M-61B Pr: Erignoux Clément

PROBABILITÉS
INTÉGRATION

Objectifs

1. savoir modéliser une expérience aléatoire en faisant appel à des variables aléatoires réelles
2. savoir déterminer leur loi, calculer leur espérance pour répondre à des questions concrètes sur le modèle initial
3. notions probabilistes rencontrées
4. éléments minimaux de théorie de la mesure et d'intégration au sens de Lebesgue
5. notions de convergence presque sûre et en loi
6. la loi forte des grands nombres et du théorème central limite

Probabilités

1. Loi d'une variable aléatoire réelle : rappel sur les lois discrètes, loi à densité C 1 par morceaux, fonction de répartition, "catalogue" de lois classiques, exemples simples de lois ni discrètes ni à densité.
2. Variables aléatoires indépendantes : loi forte des grands nombres ; théorème de la limite centrale, application à la marge d'erreur d'un sondage.Les 36h de TD comportent 6h de TP avec Python

Intégrations

1. Rudiments de la théorie de la mesure : tribu, tribu borélienne, fonctions mesurables (= variables aléatoires), mesure, mesure de Lebesgue.
2. Intégrale par rapport à une mesure -finie et espérance : intégration des fonctions étagées, des fonctions positives, fonctions intégrables, propriétés de l'intégrale ; théorème de convergencedominée (admis) ; espérance d'une variable aléatoire réelle, théorème de transfert, moments, variance ; inégalité de Markov, de Bienaymé-Chebychev.

Ⓓ (Indépendances de suites de ⓥⓐ discrètes)
soit X, Y 2 ⓥⓐ discrètes à val^{rs} ds E, F.
X & Y st indépendantes si $\forall e \in E, \forall f \in F$:
$$\mathbb{P}(X=e, Y=f) = \mathbb{P}(X=e).\ \mathbb{P}(Y=f).$$
Une suite X_n de ⓥⓐ ⓓ à v^{rs} ds $\mathbb{N}$ est indépend^{te} si $\forall\ (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite d'évents $(\{X_n = p_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est indépend.

Ⓛ de Borel Cantelli n°2
$(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on spps la suite (A_n) indépend^{te},
si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$
(si Σ probas suite évents est ∞ ⇒ ∞ p.s. ∞ᵗé de ces évents se produit.

Lois discrètes classiqs
• Loi de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}er(p)$
- paramètre $p \in [0,1]$ — $E = \{0,1\}$, $\mu_1 = p$, $\mu_0 = 1-p$.
- $\mathbb{E}(X) = p$ — $V(X) = p(1-p)$
• Loi Binomiale, $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$
- 2 paramètres $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ — $E = \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$ — $V(X) = np(1-p)$
• Loi Uniforme, $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$
- 1 paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ — $E = \{1,\dots,n\}$, $\mu_k = \frac{1}{n}\ \forall k \in \{1,\dots,n\}$.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ — $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

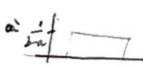
- paramètre $p \in [0,1]$ — $E = \mathbb{N}^*$, $\mu_k = p(1-p)^{k-1}$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ — $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
• Loi de Poisson, $X \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$
- paramètre $\lambda > 0$ — $E = \mathbb{N}$, $\mu_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- $\mathbb{E}(X) = \lambda$ — $Var(X) = \lambda$.

2.4. Variables à densité
Ⓓ Spps f est CM($\mathbb{R}$), f f positive tq $\forall A > 0$ $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$ ∃.
On spp qu'il ∃ $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \infty$ alors on dit que f intégrable sur $\mathbb{R}$
et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$. (*).
• soit f f cont$_p$ mcx, on dit f est intégrable si $|f|$ l'est en admettant alors (*).
Ⓓ Une f f (CM) est densité de probas sur $\mathbb{R}$.
▸ $f \geq 0$ ie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
▸ boréliennes (mesurable) & intégrable sur $\mathbb{R}$ & satisfaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.
Ⓓ Soit f une densité de probas, on dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est ⓥⓐ à densité ou densité de f, si $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.
Ⓓ soit X ⓥⓐ réelle à densité de densité f_X, on déf f de répartition de X comme
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x)$$

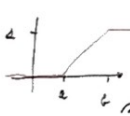
③

Ppties de F_X
soit X ⓥⓐⓡ, F_X ↗ à v^{rs} ds $[0,1]$, cont à droite, et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. Par ailleurs, F_X détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$ de X ds le sens où si $F_X = F_Y$ sur $\mathbb{R}$ p^r 2 ⓥⓐⓡ X et $Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$,
ie $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$
Ⓓ soit X ⓥⓐⓡ à densité f_X, on spps $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx < \infty$
déf $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$, on dit que X intégrable.
• spps $x^2 f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on déf la variance
$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx\right)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

2.5 Lois classiqs à densité
1. Loi uniforme sur $[a,b]$, $a < b \in \mathbb{R}$.
La loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi à densité de densité $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{a \leq x \leq b}$ où

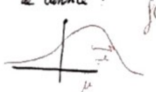


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x)$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b]. \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$



Ⓟ Par variables à densité, f de répartition est cont :
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ dérivable de dérivée $f_X \Rightarrow$ cont.
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Loi gaussienne / normale
La loi normale, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^*_+$. C'est une loi de densité :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$



$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2.$$
→ f de répartition de la loi normale n'est pas explicite.
• $\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$: ⓥⓐⓡ centrée.
• $V(X) = 1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$: ⓥⓐⓡ réduite.
→ Une loi $\mathcal{N}(0,1)$ loi normale centrée réduite.

Ⓣⓗ Fubini
f f positive, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, I & I' 2 interv. de $\mathbb{R}$:
$$\int_I dx \int_{I'} dy\ f(x,y) = \int_{I'} dy \int_I dx\ f(x,y)$$
Ⓟ X ⓥⓐ à v^{rs} positives, à densité f_X CM, spps $\mathbb{E}(X)$ bien déf ($\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx < \infty$). $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(y))\,dy$
F_X
$\int f(x)\,dx = \int \mathbb{1}_{x\in I} f_X(x)\,dx$

