Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département Mathématiques

Licence SESI première année (L1 SESI - PEIP)

M11 : Mathématiques élémentaires

Partie Analyse

Abdellah HANANI

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions réelles

1.1 Compléments sur les réels

1.1.1 Opérations et relation d'ordre

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par définiton, l'ensemble des nombres rationnels est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Des quantités, souvent rencontrées en géométrie élémentaires comme $\sqrt{2}$ qui est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, ne s'expriment pas comme rapports d'entiers. D'où la nécessité d'introduire un nouvel ensemble ; c'est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il contient $\mathbb{Q}$ et il est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ qui étendent celles de $\mathbb{Q}$.

1. L'addition dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :
   - Elle est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.
   - Elle possède un élément neutre 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$.
   - Chaque réel possède un opposé : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (-x) = x - x = 0$.
   - Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x$.
2. La multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :
   - Elle est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
   - Elle possède un élément neutre 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \times x = x \times 1 = x$.
   - Chaque réel non nul possède un inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.
   - Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \times y = y \times x$.
   - Elle est distributive par rapport à $+$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

On dira, pour résumer toutes ces propriétés, que le triplet $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps. Dans la suite, nous noterons xy à la place de $x \times y$. Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation $\leq$. La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire,

- Elle est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x$
- Elle est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- Elle est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

La relation d'ordre $\leq$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y$ ou $y \leq x$. Et elle est aussi compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$:

$$. \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Rightarrow x + z \leq y + t.$$

$$. \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}^+, \quad (x \leq y) \Rightarrow xz \leq yz.$$

Complément. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble obtenu en ajoutant les deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ à $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge la relation d'ordre $\leq$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \ -\infty \leq x \quad \text{et} \quad x \leq +\infty.$$

Toutes les opérations sur les réels s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on convient que :

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty\,, \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty\,, \qquad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty\,,$$

$$x \pm \infty = \pm\infty\,, \qquad +\infty + \infty = +\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty\,, \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0\,, \qquad x \times \infty = \infty; \text{ si } x \neq 0.$$

Les opérations : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ et $+\infty - \infty$ sont des formes indéterminées.

1.1.2 Intervalles, Voisinages

Définition 1.1. *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :*

$$\forall a, b \in I \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ se répartissent en 9 types, décrits dans le tableau ci-dessous, où a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Description	Définition	Notation
fermé borné	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
borné, semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b[$
borné, semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$]-\infty, b[$
la droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

Définition 1.2 (Voisinages). *Soit V une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que*

1. *V est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.*
2. *V est un voisinage de $+\infty$ s'il contient un intervalle du type $]b, +\infty[$ avec $b \in \mathbb{R}$.*
3. *V est un voisinage de $-\infty$ s'il contient un intervalle du type $]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.*

1.2 Généralités sur les fonctions

1.2.1 Définitions et préliminaires

Définition 1.3. *Une fonction réelle f est une règle qui à tout réel x associe au plus un réel $y = f(x)$ appelé image de x par f ou valeur de f en x. Le réel x est appelé un antécédent de y par f.*

Une fonction f est souvent définie par une formule mathématique $f(x)$ dans laquelle x est qualifiée de variable ou argument de f. Sans mention explicite du contraire, on convient qu'une telle expression est à considérer sur le domaine de définition de f.

Définition 1.4. *Le domaine de définition d'une fonction réelle f est l'ensemble $\mathscr{D}_f$ formé des réels x pour lesquels $f(x)$ est un réel :*

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.

1. Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$. La fonction f a des valeurs réelles pour tous les réels x. Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, +\infty[$. On a, par exemple, $f(1) = -6$. Donc l'image de 1 par f est -6 et 1 est un antécédent de -6 par f.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Les valeurs de f sont réelles sauf lorsque x prend des valeurs strictement négatives. Donc $\mathscr{D}_f = [0, +\infty[$.

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et on note $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.5. *Soient les fonctions $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions :*

1. *$f + g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ par $\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.*
2. *$fg \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ par $\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$.*
3. *$\lambda f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ par $\forall x \in I,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

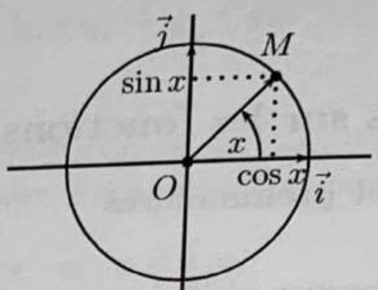
1.2.2 Propriétés des fonctions réelles

Définition 1.6 (Fonction majorée, minorée, bornée). *Soit une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.*

1. *On dit que f est majorée sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$.*
2. *On dit que f est minorée sur I s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ m \leq f(x)$.*
3. *On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.*

Exemple 2 (Les fonctions circulaires). Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\vec{i}, \vec{OM}}) = x$. Le cosinus de x, noté $\cos x$, et le sinus de x, noté $\sin x$, sont définis comme étant les coordonnées cartésiennes du point $M(x)$ dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos x.\vec{i} + \sin x.\vec{j}.$$



Du fait que le rayon du cercle trigonométrique vaut 1, le théorème de Pythagore implique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

et ensuite

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.7 (Fonction paire, impaire). *Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que I est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in I$ alors $-x \in I$).*

1. *On dit que f est paire si $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est impaire si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.*

Remarque. Dans un repère orthonormé, le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les coordonnées des points $M(-x)$ et $M(x)$ du cercle trigonométrique sont reliées par

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Donc la fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.8 (Fonction périodique). *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$. On dit que T est une période de f ou que f est T-périodique.*

Remarque. Dans un repère orthonormé, pour tracer le graphe d'une fonction T-périodique, on trace celui-ci sur un intervalle de longueur T et on complète par translation.

Exemple 4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les points $M(x)$ et $M(x + 2k\pi)$ du cercle trigonométrique ont les mêmes coordonnées :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x + 2k\pi) = cosx \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Donc les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Exercice (La fonction tangente). Soit la fonction $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_{\tan}$ de la fonction tan.
2. Montrer que la fonction tan est impaire sur $\mathscr{D}_{\tan}$.
3. Montrer que la fonction tan est π-périodique sur $\mathscr{D}_{\tan}$.

Définition 1.9 (Fonction monotone). *Soit une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est :*

1. *Croissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*
2. *Décroissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*
3. *Monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.*

On dit aussi que f est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

1.2.3 Le théorème de la bijection

Pour bien assimiler cette partie, il est conseillé de revoir la partie d'algèbre qui traite la notion de l'application réciproque. On rappelle le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soit $f : I \to J$ une fonction définie en tout point $x \in I$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

. *La fonction f admet une réciproque.*

. *Pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution $x \in I$.*

. *La fonction f est bijective.*

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de ce chapitre le théorème suivant.

Théorème 1.2 (de la bijection). *Si f est une fonction réelle strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f : I \to f(I)$ est bijective et sa réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est strictement monotone sur $f(I)$ et est de même sens de variation que f.*

On retiendra que, dans un repère orthonormé, le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice. On dispose aussi de la propriété suivante.

Proposition 1.1. *On suppose que I est symétrique par rapport à 0 et que $f : I \to f(I)$ est bijective impaire. Alors sa réciproque f^{-1} est aussi impaire.*

1.3 Les fonctions usuelles

1.3.1 La fonction partie entière

Définition 1.10. *La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\mathbb{E}(x)$.*

Par exemple la partie entière de π est 3, la partie entière de $-\pi$ est -4 et non -3.

Soit $x \in \mathbb{R}$, la définition implique que $\mathbb{E}(x) \leq x < \mathbb{E}(x) + 1$, et on en déduit que $x - 1 < \mathbb{E}(x) \leq x$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on aura : $\mathbb{E}(nx) \leq nx < \mathbb{E}(nx) + 1$. D'où

$$n^{-1}\mathbb{E}(nx) \leq x < n^{-1}\mathbb{E}(nx) + n^{-1} \Leftrightarrow 0 \leq x - n^{-1}\mathbb{E}(nx) < n^{-1}.$$

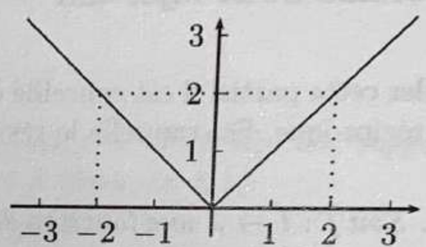
Ainsi on peut approcher tout réel x aussi près que l'on veut par un rationnel. On traduit ce résultat en disant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle non vide $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et même une infinité de rationnels.*

1.3.2 La fonction valeur absolue

Définition 1.11. *La valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ est le nombre réel positif $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$



Graphe de $y = |x|$

Voici un résumé des propriétés satisfaites par la fonction valeur absolue.

Proposition 1.2. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :*

1. $|x| = |-x|$ 2. $|xy| = |x||y|$

3. $\sqrt{x^2} = |x|$ 4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

La dernière inégalité est appelée inégalité triangulaire.

Exemple 5. Soit $f(x) = 3|x + 1| - |x - 2|$.

1. Donner une expression de f n'utilisant pas la valeur absolue.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

(a) $3|x + 1| - |x - 2| = 5$, (b) $3|x + 1| \geq |x - 2| + 5$.

Solution.

1. On dresse un tableau où l'on exprime chaque terme sans utiliser la valeur absolue :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\lvert x+1 \rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert x-2 \rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$f(x) =$		$-2x-5$		$4x+1$		$2x+5$	

Ainsi

$$f(x)=\begin{cases}-2x-5 & \text{si} \quad x\leq -1\\ 4x+1 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 2\\ 2x+5 & \text{si} \quad x\geq 2.\end{cases}$$

2. (a) On a :

$$f(x)=5\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-5=5 & \text{et } x\leq -1\\ \quad\text{ou} & \\ 4x+1=5 & \text{et } -1\leq x\leq 2\\ \quad\text{ou} & \\ 2x+5=5 & \text{et } x\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5 & \text{et } x\leq -1\\ \quad\text{ou} & \\ x=1 & \text{et } -1\leq x\leq 2\\ \quad\text{ou} & \\ x=0 & \text{et } x\geq 2\end{cases}$$

On obtient donc $S=\{-5,1\}$.

