M62 Annale 2020 - 2021

Ex 1 : (PC) $\begin{cases} \dot{y} = |y+t| \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1) Établ. que (PC) admet uniq soluto y de classe C^1 global. ie déf sur $\mathbb{R}$.

(SDO_I) cont $\dot{y} = F(t,y) = |y+t|$ glob lipschitz

$\forall$ seconde variable.

$\forall y, z \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}$:

$\| f(t,y) - f(t,z) \| < M \|y - z\|$.

Soit $\| |y+t| - |z+t| \| \leq \| y+t-z-t \|$

$= \|y - z\|$ & $M = 1$.

de $\exists$ & unicité soluto sur $\mathbb{R}$ entier

$\boxed{\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|}$

$\big| |a-b| \big| < |a|$

$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

2) Calculer cette soluto

soluto pr tps positif. En 0, y est nulle et S^T croissante car $\dot{y} \geq 0$ de $y \geq 0$ $\forall t \geq 0$.

On peut donc enlever la valeur absolue, on obtient

$\dot{y} = y + t, \quad y(0) = 0$ pr $t \geq 0$

Puis y est S^T positive dès lors $t > 0$, en effet $t \in]0, \varepsilon[_{\varepsilon > 0}$, on aurait en $t = \frac{\varepsilon}{2}$ que $\dot{y}(\varepsilon/2) = |y(\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}| = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ & de y différent de 0 au moins un instant sur cet interv., ce est fx par hypo

Prenons $t > \varepsilon > 0$ ($\hat{c}$ mqé $y(t) \neq 0$).

Soluo triviale de $\dot{y} = y + t$

$\hookrightarrow y(t) = e^t + 1 - t$

Sur $\mathbb{R}^-$, $\dot{y} = -y - t \rightarrow (E_h) \rightarrow y = z e^{-t}$

Puis pr sol particulière : $y = z(t) e^{-t}$; $\dot{y} = \dot{z}(t) e^{-t} - z(t) e^{-t}$

$\dot{y} = \dot{z}(t) e^{-t} - z(t) e^{-t} = e^{-t} [\dot{z}(t) - z(t)] = -z(t) e^{-t} - t$

$\Leftrightarrow \dot{z} - z = -z - t e^t$

$\Leftrightarrow \dot{z}(t) = -t e^t$

$\Leftrightarrow z(t) = -t e^t + e^t - 1$.

$$y(t) = \begin{cases} e^{t} - t - 1 & t > 0 \\ -te^{t} + e^{t} - 1 & t < 0 \end{cases}$$

Exo 2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) Calculer e^{tA}

$A^n = ?$ $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 24 \\ 24 & 25 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 25 & 24 \\ 24 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & \\ & \end{pmatrix}$

Diagonalisons.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 3^2 = 16 - 8\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 8\lambda + \cancel{7}$$

$$= (4-\lambda-3)(4-\lambda+3) = (1-\lambda)(7-\lambda)$$

$\Delta = 64 + \cancel{1}20 = 84$

$\cancel{\lambda_1 = \frac{8-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 7.$

$E_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \to E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_7 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to E_7 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, com^t(P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = Id_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = Id_2 + P\sum_{n\geq 1} \frac{(tPD)^n}{n!} P^{-1}$$

$$= Id_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^n}{n!}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Id_2\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} - 1 & 0 \\ 0 & e^{7t/2} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} 1 + e^{t/2} + e^{7t/2} & e^{7t/2} - e^{t/2} \\ e^{7t/2} - e^{t/2} & 1 + e^{t/2} + e^{7t/2} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} + e^{7t} & e^{7t} - e^{t} \\ e^{7t} - e^{t} & e^{7t} + e^{t} \end{pmatrix}$$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 3e^t \\ \dot{y} = 3x + 4y - 3e^t \end{cases}$. Résoudre (SD)

$\dot{Y} = F(t, Y)$ l'

Cont

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$$

$\dot{Y} = AY + B(t)$ l'espace des solutions est un espace affine de la forme $E_S = E_h + E_0$.

~~On ajoute à $Y(0) = Y_0$ rentre dans le cadre Th CL global.~~

$y(t) = Y_0 e^{At}$, $Y_0 \in \mathbb{R}$. E_h

$E_h = \{ Y_0 e^{tA}, Y_0 \in \mathbb{R}^2 \} = \{ Y_0 \begin{pmatrix} e^t + e^{7t} & e^{7t} - e^t \\ e^{7t} - e^t & e^{7t} + e^t \end{pmatrix}, Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

Idée : poser l'un des 2 q vaut 0. cherche de la forme $x(t) = ae^t$ $\dot{x}(t)$
$y(t) = be^t$ $\dot{y}(t)$

$\Leftrightarrow \{$
$\{ b = 1 - a$

Sol^o partic^{re}
$x(t) = e^t$
$y(t) = 0$.

