M44 — Fiche 1 — Exercices corrigés

Les énoncés sont ceux de la fiche "TD1 : le plan euclidien".
Les exercices non-traités sont laissés en travail personnel.
Les figures se trouvent à la fin du corrigé.

Exercice 1.

a. Nommons (α, β) les coordonnées de A et $ax + by = c$ une équation de $\mathcal{D}$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donc $\vec{u} = (-b, a)$, et un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{v} = (a, b)$. La droite $\mathcal{D}^\perp$ orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par A admet la représentation paramétrique $x = \alpha + at$, $y = \beta + bt$. Le point H de $\mathcal{D}^\perp \cap \mathcal{D}$ s'obtient en remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation de $\mathcal{D}$, ce qui donne $a(\alpha + at) + b(\beta + bt) = c$ soit encore $(a^2 + b^2)t = c - a\alpha - b\beta$ d'où la valeur $t = (c - a\alpha - b\beta)/(a^2 + b^2)$ du paramètre, donnant les coordonnées

$$(H) \qquad x = \alpha + \frac{a}{a^2 + b^2}(c - a\alpha - b\beta), \quad y = \beta + \frac{b}{a^2 + b^2}(c - a\alpha - b\beta).$$

Evidemment, ces expressions se simplifieront si l'on prend $\vec{v}$ normé ($a^2 + b^2 = 1$).

b. Par construction, si M est un point de $\mathcal{D}$ alors en vertu du théorème de Pythagore on a $AM^2 = AH^2 + HM^2$, qui est minimal pour $M = H$.

c. Soit $\mathcal{P}^-$ le demi-plan de bord $\mathcal{D}$ qui ne contient pas A. Pour tout point M de $\mathcal{P}^-$, il y a un point N de $\mathcal{D}$ qui appartient au segment $[AM]$, donc $AN \geq AM$, ce qui prouve que l'infimum de AN pour $N \in \mathcal{P}^-$ est égal à l'infimum de AM pour $M \in \mathcal{D}$; or on vient de voir que cet infimum est atteint en $M = H$. Par contre si $\mathcal{P}^+$ est l'autre demi-plan de bord $\mathcal{D}$, alors $A \in \mathcal{P}^+$ donc bien sûr la distance entre A et $\mathcal{P}^+$ (qui est nulle) est réalisée par A.

d. Il faut ici discuter selon la position de H par rapport à $[BC]$.

* Si $H \in [BC]$ alors H réalise la distance de A au segment $[BC]$ car il réalise même la distance de A à un ensemble plus grand (qui est $\mathcal{D}$).

** Si $H \notin [BC]$ alors on a ou bien $B \in [HC]$, ou bien $C \in [HB]$; comme les deux cas se traitent de la même manière, nous supposerons que $B \in [HC]$. Dans ce cas, pour tout $M \in [BC]$, il existe $\lambda \in [1, +\infty[$ tel que $HM = \lambda HB$; or, le triangle (AHM) est rectangle, donc par le théorème de Pythagore, on a $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{AH^2 + \lambda^2 HM^2}$. Pour que ceci soit minimal il faut que λ soit le plus petit possible, donc $\lambda = 1$. Dans ce cas de figure, le point réalisant le minimum est donc B. On conclut que le point qui réalise la distance de A à $[BC]$ est celui des deux points B, C qui est le plus proche de H.

Remarque. La question (a) exigeait une réponse "en coordonnées" (lorsque l'énoncé l'impose, il nous faut obéir). Mais les autres questions ne préconisaient pas de méthode. On est donc libre de les aborder autrement qu'en calculant bêtement toutes les équations et coordonnées dans le repère canonique. Il ne faut jamais oublier qu'en géométrie élémentaire, tout problème (en tout cas, tout problème que l'on puisse croiser dans les sujets de CAPES) peut se résoudre par l'algèbre pure, mais que bien souvent, ce n'est pas la meilleure méthode. Constatons-le en résolvant (b) par l'emploi de coordonnées :

b. La distance de A à $\mathcal{D}$ est par définition l'infimum de $d(A, M)$ lorsque M parcourt $\mathcal{D}$. Si (x, y) sont les coordonnées de M, comme $H, M \in \mathcal{D}$ qui est dirigée par $\vec{u}$, on pourra trouver un réel τ tel que $\vec{MH} = \tau\vec{u}$, c'est-à-dire

$$(M)\ \ x = \alpha + \frac{a}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) - b\tau, \quad y = \beta + \frac{b}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) + a\tau.$$