(b) On a : $3|x+1|\geq |x-2|+5\Leftrightarrow f(x)\geq 5$ et donc

$$f(x)\geq 5\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-5\geq 5 & \text{et } x\leq -1\\ \quad\text{ou} & \\ 4x+1\geq 5 & \text{et } -1\leq x\leq 2\\ \quad\text{ou} & \\ 2x+5\geq 5 & \text{et } x\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -5 & \text{et } x\leq -1\\ \quad\text{ou} & \\ x\geq 1 & \text{et } -1\leq x\leq 2\\ \quad\text{ou} & \\ x\geq 0 & \text{et } x\geq 2.\end{cases}$$

On obtient donc $S=]-\infty,-5]\cup[1,+\infty[$.

1.3.3 Fonctions puissance avec exposants rationnels

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction puissance $n^{ième}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^n$.

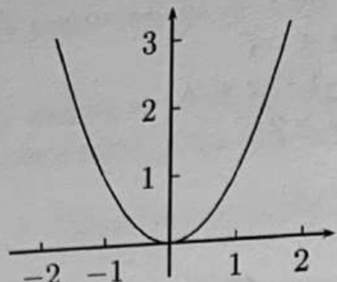
1. Si n est pair, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur son image $\mathbb{R}^+$. Sa réciproque est la fonction racine $n^{ième}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est notée
$$f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}.$$
2. Si n est impair, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction racine $n^{ième}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et est notée
$$f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}.$$

Pour $x\neq 0$, on définit x^{-n} comme étant l'inverse de x^n : $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$. Ensuite, pour un rationnel $r=\dfrac{p}{q}$, où $p\in\mathbb{Z}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction puissance d'exposant r sur $]0,+\infty[$ en posant

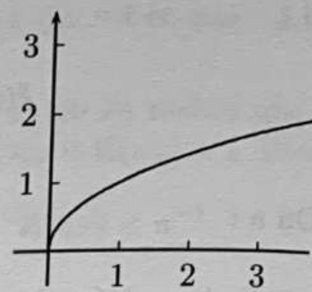
$$x^r=x^{p/q}=\sqrt[q]{x^p}=\left(\sqrt[q]{x}\right)^p.$$

Remarque. On ne peut définir x^r si $x<0$. Par exemple, si $r=\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}$ et $x<0$, les réels $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ et $\sqrt[6]{x^2}$ sont bien définis ($x^2>0$) par contre le réel $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2$ ne l'est pas.

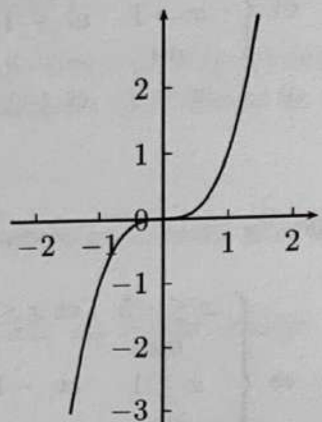
Graphes des certaines fonctions puissance.



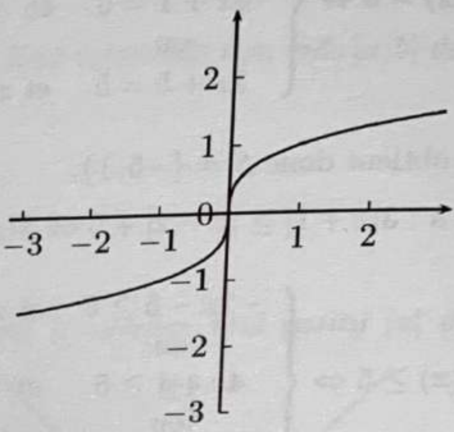
Graphe de $y = x^2$



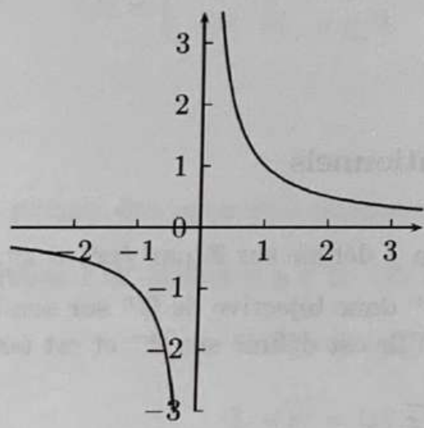
Graphe de $y = \sqrt{x}$



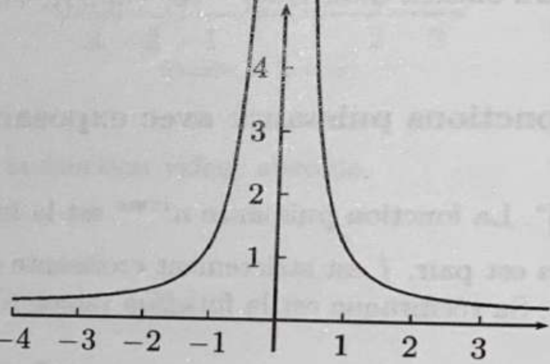
Graphe de $y = x^3$



Graphe de $y = \sqrt[3]{x}$



Graphe de $y = 1/x$



Graphes de $y = 1/x^2$

Exemple 6. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

$$1.\ x - \sqrt{x^2 - 1} = -1, \qquad 2.\ \sqrt{x^2} - \sqrt{x} = 2, \qquad 3.\ x^{2/3} - x^{1/3} = 2.$$

1.3.4 Logarithme et exponentielle

Définition 1.12. *Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On note H_a la région du plan délimitée par le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$. Par définition. l'aire algébrique de H_a est*

$$\int_1^a \frac{dt}{t} = \begin{cases} -Aire(H_a) & si \quad 0 < a \leq 1 \\ Aire(H_a) & si \quad 1 \leq a \end{cases}$$

et le logarithme népérien de a, noté $\ln a$, est l'aire algébrique de H_a :

$$\ln a = \int_1^a \frac{dt}{t}.$$

Conséquences. De cette définition découle les propriétés suivantes :

1. Si $a = 1$, H_1 se réduit à un segment, donc $\ln 1 = 0$.
2. Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$.
3. Si $1 < a$, alors $0 < \ln a$.
4. La fonction ln ainsi définie est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1.3 (Propriétés algébriques). *Pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :*

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, 2. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$,

3. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$, 4. $\ln x^r = r \ln x$.

Exemple 7. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 4\ln 2 - \ln 3 + \ln 6$, 2. $B = \ln\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \ln\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$.

Proposition 1.4 (Définition). *La fonction* ln *est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction exponentielle :*

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x). \end{array}$$

La fonction exp *est strictement croissante et est strictement positive sur $\mathbb{R}$.*

Notation. On note e l'unique antécédent de 1 par ln. Donc $\ln \mathrm{e} = 1$. Soit $r \in \mathbb{Q}$, en prenant $x = \mathrm{e}^r$ dans la formule 4 de la proposition précédente, on obtient

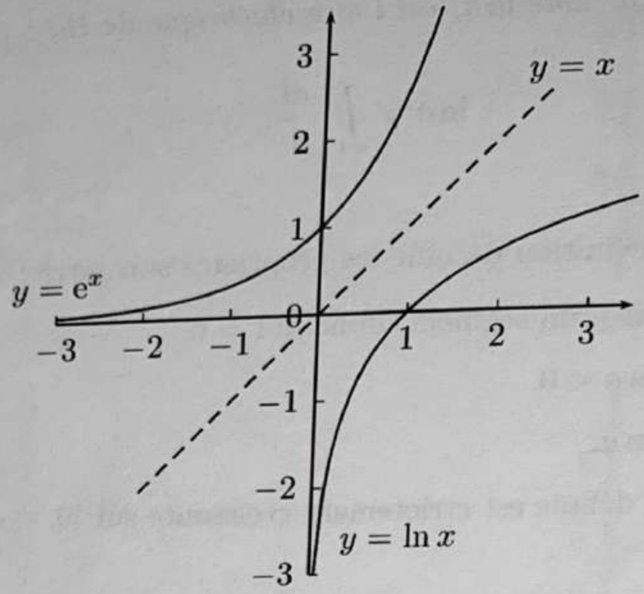
$$\ln(\mathrm{e}^r) = r\ln(\mathrm{e}) = r \Rightarrow \mathrm{e}^r = \exp(r).$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, cette égalité se prolonge à $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Proposition 1.5 (Propriétés algébriques). *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, 2. $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$, 3. $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, 4. $(\mathrm{e}^x)^r = \mathrm{e}^{rx}$.

Graphes des fonctions ln et exp.



Exemple 8. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

1. $\ln(4x) - 3\ln x = \ln 2$, 2. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$.

3. $e^x - 2xe^x = 0$, 4. $e^{-2x} - 3e^{-x} + 2 = 0$.

1.3.5 Fonctions puissance avec exposants irrationnels

Maintenant qu'on sait calculer les puissances de e avec un exposant irrationnel, on va s'en servir pour définir les fonctions puissances lorsque l'exposant est irrationnel.

Définition 1.13. *Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On appelle fonction puissance d'exposant a la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_a(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

Remarque. La fonction f_a est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$. Donc, si $a \neq 0$, f_a réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $f_a(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$. Sa réciproque est la fonction puissance $f_{1/a} : x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$.

Proposition 1.6 (Propriétés algébriques). *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,*

1. $x^{a+b} = x^a x^b$, 2. $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$, 3. $(xy)^a = x^a y^a$, 4. $(x^a)^b = x^{ab}$.