$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \lim_{\sup |x_{i+1} - x_i| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$ ⓒⓥ si f est cont.
Ⓡ : f est f en escalier ⇒ f intégrable au sens de Riemann
Somme de Darboux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ subdivision de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$
$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$ & $\overline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$
$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x)$, $0 \leq k \leq m-1$; $M_k = \sup f(x)$
f intég au sens de Riemann ssi $\sup \underline{S}(f,\sigma) = \inf \overline{S}(f,\sigma)$
Int de Lebesgue est déf sur ens f mesurables. ($\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
Riemann : Ⓣⓗ ⓒⓥ UN si $f_n \longrightarrow f$ ⓒⓥ UN
alors $\int f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\,dx$.
Lebesgue Ⓣⓗ ⓒⓥ dominée : Spps $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ ⓒⓥ simple
Spps $\exists\ c > 0$, $|f_n(x)| \leq c$ $\forall x$ $\forall n$
Alors $\int |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Th de la mesure
Ⓓ (Tribu) E ens, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu (σ-algèbre) sur E si :
▸ $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.
▸ $\mathcal{T}$ stable p union & intersec^o ⓓ
ie $\forall n$, $A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$
▸ $\mathcal{T}$ stable p passage au complémentaire
si $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$

- $(E, \mathcal{T})$: espace mesurable
• élts de $\mathcal{T}$ st ens mesurables
Suffit de vérifier la stabilité soit p ∪ⓓ soit p ∩ⓓ.
Ⓟ I ens ⓝⓥ d'indices (pas spp ⓓ)
$(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ famille de tribu
$\Rightarrow \forall i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est tribu sur E
$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.
Ⓓ (Tribu engendrée p 1 ss-ens de E)
soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on définit
$\sigma(\mathcal{C}) = \cap \{\mathcal{T} \in \mathcal{P}(E)$, tribu sur E contenant $\mathcal{C}\}$
$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu.
tribu engendrée p $\mathcal{C}$.
→ $\sigma(\mathcal{C})$ + petite tribu contenant $\mathcal{C}$
→ si $\mathcal{C}$ tribu, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Ⓓ (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$) $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
On déf $I = \{$inter ouverts$\} = \{]a, b[$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}\}$
On déf $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I)$
la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I) = \cap \{\mathcal{T}$, tribu sur $\mathbb{R} \supset I\}$
Ⓡ La tribu borélienne pt ê déf sur tt espace topo. $(E, \mathcal{O})$ avec la ⓣⓑ sur $(E, \mathcal{O})$ est déf ê $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)$. $\mathcal{B}(\Gamma) = \{A \cap \Gamma$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
• tribu sur $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
• tribu sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $\sigma(\{B_r(a), a \in \mathbb{R}^d\})$
où $B_r(a)$ boule ouvert.
→ diff. construire ens non-borélien
2. Fonctions mesurables

$(E, \mathcal{T}), (F, \mathcal{T}')$ esp. mesurables
soit $f : E \to F$. f est mesurable.
si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $B = f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$
→ f est mesurable si l'image réciproq de tt ens mesurable est mesurable
si $\mathcal{T}'$ est tribu borélienne f est borélienne ou Borel-mesurable
Notion de mesurabilité dpd fondamt^{lt} des tribus qu l'on a muni les espaces.
Ⓓ (Mesure positive) soit espace mesurable $(E, \mathcal{T})$, une appli $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est une mesure si
• $\mu(\emptyset) = 0$ & $\forall (A_n)_n$ suite disjointe d'ens mesurables
$\Rightarrow \mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
• $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré
⚠ mesure ≠ f mesurable → prd son argument ds. ↙ μ argument ens mesurable $B \in \mathcal{T}$
Ⓓ Une mesure μ sur $(E, \mathcal{T})$ est dite :
1) finie si $\mu(E) < \infty$ 2) de probabilités si $\mu(E) = 1$
3) σ-finie s'∃ partition ⓓ $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$
Ⓔ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est unique mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(]a, b[) = \lambda([a,b])$.
Ⓔ mesure de Dirac
Ppties des mesures soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré,
1) monotonie $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2) sous-additivité soit $(B_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$
3) continuité ↗ union ↗
$(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$
4) continuité ↘ intersec ↘
$B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_{n+1} \subset B_n$ s'∃n tq $\mu(B_n) < \infty$
$\Rightarrow \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

④

Ⓓ (lim sup & lim inf d'ensembles)
soit $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ mesurable, on définit
$$\limsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} B_p \quad (1)$$
$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} B_p \quad (2)$$
(1) ens $x \in E$ q. st ds ∞ᵗé B_n.
(2) ens $x \in E$ q. st ds tous B_n à partir d'un certain rang.
Ⓛ de Borel Cantelli
soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré,
$\forall (A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$
$\Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$

2. Variables aléatoires
2.1. Loi d'une variable aléatoire
Ⓓ On appelle espace de probabilités un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω : univers, $\mathcal{F}$ est tribu sur Ω & $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ = un espace mesuré dont la mesure est de probas.
• On appelle ⓥⓐ tte f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ds un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ on appelle alors E l'espace d'évents de X.
ds le contexte des probas, on appelle évènements les élts $\mathcal{F}$ par X une ⓥⓐ,

on définit sa loi ou distribution ĉ la mesure sur $(E, \mathcal{T})$, notée $\mathbb{P}_X$, déf p ($X : \Omega \to E$), $\forall A \in \mathcal{T}$,
$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}})$$ car X ⓥⓐ.
Notation : On note $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$ $= \{X^{-1}(A)\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.
De m̂, $\{X \in A, Y \in B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)$

2.2 ⓥⓐ discrètes
Ⓓ ⓥⓐ d^t l'espace d'élts est soit fini soit ⓓ. Spps $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\{1, \dots, n\}$. Ds le cas discret, on munit E de la tribu discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Pr déterminer $\mathbb{P}_X$, la loi d'une ⓥⓐ, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(A)$ $\forall A \subset E$, il suffit de connaître les $\mathbb{P}_X(\{e\})$ $\forall e \in E$ car
$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{e\in A} \mathbb{P}_X(\{e\})$ par $\mathbb{P}_X(\{e\})$
$= \mathbb{P}(X = e) = \mu_e$, ($\mathbb{P}_X$ est déterminé p μ).
Ⓓ (Espérance) $E \subset \mathbb{N}$, $X : \Omega \to E$, une ⓥⓐ discrète,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in E} k\,\mu_k \text{ où } \mu_k = \mathbb{P}(X = k)$$
est la loi de X.
(ss réserve de ⓒⓥ absolue si $E = \mathbb{N}$)

