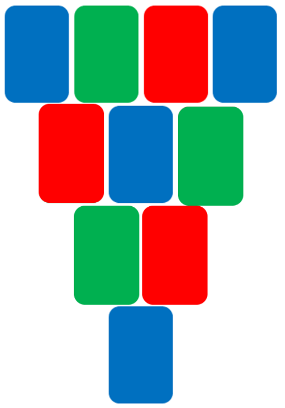
Assemblages triangulaires tricolores



Aleaume Louis Sonneville Clément Stalin Pierre

26 janvier 2021

Résumé

Table des matières

I Recherches personnelles **3**

1 Résolution pour 10 cartes **5**
- 1.1 Définition du problème . . . 5
- 1.2 Mathématisation du problème . . . 5
- 1.3 Une méthode de calcul . . . 7
- 1.4 Assistance algorithmique . . . 8
- 1.5 Calculs jusqu'à 10 . . . 9
  - 1.5.1 Calcul pour 5 cartes . . . 10
  - 1.5.2 Calcul pour 6 cartes . . . 10
  - 1.5.3 Calcul pour 7 cartes . . . 10
  - 1.5.4 Calcul pour 8 cartes . . . 11
  - 1.5.5 Calcul pour 9 cartes . . . 11
  - 1.5.6 Calcul pour 10 cartes . . . 11
  - 1.5.7 Exemples aléatoires . . . 12

2 Résolution pour un nombre quelconque de cartes **13**
- 2.1 Plus de rigueur . . . 13
  - 2.1.1 La fonction d'extension . . . 13
  - 2.1.2 Définition rigoureuse du résultat . . . 14
  - 2.1.3 Exposition rigoureuse de la méthode de calcul par réccurence . . . 14
- 2.2 Approche à l'aveugle de la conjecture . . . 14
- 2.3 Approche par réccurence de la conjecture . . . 15
- 2.4 Démonstration . . . 16

3 Exploitation des résultats **17**
- 3.1 Cas similaires à 10 cartes . . . 17
  - 3.1.1 Une visualisation . . . 17
  - 3.1.2 Démonstration . . . 18

4 En 3 dimensions **19**
- 4.1 Redéfinition à 3 dimensions . . . 19
- 4.2 Généralisation à d dimensions . . . 19

II Étude de l'article Triangle Mysteries **20**

Première partie

Recherches personnelles

Nous présentons premièrement l'ensemble du travail que nous avons effectué nous même avant d'attaquer la lecture de l'article fourni. Ce travail n'est pas entièrement fini, et pour cause le ”réel” travail est l'étude de l'article en question et donc il a été préférable que nous accordions la majeure partie de notre temps à la seconde partie de ce mémoire.

Chapitre 1

Résolution pour 10 cartes

1.1 Définition du problème

Soit la fonction r (définie plus rigoureusement à la définition 1.2 une fois les bons ensembles introduits), la fonction qui à une séquence de cartes associe la carte finale.

Toute l'escence de ces recherches consiste à trouver une formule explicite de la fonction r.

On préferera noter $Rouge = R$, $Vert = V$ et $Bleu = B$; et les majuscules telles que X, A ou encore Z désigneront des cartes. On notre l'opération $\cdot$, l'opération associant à deux cartes dans une ligne leur résultat selon le problème posé. Voici sa défintion exacte :

$R \cdot R = R$	$V \cdot R = B$	$B \cdot R = V$
$R \cdot V = B$	$V \cdot V = V$	$B \cdot V = R$
$R \cdot B = V$	$V \cdot B = R$	$B \cdot B = B$

1.2 Mathématisation du problème

Le premier problème rencontré est établir le lien entre le sujet et les mathématiques. Après beaucoup de travail au brouillon, nous avons eu l'idée d'établir le lien le plus simple auquel penser entre ces cartes et les mathématiques : associer un nombre à une carte. Nous avons donc associé le nombre 0 à la couleur rouge, 1 à la couleur verte et 2 à la couleur bleue.

Définition 1. On note $\Omega = \{Rouge, Vert, Bleu\}$ l'ensemble des trois couleurs.

Définition 2. Une séquence (de cartes) de longueur n est un n-uplet dans Ω^n, ou un n-uplet dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^n$ (pour des raisons qui apparaîtront après nous confondrons les deux).

