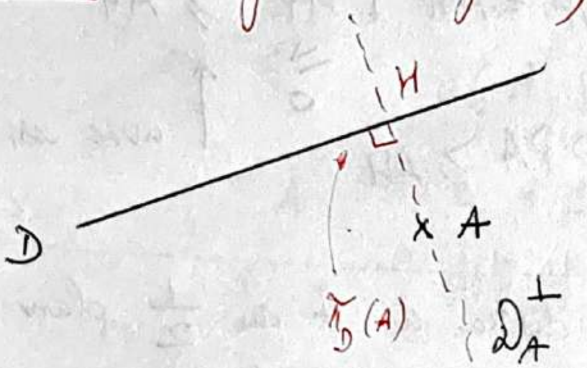
TD M44 TD 1 : Le Plan Euclidien

Ex 1 (Projeté orthogonal)



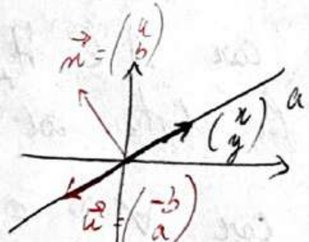
a) coord H en f $A(x_A, y_A)$ et équa° de $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} = \{ax + by = d\} \quad , \quad A = (x_A, y_A), \quad H = (x_H, y_H).$$

Indic $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur normal à $\mathcal{D}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur à $\mathcal{D}$

a si $d = 0$.



$$\langle (-b, a) \mid (a, b) \rangle = -ba + ab = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(-b, a) \perp (a, b)$$

$\boxed{M1}$ on note $\mathcal{D}_A^\perp$, la droite $\perp$ à $\mathcal{D}$ passt par A.

équa° de $\mathcal{D}_A^\perp$: $-bx + ay = \underbrace{-bx_A + a y_A}_{A \in \mathcal{D}_A^\perp}$

$$\Updownarrow$$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{D}_A^\perp$.

et comme c'est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\iff \mathcal{D}_A^\perp$.

Ainsi le point $H(x_H, y_H)$ doit vérifier

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} a x_H + b y_H = d \\ -b x_H + a y_H = -b x_A + a y_A \quad \left(\iff \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} aL_1 - bL_2 = \\ bL_1 + aL_2 = \end{array} \begin{cases} (a^2 + b^2) x_H = ad + b^2 x_A - ab\, y_A \\ (a^2 + b^2) y_H = bd - ab\, x_A + a^2 y_A \end{cases}$$

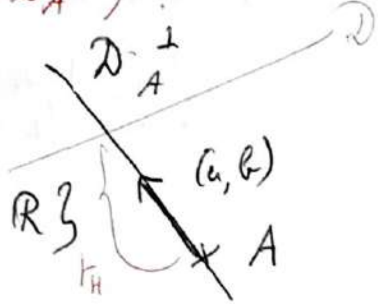
$$\Rightarrow (x_H, y_H) = \left(\frac{ad + b^2 x_A - ab\, y_A}{a^2 + b^2}, \frac{bd - ab\, x_A + a^2 y_A}{a^2 + b^2} \right)$$

a

M2 (paramétrisatⁿ de $\mathcal{D}_A^{\perp}$)

$\mathcal{D}_A^{\perp} = \{ A + t(a,b) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{D}_A^{\perp} = \{ (x_A + t.a,\ y_A + tb) \mid t \in \mathbb{R} \}$



On cherche ainsi t, tel que $H(x_H, y_H)$

$$(x_H, y_H) = (x_A + t_H \cdot a,\ y_A + t_H \cdot b)$$

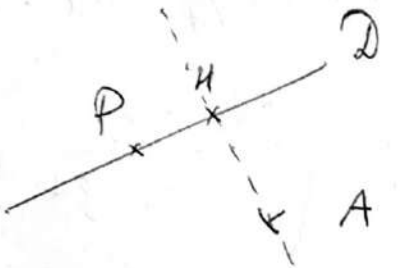
$$\Leftrightarrow\ a(x_A + t_H \cdot a) + b(y_A + t_H \cdot b) = d$$

$$\Leftrightarrow\ (a^2 + b^2) t_H = d - a x_A - b y_A$$

$$\rightsquigarrow (x_H, y_H)$$ ■

b) Mq H réalise la distance de A à $\mathcal{D}$.

$$d(A, \mathcal{D}) = AH$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall P \in \mathcal{D} : AP \geq AH$$



voir démo

comme $(AH) \perp \mathcal{D} \Rightarrow \Delta\ AHP$ est rectangle.

(Pythagore)

$$\Longrightarrow PA^2 = AH^2 + \underbrace{HP^2}_{\geq 0} \geq AH^2$$

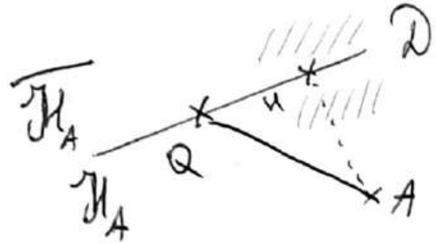
$$\Leftrightarrow PA \geq AH$$

↑ avec ssi $HP = 0$

$\Leftrightarrow H = P$

c) Mq H réalise distᶜᵉ de A au $\frac{1}{2}$ plan délimité par $\mathcal{D}$ & ne contenant pas A.

Quel est le point q réalise la distance entre A & autre $\frac{1}{2}$-plan.



$d(A, \mathcal{H}_A) = 0$ car $A \in \mathcal{H}_A$

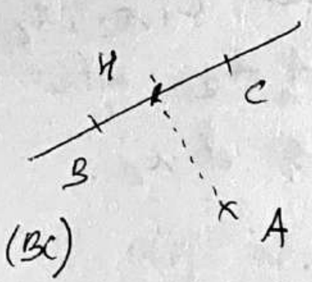
(et la distᵉ est réalisé par A)

$d(A, \overline{\mathcal{H}_A}) = AH$ car $\forall P \in \overline{\mathcal{H}_A}$

soit $Q = [AP] \cap \mathcal{D} \Rightarrow AP > AQ$ et

d'après b) $AQ \geq AH$ ■

d) Q^{le} est le p^{t} q réalise dist^{ce} de A au segment $[BC]$?

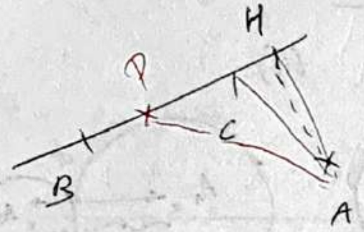


(i) si $H \in [BC]$,

$d(A,[BC]) = AH$.

(ii) si $H \notin [BC]$, $C \in [BH]$

$d(A,[BC]) = AC$



(iii) où H à gauche B ....,

Ex 2 (intersecθ droite / cercle).

a) étudier intersecθ droite $\mathcal{D}$ & cercle $\mathcal{C}(A,r)$

3 cas :

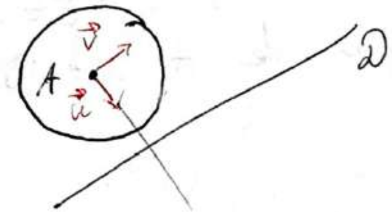
$\# = 0$ $\qquad$ $\# = 1$ $\qquad$ $\# 2$

soit $d = (A, \mathcal{D})$,

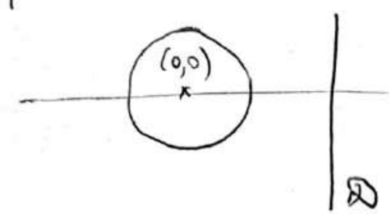
$d > R$ $\qquad$ $d = R$ $\qquad$ $d < R$.

On p^{t} simplifier calculs de 2 façons :

- en choisiss^{st} repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ (RON) tq $\vec{u} \perp \mathcal{D}$ et $\vec{v} \parallel \mathcal{D}$.



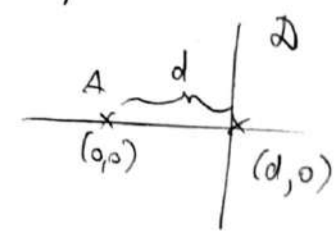
- le pb ne change pas si on translate et si on applique une rotaθ, dc on p^{t} supposer $A = \Omega(0,0)$ et $\mathcal{D} \perp Ox$.



→ Dans les 2 cas, on trouve les équaθs :

▸ $\mathcal{C}(A,R) = \{x^2 + y^2 = R^2\}$

▸ $\mathcal{D} = \{x = d\}$



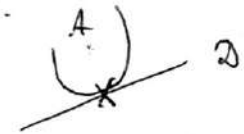
$P(x,y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}(A,R)$ ssi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = d \\ y^2 = R^2 - d^2 \end{cases}$$

Ainsi si $d > R \Rightarrow$ pas de soluº ($\mathcal{D} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$)

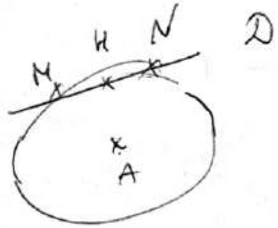
si $d = R \Rightarrow (d, 0)$ uniq soluº (cas tangent)

de plus dans ce cas, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = (d, 0)$ qui est la projecº de A sur $\mathcal{D}$.

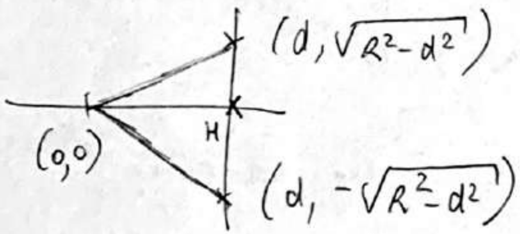


si $d < R \Rightarrow \# \mathcal{D} \cap \mathcal{C} = 2$

$\underbrace{(d, \sqrt{R^2 - d^2})}_{= M}, \underbrace{(d, -\sqrt{R^2 - d^2})}_{= N}$



$H = (d, 0) = \dfrac{M + N}{2}$



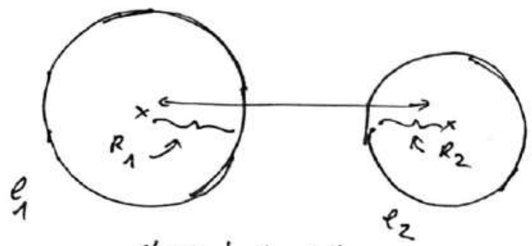
→ on vient de faire a) et b)

Ex4 : (Intersecº de cercles)

a) Étude intersecº 2 cercles $C(A_1, r_1)$ $C(A_2, r_2)$ en f distance $d := A_1 A_2$ entre les centres & 2 rayons r_1 et r_2.

• Configuraºs possibles :

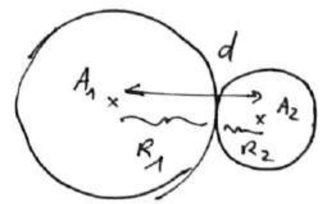
(i)



disjoint "ext"

$d > R_1 + R_2$

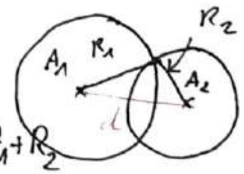
(ii)



tangents ext

$d = R_1 + R_2$

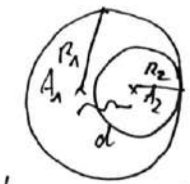
(iii)



$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

sécants

(iv)

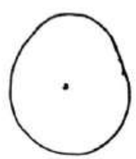


$R_1 > R_2$

tangents "int"

$d = |R_1 - R_2|$

(v)

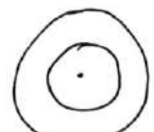


$R_1 = R_2$

$d = 0$

"confondus"

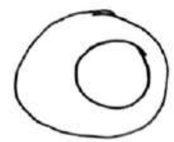
(vi)



$R_1 \neq R_2$

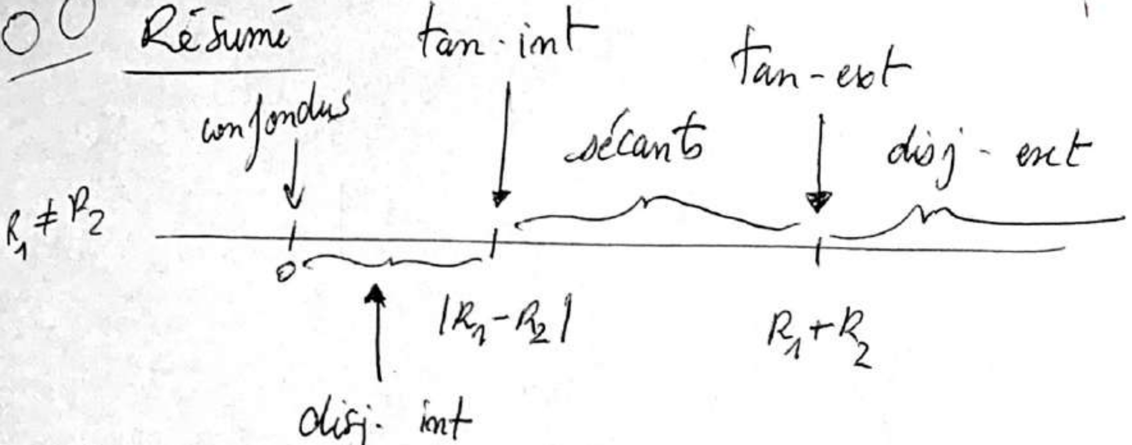
$d = 0$

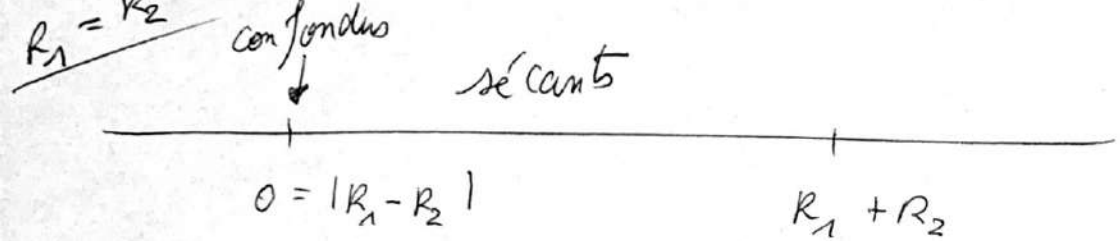
(vii)



$d < |R_1 - R_2|$

Résumé



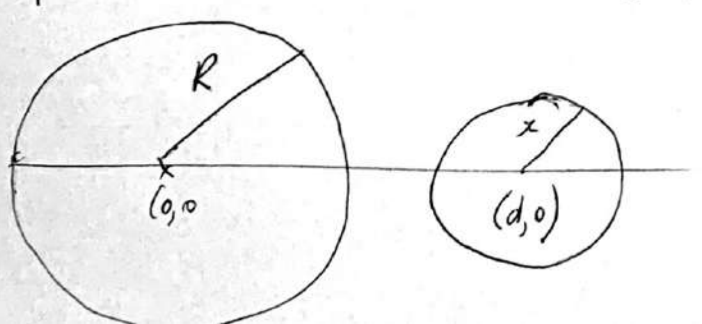


Démonstrat° (ĉ ds ex2) on peut

- soit fixé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de façon adéquate
- soit appliquer une translat° & rotat°

pr se ramener ds le cas : $\left(\begin{array}{l} R = \max(R_1, R_2) \\ r = \min(R_1, R_2) \end{array} \right)$

Rq: $|R_1 - R_2| = R - r$.



$\{x^2+y^2=R^2\}$ et $\{(x-d)^2+y^2=r^2\}$

Ainsi $P(x,y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ ssi

$$\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ (x-d)^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ x = \dfrac{R^2-r^2-d^2}{2d} \end{cases} \qquad d \neq 0.$$

cas $d=0$, trivial.

$$\Rightarrow y^2 = R^2 - \left(\frac{R^2-r^2-d^2}{2d}\right)^2$$

$$y^2 = \left(R - \frac{R^2-r^2-d^2}{2d}\right)\left(R + \frac{R^2-r^2-d^2}{2d}\right)$$

$$y^2 = \left[\frac{r^2-(R^2-2Rd+d^2)}{2d}\right]\left[\frac{R^2+2Rd+d^2-r^2}{2d}\right]$$

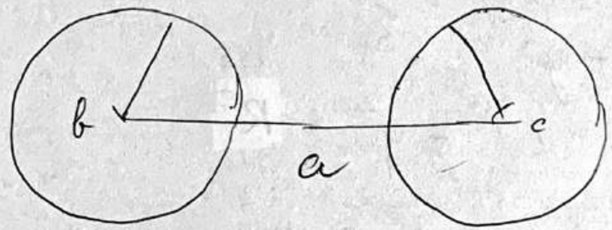
$2d \geqslant 0$ $\qquad$ $\geqslant 0$

$\Delta > 0$ ssi $r^2-(R-d)^2 > 0$ deux sol

$\Delta = 0$ $\qquad = 0$ 1 sol

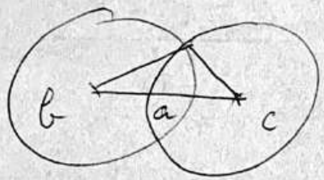
$\Delta < 0$ $\qquad < 0$ 0 sol

b) Ss quelle condi° a, b, c ∃-t-il Δ' dt côtés ont pr longueur a, b, c.
simplificat° condi° si $a \leq b$ et $a \leq b \leq c$.



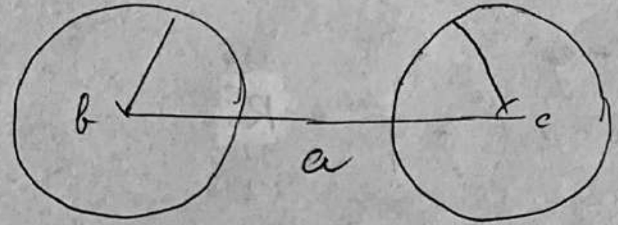
~~⇐~~

$a \leq b + c$



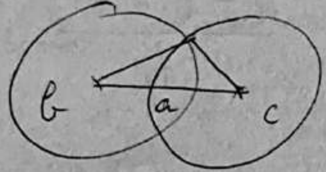
$|b-c| < a < b+c$

b) ss quelle condi° a, b, c $\exists$-t-il Δ dt côtés ont pr longueur a, b, c.
simplificat° condi° si $a \leq b$ et $a \leq b \leq c$.



~~$\Leftrightarrow$~~

$a \leq b+c$



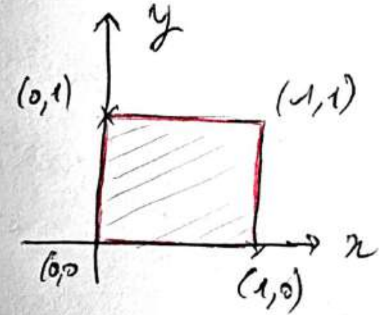
$|b-c| < a < b+c$

Ex 5 (Convexes & inéquat°s)

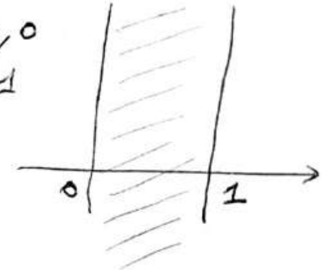
a) Donner un système d'inéq°s linéaires dt l'ens de solut°s est le carré unité.

b) soit $A(1,2)$, $B(4,1)$, $C(3,4)$ $\in \mathbb{R}^2$, donner syst inéquat°s linéaires dt solut° est l'int ΔABC.

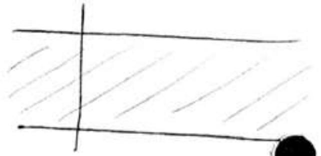
a)



$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

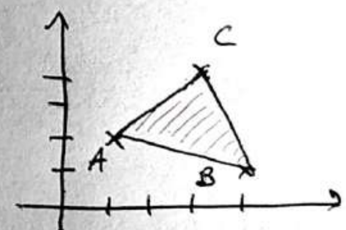


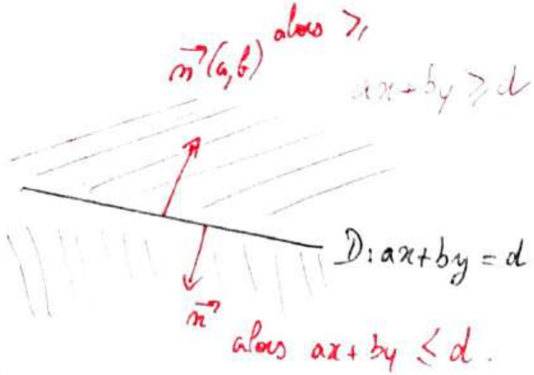
$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$



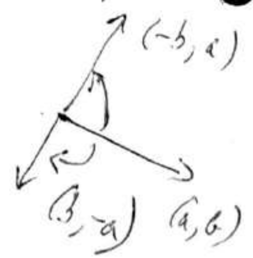
Au final : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1. \end{cases}$

b)





on considère la droite (AB) ayant pr vecteur directeur $\vec{AB}(4-1, 1-2) = (3,-1)$ et pr vecteur normal $(-1,3)$



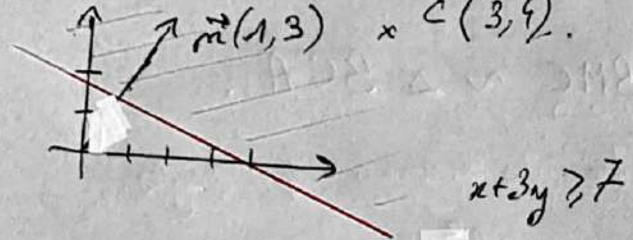
De $D_{AB}: x+3y = 1+3\times 2 = 7$

$D_{AB}: x+3y = 7$

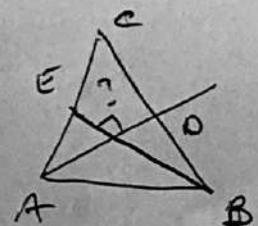
ou $D_{AB}: -x-3y = -7$.

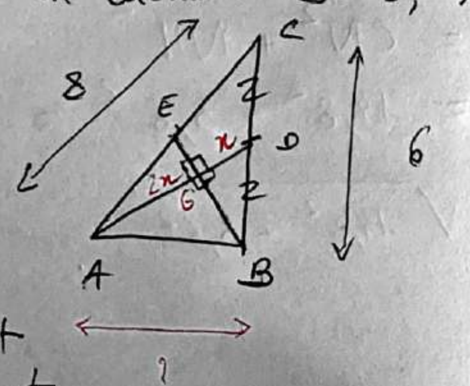
et comme $3+3.4 = 15 > 7$ le plan (coord. de C) délimité par (AB) devant C a pr inéquat

$\{x+3y \geq 7\}$



Ex 7 Dans $\triangle ABC$, la médiane AD est perpendiculaire à la médiane BE. Trouver AB en sachant $BC=6$, $AC=8$.



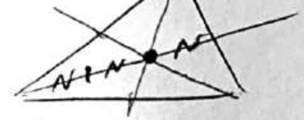


- I : Ω cercle inscrit
- O Ω cercle circonscrit
- H : ∩ 3 hauteurs
- G : Ω de gravité

Rapport $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ médianes (7)

Pr calculer AB, on cherche BG & AG car $AB^2 = BG^2 + GA^2$ (Pythagore)

On note $GD = x \Rightarrow AG = 2GD = 2x$ car le barycentre qui coupe la médiane AD en rapport $(2:1)$.



Puis $GE = y \Rightarrow GB = 2GE = 2y$.

Ainsi $AB^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = \,? = 4x^2 + 4y^2 \overset{?}{=}$
$= 4(x^2+y^2) = 4\times5 = 20.$

→ En appliquant Pythagore au ⊿BGD

$$x^2 + (2y)^2 = 9$$

→ En appliquant Pythagore au ⊿AGE,

$$2x^2 + y^2 = 16 = 4^2$$

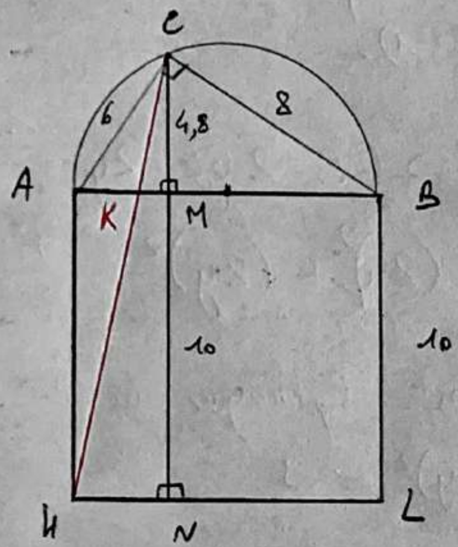
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \oplus \Rightarrow 5(x^2+y^2) = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

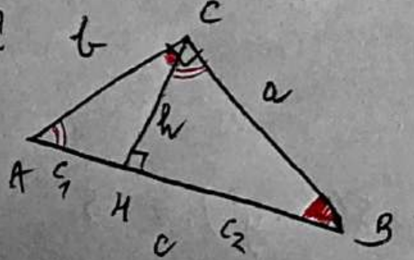
$$AB^2 = 4(x^2+y^2) = 20$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{20}}$$

Ex 8 Sur l'hypoténuse AB du ▷ ABC, tracer à l'ext. ▷ le carré ABLH.
En sachant $AC = 6$, $BC = 8$.
Trouver CH.



h ?



$$\Rightarrow h = \frac{ab}{c}$$

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2}$$

$c_1 = ?$ $\boxed{2M}$

M1 $c_1 = \sqrt{b^2 - h^2}$ (Pythagore)

M2 Triangle semblables

$$CM_{hauteur} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8$$

$$CN = MN + CM = 14,8.$$

c_1 ? M2 triangles semblables.

$$\triangle CMA \sim \triangle BMC \sim \triangle BCA.$$

⚠ au sens lettres → m̂ ordre des sommets ⇔ angles.

$$\Rightarrow \frac{c_1}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow c_1 = \frac{b^2}{c}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6^2}{10} = 3,6.$$

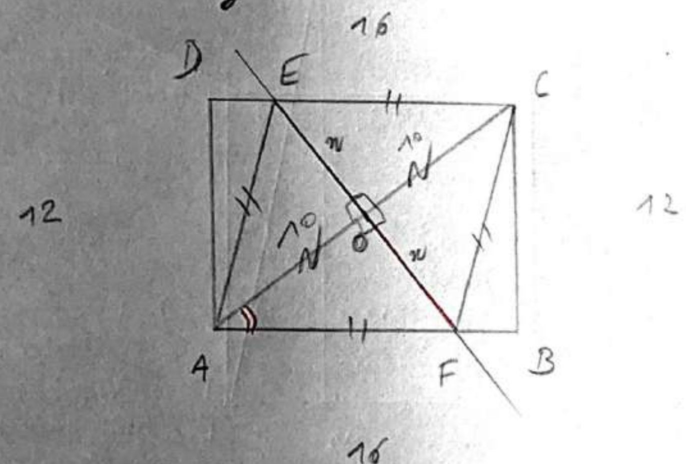
$$\Rightarrow CH^2 = CN^2 + NH^2$$
$$= 14,8^2 + 3,6^2 = ..$$

$$CH = \sqrt{14,8^2 + 3,6^2}.$$

Ex 10 Sur côtés AB et DC du rectangle ABCD, les points F & E st choisis pr AFCE soit un losange. Si $\begin{cases} AB = 16 \\ BC = 12. \end{cases}$

- 4 côtés égaux
- diagonales ⊥

Trouvez EF.



$OF = x = \frac{EF}{2}$

on cherche $2x = EF$

△AOF ∼ △ABC

△AOF ∼ △ABC
(rectangles di ∡ A commun)
angle

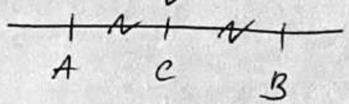
AO commun

triplet pythagoricien $3^2+4^2=5^2$

TD 2 : Barycentre

R1

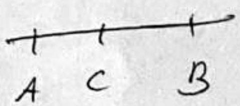
$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \cong \frac{A+B}{2}$$



$$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}.$$

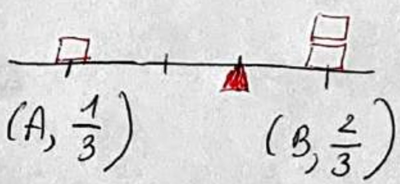


$$C = A + \lambda\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A})$$

$$\vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}$$

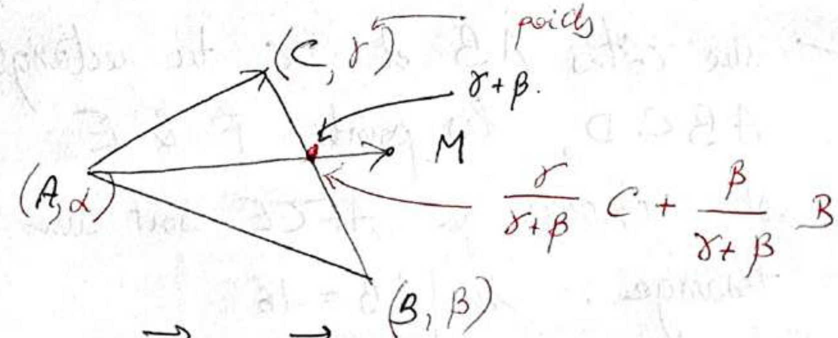
$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$$



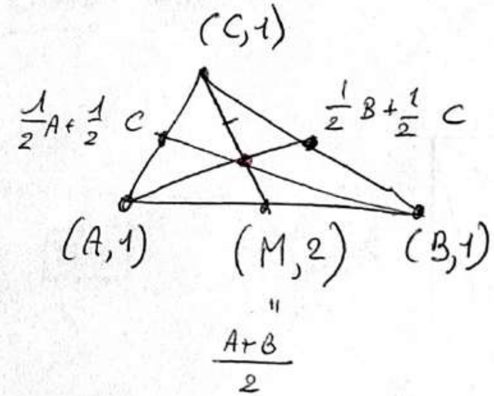
longueur$_1$ × poids$_1$ = long$_2$ × poids$_2$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{2}{1}$$

$\overline{AB}$: longueur algébriq orientée

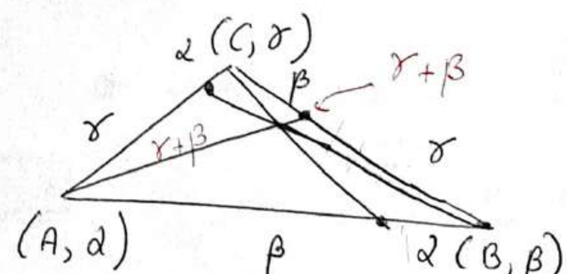


$$A + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \underbrace{(1-\beta-\gamma)}_{\alpha}A + \beta B + \gamma C$$

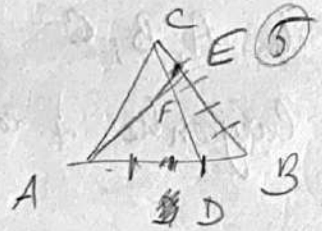


Tous les rapports sont [2 : 1].

CG : GM = 2 : 1



$\boxed{1}$



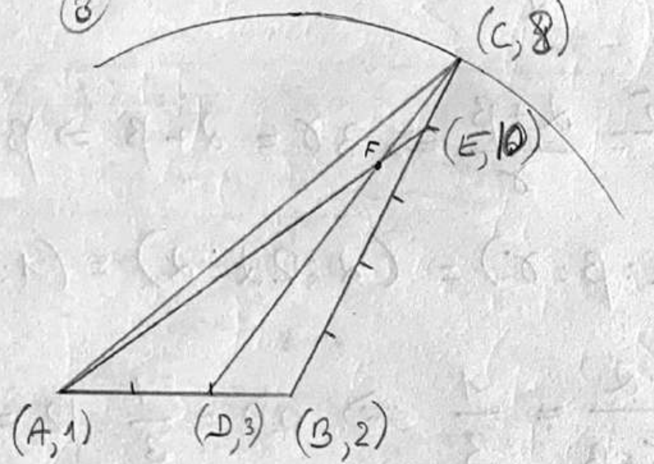
⑤ $BD : DA = 1 : 2$

$CE : EB \ 1 : 4$

$CF : FD$?

$1{,}8 : 5{,}5$

③



$\boxed{M1}$

$AF : FE = DF : FC$

on cherche les poids α, β, γ de (A, B, C),
F est le barycentre de
$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

si $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$ car $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{\beta}{\alpha} = 2$

$\Rightarrow \gamma = 8$ car $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{\gamma}{\beta} = 4$

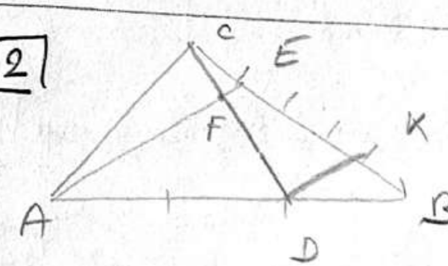
Ainsi $(\alpha : \beta : \gamma)$ coord. à un multiple près, rapport proportionnalité entre α, β, γ

$(\alpha : \beta : \gamma) = (1 : 2 : 8)$

Donc $\boxed{\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{3}{8}}$ ← valeur du poids en D ← valeur du poids en C

Énoncé en $\boxed{1}$

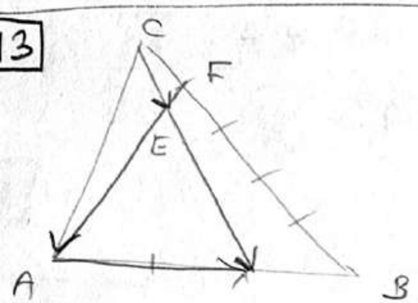
$\boxed{M2}$



$\boxed{\text{Thalès}}$

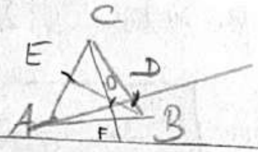
on considère $K \in [BC]$, $DK \parallel AE$, puis thalès

$\boxed{M3}$

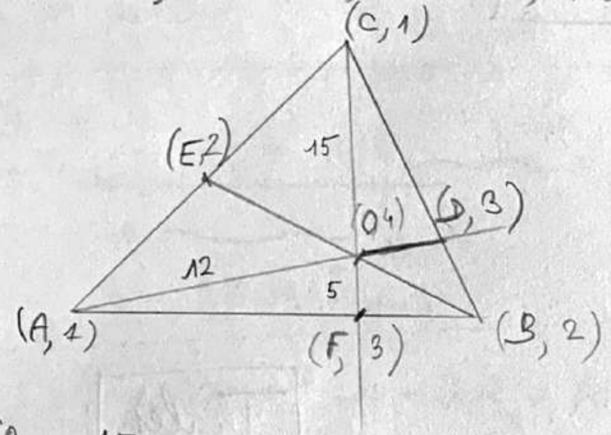


on cherche $\vec{CF} = \lambda \vec{CB}$ en les écrivant ds la base $\vec{CA}, \vec{CB}$.

$\boxed{2}$ Énoncé



$AE : EC = 1$, $CO = 15$, $OF = 5$, $AO = 12$, OD ?



$$\frac{CO}{OF} = \frac{15}{5} = 3 \iff 3 = \frac{\alpha}{1} \iff \alpha = 3$$

$$\gamma = \frac{AO}{OD} = \frac{12}{OD} \qquad \frac{AO}{OD} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{12}{OD} = 3 \iff OD = \frac{12}{3} = 4.$$

On cherche $(\alpha : \beta : \gamma)$ poids de A, B, C respectivement, O soit le barycentre de ces poids.

- $\dfrac{EA}{EC} = 1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha.$

- $\dfrac{OC}{OF} = \dfrac{15}{5} = \dfrac{\alpha + \beta}{\gamma} \Rightarrow 3\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$

  $\Rightarrow (\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha : 2\alpha : \alpha) = (1 : 2 : 1)$

- $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{\alpha}{\gamma + \beta} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OD = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4.$

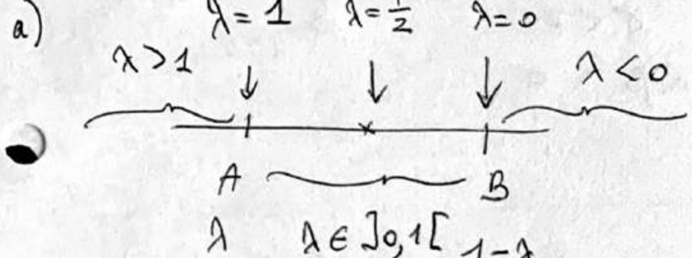
  12 "

$\boxed{4}$ Énoncé soit Δ non dégénéré ΔABC.

a) discuter posi° $M = \lambda A + (1-\lambda) B$ par rapport à A et B en f $\lambda \in \mathbb{R}$.

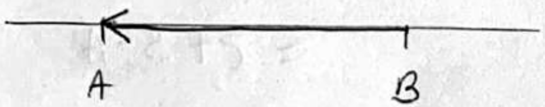
---

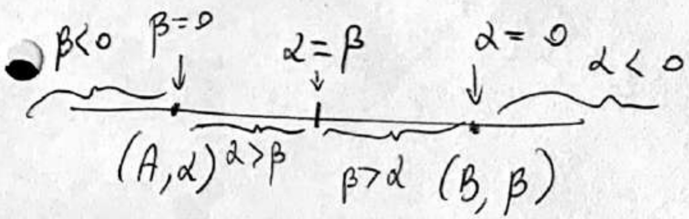
a)



$$\lambda A + (1-\lambda) B = \lambda A - \lambda B + B$$
$$= \lambda \overrightarrow{BA} + B$$

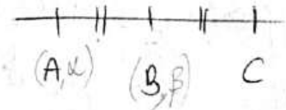
on retrouve ce que l'on avait deviné.





$\alpha + \beta > 0$

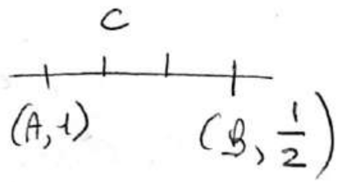
$\underline{Q^\circ}$:



C symétriq de A/B.

$\rightarrow$ C est barycentre de (A, α), (B, β) pour quels $(\alpha : \beta)$

Rq si $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$

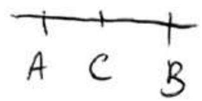


$\boxed{M1}$ $C = B + \overrightarrow{AB} = B + (\vec{B} - \vec{A}) = 2B - A$
$= (2 + (-1) \times 1)$.

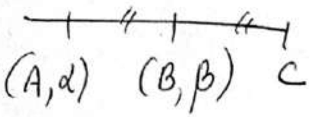
$\Rightarrow (\alpha : \beta) = (-1 : 2)$ convient.