Alors, le vecteur $w = \vec{AM}$ aura pour coordonnées

$$(\vec{w}) \qquad x = \frac{a}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) - b\tau, \quad y = \frac{b}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) + a\tau,$$

donc le carré de sa norme vaudra

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) - b\tau\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta) + a\tau\right)^2 \\
&= \left(\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}(c - a\alpha - b\beta)^2 - 2\frac{ab}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta)\tau + b^2\tau^2\right) \\
&+ \left(\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}(c - a\alpha - b\beta)^2 + 2\frac{ab}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta)\tau + a^2\tau^2\right) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}(c - a\alpha - b\beta)^2 + (a^2+b^2)\tau^2
\end{aligned}$$

ce qui est clairement minimal pour $\tau = 0$; en ce cas on a $M = H$ (donc, H réalise la distance de A à $\mathcal{D}$) et cette distance vaut $|c - a\alpha - b\beta|/\sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 2.

a. Nommons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ et constatons que pour tout $M \in \mathcal{D}$, on a $AM^2 = AH^2 + HM^2$ en vertu du théorème de Pythagore dans le triangle (AHM). En posant $d = AH$, de trois choses l'une : si $d > r$, alors $AM = \sqrt{d^2 + HM^2} \geq d > r$ pour tout M, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$; si $d = r$, alors $AM = \sqrt{d^2 + HM^2}$ est égal à $\sqrt{d^2} = r$ si et seulement si $HM = 0$, c'est-à-dire $M = H$; si $d < r$, alors on a $AM = r$ si et seulement si $HM = \sqrt{r^2 - d^2}$, ce qui est vrai pour deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{D}$ qui sont à égale distance de H.

b. La réponse à cette question est incluse dans celle qui précède.

Exercice 4.

a. Pour $\imath \in \{1, 2\}$, notons $A_\imath$ un point du plan, $r_\imath > 0$ une longueur et $\mathcal{C}_\imath$ le cercle de centre $A_\imath$ et de rayon $r_\imath$. Etudions l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. La question n'a pas d'intérêt pour $A_1 = A_2$ car alors les cercles sont concentriques, donc égaux si $r_1 = r_2$ et disjoints sinon. Désormais nous supposons donc que $A_1 \neq A_2$. Nous posons $d = A_1A_2$; nous nous plaçons dans le repère orthonormé direct dont l'origine est A_1 et le premier vecteur $\vec{u} = \vec{A_1A_2}/d$. Les coordonnées de A_2 sont donc $(d, 0)$; le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour équation $x^2 + y^2 = r_1^2$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ a pour équation $(x - d)^2 + y^2 = r_2^2$ ce qui peut encore s'écrire

$$x^2 + y^2 = 2dx - d^2 + r_2^2.$$

Si le point de coordonnées (x, y) est commun aux deux cercles alors en prenant la différence des deux équations on trouve $2dx = d^2 - r_2^2 + r_1^2$ ce qui donne $x = d/2 + (r_1^2 - r_2^2)/2d$. En remplaçant dans l'équation de $(\mathcal{C}_1)$ cela donne

$$(1) \qquad y^2 = r_1^2 - x^2 = r_1^2 - (\frac{d^2}{4} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} + \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{4d^2})$$
$$= -\frac{d^2}{4} + \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2}{4d^2}$$

où le second membre a le même signe que son produit par $4d^2$, soit celui de

$$\Delta = -(d^4 - 2r_1^2 d^2 - 2r_2^2 d^2 + r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2).$$

On sait que l'on a le développement

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

et pour $a = d^2$, $b = -r_1^2$, $c = -r_2^2$ on reconnaît dans Δ la différence de carrés

$$\Delta = -(d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 + 4r_1^2 r_2^2 = -(d^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2r_1 r_2)(d^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2)$$
$$= -(d^2 - (r_1 + r_2)^2)(d^2 - (r_1 - r_2)^2).$$

Pour qu'il y ait deux solutions à (1) il faut que $\Delta > 0$, pour qu'il y en ait une et une seule il faut que $\Delta = 0$, si $\Delta < 0$ il n'y en a pas.