Important. On retiendra que la formule $f(x) = u(x)^{v(x)}$ n'est qu'une notation et que la vraie définition est $f(x) = \exp[v(x)\ln(u(x))]$. Par exemple, si $f(x) = (1+x)^{1/x}$, à première vue, on dira que $\mathscr{D}_f$ est $\mathbb{R}^*$. Ce qui est faux. En effet, $f(x) = \exp\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right]$, et donc

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ et } 1 + x > 0\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

1.3.6 Fonctions circulaires réciproques

1.3.6.1 Définition des fonctions arc

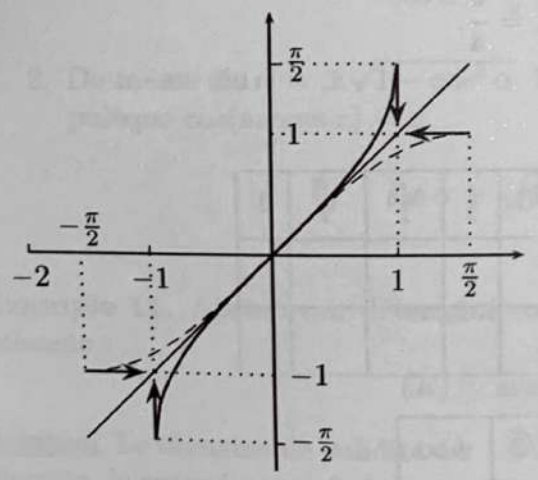
Proposition 1.7 (Définition).

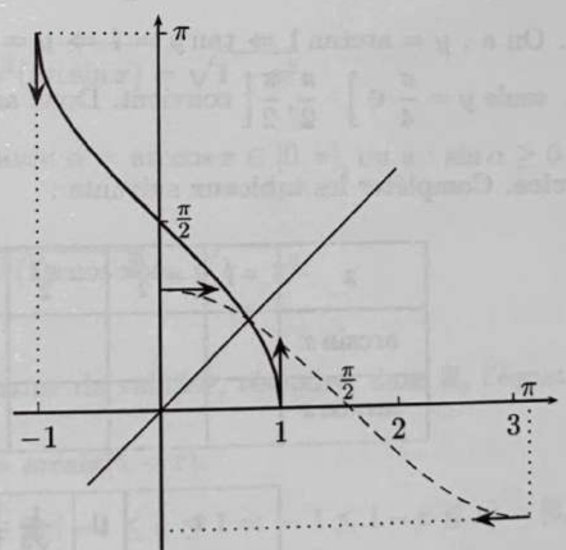
1. *La restriction* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *est strictement croissante, donc réalise une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1,1]$. *Sa réciproque est appelée arcsinus et est notée* arcsin *:*
$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin x. \end{aligned}$$

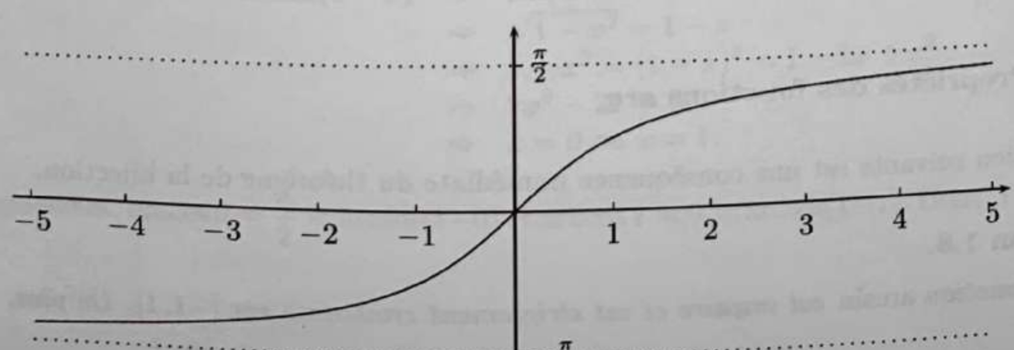
2. *La restriction* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est strictement décroissante, donc réalise une bijection de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$. *Sa réciproque est appelée arccosinus et est notée* arccos *:*
$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos x. \end{aligned}$$

3. *La restriction* $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *est strictement croissante, donc réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque est appelée arctangente et est notée* arctan *:*
$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan x. \end{aligned}$$

<u>**Graphes des fonctions arc.**</u>


Graphe de arcsin


Graphe de arccos


Graphe de arctan

Remarque. Voici une autre façon d'interpréter les fonctions arc.

1. Pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin x$ est à voir comme un angle $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin y = x$. En général, l'équation $\sin y = x$ admet une infinité de solutions mais seule celle qui est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est la valeur de $\arcsin x$.
2. De même, pour $x \in [-1,1]$, $\arccos x$ est à voir comme un angle $y \in [0,\pi]$ tel que $\cos y = x$.
3. La valeur $\arctan x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et elle est à voir comme un angle $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan y = x$.

Exemple 9. Trouver les valeurs exactes de

$$1.\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 2.\ \arccos \frac{1}{2}, \qquad 3.\ \arctan 1.$$

<u>Solution.</u>

1. On a : $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. De toutes ces solutions, seule $y = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ convient. Donc $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.
2. On a : $y = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. De toutes ces solutions, seule $y = \frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$ convient. Donc $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
3. On a : $y = \arctan 1 \Rightarrow \tan y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. De toutes ces solutions, seule $y = \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ convient. Donc $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice. Compléter les tableaux suivants :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$									
$\arccos x$									

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan x$					

1.3.6.2 Propriétés des fonctions arc

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème de la bijection.

Proposition 1.8.

1. *La fonction* arcsin *est impaire et est strictement croissante sur* $[-1,1]$. *De plus,*

$$\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arcsin x) = x \quad et \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x) = x.$$

2. *La fonction* arccos *est strictement décroissante sur* $[-1,1]$ *et elle vérifie*

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x \quad \textit{et} \quad \forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x) = x.$$

3. *La fonction* arctan *est impaire et est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x \quad \textit{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan x) = x.$$

Exemple 10. Simplifier l'écriture des réels suivants :

$$1.\ \arcsin\left(\sin\frac{22\pi}{7}\right), \quad 2.\ \arctan\left(\tan\frac{9\pi}{5}\right), \quad 3.\ \arccos\left(\sin\frac{11\pi}{5}\right).$$

Les fonctions arc vérifient plusieurs identités. On donne ci-dessous les deux les plus utilisées.

Proposition 1.9. *Pour tout* $x \in [-1,1]$, *on a :*

$$1.\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad 2.\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1,1]$.

1. On rappelle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et donc : $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. En prenant $\alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on aura : $\cos\alpha \geq 0$ et, puisque $\sin(\arcsin x) = x$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

2. De même $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Mais, avec $\alpha = \arccos x \in [0,\pi]$, on a : $\sin\alpha \geq 0$ et, puisque $\cos(\arccos x) = x$,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Exemple 11. Après avoir déterminé son domaine de validité, résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$(E)\ :\ \arccos x = \arcsin(1-x).$$

Solution. Le domaine de validité est : $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq 1-x \leq 1\} = [0,1]$. Ensuite, le second point de la proposition ci-dessus permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\arccos x = \arcsin(1-x) &\Rightarrow \sin(\arccos x) = 1-x \\
&\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1-x \\
&\Rightarrow 1-x^2 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \\
&\Rightarrow 2x^2-2x = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement, $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} = \arcsin(1-0)$ et $\arccos 1 = 0 = \arcsin(1-1)$. Donc $S = \{0,1\}$.

1.4 Exercices

Exercice 1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $2(x+4) = 3x - (5+x)$ 2. $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ 3. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x+1}$

4. $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$ 5. $\dfrac{3}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$ 6. $\dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x+2}{2x-1}$

7. $\sqrt{2-x} = x$ 8. $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ 9. $\sqrt{5-x^2} - x = 1$

10. $\dfrac{3-x}{2x-1} \geq 0$ 11. $\dfrac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0$ 12. $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1}$.

Exercice 2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes :

1. $\dfrac{1}{x+1} = y$ 2. $-x^2 + 2x = y$ 3. $\dfrac{x-1}{x+1} = y$

4. $1 + \sqrt{x} = y$ 5. $\sqrt{1-x} = y$ 6. $\sqrt{1+x^2} - x = y$.

Pour chacune des équations ci-dessous, on donnera l'ensemble des y pour lesquels l'équation admet une solution.

Exercice 3.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(1-x) = -\mathbb{E}(x)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \geq 1$.
3. Soit $x > 0$. Calculer $\mathbb{E}(-x)$ en fonction de $\mathbb{E}(x)$.
4. Résoudre les équations ou inéquations : $\mathbb{E}(x) = -1$, $\mathbb{E}(x) = 0$ et $-1 \leq \mathbb{E}(x) \leq 1$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x+1| + |x-1| - 4$.

1. Montrer que f est paire.
2. Donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
3. Tracer le graphe de f.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x+1| + |x-1| = 4$, (b) $|x+1| + |x-1| \leq 4$.

Exercice 5. Soit $f(x) = |x^2 - 1| - |2x + 2|$.

1. Donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x^2 - 1| - |2x + 2| = 0$, (b) $|x^2 - 1| \geq 1 + |2x + 2|$.

Exercice 6. En précisant le domaine de validité, simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{-2\ln 5} - e^{-3\ln 5}$, 2. $\ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$

3. $3\ln(e^{x/3}) - e^{\ln(x/3)}$, 4. a^b avec $a = e^x$ et $b = \ln\left(x^{1/x}\right)$.

