M-61B Pr: Erignoux Clément

PROBABILITÉS

INTÉGRATION

Objectifs

1. savoir modéliser une expérience aléatoire en faisant appel à des variables aléatoires réelles
2. savoir déterminer leur loi, calculer leur espérance pour répondre à des questions concrètes sur le modèle initial
3. notions probabilistes rencontrées
4. éléments minimaux de théorie de la mesure et d'intégration au sens de Lebesgue
5. notions de convergence presque sûre et en loi
6. la loi forte des grands nombres et du théorème central limite

Probabilités

1. Loi d'une variable aléatoire réelle : rappel sur les lois discrètes, loi à densité C 1 par morceaux, fonction de répartition, "catalogue" de lois classiques, exemples simples de lois ni discrètes ni à densité.
2. Variables aléatoires indépendantes : loi forte des grands nombres ; théorème de la limite centrale, application à la marge d'erreur d'un sondage.Les 36h de TD comportent 6h de TP avec Python

Intégrations

1. Rudiments de la théorie de la mesure : tribu, tribu borélienne, fonctions mesurables (= variables aléatoires), mesure, mesure de Lebesgue.
2. Intégrale par rapport à une mesure -finie et espérance : intégration des fonctions étagées, des fonctions positives, fonctions intégrables, propriétés de l'intégrale ; théorème de convergencedominée (admis) ; espérance d'une variable aléatoire réelle, théorème de transfert, moments, variance ; inégalité de Markov, de Bienaymé-Chebychev.

M61

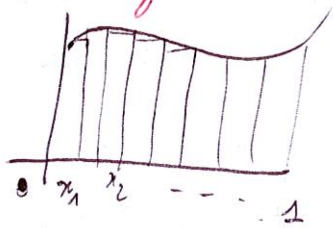
Probabilités & Intégrations

clement.ecrignaux@inria.fr

Intro / Th de la mesure + Proba discrète → Int de Lebesgue
Probas cont / Th. lim / Loi Grd Nbr.

Intro : Pk une nouvelle intégrale ?

f fonction sur $[0,1]$



$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx \text{ (Riemann)} = \lim_{\sup|x_{n+1}-x_n| \to 0} \sum (x_{i+1}-x_i)\, f(x_i)$$

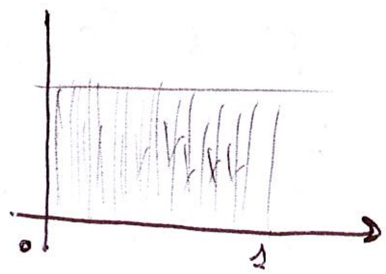
CV si f est cont.

(*) L'int de Lebesgue est déf sur un ens de fs mesurables ce q est bcp plus général

Ex : $f : x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f : \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

faisons comme ça (1)



$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

int de Lebesgue $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0.$

(**) Modes de CV

$(f_n)_n$ suite de fs, sppS $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Ss q$^{lle(s)}$ condi(s) ? $\displaystyle\int f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g(x)\,dx.$

Riemann : Th de CV UN :

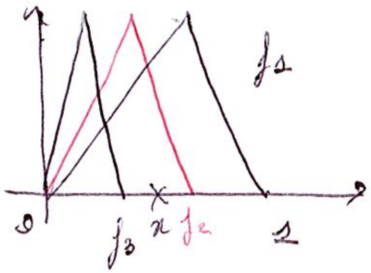
Si $f_n \to f$ UN

(ie $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alors $\displaystyle\int f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)\,dx.$

Lebesgue Th CV dominée

SppS $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ (CV simple),
SppS $\exists\, c > 0$, $|f_n(x)| \leq c$ $\forall x$ $\forall n$
Alors $\displaystyle\int |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



pic sur $[0, \frac{1}{n}]$.

$\forall x \in [0,1]$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

$\forall x \in]0,1]$, $\exists\, n_x > \frac{1}{x}$ tq

$\forall n \geq n_x$: $f_n(x) = 0$.

et $f_n(x) \longrightarrow f(x) = 0 \ \forall x$

→ (f_n) CV simplement vers f cte $= 0$.

(f_n) CV-t-elle UN ? → NON.

soit $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$

$= f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$

Essayons d'appliquer le Th de CV dominée :

• $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [0,1]$.

On peut choisir $c = 1$, $\sup_{x\in[0,1],\, n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \int |f_n(x) - f(x)|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\int f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Th de la Mesure

A Tribu

→ Définir ens. mesurables.

@ Sur $\mathbb{R}$, on vt définir va sur $\mathbb{R}$, cp définir que

va $\mathbb{P}(X \in M)$, $M \subset \mathbb{R}$

• Pb : Si on choisit n'importe ql $M \subset \mathbb{R}$, il pt y avoir des soucis.

→ Si on vt définir une proba "proportionnelle au volume"

$\mathbb{P}(X \in M) \sim C.|M| \quad \forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

→ on pt arriver à des paradoxes où $\mathbb{P}(X\in M) = 1 = 2$.

(Paradoxe de Banach - Tarski)

⇒ On doit enlever les ens trop irréguliers.

B Tribu

E ens, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu (σ - Algèbre) sur E, si

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ stable par union & intersec° d

cad si $\forall n$, $A_n \in \mathcal{T}$ alors

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

- $\mathcal{T}$ est stable p passage au complément^{R} : si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable. ⚠
- Les élts de de $\mathcal{T}$ st d$_s$ ens mesurables.

@ • $\{\emptyset, E\}$ tribu grossière

- $\mathcal{P}(E)$ l'ens des pies de E est une tribu.
  → tribu discrète.

Exercice : $\phi : E \longrightarrow F$ applicat°,

sppo $(F, \mathcal{T})$ espace mesurable,
(tribu)

$\mathcal{T}' = \{\phi^{-1}(A), A \in \mathcal{T}\}$ "image réciproq de $\mathcal{T}$".

$\phi^{-1}(A) = \{x \in E, \phi(x) \in A\}$.

Mq $\mathcal{T}'$ est une tribu sr E : c'est la tribu image réciproq.

Sol :
(i) $\phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ & $\emptyset \in \mathcal{T}$ (car $\mathcal{T}$ tribu) $\Rightarrow \phi^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}'$.
$\phi^{-1}(F) = E$ & $F \in \mathcal{T}$ (car $\mathcal{T}$ tribu) $\Rightarrow E \in \mathcal{T}'$.

(ii) Stabilité par union/ intersect° (d) :

$A_n \in \mathcal{T}'$ $\forall n$
$\parallel$
$\phi^{-1}(B_n)$ & $B_n \in \mathcal{T}$.

$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ tribu
$B' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ trib. $\in \mathcal{T}'$

$\phi^{-1}(B) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \overset{?}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(B_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$
À vérifier
car $B \in \mathcal{T}$.

idem $\phi^{-1}(B') = \phi^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}'$

(iii) Passage au complément^{R}.

$A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \exists B \in \mathcal{T}$ tq $\phi^{-1}(B) = A$.

or $B^c \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ tribu.

$\phi^{-1}(B^c) = E \setminus \phi^{-1}(B) \in \mathcal{T}'$ car $B^c \in \mathcal{T}$.
$= E \setminus A = A^c$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{T}'$

$\Rightarrow \{\phi^{-1}(B), B \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sr E

Rq En pratiq il suffit de vérifier la stabilité soit p union dénombrable soit p $\cap$ (d) car une tribu est stable p pssg @ complément^{R}.

(Prop) soit I un ens (qq) d'indices (pas sppo d)
soit une famille de tribu $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$
$\Rightarrow \forall i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est une tribu sr E.
Alors
$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \text{ est une tribu sr } E.$$
Preuve exo (voir ex. d'avt).

(D) (Tribu engendrée p une des parties de E)
Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on définit
$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{T}, \text{ tribu sr } E \text{ contenant } \mathcal{C} \}.$$
($\in \mathcal{P}(E)$ tribu & contient $\mathcal{C}$)

↳ $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu p la prop. précédente, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$

- $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$
- si $\mathcal{C}$ est une tribu, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

On choisit $E = \mathbb{R}$.

(D) (Tribu Borélienne sr $\mathbb{R}$)
On déf $\mathcal{I} = \{\text{interv. ouverts}\} = \{]a,b[\text{ st } a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \}$
On déf alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$ la tribu borélienne sr $\mathbb{R}$.
$$= \bigcap \{ \mathcal{T}, \text{ tribu sr } \mathbb{R} \text{ contenant } \mathcal{I} \}$$

Rq : La tribu borélienne pt ê définie sr tout espace topologiq $(E, \mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ ens des ouverts.
La (tb) sr $(E,\mathcal{O})$ est déf ≈ $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)$.

