 0 [\pi]$$

$\Rightarrow A', B, C$ alignés

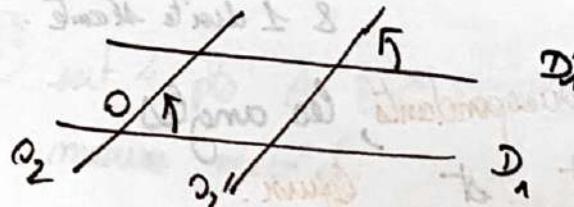
$\Rightarrow A, B, C$ alignés

RP16 droites confondues peut être considérées sécantes.



si $D_1 \parallel D'_1$ & $D_2 \parallel D'_2$

$$\Rightarrow \angle(D_1, D_2) = \angle(D'_1, D'_2)$$



cas 1 si $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow D'_1 \parallel D'_2 \Rightarrow \angle(D_1, D_2) = 0$

cas 2 si $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 = 0$.

$$\Rightarrow D'_1 \parallel D'_2 \Rightarrow D'_1 \cap D'_2 = 0$$

$\Rightarrow T_{\infty}, (D_1) = D'_1$ car ces 2 droites st // à D_2 & contiennent O !

$$\text{De m } T_{\infty}, (D_2) = D'_2$$

\Rightarrow comme les isométries directes (et les translat.) préserrent les angles orientés.

$$\Rightarrow \angle(D_1, D_2) = \angle(D'_1, D'_2)$$

D18

alt. int

alternos

corriplets



alt. ext

2 droites //

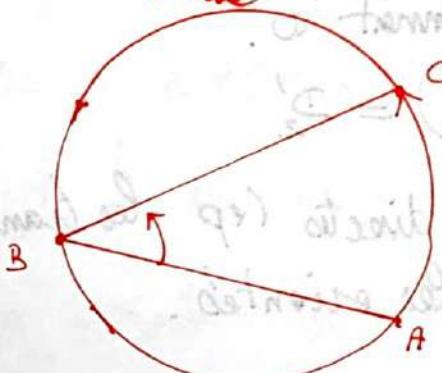
& 1 droite sécante.

P19 Les angles correspondants, les angles alt. int, ext et égaux.

La somme de l'autre angle est π .
(Réciprocité).

D20

A, B, C pts cercle \mathcal{C} . On dit que l'angle orienté $\angle ABC$ est inscrit dans \mathcal{C} & qu'il éclaire l'arc (orienté) \widehat{AC} .

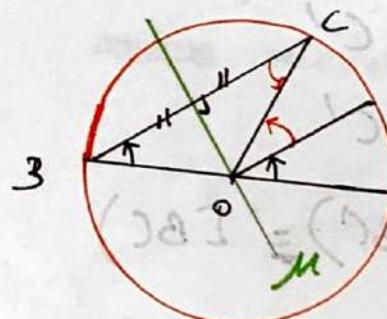
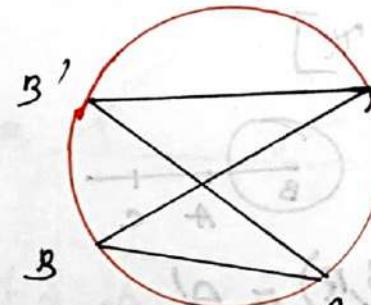


angle inscrit

P21

soit un angle orienté inscrit $\angle ABC$ qui éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC} \Rightarrow$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$



si $[AB]$ diamètre,
 $OI \parallel BC$, $O \frac{1}{2} [ABC]$

$\angle AOC = \angle BCO$ (alt. int)

$\angle OBC = -\widehat{OCB}$ car image B symétrie de M médiane de $[BC]$ $\exists O$ ($OB = OC = k$)

Ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{AOI} = \widehat{IOC}$

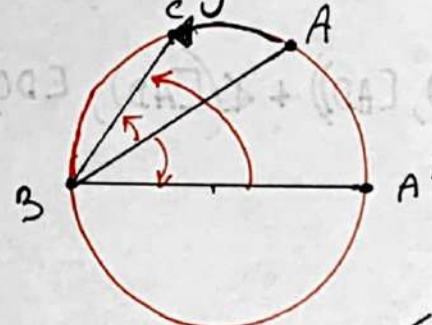
et $\widehat{AOI} + \widehat{IOC} = \widehat{AOC} = \widehat{AC}$

$\widehat{ABC} + \widehat{AOI} = \widehat{AC}$

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

isométrie indirecte.

Ds cas général:



soit $[BA']$ diamètre

$$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

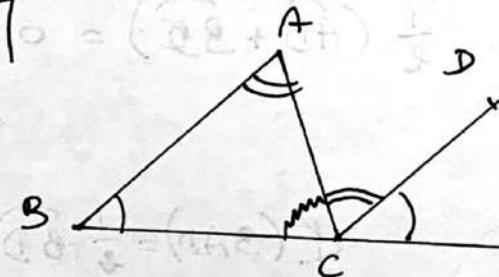
$$\widehat{A'BA} = \frac{1}{2} \widehat{A'A}$$

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \overset{\text{shadé}}{\widehat{ABA'}} + \widehat{A'BC} \\ &= \frac{1}{2} \left(\widehat{AA'} + \widehat{A'C} \right) \end{aligned}$$

\Rightarrow l'égalité des angles non orientés.

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \pi.$$

[MI]



$$\Rightarrow \text{red} + \text{green} + \text{blue} = \pi$$

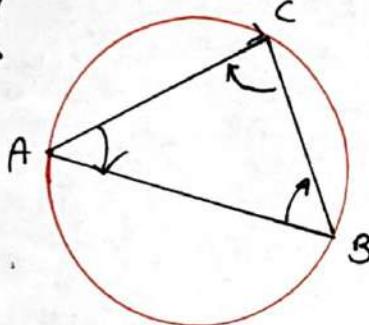
(prop)

$$CD \parallel AB$$

P22

la somme des angles d'un triangle est π .

[MI]

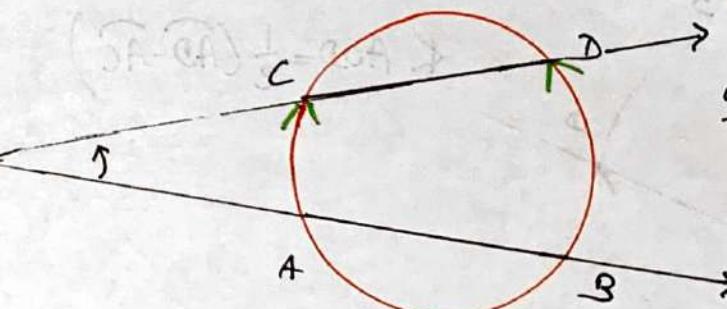


on considère le cercle circonscrit de $\triangle ABC$.

