Devoir surveillé 1

Durée de l'épreuve : **1h30**
Le seul document autorisé est une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Exercice 1 : Tables de vérités

Construire les tables de vérités des formules suivantes :

Q 1.1 $(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \wedge b)$

SOLUTION.

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$a \wedge b$	$(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \wedge b)$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Q 1.2 $(\neg c \wedge b) \vee (b \Rightarrow (a \wedge c))$

SOLUTION.

a	b	c	$\neg c$	$\neg c \wedge b$	$a \wedge c$	$b \Rightarrow (a \wedge c)$	$(\neg c \wedge b) \vee (b \Rightarrow (a \wedge c))$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Q 1.3 $(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge ((a \vee c) \Rightarrow (b \wedge \neg c))$

SOLUTION.

a	b	c	$\neg a \vee \neg b \vee c$	$a \vee c$	$b \wedge \neg c$	$(a \vee c) \Rightarrow (b \wedge \neg c)$	$(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge ((a \vee c) \Rightarrow (b \wedge \neg c))$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Q 1.4 $((a \vee \neg b) \Rightarrow (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge c) \vee (b \wedge a))$

SOLUTION.

a	b	c	$a \vee \neg b$	$b \wedge c$	$(a \vee \neg b) \Rightarrow (b \wedge c)$	$\neg a \wedge c$	$b \wedge a$	$(\neg a \wedge c) \vee (b \wedge a)$	$((a \vee \neg b) \Rightarrow (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge c) \vee (b \wedge a))$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

<u>Exercice 2</u> : Logique propositionnelle : modélisation

Nous considérons une version simplifiée du jeu *Cluedo*. Le but du jeu est de reconstituer les circonstances de l'assassinat du docteur Lenoir :

1. trouver la pièce où a eu lieu le crime,
2. trouver l'arme du crime,
3. identifier l'assassin.

Les pièces de la version simplifiée sont : 1. le salon, 2. la cuisine.
Les armes possibles sont : 1. le marteau, 2. le revolver.
Enfin les suspects sont : 1. le Colonel Moutarde, 2. Madame Leblanc.

Q 2.1 Modéliser à l'aide d'une formule de la logique propositionnelle une contrainte qui représente l'ensemble des solutions possibles du jeu. Vous prendrez soin d'expliquer clairement la signification que vous donnerez aux variables propositionnelles que vous utiliserez.

Solution. Nous utilisons les variables propositionnelles suivantes :

1. P_s et P_c pour désigner que le crime a eu lieu respectivement dans le salon ou la cuisine,
2. A_m et A_r pour désigner que l'arme du crime est respectivement le marteau ou le revolver,
3. T_m et T_l pour désigner que le tueur est respectivement le Colonel Moutarde ou Madame Leblanc.

Le crime a eu lieu dans l'une des pièces et pas dans l'autre si bien que : $P_s \Leftrightarrow \neg P_c$. De la même manière, les contraintes concernant l'arme du crime et l'assassin s'expriment par les formules suivantes : $A_m \Leftrightarrow \neg A_r$ et $T_m \Leftrightarrow \neg T_l$. La formule cherchée est ainsi : $(P_s \Leftrightarrow \neg P_c) \wedge (A_m \Leftrightarrow \neg A_r) \wedge (T_m \Leftrightarrow \neg T_l)$.

Le jeu comprend 6 cartes, une pour chacun des lieux, une pour chacune des armes, et une pour chaque suspect. Une carte de lieu, une carte d'arme et une carte de suspect sont mises dans une enveloppe. Ces cartes décrivent les circonstances du crime que les joueurs doivent trouver.
Les trois cartes restantes sont distribuées à trois joueurs.
À tour de rôle, chaque joueur peut proposer une reconstitution partielle du crime en désignant un lieu et une arme, une arme et un suspect, etc… Si le joueur à sa gauche possède l'une des cartes portant sur la reconstitution, il doit la montrer au joueur dont c'est le tour. Si en revanche le joueur à gauche n'a pas de carte portant sur la reconstitution, alors celui qui le suit (en allant vers la gauche) doit montrer sa carte (au joueur dont c'est le tour) si celle-ci porte sur la reconstitution.
Alice, Bob et Charlie jouent ensemble. Charlie possède la carte du marteau. Alice joue en première, Bob, à sa gauche, joue en deuxième et Charlie joue en dernier :

1. Alice propose la reconstitution suivante : le Colonel Moutarde a commis le meurtre avec le marteau. Bob lui montre sa carte.
2. Bob propose la reconstitution suivante : Madame Leblanc a commis le meurtre dans le salon. Charlie ne montre pas de carte, mais Alice en montre une.

