CM M44

I / Le plan cartésien

(D1) On identifie plan à $\mathbb{R}^2$: plan cartésien.

(D2) Un élt du plan cartésien ie un couple de nbrs réels : un point.

- on nomme un point P, $P := (x,y)$
  on écrit $P(x,y)$.
- pas de sens de multiplier par 2 un point.
- soit $P(x,y)$, on note $\vec{P}$ le vecteur (x,y) de l'EV euclidien $\mathbb{R}^2$: vecteur sous-jacent à P.
- on ne pt pas additionner point, ni multiplier par des scalaires (MS) opérations possibles à vecteurs sous-jacents.

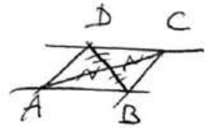
(D6) Un vecteur concret est la donnée couple ordonné de points. Au lieu de noter (A,B) : $\overrightarrow{AB}$.

(D7) Un vecteur abstrait sous-jacent au vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\vec{B}-\vec{A}$.

$\overrightarrow{AB}$ est une réalisation de $\vec{u}$ si $\vec{u}$ est le vecteur abstrait sous-jacent à $\overrightarrow{AB}$, ie $\vec{u}=\vec{B}-\vec{A}$.

- Par abus notation, on identifie le vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ et son vecteur abstrait sous-jacent. si on écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, on sous-entend qu'il s'agit des opérations sur les vecteurs abstraits sous-jacents.

(P9) (Règle du parallélogramme) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme



(DM)
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \vec{B}-\vec{A}=\vec{C}-\vec{D}$$
$$\Leftrightarrow \vec{D}-\vec{A}=\vec{C}-\vec{B}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

Rq $\dfrac{\vec{B}+\vec{D}}{2}=\dfrac{\vec{A}+\vec{C}}{2}=M$

(P10) (somme de vecteurs concrets)
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$: Règle de Chasles.

(DM) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{B}-\vec{A}+\vec{C}-\vec{B}=\overrightarrow{AC}$

(P11) soit Ω le point $(0,0)$.
On a $\overrightarrow{\Omega P}=\vec{P}$ pour tout point P.

(DM) $\overrightarrow{\Omega P}=\vec{P}-\underbrace{\vec{\Omega}}_{=\vec{0}}=\vec{P}$.

(P12) La norme d'un vecteur abstrait (x,y) est
$$\|(x,y)\|=\sqrt{\langle (x,y)\,|\,(x,y)\rangle}=\sqrt{x^2+y^2}$$
où $\langle (x_1,y_1)\,|\,(x_2,y_2)\rangle$ est le produit scalaire entre vecteurs abstraits

(D13) La distance AB entre deux points A et B :
est définit par $AB = \| \overrightarrow{AB} \|$.

(D14) La distance entre un point A & un ensemble de points $\mathcal{C}$ est définit par

$$d(A, \mathcal{C}) := \inf_{B \in \mathcal{C}} AB.$$

II / Translatⁿs

(D1) Une isométrie T est une applicatⁿ q préserve les distances, ie $T(A)T(B) = AB$!

(P2) soit un point A, un vecteur $\vec{u}$. $\exists$ uniq point B tq $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On le note

$$A + \vec{u} = B.$$

D.M $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{B} - \vec{A} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \vec{B} = \vec{A} + \vec{u}$.

(Rq) sens à "point" + "vecteur abstrait")

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{\vec{u}} \\ y_A + y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow B = A + \vec{u}$

De même, $\overrightarrow{(A + \vec{u})} = \vec{A} + \vec{u}$.

(P4) $A + \vec{u} = B \Leftrightarrow \forall P,\ \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$

$\Leftrightarrow \exists P,\ \overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$

DM $\overrightarrow{PA} + \vec{u} = \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \vec{A} - \cancel{\vec{P}} + \vec{u} = \vec{B} - \cancel{\vec{P}}$

Parbitraire. $\Leftrightarrow \vec{A} + \vec{u} = \vec{B}$

$\Leftrightarrow A + \vec{u} = B$.

(D6) L'applicatⁿ $T_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$ est appelée une translatⁿ par $\vec{u}$.

(P7) On a $T_{\vec{0}} = Id$. (translatⁿ triviale)

$T_{\vec{0}} = A + \vec{0} =: B$

or $\vec{B} = \vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

$\Rightarrow B = A \Rightarrow T_{\vec{0}}(A) = A$. □

(P8) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$.

DM P8 $T_{\vec u}\circ T_{\vec v} = T_{\vec v}\circ T_{\vec u} = T_{\vec u+\vec v}$

soit A un point.

$$T_{\vec u}\circ T_{\vec v}(A) = T_{\vec u}(A+\vec v) = (A+\vec v)+\vec u =: B$$

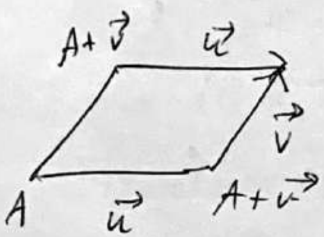
$$\vec B = \overrightarrow{(A+\vec v)+\vec u} = \overrightarrow{A+v} + \vec u = \vec A + \vec v + \vec u = \vec A + (\vec v+\vec u) = \overrightarrow{A+(\vec v+\vec u)}$$

$$\Longrightarrow B = A+(\vec v+\vec u)$$

et $T_{\vec u}\circ T_{\vec v}(A) = T_{\vec v+\vec u}(A)$ $\quad \vec u+\vec v = \vec v+\vec u$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \parallel$

$T_{\vec v}\circ T_{\vec u}(A) = T_{\vec u+\vec v}(A)$



$(A+\vec u)+\vec v = (A+\vec v)+\vec u.$

P9 Pour $\forall \vec u$ la translat° $T_{\vec u}$ est une isométrie & $T_{\vec u}^{-1} = T_{-\vec u}$.

DM

→ $T_{\vec u}\circ T_{-\vec u} = T_{\vec u+(-\vec u)} = T_{\vec 0} = Id$.

Donc $T_{\vec u}$ est une bijecto & inverse $T_{-\vec u}$.

→ $T_{\vec u}(A)T_{\vec u}(B) = \|\overrightarrow{B+u} - \overrightarrow{A+u}\|$

$\| \overrightarrow{T_{\vec u}(A)T_{\vec u}(B)} \|$ $\quad = \|\vec B+\vec u - (\vec A+\vec u)\|$

$= \|\vec{AB}\| = AB \Rightarrow T_{\vec u}$ isométrie.

$T_{\vec u}(A) = A+\vec u$.

P10 si T est une translat° & $B=T(A)$ alors $T=T_{\vec{AB}}$.

ep si $\exists A$, $T_{\vec u}(A)=T_{\vec v}(A)$ alors $\vec u=\vec v$ ($\Leftrightarrow T_{\vec u}=T_{\vec v}$).

DM soit $T=T_{\vec u}$, on cherche $\vec u$.

$A+\vec u = T(A) = B \iff A+\vec u = B$ par définit°

$\iff \vec u = \vec{AB}$

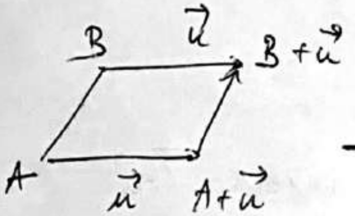
$\Rightarrow T = T_{\vec{AB}}$

$T_{\vec u}(A) = T_{\vec v}(A) := B$. $\quad \vec u = \vec{AB} = \vec v$. ($\Rightarrow T_{\vec u}=T_{\vec v}$)

$T_{\vec u}=T_{\vec v} \Rightarrow \forall A,\ T_{\vec u}(A) = T_{\vec v}(A)$

$\Longrightarrow \vec u=\vec v$.

(P11) si T est une applicat° tq $\exists A, B$, $\forall \vec{u}$, $T(A+\vec{v}) = B+\vec{v}$ alors $T = T_{\vec{AB}}$.



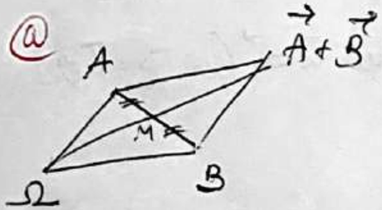
soit P quelconque.

$$\overrightarrow{T(P)} = \overrightarrow{T(A+\vec{AP})} = \overrightarrow{B+\vec{AP}}$$
$$= \vec{B} + \vec{P} - \vec{A}$$
$$= \overrightarrow{P+\vec{AB}} = \overrightarrow{T_{\vec{AB}}(P)}$$

(P12) Les translat° st *affines*, ie si T est une translat°. A & B 2 points, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow T(\lambda A+(1-\lambda)B) = \lambda T(A) + (1-\lambda)T(B).$$

@



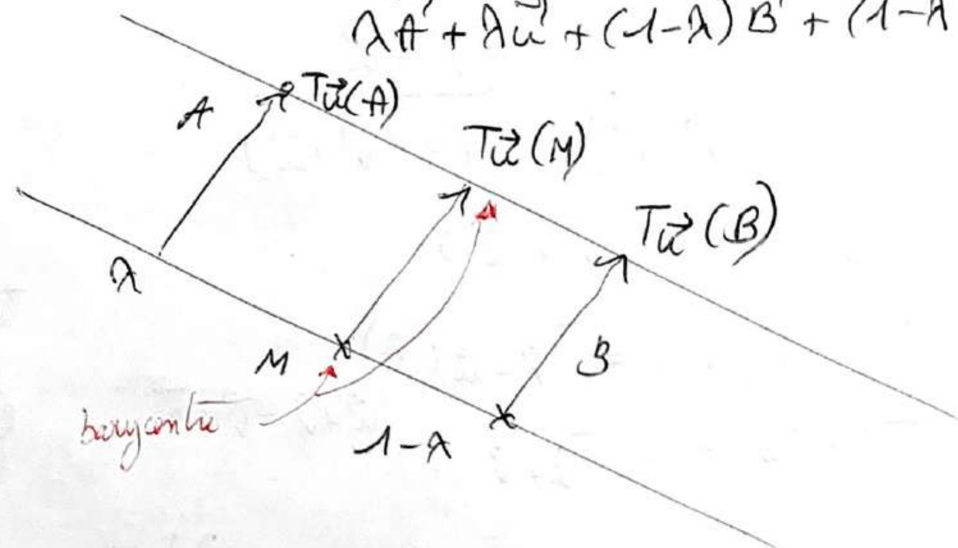
$\dfrac{A+B}{2}$ est le milieu de $[AB]$ a un sens.

$$T = T_{\vec{u}} = T(\lambda A+(1-\lambda)B)$$
$$= \lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda)T_{\vec{u}}(B)$$

points coïncident?

Mq vecteurs sous-jacents coïncident.

$$\overrightarrow{T(\lambda A+(1-\lambda)B)} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{\lambda T_{\vec{u}}(A) + (1-\lambda)T(B)}$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{\lambda A+(1-\lambda)B+\vec{u}} = \lambda\,\overrightarrow{(A+\vec{u})} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{(B+\vec{u})}$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{\lambda A+(1-\lambda)B+\vec{u}} = \lambda\vec{A} + (1-\lambda)\vec{B} + \vec{u}$$
$$\shortparallel$$
$$\lambda\vec{A} + \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{B} + (1-\lambda)\vec{u}.$$



III / Repères affines

(D1) Un repère (affine) et $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
O un points, $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs abstrait indépendants. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D2) Un repère (affine) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D3) Le triplet $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ $\Omega(0,0)$
$\vec{e_1}(1,0)$ et $\vec{e_2}(0,1)$ est le repère canoniq. (il est orthonormé).

(P5) si $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère ; l'applicaθ
$(x,y) \longmapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijecθ (isomorphisme affine) de $\mathbb{R}^2$ ds plan cartésien.
Si on + repère orthon. $\Rightarrow$ isométrie.

DM $(x,y) \longmapsto x\vec{u} + y\vec{v}$.
$\vec{\mathbb{R}} \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}$ bijecθ linéaire

isométrie ssi $(\vec{u}, \vec{v})$ BON.

$\vec{w} \xmapsto{\mathcal{B}} O + \vec{w}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(plan euclidien) (plan cartésien)

$(x,y) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}} \xrightarrow{\mathcal{B}} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$

isomorphisme

mq

B : isomorphisme isométrie

on va dmq $\vec{w} \longrightarrow O + \vec{w}$ est 1 bijecθ isométriq.

- c'est injectif : $O + \vec{w_1} = O + \vec{w_2}$
$\Updownarrow$
$\vec{O} + \vec{w_1} = \vec{O} + \vec{w_2}$
$\vec{w_1} \Updownarrow \vec{w_2} \Rightarrow \mathcal{B}$ injective.

- c'est surjectif : $\forall A$ on a :
$A = O + \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{w}} \Rightarrow A \in \operatorname{Im} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ surjective.

$(O + w_1)(O + w_2) = \| \overrightarrow{O + w_2} - \overrightarrow{O + w_1} \|$
$= \| \vec{O} + \vec{w_2} - \vec{O} - \vec{w_1} \| = \| \vec{w_2} - \vec{w_1} \| \Rightarrow \mathcal{B}$ est 1 isométrie

(R9) si $\Omega = (0,0)$ $\Big|$ $\vec{u} = \vec{e_1}\,(1,0)$
$\vec{v} = \vec{e_2}\,(0,1)$

alors $P(x,y)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow P = \Omega + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x,y)$

(P7) soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ et notons $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base sous-jacente.
Alors $\forall$ tt point $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}\,(x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}})_{\mathcal{B}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_P + x_W,\ y_P + y_W)_{\mathcal{R}}.$$

DM

$$P + \vec{w} = (O + x_P\vec{u} + y_P\vec{v}) + (x_W\vec{u} + y_W\vec{v})$$
$$= O + (x_P + x_W)\vec{u} + (y_P + y_W)\vec{v}$$
$$= (x_P + x_W,\ y_P + y_W)_{\mathcal{R}}.$$

coord P ds repère + coord W ds base $\Rightarrow$ coord P+W ds repère.

III / Repères affines

(D1) Un repère (affine) est $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
O un points, $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs abstrait indépendants. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D2) Un repère (affine) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(D3) Le triplet $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ où $\Omega(0,0)$ $\vec{e_1}(1,0)$ et $\vec{e_2}(0,1)$ est le repère canoniq. (il est orthonormé).

(P5) si $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère ; l'applicaᶿ
$(x,y) \longmapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijecᶿ (isomorphisme affine) de $\mathbb{R}^2$ ds plan cartésien.
Si on + repère orthor. $\Rightarrow$ isométrie.

1 DM $(x,y) \longmapsto x\vec{u} + y\vec{v}$

$\vec{\mathbb{R}} \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}$ bijecᶿ linéaire

isométrie ssi $(\vec{u}, \vec{v})$ BON.

$\vec{w} \xmapsto{B} O + \vec{w}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(plan euclidien) (plan cartésien)

$(x,y) \xmapsto[\text{isomorphisme}]{A} \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}} \xrightarrow[\text{mq}]{B} O + \underbrace{x\vec{u} + y\vec{v}}_{\vec{w}}$

B : isomorphisme isométrie

on va dmq $\vec{w} \longrightarrow O + \vec{w}$ est 1 bijecᶿ isométriq.

- c'est injectif : $O + \vec{w_1} = O + \vec{w_2}$
$\Updownarrow$
$\vec{O} + \vec{w_1} = \vec{O} + \vec{w_2}$
$\Updownarrow$
$\vec{w_1} = \vec{w_2} \Rightarrow B$ injective.
- c'est surjectif : $\forall A$ on a :
$A = O + \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{w}} \Rightarrow A \in \operatorname{Im} B \Rightarrow B$ surjective.

$(O+w_1)(O+w_2) = \| \overrightarrow{O + \vec{w_2}} - \overrightarrow{O + \vec{w_1}} \|$

(5) $= \| \vec{O} + \vec{w_2} - \vec{O} - \vec{w_1} \| = \| \vec{w_2} - \vec{w_1} \| \Rightarrow B$ est 1 isométrie

(R?) si $\Omega = (0,0)$ $\Big|$ $\vec{u} = \vec{e_1}\,(1,0)$, $\vec{v} = \vec{e_2}\,(0,1)$

alors $P(x,y)_{\mathcal{G}} \Leftrightarrow P = \Omega + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x,y)$

(P7) soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ et notons $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base sous-jacente.
Alors pr tt point $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}(x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}})_{\mathcal{B}}$. On a

$$P + \vec{w} = (x_P + x_w,\ y_P + y_w)_{\mathcal{R}}.$$

DM
$$\begin{aligned} P + \vec{w} &= (O + x_P\vec{u} + y_P\vec{v}) + (x_w\vec{u} + y_w\vec{v}) \\ &= O + (x_P + x_w)\vec{u} + (y_P + y_w)\vec{v} \\ &= (x_P + x_w,\ y_P + y_w)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

coord P du repère + coord w ds base $\Rightarrow$ coord P+w ds repère.