* Si $\Delta = 0$ alors l'un des deux termes de ce produit s'annule, donc $d = r_1 + r_2$ ou $d = |r_1 - r_2|$ (en tenant compte du fait que $d > 0$). Ainsi les deux cercles ont un point commun et un seul précisément si $d = r_1 + r_2$ ou $d = |r_1 - r_2|$.
* Pour que $\Delta < 0$ il faut que les deux facteurs soient non-nuls et de même signe, donc ou bien $d > r_1 + r_2$ et $d > |r_1 - r_2|$, mais la première condition impliquant la seconde, cela donne $d > |r_1 + r_2|$; ou bien $d < r_1 + r_2$ et $d < |r_1 - r_2|$, mais cette fois-ci la seconde condition impliquant la première, cela donne $d < |r_1 - r_2|$. Ainsi les cercles sont disjoints lorsque $d \notin [|r_1 - r_2|, r_1 + r_2]$, tandis que si $d \in]|r_1 - r_2|, r_1 + r_2[$ ils ont deux points communs.

b. Etant donnés trois réels strictement positifs a, b et c, on peut toujours trouver deux points A et B tels que $AB = c$; pour qu'il existe un point C tel que $AC = b$ et $BC = a$, il faut et suffit que les cercles de centres respectifs A et B, de rayons respectifs b et a, soient sécants. Il faut et suffit donc que $c \in]|a - b|, a + b[$ (respectivement $c \in [|a - b|, a + b]$ si l'on admet les "triangles plats" dont les sommets sont alignés). Si l'on sait que $a \leq b$ cette condition se simplifie en $c \in]b - a, a + b[$ et si l'on sait que $a \leq b \leq c$, comme on ne peut pas avoir $c \leq b - a$ elle se simplifie en $c \leq a + b$.

Exercice 5.

a. Le carré unité admet évidemment les inéquations $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

b. En laissant les calculs au lecteur, la droite (AB) admet l'équation $x + 3y = 7$, et lorsque l'on remplace les coordonnées de C dans $x + 3y - 7$ on obtient 8 qui est strictement positif, par conséquent le demi-plan de bord (AB) qui contient C admet l'équation $x + 3y - 7 \geq 0$; de même (BC) admet l'équation $3x + y = 13$ et comme $3 \times 1 + 2 - 13 = -8 < 0$, le demi-plan de bord (BC) qui contient A admet l'équation $3x + y - 13 \leq 0$; enfin la droite (CA) admet l'équation

$x-y=-1$, et comme $4-1+1=4>0$, le demi-plan de bord (CA) qui contient B admet l'équation $x-y-1 \geq 0$. Ainsi, l'intérieur du triangle (ABC) est décrit par les équations $x+3y-7 \geq 0$, $3x+y-13 \leq 0$ et $x-y-1 \geq 0$ (si l'on veut l'intérieur strict : sans le bord, il faut remplacer les $\geq$ et $\leq$ par $>$ et $<$).

Exercice 7.

Nommons G le point où les médianes AD et BE se coupent. Nous savons que E est le milieu de $[AC]$ et D celui de $[BC]$; par conséquent $\vec{AB} = 2\vec{ED}$ donc G est le centre de l'homothétie de rapport 2 qui transforme $\vec{ED}$ en $\vec{AB}$. On en déduit que $\vec{AG} = 2\vec{GD}$ et $\vec{BG} = 2\vec{GE}$. Posons $x = GD$ et $y = GE$: dans le triangle rectangle (GDB), on aura $x^2+4y^2 = GD^2+GB^2 = DB^2 = (CB/2)^2 = 9$ et de même, dans (GEA) on aura $4x^2+y^2 = (AC/2)^2 = 16$. La résolution du système $X+4Y = 9$ et $4X+Y = 16$ donne $X = 11/3$ et $Y = 4/3$, donc $4x^2+4y^2 = 20$; or, la considération du triangle (AGB) montre que $AB^2 = 4x^2+4y^2$: par conséquent $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Exercice 8.

A l'extérieur de $(ABLH)$, traçons un triangle (AKH) rectangle en K avec $AK = 8$ et $KH = 6$ (ce triangle est semblable au triangle (ABC) de départ). L'angle $K\hat{A}H$ étant égal à $A\hat{B}C$ par construction, la somme des angles $A\hat{B}C + C\hat{A}B + B\hat{C}A$ étant un angle plat, les angles $A\hat{C}B$ et $H\hat{A}B$ étant droits, la somme $K\hat{A}H + H\hat{A}B + B\hat{A}C$ est plate donc K, A, C sont alignés dans cet ordre : ainsi, $KC = KA + AC = 8 + 6 = 14$. Dans le triangle rectangle (CKH), on a donc $CH = \sqrt{14^2+6^2} = \sqrt{232}$.

Exercice 9.