Exercice 7. Résoudre les équations ou inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

1. $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln x+\ln 3)$,
2. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\ln 2$,
3. $\ln(x+1)-\ln(x-1)=-\ln 2$,
4. $e^{x}+3e^{-x}-4=0$,
5. $\ln\left(\sqrt{x-3}\right)\leq \ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$,
6. $8^{6x}-3\times 8^{3x}-4=0$,
7. $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$,
8. $x^{2/3}+x^{1/3}-2=0$.

Exercice 8. Soit $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Pour quelles valeurs de $y\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=y$ admet-elle une solution ? En déduire l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
3. Justifier que la fonction $f:\mathscr{D}_f\to\mathrm{Im}(f)$ admet une réciproque qu'on donnera.

Exercice 9. Soit $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}-1}$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Pour quelles valeurs de $y\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=y$ admet-elle une solution ? En déduire l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
3. Justifier que la fonction $f:\mathscr{D}_f\to\mathrm{Im}(f)$ admet une réciproque qu'on donnera.

Exercice 10. Simplifier l'écriture des nombres réels suivants :

1. $\arcsin\left(\sin\frac{25\pi}{7}\right)$,
2. $\arccos\left(\cos\frac{215\pi}{7}\right)$,
3. $\arctan\left(\tan\frac{74\pi}{9}\right)$,
4. $\arcsin\left(\cos\frac{53\pi}{5}\right)$.

Exercice 11. Simplifier l'expression et tracer le graphe de f dans les cas suivants :

$$f(x)=\arcsin(\sin x)\ ;\qquad f(x)=\arccos(\cos x)\ ;\qquad f(x)=\arctan(\tan x).$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie par $f(x)=\arccos(1-2x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et préciser la parité de f.
2. Pour $x\in[0,1]$, on pose $x=\sin t$ avec $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $f(\sin t)$, et en déduire une expression simple de f d'abord sur $[0,1]$ et puis sur $\mathscr{D}_f$.
3. Tracer le graphe de f.

Exercices supplémentaires

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire les propositions suivantes et leur négation à l'aide des quantificateurs :

1. La fonction f est majorée par 1 .
2. La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est constante .
4. La fonction f est croissante .
5. La fonction f est monotone .
6. La fonction f est décroissante .
7. La fonction f est paire .
8. La fonction f est impaire .

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\ln(x-1) = \ln(3x-5)$,
2. $\ln(x+1) + \ln(x-3) = \ln(x^2-5)$,
3. $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$,
4. $3^{2x+1} + 3^{2x} = 4^{x+1} + 2 \times 4^x$.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\arccos x = 2\arcsin \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi}{2}$,
2. $\arcsin x = 2\arctan x$,
3. $\arctan x = 4\arctan \dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{4}$,
4. $\arccos x = 2\arccos \dfrac{3}{4}$.

Exercice 16. Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

(a) $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$. (b) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.

Exercice 17.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Vérifier que : $2\arctan \dfrac{1}{2} = \arcsin \dfrac{4}{5}$.

Exercice 18. Soit $f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$.

1. Déterminer le domaine de définition et préciser la parité et la périodicité de f.
2. En utilisant la relation $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, déterminer une expression simple de $f(x)$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 19. Déterminer le domaine de définition, la parité, simplifier l'expression et tracer le graphe de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$,
2. $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(*Ind. : S'inspirer de l'exercice 12 en utilisant $x = \tan t$ pour le 1. et $x = \sin t$ pour le 2.*)

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités sur les suites

De manière informelle, une suite réelle est une succession de nombres réels appelés termes. Une telle suite peut être écrite sous la forme

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

où les points de suspension indiquent que la suite continue infiniment. La formule $f(n) = u_n$, appelée terme général de la suite, permet de générer les termes de la suite. Lorsque ce terme général est donné, on note la suite sous la forme : $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définition 2.1. *Une suite réelle est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. L'image $f(n) = u_n$ de $n \in \mathbb{N}$ est appelé terme général de la suite.*

Si une suite n'est définie qu'à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on la notera : $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Définition 2.2 (Suite majorée, minorée). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*

- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$*
- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Définition 2.3 (Monotonie). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*

- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$*
- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$*
- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Exemple 1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$1.\ u_n = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad 2.\ u_n = \frac{2^n}{n!},\ n \geq 1.$$

2.2 Notion de limite d'une suite

Pour une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, la seule limite qui a un sens est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. Elle est sensée donner le comportement de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Définition 2.4. *Soit (u_n) une suite réelle.*

1. *On dit que (u_n) converge vers une limite ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Dans ce cas, on note*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
2. *On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout $A > 0$, on peut trouver un entier N tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$. Dans ce cas, on note*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
3. *On dit que (u_n) a pour limite $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.*

Une suite qui ne converge pas vers une limite finie est dite divergente ou qu'elle diverge.

Exemple 2 (Exemples fondamentaux).

1. Pour tout réel $r > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$.
2. Pour tout réel $a \in]-1, 1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
3. Pour tout $a > 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

<u>Solution.</u> Soit $\varepsilon > 0$.

1. On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N^r} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \varepsilon^{-1/r}$. On prend $N = \mathbb{E}\left(\varepsilon^{-1/r}\right) + 1$. Donc, si $n \geq N$, alors
$$n \geq N > \varepsilon^{-1/r} \Rightarrow n^r > \varepsilon^{-1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^r} < \varepsilon. \text{ D'où } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$
2. On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a^N| < \varepsilon \Leftrightarrow N > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$. On prend $N = \mathbb{E}\left(\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}\right) + 1$. Donc, si $n \geq N$, on aura
$$n \geq N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|} \Rightarrow n \ln |a| < \ln \varepsilon \Rightarrow |a^n| = |a|^n < \varepsilon. \text{ D'où } \lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$
3. La formule du binôme de Newton donne
$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n(a-1) + \cdots + (a-1)^n \geq n(a-1).$$
Soit $A > 0$. Posons $N = \mathbb{E}\left(\dfrac{A}{a-1}\right) + 1 > \dfrac{A}{a-1}$. Si $n \geq N$, alors
$$a^n \geq n(a-1) \geq N(a-1) > A. \text{ Ainsi } \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$

On retiendra que si une suite (u_n) admet une limite finie ou infinie, alors celle-ci est unique. Dans la pratique, pour calculer une limite, on utilise essentiellement les résultats suivants.

Proposition 2.1 (Opérations sur les limites). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $c \in \mathbb{R}^*$. Alors*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (cu_n + v_n) = c\ell + \ell'$ *(sauf si $c\ell + \ell'$ est une forme indéterminée).*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$ *(sauf si $\ell \times \ell'$ est une forme indéterminée).*

3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$ *(sauf si* $\frac{\ell}{\ell'}$ *est une forme indéterminée).*

Exemple 3. Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$; 2. $u_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$; 3. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

Une application directe des opérations sur les limites donne une forme indéterminée. Il faut d'abord transformer les termes proposés.

1. On factorise par les termes dominants, ce qui donne $u_n = \frac{2-1/n}{1+1/n}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} = \frac{2-0}{1-0} = 2.$$

2. De même $u_n = \frac{2n-1}{n^2+1} = \frac{n\,(2-1/n)}{n^2\,(1+1/n^2)} = \frac{1}{n} \times \frac{2-1/n}{1+1/n^2}$. Ce qui donne,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}} = 0 \times \frac{2-0}{1-0} = 0.$$

3. Ici on multiplie par le terme conjugué. On obtient :

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{+\infty} = 0$.

2.3 Suites particulières

2.3.1 Suites et sommes géométriques

Proposition 2.2. *Soit la suite géométrique* $(a^n)_{n\geq 0}$ *de raison* $a \in \mathbb{R}$ *et de premier terme* 1.

1. *Si* $a > 1$, *la suite* (a^n) *diverge vers* $+\infty$.
2. *Si* $a = 1$, *la suite* (a^n) *est constante, et converge vers* 1.
3. *Si* $|a| < 1$, *la suite* (a^n) *converge vers* 0.
4. *Si* $a \leq -1$, *la suite* (a^n) *est divergente (elle n'a pas de limite).*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 1$ alors $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = n + 1$, et si $a \neq 1$ alors

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Ainsi

- si $|a| < 1$, alors la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{1-a}$.
- Si $|a| \geq 1$, alors la suite (S_n) est divergente.

Exemple 4. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = 2^{1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}$.

2.3.2 Suites de référence, suites équivalentes

Définition 2.5. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.*

Théorème 2.1 (Equivalences et limites). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Equivalents usuels. Si $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, alors

$$\sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n, \qquad (e^{u_n} - 1) \underset{+\infty}{\sim} u_n, \qquad \ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n,$$

$$\tan u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n, \qquad (1-\cos u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}, \qquad [(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n \ (\alpha \neq 0).$$

Théorème 2.2 (Croissances comparées). *Pour tout $a > 1$ et tout $k > 0$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Les règles de passage à la limite dans une puissance se déduisent des théorèmes généraux. En effet, il suffit de transformer le terme général : $(u_n)^{v_n} = \exp[v_n \ln(u_n)]$.

Exemple 5. Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$1.\ u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\frac{1}{n}}\ ; \qquad 2.\ u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\ ; \qquad 3.\ u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}.$$

1. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1/n}{1/n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$
2. On a : $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$.
3. De même, $u_n = e^{\frac{1}{\ln n}\ln\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{\ln n}} = e^{-1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-1}$.

2.4 Théorèmes de convergence ou de divergence

2.4.1 Théorème d'encadrement

Théorème 2.3 (Passage à la limite dans les inégalités). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq v_n$ si $n \geq n_0$.*

1. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.*

3. Si les deux suites convergent, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exemple 6. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{1+\sin^2 n}$. Pour tout $n \geq 0$, on a : $\dfrac{n}{2} \leq u_n$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Le théorème précédent ne permet pas de montrer que la limite de l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) existe. Pour cela, on utilise souvent le théorème suivant.