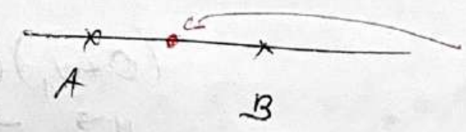
§ 4 : Barycentre

(D1) $w_1, \dots, w_n$ nbs ≥ 0 forment un système de poids si $w_1 + \dots + w_n \neq 0$.
Puis $w := w_1 + \dots + w_k$: poids total.

(D2) sdp $w_1, \dots, w_n$ est normalisé si poids total $= 1$.
$\longleftrightarrow$ pn^t $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ $\measuredangle$ $\bar{w}_i = \dfrac{w_i}{w}$

(D3) n points $A_1, \dots, A_n$; $w_1, \dots, w_n$,
Barycentre de $(A_1, \dots, A_n)$ $\measuredangle$ poids $(w_1 : \dots : w_n)$
uniq point G, $\vec{G} = \dfrac{1}{w} \sum w_i \vec{A_i}$.
on note $\sum \bar{w}_i A_i := G$ ce barycentre.

$(w_1 : \dots : w_n)$ la classe d'équivalence de $(w_1, \dots, w_n)$ par $\xleftrightarrow{\mathcal{R}}$ équivlce
$(w_1, \dots, w_n) \sim (w_1', \dots, w_n') \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0,\ (w_1, \dots, w_n) = \lambda(w_1', \dots, w_n')$
$\Leftrightarrow (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) = (\bar{w}_1', \dots, \bar{w}_n')$

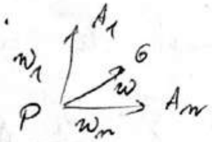


$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B =$ Barycentre de A, B avec poids $(1,1)$

(P4) $A_1, \dots, A_n, \dots$

$$G = \sum \overline{w_i}\, A_i \Leftrightarrow \forall P,\ w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}$$

$$\Leftrightarrow \exists P,\ w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}.$$



DM $w\overrightarrow{PG} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}$

$$\Leftrightarrow w(\vec G - \vec P) = \sum w_i(\vec{A_i} - \vec P) = \sum w_i \vec{A_i} - (\underbrace{\textstyle\sum w_i}_{w})\vec P$$

$$\Leftrightarrow w\vec G = \sum w_i \vec{A_i} \quad \Big) \div w$$

$$\Leftrightarrow \vec G = \sum \overline{w_i}\, \vec{A_i} \qquad \Rightarrow \exists P \Rightarrow \forall P$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G} = \sum \overline{w_i}\, \overrightarrow{\Omega A_i}$$ (ne d'pd pas posiθ O).

(P6) si $w_1, \dots, w_n$ n'est pas sdp ie

$$w_1 + \dots + w_n = 0 \Rightarrow \forall P,\ \sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i \vec{A_i}$$

DM $\sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i(\vec{A_i} - \vec P)$

$$= \sum w_i \vec{A_i} - (\underbrace{\textstyle\sum w_i}_{0})\vec P = \sum w_i \vec{A_i}.$$

$\Rightarrow \sum w_i \overrightarrow{PA_i} = \sum w_i \overrightarrow{PA_i}$ ssi $\sum w_i = 0$.

(D7) on note $\sum w_i A_i := \sum w_i \vec{A_i}$.

(R8) $(1)B + (-1)A = B - A = \vec B - \vec A = \overrightarrow{AB}$.

⚠ $2B$ n'a pas de sens : dépend posiθ O

mais $\underbrace{2B - A \text{ est un point}}$. $2B - 2A$ est vecteur.

$\sum \text{coeff} = 1$.

→ si besoin normaliser la somme des poids.

(D11) si (w_i) (sdp) notaθ abusive :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

(D12) Un point pondéré est donné (A, w) pr vect $\vec u$:

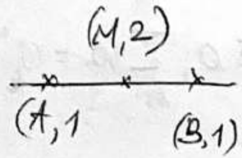
$$(A + w) + \vec u = \left(A + \frac{1}{w}\vec u,\ w\right) \quad \text{si } w \neq 0$$

▷ $\frac{A+B}{2} + \vec u = A + B$. ▷ $(A, 2) =$ "$2A$"

▷ $(A, 2) + \vec u =$ "$2A + \vec u$" $= 2(A + \frac{1}{2}\vec u) = (A + \frac{1}{2}\vec u, 2)$

(D13) Somme (A_i, w_i) points pondérés.

$$\sum(A_i, w_i) = \begin{cases} \left(\sum w_i A_i, \sum w_i\right) & \text{si } \sum w_i \neq 0 \\ \sum w_i A_i & \text{si } \sum w_i = 0 \end{cases}$$



$$(A,1) + (B,1) = \Big(\underbrace{\frac{A+B}{2}}_{M}, 2\Big)$$ ← point pondéré

• $(A,-1) + (B,1) = B - A = \overrightarrow{AB}$ → $\sum$ poids : 0 vecteur.

(P14) $(A, 0) = \vec 0$. $\quad (A, 0) = \sum 0\vec A = \vec 0$.

(P15) si $A_1 = \dots = A_n = A \Rightarrow \sum(A_i, w_i) = (A, \sum w_i)$

P15... $\sum (A_i, w_i) = ?$ $(A_i = A)$

▶ si $\sum w_i \neq 0$, $\sum A_i w_i = (\sum \bar{w_i} A_i, w) = (A, w)$ ↑ car ⊛

⊛ $\overrightarrow{\sum \bar{w_i} A_i} = \sum \bar{w_i} \vec{A_i} = (\underbrace{\sum \bar{w_i}}_{=1}) \vec{A}$

▶ si $\sum w_i = 0$, $\sum (A_i w_i) \overset{def}{=} \sum w_i \vec{A_i} = (\sum w_i) \vec{A}$.

ici on ne pt pas normaliser car $\sum w_i = 0$

$= (\underbrace{\sum w_i}_{0}) \vec{A} = \vec{0} = (A, \underbrace{0}_{w})$

(P17) Somme poids pondérés & associative,

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i, w_i) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) \right) + \left(\sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i) \right)$$

pr $k = \{1, \dots, n\}$.

DM

• 1° cas : $\sum_i^n w_i = w_1^n \neq 0$, $\sum_i^{n-1} w_i = w_1^{k-1} \neq 0$, $\sum_k w_i = w_k^n \neq 0$

Rq : $\sum_1^n w_i = \sum_1^{k-1} w_i + \sum_k^n w_i$.

$$\blacktriangle = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i)$$

$$\blacktriangle = \left(\sum \frac{w_i}{w_i^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right) + \left(\sum \frac{w_i}{w_k^n} A_i, w_k^n \right)$$

$$\blacktriangle = \left(\frac{w_1^{k-1}}{w_1^n} \sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \frac{w_k^n}{w_1^n} \sum_k^n \frac{w_i}{w_k^n} A_i \, , \, w_1^n \right)$$

calcul de coordonnées :

$$\blacktriangle = \left(\sum^n \frac{w_i}{w_1^n} A_i, w_1^n \right) = \sum_1^n (A_i, w_i)$$

on normalise poids par poids total!

• 2° cas : $w_1^n \neq 0$, $w_1^{k-1} \neq 0$, $w_k^n = 0$ (resp si — = 0, si — = 0).

$$\blacktriangle\blacktriangle = \sum_{i=1}^{k-1} (A_i, w_i) + \sum_{i=k}^{n} (A_i, w_i) = \sum \left(\frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i, w_1^{k-1} \right) + \sum w_i \vec{A_i}$$

$$\blacktriangle\blacktriangle = \left(\overrightarrow{\sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum_k^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A_i}} \, , \, w_1^{k-1} \right)$$

car $\sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i + \sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A_i} = \bullet$

$$\bullet = \sum_1^{k-1} \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A_i} + \sum_k^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i = \sum_1^n \frac{w_i}{w_1^{k-1}} \vec{A_i} = \overrightarrow{\sum \frac{w_i}{w_1^{k-1}} A_i}$$

$$\blacktriangle\blacktriangle = \left(\sum_1^n \frac{w_i}{w_1^n} A_i, w_1^n \right)$$

• 3° cas : $\omega_1^n = 0$, $\omega_1^{k-1} = 0$, $\omega_k^n = 0$

$$▲▲▲ = \sum_1^{k-1}(A_i,\omega_i) + \sum_k^n (A_i,\omega_i)$$

$$▲▲▲ = \sum_1^{k-1}\omega_i \overrightarrow{A_i} + \sum_k^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_1^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_1^n (A_i,\omega_i)$$

• 4° cas : $\omega_n^n = 0$, $\omega_1^{k-1} \neq 0 \ (\Rightarrow \omega_k^{k-1} = -\omega_1^{k-1} \neq 0)$

$$▲▲▲▲ = \sum_1^{k-1}(A_i,\omega_i) + \sum_k^n (A_i,\omega_i)$$

$$▲▲▲▲ = \left(\sum_1^{k-1}\frac{\omega_i}{\omega_1^{k-1}}A_i,\ \omega_1^{k-1}\right) + \left(\sum_k^n \frac{\omega_i}{\omega_k^n}A_i,\ \omega_k^n\right)$$

$$▲▲▲▲ = \omega_1^k \overrightarrow{\sum_1^{k-1}\frac{\omega_i}{\omega_1^{k-1}}A_i} + \omega_k^n \overrightarrow{\sum_k^n \frac{\omega_i}{\omega_k^n}A_i}$$

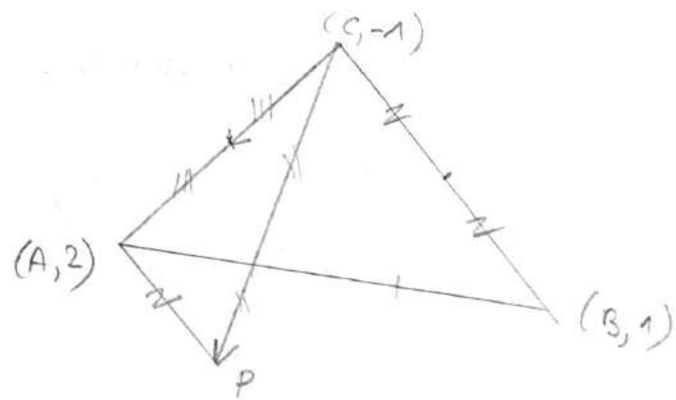
$$▲▲▲▲ = \sum_1^n \omega_i \overrightarrow{A_i} = \sum_i (A_i,\omega_i)$$ somme pondérée

---

• $@ = \underbrace{(A,2)}_{\text{p. pondéré}} + \underbrace{(B,1)+(C,-1)}_{\text{vecteur } \overrightarrow{CB}} = \underbrace{P}_{\text{pt pond}}$

$= \underbrace{(A,2)+(B,1)}_{\text{p. pondéré}} + \underbrace{(C,-1)}_{\text{p. pond}} = P$

$= \underbrace{(A,1)+(B,1)}_{\left(\frac{A+B}{2},\,2\right)} + \underbrace{(A,1)+(C,-1)}_{\overrightarrow{CA}} = P$



(P18) Soit A, B, C pts non alignés, ∀ tt pt P ∃ uniq triplet de poids normalisés (α, β, γ) tq
$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

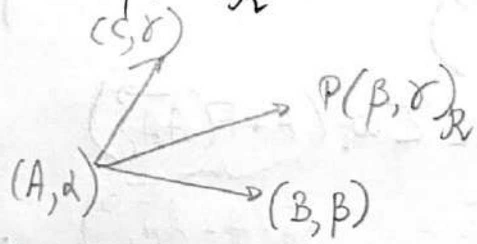
DM

$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1-\beta-\gamma$

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow P = (1-\beta-\gamma)A + \beta B + \gamma C.$

$\Leftrightarrow P = A + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow P = (\beta,\gamma)_{\mathcal{R}}.$ $\quad \rightarrow \mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

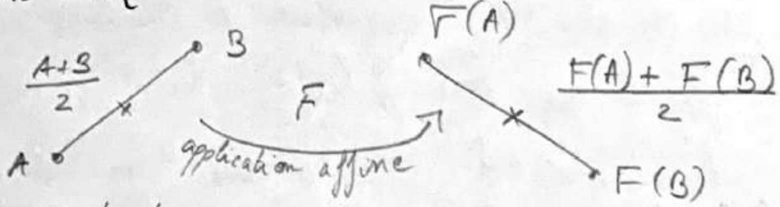


D'après ∃ & unicité des coord de $\mathcal{R}$

$\Rightarrow$ ∃ & ∃! de (α,β,γ).

(D19) A, B, C PNA (A, B, C) est repère barycentriq & poids normalisés $(\alpha:\beta:\gamma)$ st les coordonnées barycentriqs de P ds cette base.

D20 Une applicat° F est *affine* si elle préserve les barycentres : ie $F(\sum w_i A_i) = \sum w_i F(A_i)$ si $\sum w_i = 1$.



ici poids $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ mais vrai $\forall$ poids

P21 si F AL, appli $F_A : A+\vec{u} \longmapsto A + F(\vec{u})$ est affine. On dit que F_A est "F de centre A".

DM

$$F_A(A+\vec{u}) = A + F(\vec{u})$$

$$F_A\left(\sum w_i A_i\right) = F_A\left(A + \sum w_i \overrightarrow{AA_i}\right)$$
$$= A + F\left(\sum w_i \overrightarrow{AA_i}\right)$$
$$= A + \sum w_i F(\overrightarrow{AA_i}) = \sum w_i \underbrace{\left(A + F(\overrightarrow{AA_i})\right)}_{F_A(A+\overrightarrow{AA_i}) \,=\, F_A(A_i)}$$

$\Rightarrow F_A\left(\sum w_i A_i\right) =$ barycentre.

sortir somme : appli affine
sortir coeff : appli linéaire.

P22 Une appli F est affine ssi
$$F(\lambda A + (1-\lambda) B) = \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B)$$
pr ts pts A et B, $\lambda \in \mathbb{R}$.

DM Par récurrence.

$\Longrightarrow$ F affine $\Rightarrow F(\lambda A + (1-\lambda) B) \overset{def}{=} \lambda F(A) + (1-\lambda) F(B)$

$\Longleftarrow$ H_k : "$F\left(\sum_i^k w_i A_i\right) = \sum_i^k w_i F(A_i)$ si $\sum w_i = 1$"

H_2 : $\boxed{\checkmark}$

On suppose H_k réalisée. on va dmq H_{k+1} soit $w_1, \dots, w_{k+1}$ tq $w_1 + \dots + w_k = 1$.

Sans généralités, on pt supposer $w_2 + \dots + w_{k+1} \neq 0$.

$$F(w_1 A_1 + \dots + w_k A_{k+1}) = F\Big(w_1 A_1 + (1-w_1) \times \left(\frac{w_2}{w_2^{k-1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1}\right)\Big)$$

$$= w_1 F(A_1) + (1-w_1) F\Big(\underbrace{\frac{w_2}{w_2^{k-1}} A_2 + \dots + \frac{w_{k+1}}{w_2^{k+1}} A_{k+1}}_{k \text{ points}}\Big)$$

$$\overset{HDR}{=} w_1 F(A_1) + (1-w_1)\left[\frac{w_2}{w_2^{k-1}} F(A_2) + \dots + \right]$$

$$= w_1 F(A_1) + w_2 F(A_2) + \dots$$

§ 5 : Homothéties

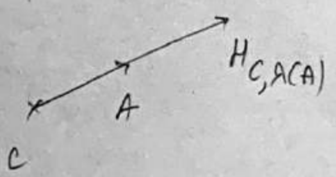
(D1) Une similitude H de rapport λ est applicat° q multiplie les distces par λ :
ie $T(A)\,T(B) = \lambda \cdot AB$ pr 2 pts A, B.
On dit que c'est λ-similitude.

(P2) Une 0-similitude est appli cte et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par def
0-similitude : $\forall A,B : T(A)T(B) = 0\,AB$
$T(A) = T(B)$.

(D3) soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$H_{C,\lambda} : A \mapsto C + \lambda \vec{CA}$ est appelée homothétie de centre C et de rapport λ.

(R9) H_λ est une (h) vectorielle si $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



(P4) $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$.

(P5) $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2}(B) = H_{C,\lambda_2}(C + \lambda_2 \vec{CB})$

(P6) $H_{C,1}(B) = C + 1 \times \vec{CB} = C + \vec{CB} = B$.

$\Rightarrow H_{C,1} = Id \Rightarrow H_{C,1} = H_{C,1}$

(P7) Les homothéties de rapport non nul st des bijecť &
$$H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,1/\lambda}$$

(P8) $\boxed{H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}}$

$H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda \vec{u}$.

§5 : Homothéties

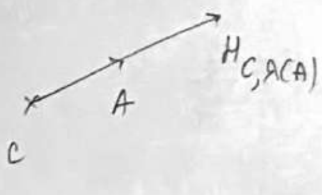
(D1) Une similitude H de rapport λ est applicat° q multiplie les distces par λ :
ie $T(A)\,T(B) = \lambda \cdot AB$ pr 2 pts A, B.
On dit que c'est λ-similitude.