Appelons (ABC) le triangle de l'énoncé, avec $AB = 60$, $BC = 100$ et $CA = 80$; appelons P le point tel que les triangles (ABP) et (ACP) aient même périmètre ; posons $x = CP$. Selon l'énoncé, nous avons

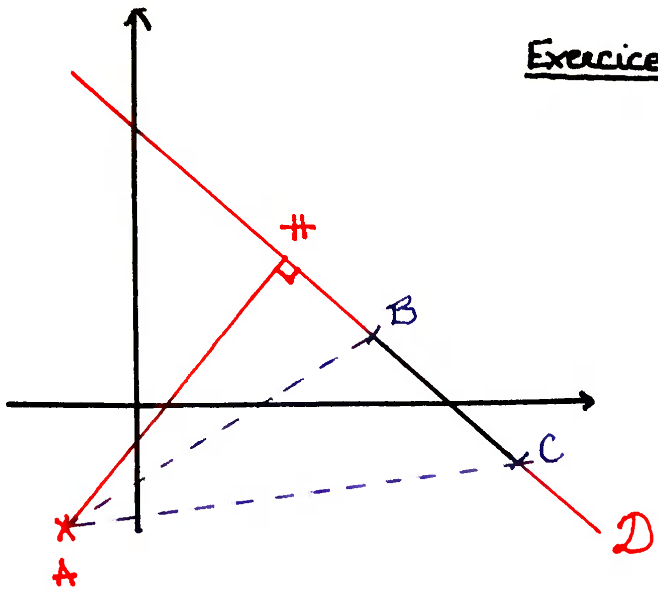
$$AP + PC + CA = BP + PA + AB$$

donc en simplifiant par $AP = PA$ et en remplaçant les termes connus par leur valeur il vient $x = 40$. Appelons Q le projeté orthogonal de P sur $[AC]$: les triangles (ABC) et (QPC) étant semblables, on a $CP/CB = CQ/CA$ soit $40/100 = CQ/80$ d'où $CQ = 32$. De plus $AQ = AC - CQ = 48$. Ensuite $QP/PC = AB/BC$ donc $QP/40 = 60/100$ d'où $QP = 24$. Enfin, dans le triangle (APQ) rectangle en Q, on a $AP^2 = AQ^2+QP^2$ donc $AP^2 = 48^2+24^2 = 24^2(2^2+1)$ d'où $AP = 24\sqrt{5}$, ce qui est la longueur cherchée.

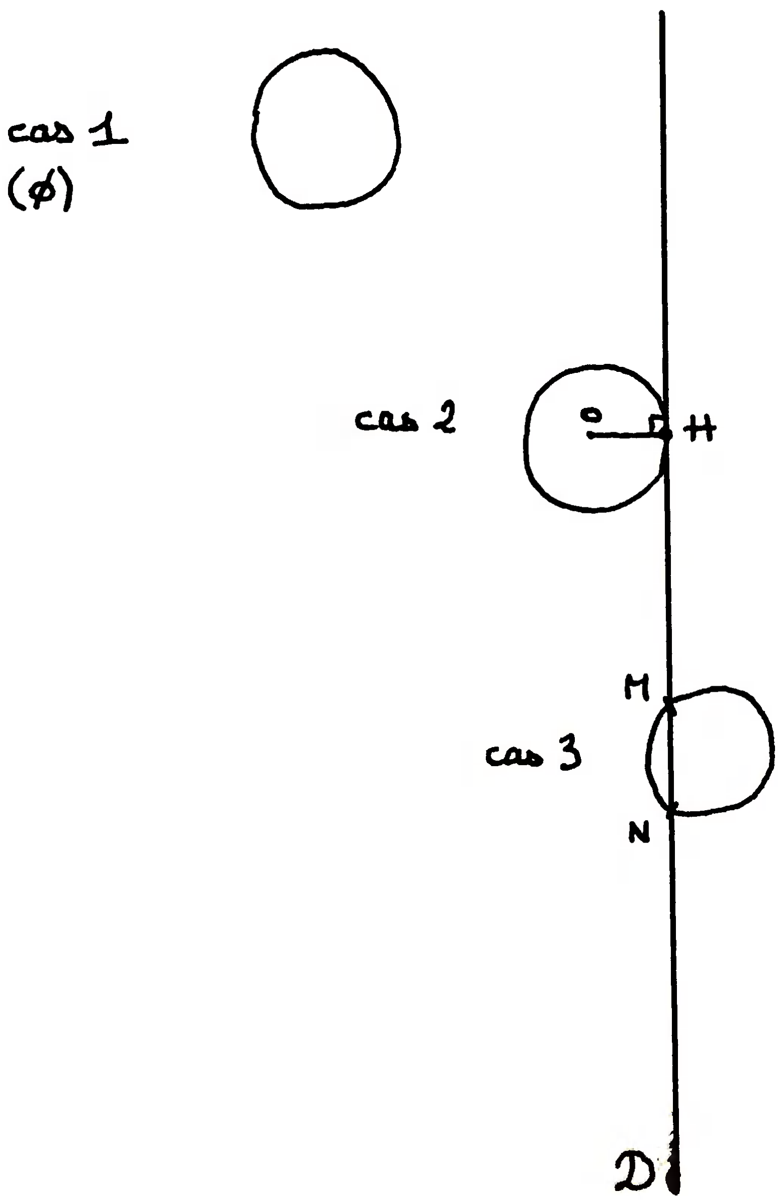
Exercice 10.

