Exercices de révisions pour Héloïse

Defraiteur Maxence

Janvier 2024

M2 Master MEEF

Consignes

Bonjour Héloïse, voici une liste d'exercices pour réviser un grand nombre de chapitres. Je te demande de me rendre l'ensemble des exercices sous la forme d'**un seul fichier PDF**. (Les applications Camscanner, Swiftscan, IlovePDF sont tes amies ;-)). Je vais demander assez souvent des questions intermédiaires de conjecturer des résultats à l'aide de ta calculatrice. Je te demande donc de prendre en photo ta calculatrice à ce moment là pour montrer l'affichage ou les affichages qui te permettent de conjecturer les résultats.(Ne néglige pas ce travail : je te le demande cela pour t'habituer à vérifier tes résultats durant tes épreuves). Pour réaliser l'ensemble de ces exercices : je reste à tout moment à ta disposition pour t'aider. N'hésite pas à m'envoyer des messages pour me poser des questions. Les exercices que je te demanderai de réaliser sont extrêmement classique et ont de fortes chances de tomber à tes prochaines évaluation. Bon travail à toi !

Quand j'ajouterai aux questions le logo de la calculatrice, il faudra ajouter dans ta résolution d'exercices, la photo de l'affichage du calcul ou des commandes finales pour trouver le résultat avec ta calculatrice.

Travail pour Mercredi 17/01 :

— Exercice 3 : second degré (page 4)
— Vidéo : TI-83 : nombre et fonction dérivée
— Vidéo : TI-83 : tangente d'une courbe en un point
— Exercice 1 : dérivation (page 3)

De mémoire, j'ai écrit une coquille hier soir sur les feuilles blanches. La dérivée de la fonction inverse, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$ mais bien $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Table des matières

1 Liens vers des vidéos tutorielles potentiellement utiles (TI-83 Premium CE)

— Nombre et fonction dérivée
— Tangente à une courbe en un point
— Kit de survie python sur la calculatrice
— Fonctions polynômiale du second degré à paramètre
— Suite
— Calculer la somme des termes d'une suite (Yvan Monka)
— Documentation sur les suites
— calculer les termes d'une suite, somme d'éléments d'une suite
— Résolutions d'équations du second degré

2 Exercices

2.1 Dérivation

Exercice 1.
On considère la fonction f dont l'image de x, pour $x \in [1, +\infty[$ est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x - 2}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 3.

2) Déterminer l'expression de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 2.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, I = \mathbb{R}$

2) $g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}, J = \mathbb{R}$

2.2 Second degré

Exercice 3.
On considère le polynôme $P(x) = -9x^2 + 6x + 15$

1) Déterminer les racines du polynôme P. On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2) **2.a.** Développer l'expression $(x - x_1)(x - x_2)$

2.b. En déduire une factorisation du polynôme P.

2.c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est :

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$$

1) Déterminer les nombres réels a, b et c réalisant l'égalité :

$$f(x) = (2x - 3)(ax^2 + bx + c)$$

2) En déduire la forme factorisée de la fonction f en produit de facteurs de degré 1. Vérifier à l'aide de la calculatrice que le résultat est correct.

Exercice 5.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 6x^2 - 9x - 6$$

1) Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = 6[(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{16}]$

2) En remarquant que $\frac{25}{16} = (\frac{5}{4})^2$, factoriser l'expression de la fonction f sous la forme de deux facteurs de degré 1.
Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.

3) Dresser le tableau de signes de la fonction f.

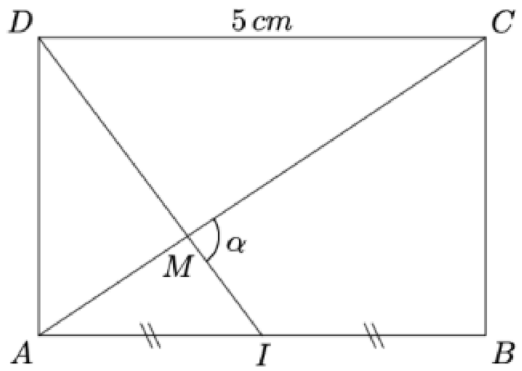
2.3 Produit scalaire

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que : $AB = 5cm; BC = \frac{2}{3}AB$. I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.