Théorème 2.4. *(u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Exemple 7. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a : $|u_n| \leq \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Corollaire 2.1 (Théorème d'encadrement). *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que :*

- *Il existe n_0 tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq n_0$.*
- *Les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ.*

Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. On a : $0 \leq u_n - v_n \leq w_n - v_n$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$. Le théorème précédent permet donc de conclure.

2.4.2 Suites extraites

Définition 2.6. *Une suite extraite ou sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Parfois les termes d'indice pair et les termes d'indice impair se comportent de manière assez différente qu'il convient d'étudier leur convergence séparément.

Théorème 2.5. *Une suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers cette limite ℓ.*

Exemple 8. Soit $u_n = (-1)^n$. On a : $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites différentes. Donc (u_n) est divergente.

Théorème 2.6 (des suites extraites). *Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.*
2. *Par contraposée, si (u_n) admet une suite extraite qui diverge ou deux suites extraites qui ont des limites différentes, alors (u_n) est divergente.*

Exemple 9. Etudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. La suite (u_{2n+1}) est divergente car $u_{2n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$. Donc (u_n) est divergente.

2.4.3 Suites monotones, suites adjacentes

Théorème 2.7 (des suites monotones). *Soit (u_n) une suite réelle croissante.*

1. *Si (u_n) est majorée, alors elle est convergente.*
2. *Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*

Ce théorème assure que toute suite croissante admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Sa première partie dit que, *toute suite croissante et majorée est convergente.*

Corollaire 2.2. *Soit (u_n) une suite réelle décroissante.*

1. *Si (u_n) est minorée, alors elle est convergente.*
2. *Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.*

Exemple 10. Soit $u_n = \frac{10^n}{n!}$. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

Pour tout $n \geq 9$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10}{n+1} \leq 1$. Donc $(u_n)_{n\geq 9}$ est décroissante. D'autre part, $0 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (u_n) est minorée. Etant à la fois décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. On a :

$$u_{n+1} = \frac{10}{n+1} u_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1} \times \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \times \ell = 0.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Donc $\ell = 0$.

Définition 2.7. *On dit que les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$.*

Comme conséquence du théorème des suites monotones, on dispose du résultat suivant.

Théorème 2.8 (des suites adjacentes). *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites adjacentes. Alors ces deux suites sont convergentes et elles convergent vers la même limite ℓ. De plus, si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Exemple 11. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite dans le cas suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

2.5 Exercices

Exercice 1. Etudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^3+1}$, 2. $u_n = \dfrac{n^3-2}{3n^2+2}$, 3. $u_n = \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+2n-2}$,

4. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$, 5. $u_n = \ln(n^2+1) - \ln n$, 6. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$,

7. $u_n = 4^n - 3^n + 1$, 8. $u_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, 9. $u_n = (-2)^n \dfrac{1}{3^n}$,

10. $u_n = 4\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n^2}$, 11. $u_n = \dfrac{e^{2n}+1}{e^n-1} - e^n$, 12. $u_n = \dfrac{3^n+\pi^n}{2^{2n}}$.

Exercice 2. Etudier, à l'aide du théorème d'encadrement, la nature des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$, 2. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$, 3. $u_n = n\sin n + n^2$,

4. $u_n = \cos n \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 5. $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$, 6. $u_n = \dfrac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1}$,

7. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$, 8. $u_n = 1 - \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$, 9. $u_n = \dfrac{e^{-n}\sin n}{n+1}$,

10. $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{n+1}$, 11. $u_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+\sin n+1}$, 12. $u_n = \left(\dfrac{\sin n}{2}\right)^n$.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer par récurrence que $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est majorée. Que dire de sa convergence ?

Exercice 4. Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que $2 < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (2-u_n)(1+u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Soient les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite ℓ.

2. Montrer que ℓ vérifie l'encadrement suivant : $2,5 \leq \ell \leq 2,75$.

Exercice 6. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. Que dire de la suite (w_n) de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$?

Exercice 7. Etudier la convergence des suites définies par leur terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$, 2. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 3. $u_n = (-2)^n + 2^n$,

4. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n n}{2n+1}$, 5. $u_n = \dfrac{2+4(-1)^n}{n}$, 6. $u_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$,

7. $u_n = 3^n - n^2.2^n$, 8. $u_n = \dfrac{n^3+(-1)^n}{2^{2n}}$, 9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 8. En justifiant la réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. Toute suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
3. Si une suite est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
4. Soit une suite qui tend vers $+\infty$. Alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n < v_n$. Si ces deux suites sont convergentes, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
6. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors la suite (u_n) est aussi convergente.
7. Il existe une suite (u_n) divergente telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes et leur négation :

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
4. La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
5. La limite de la suite (u_n) est $+\infty$.

Exercice 10. Etudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \dfrac{2^{2n}-n3^n}{2^{2n}+n3^n}$, 2. $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$, 3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{2n+1}}$,

4. $u_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$, 5. $u_n = \dfrac{n\sin\frac{1}{n}}{2-\cos\frac{1}{n}}$, 6. $u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$.

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$(a)\ a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b \qquad (b)\ 0 \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{2}.$$

2. On définit les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{v_0 - u_0}{2^n}$.

   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 12. Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que l'équation $x = \dfrac{x+1}{x+2}$ admet une seule solution positive.
3. Montrer que pour cette solution positive ℓ de l'équation ci-dessus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|.$$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - \ell|$. Que dire de la limite de (u_n) ?

Exercice 13. Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + a^2}{2u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq a$, et puis que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{|u_1 - a|}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Chapitre 3

Limites et continuité

3.1 Limites des fonctions réelles

3.1.1 Définitions et généralités

Définition 3.1 (Limite en un point fini). *Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.*

- *On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Exemple 1. Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|(x^2 - x + 1) - 3| = |x^2 - x - 2| = |(x-2)(x+1)| = |x-2| \times |x+1|.$$

Donc, si $|x-2| < 1$, on aura

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 2 < x + 1 < 4.$$

Ainsi, si $|x-2| < \delta \leq 1$, alors $|(x^2 - x + 1) - 3| = |x-2| \times |x+1| < 4\delta$. L'assertion est satisfaite pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta \leq 1$ et $4\delta \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $\delta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

<u>**Limite à droite et à gauche.**</u> Dans cette définition,

1. Lorsqu'on considère uniquement les réels $x \in]a, a+\delta[$ on parlera de limite à droite en a. Lorsqu'elle existe, on la notera $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.
2. Lorsqu'on considère uniquement les réels $x \in]a - \delta, a[$ on parlera de limite à gauche en a. Lorsqu'elle existe, on la notera $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Proposition 3.1. *Une fonction f admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle y admet une limite à droite, une limite à gauche et si ces deux limites sont égales.*

Définition 3.2 (Limite en $+\infty$). *Soit f une fonction définie sur $I =]b, +\infty[$ où $b \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Définition 3.3 (Limite en $-\infty$). *Soit f une fonction définie sur $I =]-\infty, b[$ où $b \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

- *On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Exemple 2. Montrons, à l'aide de la définition, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver un réel $\delta > 0$ tel que, si $x > \delta$ alors $\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$. Pour cela, on prend $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \geq \delta \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\delta} = \varepsilon$. D'où $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Proposition 3.2 (Unicité de la limite). *Si une fonction admet une limite finie ou infinie en un point fini ou l'infini, alors celle-ci est unique.*

3.1.2 Calcul de limites

Proposition 3.3 (Limites à connaître).

1. *Limites de certaines puissances :*

1. $\lim\limits_{x \to a} x = a$, 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$,

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, 5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, 6. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

2. Limites usuelles de ln :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

3. Limites usuelles de exp :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Pour calculer une limite, on utilise essentiellement les résultats suivants.

Théorème 3.1 (Opérations sur les limites). *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \text{ ou } \pm\infty \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \text{ ou } \pm\infty.$$

Alors

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$ *(sauf si $\ell_1 + \ell_2$ est une forme indéterminée).*
2. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \ell_1\ell_2$ *(sauf si $\ell_1\ell_2$ est une forme indéterminée).*
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *(sauf si $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ est une forme indéterminée).*

Exemple 3. Calculons, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}\,, \qquad 2.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1}\,, \qquad 3.\ \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right].$$

Une application directe des opérations sur les limites donne une forme indéterminée.

1. On factorise le numérateur et le dénominateur :
$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$
2. On factorise le numérateur et le dénominateur par leurs termes dominants
$$f(x) = \frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$
3. Ici on multiplie par le terme conjugué,
$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$
Or $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Théorème 3.2 (Composition des limites). *Soit u une fonction définie sur un voisinage I de a, sauf peut être en a, telle que $\lim_{x\to a} u(x) = b$. Soit f une fonction défnie sur un voisinage J de b, sauf peut être en b. On suppose que $u(I \setminus \{a\}) \subset J \setminus \{b\}$ et que $\lim_{x\to b} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $\lim_{x\to a} [f(u(x))] = \lim_{u\to b} f(u) = \ell$.*

Conséquence. Ce résultat donne les règles de passage à la limite dans une puissance.

1. Si $a > 0$ est un réel strictement positif, alors

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = \lim_{x\to 0^+} e^{a\ln x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \lim_{x\to+\infty} e^{a\ln x} = +\infty\,.$$

2. Si $a < 0$ est un réel strictement négatif, alors

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = \lim_{x\to 0^+} e^{a\ln x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \lim_{x\to+\infty} e^{a\ln x} = 0\,.$$

Exemple 4. Calculer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x)\,, \qquad 2.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\,.$$

1. Avec $u = e^x$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \lim\limits_{u\to 0} \ln(1+u) = \ln(1) = 0$.
2. Avec $u = \sin x$. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1$.

Théorème 3.3 (Passage à la limite dans les inégalités). *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $\forall x \in I\setminus\{a\}$, $f(x) \le g(x)$.*

1. *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ existent, alors $\ell_1 \le \ell_2$.*

Exemple 5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$, si elle existe.