Appelons G le milieu de $[EF]$: la géométrie du losange fait que G est aussi le milieu de $[AC]$ et que $(EF) \perp (AC)$. Les triangles rectangles (ABC) et (AGF) ont même angle en A, donc on a $GF/AG = CB/AB = 3/4$; de plus $AG = AC/2 = \sqrt{AB^2+BC^2}/2 = 10$, d'où $GF = 15/2$. Comme $EF = 2GF$, on a donc $EF = 15$.

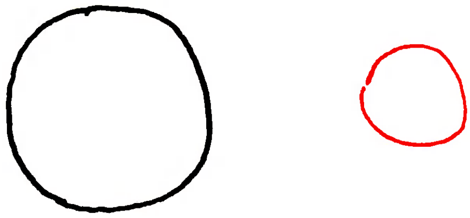
Exercice 1



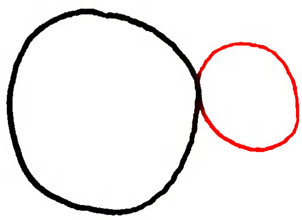
Exercice 2



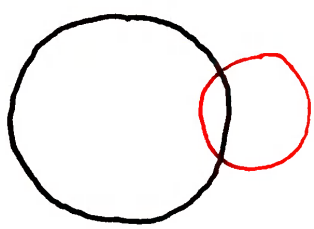
Exercice 4