(P2) Une 0-similitude est appli cte et une 1-similitude est une isométrie.

1-similitude : isométrie par def
0-similitude : $\forall A, B : T(A)T(B) = 0 AB$
$T(A) = T(B)$.

(D3) soit C point, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$H_{C,\lambda} : A \longmapsto C + \lambda \overrightarrow{CA}$ est appelée homothétie de centre C et de rapport λ.

(R9) H_λ est une (h) vectorielle si $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.



(P4) $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda \vec{u}$.

(P5) $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2}(B) = H_{C,\lambda_2}(C + \lambda_2 \overrightarrow{CB})$

(P6) $H_{C,1}(B) = C + 1 \times \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{CB} = B$.

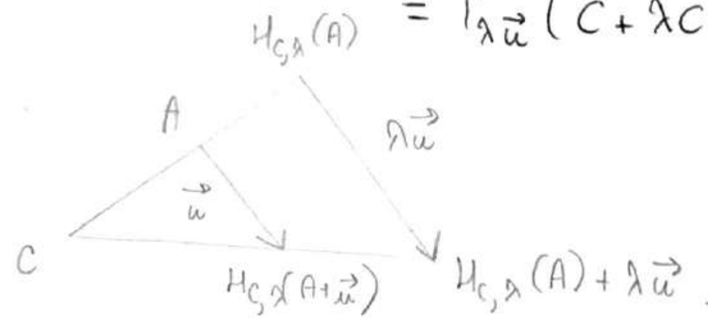
$\Rightarrow H_{C,1} = Id \Rightarrow H_{C,1} = H_{C,1}$

(P7) Les homothéties de rapport non nul st des bijec° 4
$$H^{-1}_{C,\lambda} = H_{C,1/\lambda}$$

(P8) $\boxed{H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}}$ Thalès.

$H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda \vec{u}$.

DM $H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}}(A) = H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(C + \overrightarrow{CA} + \vec{u}) =$
$= C + \lambda(\overrightarrow{CA} + \vec{u}) = C + \lambda \overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}$
$= T_{\lambda\vec{u}}(C + \lambda \overrightarrow{CA}) = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}(A)$.



(D9) Une (ho) de rapport -1 est symétrie centrale & notée $S_C = H_{C,-1}$.

(P10) Une (ho) $H_{C,\lambda}$ est une $|\lambda|$-similitude

ie $H_{C,\lambda}(A) \cdot H_{C,\lambda}(B) = |\lambda| . AB$

cf une (ho) & isom ssi $\lambda = \pm 1$, ainsi les symboles st seules (ho) non triviales q st isométries.

DM
$$\overrightarrow{H_{C,\lambda}(A)\,H_{C,\lambda}(B)} = (C + \lambda\overrightarrow{CB}) - (C + \lambda\overrightarrow{CA}) = \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \lambda . \overrightarrow{AB}$$
$$H_{C,\lambda}(A)H_{C,\lambda}(B) = |\lambda|\, AB .$$

(P11) Toute similitude est la composi° d'une isométrie & d'une (ho).

DM
- T est 0-similitude ($\iff T(A) = B \leftarrow$ cte)
  $T = H_{B,0} \circ Id \leftarrow$ isométrie
- T est 1-similitude $\iff$ T est une isométrie.
  $T = Id \circ T = H_{C,1} \circ T \leftarrow$ isométrie.
- cg $\lambda \notin \{0,1\}$, T est λ similitude
  $T = H_{C,\lambda} \circ H_{C,1/\lambda} \circ T$
  $H_{C,\frac{1}{\lambda}} \circ T(A) . H_{C,\frac{1}{\lambda}} \circ T(B) = \frac{1}{\lambda} T(A)T(B) = \frac{1}{\lambda} \lambda AB = AB$.

(P12) Le centre (ho) non trivial est son uniq pt fixe, ie H est une (ho) non triviale et $H(C) = C$ alors C est Ω de (ho).

DM $H_{C,\lambda}(A) = A$, $(\lambda \neq 1)$

$\lambda = 0$ trivial d'après (P10).

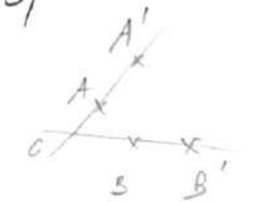
$$\overrightarrow{H_{C,\lambda}(C)\,H_{C,\lambda}(A)} = \lambda\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow A = C$$

(P13) si $\lambda \neq 1$, $A \neq C$ et $H_{C,\lambda}(A) = B \Rightarrow C \in (AB)$.

DM
$$H_{C,\lambda}(A) = B \iff C + \lambda\overrightarrow{CA} = B \iff (1-\lambda)C + \lambda A = B$$
$$\iff (1-\lambda \neq 0) \iff C = \frac{-\lambda}{1-\lambda}A + \frac{1}{1-\lambda}B$$
(!!) car Σ coeff $= 1$.
$$\iff C \in (AB)$$

[R7] si $H_{C,\lambda}(A) = A'$, $H_{C,\lambda}(B) = B'$

$(AA') \neq (BB') \Rightarrow C = (AA') \cap (BB')$



(P14) si $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2} \iff$ si $\lambda_1 = \lambda_2$ et $C_1 = C_2$.

DM $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2} \Rightarrow C_1$ et C_2 pts fixes de cette (ho) $\Rightarrow C_1 = C_2$.

$H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2}$ $\left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ cte $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$.

$$Id = H_{C,\frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{C,\lambda_1} = H_{C,\frac{1}{\lambda_1}} \circ H_{C,\lambda_2} = H_{C,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 .$$

(P15) Les (h) st affines.

DM $H_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est linéaire.

$H_{C,\lambda}(C+\vec{u}) = C + \lambda\vec{u} = C + H_\lambda(\vec{u})$

§ 6 : Droites

(D1) soit A, $\vec{u} \neq 0$, l'ens $D_{A,\vec{u}}$:

$D_{A,\vec{u}} = \{A + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une droite (affine)

(P2) L'appli $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} = T_{\lambda\vec{u}}(A)$ est une biject de $\mathbb{R}$ ds $D_{A,\vec{u}}$ appelée paramétrisat affine.

DM $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u}$ est surjective p définit.

soit $A + \lambda_1\vec{u} = A + \lambda_2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{A} + \lambda_1\vec{u} = \vec{A} + \lambda_2\vec{u}$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ injective.

(D3) Pr 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ & $\vec{v}$, on note $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (ssi) $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ $(\lambda \neq 0)$. On note $\vec{u} : \vec{v} := \lambda$

(P4) si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $D_{A,\vec{u}}$.

DM $D_{A,\vec{u}} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{A + t\lambda\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{A + s\vec{v} \mid s \in \mathbb{R}\} = D_{A,\vec{v}}$.

$\Rightarrow \vec{v}$ directeur aussi.

(P5) soit $A \neq B$ d'une droite D, alors $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

DM $D = D_{O,\vec{u}}$, $A, B \in D_{O,\vec{u}}$. $\boxed{Mq}$ $(AB) \parallel D_{O,\vec{u}}$.

$\begin{matrix} A = O + \lambda\vec{u} \\ B = O + \mu\vec{u} \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\mu - \lambda)\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}$.

$(A \neq B \Rightarrow \lambda \neq \mu \Rightarrow \mu - \lambda \neq 0)$.

(P6) $D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$ (ssi) $\vec{u} \parallel \vec{v}$ et $B \in D_{A,\vec{u}}$ (et/ou $A \in D_{B,\vec{v}}$)

Ainsi si u est vecteur directeur d'une droite, l'ens vectrs de m̂ droite est $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

DM $B \in D_{A,\vec{u}}$, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $B = A + \lambda\vec{u}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $D_{A,\vec{u}} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\lambda\vec{u}} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{B + (t - \lambda)\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + s\vec{u} \mid s \in \mathbb{R}\}$

$= D_{B,\vec{u}} \overset{\text{prop 4}}{=} D_{B,\vec{v}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

$D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}} \Rightarrow B \underset{\text{def}}{\in} D_{B,\vec{v}} = D_{A,\vec{u}}$.

soit $M \neq N \in D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$.

$\Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{MN} \parallel \vec{u} \\ \overrightarrow{MN} \parallel \vec{v} \end{matrix} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

(P7) si une droite contient une autre alors les 2 droites coïncident.

DM $D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$ soit $M \neq N \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$.
$\Rightarrow \vec{u} \parallel \overrightarrow{MN} \parallel \vec{v}$.

$A \in D_{A,\vec{u}} \subset D_{B,\vec{v}}$ + prop 6. $\Rightarrow D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$.

(P8) $\vec{u}$, D alors $\forall A$, on a $D = D_{A,\vec{u}}$.
cf si $A \neq B \in D$ alors $D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$.

(P9) Par 2 points passe une uniq droite.
cf si $\#(D_1 \cap D_2) > 1$ alors $D_1 = D_2$.

DM $A \neq B \in D \Rightarrow D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$ uniq.
$\#(D_1 \cap D_2) > 1 \Rightarrow \exists A \neq B \in D_1 = D_{A,\overrightarrow{AB}}$.
$\in D_2$
$\#$ ens := nbr élts ens.

(D10) L'uniq droite passant par 2 points distincts $A \neq B$ est noté (AB).

(P11) soit $A \neq B$ 2 pts distincts d'une droite D, alors D est l'ens des barycentres de A et B.

DM $M \in (AB) \iff M \in D_{A,\overrightarrow{AB}} \iff M = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}$
$\iff M = (1-\lambda)A + \lambda B$

(P12) $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une bijecθ de $\mathbb{R}$ ds (AB) appelée paramétrisaθ barycentriq.

DM $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ (bijcθ d'après 2).

(P13) L'image d'une droite p une applicaθ affine est une droite

DM T affine. $T((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)T(A) + \lambda T(B)$
$T((AB)) = \{(1-\lambda)T(A) + \lambda T(B) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
et si $\begin{cases} T(A) \neq T(B) & ; \ ((T(A)\,T(B))) \\ \text{si } T(A) = T(B) & ; \ \{T(A)\} \end{cases}$ barycentre lui-m̂

(D14) 2 droites st $\parallel$ si elles possèdent vecteurs directeur en commun (tous).

R9 $D_1 \parallel D_2$: relaθ équivalence | classes équivalences : direcθs
ens direcθs : espace projectif de dim 1.

(P16) $T_{\vec v}(D_{A,\vec u}) = D_{T_{\vec v}(A),\vec u}$.

DM $T_{\vec v}(A+\lambda\vec u) = A+\lambda\vec u+\vec v = (A+\vec v)+\lambda\vec u$.

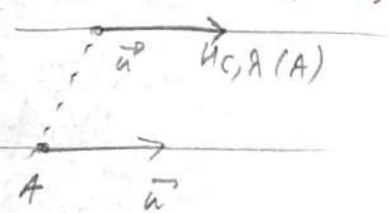
$T_{\vec v}(\{A+\lambda\vec u \mid \lambda\in\mathbb{R}\}) = \{(A+\vec v)+\lambda\vec u \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$
$= D_{A+\vec v,\vec u}$.

Rq Une droite est invariante p une translaθ $T_{\vec v}$ $\iff$ $\vec v$ est vecteur directr de droite.

$D_{A+\vec v,\vec u} = D_{A,\vec u} \iff \underbrace{A+\vec v}_{=B} \in D_{A,\vec u}$

$\vec v \parallel \vec u \iff \vec{AB} = \vec v$: directr de $D_{A,\vec u}$

(P17) $H_{C,\lambda}(D_{A,\vec u}) = D_{H_{C,\lambda}(A),\vec u}$



DM $H_{C,\lambda}(\{A+t\vec u\}) = \{H_{C,\lambda}(A+t\vec u)\}$
$= \{H_{C,\lambda}(A) + \lambda t\vec u\}$
$= D_{H_{C,\lambda}(A),\lambda\vec u} = D_{H_{C,\lambda}(A),\vec u}$.

cp L'image non nulle p hto d'une droite est une droite //. Thalès.

$D_{A,\vec u} = D_{H_{C,\lambda}(A),\vec u} \iff H_{C,\lambda}(A) \in D_{A,\vec u}$.

$\iff D_{A,\vec u} = (A\,H_{C,\lambda}(A)) \ni C$.

↳ Droite est invariante p (ht)o non nulle ssi un autre est sur une droite.

(P18) Étant donnée une droite D & un point A, $\exists$ uniq droite $\parallel$ à D passant par A.

DM $D = D_{B,\vec u}$: $D' \ni A$, $D' \parallel D_{B,\vec u} \to D' = D_{A,\vec u}$

(P19) 2 droites $\parallel$ st disjointes ou confondues.

DM $D \parallel D' \iff D\cap D' \neq \emptyset \Rightarrow \exists M \in D\cap D' \Rightarrow D = D' = D_{M,\vec u}$

(D20) Un vecteur $\neq 0$ est normal à D ssi il est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite. Deux droites st perpendiculaires si un (tout) vecteur directeur de l'une est un vctr normal pr l'autre.

(P21) Deux droites perpendiculaires à une 3° st $\parallel$s.

DM $D_{A,\vec u} \perp D_{B,\vec v}$, $\perp D_{C,\vec w}$ $\Rightarrow \vec v \perp \vec u \perp \vec w \iff \vec v \parallel \vec w \iff D_{B,\vec v} \parallel D_{C,\vec w}$

(P22) Étant donné droite D & point A, $\exists$ uniq droite perpendiculre à D passant par A.

Rq $\vec u(x,y)$; $\vec u^{\perp}(-y,x)$.

DM (P22) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{B,\vec{u}} \Rightarrow \mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp} \ni A$

et $\mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp} \perp \mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ & vice-versa :

$\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{D}' \Rightarrow \vec{u}^\perp$ direct^{r} de $\mathcal{D}'$

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{A,\vec{u}^\perp}$.

(P23) $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b) \neq (0,0)$.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

équa° cartésienne de cette droite.

DM soit $A(x_A, y_A) \in \{(ax+by=d\}$

$\iff a x_A + b y_A = d$.

$M \in \{ax+by=d\} \iff a x_M + b y_M = d$.

$\iff a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) = 0$.

$\iff (a,b) \perp (x_M - x_A, y_M - y_A)$.

soit $B = A + (-b,a)$.

$a(x_A - b) + b(y_A + a) = a x_A - ab + b y_A + ab = d$.

$\Rightarrow B \in \{ax+by=d\}$

$(-b,a) = \vec{AB} \perp (a,b) \Rightarrow \forall M, \vec{AM} \parallel \vec{AB}$ $(\perp(a,b))$

$M = A + \vec{AM} = A + \lambda \vec{AB} \in \mathcal{D}_{A,\vec{AB}} = (AB)$

$\Rightarrow \{ax+by=d\} \subset (AB)$

$M \in (AB) \Rightarrow M = A + \lambda \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{AB} \perp (a,b)$

$\iff M \in \{ax+by=d\}$.

Rq Nota°: $\{ax+by=d\} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=d\}$.

Prop 25. Deux droites $\{a_1 x + b_1 y = d_1\}$ et $\{a_2 x + b_2 y = d_2\}$ st égales (resp parallèles) ssi $(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$ resp $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$)

DM.

$\{a_1 x + b_1 y = d_1\}$ admt (a_1, b_1) vect$^{\text{e}}$ normal et $(-b_1, a_1)$ vct$^{\text{r}}$ direct$^{\text{r}}$ $\Rightarrow D_1 \parallel D_2$

$\Leftrightarrow (a_1, b_1) \parallel (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$

$(\lambda \neq 0)$

$(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2) \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda (a_1, b_1, d_1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\{a_2 x + b_2 y = d_2\}}_{D_2} = \underbrace{\{\cancel{\lambda} a_1 x + \cancel{\lambda} b_1 y = \cancel{\lambda} d_1\}}_{D_1}$$

Si $D_1 = D_2 \Rightarrow D_1 \parallel D_2$, $\exists \lambda \; (a_2, b_2) = \lambda (a_1, b_1)$

$$\Rightarrow D_2 = \{a_2 x + b_2 y = d_2\} = \{\lambda a_1 x + \lambda b_1 y = d_2\}$$

$$= \{a_1 x + b_1 y = \frac{d_2}{\lambda}\} = \underbrace{\{a_1 x + b_1 y = d_1\}}_{D_1}$$

$\Leftrightarrow d_2 = \lambda d_1 \Rightarrow (a_2, b_2, d_2) = \lambda (a_1, b_1, d_1)$

$\Rightarrow (a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$

D26 L'EC $ax + by = d$ est normalisée si $\|(a,b)\| = 1$.

P27 Tte droite possède ssté EC (ttes proportionnelles) dt exactement 2 st normalisées.