Ⓓ Variance de X est
$V(X) = \sum_{k\in E} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k$ sous réserve d'absolue ⓒⓥ si $E = \mathbb{N}$
$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
Ⓓ $A, B \subset \mathcal{F}$, proba conditionnelle de A sachant B p
$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \in [0,1]$, spps $\mathbb{P}(B) > 0$
Les évents st indpts si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$
$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) \neq 0$
Ⓟ (FF Probas totales)
soit $\Omega = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_k).\ \mathbb{P}(B_k)$$
Ⓟ Ⓣⓗ du transfert du cas discret
soit $X : \Omega \to E$ ⓥⓐ discrète & $\varphi : E \to \mathbb{N}$ une applicat^o alors $\varphi(X) : \omega \in \Omega \to \varphi(X(\omega))$ est également une ⓥⓐ
& $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e\in E} \varphi(e)\,\mu_e$ où μ_e est la loi de X.
Ⓓ (Indépendance de suites d'évents)
→ soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, cette suite est dite indépendante, si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_k$:
$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_k}) = \prod_{p=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_p})$$
→ elle est dite indépendante 2 à 2 si c'est vrai pr $k = 2$,
ie $\forall n, m \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n).\mathbb{P}(A_m)$

si f_n suite f° mesurable $\Rightarrow \limsup_{\inf} f_n$ mesurable

(Th) (L. de Fatou)

(f_n) suite de fs mesurables positives alors

$$\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonction}} d\mu \leq \liminf \underbrace{\int f_n d\mu}_{\text{suite réelle}}$$

$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$ $\int f_n d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0,n]) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\to$ calculer $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pour $x \geq 0$, $\exists n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ à x fixé

$f_n(x)$ CV & $\lim f_n(x) = 0 \Rightarrow \liminf f_n = 0 \Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1.$$

(Th) (CV monotone)

soit $(f_n)_n \nearrow$ de f mesurables & positives (ie $\forall x$ $f_n(x) \nearrow_n$)

(f_n) CV simplement vers f mesurable,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

$\to$ f f prend ses val$^{\text{rs}}$ ds $\overline{\mathbb{R}}^+$

$\to$ aucune hypo intégrabilité sur f, idem pour suites $\downarrow$ de fs mesurables.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{N} j \, \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{N} j \, \mathbb{P}(X = j).$$?

soit (f_n) suite fs mesurables, CV simple vers f. on suppose

$\exists$ f $g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, ie $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\Rightarrow$ commute lim & int

$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}, Y \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{X = i, Y = j\}\Big)$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_i \{X = k, Y = i\}\Big) = \sum_i \mathbb{P}(\{X = k, Y = i\})$$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ p linéarité

densité $= (\text{FdR})'$, $\mu : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

A_n suite disjte, partitio de E $(\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\sqcup A_n) = \sum A_n$

3 types / 4 pptés CBC $\mu(\limsup A_n)$

$\mathcal{L}^1(\mu)$: ens f integ contre μ.

Integ f contre μ : $f \in \mathcal{E}^+$, $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$, $a_i \geq 0$

$$\int f \, d\mu = \sum a_i \, \mu(A_i)$$

(D) La loi exponentielle représente un tps d'attente, on dit qu'une VA X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si X est variable à densité de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sa f de répartitio est donnée p sa f de répartitio :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \, dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \, dy$$

$$= \big[-e^{-\lambda y}\big]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et } 0 \ \forall x < 0.$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

(P) $\mathbb{P}(X > a+b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$

(Rq) ⚠ $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) \neq \int_{-\infty}^{1} f_X(y) \, dy$ (guichet, tps d'attente)

Faux car X pas à densité

3/ Intégrale p/r à une mesure σ-finie

3.1) Déf de l'intégrale d'une f mesurable

(D) soit $A \in \mathcal{T}$, on définit la f $\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{R}$ appelée l'indicatrice de A comme $\forall x \in E$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Notatio : $\int f \, d\mu = \int f(x) \mu(dx) = \int f(x) \, d\mu(x)$

(si $\mu = \lambda$ et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $= \int f(x) dx$.

(Rq) si f, g mesurables & égales presq partout alors f intégrables $\Leftrightarrow$ g integ & $\int f d\mu = \int g d\mu$.

$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$, $f = g$ μpp : $f = g$ ds $\mathcal{L}^1$.

(D) A ens mesurable, f f intégrable :

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \, \mathbb{1}_A \, d\mu \quad \text{(p monotone de } f \text{ ...)}$$

$\boxed{\text{Pptés}}$ • L'int de Lebesgue est linéaire

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{L}^1$

et $\int af + bg \, d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$.

• Monotonie : si $f, g \in \mathcal{L}^1$, $f \leq g$ μ-pp

$\Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(D) une f $f : E \to \mathbb{R}$ est f. étagée

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et des ens mesurables $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$

tq $\forall x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. (Étagé = combi li d'indicatrice)

On note $\mathcal{E}$ l'ens des f étagées. ($\mathcal{E}^+$ pr positives.

(D) soit $f \in \mathcal{E}^+$, $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $a_i \geq 0$ $\forall i$, on déf l'intégrale de f contre μ. $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i)$

(Rq) Cette déf est encore valide pr $f \in \mathcal{E}$ si μ est une mesure finie

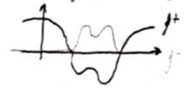
(D) (L'intég f mesurable positive)

f mesurable, mesure σ-finie, p déf $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g \, d\mu, g \in \mathcal{E}^+, g \leq f\}$

$\to$ f est dite intégrable si $\int f d\mu < \infty$

(D) Un ens $N \subset E$ est dit négligeable s'$\exists A \in \mathcal{E}$, $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

(D) soit f f mesurable, on déf fs $f^+(x) = \max(0, f(x))$, $f^-(x) = \max(0, -f(x))$



$\Rightarrow f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

$\to$ f^+ & f^- st mesurables, si f^+ & f^- st intégrables, f est intégrable & $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

$\to$ On note $\mathcal{L}^1(E)$ ou $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ens f intég p/r à μ.

(5) $\to$ f intég $\Leftrightarrow$ $|f|$ intégrable.

3.2. Convergence d'intégrales

(D) • (f_n) suite f mesurable, f_n CV simplmt vers f si $\forall x \in$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

• f_n CV μ presque partout vers f s'$\exists$ ens négligeable N tq f_n CV simplt vers f sur N^c.

(D) (f_n) suite fs intégrables & soit $f \in \mathcal{L}^1$, on dit que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ si $\boxed{\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

(c'est CV p/r à $\|\cdot\|_1$)

⚠ $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{simpl}} f$ & $f_n \xrightarrow{\text{simpl}^t} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

(D) Lim inf & lim sup de suites réelles

soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle, $b_p = \sup_{n\geq p} a_n$, $c_p = \inf_{n \geq p} a_n$,

$p \in \mathbb{N}$, $b_p, c_p \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_p \searrow$, $c_p \nearrow$, $c_p \leq b_p$

$\exists$ $\bar{a} = \lim_{p\to\infty} b_p = \lim_{p\to\infty} \sup_{n\geq p} a_n$ & $\underline{a} = \lim c_p = \liminf a_n$

$\hookrightarrow \bar{a}, \underline{a}$: + gde (resp + petite) val^r d'adhérence de $(a_n)_{n\geq 0}$

$\hookrightarrow \bar{a}$ (resp $\underline{a}$) : + gde (resp + petite) val^r dt a_n se passe infiniment proche svt.