Dans l'idée, une couleur ne peux donc techniquement (dans la limite du problème actuel) dépasser la valeur associée de 2. Nous avons donc immédiatement vu un lien avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a ainsi la possibilité de définir une opération sœur sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$$\phi : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \begin{cases} \phi(R) & = 0 \\ \phi(V) & = 1 \\ \phi(B) & = 2 \end{cases} \end{array}$$

Nous n'utiliserons presque si ce n'est pas cette application par la suite, du fait de la congruence en train d'être établie. Ensuite, il faut trouver un moyen de "calculer" les rangées successives, donc de trouver une fonction ou une opération permettant de faire ces calculs successifs. Après un peu de travail au brouillon, nous avons trouvé l'application qui aux deux couleurs (leur valeur, nous confondrons beaucoup les deux mots -et pour cause- par la suite) associe le double de la somme des deux, autrement dit on définit l'opération suivate :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, x \circ y = 2x + 2y$$

Cette opération n'a pas été définie pour rien. Elle nous permet d'établir l'isomoprhisme suivant : $(\Omega, \cdot) \stackrel{\phi}{\to} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \circ)$. En effet, voici la table de l'opération de chacune de ces structures (celle sur Ω est par définition du problème) :

$\cdot$	R	V	B
R	R	B	V
V	B	V	R
B	V	R	B

$\circ$	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

L'isomoprhisme est ainsi vérifié. À noter, à la lettre $X \in \Omega$ on pourra associer la lettre x, sa valeur dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En considérant l'isomorphisme créé précédemment, on peut donc confondre les élements de Ω avec ceux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on parlera de congruence ; par exemple B est congru à 2, qui lui même est congru à 5 (on travaille et travaillera toujours modulo 3). On utilisera pour la congruence le symbole $\equiv$.

Nous avons définit les éléments nécessaires à la définition rigoureuse de la fonction r.

Définition 3 (Fonction résultat)**.** Soit r, la fonction définie par $r : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

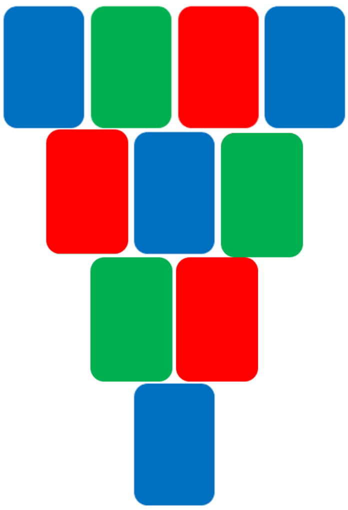
, associant à une séquence de longueur n le résultat final.

1.3 Une méthode de calcul

Grâce aux opérations définies dans la section précédente, une méthode de calcul apparaît :

$$\begin{aligned}
XYZ &= (X \cdot Y) \cdot (Y \cdot Z) \\
&\equiv (x \circ y) \circ (y \circ z) \\
&= (2x + 2y) \circ (2y + 2z) \\
&= 4x + 4y + 4y + 4z \\
&= 4x + 8y + 4z \\
&\equiv x + 2y + z \\
ABCD &= (A \cdot B) \cdot (B \cdot C) \cdot (C \cdot D) \\
&\equiv (a \circ b) \circ (b \circ c) \circ (c \circ d) \\
&= (2a + 2b) \circ (2b + 2c) \circ (2c + 2d) \\
&= (4a + 4b + 4b + 4c) \circ (4b + 4c + 4c + 4d) \\
&= (4a + 8b + 4c) \circ (4b + 8c + 4d) \\
&= (8a + 16b + 8c + 8b + 16c + 8d) \\
&= (8a + 24b + 24c + 8d) \\
&\equiv 2a + 2d
\end{aligned}$$

On remarque alors pour une taille 4 que le résultat final ne dépend pas des deux cartes du milieu, de plus on constate que notre formule fonctionne avec l'image d'introduction au document que voici :



Ici, d'après la formule trouvée, le résultat final devrait être

$$\begin{aligned} BBVB &\equiv 2b + 2b \\ &= 4b \\ &= 8 \\ &\equiv 2 \\ &\equiv B \end{aligned}$$

