M53 - Nota Bene :

- DM. TH Heine
  - Passer p négat° de la définit° UN. Cont
  - Prendre $\delta = \frac{1}{n}$, ss-suite x_n & y_n

    CV vers 0, CV vers α
  - Prendre ss-suite $x_{\varphi(n)}$ & $y_{\varphi(n)}$, user cont f ?!

@ ig $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ $\to$ $\alpha > 1$, $\alpha \neq 1$ @ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$ cont de f + $\lim_{x \to b^{<}} f(x)$ $\exists$ l finie

- Continuité sr $I \Rightarrow$ dc intégrable sr I.
- ⚠ Positivité de f pr user Crit Comparaison / Équivlce

@ $\int_0^\infty e^{-t^2}$: étde CV 4 Cd Compar

@ $\int_1^\infty \frac{1}{\ln t + t^r} dt$ EsC : 4 Cd Equiv

@ $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$: Crit Vl^r Abs + CdC

À Ret : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$: IPP ... ▸ étude CV ▸ étude CV abs

- TH Continuité de F (int. déf à param)

  ⚠ a, b dvt ê Réels finis, ne f pas pr ig

@ $F(x) = \int_0^x \sin(x+t) e^{xt^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$; calcul $\lim_{x \to 0} F(x) = ?$

@ $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t} dt$, $x \in \mathbb{R}$ ⚠ dérive p/ x ⚠ intègre p/ t.

M53- Nota Bene :

- DM · Th Heine
  - Passer p négaO de la définiO UN. Cont
  - Prendre $\delta = \frac{1}{n}$, ss-suite x_n & y_n
    CV vers 0, CV vers α
  - Prendre ss-suite $x_{\varphi(n)}$ & $y_{\varphi(n)}$, user cont f ?!

@ ig $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ → $\alpha > 1$ / → $\alpha \neq 1$ @ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$ cont de f + $\lim_{x \to b} f(x)$ ∃ l finie

- Continuité sr I ⇒ dc intégrable sr I.

- ⚠ Positivité de f pr user Crit Compar^{son} / Équivlce

@ $\int_0^\infty e^{-t^2}$: étde CV 4 Cd Compar

@ $\int_1^\infty \frac{1}{\ln t + t^\gamma}\, dt$ EsC : 4 Cd Equiv

@ $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$: Crit Vl^R Abs + CdC

À Ret : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$: IPP ... ▸ étude CV ▸ étude CV abs

- Th Continuité de F (int. déf à param)

⚠ a, b dvt ê Réels finis, ne f pas pr ig

@ $F(x) = \int_0^x \sin(x+t)\, e^{xt^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$; calcul $\lim_{x \to 0} F(x) =$

@ $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$ ⚠ dérive p/ x ⚠ intègre p/ t.

@ Mq F bien déf & cont sr $\mathbb{R}$.

$F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$,

soit $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \cos(2xt)\, e^{-t^2}$

(i) f ∫ bien cont.

(ii) $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$, $|f(x,t)| \leq e^{-t^2}$

posons $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto g(t) = e^{-t^2}$.

Rq g est cont sr $[0, \infty[$ dc li sr $[0, \infty[$.

D+, $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\lim_{t \to \infty} e^{-t^2} = 0$

& $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV dc $\int_1^\infty g(t)\, dt$ CV d'où $\int_0^\infty g(t)\, dt$ CV

P Th 1 C, cd F est cont & déf sr $\mathbb{R}$.

a) $F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$.

on sait que F est cont sur $\mathbb{R}$.

Mq F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \cos(2xt)\, e^{-t^2}$

• f est cont sur $\mathbb{R} \times [0,\infty[$

(i) $\forall x \in I$, $\int_0^\infty f(x,t)\, dt$ CV (voir dessus)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t \sin(2xt)\, e^{-t^2}$

dc $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∃ & cont $\mathbb{R} \times [0,\infty[$

(iii) $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq 2t\, e^{-t^2} = g(t)$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty[$

Mq mtn $\int_0^\infty 2t . e^{-t^2}\, dt$ (a)

on a $g(t) = o\left(\frac{1}{t^3}\right)$ car $\lim_{t \to \infty} 2t . e^{-t^2} = 0$

blabla Id Rieman CV....

