Feuille 3. Exercice 15

En passant en coordonnées cylindriques calculer

$$Q = \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

dans les cas suivants.

(a) D domaine borné de $\mathbb{R}^3$ délimité par les surfaces

$$\{x^2+y^2 = 2z\} \qquad \{z = 2\}$$

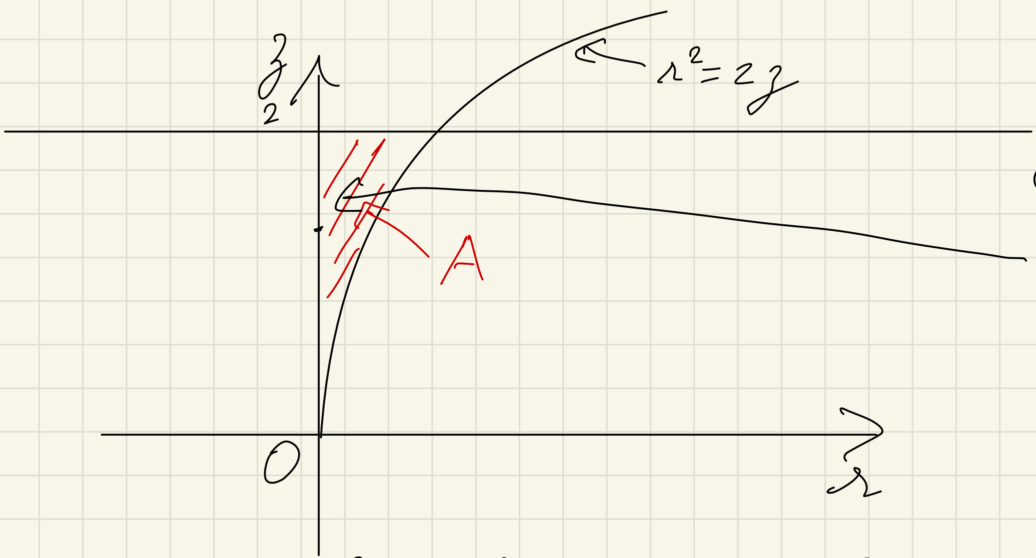
et $f(x,y,z) = x^2+y^2$

On écrit $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a $x^2+y^2 = 2z \iff r^2 = 2z$

$z = 2 \iff z = 2$



on a : $0 \le r \le \sqrt{2z}$

D est le solide de révolution obtenu par rotation du domaine A autour de l'axe Oz

$D = \{ 0 \le z \le 2 \ , \ 0 \le r \le \sqrt{2z} \}$

On a :

$$Q_o = \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2z}} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(x,y,z)}_{= x^2+y^2 = r^2} d\theta\, r\, dr\, dz$$

$$Q_o = \int_0^2 2\pi \int_0^{\sqrt{2z}} r^3\, dr\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 z^2\, dz = \frac{16}{3}\pi$$

(b) D est le domaine borné délimité par $\{x^2+y^2=1\}$, $\{z=0\}$, $\{x+y+z=2\}$

et $f(x,y,z) = x+y+z$.