P24

soit 4 pts A, B, C, D d'un cercle \mathcal{C} . Entre mesures orientées:

$$\angle([AB], [CD]) = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$



av1 Conséquences

Pi les angles orientés (de la m^e sens) on a l'égalité'

$$\angle BCD = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{AC})$$

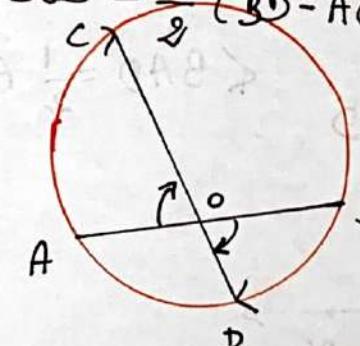
non
orienté').

de coupe
à l'int

$$= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{AC} + \frac{1}{2} \widehat{BA} + \frac{1}{2} \widehat{CB}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ tour complet} = \frac{1}{2} (\pm 2\pi) = \pm \pi$$

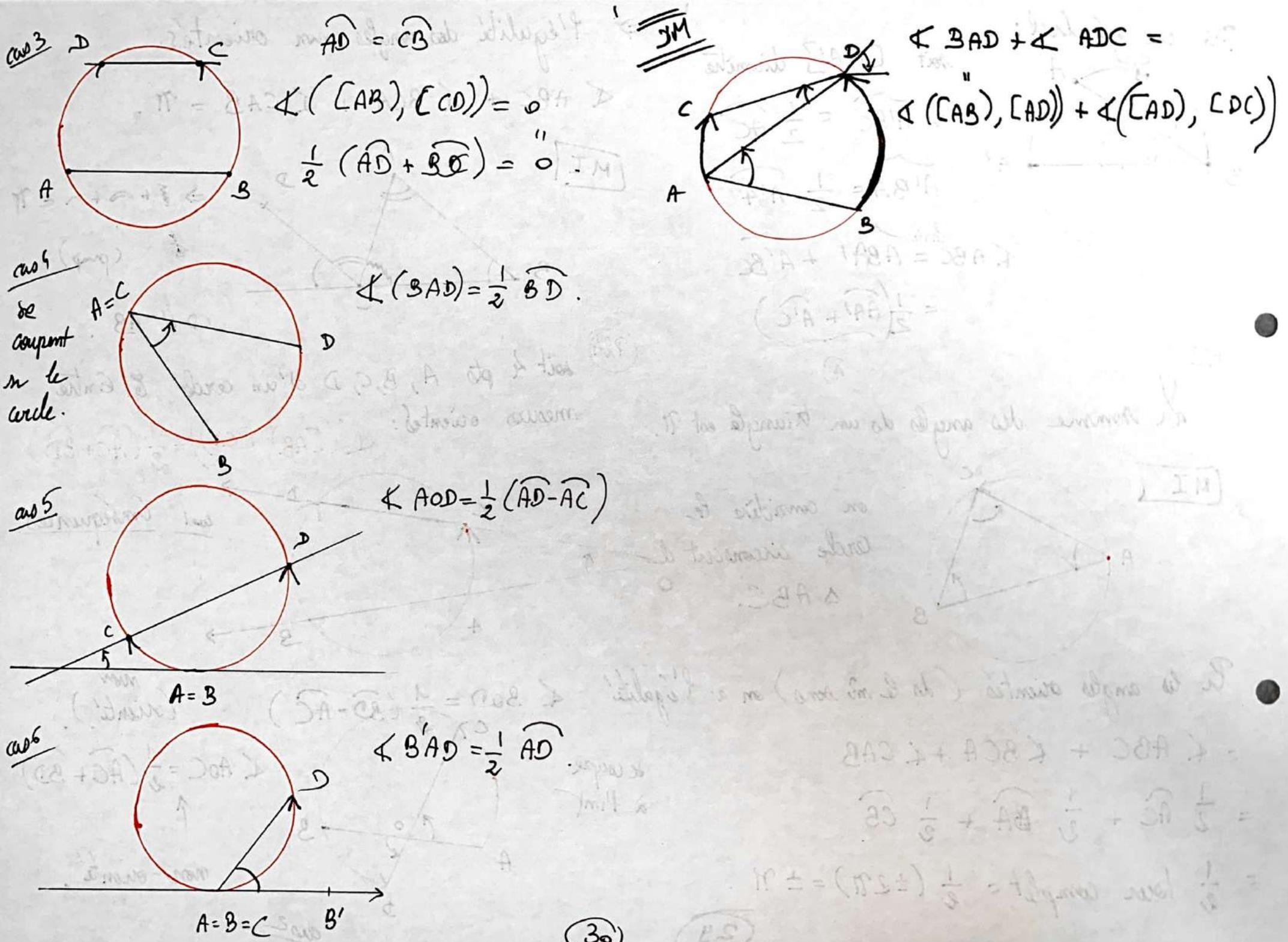


$$\angle AOC = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

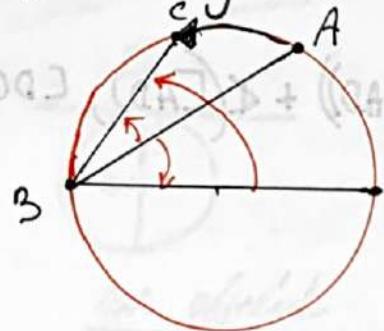
non-orienté'.

av2

24



Ds cas général:



soit $[BA'A']$ diamètre

$$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

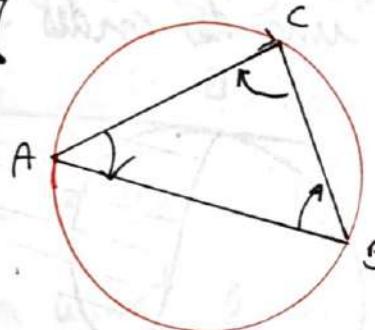
$$\widehat{A'BA} = \frac{1}{2} \widehat{A'A}$$

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \overset{\text{chds}}{\widehat{ABA'}} + \widehat{A'BC} \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{AA'} + \widehat{A'C}) \\ &\quad \text{AC} \end{aligned}$$

② 22

la somme des angles d'un triangle est π .

[MI]



on considère le cercle circonscrit de $\triangle ABC$.

Pur les angles orientés (du même sens) on a l'égalité'

$$= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$$

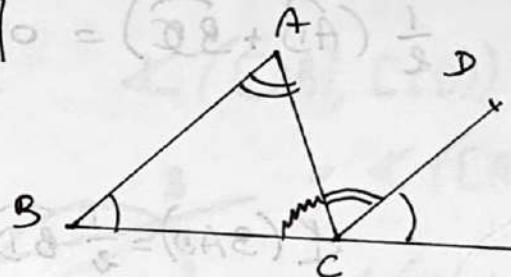
$$= \frac{1}{2} \widehat{AC} + \frac{1}{2} \widehat{BA} + \frac{1}{2} \widehat{CB}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ tour complet} = \frac{1}{2} (\pm 2\pi) = \pm \pi$$

\Rightarrow l'égalité des angles non orientés.