$\boxed{M2}$ $B = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C \Longrightarrow C = 2B - A$

NB $\quad \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{-\beta}{\alpha}$



$\boxed{M3}$



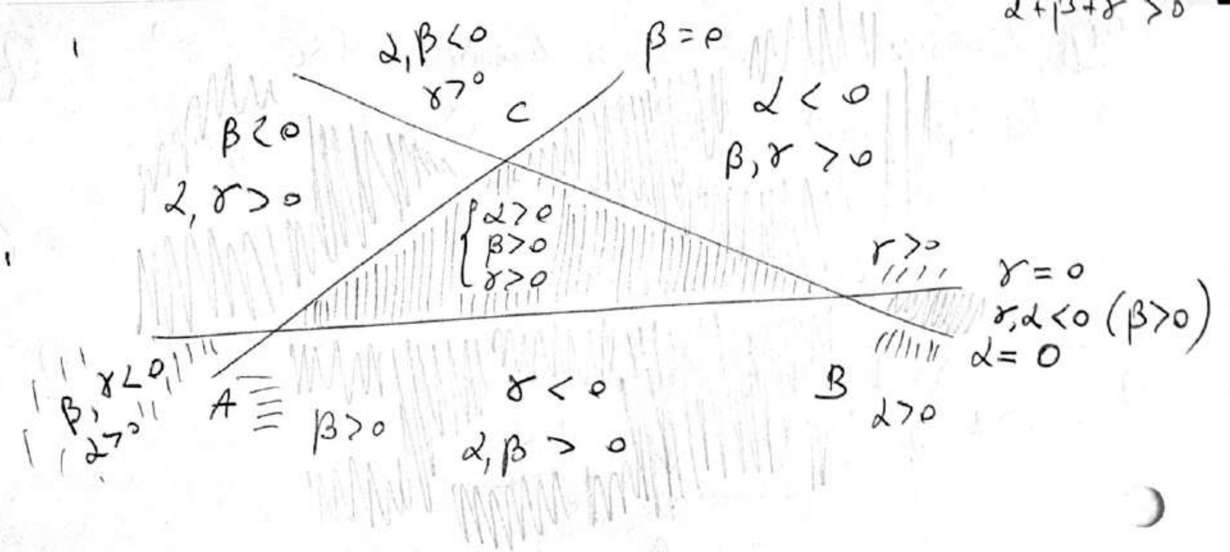
$2 = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = -2\alpha$

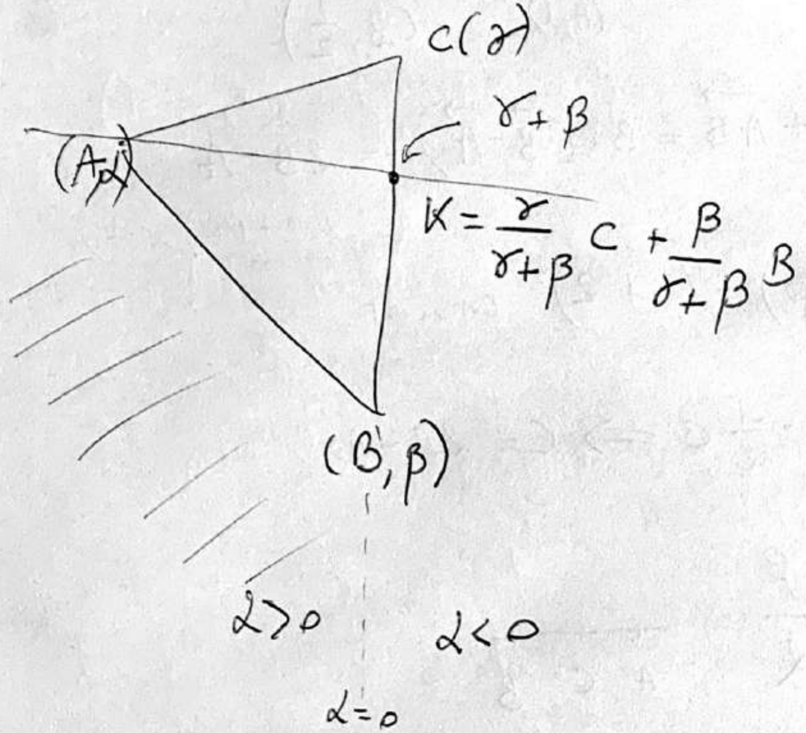
@ $(\alpha : \beta) = (-1, 2)$

8) Discuter posi° M par rapport △ABC en f signes coord. barycentriqs [α, β, γ].

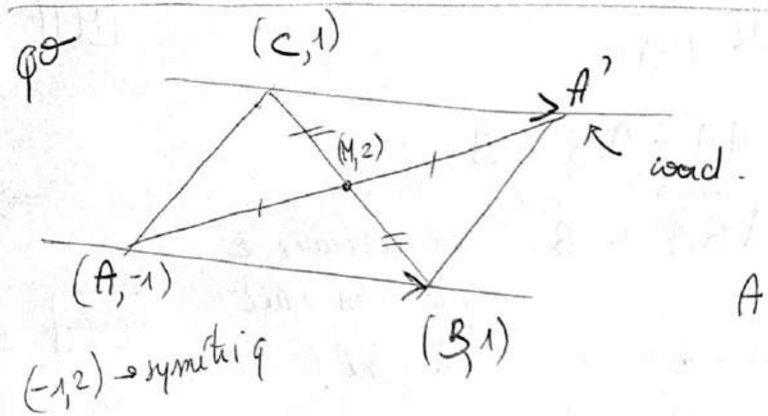
(i) condi° $M \in (BC) \xrightarrow{\text{rep}} \alpha = 0$

(ii) Condi° $M \in \frac{1}{2}$ plan (BC) contenant A:





$\underline{\alpha+\beta+\gamma>0}$.

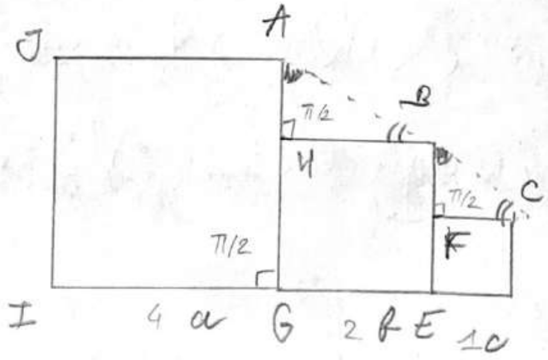


$(-1:1:1)$

$A' = C + \overrightarrow{AB}$
$= C + B - A$

Alignement

Ex 8



$a : b = b : c$

$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{2}{1} = 2$

$\boxed{M}$ mq A, B, C alignés :

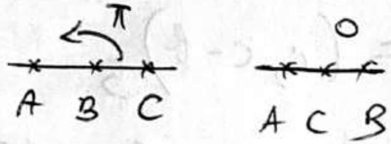
→ (D) trouver une droite $\mathcal{D}$, $A, B, C \in \mathcal{D}$

- $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$
- $C \in (AB)$

si $AB = \{ax + by = d\}$, $ax_c + by_c = d$?

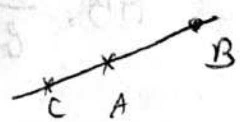
si $(AB) = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ $(x_c, y_c) = A + t\overrightarrow{AB}$?

- $\measuredangle ABC = 0\ [\pi]$



- nbr complexes.
- homothéties → $H_{C,\lambda}(A) = B$

→ $H_{0,\lambda}(A) = B$, $H_{0,\lambda}(B) = C$



$\boxed{M1}$ (angles)

$\triangle HBA \sim \triangle FCB$ car $\underbrace{\frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC}}_{(*)}$ et $\measuredangle H = \measuredangle F = \frac{\pi}{2}$

$(*) \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{c} - 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ok

Ainsi

$a : b = b : c$

$\measuredangle ABC = \measuredangle ABH + \measuredangle HBF + \measuredangle FBC = \pi$

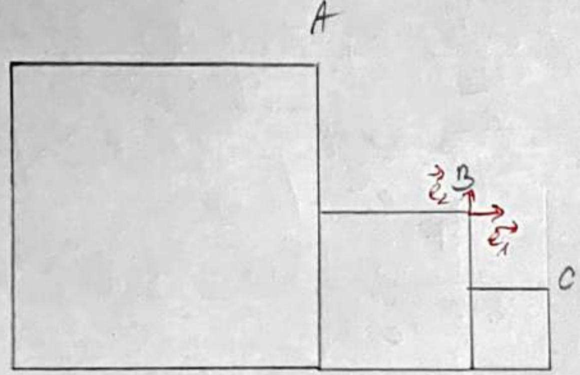
$\triangle$ semb. → $\parallel$ $\quad \parallel \pi/2$

$\measuredangle BCF \quad \measuredangle BFC$

somme des angles de $\triangle BFC$

Donc A, B, C st alignés car $\measuredangle ABC$ angle plat.

(plat)



$\boxed{M2}$ Équat° d'une droite.

On fixe $\mathcal{R} = (B, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

$\|\vec{e_i}\| = 1$.

$\vec{e_1} \parallel (ID)$ et $\vec{e_2} \parallel (IJ)$

$B = (0,0)_{\mathcal{R}}$ $\quad A = \underbrace{(-b, a-b)_{\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{BA}\ ''}$, $C = (c, c-b)_{\mathcal{R}}$

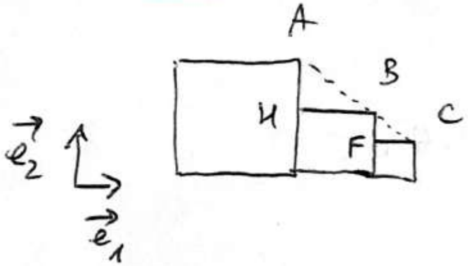
$(AB) = \{(a-b)x + by = 0\}$ car $(a-b, b)$ vecteur normal ($\perp \overrightarrow{AB}$ directeur)

car B est sol° de (AB)

$$C \in (A,B) \iff (a-b)c + b(c-b) =$$
$$= ac - \cancel{bc} + \cancel{bc} - b^2 = ac - b^2 = 0$$

car $ac - b^2 = 0 \iff ac - b^2 = 0 \iff \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$.

$\boxed{M3}$ Vecteurs



on fixe la m̂ base que $\boxed{M2}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF}$

$\overrightarrow{AB} = (b-a)\vec{e_2} + b\vec{e_1}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} = (c-b)\vec{e_2} + c\vec{e_1}$

$\overrightarrow{AB} = (b, b-a)_B$

$\overrightarrow{BC} = (c, c-b)_B$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \frac{c}{b} = \left(c, \frac{(b-a)c}{b}\right) = \left(c, \frac{bc-ac}{b}\right)$$
$$= \left(c, c - \frac{ac}{b}\right) = \left(c, c - \frac{b}{c} \times c\right) = \overrightarrow{BC}$$

$a:b = b:c$

on échange 2 coord, on ajt - un seul.

$\boxed{\text{M3 bis}}$ vérifier de $\perp$, scalaire.

$$<\vec{AB} \mid \vec{BC}^{\perp}> = 0$$

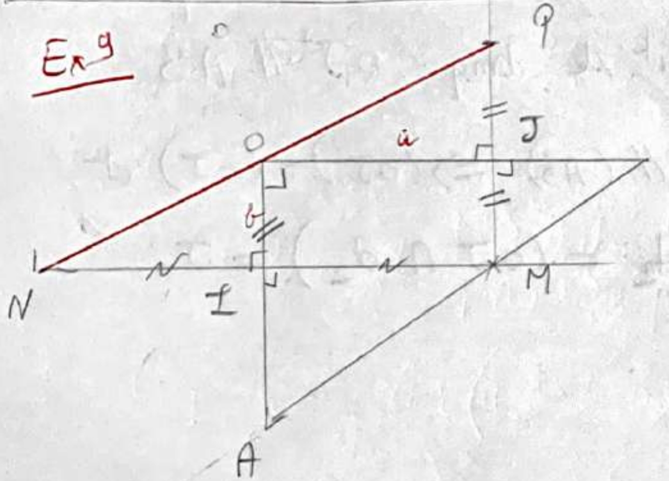
$$\parallel$$

$$<(b, b-a) \mid (b-c, c)> = 0$$

$$\iff b(b-c) + bc + (b-a)b + (b-a)c = 0$$

$$\iff b^2 - bc + bc + b^2 - ab + bc - ac = 0$$

Ex 9



NoP alignés ?

$\boxed{\text{M1}}$ on se place dans $\mathcal{R}(O, \vec{OB}, \vec{OA})$

avec $M(a,b)_{\mathcal{R}} \Rightarrow P(a,-b)_{\mathcal{R}}$ et $O(0,0)_{\mathcal{R}}$.

$$\Rightarrow N(-a,b)_{\mathcal{R}}$$

$$\Rightarrow \vec{OP} = (a,-b) = -(-a,b) = -\vec{ON}.$$

dc $\vec{OP}, \vec{ON}$ sont colinéaires.

Ainsi O, P, N sont alignés.

$\boxed{\text{M2}}$ angles & triangles semblables.

$NI = IM = OJ$ ($NI = IM$: symétrie ; $IM = OJ$: OJMI rectangle)

$IO = MJ = JP$, ($MJ = JP$: symétrie)

$\Rightarrow \Delta NIO = \Delta OJP$ car rectangles les côtés st égaux

$$\measuredangle NoP = \underbrace{\measuredangle NoI}_{} + \underbrace{\measuredangle IoJ}_{\frac{\pi}{2}\,=\,\measuredangle NIo} + \underbrace{\measuredangle oJP}_{=\,\measuredangle INo} = \pi$$

Δ égaux

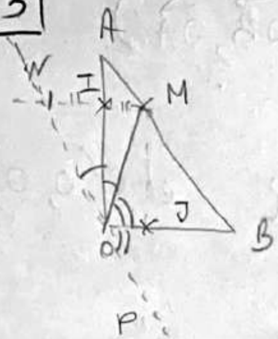
$\measuredangle NoP = \measuredangle NoI + \measuredangle NIo + \measuredangle INo$

somme angles un triangle $= \pi$

Ainsi $\measuredangle NoP$ angle plat.

Dc N, O, P alignés.

M3 (angles, bissectrices, symétrie)



$\measuredangle NOI = \measuredangle IOM$ (par symétrie)

$\measuredangle JOP = \measuredangle JOM$ (par symétrie)

$\Rightarrow \measuredangle NOP = 2(\measuredangle IOM + \measuredangle MOJ)$

$= 2\frac{\pi}{2} = \pi.$

→ O est le milieu de [NP] :

↳ **M1** (coordonnées) : $\frac{N+P}{2} = \frac{(-a,b)+(a,-b)}{2} = (0,0) = 0.$

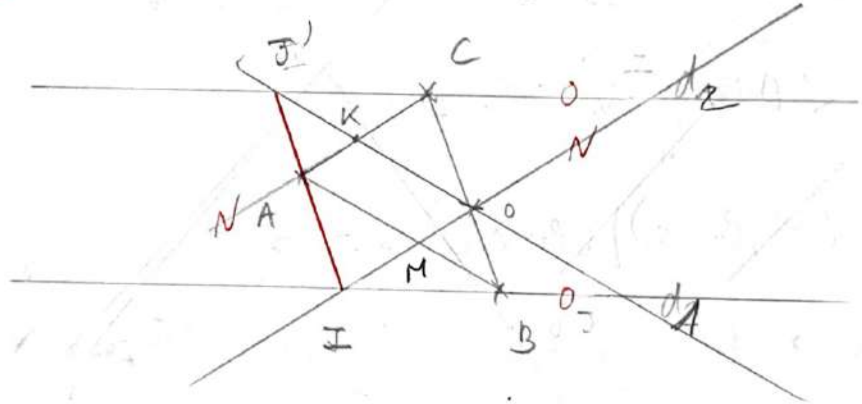
M2 (angles & Δ semblables égaux).

$\Delta NOI \approx \Delta OPJ \Rightarrow NO = OP.$

M3 (symétrie)

$ON = OM = OP$ (par symétrie)

Ex 10 :



Indic° : soit $(AI) \cap d_2 = J'$, on vt dmq $J' = J$

pr faire ça il suffit de dmq : $OJ' \parallel AB$.

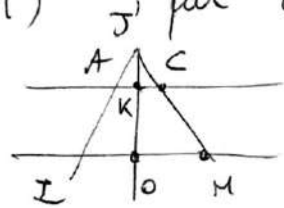
en effet si $(OJ') \parallel (AB) \Rightarrow (OJ') = (OJ)$ et

comme $(OJ') \cap d_2 = (OJ \cap d_2) = J.$

Indic° 2 : $\frac{CK}{KA} = \frac{CO}{OB}$

comme $(CA) \parallel (IM)$ par construc° de I

$\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI}$



$\Updownarrow$

$\frac{CK}{MO} = \frac{J'K}{J'O} = \frac{KA}{OI}$ (Thalès)

Ainsi $\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{MO}{OI} \overset{?}{=} \dfrac{CO}{OB}$

oui car $d_1 \parallel d_2$.

Pr conclure d'après Thalès dans ΔCAB, la droite $OK \parallel AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$

$\Rightarrow J \in (J'AI) \Rightarrow J, A, I$ alignés.

Ainsi $\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \overset{?}{=} \frac{CO}{OB}$

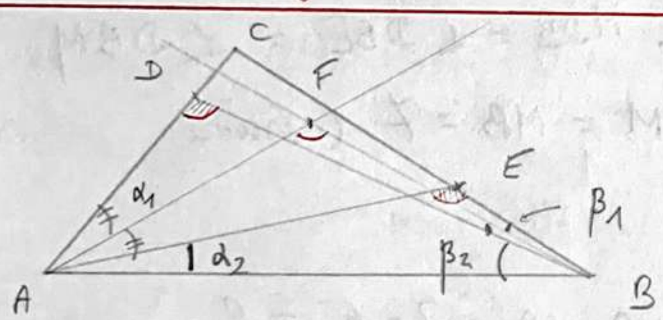
oui car $d_1 // d_2$.

Pr conclure d'après Thalès dans ΔCAB, la droite $OK // AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$

- $\Rightarrow J \in (J'AI) \Rightarrow J, A, I$ alignés.

TD 3 : Angles

Ex1



- Mq $\widehat{AFB} = \frac{\widehat{ADB} + \widehat{AEB}}{2}$

$\measuredangle CAF = \measuredangle FAE = \alpha_1$

$\measuredangle EAB = \alpha_2$

$(\measuredangle \widehat{CAB} = \alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2)$

$\measuredangle \widehat{CBF} = \measuredangle \widehat{FBD} = \beta_1$

$\measuredangle DBA = \beta_2$

$\rightarrow 2 \measuredangle AFB = 2\left(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)\right)$

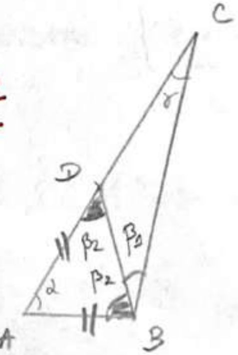
$\measuredangle ADB = \pi - (2\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2$

$\measuredangle AEB = \pi - \alpha_2 - (2\beta_1 + \beta_2)$

$\measuredangle ADB + \measuredangle AFB = 2\pi - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2$

$= 2 \measuredangle AFB$ □

Ex2



$\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 30° = \frac{\pi}{6}$

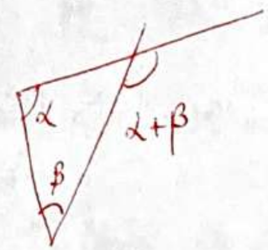
$\beta_1 + \beta_2 - \gamma = \frac{\pi}{6}$

$\beta_1 + \beta_2 - \gamma = \beta_1 + \beta_1 + \gamma - \gamma$

$= 2\beta_1 = 30°$

$\Longrightarrow \boxed{\beta_1 = 15°}$

Rq



Ex 3 Mq (CD) // (AB)

Ainsi on pourra conclure que
$L = M = C \Rightarrow LM = 0$.

comme D intersec° des bissectrices AD & BD,
$\Rightarrow$ CD bissectrice car D à distance égale
des droites (AB), (CB), (CA).

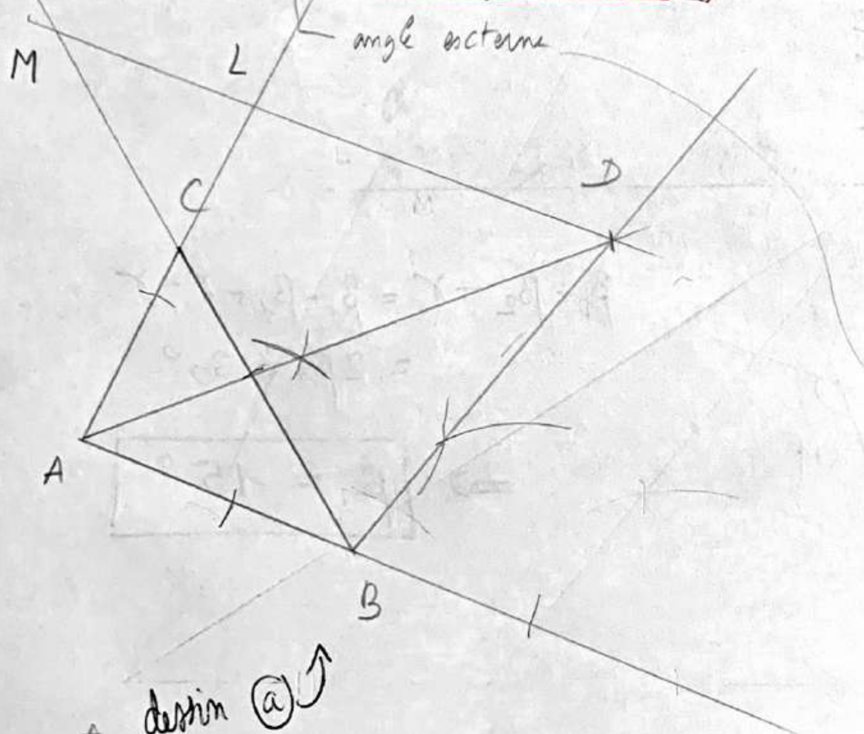
$\Rightarrow \sphericalangle DCB = \frac{1}{2} \sphericalangle FCB = \frac{1}{2}(\underbrace{\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA}_{\triangle ABC \text{ isocèle}}) = \sphericalangle CBA$

$\Rightarrow (CD) // (AB)$ b $\square$ $\Rightarrow L = M = C \Rightarrow LM = 0$

tracer bissectrice $\sphericalangle A$ g losange

angle externe

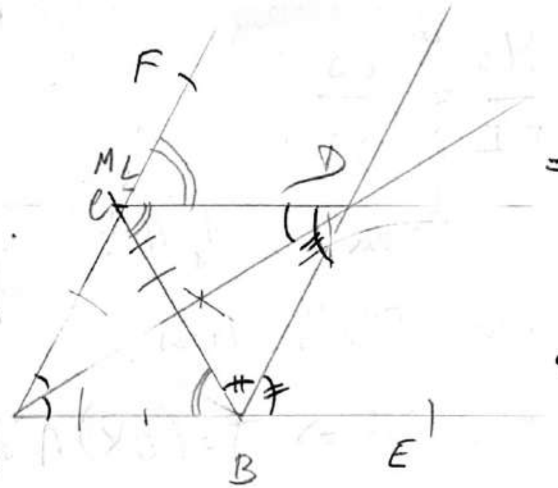
a)



dessin a

b) cas particulier où M coïncident & L.

$\triangle ABC$ isocèle en C.



dessin b

a) (DL) // (AB)

$\Rightarrow \sphericalangle LDA = \sphericalangle DAB$
(alternes - internes)

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAL$
(bissectrice AD)

$\Rightarrow \widehat{LAD} = \widehat{LDA}$

$\triangle$ isocèle ALD

$\Rightarrow LD = LA = 5$ (énoncé)

$\sphericalangle MDB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DBM$

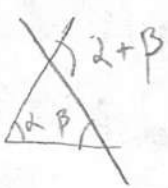
$\Rightarrow DM = MB = 7$ (énoncé

$\triangle$ DMB

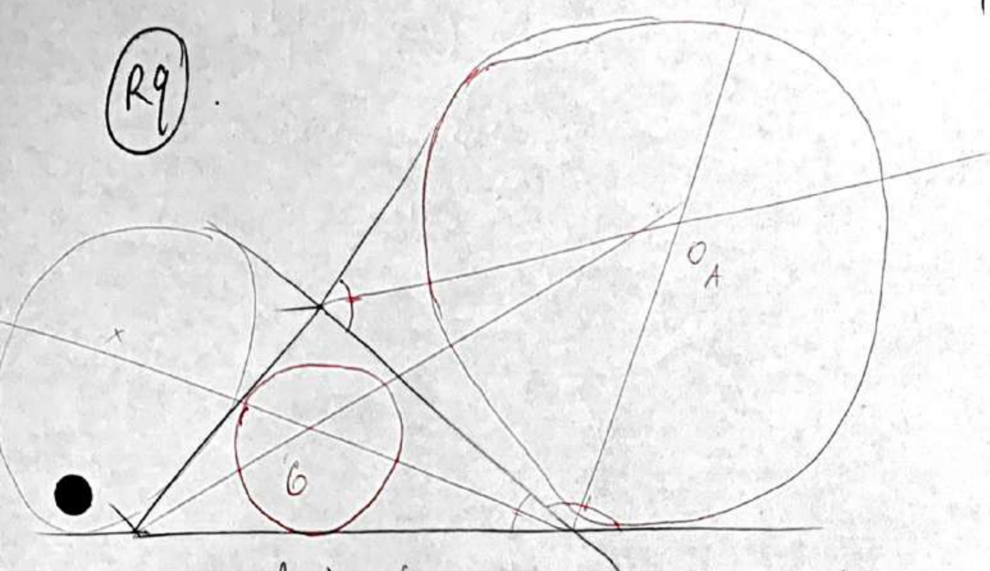
Ainsi $ML = MD - LD = 7 - 5 = 2$.

a $\square$

& argument



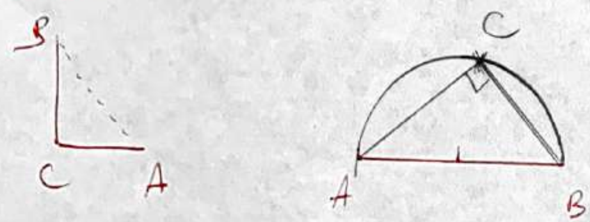
Rq .



cercle inscrit — cercle exinscrit

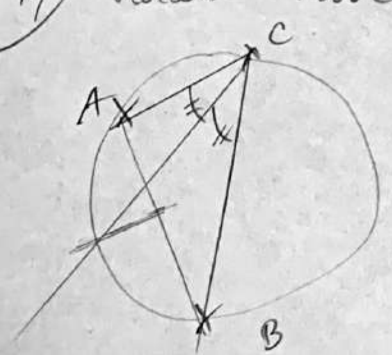
Rq Pr dessiner ABC rectangle en C.

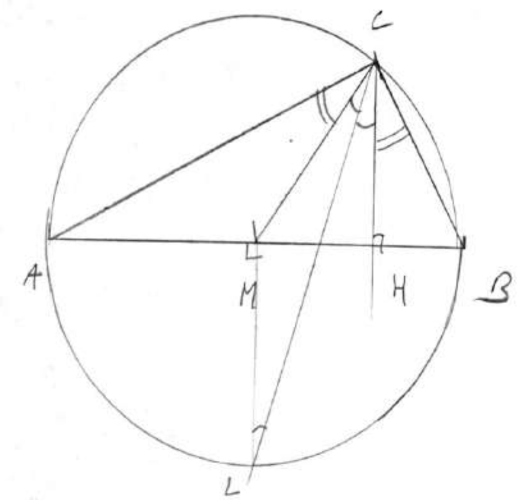
2 choix :



•

Rq Tracer bissectrice de $\measuredangle$ CP





$\boxed{\text{M I}}$

c) comme CL bissectrice $\Rightarrow \overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{LB} \Rightarrow ML$ médiatrice de $[AB]$

$L \in \mathcal{C}$ circonscrit à ΔABC

$ML \,//\, CM \Rightarrow \measuredangle MLC = \measuredangle LCH$.

comme ΔACB rectangle en $C \Rightarrow M$ centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ΔABC

$\Rightarrow ML = MC \Rightarrow \measuredangle MCL = \measuredangle MLC$.

$\Rightarrow \measuredangle LCM = \measuredangle MCL \Rightarrow CL$ bissectrice de MCH.

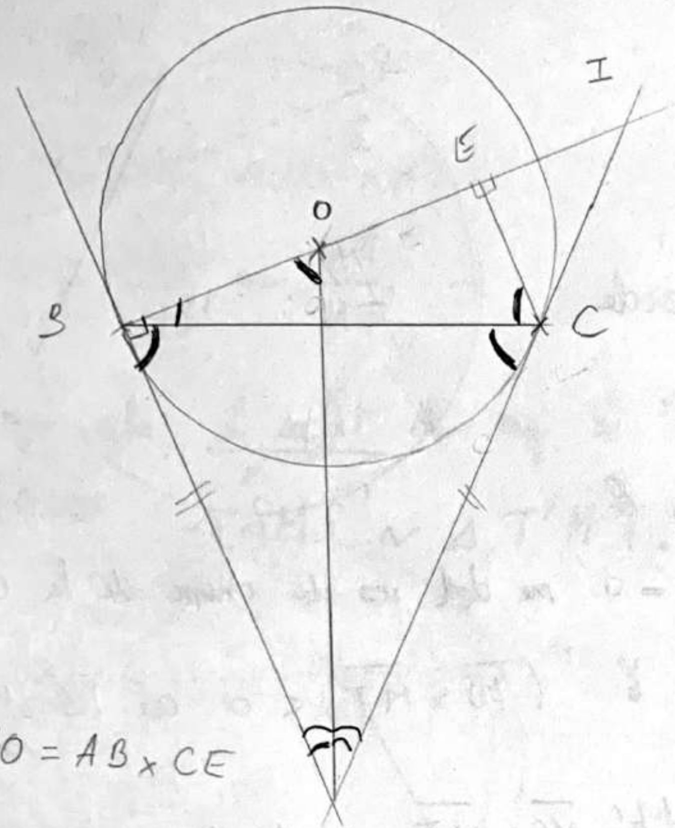
$\boxed{\text{M II}}$ M centre de $C \Rightarrow \measuredangle MCA = \measuredangle MAC \quad (MA = MC = R)$

$\measuredangle MCA = \measuredangle BAC = \frac{\pi}{2} - \measuredangle ABC = \measuredangle HCB$

ΔABC rectangle ΔHCB

Angles ▸ Cercles.

Ex 7



Ainsi ? Thalès ? Sinus ?

mq $BE \times BO = AB \times CE$

Indic $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{OB}$

$\Updownarrow$? car $\sphericalangle BEC = \dfrac{\pi}{2} = \sphericalangle ABO$

$\triangle BEC \sim \triangle ABO$ (triangles rectangles)

$\Updownarrow$

$\sphericalangle EBC = \sphericalangle BAO$

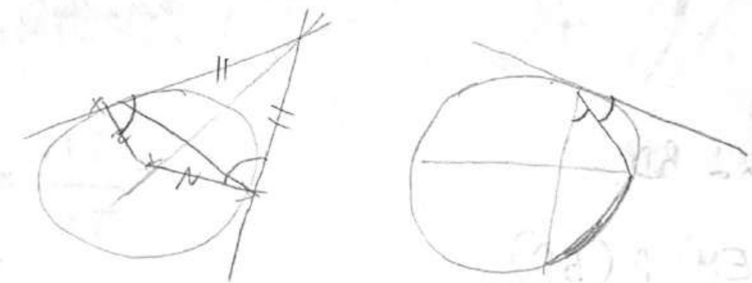
(TH) $\triangle$ st semblables ssi

→ $a:b = c:d$ et une mesure angle égales

→ 2 mesures angles égales

→

(R9)



→ $\sphericalangle AOB = \dfrac{1}{2} \sphericalangle \widehat{BOC} = \dfrac{1}{2} \widehat{BC}$ $\quad$ ($\sphericalangle BOC = \widehat{BC}$) ↑ centre

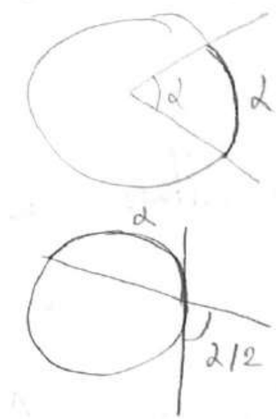
$\sphericalangle ECB = \sphericalangle CBA = \dfrac{1}{2} \widehat{BC}$ car $\mathcal{B}(O, OB)$

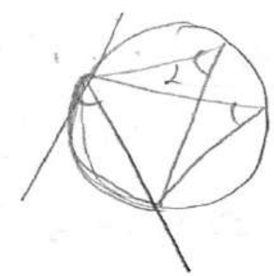
↑ angles alternes / internes

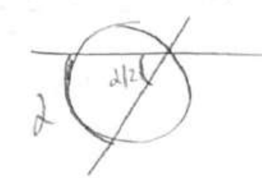
$CE \perp OB \perp AB \Rightarrow CE \parallel AB$

Ainsi $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ECB$

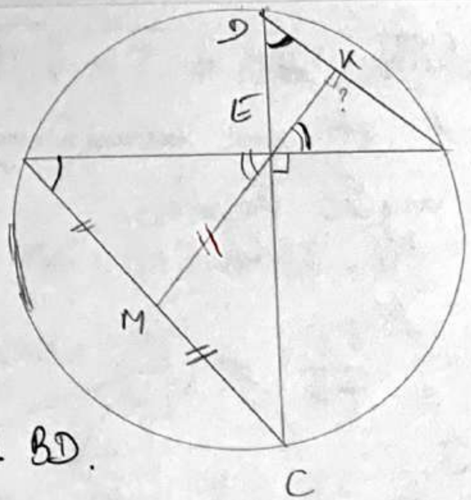
◁







Ex 8



mq EM et EK coincident.

on cherche à mq $EK \perp BD$.

où $K = (EM) \cap (BD)$

$AM = MC$.

On cherche à dmq $\measuredangle BDE = \measuredangle KEB$

car si c'est le cas $\measuredangle KEB + \measuredangle KBE$

$= \measuredangle BDE + \measuredangle DBE = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs $\measuredangle KEB = \measuredangle AEM$ (opposés)

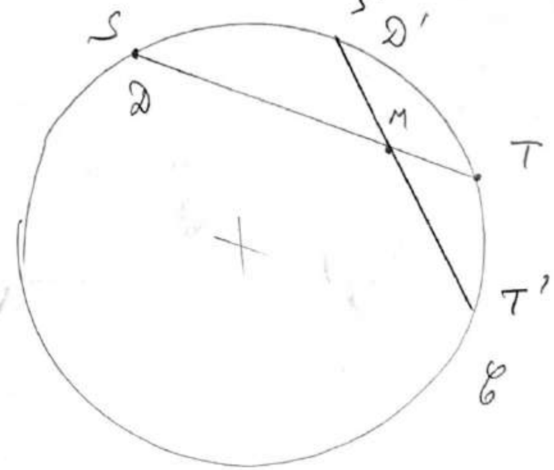
$\measuredangle BDC = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \measuredangle BAC$

Et comme ΔAEC (rectangle en E) $\Rightarrow$ M centre du cercle circonscrit de $\Delta AEC \Rightarrow MA = ME$ $(= MC)$

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MEA}$.

(Réciproq: ACBD st cocycliqs)

⚠ Inverser le sens de rédacθ.



Ex 9

a) $\overline{MS} \times \overline{MT}$

(< 0 si M ds le cercle

1° cas| M sur $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = 0$ ne dpd pas du choix de la droite $\mathcal{D}$.

2° cas| M dans $\mathcal{C}$. ($\overline{MS} \times \overline{MT} < 0$ car $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{MT}$ de sens opposés)

a) Mq quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dpd pas choix droite $\mathcal{D}$

→ le principe est de prendre 2 droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$,

$\mathcal{D}, \mathcal{D}' \ni M$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{S, T\}$

$\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}' = \{S', T'\}$.

$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = \overline{MS'} \times \overline{MT'}$.

$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = \overline{MS'} \times \overline{MT'} = MS \times MT = MS' \times MT'$

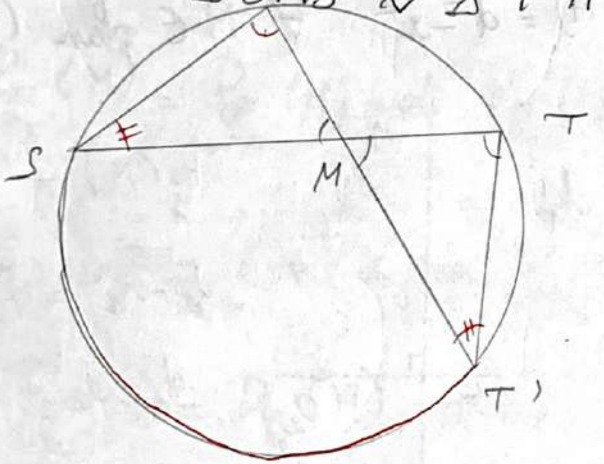
$\hat{o}$ $\hat{o}$

mq $MS \times MT = MS' \times MT'$.

- Aires
- Rapport
↓
Δ semblables

$\Leftrightarrow \dfrac{MS}{MS'} = \dfrac{MT'}{MT}$

- Pr mq cela, il suffit de mq les triangles semblables $\Delta SMS' \sim \Delta T'MT$.



- et il faut car $\sphericalangle SMS' = \sphericalangle T'MT$ ε opposés.

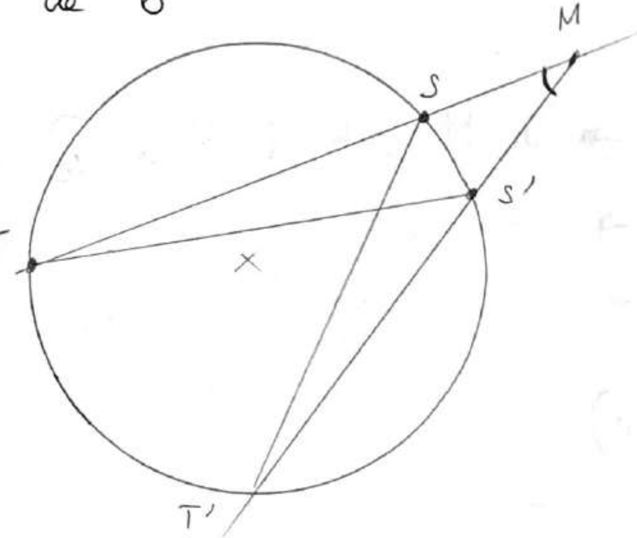
De plus comme $\sphericalangle SS'T' = \frac{1}{2}\, \widehat{ST'} = \sphericalangle STT'$

$\Rightarrow$ les Δ st semblables.