* Boréliens sr $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
$$\mathcal{B}(\Gamma) = \{ A \cap \Gamma,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$
* Borélien sr $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1 = \sigma(\{ B_r(x),\ r \in]0,\infty[,\ x \in \mathbb{R}^d \})$
où $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^d,\ |y - x| < r \}$
Boule ouverte de rayon centrée en x.

→ En pratiq, il est très difficile de construire des ens non-boréliens.

Exo : Sur $\mathbb{R}$, on aurait 2 déf°s des boréliens.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{?}{=} \sigma(\{]a,b[,\ a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \})$
$\overset{?}{=} \sigma(\{ \mathcal{O} \text{ ouvert} \subset \mathbb{R}^d \})$.

or O ouvert de $\mathbb{R}$, $O = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$,
∄ 2 suites (a_k), (b_k)

$O \cap \mathbb{Q}$ est dense ds O et $O \cap \mathbb{Q}$ (d).

$(x_k) = O \cap \mathbb{Q}$

$\exists$ un voisinage $]x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k[\subset O$

On pt construire $O = \bigcup_{k=1}^{\infty}]x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k[\in B(\mathbb{R})$
car $B(\mathbb{R})$ est une tribu.

$\Rightarrow$ (*) (**) st équivalentes

(B) Fonctions mesurables

(D) (f mesurable)

$(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables.

Soit f appli $f : E \to F$. On dit que f est
mesurable (ss-entendu de $(E, \mathcal{T})$ ds F muni $\mathcal{T}'$)

si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $B := f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$
$\in \mathcal{T}$.

→ f est mesurable si l'image réciproq de tt
ens mesurable est mesurable.

→ si $\mathcal{T}'$ est la tribu boréLienne, on dit que
f est boréLienne ou Borel-mesurable.

» "Un boréLien, un ens boréLien"

→ un élt $A \in B(\mathbb{R})$ de la tribu boréLienne.

Une f boréLienne f-Borel-mesurable"
→ une fonction $(\mathcal{T}, B(\mathbb{R}))$-mesurable.

⚠ (noo de mesurabilité dépd fondamentalmt des tribus que l'on a munie les espaces).

(a) Qlles st les applicatOs mesurables si
$(E, \mathcal{T}) \longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ si $\mathcal{T}' = \{\emptyset, F\}$
est la tribu grossière. → TOUTES

→ ls sls élts de $\mathcal{T}'$ st $\emptyset$, F or $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$
car $\mathcal{T}$ est tribu & $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{T}$
car $\mathcal{T}$ est tribu.

Récap : • $\mathcal{T}$ tribu sur E

$\emptyset, E \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, stable par complémentaire & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$.

• Tribu engendrée p. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{C} = \bigcap \{ \mathcal{T} \text{ tribu contenant } \mathcal{C} \}$$

• Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(\text{intervalles}) \text{ ouverts}\}$$

• Fonction mesurable = ens mesurable $A \in \mathcal{T}$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{T}')$

Exo : Mesurabilité 4 f cont.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont

1) $g = \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

$\neq$ Tribu image réciproq p. f ou $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{T}_f$ tribu sur l'espace de départ.

$$\mathcal{T}_f = \{ f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

Mq g est une tribu (check $\boxed{z}$)

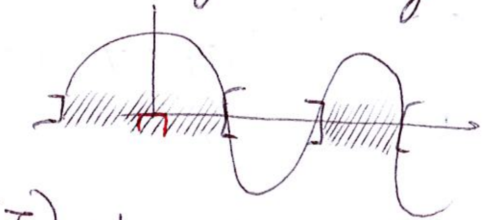
2) Mq $\forall$ ouvert est un borélien cf séance précédente

ouvert est réunion ouvert dénombrable.

3) Mq g contient les intervalles.

$I \subset \overline{\mathbb{R}}$, $I \in g$ si ssi $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

int ouvert



$f^{-1}(I)$ est ouvert car f cont

(Rq f cont $\Leftrightarrow$ f^{-1}(ouvert) est ouvert

$\to f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to g$ contient les interv. ouverts $\mathcal{I}$

4. Mq $g = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$, g tribu et $g \supset \mathcal{I}$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset g$ par définit° de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

or $g \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ p. définit° de $g \Rightarrow g = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Est-ce que f est mesurable ? soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq :

on veut mq $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est mesurable.

⑤ (Mesure (positive))

On se donne un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$,

une applicat° $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure si :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite disjointe d'ens. mesurables ← sigma additivité

$(A_n \in \mathcal{T}, \forall n$, et $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m)$

alors $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Not : $\bigsqcup A_n \Leftrightarrow \bigcup A_n$ si $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m)$

→ Un triplet $(E, \mathcal{T}, \mu)$ où $\mathcal{T}$ tribu sur E et μ est un espace mesuré.

⚠ Ne pas confondre mesure & f mesurable.

→ une mesure a pr argument un ens. mesurable $B \in \mathcal{T}$.

→ une f mesurable prend son argument ds E.

Ⓓ Une mesure μ sur $(E, \mathcal{T})$ est dite :

1) finie si $\mu(E) < \infty$.

2) σ-finie si $\exists$ partit° dénombrable $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$ & tq $\mu(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) de probabilités si $\mu(E) = 1$

Ⓔ La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est l'uniq mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a \quad \forall a \leq b$.

- $[a,b]$ borélien car $[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$
$= \mathbb{R} \setminus \{]-\infty, a[\cup]b, \infty[\}$.
- $\lambda(\{a\}) = \lambda([a,a]) = 0$
- On a pas mqé qu'$\exists$ une telle mesure, ni qu'elle est uniq. On le fera + tard.
- $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$, $\lambda([n,n+1[) = 1$

$\lambda(\mathbb{R}) \underset{\uparrow}{=} \sum \mu([n,n+1[) = \infty$.

p σ-additivité

λ pt ê définie sur $[0,1]$

$\forall a \leq b \in [0,1]$, $\lambda(]a,b[) = b-a$.

$\lambda_{[0,1]}$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est une mesure de probas.

@ soit $x \in \mathbb{R}$, la mesure de Dirac en $x \in \mathbb{R}$ est définie p $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \delta_x(\mathbb{R}) = 1$$

$\rightarrow \delta_x$ est une mesure de probabilités

$$\mathbb{1}_B(x) = \delta_x(B) \quad \text{où } \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathbb{1}_B : E \longrightarrow [0,1]$ fonction $\qquad \delta_x : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ mesure

- λ mesure ? $\lambda(\emptyset) = \lambda(]-a,a[) = 0$
  σ-additivité : il faut attendre.
- δ_x mesure ? $\delta_x(\emptyset) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 0$

$$\delta_x\Big(\underbrace{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n}_{= B}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $x \in B \Leftrightarrow \exists!\, n \in \mathbb{N}$ tq $x \in B_n$.

$\delta_x(B) = 1 \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow \exists!\, n, x \in B_n$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(B_n) = \delta_x(B_n) = 1.$$

Pptés (des mesures)

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré.

1) (Monotonie) $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) (sous-additivité) soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$

alors $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$

3) (continuité p/ unions croissantes) $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$

4) (continuité p/ aux intersecOs décroissantes $B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ & $B_{n+1} \subset B_n$ si il existe n tq $\mu(B_n) < \infty$.

alors $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$

Preuve 1). σ additivité A et $B \setminus A$.

σ-additivité : $\underbrace{\mu(A)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} = \underbrace{\mu(B)}_{\geq 0}$ car $A \subset B$

$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Preuve 2) soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$,

Mq → alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$

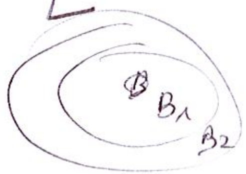
$A_n = B_n \setminus \left\{\bigcup_{k<n} B_k\right\} \in \mathcal{T}$ si $B_n \in \mathcal{T}\ \forall n$

σ-additivité

- les A_n st disjoints $\Rightarrow \mu\left(\bigsqcup A_n\right) = \sum \mu(A_n)$
- $\bigsqcup A_n = \bigsqcup B_n$ $\quad \mu\left(\bigcup B_n\right) \leq \sum \mu(B_n)$
- $A_n \subset B_n \Rightarrow \mu(A_n) < \mu(B_n)$

Preuve 3. (Continuité p/ aux unions croissantes)

Mq $\left[(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \right.$ & $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$



$A_n = B_n \setminus B_{n-1}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $B_n = \bigsqcup_{k<n} A_k$

$$\mu\left(\bigcup B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup A_n\right) \overset{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

Preuve 4 Mq (continuité p/ intersections ↘)

$\left[B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \right.$ & $B_{n+1} \subset B_n$ si il $\exists n$ tq $\mu(B_{n_0}) < \infty$.