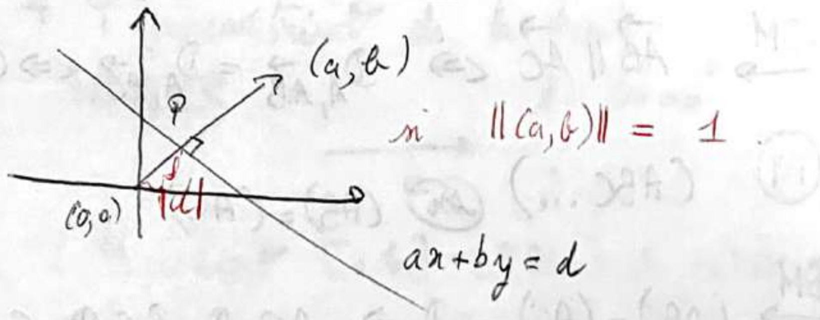
DM Toutes les EC $\{ax + by = d\}$ st de la forme $\{\lambda a x + \lambda b y = \lambda d\}$ d'après 25

$\Rightarrow \exists$ une ssté $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ mais une telle EC est normalisée ssi

$$\|\lambda (a,b)\| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|(a,b)\|} \Rightarrow \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

P28 Si a EC $ax + by = d$ normalisée de D

$\Rightarrow d(\Omega, D) = |d|$, d'où $\Omega(0,0)$



• $P(da, db)$ car $a\,da + b\,db = d(a^2+b^2) = d$! car normalisé

$\Rightarrow P \in \{ax+by=d\} = \mathcal{D}$

• $\vec{OP}(da, db) = d(a,b)$ normal à $\{ax+by=d\}$

$\Rightarrow (OP) \perp \mathcal{D}$, d'après le TD,

$d(O, \mathcal{D}) = OP = \|(da, db)\| = |d|$

$\boxed{\text{§ 7. Points Alignés}}$

D1 Des points sont a l g s'ils appartiennent à même droite. (On note : $\boxed{(ABC\ldots)}$ si les pts sont alignés.)

P3 3 pts distincts A, B, C sont alg ssi $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$.

DM $\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Leftrightarrow D_{A,\vec{AB}} = D_{A,\vec{AC}} \Leftrightarrow (AB) = (AC)$.

P4 $(ABC\ldots)$ ssi $(AB) = (AC)$

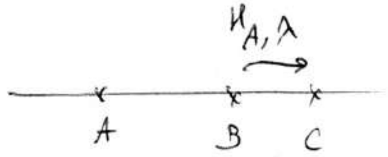
DM $(AB) = (AC) = \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D},\ B \in \mathcal{D},\ C \in \mathcal{D}$.

$A, B, C \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} = (AB)$ car $A \neq B$ $\Rightarrow (AB) = (AC)$

$\mathcal{D} = (AC)$ car $A \neq C$

P5 $(ABC\ldots) \Leftrightarrow C = H_{A,\lambda}(B)$ pr certain λ.

DM



$C = H_{A,\lambda}(B) \Rightarrow A \in (BC)$ car $B \neq C$

voir §5.

$(ABC\ldots)$ par hypo,

$\Rightarrow C \in (AB) = D_{A,\vec{AB}} \Rightarrow C = A + \lambda \vec{AB} \overset{def}{=} H_{A,\lambda}(B)$

P6 $(ABC\ldots) \Leftrightarrow$ l'un est un barycentre des 2 autres.

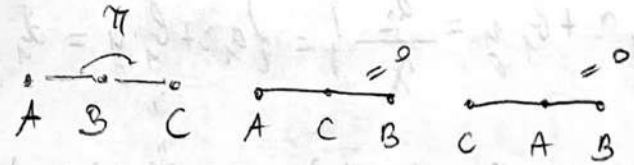
DM Conséquence directe de

$(AB) = \{$ens barycentres de A et $B\}$ voir §6.

$C \in AB \Leftrightarrow C$ barycentre de A et B.

P7 $(ABC\ldots) \Leftrightarrow \measuredangle ABC = 0 \pmod{\pi}$

$(ABC\ldots) \Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$.



$z_A - z_B$ affine de $\vec{BA}$, $z_C - z_B$ affine de $\vec{BC}$, $(ABC\ldots) \Leftrightarrow \vec{BA} = \lambda \vec{BC}\ (\lambda \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_B}{\quad}$

§ 8. Segments & Demi-droites

(P1) $\forall\, I \subset \mathbb{R}$, on a $\{A+\lambda\vec{AB} \mid \lambda \in I\} =$
$= \{(1-\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$ et on dit que
$\lambda \mapsto A + \lambda\vec{AB}$ est une paramétrisat° (affine)
et que $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une
paramétrisat° barycentriq de cet ens.

DM $\to$ $A + \lambda\vec{AB} = A + \lambda(B-A) = (1-\lambda)A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \longrightarrow D_{A,\vec{AB}} = (AB) = \{$ Barycentres de A et $B\}$.

$\varphi_{A,B} : \lambda \longmapsto A + \lambda\vec{AB} = (1-\lambda)A + \lambda B$ est une bijec°.

$\varphi_{A,B}|_I$ bijec° sur $\varphi_{A,B}(I) = \{A+\lambda\vec{AB} \mid \lambda \in I\}$
$= \{(1-\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$

$\boxed{\text{Rq}}$ $\varphi_{A,B}$ est affine de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$\varphi_{A,B}(\lambda a + \mu b) = \varphi_{A,B}(a)\lambda + \varphi_{A,B}(b)\mu$ si $(\lambda+\mu)=1$

$\varphi_{\vec{AB}} : \left.\begin{array}{l} \lambda \to \lambda\vec{AB} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$ linéaire et $\varphi_{\vec{AB}}$ "centré en A".

(D2) Un ens $[AB] := \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in [0,1]\}$
on dit segment fermé d'extrémités A et B.
$\forall\, C \in [AB]$, on dit que C est entre A et B.

(P3) $[AB] = [BA]$.

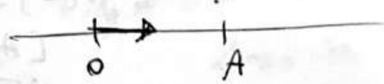
$$\overset{\shortparallel}{\{(1-\lambda)A + \lambda B\}} \quad \overset{\shortparallel}{\{(1-\mu)A + \mu A\}} \quad \longleftarrow \text{DM}$$

$\mu := 1-\lambda$

$\lambda \in [0,1] \iff \mu \in [0,1]$

(P4) $[AB] = [CD] \iff \{A,B\} = \{C,D\}$
ie un segment n'a que 2 extrémités.

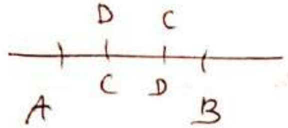
DM $\to$ $[AB] = [CD] \iff [a,b] = [c,d]$
↳ φ paramétrisat° de la droite.
$\varphi(x) = X$ $\quad A = O + a\vec{u}$



↳ la convent° $[a,b] := [b,a]$ si $a > b$
(ex $[2,1] := [1,2]$)

(P5) $[AB] \supset [CD] \iff \{C,D\} \in [A,B]$.

$\underrightarrow{\text{DM}}$



$[AB] \supset [CD] \iff [a,b] \supset [c,d]$

$\iff \{c,d\} \in [a,b]$

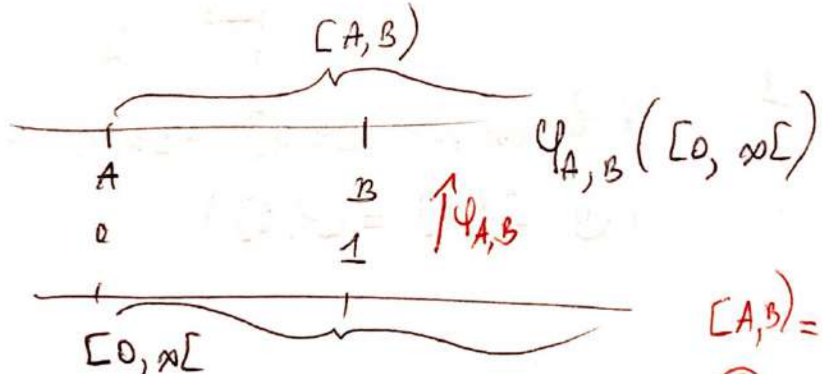
(D6) Un ens de la forme $]AB[= \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in]0,1[\}$ est dit segment ouvert. $\forall C \in]AB[$, on dit que C est strictement entre A et B.

(R7) Aussi $]AB]$ et $[AB[$.

Notat°s $[A,B]$ ← on pt ajouter virgule.

(D9) Un ens $[AB) = \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in [0,\infty[\}$ est demi-droite fermée d'extrémité A & de direct° $\vec{AB}$.

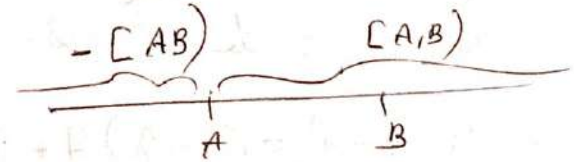
$\underrightarrow{\text{DM}}$



(D10) $]AB) = \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in]0,\infty[$ est demi-droite ouverte.

(D11) La demi-droite opposée à $[AB)$ est $-[AB)$

$-[AB) = \{A - \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in [0,\infty[$ et celle de $]AB)$ est $-]A,B) = \{A - \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in]0,\infty[$.

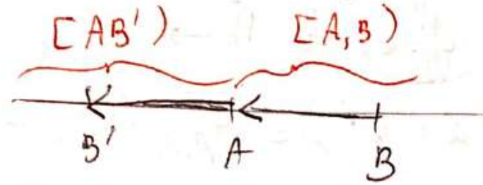


(P12) La $\frac{1}{2}$ d op est $\frac{1}{2}$d fermée de direct° $\vec{BA}$.

De plus $[AB) \cup -[AB) = (AB)$

et $[AB) \cap -[AB) = \{A\}$.

$\underrightarrow{\text{DM}}$ $\{A - \lambda\vec{AB} \mid \lambda \geq 0\} \overset{\circledast}{=} \underset{\overset{\|}{[A,B')}}{\{A + \lambda\vec{AB'} \mid \lambda \geq 0\}}$



où $B' = A + \vec{BA}$

$B' = A - \vec{AB}$

$= 2A - B$

$\circledast$ En effet $A + \lambda(B' - A) = A + \lambda(2A - B - A)$

$= A + \lambda(A - B) = A + \lambda\vec{BA} = A - \lambda\vec{AB}$

et comme $[AB')$ de direct° $\vec{AB'} = \vec{BA}$

$[A,B) = \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \geq 0\} \cup \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = \{A + \lambda\vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (AB)$

(9) $\{A - \lambda\vec{AB} \mid \lambda \leq 0\} = -[A,B)$

$[AB) \cap -[AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geqslant 0\} \cap$
$\cap \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \leqslant 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda = 0\} = \{A\}$

(P13) Le complémentaire $\frac{1}{2}$d fermé (resp ouvert) est $\frac{1}{2}$d ouverte (resp fermé) appelée la **demi-droite complémentaire**.

- DM $(AB) \setminus [AB) = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda \geqslant 0\}$
$= \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda < 0\} = \{A + \lambda \vec{AB} \mid \lambda > 0\}$
$=]AB')$

(P14) Pour tout $[AB) = [CD) \Leftrightarrow A = C$ et et $D \in [AB)$ (et/ou $B \in [C,D)$).

DM $\varphi_{A,B}([0,\infty[) = [A,B)$
$\varphi_{A,B}(c) = C$, $\varphi_{A,B}(d) = D$.

- convenθ : $[cd) = \begin{cases} [c,\infty[& \text{si } d > 0 \\ ]\infty, c] & \text{si } d < 0 \end{cases}$

$[A,B) = [C,D) \Leftrightarrow [0,\infty[= [c,d)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = A \\ D \in [AB) \end{cases}$

§ 9. Demi-plans

(D1) $\forall$ $(a,b) \neq (0,0)$ un **demi-plan ouvert** (resp **fermé**) est ens de la forme $\{ax + by > d\}$ (resp $\{ax + by \geqslant d\}$. On dit que la droite $\{ax + by = d\}$ **délimite** ces $\frac{1}{2}$-plans

$\boxed{\text{Rq}}$ 2 On pt remplacer $> \to \geqslant$ et $< \to \leqslant$.

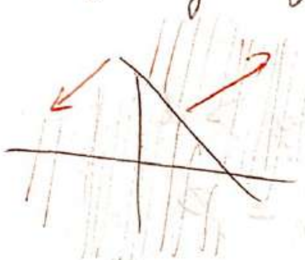
$ax + by > d \Leftrightarrow (-a)x + (-b)y < -d$

délimité par $\{ax + by = d\} = \{(-a)x + (-b)y = -d\}$

(P3) Une droite "coupe" un plan en $\frac{1}{2}$-plans, ie $\mathbb{R}^2 = \{ax + by > d\} \cup \{ax + by = d\} \cup \{ax + by < d\}$

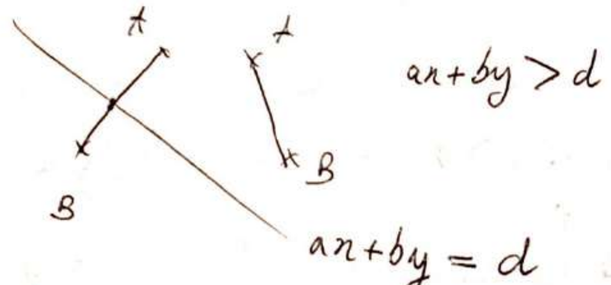
DM Evident, il reste à vérifier $\{ax + by < d\}$ est $\frac{1}{2}$ plan délimité par $\{ax + by = d\}$.

$\{ax + by < d\} = \{-ax + (-b)y > -d\}$ délimité par $\{-ax - by = -d\}$
$= \{ax + by = d\}$



(P4) soit $\mathcal{D} = \{ax+by=d\}$ et un point A : $A \in \{ax+by>d\}$ alors :

- $B \in \{ax+by>d\} \Leftrightarrow [AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$
- $B \in \{ax+by<d\} \Leftrightarrow [AB] \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$



DM

$\Rightarrow$ $B(x_B, y_B) \in \{ax+by>d\}$

(a) $\Leftrightarrow ax_B + by_B > d$ (+)

$A(x_A, y_A)$ tq $ax_A + by_A > d$

$a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B) > \cdot$

$\cdot = (\lambda + (1-\lambda))d = d$

$\Rightarrow \forall C \in [A,B]$ vérifie $ax+by>d$

$\Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\} = \emptyset$.

(b) si $B(x_B, y_B)$, $ax_B + by_B < d$.

Considérons $\Psi : \lambda \mapsto a((1-\lambda)x_A + \lambda x_B) + b((1-\lambda)y_A + \lambda y_B)$.

$[0,1] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned}\Psi(0) &= ax_A + by_A > d\\ \Psi(1) &= ax_B + by_B < d\end{aligned}\right\} \text{TVI} \Rightarrow \exists \lambda,\ \Psi(\lambda) = d.$$

car appli cont
car appli affine.

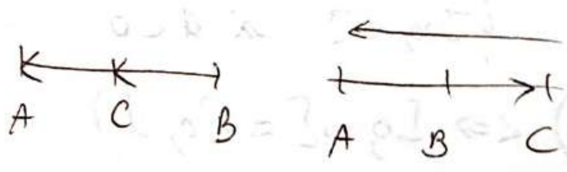
$\Rightarrow C = \lambda A + (1-\lambda)B$ vérifie $C \in [AB]$ ($]AB[$)

$ax_C + by_C = d \Rightarrow C \in \{ax+by=d\}$

$\Rightarrow [AB] \cap \{ax+by=d\}$

§10. Relations métriques

(P1) Soit $C \in (AB)$, alors $C \in [AB]$ (resp. $C \in]AB[$) ssi si $\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle \geq 0$ (resp. $\langle \vec{BC} | \vec{CA} \rangle > 0$).



DM : $C \in (AB)$ $\quad (A \neq B)$

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \iff \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\iff \overrightarrow{BC} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA} = (\lambda-1)\overrightarrow{AB}.$$

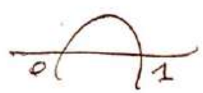
$$\overrightarrow{CA} = -\lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BC} = (\lambda-1)\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA}.$$

- $\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{CA} \rangle = \langle (1-\lambda)\overrightarrow{BA} \mid \lambda\overrightarrow{BA} \rangle$

$$= (1-\lambda)\lambda \underbrace{\|\overrightarrow{BA}\|^2}_{\geqslant 0}$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{CA} \rangle \geqslant 0 \iff (1-\lambda)\lambda \geqslant 0$$



$$\iff \lambda \in [0,1]$$

$$\iff C \in [AB].$$

-

DM $C \in (AB)$ $(A \neq B)$

$C = (1-\lambda)A + \lambda B \iff \vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

$\iff \vec{BC} = (1-\lambda)\vec{BA} = (\lambda-1)\vec{AB}$.

$\vec{CA} = -\lambda \vec{AB} = \lambda \vec{BA}$

$\vec{BC} = (\lambda-1)\vec{AB} = (1-\lambda)\vec{BA}$.