1.4 Assistance algorithmique

Pour soutenir nos arguments, nous avons programmé un script en Python, permettant de vérifier une formule de calcul du résultat final telle que celles calculées pour $n = 3$ et $n = 4$ dans la section 1.3. Voici le script en question qui permet de vérifier une formule émise sur le résultat final d'une séquence (de 4 cartes pour le moment) :

```
ALPHABET = ['R', 'V', 'B']

def complementary(c1, c2):
    if c1 == c2:
        return c1
    else:
        for c in ALPHABET:
            if c != c1 and c != c2:
                return c
        # on n'aura pas à arriver là si ALPHABET contient au moins 3 caractèr
        return -1

def solveSequence(seq):
    while len(seq) > 1:
        nseq = ''
        for i in range(len(seq)-1):
            c1, c2 = seq[i], seq[i+1]
            nseq += complementary(c1, c2)
        seq = nseq
    return seq

def conjectureN(tupl):
    return (-tupl[0]-tupl[3]) % 3

def poidsTrinaire(k, comp):
    pds = list()
    while k > 0:
        pds += [k % 3]
```

```
        k //= 3
    while len(pds) != comp:
        pds += [0]
    pds.reverse()
    return tuple(pds)

N=4

for n in range(3**N):
    poids = poidsTrinaire(n, N)
    sequence = ''
    for w in poids:
        sequence += str(ALPHABET[w])
    if conjectureN(poids) != ALPHABET.index(solveSequence(sequence)):
        print('Conjecture erronée pour', poids)
```

Notes algorithmiques La fonction *poidsTrinaire* nous permet d'itérer sur toutes les possibilitées de séquence, tout ça de façon linéaire (au lieu par exemple de faire 4 boucles imbriquées). Ensuite, il serait raisonnable de dire qu'il vaudrait mieux mettre un message d'affichage de fin à l'algorithme disant que le programme s'est terminé (sans erreur ou pas), mais l'IDE sur laquelle a été programmé le script indiquait directement que le programme était fini.

On va vérifier pareillement nos formules pour les futures differentes valeurs de n en changement simplement la fonction *conjectureN*, ainsi que la variable N. Lors de l'execution de cet algorithme, rien ne s'affiche, donc la formule est vérifée pour $n = 4$ cartes initiales.

Les calculs effectués sont satisfaisants, on a trouvé une méthode de calcul d'une formule plutôt (pour le moment) simple et explicite du résultat final.

1.5 Calculs jusqu'à 10

Nous allons établir nos calculs et résultats selon la même méthode que présentée dans la section 1.3.

1.5.1 Calcul pour 5 cartes

Voici l'application de la méthode à 5 cartes :

$$\begin{aligned}
ABCDE &= (AB)(BC)(CD)(DE)\\
&\equiv (2a+2b)(2b+2c)(2c+2d)(2d+2e)\\
&= (4a+8b+4c)(4b+8c+4d)(4c+8d+4e)\\
&= (8a+24b+24c+8d)(8b+24c+24d+8e)\\
&= 16a+48b+48c+16d+16b+48c+48d+16e\\
&= 16a+64b+96c+64d+16e\\
&\equiv a+b+d+e
\end{aligned}$$

Voici la modification que nous allons effectuer à l'algorithme pour qu'il vérifie cette formule (en plus de changer $N = 5$ dans le code) :

```
def conjectureN(tupl):
    return (tupl[0]+tupl[1]+tupl[3]+tupl[4]) % 3
```

Lors de l'execution de l'algorithme de vérification, rien ne s'affiche, cette formule s'avère donc être vérifée.

1.5.2 Calcul pour 6 cartes

Voici l'application de la méthode à 6 cartes :

$$\begin{aligned}
ABCDEF &= (AB)(BC)(CD)(DE)(EF)\\
&\equiv (2a+2b)(2b+2c)(2c+2d)(2d+2e)(2e+2f)\\
&= (4a+8b+4c)(4b+8c+4d)(4c+8d+4e)(4d+8e+4f)\\
&= (8a+24b+24c+8d)(8b+24c+24d+8e)(8c+24d+24e+8f)\\
&= (16a+64b+96c+64d+16e)(16b+64c+96d+64e+16f)\\
&= 32a+128b+192c+128d+32e+32b+128c+192d+128e+32f\\
&= 32a+160b+320c+320d+160e+32f\\
&\equiv 2a+b+2c+2d+e+2f
\end{aligned}$$

Avec la même modification de la fonction de formule et de la valeur du N, le résultat obtenu est que rien ne s'affiche, vérifiant donc aussi cette formule.

