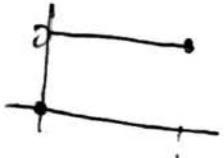
M61 TD Probabilités & Intégrales

TD 1 : Évènem^{ts} tribus

1. Intégrabilité, limsup, liminf

1) **Ex 1** : Int de Riemann.

Déf sur $[0,1]$ $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$



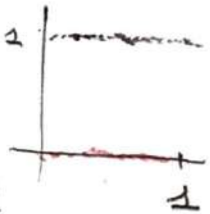
h est une f en escalier.

Dc intégrable au sens de Riemann.

Son intégrale vaut 1.

2) $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$: Mq f n'est pas RI sur $[0,1]$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



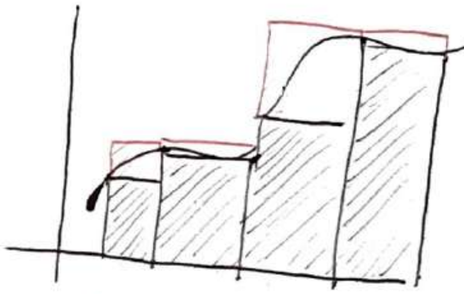
R Somme de Darboux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \quad \& \quad \overline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \quad 0 \leq k \leq n-1$



$\overline{S}(f,\sigma)$

$\underline{S}(f,\sigma)$

f est intég au sens de Riemann ssi $\sup \underline{S}(f,\sigma) = \inf \overline{S}(f,\sigma)$

Pour tous les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n-1$

$m_k = \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) = 0$ car $\forall$ interv d'int nv contient irrationnels

$M_k = \sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) = 1$.

$\Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ dc $\forall$ subdivision σ de $[a,b]$: $\underline{S}(f,\sigma) = 0$ & $\overline{S}(f,\sigma) = 1$.

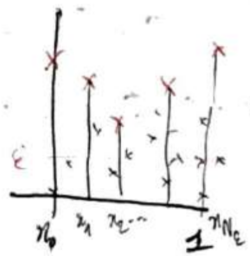
Donc $\sup_\sigma \underline{S}(f,\sigma) = 0 \neq \inf_\sigma \overline{S}(f,\sigma)$.

3) Défini sur $[0,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ \& \ p\wedge q = 1,\ 0<p\leq q \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Mq g est Riemann intégrable & $f = h\circ g$.

Q pt on déduire ?



$\underline{S}(g,\sigma) = 0$ de $\sup \underline{S}(g,\sigma) = 0$.

Reste à mq $\inf_\sigma \overline{S}(g,\sigma) = 0$

ie : $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \sigma_\varepsilon$ subdivision de $[0,1]$ tq

$$0 \leq \overline{S}(g,\sigma_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<1)$, il suffit de construire une subdiviθ σ_ε tq $\overline{S}(g,\sigma_\varepsilon) < \varepsilon$.

$$A_\varepsilon = \{x\in[0,1] \text{ tq } g(x)\geq\varepsilon\}$$
$$= \{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\ x=\frac{p}{q},\ p\wedge q=1,\ 0<p\leq q,\ \frac{1}{q}\geq\varepsilon\}$$
$$= \{x\in\mathbb{Q}\cap\,]0,1],\ x=\frac{p}{q},\ p\wedge q=1,\ 0<p\leq q\leq\frac{1}{\varepsilon}\}.$$

$\mathrm{card}(A_\varepsilon) < \infty$ $\left(<\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, $1+N_\varepsilon = \mathrm{card}(A_\varepsilon)$

Notons $A_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_{N_\varepsilon}\}$ & $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N_\varepsilon} = 1$.

$\sigma_\varepsilon = x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N_\varepsilon} = 1$.

$$\overline{S}(g,\sigma_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} M_k\,(x_{k+1}-x_k) \leq \varepsilon\times\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}(x_{k+1}-x_k) = \varepsilon$$

$M_k = \sup_{x\in]x_k,x_{k+1}[} g(x) \leq \varepsilon$ car tous les $\frac{p}{q}\in\,]x_k,x_{k+1}[$ vérifie $\frac{1}{q}<\varepsilon$.

Puis $f = h\circ g$ non RI. Riemann intégrable

4) Rq $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ est dénomb. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ numérotaθ de cet ens.

$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1,\dots,r_n\}}(x),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

f_n est intégrable sur $[0,1]$ car f_n est f en escalier.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

5) Mq $(f_n)_n$ CV simplement vers f. Q pond !

$\forall x\in[0,1],\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

si $x\notin\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0 = f(x)$

si $x\in\mathbb{Q}$ $\exists\ n_0\in\mathbb{N}^*$ tq $x = r_{n_0}$

$\forall n\geq n_0$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1,\dots,r_{n_0},\dots,r_n\}}(r_{n_0}) = 1 = f(x)$.

Moralité : Une limite simple de fs intégrables au sens de Riemann n'est pas intégrable au sens de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$ pas vrai pr une ⓐ simple

(Pr avoir l'égalité, on a besoin ⓐ UN).

Ex3 Tirer un nbr réel au hasard

tirer hasard réel $x \in [0,1[$ / p pensée ∄ remise / dév décimal où : n° sorti au i° tirage fournissant i° chiffre décimal de n. ⓪ ∈ / ∅ ⓪ & où boule ?

$N_i = \{$ i° chiffre de x après la virgule est $0\}$

1) Exprimer p opérat° ensemblistes s/ les N_i les évents : A, D_n, D, E.

U l'ens des numéros présents ds l'urne.
$\mathrm{card}(U) \geq 2$, $0 \in U$.

$\Omega = \{x = 0,a_1 a_2 \dots a_i \in U, i \in \mathbb{N}^*\} \subset [0,1[$

Ω est en bijecͦ av $U^{\mathbb{N}^*}$ (infini non dénombrable)

$N_i = \{x = 0,a_1 a_2 \dots a_i = 0\}$

- $A = \{x < 10^{-4}\} = \Omega \cap [0, 10^{-4}[$

$x < 10^{-4}$ ssi 4 premières décimales de x sont nulles.

car →
→

car → si l'une des 4 premières décimales n'est pas nulles alors $x \geq 10^{-4}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{?}{?}$

→ si les 4 premières décimales st nulles alors $x = 0,0000\,a_5 a_6 \dots$

$$x = \sum_{i=5}^{\infty} a_i 10^{-i} \leq 8 \sum_{i=5}^{\infty} 10^{-i} = \frac{8}{?}\, 10^{-5} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j} = \frac{8}{9}\, 10^{-4}$$

$a_i \leq 8$ car 9 ∉ U.

$$A = \bigcap_{i=1}^{4} N_i$$

$D_n = \{$ l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des 0 à p d'un rg $n\}$

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} N_k$$

$D = \{x$ nbr décimal$\}$ (à p d'1 rg, on a que des 0).

$x \in D$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $x \in D_n$.

$$\Leftrightarrow D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

Rq $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite ↗ ds ens : $D_n \subset D_{n+1}$

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} N_k$$

$$D^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} N_k^c$$ ∀ rg n, il y a une décimale après ($k \geq n$) non nulle.

- E = "ioté de 0", $x \in E$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n$ tq $x \in N_k$: "k° décimale nulle"

$x \in E$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k \geq n$ tq $x \in N_k$: "k° décimale nulle"

ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tq $x \in \underbrace{\bigcup_{k \geq n} N_k}_{E_n}$

ssi $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} N_k = \limsup N_x$$

qté d'ens réalisés

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} N_k = \liminf N_n$$

tous ens à partir d'1 certain rg st réalisés.

Ex 2 : Limites supérieures & inférieures d'ensemble

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ens Ω, on déf

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p$$

1) Justifier que $\limsup_{n \to \infty} A_n$ est l'ens des élts de Ω appartenant à une qté de A_n & $\liminf A_n$ est l'ens des élts de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nbr fini.

$x \in \limsup A_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \geq n$: $x \in A_k$.

ie x est dans une qté de $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

ac N_k, $D = \liminf N_k$, $E = \limsup N_k$.

$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq n$: $x \in A_k$.

ie x est dans tous les $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ apcr

$\Leftrightarrow$ Dans tous les $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sauf un nbr fini.

---

2) Mq si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ pr l'inclusion

$\Rightarrow \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

A_n

• $\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\bigcap_{k \geq n} A_k = A_n$

car $\bigcap_{k \geq n} A_k \subset A_n$; réciproqt si $x \in A_n$, ç la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \subset A_k$ $\forall k \geq n$

$\Rightarrow x \in A_k$ $\forall k \geq n$ $\Rightarrow x \in \bigcap_{k \geq n}^{k} A_k \Rightarrow A_n \subset \bigcap_{k \geq n} A_k$.

Donc $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

• $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{B_n} \overset{\text{objectif}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

$\boxed{\subset}$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

car $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset B_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\boxed{\supset}$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k$.

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = n_0(x)$,

$x \in A_{n_0}$ comme $A_{n_0} \subset A_k$ $\forall k \geq n_0$

$\Rightarrow x \in A_k$ $\forall k \geq n_0$

& de $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n$, $k = \max(n, n_0)$

tq $x \in A_k$. Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k$.

3) Mq si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↘ pr l'inclusion alors

$\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

4) Calculer $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, ($\mathbb{1}_{\limsup A_n}$ & $\mathbb{1}_{\liminf A_n}$)

en f des $\mathbb{1}_{A_n}$

• $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \max_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$

5) i) Mq $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$.

• $(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)^c$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geq n} A_p$.

Le contraire de "$x \in \limsup A_n$" $\Leftrightarrow$ "x est dans une infté de A_n" est "ⓟ certain rang, x n'est pas dans A_n".
ie "x est dans un nbr fini de A_n".

(ii) Mq $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
(ê ds ts les A_n apcr) $\subset$ (ê ds infté de A_n.)

si $x \in \liminf A_n$ ssi x est dans tous les (A_n) ⓟ certain rang
$\Rightarrow$ x est dans une infté de A_n de $x \in \limsup A_n$.

⚠ Réciproque fausse : si x est ds une infté de A_n, il n'est pas dans tous apcr : $x \in A_{2p}$:
$\forall p \in \mathbb{N}$ alors $x \in \limsup A_n$ mais pas nécesst à $\liminf A_n$.

Cela veut dire si $x \in \liminf A_n$
alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq n_0$, $x \in A_p$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \geq n$: $p = \max(n, n_0)$: $x \in A_p$.
$\Rightarrow x \in \limsup A_n$.