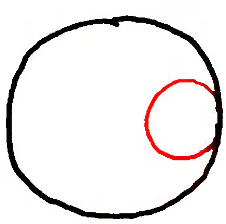
extérieurs



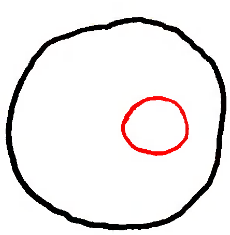
tangents extérieurement



sécants



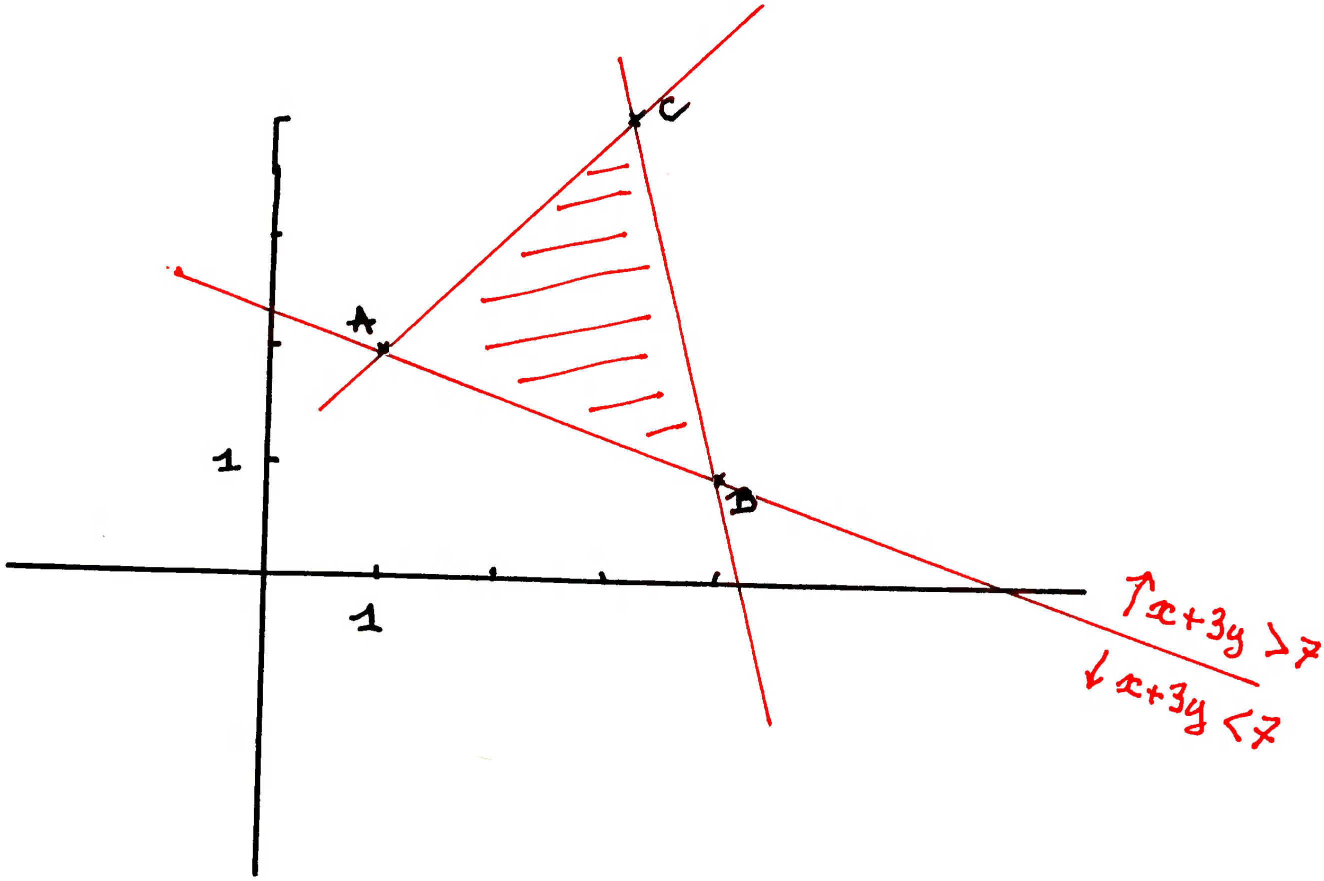
tangents intérieurement



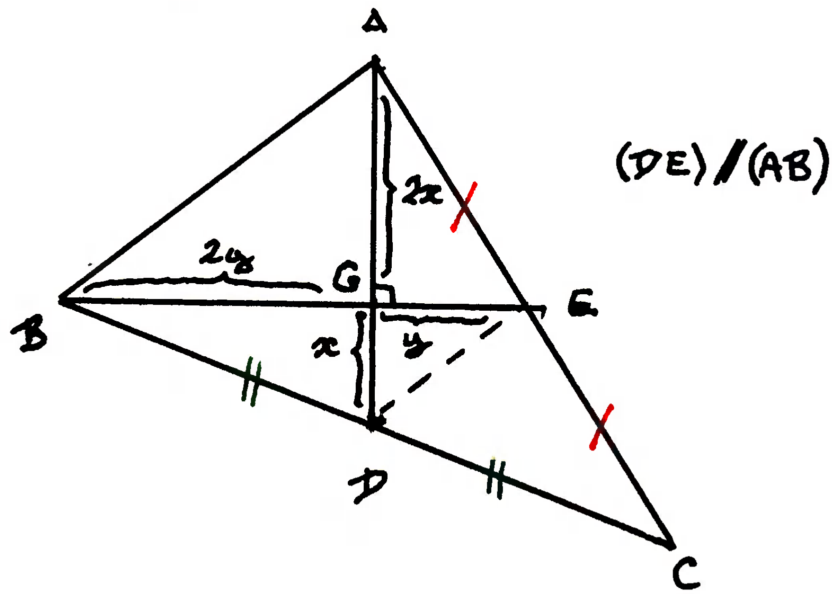
l'un dans l'autre