$B_{n+1} \subset B_n\ \forall n$, on suppose $\exists n_0$ tq $\mu(B_n) < \infty$

$\forall n \geq n_0$, $\tilde{B}_n = B_{n_0} \setminus B_n$ $\quad \tilde{B}_n \subset \tilde{B}_{n+1}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{n_0} \setminus B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(B_{n_0}) - \mu(B_n)$$ car $B_n \subset B_{n_0}$ & σ-additivité

$$= \mu(B_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} B_n\right)$ or

$$\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n = \bigcup_{n\geq n_0} \left(B_n^c\right) = \left(\bigcap B_n\right)^c = B_{n_0} \setminus \left(\bigcap B_n\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n\right) = \mu(B_{n_0}) - \mu\left(\bigcap B_n\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

⚠ Trouver un C_{ex} au 4) si on ne suppose pas $\exists n_0$, tq $\mu(B_{n_0}) < \infty$.

λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $B_n =]n, \infty[$

$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lambda(\emptyset) = 0$

or $\lim_{n \to \infty} \lambda(B_n) = \infty$ $\boxed{C^{?!}..!}$

Ⓟ (Ⓛ de Borel Cantelli)

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mu\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0$

Récap : Mesure μ sur $(E, \mathcal{T})$ $\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0 \\ \sigma\text{-additivité}, \end{cases}$

$\mu\left(\bigsqcup B_i\right) = \sum \mu(B_i)$

Pptés : 1) monotonie : $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) ss-additivité $\mu\left(\bigcup B_i\right) \leq \sum \mu(B_i)$

3) continuité aux unions ↗

$\forall i\ B_i \subset B_{i+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup B_i\right) = \lim \mu(B_i)$

4) continuité aux intersects ↘.

$\forall i\ B_{i+1} \subset B_i$ et $\exists n_0$ tq $\mu(B_{i_0}) < \infty$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap B_i\right) = \lim \mu(B_i)$

Ⓓ (lim sup & lim inf d'ensembles)

soit $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ ← mesurable, on définit

$$\limsup_{n \to \infty} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} B_p \quad (1)$$

$$\liminf_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} B_p \quad (2)$$

(1) L'ens $x \in E$ q st ds une infté de B_n.

(2) L'ens $x \in E$ q st ds tous les B_n à partir d'un certain rang ($\mathcal{C}$ apcr n_x).

Retour sur ⓛ Borel-Cantelli ; espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$,
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, on suppose $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

alors $\mu(\limsup A_n) = 0 = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p\right)$

DM $B_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$ suite ↘. $\bigcup B_p = \bigcup A_n$

ens mesurable

$\mu(\bigcup B_p) = \mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n) < \infty$.

→ $\forall p\in\mathbb{N}$, $\mu(B_p) < \infty$.

→ continuité : $\mu\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p\right) = \lim_{p\to\infty} \mu(B_p) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m\geq p} A_m\right)$

$\leq \lim_{p\to\infty} \sum_{m\geq p} \mu(A_m)$

$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

→ reste d'une série CV (abs)

⇒ le reste tend vers 0 □.

2. Variables aléatoires

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Ⓓ On appelle espace de probabilités un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est univers, $\mathcal{F}$ est tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
= un espace mesuré dont la mesure est de probas.

► On appelle variable aléatoire toute f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$. On appelle alors E l'espace d'events de X. Dans le contexte des probas, on appelle événements les élts $\mathcal{F}$ par X une va, on définit sa loi ou distribution à la mesure sur $(E, \mathcal{T})$, notée $\mathbb{P}_X$, déf par $(X : \Omega \to E)$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

event $\in \mathcal{F}$ car X va

Notation On notera $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$ ⇒ mesurable.

$\{X^{-1}(A)\} = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in A\}$

de même $\{X \in A, Y \in B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)$

ⓔ lancer de dé, va $X : \Omega \to \{1, 2, \dots, 6\}$
$\omega \mapsto$ résultat dé

conditions PC de l'exp

⚠ X va $\Omega \to E$, mq $\mathbb{P}_X$ est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$

• $\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

car P mesure de proba

- $\mathbb{P}_X\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup A_k\right)\right)$

$= \mathbb{P}\left(\bigsqcup X^{-1}(A_k)\right) \overset{\sigma\text{-additivité de } \mathbb{P}}{=} \sum \mathbb{P}(X^{-1}(A_k))$

$= \sum \mathbb{P}_X(A_k)$

$X^{-1}(A) \sqcup X^{-1}(B) = X^{-1}(A \sqcup B)$

2.2. Variables aléatoires discrètes

Ⓡ On considère ici des (va) dont l'espace d'états est soit fini soit (d). Sans perte de généralité, on suppose que $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\{1, \dots, n\}$.

Dans le cas discret, on munit E de la tribu discrète,

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$

Pour déterminer $\mathbb{P}_X$, la loi d'une variable aléatoire, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(A)$ $\forall A \subset E$, il suffit de connaître les $\mathbb{P}_X(\{e\})$ $\forall e \in E$. Car $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{e\in A} \mathbb{P}_X(\{e\})$ par σ-additivité

$\mathbb{P}_X(\{e\}) = \mathbb{P}(X = e) = \mu_e$, μ encode la loi de X.

($\mathbb{P}_X$ est déterminé par μ).

Ⓓ (Espérance) $E \subset \mathbb{N}$, $X : \Omega \to E$ une (va) discrète, on appelle espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, la quantité

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in E} k\mu_k \quad \text{où } \mu_k = \mathbb{P}(X=k) \text{ est la loi de } X$$

sous réserve de convergence absolue si $E = \mathbb{N}$.

Ⓓ (Variance) de X est donnée par

$$V(X) = \sum_{k\in E} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k$$ sous réserve d'absolue (cv) si $E = \mathbb{N}$.

$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Ⓓ soit $A, B \in \mathcal{F}$, on définit la probabilité conditionnelle de A sachant B par

$P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0,1]$ suppose $P(B) > 0$.

On dit que les évènements sont indépendants si monotonie

$P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ si $P(B) > 0$

⚠ soit $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, on suppose $\mathbb{P}(B) > 0$!

Mq $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ est une mesure de probas.
$A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$

- $\mathbb{P}_B(\emptyset) = \dfrac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = \emptyset$ car $\mathbb{P}$ mesure.
- σ-additivité ? $\mathbb{P}_B\left(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} A_K\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(B \cap \bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} A_K\right)}{\mathbb{P}(B)}$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} (A_K \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{K\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{P}(A_K\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_K)$$

Prop : (FF Probas totales) soit $\Omega = \bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} B_K$.

alors $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_K) \times \mathbb{P}(B_K)$.

DM : $P(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} B_K\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} (A\cap B_K)\right)$

$(= \mathbb{P}(A \cap \Omega))$

$$\overset{\sigma\text{-addi}}{=} \sum \mathbb{P}(A\cap B_K)$$

$$= \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_K) \cdot \mathbb{P}(B_K).$$

B

Prop : Th du transfert ds le cas discret

soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une va discrète & soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une applicat° alors $\varphi(X) : \omega \in \Omega \longrightarrow \varphi(X(\omega))$ est également une va & $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e\in E} \varphi(e)\,\mu_e$;

où (μ_e) est la loi de X.

$(X : \Omega \to E)$

DM 1) Mq $\varphi(X)$ est une va

$\forall A \subset \mathbb{N}$, $(\varphi(X))^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

On va le vérifier uniqt sur les singletons

soit $K \in \mathbb{N}$,

$\varphi(X)^{-1}(\{K\}) = \{\omega \in \Omega, \varphi(X(\omega)) = K\}$

soit $E_K = \{e \in E \text{ tq } \varphi(e) = K\}$
$= \varphi^{-1}(\{K\}) \in \mathcal{P}(E)$

$\Rightarrow X^{-1}(E_K) \subset \Omega$, $\in \mathcal{F}$ car X va (dc appli mesurable)

$X^{-1}(E_K) = X^{-1}(\varphi^{-1}(\{K\})) = (\varphi \circ X)^{-1}(\{K\})$
$= \varphi(X)^{-1}(\{K\}) \in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow \varphi(X)$ est appli mesurable $\Rightarrow \varphi(X)$ est va.

2) Mq $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e \in E} \varphi(e) \mu_e$.