Ex 3 y sol max pb de Cauchy)

$$\dot{y} = y + y^3$$
$$y(0) = 1.$$

max d'Ω.

1) Dmq $t \mapsto y(t)$ ne pt s'annuler sur son interv max d'Ω.

f polynomiale dc C^∞ dc a fortiori C^1 & dc local. Lip. & cont, dc Th CL local
$\exists!$ (I, y) solu^o maximale.

Si par l'abs. y s'annule en un $t \in I$, on aurait alors $\dot{y}(t) = y(t) + y^3(t) = 0$, dc étant donnée la nature autonome du (SD) présenté on serait sur un point fixe, or les pts fixes du système st les zéros de $x \mapsto x + x^3 = x(1 + x^2)$ q a pr uniq zéro 0, on devrait dc ê en tt tps $t \in I$ en $y(t) = 0$ or $y(0) = 1$ & dc abs.

Posons $z(t) = \frac{1}{y^2(t)}$

2) En résolvant (ED) satisfaite p $z(t)$ calculer $y(t)$ & son intervalle d'existence.

$$\dot{z}(t) = -2\frac{\dot{y}}{y^3} \quad \text{de} \quad \dot{y} = y + y^3$$

devient $\frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1 \Leftrightarrow -2\frac{\dot{y}}{y^2} = -2\left(\frac{1}{y^2}+1\right)$

de (ED_z) $\begin{cases} \dot{z} = -2z - 2 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

$E_h + E_0$

$\Rightarrow z(t) = Ce^{-2t} - 1 \rightarrow 2e^{-2t} - 1 = z(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{y^2(t)} = 2e^{-2t} - 1$

$t < \ln\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2t} - 1}}$ AOR

int d'$\exists$ $]-\infty, \ln(\sqrt{2})[$.

$\dot{y} = y + y^3$
$y(0) = \frac{1}{4}$

z est alors inconnue d'une EDLA non-homog d'inter d'$\exists$ de l'unique solu° $\mathbb{R}$

Idée : DF : que pr mq qu'elle est bornée pr mq glob. lipschitzienne.

EDS : $\begin{cases} \dot{x} = x - xy - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$

4.1) Vérifier (SD) ss la forme $\dot{Y} = F(Y)$ ds I loc lips car polynomial de C^∞ donc a fortiori C^1. I est cont & rentre ds cadre TH CL (en donnant CI $x(0) = x_0$ & $y(0) = y_0$ $\Rightarrow \exists$ & unicité solu° max (I, y).

Ainsi on ne Ⓐ pas vers aucun pt fixe, : absurde, donc on sort de R_0 en tps fini (plus précisément il existe un t_0 tq

$$Y(t_0) \in \{y = -\frac{x}{2} + 1\} \cap [0,1] \times \mathbb{R}$$

m̂ raisonnt (à peu de chose près) pr

→ passer de R_1 à R_2.

→ passer de R_2 à R_3.

I_∞

I_∞

III) Étude ds quart de plan supérieur droit - R_0

$\Leftrightarrow x(0) = 1$ et $y(0) = \sigma > \frac{1}{2}$.

soit trajec $(x(t), y(t))$ q passe en $t=0$ par $(1, \sigma)$.

6) Dmq $\forall t$ ds l'interv max d'∃, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

$$(SD) \begin{cases} \dot{x} = x - xy - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

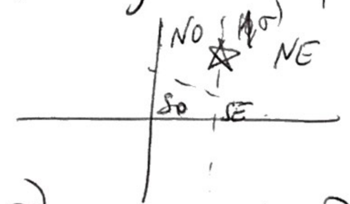
On pt facilement mq les axes $x=0$ et $y=0$ st en fait des réunions d'orbite, faisons le ep pr l'axe $\cancel{y}=0$, une fois cela établi, étant donnée la nature autonome du système donné, 2 trajectoires non-identiqs ne pouvant pas se croiser, on ne pourra pas couper les 2 axes (en commenct ds R_0) dc on y reste en tt tps d'∃ de la trajec.