Le domaine est la portion du cylindre

$\{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$

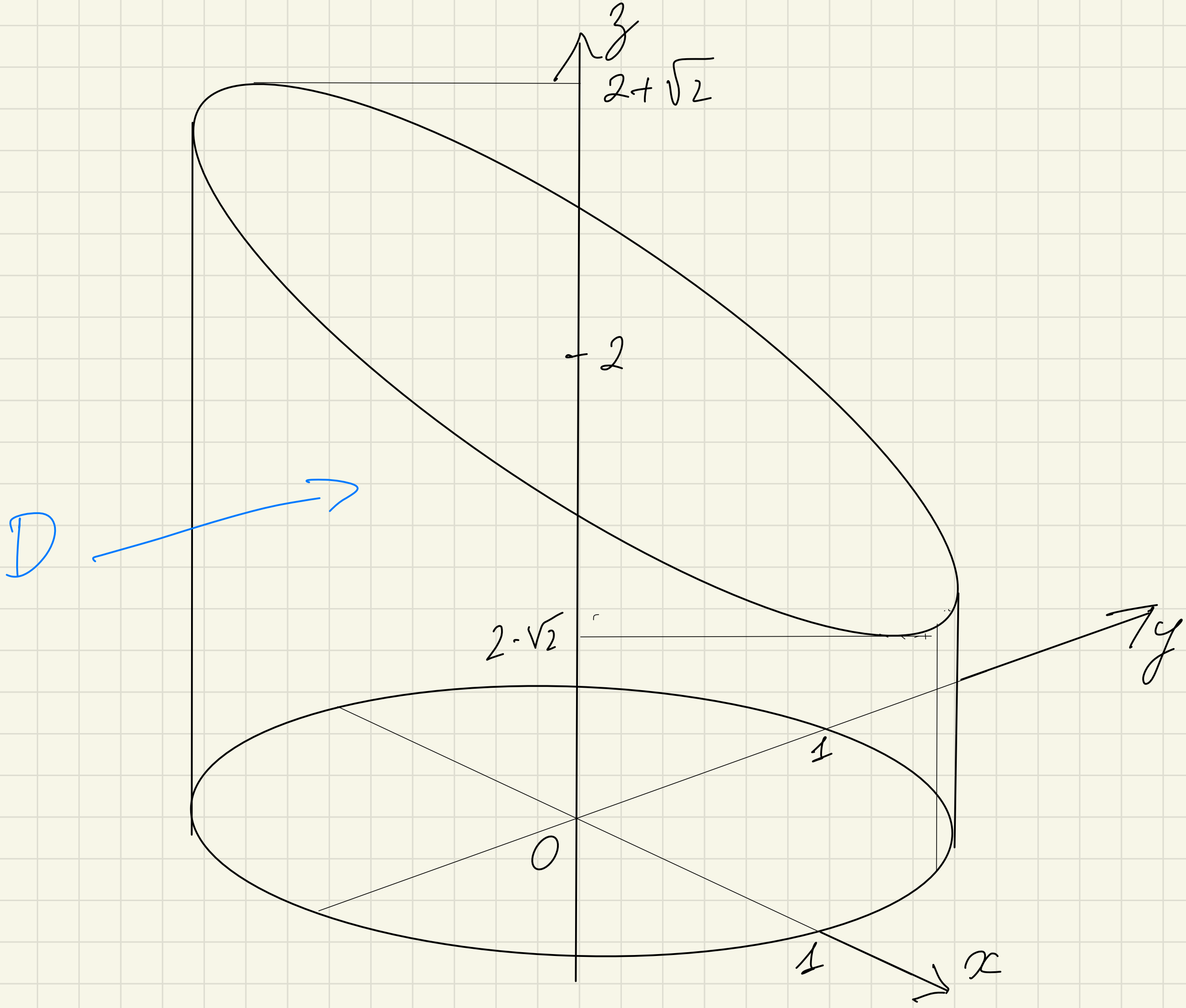
comprise entre les plans $\{z=0\}$ et $\{z=2-(x+y)\}$

En coordonnées cylindriques

$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$$(x,y,z) \in D \iff \begin{cases} r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 - r\underbrace{(\cos\theta + \sin\theta)}_{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{2}\, r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (*)$$



z
2+√2
2
2-√2
y
1
O
1
x
D

On a $f(x,y,z) = x+y+z$

$$= r(\cos\theta + \sin\theta) + z$$

$$= \sqrt{2}\, r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + z$$

d'où

$$Q_b = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2-\sqrt{2}r\cos(\varphi)} \left(\sqrt{2}\, r \cos\varphi + z\right) dz \; d\varphi \; r\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(2-\sqrt{2}\, r\cos\varphi\right)\sqrt{2}\, r\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\, r\cos\varphi\right)^2 d\varphi \; r\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(2-\sqrt{2}\, r\cos\varphi\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}\, r}{2}\cos\varphi\right) d\varphi \; r\,dr$$

$$Q_b = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 - r^2 \cos^2\varphi\right) d\varphi \, r\,dr$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