(D) f_n suite f. $E \to \mathbb{R}$,

$$\limsup f_n(x) := \limsup(f_n(x)) \quad \text{(idem)}$$

$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \lim^{\text{Riemann}}_{\sup|x_{n+1}-x_n| \to 0} \sum (x_{i+1}-x_i) f(x_i)$ ⓐ si f est cont.

si f est f en escalier $\Rightarrow$ f intégrable au sens de Riemann

Somme de Darboux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ subdivision de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$

$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} m_k (x_{k+1}-x_k)$ & $\overline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k (x_{k+1}-x_k)$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x)$, $0 \leq k \leq m-1$, $M_k = \sup f(x)$

f intég au sens de Riemann ssi $\sup \underline{S}(f,\sigma) = \inf \overline{S}(f,\sigma)$

Int de Lebesgue est déf sur ens f mesurables. $\left(\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$

Riemann : Th CV UN : si $f_n \longrightarrow f$ CV UN alors $\int f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\,dx$.

Lebesgue : Th CV dominée : Sppo $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ CV simple

Sppo $\exists\, c > 0$, $|f_n(x)| \leq c$ $\forall x$ $\forall n$

Alors $\int |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Th de la mesure

D (Tribu) E ens, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu (σ-algèbre) sur E si :

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ stable p union & intersecƟ d

ie $\forall n, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

- $\mathcal{T}$ stable p passage au complémentaire

si $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$

M6-1

- $(E,\mathcal{T})$: espace mesurable.
- élts de $\mathcal{T}$ st ens mesurables.

Suffit de vérifier la stabilité soit p $\cup$ d soit p $\cap$ d.

P I ens nv d'indices (pas sppo d)

$(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ famille de tribu

$\Rightarrow \forall i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est tribu sur E

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.

D (Tribu engdée p 1 ds pies de E)

soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on définit

$\sigma(\mathcal{C}) = \cap \{\mathcal{T} \in \mathcal{P}(E)$, tribu sur E contenant $\mathcal{C}\}$

$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu.

tribu eng. drée p $\mathcal{C}$.

→ $\sigma(\mathcal{C})$ + petite tribu contenant $\mathcal{C}$

→ si $\mathcal{C}$ tribu, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

D (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$)

On déf $I = \{$inter ouverts$\} = \{]a,b[$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

On déf $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I)$

la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I) = \cap \{\mathcal{T}$, tribu sur $\mathbb{R} \supset I\}$.

Rq La tribu borélienne pt ê déf sur tt espace topo. $(E,\mathcal{O})$ ouvert. La tb sur $(E,\mathcal{O})$ est déf ē $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)$.

* boréliens sur $\Gamma = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\Gamma) = \{A \cap \Gamma, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

* borélien sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $\sigma(\{B_r(x), r \in]0,\infty], x \in \mathbb{R}^d\})$

où $B_r(x)$: boule ouverte.

→ diff. construire ens non-borélien.

2. Fonctions mesurables

D (f mesurable) $(E,\mathcal{T})$, $(F,\mathcal{T}')$ 2 espaces mesurables,

soit $f : E \to F$. f est mesurable (de $(E,\mathcal{T})$ ds F muni $\mathcal{T}'$)

si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $B := f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$.

→ f est mesurable si l'image réciproq de tt ens mesurable est mesurable.

si $\mathcal{T}'$ est tribu borélienne : f est borélienne ou Borel-mesurable.

NoƟ de mesurabilité dpd fondmtlt des tribus que l'on a muni les espaces.

D (Mesure positive) soit espace mesurable $(E,\mathcal{T})$, une appli $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est une mesure si :

- $\mu(\emptyset) = 0$ & $\forall (A_n)_n$ suite disjointe d'ens. mesurables

$\Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

- $(E,\mathcal{T},\mu)$ est un espace mesuré.

⚠ mesure $\neq$ f mesurable → prd son argument ds E.

a pr argument ens mesurable $B \in \mathcal{T}$

D Une mesure μ sur $(E,\mathcal{T})$ est dite :

1) finie si $\mu(E) < \infty$ 2) de probabilités si $\mu(E) = 1$

3) σ-finie s'$\exists$ partiƟ d $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$

@ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est uniq mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a$

@ mesure de Dirac

Ppté des mesures : soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ espace mesuré,

1) monotonie $\forall A,B \in \mathcal{T}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) sous-additivité soit $(B_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$

3) continuité p/ union ↗

$(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

4) continuité p/ intersecƟ ↘

$B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_{n+1} \subset B_n$ s'$\exists\, n$ tq $\mu(B_n) < \infty$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

D (lim sup & lim inf d'ensembles)

soit $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ mesurable, on définit

$$\limsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} B_p \quad (1)$$

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} B_p \quad (2)$$

(1) ens $x \in E$ q st ds ∞té B_n.
(2) ens $x \in E$ q st ds ts B_n à pcr.

P L de Borel Cantelli

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré,
$\forall (A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

$$\Rightarrow \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

---

2. Variables aléatoires

2.1. Loi d'une variable aléatoire

D On appelle espace de probabilités un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω : univers, $\mathcal{F}$ est tribu sr Ω & $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités sr $(\Omega, \mathcal{F})$ = un espace mesuré dont la mesure est de probas.

• On appelle va tte f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ds un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$.
On appelle alors E l'espace d'évents de X.
Ds le contexte des probas, on appelle événements les élts $\mathcal{F}$ par X une va,

on définit sa loi ou distribution ĉ la mesure sr $(E, \mathcal{T})$, notée $\mathbb{P}_X$, déf p $(X : \Omega \to E)$, $\forall A \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\text{évent } \in \mathcal{F}})$$ car X va.

Notat° : On note $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$
$= \{X^{-1}(A)\} = \{w \in \Omega, X(w) \in A\}$.
De m̂, $\{X \in A, Y \in B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)$

2.2. va discrètes

D va dt l'espace d'élts est soit fini soit d. Spps $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\{1, \dots, n\}$.
Ds le cas discret, on munit E de la tribu discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Pr déterminer $\mathbb{P}_X$, la loi d'une va, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(A)$ $\forall A \subset E$, il suffit de connaître les $\mathbb{P}_X(\{e\})$ $\forall e \in E$ car

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{e\in A} \mathbb{P}_X(\{e\})$$ par $\mathbb{P}_X(\{e\}) = \mathbb{P}(X = e) = \mu_e$, ($\mathbb{P}_X$ est déterminé p μ).