Spps dc qu l'on parte $(0, y \geq 0) \Rightarrow$ alors (SD) se réécrit $\dot{y} = -y$ que l'on résout $y(t) = y_0 e^{-t}$.

On voit que l'on balaie tt l'axe $x = 0$, $y > 0$ (et $\hat{m}$ $x=0, y=0$ si l'on prend $y_0 = 0$).

Dc réunion d'orbites ~~ ~~ la $\hat{m}$ chose, idem pr l'autre $\frac{1}{2}$-axe

7) Dmq $\exists$ $T>0$ tq $(x(T), y(T))$ recoupe la $\frac{1}{2}$-droite $\{(1,y) ; y > \frac{1}{2}\}$. (On pourra user régionnement suivant)



R_0 R_3
R_1 R_2

DL en $(0, \sigma)$ pr mq qu'on est en R_0

→ Sort de R_0 en tps fini → mq c'est (?!)

→ ne sort pas de R_0 en tps ~~ ~~ fini → coincé ds le haut $R_0 \cap \{y < \sigma\} \cap \{x > 0\}$, un compact & dc ppe d'explosion la traject ∃ indéfiniment. Mais $x \downarrow$, $y \downarrow$, ttes les 2 minorées, dc x & y CV dc ĉ syst autonome on doit CV vers un point fixe. OR

▷ $(1, \frac{1}{2})$: on ne pt pas y aller en tps ε on est mesq en $1-\varepsilon < 1$ (voir DL) ~~et~~ x décroît dc on ne pt pas y revenir ne serait-ce qu'en abscisse.

▷ $(0,0)$ on pt pas y aller car $(0,0) \notin \partial R_0$ dc a fortiori pr CV vers l'~~∅~~ il faudrait que la traject sorte de R_0 or faux p hyp.

▷ $(2,0)$ $\hat{m}$ argument.

$\boxed{\text{SDA} \overset{CV}{\Longrightarrow} \text{pf}}$ Idée.

(2°) gronwall → créer un compact p $R_3 \to R_0$ ∃ti tyct.

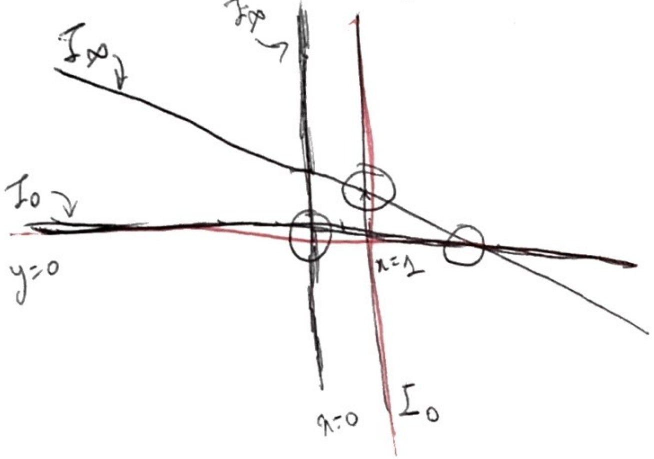
4) Isoclines : Tracer I_0 et I_∞.

$I_\infty = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \dot{x} = 0\}$

$I_\infty = \{—, x - xy - \frac{x^2}{2} = 0\} = \{x=0\}\cup\{y = -\frac{x}{2}+1\}$

$I_0 = \{—, \dot{y} = 0\} = \{—, -y+xy=0\}$

$= \{y=0\}\cup\{x=1\}$.



5) pf $= I_0\cap I_\infty = \{(0,0),(1,\frac{1}{2}),(2,0)\}$.
et leur nature : (linéariser au $\forall$ pf)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = DF(x,y) = \begin{pmatrix}1-y-x & -x\\ y & -1+x\end{pmatrix}$$

$$DF(x,y)\Big|_{(0,0)} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = x\\ \dot{y} = -y\end{cases} \to \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix}1-y-x & -x\\ y & -1+x\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$\lambda_1\lambda_2 < 0$

col

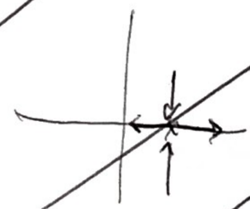
Calculons les $\vec{vp}$ associés. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\lambda_1=1}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\lambda_2=-1}$

le cdv

$$\begin{cases}\dot{x} = (x-x_0) - (x-x_0)(y-y_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2}\\ \dot{y} = -(y-y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\end{cases}$$ et on injecte les coord du pt fixe $(2,0)$ p exemple :