Le théorème précédent ne permet pas de montrer que la limite de l'une des deux fonctions f ou g existe en a. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $\forall x \in I\setminus\{a\}$, $|f(x)| \le g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

De ce résultat découle le corollaire suivant.

Corollaire 3.1 (Théorème d'encadrement). *Soient f, g et h trois fonctions. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $\forall x \in I\setminus\{a\}$, $h(x) \le f(x) \le g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$. Alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

En effet, on a : $\forall x \in I\setminus\{a\}$, $0 \le f(x) - h(x) \le g(x) - h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} [g(x) - h(x)] = 0$. Le résultat découle donc du théorème précédent.

Remarque. Tous ces résultats sont aussi valables lorsque x tend vers $\pm\infty$. Pour illustrer l'utilité de ce théorème, on va montrer le résultat suivant.

Proposition 3.4. *On a :* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$.

Démonstration. La seconde limite découle de la première en remarquant que

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}.$$

Pour montrer la première limite, on interprète x comme un angle et on suppose, pour commencer, que $0 < x < \pi/2$. Notons S_x le secteur circulaire de rayon 1 et d'angle central x, A_x le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(\cos x, \sin x)$ et B_x le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1, \tan x)$. Donc

$$\text{Aire}(A_x) \leq \text{Aire}(S_x) \leq \text{Aire}(B_x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}.$$

En multipliant par $\frac{2}{\sin x} > 0$ et en inversant, on obtient :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pour calculer la limite en 0^-, il suffit de remarquer que $\frac{\sin x}{x}$ est paire.

Exemple 6. Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$.

Solution.

1. On a : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$
2. On a : $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$

3.2 Continuité des fonctions réelles

3.2.1 Définition, théorèmes généraux

Définition 3.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$f(a)$ est définie.* 2. *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe.* 3. *$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Si une de ces conditions n'est pas satisfaite, on dira que f est discontinue en a.

Exemple 7. Etudier la continuité des fonctions suivantes en 2 :

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Les trois fonctions sont identiques sauf en 2. Donc elles ont la même limite en 2, soit

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

La fonction f n'est pas définie en 2, elle est donc discontinue en 2. La fonction g est définie en 2 mais sa valeur $g(2) = 3$ n'est pas égale à sa limite en 2, elle est aussi discontinue en 2. La valeur de la fonction h en 2 est la même que sa limite en 2, elle est continue en 2.

Définition 3.5. *Une fonction f est dite continue sur $[a, b]$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *f est continue sur $]a, b[$, c'est-à-dire f est continue en tout point $c \in]a, b[$.*
2. *f est continue à droite en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.*
3. *f est continue à gauche en b, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

Pour étudier la continuité d'une fonction, on utilise les résultats suivants.

Théorème 3.5 (Théorèmes généraux). *La somme, le produit, le quotient, lorsqu'il est défini, ou la composée, lorsqu'elle est définie, de fonctions continues est une fonction continue. De même, si $f : I \to J$ est bijective et est continue, alors $f^{-1} : J \to I$ est continue.*

Exemple 8. Les fonctions puissances, ln, exp, la fonction valeur absolue, les fonctions circulaires et les fonctions arc sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème 3.6 (de prolongement par continuité). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f admet un prolongement par continuité au point a. Il s'agit de la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & si \quad x = a. \end{cases}$$

Exemple 9. Soit $r > 0$ et $f(x) = x^r$. On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{r \ln x} = 0$. Donc f se prolonge par continuité en 0 et ce prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^r & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.2.2 Image d'une suite par une fonction

Proposition 3.5. *Soit f une fonction définie sur un voisinage I de a, sauf peut-être en a. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) à valeurs dans $I \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.*

Conséquence. En prenant la contraposée, on obtient les critères suivants.

1. Si on met en évidence une suite (u_n) qui converge vers a et de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$ n'existe pas alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.
2. Si on met en évidence deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a et de sorte que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites différentes alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 10. Les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ n'existent pas. Utiliser la parité et prendre les suites $(n\pi)$ pour la première limite et $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ pour la seconde.

Corollaire 3.2. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Suites du type $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subseteq I$. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

L'hypothèse $f(I) \subseteq I$ implique que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a le résultat suivant.

Théorème 3.7. *Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.*

Exemple 11. Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 3$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

. On montre, par récurrence, que $2 \leq u_n \leq 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

. On pose $f(x) = \sqrt{2+x}$. C'est une fonction croissante sur $I = [-2, +\infty[$. On a :

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{5} \leq u_0$$

et par récurrence, puisque f est croissante, on montre que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

. Etant à la fois décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente et elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$. Or $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3.2.3 Théorèmes fondamentaux

Le théorème de Bolzano, cité souvent comme étant le théorème des valeurs intermédiaires, s'énonce comme suit.

Théorème 3.8 (Bolzano). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 3.9 (des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a, b \in I$, tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Exemple 12. Montrer qu'il existe au moins un $x \in]0, 1[$ tel que $e^{-x} = x$.

Enfin toute fonction continue sur un intervalle fermé possède un maximum et un minimum.

Théorème 3.10 (des valeurs extrêmes). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire, il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$, tels que*

$$\forall x \in [a, b],\ f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

3.3 Exercices

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2}{2x^2-1}$,

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$, 5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$,

7. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} [\ln(1+e^x)-x]$, 9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Exercice 2. Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$, 2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$, 3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$,

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+\dfrac{|x|}{x}\right)$, 5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\arctan x}{x+1}$, 6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x . \ln(\ln x)$,

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$, 8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right)\ln x$, 9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$.

Exercice 3. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}}$, (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exercice 4. Calculer, lorsqu'elles existent, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ dans le cas suivant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arccos(\ln x)$, 2. $f(x) = \arcsin(2x+1)$,

3. $f(x) = \ln(\arcsin x)$ 4. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 6. Déterminer le réel m de sorte que la fonction suivante soit continue sur $]-2,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} & \text{si } -2 < x < 2 \\ m & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0. On donnera ce prolongement

Exercice 8. Soit $f(x) = x^5 - 3x - 1$ et $g(x) = x2^x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution dans $[1,2]$.
2. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution dans $[0,1]$.
3. Montrer que $f(x) = g(x)$ admet une solution dans $]0,2]$.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. En utilisant la définition d'une limite, montrer que

1. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + x - 1) = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1) = 0$,
3. $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)\sin\dfrac{1}{x+1} = 0$,
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Exercice 10. Montrer que toute fonction T-périodique, $T > 0$, non constante n'admet pas de limite en $\pm\infty$. En déduire que les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 11. Déterminer les réels m et k de sorte que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x + 7 & \text{si } x \leq -1 \\ m(x+1) + k & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 + 5 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Exercice 12. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

Indication : Considérer l'image par f de la suite de terme général $u_n = \dfrac{x}{2^n}$.

Exercice 13.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2}$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x+1) = f(x).$$

Indication : Que dire de la suite $(f(u_n))$?

Chapitre 4

Fonctions dérivables

Dans toute la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

4.1 Dérivée et tangente

Définition 4.1. *Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite, notée $f'(a)$, est appelée la dérivée de f en a.*

Remarque. On pose $x = a + h$, donc $x - a = h$ et lorsque x tend vers a, h tend vers 0. On obtient ainsi une autre façon de noter la dérivée de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Interprétation géométrique. Notons $A(a, f(a))$ et $B(a + h, f(a + h))$ deux points de la courbe de f. La pente Δ de la droite (AB) n'est autre que le taux d'accroissement de f :

$$\Delta = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En faisant tendre h vers 0, le point B se déplace le long de $\mathscr{C}_f$ vers A. Ainsi la droite (AB) se déplace vers la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

Proposition 4.1. *On suppose que f est dérivable en a. Alors la tangente à la courbe de f en a est la droite T_a d'équation*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Remarque. Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en $A(a, f(a))$ et c'est la droite verticale passant par A.

Définition 4.2. *La fonction f' définie par la formule $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est appelée la dérivée de f par rapport à x. Son domaine de définition est constitué des x dans le domaine de f pour lesquels la limite existe.*

La dérivée de $f(x)$ par rapport à x est notée indifféremment $f'(x) = (f(x))' = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

Exemple 1. Utiliser la définition pour déterminer $f'(x)$ et puis donner une équation de la tangente au graphe de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = c$, $a = 3$. 2. $f(x) = x$, $a = 2$.

3. $f(x) = x^2$, $a = 1$. 4. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$ et $a = 1$.

Solution.

1. On a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$. Donc $f'(x) = 0$. Une équation de la tangente en 3 est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$. Soit $y = c$.
2. Soit $f(x) = x$. On a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = 1$. Donc $f'(x) = 1$. Une équation de la tangente en 2 est : $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Soit $y = x$.
3. Par factorisation, on a : $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{h[(x+h)+x]}{h} = 2x + h$. Donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x.$$
Une équation de la tangente en 1 est : $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Soit $y = 2x - 1$.
4. La fonction f n'est pas dérivable en 0 car
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$
En particulier, le graphe de f admet une demi-tangente verticale au point $(0,0)$. Pour $x > 0$, on a :
$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$
Donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Une équation de la tangente en 1 est : $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Soit $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$.

Définition 4.3 (Dérivée à droite, à gauche). *Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.*

1. *On dit que f est dérivable à droite en a si la limite $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite, notée $f'_d(a)$, est appelée la dérivée de f à droite en a.*
2. *On dit que f est dérivable à gauche en a si la limite $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite, notée $f'_g(a)$, est appelée la dérivée de f à gauche en a.*

Remarque. Pour un point a intérieur à I ($\exists r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$), f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, dérivable à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 4.2 (Dérivabilité implique continuité). *Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, la fonction f telle que $f(x) = |x|$ est continue en 0, dérivable à droite en 0, dérivable à gauche en 0 et elle n'est pas dérivable en 0.