- $\langle \vec{BC} \mid \vec{CA} \rangle = \langle (1-\lambda)\vec{BA} \mid \lambda \vec{BA} \rangle$

$= (1-\lambda)\lambda \, \|\vec{BA}\|^2$

$\langle \vec{BC} \mid \vec{CA} \rangle \geq 0 \iff (1-\lambda)\lambda \geq 0$

$\iff \lambda \in [0,1]$

$\iff C \in [AB]$.

- P2 soit $A, B, C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

DM $AB^2 = \langle \vec{AB} \mid \vec{AB} \rangle = \langle \vec{AC} + \vec{CB} \mid \vec{AC} + \vec{CB} \rangle$

$= \langle \vec{AC} \mid \vec{AC} \rangle + \langle \vec{CB} + \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC} + \vec{CB} \rangle + \langle \vec{CB} + \vec{CB} \rangle$

$= AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

P3 Th Pythag Étant 3 pts dist[incts] A, B, C, droites AC & BC st perpendicul[ai]res ssi

$$AB^2 = CA^2 + CB^2.$$

DM D'après 2), $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ssi $\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle = 0$

$\stackrel{\text{def}}{\iff} (AC) \perp (CB)$.

P4 ($\triangle$ I) A, B, C dist[in]cts.

(i) $AB \leq BC + CA$.

(ii) $AB = BC + CA$ ssi $C \in [AB]$.

DM D'après ② $AB^2 = AC^2 + 2\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle + CB^2$

d'après Cauchy-Schwartz $\leq AC^2 + 2\, AC \cdot CB + CB^2 = (AC+CB)^2$

& "=" ssi $\vec{AC} \parallel \vec{CB}$ et $\langle \vec{AC} \mid \vec{CB} \rangle \geq 0$

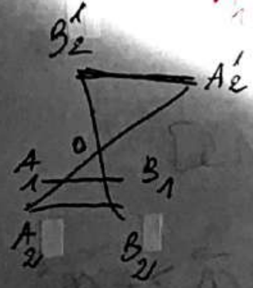
+ prop 1 $\iff C \in [AB]$

(P5) (Th Thalès) pts dtes A_1, A_2, B_1, B_2 et $\{O\} = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$ Alors on a l'équivalence $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2)$

$$\iff \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = \overline{OB_1} : \overline{OB_2}.$$

et si cette condiᵒ est vérifiée ns avons

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = \overline{OB_1} : \overline{OB_2}.$$



on note $\alpha := \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} \in \mathbb{R}^*$

$\beta := \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2} \in \mathbb{R}^*$

$(A_1B_1) \parallel (A_2B_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \overrightarrow{A_2B_2}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OB_2} - \lambda \overrightarrow{OA_2}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \overrightarrow{OA_2} - \alpha \overrightarrow{OA_2} = \lambda \overrightarrow{OB_2} - \beta \overrightarrow{OB_2}$

$\iff$ ______, $(\lambda - \alpha)\overrightarrow{OA_2} = (\lambda - \beta)\overrightarrow{OB_2}$ ($\overrightarrow{OA_2} \nparallel \overrightarrow{OB_2}$ libres)

$\iff$ ______, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda - \alpha = \lambda - \beta$.

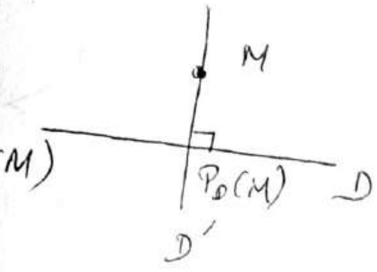
$\iff \alpha = \beta \ (= \lambda)$.

$\iff \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = \overline{OB_1} : \overline{OB_2} \ (= \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2})$

§ 11. Projection Orthogonale

(Déf) D droite, M point, $D' \perp D$ passant par M. On note $P_D(M) := D \cap D'$. L'applicatᵒ P_D ainsi définit est appelé la projectᵒ orthogonale sur D.

(P2) $P_D(M) = M \iff M \in D$.



DM $\quad M \in D \Rightarrow \begin{matrix} M \in D \\ M \in D' \end{matrix} \Rightarrow M \in P_D(M)$

$M = P_D(M) \ni D$.

(P3) $P_D(M) = P \iff P \in D$ et $\overrightarrow{MP}$ est nul ou vectʳ normal à D.

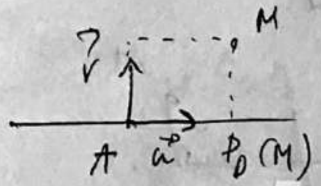
DM
- $M \in D \Rightarrow M = P_D(M) \iff \overrightarrow{MP_D(M)} = 0$
- $M \notin D \Rightarrow P_D(M) \ni D$, $\overrightarrow{MP_D}(M)$ normal à D (par déf)

si $P_D \in D$: $\overrightarrow{MP} \perp D$ alors

$P \in D' \Rightarrow P \in D \cap D'$

$\Rightarrow P = P_D(M)$.

(P4) soit $D_{A,\vec{u}}$ droite & $\vec{v}$ un de ses vect^rs normaux. Alors $P_D(A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = A+\lambda\vec{u}$.



DM : soit $P = A+\lambda\vec{u} \in D_{A,\vec{u}}$

$\Rightarrow \vec{MP} = (A+\lambda\vec{u}) - (A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})$
$= -\mu\vec{v} \perp D_{A,\vec{u}}$.

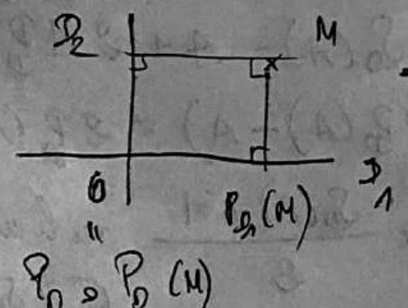
$M = A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

$P_D(A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = A+\lambda\vec{u}$

(P5) Les projections orthogonales sont des applications affines idempotentes, ie $P_D \circ P_D = P_D$.

DM $\underbrace{P_D \circ P_D(M)}_{\in D} = P_D(M)$ (P1) $\forall M \Rightarrow P_D \circ P_D = P_D$

(P6) si $D_1 \perp D_2$ sécantes en O alors $P_{D_1} \circ P_{D_2} = O = P_{D_2} \circ P_{D_1}$
où O applicat° de $A \mapsto O$, $\forall A$.



DM soit $M = O+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$
où $D_1 = D_{O,\vec{u}}$, $D_2 = D_{O,\vec{v}}$
$(D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v})$

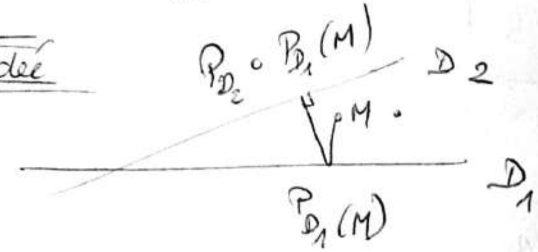
D'après (prop 4) : $P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) = \circ$

$\circ = P_{D_1} \circ \underbrace{P_{D_2}(O+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})}_{O+\mu\vec{v}} = O$

$\circ = P_{D_2} \circ \underbrace{P_{D_1}(O+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})}_{O+\lambda\vec{u}} = O$

(P7) La réciproque est vraie : si $D_1 \neq D_2$, P_{D_1} et P_{D_2} commutent ssi $D_1 \perp D_2$ ou $D_1 = D_2$.

DM idée



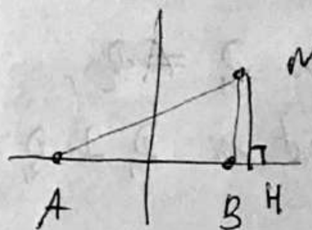
$\underbrace{P_{D_2} \circ P_{D_1}(M)}_{\in D_2 \setminus D_1} \neq O$, $P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) \in D_1$.

$\Rightarrow P_{D_1} \circ P_{D_2}(M) \neq P_{D_2} \circ P_{D_1}(M)$

§ 12. Médiatrices

(D1) soit pts $A \neq B$. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendic^{lr} à (AB) q. passe par milieu de $[AB]$.

(P2) $A \neq B$, l'ens $\{M \mid AM = BM\}$ est la médiatrice, et $\frac{1}{2}$ plans délim. p médi. st $\{M \mid AM > BM\}$ et $\{M \mid AM < BM\}$.



AM<MB ‖ AM>MB

AM = MB

$\mathcal{M}_{[AB]}$

DM soit $H := P_{(AB)}(M)$

par Pythagore, $AM^2 = AH^2 + HM^2$

$BM^2 = BH^2 + HM^2$

Ainsi $AM \gtreqless BM$ ssi

$AM^2 \gtreqless BM^2$ ssi

$AH^2 \lesseqgtr BH^2$ ssi

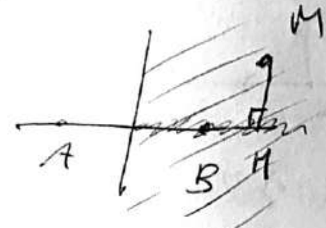
$AH \lesseqgtr BH$

ccl $AM = MB \iff P_{(AB)}(M)$ milieu de $[AB]$

$\iff M \in \mathcal{M}_{[AB]}$ médiat. de $[AB]$

$AM > MB \iff AH > HB$

$\iff M \in \frac{1}{2}$ plan de B.

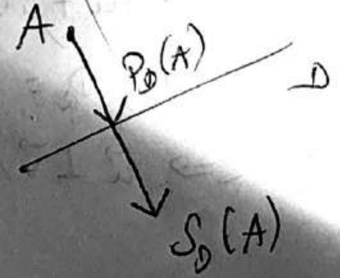


et inversement p. A.

§ 13. Symétries axiales

(D1) soit D droite, A point. On pose $S_D(A) := A + 2\overrightarrow{AP_D(A)}$. L'applicat° S_D ainsi déf est appelée symétrie axiale par rapport à D.

(P2) $S_D(A)$ est l'uniq point tq $P_D(A)$ soit le milieu de $[AS_D(A)]$



DM $S_D(A) = A + 2\overrightarrow{AP_D(A)}$

$= A + 2(P_D(A) - A) = 2P_D(A) - A$

$\iff P_D(A) = \dfrac{S_D(A) + A}{2}$ milieu de $[A, S_D(A)]$

(P3) Si $A \notin D$, $S_D(A)$ est l'uniq point tq D soit médiatrice de $[A S_D(A)]$.

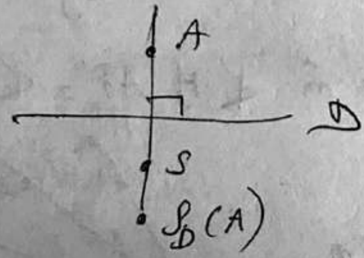
DM D'après 2), D passe par milieu de $P_D(A)$ de $[A, S_D(A)]$. De +, $D \perp (A\, P_D(A)) = (A\, S_D(A)) \Rightarrow$

$\Rightarrow D$ médiat. de $[A\, S_D(A)]$.

Vérifions l'unicité : Supposons D médiat. de $[A, S]$, $(AS) \perp D \perp (A S_D(A))$

$\Rightarrow A, S, S_D$ alignés sur D'.

$$\frac{A+S}{2} = D' \cap D = \frac{A + S_D(A)}{2}$$

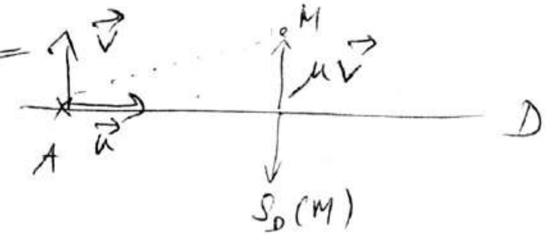


$\Rightarrow \underline{S = S_D(A)}$ $\square$

(P4) soit $D = D_{A,\vec{u}}$, $\vec{v}$ un de ses vct^rs normx.

Alors $S_D : A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mapsto A + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}$.

DM



$M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

$$S_{D_{A,\vec{u}}}(M) = M + 2 M P_D(M) = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + 2(A + \lambda \vec{u} - A - \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}) = A + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}$$

(P5) Les symétries axiales st des isométries affines q st l^re propre inverse. (de m̂ pr projecΘs)

DM $S(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}$ la symétrie linéaire par rapport à droite engendrée par $\langle \vec{u} \rangle$ est appli linéaire.

$S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = A + S(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})$

page 4

$\Downarrow$

appli affine

$$S_{D_{A,\vec{u}}} \circ S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = S_{D_{A,\vec{u}}}(A + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}) = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \forall \lambda, \vec{u}.$$

(P6) L'ens des points fixes de S_D est D.

i.e. $S_D(A)=A \iff A \in D$.

DM $S_{D_0,\vec u}(A) = S_{D_0,\vec u}(O+\lambda\vec u-\mu\vec v)$

$\| \qquad\qquad \|$

$O+\lambda\vec u+\mu\vec v \qquad O+\lambda\vec u+\mu\vec v$

si $\mu=-\mu$

si $\mu=0$

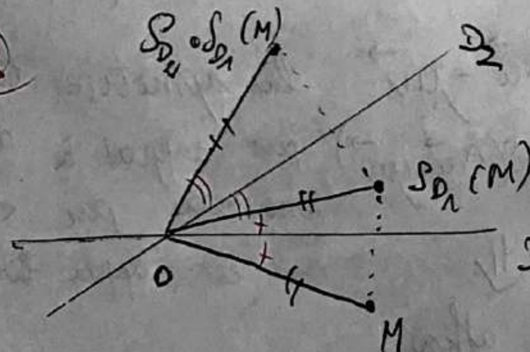
si $A\in D_{0,\vec u}=D$.

(P7) $D_1=D_2 \iff S_{D_1}=S_{D_2}$.

$\Rightarrow$ "évident"

$\Leftarrow$ si $S_{D_1}=S_{D_2}$ d'après (6), D_1 = "ens pts fixes" $=D_2$

(P8)



soit θ [π] l'angle orienté entre D_1 et D_2 sécants en O alors

$$S_{D_2}\circ S_{D_1} = R_{O,2\theta}$$

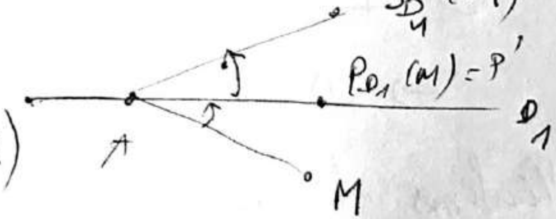
DM $OM = OS_{D_1}(M)$ car D_1 médiatrice de $(M\,S_D(M))$

De même, $OS_{D_1}(M) = OS_{D_2}\circ S_{D_1}(M)$

$\Rightarrow OM = OS_{D_2}\circ S_{D_1}(M)$.

$\sphericalangle MAP_{D_1}(M) =$

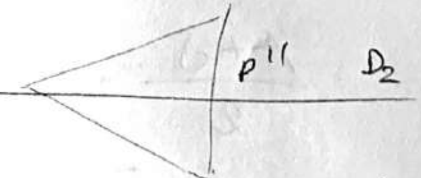
$= \sphericalangle P_{D_1}(M)AS_{D_1}(M)$



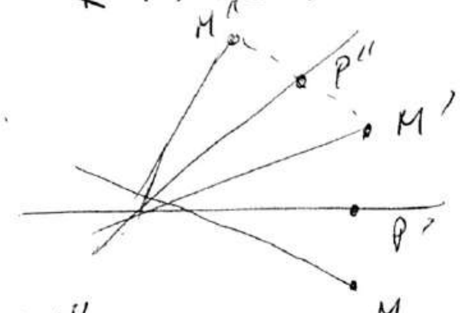
$\triangle AMP_{D_1}(M) = \triangle P_{D_1}(M)AS_{D_1}(M)$

car 3 côtés égaux

De m $\sphericalangle M'AP'' = \sphericalangle P''AM''$



Ainsi



$\sphericalangle MAM'' = \underbrace{\sphericalangle MAP' + \sphericalangle P'AM'} + \underbrace{\sphericalangle M'AP'' + \sphericalangle P''AM''}$

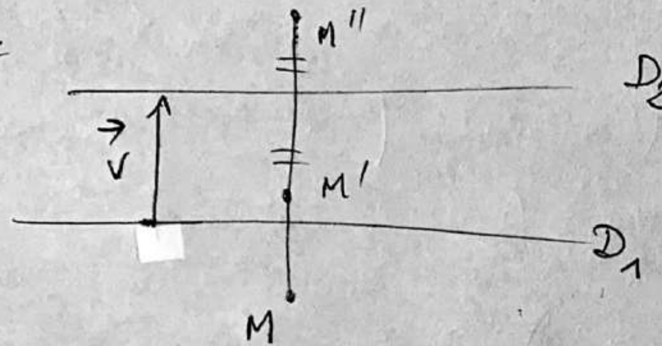
$= 2\,P'AM' + 2\,M'AP'' = 2\,P'AP''$

$= 2\sphericalangle(D_1,D_2)$.