$$\begin{cases}\dot{x} = (x-2) - (x-2)y - \frac{(x-2)^2}{2}\\ \dot{y} = -y + (x-2)y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} = 2x - 4 + xy - \frac{x^2}{2}\\ \dot{y} = -3y + xy\end{cases}$$



$$\begin{pmatrix}2+y-x & x\\ y & -3+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ encore

col

5 ∂x ∂y

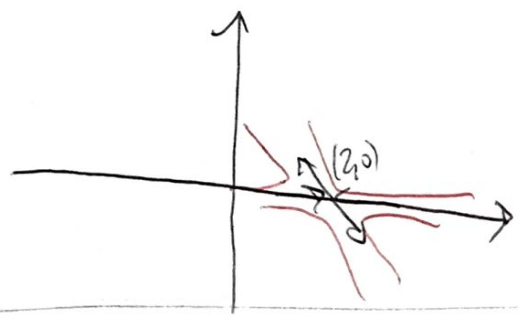
$$DF(Y)\Big|_{(2,0)} = \begin{pmatrix} 1-y-x & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Diagonalisons</u>.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) = +(\lambda+1)(\lambda-1).$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\lambda_1=+1} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\lambda_2=-1}.$$

<u>col</u>



$$DF(Y)\Big|_{(1,\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1-y-x & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Diagonalisons</u>

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)(-\lambda) + \frac{1}{2}$$

$$= (\lambda)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \lambda^2 + \overset{\Sigma}{\frac{1}{2}}\lambda + \overset{\Pi}{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta = -\frac{3}{2} < 0.$$

vp complexe $\quad \lambda_0 = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}$ (Foyer attractif)

6

M62 Goubet :

Message : M5 - Bacchus.

Corrigé Annales 2020-2021

Ex 4 $\begin{cases} \dot{x} = x - xy - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$

x : proies
y : prédateurs.

4.1 Vérifier (SD) rentre bien conditions pr appliquer (TH) (CL)

(SDA) sur $\mathbb{R}^2$, $\dot{Y} = F(Y)$ (autonome)

→ F de classe C^1 car polynomiale en x & y.

→ si F est C^1 alors F localement lipschitzienne p TAF.

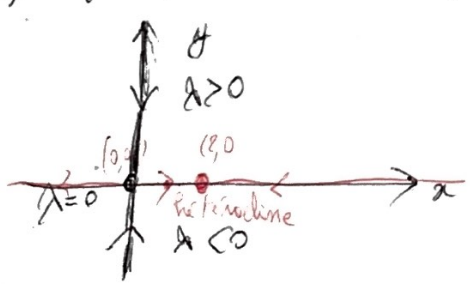
(TH) C-Lipschitz, $\exists$ & $\exists!$ ($\forall (x_0, y_0)$ donnée) d'une uniq sol° maximale.

$\mathcal{D}+$, l'alternative d'explosion.

4.2 Étudier (H) $x(t) \equiv 0$. $\begin{cases} 0 \equiv 0 \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

$(0, \lambda e^{-t})$ où λ param réel.

Rq $\{x=0\}$ = réunion (disjointe) de 3 orbites.



4.3 Étudier (H) $y(t) \equiv 0$

$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^2}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$

Que pt-on dire $\dot{x} = x - \frac{x^2}{2}$,
pts stationnaires $x \in \{0, 2\}$

Signe de $\dot{x}$ $\begin{cases} >0 & \text{si } x \in]0,2[\\ <0 & \text{si } x < 0,\ x > 2. \end{cases}$