Q 2.2 Modéliser par une formule les informations que Charlie possède après le tour d'Alice. Justifier.

Solution. Charlie sait que l'arme du crime n'est pas le marteau, ainsi la formule $\neg A_m$ est vraie. De plus comme Bob montre une carte a Alice et qu'il ne peut s'agir du marteau que Charlie possède, cela ne peut être que celle du Colonel Moutarde. Ainsi à la fin du tour d'Alice, Charlie sait que $\neg A_m \wedge \neg T_m$ est vraie.

Q 2.3 Modéliser par une formule les informations que Charlie possède après le tour de Bob. Justifier.

Solution. Alice a montré à Bob soit la carte Madame Leblanc soit la carte salon. Ainsi Charlie sait que $\neg P_s \vee \neg T_l$.

Q 2.4 Charlie est-il en mesure de déterminer le lieu, l'arme et l'assassin. Si oui, les donner. Sinon, expliquer pourquoi et proposer une reconstitution qui lui permettrait de résoudre le crime. Dans tous les cas, justifier votre réponse.

Solution. Charlie peut connaître toutes les circonstances du crime. En effet, de $\neg A_m$ et de $\neg A_m \Leftrightarrow A_r$, il peut déduire que A_r est vrai. De $\neg T_m$ et $T_m \Leftrightarrow \neg T_l$, il peut déduire que T_l est vrai. Enfin de T_l et $\neg P_s \vee \neg T_l$ il peut déduire que $\neg P_s$ est vrai. Ainsi en utilisant $P_s \Leftrightarrow \neg P_c$ il obtient que P_c est vrai. En résumé, Charlie sait que Madame Leblanc a assassiné le Docteur Lenoir dans la cuisine avec le revolver.

<u>Exercice 3</u> : Induction

Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble $\{\wedge, \neg\}$ est un ensemble complet d'opérateurs.

Q 3.1 Donner une formule équivalente à $\bot$ qui n'utilise que les opérateurs $\wedge$, $\neg$ et éventuellement des variables. Justifier.

Solution. Il suffit de prendre $a \wedge \neg a$. Cette formule s'évalue à 0 pour toute valuation de a.

Q 3.2 Donner une formule équivalente à $\top$ qui n'utilise que les opérateurs $\wedge$, $\neg$ et éventuellement des variables. Justifier.

Solution. Nous prenons $\neg(a \wedge \neg a)$. Comme il s'agit de la négation de la formule de la question précédente et que celle-ci s'évalue toujours à 0, cette nouvelle formule s'évalue toujours à 1.

Q 3.3 Donner une formule équivalente à $\varphi \vee \psi$ qui n'utilise que les opérateurs $\wedge$ et $\neg$. Justifier.

Solution. Nous prenons $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Par la loi de de Morgan nous avons : $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi$. Enfin les doubles négations se simplifient et nous obtenons : $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \varphi \vee \psi$

Q 3.4 Donner une formule équivalente à $\varphi \Rightarrow \psi$ qui n'utilise que les opérateurs $\wedge$ et $\neg$. Justifier.

Solution. Nous savons que $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$. En utilisant la formule de la question précédente nous obtenons alors que $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Q 3.5 Donner une formule équivalente à $\varphi \Leftrightarrow \psi$ qui n'utilise que les opérateurs $\wedge$ et $\neg$. Justifier.

Solution. Nous savons que $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$. En utilisant la formule de la question précédente, nous obtenons que $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)$.

Q 3.6 Montrer (par induction) que pour toute formule de la logique propositionnelle φ, il existe une formule ψ telle que :

1. $\varphi \equiv \psi$ et
2. ψ n'est contruite qu'avec les connecteurs logiques $\wedge$ et $\neg$.

Solution. Nous procédons par induction sur la structure de φ.
Si $\varphi = \bot$ ou $\varphi = \top$, les formules des question Q3.1 et Q3.2 permettent de conclure.
Si $\varphi = \neg\varphi'$, alors par induction il existe $\psi' \equiv \varphi'$ telle que ψ' n'est construite qu'avec les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. Il suffit alors de prendre $\psi = \neg\psi'$.
Si φ est de la forme $\varphi_1 \,\texttt{op}\, \varphi_2$ pour $\texttt{op} \in \{\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge\}$, alors par hypothèse d'induction, il existe ψ_1 et ψ_2 contruites seulement avec les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ telles que $\psi_1 \equiv \varphi_1$ et $\psi_2 \equiv \varphi_2$. Les questions Q3.3, Q3.4, Q3.5 nous indiquent comment construire ψ dans les cas où respectivement $\texttt{op} = \vee$, $\texttt{op} = \Rightarrow$ ou $\texttt{op} = \Leftrightarrow$. Si $\texttt{op} = \wedge$, il suffit de prendre $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