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \pi.$$

[MI]



$$\Rightarrow \xi + \eta + \kappa = \pi$$

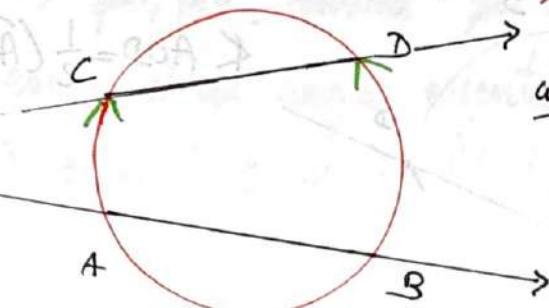
(prop)

$$CD \parallel AB.$$

② 24

soit 4 pts A, B, C, D d'un cercle \mathcal{C} . Entre mesures orientées:

$$\angle([AB], [CD]) = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$



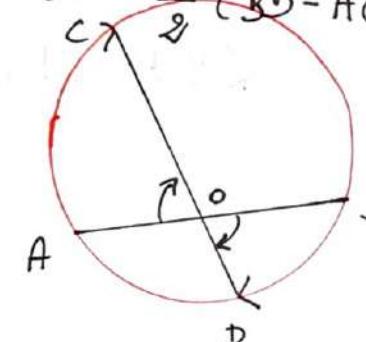
cas 1 Conséquences

$$\angle BOD = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{AC})$$

non
'orienté'.

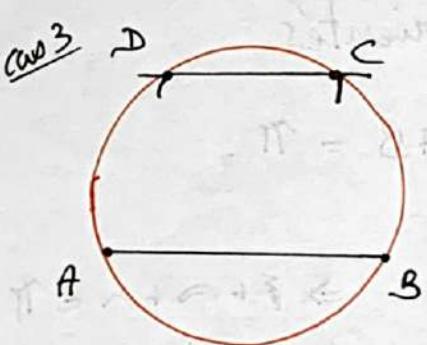
$$\angle AOC = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

non-orienté'.



cas 2

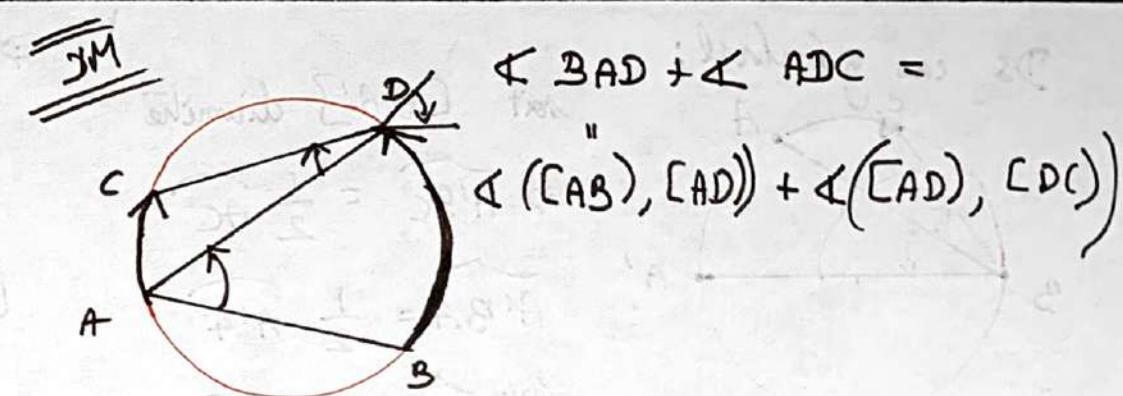
② 24



$$\widehat{AD} = \widehat{CB}$$

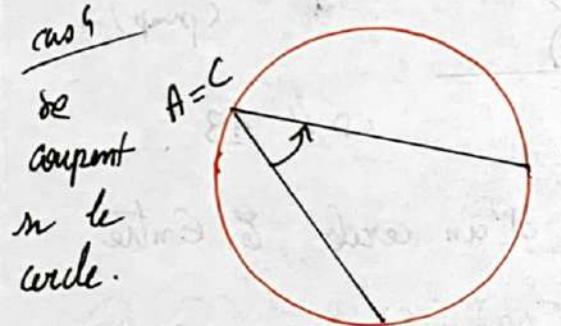
$$\angle([AB], [CD]) = 0^\circ$$

$$\frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = " \text{ (IM)}$$

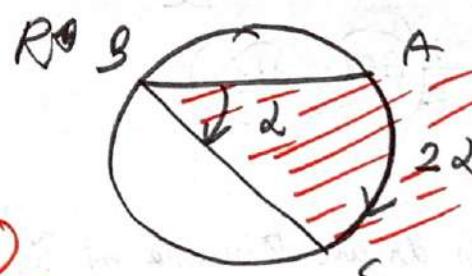


$$\angle BAD + \angle ADC =$$

$$\angle([AB], [AD]) + \angle([AD], [DC])$$



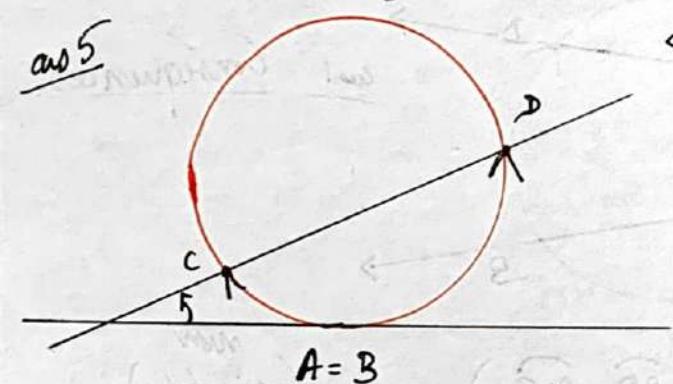
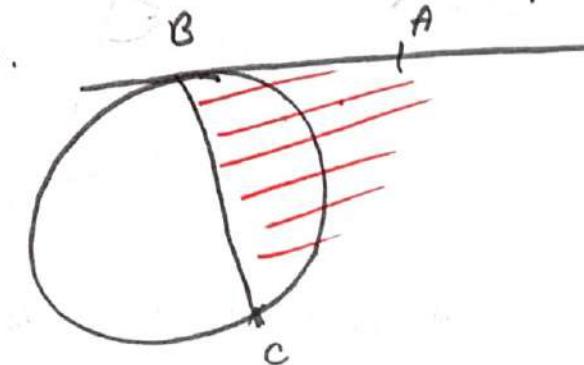
$$\angle(BAD) = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$



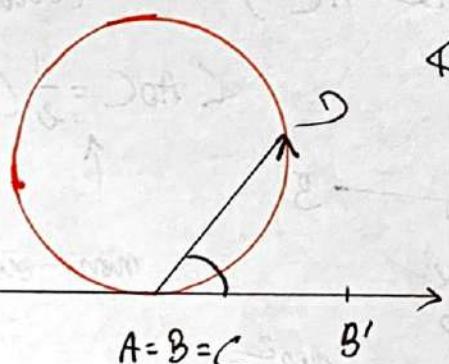
(L)

D21

reste vraie si une des cordes est remplacée par une tangente.



$$\angle AOD = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{AC})$$



$$\angle B'AD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

si (BA) tangente en B .

