Algèbre linéaire

Université Lille 1
Licence de Mathématiques et Licence de Physique
Unité M31
Semestre 3

05 Novembre 2013

October 3, 2013

1 Exercice

Soit a et b deux réels distincts.Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à trois,à une variable x, et à coefficients réels.
a) Montrer que les polynômes de E admettant a et b comme racines forment un espace vectoriel noté F.
b) Donner une base de F.
c) Quelle est la dimension de F?

2 Exercice

On note $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ formé par les polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à n.
a) Donner une base de $\mathbf{R}_n[x]$
Soit P un polynôme de degré n.
b) Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$, $P^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de P .
Soit a un réel.On pose $Q(x) = P(x + a)$.
c) Exprimer Q dans la base $(P; P', \ldots, P^{(n)})$.

3 Exercice

On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x', y', z')$ avec $x' = y + z, y' = x + z, z' = x + y$
a) Montrer que f est bijective.
b) Déterminer l'image par f du sous-espace défini par l'équation $x + y + z = 0$ puis celle du sous-espace défini par les équations $x = y = z$.

4 Exercice

Montrer sans le développer que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 84 & 35 & 62 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

est nul.

5 Exercice

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

2012-2013 **M42**
Université Lille 1 **Algèbre linéaire II**

DS n° 3 du 26/06/2013

Durée : trois heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$, et $P_3 = X(X-1)(X-2)$.
Pour $0 \leq i \leq 3$, on considère les formes linéaires f_i de E définies par : $f_i(P) = P(i)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E et (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base du dual E^* de E.
   On note $(P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*)$ la base duale de (P_0, P_1, P_2, P_3).
2. Pour tout $0 \leq i \leq 3$, on définit Q_i dans E par :
   $Q_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$, $Q_1 = X(X-2)(X-3)$,
   $Q_2 = X(X-1)(X-3)$ et $Q_3 = X(X-1)(X-2)$

   a) Calculer pour tout $0 \leq i \leq 3$, les réels $Q_i(i)$.

   b) Montrer que pour tout $0 \leq i \leq 3$, il existe α_i, β_i et γ_i des réels tels que : $Q_i = \alpha_i P_0 + \beta_i P_1 + \gamma_i P_2 + P_3$.

   c) En déduire l'expression de P_3^* dans la base (f_0, f_1, f_2, f_3).

   d) Exprimer de même les autres formes linéaires P_i^*, $0 \leq i \leq 2$.

Exercice 2.
On considère la forme quadratique suivante sur l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = x^2 + xy + yz + xz$$

1. Écrire la matrice de la forme bilinéaire polaire f de q dans la base canonique.
2. Écrire $q(x, y, z)$ comme somme et différence de carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.
3. Donner une base orthogonale pour la forme quadratique q.
4. Donner une base du noyau N de q.
5. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 0)$. Décrire l'orthogonal $V^\perp$ de V par rapport à f.
6. Décrire $(V^\perp)^\perp$ et le comparer à $V + N$.

T.S.V.P.

Exercice 3. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel :

$$< (x, y, z), (x', y', z') >= xx' + yy' + zz'$$

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

(a) Montrer que q est positive.

(b) Donner une base du noyau de la forme bilinéaire polaire f de q.

(c) Donner la matrice A de f dans la base canonique et trouver un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$q(x, y, z) =< u(x, y, z), (x, y, z) >$$

(d) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour q.

403024 - Maths -
L2 - S3 - 15 -

Université Lille 1
Licence de Maths et Licence de Physique
Unité M31 Semestre 3
Algèbre linéaire
7 Novembre 2015
Durée 2h

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. On note (x, y, z) les composantes d'un vecteur sur cette base. Soit F_1 le sous-espace vectoriel de E de base $e_1 + e_2 - e_3$ et F_2 le sous-espace vectoriel de E d'équation $2x + z = 0$.
a) Donner la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) de la projection de E sur F_1 parallèlement à F_2.
b) Donner la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) de la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2.

Exercice 2

On considère la permutation σ de S_9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Donner la décomposition en cycles disjoints et l'ordre de σ. Calculer σ^{23}.
b) Donner une décomposition en produit de transpositions et la signature de σ.

Exercice 3

On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de a la matrice est- elle inversible? b) Calculer alors l'inverse de la matrice.

SUITE AU VERSO

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E vers E . On note $Kerf$ le noyau de f , Imf l'image de f et f^2 la composée fof .
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $E = Kerf \oplus Imf$
b) $Imf = Imf^2$
c) $Kerf = Kerf^2$

403024 -
L2-S4-1S -

ALGEBRE LINEAIRE
LICENCE MATHÉMATIQUES
Mars 2017
Durée : 2 heures
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question théorique. Définir une forme bilinéaire. Donner des exemples des formes bilinéaires. Définir la matrice d'une forme bilinéaire et obtenir l'expression de la forme en coordonnées. Démontrer la formule de changement de matrice d'une forme bilinéaire pour un changement de bases.

Exercice I.

(1) Montrer que les formes

$$\varphi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3;\ \varphi_2(x) = x_2 - x_3;\ \varphi_3(x) = -x_1 + 2x_2, \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

forment une base de l'espace $(\mathbb{R}^3)^*$.

(2) Trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercice II. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, -1, 1, -1), v_2 = (1, 1, -1, -1), v_3 = (1, -1, -1, 1), v_4 = (1, 1, -1, -1).$$

(1) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires φ qui s'annulent sur v_i :

$$\mathcal{U} = \{\varphi \in (\mathbb{R}^4)^* \ : \ \varphi(v_i) = 0,\ i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Démontrer que $\mathcal{U}$ est un sous-espace de $(\mathbb{R}^4)^*$.

(2) Trouver la dimension du sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^4$ tel que $U^\circ = \mathcal{U}$. En déduire la dimension de $\mathcal{U}$.

(3) Trouver $\mathcal{U}$.

Exercice III. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par :

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(1) Ecrire la matrice de sa forme bilinéaire β dans la base canonique. Trouver le noyau Kerβ et calculer le rang rg(b).

(2) Ecrire la matrice de β dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs v_i forment-ils une base orthogonale pour la forme β ?

(3) (a) Si la réponse à la question précédente est négative, chercher une base orthogonale pour β.
  (b) Trouver la signature de Q.
  (c) Donner l'équation du cône isotrope $\mathcal{I}_Q$ dans les coordonnées (y_1, y_2, y_3) correspondant à la base orthogonale choisie au point (a).
  (d) Trouver l'intersection de $\mathcal{I}_Q$ avec le plan $y_3 = 0$.