6) i) $A_n =]-\infty, a_n]$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$; $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$

limp sup A_n : ê ds une infté de A_n.

Mq $\limsup A_n \overset{?}{=}]-\infty, 1]$

$a_2 \notin A_4$ $\quad \notin A_{2p+1}$ $\forall p$
$\notin A_6$
$\notin A_{2p}$

si $x \in]-\infty, 1]$, si $x \leq 1$ alors $x \leq 1 + \frac{1}{2p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$
cad $x \in A_{2p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, ce q implique que
x est ds une infinité de (A_n) cad $x \in \limsup A_n$.
Donc $]-\infty, 1] \subset \limsup A_n$.

• Pour mq la réciproque $\limsup A_n \subset]-\infty, 1]$
par contraposée si $x > 1$.
$\exists p \in \mathbb{N}$, $x > 1 + \frac{1}{2p} \Rightarrow x \notin A_{2p}$
et $p' \geq p$: $A_{2p'} \subset A_{2p}$.
Donc $x \notin A_{2p'}$, $\forall p' \geq p$.
D+ $x > -1 - \frac{1}{2p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $x \notin A_{2p+1}$ $\quad \forall p \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x \notin A_n$ $\forall n \geq 2p'$. ($x \in \liminf A_n^c$)
$\Rightarrow x \notin \limsup A_n$.

On a $]-\infty, -2] = \bigcap_{n \geq 1} A_n$.

Et $\liminf A_n =]-\infty, -1[$ Par double inclusion.

2. Rappels : indépendance, conditionnement

Ex 4 Quiz.

R! $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$

- A et B indépendants si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot P(B)$$
- A et B st incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.
$\iff$ A et B disjoints.

1) si A et B st 2 évents indépendants et incompatibles alors l'un des 2 évents au moins est de proba nulle.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ car A & B incompatibles

A et B indépdts impliq $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

2) si l'un des événements A ou B est de proba nulle alors A et B st indépendants & incompatibles.

si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0$.

si $P(A) = 0$, $A \cap B \subset A$

Rq $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right\}$ $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0 = P(A) \cdot P(B)$ de A & B indépdts.

$A \cap B$ n'est pas nécessairement vide.

$A = B$, $P(A) = P(B) = 0$ mais $A \neq \emptyset$; $A \cap B = A$.

@ pile face infini : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

$\forall w \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{w\}) = 0$ @ $\mathbb{P}(\{(1, \dots, 1, \dots)\}) = 0$

"on obtient que des piles"

E_i = "pile au $i°$ lancer"

$$\boxed{A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} E_i = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i \right)}$$

les A_N sont décroissants

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} A_N\right) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(A_N) \qquad \boxed{A_N = \bigcap_{i=1}^{N} E_i}$$

$$A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} E_i = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} A_N$$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(E_i) = \lim_{N \to \infty} p^N = 0$$

$\mathbb{P}(A) = 0$ mais $A \neq \emptyset$.

3) si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

@ si des ens finis. On doit vérifier d'abord

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C).$$

Soit une expérience de lancer de dé à $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ sous $\mathbb{P}$ équiproba. On prend $A = \{1,4\}$; $B = \{1,2,3\}$; $C = \{4,5,6\}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A).P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A).P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Puis $P(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ mais $P(A) \cdot P(B \cup C) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tq $C \subset B \Rightarrow A$ est indépendant de C.

On prend $C = \{2\}$ et $A = \{1,4\}$ et $B = \{1,2,3\}$.

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \iff \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$P(A \cap C) = P(A).P(C) \iff \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$P(A \cap (B \cup C)) = P(A).P(B \cup C) \iff P(A).P(B \cup C) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

et $P(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

Ex 5 : Une inégalité injustement méconnue.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note A un évent qq & B un évent tq $0 < P(B) < 1$.

1) Mq $|P(A \cap B) - P(A).P(B)| \leq \frac{1}{4} |P(A|B) - P(A|B^c)|$

Indic : exprimer $P(A|B) - P(A|B^c)$ en f. seules probas $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

Rép $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P(A) = P(B).P(A|B) + P(A|B^c)P(B^c)$

$$P(A|B) - P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(B)P(A|B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{(1-P(B))(P(A \cap B)) - P(B)(P(A) - P(A \cap B))}{P(B)[(1-P(B))]}$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P(A).P(B)}{P(B)[1 - P(B)]}$$

Puis $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| = P(B)(1 - P(B))|P(A|B) - P(A|B^c)|$

$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4} |P(A|B) - P(A|B^c)|$

2) $A \subset B$? $A \cap B = A$ et $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$, $P(A|B^c) = 0$

$P(A)[1 - P(B)] \leq \frac{1}{4} \frac{P(A)}{P(B)}$ si $P(A) \neq 0$: $P(B)[1 - P(B)] \leq \frac{1}{4}$

3) si égalité :

si $P(B) = \frac{1}{2}$.

Ex6 : Indépendance

Peut-il exister n événements indépendants de même proba p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

$(E_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendants de proba p.

$\mathbb{P}(E_i) = p \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

$\Rightarrow \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}(\Omega^c)}} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i^c\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(E_i^c) = (1-p)^m$.

indépendance des $(E_i)_{1\leq i\leq n}$.

alors $p = 1$.

Rq : si A & B sont de proba 1.

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A\cup B)}_{=1} = 1$

ou bien $= 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c)$

$\mathbb{P}(A^c\cup B^c) \leq \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) = 0$.

Marche pour une suite dénombrable d'événements de proba 1

$\Rightarrow$ indépendants.

Cas trivial $E_i = \Omega$.

$E_1 \; E_2 \quad \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 1$, $\Omega = E_1 \cup E_2$

$E_1 = \Omega \setminus \{1,\dots,1,\dots\}$; $E_2 = \Omega\setminus\{0,\dots,0,\dots\}$

Ex9 1) On lance un dé à 4 faces. Écrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

$\Omega = \{1,2,3,4\}$

2) Une personne lance le dé & nous annonce le résultat tiré. Écrire la tribu $\mathcal{F}_2$ de tous les événements observables par nous.

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},$
$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$
$= \mathcal{P}(\Omega)$.

$\operatorname{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\operatorname{card}(\Omega)}$ ici $|\mathcal{F}_2| = 2^4$

3) La personne lance le dé & nous annonce seulement "pair" ou "impair". Écrire $\mathcal{F}_1$.

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3\},\{2,4\}\}$

4) La p. lance le dé & n'annonce rien. Écrire $\mathcal{F}_0$.

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

5) On dit que $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En q est-elle ↗ ! Qu'est-ce q ↗ intuitivement, le long de cette suite ?. Ds $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que représente la tribu $\mathcal{F}$?

L'info ↗ le long de cette suite.

Dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des événements auxquels on attribue une probabilité.

6) La modélisat° mtq des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils st munis de tribus $\mathcal{F}_t$ indexées p la date & contenant tous les events observables de l'⊕ jsq'à la date t. L'affirmat°

$\mathcal{F}_{\text{5 janv 2020}} \subset \mathcal{F}_{\text{31 mars 2022}}$ est considéré p les quants ≈ une évidence. Pk ?

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ← tous les événements observables jusqu'à la date t.

Ex 8 Union & Intersect° de tribus.

1) soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

(i) identifier tribu $\mathcal{F}_1$, engendrée p $\{1\}$ & $\mathcal{F}_2$ engendré par $\{2\}$.

↳ tribu engendrée p $\mathcal{C}$, $\sigma(\mathcal{C})$: + petite tribu q contient $\mathcal{C}$.

$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \underbrace{\{2,3,4\}}_{\text{le complément}}\}$

$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{2\}) = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3,4\}\}$

(ii) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$ n'est pas une tribu.

Rq $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ tribu tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{F}} \mathcal{F}$

2) soit Ω ens qq & C_1 & C_2 des collections d'ens de Ω.

Donc $C_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) Mq $\mathcal{F}_{C_1 \cap C_2} \subset \mathcal{F}_{C_1} \cap \mathcal{F}_{C_2}$

On doit mq $\sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \subset \underbrace{\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)}$

↳ il suffit de mq $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \cap \sigma(\mathcal{C}_2)$

1.

On veut mq $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)\cap\sigma(\mathcal{C}_2)$

En effet, si $C \in \mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$,

alors $C \in \mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow C\in\sigma(\mathcal{C}_1)$.

$C \in \mathcal{C}_2 \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow C \in \sigma(\mathcal{C}_2)$

donc $C\in \sigma(\mathcal{C}_1)\cap\sigma(\mathcal{C}_2)$.

• De + $\sigma(\mathcal{C}_1)\cap\sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu

de $\sigma(\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)\cap\sigma(\mathcal{C}_2)$

(ii) Mq qu'il n'est pas tjrs vrai que $\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}_1}\cap \mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2}$.

Ca : il faut avoir $\sigma(C_1)\cap\sigma(C_2) \supset \sigma(C_1\cap C_2)$.

$\mathcal{C}_1 = \{\{1,4\}\}$, $\mathcal{C}_2=\{\{2,3\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}_1)=\sigma(\mathcal{C}_2)$ et $\sigma(\mathcal{C}_1)\cap\sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_1)$

$= \{\emptyset, \Omega, \{1,4\},\{2,3\}\}$.

Puis $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2=\emptyset$, $\sigma(\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2)=\{\emptyset,\Omega\}$.

3) soit $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(\Omega)$,

(i) soit $\mathcal{C}^c = \mathcal{P}(\Omega)\setminus\mathcal{C}$. Est-il vrai que $\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}}\cap\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}^c}=\emptyset$?

Est-il vrai que $\mathcal{F}^\ell_\mathcal{C} = \mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}^c}$?

$\{\emptyset,\Omega\}$ est tjrs ds l'intersect° de 2 tribus.

Donc on n'a pas $\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}}\cap\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}^c}=\emptyset$.

$\mathcal{F}^\ell_\mathcal{C}=\mathcal{F}^\ell_{\mathcal{C}^c}$!

$\mathcal{C}=\{\{1\}\}$, $\mathcal{C}^c = \mathcal{P}(\Omega)\setminus\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)\setminus\{\{1\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\{1\}) = \{\emptyset,\Omega,\{1\},\{2,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{C}^c)=\mathcal{P}(\Omega)$

(ii) soit $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(\Omega)$, soit $\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{P}(\Omega), A^c\in\mathcal{C}\}$

Est-il vrai que $\mathcal{F}^\ell_\mathcal{C}=\mathcal{F}^\ell_\mathcal{D}$?