3e cas M hors de $\mathcal{C}$

$\overline{MS} \times \overline{MT} > 0$

M1



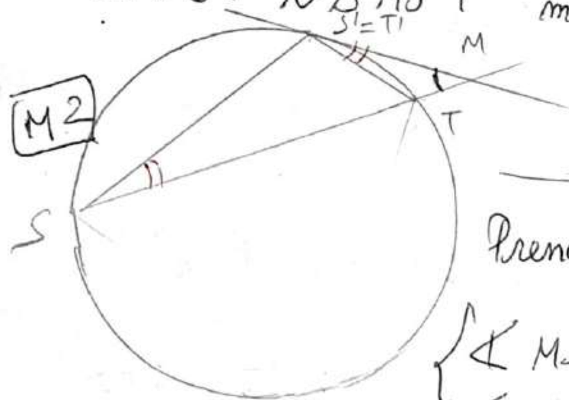
Il faut que l'on mq $MS \times MT = MS' \times MT'$

$\Leftrightarrow \dfrac{MS}{MS'} = \dfrac{MT'}{MT}$

$\Leftarrow \Delta MST' \sim \Delta MS'T$ mais $\sphericalangle SMT' = \sphericalangle S'MT$

$\sphericalangle MTS' = \frac{1}{2}\, \widehat{SS'} = \sphericalangle MT'S$

M2

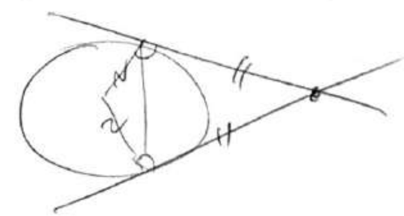


Prendre $\mathcal{D}'$ tangente à $S' = T'$

$\begin{cases} \sphericalangle MSS' = \frac{1}{2}\, \widehat{S'T} = \sphericalangle MT'T \\ \sphericalangle M \text{ commun} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MTT' \sim \Delta MS'S$

R9



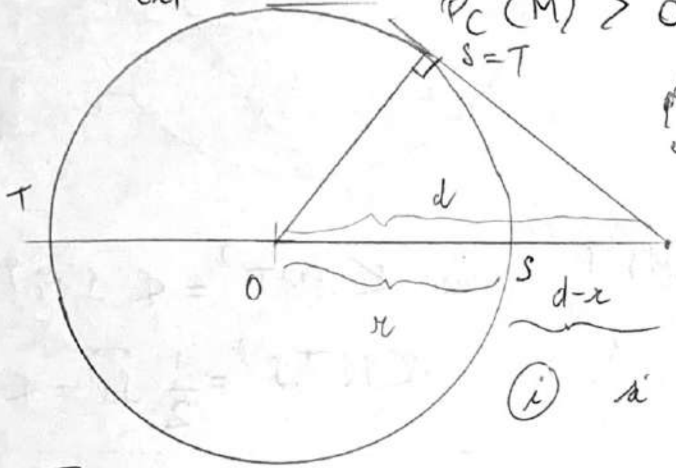
b)

→ Si M int à $\mathcal{C}$ à $P_C(M) < 0$

→ — sur — $P_C(M) = 0$

→ — ext — $P_C(M) > 0$.

c)



pᵒ exprimer en f r & d.

(i) si M ext $\mathcal{C}$.

$\boxed{M1}$ $\overline{MS} \times \overline{MT} = MS.MT = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$

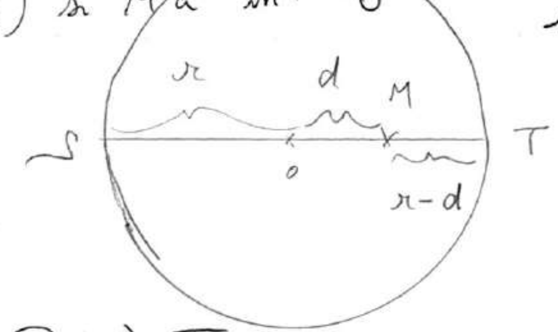
$\boxed{M2}$ soit $\mathcal{D}$ tangente $S=T$, $\overline{MS} \times \overline{MT} = MT^2$

par pythagore $MT^2 = MO^2 - OT^2 = d^2 - r^2$

(ii) si $M \in \mathcal{C}$ $\quad d = r$

$P_C(M) = 0 = d^2 - r^2$.

(iii) si M à int $\mathcal{C}$

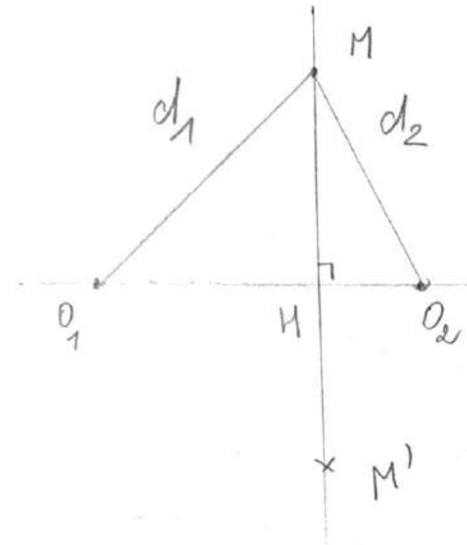


soi $\mathcal{D}$ le diamètre $\mathcal{D} \ni O, M$.

$$P_C(M) = \overline{MS} \times \overline{MT} = -MS \times MT = -(r+d)(r-d)$$
$$= -(r^2 - d^2)$$
$$= d^2 - r^2.$$

Ainsi $P_{\mathcal{C}}(M) = d^2 - r^2 \quad \forall M \in$ plan $(\mathbb{R}^2)$

d)



$$P_{\mathcal{C}_1}(M) \overset{?}{=} P_{\mathcal{C}_2}(M)$$
$$\shortparallel$$
$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$
$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{cte}$$

soit M un point et H la projec° orthogonale de M sur (O_1O_2).

$$d_1^2 = O_1H^2 + MH^2 = MO_1^2$$

$$d_2^2 = MO_2^2 = MH^2 + O_2H^2$$

- $\Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = HO_1^2 - HO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$

$$(HO_1 - HO_2)(HO_1 + HO_2).$$

$\rightarrow$ si $P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M)$ et $P_{\mathcal{C}_1}(M') = P_{\mathcal{C}_2}(M')$

$$\Updownarrow$$

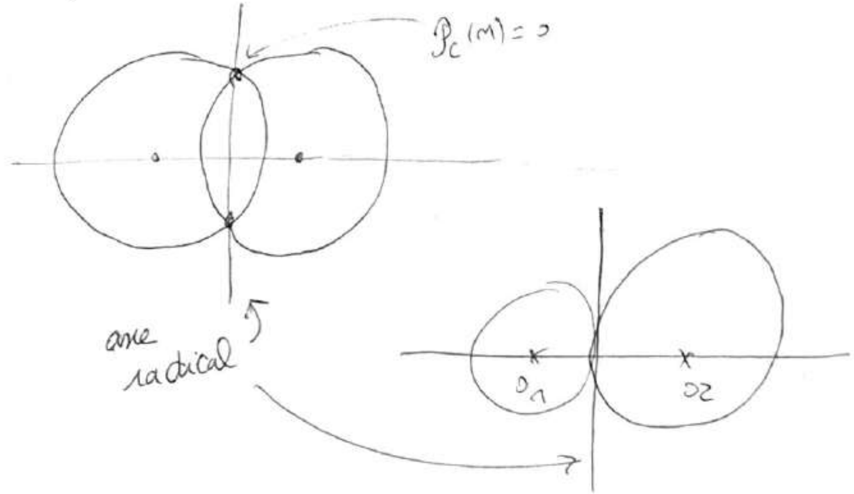
la $proj_{O_1O_2}(M) = proj_{O_1O_2}(M')$

$\Rightarrow P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M) =$ droite $\perp O_1O_2$.

- q passe par un point $H \in O_1O_2$ tq

$$HO_1^2 - HO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

e) Rq si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.



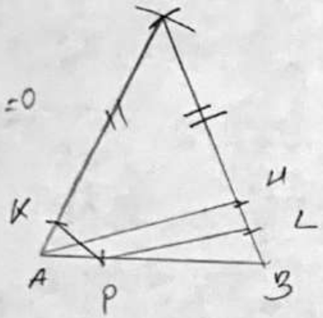
TD4 soit ΔABC isocèle en C, un point $P \in (AB)$ Déterminer longueur AH en f distances PK et PL de P à (CA) et (CB) resp.

1° cas

$\Rightarrow AH = PL$, $AA = 0$

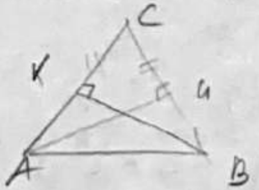
$(\neq PK)$

$(\max\{PL, PK\})$



2° cas

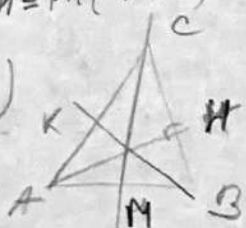
$P = B \Rightarrow PK = BK$ hauteur



$AH = BK$ car BB

$AH = PK$ ($\neq P$)

$(CA = CB)$



$\boxed{M1}$

CH = médiane
= hauteur
= bissectrice $\hat{C}$
= médiatrice de (AB)
= axe de sym de ΔABC

$S_{CH}(C) = C$

$S_{CH}(A) = B$, $S_{CH}(B) = A$

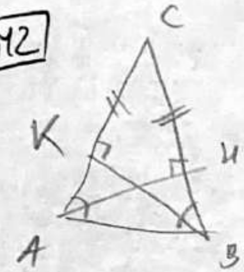
Ainsi $\hat{c}$ les symétries préservent les angles.

$\Rightarrow$ hauteur de A vers (BC) ie AH

son hauteur de $\underset{B}{\underset{\shortparallel}{S_{CH}(A)}}$ vers $\underset{AC}{\underset{\shortparallel}{S_{CK}(BC)}}$

$\Rightarrow H \xrightarrow{S_{CK}} K$

$\boxed{M2}$



$AC = CB \Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle ABC$.

$\Delta ABK = \Delta BAH$ car:

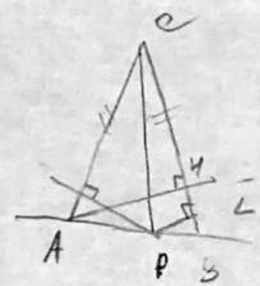
- AB commun
- $\measuredangle K = \measuredangle H = \frac{\pi}{2}$
- $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$

$\Rightarrow BK = AH$

$\boxed{M3}$

$BH \cdot CA = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = AH \cdot CB$

3° cas



$P \in [AB]$

$\boxed{M1}$ $\mathcal{A}_{CPB} + \mathcal{A}_{CPA} = \mathcal{A}_{ABC}$

$$\frac{PL \cdot CB}{2} + \frac{PK \cdot CA}{2} = \frac{AH \cdot CB}{2} \quad (CA = CB)$$

$$PL + PK = AH.$$

$\boxed{M2}$ • Par Thalès : $\dfrac{PL}{AH} = \dfrac{BP}{PA}$? B.

• $\triangle PBL \sim \triangle PAK$ car rectangles + $\underbrace{\sphericalangle A = \sphericalangle B}_{\text{car } CA = CB.}$

$\Longrightarrow$ dc semblables.

$\Rightarrow \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{PL}{PK}$

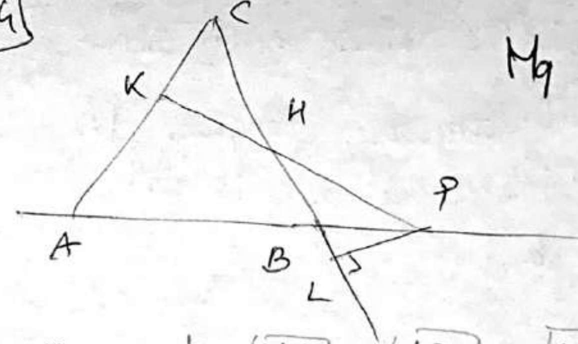
et $AH = \dfrac{PA \cdot PL}{BP}$.

$\dfrac{PL}{AH} = \dfrac{PL}{PK}$

$AH = \dfrac{PK \cdot PL}{PL} = PK.$

☹

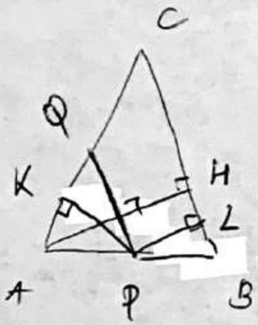
cas 4)



Mq $AH = PK - PL$

mq ϕ $\boxed{M1}$ $\boxed{M2}$ $\boxed{M3}$.

$\boxed{M3}$



$(PQ) \parallel (BC)$

$PL = MH$ (à justif)

+ $PK = AM$ (à justif)

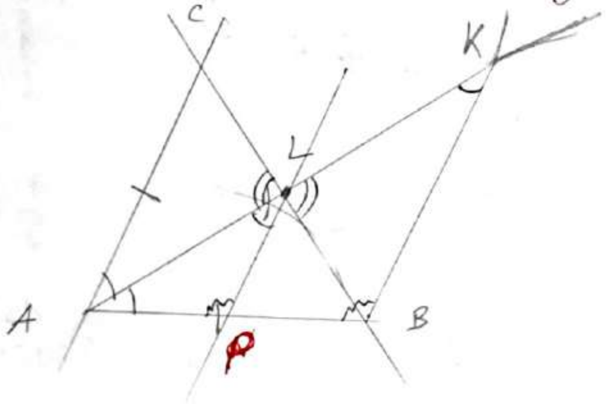
$PL + PK = AM + MH = AH$

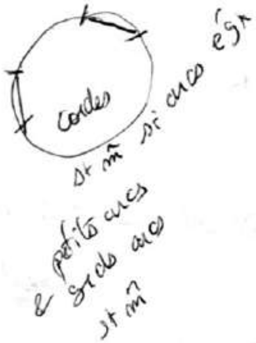
ccl/

$AH = \begin{cases} PK + PL & \text{si } P \in [AB] \\ PK - PL & \text{si } P \notin [BA) \iff B \in [AP] \\ PL - PK & \text{si } P \notin [AB) \iff A \in [BP] \end{cases}$

Ex 2 (Bissectrices & longueurs)

Tracer droites //.





a) Mq $AB : AC = LB : LC$.

soit $K \in AL$, $(BK) \parallel (AC)$

$\measuredangle CAK = \measuredangle AKB$ (*)

$\parallel$

$\measuredangle BAK =$

$\Rightarrow BA = BK$

De plus $\measuredangle BLK = \measuredangle CLA$ (opposé)

$+ (*) \Rightarrow \triangle KLB \sim \triangle ALC$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BK}{CA}, \quad BK = AB$$

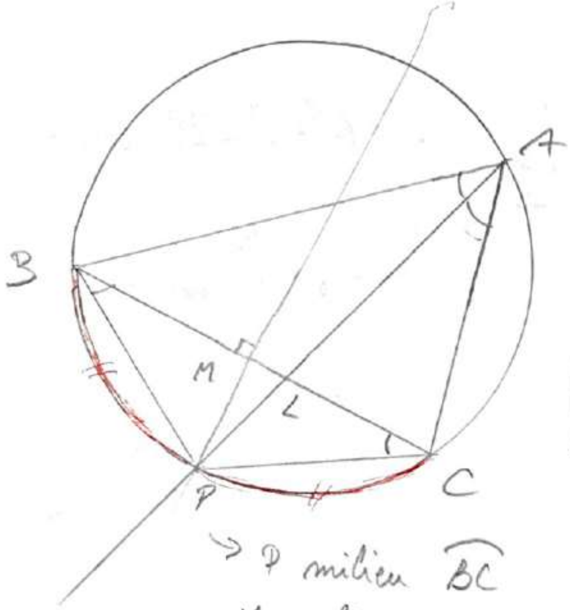
$\Rightarrow BL : LC = BK : AC$

$LB : LC = AB : AC$

Rq de façon similaire, on pt dmq m̂ chose (LP) // (A)

b) Mq bissectrice AL coupe cercle circonscrit en un point P q est sur la médiatrice de [BC].

⚠



→ P milieu $\overset{\frown}{BC}$

M milieu [BC]

do cercle circonscrit bissectrice ∩ médiatrice

Idée est P $\frac{1}{2}$ de $\overset{\frown}{BC}$ ∈ AL et ∈ médiatrice de [BC]

$\measuredangle CAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PC} = \measuredangle CBP$.

bissectrice

$\measuredangle PAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BP} = \measuredangle PCB$

⚠ orientaᵒ des angles. $\Rightarrow \triangle BPC$ isocèle.

si M milieu de BC $\Rightarrow MP \perp BC$ (car médiane = hauteur = médiatrice = bissectrice)

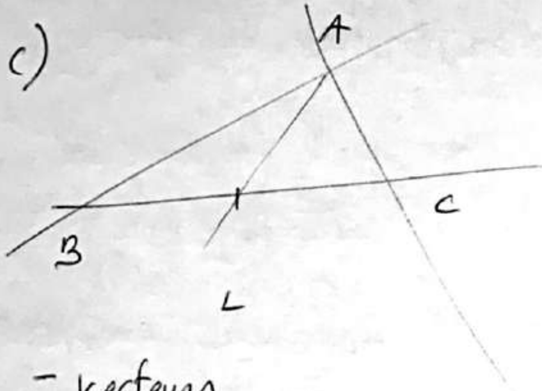
$\Rightarrow$ MP médiatrice de [BC] $\Rightarrow$ P est le point de l'énoncé.

Par constructᵒ $P \in \mathcal{C}_{\triangle ABC}$

on a pris $P = AL \cap \mathcal{C}_{\triangle ABC}$

1

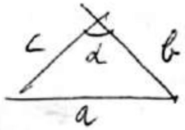
c)



à mq

$$\boxed{AL^2 = AB \times AC - LB \times LC.}$$

- vecteurs
- Al-Kashi

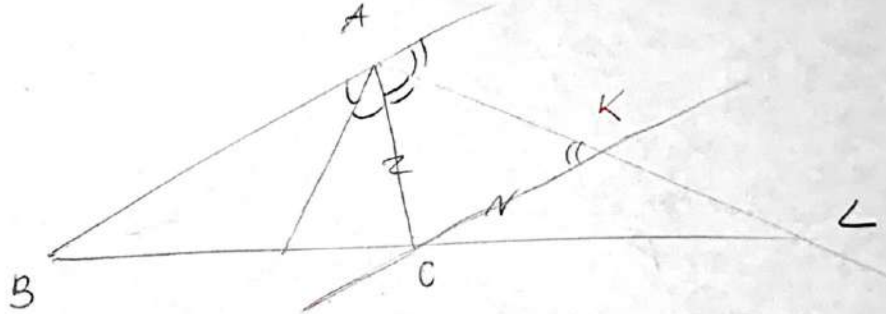


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

DM of scalaires
$\vec{c}\cdot\vec{b} = 2bc\cos(\alpha)$.

- rapports ℓ figures a)

d) Mq a) est vrai aussi pr L pied de bissectrice ext. issue de A.



$$\frac{LC}{LB} = \frac{CK}{AB} = \frac{AC}{AB}.$$ ∮ Δ isocèle

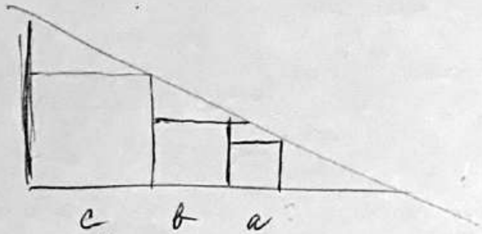
thalès

biss int ⊥ biss ext.

constr° //

in fine

Ex3



à dma

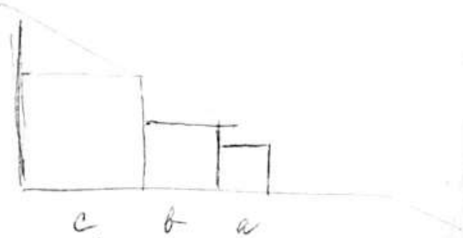
$c = 36 \qquad a = 16$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

homothéties

$$b = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

Ex3



à dmq

$c = 36$, b, $a = 16$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

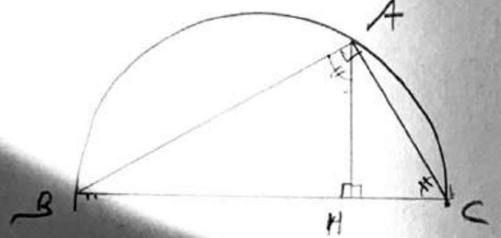
homothéties

$b = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$

$b = \sqrt{a.c}$

$\boxed{\text{Dans un triangle}}$

Ex2



mq $BA^2 = BH.BC$

↳ Aires?

↳ Thalès? △ semblables?

$BA^2 = BH.BC \Leftrightarrow \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$

$\Leftarrow \triangle ABH \sim \triangle CBA$

$\Leftarrow \begin{cases} \sphericalangle ABH = \sphericalangle ABC & \text{commun} \\ \sphericalangle AHB = \sphericalangle CAB = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

kathète^2 ~~au~~ = pie$_1$ sgmt au pied haut^r × pie$_2$ sgmt au pied haut^r

mq $CA^2 = CH.CB$.

comme B et C jouent m̂ rôle

⇒ (cf m̂ $\boxed{M}$ en échangent B et C)

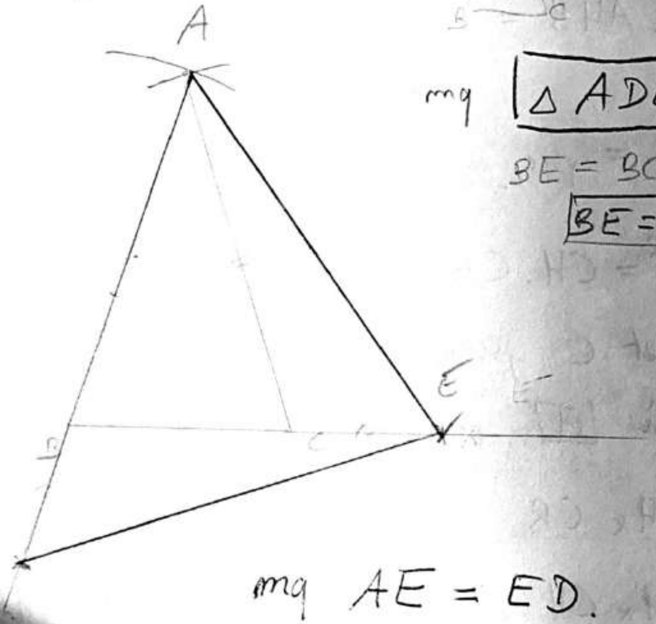
$CA^2 = CH \times CB$

$AH^2 = BH \times CH \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Leftrightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA$

$\Leftarrow \sphericalangle AHB = \sphericalangle CHA = \frac{\pi}{2}$

De plus $\underset{\uparrow \triangle ABC}{\sphericalangle ACH =} \frac{\pi}{2} - \underset{\uparrow \triangle AHB}{\widehat{ABC}} = \sphericalangle BAH$

Ex 10 Triangle isocèle



mq $\boxed{\Delta ADE \text{ isocèle}}$

$BE = BC + AB - BC$

$\boxed{BE = AB}$

mq $AE = ED$.

$\boxed{M}$ dmq Δ isocèle $\rightarrow$ 2 triangles égaux ?

$\Delta DBE \cong \Delta ECA$ car $BD = CE$ (d'après énoncé

$BE = AB = CA$

(R) $\uparrow$ isocèle ΔABC

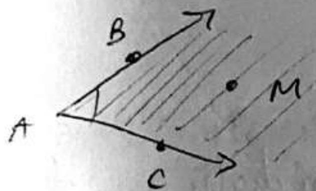
angles & 2 côtés adjacents idtqs

$\measuredangle DBE = \pi - \widehat{ABC} = \pi - \widehat{ACB} = \measuredangle ACE$

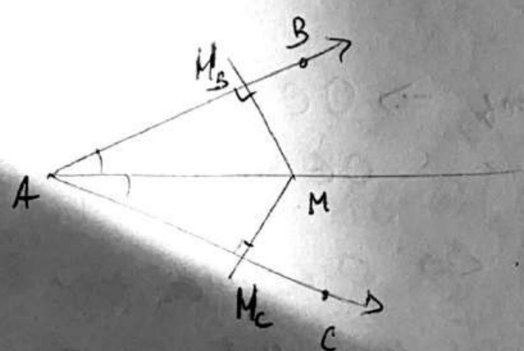
Ex 11 (Pts remarquables de le triangle)

soit ΔABC non dégénéré.

Lemme $M \in \sphericalangle([AB),[AC))$



$d(M,(AB)) = d(M,(AC))$ ssi $M \in$ bissectrice de $\sphericalangle BAC$.



- ΔAMH_B & ΔAMH_C st rectangles 4 m̂ hypothénuses AM..

Ainsi $\Delta AMH_B = \Delta AMH_C$

$\Updownarrow$

$\sphericalangle H_BBM = \sphericalangle MAH_C$

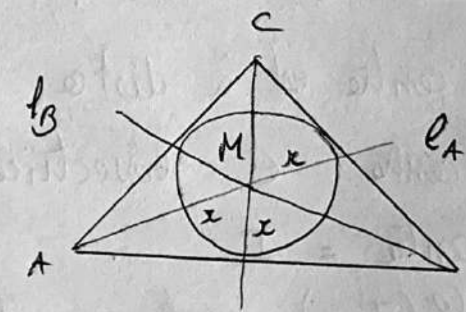
(2 angles + 1 longueur les m̂s)

$\Updownarrow$

$MH_B = MH_C$

(par pythagore $AH_C = AH_B$)

a) Mq 3 bissectrices st concourantes.



$M = I$

"

intérieur

soit ℓ_A la bissectrice int $\sphericalangle A$

ℓ_B $\sphericalangle B$

ℓ_C $\sphericalangle C$

soit $M = \ell_A \cap \ell_B \Rightarrow d(M,(AB)) = d(M,AC))$ ($M \in \ell_A$)

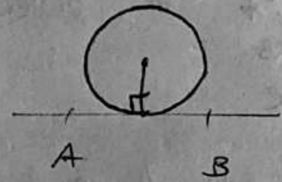
$d(M,(AB)) = d(M,(BC))$ ($M \in \ell_B$)

$\Rightarrow d(M,(AC)) = d(M,(BC))$ et comme $M \in$ int. du ΔABC

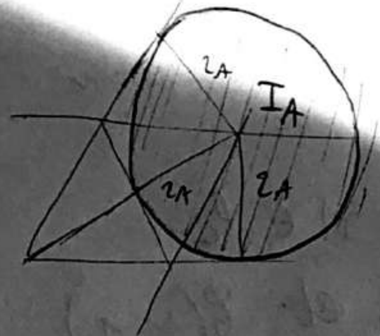
$\Rightarrow M \in \sphericalangle ACB \Rightarrow M \in \ell_C$.

Ainsi $\ell_A \cap \ell_B \cap \ell_C = \{M\}$ et $\mathscr{C}(M,r)$ tangent aux côtés

si $\mathcal{C}$ un cercle à l'int de ABC q est tangent ax côtés ⇒ centre est à dist égale des côtés ⇒ centre ∈ bissectrices
⇒ centre = I
⇒ $\mathcal{C}(I, r)$ cercle en q°
car $r = d(I, (AB))$



b)

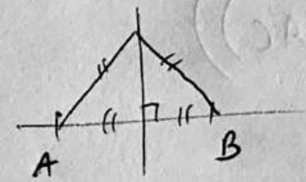


$\boxed{\text{cercle exinscrit}}$

m̂ démo a) HS 4 $I_A = \ell_B^{ext} \cap \ell_C^{ext}$

c) 3 médiatrices s st concourantes.

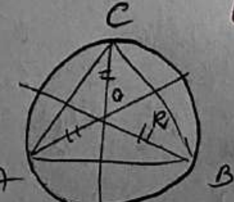
Lemme $MA = MB \iff M \in$ médiatrice de $[AB]$



soit m_a la médiatrice de $[BC]$
m_b ——— $[AC]$
m_c ——— $[AB]$

soit $O = m_a \cap m_b \Rightarrow O \in m_a \iff OB = OC$
$O \in m_b \iff OA = OC$
$\Rightarrow OA = OB \iff O \in m_c$.

Ainsi m_a, m_b, m_c se coupent en O (uniq) point à distance égale de A, B et C.
$R = OA = OB = OC$
Ainsi $\mathcal{C}(O, R) \supset A, B, C$
↑ cercle circonscrit



d) Mq médianes st concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle centre de gravité ou barycentre le point d'intersect°.

si G barycentre de $(A,1), (B,1), (C,1)$

$\Rightarrow$ G Barycentre de $(A,1)$ et $\left(\frac{B+C}{2}, 2\right)$

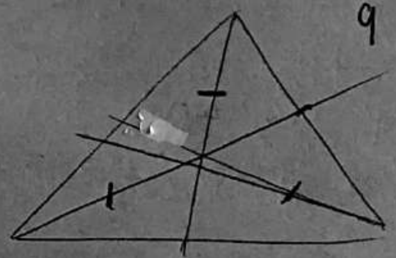
$\Rightarrow$ G médiane issue de A

et en plus $AG : GH_A = 2 : 1$.

de m̂ p 2 autres médianes.

$\Rightarrow$ les 3 médianes se rencontrent

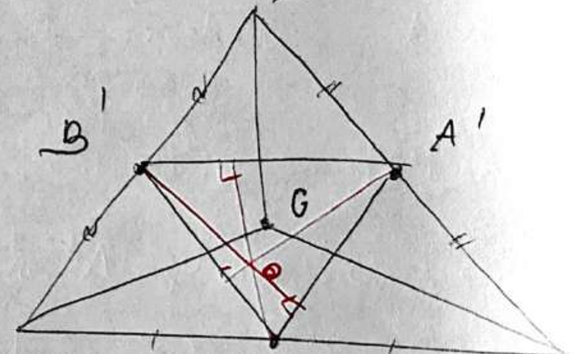
q. les coupent en rapport 2 : 1 du sommet.



e) Mq 3 hauteurs st concourantes. On appelle orthocentre le point d'intersect°.

f) Mq centre cercle circonscrit, l'orthocentre & le centre de gravité st alignés.

droite post 3 pts : droite d'Euler.



les médiatrices de ABC st les hauteurs $A'B'C'$

car $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \perp m_A$ passant par A'

$\Rightarrow$ comme $h_{G,-2}(A'B'C') = ABC \Rightarrow$ les hauteurs de $A'B'C'$ s'envoient s/ les hauteurs de ABC $\Rightarrow$ e) + f)

bissectrices distance égales côtés

médiane sommet

2:1, médianes

barycentre

orthocentre

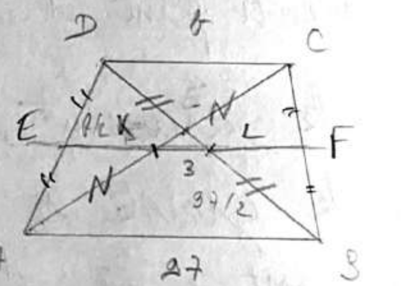
droite Euler

Ex 16

FF de Héron ? $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Quadrilatères

$p=\frac{a+b+c}{2}$



$\mathcal{D}$

$A_t = (B+h) \times 2h$

$\frac{1}{2} DA = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} DB$

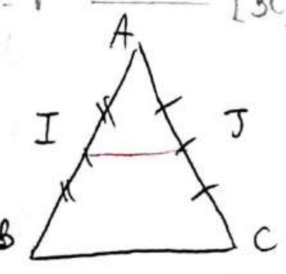
→ fournt points alignés sur droite

$\mathcal{D} = (KL)$: K $\frac{1}{2}$ de [AC]
L [BD].

Mq $\mathcal{D} \,//\, (AB) \,//\, (DC)$ et $\mathcal{D} \cap (AD) = E$ milieu de [AD]
$\mathcal{D} \cap (BC) = F$ —— [BC]

? trapèze

→ trouver droite milieu.



(TH) des milieux
Si un segment joint les milieux de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3° côté et sa longueur est égale à la $\frac{1}{2}$ de celle 3° côté!

c) Trouver longueur KL.

soit E, K, L, F les milieux de l'indication

EK // DC (Thalès / réciproq / (TH) des milieux) ΔACD
KF // AB —— ΔACB.

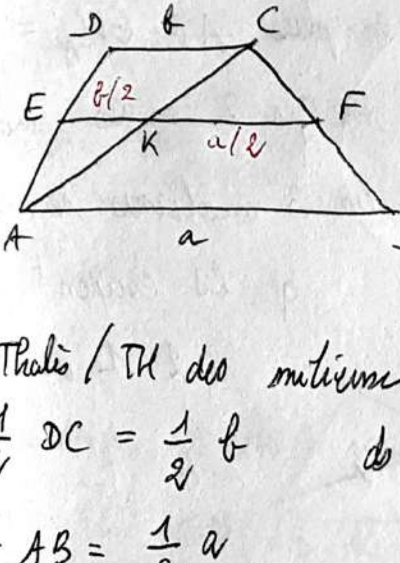
$\Rightarrow EK \,//\, KF$ $(\underbrace{//AB//DC}_{\text{trapèze}})$ $\Rightarrow$ E, K, F alignés $(EK)=(KF)$

$(FL) \,//\, (DC)$ de $\Delta DBC \Rightarrow (FL) \,//\, (EKF)$

$\Rightarrow (FL) = (EKF)$.

Ainsi E, K, L, F alignés sur droite $\mathcal{D}$ // AB // CD.

Indication



EK = ?
KF = ?

D'après Thalès / TH des milieux :

$EK = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} b$ de ΔDAC

$KF \;\; \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$ ΔACB

$EF = \frac{b}{2} + 3 + LF$

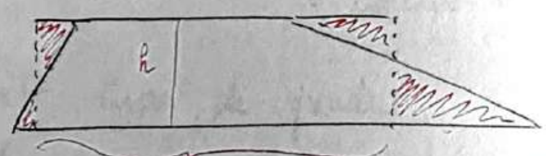
Ainsi $EK = \frac{1}{2} b$, $FL = \frac{1}{2} b$ (dans $\triangle BCD$).

$KL = KF - FL = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \boxed{\frac{a-b}{2}}$

$EF = \frac{a+b}{2}$

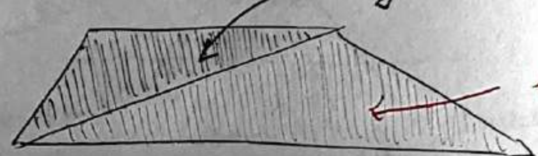
$\Rightarrow b = 97 - 2 \times 3 = \underline{91}$.

$EF = \frac{91+97}{2} = 94$.



$\frac{a+b}{2}$ $\quad A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$

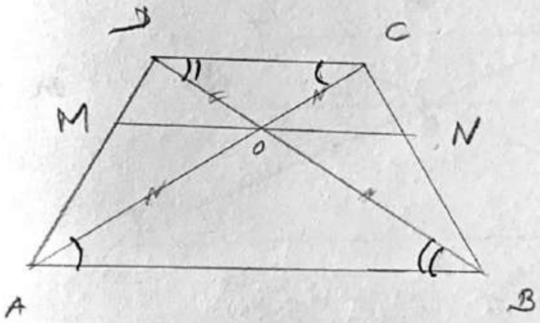
$h \frac{b}{2} = A_1$



$h \frac{a}{2} = A_2$

$A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Ex 17



1) Mq O milieu [MN].

on sait que (MN) // (AB) // (DC)

$MO = DC \times \frac{AO}{AC}$ (Thalès ds $\triangle ACD$)

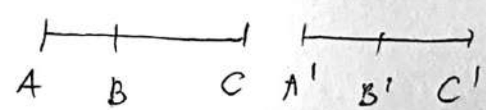
$ON = DC \times \frac{BO}{BD}$

Ainsi $\boxed{MO = ON}$ $\underline{\underline{ssi}}$ $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{BD}{BO}$

$\Leftrightarrow \frac{AO+OC}{AO} = \frac{BO+OD}{BO} \Leftrightarrow 1 + \frac{OC}{AO} = 1 + \frac{OD}{BO}$

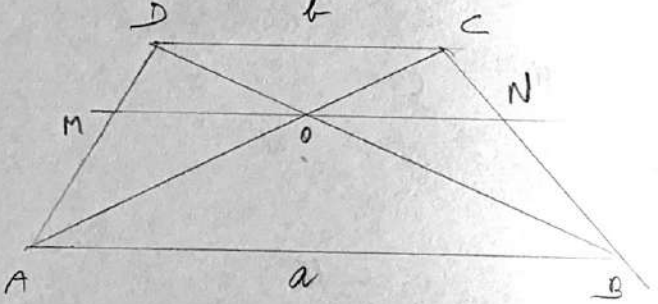
D'après Thalès, on a $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (angles id(q))

Rq $(\overline{AB} : \overline{BC}) = (\overline{A'B'} : \overline{B'C'}) \Leftrightarrow (\overline{AB} : \overline{AC}) = (\overline{A'B'} : \overline{A'C'})$



$\Leftrightarrow (\overline{AC} : \overline{BC}) = (\overline{A'C'} : \overline{B'C'})$

b) Indice : Déterminer longueur $OM = ON' = \frac{1}{2} MN$ c) Somme max ? $d(O,(AD)) + d(O,(CB))$



en f a, b

$$OM = b \cdot \frac{AO}{AC} \quad \text{et comme} \quad \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$$

car Thalès ou $\Delta OAB \sim \Delta OCD$.

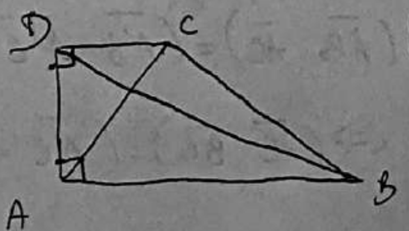
$$OM = b \frac{1}{\frac{AC}{AO}} = b \cdot \frac{1}{\frac{AO+OC}{AO}} = b \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\rightarrow MN = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$$ ← produit des bases ← segment des milieux

qo : $d_{max}(O,(AD))$?

