Correction du "devoir pour se réconforter"

Exercice 1

(1) $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in [\![1,6]\!]^3,\ x \neq y,\ y \neq z,\ x \neq z\} =: [\![1,6]\!]^3_{\neq}$.

(i) P_1 uniforme sur Ω_1

(ii) Cette probabilité est : $\underbrace{\dfrac{5}{6}}_{\text{on n'a pas tiré la boule 2 au premier tirage}} \times \underbrace{\dfrac{4}{5}}_{\text{ni au deuxième}} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$

- Autre approche : par symétrie, la probabilité d'obtenir une boule numérotée 2 au troisième tirage est la même que n'importe quelle autre boule, donc $\frac{1}{6}$.

(iii) On calcule, car ici la variable X ne dépend pas de l'ordre du tirage :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} \Rightarrow \text{X suit une loi hypergéométrique de paramètres } 6,3,3.$$

on choisit k boules parmi les 3 paires et $3-k$ parmi les 3 impaires

- Autre approche : calcul cas par cas...

(2) (i) $\Omega_2 =$ Permutations de $[\![1,6]\!] = \mathfrak{S}_6$

$P_2 =$ uniforme sur Ω_2

(ii) Cette probabilité est de $\dfrac{1}{6!}$ ← nombre de permutations de $[\![1,6]\!]$.

(iii) $$\mathbb{P}(Y \geq k) = \frac{\#\{\text{permutations qui laissent fixés } k \text{ éléments}\}}{6!} = \frac{\#\{\text{permutations de } 6-k \text{ objets}\}}{6!} = \frac{(6-k)!}{6!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k-1) = \frac{(6-k)! - (6-k+1)!}{6!}}$$

(3) (i) $\Omega_3 = [\![1,6]\!]^n$, P_3 uniforme

(ii) $$\mathbb{P}\left(\text{tirer au moins une fois la boule 1 en } n \text{ tirages}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\text{ne jamais tirer la boule 1 en } n \text{ tirages}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(iii) $$\mathbb{P}(Z=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} \quad \text{si } 1 \leq k \leq n$$

et $$\mathbb{P}(Z=n+1) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

NB : ce n'est pas une loi géométrique même si ça y ressemble ; ce serait le cas si "$n=\infty$".

Exercice 2

On a : $\left[\begin{array}{l} \mathbb{P}_{Paul}(\text{Gardon}) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}_{Paul}(\text{Brochet}) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}_{Alex}(\text{Gardon}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{Alex}(\text{Brochet}) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\mathbb{P}_{Brochet}(\text{Alex}) \underset{A}{=} \frac{\mathbb{P}_{Alex}(\text{Brochet}) \times \mathbb{P}(\text{Alex})}{\mathbb{P}(\text{Brochet})}$$

formule de Bayes

$$= \frac{\mathbb{P}_{Alex}(\text{Brochet}) \times \mathbb{P}(\text{Alex})}{\mathbb{P}_{Alex}(\text{Brochet})\,\mathbb{P}(\text{Alex}) + \mathbb{P}_{Paul}(\text{Brochet}) \times \mathbb{P}(\text{Paul})}$$

$$= \frac{1/2 \times 3/4}{1/2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{9}{11}.$$

Exercice 3

① $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\text{Rouge} = k \text{ et Bleu} < k) + \mathbb{P}(\text{Rouge} < k \text{ et Bleu} = k) + \mathbb{P}(\text{Rouge} = \text{Bleu} = k)$

évènements disjoints

$$= \frac{1}{6} \times \frac{k-1}{6} + \frac{k-1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2k-1}{36}, \quad 1 \leq k \leq 6.$$

② $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}$: loi hypergéométrique de paramètres 26, 6, 5.

③ Comme Z vaut 0 ou 1, c'est une variable de loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(Z=1)$. On calcule :

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(R \text{ est impair}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(R = 2k+1)$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda} \sinh(\lambda).$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ $A_n = \{\text{on court le jour } n\}$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$

① L'énoncé donne : $\mathbb{P}_{A_{n-1}}(A_n) = 0{,}6$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

② Pour $n \geq 2$, la formule des probabilités totales donne :

$$p_n = \mathbb{P}_{A_{n-1}}(A_n)\,\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)\,\mathbb{P}(\overline{A_{n-1}})$$
$$= 0{,}6\, p_{n-1} + 0{,}8\,(1 - p_{n-1})$$
$$= -0{,}2\, p_{n-1} + 0{,}8.$$

③ Rappel : q_n est une suite géométrique si $q_n = q \times q_{n-1}$ pour un certain $q \in \mathbb{R}$.

$$q_n = a + p_n$$
$$= a - 0{,}2\, p_{n-1} + 0{,}8$$
$$= a - 0{,}2\,(q_{n-1} - a) + 0{,}8$$
$$= 1{,}2a + 0{,}8 - 0{,}2\, q_{n-1}$$ est une suite géométrique pour $a = -\frac{0{,}8}{1{,}2} = -\frac{2}{3}$.

On a alors $q_n = (-0{,}2)^{n-1} q_1$

④ Finalement,

$$p_n = q_n + \frac{0{,}8}{1{,}2}$$
$$= (-0{,}2)^{n-1}\left(p_1 - \frac{0{,}8}{1{,}2}\right) + \frac{0{,}8}{1{,}2}$$

Comme $(-0{,}2)^{n-1} = (-1)^n e^{(n-1)\underbrace{\log 0{,}2}_{<0}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$,

on obtient :

$$p_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{0{,}8}{1{,}2} \simeq 0{,}67$$
$$= \frac{2}{3}$$