1.5.3 Calcul pour 7 cartes

Voici l'application de la méthode à 7 cartes :

$$\begin{aligned}
ABCDEFG &= (AB)(BC)(CD)(DE)(EF)(FG) \\
&\equiv (2a+2b)(2b+2c)(2c+2d)(2d+2e)(2e+2f)(2f+2g) \\
&\ldots \\
&= 64a + 384b + 960c + 1280d + 960e + 384f + 64g \\
&\equiv a + 2d + g
\end{aligned}$$

En apportant le même style de modification à l'algorithme que précédemment, l'output est vide, donc la formule est vérifiée.

1.5.4 Calcul pour 8 cartes

Voici l'application de la méthode à 8 cartes :

$$\begin{aligned}
ABCDEFGH &= (AB)(BC)(CD)(DE)(EF)(FG)(GH) \\
&\ldots \\
&\equiv 128a + 896b + 2688c + 4480d + 4480e + 2688f + 896g + 128h \\
&\equiv 2a + 2b + d + e + 2g + 2h
\end{aligned}$$

Encore une fois le programme se termine sans contre-exemple, cette formule est vérifiée.

1.5.5 Calcul pour 9 cartes

Voici l'application de la méthode à 9 cartes :

$$\begin{aligned}
ABCDEFGHI &= (AB)(BC)(CD)(DE)(EF)(FG)(GH)(HI) \\
&\ldots \\
&\equiv a + 2b + c + 2d + e + 2f + g + 2h + i
\end{aligned}$$

Le programme vérifie cette formule.

1.5.6 Calcul pour 10 cartes

On atteint notre objectif, pour le moment les formules obtenues sont simples mais ne permettent pas comme démontré par notre enseignant lors de la présentation du sujet un calcul prenant environ deux secondes de tête. Voici l'application de la méthode à 10 cartes :

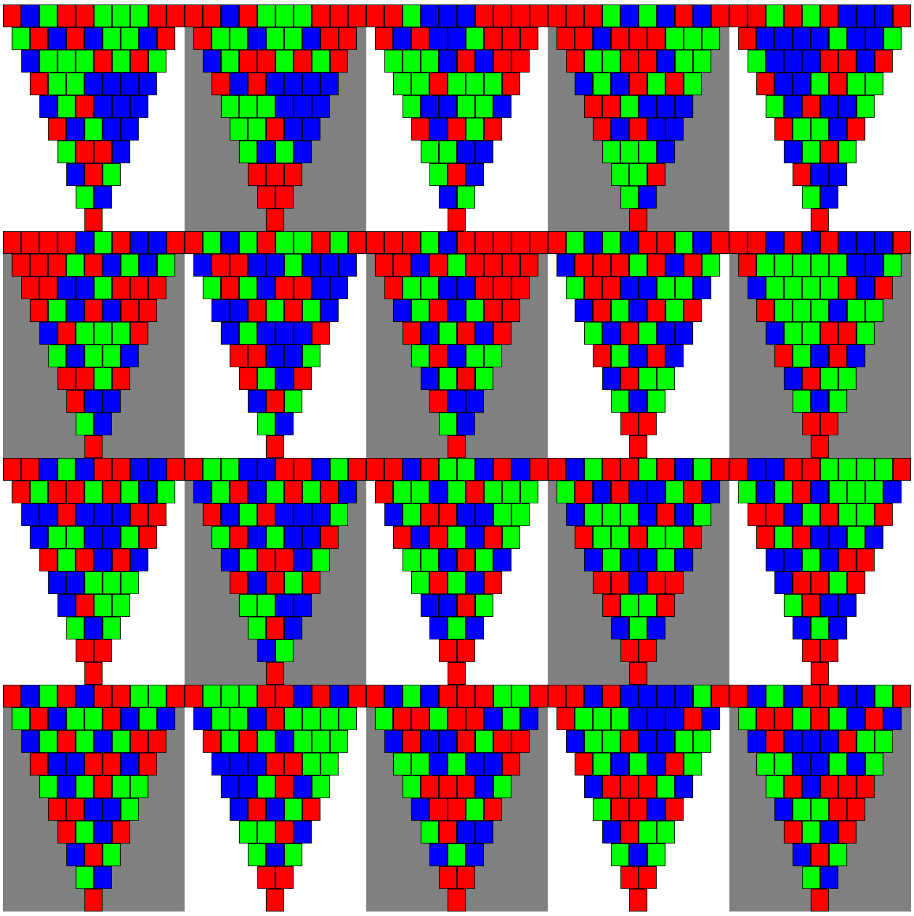
$$\begin{aligned}
ABCDEFGHIJ &= (AB) \cdot (BC) \cdot (CD) \cdot (DE) \cdot (EF) \cdot (FG) \cdot (GH) \cdot (HI) \cdot (IJ) \\
&\ldots \\
&\equiv 2a + 2j
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient le résultat très intéressant que pour $n = 10$ (la valeur principalement demandée), le résultat final ne dépend que des cartes aux extrémités. On remarque quelque chose :