Par TH₂, F est C^1 & $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F'(x) = -2 \int_0^\infty t \sin(2xt)\, e^{-t^2}\, dt$.

→ Trouver ED 1° ordre pour F.

On effectue IPP sur $\int_0^X \sin(2xt)(-2t)\, e^{-t^2}\, dt = F'(x)$ $X \to \infty$

$F'(x) = \underbrace{\sin(2xX)\, e^{-X^2}}_{|\cdot| \leq e^{-X^2} \xrightarrow[X \to \infty]{} 0} - \underbrace{2x \int_0^X \cos(2xt)\, e^{-t^2}\, dt}_{-2x F(x)}$ $\Rightarrow F'(x) = -2x F(x)$.

(& $X \to \infty$)

Dc F est sol° ED : (E) $y'(x) + 2x\, y(x) = 0$.

On sait q soluts (E) st forme : $y(x) = k . e^{-\int 2x\,dx} = k . e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$

Dc $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = k . e^{-x^2}$

D'où ep pr $x = 0$, on a $F(0) = k = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . e^{-x^2}$

a) $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, calculer $\hat{f}$.

$t \mapsto e^{-|t|}$ cont sur $\mathbb{R}$ de (l.i). Dt, $e^{-|t|} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \to \infty$.

D'où $\int_0^{\infty} e^{-|t|}\, dt$ (CV).

Comme $t \mapsto e^{-|t|}$ est paire, $\int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\, dt$ (CV) aussi.

Dt, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ist}\, dt$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-ist}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-ist}\, dt$

Ainsi $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-is)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+is)}\, dt$

$= \frac{1}{1-is}\left[e^{(1-is)t}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+is}\left[e^{-(1+is)t}\right]_{0}^{\infty}$

$= \frac{1}{1-is} - \frac{1}{1+is} = \frac{2}{1+s^2}$

Car $\left|e^{(1-is)t}\right| = e^{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ & $\left|e^{-(1+is)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Suite b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(s,t) \mapsto g(s,t) = f(t)\, e^{-its}$

- g est cont sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = -it\, f(t)\, e^{-its}$

$\longrightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial s}$ $\exists$ & est cont sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| = |t f(t)|$ (pseudo majorant)

$\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|\, dt < \infty$.

Dc d'après Th 2, $\hat{f}$ est de classe C^1 &

$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\, dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, e^{-its}\, dt$

ⓐ soit $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>cont</u> tq $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$

& y de classe C^2 tq $\int_{-\infty}^{\infty} |y^{(k)}(t)|\,dt < \infty$, $k = 0,1,2$

On vt résoudre $y''(t) - y(t) = -g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\widehat{y''}(s) - \hat{y}(s) = \hat{g}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

P. (Th) précédt, $\widehat{y''}(s) = (-is)^2 \hat{y}(s) = -s^2 \hat{y}(s)$

D'où $-s^2 \hat{y}(s) - \hat{y}(s) = -\hat{g}(s)$

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{1+s^2} \hat{g}(s).$$

(R) $h(t) = e^{-|t|}$, on a vu $\hat{h}(s) = \frac{2}{1+s^2}$

D'où $\hat{y}(s) = \frac{1}{2} \hat{h}(s) \hat{g}(s)$, $s \in \mathbb{R}$

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{2} \widehat{h * g}(s)$$

→ $h * g$ est produit de convolut° de h & g.

$$(h * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) g(x)\,dx , \; t \in \mathbb{R}.$$

P. injectivité de $f \mapsto \hat{f}$, on <u>ed</u>

$$y(t) = \frac{1}{2} (h * g)(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)} g(x)\,dx$$