P définit $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{K \in \mathbb{N}} K \, \mathbb{P}(\varphi(X) = K)$

$= \sum_{K \in \mathbb{N}} K \, \mathbb{P}(X \in E_K) = \sum_{K \in \mathbb{N}} K \sum_{e \in E_K} \mathbb{P}(X = e)$

$= \sum_{K \in \mathbb{N}} \sum_{e \in E_K} \varphi(e) \, \mathbb{P}(X = e)$ car $E_K = \bigsqcup_{e \in E_K} \{e\}$

$= \sum_{e \in E} \varphi(e) \, \mathbb{P}(X = e) = \sum_{e \in E} \varphi(e) \mu_e$

Ⓓ (Indépendance de suites d'événements)

- soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, cette suite est dite indépendante, si $\forall K \in \mathbb{N}$, $\forall n_1 \neq n_2 \neq \dots n_K$

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_K}) = \prod_{p=1}^{K} \mathbb{P}(A_{n_p}).$$

- elle est dite indépendante 2 à 2 si c'est vrai pr $K = 2$, ie $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_m)$$

Ⓔ (Indépendance de suites de VA discrètes)

soit X, Y 2 VA discrètes à valeurs ds E, F.

X & Y st indépendantes si $\forall e \in E, \forall f \in F$,

$$\mathbb{P}(X = e, Y = f) = \mathbb{P}(X = e) \cdot \mathbb{P}(Y = f).$$

Une suite X_n de VAd à vleurs ds $\mathbb{N}$ est indépendante si $\forall (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite d'événements $(\{X_n = p_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendt.

si ——— 2 à 2 ———

si ——— est 2 à 2 indep.

ⓔ (tirer pièce 4x de manière indep)

$X_i \in \{P, F\}$ $i = 1, \dots, 4$. On suppo $\mathbb{P}(X_i = p) = \mathbb{P}(X_i = f) = \frac{1}{2}$.

Quelle est proba de n'avoir que des piles $= \frac{1}{2^4}$.

On cherche $\mathbb{P}(X_1 = p, \dots, X_4 = p) = \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_i = p)$

events indépdts p def de l'indépce des X.

① de Borel Cantelli n°2

$(A_n) \in F^{\mathbb{N}}$, on sppS la suite (A_n) indépendante, si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

→ si la somme des probas d'une suite d'events est ∞, alors $\exists$ proba 1, une qté de ces events se produit.

Trouver ce si on ne sppS pas indépendance.

On prd $A_n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$ pr $A \in F$.

On sppS $\mathbb{P}(A) \neq 0,1$, $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$.

- $\sum \mathbb{P}(A_n) = \sum_{A=1}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \infty$
- $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{p\geq n} A_p = A$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(A) < 1$$

Récap

va $X : \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ mesurable

$A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$

va discrètes : $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to X : \Omega \to \mathbb{N}$,

si la $\mathbb{P}_X$ est caractérisée p $\mu_k = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\in\{k\})$

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n \mu_n$, $\exists$ abslt cv^{ce}.

$V(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \sum (k-\mathbb{E}(X))^2 \mu_k = \sum k^2 \mu_k - (\sum \mu_k)^2$.

Ff Probas Totales : $E = \bigsqcup E_k$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) = \sum \underbrace{\mathbb{P}(A|E_k)}_{\frac{\mathbb{P}(A\cap E_k)}{\mathbb{P}(E_k)}} \cdot \mathbb{P}(E_k)$

TH Transfert :

$X : \Omega \to E$, $\varphi : E \to \mathbb{N}$

$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k\in E} \varphi(k) \underbrace{\mu_k}_{\mathbb{P}(X=k)}$

(A_n) events $\perp\!\!\!\perp$ (indépdts)

$\forall k$, $\forall n_1, \dots n_k$

$\mathbb{P}(A_{n_1}\cap A_{n_2} \cap\dots\cap A_{n_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_j})$

(X_n) vad ert $\perp\!\!\!\perp$ si $\forall e_1, e_2 \in F^{\mathbb{N}}$ les events $(X_i = e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ st indép.

2.3. Lois discrètes classiqs

1) • Loi de Bernoulli (p), $X \sim \mathcal{B}(p)$

- paramètre $p \in [0,1]$
- espaces d'états $E = \{0,1\}$, $\mu_1 = p$, $\mu_0 = 1-p$
- $\mathbb{E}(X) = p = 1\, \mathbb{P}(X=1) + 0\, \mathbb{P}(X=0)$.
- $V(X) = p(1-p)$.

2) Loi Binomiale, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

- 2 paramètres, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$
- $E = \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$

3) Loi Uniforme $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$

- 1 paramètre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $E = \{1,\dots,n\}$, $\mu_k = \frac{1}{n}\ \forall k \in \{1,\dots,n\}$.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

4) Loi géom $X \sim \mathcal{G}éom(p)$

- paramètre $p \in [0,1]$
- $E = \mathbb{N}^*$
- $\mu_k = p(1-p)^{k-1}$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

5) Loi de Poisson

- paramètre $\lambda > 0$
- $E = \mathbb{N}$, $\mu_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$.

2.4. Variables à densité

On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on généralise Riemann Id

(D) Soit f positive spps f est $CM(\mathbb{R})$ tq $\forall A > 0$

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx \quad \exists$$

On spps qu'il $\exists \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \infty$

alors on dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}$,

et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$

NB : signifiant CM($\mathbb{R}$), $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$\exists\ a = x_0 < x_1 < \dots \leq x_n \leq b = x_{n+1}$ tq

f est cont sur $]x_k, x_{k+1}[$, $\forall K \in \{0, \dots, n\}$

& prolongeable en une f cont sur $[x_k, x_{k+1}]$.

→ soit f une f cont p morcx, on dit que f est intégrable si $|f|$ l'est en admettant alors

$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx\ \exists$, on l'appelle $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

(D) Une f f (cont p morcx) est une densité de probas sur $\mathbb{R}$.

* $f \geq 0$ ie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

* borélienne & intégrable sur $\mathbb{R}$ & satisfaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.
≈ mesurable

• soit f une densité de probas, on dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une va à densité ou densité f si $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

(D) soit X une va réelle à densité de densité f_X, on définit la f de répartition de X comme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Rq : La def $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est valide $\forall$ va réelle

Pptés de F_X : soit X une var, F_X est ↗ à vals ds $[0, 1]$, cont à droite, et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

Par ailleurs F_X détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$ de X ds le sens où si $F_X = F_Y$ sur $\mathbb{R}$ pr 2 var X et Y $\Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

ie $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$
$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$.

Admis

Prop soit X une var à densité f_X,
on suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx < \infty$
alors on définit $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$,
on dit que X est intégrable.

X var est intégrable $\iff x f_X(x)$ est intégrable.
$\leftarrow f$ mesurable.

- On supps $x^2 f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
on pt alors définir la variance de X comme

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx \right)^2$$

$$\left(= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \right)$$

2.5. Qqs lois classiqs à densité

1. Loi uniforme sur $[a,b]$, $a<b \in \mathbb{R}$.

"La proba d'être ds $[\alpha, \alpha+\varepsilon]$, $\alpha, \alpha+\varepsilon \in [a,b]$ ne doit dépendre que de ε et ê proportionnel à ε.

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha+\varepsilon) = \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f_X(x)\,dx$$

On choisit $f_X(x) = C$.

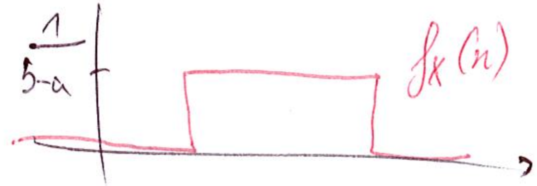
$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha+\varepsilon) = C \cdot \varepsilon$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1 = \int_a^b f_X(x)\,dx = (b-a).C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

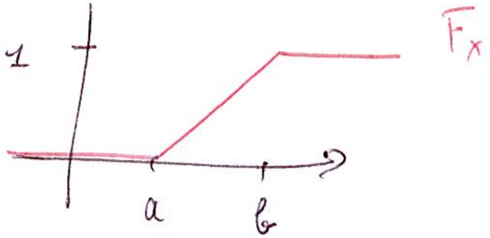
La loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi à densité de densité $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{a \leq x \leq b}$

où



Calculons $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \le x)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \ge b. \end{cases}$$



Rq : P les variables à densité, la f de répartition est cont

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ dérivable de dérivée $f_X \Rightarrow$ cont

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Soit X var uniforme sur $[0,1]$.

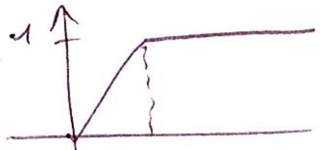
Mq $1-X$ est un sr $[0,1]$.

$Y = 1 - X : w \longrightarrow 1 - X(w)$

1) On calcule F_Y & on mq $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{x\in[0,1]}\,dx$

$= \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{x\in[0,1]}\,dx$

2° qu°) Mq $F_X = F_Y$.



