

D'épartement de Mathématiques

M41 - Devoir Surveillé test

2020 - Durée 1 heure

Exercice .

- (1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \quad |x| < 1$
(2) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x| < 1$
(3) Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier la convergence en $x = -R$ et $x = R$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

(On pourra utiliser les question (1) et 2)).