$$ABCDEFGHIJ = A \cdot J$$

1.5.7 Exemples aléatoires

Le résultat obtenu est très déconçertant. Voici pourtant une vingtaine de séquences ($n = 10$) ayant toutes pour extrémités la carte rouge (congrue à 0), dont le résultat devrait donc être par la formule trouvée congru à $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ et donc le résultat final devrait être rouge :



Chapitre 2

Résolution pour un nombre quelconque de cartes

Dans cette partie, nous allons tenter de poser une généralisation sur n, c'est-à-dire de trouver une formule donnant le résultat en fonction des cartes de la première rangée pour un nombre de cartes quelconque.

2.1 Plus de rigueur

Jusqu'ici nous avons manqué de rigueur, et ce volontairement. Le point où une abscence de rigueur volontaire a été mise sous tapis est la notion de réccurence dans le problème. En effet, nous avons estimé bon de laisser le problème à ce niveau de rigueur car il nous semble assez intuitif. Et pourtant, cette réccurence est intrinsèque au problème posé, rien que dans le calcul naïf initial du résultat, on calcule le calcul ligne par ligne. Il nous semble ainsi important d'amener cette rigueur, afin de pouvoir manipuler plus aisement certains outils par la suite.

2.1.1 La fonction d'extension

Dans la méthode utilisée afin de calculer les formules par réccurence, on transformait de manière volatile un tuple de dimension n en un tuple de dimension $n+1$ en lui ajoutant le scalaire de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ voulu (le dernier qui venait de s'ajouter à la séquence). Définissons cela :

Définition 4 (Fonction d'extensions)**.** Soit le n-uplet de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ suivant $(x_1, \cdots, x_n)$. Alors la fonction dite d'extension, notée $Ext(x, m)$ est l'application définie comme tel :

$$Ext(x,m) : \begin{array}{ccc} ((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \rightarrow & (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{n+1} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (x_1, \cdots, x_n, m) \end{array}$$

2.1.2 Définition rigoureuse du résultat

D'un point de vue purement mathématique, écrire qu'une séquence ABC est égale à $(A \cdot B) \cdot (B \cdot C)$ n'a aucun sens. On préfèrera dorénavant écrire que la séquence qu'on écrit par "vurlgarisation" $X_1 X_2 \cdots X_n$, sera de finale $\underset{1 \leq i < n}{\cdot} (\phi(X_i) \cdot \phi(X_{i+1}))$ (condensation de l'écriture $(\phi(X_1) \cdot \phi(x_2)) \cdots (\phi(x_{n-1}) \cdot \phi(x_n)))$, où le "de finale" sera noté $\approx$. On notera que tout cela n'est que question de rigueur lors du développement d'un calcul, en effet on dispose déjà de l'application r applicable à une séquence. On notera donc plutôt les calculs comme suit :

$$\begin{aligned} ABCD &\approx (A \cdot B) \cdot (B \cdot C) \cdot (C \cdot D) \\ &\equiv (a \circ b) \circ (b \circ c) \circ (c \circ d) \\ &= (2a + 2b) \circ (2b + 2c) \circ (2c + 2d) \\ &\ldots \\ &\equiv 2a + 2d \end{aligned}$$

2.1.3 Exposition rigoureuse de la méthode de calcul par réccurence

2.2 Approche à l'aveugle de la conjecture

Cette approche sera dite "aveugle" car nous ne tiendrons pas compte de la méthode de calcul des formules par réccurence, mais nous nous intéresserons plutôt aux formes des formules et tenterons d'émettre une conjecture au vu de ces formes. Résumons donc les formules déterminées jusque là :

n	Séquence	Formule
1	A	a
2	AB	$2a + 2b$
3	ABC	$a + 2b + c$
4	$ABCD$	$2a + 2d$
5	$ABCDE$	$a + b + d + e$
6	$ABCDEF$	$2a + b + 2c + 2d + e + 2f$
7	$ABCDEFG$	$a + 2d + g$
8	$ABCDEFGH$	$2a + 2b + d + e + 2g + 2h$
9	$ABCDEFGHI$	$a + 2b + c + 2d + e + 2f + g + 2h + i$
10	$ABCDEFGHIJ$	$2a + 2j$