En prenant $\mathcal{C}=\{\{1\}\}$, $\mathcal{D}=\{\{2,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{D})=\{\emptyset,\Omega,\{1\},\{2,3,4\}\}$.

En prenant $\mathcal{C}=\{\{1\},\{2\}\}$, $\mathcal{D}=\{\{2,3,4\},\{1,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{C})=\{\emptyset,\Omega,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\}\}$

$\sigma(\mathcal{D})=\{\emptyset,\Omega,\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1,2\},\{1\},\{2\}\}$

Vrai : • $\sigma(\mathcal{C})$ $\sigma(\mathcal{D})$ il suffit de mq $\mathcal{C}\subset\sigma(\mathcal{D})$.

soit $C\in\mathcal{C}$ alors $C^c\in\mathcal{D}\Rightarrow C^c\in\sigma(\mathcal{D})$

$\Rightarrow C=(C^c)^c\in\sigma(\mathcal{D})$.

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{D})$.

idem pr inclusion inverse.

Ex 10, Une tribu sur les entiers

soit $\Omega = \mathbb{Z}$. on considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ens. $S_n = \{n, n+1, n+2\}$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\{n\} \in \mathcal{T}$.

$\Omega = \mathbb{Z}$, $S_n = \{n, n+1, n+2\}$, $\mathcal{T} = \sigma(S_n, n \in \mathbb{Z})$.

$\{n\} = S_n \cap S_{n-2}$; cp S_n et S_{n-2} sont de $\mathcal{T}$

de $S_n \cap S_{n-2} \in \mathcal{T}$.

2) ed $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

TD 2 : Applicats Mesurables

Ex 8 Tribu grossière triviale.

Quelles st applis mesurables h de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsq $\mathcal{T}$ est la tribu grossière ? lorsq $\mathcal{T}$ est la tribu triviale ?

Applicat mesurable ⓓ $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E', \mathcal{T}')$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}'$ mesurable si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$

(va) $X : (\Omega, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathbb{P}$

$h : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ E (ens)

- $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(B) \in \{\emptyset, E\}$

$B = \{b\}$ $b \in \mathbb{R}$.

$h^{-1}(\{b\}) = \{x \in E, h(x) = b\} = \begin{cases} \emptyset \\ E \end{cases}$

h est cte :

- $E = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} h^{-1}(\{b\})$ or si $b \neq b'$,
- $h^{-1}(\{b\}) \cap h^{-1}(\{b'\}) = \emptyset$
- $\forall b \in \mathbb{R}$, $h^{-1}(\{b\}) \in \{\emptyset, E\}$

$\Rightarrow \exists! b_0 \in \mathbb{R}$ tq $h^{-1}(\{b_0\}) = E$.

$\Rightarrow \forall x \in E$, $h(x) = b_0$.

- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, tte f est mesurable.

Ex 1 : Tribus & f° mesurables

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une partition d'un ens E où $I \subset \mathbb{N}$.
1) Caractériser les élts de la tribu $\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in I)$ dans le cas $I=\{0\}$, $I=\{0,1\}$, $I=\{0,1,2\}$, $I=\mathbb{N}$

2) Soit f f° mesurable de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Mq f est cte sur chq A_n. Déd la forme générale des applications mesurables pour I donné ds la qu° a)

$$\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in I)$$

- $I=\{0\}$, $A_0 = E$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$
- $I=\{0,1\}$, $A_0 \cup A_1 = E$ et $A_0 \cap A_1 = \emptyset$

  $\mathcal{T} = \sigma(A_0, A_1) = \{\emptyset, E, A_0, A_1\}$ 
- $I=\{0,1,2\}$

  $\mathcal{T} = \sigma(A_0, A_1, A_2) = \{\emptyset, E, A_0, A_1, A_2, \underbrace{A_0 \cup A_1}_{A_2^c}, \underbrace{A_1 \cup A_2}_{A_0^c}, \underbrace{A_0 \cup A_2}_{A_1^c}\}$
- $I=\mathbb{N}$

  $\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in \mathbb{N}) = \{\emptyset, E, \bigcup_{j\in J} A_j, J \subset \mathbb{N}\}$

[illegible]

$$f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

$E = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} \underbrace{h^{-1}(b)}_{\text{ne dépendent}}$, $\forall b \in \mathbb{R}$,

$\exists J \subset I$ tq $h^{-1}(\{b\}) = \bigcup_{j\in J} A_j$

$\rightarrow$ si h est de n les $(A_n)_{n\in I}$, $\forall n \in I$,

$\exists b_n \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in A_n$, $h(x) = b_n$.

@ $E =]0,1]$, $A_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 4 Résultats essentiels à retenir.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sdf mesurables d'un espace mesurable $(E,\mathcal{T})$ à valeurs ds $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. Mq pptés :

1) En considérant les images réciproques de $]-\infty,a]$ pr $a\in\mathbb{R}$, mq $\sup_n(f_n)$ est mesurable.

$$f_n : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mesurable.}$$

$$g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \quad , \; g(x) = \sup\{f_n(x),\ n\in\mathbb{N}\}$$

g est mesurable ie $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $g^{-1}(B)\in\mathcal{T}$.

il suffit de le faire pour $B =]-\infty,a]$, $a\in\mathbb{R}$.

$\forall a\in\mathbb{R}$, $g^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$?

$$g^{-1}(]-\infty,a]) = \{x\in E,\ g(x)\leq a\} = \{x\in E,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\leq a\}$$
$$= \{x\in E : \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)\leq a\}$$

$x\in g^{-1}(]-\infty,a])$ ssi $\forall n\in\mathbb{N} : x\in f_n^{-1}(]-\infty,a])$

ssi $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty,a])$

$$g^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty,a]),$$

$f_n^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$ car f_n mesurable.

$\Rightarrow g^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$ comme intersect° ⓓ d'élts de $\mathcal{T}$.

2) Mq $\inf_n(f_n)$ est mesurable.

$\boxed{M1}$ m̂ type de raisonnem^t.

$\boxed{M2}$ ou bien on se ramène au sup

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$$

3) si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ⓒⓥ simplement vers f f, mq $\forall a\in\mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(]-\infty,a+\tfrac{1}{p}])$$

ed f est mesurable.

$\forall x \in E,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$\left(f^{-1}(]-\infty,a]\right) = \{x \in E,\ f(x) \leq a\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $1/p$

$\boxed{\supset}$ soit $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}\left(]-\infty, a+\frac{1}{p}]\right)$

ie $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n ;\ x \in f_k^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}])$:

$f_k(x) \leq a + \frac{1}{p}$.

$\forall k \geq n : f_k(x) \leq a + \frac{1}{p} \Rightarrow f(x) \leq a + \frac{1}{p}$.

Donc x vérifie $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \leq a + \frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow f(x) \leq a$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(]-\infty, a])$

$\boxed{C}$ soit $x \in f^{-1}(]-\infty, a])$ alors $f(x) \leq a$

alors $\forall p \in \mathbb{N}^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$,

$f_n(x) \leq f(x) + \frac{1}{p} \leq a + \frac{1}{p}$.

alors $\forall . \exists N .$ $x \in f_n^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}]) \Rightarrow x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(]-\infty, a+\frac{1}{p}])$

, et f est mesurable.

intersect° avec $\mathcal{D}$ mesurables, union $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ mesurables.

D'où $f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$

Ex 8 Mesurabilité de limites de f mesurables

soit (E,d) un espace métriq et $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applicat° de E dans E q sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurables.

1) Sppsons ds cette q° que $(f_n)_n$ CV simplement vers une applicat° de f. Mq f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable.

$$f_n : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (F, d)$$
$$x \longmapsto f_n(x)$$

f_n CV simplement vers f. On vt mq f est mesurable.
F est muni de $\mathcal{B}(F)$: + petite tribu q contient les ouverts de F.

soit $A \in \mathcal{B}(F)$, $A =]-\infty, a]$,

$f^{-1}(A) = \{ x \in E, f(x) \in A \}$.

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \underbrace{f_k^{-1}\left(]-\infty, a+\frac{1}{p}]\right)}_{\in \mathcal{T} \text{ car } f_k \text{ est mesurable}}$$

si $F = \mathbb{R}$,

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ = tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

= tribu engendrée par $\{]a,b[, a<b \}$

$\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R} \}$

$]-\infty, a+\frac{1}{p}]$, $A_{\frac{1}{p}} = \{ x \in F : d(x,A) \leq \frac{1}{p} \}$.

TD 3 : Mesures & mesure de Lebesgue

Ex 1 La mesure de comptage.

soit X ens (nv). Pr $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) = \text{card}(A).$$

Mq c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sur X.

$A \in \mathcal{P}(X)$, $c(A) = \text{card}(A)$

(Rq si A est infini, $c(A) = \infty$),

c'est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

- $c(\emptyset) = 0$.
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évents 2 à 2 disjts

$$c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \overset{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n).$$

→ si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq A_n est infini

$\Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est ∞, $c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \infty$

et $c(A_{n_0}) = \infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n) = \infty$.

→ Il y a une ∞té de A_n (nv),

$\exists I \subset \mathbb{N}^*$, I ∞ tq $\forall i \in I$, $\text{card}(A_i) \geq 1$

$\Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \supset \bigsqcup_{i \in I} A_i$ ∞ $\Rightarrow c\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \infty$.

et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(A_n) \geq \sum_{i \in I} c(A_i) = \infty$

→ il y a un nbr fini de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (nv) et finis.

$\exists I \subset \mathbb{N}^*$, I fini tq $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$ et A_i fini

et si $i \notin I$; $A_i = \emptyset$.

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigsqcup_{i\in I} A_i$$

$$c\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} c(A_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c(A_n)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ c\big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\big)\end{array}$$

union finie d'ens finis

Ex 2 Mq applicat° est une mesure.

· soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

Ds chacun des cas, mq l'applicat° donnée est une mesure.

1) Pr $a \in E$ fixé, δ_a est l'applicat° déf par $\forall A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a)$.

$a \in E$, $\forall A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

▷ $\delta_a(\emptyset) = 0$ car $a \notin \emptyset$.

▷ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'élts de $\mathcal{T}$ 2 à 2 disjoints

Avons-nous $\delta_a\big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\big) \overset{?}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta_a(A_n)$.