$d(O,(AD)) \leq OM = \frac{ab}{a+b}$ ssi $OM \perp (AD)$

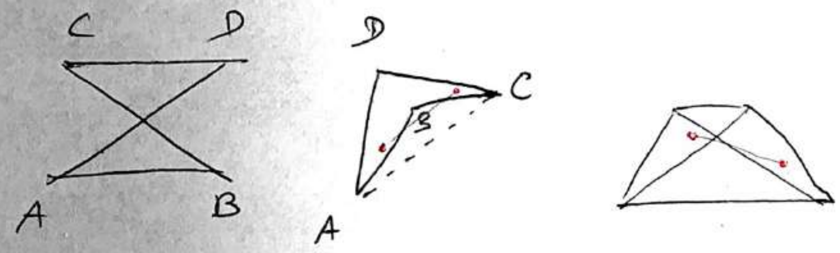
$\parallel$ AB $\parallel$ CD



trapèze rectangle.

Ex 19 (Parallélogrammes)

a) quadrilatère ABCD est convexe

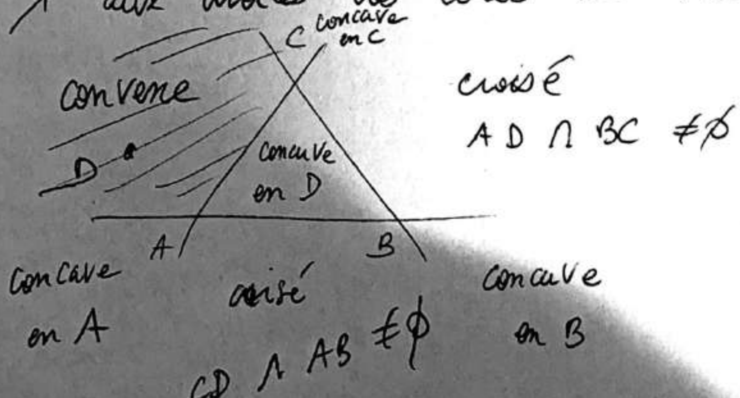


croisé

A non convexe
("concave en B")

convexe

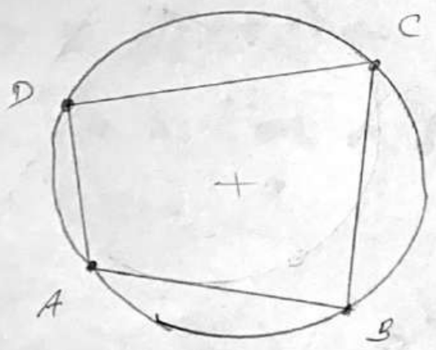
c'est type de quadril. en f position de D
p/r aux droites des côtés de ABC.



si D dans /// : $DB \cap CA = \emptyset$

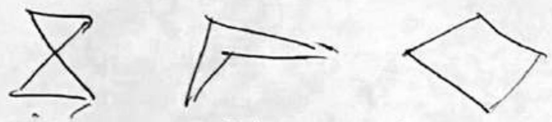
Ex 20

soit ABCD un quadri non croisé,



a) Mq si ABCD est inscrit ds cercle => ABCD est convexe.
(et ses diag. se coupent en un point)

∃ 3 types quad.

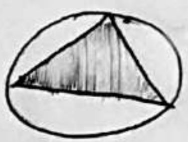


croisés — concave — convexe <=> diago se croisent.

↑ exclus d'après l'énoncé

↑ ne pt pas ê inscrit

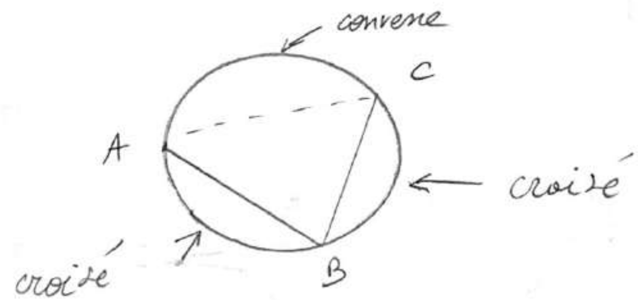
car le cercle circonscrit d'un triangle n'a pas de point à l'intérieur du triangle.



dc le 4° point ne pt pas ê à l'int du triangle & sur le cercle en m̂ tps.

Ceci termine la q° car si ABCD non croisé, non concave => convexe <=> diag se coupent.

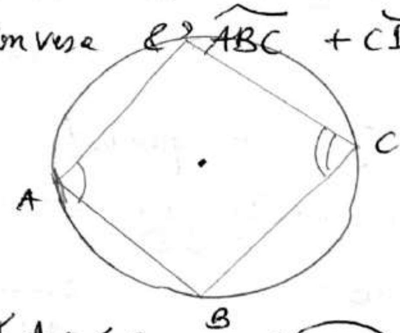
Observat°



b) Mq ASSE.

(i) ABCD inscrit ds cercle

(ii) ABCD convexe & $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ (resp)



Mq (i) => (ii)

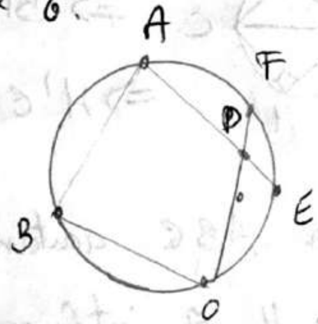
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle A = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BCD} \\ \measuredangle C = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BAD} \end{array}\right\} \measuredangle A + \measuredangle C = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAB}\right) = \frac{1}{2}\, 2\pi = \pi$$

Mq (ii) => (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

si $D \notin \mathscr{C}(A,B,C) \leftarrow$ cercle q̇ passe par A, B, C.

<u>1^e cas</u> : $\hookrightarrow$ D à l'int. de $\mathscr{C}$.



$\measuredangle B + \measuredangle D =$

$= \frac{1}{2}\widehat{CEA}$

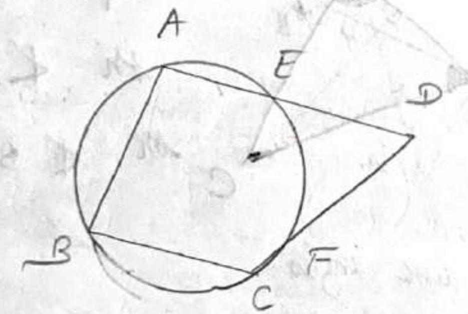
$+ \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{EF}\right)$.

$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\widehat{CEA} + \widehat{ABC}\right)}_{2\pi} + \frac{1}{2}\widehat{EF} > \pi$

rentre ds cercle.

augmente q^{té}

<u>2° cas</u>



$\measuredangle B + \measuredangle D$

$= \frac{1}{2}\left(\widehat{CEA}\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} - \widehat{EF}\right)$

2π

$= \pi - \frac{1}{2}\widehat{EF} < \pi$

cl $D \in \mathscr{C}$

$\Leftrightarrow \measuredangle B + \measuredangle D = \pi$

$(\Leftrightarrow \measuredangle \qquad)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et

$AS \times SC = BS \times SD$

On p^t le refaire mais aussi voir cro a la puissance d'un point par rapport cercle.

$\Rightarrow AS.SC$ ne dép^d pas du choix de la Corde $[AC] \ni S$.

non i) $\Rightarrow$ non (iii) si $D \notin \mathscr{C}(A,B,C)$

soit $D' \in [SD) \cap \mathscr{C}$

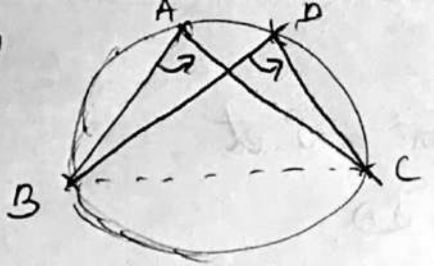
$\Rightarrow AS.SC = BS.SD'$

$\Rightarrow SD \neq SD' = \dfrac{AS.SC}{BS}$

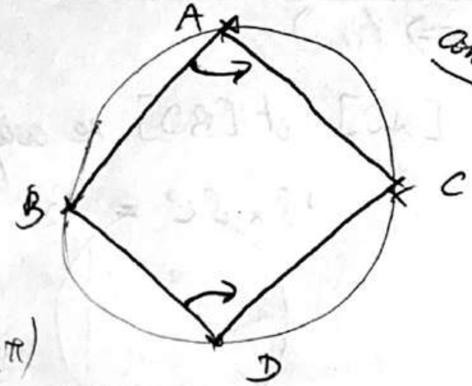
Ainsi (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

Rq

croisé



convexe



$\Downarrow$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \ (\text{mod } \pi)$$

$\uparrow$ orienté

$$\widehat{BAC} - \widehat{BDC} = \pm \pi$$

orienté

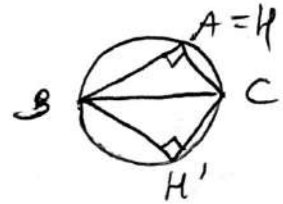
$$\widehat{BAC} = \pm\pi + \widehat{BDC}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \ (\text{mod } \pi).$$

→ Si 4 pts cycliqs.

on prd 2 pts → m̂ côté : égx ; → somme ṡt π, égx (mod π)

1er cas si ABC rectangle en A $\Rightarrow H = A$, BC diamètre.



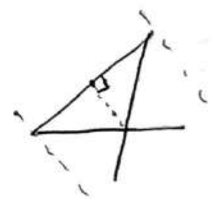
$\Rightarrow BH'C = BHC = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow H' \in \mathcal{C}$ (diam [BC]).

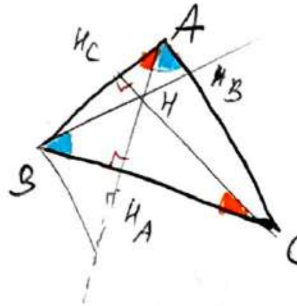
2e cas si ABC acutangle ($\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C < \frac{\pi}{2}$)

$\Leftrightarrow$ H $\in$ intérieur $\triangle ABC$

($\Leftrightarrow$ les 3 hauteurs st à l'int)



chasse aux Angles



Mq ABH'C st cocycliqs

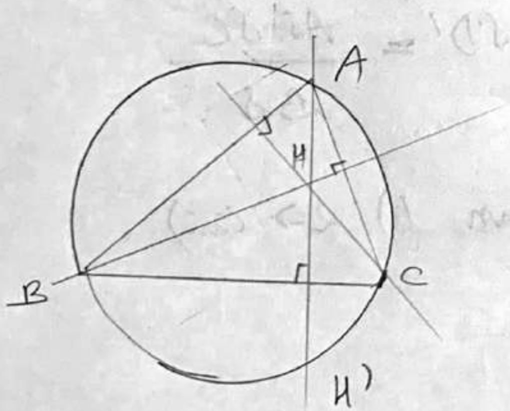
ssi $\measuredangle ABH' + \measuredangle ACH' = \pi$

ssi $\measuredangle BAC + \measuredangle BH'C = \pi$

$\measuredangle BH'C = \measuredangle BHC$

chasse aux angles

Ex21



$$\underbrace{\widehat{BAH}}_{\widehat{HCH_A}} + \underbrace{\widehat{HAC}}_{\widehat{HBH_A}} + \widehat{BHH_B} + \widehat{H_AH_C}$$

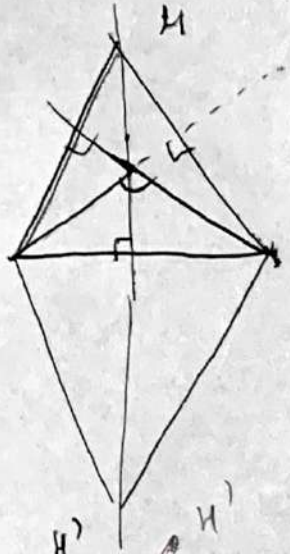
$\pi/2$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\pi/+2$

(35) Voir $\triangle HH_CA \sim \triangle HH_AC$

3° cas $\measuredangle A > \frac{\pi}{2}$



identiq au cas 2)
& H et A échangés.

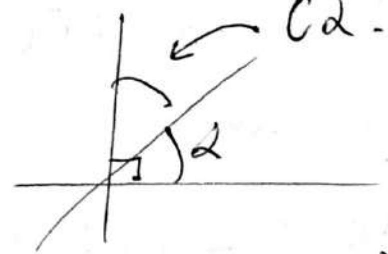
$H' \in \mathcal{C}(B,C,A)$
ssi $\measuredangle BAC = \measuredangle BH'C$

$\measuredangle BHC$ // ← sym

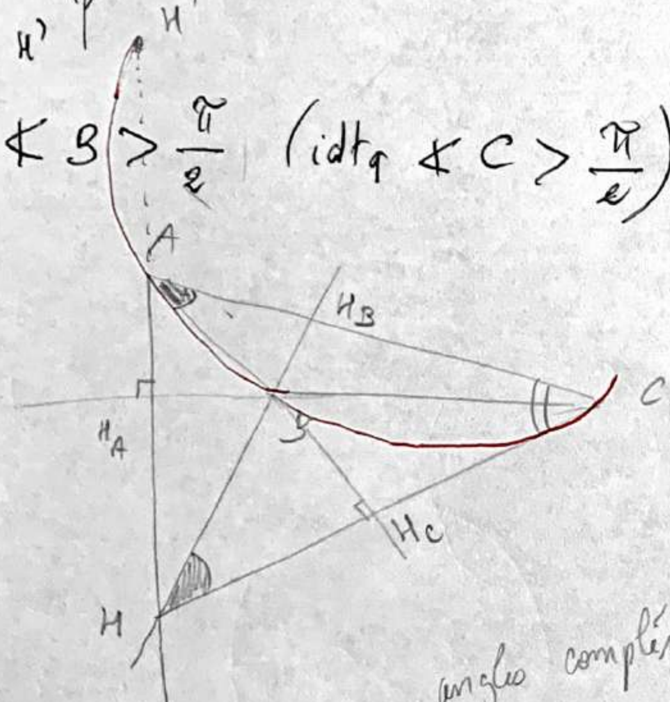
complémentaire à $\measuredangle ACH$.

dc "=" somme $\frac{\pi}{2}$

complément $C\alpha$.



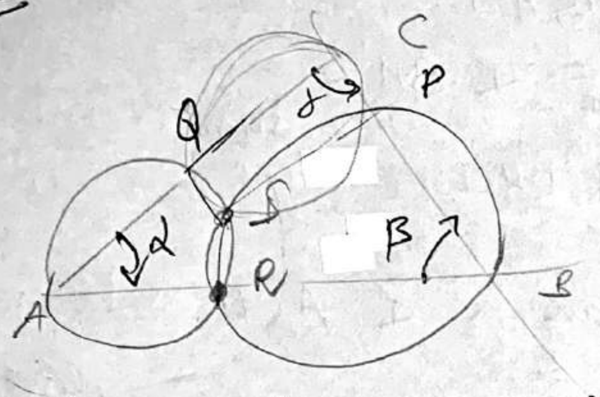
4° cas $\measuredangle B > \frac{\pi}{2}$ (idtq $\measuredangle C > \frac{\pi}{2}$)



angles complémentaires.

5° cas $\measuredangle B = \frac{\pi}{2}$ (resp C) $\Rightarrow$ $H = B = H' \in \mathcal{C}(A,B,C)$

Ex 22



soit $\mathscr{C}(A,R,Q) \cap \mathscr{C}(B,R,P) = \{R,S\}$
(non tangent)

angles orientés

$\measuredangle QAR = \measuredangle QSR \quad (\pi)$

$+ \ \measuredangle RBP = \measuredangle RSP \quad (\pi)$

$\measuredangle QCP = \measuredangle QSP \quad (\pi)$

$\Rightarrow$ Q, C, S, P cocycliques

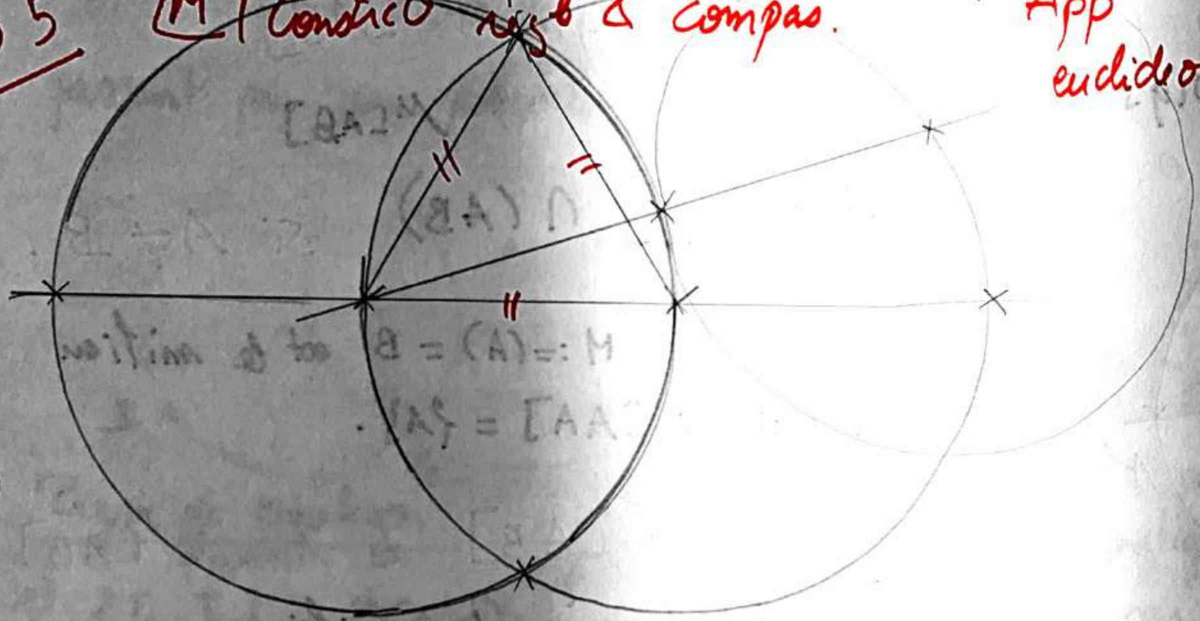
cas où 2 cercles sont tangents.

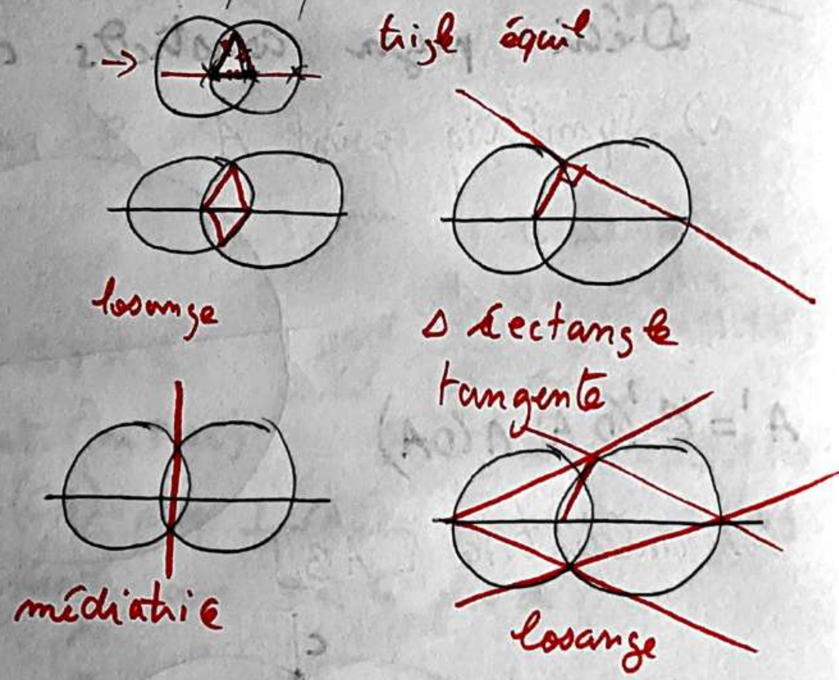
TD 5

$\boxed{M}$ Constructo règle & compas.

App euclidien

→ bcp points const





→ "analyse"
→ "prgm de constructo"
→ "justif prgm constructo"

Ex 1 (Construct° classiqs).

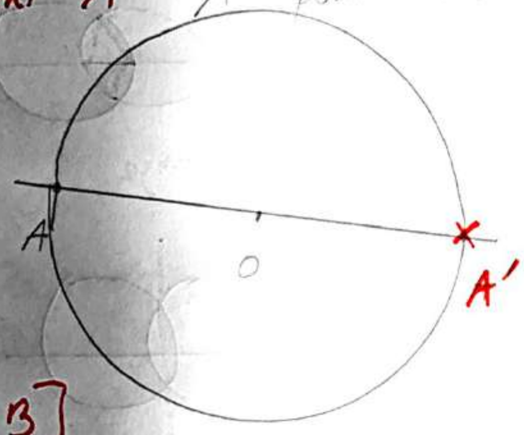
Décrire mqm construct°s classiqs :

a) Symétriq point A ~~A~~ point O

→ cercle Ω O.

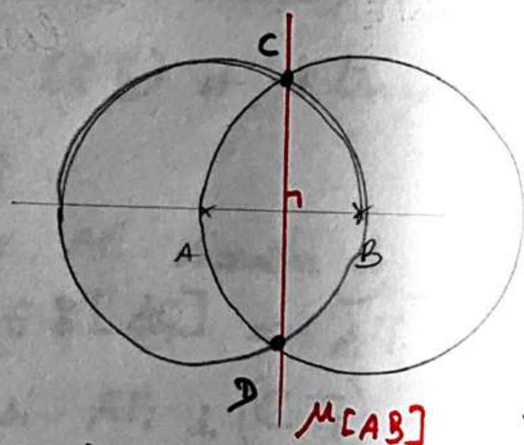
→ cercle passe p A

→



$A' = \mathcal{C}'(O,A) \cap (OA)$

b) médiatrice [AB]



2 cercles m̂ rayons

→ 2 construct°

→ $AB = AC$

→ $BA = BC$

⇒ $CA = CB = AB$

dc C est pt médiat

D est pt médiat

$C, D := \mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(B,A)$

(CD) est média [AB]

c) milieu segment [AB]

4 b), construire $\mu_{[AB]}$

$M := \mu_{[AB]} \cap (AB)$ Si $A \neq B$.

Si $A = B$, $M := (A) = B$ est le milieu de $[AB] = [AA] = \{A\}$.

(1)

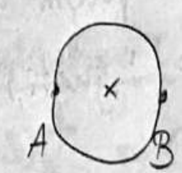
d) cercle $\mathcal{C}[AB]$ de diamètre [AB]

↳ besoin du milieu

soit M milieu de [AB]

$\mathcal{C}(M,A) = \mathcal{C}[AB]$

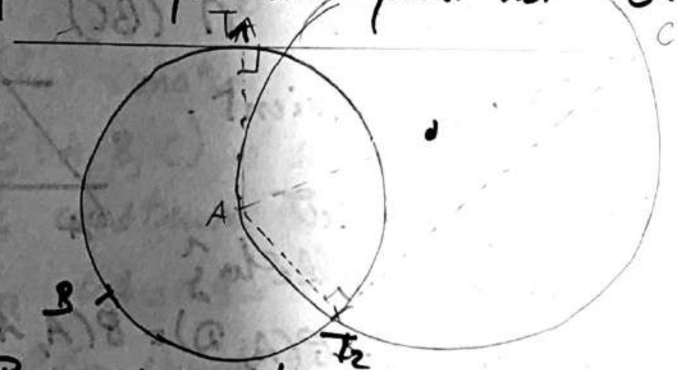
est le cercle de diamètre [AB]



ne pas confondre $\mathcal{C}(A,B)$ et $\mathcal{C}[AB]$

↑ ↑ autre point ∈ $\mathcal{C}$ ↑ diamètre

e) les tangentes au cercle $\mathscr{C}(A,B)$ passant par un point ext C.



• Progm de constructO :

d'après d)

1) $\{T_1, T_2\} = \mathscr{C}(A,B) \cap \mathscr{C}[AC]$

(CT_1) (CT_2) st 2 tangentes recherchées :

Justif :

comme AC diamètre de $\mathscr{C}[AC]$ &

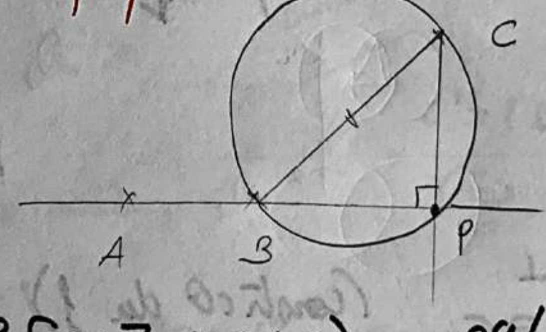
∘ $T_i \in \mathscr{C}[AC] \Rightarrow \widehat{AT_iC} = \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$

∘ Ainsi $AT_i \perp (CT_i) \Rightarrow (CT_i)$ est tangente $\mathscr{C}(A, T_i) = \mathscr{C}(A,B)$

car $T_i \in \mathscr{C}(A,B)$.

f) La perpendiculaire à (AB) passt p pt C.

f si $C \notin (AB)$



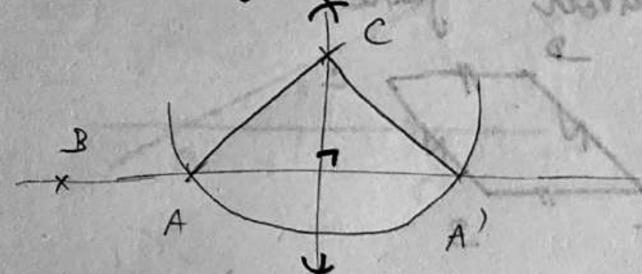
M1/ $\{P, A\} := \mathscr{C}[CA] \cap (AB)$

(CP) convient. (car $P \neq C$)

Rq/ si $(CA) \perp (AB)$ ds ce cas $P = A$ et $\mathscr{C}[CA] \cap (AB) = \{A\}$.

pb pratiq si (CA) presq $\perp$ (AB) ds ce cas préférable user B à la place de A.

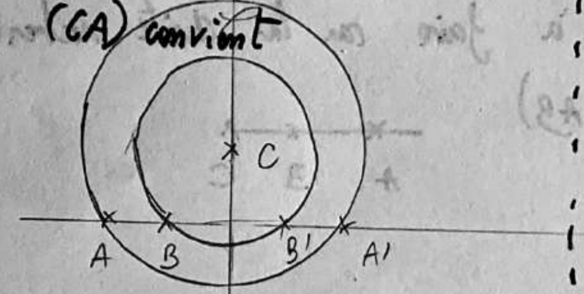
M2/



1) $\{A', A\} := \mathscr{C}(CA) \cap (AB)$

2) si $A \neq A'$ $\mu_{[AA']}$ convient

sinon (CA) convient



$\in \mu_{[AA']} = \mu_{[BB']}$

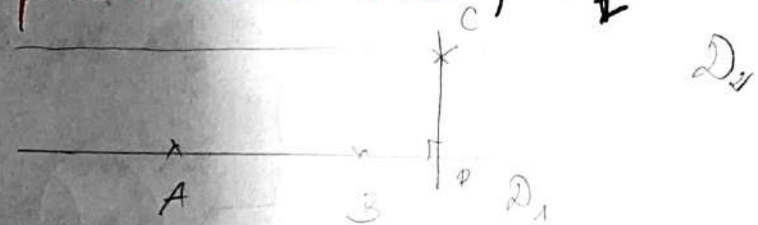
f tjrs

Notat° :

$(AB)^{\perp}_{\ni C} = (AB)^{\perp C}$

est la droite $\perp$ à (AB) passant par C.

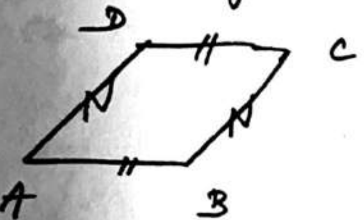
g) La parallèle à (AB) passt par C.



1) $\mathcal{D}_1 := (AB)^{\perp}_{\ni C}$ (constructo du f).

2) $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{1\ \ni C}^{\perp}$ convient

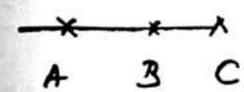
__Rq__: Qd on va pouvoir construire $\mathcal{C}(A, BC)$ on va pouvoir faire



$\mathcal{D} = \mathcal{C}(A, BC) \cap \mathcal{C}(C, AB) \Rightarrow (DC)$ convient.

$\hookrightarrow$ si $C \notin (AB)$

sinon rien à faire car la droite recherchée est (AB)



__Notation__

$(AB)^{\parallel}_{\ni C}$

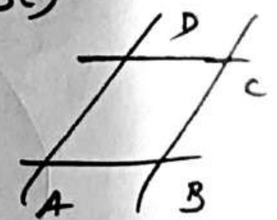
$\parallel$

$(AB)^{\parallel C}$

h) Le cercle $\mathcal{C}(A, BC)$ centre A, rayon BC.

1) $D = (AB)^{\parallel C} \cap (BC)^{\parallel A}$

$\mathcal{C}(A, D)$ convient.



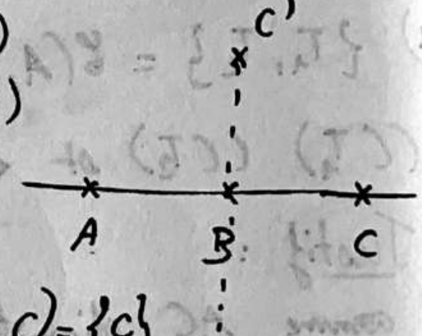
__justif__ par construction $ABCD$ parallélogramme

$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \mathcal{C}(A, D) = \mathcal{C}(A, AD) = \mathcal{C}(A, BC)$.

$\rightarrow$ si $C \in (AB)$

si $C = B \Rightarrow \mathcal{C}(A, A)$

si $C \neq B$

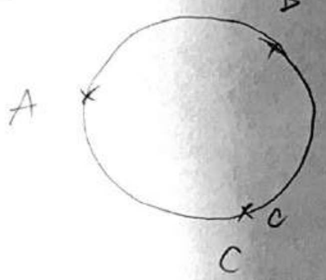


1) $(AB)^{\perp B} \cap \mathcal{C}(B, C) = \{C\}$

ainsi $BC = BC'$ et $C' \notin (AB)$

on appliq construction précédente à C' à la place de C.

(i) cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$ q' passant p. 3 pts alig A, B, C.



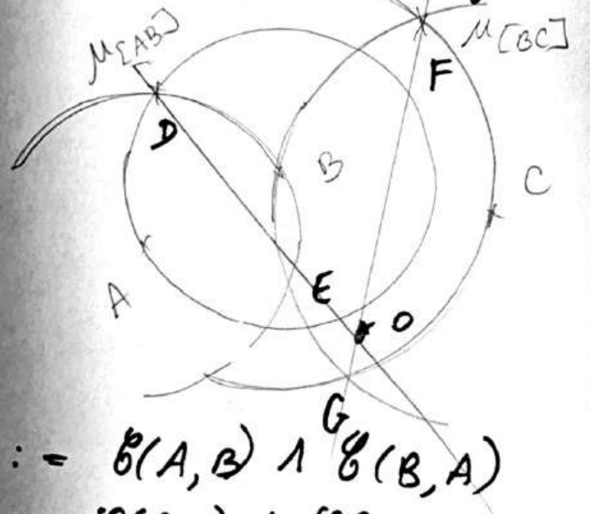
Pr construire $\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit de construire le centre O tq $OA = OB = OC$

- $\mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B) = \mathcal{C}(O, C) = \mathcal{C}(A, B, C)$

1) $\mu_{[AB]} \cap \mu_{[BC]} =: \{O\}$

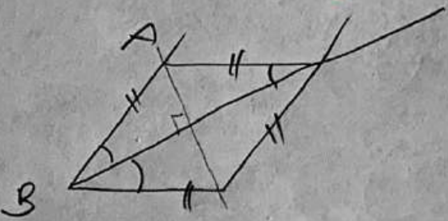
(un point car A, B, C non alignés)

c.q.f.d



- 1) $\{D, E\} := \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(B, A)$
  2) $\{F, G\} := \mathcal{C}(B, C) \cap \mathcal{C}(C, B)$
  3) $O = (DE) \cap (FG)$
  4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

j) bissectrice angle $\widehat{BAC}$ → (losange)



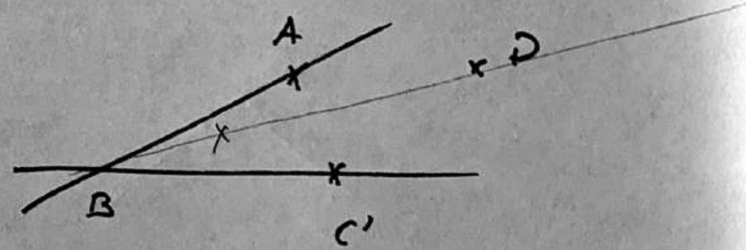
$C' = (BC) \cap \mathcal{C}(B, A)$

$(\Leftrightarrow BC' = BA)$.

MI) $\mu_{[AC']}$ convient

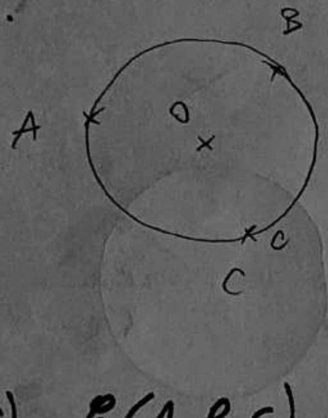
MII) $D = \mathcal{C}(C', B) \cap \mathcal{C}(A, B) = D$

(BD) convient



(i) cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$ qui passant par 3 pts alig A, B, C.

Pr construire $\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit de construire le centre O tq $OA = OB = OC$

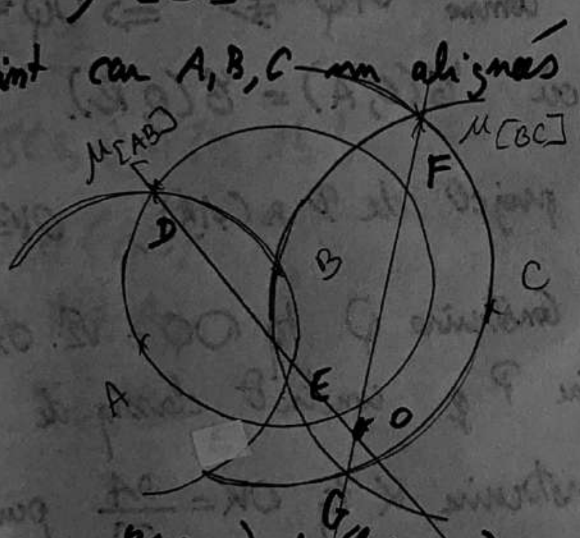


$\mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B) = \mathcal{C}(O, C) = \mathcal{C}(A, B, C)$

1) $\mu_{[AB]} \cap \mu_{[BC]} =: \{O\}$

(un point car A, B, C non alignés)

c.q.f.d



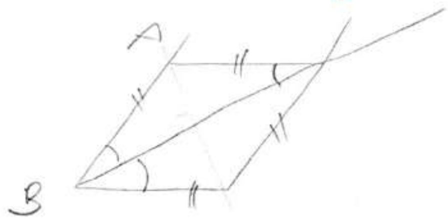
1) $\{D, E\} := \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(B, A)$

2) $\{F, G\} := \mathcal{C}(B, C) \cap \mathcal{C}(C, B)$

3) $O = (DE) \cap (FG)$

4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

j) bissectrice angle $\widehat{BAC}$ $\rightarrow$ (losange)



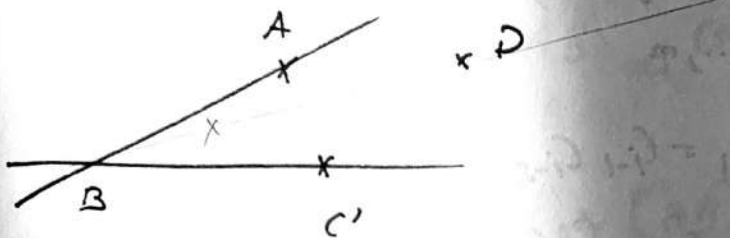
$C' = (BC) \cap \mathcal{C}(B, A)$

$(\Leftrightarrow BC' = BA)$.

M I) $\mu_{[AC']}$ convient

M II) $D = \mathcal{C}(C', B) \cap \mathcal{C}(A, B) = D$

(BD) convient



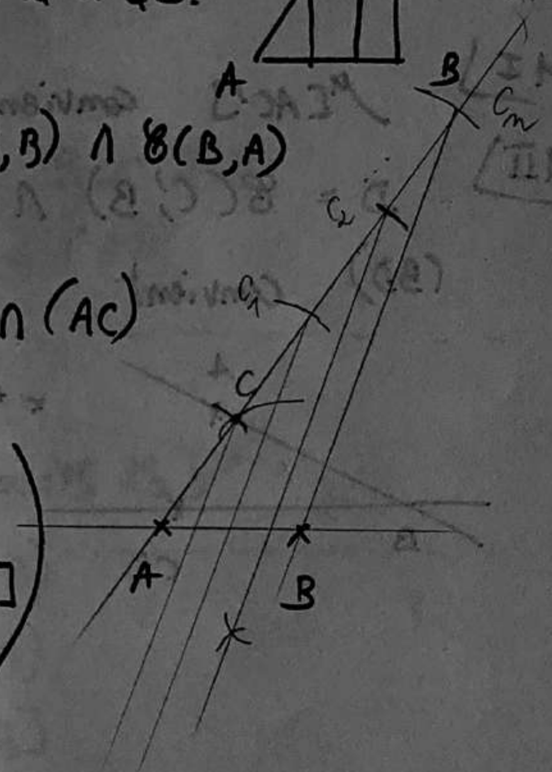
k) Le partage d'un segment [AB] en n segments de m̂ long^e. (Thalès)

si $\exists$ C non aligné à A & B.
on pt l'user,
sinon $\{C, *\} = \mathscr{C}(A,B) \cap \mathscr{C}(B,A)$

1) $C_1 = C$, $C_0 = A$
2) $C_i = \overset{*}{\mathscr{C}}(C_{i-1}, C_{i-2}) \cap (AC)$
$i = 2, \dots, n$

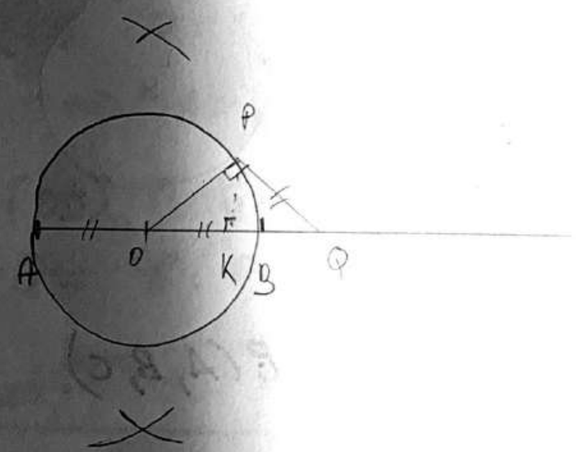
(ainsi $C_i C_{i-1} = C_{i-1} C_{i-2}$
de $C_1, \dots, C_{n-1}$ coupe $[AC_n]$
les n-pies égales)

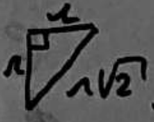
3) $\forall\, i = 1, \dots, n-1$
$\mathscr{D}_i = (BC_n)^{/\!/ C_i}$



Rq → si milieu (mi diatrice)
→ si ... 4 (milieu du milieu)

Ex 2 A, B donnés, $\mathscr{C}(O, [AB])$. construire $P \in \mathscr{C}$ et $Q \in [AB)$ tq (PQ) tangent à $\mathscr{C}$ & $2PQ = AB$.