D (Espérance) $E \subset \mathbb{N}$, $X : \Omega \to E$, une va discrète,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in E} k\,\mu_k \quad \text{où } \mu_k = \mathbb{P}(X = k)$$

est la loi de X.

(ss réserve de cvce absolue si $E = \mathbb{N}$)

ⓒ

D Variance de X est

$$V(X) = \sum_{k\in E} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k$$ ss réserve d'absolue cvce si $E = \mathbb{N}$.

$$V(X) = \mathbb{E}((X - E(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

D $A, B \in \mathcal{F}$, proba conditionnel de A sachant B p

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \in [0,1], \quad \text{spps } \mathbb{P}(B) > 0$$

Les évents st indpts si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$
$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) \neq 0$

P (FF Probas totales)

soit $\Omega = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_k).\mathbb{P}(B_k)$$

P Th du transfert ds cas discret

soit $X : \Omega \to E$ va discrète & $\varphi : E \to \mathbb{N}$ une applicat° alors $\varphi(X) : w \in \Omega \to \varphi(X(w))$ est égalmt une va
& $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e\in E} \varphi(e)\,\mu_e$ où μ_e est la loi de X.

D (Indépendce de suites d'évents)

→ soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, cette suite est dite indépendante, si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_k$:

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_k}) = \prod_{p=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_p})$$

→ elle est dite indépendante 2 à 2 si c'est vrai pr $k = 2$
ie $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n).\mathbb{P}(A_m)$

Ⓓ (Indépendances de suites de va discrètes)

Soit X, Y 2 va discrètes à val^{rs} ds E, F.

X & Y st **indépendantes** si $\forall e \in E, \forall f \in F$:

$$\mathbb{P}(X=e, Y=f) = \mathbb{P}(X=e) \cdot \mathbb{P}(Y=f).$$

Une suite X_n de va Ⓓ à vl^{rs} ds $\mathbb{N}$ est indépend^{te} si $\forall (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite d'évents $(\{X_n = p_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est indépend.

Ⓛ de Borel Cantelli n°2

$(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on spps la suite (A_n) indépend^{te},

$$\text{si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

(si $\sum$ probas suite events est ∞ ⇒ proba 1 qté de ces events se produit.

2.3 Lois discrètes classiqs

- Loi de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}ern(p)$
  - paramètre $p \in [0,1]$
  - $\mathbb{E}(X) = p$
  - $E = \{0,1\}$, $\mu_1 = p$, $\mu_0 = 1-p$.
  - $V(X) = p(1-p)$

- Loi Binomiale, $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$
  - 2 paramètres $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
  - $E = \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $V(X) = np(1-p)$

- Loi Uniforme, $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$
  - 1 paramètre $n \in \mathbb{N}^*$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
  - $E = \{1,\dots,n\}$, $\mu_k = \frac{1}{n}$ $\forall k \in \{1,\dots,n\}$.
  - $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

- Loi géom, $X \sim \mathcal{G}eom(p)$
  - paramètre $p \in [0,1]$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
  - $E = \mathbb{N}^*$, $\mu_k = p(1-p)^{k-1}$
  - $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

- Loi de Poisson, $X \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$
  - paramètre $\lambda > 0$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
  - $E = \mathbb{N}$, $\mu_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
  - $Var(X) = \lambda$.

2.4. Variables à densité

Ⓓ Spps f est $CM(\mathbb{R})$, f f positive tq $\forall A > 0$ $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$ $\exists$.

On spps qu'il $\exists$ $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \infty$ alors on dit que f intégrable sr $\mathbb{R}$

et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$. $(*)$

- soit f f cont$_p$ mcx, on dit f est intégrable si $|f|$ l'est en admettant alors $(*)$.

Ⓓ Une f f (CM) est densité de probas sr $\mathbb{R}$.

- $f \geq 0$ ie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- boréliennne (≈ mesurable) & intégrable sr $\mathbb{R}$ & satisfaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

Ⓓ Soit f une densité de probas, on dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est va à densité ou densité de f, si $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ⓓ soit X va réelle à densité de densité f_X, on déf f de répartit° de X comme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Ptés de F_X

soit X (var), $F_X \nearrow$ à vlrs ds $[0,1]$, cont à droite, et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x)=1$. Par ailleurs, F_X détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$ de X ds le sens à si $F_X=F_Y$ sur $\mathbb{R}$ pr 2 (var) X et Y $\Rightarrow \mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$,
ie $\forall A\in\mathcal{T}$, $\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(Y\in A)=\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}_Y(A)$

(Prop) soit X (var) à densité f_X, on spps $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx<\infty$ alors on déf $\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$, on dit que X intégrable.

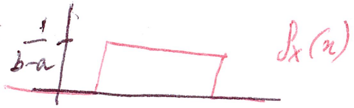
- spps $x^2 f_X(x)$ est intégrable sr $\mathbb{R}$, on déf la variance

$$V(X)=\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx-\left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx\right)^2=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2.$$

2.5. Lois classiqs à densité

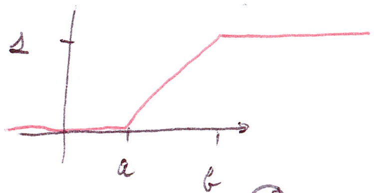
1. Loi uniforme sr $[a,b]$, $a<b\in\mathbb{R}$.

La loi uniforme sr $[a,b]$ est la loi à densité de densité $f_X(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{a\le x\le b}$ où



$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy=\mathbb{P}(X\le x)$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b].\\ 1 & \text{si } x\ge b.\end{cases}$$



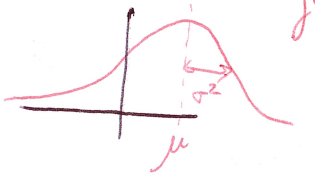
(Rq) Pr variables à densité, f de répartition est cont :
$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ dérivable de dérivée $f_X \Rightarrow$ cont.

$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}$, $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

2. Loi gaussienne/normale

La loi normale, notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}^*_+$. C'est une loi de densité :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$



$\mathbb{E}(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$.

→ f de répartition de la loi normale n'est pas explicite.
- $\mathbb{E}(X)=0 \Leftrightarrow \mu=0$: (var) centrée.
- $V(X)=1 \Leftrightarrow \sigma^2=1$: (var) réduite.

→ Une loi $\mathcal{N}(0,1)$: loi normale centrée réduite.

