
Séries numériques et intégrales généralisées M33 - Devoir Surveillé N°1

—

MARDI 3 NOVEMBRE 2020, DURÉE 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices et autres objets électroniques sont interditsts. La rédaction tiendra une part importante dans l'évaluation des copies.

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble $A+B = \{a+b \;/\; a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que $A+B$ est majoré par $\sup A + \sup B$. En déduire que $A+B$ admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
3. Application : Soit $X = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} \;/\; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup X$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer par récurrence sur p que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$
2. Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$
Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente (on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite).

Exercice 3. Indiquer si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes. Justifier.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}} dx.$
2. $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt.$

Exercice 4.

1. Soit $x \geqslant 1$. Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$
2. Pour tout $x > 1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Soit $x > 1$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge et satisfait $0 < \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt < \frac{e^{-x}}{x^2}$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{-x}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = 0$.
4. Faire une intégration par parties pour montrer que $f(x) \sim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$.