Il semble difficile d'emettre une conjecture avec si peu d'élements. On se rappelle alors que ces formules sont sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et que nous les avons simplifiées afin d'avoir des formules plus légères. Ainsi, en revenant à leur forme plus "développée", nous obtiendrons peut-être un résultat :

n	Séquence	Formules développées
1	A	a
2	AB	$2a + 2b$
3	ABC	$4a + 8b + 4c$
4	$ABCD$	$8a + 24b + 24c + 8d$
5	$ABCDE$	$16a + 64b + 96c + 64d + 16e$
6	$ABCDEF$	$32a + 160b + 320c + 320d + 160e + 32f$
...	...	...

On voit alors apparaître une furieuse ressemblance avec les coefficients binomiaux. De plus, on remarque aisement sur les trois premières formules que tous les scalaires sont multiples des coefficients des extrêmes. Tentons alors une factorisation par ceux-ci (le symbole $\times$ représente la multiplication classique) :

$$\begin{aligned}
a &= a \\
2a + 2b &= 2 \times (a + b) \\
4a + 8b + 4c &= 4 \times (a + 2b + a) \\
8a + 24b + 24c + 8d &= 8 \times (a + 3b + 3c + d) \\
16a + 64b + 96c + 64d + 16e &= 16 \times (a + 4b + 6c + 4d + e) \\
32a + 160b + 320c + 320d + 160e + 32f &= 32 \times (a + 5b + 10c + 10d + 5e + f) \\
64a + 384b + 960c + 1280d + 960e + 384f + 64g &= 64 \times (a + 6b + 15c + 20d + 15e + 6f + g) \\
&\dots
\end{aligned}$$

On voit alors bien apparaître le triangle de Pascal. À partir de cela, on peut alors très facilement émettre une conjecture sur le résultat final.

Conjecture 2.2.1 (Formule explicite du résultat)**.** *Soit n le nombre de cartes initiales. Si l'on nomme la i-ième carte en partant de la gauche X_i, qu'on lui associe la valeur $x_i = \phi(X_i)$ et qu'on note la séquence étudiée $S \in \Omega^{n-1}$, alors la fonction r vérifie :*

$$r(x) = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

En étant plus pointilleux sur l'écriture et afin de ne pas avoir à introduire tout ce qui a été introduit précédemment, on pourra aussi noter que le résultat final d'une séquence S de taille n vaut

$$\phi^{-1}\left(2^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \phi(S_k)\right)$$

2.3 Approche par réccurence de la conjecture

Soit la séquence triviale $A = a$ (de $n = 1$). Alors, $AB = A \cdot B = a \circ b = 2a + 2b$. Par réccurence et comme détaillée dans la section 1.3, on a alors l'égalité suivante définissant

r par réccurence :

$$r(Ext(x, x_{n+1})) = r(x) \circ x_{n+1}$$

2.4 Démonstration

Chapitre 3

Exploitation des résultats

3.1 Cas similaires à 10 cartes

Nous nous intéressons dans cette question aux cas similaires à $n = 10$, c'est-à-dire aux cas tels que seules les deux cartes exterieures décident du résultat. À noter que le théorème suivant n'est en en réalité pas partit d'une conjecture émise grâce à l'exlpication faite ci-après mais grâce à un algorithme donnant les valeurs de n pour lesquelles les valeurs des coefficients binomiaux entre $[\![1, n-1]\!]$ sont congrus à 0 (modulo 3). L'algorithme utilisé nous donnait les valeurs 4, 10 et 28. Nous avons tenté une fois avoir à peu près supposé la forme $n = 3^q + 1$ de comprendre pourquoi 82 ne s'affichait pas. Ceci était tout simplement expliqué par le fait que les coefficients binomiaux alors calculés sont beaucoup trop importants pour que l'oridnateur les suive-t-à une précision suffisante pour les calculs modulo 3.