→ soit $\delta_a\big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\big) = 1 \iff a \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

$\Rightarrow \underbrace{\exists!}_{\text{car les } (A_n) \text{ st 2 à 2 disjts}} n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $a \in A_{n_0}$

$\Rightarrow \delta_a(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_a(A_n) = 0$ si $n \neq n_0$

$\Rightarrow \sum \delta_a(A_n) = \delta_a(A_{n_0}) + \sum_{n\neq n_0} \delta_a(A_n) = 1.$

→ soit $\delta_a\big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\big) = 0$,

$a \notin \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \iff a \notin A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \delta_a(A_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\delta_a\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta_a(A_n) = 0.$$

2) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } A^c \text{ dénomb}\}$

$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ dénomb} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

↪ $\mathcal{T}$ est bien une tribu car

* $\emptyset \in \mathcal{T}$.
* stabilité p passage au complémentaire
* stabilité p réunion dénombrable

2. $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, A ou A^c est dénombrable$\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

Mq stabilité par réunion dénomb :

↳ si tous les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ st dénomb alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est dénombrable donc ds $\mathcal{T}$

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $A_{n_0}^c$ dénomb.

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c \subset A_{n_0}^c \text{ dénomb} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}.$$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ est une tribu (c'est la plus petite tribu q contient tous les ens dénombr. de $\mathbb{R}$).

- μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$

  * $\mu(\emptyset) = 0$
  * $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'élts de $\mathcal{T}$ 2à2 disjoints : $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n)$

car ▸ si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ A_n est dénomb

$$\Rightarrow \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \text{ est dénombrables} \Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$$

et comme $\mu(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n) = 0.$$

▸ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A_{n_0}^c$ est dénomb.

$$\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c \subset A_{n_0}^c \text{ dénomb}$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n) = 1 \text{ car } \mu(A_{n_0}) = 1$$

et $\mu(A_n) = 0$ si $n \neq n_0$

car $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = A_{n_0} \cup \underbrace{\bigsqcup_{n\neq n_0} A_n}_{\subset A_{n_0}^c \Rightarrow \text{dénomb}}$

A_n dénomb si $n \neq n_0$.

Ex 3 Ens de mesure positive

soit $f:(E,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une f mesurable. soit μ une mesure sur $(E,\mathcal{T})$

1. Mq si $\mu(E) \neq 0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tq f soit bornée sur A.

$\mu(E) \neq 0$.

$\exists A \in \mathcal{T}, \exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\mu(A) \neq 0$.
et $\forall x \in A, |f(x)| \leq M$.

idée : $A_M = \{x \in E, |f(x)| \leq M\}$
$= f^{-1}([-M,M]) \underbrace{\in \mathcal{T}}_{\text{car } f \text{ est mesurable}}$

Mq $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\mu(A_M) \neq 0$.

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\} = E$

$\mu(A_M) = 0 \quad \forall M \in \mathbb{R}_+$,
$E = A_M \cup f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-M,M]) \Rightarrow \mu(E) = \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-M,M]))$
(ou $\mu(E) \leq \sum \mu(A_M)$)

$\bigsqcup_{M \in \mathbb{N}} A_M = E$, $\mu(E) = \lim_{M \to \infty} \mu(A_M) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}, \lim_{M \to \infty} \mu(A_M) \neq 0$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}, \mu(A_M) > 0$

2) Justifier $\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$.

$\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$ car $f^{-1}(\{0\})^c = f^{-1}(\mathbb{R}^*) \in \mathcal{T}$.

3) Mq si $\mu(f \neq 0) \Rightarrow \exists A \in \mathcal{T}, \mu(A) \neq 0$ tq $|f|$ est minorée sur A p une cte $s^T > 0$.

$A_M = \{x \in E, |f(x)| > \frac{1}{M}\}$, $M \in \mathbb{N}^*$
$\{f \neq 0\} = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} A_M$

Union croissante $\Rightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \lim_{M \to \infty} \mu(A_M) > 0$
de $\exists M \in \mathbb{N}^*$ tq $\mu(A_M) > 0$

Autre rédact° possible :

$$\mu(\{f \neq 0\}) \leq \sum_{M \in \mathbb{N}^*} \mu(A_M)$$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}^*$ tq $\mu(A_M) > 0$.

(sinon la série serait nulle)

2. Autour de la mesure de Lebesgue

Ex 9 : Lebesgue nulle et intérieur

Mq tt ss-ens mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

$E \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \mathring{E} = \emptyset$

Rq : $\mathring{E} \subset E \Rightarrow \lambda(\mathring{E}) = 0$.

Par contraposée, si E n'est pas d'intérieur vide, $\exists$ un ouvert O (nv) tq $O \subset E$.

O une intervalle / pavé ouvert (nv).

$$\prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k[= O \qquad 0 < \lambda(O) \leq \lambda(E) \Rightarrow \lambda(E) \neq 0.$$

$$\lambda(O) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) \neq 0$$

(ce) pr $q \Rightarrow p$ (réciproque) : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ d'intérieur vide mais de mesure de Lebesgue non-nulle : car $\lambda(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq 0$.

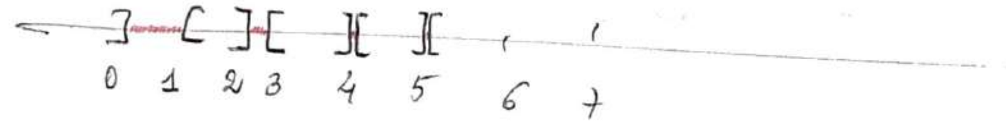
(ou) Ens de Cantor.

Ex 10 : Un calcul de la mesure de Lebesgue

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.
Pour $n \geq 0$, on pose $A_n =]n, n + 2^{-n}[$.

1. Justifier $\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$A_n =]n, n + 2^{-n}[$



$\forall n \geq 0$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A_n est un intervalle ou A_n est un ouvert. (m̂ s'il avait été fermé : on explicite le complément$^{\mathbb{R}}$, mq ouvert).

Rq : $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les intervalles de $\mathbb{R}$.

Ex 3_ Ens de mesure ...

2. soit $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

→ Calculer $\lambda(A)$.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ c union dénombrable d'Ets de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\lambda(A) \overset{\text{union disjointe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

3) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessRt borné ?

A un exemple de borélien non borné de mesure finie non-nulle.

III / BOREL - CANTELLI 1.

Ex 14 : L'armée des singes dactylographes.

Mq ds le jeu de pile ou face infini, la séquence pffp apparaît psq sûrement une stté de fois. Généraliser.

$\Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$, $A =$ "pfffp apparait une stté de fois"

Objectif : $\mathbb{P}(A) = 1$

$A_n = \{ \omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \Omega : \omega_n = p, \omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \omega_{n+3} = f, \omega_{n+4} = p \}$.

$$\underset{n}{p}\ f\ f\ f\ \underset{n+4}{p}$$

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\geq n} A_p$$

$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^5}$, $\underline{BCI_{II}}$ $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

A_n & A_{n+5} st indépend.

$$\tilde{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\geq n} A_{5p}$$

les $(A_{5p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ st indépendants,

BCI_{II} $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_{5p}) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{A}) = 1$

$$1 = \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(\tilde{A})$$

Ex13 Continuité & not de presq partout

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (i.e. la restrictiō à $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une f cont & sppo f est nulle sur un borélien de mesure 1, i.e $\lambda(f^{-1}(0)) = 1$. Mq f est iid nulle.
Le résultat subsiste-t-il si on remplace cont par mesurable ?

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

On spps $\exists\ E \in \mathcal{B}([0,1])$ tq $\lambda(E) = 1$ et $f(x) = 0\ \forall x \in E$

$\Longleftrightarrow \lambda(f^{-1}(\{0\})) = 1$ car $E \subset f^{-1}(\{0\})$

→ Par contraposée : si f n'est pas iid nulle alors $\exists\ x \in [0,1]$ tq $f(x) \neq 0$

Comme f est cont $\Rightarrow \exists$ un intervalle ouvert (nv) I_x contenant x tq $f(x) > 0\ \forall x \in I_x$.

$0 < \lambda(I_x) \leq \lambda(f^{-1}(\{0\})^c)$

$I_x \subset f^{-1}(\{0\})^c$

Donc $\lambda(f^{-1}(\{0\})^c) > 0$

or $\lambda(f^{-1}(\{0\})) + \underbrace{\lambda(f^{-1}(\{0\})^c)}_{>0} = \lambda([0,1]) = 1$.

Contradiction: $\underset{1}{\overset{\shortparallel}{}}$

TD - 4 - Variables aléatoires discrètes

1/ Évènements, calculs de probas

Ex 1 : Calculs de probas

18 f, 12 h ; 21 d (15 f, 6 h)

proba gaucher ? gauchère ? client au hasard. h au hasard ?

→ Expérience aléatoire : Choisir un client au hasard

→ Modélisation : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- $\Omega = \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ = ens des clients $= \{1, \dots, 30\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ équiproba.

$\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{30}$.

F : "le client est une femme"

H : "   h "

D : "droitier", G : "gaucher"

⚠ A\B n'est pas évent

$$\mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} \qquad \mathbb{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{21}{30}$$

$$\mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} \qquad \mathbb{P}(D \cap F) = \frac{15}{30}$$

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(D^c) = \frac{9}{30}$$

$$\mathbb{P}(G|H) = \frac{\mathbb{P}(G \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{6/30}{12/30} = \frac{1}{2}$$

or

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D \cap H)$$
$$= \mathbb{P}(H) - (\mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(D \cap F))$$
$$= \frac{12}{30} - \left(\frac{21}{30} - \frac{15}{30}\right) = \frac{6}{30}$$

Ex 2 Chats de Shrödinger

Soit exp pensée : 20 chats ds boîte :

- 10 boîtes vides, - 5 b 4 3g (a), - 5 b 4 10g arsenic

Au bout 1h, $\mathbb{P}$(chat en vie) = 1 ; 0,6 (3g) ; 0,2 (10g)
b = vie

→ on choisit une des 20 b au hasard.

1) Q^elle est la proba que le chat q s'y trouve soit encore en vie au bout d'1h ?

2) Le chat est en vie. Q^elle est la proba que la boîte ait été vide qd on l'y a placé ?

Si on voulait décrire l'espace de proba :

$$\Omega = \underbrace{\{1, \dots, 20\}}_{\text{n° boîte}} \times \underbrace{\{0,1\}}_{\text{chat en vie ou non au bout d'1h.}}$$

ici pas d'équiproba.