(R9) soit $D_1 \parallel D_2$ & $D_2 = D_1 + \vec{v}$ où $\vec{v}$ est un vect^R normal aux 2 droites

$$\Longrightarrow S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{2\vec{v}}$$

DM



(R9) $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow \exists \vec{v} \perp D_1$ tq $D_2 = D_1 + \vec{v}$.

soit $O \in D_1$, $(\vec{u} \perp \vec{v})$

$$S_{D_2} \circ S_{D_1}(O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = S_{D_2}(O + \lambda\vec{u} - \mu\vec{v})$$

$$= S_{D_2}(O + \vec{v} + \lambda\vec{u} - (\mu+1)\vec{v})$$

$$= O + \vec{v} + \lambda\vec{u} + (\mu+1)\vec{v}$$

$$= O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + 2\vec{v} = M + 2\vec{v}.$$

§ 4. Cercles

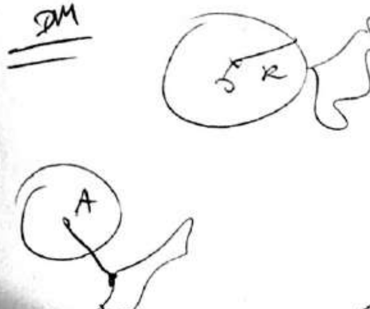
(D1) Point O, $R > 0$:

- ▷ $C(O,R) = \{A \mid OA = R\}$, le cercle de centre O & rayon R
- ▷ $D(O,R) = \{A \mid OA \leq R\}$, le disq fermé de centre O & R.
- ▷ $\{A \mid OA < R\}$, l'int cercle $C(O,R)$ → disq ouvert
- ▷ $\{A \mid OA > R\}$, l'ext cercle $C(O,R)$.

(D2) On dit ens est à l'int (resp à l'ext) d'un cercle s'il est contenu ds son intérieur (resp ext).

(P3) soit A point, X ens points $\Rightarrow d(A, X) \geq R$
(ou) X n'a pas de points à l'int $C(A,R)$.

DM



$$d(A, X) \geq R$$

$$\Leftrightarrow d(A, P) \geq R \quad \forall P \in X$$

$$\Leftrightarrow \forall P \in X,\ d(A,P) \notin R$$

$$\Leftrightarrow \forall P \in X,\ P \notin \text{intérieur } C(A,R)$$

(P4) 𝒞 cercle, A pt int à 𝒞 & B un pt ext à 𝒞 ⇒ $\mathcal{C} \cap \,]AB[\, \neq \emptyset$.

DM

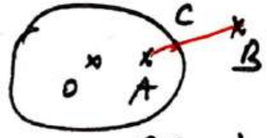
→ l'appli $f : \lambda \mapsto d((1-\lambda)A + \lambda B, O)$ est cont tq $f(0) = d(A,O) < R$

$f(1) = d(B,O) > R$, d'après TVI

$\exists\ \lambda_0 \in \,]0,1[$ tq $f(\lambda_0) = R$

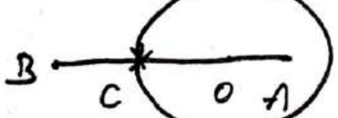
$\Rightarrow C := (1-\lambda_0)A + \lambda_0 B \in \,]A,B[$.

et $f(\lambda_0) = d(C,O) = R \Rightarrow C \in \mathcal{C}(O,R)$



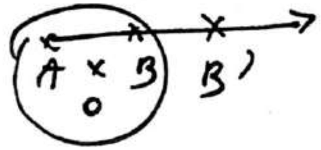
$\mathcal{C}(O,R)$

$C \in \,]A,B[\, \cap \mathcal{C} \Rightarrow \neq \emptyset$ ~~& p ailleurs on voit que f est monotone ⇒ λ_0 uniq~~



(P6) 𝒞, A pt int 𝒞, $\forall B \neq A$, $\mathcal{C} \cap \,]AB) \neq \emptyset$.

DM ĉ $[A,B)$ est non bornée ⇒ $[AB)$ n'est pas int du 𝒞 ⇒ $\exists B' \in [A,B)$ en dehors de 𝒞,



Ainsi d'après Prop 4, $]A,B'[\, \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

$]A,B'[\, \subset [AB)$

Rq 7 D'après P6, les $]AB)$ et $-]AB)$ rencontrent cercle 𝒞 ds au moins 1 pt chacune, & ĉ $]AB) \cap -]AB) = \emptyset$

⇒ il s'agit de 2 pts distincts de $(AB) \cap \mathcal{C}$.

& ĉ $(AB) \cap \mathcal{C} \leq 2$ ⇒ ds ce cas $= 2$, ainsi

$\#]AB) \cap \mathcal{C} = 1$. & p conseqt aussi si B ext

$\#]AB) \cap \mathcal{C} = 1$

(D8) Ds pts st **cocycliqs** s'ils ∈ à m̂ cercle

Rq 9 3 pts distincts st cocycliqs ⇔ ils ne st pas alignés.

§ (15) Courbes paramétrées.

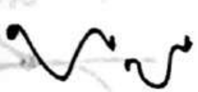
(D1) On appelle **courbe paramétrée**, ∀ appli $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où $I \subset \mathbb{R}$.

L'ens $\Gamma := \gamma(I)$ s'appelle le **support** de γ.

- ⚠ courbe $\gamma \neq$ support Γ.

support d'une courbe mais courbe = paramétrisat°.

point q le parcourt au cours du tps

-  possible.
- C^1, C^∞ analytiqs polynomiales.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ courbes complexes.

(D6) on dit $\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un **reparamétrage** de $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$, s'∃ difféomorphisme (de m̂ qualité γ_0) $\phi : J \to I$ tq $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$.

(P7) "est un reparamétrage" est rel° équivlce, dt les classes équivlces st **courbes géométriqs**, & le support d'une courbe géométriq est défini.

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_1 \circ \phi^{-1} \Rightarrow \text{"réflexive"}$$

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff \gamma_1 \sim \gamma_0.$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi_1,\ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi_2 \Rightarrow \gamma_2 = \gamma_0 \circ \underbrace{\phi_1 \circ \phi_2}_{\text{difféom } C^r}$$

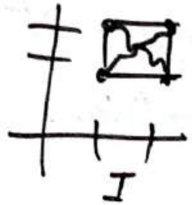
$$\gamma_1 \sim \gamma_0,\ \gamma_2 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_0 \Rightarrow \sim \text{ transitive.}$$

$[\gamma_0]$ est courbe géométriq

$\mathrm{Supp}[\gamma_0] := \mathrm{supp}\, \gamma_0 = \mathrm{supp}\, \gamma_1$ si $\gamma_0 \sim \gamma_1$

car $\mathrm{Im}\, \gamma_1 = \mathrm{Im}\, \gamma_0 \circ \phi$

Rq 8 qd limité ax reparamétrages croissants on parle de **courbes géométriqs orientées**.

J  I

ϕ : bijection car de $I \to J$ $\Rightarrow \phi$ monotone. } (*)

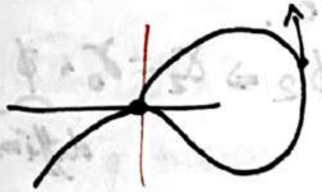
& aussi $\phi \nearrow \Rightarrow \phi^{-1} \nearrow$

$\phi_1, \phi_2 \nearrow \Rightarrow \phi_1 \circ \phi_2 \nearrow$

$\gamma_0 \sim \gamma_1 :\overset{\text{def}}{\iff} \gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$ & $\phi \nearrow$ difféo C^r

est aussi rel° équivlce & m̂ démo q ∞ + (*).

(D9) Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}_2$ est dite **régulière** en $t \in I$ si $\gamma(t) \neq 0$. Ds ce cas la droite passant p $\gamma(t)$ & de vect^{r} direct^{r} $\gamma'(t)$ est **tangente** de courbe. param. γ en t. si de +, γ injective on parle de tangente en $\gamma(t)$.



(D10) Une courbe $\gamma : J \to \mathbb{R}_2$ est dite **singulière** en $t \in J$ si elle n'y est pas régulière ie si $\gamma'(t) = 0$.

(D11) Une courbe est dite **régulière** si elle est régulière en tte valeur du param.

(P12) Nots de régularité & tangente st bien def pr courbes géométriqs.

1

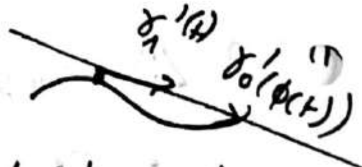
DM $\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t))$ & ϕ difféo $\Rightarrow \phi'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

$\gamma_1'(t) = \gamma_0'(\phi(t)).\,\phi'(t) \neq 0$.

$\Rightarrow$ 1) $\gamma_0' \neq 0$ partout $\Rightarrow \gamma_1'$ aussi

2) $\gamma_1'(t) \,//\, \gamma_0'(\phi(t))$ la tangte en t pr γ_1 est m̂ q elle de γ_0 en $\phi(t)$.

$(\gamma_1(t) = \gamma_0(\phi(t))$



R4 m̂ si la courbe n'a pas de tangente en t le support Γ pt avoir **tangente** en $\gamma(t)$.

on ne discute pas angles & branches ∞.

§ 16. Longueur courbe paramétrée

(D1) soit $I=[a,b]$ & $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ courbe C^1.
La longueur de γ est nbr positif

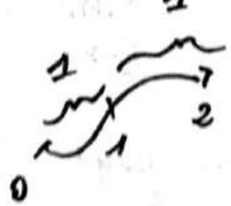
$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(D2) L'abscisse curviligne est f $s \mapsto \int_a^s \|\gamma'(t)\| \, dt$
q mesure distce parcourue entre départ a & s.

(D3) on dit courbe γ est paramétrée p (la) longueur d'arc (ou p l'abscisse curvilign) si $\forall t$ on a $\|\gamma'(t)\| = 1$.

→ si $\|\gamma'(t)\| = 1$

$$s \to \int_a^s \|\gamma'(t)\| \, dt = s - a.$$



(P4) Toute courbe régulière possède un reparamétrage p longueur d'arc.

DM soit $\varphi(s) := \int_a^s \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{>0} \, dt$ $\quad \varphi \nearrow$ ST

(*) & $\varphi'(s) = \underbrace{\|\gamma'(s)\|}_{\text{cont p composée}} \neq 0 \Rightarrow$ difféo C^1

dc $\varphi : I \mapsto [0, |\gamma|]$

on pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi^{-1} : [0,|\gamma|] \to \mathbb{R}^2$
↑ reparamétrisat de γ

$$\|\gamma_1'(t)\| = \underbrace{\|\gamma'(\varphi^{-1}(t))\|}\, |\varphi^{-1\prime}(t)|$$

$$\xrightarrow[s=\varphi^{-1}(t)]{(*)} \varphi'(\varphi^{-1}(t))$$

$$= |[\varphi \circ \varphi^{-1}(t)]'| = |t'| = 1$$

(P5) La longueur d'une courbe géométriq est bien déf car longueur d'une courbe est invariant p reparamétrage

DM $\underset{J}{[a_1,b_1]} \xrightarrow{\phi \text{ difféo}} [a,b] \xrightarrow{\gamma \text{ courbe}} \mathbb{R}^2$, $\quad I = [a,b]$

$$\gamma_1 = \gamma \circ \phi$$

on vt dmq $|\gamma_1| = |\gamma|$.

$$|\gamma_1| = \int_{a_1}^{b_1} \|\gamma'(\phi(t))\| \, |\phi'(t)| \, dt = \quad \text{CDV}$$

$$ds = \phi'(t)\, dt$$

CDV $s = \phi(t)$
$\phi(a_1) = a$, $\phi(b_1) = b$

$$= \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds = |\gamma|$$

(Rq) longueur support $\neq$ longueur courbe.

→ géodésiq $\quad$ dist $= \begin{pmatrix} \text{min des} \\ \text{arcs} \leftrightarrow p^{ts} \end{pmatrix}$.

↓

$\mathbb{R}^2$

courbure ?

← géodésiq cercle.

(Pp) si Φ est isométrie (resp λ-similitude) affine de $\mathbb{R}^2$ ⟹ 2 courbes γ, $\Phi \circ \gamma$: $I \to \mathbb{R}^2$ ont m̂ long^{r} (resp long^{rs} rapport λ)

$\circ\!\!\to \quad [a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2$

$$\|[\phi \circ \gamma]'(t)\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\phi(\gamma(t+a)) - \phi(\gamma(t))\|}{\varepsilon}$$

$\|$ ϕ - isométrie (translat° rotat°)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\gamma(t+a) - \gamma(t)\|}{\varepsilon} = \|\gamma'(t)\|$$

Par csqt $|\phi \circ \gamma| = \int_a^b \|(\phi \circ \gamma)'(t)\|$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\| = |\gamma|$$

(Rq) Ainsi longueur arc est invariant p rotat°, symétrie, symétrie, translat°.

§ 17. Arcs & lrs mesures

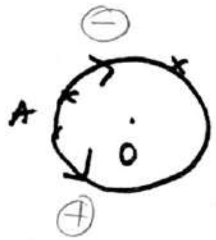
petit arc $\widehat{AB}^p$

(D1)

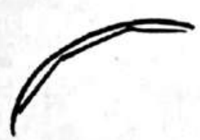
gd arc $\widehat{AB}^g = \widehat{AKB}$.

(D3) Un arc orienté

⊕ orienté ou ⊖ orienté

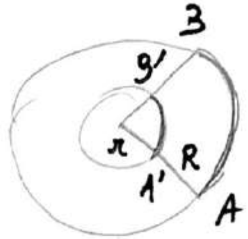


(Rq) la longueur $\ell(\widehat{AB})$ d'un arc de cercle $\widehat{AB}$ est longueur d'une courbe q la paramètre. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt le pas tend vers 0.

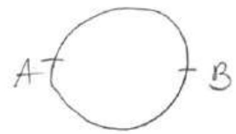


(D5) La mesure en rad arc $\widehat{AB}$ $\mathcal{C}(O,R)$ est long^r arc ÷ R rayon :

$$\widehat{AB} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R}.$$



$\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$. $\hat{m}$ mesure ici MS pas $\hat{m}$ long^r



$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$.

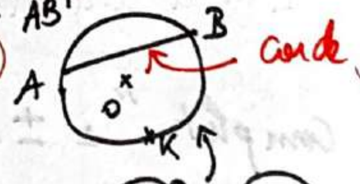
$\widehat{AB} = \pi$.

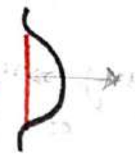
(D6) La mesure algébriq d'un arc est un nbr dt la vl^R abs. est mesure de l'arc & signe ⊕ (resp ⊖) si l'arc ⊕ (resp ⊖).

§ 17. Arcs & leurs mesures

petit arc $\widehat{AB}^p$

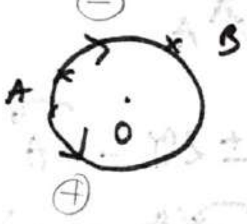
(D1)





grd arc $\widehat{AB}^g = \widehat{AKB}$.

(D3) Un arc orienté



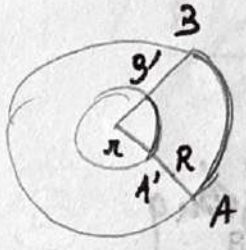
⊕ orienté ou ⊖ orienté

⊕ si sens inverse aig

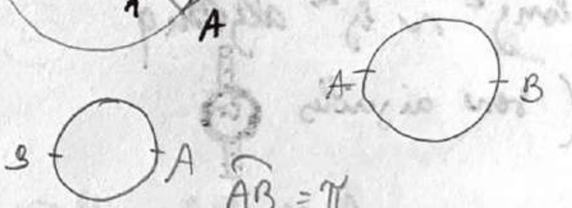
(Rq) la longueur $\ell(\widehat{AB})$ d'un arc de cercle $\widehat{AB}$ est longueur d'une courbe q la paramètre. C'est aussi limite longueur lignes brisées dt le pas tend vers 0.

(D5) La mesure en rad arc $\widehat{AB}$ $\mathcal{C}(O,R)$ est long^R arc ÷ ~~R~~ rayon :

$$\widehat{AB} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R}$$



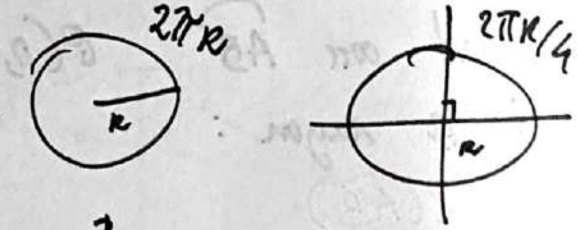
$\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$. m̂ mesure ici MS pas m̂ long^R



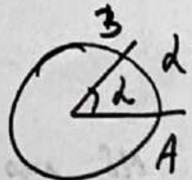
$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$

$\widehat{AB} = \pi$

(D6) La mesure algébriq d'un arc est un nbr dt la vl^R abs. est mesure de l'arc & signe ⊕ (resp ⊖) si l'arc ⊕ (resp ⊖).