cas général

cas général

$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(AB) \cdot \tan(\frac{\angle B}{2})$

p24 Soit A, B, C, D d'un cercle \mathcal{C} .

$$\measuredangle([AB], [CD]) = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

cas général

$\measuredangle([AB], [CD]) = \measuredangle([AB], [CB]) + \measuredangle([CB], [CD])$

$= \measuredangle([AB], [CB]) + \measuredangle([CB], [CD])$

$\measuredangle([BA], [BC]) = \frac{1}{2} \widehat{BD}$

$\frac{1}{2} \widehat{AC}$

Au final, p21, p24, comme peut se résumer :

[La mesure d'un angle orienté est la somme des arcs orientés qui sont à l'intérieur de l'angle.]

on a aussi égalité des mesures algébriques des axes.

$$\widehat{BC} = \widehat{BC'} + \widehat{C'C} \quad (\text{Charles})$$

Ainsi en utilisant le cas 1 + p21

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABC' + \angle C'BC \\ &= \frac{1}{2} \widehat{BC'} + \frac{1}{2} \widehat{C'C} = \frac{1}{2} \widehat{BC} \end{aligned}$$

cas

p25 A, B, C, D de \mathcal{C} et alignés

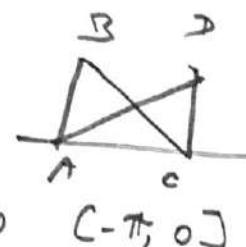
$$\text{Si } \angle ABD = \angle ADC = \pi$$

cas si A & D sont dans le même $\mathcal{P}(Ac)$

$$\Rightarrow \angle ABC &= \angle ADC \text{ ont même sens}$$

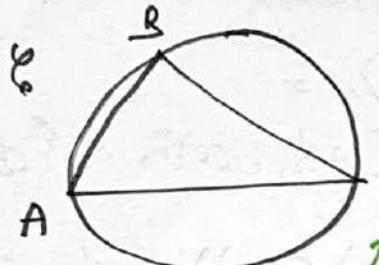
Ainsi soit θ l'angle sur $[0, \pi]$ tel que $\theta \in [-\pi, 0]$

③ cas $\angle ABC = \angle ADC = \pi \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ADC \in [0, \pi] \text{ ou } [-\pi, 0]$



ou $\angle ABC, \angle ADC \in \{ \pm \pi, 0 \}$

donc les A, B, C, D sont alignés.



soit \mathcal{C} de cercle circonscrit au $\triangle ABC$.

\textcircled{a} D à l'intérieur

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC} + \dots$$

angles non orientés

$$> \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle ABC$$

$$\textcircled{b} \text{ D à l'ext} \Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC} - \dots$$

$$< \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle ABC.$$

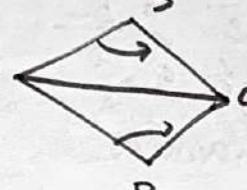
$$\textcircled{c} DC \in \mathcal{C} \Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle ABC.$$

cas A, B, C, D cocycliques [mi]

$$\angle ABC = \angle ADC \in [0, \pi] \cap [-\pi, 0]$$

$$\boxed{\text{mi}} \quad \angle ABC = \angle ADC [\pi]$$

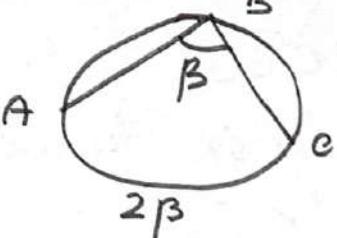
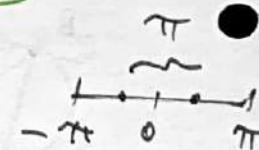
2^e cas si A & D sont ext. qu. $\mathcal{P}(AC)$

 $\Rightarrow \angle ABC \& \angle ADC$ ont une rotation opposée

$$\angle ABC = \angle ADC [\pi]$$

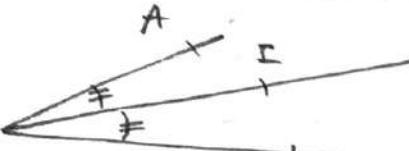
$$\Leftrightarrow \underbrace{\angle ABC + \angle ADC}_{\text{non orienté}} = \pi$$

àols le cas précédent, on \textcircled{d} la paire de D $\mathcal{P} \mathcal{C}$ circons au $\triangle ABC$.



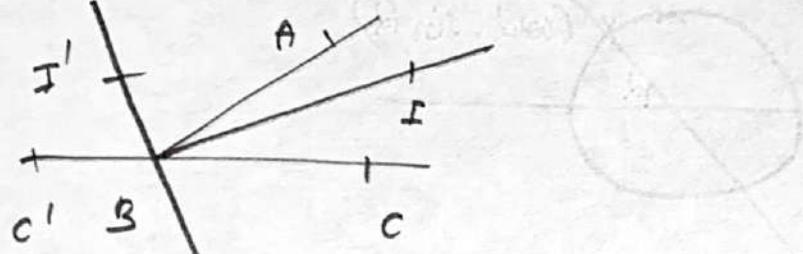
$$\widehat{ABC} = 2\pi - 2 \angle ABC$$

D25 La bissectrice int d'un angle $\angle AOB$ est $\{BC\}$ / $\angle AOC = \angle COB$.



D26 La bissect. ext d'un angle est la droite perpendiculaire à la p. qui part. P sonant du angle

P28 La \odot est la \odot de l'angle \widehat{ABC} sait $d(M, BA) = d(M, BC) \Leftrightarrow MA = MC$
supplément



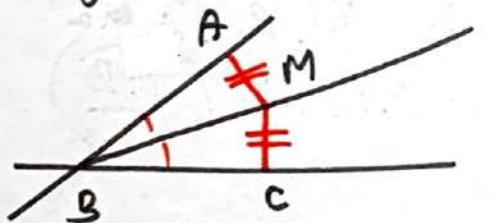
comme BM est une hypothénuse des $\triangle ABM$ et $\triangle CBM$. Par pythagore, le 3^e côté est aussi $\Rightarrow BA = BC \Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBM} \Rightarrow BM$ bissectrice.
 $\Rightarrow M \in$ bissectrice.

soit $\angle ABC'$ supp $\angle ABC$ &

SI I' biss de \widehat{ABC} $\left\{ \begin{array}{l} \pi = \angle CBA + \angle ABC' \\ = 2\widehat{IBA} + 2\widehat{ABI} \\ = 2\widehat{IBI}' \\ \Rightarrow \widehat{IBI}' = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

BI

P29 Un point à l'intérieur d'un angle est sur la bissectrice si il est à distance égale des 2 côtés de l'angle.

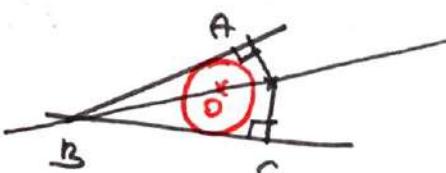


$$\begin{aligned} A &= \pi_M \text{ project} \\ C &= \pi_M \text{ n° int.} \\ B &= \text{ sommet de l'angle} \end{aligned}$$

si $M \in$ bissectrice $\Rightarrow \angle ABM = \angle CBM$
& $\angle BAM = \frac{\pi}{2} = \angle BMC (\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BMC})$
& le côté BM est commun $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$
 $\Rightarrow MA = MC$.