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x)$

$= \mathbb{P}(1 - X \le x)$

$= \mathbb{P}(X \ge 1 - x)$

$= \mathbb{P}(X > 1-x) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1-x) = 1 - F_X(1-x)$

car X est à densité.

Rq : X est à densité $\mathbb{P}(X = a) = 0$

$\mathbb{P}(a \le X \le a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$

- si $x < 0$, $1 - F_X(1-x) = 0$
- si $x > 1$, $1 - F_X(1-x) = 1$.
- si $x \in [0,1]$, $1 - F_X(1-x) = 1 - (1-x) = x$

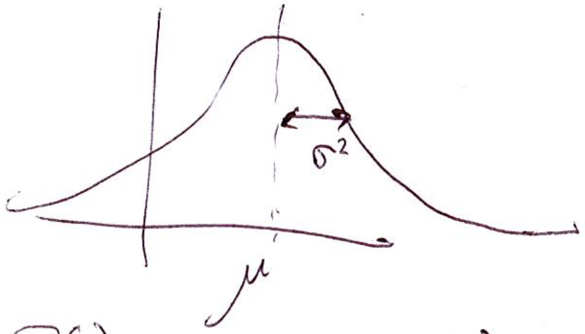
$\Rightarrow F_Y(x) = F_X(x)$

2) Loi Gaussienne / normale

La loi normale, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

C'est une loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$\mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

- La f de répartition de la loi normale n'est pas explicite
- Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$, on dira qu'une var est centrée.
- — $V(X) = 1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$ — — réduite

→ une loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée une loi normale centrée réduite.

Récap Indépendance

X, Y vad sur $\mathbb{N}$: $X \perp\!\!\!\perp Y$ si

$\mathbb{P}(X = k \cap Y = k) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$.

- Lois classiques $\mathcal{B}(p)$, $Bin(n,p)$, $Geom(p)$, $Pois(\lambda)$
- var à densité f_X : - f_X positive
  - f_X cont par morx.

$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1$.

- X est var de densité f_X si $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$
- f de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$
- $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$
- $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\, dx$

∫ f positive, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, on admet le (TH) de Fubini, q dit que si I & I' soit 2 intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\int_I dx \int_{I'} dy\, f(x,y)}\ = \int_{I'} dy \int_I dx\, f(x,y)$$

$$F(x) = \int_{I'} f(x,y)\,dy$$

Soit x (va) à v[lrs] positives, à densité f_X CM, on suppose que $\mathbb{E}(X)$ est bien déf. $\left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx < \infty\right)$

Mq $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(y))\,dy$

On vt mq $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty (1 - F_X(y))\,dy$

° On Rq : $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx$.

X (va) à valeur positives : $X(\omega) \geq 0\ \forall \omega$.

$\{\omega, X(\omega) < 0\} = \emptyset \to \mathbb{P}(X(\omega) < 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$= \int_{-\infty}^0 f_X(x)\,dx \Rightarrow f_X = 0$ s $]-\infty, 0[$

On a $F_X(y) = \int_0^y f_X(x)\,dx$ car $F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq y)$

car X est positive

$= \int_0^y f_X(x)\,dx$

$\Rightarrow 1 - F_X(y) = \int_0^\infty f_X(x)\,dx - \int_0^y f_X(x)\,dx$.

$$\int_0^\infty \underbrace{(1 - F_X(y))}_{\int_y^\infty f_X(x)\,dx} dy = \int_0^\infty \int_y^\infty f_X(x)\,dx$$

Rq on ne se soucie pas inég. ST/ larges car X est à densité & dc $\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f_X(y)\,dy = 0$

$$= \int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} f_X(x)\, \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}\,dx\,dy \quad \otimes$$

où $\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

$(x,y) \mapsto 0$ si $x < y$

$(x,y) \mapsto 1$ si $x \geq y$

On pose $f : x,y \to f_X(x)\, \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}$

On appliq Fubini,

$$(*) = \int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} \{ \mathbb{1}_{\{x \geq y\}} f_X(x)\, dy \} dx$$

$$= \int_{[0,\infty[} f_X(x) \left\{ \int_{[0,\infty[} \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}\, dy \right\} dx$$

et $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}\, dy = \int_0^x 1\, dy = x$

$$\Rightarrow (*) = \int_0^\infty x f_X(x)\, dx = \mathbb{E}(X).$$

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x \in I} f_X(x)\, dx$$

On revient aux lois à densité.

(D) La loi exponentielle représente un tps d'attente.
On dit qu'une (va) X suit une loi exponentielle du paramètre λ, si X est variable à densité de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

sa f de répartitiO est donnée par sa f de répartitiO est donnée p

$\forall x \geq 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}\, dy$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x} = F_X(x)}$$

$= 0 \quad \forall x < 0$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

△ $\emptyset$ de mémoire de la loi exponentielle, on spps que le tps entre 2 métros successifs est exponentiel de paramètre $\lambda = 1$ h.

1) Spps qu'un métro est passé à 16h. Quelle est la proba qu'un autre métro passe avant 16h30?

→ notons $X_1, X_2, \dots, X_K$ les heures de passage des métros successifs.

$Y_K = X_{K+1} - X_K \sim Exp(1)$,

$Y_k = X_{k+1} - X_k \sim \mathcal{E}xp(1)$

On opps $X_1 = 16$; on cherche $\mathbb{P}(X_2 \leq 16,5) = \mathbb{P}(Y_1 \leq 0,5)$

$= F_Y(0,5) = 1 - e^{-0,5}$.

2) Un métro est passé à 16^h, en arrivant à 16^h30 à l'arrêt, on rq le métro suivant n'est pas passé.

Quelle est la proba que le métro suivant arrive avt 17^h ?

→ On cherche $\mathbb{P}(X_2 < 17 \mid Y_1 > 0,5) = \mathbb{P}(Y_1 < 1 \mid Y_1 > 0,5)$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_1 \in [0,5;1])}{\mathbb{P}(Y > 0,5)} = \frac{\mathbb{P}(Y \leq 1) - \mathbb{P}(Y \leq 0,5)}{1 - \mathbb{P}(Y \leq 0,5)}$$

$$= \frac{e^{-0,5} - e^{-1}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,5} = \mathbb{P}(Y_1 \leq 0,5)$$

3) Mq l'∅ de mémoire, soit X une va de loi exponentielle de paramètre λ ; $\forall a, b > 0$:

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(X > a+b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)}$ ← important

$$= \frac{\mathbb{P}(X > a+b)}{\mathbb{P}(X > a)} = \frac{1 - F_X(a+b)}{1 - F_X(a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}$$

$$= e^{-\lambda b} = \mathbb{P}(X > b)$$

⚠ On arrive à un guichet, q est vide à Proba $\frac{1}{2}$ s'il est vide, s'il est occupé, on atteint un tps exponentiel de param 1.

1) On note X notre tps d'attente, X est-il discret ? X est-il à densité ?

L'espace d'états de X est $\mathbb{R}_+$ q n'est pas d $\Rightarrow$ X n'est pas discret.

• $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \mid V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(X = 0 \mid V^c)\mathbb{P}(V^c)$

→ V : evnt guichet vide.

$$= \underbrace{1 \times \tfrac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\cdots}_{\geq 0} > 0 \Rightarrow X \text{ n'est}$$

pas à densité car si Y est à densité $\mathbb{P}(Y = x) = 0 \quad \forall x$.

2) Calculer la proba d'attendre moins d'1 h ?

$\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) \cancel{=} \int_{-\infty}^{1} f_X(y)\,dy$

Faux car X pas à densité.

$$\mathbb{P}(X\leq 1) = \mathbb{P}(X\leq 1|V)\underbrace{\mathbb{P}(V)}_{1/2} + \mathbb{P}(X\leq 1|V^c)\,\mathbb{P}(V^c)$$

$$= 1\times\frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{E}xp(1)\leq 1)}_{F(1)\,=\,\text{fdR d'un exp}(1)}\times\frac{1}{2}$$

car $X|V$ vaut 0

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X\leq 1) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-1}) = 1-\frac{e^{-1}}{2}$$

3] Intégrale ~~p~~ à une mesure σ-finie

3.1] Déf. de l'intégrale d'une f mesurable

ⓔ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R}\longrightarrow\{0,1\}$

$x\longmapsto 1$ si $x\in\mathbb{Q}$

$\longmapsto 0$ sinon.

On pt voir $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ~ une f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\underbrace{\{q\}}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ borélien}$$

(d)

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

borélien car complémentaire d'un borélien.

→ intégrale de Riemann "aire ss la courbe" C'est Mort !

