M 53 - Intégrales à Paramètres

C-1- Continuité Uniforme & Integ Génér.

(D)[1] Continuité Simple

(D)[2] Continuité Uniforme

(TH)$_1$ Heine

(TH)$_2$ Heine $\mathbb{R}^2$

2.1. Integ Généralisés

(D)$_3$ f localement intégrable

(D)$_4$ Intégrale de f CV

2.2. Fausse Généralité

(P)$_1$ f cont & $L\ell$ $\exists$ finie $\Rightarrow \int f$ CV.

2.3. Crit CV si f signe cte

(TH)$_3$ $\oplus f$ & comparaison (f li)

(TH)$_4$ $\oplus f$ & équivlt (f li)

2.4. Crit CV sur Vl^{R} Absolue

(TH)$_5$ $\int |f|$ CV $\Rightarrow \int f$ CV

2.5. Crit Cauchy

(TH)$_6$ f li, $\int f$ CV si $\left| \int_x^{x'} f \right| \leq \varepsilon$

C2- Intégrales définies à Paramètres

(TH)$_1$ f cont $f: I \times J \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ def & Cont sur I. ($\triangle$ $a, b \in \mathbb{R}$)

1. Continuité de F
2. Condi⊘s pr F soit C^1

(TH)$_2$ $f: I \times J \to \mathbb{R}$ (i) f cont (ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $\Rightarrow F$ bien def & C^1.

& $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$

M 53 - Intégrales à Paramètres

C-1- Continuité Uniforme & Integ Génér.

(D)[1] Continuité Simple

(D)[2] Continuité Uniforme

(TH)1 Heine

(TH)2 Heine $\mathbb{R}^2$

2.1. Integ Généralisés

(D)3 f localement intégrable

(D)4 Intégrale de f CV

2.2. Fausse Généralité

(P)1 f cont & $L\ell$ $\exists$ finie $\Rightarrow \int f$ CV.

2.3. Crit CV si f signe cte

(TH)3 (+) f & comparaison (f li)

(TH)4 (+) f & équivl^t (f li)

2.4. Crit CV en Vl^r Absolue

(TH)5 $\int |f|$ CV $\Rightarrow \int f$ CV

2.5. Crit Cauchy

(TH)6 f li, $\int f$ CV si $\left|\int_x^{x'} f\right| \leq \varepsilon$

C2- Intégrales définies à Paramètres

(TH)1 f cont $f: I \times J \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ def & Cont sur I. (Δ $a, b \in \mathbb{R}$)

1. Continuité de F
2. Conditions pr F soit C^1

(TH)2 $f: I \times J \to \mathbb{R}$ (i) f cont (ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $\Rightarrow F$ bien def & C^1

& $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$

(TH) Fubini $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx \right) dt$

2.4. Integ à Param dt bornes dpt aussi du Param

(TH) $\Psi'(x) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$

C3- Intégrales généralisées à paramètres : $I \times [a, b[\to \mathbb{R}$

$-\infty < a < b \leq \infty$

cont (TH) f cont, $\exists g$ (li), $|f| \leq g$, $\int g$ CV $\Rightarrow F$ def. cont

dériv (TH) f cont, $\int f$ CV, $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$, cont ; $\exists g$ (li), $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq g$; $\int g$ CV $\Rightarrow$ F C^1. $F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}$

Fubini (TH) $f: [\alpha, \beta] \times [a, b[$ cont, $|f(x,t)| \leq g(t)$; $\int_a^b g(t)\, dt$ CV $\Rightarrow \int_\alpha^\beta \int_a^b f = \int_a^b \int_\alpha^\beta f$.

C4- Transformée de Fourier

(D) Série de Fourier

(D) Transformée de Fourier.

(1)

Th $\hat{f}$ cont

Th $\hat{f}$ C^1 & $\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-its} dt$

Th Riemann-Lebesgue $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$

L Densité

Th $\widehat{f'}(s) = is \hat{f}(s)$

4.1. Séries Trigonométriqs

D st série trigonométriq

FF Euler Rq série → st Rq $\sum V_n$ CV ssi....

Th CV normalmt, S cont Th ABSE cv, CV. UN, S cont

Rq CV st / 2π périodq / cont / C^1 & dérivée

→ Coeff st, sd Fourier ; 2π-périodicité

Prop si f paire / impaire

Règle CV sdF : Th Dirichlet / Th CV L^2 / Th Féjer.

L Riemann Lebesgue. Cor

Th Dirichlet Cor.

(Th) $\hat{f}$ cont

(Th) $\hat{f}$ C^1 & $\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-its} dt$

(Th) Riemann-Lebesgue $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$

(L) Densité.

(Th) $\widehat{f'}(s) = i s \hat{f}(s)$

4.1. Séries Trigonométriqs

(D) (ST) série trigonométriq

(FF) Euler (Rq) série → (ST) (Rq) $\sum V_n$ (CV) si....

(Th) CV normalmt, S cont (Th) ABSE CV, CV. UN, S cont

(Rq) CV st / 2π périodq / cont / C^1 & dérivée

→ Coeff (ST), sd Fourier ; 2π-périodicité

(Prop) si f paire / impaire

Règle (CV) sdF : (Th) Dirichlet / (Th) CV L^2 / (Th) Féjer.

(L) Riemann Lebesgue. (Cor)

(Th) Dirichlet (Cor).

(Th) de Féjer

(Cor 1) si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = 0 \Rightarrow f = 0$

Polynôme trigo | $e_k(t) = e^{ikt}$, $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_k, k \in \mathbb{Z})$

(Cor 2) $\mathcal{P}$ est dense ds $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni de la norme ∞.

(CV ce) quad. $\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$, $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$

(Prop) La famille $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ forme une base ornée de $\mathcal{P}_N$.

(Th) si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \inf_{p \in \mathcal{P}_N} \|f - p\| = \|f - S_N f\|_2$

(Th) (Inégalité de Bessel)

si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ (CV) et $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$.

(Cor) si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}$, $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$.

(Th) (CVce quad)

si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \|S_k f - f\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

(Th) (Egalité de Parseval)

soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)\right) + |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

(Th) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont, 2π périod, C_1 p morcx

$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e^{ikt}$ (CV) normalt dc UN vers f sr $\mathbb{R}$.