Exercice 4 : Programmation SAT : `Hidoku`

Le jeu `hidoku` est un jeu qui consiste à remplir une grille carrée de côté n avec des nombres de 1 à n^2. Voici un exemple de grille de côté 7 :

			45			
49						37
30						12
			16			
19						40
1						7
			4			

Résoudre une grille de côté n revient à la remplir en respectant les règles suivantes :

— Il faut que chaque case soit remplie par un nombre entre 1 et n^2.
— Chaque nombre compris entre 1 et n^2 apparaît une et une seule fois dans la grille.

— Si un nombre k (tel que $0 < k < n^2$) occupe une case, alors le nombre $k+1$ occupe une case voisine, c'est-à-dire l'une des cases qui partage un côté ou un coin avec la case de k, ou encore une case située au-dessus, au-dessous, à gauche, à droite ou en diagonale par rapport à la case occupée par k.

En respectant ces règles la solution de la grille présentée en exemple est :

48	47	46	45	34	35	36
49	31	44	33	14	13	37
30	28	32	43	15	38	12
29	18	27	16	42	11	39
19	2	17	26	10	41	40
1	20	3	24	25	9	7
21	22	23	4	5	6	8

Afin de montrer que les contraintes sont bien respectées par cette solution, nous avons relié pour tout nombre k la case le contenant à la case contenant le nombre $k+1$.

Dans le but d'implémenter un solver de `hidaku`, nous allons modéliser ce problème avec SAT. Cela revient à décrire pour une grille les contraintes que doivent respecter les solutions de cette grille en utilisant une formule de la logique propositionnelle sous forme normale conjonctive. Nous allons considérer une grille de côté $n \geq 1$.

Q 4.1 Quelles variables propositionnelle allez-vous utiliser pour modéliser ce problème. Précisez bien la signification de ces variables par rapport au problème.

Solution. Nous allons utiliser les variables $x_{i,j,k}$ avec $i, j \in [1, n]$ et $k \in [1, n^2]$. La variable sera vraie ssi la case de la ligne i et de la colonne j de la solution contient la valeur k.

Q 4.2 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque case d'une solution est occupée par **au moins un** nombre compris entre 1 et n^2.

Solution.

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigwedge_{1\leq j\leq n} \bigvee_{1\leq k\leq n^2} x_{i,j,k}$$

Q 4.3 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque case d'une solution est occupée par **au plus** un nombre compris entre 1 et n^2.

Solution.

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigwedge_{1\leq j\leq n} \bigwedge_{1\leq k_1<k_2\leq n^2} \neg x_{i,j,k_1} \vee \neg x_{i,j,k_2}$$

Q 4.4 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque nombre compris entre 1 et n^2 doit apparaître **au moins une fois** dans la solution.

Solution.

$$\bigwedge_{1\leq k\leq n^2} \bigvee_{1\leq i\leq n} \bigvee_{1\leq j\leq n} x_{i,j,k}$$

Q 4.5 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque nombre compris entre 1 et n^2 doit apparaître **au plus une fois** dans la solution.

Solution. On modélise cette contrainte en utilisant une formule qui interdit que deux cases différentes contiennent la même valeur. Pour cela on utilise l'ensemble P des quadruplets (i_1, j_1, i_2, j_2) tels que (i_1, j_1) et (i_2, j_2) sont les coordonnées de cases différentes, c'est-à-dire $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$. Formellement :

$$P = \{(i_1, j_1, i_2, j_2) \mid i_1,\ i_2,\ j_1,\ j_2 \in [1, n] \wedge (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)\}\ .$$

La contrainte s'exprime alors :

$$\bigwedge_{1\leq k\leq n^2} \bigwedge_{(i_1,j_1,i_2,j_2)\in P} \neg x_{i_1,j_1,k} \vee \neg x_{i_2,j_2,k}$$

Q 4.6 Il est possible de se passer de l'une des contraintes des questions 4.4 et 4.5. Expliquer pourquoi.

