Corrigé du devoir surveillé n° 2 – Partie Analyse

Exercice 1.

1. (a) Comme $f'(x) = \frac{1}{x+3} > 0$ pour tout $x \in]-3, +\infty[$, alors f est strictement croissante sur $]-3, +\infty[$. On calcule ensuite

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1}{x+3} = \frac{x+2}{x+3}.$$

Ainsi, $g'(x) < 0$ pour $x \in]-3, -2[$ et donc g est strictement décroissante sur $]-3, -2[$, et $g'(x) > 0$ pour $x \in]-2, +\infty[$ et donc g est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$.

(b) D'après la question précédente, on sait déjà que la fonction g est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$. Comme elle y est de plus continue, on en déduit par le théorème de la bijection qu'elle établit une bijection de $]-2, +\infty[$ sur l'intervalle $g(]-2, +\infty[)$. Comme $g(-2) = -2 - f(-2) = -2$ puisque $f(-2) = \ln 1 = 0$, et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x+3)}{x}\right) = +\infty \quad \text{puisque} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

on en déduit que $g(]-2, +\infty[) =]-2, +\infty[$.

2. (a) On a par définition $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln 3 > 0 = u_0$ puisque $3 > 1$.

(b) Démontrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \le u_{n+1}$:

— D'après la question précédente, la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixé, et supposons que $u_n \le u_{n+1}$. Comme la fonction f est croissante, on a

$$f(u_n) \le f(u_{n+1}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} \le u_{n+2}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Démontrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 2$:

— Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 < 2$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixé, et supposons que $u_n < 2$. On a alors, puisque f est croissante,

$$u_{n+1} = f(u_n) \le f(2) = \ln 5 < 2 \quad \text{car} \quad e^2 > \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > 5.$$

(d) D'après ce qui précède, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2). Par conséquent, elle est convergente. On note ℓ_1 sa limite.

3. (a) On a par définition $v_1 = f(v_0) = f(5) = \ln 8 < 5 = v_0$ puisque $e^5 > 2^5 = 32 > 8$.

   (b) Comme pour le (b) de la question 2, la croissance de la fonction f et l'inégalité $v_0 > v_1$ permettent de démontrer, par récurrence sur n, que $v_n \geq v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Démontrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > 1$:

   — Pour $n = 0$, on a bien $v_0 = 5 > 1$.

   — Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixé, et supposons que $v_n > 1$. On a alors, puisque f est croissante,

$$v_{n+1} = f(v_n) \geq f(1) = \ln 4 > 1 \quad \text{car} \quad e < 4.$$

   (d) D'après ce qui précède, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1). Par conséquent, elle est convergente. On note ℓ_2 sa limite.

4. (a) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n < 2$ et $1 < v_n \leq 5$ d'après ce qui précède et donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient respectivement $0 \leq \ell_1 \leq 2$ et $1 \leq \ell_2 \leq 5$.

   — La fonction f est continue sur $]-3, +\infty[$ et, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Par conséquent, en passant à la limite $n \to +\infty$ dans ces égalités, on obtient respectivement $\ell_1 = f(\ell_1)$ et $\ell_2 = f(\ell_2)$.

   (b) D'après la question précédente et la définition de g, on a $g(\ell_1) = g(\ell_2) = 0$ avec $\ell_1 \in [0,2] \subset]-2, +\infty[$ et $\ell_2 \in [1,5] \subset]-2, +\infty[$. Comme la fonction g est bijective sur $]-2, +\infty[$ d'après le (b) de la question 1, elle y est en particulier injective et donc $\ell_1 = \ell_2$. On note ℓ cette valeur commune.

   (c) Comme $\ell = \ell_1 = \ell_2$, les encadrements et les égalités de la question (a) prouvent que $\ell \in [1,2]$ et $\ell = f(\ell)$.

Exercice 2.

1. — Sur les intervalles $]0,1[$ et $]1, +\infty[$, la fonction f est continue comme produit et quotient de fonctions continues.

   — Déterminons la limite de f en 0^+. On a

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0, \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

   Ainsi, la fonction f est continue en 0.

   — Déterminons la limite de f en 1. Posons $x = 1 + h$ et faisons tendre h vers 0 :

$$f(x) = f(1+h) = \frac{2(1+h)\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2 \quad \text{car} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

   Ainsi, on a $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$, et donc la fonction f est continue en 1.

Finalement, la fonction f est continue sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Pour montrer que f est dérivable en 1, on calcule la limite du taux d'accroissement

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x\ln x}{x-1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x\ln x-2(x-1)}{(x-1)^2}.$$

   Notons u et v les fonctions définies sur $]0,2[$ par $u(x)=2x\ln x-2x+2$ et $v(x)=(x-1)^2$. On a $u(1)=v(1)=0$. Par ailleurs, on a aussi $u'(x)=2\ln x$ et $v'(x)=2(x-1)$, et en particulier $u'(1)=v'(1)=0$. Par contre, on a $u''(x)=\frac{2}{x}$ et $v''(x)=2$, et cette dernière fonction ne s'annule pas $]0,2[$. On peut donc appliquer la règle de l'Hospital deux fois consécutivement sur l'intervalle $]0,2[$, ce qui donne

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{u''(x)}{v''(x)}=\frac{u''(1)}{v''(1)}=\frac{2}{2}=1.$$

   Ainsi, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=1$.
3. Pour $x\in\,]0,+\infty[\,\setminus\{1\}$, on calcule par dérivation d'un quotient

$$f'(x)=\frac{(2\ln x+2)(x-1)-2x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1-\ln x)}{(x-1)^2}.$$

4. La fonction f est continue sur $[0,1]$ d'après la première question, et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in\,]0,1[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2.$$

   D'après la question précédente, on en déduit que

$$\frac{2(c-1-\ln c)}{(c-1)^2}=2\iff c-1-\ln c=(c-1)^2\iff c^2-3c+2=-\ln c.$$