(Th) Fubini

f POSITIVE, $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}_+$, I & I' 2 interv. de $\mathbb{R}$:

$$\int_I dx\int_{I'} dy\, f(x,y)=\int_{I'} dy\int_I dx\, f(x,y)$$

F_X

(P) x (var) à vlrs positives, à densité f_X cM, spps $\mathbb{E}(X)$ bien déf ($\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx<\infty$) : $\mathbb{E}(X)=\int_0^{\infty}(1-F_X(y))\,dy$

$$\int_I f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\in I}\, f_X(x)\,dx.$$

(D) La loi exponentielle représente un tps d'attente. On dit qu'une va X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si X est variable à densité de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Sa f de répartition est donnée p sa f de répartition :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \, dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \, dy$$

$$= \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et } 0 \ \forall x < 0.$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(P) $\mathbb{P}(X > a+b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$

(Rq) ⚠ $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) \neq \int_{-\infty}^{1} f_X(y) \, dy$ (guichet, tps d'attente)

Faux car X pas à densité !

3/ Intégrale p/ à une mesure σ-finie

3.1) Déf de l'intégrale d'une f mesurable

(D) soit $A \in \mathcal{T}$, on définit la f $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée l'indicatrice de A comme $\forall x \in E$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

(Rq) Une f $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée s'$\exists\, n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et des ens mesurables $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ tq $\forall x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. (étagée = combi. lin d'indicatrice)

On note $\mathcal{E}$ l'ens des f étagées. ($\mathcal{E}^+$ pr positives.

(D) soit $f \in \mathcal{E}^+$, $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $a_i \geq 0$ $\forall i$, on déf l'intégrale de f contre μ :

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i)$$

(Rq) Cette déf est encore valide pr $f \in \mathcal{E}$ si μ est une mesure finie.

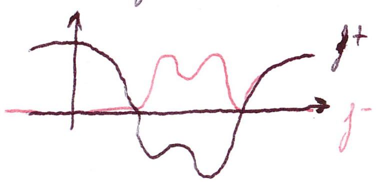
(D) (L'intég f mesurable positive)

f cont, mesure σ-finie, μ déf c $\int_E f \, d\mu = \sup\left\{ \int_E g \, d\mu,\ g \in \mathcal{E}^+,\ g \leq f \right\}$.

→ f est dite intégrable si $\int f \, d\mu < \infty$.

(D) Un ens $N \subset E$ est dit négligeable s'$\exists\, A \in \mathcal{T}$, $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

(D) soit f f mesurable, on déf fs $f^+(x) = \max(0, f(x))$, $f^-(x) = \max(0, -f(x))$



$\Rightarrow f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

→ f^+ & f^- st mesurables, si f^+ & f^- st intégrables, f est integ & $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$.

→ On note $\mathcal{L}^1(E)$ ou $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ens f integ p/ à μ.

(5) → f intég $\Longleftrightarrow$ $|f|$ intégrable.

Notaº : $\int f d\mu = \int f(x)\mu(dx) = \int f(x)\, d\mu(x)$

(si $\mu = \lambda$ et mesure de Lebesgue sr $\mathbb{R}$ $= \int f(x)dx$.

Rq si f, g mesurables & égales presq partout alors f intégrables $\Leftrightarrow$ g integ & $\int f d\mu = \int g d\mu$.

$\|f\|_1 = \int |f| d\mu$, $f = g$ μpp : $f = g$ ds $\mathcal{L}^1$.

D A ens mesurable, f intégrable :

$$\int_A f\, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu \quad (\text{cf monotonie de l'int})$$

Pptés • L'int de Lebesgue est linéaire
$\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{L}^1$

et $\int af + bg \, d\mu = a\int f d\mu + b \int g d\mu$.

• Monotonie : si $f, g \in \mathcal{L}^1$, $f \leq g$ μ-pp
$\Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

3.2. Convergence d'intégrales

D • (f_n) suite f mesurables, f_n CV simplmt vers f si $\forall x \in E$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x).$$

• f_n CV μ presque partout vers f s' $\exists$ ens négligeable N tq f_n CV simplt vers f sr N^c.

D (f_n) suite fs intégrables & soit $f \in \mathcal{L}^1$, on dit que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ ssi $\boxed{\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$

(c'est CVce assoc à $\|\cdot\|_1$)

⚠ $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{sim} f$ & $f_n \xrightarrow{simpl^t} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

D Lim inf & lim sup de suites réelles

soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle, $b_p = \sup_{n \geq p} a_n$, $c_p = \inf_{n \geq p} a_n$,
$p \in \mathbb{N}$, $b_p, c_p \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_p \searrow$, $c_p \nearrow$, $c_p \leq b_p$

$\exists$ $\bar{a} = \lim_{p \to \infty} b_p = \lim_{p \to \infty} \sup_{n \geq p} a_n$ & $\underline{a} = \lim c_p = \liminf a_n$

↳ $\bar{a}, \underline{a}$: + gde (resp + petite) val^r d'adhérence de $(a_n)_{n \geq 0}$
↳ $\bar{a}$ (resp $\underline{a}$) : + gde (resp + petite) v^{lr} dt a_n va passer infiniment proche s.f.

D f_n suite $f : E \to \mathbb{R}$,

$$\limsup f_n(x) := \limsup(f_n(x)) \quad (\text{idm})$$
$$\liminf f_n(x) := \liminf(f_n(x))$$

Rq si f_n suite f^o mesurables $\Rightarrow \limsup_{\text{inf}} f_n$ mesurables

Th (L de Fatou)

(f_n) suite de fs mesurables positives alors

$$\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonction } g} d\mu \leq \liminf \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{suite réelle}}$$

$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$ $\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0,n]) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

→ calculer $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pr $x \geq 0$, $\exists n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ à x fixé

$f_n(x)$ CV & $\lim f_n(x) = 0 \Rightarrow \liminf f_n = 0 \Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1.$$

Th (CVce monotone)

soit $(f_n)_n \nearrow$ de f mesurables & positives (ie $\forall n$ $f_n(x) \nearrow_n$)

$\Rightarrow (f_n)$ CV simplement vers f mesurable,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

→ $\int f$ prd ses valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}^+$

→ aucune hypo intégrabilité sr f, idem pr suites $\searrow$ de fs nég.