R$\emptyset$  $2\pi R/4 = \frac{\pi}{2}R = \ell(AB)$'

$$\frac{\ell(AB)}{R} = \frac{\pi}{2}$$

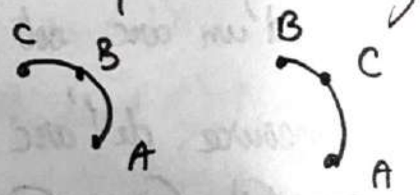


$\alpha R = \ell(AB)$

Rq abus dℓ^g, long^r ~ lg^r algébriq

$\widehat{AB} = -\pi$ (sens aiguilles 

⇒ R̆ Chasles des mesures algébriqs.



$\widehat{AB} + \widehat{BC} = AC \quad [2\pi]$

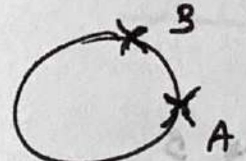
conséq RDC p les intégrales :

$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ def p intégrales & le R ont m̂

$\tilde{\ell}(\widehat{AB}) + \tilde{\ell}(\widehat{BC}) = \tilde{\ell}(\widehat{AC})$

(P9) Petit & gd arc ⇒ m̂ corde : ont m̂ mesure algébrq [mod 2π].

$\overset{\curvearrowright}{AB}^{p} + \overset{\curvearrowright}{BA}^{g}$ = "tour complet" $= \pm 2\pi$



car (périmètre $= 2\pi R$).

$\overset{\curvearrowright}{AB}^{p} = \pm 2\pi - \overset{\curvearrowright}{BA}^{g} = \overset{\curvearrowright}{AB}^{g} \pm 2\pi$

$\overset{\curvearrowright}{AB}^{p} = \overset{\curvearrowright}{AB}^{g} \ (2\pi)$

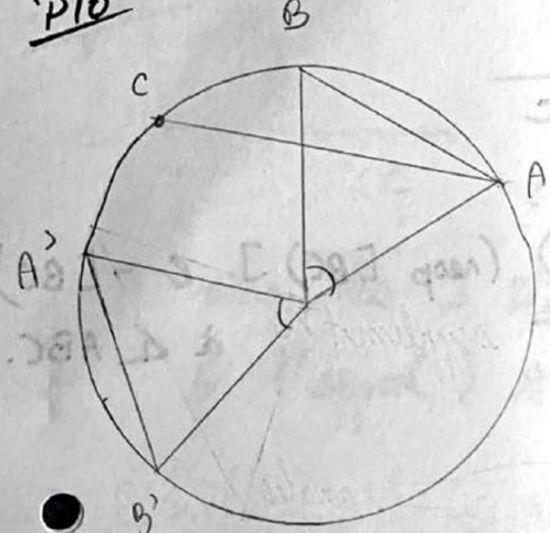
(P10) soit [AB] & [CD] 2 cordes ont m̂ cercle. Alors si on note $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ les 2 petits (resp. grds) arcs ; on a

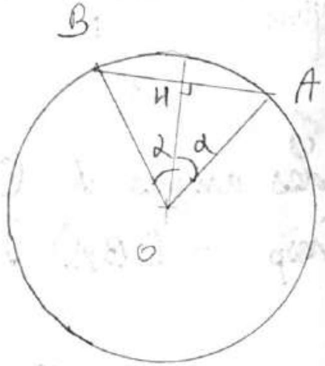
→ $AB = CD \iff \widehat{AB} = \widehat{CD}$

→ $AB > CD \iff \widehat{AB} > \widehat{CD}$ (resp <)

P10

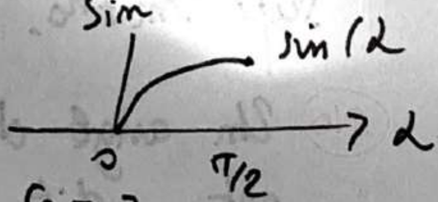
+ grd angle ↗ ⇒ + petit arc ↗





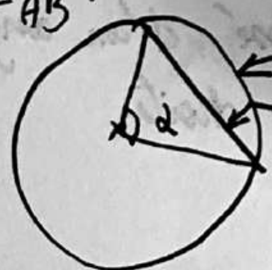
- $\measuredangle AOB \quad (\leq \pi) \Leftrightarrow \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} HA &= R.\sin(\alpha) \\ AB &= 2R\sin(\alpha) \\ \ell(\widehat{AB}) &= R2\alpha \end{aligned}}\right\} \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$



- Ainsi du fait sin ↗ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

In $\overset{\frown}{AB}^{q} = 2\pi - \overset{\frown}{AB}^{p}$

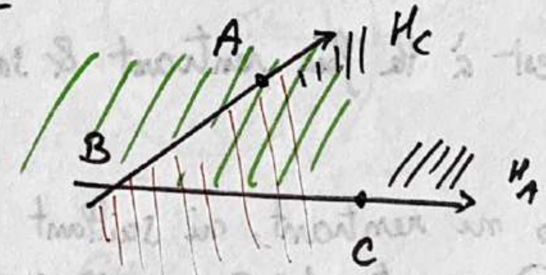


§18. Angles.

//// ∩ \\\\ = $\widehat{ABC}$.

angle saillant convexe

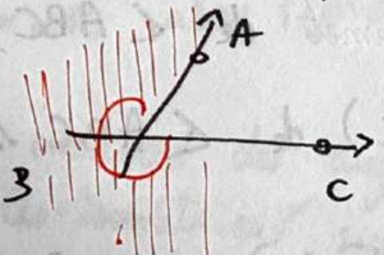
soit



(D1) L'angle saillant $\measuredangle ABC := H_A \cap H_C$

→ Un angle est secteur angulaire, noté $\widehat{ABC}$.

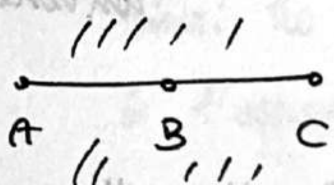
(D3) Complément d'un angle saillant est angle rentrant (pas convexe).



⚠ on use pas au collège angle complémentaire

(D5) qd B ∈ [AB], ∡ ABC

Un angle plat est à la fois rentrant & saillant.

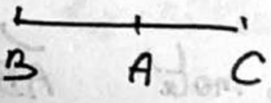


→ ni rentrant, ni saillant

→ rentrant & saillant

→ plat

~~(D6)~~



Si [BA] = [BC]

l'angle saillant

∡ ABC = [BA) = [BC)

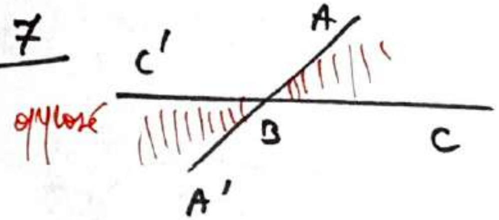
appelé angle nul.

(D6) Le pt B est sommet de ∡ ABC ;

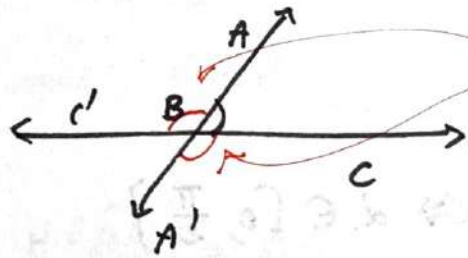
[BA) & [BC) de ∡ ABC son ses côtés.

(D7) L'angle de −[BA) & −[BC) est l'angle opposé à ∡ ABC.

Ref 7



(D8) Les angles de [BA) (resp [BC)] & −[BC) (resp −[BA)) st supplém^tres à ∡ ABC.



angles supplémentaires =)

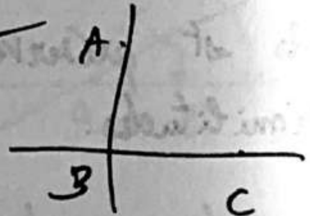
(a si supplém^tres à ∡ A'BC'

(R9) Deux droites sécantes coupent le plan en 4 angles, 2 à 2 opposés & 2 à 2 supplém^tres.

(D10) Un angle dt les 2 côtés st perpend^res est dit droit.

(P11) Le supplt^r & l'opposé d'un angle droit st des angles droits.

Rq 11



$\widehat{ABC}$ droit $\iff \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

$\iff \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$

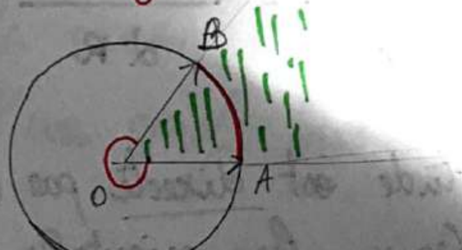
$\iff \langle \pm\overrightarrow{BA}, \pm\overrightarrow{BC} \rangle = 0$

ainsi les 3 autres angles (les 2 suppl^tRs & l'opposé) sont aussi droit.

• D12 Un angle orienté est un angle dont un des côtés "début" & l'autre "fin".

§ 19. Mesures d'angles

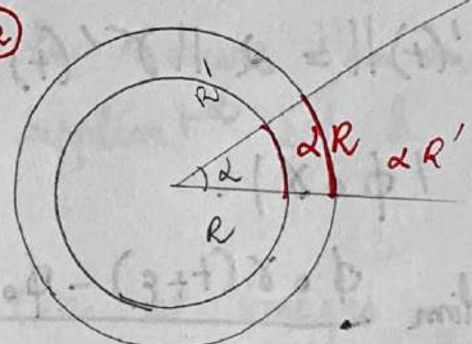
D1



• Ainsi le petit arc est éclairé p angle saillant

grd angle rentrant.

D2



. Mesure d'un angle est la mesure (resp mesure algébriq) d'un arc qu'il éclaire au centre.

P3 Cette D2 ne dépend pas cercle choisi.

soit $H = H_{O, \frac{R'}{R}}$ $H(A) = A'$ $H(B) = B'$ $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

$H(\widehat{AB}) = \widehat{A'B'}$

$\Rightarrow \ell(\widehat{AB}) \cdot \frac{R'}{R} = \ell(\widehat{A'B'})$

$\Rightarrow$ si $\widehat{AB} = \alpha R$ alors $\ell(\widehat{A'B'}) = \alpha R \frac{R'}{R} = \alpha R'$

P5 Les mesures des angles sont préservées p les isométries / similitudes.

Retour P § 16.7 $\gamma \xrightarrow[\text{d-simil}]{\phi} \phi \cdot \gamma$

$|\gamma| = \int_I \|\gamma'(t)\|$; $|\phi \cdot \gamma| = \int_I \|(\phi \cdot \gamma)'(t)\|$

On va mq $\|(\phi\cdot\gamma)'(t)\| = \alpha\,\|\gamma'(t)\|$

$$\Rightarrow |\gamma|\,\alpha = |\phi\circ\gamma|.$$

DM $\|\phi\circ\gamma'(t)\| = \left\| \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\phi\circ\gamma(t+\varepsilon) - \phi\circ\gamma(t)}{\varepsilon} \right\|$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|\phi\circ\gamma(t+\varepsilon) - \phi\circ\gamma(t)\|}{|\varepsilon|}$$

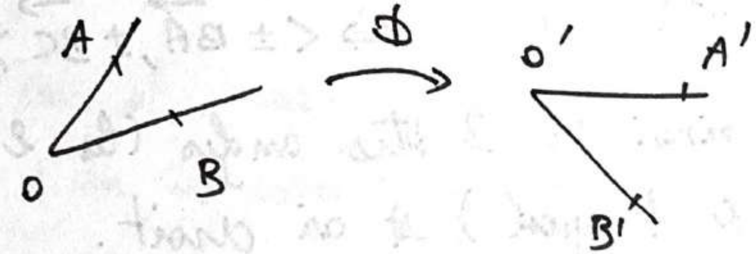
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\alpha|\,\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|}{|\varepsilon|}$$

$$= \alpha \left\| \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\gamma(t+\varepsilon)-\gamma(t)}{\varepsilon} \right\| = \alpha\,\|\gamma'(t)\|$$

□

§16 P7 si Φ isométrie (resp α-similitude) affine de $\mathbb{R}^2$ alors courbes, γ, $\Phi\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ont m̂ long^R (resp. long^R rapport α).

P5 Les mesures des angles st préservées p les isométries / similitudes.



$\phi(A) = A'$
$\phi(O) = O'$ $\Rightarrow \ell(\widehat{AB}) = \alpha\,\ell(\widehat{A'B'})$
$\phi(B) = B'$

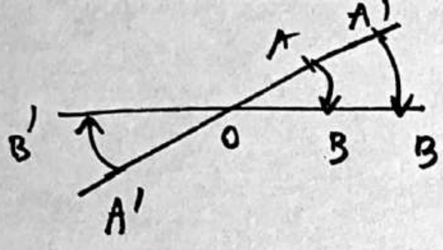
$$\alpha\, OB = \alpha R = R' = \alpha\, OB'$$

$$\Rightarrow \measuredangle AOB = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R} = \frac{\alpha\,\ell(\widehat{AB})}{\alpha R} = \frac{\ell(\widehat{A'B'})}{R'} = \measuredangle A'O'B'$$

Une isométrie / similitude est <u>directe</u> par def si elle préserve les orientat°s & <u>indirecte</u> sinon.

@ → translat°s st directes
→ rotat°s directes
→ symétries centrales = rota° π
→ homothétie $H_{O,-1}$ directes

symétrie axiales indirectes.



$H_{O,-1}$ direct

(P6) Un angle est égal à son opposé,
ie m̂ mesure orientée.

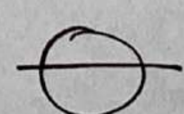
car l'angle opposé est l'image de l'angle par symétrie centrale (isom. directe)
de centre de sommet de l'angle

(P7) La mesure d'un angle droit $\frac{\pi}{2}$ & d'un angle plat est π.

DM

1) Un angle plat a la m̂ mesure que son opposé & la somme des 2 est 2π

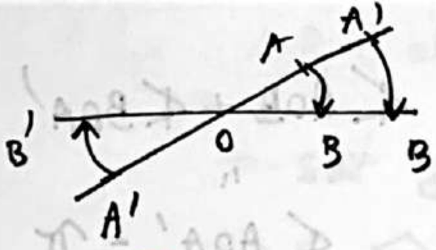
$\Rightarrow$ mesure π



2) la mesure d'un angle droit & de son supplément est la m̂

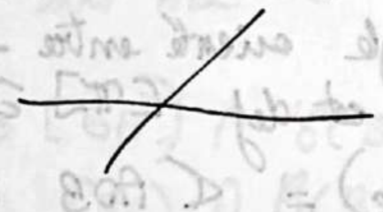
(car st images p la symétrie d'axe d'un des côtés) & leur somme est π

$\Rightarrow \measuredangle$ droit $= \frac{\pi}{2}$.



Ho_{i}^{-1} direct

(P6) Un angle est égal à son opposé, ie m̂ mesure orienté.

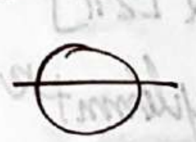


car l'angle opposé est l'image de l'angle par symétrie centrale (isom. directe) de centre de sommt de l'angle

(P7) La mesure d'un angle droit $\frac{\pi}{2}$ & d'un angle plat est π.

$\overline{DM}$ 1) Un angle plat à la m̂ mesure que son opposé & la somme des 2 est 2π

$\Rightarrow$ mesure π



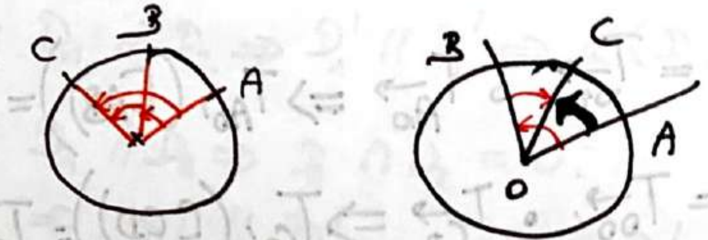
2) la mesure d'un angle droit & de son supplémt^re est la m̂

(car st images p la symétrie d'axe d'un des cotés) & 1^{re} somme est π

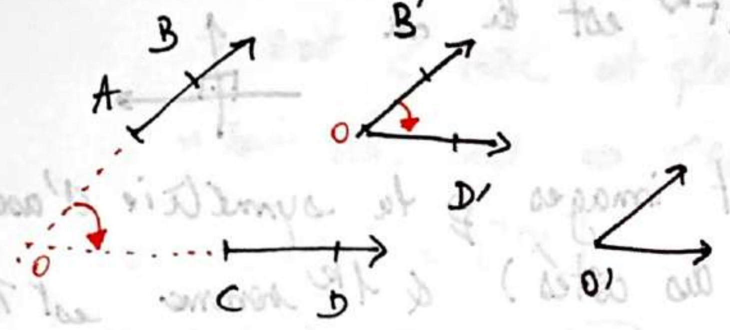
$\Rightarrow \measuredangle$ droit $= \frac{\pi}{2}$.