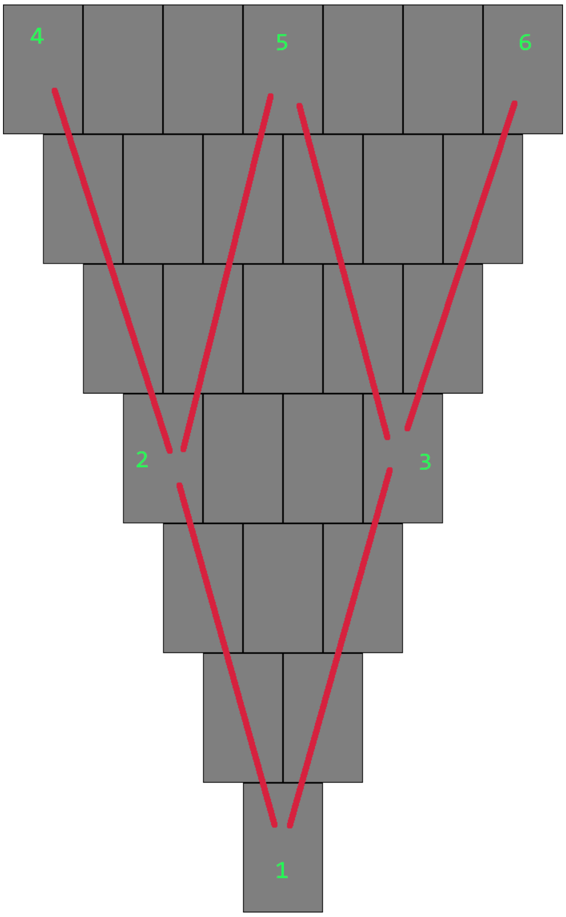
Théorème 3.1.1 (Cas où le résultat ne dépend que des extrêmités)**.** *Lorsque le nombre de cartes initiales s'écrit sous la forme $3^q + 1$, alors le résultat ne dépend que des extrêmités. De plus, en écrivant la séquence étudiée sous la forme $X_1X_2\cdots X_n$, et en associant à chaque X_i sa congruence x_i (toujours sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) on a*

$$r(x) = 2x_0 + 2x_n$$

Nous tenterons d'intérpréter / de démontrer ce résultat plus tard.

3.1.1 Une visualisation

En réalité le théorème énoncé est une sorte d'évidence quand on y pense. Pour donner un indice au lecteur sur cette évidence, voici une réflexion identique pour 7 cartes :



On s'intéresse à la dernière carte (tout en bas, le résultat final). D'après la formule pour $n = 4$, cette carte ne dépend que des extrémités du triangle formé par les cartes 123, ainsi seules des cartes 2 et 3 dépend le résultat final. Encore une fois, pour la carte 2, on applique le même raisonnement et on trouve que celle-ci n'est fonction que des cartes 4 et 5. De même pour la carte 3, seules les 5 et 6 influent sur le résultat de la carte 3. Finalement, en tenant compte de la formule pour $n = 4$ on a réussit à montrer que la formule pour $n = 7$ ne dépendait que des cartes 4, 5 et 6. En effet,

3.1.2 Démonstration

Chapitre 4

En 3 dimensions

Le problème a été intéressant, en effet qui aurait pu s'attendre à cette "formule magique" pour 10 cartes (par exemple) donnant le résultat de manière instantanée en terme de temps de calcul ? Il serait tout aussi intéressant à étudier en 3 dimensions. On s'intéresserait alors à une pyramide, que l'on préferera voir comme montante, afin de permettre une interpretation ou jouabilité dans l'espace plus aisée au lecteur.

4.1 Redéfinition à 3 dimensions

Le problème prend une toute autre alure lorsque l'on passe à 3 dimension. Il faut premièrement plus de trois couleurs. En effet, si 3 "boules" (nous parlerons maintenant de boules et non pas de cubes, simple question esthétique encore une fois d'un point de vue physico-pratique) sont toutes les trois de couleur différente, quelle couleur alors choisir comme résultante ? Et pour seulement deux différentes ? Nous allons ainsi introduire 2 nouvelles couleurs, afin de palier exactement à ces deux seuls problèmes.

Lorsque les trois boules sont de même couleur, on conserve la règle donnée à deux dimensions, leur résultat étant donc la couleur de ces trois boules elle-même. Lorsque deux couleurs seulement sont identiques,

4.2 Généralisation à d dimensions

Deuxième partie

Étude de l'article Triangle Mysteries

c.f. les preuves du pdf.
The End.