P30 La bissectrice est l'ensemble des centres des cercles tangents aux 2 côtés de l'angle.

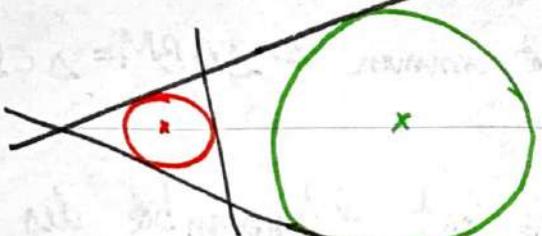
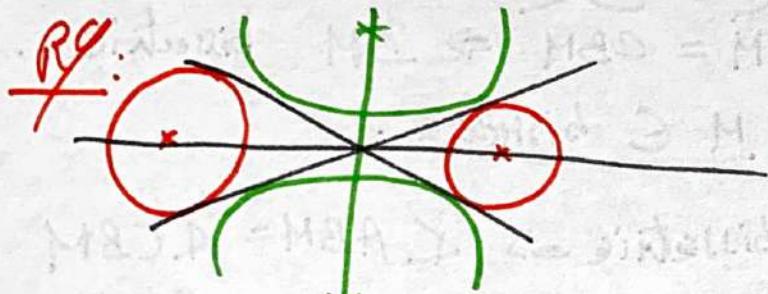
DM soit $O \in BI$ bissectrice de ABC .



$$\begin{aligned} \Rightarrow d(O, (BA)) &= d(O, (BC)) := r \quad \&(BC) \\ \Rightarrow C(O, r) &\text{ tangent aux 2 côtés } (BA) \end{aligned}$$

• si $\mathcal{C}(O, r)$ tangent aux cotés (BA) & (BC)
 $\Rightarrow d(O, (BA)) = r = d(O, (BC))$

P²⁹.
 $\Rightarrow O \in$ bissectrice.



Soit M milieu de $[AB]$

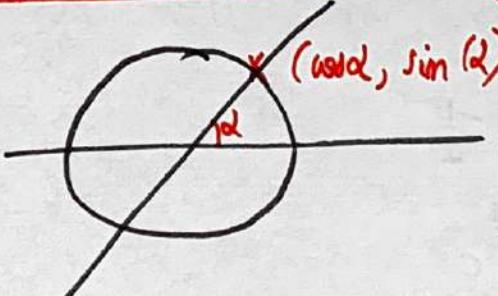
$$\alpha = \angle COM = \angle MOA ; AB = 2a$$

$$\frac{a}{R} = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{\frac{AB}{2} = R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

jj trigos

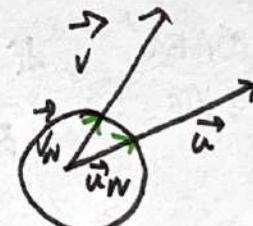
§ 20. Fonctions trigonométriques

①



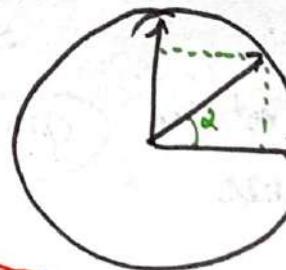
②

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$



$$\begin{aligned} \vec{u} &= \|\vec{u}\| \vec{u}_N \\ \vec{v} &= \|\vec{v}\| \vec{v}_N \end{aligned}$$

Unnormalize



④

soit $[AB]$ une corde du $\mathcal{C}(R)$; on a ^{rayon}

$$AB = 2R \sin\left(\frac{\angle AOB}{2}\right)$$

TM



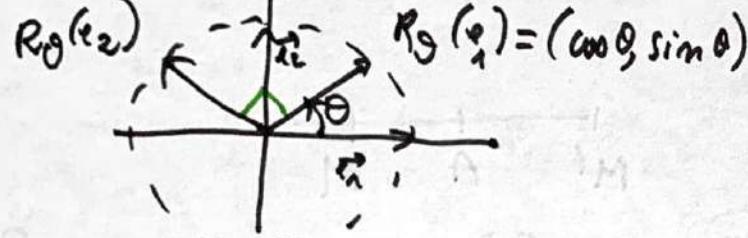
③

§21. Rotations

(D1) Y AL dit mat $R^\theta = (e_1 \ e_2)$ est rotation linéaire d'angle θ $[2\pi]$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e_1 e_2 base orthonormée de \mathbb{R}^2

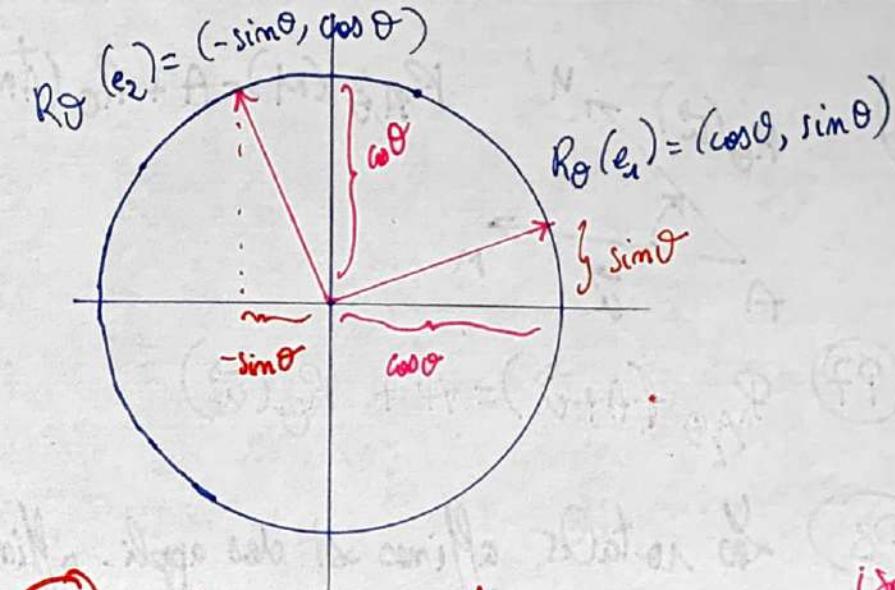


(P2) $R_0 = Id$ & c'est rotation triviale.

$$(P3) R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

à ff trigos pour vérifier



(P4) $R_\theta^t = R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$, dc Rotations st i sommatives linéaires.