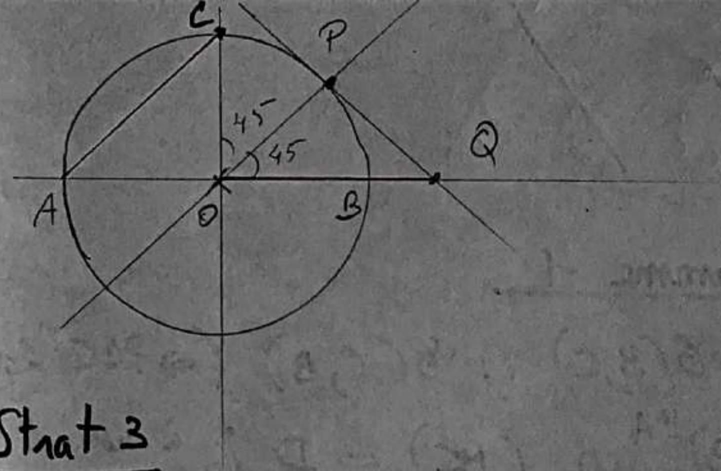


Analyse : Comme OPQ  $\Rightarrow OQ = \sqrt{2}\cdot OP = \sqrt{2}\cdot R$ où $\mathscr{C}(O,A) = \mathscr{C}(O,R)$.

K projcO de P s(AB), $OK = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Strat 1 : Construire Q tq $OQ = \sqrt{2}\cdot OA$.
puis construire P q construcO classiq de tangente

Strat 2 : Construire K tq $OK = \dfrac{OA}{\sqrt{2}}$ puis soit Q
$Q = \mathscr{C}(K, O) \cap AB$.
$P = (AB)^{\perp K} \cap \mathscr{C}$.

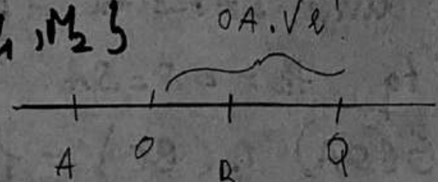


Strat 3

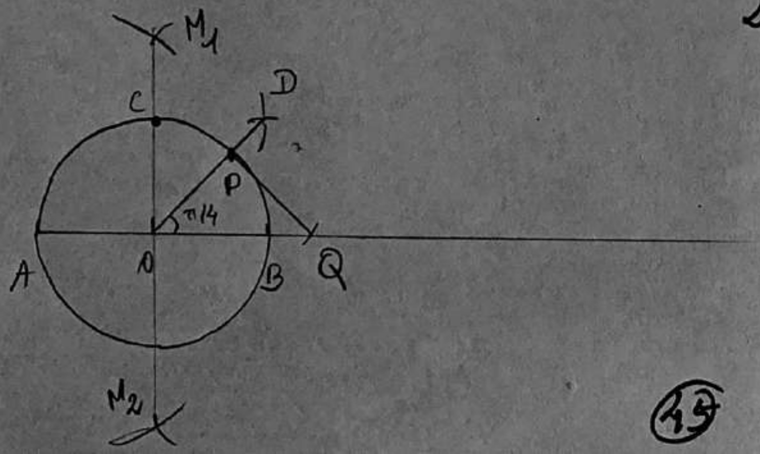
- $P =$ bissectrice $BOC \cap \mathscr{C}$
  où $(CO) \perp (AB)$

Programme 1 :

1) $\mathscr{C}(A,B) \cap \mathscr{C}(B,A) =: \{M_1, M_2\}$
2) $O = (M_1 M_2) \cap (AB)$
3) $C = (M_1 M_2) \cap \mathscr{C}(O,A)$
   $\mathscr{C}[AB]$



idéq m to pgm

- 

bissectrice ← carré

4) $D = \mathscr{C}(C,O) \cap \mathscr{C}(B,O)$
   ($\Rightarrow CO = CD = OB = BD \Rightarrow$ losange OBDC
   $\Rightarrow OD$ bissectrice)
5) $(OD) \cap \mathscr{C}(O,A) = P$
6) $Q = \mathscr{C}(P,O) \cap (AB)$

Justif° du pgm 1

1) Par constr° $AM_1 = BM_1 = AB$
   $AM_2 = BM_2 = AB$ $\Rightarrow (M_1 M_2)$ médiatrice de $[AB]$
2) aussi O milieu de $[AB]$ car $\in [AB]$ & sur la médiatrice.
3) $\measuredangle BOC = \frac{\pi}{2}$ car $(OC) = (M_1 M_2)$ la médiatrice
   $OC = OB$ car $C \in \mathscr{C}(O,A) = \mathscr{C}(O,B)$
4) $D \in \mathscr{C}(C,O) \Rightarrow CO = CD$
   $D \in \mathscr{C}(B,O) \Rightarrow BO = BD$ $\Rightarrow CD = CO = BO, BD$
   $\Rightarrow OBDC$ losange
   $\Rightarrow OD$ bissectrice de COB
   $\Rightarrow \measuredangle DOB = \pi/4$

5) $OP = OA = OB$, $\measuredangle POB = \pi/4$

6) $Q \in \mathcal{C}(P, O) \Rightarrow PO = PQ \Rightarrow \triangle OQP$ isocèle

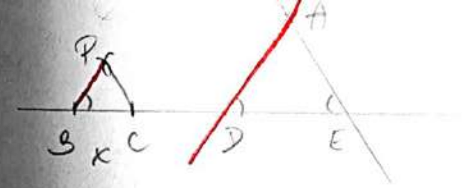
$\Rightarrow \measuredangle OQP = \measuredangle QOP = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \measuredangle OPQ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$. QP tangente au $\mathcal{C}(O, B)$

. $PQ = PO = \frac{1}{2} AB$

Prgm 2 : on construit Q tq $OQ = AC$ puis P (directement où $\mathcal{C}$ de K).

Prgm 3 : on construit K tq $OK = \frac{1}{2} AC$ puis P & Q.



Programme 1

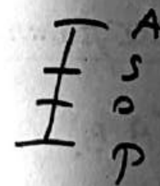
1) $\mathcal{C}(B, C) \cap \mathcal{C}(C, B)$ ($\Rightarrow$ PBC équilatéral)

2) $(PB)^{\parallel A} \cap (BC) = D$
$(PC)^{\parallel A} \cap (BC) = E$
à non & rappel construction $\mathcal{D}^{\parallel A}$

Programme 2

1) $(BC)^{\perp A} \cap (BC) = P$

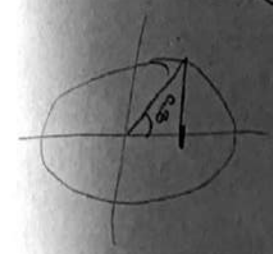
2) divise $[AP]$ en 3 pts égales tq $PO = OS = SA$



3) $\mathcal{C}(OA) \cap (BC) = \{D, E\}$

Ex 3. soit A, B, C non alignés.
Construire D & E $\in$ (BC) tq $\triangle ADE$ équilatéral.

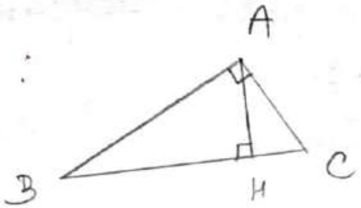
$\cos(60°) = \frac{1}{2}$



TD5

cf TD4 ex 4.

RA 1 :



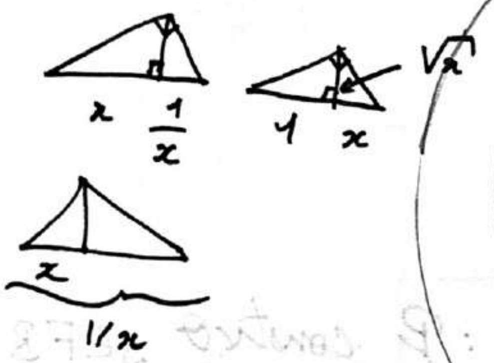
ABC rectgle en ∢A

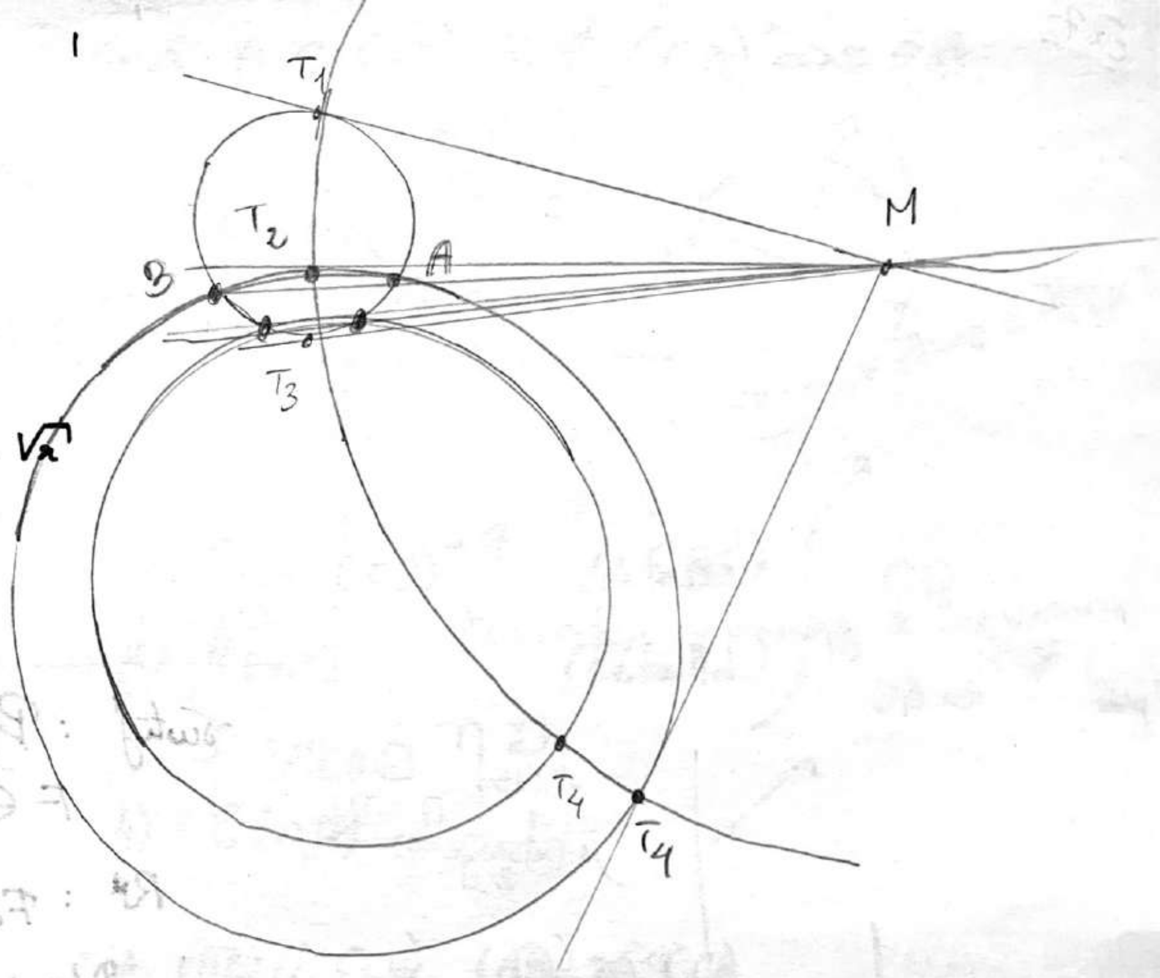
$AH \perp BC$

$\boxed{AH^2 = HB.HC}$

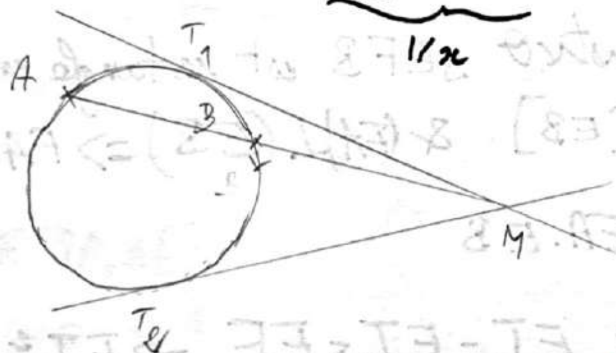
$AB^2 = BH.BC$

$AC^2 = CH.CB$





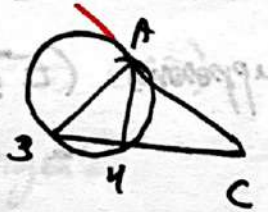
RA 2 :



$\boxed{MB.\ MA = MT_1^2 = MT_2^2}$

Puisse M p/ $\mathcal{C}$

$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$

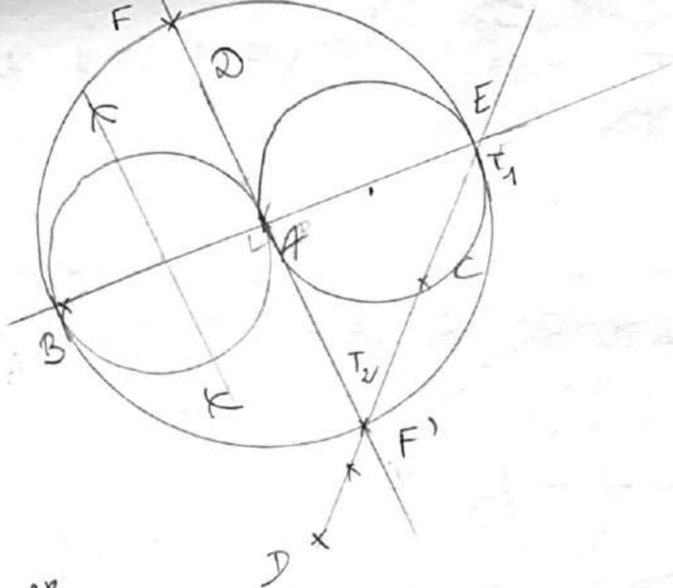


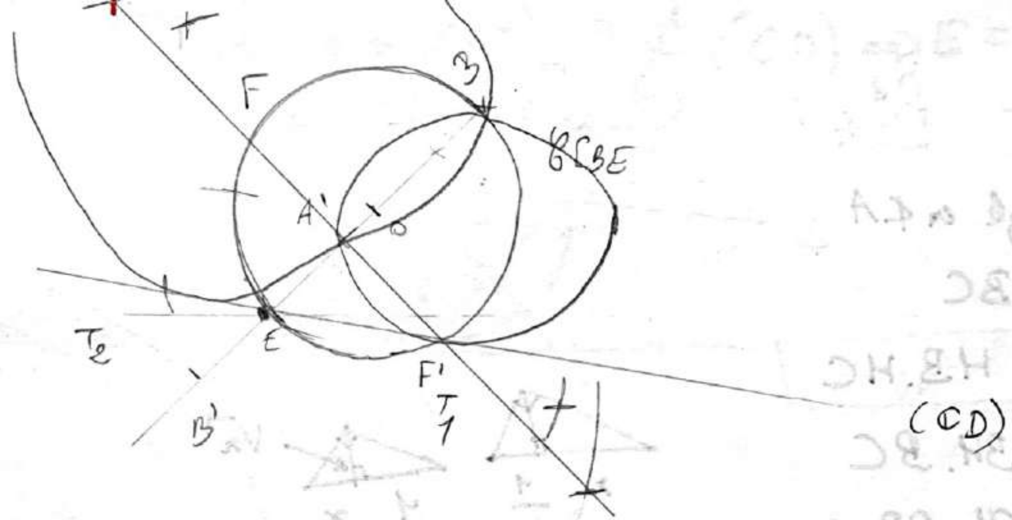
$CA^2 = CH.CB$

$MT_i^2 = MA.M_B$

$\boxed{MT_i^2 = MA.MB}$

Ex 7





perpendicul^r → symétriq → cercle → médiat

$ET_1^2 = EA.EB$

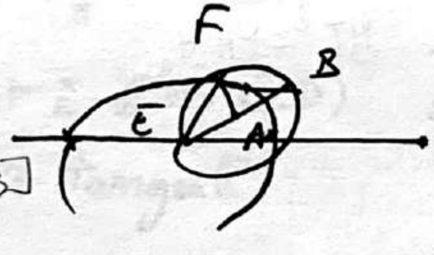
$\mu[AB]$ $\cap \Rightarrow O_2$
$\mu[BT_2]$

$\mathcal{C}(O_2, A)$

Justif : P construct° ΔEFB est rectangle en F car $F \in \mathcal{C}[EB]$ & $(FA) \perp (EB) \Rightarrow FA$ hauteur.

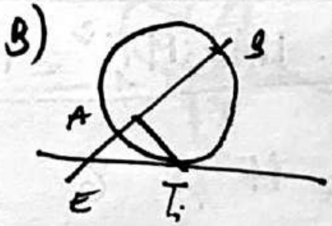
RM : $FE^2 = EA.EB$

D'après (iv) $ET_1 = ET_2 = EF \to ET_i^2 = EA.EB$



$\to \mu[T_1B]$

Supposons $(ET_1) \cap \mathcal{C}(A, T, B) = \{T_1, T_1'\}$

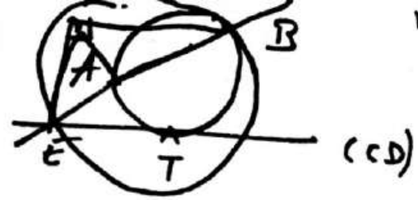


$\Rightarrow P_{\mathcal{C}}(E) = EA.EB$

$= ET_1 . ET_1' \Rightarrow ET_1' = ET_1 \Rightarrow T_1 = T_1' \Rightarrow$ cqfd (ET_1) tang^t à $\mathcal{C}$

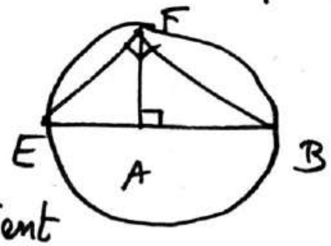
② de m̂ ET_2

L'analyse q ns manquait



1) Pr construire le cercle cherché, il suffit de trouver posit° de T.

2) $ET^2 = EA.EB \Rightarrow$ il suffit de construire un pt (E) tq $EF^2 = EA.EB$

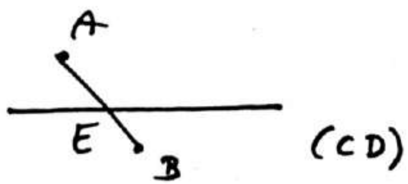


3) $\mathcal{C}[EB] \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

4) Autres PDC où tel cercle $\exists$.

- si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A,E[$
  idtq cas a)

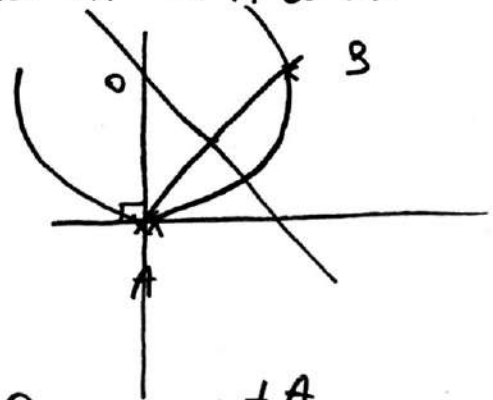
- si $E \in]A,B[$
  un tel cercle n'$\exists$



→ si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow E$ point int à $\mathcal{C} \Rightarrow (CD)$ coupe $\mathcal{C} \Rightarrow$ ne pt pas ê tangente

→ si $A, B \in (CD) \Rightarrow \exists$

- si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$
  (de m̂ de A et B)



1) $\mathcal{D} := (CD)^{\perp A}$ (détaillez)

2) $\mu_{[AB]}$ (détaillez)

3) $O := \mu_{[AB]} \cap \mathcal{D}$

4) $\mathcal{C}(O,A)$ convient

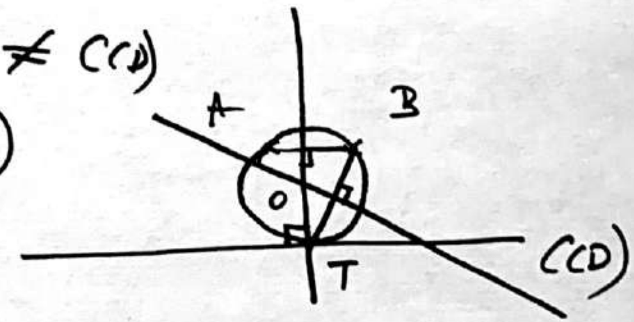
$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{C}(O,A)$

$(CD) \perp OA \Rightarrow (CD)$ tangte

- si $(AB) \,//\, (CD)$ $(AB) \neq (CD)$

1) $T := \mu_{[AB]} \cap (CD)$

2) $\mathcal{C}(A,B,T)$ convient



$\mathcal{C}$ passe p A & B (PC).
Ple T tang^t à (CD) en T.

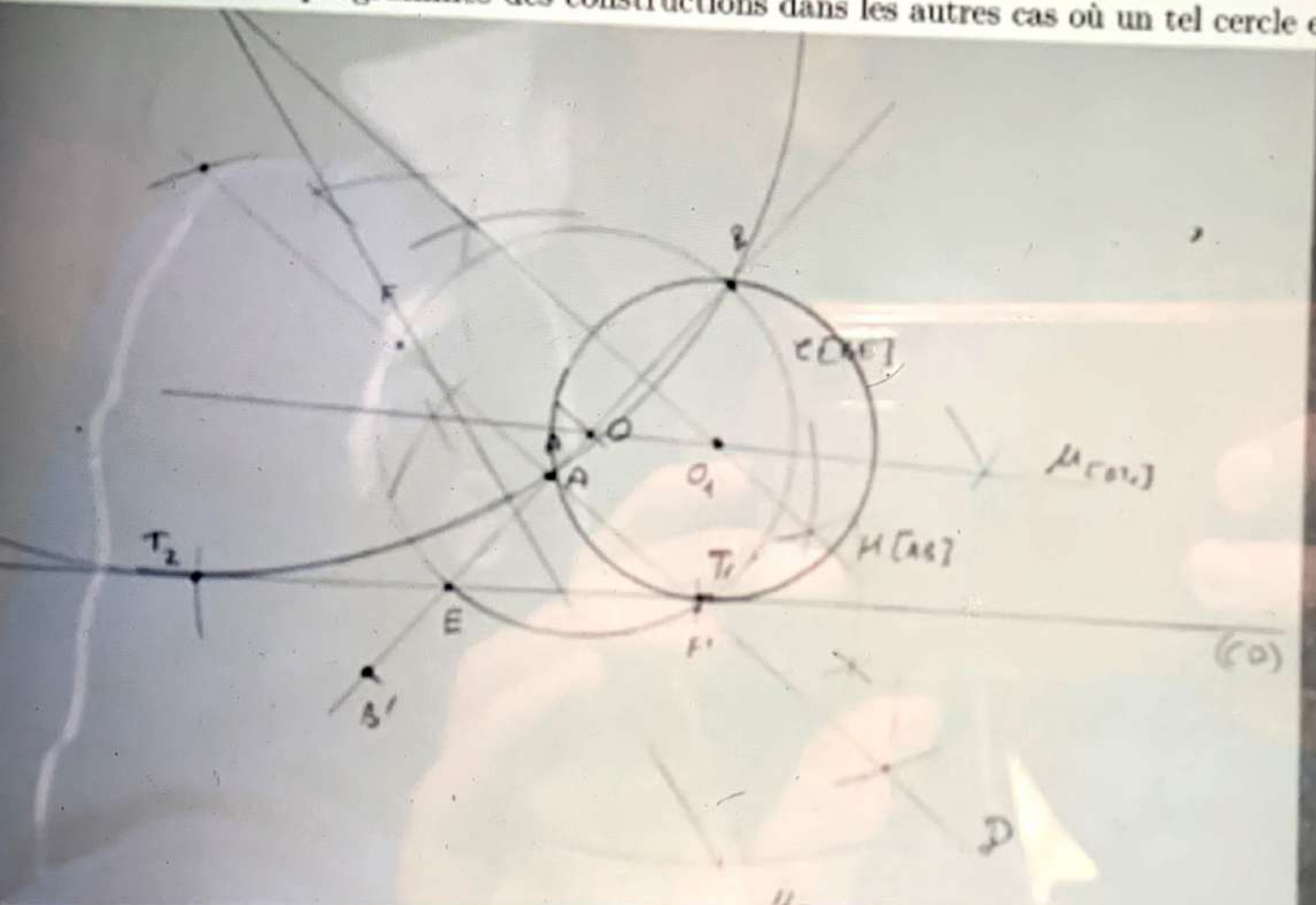
$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{C}$; $\Rightarrow$ T tangent à $\mathcal{C}$.

(iii) $\{F, F'\} := D \cap \mathcal{C}[EB]$;

(iv) $\{T_1, T_2\} := \mathcal{C}(E, F) \cap (CD)$;

(v) Les deux cercles qui passent par A, B et T_i, $i = 1, 2$, conviennent.

b) Donner les programmes des constructions dans les autres cas où un tel cercle existe.

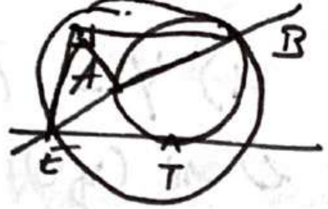


Oui

Maxence Defraiteur

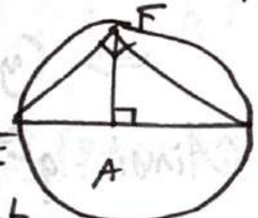
Kroum Tzanev

L'analyse q ns manquait



1) Pr construire le cercle cherché, il suffit de trouver point de T.

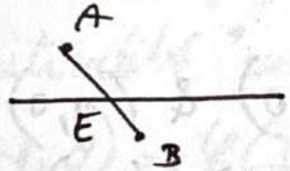
2) $ET^2 = EA \cdot EB \Rightarrow$ il suffit de construire un pt (E) tq $EF^2 = EA \cdot EB$



3) $\mathcal{C}[EB] \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

b) Autres PDC où tel cercle $\exists$.

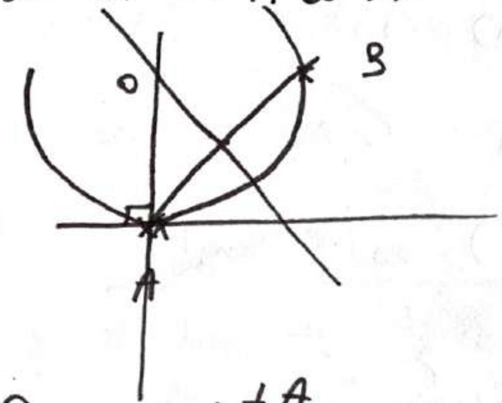
- si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A,E[$ idtq cas a)
- si $E \in]A,B[$ un tel cercle n'$\exists$



→ si $A,B \in \mathcal{C} \Rightarrow E$ point intr à $\mathcal{C} \Rightarrow (CD)$ coupe $\mathcal{C} \Rightarrow$ ne pt pas ê tangente

→ si $A,B \in (CD) \Rightarrow \nexists$

- si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$ (de m̂ de A et B)



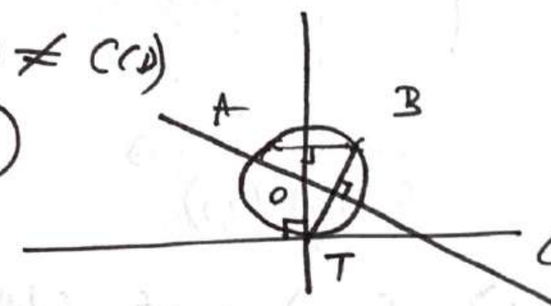
1) $\mathcal{D} := (CD)^{\perp A}$ (détaillez)
2) $\mu_{[AB]}$ (détaillez)
3) $O := \mu_{[AB]} \cap \mathcal{D}$
4) $\mathcal{C}(O,A)$ convient

$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{C}(O,A)$

$(CD) \perp OA \Rightarrow (CD)$ tangte

- si $(AB) \parallel (CD)$ $(AB) \neq (CD)$

1) $T := \mu_{[AB]} \cap (CD)$
2) $\mathcal{C}(A,B,T)$ convient



$\mathcal{C}$ passe p A & B (PC).
Ple T tangt à (CD) en T.

$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{C}$; $\Rightarrow T$ tangent à $\mathcal{C}$.

Ex 13 (Nombres constructibles)

Acceptant construct° classq.

→ PC $\mathcal{C}$ $O=(0,0)$, $I=(1,0)$

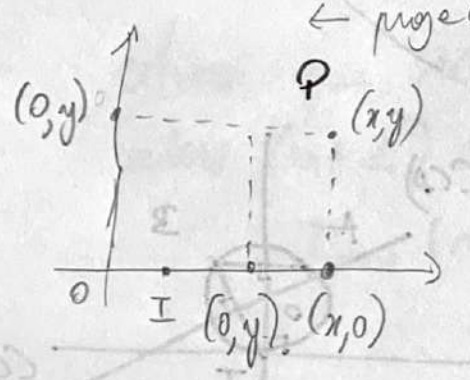
→ x const. si $(x,0)$ const.

a) Mq (x,y) est const $\Leftrightarrow$ x & y st const.

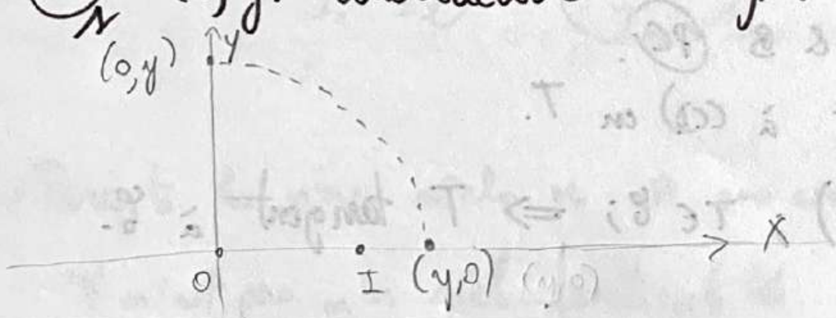
x const : $(x,0)$ const &

y const : $(y,0)$ const

← projec°s orthogonales const.



(L) $(0,y)$ constructible ssi $(y,0)$ constructible.



Md^t comme V.T

50

1) $Y = (OI)^{\perp O}$, $X = (OI)$

2) si $(y,0)$ constructible

$(0,y) = \mathcal{C}(O,(y,0)) \cap Y$

$\Rightarrow$ constructible, si $(0,y)$ constructible

$\Rightarrow (y,0) = \mathcal{C}(O,(0,y)) \cap X$ constructible

Ainsi q° a) devient

(x,y) constructibles ssi $(x,0)$ & $(0,y)$ constructibles.

(L_0) Les axes X & Y st constructibles.

- si $(x,0)$ & $(y,0)$ construit alors

$P = (OI)^{\perp (x,0)} \cap Y^{\perp (0,y)}$

$\Rightarrow P(x,y)$ constructible.

$Q = Y^{\parallel (x,y)} \cap X \Rightarrow Q(x,0)$ est constructible

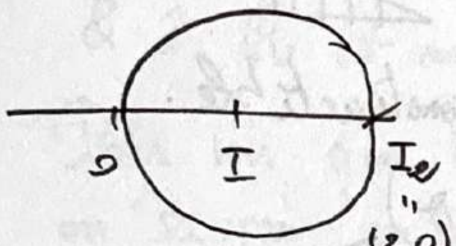
$R = X^{\parallel (x,y)} \cap Y \Rightarrow R(0,y)$ est constructible.

b) Mq ∀ point $\mathbb{Z}^2$ constructible

→ $\mathbb{Z}^2$ constructible ssi $\forall n \in \mathbb{Z}$ constructible.

En effet $\forall n \in \mathbb{N}$ est constructible :

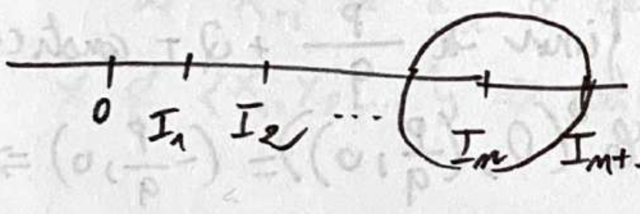
2 constructible car $(2,0) = \mathcal{C}(I,0) \cap (OI)$



$I_3(3,0) = \mathcal{C}(I_2, I_1) \cap (OI)$

Ainsi par récurrence si $\{1, \dots, n\}$ construit alors $(n+1)$ constructible * car * par récurrence.

$I_{n+1}(n+1,0) = \mathcal{C}(I_n, I_{n+1}) \cap (OI)$



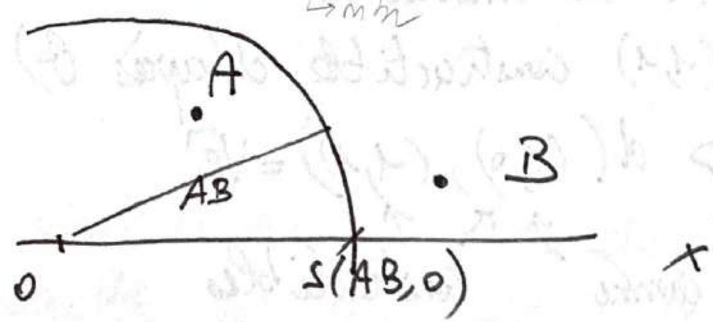
& $\forall n \in -\mathbb{N}$,

$\mathcal{C}(0,(n,0)) \cap (0,I)$ $\underset{(n,0)}{\overset{!!}{}}$

→ Pusq ts les nbrs réels ne st pas const.

π n'est pas nbr réel constructible.

c) Mq A & B st constructibles ⇒ dist AB constructible



dist AB constructible car

$S = [OX) \cap \mathcal{C}(O, AB)$ car A est constible, B est constible

constr° classq

$\Rightarrow S(AB, 0)$

d) Mq $\sqrt{2}$ constructible.

$\sqrt{2}$ est constructible car $(1,1)$ constructible d'après b)

$\Rightarrow d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2}$

donné constructibles

$\rightarrow \sqrt{3}$ est constructible car $(\sqrt{2},1)$ constructible d'après a) + $\sqrt{2}$ est constructible.

$\Rightarrow d((0,0),(\sqrt{2},1)) = \sqrt{\sqrt{2}^2+1^2} = \sqrt{3}$ est constructible

---

Par récurrence "H_n : "$\sqrt{n}$ est constructible"

H_0, H_1, H_2, H_3 déjà vérifiés. On suppose donnés H_n vrai & ainsi $(\sqrt{n}, 1)$ est constructible

$\Rightarrow d((0,0),(\sqrt{n},1)) = \sqrt{n+1}$ aussi $\Leftrightarrow H_{n+1}$

e) Mq $\forall p,q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q}, 0)$ est constr.

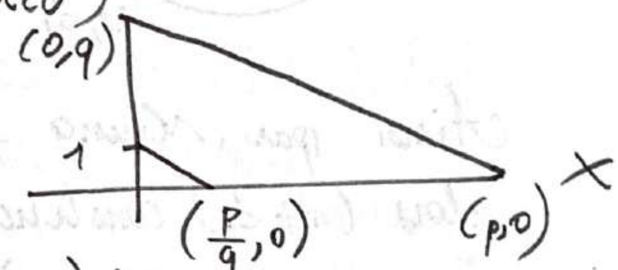
Mq $\forall p,q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q}, 0)$ est constr.

$\boxed{M1}$ soit $J_1, J_2, \dots, J_{q-1}$ les points q partagt le sgmt $[(0,0)(p,0)]$ en q parties égales.

(constru classiq

$\Rightarrow J_1(\frac{p}{q}, 0)$ constructible.

$\boxed{M2}$ (Détailler constrct)



$(p/q, 0) = ((p,0),(0,q))^{//(0,1)} \cap X$ + Thalès.

Et pr finir si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ constructible alors $X \cap \mathcal{C}^*(0, (\frac{p}{q},0)) = (-\frac{p}{q}, 0) \Rightarrow \frac{-p}{q}$ constructible

Rq : L'ens des nbrs constructibles est Dénombrable comme réunion dénombrable

$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ K_i les nbrs constructibles à i pas.

& $\hat{c}$ $\mathbb{R}$ est non dénombrable $\Rightarrow \mathbb{R} \neq K$.

Pour voir que $\mathbb{R}$ est non dénombrable, on suppose qu'il l'est :

$$\mathbb{R} = \{\cancel{x_0}, x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

$x_i = a_n^i \dots a_0^i, a_{-1}^i, a_{-2}^i, \dots$ l'écrit décimale réduite

Posons $X = 0, X_{-1} X_{-2} \dots$

$X_{-i} \neq a_{-1}^i$ & de $\exists \Rightarrow X \neq X_i \ \forall i$

$X \notin \{X_1, X_2, \dots\} \Rightarrow$ contradiction $\boxed{c?!c}$

Ex 14 (S^{le} ens nbr constic)

Mq ens nbrs réels const. n'est pas $\mathbb{R}$ & qu'il est stable par : - somme, diff
- mult, inverse
- $\sqrt{\cdot}$.

On vient de voir que l'ens des nbrs constructibles est dénombrable $\neq \mathbb{R}$ non dénombrable.