4) En exprimant les vecteurs à l'aide de $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\vec{ID} \cdot \vec{AC}$

5) **5.a.** Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$

5.b. En déduire la mesure de l'angle $I\hat{M}C$ au dixième de degré près.



Exercice 6.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) orthonormé, on considère les quatre points suivants : $A(-3, 2); B(-2, -2); C(2, -1); D(1, 3)$

1) Déterminer la valeur de $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2.4 Trigonométrie

Exercice 7.

1) On donne la valeur exacte : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1.a. En utilisant la formule $1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$, déterminer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$

1.b. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{8}$ en justifiant votre démarche.

1.c. Etablir l'égalité : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

2) On considère l'expression suivante : $A = \cos\frac{9\pi}{8} - 3\sin\frac{5\pi}{8} + 2\cos\frac{7\pi}{8}$
Déterminer une écriture de l'expression de A en fonction des rapports trigonométriques de l'angle $\frac{\pi}{8}$

Exercice 8.
Simplifiez l'écriture de chacune des expressions ci-dessous :

1) $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

2) $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$

2.5 Suites

Exercice 9.
Ci-dessous sont données les quatre premiers termes de cinq suites définies pour tout entier naturel :

1) $u_0 = 3; u_1 = 7; u_2 = 11; u_3 = 15$

2) $v_0 = 54; v_1 = 6; v_2 = \frac{2}{3}; v_3 = \frac{2}{27}$

3) $w_0 = 2; w_1 = -6; w_2 = 18; w_3 = -54$

4) $a_0 = 3.25; a_1 = 5; a_2 = 6.75; a_3 = 8.25$

5) $b_0 = 2; b_1 = 4; b_2 = 8; b_3 = 16$

Parmi ces suites, pour lesquelles peut-on conjecturer qu'elle soit arithmétique ? géométrique ? ou alors peut-on affirmer qu'elle ne soit ni arithmétique, ni géométrique ?

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation :

$$u_n = 7 \times 4^n - 2 \times 3^n$$

1) Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation suivante : $u_{n+2} = 7 \cdot u_{n+1} - 12u_n$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $v_n = u_{n+1} - 3u_n$ Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On donnera le premier terme et la raison.

Exercice 11.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3; u_{n+1} = 9 \times 2^n - u_n$$

1) **1.a.** Vérifier la valeur des deux termes suivants : $u_1 = 6; u_2 = 12$
1.b. Déterminer la valeur du terme de rang 3 de la suite (u_n)
2) **2.a.** A l'aide d'un algorithme écrit en langage Python, générer les 20 premiers termes de cette suite.
2.b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (u_n)?

Exercice 12.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des questions, donner le nombre de termes composant la somme :

1) $u_0 + u_1 + \cdots + u_{32}$
2) $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
3) $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{100}$
4) $u_k + u_2 + \cdots + u_{88}$
5) $\sum_{k=0}^{64} u_k$
6) $\sum_{k=5}^{16} u_k$
7) $u_5 + u_6 + \cdots + u_{15}$
8) $u_5 + u_6 + \cdots + u_{15}$
9) $u_5 + u_6 + \cdots + u_n$
10) $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n$

Exercice 13.
On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, arithmétique de premier terme -10 et de raison 3.
1) Déterminer la valeur de la somme S définie par : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{84}$

Exercice 14.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n naturel par : $v_n = \dfrac{5}{2^n}$.
Déterminer la somme S des 20 premiers termes de la suite (v_n).