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta^t$$

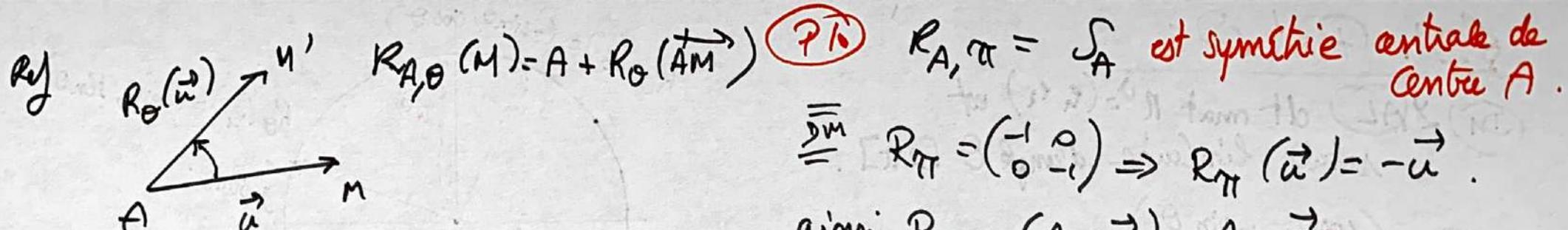
$$R_\theta \circ R_{-\theta} = R_0 = Id$$

(P5) $R_\theta(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\theta = 0 [2\pi]$
i.e. l'uniq vect^{triv} fixe d'une rotat non triviale est $\vec{0}$.

DM

$$\text{Spec}(R_\theta) = e^{\pm i\theta}$$

Ainsi cette matrice admet une matr fixe non nul si $\neq 1$ v.p. $\Leftrightarrow e^{\pm i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 [2\pi]$



PP

$$R_{A,\theta}(A + \vec{u}) = A + R_\theta(\vec{u})$$

P8 Les rotat° affines st des appli. affines.

consq prop : si F linéaire $A + \vec{u} \mapsto A + F(\vec{u})$

affine & $\hat{c} F = R_\theta$ linéaire \Rightarrow cl.

PG

$$R_{A,0} = \text{Id} \quad (\text{Rotat° affine triviale})$$

Tout point est un centre de la rotat° triv.

\overline{RM}

$$R_{A,0}(M) = A + R_0(\vec{AM}) = A + \vec{AM} = M$$

$$\Rightarrow R_{A,0} = \text{Id} \quad (\text{cp } \forall M \text{ est fixe par } R_{A,0})$$

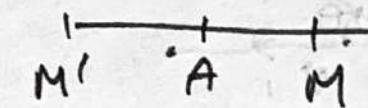
& $\forall A', R_{A',0} = \text{Id} = R_{A',0}$

$R_{A,\pi} = S_A$ est symetrie centrale de centre A .

$\overline{RM} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{\overline{RM}}(\vec{u}) = -\vec{u}$.

ainsi $R_{A,\pi}(A + \vec{u}) = A - \vec{u}$

\Rightarrow c'est la sym. centrale de centre A ($= H_{A,-1}$)



PII

$$R_{A,\theta}(B) = B \Leftrightarrow A = B \text{ ou } \theta = 0 [2\pi]$$

i.e l'uniq point fixe d'une rotat° non triviale est son centre.

\overline{RM}

$$R_{A,\theta}(B) = B$$

$$\text{" } \Rightarrow R_\theta(\vec{AB}) = B \cdot A = \vec{AB}$$

$$A + R_\theta(\vec{AB})$$

$$\Leftrightarrow \theta \neq 0 [2\pi] \text{ & } \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow A = \vec{B}$$

$$\theta = 0 [2\pi] \text{ & pas condit n } AB.$$

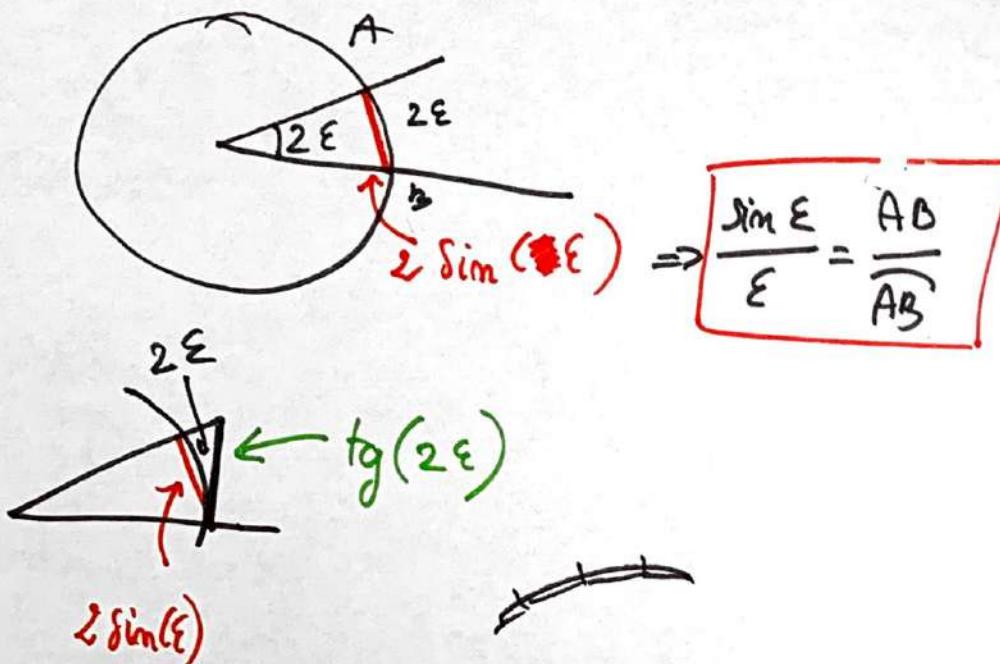
P12

Un cercle est invariant par les rotations du centre que le cercle.

$$\text{Idée } \frac{\sin(\frac{\theta}{\varepsilon}) - \sin(0)}{\varepsilon} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\frac{\sin(\frac{\theta}{\varepsilon})}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 1 \quad \text{d'après trig}$$

$$\frac{\sin(n+\varepsilon) - \sin(n)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \cos(n)$$



À propos P10 :

$$H \frac{A'B'}{AB}, * \quad (\triangle ABC) = \triangle A''B''C''$$

↑
n'importe
q'le chose

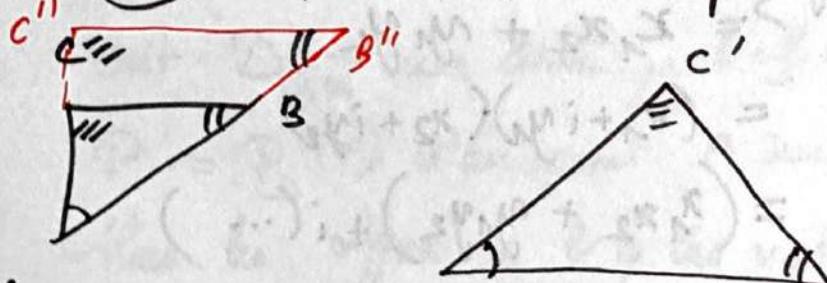
$$\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC, A''B'' = AB \frac{A'B'}{AB} = A'B'.$$

$$\text{en } \underline{\text{ab}}, \quad \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \Leftrightarrow$$