→ on se contente ici de travailler 4 évents

V = " chat en vie ", B_0 : " boîte vide "
B_3 : " 3g arsenic ds $\hat{b}$ "
B_{10} " 10 ———— "

$P(B_0) = \frac{10}{20}$, $P(B_3) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = P(B_{10})$

$\mathbb{P}(V|B_0) = 1$, $\mathbb{P}(V | B_3) = 0{,}6$; $\mathbb{P}(V|B_{10}) = 0{,}2$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(V) = \underbrace{\mathbb{P}(V|B_0) \times \mathbb{P}(B_0)}_{\mathbb{P}(V \cap B_0)} + \mathbb{P}(V|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(V|B_{10}) \cdot \mathbb{P}(B_{10})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0{,}6 + \frac{1}{4} \times 0{,}2 = 0{,}7.$$

$$\mathbb{P}(B_0|V) = \frac{\mathbb{P}(B_0 \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V|B_0) \cdot \mathbb{P}(B_0)}{\mathbb{P}(V)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{7}$$

Ex 3 Un pb de transit → Cd Gaulle

Avions A & B, $n_A = 20$, $n_B = 40$ pssgrs

1° vient Séoul, chq pssgr à proba $p_A = 0{,}01$ d'ê infecté p COVID.

2nd Houston → $p_B = 0{,}2$ d'ê infecté. pssgrs indep.

1) X_A, X_B nbr pssgr inf ds avions.

(i) loi de X_A & X_B. → compt nbr de " succès " ds suite de n_A épreuves indep.

$X_A \sim \mathcal{B}in(20 ; 0{,}01)$; indep $X_B \sim \mathcal{B}in(40 ; 0{,}2)$

(ii) Espérance nbr total de passagers inf.

$\mathbb{E}(X_A) = 20 \times 0{,}01 = 0{,}2$, $\mathbb{E}(X_B) = 40 \times 0{,}2 = 8$

(iii) si 2ou+ p. inf. → $\boxed{A}$ scellé & t/p. mis en quarantaine. Proba pas nécessr ?

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_A) + \mathbb{E}(X_B) = 8{,}2$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X_A = X_B = 0) + \mathbb{P}(X_A = 0, X_B = 1) + \mathbb{P}(X_A = 1, X_B = 0)$$

Comme X_A & X_B sont indépdtes.

Comme X_A, X_B ind $\Rightarrow P(X_A=k_1, X_B=k_2) = P(X_A=k_1).P(X_B=k_2)$
$\forall k_1 \in \{0,\dots,n_A\}, \forall k_2 \in \{0,\dots,n_B\}$.

$$P(X \leq 1) = P(X_A=0)P(X_B=0) + P(X_A=0)P(X_B=1) + P(X_A=1)P(X_B=0)$$
$$= (1-p_A)^{n_A}(1-p_B)^{n_B} + (1-p_A)^{n_A} \cdot n_B \cdot p_B (1-p_B)^{n_B-1} + (1-p_B)^{n_B} \cdot n_A p_A (1-p_A)^{n_A-1}$$
$$= 1{,}22 \cdot 10^{-3}.$$

2) Bus attd pssgrs Houston ($\Rightarrow$ B) mais p. pas autorisé si covid. Dans bus $Y_B < 40$ p. saine.
p. inf. Repère caméra thermq fièvre : 95%
p. saine : 20%

i) Spps $X_B = 10$. Qlle est la distribut° (loi) du nbr de passagers sains / infectés q a pu monter ds bus ?

$X_B = 10$ infectés
$n_B - X_B = 30$ sains

• La nbr passgers sains q a pu monter ds bus : Bin(30 ; 0,8)
• μ infectés : Bin(10 ; 0,05)

Rq Y_B^S : nbr passagers sains q montent ds le bus & la loi conditionnelle de Y_B^S sachant $Y_B = 10$ est Bin(30 ; 0,8)

(ii) Spps tjrs $X_B = 10$, on choisit une personne au hasard / ds groupe de Houston, quelle est la proba p_E qu'elle soit autorisée à monter ds le bus ?
M^ q° si $X_B = k \in \{0,\dots,40\}$.

$p_E = P(E)$, E : "monter ds le bus"
E : "pas de fièvre detectée"
I : "infecté", S : "sain"

$P(E|I) = 0{,}05$, $P(E|S) = 0{,}8$
$$P(E) = P(E|I) \times P(I) + P(E|S) \times P(S) = 0{,}05 \times \frac{10}{40} + 0{,}8 \times \frac{30}{40} = 0{,}612.$$

$\mathbb{P}(E \mid X_B = 10) = 0,612$ 3)

$$\mathbb{P}(E \mid X_B = k) = 0,05 \times \frac{k}{40} + 0,8 \times \frac{40-k}{40}$$

$\forall k \in \{0, \dots, 40\}$

(iii) On ne suppose plus rien sur X_B. On choisit au hasard un des passagers en provenance de Houston, calculer p_E.

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{40} \mathbb{P}(E \mid X_B = k) \cdot \mathbb{P}(X_B = k).$$

$$= \sum_{k=0}^{40} \left(0,05 \times \frac{k}{40} + 0,8 \times \frac{40-k}{40}\right) \cdot \underbrace{C_{n_B}^{k} p_B^{k} (1-p_B)^{n_B - k}}_{\alpha_k = \mathbb{P}(X_B = k)}$$

$$\sum_{k=0}^{40} \alpha_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{40} k\,\alpha_k = \sum_{k=0}^{40} k\,\mathbb{P}(X_B = k) = \mathbb{E}(X_B) = n_B\, p_B.$$

$$\mathbb{P}(E) = \left(\sum_{k=0}^{40} k\,\alpha_k\right)\left(\frac{0,05 - 0,8}{40}\right) + \left(\sum_{k=0}^{40} \alpha_k\right)\frac{0,8}{40}$$

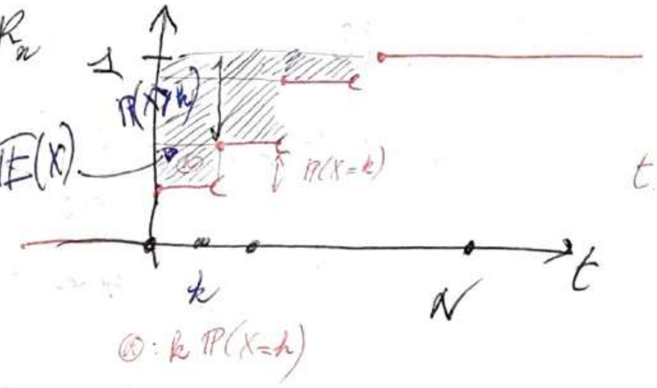
$\mathbb{P}(E) = 0,65$

Ex 9 : Une autre ff pr l'espérance mais X va d'espace d'états $\{0,\dots,N\}$.

Mq $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>k)$.

Que p.-t-on dire si X prd ses valeurs ds $\mathbb{N}$ tt entier ?

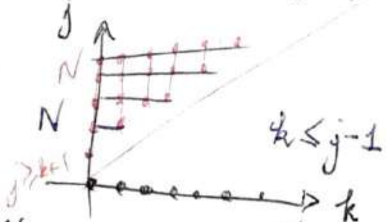
Puis visualiser l'espérance sur le graphe de la fdR de X.



$t \longmapsto \mathbb{P}(X\leq t)$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X>k)=\sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X=j)$$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X=j)\right)$$



$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{N} j\,\mathbb{P}(X=j).$$

ou $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\dots+\mathbb{P}(X=N)$

$+\mathbb{P}(X=2)+\dots+\mathbb{P}(X=N)$

$+\mathbb{P}(X=3)+\dots+\mathbb{P}(X=N)$

$=\mathbb{P}(X=1)+2\,\mathbb{P}(X=2)+3\,\mathbb{P}(X=3)+\dots+N\,\mathbb{P}(X=N)$

$=$

Généralisation

→ si X est une va positive :

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^{\infty} \mathbb{P}(X>t)\,dt = \int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt$$

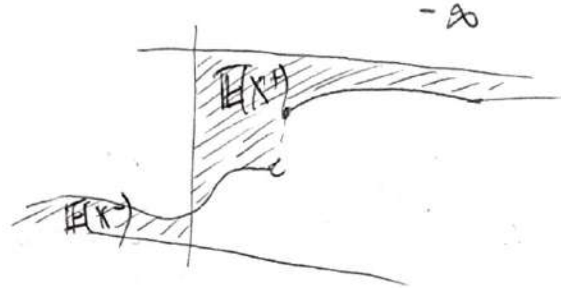
fdR X

→ si X n'est pas positive.

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt - \int_{-\infty}^{0} F(t)\,dt$$

si $\mathbb{E}(X^+)<\infty$

$\mathbb{E}(X^-)<\infty$



Ex 4 Contrôleur contre fraudeur

1 ticket 1 €   1° A 20 €, 2° A : 40 €, 3° A 400 €.

Proba p pr voyag^r d'ê cont. (constante)

→ prd métro jsq 2° A ⇒ s'arrête.

T : nbr trajets eff jsq 2° A.   ($q = 1-p$: k^e trajet sans contrôle.)

1) Mq loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T=k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

$\{T=k\}$

$$\{T=k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{T=k, T_0 = i\}$$

k^e trajet
2^e amende.

$$\mathbb{P}(T=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(T=k, T_0 = i) = \sum_{i=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2}$$

$$= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \quad \text{loi } 2^e \text{ succès.}$$

2) Pr $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T>n)$.

Indic : Chercher FF pr $f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1}$, puis pr sa dérivée terme à terme.

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{x^n}{1-x} \quad \text{pr } |x| < 1$$

$$f'(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)\, x^{k-2} = \frac{n x^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{n x^{n-1} - (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$\mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = p^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2}$$

$$= p^2 \, \frac{n(1-p)^{n-1} - (n-1)(1-p)^n}{p^2}$$

$$= (1-p)^{n-1}\left(n - (n-1)(1-p)\right)$$

$$= (1-p)^{n-1}(pn - 1 + p).$$

3) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T>60)$.
(Pk s'intéresse-t-on à cette qté ?) lorsq $\begin{cases} p=1/10 \\ p=1/20 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(T>60) = \begin{cases} 0{,}01 & \text{si } p=\frac{1}{10} \\ 0{,}05 & \text{si } p=\frac{1}{20}. \end{cases}$$

II/ Va discrètes & pptés des lois classiqs

Ex5 Sur la loi uniforme.

Soit X, Y 2 va indep. suivant la loi Unif sur $\{1,\dots,n\}$.

1) Déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}.$$

Interdit $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ tq $\{X=Y\} = \{X=Y=k\}$.

Mais si $\omega \in \Omega$ tq $X(\omega) = Y(\omega)$ alors $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ (q dépd de ω)

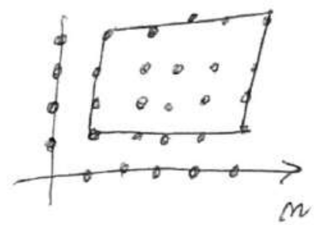
$$\{X=Y\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X=Y=k\}$$

$$\boxed{\{X=Y\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} (\{X=k\} \cap \{Y=k\})}$$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} (\{X=k\} \cap \{Y=k\})\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=k\}) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k)$$



(X,Y) vect^R aléatoire sur $\{1,n\}^2$.

$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\quad \mathbb{P}((X,Y)=(i,j)) =$

$= \mathbb{P}(X=i, Y=j)$

$= \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{n^2}$.

2) $\mathbb{P}(X \geq Y)$?

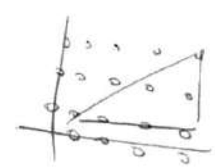
2 écritures

$$\{X \geq Y\} \overset{①}{=} \bigcup_{\substack{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \\ i \geq j}} \{X=i, Y=j\} \overset{②}{=} \bigcup_{k=1}^{n} (\{X=k\} \cap \{Y \leq k\})$$

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y \leq k\})$$

$$= \sum \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y \leq k) = \sum \frac{1}{n} \times \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$



$\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\mathbb{P}(X=Y) \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$$

3) Déterminer la loi de $\mathbb{P}(X+Y)$.

- Loi discrète à valeurs ds $\{2, \dots, 2n\}$.
- $\forall k \in \{2, \dots, 2n\}$;

Rq : $\sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(X+Y=k) = 1$.

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{l=1}^{k-1} (\{X=l\} \cap \{Y=k-l\})$$

$$= \bigcup_{l=l_-(k)}^{l_+(k)} \{X=l\} \cap \{Y=k-l\}$$

car $\left.\begin{array}{l} 1 \leq l \leq n \\ 1 \leq k-l \leq n \end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow k-n \leq l \leq k-1$ max

$\Leftrightarrow \underbrace{\max\{1, k-n\}}_{l_-(k)} \leq l \leq \overbrace{\min\{k-1, n\}}^{l_+(k)}$

NB : Rédacθ pr loi à densité : si $Z = \varphi(X,Y)$.

$\mathbb{E}(h(Z)) = \int_{\mathbb{R}} h(z) f_Z(z)\,dz$ h bornée mesurable.

$= \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y) f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{l_+(k) - l_-(k) + 1}{n^2}$$

$$= \frac{\min\{k-1, n\} - \max\{1, k-n\} + 1}{n^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leq n+1 \\ \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k > n+1. \end{cases}$$

Ex6 D'après CCP 1998.

Soit 2 variables X & Y à valeurs ds $\mathbb{N}$, on sppse

$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$: $\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$

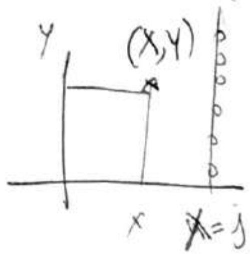
Cette qtté est la loi jointe du couple de va (X,Y) dont X & Y st les marginales.

1) Cff, déterminer loi de X & loi de Y.
Les variables X & Y st elles indép ?

$$\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

→ loi de X, loi discrète à val^{rs} ds $\mathbb{N}$

Calculer $\mathbb{P}(X=j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$.



$$\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{X=j, Y=k\}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!} = \frac{(1/2)^j}{e\, j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{e\, j!}\left[j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{(1/2)^j}{e\, j!}\left[j e^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

$$= \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!}\left(j + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X=j)$$

Vérifions : $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j) = 1 = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/2)^j}{e^{1/2}\, j!}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$= \frac{(1/2)^k}{e^{1/2}\, k!}\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Mq X & Y st indépendantes.

si $\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \mathbb{P}(X=j)\, \mathbb{P}(Y=k)$

$$\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!} = \left(j+\frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{e^{\frac{1}{2}}\, j!} \left(k+\frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{e^{\frac{1}{2}}\, k!}$$

$j+k = \left(j+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$ FAUX.

2) Mq $\mathbb{E}[2^{X+Y}] < \infty$, & la calculer.

(R) X est discrète à val^{rs} ds $\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g(k)\, \mathbb{P}(X=k)$$

si (X,Y) est discrète à v^{rs} ds $\mathbb{N}^2$

$$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} h(j,k)\, \mathbb{P}(X=j, Y=k)$$

$$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} h(j,k)\, \mathbb{P}(X=j, Y=k),$$

$h(X,Y) = 2^{X+Y}$ $\quad h$ mesurable positive.

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)}{e\, j!\, k!} = \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j}{j!\,k!} + \sum_{\substack{k=0\\1}}^{\infty}\frac{k}{j!\,k!}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{j}{j!}e + \frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = 2e$$

NB : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$.

- Z est intégrable si $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$.
- si Z est $\oplus$, $\mathbb{E}(Z)$ a un sens ds $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Ex 7 : Minimum de lois géométriques

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ & $p \in]0,1[$, on considère N variables indépendantes $X_1, \dots, X_N$ chacune de loi géom de param p.

1) soit $i \in \{1, \dots, N\}$ & $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$

$N \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{G}éo(p)$ indép $1 \leq i \leq N$

$\mathbb{P}(X_i = n) = p(1-p)^{k-1}$

$\{X_i \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_i = k\}$.

1^ière

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_i = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \times 1 \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$

$$= 1-(1-p)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_i > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= (1-p)^n$$

2) On déf $Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i$,

ie $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\{X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)\}$.

(i) $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y > n)$.

ed $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$

$$\mathbb{P}(Y > n) = \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq N} X_i > n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} \{X_i > n\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i > n) \quad \text{car les } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ st indep}$$

$$= [(1-p)^n]^N = (1-p)^{Nn}.$$

ed $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Y > n) = 1 - (1-p)^{Nn}$$

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n-1)$$

$$= 1 - (1-p)^{Nn} - (1 - (1-p)^{N(n-1)}$$

$$= -(1-p)^{Nn} + (1-p)^{Nn-N}$$

NB : si $X \sim \mathcal{G}eo(p)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $\underbrace{\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n}_{\text{f de survie}}$

(ii) Y admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

Y admet une espérance finie.

$0 \leq Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i \leq X_1$ & X_1 est intégrable

$\Rightarrow$ Y est intégrable.

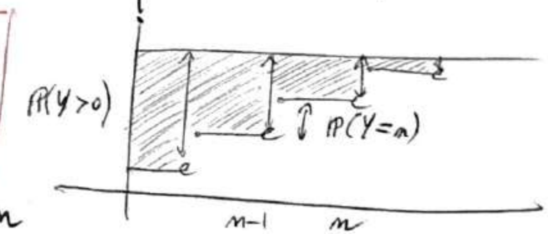
NB : $\mathbb{P}(Y > n) = [(1-p)^N]^n = [1 - (1 - (1-p)^N)]^n$

$= (1-q)^n$

f de survie ⇒ détermine la loi

$Y \sim \mathcal{G}eo(q)$ $\quad q = 1 - (1-p)^N$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y > n)}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)^N)^n$$

$$= \frac{1}{1 - (1-p)^N} = \frac{1}{q}$$

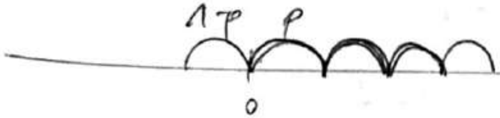
III / Borel-Cantelli

(X_n) suite var ind tq $\mathbb{P}(X_i=+1)=p$

$\mathbb{P}(X_i=-1)=1-p=q$

$0<p<1$ $\quad p\neq \frac{1}{2}$ $\quad$ retour à 0.

On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\quad A_n=\{S_n=0\}$.



A = "on repasse une infinité de fois en 0".

Prouver $P(A)=0$.

$\Leftrightarrow$ à proba 1, à partir d'un certain rg, on ne repasse pas en 0.

$\rightarrow$ Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

- $\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(S_n=0)$
- n impair : $A_n=\emptyset$, $\mathbb{P}(A_n)=0$
- n pair : $n=2k$ $\quad \mathbb{P}(A_{2k})=\mathbb{P}(S_{2k}=0)$

$$\{S_{2k}=0\}=\bigcup_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq 2k}\{X_{i_j}=1 \quad 1\leq j\leq k,\ X_i=-1,\ i\in\{1,\dots,2k\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}\}$$

$$=\bigcup_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}}\{X_i=1,\ i\in I \text{ et } X_j=-1,\ j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I\}$$

$$\mathbb{P}(A_{2k})=\mathbb{P}(S_{2k}=0)$$

$$=\sum_{I\subset\{1,\dots,2k\}}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i=1\}\cap\bigcap_{j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I}\{X_j=-1\}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}}\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=1)\times\prod_{j\in\{1,\dots,2k\}\setminus I}\mathbb{P}(X_j=-1)$$

$$=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,2k\}\\ \mathrm{card}(I)=k}} p^{\mathrm{card}(I)}q^{2k-\mathrm{card}(I)}=C_{2k}^{k}p^k q^k$$

$$=\frac{(2k)!}{(k!)^2}(p(1-p))^k$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ → crit de d'Alembert
→ FF de Sterling $(n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$u_{2k} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2k}}{(\sqrt{2\pi k})^2} \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\left(\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^2} p(1-p)^k$$

$$= \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} (p(1-p))^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \underbrace{[4p(1-p)]^k}_{<1}$$

terme général d'une série CV pour $p \neq \frac{1}{2}$.

<u>Crit de d'Alembert</u>

$$u_{2k} = \frac{(2k)!}{k!^2} (p(1-p))^k, \quad \frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} = \frac{\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} [p(1-p)]^{k+1}}{\frac{(2k)!}{k!^2} [p(1-p)]^k}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{2k!} \times (2k+1)(2k+2)}{\cancel{k!^2}\,(k+1)^2}}{\frac{\cancel{2k!}}{\cancel{k!^2}}} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \cdot (p)(1-p) \xrightarrow[k\to\infty]{} 4p(1-p) < 1$$

sinon $= 1$ si $p = \frac{1}{2}$ or $p \neq \frac{1}{2}$.