▸ x, y constructible $\Rightarrow$

$= (OI) \cap \mathcal{C}((x,0), |y|)$

$= \{(x+|y|, 0), (x-|y|, 0)$

$|y| = d((0,0),(y,0))$ constructible

$\Rightarrow x \pm |y|$ constructible

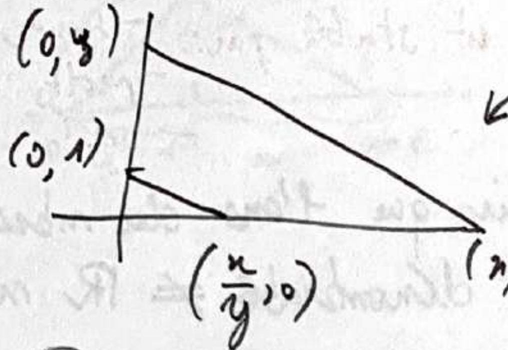
$\Rightarrow x \pm y$ constructible. (même mth

$0,\overline{99} = 1$

• Produit, inverse ?

Inverse

x, y constructible & $y \neq 0 \Rightarrow$



Thalès $\Rightarrow \left(\frac{x}{y},0\right)$ constructible

$\left((0,y)(x,0)\right) \cap (OI)$

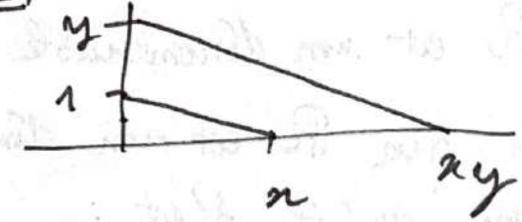
Produit

• $x>0,\ y>0 \Rightarrow x, y$ constructible car

M1: $\frac{1}{y}$ constructible d'après q° précédente

$\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{y}} = x.y$ constructible.

M2



R4 • α constructible ssi $-\alpha$ constructible

• α constructible ssi $|\alpha|$ constructible

x, y constructible $y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{|x|}{|y|}$ constructible

$\Rightarrow \dfrac{x}{y}$ constructible

Pr conclure si x, y constructible

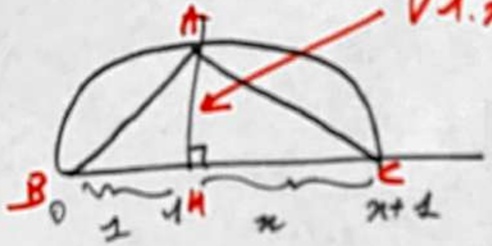
$\Rightarrow |x|$ et $|y|$ le sont

$\Rightarrow |x||y| = |xy|$ l'est

$\Rightarrow xy$ l'est.

Racine carrée

$\sqrt{1.x} = \sqrt{x}$



$AH^2 = BH.HC$

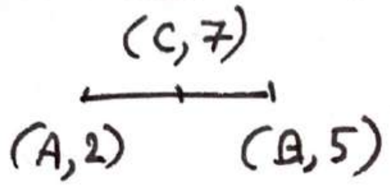
13^4

M44 TD ... TD1

→ projeté orthogonal, droites, $\frac{1}{2}$ plan, paramétisa° droite, distance, convexité, inéqua°s

→ médiane du tigle 2:1

→ $S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2} \Rightarrow haut^{r} = \frac{\text{prdt kathêtes}}{\text{hypothénuse}}$

→ 

$\vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}$

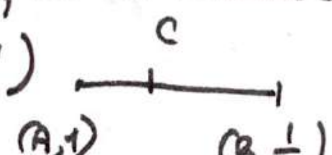
$C = (1-\lambda)A + \lambda B$. $\frac{CB}{CA} = \frac{\alpha}{\beta}$.

TD2

→ coord. barycentiqs $(\alpha : \beta : \gamma)$

→ Thalès : droites //, rapport de mesure

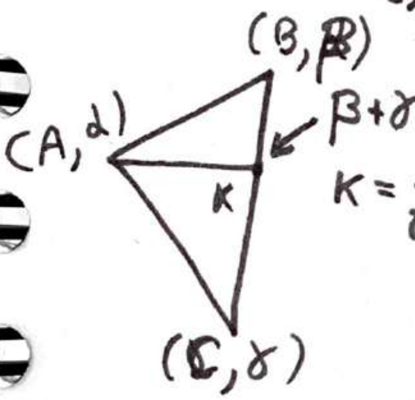
@ $(\alpha : 2\alpha : \alpha) = (1:2:1)$



$1 - \frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$

pr $\lambda = \frac{1}{2}$.



$K = \frac{\gamma}{\gamma+\beta} C + \frac{\beta}{\beta+\gamma} B$

Alignement

→ droite $\mathcal{D}$, Pts $A, B, C \in \mathcal{D}$

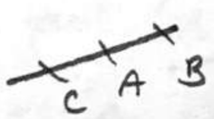
→ $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$

→ $C \in (AB)$
- → si $AB = \{ax+by=d\}$, $ax_C + by_C = d$?
- → $(AB) = \{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ $(x_C, y_C) = A + t\vec{AB}$?

→ $\measuredangle ABC = 0 \ [\pi]$

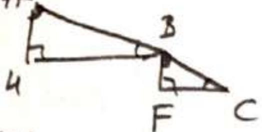
→ nbrs complexes

→ homothéties ↗ $H_{C,\lambda}(A) = B$



$H_{O,\lambda}(A) = B$, $H_{O,\lambda}(B) = C$.

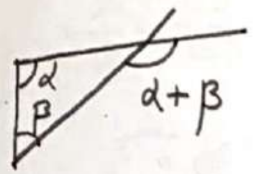
→ triangles semblables



$\Delta HBA \sim \Delta FCB$ car $\frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC}$ & $\measuredangle H = \measuredangle F = \frac{\pi}{2}$

utile : $\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \iff \frac{CK}{MO} = \frac{KA}{OI}$

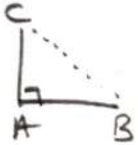
→ Thalès (//, rapport, $\frac{p}{q}$, pq constructible, n coupures de segment)

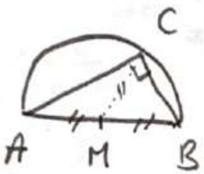
→ 

TD3 : Angles

cercle inscrit   cercle exinscrit

→ tracer triangle rectgle





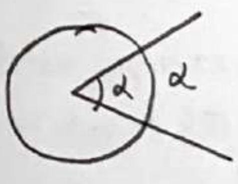
cercle circonscrit

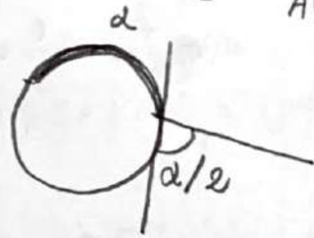
→ bissectrice → m̂ arcs → médiatrice

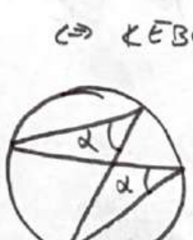
→ $BE \times BO = AB \times CE \iff \frac{BE}{CE} = \frac{BO}{AB}$ ↓ + $\measuredangle E = \measuredangle B = \frac{\pi}{2}$

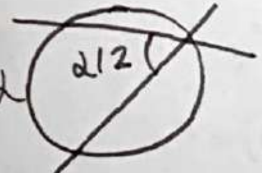
$\iff \Delta BEC \sim \Delta ABO$

$\iff \measuredangle EBC = \measuredangle BAO$

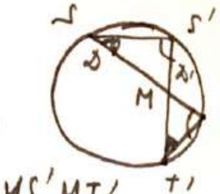
→ 







Puissance d'un point :



$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{S,T\}$, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{C} = \{S',T'\}$

$\overline{MS}.\overline{MT} = \overline{MS'}.\overline{MT'} = MS.MT = MS'.MT'$

$\overline{MS}.\overline{MT} = \overline{MS'}.\overline{MT'}$

$\Longrightarrow$

$\iff$ mq $\frac{MS}{MS'} = \frac{MT}{MT'}$

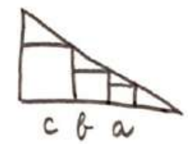
Mq $\Delta SMS' \sim \Delta TMT'$

$\measuredangle SMS' = \measuredangle T'MT$ & $\measuredangle SS'T' = \frac{1}{2}\widehat{ST'} = \measuredangle STT'$ □

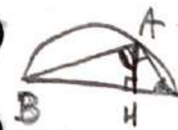
→ si M int $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$; M sur $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$; M ext $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$

→ triangles longs aire, angle, Thalès ; bissectrices

TD4



$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ & homothéties.



mq $BA^2 = BH.BC \iff \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$

$\iff \Delta ABH \sim \Delta CBA$.

$\begin{cases} \measuredangle ABH = \measuredangle ABC \text{ commun} \\ \measuredangle AHB = \measuredangle CAB = \pi/2 \end{cases}$

kathète^2 = pié$_1$ h^{te} × pié$_2$ h^{te}

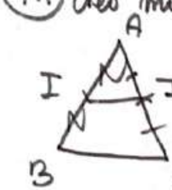
→ mq 3 bissectrices st concourantes (p36, ex 11)

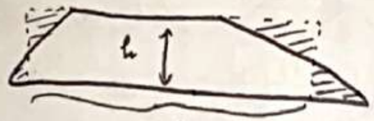
→ médiatrices, médianes, hauteurs ← orthocentre

↖ barycentre, centre de gravité

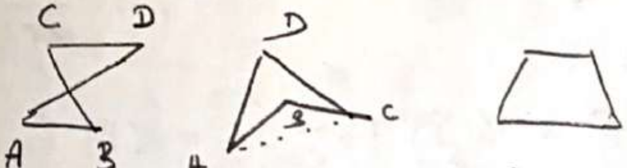
$A_{trapèze} = (B+b).2h$

→ TH des milieux : si un segment joint les milix de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3° côté & sa longueur est égale à la MOITIÉ de celle 3° côté.





$$A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



→ somme angles du quadri convexe : 2π.

→ points cocycliques.

Constr° Règle & compas

TD 5

→ analyse, prgm constr°, justif

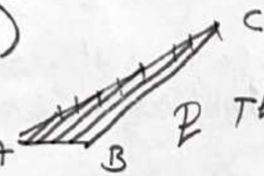
→ symétrie % pt, médiat [AB], milieu [AB], $\mathcal{C}[AB]$

→ tangte à $\mathcal{C}(A,B)^c$, perpendicul^{re} à $(AB)^c$ ← besoin milieu

→ parallèle à $(AB)^c$, $\mathcal{C}(A, BC)$, cercle $\mathcal{C}(A,B,C)$

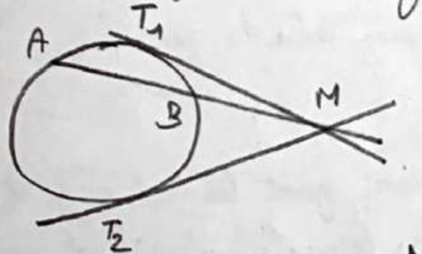
→ bissectrice $\widehat{BAC}$ (2 losange)

→ partage segmts en n segments



P Thalès

→



$$MB.MA = MT_1^2 = MT_2^2$$

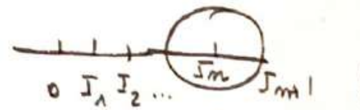
Puissa M % $\mathcal{C}$: $P_{\mathcal{C}}(M)$

$$MT_i^2 = MA.MB$$

→ Nombres constructibles

↳ pc $O(0,0)$, $I=(1,0)$; x const si $(x,0)$ const

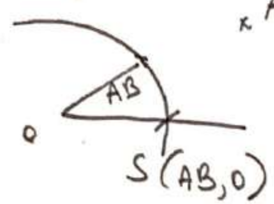
→ ∀ pts $\mathbb{Z}^2$ const.



$\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{C}(0,(n,0)) \cap (OI)$!! $(n,0)$

$I_{n+1}(n+1,0) = \mathcal{C}(I_n, I_{n+1}) \cap (OI)$

→ mq A, B st const. ⇒ dista AB constr.



$S = [OX) \cap \mathcal{C}(O, AB)$

$\Rightarrow S(AB, 0)$

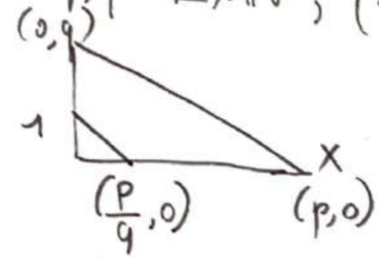
uni · constr c)

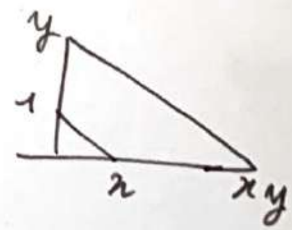
→ mq $\sqrt{2}$ constructible ; $d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2}$

→ $\sqrt{3}$ $\quad d((0,0),(\sqrt{2},1)) = \sqrt{3}$

Par récur $\sqrt{n}$ — ; $d((0,0),(\sqrt{n},1)) = \sqrt{n+1}$

→ mq $\forall\, p,q \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ const. Thalès

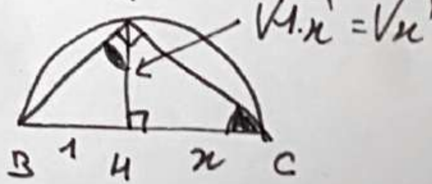




→ mq ens nbres réels n'est pas const ds $\mathbb{R}$ & stable p somme, diff^{ce}, prdt, inverse, $\sqrt{\ }$

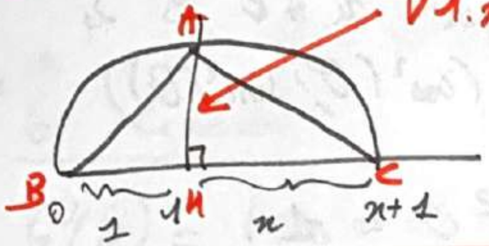
↓

haut$^{re\,2}$ = pied$_1$ ht^r × pied$_2$ ht^r



Racine carrée

$\sqrt{1.x} = \sqrt{x}$



$AH^2 = BH.HC$

TD 6 : Courbes paramétrées

Ex 1 Paramétrisation barycentriq.

A, B, C non alignés.

a) Mq $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une paramétrisation régulière de (AB).

M détaillée :

$$\gamma'(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\gamma(\lambda+\varepsilon) - \gamma(\lambda)}{\varepsilon}}_{\text{vect}^r}$$

pts

$\gamma : \lambda \to (1-\lambda)A + \lambda B = A - \lambda A + \lambda B$

13h $= A + \lambda \vec{AB}$.

$$\gamma'(\lambda) = \frac{(\lambda + \varepsilon - \lambda)\vec{AB}}{\varepsilon} = \vec{AB}.$$

M normale :

$\gamma(\lambda) = A + \lambda \vec{AB} \Rightarrow \gamma'(\lambda) = 0 + 1.\vec{AB} = \vec{AB}$.

cte

or A, B, C non alignés $\Rightarrow A \neq B \Leftrightarrow \vec{AB} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ la courbe est paramétrée.

b) Ss q^lle condi° c^te paramétrisa° est "par longueur d'arc" ?

↳ c'est une paramétrisa° p longueurs d'arcs ssi $\forall \lambda$, $\|\gamma'(\lambda)\| = 1$

$\Leftrightarrow \|\vec{AB}\| = 1 \Leftrightarrow AB = 1$.

c) donner une paramétrisa° p longueur d'arc de (AB).

↳ soit $\gamma_1(\lambda) = \gamma\left(\frac{\lambda}{AB}\right)$ $(AB \neq 0)$

Dans ce cas γ_1 est une représentat° de γ

$$\left(\phi(s) = \frac{s}{AB} \right).$$

$$\gamma_1'(\lambda) = \left[\gamma\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \right]' = \gamma'\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{AB}\right)'$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{AB}$$

ainsi $\| (\gamma_1'(\lambda)\| = \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right\| = 1.$

d) Donner une paramétrisat° du segment $[AB]$ & de $[BA)$.

• $\gamma|_{[0,1]}$ est une paramétrisat° de $[AB]$.

$$[AB] = \{ A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0,1] \}$$

• $\gamma|_{]-\infty,1]}$ - — — — - $[BA)$

$\lambda < 0$ $\quad 1 \quad$ $\lambda > 1$

A $\quad$ B

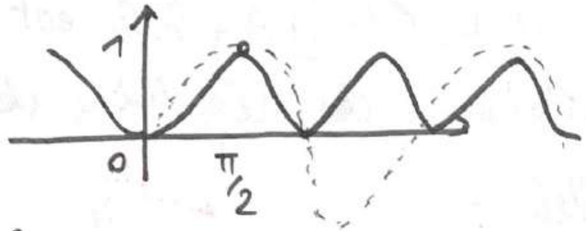
e) étudier courbe $G : \theta \mapsto G_\theta$, où G_θ est barycentre de A & B à poids respectifs $(\cos^2(\theta), \sin^2(\theta))$

Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$$G(\gamma) = (1 - \sin^2\theta)A + \sin^2\theta\, B$$

$$G(\gamma) = \gamma(\sin^2\theta)$$

4 $\sin^2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$



π-périodiq

• $\sin^2$ est :
- π-périodiq
- $\nearrow$ $[0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,1]$ (bijc°)
- $\searrow$ $[\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow [0,1]$ (bijc°).

Ainsi G oscille entre A & B en partant de A à B pr $\theta \in [0, \pi/2]$, puis de B à A pr $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ & ainsi de suite.

9) : La courbe de G est régulière ? par longueur d'arc ?

courbe de G régulière ?

$$G'(\theta) = (\sin^2\theta)'\,\overrightarrow{AB} = 2\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{AB} = \sin(2\theta)\,\overrightarrow{AB}$$

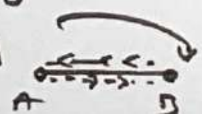
M1) $\left[\cos^2\theta\, A + \sin^2\theta\, B\right]' = (\cos^2\theta)' A + (\sin^2\theta)' B = 2\cos\theta(-\sin\theta) A + 2\sin\theta.\cos\theta\, B$

M2) $G(\theta) = \gamma(\sin^2\theta)$

$$G'(\theta) = \gamma'(\sin^2\theta).\,[\sin^2\theta]' = \overrightarrow{AB}\,\underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} = \sin 2\theta.\,\overrightarrow{AB}$$

ccl G n'est pas une paramétrisation régulière sur $\mathbb{R}$ car $G'(\theta) = 0$ si $\theta \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$

dérivée = 0



& ĉ $\|\sin 2\theta.\,\overrightarrow{AB}\| \neq 1$, elle n'est pas par longueur d'arcs m̂ sur $]k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}[$ là où elle est régulière

f) soit $I := [\theta_A, \theta_B]$, G est injective sur cet intervalle tq $G_{\theta_A} = A$, $G_{\theta_B} = B$.

→ Mq long^n de $G|_I$ ne dépd pas du choix de I. calcule la.

· comme $I = [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$

$$|G|_I| = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \|\underbrace{\sin 2\theta}_{>0}.\,\overrightarrow{AB}\|$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\| \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = AB$$

on pouvait conclure que $|G|_I| = AB$ en utilisant que $G|_{]0,\frac{\pi}{2}[}$ est une reparamétrisation de $\gamma_{]0,1[}$; est une repar de $\gamma\left(\frac{t}{AB}\right)\Big|_{]0,AB[}$

$$\Rightarrow \left| \mathcal{G}|_{]0,\frac{\pi}{2}[} \right| = \left| \gamma_{[0,1]}|_{]0,1[} \right|$$
$$= \left| \gamma_{[0,AB]}\left(\frac{t}{AB}\right) \right|$$
$$= \left| [0,AB] \right| = AB .$$

Cercle

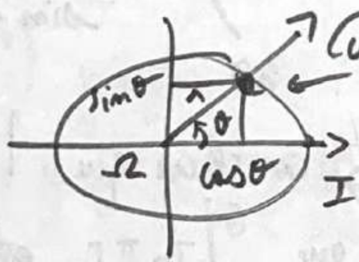
Ex 2 Paramétrisation standards.

$\rightarrow$ courbe paramétrée $\mathcal{C} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} a + r\cos(\theta) \\ b + r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

a) Mq qu'il s'agit d'une paramétrisation du $C(O,r)$ & $O(a,b)$ $\leftarrow \Omega$ centre.

M1 Par déf de $\cos\theta$ & $\sin\theta$.

$\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ est une paramétrisation du cercle unité $\mathcal{C}(\Omega, 1)$ $\Omega(0,0)$



Ainsi $\in T_{\vec{\Omega O}}(H_{\Omega,r}(\mathcal{C}(\Omega,1)))$

$$\overset{\shortparallel}{T_{\vec{\Omega O}}}\left(\mathcal{C}(\Omega, r)\right) = \mathcal{C}(O, r)$$

$$\underbrace{T_{\vec{\Omega O}} \circ \underbrace{H_{\Omega,r} \circ \mathcal{C}}_{\substack{\shortparallel \\ (\cos\theta,\, \sin\theta)}}}_{r\cos\theta,\ r.\sin\theta} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(O,r)$$

(a,b)

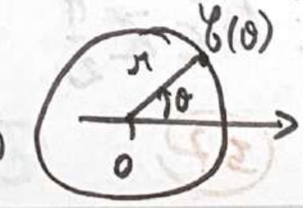
$$(a + r.\cos\theta + b + r.\sin\theta) = \mathcal{C}(\theta)$$

M2 $\mathcal{C}(\theta) \in \mathcal{C}(O,r)$

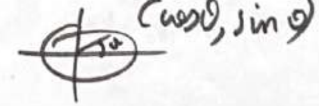
$$\Leftrightarrow O\mathcal{C}(\theta) = r \Leftrightarrow \frac{\|\vec{O\mathcal{C}(\theta)}\|}{r} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|(\cos\theta, \sin\theta)\| = 1$$

$$\frac{\vec{O\mathcal{C}(\theta)}}{r} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}(\theta) - O) = \frac{1}{2}\left[(a + r.\cos\theta, b + r\sin\theta) - (a,b)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$



58



b) ss q^{lle} condi° cette paramétrisa° est "par longueur d'arc".

$$\mathscr{C}'(\theta) = \left[(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)\right]'$$

$$\mathscr{C}'(\theta) = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

$$\|\mathscr{C}'(\theta)\| = r\ \underbrace{\|(-\sin\theta, \cos\theta)\|}_{=1} = r$$

ainsi $\mathscr{C}$ est régulière (si $r \neq 0$ $\iff$ $\mathscr{C}(0,r)$ cercle non-dégénéré en un point).

→ Elle est par longueur d'arc ssi $\underline{r=1}$.

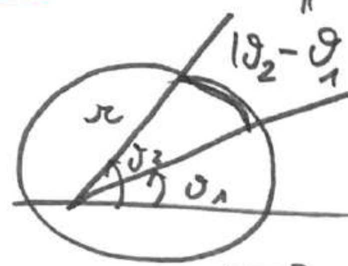
c) Donner une paramétrisation par longueur d'arc de $\mathscr{C}(0,r)$.

$$\mathscr{C}_1(\theta) = \mathscr{C}\left(\frac{\theta}{r}\right) \text{ vérifie } \mathscr{C}_1'(\theta) = \mathscr{C}'\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)'$$

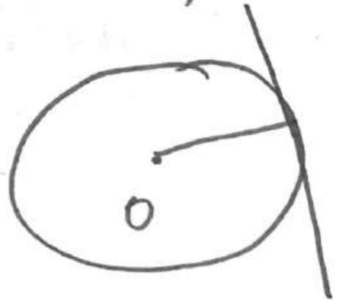
$$\Rightarrow \|\mathscr{C}_1'(\theta)\| = \left\|\mathscr{C}'\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\|\cdot\frac{1}{r} = r\cdot\frac{1}{r} = 1.$$

Rq $$\left|\mathscr{C}_{[0,2\pi]}\right| = \int_0^{2\pi} \underbrace{\|\mathscr{C}'(\theta)\|}_{2} = 2\pi r$$

$$\left|\mathscr{C}_{[\vartheta_1,\theta_2]}\right| = |\theta_2 - \theta_1|\cdot r$$



d) Mq tangente au point $\mathscr{C}(t)$ est $\perp$ à $\overrightarrow{O\mathscr{C}(t)}$



courbe régulière
⇓
tangente.

$$T_{\mathscr{C}(\theta)} = D_{\mathscr{C}(\theta),\,\mathscr{C}'(\theta)} \quad \perp (O\mathscr{C}(\theta))\ ?$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathscr{C}'(\theta) \perp \overrightarrow{O\mathscr{C}(\theta)} \iff \langle \mathscr{C}'(\theta) \mid O\mathscr{C}(\theta)\rangle = 0$$

$$\langle \sim \mid \cdots \rangle = \langle r(-\sin\theta, \cos\theta) \mid r(\cos\theta, \sin\theta)\rangle$$

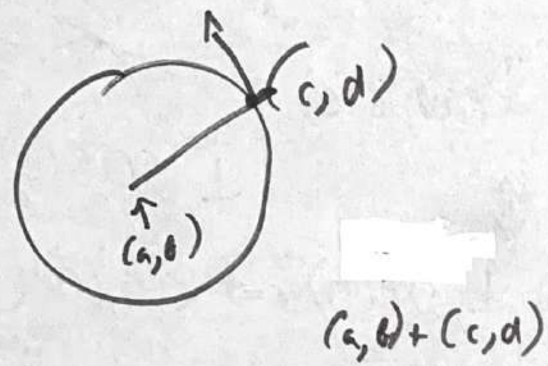
$$= -r^2\sin\theta\cdot\cos\theta + r^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

e) Donner une paramétrisation de la tangente au point $\mathcal{C}(\theta)$.

$t \mapsto \mathcal{C}(\theta) + t\, \mathcal{C}'(\theta)$ est une paramétrisation de $D_{\mathcal{C}(\theta), \mathcal{C}'(\theta)}$

$t \mapsto (a + r(\cos\theta - t\sin\theta), b + r(\sin\theta + t\cos\theta))$

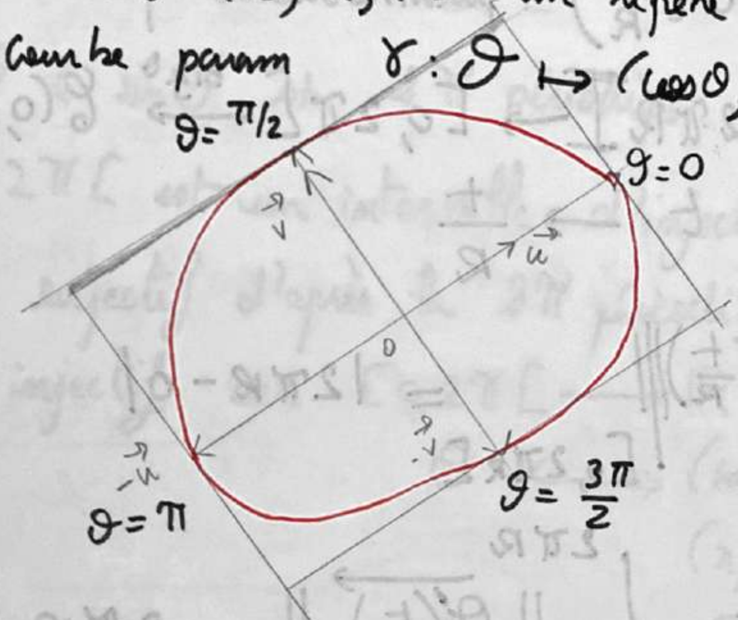
f) Donner



Ex5 Ellipse

soit $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthog.

courbe param $\gamma : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)_{\mathcal{R}}$



$\gamma(\theta) = M_\theta$

la courbe est contenu ds $[-1,1]^2_{\mathcal{R}}$.

$O \to (\cos\theta, \sin\theta)_{\mathcal{R}} = O + \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{v} \}\, M_\theta$

$\underline{\theta = 0}$ $\quad O + 1.\vec{u} + 0.\vec{v} = O + \vec{u}$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad O + 0.\vec{u} + 1.\vec{v} = O + \vec{v}$.

a) $\mathcal{C}$ est un cercle ssi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \equiv \mathcal{C}(O, \|\vec{u}\|)$

si $\|\vec{u}\| \neq \|\vec{v}\|$:

$OM_\theta = \sqrt{\cos^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \sin^2(\theta)\, \|\vec{v}\|^2}$

car $\overrightarrow{OM_\theta} = \cos\theta\, \|\vec{u}\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta . \|\vec{v}\| . \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ainsi OM_θ oscille entre $\min(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$ et $\max(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$.

min max

b) Mq qu'il s'agit d'une paramétrisaθ régulière.

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}}$ $\quad \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$

$= -\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v}$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta\, \|\vec{v}\|^2} \geq$

$\geq \min(\|u\|, \|v\|) \underbrace{\sqrt{\sin^2 + \cos^2}}_{1}$

> 0

$\Rightarrow$ la courbe est régulière

car $\gamma'(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta$.

c) Si q^lle condit° cette paramétrisat° est "par longueur d'arc" ?

γ est paramétré par longueur d'arc si $\forall\, \theta \quad \|\gamma'(\theta)\| = 1$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta\, \|\vec{v}\|^2} = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta\, \|\vec{u}\|^2 + \cos^2\theta\, \|\vec{v}\|^2 = 1$

$\Rightarrow (\theta = 0)\ \|v\| = 1,\ (\theta = \frac{\pi}{2}),\ \|u\| = 1$

et si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ ($\Leftrightarrow$ repère orthonormé)

$\Rightarrow \|\gamma'(\theta)\| = 1$

Dans ce cas l'ellipse est $\mathcal{C}(0,1)$.

(Parenthèse) Périmètre du cercle. ex2

• $t \mapsto \theta\left(\frac{t}{R}\right)$ paramétrisat° par longueur d'arcs

• $[0, 2\pi R[\longrightarrow [0, 2\pi[\xrightarrow{\text{bij}^\circ} \mathcal{C}(0,R)$.

$t \longrightarrow \frac{t}{R}$

périm $\mathcal{C}(0,R)$ $= \left\| \theta\left(\frac{t}{R}\right) \right\|_{[0,2\pi R[} = |2\pi R - 0|$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi R} \underbrace{\left\| \overrightarrow{\theta'\left(\frac{t}{R}\right)} \right\|}_{1} = 2\pi R$.

e) Déterminer un intervalle maximal d'injectivité $I = [\theta_{min}, \theta_{max}[$.

$\cos\theta$ & $\sin\theta$ st 2π périodiqs.

$[0, 2\pi[$ est un intervalle d'injectivité max car surjectif d'après la 2π périodicité.

et injectif car

$$\underbrace{[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{Bij}]{\simeq} \mathbb{R}}$$
$$\theta \hookrightarrow (\cos\theta, \sin\theta), \quad (x,y) \xrightarrow[\text{Bij}]{\simeq} (x,y)_{\mathbb{R}}$$

la composée est injective.

Notaᵗ : $\hookrightarrow$: injectif

$\simeq$: bijectif.

---

on dmq q ça reste vrai pr

$$\mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) + \dots + \mu_n f(x_n) \leq f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n)$$

si $\sum \mu_i = 1$ (st des barycentres)

soit Γ la courbe géom. de $\gamma|_I$. on note $r_1 = \|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\| = r_2$. Le support $\gamma(I)$ de γ est appelée ellipses de rayons r_1 et r_2, on note E.

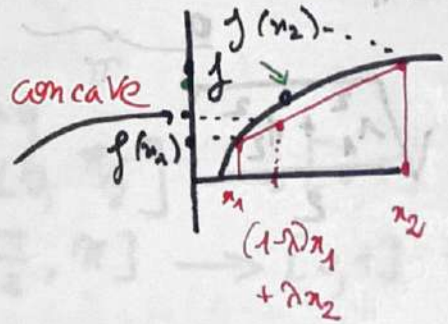
E le périmètre de la longueur $|\Gamma|$.

f) Mq $2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \leq |\Gamma| \leq 2\pi \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{\sqrt{2}}}$

Il faut q'on dmq que

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta\, r_1^2 + \cos^2\theta\, r_2^2}\, d\theta \leq \frac{2\pi\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{\sqrt{2}}$$

R si f est f concave



$(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

$\rightarrow f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$

$$(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$$

et $\int_I f(t)\,\underset{\mu(t)}{dt} \leq f\left(\int_I \mu(t)\,dt\right)$ si $\int_I \mu(t)dt =$

Dans notre cas, $\sqrt{\cdot}$ est concave

$$\sqrt{\sin^2\theta\, r_1^2 + \cos^2\theta\, r_2^2} \geqslant \sin^2\theta\sqrt{r_1^2} + \cos^2\theta\sqrt{r_2^2}$$

$$= \sin^2\theta\, r_1 + \cos^2\theta\, r_2$$

$$2\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta\, r_1^2 + \cos^2\theta\, r_2^2} \times \frac{1}{2\pi}\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, r_1^2 + \sin^2\theta\, r_2\, d\theta}$$

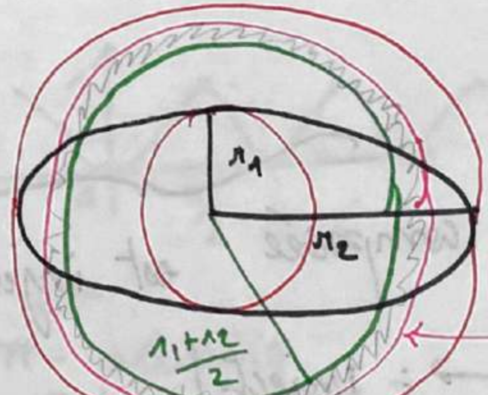
$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, r_1^2\, d\theta + 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, r_2^2\, d\theta}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[r_1^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta}_{\pi} + r_2^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta}_{\pi}\right]}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$$

$$|\Gamma| \geqslant \int_0^{2\pi} r_1\sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} r_2\cdot\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \pi(r_1 + r_2) = 2\pi\,\frac{r_1 + r_2}{2}.$$



$r_1 < r_2$

$$r_1 \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2} \leqslant |\Gamma| \leqslant \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \leqslant r_2$$

g) Mq $\exists!$ uniq couple de pts $\{M_1, M_2\}$

tq $(M_1, M_2) = \max\limits_{A,B \in E} (AB)$

$AB \leq M_1 M_2$

$A, B \in \Gamma$.

$AB \leq AO + OB$

si $A = \gamma(\theta_\theta)$, $B = \gamma(\theta_B)$

$OA = \sqrt{\cos^2\theta_A \, r_1^2 + \sin^2\theta_A \, r_2^2} \leq r_1$

$\underset{\uparrow}{=}$ si $\cos\theta_A = 1$, $\theta_A = 0 \; [\pi]$

ssi $\theta_A = 0$.

$OB = \sqrt{\;-\;\theta_B \;-\; \theta_B -\;} \leq r_1$

$AB \leq OA + OB \leq 2 r_1$

$\underset{\uparrow}{=}$ $O \in [AB]$ $\Downarrow$ $A \neq B$

$\underset{\uparrow}{=}$ $\theta_A \equiv 0 \; [\pi] \leftrightarrow \theta_A \in \{0, \pi\}$

$\theta_A \equiv 0 \; [\pi] \leftrightarrow \theta_B \in \{0, \pi\}$

$\Rightarrow \{\theta_A, \theta_B\} = \{0, \pi\}$.

ainsi $AB \leq M_1 M_2$ si $M_1 = \gamma(0)$, $M_2 = \gamma(\pi)$.

h) m.q. qu'il n'y a que 2 symétries orthogonales q préservent cette ellipse.

si S une isométrie $\Downarrow$ $M_1' M_2' = M_1 M_2$

$S(\Gamma) = \Gamma$

$S(M_1) = M_1' \in \Gamma$

$S(M_2) = M_2' \in \Gamma$

$\Rightarrow M_1' M_2' = \max\limits_{A,B \in \Gamma} AB$

$\Rightarrow \{M_1', M_2'\} = \{M_1, M_2\} \Leftrightarrow$ $M_1 = M_1'$ ou $M_1' = M_2$, $M_2' = M_1$

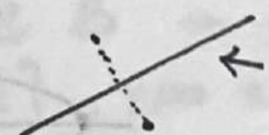
si S - symétrie :

et $M_1 = M_1'$ ($\Rightarrow M_2 = M_2'$)

$\Rightarrow$ M_1 et M_2 $\in$ axe de symétrie

et si $M_1' = M_2$

et $M_2' = M_1$.



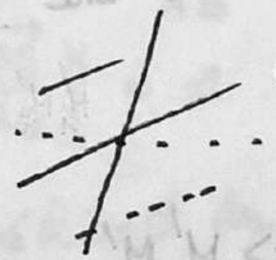
Si $M_1' = M_2$ et $M_2' = M_1$ alors $\forall P$ tq

$$M_1P = M_2P$$

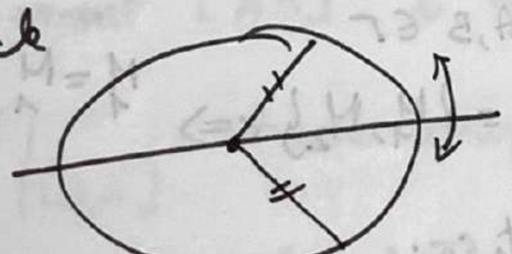
$$\Rightarrow M_1'P' = M_2'P' \quad (\text{ou } P' = S(P) \text{ car } S\text{-isométrie})$$

$$\Rightarrow S(\mu_{[M_1,M_2]}) = \mu_{[M_1,M_2]}$$

$$F \Rightarrow S = S_{\mu[M_1,M_2]}$$

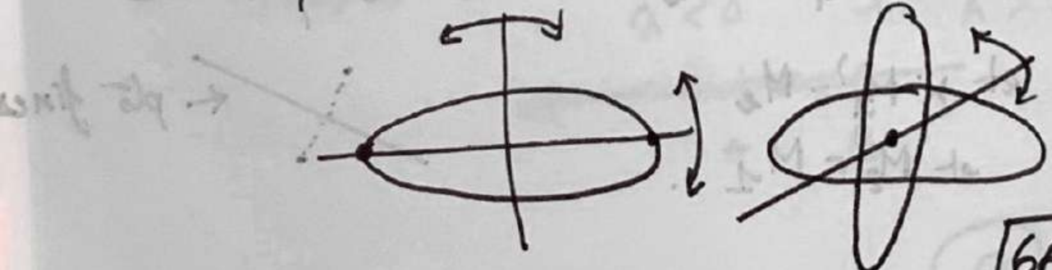


NB cercle



Un cercle a une ∞té d'axes de symétrie.

Une ellipse (non cercle) a seulement 2.