On se place ds cadre $(E, \underbrace{\mathcal{T}}_{\text{tribu}}, \underbrace{\mu}_{\text{mesure}})$ un espace mesuré

(D) soit $A\in\mathcal{T}$, on définit la f $\mathbb{1}_A : E\longrightarrow\mathbb{R}$ appelée l'indicatrice de A comme $\forall x\in E$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\notin A \\ 1 & \text{si } x\in A.\end{cases}$$

Rq Une fonction $f: E\to\mathbb{R}$ est dite étagée s'$\exists\, n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et des ens mesurables $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{T}$ tq $\forall x\in E$, $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{1}_{A_i}(x)$ (étagée = combinaison linéaire d'indicatrice).

On note $\mathcal{E}$ l'ens des fs étagées,

$\mathcal{E}^+$ —————— positives.

(D) soit $f\in\mathcal{E}_+$, $f=\sum a_i\,\mathbb{1}_{A_i}$, $a_i\geq 0\ \forall i$, on déf. l'intégrale de f contre μ par $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(A_i)$

Rq Cette déf^n est encore valide μ $f\in\mathcal{E}$ si μ est une mesure finie.

<u>Récap</u> Loi exponentielle $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

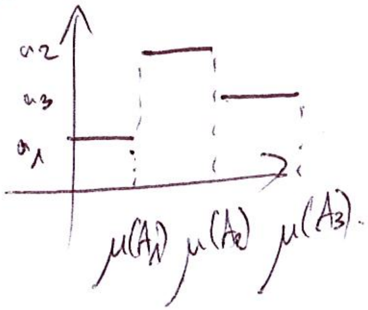
→ loi sans mémoire $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

∘ f indicatrice : $A \in \mathcal{T}$, $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

∘ f étagées : $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}$

∘ Intégrale d'une f étagée positive.

$$\int f \, d\mu = \sum a_i \, \mu(A_i)$$



⚠ λ mesure de Lebesgue sur ℝ.

$\lambda(]a, b[) = b - a$.

Mq $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est 1) mesurable 2) intégrable sur ℝ 3) calculer $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \, \lambda(dx)$

1) $x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ mesurable ?

<u>Notat°</u> $\int f \, d\mu = \int f(x) \, \mu(dx) = \int f(x) \, d\mu(x)$.

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

• si $0, 1 \in B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

• si $0, 1 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

• si $0 \in B$, $1 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

car $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}$ ← dénombrable.

• si $1 \in B$, $0 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

• f étagée positive est intégrable ssi

$$\int f \, d\mu < \infty$$

⇒ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est intégrable ssi $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda < \infty$

$$\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 1 \times \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

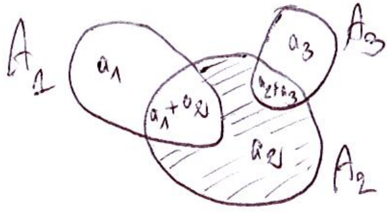
car $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ et $\underbrace{\lambda(\{q\})}_{\text{mesure}} = 0 \ \forall q \in \mathbb{Q}$

mesure ⇔ σ-additivité : $\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\{q\})$

Ex Mq f est étagée ssi $\exists$ ens $B_1, \dots, B_N$ mesurables & disjoints, et des réels $b_1, \dots, b_N$ tq

$$f = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbb{1}_{B_i}.$$

Sol^o soit $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, A_i mesurables, $a_i \in \mathbb{R}$.



$N = 2^n$

$\sigma \subset \{1, \dots, n\}$

$\Sigma = P(\{1, \dots, n\})$, $|\Sigma| = N$

$$B_\sigma = \Big[\bigcap_{k \in \sigma} A_k\Big] \cap \Big[\bigcap_{k' \notin \sigma} A_k^c\Big] \Rightarrow B_\sigma \text{ mesurable } \forall \sigma.$$

$= A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c = B_{\{2\}}$.

Pk $(B_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ est-elle disjointe ?

$\sigma \neq \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \exists k_0$ tq $k_0 \in \sigma$ et $k_0 \notin \sigma'$

$B_\sigma \subset A_{k_0}$

$B_{\sigma'} \subset A_{k_0}^c$ $\Rightarrow B_\sigma \cap B_{\sigma'} = \emptyset$

On écrit mtn $f = \sum_{\sigma \in \Sigma} b_\sigma \mathbb{1}_{B_\sigma}$

À vérifier en calculant la valeur sur chacun des B_σ $\quad f = \sum a_k \mathbb{1}_{A_k}$.

$$b_\sigma = \sum_{k \in \sigma} a_k$$

$$\Big(\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma = E\Big).$$

D L'intégrale d'une f mesurable positive

f cont, mesure σ-finie, μ est déf ĉ

$$\int_E f \, d\mu = \sup \Big\{ \int_E g \, d\mu, \ g \in \mathcal{E}^+ \text{ et } g \leq f \Big\}$$

f est dite intégrable si $\int f \, d\mu < \infty$.

D Un ens $N \subset E$ est dit négligeable s'$\exists A \in \mathcal{T}$ tq $N \subset A$ & $\mu(A) = 0$.

soit f & g 2 fs positives, mesurables, !
on suppose que $\{x \in E, f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.

Mq $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$. $\rightarrow$ ($\Leftrightarrow f = g$ μ-presq partout)

<u>solut°</u>: $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu \Leftrightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$
et $\int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu$

$\Rightarrow$ il suffit de mq $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$

$\Leftrightarrow \sup\{h\,d\mu,\ h \leq f,\ h \in \mathcal{E}^+\} \leq \int g\,d\mu$

$\Rightarrow$ il suffit de choisir $h \leq f$, $h \in \mathcal{E}^+$ & mq

mq $\int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

- si $h \leq g$, $\int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ p déf° de $\int g\,d\mu$ car h est étagée positive.
- $f = g$ μ presq partout $\Rightarrow \exists N$ mesurable tq $\mu(N) = 0$ & tq $f(x) = g(x)$ sur N^c.

$\tilde{h} = h \times \mathbb{1}_{N^c}$ étagée

$h = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\tilde{h} = \sum a_i \mathbb{1}_{B_i}$

$B_i = A_i \cap N^c$

$\tilde{h} \leq f$ car $\tilde{h} \leq h$

$$\int \tilde{h}\,d\mu = \sum a_i\,\mu(A_i \cap N^c) = \sum a_i [\mu(A_i) - \underbrace{\mu(A_i \cap N)}_{\leq \mu(N) = 0 \text{ par monotonie}}] = \int h\,d\mu.$$

si $x \in N^c$, $\tilde{h}(x) = h(x) \leq f(x) = g(x)$
si $x \in N$, $\tilde{h}(x) = 0 \leq g(x)$

$\Rightarrow \tilde{h}$ est étagée, positive & $\leq g$.

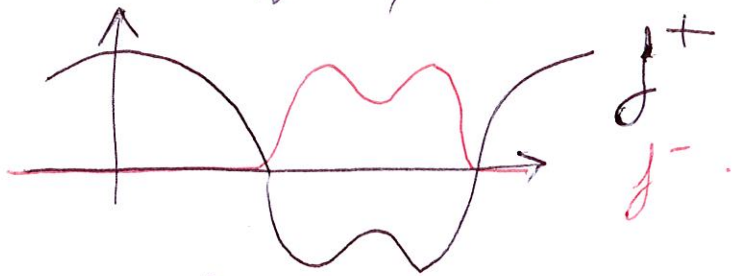
$\Rightarrow \int \tilde{h}\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ par déf,

$\Leftrightarrow \int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ $\forall h \leq f$, $h \in \mathcal{E}^+$

$\Leftrightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

Ⓓ Soit f f mesurable, on définit les fs

$f^+(x) = \max(0, f(x))$, $f^-(x) = \max(0, -f(x))$.



Alors on a les identités.

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Par ailleurs f^+ & f^- st mesurables.

~~Toutes les deux~~ Si f^+ & f^- st intégrables ttes les 2, on dit que f est intégrable, et on dit:

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(E)$ ou $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ens des fs ~~[illegible]~~ intégrables par rapport à μ.

Rq. À noter f intégrable $\iff |f|$ est intégrable.

Notat : $\int f\,d\mu = \int f(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,d\mu(x)$

(si $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $= \int f(x)\,dx$).

Rq On voit facilement que si f, g st mesurables & égales presq partout, alors f intégrable $\iff g$ intégrable et alors $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

$\|f\|_1 = \int |f|\,d\mu$, $f = g$ μ p.p
$f = g$ ds $\mathcal{L}^1$

L'espace $\{\mathcal{L}^1(\mu), \|f\|_1\}$, on ne pt pas parler de $f(x)$ pr un x donné car $f \in \mathcal{L}^1$ est une classe d'équivalence de fs égales presque-partout, mais pas partout.
→ semi-norme

$\int f$ étagées $\Rightarrow \int \forall f$ mesm positives

décomposit m q_1 → pie ≥ 0
→ pie < 0.