$\{y=0\} = \oplus$: 5 orbites disjointes

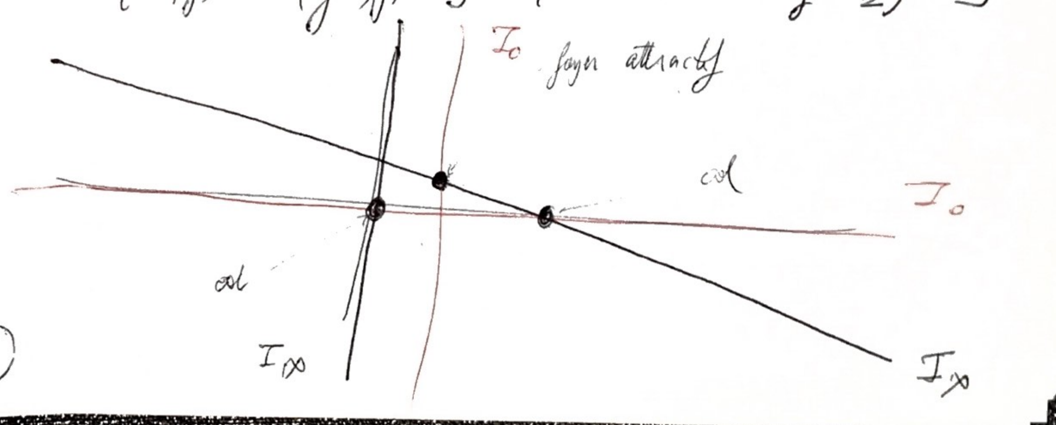
Rq $\dot{x} = x - \frac{x^2}{2}$.

4.4 Tracer les isoclines I_0 et I_∞

$\begin{cases} \dot{x} = g(x,y) \\ \dot{y} = f(x,y) \end{cases}$ $I_0 = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ "$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = 0$" tgte horizontale

$I_0 = \{(x,y) \mid y(1-x) = 0\} = \{x=1\} \cup \{y=0\}$

$I_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} = \{—, x(1 - y - \frac{x}{2}) = 0\}$



- <u>Points fixes</u> : $O=(0,0)$, $B=(2,0)$, $A=(1,\frac{1}{2})$

<u>Linéarisons</u> : B <u>soit DF soit DL</u>.

$$\begin{cases} x = 2+u \\ y = 0+v \end{cases}$$

DL d'ordre 1.

$$\begin{cases} \dot{u} = 2+u-2v-\cancel{uv}-\frac{1}{2}(2+u)^2 = \cancel{2}+u-2v-\cancel{2}-2u+\cancel{o(u+v)} \\ \dot{v} = v(2-1-\cancel{u}) = v \end{cases}$$

$M_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. VP de M_B : -1 et 1.

Col pr le syst linéarisé : hyperboliq.

TM de Hartman-Grobman

B col non linéarisé

Linéarisons en A.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 1-y-x$. $\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1+x$.

$M_A = Df(1,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$(x+\frac{1}{2})x+\frac{1}{2} = 0$.

$x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2} = 0$. $\quad \Delta < 0$.

λ et $\bar{\lambda}$, $\lambda+\bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{1}{2} < 0$.

Foyer attractif hyperboliq

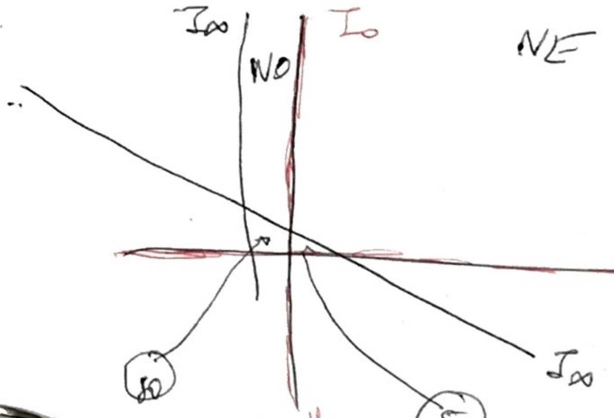
$\boxed{\text{TM Hart Grob :}}$ A foyer attractif.

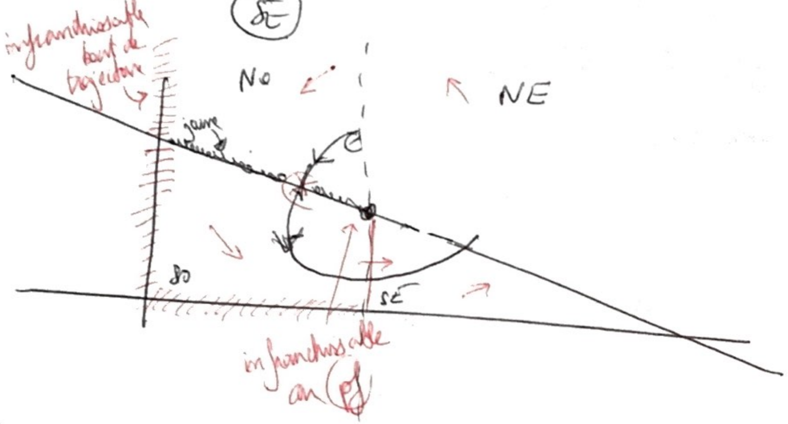
<u>Linéarisé en O</u> $\quad \begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$ <u>col</u> hyperboliq.