2.6 Probabilités

Exercice 15.
Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.
Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
On note :

— V l'évènement : « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;

— R l'évènement : « Paul rate son train »

1) Construire l'arbre de probabilité de cette expérience aléatoire.
2) Sans justification, donner les probabilités suivantes sous forme de fractions irréductibles :
2.a. $P_V(\overline{R})$
2.b. $P_{\overline{V}}(R)$
2.c. $P(\overline{V} \cup \overline{R})$

Exercice 16.
Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}. Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88% des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92% ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux 80% ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhciules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix. On note F l'évènement « le véhicule contrôlé a des freins en bon état ».

On note E l'évènement « le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état. »

Puis $\overline{E}$ et $\overline{F}$ désignent les évènements contraires de E et F.

1) Décrire cette situation à l'aide d'un arbre

2) **2.a.** Déterminer la probabilité $P(\overline{F})$ de l'évènement $\overline{F}$.

2.b. Quelle est la probabilité $P_{\overline{F}}(\overline{E})$, probabilité que l'éclariage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

2.c. Montrer que la probabilité $P(E \cup F)$ de l'évènement $E \cup F$ est égale à 0,8096.

2.d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?

2.e. Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réaprer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

Exercice 17.
Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insère dans une urne. On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On consdière que les deux tirages sont indépendants.

1) A chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille. COnstruire l'arbre de probabilité lié à cette expérience.

2) Soit X la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.

2.a. Déterminer la loi de probabilité de X.

2.b. Calculer son espérance mathématique de $E(X)$

2.7 Exponentielle

Exercice 18.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$.

Exercice 19.

Soit a un nombre réel quelconque.

On considère la suite $(u_n$ définie par : $u_0 = a; u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{2u_n}(e^{u_n} - 1)$. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

1) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

2) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

3) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 20.

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$

2) $j(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

Exercice 21.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ où a, b et c sont trois réels. On note C_f sa courbe représentative.

1) **1.a.** Lire graphiquement la valeur de $f(0)$

1.b. En déduire la valeur de c

2) **2.a.** Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$

2.b. Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c

2.c. En déduire la valeur de b

3) Lire graphiquement $f(1)$. En déduire la valeur de a.

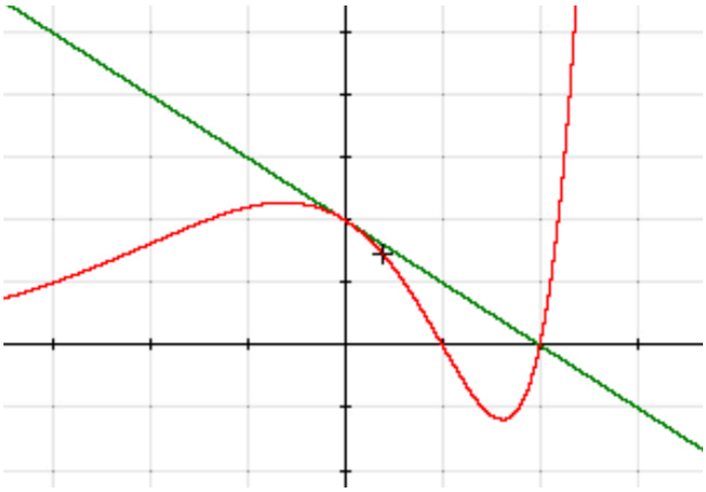


FIGURE 1 – Exercice 4

Exercice 22.
Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

1) $h(x) = xe^{x+1}$

2) $j(x) = (x^2 + 1)e^{3x+1}$

Exercice 23.
Etablir les égalités suivantes :

1) $\dfrac{2 + 3e^x + e^{2x}}{e^{2x}} = 2e^{-2x} + 3e{-}x + 1$

2) $\dfrac{1 - e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$

2.8 Python

Exercice 24.
A résoudre uniquement si tu as le temps.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2) Ecrire, en langage Python, une fonction qui calcule le nombre dérivé en un réel x_0 d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$

3 Bibliographie

Références

[1] Banque d'exercices en ligne, https://chingmath.fr/classe/1re

[2] Manuel collaboratif en ligne, https://www.lelivrescolaire.fr/manuels/mathematiques-1re-2019