<u>BC1</u> $\sum_{n=1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0$ de proba 1, à partir d'un certain rang, on ne repasse plus par l'origine.

<u>NB</u> si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \geq 0$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ & $\sum_{n\geq 1} v_n$ st de m. nature.

Ex 11 : soit $\alpha > 0$, considérons suite de va indép. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$$

1) Mq $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$

$(X_n) \sim \mathcal{B}ern\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

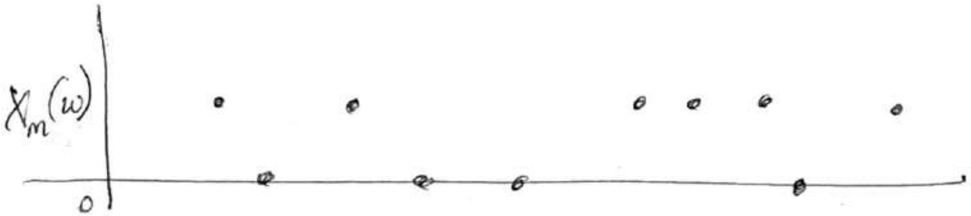
$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv ps $\to X$ si $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

Étudier cv ps de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rq $X = \lim_{n\to\infty} X_n \iff X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv p.s. vers X si $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$



Indic° : $A_n = \{X_n = 1\} = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 1\}$

• $\alpha > 1$: $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.

BCI : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0$

$\iff \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) = 1$ or $A_m^c = \{X_m = 0\}$.

Donc presque sûrement à p d'un certain rang, les X_n sont tous nuls $\Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv ps vers 0.

• si $\alpha \leq 1$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ + indépdce des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 1$, les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prennent ∞t la valeur 1 de proba 1 mais $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne pt pas cv ps vers 1 car sinon $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = 1$ par Th cva Dominée.

TD-5 Variables à densité

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

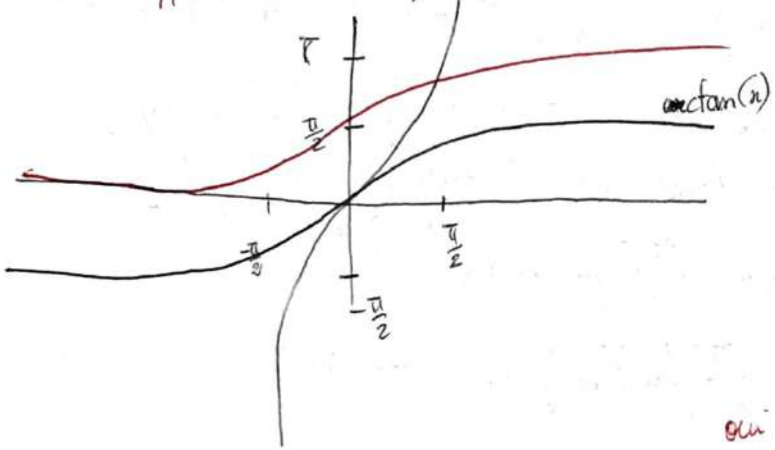
1/ Autour de la f de répartiO

⚠ 1 Les fs suivantes st-elles ds fs de RépartiO d'une VaR

$F(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pas du tout.

N'est pas f positive, ou ↗.

$G(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$

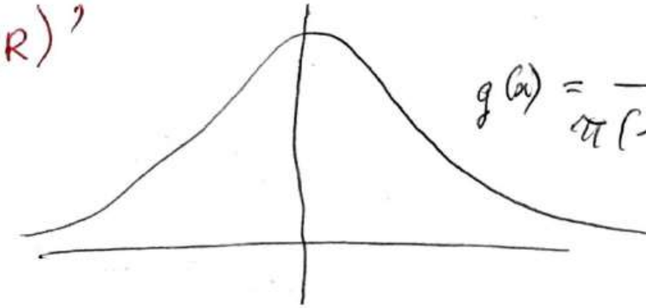


oui FdR / f de répartiO.

- ↗
- ≥ 0
- $\lim_{-\infty} G = 0$
- $\lim_{\infty} G = 1$

densité = (FdR)'

densité de G

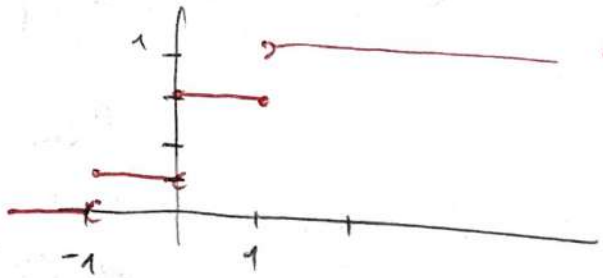


$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

N'a pas d'espérance car $\int g(x) = \infty$

(cont à droite, limité à gauche ⟺ mesure de proba).

$H(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,0[}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)$



H n'est pas FdR car n'est pas continue à droite en 1.

Ex2 : X (var), $X \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

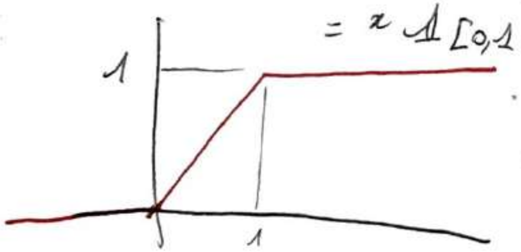
1) Qu'est la f de Répartition de X.

(Rp) $X \sim \mathcal{U}nif([0,1])$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{P}(X \in B) = \lambda(B \cap [0,1])$ où λ : mesure de Lebesgue.

(Rp) Sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
$X \sim \mathcal{U}nif(D)$ si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

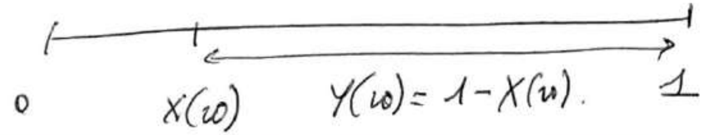
$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{\lambda_d(B \cap D)}{\lambda_d(D)}.$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lambda(]-\infty, x] \cap [0,1])$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
$$= x \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$$



Densité : $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$

2) Déterminer loi $Y = 1 - X$



$\boxed{\text{Loi var ? } \leftarrow \text{Déterminer } f d R^{o}}$

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(1 - X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq 1 - x)$$
$$= \lambda([1-x, \infty[\cap [0,1]) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1-x < 0 & = 1 - F_X^-(1-x) \\ x & \text{si } 0 < 1-x \leq 1 & = 1 - F_X(1-x) \\ 0 & \text{si } 1-x > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

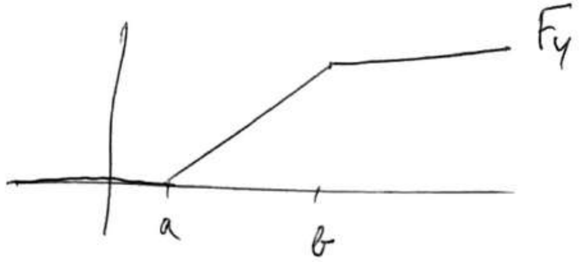
$$\Rightarrow \boxed{F_Y(x) = F_X(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

NB $\mathbb{P}(X \geq 1 - t) = 1 - \mathbb{P}(X < 1 - t) = 1 - F_X^-(1-t)$
$$= 1 - F_X(1-t)$$
$$= \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } 1-t < 0 \\ 1 - (1-t) & \text{si } 0 \leq 1-t < 1 \\ 1 - 1 & \text{si } 1-t \geq 1. \end{cases}$$

ii) $Y = a + (b-a)X$, $a < b$.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

$Y \sim \mathrm{Unif}([a,b])$



Ex3 : X var de fdr F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où $c \in \mathbb{R}$.

1) Calculer FdR de Z

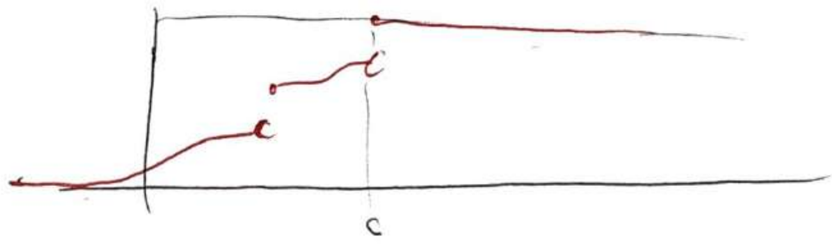
$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\min(X,c) \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X \leq c\})$$
$$+ \mathbb{P}(\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\})$$

si $c \leq x$: $\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\} = \{X > c\}$

si $c > x$ $\{\min(X,c) \leq x\} \cap \{X > c\} = \emptyset$.

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq x) & \text{si } x < c \\ \mathbb{P}(X \leq c) + \mathbb{P}(X > c) = 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

$Z(\omega) \leq c$ $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(Z \leq c) = 1$.



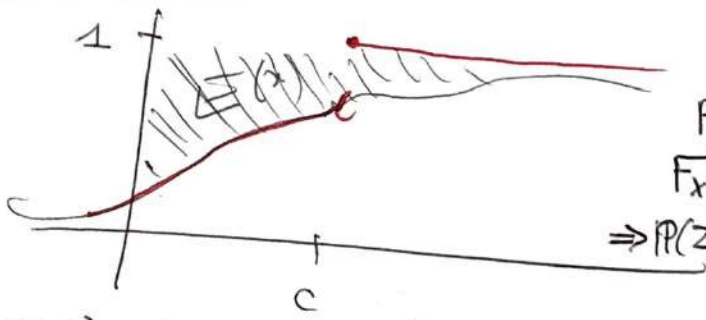
lire la limite à gauche.

$\mathbb{P}(Z = c) = \mathbb{P}(\min(X,c) = c) = \mathbb{P}(X \geq c)$.

2) si la loi de X a μ densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

si $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)}$

$= F_X(x) - F_X^-(x) = 0$ si F_X est cont.



Dc Z n'est pas à densité si $F_X(c) < 1$

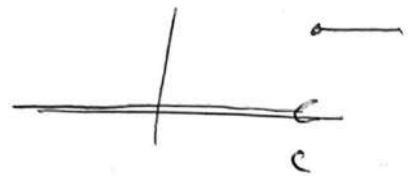
$\Rightarrow \mathbb{P}(Z = c) = \mathbb{P}(X \geq c) > 0$

si $F_X(c) = 1$, $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, $Z = X$ ps.