D soit A ens mesurable & f une f intégrable, on déf :

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu .$$

car f intégrable $\Rightarrow f\mathbb{1}$ intégrable. (monotonie de l'intégrable)

Ptés Admises

L'int de Lebesgue est linéaire, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{L}^1$ et $\int af + bg \, d\mu =$

$$= a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu .$$

- Monotone : si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f \leq g$ μ-pp.

Alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

3.2. Convergence d'intégrales

D soit (f_n) une suite de f mesurables, on dit que f_n CV simplem^t vers f si $\forall x \in E$:

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x).$$

On dit que f_n CV μ presque partout vers f, s'il existe un ens négligeable N tq f_n CV simplem^t vers f sur N^c.

D soit f_n suite de fs intégrables, & soit $f \in \mathcal{L}^1$; on dit que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$

si $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

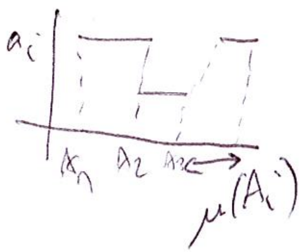
(C'est la CV associée à $\|\cdot\|_1$).

$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \not\Rightarrow f_n \to f$ simplem^t

$f_n \to f$ simpl^t $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

Récap: • $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ étagée positive

$\int f \, d\mu = \sum a_i \, \mu(A_i)$



• $\int f \, d\mu = \sup \{ \int h \, d\mu, \; h \leq f, \; h \in \mathcal{E}^+ \}$

• f intégrable si ce sup est fini.

• f mes : $f = f^+ - f^-$

$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

f intégrable $\Leftrightarrow |f|$ intégrable.

espace des fs intégrables

Pptés : • $\int \alpha f + \mu g = \alpha \int f + \mu \int g \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1$

• $f \leq g$: $\int f \leq \int g$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$.

CVce
- $f_n \longrightarrow f$ simplement $\Leftrightarrow \forall x \in E : f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$
- $f_n \to f$ μ-presque partout $\Rightarrow \exists N$ négligeable $f_n \to f$ simplt sur ...
- $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \Leftrightarrow \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \mu \; f_n, f \in \mathcal{L}^1$

Ex $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une f mesurable positive.

1) Mq f est limite simple d'une suite de fs mesurable & étagée.

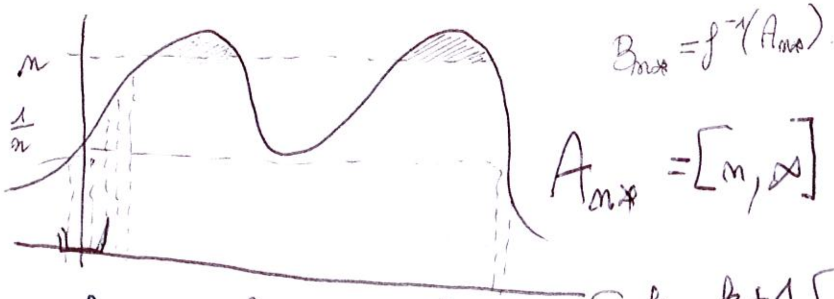
2) Idem si f n'est pas positive.

3) On supps f bornée, Mq f est la limite uniforme d'une suite de fs mesurables étagée (f_n) ds le sens $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Sur le cours (30) → dernier DS1.

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, 1) Mq f est limite simple d'une suite de f mesurables & étagées.

1)



$A_{n\infty} = [n, \infty]$

Pour $k = 0 \dots n^2 - 1$, $A_{n,k} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

$B_{nk} = f^{-1}(A_{nk})$ st mesurables car f mesurable.

$$\hat{f}_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{B_{n,k}} + n \mathbb{1}_{B_{n\infty}}$$

Mq $\hat{f}_n \xrightarrow[\text{simplement}]{} f$; soit $x \in E$,

- si $f(x) = \infty \Rightarrow \hat{f}_n(x) = n \quad \forall n$

$\Rightarrow x \in B_n \quad \forall n$.

dc $f(x) = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(x)$

- si $f(x) < \infty$ alors $\exists n_0$ tq $f(x) < n_0$.

$\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

car pour $K = K(x)$, $f_n(x) = \frac{k}{n}$ & $f(x) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k_n}{n}\right[$

$\Rightarrow \hat{f}_n(x) \longrightarrow f(x)$ dc f_n @ simplt vers f.

2) Idem si f n'est pas positive

$f = f^+ - f^-$, $f^\pm$ = lim simple de $\hat{f}_n^{\pm}$

$\rightarrow f$ = lim simple de $\hat{f}_n^+ - \hat{f}_n^-$.

3) Sppo f bornée : $\exists n_0$ tq $f(x) \leq n_0 \quad \forall x \in E$

alors $\forall n \geq n_0$: $B_{n\infty} = \emptyset$.

$\rightarrow \forall n \geq n_0 : \hat{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{B_{n,k}}$

or sur $B_{n,k}$, $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$.

$\rightarrow$ Sur E, $\forall n \geq n_0$, $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$.

ie $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Q° : Con apps $f_n \longrightarrow f$ ds un cert~ tps, ! ss qle condi°s $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$?

① Lim inf & limsup de suites réelles

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère

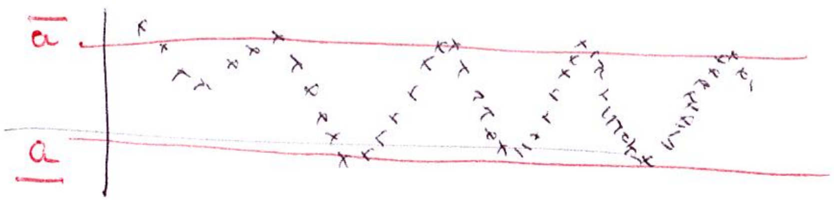
$$b_p = \sup_{n\geq p} a_n \quad \& \quad c_p = \inf_{n\geq p} a_n \quad , \ p\in\mathbb{N}, \quad b_p, c_p \in \overline{\mathbb{R}}$$

$b_p \searrow \quad , \ c_p \nearrow \quad \& \ c_p \leq b_p$

il existe dc $\bar{a} = \lim\limits_{p\to\infty} b_p = \lim\limits_{p\to\infty} \sup\limits_{n\geq p} a_n$

$\underline{a} = \lim\limits_{p\to\infty} c_p = \lim\limits_{p\to\infty} \inf\limits_{n\geq p} a_n$.

$\bar{a}$ & $\underline{a}$ st respectivement la ⊕ grande & la + petite valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\geq 0}$.



$\bar{a}$ (resp. $\underline{a}$) est la + grande (resp. petite) valeur dont a_n va passer infiniment proche infiniment souvent.

Ⓓ Soit f_n une suite de fs $E \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit limsup f_n & liminf f_n :

$$\limsup f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x))$$

$$\liminf f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} (f_n(x))$$

Soit (a_n) une suite réelle ⓐ mq

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Rq si f_n est suite de f° mesurables alors limsup f_n & liminf f_n st mesurables

TH (L de Fatou)

soit (f_n) suite de fs mesurables positives

alors $\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonct° } g} \, d\mu \le \liminf \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{suite réelle}}$.

Rq si $\liminf \int f_n \, d\mu = \infty$, L dF est inutile.

CAS d'inégalité STRICTE

ex1

$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$.

$$\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0,n]) = 1.$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

- Calculer $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pr $x \geq 0$

$\exists n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$.

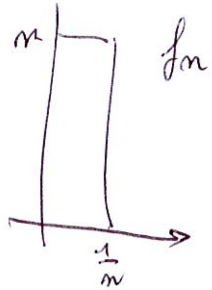
à x fixé, $f_n(x)$ CV & $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Donc $\liminf_{n\to\infty} f_n \equiv 0$. (On Rq pr $x < 0$, $f_n(x) = 0$ $\forall n$)

$\Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$ car $0 \times \mathbb{1}_{[0,1]}$ est étagée d'int 0.

Fatou: $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1$

ex2



$f_n = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ $\quad \int f_n \, d\lambda = n \times \frac{1}{n} = 1$

$\Rightarrow \liminf \int f_n \, d\lambda = 1$

$\underbrace{\liminf f}_{g} = +\infty \, \mathbb{1}_{\{0\}}$

$h = a \mathbb{1}_{\{0\}}$ et $\int a \mathbb{1}_{\{a\}} \, d\lambda = 0$.