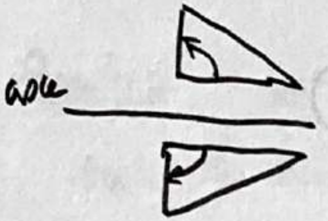


TD 7 : TRANSFORMATIONS & ISOMETRIES DU PLAN

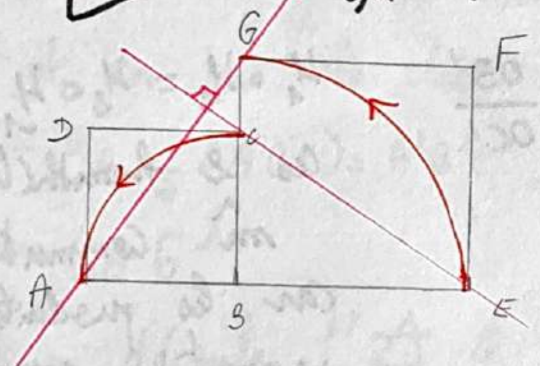
Ex 1 — Isométrie du plan

↳ symétrie axiale, glissée, centrale

→ translaθ, rotaθ, réflexions



$R_{O,\pi} = H_{O,-1}$; $H_{O,1} = Id$



MI / (analytiq)

on se place repère @ $(B, \vec{BE}, \vec{BG})$

on exprime ds ce repère, équa droites

MII / Pr dmq 2 droites st $\perp$, ĝ ax rotaθs :

- mq qu'elles st images de 2 autres droites $\perp$
- $R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) = D_2$
- $R_{O,\frac{\pi}{2}}(D_1) \,//\, D_2$

$\Big\}\ D_1 \perp D_2$.

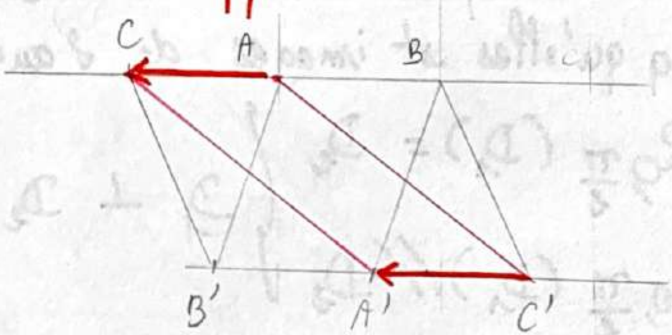
soit $R_{B,\frac{\pi}{2}} = R$ alors $\left.\begin{array}{l} R(E) = G \\ R(C) = A \end{array}\right\} \Rightarrow R((EC)) = (GA)$

$\Rightarrow (EC) \perp (GA)$ car l'une est l'image par rotaθ de $\frac{\pi}{2}$.

Ex 2 (TH de Pappus)

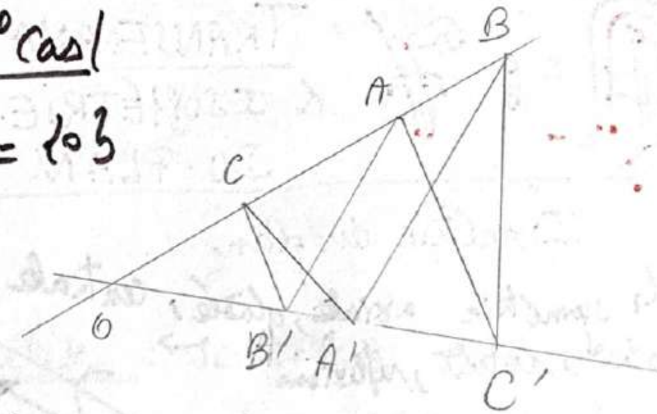
1° cas

$\mathcal{D} // \mathcal{D}'$



2° cas

si $D \cap D' = \{O\}$



Rq : On ne pt pas partir du principe que A, B, C & A', B', C' st disposés exact comme sur l'image. Mq $(AC') // (A'C)$.

$T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{B'A'}}$ car $ABA'B'$ ▱ $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$

$T_{\overrightarrow{BC}} = T_{\overrightarrow{C'B'}}$ car $BCB'C'$ parallélog

On aimerait savoir $T_{\overrightarrow{AC}} = T_{\overrightarrow{C'A'}} \Rightarrow (AC') // (CA')$

$\exists$ cette translat°.

et c $T_{\overrightarrow{AC}} = T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ et $T_{\overrightarrow{C'A'}} = T_{\overrightarrow{B'A'}} \circ T_{\overrightarrow{C'B'}}$

les translat°s commutent

$$T_{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}} \qquad\qquad T_{\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{C'B'}}$$

$$T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{BC}} = T_{\overrightarrow{B'A'}} \circ T_{\overrightarrow{C'B'}}$$

$H_1 = H_{O, \frac{OB}{OA}} = H_{O, \frac{OA'}{OB'}}$ (Thalès)

$H_2 = H_{O, \frac{OC}{OB}} = H_{O, \frac{OB'}{OC'}}$

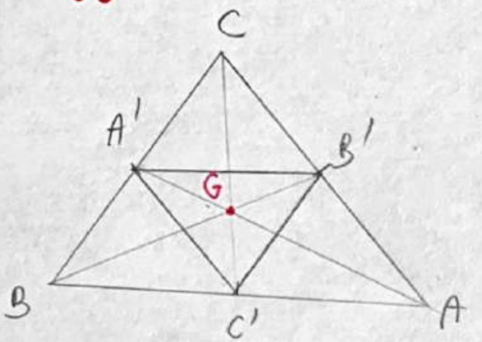
$H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$

ces 2 homothéties de m̂ centre commutent car les produits des rapports commutent.

On termine le cas 2 de m̂ façon que cas 1 ac H_1 & H_2 à la place de T_1 & T_2.

Ex 3 Polygone des milieux

a)



Analyse : si ABC existe, alors A'B'C' sera le triangle des milieux de ABC.

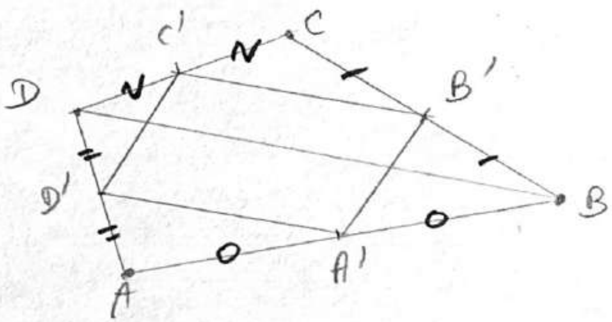
Et dc on sait les choses suivantes :

- $H_{G,-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C'$; $H_{G,-2}(A'B'C') = ABC$
- $G = G'$

Ainsi découle l'∃ & l'unicité de $ABC = H_{G,-2}(A'B'C')$

Une autre façon de voir les choses est que (CA) est l'uniq droite // (A'C') q passe par B' et de m̂ pr les 2 autres.

b)



Analyse : si ABCD existe.

Mq ce qu'on observe sr la fig, A'B'C'D' parallélog.

En effet d'après TH des milieux (Thalès)

$\underbrace{\overrightarrow{D'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}_{\triangle ABD} \underbrace{= \overrightarrow{C'B'}}_{\triangle CDB}$ ⇒ A'B'C'D' paralléloĝ.

Ainsi on pt conclure directement que si A'B'C'D' n'est pas un paralléloĝ alors ABCD n'existe pas.

on pt mq si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_{A'}(A)$, $C = S_{D'}(B)$, $D' = S_{C'}(C)$ alors $S_{D'}(D) = A$

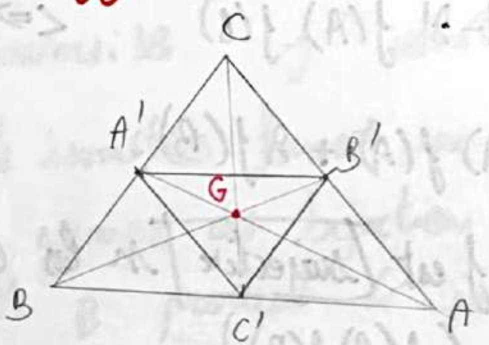
⇒ ∀ A, le ABCD construit convient.

nbr impair pts ⇒ tjrs ∃ n gones tq ce n gones soit le $\frac{1}{2}$.

la m̂ chose fonne pr 2n points si condi° $\sum \overrightarrow{B_i B_{2i}} = 0$

Ex 3 Polygone des milieux

a)



Analyse : si ABC existe, alors A'B'C' sera le triangle des milieux de ABC.

Et dc on sait les choses suivantes :

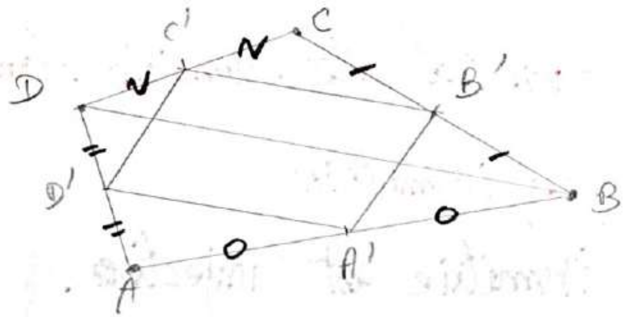
- $H_{G,-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C'$; $H_{G,-2}(A'B'C') = ABC$
- $G = G'$

Ainsi découle l'∃ & l'unicité de $ABC = H_{G,-2}(A'B'C')$

Une autre façon de voir les choses est que (CA) est l'uniq droite // (A'C') q passe par B' et de m̂ pr les 2 autres.

nbr impair pts ⇒ tjrs n gones tq ce n gones soit le $\frac{1}{2}$.

b)



Analyse : si ABCD existe.

Mq ce qu'on observe sr la fig, A'B'C'D' parallélog.

En effet d'après Th des milieux (Thalès)

$$\underbrace{\overrightarrow{D'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}_{\Delta ABD} = \underbrace{\overrightarrow{C'B'}}_{\Delta CDB} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ parallélog.}$$

Ainsi on pt conclure directement que si A'B'C'D' n'est pas un parallélog alors ABCD n'existe pas.

On pt mq si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_{A'}(A)$, $C = S_{D'}(B)$, $D' = S_{C'}(C)$ alors $S_{D'}(D) = A$

⇒ ∀ A, le ABCD construit convient.

la m̂ chose fonctionne pr 2n points ss condi° $\sum \overrightarrow{B_i B_{2i}} = 0$

Classificat° des isométries planes

Ex 6 Pptés isométries

a) Mq isométrie est injective.

on suppose $f(A) = f(B) \Leftrightarrow f(A)f(B) = 0 = AB \Leftrightarrow A = B$.

si 2 images mm ⇒ 2 pts départs st mm.

⇔ injective.

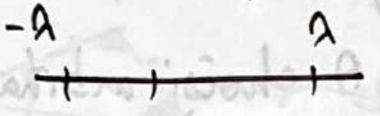
b) Mq isom f conserve l'alignement & l'ordre sur les droites.

$B \in [AC] \Leftrightarrow AB + BC = AC$

$\Leftrightarrow f(A)f(B) + f(B)f(C) = f(A)f(C)$

$\Leftrightarrow f(B) \in [f(A), f(C)]$

c) Mq isom f préserve barycentres.



$M = (1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda \vec{AB}$

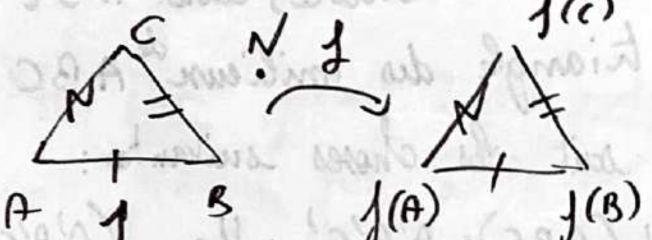
$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = |\lambda|\, AB \\ BM = |1-\lambda|\, AB \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(A)f(M) = |\lambda|\, f(A)f(B) \\ f(B)f(M) = |1-\lambda|\, f(A)f(B) \end{cases}$ $\Leftrightarrow f$ affine.

$\Leftrightarrow f(M) = (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$.

d) d'après c) f est $\boxed{\text{surjective}}$ sur les droites.

$f((AB)) = (f(A)f(B))$



base affine

⇕

A, B, C vérifient les 3 inégalités triangulaires strictes $\Leftrightarrow f(A), f(B), f(C)$ base affine

↓

$\forall M \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu, \nu, \lambda+\mu+\nu = 1$

$M \in \operatorname{Im} f$

$\Leftrightarrow M = \lambda f(A) + \mu f(B) + \nu f(C)$

$= f(\lambda A + \mu B + \nu C) = \cancel{f}$

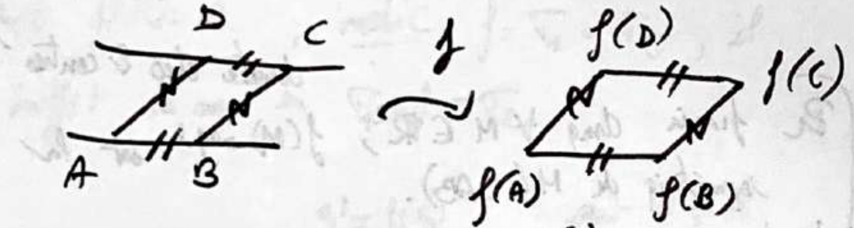
en exercice 3 symétries, Rotat° translat° réflexions

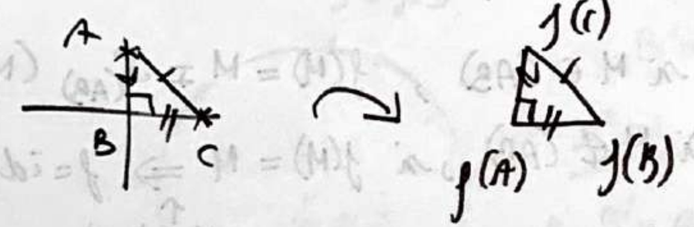
75

Vu en cours f, g isom si f & g sont
f inversible f^{-1} isométrie.

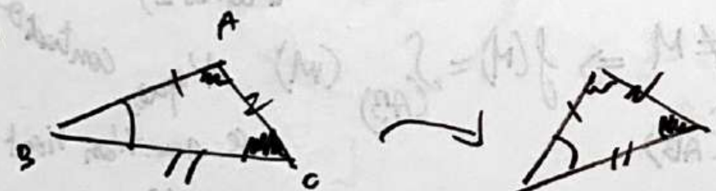
$\Rightarrow$ les isométries forment un ss-groupe du groupe des bijections (car ss-ens stable p produit & inverse.

e) Mq isom conserve parallélisme & $\perp$té droites.





Pythagore.



Rq : les isométries préservent $\angle$ angles

p. affine
angles
bijective

Ex 7 a) Mq isom fixant 2 pts distincts A et B fixe tous les points de (AB).

soit $f(A)=A$, $f(B)=B$, soit $M \in (AB)$

$\Rightarrow \exists \lambda,\ M = (1-\lambda)A + \lambda B$

$\Rightarrow f(M) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$

$f(M) = (1-\lambda)A + \lambda B = M.$

b) Mq isom fixant 3 pts nalis = id.

soit $f(A)=A$, $f(B)=B$, $f(C)=C$ & A, B, C non-alignés & soit $M \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \lambda, \mu, \nu$; $\lambda+\mu+\nu=1$.

A, B, C base affine

$M = \lambda A + \mu B + \nu C \Rightarrow f(M) = \lambda f(A) + \mu f(B) + \nu f(C)$
$= \lambda A + \mu B + \nu C = M$

c) Mq isom fixant 2 pts distincts est l'idté ou une réflexion et on précisera l'axe.

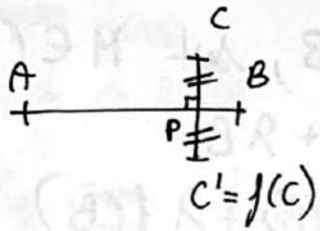
$f(A)=A$, $f(B)=B$, soit C non aligné à A & B

1° cas si $f(C)=C \overset{(b)}{\Rightarrow} f = Id$

2° cas si $f(C) \neq C$ (indic 1) Mq) $f(C) = C'$ sym $C/(AB)$
2) Mq) $f = S_{AB}$

Mq si $f(C) \neq C$ alors $f(C)$ & C sont symétriqs p/ $(AB) \iff (AB)$ médiatrice de $[Cf(C)]$

$\boxed{M1}$

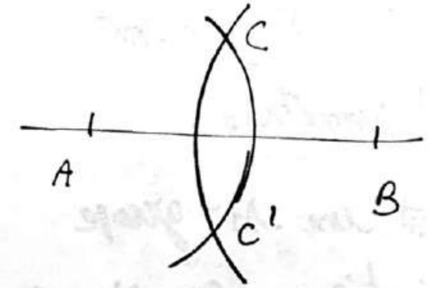


Soit $D \ni C$, $D \perp AB$,
$P := D \cap (AB)$

D'après a), $f(P) = P \Rightarrow f(D) \ni P$ et
comme $D \perp (AB) \Rightarrow f(D) \perp f(AB) = (AB)$
$\Rightarrow f(D)$ est la droite $\perp (AB)$ si p $P \Rightarrow f(D) = D$
$\Rightarrow f(C) \in D$ (car $f(C) \in f(D) = D$)

et comme $CP = f(C)f(P) = f(C)P$ et ĉ $C \neq f(C)$
$\Rightarrow P$ milieu de $[C\underbrace{f(C)}_{C'}] \Rightarrow (AB) \perp D = (CC')$
et $(AB) \ni P$ milieu de $[CC']$
$\Rightarrow (AB)$ médiatrice de $[CC']$.

$\boxed{M2}$



2 cercles q se coupt en 2 pts
CC' est médiatrice de (AB).
$\Rightarrow C$ sym $/(AB)$ C'.

$\rightarrow$ $C \in \mathcal{C}(A, AC) \cap \mathcal{C}(B, BC)$ et comme
$f(C)A = CA$
$f(C)B = CB$ $\Rightarrow C' \in \mathcal{C}(A, AC) \cap \mathcal{C}(B, BC)$
$\Rightarrow$ si $C' \neq C \Rightarrow C'$ symétriq $C/(AB)$

droite des 2 centres de cercle.

Pr finir dmq $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $f(M) = M$ ou est la symétriq de $M/(AB)$.

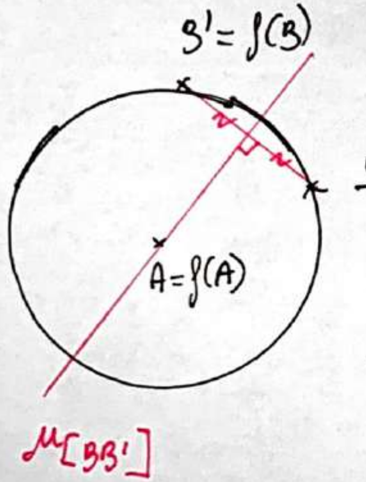
$\boxed{M1}$ si $M \in (AB)$, $f(M) = M = S_{(AB)}(M)$
si $M \notin (AB)$, si $f(M) = M \Rightarrow f = id \Rightarrow f(C) = C$!!
d'après 1) contradiction
$\Rightarrow f(M) \neq M \Rightarrow f(M) = S_{(AB)}(M)$ d'après ce que l'on vient de voir pr C.
$\Rightarrow f = S_{(AB)}$

$\boxed{\text{M2}}$ $S_{(AB)} \circ f : \begin{cases} A \to A \\ B \to B \\ C \to C \end{cases} \Rightarrow S_{(AB)} \circ f = Id$

* on compose $S_{(AB)}$ à gauche des 2 côtés $\Rightarrow f = S_{(AB)}$

d) Mq isom fixant un point comme produit d'au plus 2 réflexions.

soit $f(A) = A$; indic $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$, il suffit de mq $\sigma_1 \circ f = \sigma_2$



soit $B \neq A$, $B' = f(B)$

1° cas

si $B' = B$

$\Rightarrow f = Id$ (produit de 0 ou 2 fois m̂ réflexion)

2° cas si $B' \neq B$, soit $D = \mu_{[BB']}$ la médiat de $[BB']$

• $S_D(A) = A$ car $A \in D$ car $AB = AB'$ car $AB = f(A)f(B)$ (f isométrie)

$S_D(B') = B$ car $D = \mu\,[BB']$. ▲

▲ $\Rightarrow S_D \circ f(A) = A$

$S_D \circ f(B) = B$

$S_D \circ f$ est une isométrie. (comme la composée de 2 isométries)

$\overset{c)}{\Longrightarrow} S_D \circ f = \begin{cases} Id \\ \sigma - \text{réflexion} \end{cases} \Leftrightarrow f = \begin{cases} f = S_D \ * \\ f = S_D \circ \sigma \ ** \end{cases}$

* produit de 1 réflexion

** produit de 2 réflexions.

e) Conclure que tte isom est produit d'au plus 3 réflexions.

si $f(A) = A'$ si $A = A' \to$ cqfd d'après d)

si $f(A) \neq A'$ $\underbrace{S_{\mu[AA']} \circ f}_{\text{isométrie q fixe un point}}(A) = A$

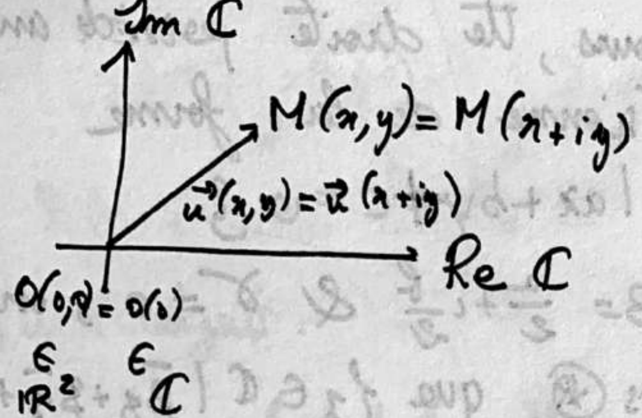
$\Rightarrow$ produit d'au plus 2 isom.

$\Leftrightarrow \sigma_1 \circ f = \sigma_2 \circ \sigma_3 \Leftrightarrow f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$

Toute isométrie est la composée d'au plus 3 réflexions.

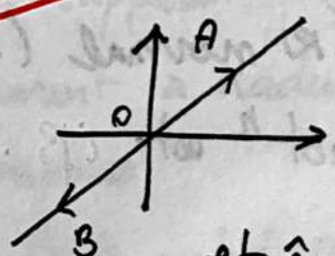
TD 8 : Nombres Complexes

R1



$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

Ex1 (Droites)



O, A, B alignés

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{OA} \,//\, \overrightarrow{OB}$

et c' $\overrightarrow{OA}(a-0) = \overrightarrow{OA}(a)$

$\overrightarrow{OB}(b-0) = \overrightarrow{OB}(b)$

$\overrightarrow{OA} \,//\, \overrightarrow{OB}$

$\Updownarrow$

(si $B \neq 0$) $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow a = \lambda b$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

(si $B = 0$) pas de condit°

R4 : $\overrightarrow{OA}$ & $\overrightarrow{OB}$ m̂ sens si $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

si $B \neq 0$, A, O, B alignés (ds cet ordre)

ssi $a = \lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp. $\lambda \in \mathbb{R}^+$)

si "st" entre A & B.

$a = \lambda b \Leftrightarrow a\bar{b} = \lambda \underbrace{b\bar{b}}_{|b|^2 > 0}$ (resp $\in \mathbb{R}^*$

si $B = 0$ $(b = 0)$

A, O, B st alignés (& O entre A & B, mais pas "st")

et ds ce cas $a\bar{b} = 0 \in \mathbb{R}, \in \mathbb{R}_+$ & $\notin \mathbb{R}_+^*$.

en ccl A, O, B alignés ssi $a\bar{b} \in \mathbb{R}$

D+, A, O, B ds cette ordre ssi $a\bar{b} \in \mathbb{R}_-$

& $O \in \,]A, B[$ ssi

Im pur

$\vec{u} \times e^{i\theta}$ $\Downarrow$ rotaθ

$\vec{u} \times$ réel $\Downarrow$ homothétie.

2) Mq

Indic : soit $\beta = a + ib$, $z = x + iy$, $a, b, x, y, \gamma \in \mathbb{R}$.

Qℓ est l'ens $\{\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0\}$?

Qℓ est lien entre $\bar{\beta} z$ & $\beta \bar{z}$?

Rép : $\overline{\bar{\beta} z} = \bar{\bar{\beta}}\, \bar{z} = \beta \bar{z}$.

$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} = 2 . \mathrm{Re}(\bar{\beta} z)$.

$\longrightarrow \bar{\beta} z + \beta \bar{z} = 2 \,\mathrm{Re}\,(\bar{\beta} z)$

$= 2 \mathrm{Re}\big((a - ib)(x + iy)\big)$

$= 2\, [\underbrace{ax + by}_{\text{produit scalaire}}]$

produit scalaire „ $\mathrm{Re}(\bar{\beta} z)$

$ax + by = \dfrac{\bar{\beta} z + \beta \bar{z}}{2} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\{\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0\} = \{(x,y) \mid 2ax + 2by + \gamma = 0\}$

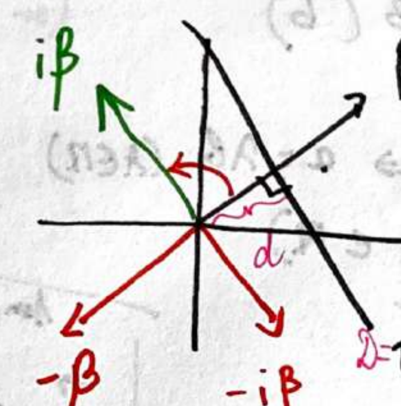
D'après le cours, tte droite possède une équaᵒ cartésienne de la forme

$\{(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$

en posant $\beta = \frac{a}{2} + i \frac{b}{2}$ & $\gamma = c$, on trouve ~~que~~ d'après ⊛ que $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0\}$ est une équaᵒ complexe de cette m̂ droite.

Rq : β est l'affixe d'un vectᴿ normal ($2(a, b)$) & l'affixe d'un vectᴿ directⁿ est $i\beta$.

La distce $d(0, \mathcal{D}) =$



$\mathcal{D} = \{\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0\}$

$e^{i\pi k}$

76

$\bar{z} = a - ib$ conjugué de z

c) $\{\overline{\beta_1} z + \beta_1 \overline{z} + \gamma_1 = 0\} \parallel \{\overline{\beta_2} z + \beta_2 \overline{z} + \gamma_2 = 0\}$

ssi $\beta_1 \overline{\beta_2} \in \mathbb{R}$ (q a) ex 1)

$(\iff \overline{\beta_1} \beta_2 \in \mathbb{R})$

$(\iff \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbb{R})$

Rq $\{\overline{\beta_1} z + \beta_1 \overline{z} + \gamma_1 = 0\} = \{\overline{\beta_2} z + \beta_2 \overline{z} + \gamma_2 = 0\}$

ssi $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \iff \beta_1 \gamma_2 = \beta_2 \gamma_1 \iff \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$

soit $\mathcal{D} : x + 2y = 1$

d) Équa° complexe de $\mathcal{D}$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\tfrac{1}{2} + i)\overline{z} + (\tfrac{1}{2} - i) z - 1 = 0\}$$

e) Déterm. ttes équa°s complexes q définissent la m̂ droite $\mathcal{D}$. où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid (\tfrac{\lambda}{2} + \lambda i)\overline{z} + (\tfrac{\lambda}{2} - \lambda i) z - \lambda = 0\}$$

f) Dét ttes équa°s compl q déf droite // à $\mathcal{D}$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid (\tfrac{1}{2} + i)\overline{z} + (\tfrac{1}{2} - i) z + \gamma = 0\} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

g) Dét. $\vec{\mathcal{D}}$, // à $\mathcal{D}$ q passe par O.

$$\vec{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\tfrac{1}{2} + i)\overline{z} + (\tfrac{1}{2} - i) z = 0\}$$

cas $\gamma = 0$

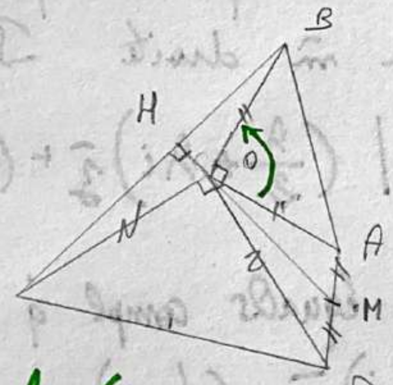
h) Dét Éq comp. q Défin // à $\mathcal{D}$ & passe par $A = (2,1)$ et

$$\{z \in \mathbb{C} \mid (\tfrac{1}{2} + i)\overline{z} + (\tfrac{1}{2} - i) z = (\tfrac{1}{2} + i)\overline{(2+i)} + (\tfrac{1}{2} - i)(2+i) = 4$$

i) 

a, b $\rightarrow \frac{a}{2} + i\frac{b}{2}$

Ex 2 :



a) Mq M, O, H alignés.

Indic : on note a, b, c, d les affixes des pts A, …, H en supposant O = 0 (zéro)

comment se traduit l'énoncé en termes d'équa$^\circ$s complexes ?

$\triangle$ AOB rectgle isocèle en O $\Leftrightarrow b = ia$ (resp $b = -ia$ si l'orientation inverse.)

$\triangle$ COD ———— $\Leftrightarrow d = ic$ ($d = -ic$)

M milieu de [AD] $\Leftarrow$ $m = \dfrac{a+d}{2}$

$OH \perp CB \Leftrightarrow \pm ih\,(\overline{c-b}) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow h\,(\overline{c-b}) \in i\mathbb{R}$

Ainsi si $b = ia$, $d = ic$; $-ib = a$

$\Rightarrow m = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{i(-b+c)}{2} = i\,\dfrac{c-b}{2}$

Ainsi $\overrightarrow{OM}(m) \perp \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}\left(\dfrac{c-b}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (OM) \perp (BC)$

ccl : $(OH) = (OM)$ car $(OH) \perp (BC)$

cqfd.

RQ m̂ chose si signe "−" pr $b = -ia$, $d = ic$.

P12 Un cercle est invariant par les rotations du même centre que ce cercle.

DM $M \in \mathcal{C}(A,R)$, c $R_{A,\theta}$ est une isométrie qui fixe A

$\Rightarrow R_{A,\theta}(A)R_{A,\theta}(M) = AM = R$

$\Rightarrow R_{A,\theta}(M) \in \mathcal{C}(A,R)$

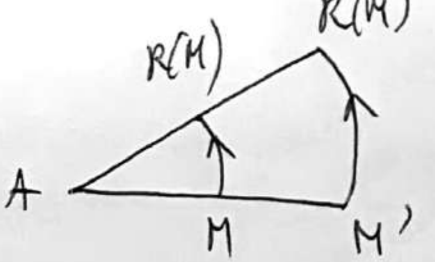
$\Rightarrow R_{A,\theta}(\mathcal{C}(A,R)) \subset \mathcal{C}(A,R)$

et c $R_{A,\theta}$ est une bijection & l'image vérifie la même chose :

$R_{A,-\theta}(\mathcal{C}(A,R)) \subset \mathcal{C}(A,R)$

$\Rightarrow R_{A,\theta}(\mathcal{C}(A,R)) = \mathcal{C}(A,R)$

P13 $R_{A,\theta} \circ H_{A,\lambda} = H_{A,\lambda} \circ R_{A,\theta}$



$R_{A,\theta}(H_{A,\lambda}(A+\vec{u})) = R_{A,\theta}(A+\lambda\vec{u})$

$= A + R_\theta(\lambda\vec{u}) = A + \lambda R_\theta(\vec{u})$

$= H_{A,\lambda}(A + R_\theta(\vec{u})) = H_{A,\lambda} = R_{A,\theta}(A+\vec{u})$

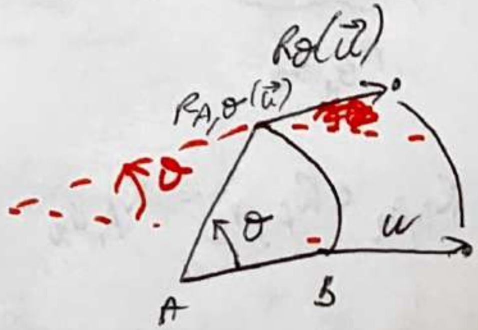
P14 $R_{A,\theta}(B+\vec{u}) = R_{A,\theta}(B) + R_\theta(\vec{u})$

de $R_{A,\theta} \circ T_{\vec{u}} = T_{R_\theta(\vec{u})} \circ R_{A,\theta}$.

DM $R_{A,\theta}(B+\vec{u}) = R_{A,B}(A + \vec{AB} + \vec{u})$

$= A + R_\theta(\vec{AB} + \vec{u})$

$= \underbrace{A + R_\theta(\vec{AB})}_{R_{A,\theta}(\underbrace{A+\vec{AB}}_{B})} + R_\theta(\vec{u})$



$= R_{A,\theta}(B) + R_\theta(\vec{u}) = T_{R_\theta(\vec{u})} \circ R_{A,\theta}(B)$

et c $R_{A,\theta}(B+\vec{u}) = R_{A,\theta} \circ T_{\vec{u}}(B)$

P15 $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_1+\theta_2}$

DM

$\forall M,\ R_{A,\theta_1}\circ R_{A,\theta_2}(M) = R_{A,\theta_1}\circ R_{A,\theta_2}(A+\overrightarrow{AM})$

$= R_{A,\theta_1}(A + R_{\theta_2}(\overrightarrow{AM}))$

$= A + \underbrace{R_{\theta_1}\circ R_{\theta_2}}_{R_{\theta_1+\theta_2}}(\overrightarrow{AM}) = R_{A,\theta_1+\theta_2}(\overbrace{A+\overrightarrow{AM}}^{M})$

Rq : $R_{A,\theta_1}\circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_2}\circ R_{A,\theta_1}$

P16 $R_{A_1,\theta}\circ R_{A_2,-\theta}$ est une translaθ.

DM

$R_{A_1,\theta}\circ R_{A_2,-\theta}(M) = R_{A_1,\theta}(A_2 + R_{-\theta}(\overrightarrow{A_2M}))$

$= R_{A_1,\theta}(A_2) + \underbrace{R_\theta\circ R_{-\theta}}_{Id}(\overrightarrow{A_2M})$

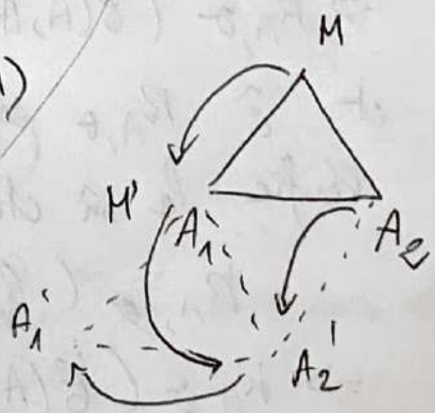
$= R_{A_1,\theta}(A_2) + M - A_2 = M + \underbrace{A_2 R_{A_1,\theta}(A_2)}_{\vec u}$

$= T_{\vec u}(M)$

$\Rightarrow R_{A_2,\theta}\circ R_{A_1,-\theta} = T_{\vec u}$

où $\vec u = \overrightarrow{A_2 R_{A_1,\theta}(A_2)}$

@ $R_{A_1,+60°}\circ R_{A_2,-60°}(M)$



Rq cette translaθ est l'id ssi $A_1 = A_2$.

P17 si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \; [2\pi]$

$\Rightarrow R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2} = R_{A_3,\theta_1+\theta_2}$ mais l'exprεθ de A_3 en f de A_1, A_2, θ_1 & θ_2 n'est pas simple.

DM Cherchons un point fixe de $R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2}$ ss la forme $A+\vec{u}$.

$R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2}(A+\vec{u}) =$

$= R_{A_1,\theta_1}(A_2 + R_{\theta_2}(\vec{u}))$ si $A+\vec{u}$ fixe

$= R_{A_1,\theta_1}(A_1) + R_{\theta_1+\theta_2}(\vec{u}) \overset{\downarrow}{=} A+\vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_2 R_{A_1,\theta_1}(A_2)} = (Id - R_{\theta_1+\theta_2})(\vec{u})$

Comme on a vu $(Id - R_{\theta_1+\theta_2})(\vec{u})$ (prop 5) $\overset{\shortparallel}{\vec{0}}$ ssi $\vec{u}=0$

$\Rightarrow$ injective $\Rightarrow$ inversible $\Rightarrow \exists! \vec{u} = (Id \circ R_{\theta_1+\theta_2})^{-1}[\overrightarrow{A_1 R_{A_1\theta_1}(A_2)}]$

Ainsi $\exists!$ M tq $R_{A_1\theta_1} \circ R_{A_2\theta_2}(M) = M$ si $\theta_1+\theta_2 \neq 0 \; [2\pi]$

Par conséquent

$R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2}(M+\vec{u}) = R_{A_1,\theta_1}(R_{A_2,\theta_2}(M) + R_{\theta_2}(\vec{u}))$

$= \underbrace{R_{A_1\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2}(M)}_{M} + R_{\theta_1+\theta_2}(\vec{u})$

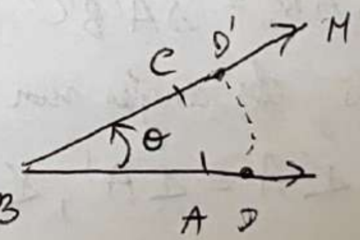
$= R_{M,\theta_1+\theta_2}(M+\vec{u})$

P18 Ns avons la caractérisation de la mesure algébrique d'un angle $[2\pi]$:

$\measuredangle ABC = \theta \Leftrightarrow R_\theta(\overrightarrow{BA}) \parallel \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow R_{B,\theta}(A) \in [BC)$

$\Leftrightarrow R_{B,\theta}([BA)) = [BC)$



& (+)

f19

§22. Triangles

(D1) Un **triangle** (non-dég) est la donnée d'un triplet de 3 pts (non alignés) appelés les **sommets** du triangle. On note ΔABC le triangle dont les sommets st (A, B, C). Les **côtés** de ce triangle st les sgmts $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ & ses droites des côtés st (AB), (BC), (CA).

(D2) 2 triangles ΔABC & $\Delta A'B'C'$ st dits **égaux** & on note $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ssi ssi $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.