. Si $h > 0$, on aura : $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$. Donc $f'_d(0) = 1$;

. Si $h < 0$, on aura : $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$. Donc $f'_g(0) = -1$.

Mais $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Notation.

1. Si f' est dérivable, on dira que f est n fois dérivable et la fonction $(f')'$ est appelée dérivée seconde de f et est notée f'' ou $f^{(2)}$.
2. Pour $n \geq 2$, on dira que f est n fois dérivable si $f^{(n-1)}$ est dérivable. Dans ce cas, la dérivée n-ième de f est $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

4.2 Méthodes de dérivation

Puissances entières. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^n$. Pour $h \neq 0$, la formule de factorisation donne :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Or, chacun des n termes de la somme tend vers x^{n-1} lorsque h tend vers 0. Donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \Leftrightarrow (x^n)' = nx^{n-1}.$$

La fonction inverse. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour $x \neq 0$ et h assez petit, on a :

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}.$$

C'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$.

Fonctions circulaires. Soit $h \neq 0$. La formule d'addition donne :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \times \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \times \frac{\sin h}{h}.$$

Or $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$. C'est-à-dire

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Par un calcul analogue, on vérifie que : $(\cos x)' = -\sin x$.

Logarithme. On rappelle que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$, pour $x > 0$. Un résultat d'analyse (cf. théorème fondamental du calcul intégral) implique que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Théorème 4.1 (Sommes et produits). *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\Big[\lambda u(x) + \mu v(x)\Big]' = \lambda u'(x) + \mu v'(x) \quad et \quad \Big[u(x)v(x)\Big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Exemple 2. Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$$1.\ f(x) = 2x^3 - x^2, \qquad 2.\ f(x) = \frac{2}{x} + x^2 \sin x, \qquad 3.\ f(x) = 3 + \sqrt{x} \ln x.$$

Théorème 4.2 (Dérivée de la composée). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $u : J \to \mathbb{R}$ telles que $u(J) \subset I$. Si u est dérivable sur J et f est dérivable sur I. Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur J et on a :*

$$\forall x \in J,\ (f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x).$$

Exemple 3. Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$$1.\ f(x) = \ln(2x^2 + x), \quad 2.\ f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad 3.\ f(x) = \cos(-3x^3 + 1).$$

Corollaire 4.1 (Quotient). *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I. On suppose que v ne s'annule pas sur I. Alors*

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2} \qquad et \qquad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Exemple 4. Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$$1.\ f(x) = \tan x, \qquad 2.\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad 3.\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}.$$

Théorème 4.3 (Dérivée de la réciproque). *Soit f une fonction continue bijective sur I. Si f est dérivable au point $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ et on a :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Conséquences. Ce théorème permet d'établir les résultats suivants.

1. La fonction $\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\,(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.
2. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(e^x)' = e^x$.
3. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

La formule donnant la dérivée première d'un produit se généralise à la dérivée $n^{\text{ième}}$.

Proposition 4.3 (Formule de Leibniz). *Soient u et v deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors uv est n fois dérivables sur I et*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad avec\ u^{(0)} = u\ et\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

4.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Le théorème de Rolle affirme que si l'intersection du graphe d'une fonction dérivable f et d'une droite horizontale a lieu en deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, alors il existe au moins un point entre a et b où la tangente est horizontale.

Théorème 4.4 (de Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Exemple 5. Soit $f(x) = x \sin x$. Prouver l'existence d'un point $c \in]0, \pi[$ où la tangente est horizontale.

Solution. On a : $f(0) = 0 = f(\pi)$. De plus, la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaites sur $[0, \pi]$. Il existe c dans $]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$. La tangente en c est donc horizontale.

Le théorème des accroissements finis, considéré comme l'un des principes fondamentaux d'analyse, affirme qu'entre deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ du graphe d'une fonction dérivable f, il existe au moins un point où la tangente est parallèle à la droite (AB).

Théorème 4.5 (des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors*

$$\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Exemple 6. Montrer que $f(x) = x^3 + 1$ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements sur $[0, 2]$ et trouver un point $c \in]0, 2[$ où la tangente au graphe de f est parallèle à la droite joignant les points $(0, f(0))$ et $(2, f(2))$.

Solution. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les hypothèses du théorème sont satisfaites sur $[0, 2]$. Il existe donc $c \in]0, 2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$. Or,

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 9, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(c) = 3c^2.$$

Donc $3c^2 = \dfrac{9 - 1}{2} \Rightarrow c = \pm 2/\sqrt{3}$. Néanmoins, seule la valeur positive se trouve dans $]0, 2[$.

4.4 Etude des fonctions dérivables

4.4.1 Variations et extremums d'une fonction

Théorème 4.6 (Variations d'une fonction). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*
3. *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.*

Remarque. Ce résultat s'applique sur tout intervalle sur lequel f est continue. Par exemple, si f est continue sur $[a, +\infty[$ et $f'(x) > 0$ sur $]a, +\infty[$ alors f est strictement croissante sur $[a, +\infty[$; et si f est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, +\infty[$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$.

Définition 4.4. *Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.*

1. *On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant a tel que $\forall x \in J,\ f(x) \leq f(a)$.*
2. *On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant a tel que $\forall x \in J,\ f(a) \leq f(x)$.*
3. *On dit que f admet un extremum local en a si elle y admet un maximum ou un minimum local.*

Théorème 4.7. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.*

- *Si f possède un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*
- *Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.*

Un point a où la dérivée f' s'annule s'appelle point stationnaire de f. En vertu du théorème précédent, les extremums d'une fonction doivent être recherchés parmi ses points stationnaires, les points où f n'est pas dérivables et les bornes de son domaine de définition.

Exemple 7. Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Etudier les variations de f, on précisera les points stationnaires et, éventuellement les extremums de f.

Solution. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc pour déterminer ses points stationnaires, on doit résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Ce qui donne

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Les points stationnaires de f sont donc 1 et -1. On représente le signe de $f'(x)$ et les variations de f dans un tableau comme suit :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit de ce tableau que :

- La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, elle est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et elle est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- La fonction f admet un maximum local en -1 et elle admet un minimum local en 1.

Théorème 4.8 (Test des dérivées secondes). *Soit f une fonction deux fois dérivable en un point a.*

1. *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local en a.*
2. *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local en a.*
3. *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$, alors le test n'est pas concluant (tout peut arriver).*

Exemple 8. Soit $f(x) = x^5 - 20x^2$. Déterminer les points stationnaires de f et préciser la nature de ceux-ci.

Solution. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc pour déterminer ses points critiques, on doit résoudre l'équation $f'(x) = 0$. On a :

$$f'(x) = 5x^4 - 40x = 5x(x^3 - 8) = 5x(x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Donc les points stationnaires de f sont 0 et 2. Par ailleurs, $f''(x) = 20x^3 - 40$. Ce qui donne $f''(0) = -40 < 0$, donc f admet un maximum local en 0. Et $f''(2) = 120 > 0$, donc f admet un minimum local en 2.

Théorème 4.9 (Théorème de prolongement dérivable). *Soit I un intervalle ouvert contenant a et f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, ou si cette limite est $\pm\infty$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} f'(x).$$

De plus, ce résultat est aussi valable pour une limite comme $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Exemple 9. Calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1}$. On pose $f(x) = \arcsin x$ avec $a = 1$. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Les hypothèses du théorème sont staisfaites, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty$.

Proposition 4.4 (Croissances comparées). *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$,
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$,
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$

Démonstration.

1. Avec $t = x^\alpha$, il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln t}{t}$. La fonction $f(t) = 2\sqrt{t} - \ln t$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ f(1) = 2 \le f(t) \Rightarrow 0 \le \ln t \le 2\sqrt{t} \Rightarrow 0 \le \frac{\ln t}{t} \le \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Le théorème d'encadrement implique que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

2. Avec $t = \dfrac{1}{x}$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-\ln t}{t^\alpha} = 0$.

3. On a : $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x}\right)^\beta$ où $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Donc, avec $t = e^x$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^\lambda}{\ln t}\right)^\beta = 0.$$

4. Se déduit de la troisième limite en posant $t = -x$.

Exemple 10. On veut calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$. En prenant $u = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \to +\infty} ue^{-u} = 0.$$

En utilisant bien sûr le point 3 du théorème ci-dessus.

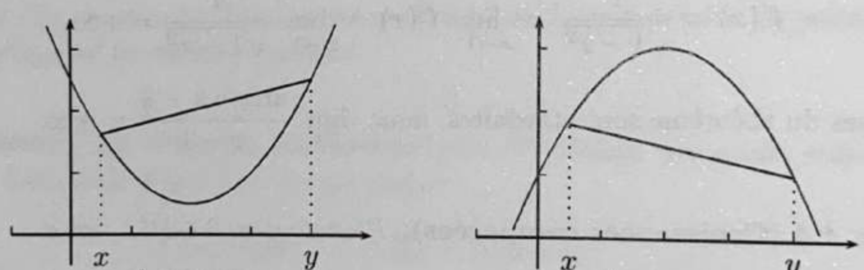
4.4.2 Fonctions convexes

Définition 4.5. *Une fonction réelle f est dite convexe sur un intervalle I si*

$$\forall x, y \in I, \ \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Elle sera dite concave si $-f$ est convexe.

Géométriquement, lorsque t décrit l'intervalle $[0,1]$, le point $z = tx + (1-t)y$ décrit l'intervalle $[x, y]$, $x < y$, et $Z = tf(x) + (1-t)f(y)$ prend toutes les valeurs entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité $f(z) \leq Z$ signifie donc que le graphe de f reste toujours en dessous du segment joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.



f convexe $\qquad$ f concave

Théorème 4.10 (Test des dérivées secondes pour la convexité). *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$.*

1. *Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est convexe sur $[a,b]$.*
2. *Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est concave sur $[a,b]$.*
3. *Si f'' s'annule en un point c en changeant de signe, alors f possède un point d'inflexion en c.*

Exemple 11. Soit $f(x) = xe^{-x}$. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et concave. Détecter les éventuels points d'inflexion et donner une équation de la tangente en ces points.