- $\int g \, d\lambda = \sup \{ \int h \, d\lambda, \ h \in \mathcal{E}^+, \ h \leq g \}$
- si $f = g$ λ-presque-partout alors

$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda \Rightarrow \int +\infty \, \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda = \int 0 \times \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda.$$

Th (de CVce monotone)

Soit (f_n) une suite $\nearrow$ de f **mesurables** & **positives** (ie $\forall x$, $f_n(x) \underset{n}{\nearrow}$)

alors (f_n) **CV simplement** vers f **mesurable**,

& $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Preuve : $I_n = \int f_n \, d\mu$, $I = \int f \, d\mu$.

- $I_n \nearrow$ car $(f_n) \nearrow$ + monotonie.

& $I_n \leqslant I$ par monotonie.

- L de Fatou : $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

$= I \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq I$

Rq $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Rq • La f f prend ses valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}_+$.

• On ne fait aucune hypothèse d'intégrabilité de f_n.

• Idem pr des suites $\searrow$ de fs négatives.

ce pr f_n non-positive. $f_n = -\mathbb{1}_{[n,\infty]}$

ok $\nearrow$

ok mesurables (fs indicatrices de fs mesurables)

ok $f_n \xrightarrow{\text{simplement}} 0$

$\int f_n \, d\lambda = -1(\lambda[n,\infty[) = -\infty \neq \underbrace{\int \lim f_n(x) \, \lambda(dx)}_{=0}$

Th (CVce dominée)

Soit (f_n) suite de fs mesurable, CV simplement vers f. On spps $\exists$ f $g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, cad $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

et $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$.

(car $\int f_n - f \, d\mu = \int (f_n - f)^+ d\mu - \int (f_n - f)^- d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

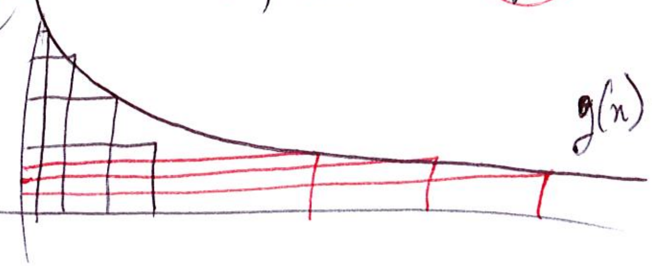
Rq : • f_n, f bornée par C sur $[0,1]$;
& si $f_n \to f$ simplement sur $[0,1]$
$|f_n(x)| \leq C \ \forall x \in [0,1] \ \forall n$
→ On pose $g(x) = C \ \forall x \in [0,1]$
est intégrable $\left(\int_{[0,1]} g \, d\lambda = \underbrace{C}_{<\infty} \right)$

$\Rightarrow \int |f_n - f| \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par CVD.

• On pt tjrs choisir $g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$
mais en pratiq cette f n'est pas forcément calculable ou son intégrable ne l'est pas.

• Inégalité Stricte de Fatou, ∄ dominat° g intégrable.

@ $f_n = n \, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ & $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$.



$g(x) = \frac{1}{x}$.

Récap • (f_n) CV simp. si $\forall x \in E : f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

• $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ si $\int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$, $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$

• $(f_n) \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$ si $\exists N$ négligeable pr μ tq $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c$.

• $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ si $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

si μ mesure finie & $(f_n) \xrightarrow{UN} f$
$0 \leq \int |f_n - f|(x) \, d\mu \leq \int g_n(x) \, d\mu = g_n \underbrace{\mu(E)}_{<\infty}$
$g_n = g_n(y) = \sup |f_n - f|(x)$.
$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $f_n \longrightarrow f$ U.N.
Th des gendarmes $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$,

limsup & liminf

$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{p \geq n} a_p}^{b_p \searrow}$

$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{p \geq n} a_p}_{c_p \nearrow}$

Th CV dominée
(f_n) sdf $\xrightarrow{CV.s} f$, sq $\exists \varphi$ integ, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$
$\Rightarrow \lim \int f_n(x) \, dx = \int f(x) \, dx$

L Fatou
f_n mesurable & ⊕
$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

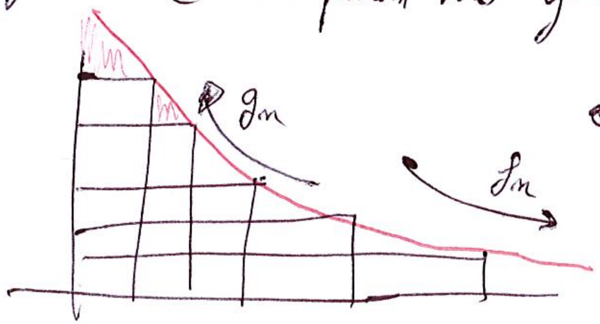
Th CV monotone
(f_n) suite ↗ f ⊕
$\Rightarrow \lim \int f_n = \int \lim f_n$

→ Retour sur Th CV Dominée & cas d'inégalité
stricte de Fatou : $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$

$f_n \xrightarrow{cv.s.} f = 0 \qquad \int f_n(x)dx = 1.$

$g_n(x) = n \, \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}(x)$

$g_n(x)$ CV simplement vers $g \equiv 0$. $\int g_n(x)dx = 1$.



$\sum \frac{1}{k} \iff \int \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{x}dx$ n'est pas intégrable.

$\varphi(x) = \sup_n f_n(x)$

Ne peux écrire $\int f(x)\, d\mu$.

si λ mesure de Lebesgue : $\lambda(dx) = dx$

X de FdR° F_X, quelle condition X est à densité ?

si X est à densité, $\exists f_X$ tq f_X mes, pos, $\int f_X d\mu = 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \to \boxed{\text{cont}}$ & $\boxed{\text{déri}}$ (sauf en nb fini de pts)

→ $g_X(x)$ sa dérivée,

$\int_a^b g_X(y)dy = F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$

X est sans mémoire si $\mathbb{P}(X \geq a+b \mid X \geq b) = \mathbb{P}(X \geq a)$

Int de Lebesgue	Riemann
• f mesurable	• f CM
• CVD	• $f_n \xrightarrow{UN} f$ ..

CVD sur un segment (ens de mesure finie)

$f_n \to f$ simplement sur E, $\mu(E) < \infty$,

si $|f_n(x)| \leq C \ \forall n, \forall x$, $g(x) = C$.

Intégrable ⇒ sous-entendu mesurable.

4. Variables Aléatoires

4.1 Préambule : caractérisation des mesures

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

Q° : Comment déterminer si X & Y, 2 va ont m̂ loi ?

"est-ce que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$"

$\mathbb{P}_X ; \mathbb{P}_Y : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$. va borélien.

On ne peut pas vérifier "à la main" $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$

D Soit E ens, on considère $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est un **π-système** si $\mathcal{C}$ est stable p intersection finie.

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.

@ L'ens $\mathcal{I}_1 = \{$ intervalles ouverts de $\mathbb{R} \}$ est un π-système.

D Un ens $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone, ou λ-système si :

- $E \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ est stable p différence
  1) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ et $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$
  2) $A_n \in \mathcal{C}, \forall n$ $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{C}$.

1 Soit $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ 2 mesures de probas sur $(E, \mathcal{T})$ alors $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ est une classe monotone.

- $E \in \mathcal{C}$ car $\mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E) = 1$ & $E \in \mathcal{T}$ tribu
- $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T}$ si $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \overset{=}{\underset{A \cap B^c}{}} \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\mathbb{P}(B)}$$

$\mathbb{Q}(A \setminus B) = \mathbb{Q}(A) - \mathbb{Q}(B)$
si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{Q}(A_n) = \mathbb{Q}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big)$$

Th des classes monotones

La petite classe monotone contenant un π-système $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée p $\mathcal{C}$.

@ mq ∃ une unique mesure sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ tq $\mu(]a,b[) = b - a$ (*)

Soit μ, λ 2 mesures sur $\mathcal{B}([0,1])$ tq (*)

$\to \mu, \lambda$ mesures de proba.

$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}([0,1]), \mu(A) = \lambda(A)\}$ est une classe monotone.

$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(I)$ où $I = \{$intervalles de $[0,1]\}$.

I est un π-système.

$\boxed{LCM}$ (Classe monotone) à appliquer

$\Rightarrow$ "la plus petite classe monotone contenant I est $\sigma(I) = \mathcal{B}([0,1])$!!

$\Rightarrow \mathcal{C} \supset \mathcal{B}([0,1]) \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}([0,1])$.

I'

$@_2$ "$\{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ est un π-système.

q engendre les $]a,b[$ $\forall a,b$

$$]a,b] =]-\infty, b] \cap [-\infty, a]^c$$

$$]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - \frac{1}{n}[.$$

X, Y 2 @va, on suppose X & Y ont m fd$\mathbb{R}^{\Omega}$

$F_X(x) = F_Y(x)$ $\forall x$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, x])$ $\forall x$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident sur I, q est un π système q engendre les boréliens

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (38)