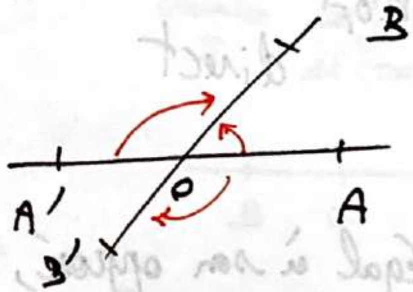
Abus de Notaº $\longleftrightarrow$ mesure & mesure orientée.

° $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ $[2\pi]$ Relº Chasles



(D10) La mesure d'angle (orienté ou pas) $\measuredangle([AB), [CD))$ entre 2 $\frac{1}{2}$ droites est la mesure (orienté ou pas) de l'angle $\measuredangle B'OD'$ où $T_{\overrightarrow{AO}}([AB)) = [OB')$ & $T_{\overrightarrow{CO}}([CD)) = [OD')$





$\measuredangle AOB + \measuredangle BOA'$
$=$
$\measuredangle AOA' = \pi$

$\measuredangle AOB = \pi - \measuredangle BOA'$

$\measuredangle AOB = \pi + \measuredangle A'OB$

(P11) (D10) ne dépd pas choix de O & les mesures d'angles orientés entre $\frac{1}{2}$-droites respecte la règle de Chasles.

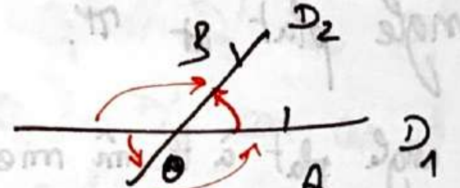
$$T_{\overrightarrow{AO'}} = T_{\overrightarrow{OO'}} \circ T_{\overrightarrow{AO}} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AO'}}\left([AB]\right) = T_{\overrightarrow{OO'}}\left([OB')\right)$$

$$T_{\overrightarrow{CO'}} = T_{\overrightarrow{OO'}} \circ T_{\overrightarrow{CO}} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CO'}}\left([CD)\right) = T_{\overrightarrow{OO'}}\left([OD')\right)$$

et comme $T_{\overrightarrow{OO'}}(\measuredangle BOD') = \measuredangle BOD'$

(P12) Si la mesure orientée d'un angle est α $[2\pi]$ la mesure orientée de son angle supplémentaire est $\alpha - \pi$ $[2\pi]$. Ainsi un angle & son supplt ont la m̂ mesure algébriq $[\pi]$.

(D13) La mesure d'angle orienté entre 2 droites sécantes est déf $[\pi]$ ĉ suit $\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle AOB$ $[\pi]$ si $D_1 = (OA)$, $D_2 = (OB)$. La mesure d'angle orienté $\leftrightarrow$ 2 droites // (confondues ou pas) est 0 $[\pi]$.



$$\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle AOB \; [\pi].$$

droites non orientés

orientés

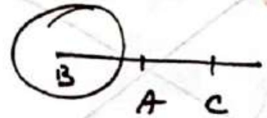
(P15) A, B, C alignés $\Longleftrightarrow$ $\measuredangle ABC = 0\ [\pi]$

→ soit $\measuredangle ABC$ est plat $\Rightarrow \measuredangle ABC = \pi$.

→ soit $\widehat{ABC}$ nul $\Rightarrow \measuredangle ABC = 0 \Rightarrow 0\ [\pi]$

si $\measuredangle ABC = 0\ [\pi]$

– soit $\widehat{ABC} = 0$



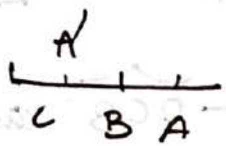
$\Rightarrow [BA) \cap \mathcal{C}(B,R) = A'$

$[BC) \cap \mathcal{C}(B,R) = C'$

$\Rightarrow \widehat{A'C'} = 0 \Rightarrow A' \equiv C'$

$\Rightarrow [BA) = [BA') \equiv [BC') \equiv [BC)$

– soit $\widehat{ABC} = \pi$

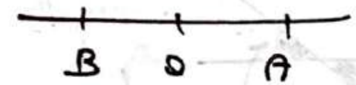


$\widehat{ABA'} = \pi \overset{\text{chasles}}{\Longrightarrow} \widehat{A'BC} = 0\ [2\pi]$

$\Rightarrow A', B, C$ alignés

$\Rightarrow A, B, C$ alignés

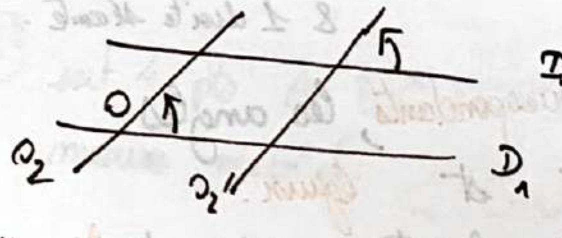
(R4) 16 · droites confondues peut ê considérées ĉ sécantes.



(P17)

si $D_1 \parallel D_1'$ & $D_2 \parallel D_2'$

$\Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle(D_1', D_2')$.



$\measuredangle(D_1', D_2')$

cas 1) si $D_1 \parallel D_2 \Rightarrow D_1' \parallel D_2' \Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = 0$

cas 2) si $D_1 \not\parallel D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 = O$.

$\Rightarrow D_1' \not\parallel D_2' \Rightarrow D_1' \cap D_2' = O'$

$\Rightarrow T_{\vec{OO'}}(D_1) = D_1'$ car ces 2 droites st $\parallel$ à D_1 & contiennent O'.

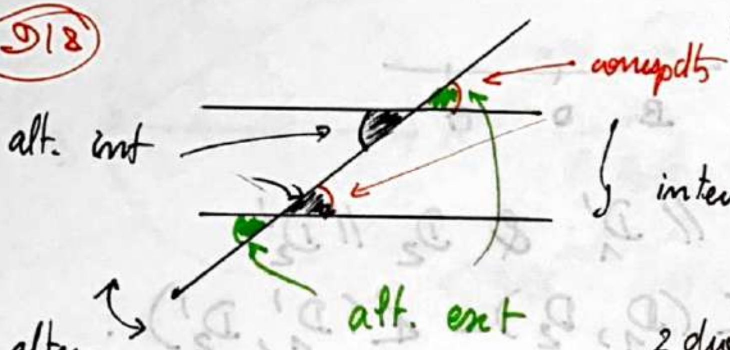
De m̂ $T_{\vec{OO'}}(D_2) = D_2'$

→ comme les isométries directes (ep les translations) préservent les angles orientés.

$\Rightarrow \measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle(D_1', D_2')$

(orientés.

D18

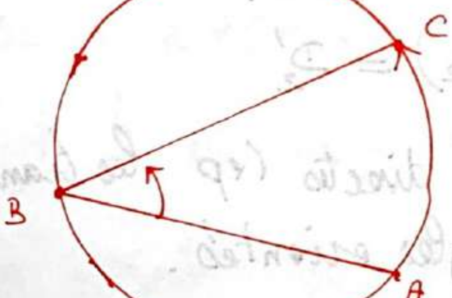


2 droites //
& 1 droite sécante.

P19 Les angles correspondants, les angles alt. int, ext et égaux.
La somme de 2 autres angles est π.
(Réciproq vraie).

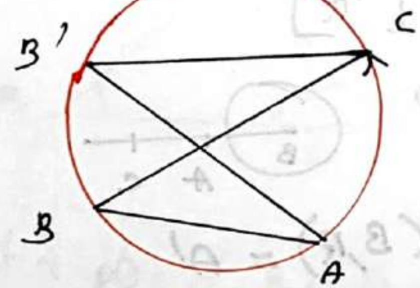
D20 A, B, C pts cercle $\mathcal{C}$. On dit que l'angle orienté $\measuredangle ABC$ est inscrit ds le $\mathcal{C}$ & qu'il éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC}$.

angle central si B=O.

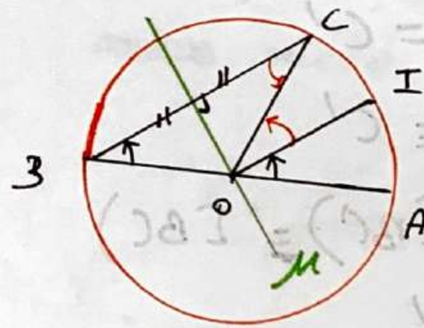


P21 soit un angle orienté inscrit $\measuredangle ABC$ qui éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\widehat{AC}}$$



P21



DM si [AB] diamètre, $OI \parallel BC$, $O \frac{1}{2}$ [AB]

$\measuredangle AOI = \measuredangle OBC$ (correspdts)

$\measuredangle IOC = \measuredangle BCO$ (alt. int

$\measuredangle OBC = -\widehat{OCB}$ car image p symétrie de μ = médiatrice de [BC] $\ni O$ $(OB = OC = R)$

isométrie indirecte.

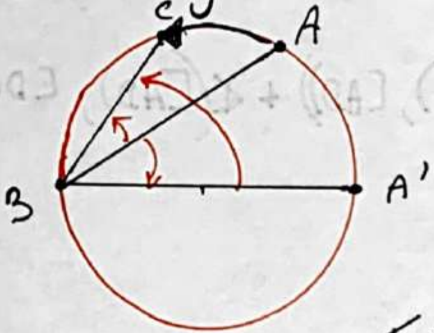
Ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{AOI} = \widehat{IOC}$

et $\widehat{AOI} + \widehat{IOC} = \widehat{AOC} = \widehat{AC}$.

$\widehat{ABC} + \widehat{ABC} = \widehat{AC}$

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}}$$

Ds cas général:



soit [BA'] diamètre

$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$

$\widehat{A'BA} = \frac{1}{2}\widehat{A'A}$

Chasles

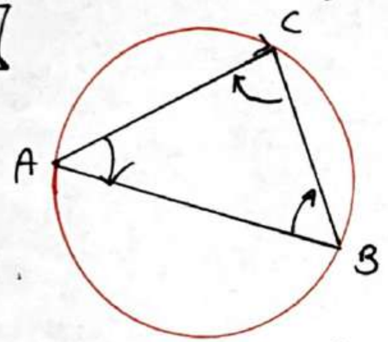
$\measuredangle ABC = \widehat{ABA'} + \widehat{A'BC}$

$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{\widehat{AA'} + \widehat{A'C}}_{\widehat{AC}}\big)$

P22

La somme des angles ds un triangle est π.

MI



on considère le cercle circonscrit de ΔABC.

- Pr les angles orientés (ds le m̂ sens) on a l'égalité

$= \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$

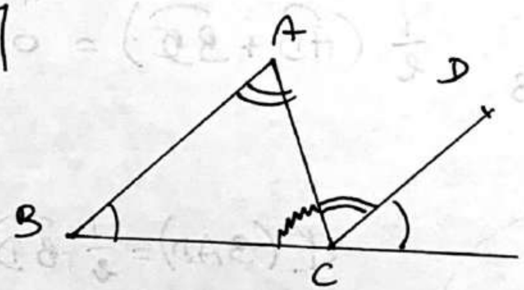
$= \frac{1}{2}\widehat{AC} + \frac{1}{2}\widehat{BA} + \frac{1}{2}\widehat{CB}$

$= \frac{1}{2}$ tour complet $= \frac{1}{2}(\pm 2\pi) = \pm\pi$.

$\Rightarrow$ l'égalité des angles non orientés.

$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \pi$.

MI



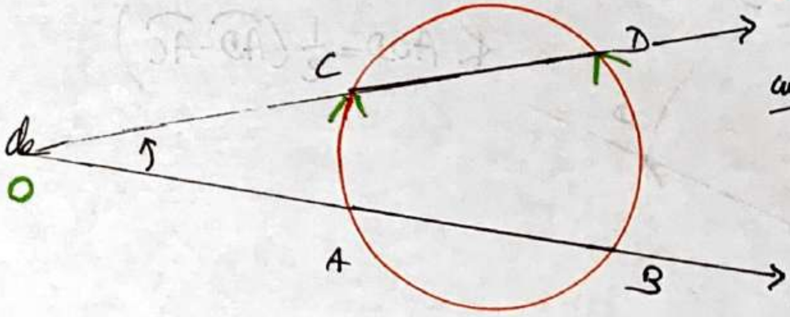
$\Rightarrow \S + \frown + \cap = \pi$

(prop)

CD // AB.

P24

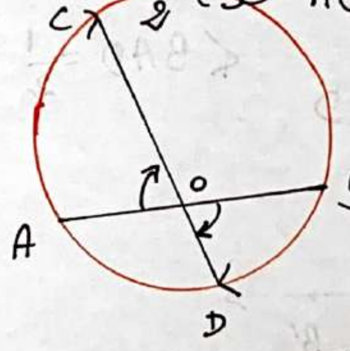
soit 4 pts A, B, C, D d'un cercle $\mathscr{C}$. Entre mesures orientés: $\measuredangle([AB), [CD)) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$



cas 1 Conséquences

$\measuredangle BOD = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$ (non orienté).

se coupe à l'int

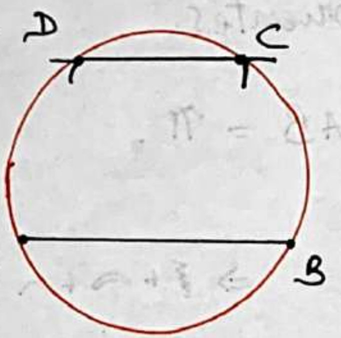


$\measuredangle AOC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$

non-orienté.

cas 2

cas 3



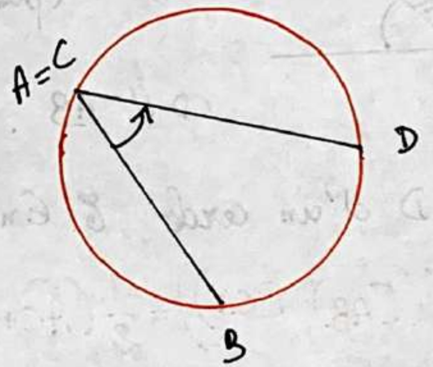
$\widehat{AD} = \widehat{CB}$

$\measuredangle([AB),[CD)) = 0$

$\frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 0$

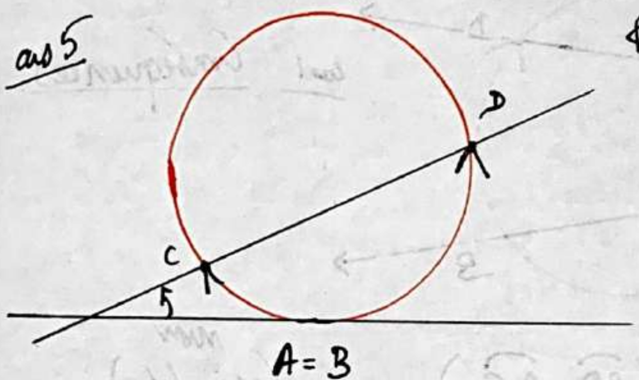
cas 4

se coupent sur le cercle.



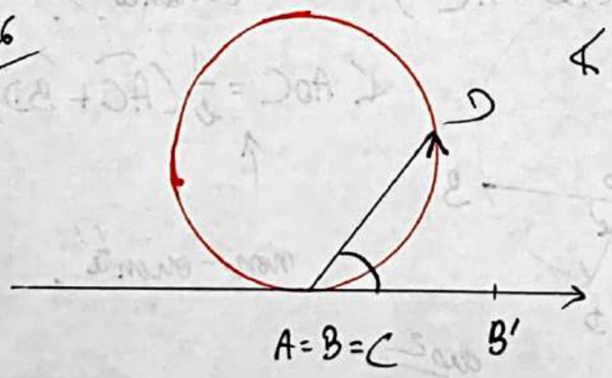
$\measuredangle(BAD) = \frac{1}{2}\widehat{BD}$.

cas 5



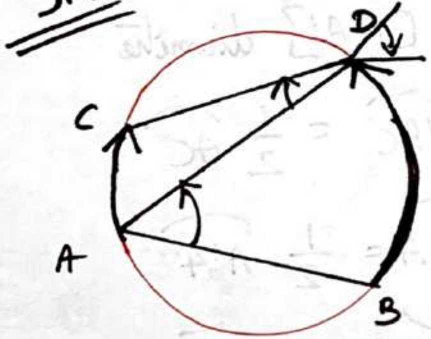
$\measuredangle AOD = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{AC})$

cas 6



$\measuredangle B'AD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$.

TM



$\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = \measuredangle([AB),[AD)) + \measuredangle([AD),[DC))$