$$\triangle A''B''C'' = \triangle A''B''C''.$$

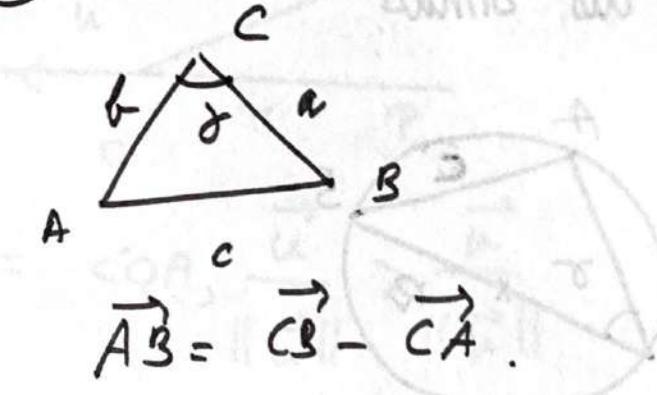
C'est les deux propriétés et des traductos

de P6 si $A''B''C''$ à la place de ABC



les 15 symétries
rotations
translations
symétrie & isométrie \Rightarrow similitude.

(28) Al-Kashi



$$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle \\ &= \langle \vec{CB} - \vec{CA}, \vec{CB} - \vec{CA} \rangle \\ &= \|\vec{CB}\|^2 - 2 \langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle + \|\vec{CA}\|^2 \end{aligned}$$

$$= a^2 - 2ab \cos(\gamma) + b^2$$

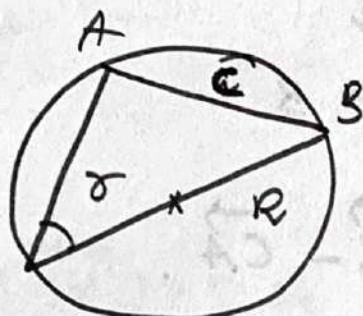
(R9) $C \in [AB]$, $\triangle ABC$ dégénéré

$$c = a + b \rightarrow c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\cos(\gamma) = \cos(\pi) = -1.$$

$$\angle C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Pythagore} \rightsquigarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

29) Loi des sinus



$$c = AB = 2R \sin\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right) = 2R \sin(\gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

de m^{me} $\frac{a}{\sin(\alpha)}$ & $\frac{b}{\sin(\beta)}$, ainsi

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} (= 2R)$$

§ 23: Nombres Complexes

31) Étant donné point $P(x, y)$; $\vec{u}(x, y)$ le nombre complexe $z := x + iy$ **l'affixe de P** (resp \vec{u}) & on note $P(z)$ (resp $\vec{u}(z)$).

32) Soit a, μ, b affixes respectifs A, \vec{u}, B ,
 $B := A + \vec{u} \Rightarrow b = a + \mu$.

33) Soit μ, v affixes de \vec{u} & \vec{v} :
 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \operatorname{Re}(\mu \bar{v}) = \frac{1}{2}(\mu \bar{v} + \bar{\mu} v)$

Démonstration: $\vec{u}(\mu)$, $\mu = x_1 + iy_1$ $\vec{v}(v)$, $v = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(\dots) \end{aligned}$$

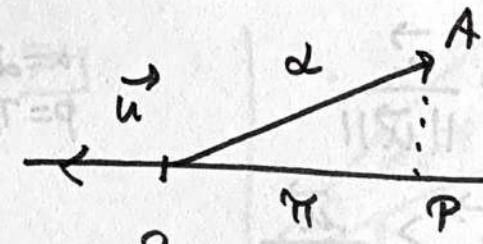
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \operatorname{Re}(\mu \bar{v}) = \frac{\mu \bar{v} + \bar{\mu} v}{2} = \frac{\mu \bar{v} + \bar{\mu} v}{2}$$

47) $\therefore \operatorname{Re}(\bar{\mu} v)$

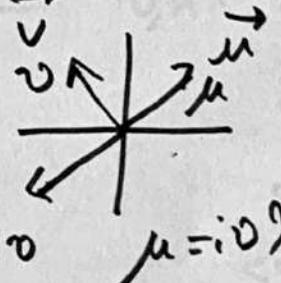
(P5) Soit μ & v affixes de \vec{u} & \vec{v} .

$$\vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \mu\bar{v} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{\mu}{v}} \in i\mathbb{R}.$$



$$\frac{\mu}{v} \rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ si } \operatorname{Re}(\mu\bar{v}) = 0$$



$$\text{si } \mu = i\alpha$$

$$\text{ssi } \mu\bar{v} \in i\mathbb{R}$$

$$\text{ssi } \frac{\mu\bar{v}}{v\bar{v}} \in i\mathbb{R}$$

$$i\lambda = \frac{\mu}{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(P6) Soit $D_{O, \vec{u}}$ une droite μ l'affixe de \vec{u} .

$P := D_{O, \vec{u}}$ (A) d'un point A sur D .

On appelle affines à p des vecteurs

\vec{OA} & \vec{OP} resp., vérif'.

$$p = \frac{a\bar{u} + \bar{a}\mu}{2\bar{u}}$$

(48)

$$\vec{OP} = \langle \vec{OA}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\Leftrightarrow P = O + \langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{NB: } & \langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle = \\ & = \langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{u} \rangle \\ & = \lambda \|\vec{u}\|^2 \text{ car } \vec{u} \perp \vec{v} \\ & + \mu \cdot 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \lambda\vec{u} = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left\langle \overrightarrow{OA}, \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\rangle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

$$\begin{matrix} u = \alpha \\ p = \pi \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow p = 0 + \left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u} \right\rangle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$$

$$\pi = \frac{\alpha \bar{\mu} + \bar{\alpha} \mu}{2} \cdot \frac{\mu}{\mu \bar{\mu}} = \frac{\alpha \bar{\mu} + \bar{\alpha} \mu}{2}$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \text{ a } \mu \text{ affine } \frac{\mu}{\mu \bar{\mu}} = \frac{1}{\bar{\mu}} \right)$$

(P7) Soit D, \overrightarrow{u} une droite & μ l'affine du vecteur directe \overrightarrow{u} .