Solution. Comme les contraintes des question 4.2 et 4.3 imposent que chaque case est occupée par exactement un nombre, si chaque nombre apparaît au moins une fois, comme il y a autant de cases que de nombres, chaque nombre apparaît au plus une fois. De même, si chaque nombre apparaît au plus une fois, le fait qu'il y a autant de cases que de nombres implique que chaque nombre doit apparaître au moins une fois.
En résumé, les contraintes des questions 4.2, 4.3 et 4.4 impliquent celle de la question 4.5 et les contraintes des questions 4.2, 4.3 et 4.5 impliquent celle de la question 4.4. Ainsi, on peut se contenter de ne conserver que la contrainte de la question 4.4 ou celle de la question 4.5.

Q 4.7 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte concernant les cases occupées par k et $k+1$. Vous pouvez décomposer votre formule en étudiant les cas suivants :

1. La case occupée par k est un coin de la grille.
2. La case occupée par k est sur un bord de la grille (mais pas un coin).
3. La case occupée par k n'est ni un coin, ni sur un bord de la grille.

Solution.

1. La case occupée par k est un coin de la grille, c'est-à-dire que ses coordonnées sont dans l'ensemble $\{(1,1),(1,n),(n,1),(n,n)\}$:

$$\begin{array}{l}
\bigwedge_{1\leq k<n^2}(\neg x_{1,1,k} \vee x_{1,2,k+1} \vee x_{2,1,k+1} \vee x_{2,2,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2}(\neg x_{1,n,k} \vee x_{1,n-1,k+1} \vee x_{2,n,k+1} \vee x_{2,n-1,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2}(\neg x_{n,1,k} \vee x_{n,2,k+1} \vee x_{n-1,2,k+1} \vee x_{n-1,2,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2}(\neg x_{n,n,k} \vee x_{n,n-1,k+1} \vee x_{n-1,n,k+1} \vee x_{n-1,n-1,k+1})\wedge
\end{array}$$

2. La case occupée par k est sur le bord de la grille, c'est-à-dire que ses coordonnées sont dans l'ensemble $\{(i,1) \mid i \in [1,n]\} \cup \{(i,n) \mid i \in [1,n]\} \cup \{(1,j) \mid j \in [1,n]\} \cup \{(n,j) \mid j \in [1,n]\}$:

$$\begin{array}{l}
\bigwedge_{1\leq k<n^2} \bigwedge_{1<i<n}(\neg x_{i,1,k} \vee x_{i+1,1,k+1} \vee x_{i-1,1,k+1} \vee x_{i+1,2,k+1} \vee x_{i,2,k+1} \vee x_{i-1,2,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2} \bigwedge_{1<i<n}(\neg x_{i,n,k} \vee x_{i+1,n,k+1} \vee x_{i-1,n,k+1} \vee x_{i+1,n-1,k+1} \vee x_{i,n-1,k+1} \vee x_{i-1,n-1,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2} \bigwedge_{1<j<n}(\neg x_{1,j,k} \vee x_{1,j+1,k+1} \vee x_{1,j-1,k+1} \vee x_{2,j+1,k+1} \vee x_{2,j,k+1} \vee x_{2,j-1,k+1})\wedge \\
\bigwedge_{1\leq k<n^2} \bigwedge_{1<j<n}(\neg x_{n,j,k} \vee x_{n,j+1,k+1} \vee x_{n,j-1,k+1} \vee x_{n-1,j+1,k+1} \vee x_{n-1,j,k+1} \vee x_{n-1,j-1,k+1})
\end{array}$$

3. La case occupée par k n'est ni un coin, ni sur le bord de la grille, c'est-à-dire que ses coordonnées sont dans l'ensemble $\{(i,j) \mid 1<i<n \wedge 1<j<n\}$:

$$\bigwedge_{1\leq k<n^2} \bigwedge_{1<i<n} \bigwedge_{1<j<n} \left(\neg x_{i,j,k} \vee \bigvee_{(s,t)\in D} x_{i+s,j+t,k+1} \right)$$

avec $D = \{-1,0,1\}^2 - \{(0,0)\}$.

Q 4.8 Quelle contrainte ajouter pour trouver la solution d'une grille particulière ? Donner la contrainte correspondant à la grille donnée en exemple.

Solution. Il suffit de prendre la conjonction des variables $x_{i,j,k}$ telles que la case de la ligne i et de la colonne j est occupée par le nombre k dans la grille. Pour la grille de l'exemple, il faudrait prendre la formule :

$$x_{1,4,45} \wedge x_{2,1,49} \wedge x_{2,7,37} \wedge x_{3,1,20} \wedge x_{3,7,12} \wedge x_{4,4,16} \wedge x_{5,1,19} \wedge x_{5,7,40} \wedge x_{6,1,1} \wedge x_{6,7,7} \wedge x_{7,4,4}$$