Th CVce dominée

soit (f_n) suite fs mesurable, CV simple vers f. On suppose

$\exists$ f $g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, ie $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(Rq) si f_n suite f° mesurable $\Rightarrow \liminf / \limsup f_n$ mesurables

(Th) (L de Fatou)

(f_n) suite de fs mesurables positives alors

$$\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonction } f} \, d\mu \leq \liminf \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{suite réelle}}$$

$f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ $\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

→ calculer $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pr $x \geq 0$, $\exists n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ à x fixé

$f_n(x)$ CV & $\lim f_n(x) = 0 \Rightarrow \liminf f_n = 0 \Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1.$$

(Th) (CV monotone)

soit $(f_n)_n \nearrow$ de f mesurables & positives (ie $\forall x$ $f_n(x) \nearrow_n$)

$\Rightarrow (f_n)$ CV simplement vers f mesurable,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

→ f pd ses valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}^+$

→ aucune hypo intégrabilité sur f, idem pr suites ↓ de fs nég.

(Th) (CV dominée)

soit (f_n) suite fs mesurable, CV simple vers f. On suppose $\exists\, g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, ie $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

IV / Variables Aléatoires

Q°: comment déterminer si X & Y ont m̂ loi ? ie $\underset{\mathbb{P}(X\in A)}{\mathbb{P}_X} = \mathbb{P}_Y$?

IV.1/ Caractérisation mesures

(D) soit E ens, on considère $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est un π-système si $\mathcal{C}$ stable p intersection finie. $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.

(ex) $\mathcal{I}_x = \{$interv ouverts de $\mathbb{R}\}$ est un π-système.

(D) Un ens $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone ou λ-système si :

▷ $E \in \mathcal{C}$

▷ $\mathcal{C}$ est stable p différence

1) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ et $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$.

2) $A_n \in \mathcal{C}$, $\forall n$ $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{C}$.

soit $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$, 2 mesures de probas sur $(E, \mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ classe monotone

($E \in \mathcal{C}$ car $\mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E) = 1$, $E \in \mathcal{T}$; $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T}$ si $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}$

(L) (des classes monotones)

La petite classe monotone contenant un π-système $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée p $\mathcal{C}$.

(L) classes monotones : si $\mathbb{P}$ & $\mathbb{Q}$ 2 mesures qui coïncident sur π-système $\mathcal{C}$ engendrant $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ si $\forall x$, $\mathbb{P}(]-\infty, x]) = \mathbb{Q}(]-\infty, x]) \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{Q}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

IV.2. var & FdR$^\theta$ (va réelles)

Ⓓ Une ppté est vraie ⓟⓢ si elle est vraie sur un ens $\Omega' \subset \Omega$ de proba 1.

Ⓓ (va) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est f mesurable $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Étant donné $\boxed{\text{var}}$ X, on déf sa loi/distribution $\mathbb{P}_X$ ĉ $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

⚠ $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$; $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longmapsto [0,1]$

variables à densité st un cp, si X est à densité f_X

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx = \int_A \mathbb{P}_X\,dx$$

$$\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)\,dx \quad \text{écriture formelle.}$$

Ⓓ soit X (var), on déf FdR de X ĉ

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty, x]}\,\mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X \in]-\infty, x])}_{\text{sur } \Omega} = \mathbb{P}(X \leq x) = \underbrace{\mathbb{P}_X(]-\infty, x])}_{\text{sur } \mathbb{R}}$$

ⓟ FdR$^\theta$ F_X d'une (var) X est ↗, $F_X(x) \in [0,1]\ \forall x$, cad, $F_X(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$, $F_X(x) \xrightarrow[\infty]{} 1$

et F_X caractérise entièrement la loi de X. ⑧

→ si $F_X = F_Y$ sur $\mathbb{R}$ pr X, Y 2 $\boxed{\text{var}}$ $\Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

IV.3. Moments des (var)

Ⓓ On dit var X est intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |x|\,\mathbb{P}_X(dx) < \infty$.

On pt alors définir son espérance $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx)$

On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Ppté : Comme l'intégrale, l'espérance est monotone & linéaire

si X, Y var intégrable, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X \leq Y$ ⓟⓢ $\Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

$\circ\ \alpha X + \beta Y$ est intégrable, d'espérance $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + \beta\,\mathbb{E}(Y)$

(Rq) Une (va) bornée ⓟⓢ est tjrs intégrable

X intégrable $\iff \mathbb{E}(|X|) < \infty$ or $\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(C) = C$

si X est bornée p.s par C.

(Th) de transfert soit X var, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f mesurable.

La (va) $\varphi(X)$ est intégrable si $\varphi(\cdot)$ est intégrable par rapport à la mesure $\mathbb{P}_X$ & on a alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$$

(Rq) $\varphi(\cdot)$ est $\boxed{\text{intégrable}}$ p/r à la mesure $\mathbb{P}_X$

$$\iff \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,\mathbb{P}_X(dx) < \infty.$$

→ Retour sur les var à densité & discrète :

– var à densité : X à densité $f_X \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)\,dx}_{\text{écriture formelle}}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\,dx$ et $\mathbb{E}(X) = \int x \underbrace{f_X(x)\,dx}_{\mathbb{P}_X(dx)}$

– var discrète : X à val^{rs} ds $D \subset \mathbb{R}$ & $|D|$ fini.

- $\mathbb{P}_X(\{d\}) = \mu_d \quad \forall d \in D$
- $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus D) = 0$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_\Omega X(w)\, \mathbb{P}(dw).$$

$$X(w) = \sum_{d \in D} d\, \mathbb{1}_{\{X=d\}}(w) \quad \text{“f étagée”}$$

$$\int X(w)\, \mathbb{P}(dw) = \sum_{d \in D} d \underbrace{\mathbb{P}(X=d)}_{\mu_d}$$

(D) soit X var, on déf ss réserve $|x|^k$ soit intégrable $\mathbb{P}$ à $\mathbb{P}_X$, le moment d'ordre k de X comme :

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_\Omega X(w)^k\, \mathbb{P}(dw)^{\mathbb{R}}.$$

→ on dira que X admet un $k°$ moment fini si X^k est intégrable.

(D) soit X var de carré intégrable, on déf la variance de X par :

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2\, \mathbb{P}_X(dx) - \mathbb{E}^2(X) = \int_\Omega X(w)^2\, \mathbb{P}(dw) - \mathbb{E}^2(X).$$

On définit l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$.

IV.4. Ptés & inégalités classiqs

(R) f $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall t \in [0,1]$:

$$\varphi(ty + (1-t)x) \leq t\,\varphi(y) + (1-t)\,\varphi(x).$$

φ C^2, φ convexe $\Leftrightarrow \varphi'' \geq 0$.

(P) (Inégalité de Jensen)

soit X var & φ f convexe : $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$.

(aide mémoire : $\varphi(x) = |x|$, $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$)

(R) si φ est concave, IdJ est inversée car φ convexe $\Leftrightarrow -\varphi$ concave.