(c) $f(x,y,z) = z - x + y$

D est le domaine borné délimité par

$\{y = z^2 + x^2\}$ $\{y^2 = z^2 + x^2\}$

Il y a un petit piège ici. Le "bon" changement de variable consiste à considérer les coordonnées cylindriques autour de l'axe Oy

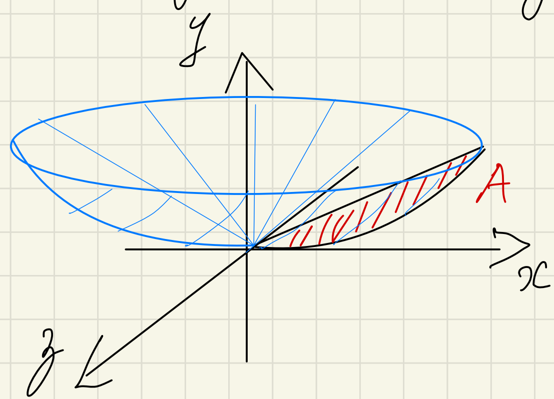
$$(x, y, z) = (r\cos\theta, y, r\sin\theta) \quad r > 0$$

Avec cette notation

$$(x, y, z) \in D \iff r^2 \leq y \leq r$$

D est le solide de révolution autour de l'axe Oy engendré par

$$A = \{(x, y, 0) : x^2 \leq y \leq x \quad 0 \leq x \leq 1\}$$



et $f(x,y,z) = r(\sin\theta - \cos\theta) + y$

$$= \sqrt{2}\, r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + y$$

Donc

$$Q = \int_0^1 \int_{r^2}^{r} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{2}\, r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + y\right] d\theta \, dy \, r\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_{r^2}^{r} 2\pi y \, dy \, r\,dr = \pi \int_0^1 \left[y^2\right]_{y=r^2}^{y=r} r\,dr$$

$$= \int_0^1 (r^3 - r^5)\, dr = \frac{1}{12}.$$

Exercice 16. En passant en coordonnées sphériques calculer $Q := \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ dans les cas suivants.

(1) $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 8 \}$

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

En coordonnées sphériques

$$(x,y,z) = (r\cos\theta\cos\varphi,\; r\cos\theta\sin\varphi,\; r\sin\theta)$$

$$r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$(x,y,z) \in D \iff 1 \leq r \leq 2\sqrt{2}$

et

$f(x,y,z) = r$

d'où

$$Q_1 = \int_1^{2\sqrt{2}} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) \cos\theta \, d\theta \right] r^2 \, dr$$

$$= 4\pi \int_1^{2\sqrt{2}} r^3 \, dr = 63\pi$$

(2) $D = \{ (x,y,z) \; : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

En coordonnées sphériques

$(x,y,z) \in D \iff 1 \le r \le 2$ et $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ }

$$f(x,y,z) = r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$Q_2 = \int_1^2 r^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{1-2\sin^2\theta}\right)\cos\theta}_{\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\right)} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)}_{\pi/2} d\theta\right] dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{5}\left[r^5\right]_{r=1}^{r=2} \left[\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{31\pi}{15}$$

(3) $D \subset \mathbb{R}_+^3$ délimité par les surfaces

$\{y = x\}$, $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$$f(x,y,z) = yz + xz = (x+y)z$$

⚠ Il y a deux domaines bornés satisfaisant la description précédente il sont symétriques l'un de l'autre par $(x,y,z) \longmapsto (y,x,z)$ et comme $f(y,x,z) = f(x,y,z)$

Q ne dépend pas du choix de D

On prend

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \; 0 \leq x, \; 0 \leq y \leq x, \; 0 \leq z \right\}$$

En coordonnées cylindriques

$$(x,y,z) \in D \iff \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq r \leq R & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} & \end{array} \right\}$$

et

$$f(x,y,z) = r^2 \sin\theta \cos\theta \,(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$Q_3 = \left(\int_0^R r^4 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\varphi + \cos\varphi) \, d\varphi \right)$$

On a $\displaystyle\int_0^R r^4\,dr = R^5/5$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

D'où $\quad Q_3 = \dfrac{R^5}{15}$.