

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, on désigne par V un espace vectoriel sur le corps commutatif \mathbb{K} (qui sera toujours \mathbb{R} ou \mathbb{C}), de dimension finie n . Une partie \mathcal{F} de l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ des endomorphismes de V sera dite *trigonalisable* s'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{F} est *triangulaire supérieure*. On rappelle qu'un sous-espace W de V est dit *stable* par \mathcal{F} si, pour tout $u \in \mathcal{F}$, W est stable par u , i.e. $u(x) \in W$ pour tout $x \in W$.

Le thème général du problème est la recherche de vecteurs propres communs aux éléments d'une partie \mathcal{F} de $\mathcal{L}(V)$ possédant des propriétés convenables, avec, comme principale application, l'obtention de conditions suffisantes de trigonalisabilité.

PARTIE I

Dans les cinq premières questions de cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1°) Montrer que, pour qu'une partie \mathcal{F} de $\mathcal{L}(V)$ soit trigonalisable, il est nécessaire que les éléments de \mathcal{F} aient un vecteur propre commun.

On suppose, dans toute la suite de cette partie, que \mathcal{F} est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(V)$ tel que, quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$, on ait $u \circ v = v \circ u$. On se propose de prouver que \mathcal{F} est trigonalisable.

2°) Soient $u \in \mathcal{F}$, λ une valeur propre de u et $V_u(\lambda)$ le sous-espace propre correspondant. Montrer que $V_u(\lambda)$ est stable par \mathcal{F} .

3°) Montrer que les éléments de \mathcal{F} ont un vecteur propre commun.

4°) Montrer que \mathcal{F} est trigonalisable.

5°) On suppose, de plus, que tout élément de \mathcal{F} est diagonalisable. Peut-on trouver une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{F} est diagonale ?

6°) Reprendre le problème posé à la question 5°, en remplaçant \mathbb{C} par \mathbb{R} .

PARTIE II

Dans toute cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Etant donné $u \in \mathcal{L}(V)$ et $v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{L}(V)$ est une *algèbre de Lie* (d'endomorphismes de V) si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$;
- (ii) quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$, $[u, v] \in \mathcal{F}$.

On appelle *dimension* d'une algèbre de Lie \mathcal{F} , et on note $\dim(\mathcal{F})$, sa dimension en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Etant donné une algèbre de Lie \mathcal{F} , on appelle *idéal* de \mathcal{F} tout sous-espace vectoriel \mathcal{I} de \mathcal{F} tel que $[u, v] \in \mathcal{I}$ quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{I}$.

1°) Soit \mathcal{F} une algèbre de Lie de dimension 2, telle qu'il existe $u_0 \in \mathcal{F}$ et $v_0 \in \mathcal{F}$ vérifiant $[u_0, v_0] \neq 0$; soit d'autre part \mathcal{F}' une seconde algèbre de Lie de dimension 2, possédant la même propriété. Démontrer qu'il existe un isomorphisme (d'espaces vectoriels) ϕ de \mathcal{F} sur \mathcal{F}' tel que $\phi([u, v]) = [\phi(u), \phi(v)]$ quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$.

Soient \mathcal{F} une algèbre de Lie et \mathcal{I} un idéal de \mathcal{F} . Etant donné une forme linéaire ℓ sur \mathcal{I} , on désigne par W le sous-espace de V formé des vecteurs x tels que $v(x) = \ell(v)x$ pour tout $v \in \mathcal{I}$. Le but des questions 2° à 5° est de montrer que W est stable par \mathcal{F} .

Soit $u \in \mathcal{F}$, et soit x un élément non nul de W ; on définit par récurrence une suite (x_k) en posant $x_0 = x$ et $x_k = u(x_{k-1})$ pour tout entier $k \geq 1$.

2°) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{I}$, $v(x_k) - \ell(v)x_k$ appartient au sous-espace engendré par $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$.

3°) Soit U le sous-espace de V engendré par les vecteurs x_k , où k décrit \mathbb{N} . Montrer que U est stable par $\mathcal{I} \cup \{u\}$.

4°) Etablir une relation entre $\ell([u, v])$ et la trace (i.e. la somme des valeurs propres) de la restriction à U de l'endomorphisme $[u, v]$.

Tournez la page S.V.P.

5°) Montrer que W est stable par \mathcal{F} .