<u>Solution.</u> On calcule les deux dérivées premières de f, on obtient :

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}.$$

Rappelons que $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le tableau de signes de $f''(x)$ en découle :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que f est concave sur $]-\infty, 2]$ et qu'elle est convexe sur $[2, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en 2 en changeant de signe. On a donc un point d'inflexion en 2. Une équation de la tangente en 2 est $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Soit $y = 4e^{-2} - e^{-2}x$.

4.4.3 Plan d'étude d'une fonction

L'étude complète d'une fonction réelle f comporte les points suivants.

1. **Domaine de définition.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}$. Et étudier éventuellement la parité et la périodicité.
2. **Limites et branches infinies.** Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et détecter la présence d'éventuelles asymptotes. Pour cela, on suit la procédure suivante.
   (a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Dans ce cas, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote (verticale) au graphe de f.
   (b) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote (horizontale) au graphe de f au voisinage de $\pm\infty$.
   (c) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas, on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
      i. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des x.
      ii. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.
      iii. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$.
         . Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.
         . Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$, le graphe de f admet la droite Δ d'équation $y = ax + b$ comme asymptote. La position du graphe par rapport à Δ est obtenue en étudiant le signe de $f(x) - ax - b$.
3. **Variations et points stationnaires.** Calculer la dérivée et chercher les points critiques de f. Faire un tableau de variations et identifier les minimums et les maximums.
4. **Points d'inflexion.** Calculer la dérivée seconde f'' et déterminer son signe. Cela permet d'identifier les points d'inflexion.
5. **Représentation graphique.** Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

Exemple 12. Etudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$. D'abord, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

. Limites et asymptotes : on a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Donc la droite $x = 1$ est une asymptote verticale. D'autre part,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = 2.$$

Donc la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote. De plus, $f(x) - x - 2 = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

Donc

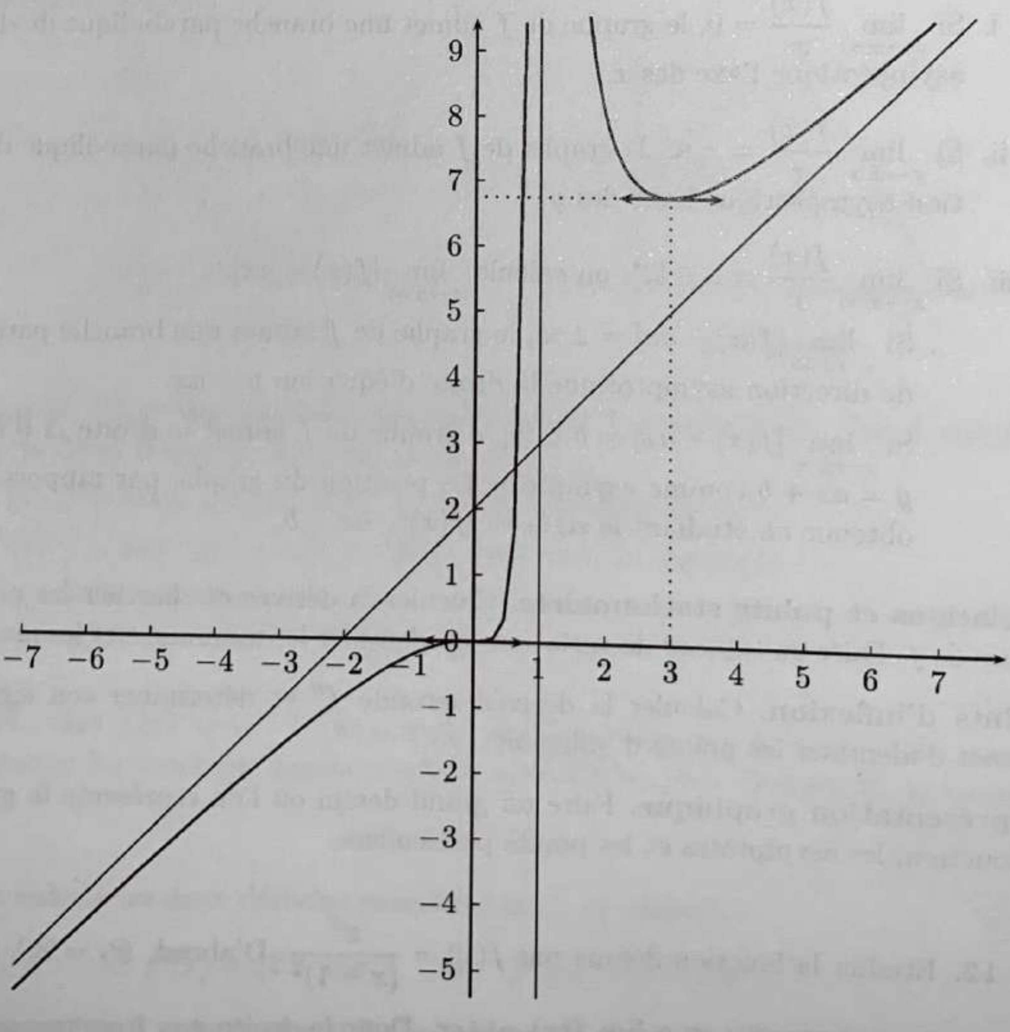
- Si $x > \frac{2}{3}$, le graphe est au dessus de Δ.
- Si $x < \frac{2}{3}$, le graphe est en dessous de Δ.

. Monotonie et points critiques. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et sa dérivée $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 3$. D'où les variations de f :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

. La dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule pour $x = 0$ en changeant de signe. On a un point d'inflexion en $(0, 0)$, et la pente de la tangente en ce point est $f'(0) = 0$. De plus, f est concave sur $]-\infty, 0]$ et elle est convexe sur $[0, +\infty[$.

. Représentation graphique.



Graphe de f

4.5 Exercices

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,
3. $f(x) = \sqrt{2x+1}$,
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
5. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$,
6. $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$,
7. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$,
8. $f(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$,
9. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$,
10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,
11. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$,
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \ln(\ln x)$,
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$,
4. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} + \sqrt{2x}$,
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}-1}$,
6. $f(x) = (1+x)^x$.

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$,
2. $f(x) = \sqrt{1+\tan^2 x}$,
3. $f(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right)$,
4. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$,
5. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$,
6. $f(x) = e^{\sin x} + \arccos x$.

Exercice 4. Déterminer les points x où la tangente T_x au graphe de f vérifie la condition donnée :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, T_x est horizontale
2. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, T_x est perpendiculaire à $y = x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$, T_x est horizontale
4. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, T_x est parallèle à $y = x$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}+2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 1 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
3. Que dire de la tangente au graphe de f en 1 ?

Exercice 6. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0 ?

Exercice 7. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue, dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 8. Calculer la dérivée $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \ln(1+x)$,
4. $f(x) = x^2 e^x$, 5. $f(x) = \cos x$, 6. $f(x) = x^3 \ln(1+x)$.

Exercice 9. Montrer que le graphe de f admet une tangente horizontale en un point $c \in]-1, 1[$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ 2. $f(x) = \begin{cases} (x+1) \sin \dfrac{2\pi}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

Exercice 10. Soit $f(x) = \tan x$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$ bien que $f(0) = f(\pi) = 0$.
2. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Rolle.

Exercice 11. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

1. $\forall x \in]0, 1[, \ 0 < \sin x < x$. 2. $\forall x \in]0, +\infty[, \ 0 < \arctan x < x$.

Exercice 12. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de $c \in] -1, 8[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$.
2. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème des accroissements finis.

Exercice 13. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

1. Déterminer les points critiques de f et préciser la nature de ceux ci.

2. Etudier la convexité de f.
3. En déduire que f admet deux points d'inflexion et déterminer la tangente au graphe de f en ces points.

Exercice 14. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 15. Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$. En déduire les variations de f.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer le graphe de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On notera g la réciproque de cette restriction.
6. Justifier que g est dérivable sur J. Quelle est la valeur de $g'_d(0)$?

Exercice 16. Soit $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Etudier les variations de la fonction u définie par $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
2. En déduire le domaine de définition et préciser la parité de f.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \,]0,1[\, \setminus \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ et en déduire une expression simple de f sur $[0,1]$.
4. Etudier la dérivabilité de f en 0, en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en 1.
5. Tracer le graphe de f.

Exercices supplémentaires

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée en tout point où elle est dérivable :

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x > 0, \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} a \arcsin(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ \arctan(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et calculer sa dérivée.

3. Déterminer a de sorte que f soit dérivable en 1. Quelle est alors la valeur de $f'(1)$?

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue, dérivable et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue, dérivable et que sa dérivée est continue sur $[0, +\infty[$.
2. La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$? Si oui, sa dérivée seconde est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

Exercice 21. Appliquer la formule de Leibniz aux fonctions $u(x) = e^{ax}$ et $v(x) = e^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$. En déduire la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Exercice 22. Déterminer une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = g'(x)$ et $f(1) = 2$ dans les cas suivants :

1. $g(x) = xe^x - e^x$ 2. $g(x) = \arctan x$.

Exercice 23. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$.

1. Déterminer le domaine de définiton de f.
2. Etudier les variations de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $I = [2, +\infty[$ sur son image (à préciser).
4. Justifier que la fonction réciproque de f est continue et déterminer celle-ci.

Exercice 24. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Etudier la fonction f et construire son graphe.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser, et déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 25. Etudier la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \qquad f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

On simplifiera les expressions proposées après le calcul de la dérivée.