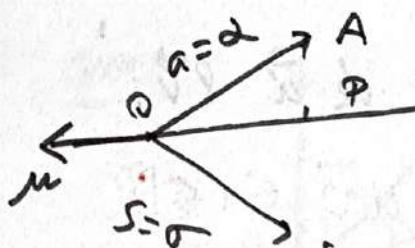
Soit pt symm $S := S_D(A)$ d'un point A par rapport à D . Alors

les affines à \overrightarrow{u} & S des vecteurs

\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OS} , resp. vérifient $s\bar{\mu} = \bar{s}\mu$.

$$s\bar{\mu} = \bar{s}\mu$$

49



$$\frac{\alpha + \sigma}{2} = \pi \left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}}{2} = \overrightarrow{OP} \right)$$

$$\frac{\alpha + \sigma}{2} = \frac{\alpha \bar{\mu} + \bar{\alpha} \mu}{2}$$

~~$$\alpha + \sigma = \frac{\alpha \bar{\mu} + \bar{\alpha} \mu}{\bar{\mu}}$$~~

$$\Leftrightarrow \bar{\mu} \sigma = \bar{\alpha} \mu.$$

$$(\Leftrightarrow \mu \bar{\sigma} = \alpha \bar{\mu})$$

(P8) Soit w, α, β affines de O, A, B où $B = H_{O, A}(A)$ Alors

$$\beta = w + \lambda(\alpha - w)$$

$$b = w + \lambda(a - w)$$

Def, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{\mu}(\lambda, y) = \vec{\mu}(\mu)$ Def

$$\lambda \vec{u}(Ax, Ay) = \lambda \vec{u}(A\mu) \quad \text{for } \mu = x + iy.$$

$$H_\lambda(\vec{u}) \quad \text{on } \lambda \mu = Ax + iy$$

$$B = H_{0,\lambda}(A) \Rightarrow B = 0 + \lambda \overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = H_\lambda(\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow (b - w) = \lambda (a - w)$$

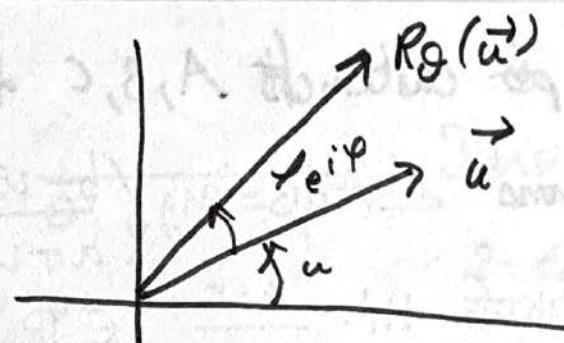
$$\Leftrightarrow \boxed{b = w + e^{i\theta}(a - w)}$$

(49)

$$\text{Set } w, a, \theta \rightarrow \text{on } B = R_{0,\theta}(A)$$

est l'image de A par la rotation $R_{0,\theta}$.

$$\Rightarrow \boxed{b = w + e^{i\theta}(a - w)}$$



$$\begin{aligned} R_\theta(\vec{u}) & \text{ a pu affine } \cancel{e^{i(\theta+\varphi)}} \\ &= e^{i\theta} \cancel{e^{i\varphi}} \\ & \text{affine de } \vec{u}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } u \xrightarrow{R_\theta} R_\theta(\vec{u})$$

$$\mu \xrightarrow{R_\theta} e^{i\theta} \mu$$

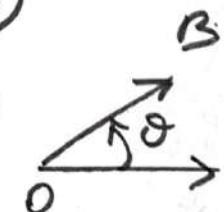
$$\text{Ainsi } B = R_{0,\theta}(A)$$

$$\Leftrightarrow B = 0 + R_\theta(\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = R_\theta(\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow (b - w) = e^{i\theta} (a - w)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b = w + e^{i\theta} (a - w)}$$



(50)

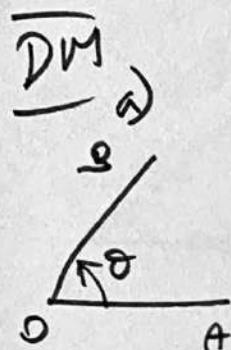
Horn multiple nil
multiple non 1
Rotat + Horn = Horn

(P11) Pr 3 pts distincts A, B, C + affins' a, b, c: a) ns avons $\angle AOB = \arg\left(\frac{b-a}{a}\right)$ [2π]

a) ns avons $\angle AOB = \arg\left(\frac{b-a}{a}\right)$ [2π]

b) st alignés si $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

c) $C \in [AB]$ si $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}^-$



$$\theta = \angle AOB \Leftrightarrow R_\theta(\vec{OA}) = \vec{OB}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\theta}(a-w) = z(b-w)$$

$$\Leftrightarrow e^{i\theta} = z \frac{b-w}{a-w}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-w}{a-w}\right) = \theta$$

$\therefore \arg(z_3) = \arg(z)$ si $\theta > 0$.

évidemment
point dans plan
multiple n° complexe

b) En remplaçant O par C
dc a)

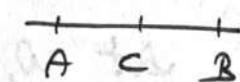
$$\angle ACB = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)$$

A, C, B alignés si $\angle ACB = 0$ [π]
ssi $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = 0$ [π]

$$\text{ssi } \frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R} \quad \longleftrightarrow$$

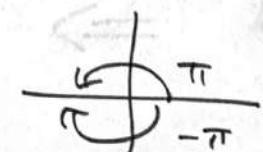
c) $\exists C \in [AB]$

ssi $\angle ACB = \pi$



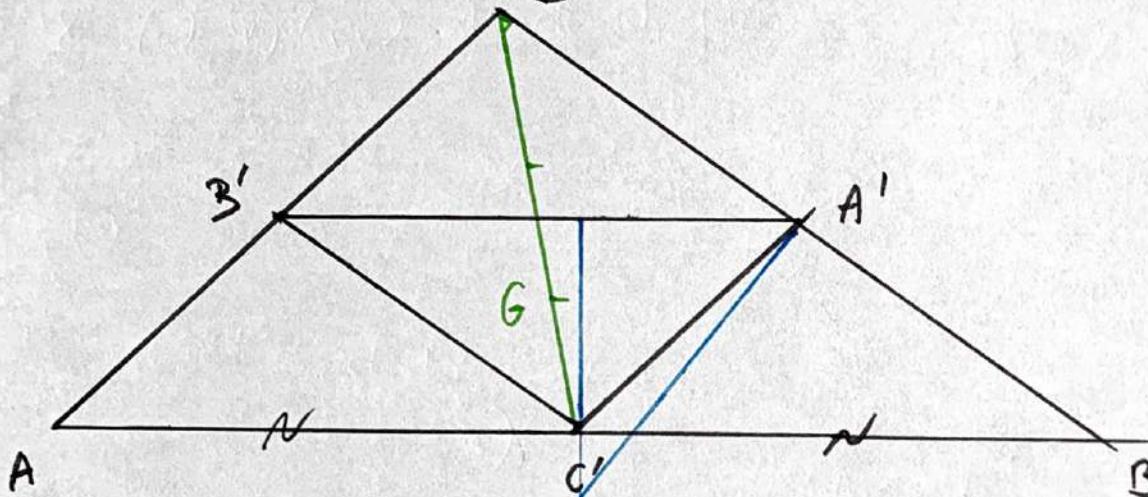
ssi $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \pi$ [2π]

ssi $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}^-$



P22

Les 3 hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre** du triangle.

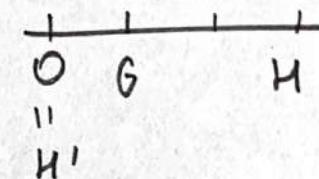


$$A'B'C' = H_{G, \frac{1}{2}}(ABC)$$

$$ABC = H_{G, -\frac{1}{2}}(A'B'C')$$

$$H_{G, -\frac{1}{2}}(O) = H$$

NB :  OGH confondus du triangle équilatéral.



Droite d'Euler.
2:1