On dit qu'une algèbre de Lie \mathcal{F} est *résoluble* s'il existe une suite croissante

$$\{0\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_p = \mathcal{F}$$

de sous-espaces de \mathcal{F} tels que, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, on ait :

$$[u, v] \in \mathcal{F}_{k-1} \text{ quels que soient } u \in \mathcal{F}_k \text{ et } v \in \mathcal{F}_k.$$

6°) Montrer que toute algèbre de Lie de dimension ≤ 2 est résoluble.

Le but des questions suivantes est de prouver le "théorème de Lie", qui affirme que *toute algèbre de Lie résoluble est trigonalisable*. Soit donc \mathcal{F} une algèbre de Lie résoluble.

7°) Soit $d = \dim(\mathcal{F})$. Montrer qu'il existe un idéal \mathcal{I} de \mathcal{F} , de dimension $d-1$. Montrer que \mathcal{I} est aussi une algèbre de Lie résoluble.

8°) Montrer que les éléments de \mathcal{F} ont un vecteur propre commun.

9°) Montrer que \mathcal{F} est trigonalisable.

10°) Montrer que, réciproquement, toute algèbre de Lie trigonalisable est résoluble.

11°) Montrer que le résultat de I.4° est un corollaire du théorème de Lie.

PARTIE III

Dans cette partie, le corps de base \mathbb{K} est indifféremment \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Pour tout $u \in \mathcal{L}(V)$, on notera ad_u l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ défini par $\text{ad}_u(v) = [u, v]$ pour tout $v \in \mathcal{L}(V)$.

1°) Vérifier que, pour $u \in \mathcal{L}(V)$ et $v \in \mathcal{L}(V)$, on a $\text{ad}_{[u, v]} = [\text{ad}_u, \text{ad}_v]$.

2°) Montrer que, si u est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(V)$, alors ad_u est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$.

3°) Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux algèbres de Lie (d'endomorphismes de V) telles que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Soit \mathcal{H} un supplémentaire de \mathcal{G} dans \mathcal{F} , et soit q la projection sur \mathcal{H} parallèlement à \mathcal{G} , i.e. l'application de \mathcal{F} dans \mathcal{H} qui associe à tout $u \in \mathcal{F}$ l'unique $v \in \mathcal{H}$ tel que $u - v \in \mathcal{G}$. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire

$$\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

telle que, pour tout $g \in \mathcal{G}$ et tout $u \in \mathcal{F}$,

$$\pi(g)(q(u)) = q([g, u]).$$

On désigne désormais par \mathcal{F} une algèbre de Lie (d'endomorphismes de V), telle que tout élément de \mathcal{F} soit un endomorphisme nilpotent de V . On se propose de démontrer le "théorème d'Engel", qui affirme qu'il existe un vecteur non nul $x \in V$ tel que $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{F}$.

4°) Soit \mathcal{G} une seconde algèbre de Lie d'endomorphismes de V , telle que $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$. On reprend les notations introduites dans la question précédente et on pose $\mathcal{F}' = \pi(\mathcal{G})$, $V' = \mathcal{H}$. Montrer que \mathcal{F}' est une algèbre de Lie d'endomorphismes de V' , que $\dim(\mathcal{F}') < \dim(\mathcal{F})$ et que tout élément de \mathcal{F}' est nilpotent.

5°) Soit $d = \dim(\mathcal{F})$. On suppose que, pour tout espace vectoriel W de dimension finie sur \mathbb{K} , et toute algèbre de Lie \mathcal{B} d'endomorphismes de W , formée d'éléments nilpotents et vérifiant $\dim(\mathcal{B}) \leq d-1$, il existe un vecteur non nul $x \in W$ tel que $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, on reprend les hypothèses et notations de la question 4°. Montrer qu'il existe une algèbre de Lie \mathcal{G}_1 d'endomorphismes de V , vérifiant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$$

$$\dim(\mathcal{G}_1) = \dim(\mathcal{G}) + 1$$

$$\mathcal{G}_1 \text{ est un idéal de } \mathcal{G}.$$

En déduire qu'il existe un idéal \mathcal{F}_1 de \mathcal{F} , tel que $\dim(\mathcal{F}_1) = d-1$.

6°) Démontrer le théorème d'Engel.

7°) Montrer que toute algèbre de Lie constituée d'endomorphismes nilpotents de l'espace vectoriel V est trigonalisable.

• •