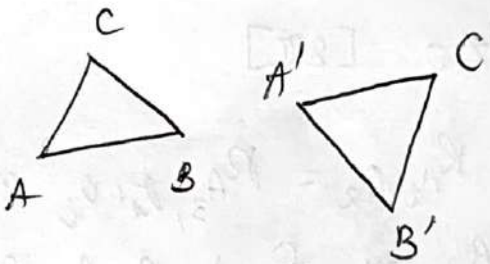
⚠ ordre sommets

→ égalité aussi $\cong, \simeq, \triangleq$

(D3) si $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ alors on a les égalités des angles non orientés

$$\measuredangle A = \measuredangle A', \measuredangle B = \measuredangle B', \measuredangle C = \measuredangle C'.$$

(DM)



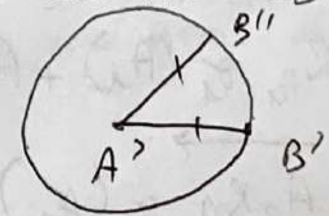
idée : Les isométries préservent les angles (prop.) et on va démq q'$\exists$ T isométrie f_q $T(ABC) = A'B'C'$.

(Isométrie) Rotaⁿ $\circ$ Translaⁿ.

soit $\cdot$ $T_{AA'}(B) = B'' \Rightarrow A'B'' = AB$

$\cdot$ $R_{A',\theta}(B'') = B'$ existe car $A'B'' = AB = A'B'$

$\theta = \measuredangle B''A'B'$



$\cdot$ $R_{A',\theta} \circ T_{\overrightarrow{AA'}}(C) = C''$

si C' du m̂ côté que C'' $/\!/ (A'B')$

sinon $S = f_{(AB)}$

On pose $T = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{A,A'}$

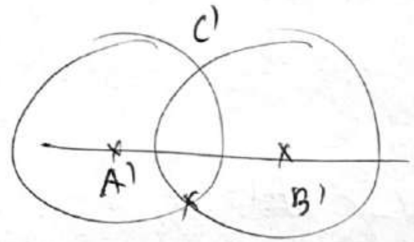
$T(A) = \underbrace{S \circ \underbrace{R_{A',\theta} \circ \underbrace{T_{\overrightarrow{AA'}}(A)}_{A'}}_{A'}} = A'$

$T(B) = \underbrace{S \circ R_{A',\theta} \circ \underbrace{T_{\overrightarrow{AA'}}(B)}_{B''}}_{B'} = B'$

$T(C) = C'''$ est un point du m̂ côté C' par rapport à $(A'B')$ et $C'''A' = CA = C'A'$

T isométrie $\longrightarrow$ $C''B' = CB = C'B'$

$\Rightarrow C''' \in \mathcal{C}(A', C') \cap \mathcal{C}(B', C') \Rightarrow C''' = C'$



cl on a bien construit une isom. T tq

$T(A, B, C) = A', B', C'$

$\Rightarrow \measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$

$\measuredangle C = \measuredangle C'$

P6 ASSE :

1) • $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

2) • $AB = A'B'$ ainsi $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

3)

Dm

$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \overset{\text{props}}{\Rightarrow} \measuredangle A = \measuredangle A'$

(1) $\Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow$ (3)

3) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$

4) $\Delta A'B'C'$ est l'image p une isom. de ΔABC.

(4) $\Rightarrow$ (1)

par définits

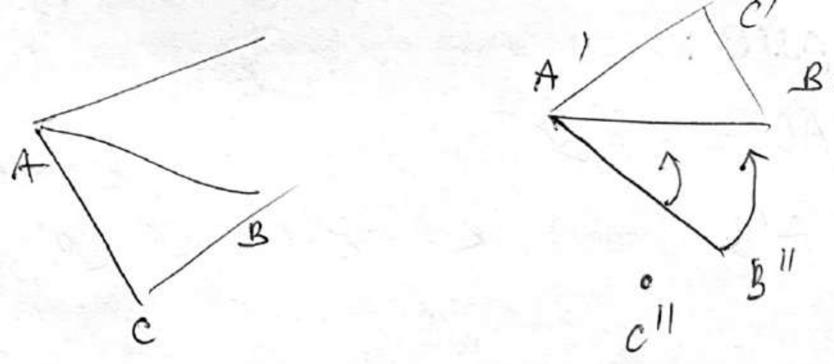
Mq $(2)_B \Rightarrow (4)$.

on construit T exactement ĉ ds la démo de 5) prop

ie $T = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{AA'}$ de sorte que

$T(A) = A'$ $T(B) = B'$ et $T(C)$ & C st de m̂ côté.

(v)



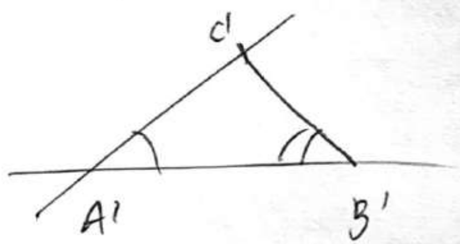
La sle chose q reste à dmq est $T(C) = C$

② + T préserve la long^R & les angles.

C' & $T(C)$ st de m̂ côté de $(A'B')$

& $\measuredangle C'A'B' = \measuredangle CAB = \measuredangle T(C)A'B'$

& $\measuredangle C'B'A' = \measuredangle CBA = \measuredangle T(C)B'A'$



ainsi $T(C) \in [A'C')$

$T(C) \in [B'C')$

$\Rightarrow T(C) \in [A'C') \cap [B'C') = \{C'\}$

$\Rightarrow T(C) = C'$. (② ⇒ ④)

Pour ③, m̂ procédure :

$\measuredangle C'A'B' = \measuredangle CAB = \measuredangle T(C)A'B'$

$\Leftrightarrow T(C) \in [A'C')$

& d+ $C'A' = CA = T(C)A'$

$\Rightarrow T(C) \in \mathcal{C}(A', C') \cap [A'C') = \{C'\}$

$\Rightarrow T(C) = C'$ (③ ⇒ ④)

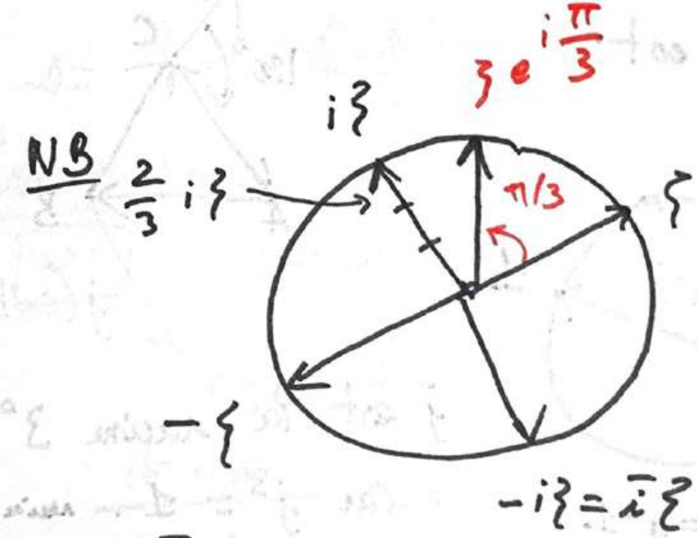
D7 2 triangles ΔABC & $\Delta A'B'C'$

Exo Polygones Réguliers

Ex 5 Condit° géométriqs.

a) condit° nécess^re, suffisante sur affixes a, b, c de 3 points A, B, C du plan complexe pr $\triangle ABC$ soit équilatéral.

$a, b, c \in \mathbb{C}$ $\left(a = x_A + i y_A, \ldots \text{ où } A = (x_A, y_A)\right)$



Idée 1 : $|\measuredangle A| = |\measuredangle B| = |\measuredangle C| = \frac{\pi}{3}$

$\measuredangle A = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Idée 2 : $|AB| = |BC| = |CA|$

$\Leftrightarrow |b-a| = |c-b| = |a-c|$

Indic : ABC équilatéral "directe"

ssi $R_{A,60°}(B) = C$

ssi $R_{60°}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$

ssi $e^{i\pi/3}(b-a) = (c-a)$

ssi $e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) = (c-a)$ triangle direct. équil

ssi $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b-a) = (c-a)$

Dans le cas "indirect" $R_{A,-60°}(B) = C$

ssi $R_{-60°}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$

ssi $e^{-i\pi/3}(b-a) = (c-a)$

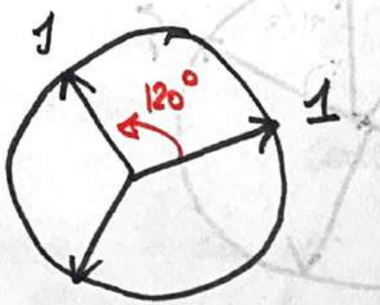
$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow e^{i\pi/3}(c-a) = (b-a)$

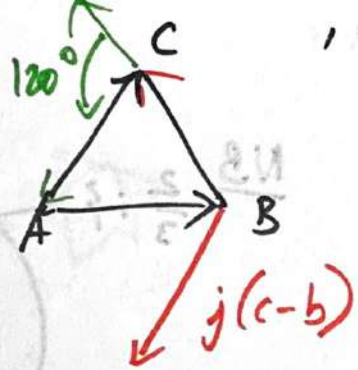
la forme $\boxed{M}$ est

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$j^3 = 1$



$j^2 = \bar{j} = j^{-1}$



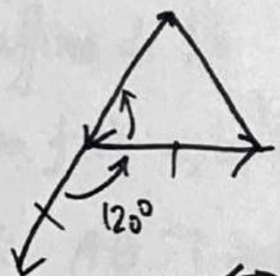
j est la racine 3° de l'unité car $j^3 = 1$. racine 1, j, $\bar{j}$

« $j = \sqrt[3]{1}$ »

$\boxed{a + jb + j^2c = 0} \iff a + jb - (1+j)c = 0$

$1 + j + j^2 = 0$

$\iff (a-c) = j\underbrace{(c-b)}_{\text{affixe}(\vec{BC})}$



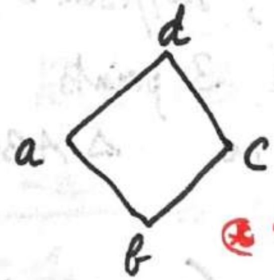
$\iff ja + j^2b + c = 0$

Ds cas indirect, $c + jb + j^2a = 0$

$\iff \boxed{a + j^{-1}b + j^{-1}c = 0}$

$\boxed{\text{So}}$ i est la racine 4° de l'unité ; $i = e^{i\pi/2}$

b) Cherchons des condi° nécessaire sur affixes a, b, c, d tq que A, B, C, D rectangle.



$e^{i\pi/2}(b-a) = (d-a)$

$\circledast \iff i(b-a) = (d-a)$

$$\circledast\begin{cases} * \ i(c-b) = (a-b) \\ * \ i(d-c) = (b-c) \\ * \ i(a-d) = (c-d) \end{cases}$$

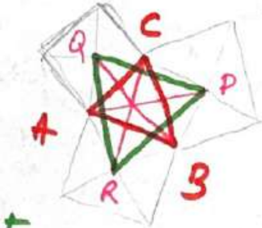
ds le cas indirect il suffit de :

- soit changer l'ordre pts.
- soit remplacer i par $-i = \bar{i}$

$$*\begin{cases} * \ (b-a) = (c-d) \\ * \ (c-b) = (d-a) \\ * \ \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \iff a+c = b+d \end{cases} \Big\} \text{ ABCD parallélog.}$$

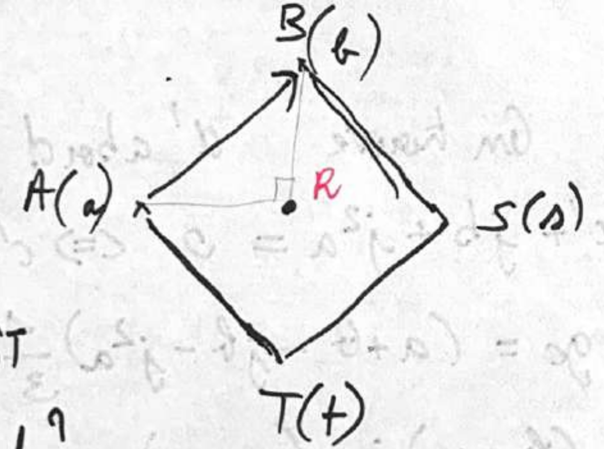
1 condi° $\circledast$ parmi * est suffisant

Ex7 Mq $AP \perp QR$
$BQ \perp RP$
$CR \perp PQ$
ed AP, BQ, CR concourantes.



Comme le pb est invariant par symétrie axiale (q change l'orienta) on pt supposer ABC direct ĉ sr le dessin.

Q° :



Q° sts les affixes de $S T$ en f de a, b ?

Si ABST indirect (à droite de $\overrightarrow{AB}$)

$-i(b-a) = (t-a)$

$\boxed{t = a - i(b-a)}$

$= (1+i)a - ib$

$(T = A + R_{-90°}(\overrightarrow{AB}))$

$s = b + i(a-b) = ia + (1-i)b$

Trouver r :

$\boxed{M1}$ $i(b-r) = (a-r)$

$R_{90°}(\overrightarrow{RB}) = \overrightarrow{RA}$

$\frac{ib-a}{i-1} = r$

$\boxed{M2}$ $r = \frac{a+s}{2} = \frac{a+ia+(1-i)b}{2} = \frac{(1+i)a+(1-i)b}{2}$

À vérifier $\frac{ib-a}{i-1} = \frac{(1+i)a+(1-i)b}{2}$

Ainsi $r = \frac{ib-a}{i-1}$, $p = \frac{ic-b}{i-1}$,

$q = \frac{ia-c}{i-1}$

Pr dmq $(AP) \perp (QR)$, $|AP| = 1$

il suffit de vérifier $R_{90°}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{RQ}$

$\Leftrightarrow i(p-a) = (q-r)$.

- $i(p-a) = i\left(\dfrac{ic - b - a(i-1)}{i-1}\right)$

$= (-c - ib - ia(i-1)) \times \dfrac{1}{i-1}$

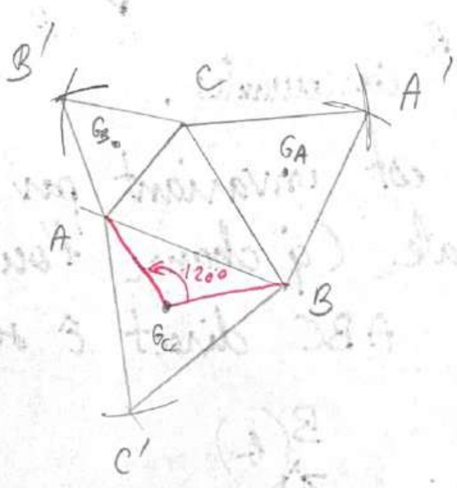
$= (-c - ib + a + ia) \dfrac{1}{i-1}$

- $q - r = \dfrac{ia - c - ib + a}{i-1} \overset{idem}{=} i(p-a)$

De m̂ pr 2 autres.

En ccl, comme (PA), (RC), (QB) st les droites des hauteurs du triangle PRQ $\Rightarrow$ elles sont concourantes en H orthocentre du ΔPQR.

Ex6 Triangle de Napoléon & point de Torricelli



soit a, b, c, a', b', c', g_A, g_B, g_C affixes.

MI) On trouve d'abord c'

$c' + jb + j^2 a = 0 \Leftrightarrow c' = -jb - j^2 a$

$\Rightarrow g_C = (a + b - jb - j^2 a)\dfrac{1}{3}$.

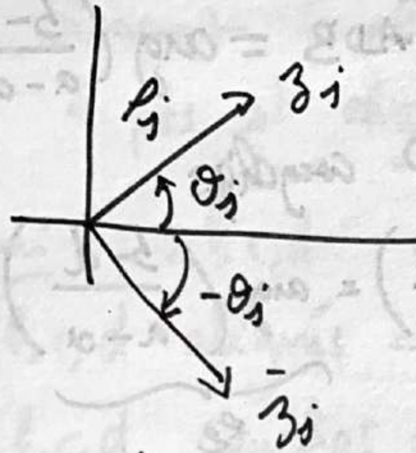
MII) $(b - g_C)j = (a - g_C) \Rightarrow g_C = \dfrac{jb - a}{j-1}$

De m̂ $g_A = \dfrac{jc - b}{j-1}$, $g_B = \dfrac{ja - c}{j-1}$

il suffit de vérifier

$\rightarrow g_A + j g_B + j^2 g_C = 0$

Rq :



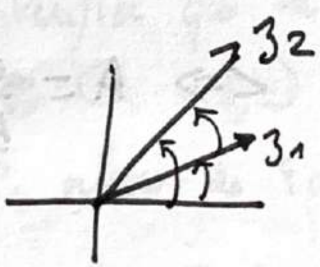
$z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$

$\bar{z}_j = \rho_j e^{-i\theta_j}$

- $z_1 + z_2 \overset{?}{\Rightarrow}$ arg mod

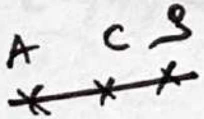
$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{1}{z_i} = \rho_i^{-1} e^{-i\theta_1}$



$-z_i = \rho_i e^{i(\theta+\pi)}$

- $\angle z_2 0 z_1 = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
  $= \arg(z_1 \bar{z}_2)$



$\frac{a-c}{b-c} < 0$

Ex 10 (Birapports) a, b, c, d distincts

$$[a,b,c,d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{C}$$

a) Mq si 4 pts alignés alors birapport est réel.

→ on sait a, b, c alignés distincts ssi $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

& par aill^{rs} $\boxed{\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R} \text{ ssi } C \in [AB]}$

Ainsi comme a, b, c, d alignés

$\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}, \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R} \Rightarrow [a,b,c,d] \in \mathbb{R}$

Par ailleurs $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}^+$

ssi (a,b,c,d) alignés.

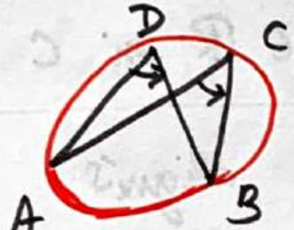
ssi $\frac{a-c}{b-c}, \frac{b-d}{a-d}$ de m̂ signe

ssi $C, D \in [A, B]$ ou C & $D \notin [A,B]$

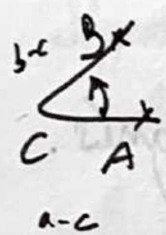
b) Mq si 4 pts cocycliqs alors l^R birapport est un nbr réel. Ds quel cas ce birapport est $\oplus$?

R/ A, B, C, D cocycliqs $\Rightarrow$

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB \pmod{\pi}$$



Et comme $\measuredangle ACB = \measuredangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$



$$= \arg(b-c) - \arg(a-c)$$

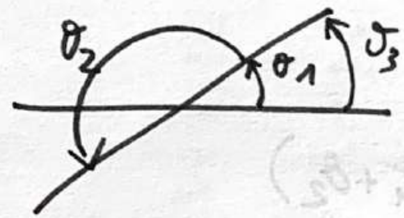
$$= \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)$$

$$(a-c)e^{i\theta} \,/\!/\, b-c \iff \frac{b-c}{a-c} = \ell e^{i\theta}$$

De m̂ $\measuredangle ADB = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right)$

Ainsi A, B, C, D cocycliqs

$$\Rightarrow \underbrace{\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)}_{\theta_1} = \underbrace{\arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right)}_{\theta_2} \pmod{\pi}$$



$$\iff \frac{b-c}{a-c} = \lambda \frac{b-d}{a-d} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$\iff \lambda = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} = [a,b,c,d] \in \mathbb{R}^*$$

c) Mq birapport 4 pts réel ssi 4 pts st alignés ou cocycliqs.

Résumé : a, b, c, d distincts

a, b, c, d alignés $\Rightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$

a, b, c, d cocycliqs $\Rightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$ non alignés les 4.

Ainsi il ns reste à vérifier que si 3 points alignés (@ a, b, c) & $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ alors les 4 alignés.

Supposons a, b, c, alignés & $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ alors $d \in$ à m̂ droite (abc).

a, b, c alignés $\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b-d}{a-d}$

$$\frac{b-d}{a-d} = \underbrace{[a, b, c, d]}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\frac{b-c}{a-c}}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow a, b, d$ alignés $\Rightarrow a, b, c, d$ alignés.

85

d) Mq 4 pts d'affixes non nulles st alignés alors l^{rs} images par $\frac{1}{\bar{z}}$ st alignées ou cocycliqs.

$$\left[\frac{1}{\bar{a}}, \frac{1}{\bar{b}}, \frac{1}{\bar{c}}, \frac{1}{\bar{d}}\right] =$$

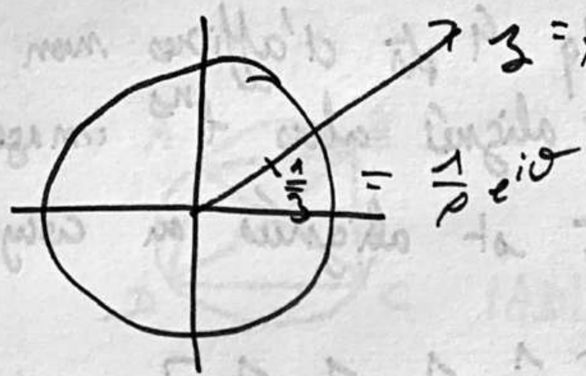
$$= \frac{\frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{c}}}{\frac{1}{\bar{b}} - \frac{1}{\bar{c}}} \times \frac{\frac{1}{\bar{b}} - \frac{1}{\bar{d}}}{\frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{d}}}$$

$$= \frac{(\bar{c}-\bar{a})(\bar{d}-\bar{b}) \,/\, \overline{abcd}}{(\bar{c}-\bar{b})(\bar{d}-\bar{a}) \,/\, \cancel{\overline{abcd}}}$$

$$= \overline{[a, b, c, d]} \in \mathbb{R} + \text{c)}$$

a)

Conjugué réel = réel

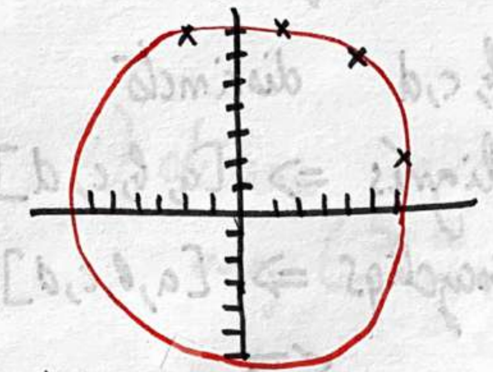


$$\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg(\bar{z}) = \arg(z)$$

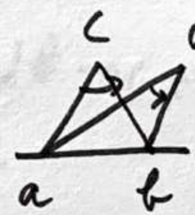
$$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|z|}$$

e) →

f) Mq points $-2+6i$, $1+7i$, $4+6i$ et $6+2i$ st $\boxed{\text{cocycliqs}}$
(a, b, c, d)



(i) Cherchons mq $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$



$$\frac{b-c}{a-c} : \frac{b-d}{a-d} = \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d}$$

(ii) mq 3 pts ne st PAS alignés ne conclure sr cocyclicité!

$\longrightarrow (b-c)(a-d) = (-3+i)(-8+4i)$

$= 20 - 20i = 20(1-i)$

$\hat{c}$ $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-3+i}{-6} \notin \mathbb{R}$

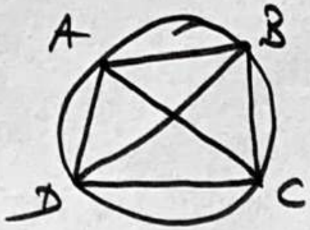
$\longrightarrow (a-c)(b-d) = -6(-5+5i) = 30(1-i)$

$[a, b, c, d] = \frac{20(1-i)}{30(1-i)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

⇒ a, b, c, d non alignés

⇒ cocycliqs.

Ex 9 (Th de Ptolémée & pts cocycliques)



a) Mq $|AC|.|BD| \leq |AB|.|CD| + |AD|.|BC|$

indic calculer $(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)$

$= \cancel{bd} - bc - ad + \cancel{ac} + dc - \cancel{db} - \cancel{ac} + ab$

$= -bc - ad + dc + ab$

$= (c-a)(d-b)$

On appliq l'inégalité entre les modules (triangle)

$|(c-a)(d-b)| = |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-d)|$

$\leq |\dots| + |\dots|$

& "=" ssi $(b-a)(d-c) = \lambda (d-a)(c-b)$

& $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

car $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

& "=" ssi $z_1 = \lambda z_2$

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

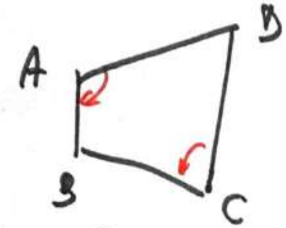
b) déduire

$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right)$ (mod π)

"=" ssi $\frac{b-a}{d-a} = -\lambda \frac{(b-c)}{d-c}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) + \pi \ [2\pi]$

comme A, B, C, D convexe



$\Rightarrow \sphericalangle DAB$ & $\sphericalangle DCB$ st de direction opposées. Ainsi si on considère $\arg \in]-\pi, \pi]$.

Ns savons que $\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)$ & $\arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right)$

est l'un dans $]-\pi,0[$ l'autre $]0,\pi]$

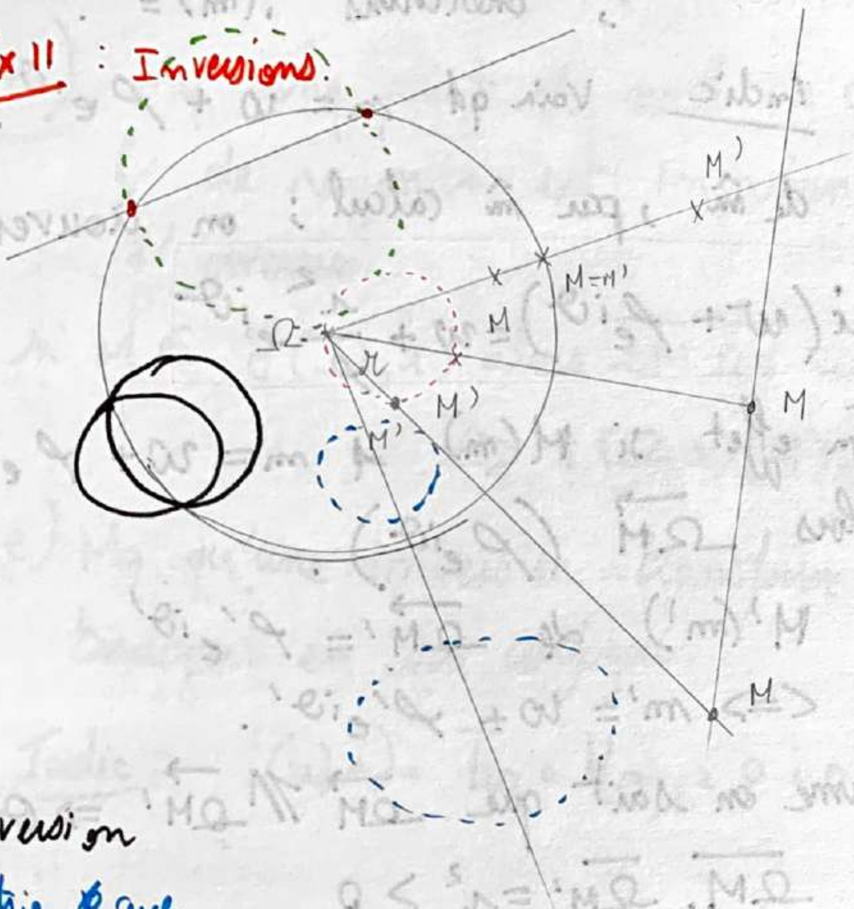
& si $\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)=\arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)=\arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \pm \pi \pmod{2\pi}$

cqfd

Inversions

Ex 11 : Inversions.



Inversion

symétrie $\not\!p$ cercle

droite $\xrightarrow{\text{envoie}}$ cercle
cercle → droite

cercle → cercle
droite → droite.

Si rapport:
alignés ou cocycliqs

Énoncé Une inversion $i(\Omega, r)$ de centre Ω, $r \in \mathbb{R}_+^*$ ds $P\setminus\{\Omega\}$; $M \mapsto M'$.

- ▷ M' sur droite ΩM
- ▷ $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2$

a) Déterminer image de $i(\Omega, r)$

$D_i = P\setminus\{\Omega\}$. et $i(D_i) = D_i$:

→ soit $M \in D_i$, on pose $M' = i(M)$ l'uniq point de $[\Omega M)$ à distce $\dfrac{r^2}{\Omega M}$ de Ω.

Ainsi $M = i(M')$ car $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$

$\Rightarrow M \in \mathrm{Im}\, i$. $\forall M \in D_i$

Au passage on a démontré $i(i(M)) = M \,(\Leftrightarrow\, \ell)$

invers° est involution.

c) en identifiant plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{C}$, donner expre° $i(0,1)$ puis $i(w, r)$ $\forall\, w \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

• cas de l'invers° / cercle unité.

$i = i(0,1)$, $M(m)$, $m \in \mathbb{C}$, $m = \rho e^{i\theta}$

$i(\Omega, r)$ $\quad \Omega(w)$, $w \in \mathbb{C}$

$i(\rho e^{i\theta}) = \rho' e^{i\theta'}$, mais comme $M' \in [\Omega M)$

$\iff \arg M' = \arg M \Rightarrow \theta' = \theta$.

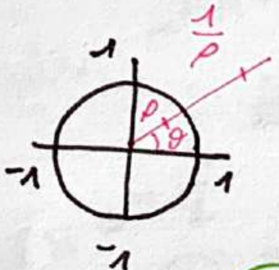
$i(\rho e^{i\theta}) = \rho' e^{i\theta}$, de + $\Omega M . \Omega M' = r^2$

$\rho . \rho' = r^2 = 1$

$\Rightarrow \rho' = \frac{1}{\rho}$.

donc $i(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\rho} e^{i\theta} = \frac{1}{\rho e^{-i\theta}} = \frac{1}{\bar{m}}$.

$i(m) = \frac{1}{\bar{m}}$, $\forall\, m \in \mathbb{C}^*$.



• cas général :

$i = i(w, r)$, cherchons $i(m) = ?$

indic voir qd $m = w + \rho e^{i\theta}$.

de m̂, par m̂ calcul ; on trouvera

$$\boxed{i(w + \rho e^{i\theta}) = w + \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta}}$$

En effet si $M(m)$ / $m = w + \rho e^{i\theta}$.

Alors $\overrightarrow{\Omega M}\,(\rho e^{i\theta})$.

Si $M'(m')$ / $\overrightarrow{\Omega M'} = \rho' e^{i\theta'}$

$\iff m' = w + \rho' e^{i\theta'}$.

Comme on sait que $\overrightarrow{\Omega M} \,/\!/\, \overrightarrow{\Omega M'} \Rightarrow \theta = \theta'$

et $\overline{\Omega M} . \overline{\Omega M'} = r^2 > 0$.

Et comme $\underbrace{|\overrightarrow{OM}|}_{\rho}\,\underbrace{|\overrightarrow{OM'}|}_{\rho'} = r^2 \Rightarrow \rho' = \frac{r^2}{\rho}$.

ainsi $i(w + \rho e^{i\theta}) = w + \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta} = w + \frac{r^2}{\overline{\rho e^{i\theta}}}$

$i(m) = w + \frac{r^2}{\overline{m - w}}$

car $\overset{M}{i(m)} = i(\overset{\Omega + \overrightarrow{\Omega M}}{w + \underbrace{(m - w)}_{\rho e^{i\theta}}}) = w + \frac{r^2}{\overline{m - w}}$

$\underline{R9}$: $i(\omega, r) = T_\omega \circ H_{\Omega, r^2} \circ i \circ T_{-\omega}$

d) Mq chq point du cercle de centre Ω & de rayon r est invariant par l'inversion.

- si $M \in \mathcal{C}(\Omega, r)$ alors $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M} = \Omega M . \Omega M = r^2$

$$\Longrightarrow i(\Omega, r)(M) = M.$$

e) Mq qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.

$\underline{\text{Indic}}$: $i(\omega, r) = T_\omega \circ H_{\Omega, r^2} \circ i \circ T_{-\omega}$

- birapport:

~~?~~ T, H invariance

multiplie par inverse conjugué:

conjugue birapport.

pas linéaire

symétrie multiplicative.

x	$\frac{1}{x}$
x	$-x$

symé additive

si $z = \frac{1}{z}$ alignés ou cocycliqs.

(9₁)

$z \to \frac{1}{z}$

$z \to \frac{1}{z} \to \frac{1}{z}$ géométrq ← Soi

birapport: $[a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}$

ainsi $[a+z, b+z, c+z, d+z] = [a,b,c,d]$

car $(a+z)+(c+z) = a+c$, de m̂...

$\Rightarrow [a,b,c,d]$ invariant par T_z $\forall z$

$$[\mu a, \mu b, \mu c, \mu d] = \frac{\mu(a-c)\mu(b-d)}{\mu(b-c)\mu(a-d)} = [a,b,c,d]$$

$\Rightarrow [a,b,c,d]$ invariant par $H_{\Omega,\mu}$. (ep si $\mu = r^2$)

$$\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right] = \overline{[a, b, c, d]}$$ d'après ex.10.d)

Rq si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow [i(a), i(b), i(c), i(d)] = \overline{[a,b,c,d]} \in \mathbb{R}$

dc si a, b, c, d cocycliqs ou ~~ou~~ alignés

$\Rightarrow i(a), i(b), i(c), i(d)$ de m̂.

Ainsi l'image d'une droite ou d'un cercle est contenu ds une droite ou un cercle.

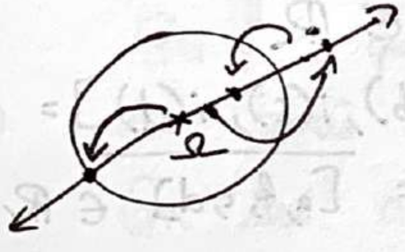
f) Mq inversion préserve les droites q passent par Ω.

D'après la déf$^{\circ}$ $i((\Omega M)) \subset [\Omega M)$

& $\hat{C}$ $i^2 = id \Rightarrow i([\Omega M)) = [\Omega M)$

ep $D \ni \Omega \Rightarrow D_+ \sqcup D_-$ 2 $\frac{1}{2}$ droites

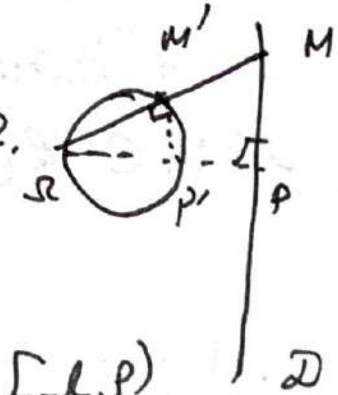
$i(D \setminus \Omega) = i(D_+ \sqcup D_-) = D_+ \sqcup D_- = D \setminus \{\Omega\}$



pts intérieur $\overset{\text{envoie}}{\curvearrowright}$ pts extérieur

g) Mq qu'elle envoie une droite q ne passe pas par Ω sur un cercle q passe par Ω.

soit la projec$^{\circ}$ orth. P de Ω sur droite $D \not\ni \Omega$.



soit $P' = i(\Omega, r)(P)$

ie $\Omega P \, \Omega P' = r^2$, $P' \in [\Omega, P)$

soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[\Omega P']$

& $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \Omega$.

Ainsi $\forall M \in D$, notons $M' = [\Omega M) \cap \mathcal{C}^*$

(l'existence vient du fait que $(\Omega M) \not\parallel D$ $\Rightarrow$ non tangent à $\mathcal{C}$.

Et maintenant $\triangle \Omega P' M' \sim \triangle \Omega M P$

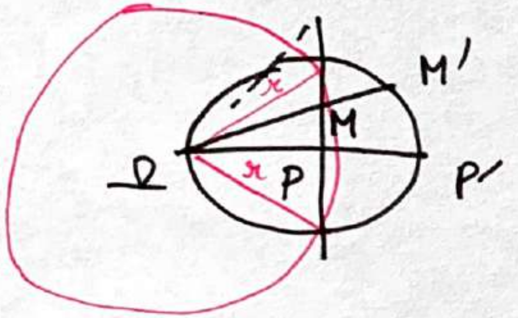
car $\measuredangle \Omega$ commun & $\measuredangle M' = \frac{\pi}{2} = \measuredangle P$

$[\Omega P']$ diamètre — par construc$^{\circ}$

$$\Rightarrow \frac{\Omega P'}{\Omega M'} = \frac{\Omega M}{\Omega P} \Rightarrow \Omega M' \cdot \Omega M = \Omega P' \cdot \Omega P = r^2$$

$$\Rightarrow i(\Omega, r)(M) = M'.$$

$$\Rightarrow \boxed{i(D) = \mathcal{C}^*, \quad i(\mathcal{C}^*) = D}$$



h) Mq qu'elle envoie tt cercle q ne passe pas par Ω sr un cercle q ne passe pas par Ω.

On sait que les droites s'envoie sur des droites ou sur des cercles q passe p Ω.
On sait aussi que si un cercle s'envoie sur une droite, ĉ $i^2 = id$, cette droite s'envoie sr le cercle.

cercle → droite
droite → cercle

cercle ↘ droit

droite$_\Omega$ → droite$_\Omega$

droite$_{\not\Omega}$ ↘ cercle$_{\not\Omega}$

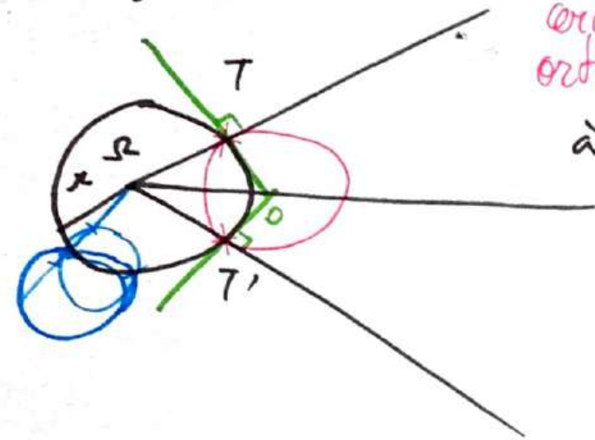
cercle$_\Omega$ ↘ droite ↘ cercle$_{\not\Omega}$

cercle

93

Ainsi un cercle q ne passe pas par Ω ne pt pas s'envoyer sur une droite.
Mais ns avons vu que l'image d'un cercle est une droite ou un cercle, dc ds notre cas c'est un cercle. Et par ailleurs : $i(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ $\Rightarrow$ $\Omega \notin \mathcal{C}$
$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{C}'$ car $i(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ est une droite.

i) Quels st les cercles invariants par $i(\Omega, r)$.

- $\mathcal{C}(\Omega, r)$ est invariant car composé de points fixes.
- 

cercles orthogonaux à $\mathcal{C}(\Omega, r)$

Ex 13