Je note $(x(t),y(t))$ la sol° q̣ passe en $t=0$ au point $(x_0=1,\ y_0=\sigma>\frac{1}{2})$

$\boxed{\text{f° mq } \forall t \quad \begin{aligned} x(t)>0 \\ y(t)>0 \end{aligned}}$

Les droites $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$ st des <u>réunions de trajectoires</u>. D'après TM CL (SDA) 2 traj. distinctes ne se coupent jamais (d'après TVI)





→ Mq $\forall\, t>0$ petit, $(x(t), y(t)) \in NO$.

$\dot x(0) < 0$ $\qquad x(t) = 1 + \underbrace{\dot x(0)}_{<0} + o(t)$

$\dot y(0) = 0$ $\qquad y(t) = \sigma + o(t) \quad \in (NO)$

Je suis à (NO). Que peut faire $(x(t), y(t))$.

$x \searrow$ $y \searrow$

soit je reste ds (NO) $\forall\, t>0$

soit je quitte (NO) en temps fini.

↳ $\boxed{\text{je rentre en (SO) en tps fini}}$

↳ ~~je rentre en (NE)~~ exclu en tps fini

exclu ⟷ $x(t) \searrow$

(*) raisonnement

Je suis coincé zone piège compacte.
Ppe d'explosion $T_{max} = \infty$;
$(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{}$ point fixe.

exclu
O (non car $x \nearrow$)
ou
A (non, c'est foyer et non un col)

Q°: Mq $\exists\, t>0$ tq $(x(t), y(t))$ soit ds (*)

$\boxed{\text{Préciser le sens de variation de } \dot x \ \& \ \dot y \text{ selon régionnement.}}$

soit captif ds SO $\forall\, t > T$, (*)

soit quitte en tps fini.

↳ je ne px pas quitter p jaune car $\dot y < 0$ à jaune.

↳ je quitte en tps fini ⇝ SE

$x = 1$, $\quad \dot x = \frac{1}{2} - y$

$1 - y - \frac{x}{2} = 0$, $\quad \dot y = y(1-x) = y(2y-1)$

$2 - x - 2y = 0$

$1 - x = 2y - 1$

Que pt-il se passer en (NE) ? $x \searrow$ $y \nearrow$

en NE

soit $\forall\, t > T$, la trajectoire $\in$ (NE). Pour $t \geq \tau$,

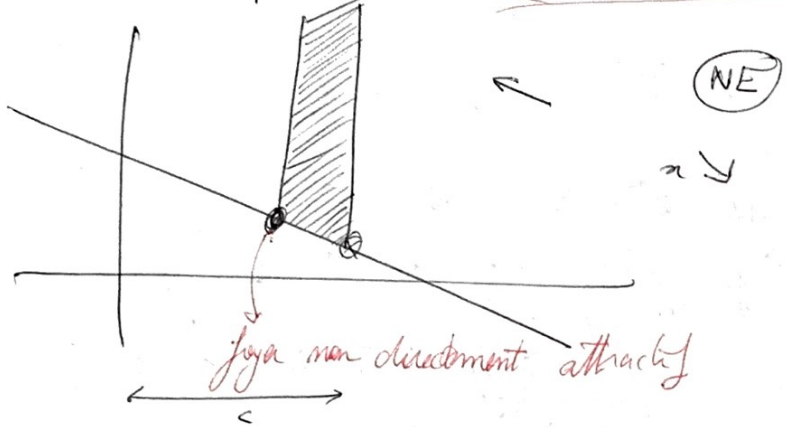
$$|\dot{x}(t)| \geq 2022.$$

$$|x(t) - x(\tau)| \geq 2022(t-\tau)$$

$t \longrightarrow \infty$ contradiction

car on sait que $x(t)$ est $\searrow$ et bornée.

soit elle la quitte en tps fini par (NO)



1° cas : $T_{max} < \infty$.

$$\dot{y} = \underbrace{-y}_{<0} + xy \leq cy$$

$$y(t) \leq y_0 e^{cT_{max}} < \infty$$ gagné !

2° cas $T_{max} = \infty$

$x(t) \xrightarrow{t\to\infty} x^* \geq 1$ par monotonie $\searrow$

$y(t) \longrightarrow \infty$

$\dot{x}(t) \underset{\infty}{\sim} -x^* y(t) \longrightarrow -\infty$