Département de Mathématiques

M41 - DS rattrapage

2 juillet 2020 - Durée 2 heures

Exercice 1. Soit la suite de fonctions

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha \exp(-nx)), \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) Déterminer la limite simple f de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
(2) Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$.
(on pourra chercher le sup de $|f_n - f|$).
(3) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} \exp(-nx))dx.$$

Exercice 2. Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n3^n}.$$

(1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier la convergence en $x = -R$ et $x = R$.
(2) Etudier la continuité de f sur $[-3, 3[$ et justifier que f est dérivable sur $]-3, 3[$
(3) Montrer que pour tout $x \in]-3, 3[$,

$$f(x) = \ln(\frac{3}{3-x}).$$

(4) En déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Exercice 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π, définie par $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$.
(1) (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
(2) Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} - |x|).$$

(3) Déterminer la valeur de :

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$