Il y a 5 positions relatives de 2 cercles

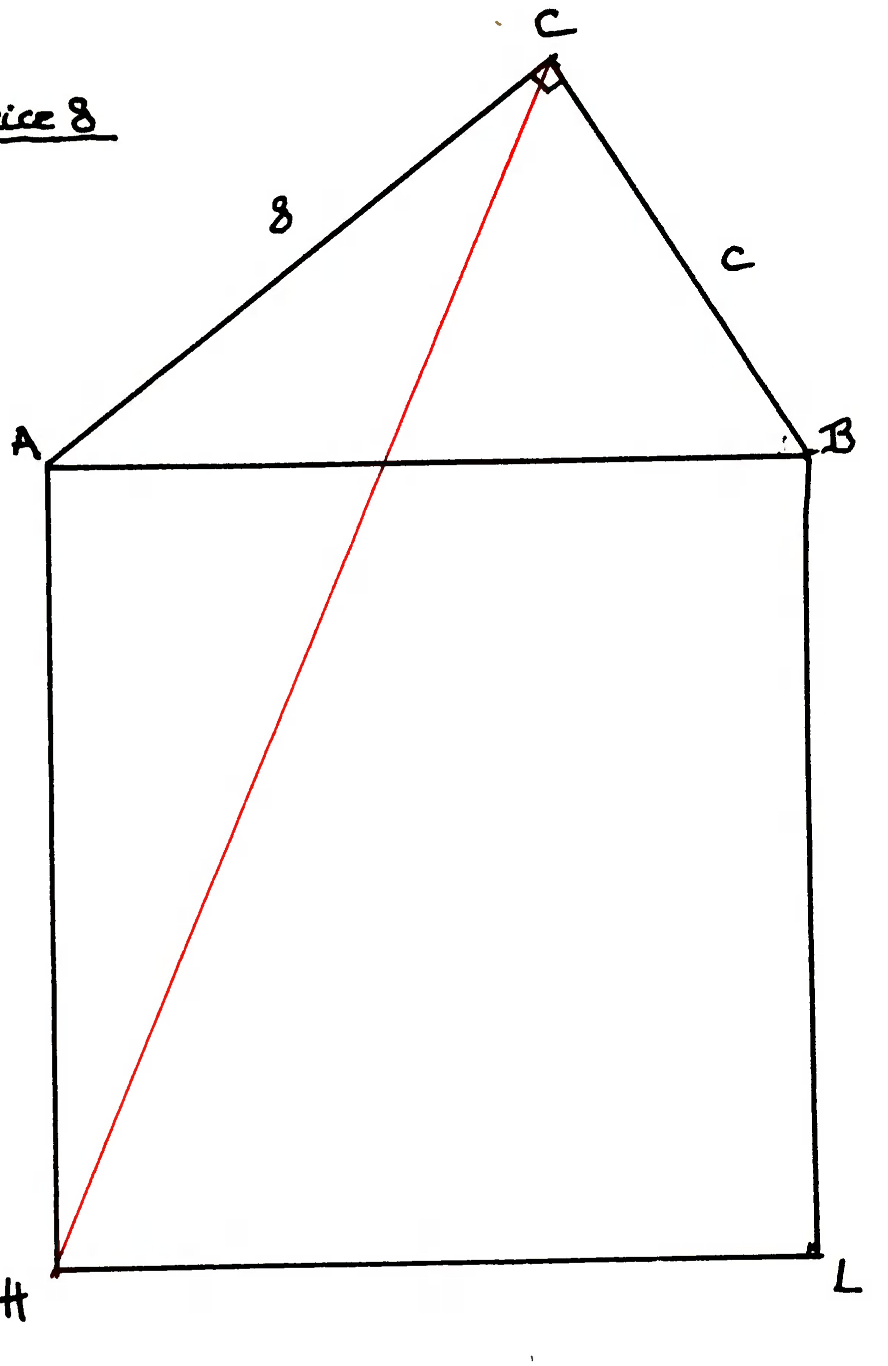
Exercice 5



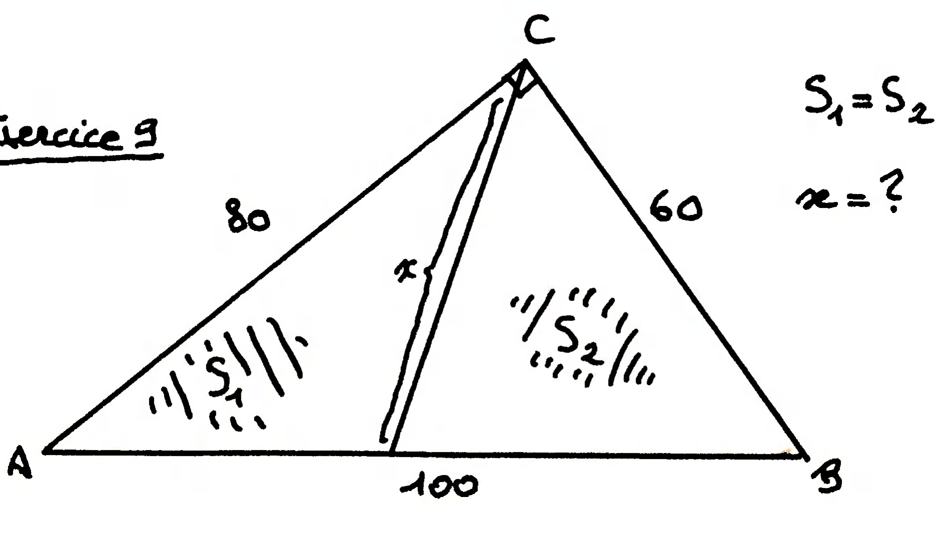
Exercice 7



Exercice 8

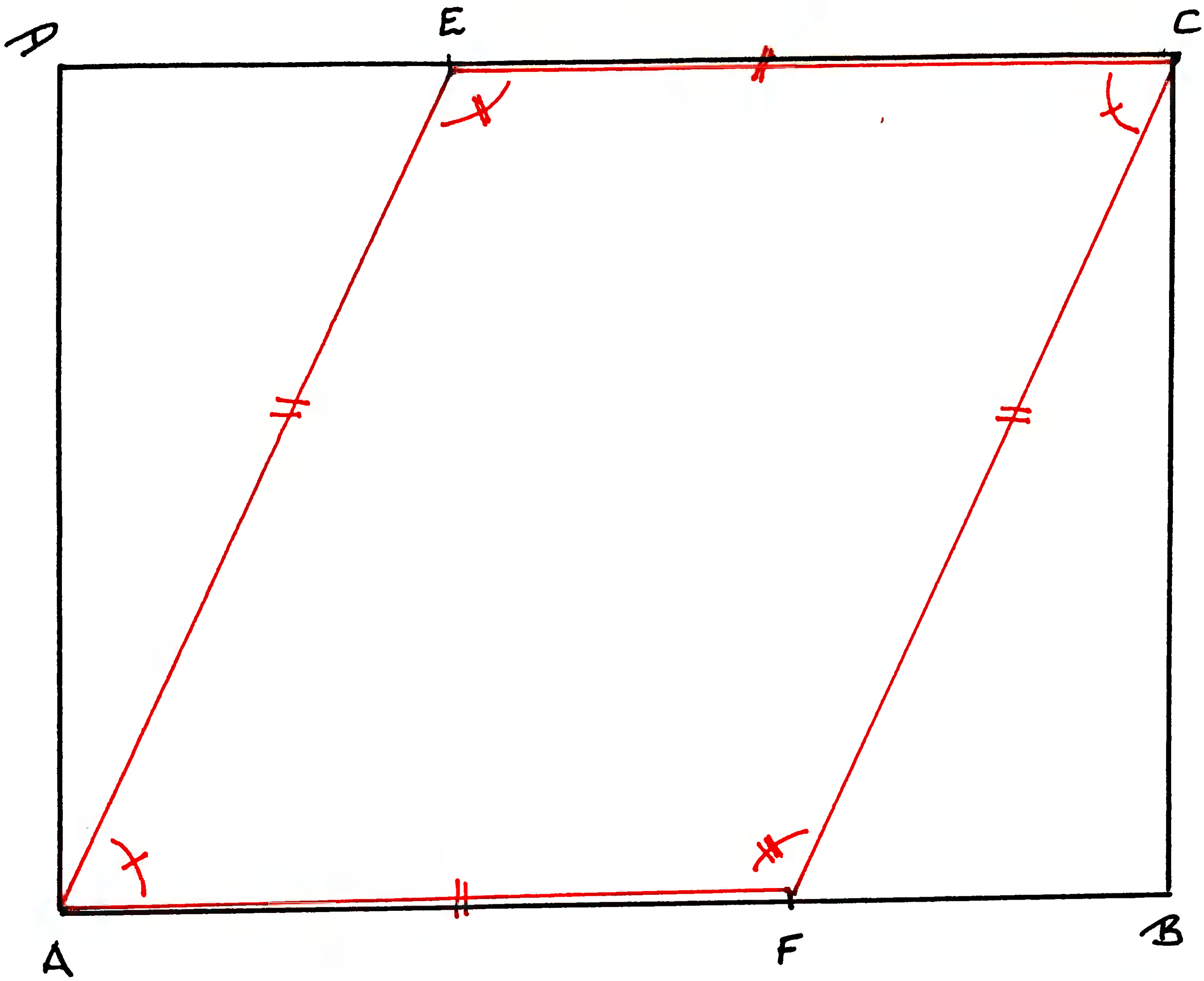


Exercice 9



$S_1 = S_2$

$x = ?$



Exercice 10