(P) (Inégalité Markov)

soit X var positive & $a > 0$: $\mathbb{P}(X > a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

(P) (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

soit X var de carré intégrable

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Rq Réécriture (BY) comme $\forall k$ entier
$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| > k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}, \quad a = k\sigma(X)$$

V. Indépendance, LGN & TCL

V.1. CV de va

D $(X_n)_n$ suite var, on dit que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow{n\to\infty} X) = 1$ ou plus précisément, si $\exists$ event A tq $\mathbb{P}(A) = 1$ & $\forall \omega \in A$, $X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)$.

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ si $\int |X_n(\omega) - X(\omega)| \, \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $X_n \xrightarrow{loi} X$ si $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont bornée, $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\varphi(X))$

Rq CV en loi est $\neq$te des autres car elle porte sur $\mathbb{P}_{X_n}$ et $\mathbb{P}_X$ et non pas X_n et X. Ne requiert pas X_n & X soient déf sur même espace de probabs.

Implications :
- $X_n \xrightarrow{loi} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
- $X_n \xrightarrow{p.s} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{loi} X$
- $X_n \xrightarrow{p.s} X \;\not\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$; $\not\Leftarrow$

NB f cont $\Rightarrow f$ mesurable.

P Caractérisation de CV en loi $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

soit $(X_n)_n$ var & X var, on note $F_n = \mathbb{P}(X_n \leq x)$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{loi} X \Leftrightarrow F_n \longrightarrow F$ simplement en tt pt de continuité de F $\forall x \in \mathbb{R}$ tq F est cont en x, $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$.

V.2. Indépendance

D X, Y var, X & Y dites indépendantes $X \perp\!\!\!\perp Y$ si $\forall B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:
$$\mathbb{P}(X \in B \text{ et } Y \in C) = \mathbb{P}(X \in B)\, \mathbb{P}(Y \in C)$$

- une famille de var $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite mutuellement indépendante si $\forall M \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_M \in \mathbb{N}^*$ et $\forall B_1, \dots, B_M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$$\mathbb{P}(X_{n_i} \in B_i \ \forall i = 1, \dots, M) = \prod_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_{n_i} \in B_i) \quad (*)$$
- $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite indépendante 2 à 2 si $(*)$ vraie pr $M = 2$.

P φ & ψ fs mesurables bornées, X, Y 2 var indép
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\, \mathbb{E}(\psi(Y))$$
(idem pr famille var $\mathbb{E}\left(\prod_{n\in I} \varphi_n(X_n)\right) = \prod_{n\in I} \mathbb{E}(\varphi_n(X_n))$, $I < \infty$, $\forall I \subset \mathbb{N}$)

P soit X & Y var de carré intégrable, & $X \perp\!\!\!\perp Y$
$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

NB : $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Voc : si X_n est une suite var mutuellement indépendante & ttes de m̂ loi, on dit que la suite (X_n) est iid (ind identiq dist)

V.3 Loi des grands nbes

(X_n) suite var, $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum X_i$ moy empiriq.

Th LFGN

soit (X_n) suite iid de var, spps X_1 est intégrable

$\Rightarrow \overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_1)$

V.4. TCL

Th (Central Limite)

soit (X_n) une suite iid de var, on spps que X_1 est de carré intégrable. $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sqrt{V(X_1)}$.

$$\Rightarrow Y_n = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{loi} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(ou $\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - \mu) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\mathrm{Var}(\overline{X_n} - \mu) = \mathrm{Var}(\overline{X_n}) = \frac{V(X_1)}{n}$$

C6 Vecteurs aléatoires

6.1. Espaces mesurés produits

D soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ 2 espaces mesurables, on déf la tribu produit de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 := \sigma\{A \times B,\ A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{T}\}$ tribu sr $E_1 \times E_2$.

ex $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[, a, b \in \mathbb{R})$

D Étant donnés 2 espaces mesurables $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$; $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$; on déf mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ par

$\mu_1 \otimes \mu_2 (A \times B) := \mu_1(A)\, \mu_2(B)$ $\forall A \in \mathcal{T}_1, \forall B \in \mathcal{T}_2$ q définit entièrement $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ par le corollaire des classes monotones car $\{A \times B,\ A \in \mathcal{T}_1, B \in \mathcal{T}_2\}$ est un π-système.

Th Fubini - Tonelli

soit $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ 2 espaces mesurés & f mesurable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ positive $\Rightarrow$

(i) $\forall x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot)$, $x_2 \to f(x_1, x_2)$ est mesurable positive sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et la f $\varphi_f(x_1) \longrightarrow \underbrace{\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, \mu(dx_2)}_{\in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}}$ est mesurable positive sr $(E_1, \mathcal{T}_1)$.

(ii) $$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1)\, \mu_2(dx_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2)\, \mu_1(dx_1)$$

cf f est intégrable contre la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$:
(f n'est pas positive) ssi $|f|$ l'est cad si

$$\int_{E_1}\int_{E_2} |f|(x_1,x_2)\,\mu_2(dx_2)\,\mu_1(dx_1) < \infty.$$

6.2. Vecteur aléatoire

(D) Un vecteur aléatoire est une (va) à valeurs dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, la loi du $\vec{va}$ X est la mesure de probas $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}^N$ tq $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

→ Un $\vec{va}$ est dit à densité s' $\exists$ f mesurable positive $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty[$ tq $\int_{\mathbb{R}^N} f_X\,dx = 1$

et (va) $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_A(x)\,dx$.

Notat : Px $x \in \mathbb{R}^N$, on note Π_n le projecteur sur sa $n°$ coordonnée $\Pi(x) = x_n$.

(D) soit μ une mesure de probas sur $\mathbb{R}^N$, on appelle $n^{ème}$ probabilité marginale de μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tq $\mu_n(B) = \mu(\Pi_n^{-1}(B)) = \mu(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R})$

∘ soit X $\vec{va}$, on appelle $n^{ème}$ loi marginale de X : $\mathbb{P}_X$ la $n^{ème}$ proba marginale de $\mathbb{P}_X$ et on a $\mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_{X_n}$. (c'est la loi de la $n^{ème}$ coordonnée de X)

(D) X $\vec{va}$, on suppose que ttes ses marginales st intégrables.

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \int_{\mathbb{R}} |x|\,\mathbb{P}_X^n(dx) < \infty \quad \forall n \in \{1,\dots,n\},$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \big(\mathbb{E}(X_1),\dots,\mathbb{E}(X_n)\big) \in \mathbb{R}^N.$$

(D) X $\vec{va}$, on suppose $\forall n$, X_n est de carré intég, on définit sa matrice de covariance comme $cov_{m,n}(X) = \mathbb{E}(X_m X_n) - \mathbb{E}(X_m)\mathbb{E}(X_n)$