La loi de Z n'est pas une loi discrète si :

$F_X(c) > 0$, si $\mathbb{P}(X<c) = 0$, $Z=c$ ps

si $F_X(c) \in]0,1[$



alors la loi de Z n'est ni discrète ni à densité. (@ tps d'attente de bus, je pars au bout de 5 min si pas là).

Ex 4 : soit X va, $X \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

$$Y(w) = \begin{cases} X(w) & \text{si } X(w) \in [0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4},1] \\ 1-X(w) & \text{si } X(w) \in]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[\end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

$x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$

$= \mathbb{P}(\{Y \leq x\} \cap \{X \in [0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4},1]\})$

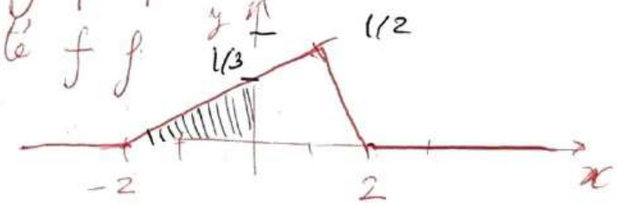
$+ \mathbb{P}(\{Y \leq x\} \cap \{X \in]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[\})$

$f_X(x) = -\frac{1}{2}(x-2)$ pr $x \in [1,\infty[$.

Ex 5 Variables aléatoires à densité

Interprétation du graphique d'une densité

Si va X a pr densité f



1) En exploitant les infos, donner v

1) En exploitant les infos, donner v$^{\text{rs}}$ des probas :

$\mathbb{P}(X \leq -2) = 0$ $\quad \mathbb{P}(X=-1) = 0$ $\quad \mathbb{P}(X \in [-2,0])$

$\mathbb{P}(X > 1)$ $\quad \mathbb{P}(X \geq 1)$ $\quad \mathbb{P}(|X| > 1)$

$\mathbb{P}(X \in [-2,0]) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X \geq 1)$.

$\mathbb{P}(|X| \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(X \leq -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

2) Déterminer f de répartition de X.

$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ $\quad$ si $t < -2$, $F_X(t) = 0$

si $t \geq 2$, $F_X(t) = 1$

$f_X(x) = \frac{1}{6}(x+2)$ pr $x \in [-2,1]$, $f_X(x) = 0$ si $x < -2$

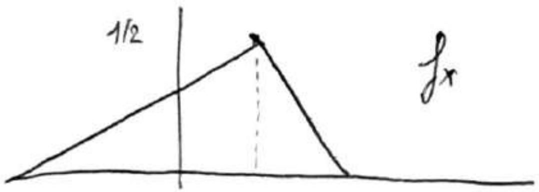
$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{6}(x+2)\,dx = \int_{-2}^{t} \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\,dx$

ou $= \frac{1}{2}(t+2) \times \frac{1}{6}(t+2) = \frac{1}{12}(t+2)^2$

Pour $t \in [1,2[$,

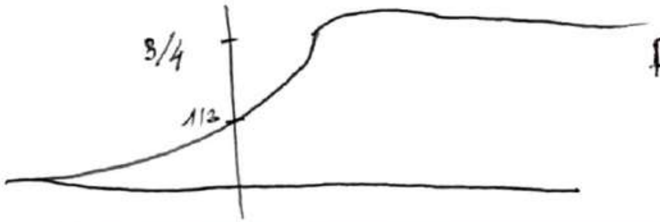
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-2}^{t} f_X(x)\,dx = \frac{3}{4} + \int_{1}^{t} f_X(x)\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2-t) \times \frac{1}{2}(2-t) = 1 - \frac{1}{4}(2-t)^2.$$



$F_X(0) = \frac{1}{3}$

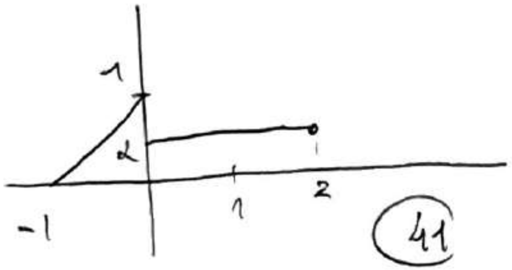
$F_X(1) = \frac{3}{4}$.



Ex 6 : X (var) f d $R^?$ F donnée p

$\forall u \in \mathbb{R}$, $F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt$, $f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si } t \in]0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Représenter f



$F_X(t) = 0$ si $t < -1$.

$F_X(t) = \int_{-1}^{t} (1+x)\,dx$ si $t \in [-1,0[$

$= \frac{1}{2}(1+t)^2$

$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ si $t \in [0,2[$

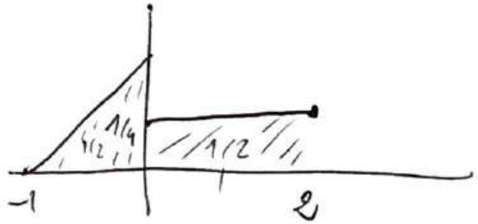
$= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \alpha t$ si $t \in [0,2[$

$F_X(t) = 1$ si $t \geq 2$.

$F_X(t)$ est cont car X est à densité.

$\Rightarrow F_X(2) = \frac{1}{2} + 2\alpha = 1$.

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$



TD 6 Ex 8 Calculer $\lim_{n\to\infty}$ de $\longrightarrow$ TCD / CV monotone

$$a_n = \int_{[-n,n]} \frac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$$

↳ TU de CVce dominée.

- si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{simple}} f$
- si $|f_n| \leq g$ & g intégrable :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Prenons $f_n(x) = \dfrac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2}\,\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$.

- CVce simple : si $x \in \mathbb{R}$, pr n assez grand ($n > \lceil |x| \rceil$)

$$f_n(x) = \frac{\arctan\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

- $|f_n(x)| \leq \dfrac{\pi/2}{1+x^2} = g(x)$ & g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

P le $\boxed{\text{T. CD}}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,[\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi^2}{4}$.

$$b_n = \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,dx = \int_{[0,1]} g_n(x)\,dx$$

$g_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

- si $x \in]0,1]$, $0 \leq \dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \leq \dfrac{1+nx^2}{1+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ($n \geq 2$, $x \neq 0$)

- $\dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = (1+nx^2)\,e^{-n\ln(1+x^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

g_n CV simplement sur $[0,1]$ vers g où $g(x) = 1 - \mathbb{1}_{]0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$|g_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

← intégrable sur $[0,1]$

$\boxed{\text{TCD}}$ $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 0$

$$c_n = \int_{[0,\infty[} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}\, dx, \quad h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}} \quad x \in [0,\infty[$$

$$(1+x^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^n)} = \begin{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{\frac{1}{n}\ln x^n + \frac{1}{n}(\ln(1+\frac{1}{x^n}))} \xrightarrow[n\to\infty]{} x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x(1+x^2)} \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)$$

$\forall x \in [0,\infty[, \quad h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(x)$

- Dominat° : $0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $[0,\infty[$.

$\boxed{TCD}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n(x)\, dx = \int_0^\infty h(x)\, dx.$$

$$\int_0^\infty h(x)\, dx = ?$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

racine

pas racines réelles.

$$\int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \Big[\ln x\Big]_1^A - \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_1^A$$

$$= \ln A - \frac{1}{2}\ln(1+A^2) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{1}{2}\ln 2 \xrightarrow[A\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^\infty h(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$d_n = \int_{[a,\infty[} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx, \quad a>0$$

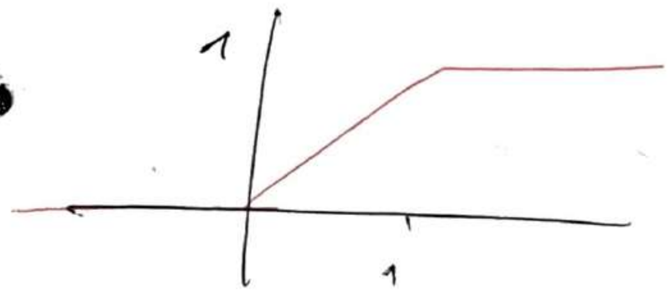
- Cvce simple : $k_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- Dominat : $0 \le k_n(x) \le \frac{n}{n^2x^2} \le \frac{1}{nx^2} \le \frac{1}{x^2}$ intégrable sur $[a,\infty[$.

$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$

Ex 8 loi de Rayleigh

soit U var, $U \sim Unif([0,1])$.

1) Rappeler f de R° F_U de U.



$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

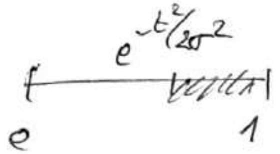
, soit σ un réel st positif, on déf nouvelle var X t.q. $X = \sigma\sqrt{-2\ln U}$.

2) Calculer fdR de X, F_X. $\forall t\in\mathbb{R}$.

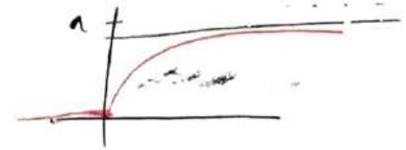
$F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \mathbb{P}(\sigma\sqrt{-2\ln U} \le t)$

$= \mathbb{P}\left(\sqrt{-2\ln U} \le \frac{t}{\sigma}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \mathbb{P}\left(-2\ln U \le \frac{t^2}{\sigma^2}\right) & \text{si } t\ge 0 \end{cases}$

si $t\ge 0$, $\mathbb{P}\left(U \ge e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}\right) = 1 - e^{-t^2/2\sigma^2}$



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} & \text{si } t\ge 0. \end{cases}$$



⚠ si pas cont ⟹ pas à densité !

F_X est cont & F_X est dérivable sauf en un nbr fini de pts ⟹ X est à densité & sa densité est

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$$

4) ed sans calcul $\int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx$

$$\sigma^2 \underbrace{\int_0^\infty f_X(x)\,dx}_{1} = \sigma^2$$

3. Loi normale

Ex 10 : Notes contrôle de proba $\sim$ loi normale.

$$\mathcal{N}\left(\frac{17}{2}, 4\right) = \mathcal{N}(8,5 ; 4)$$

1) Qu'est la proba pr étudiant d'avoir la moyenne ?

$P(X \geq 10)$ si $m = 8,5$, $\sigma^2 = 4$.

$\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-8,5}{2} \geq \frac{10-8,5}{2}\right) =$$

$Z \sim \frac{X-8,5}{2}$ 4. : $P\left(Z \geq \frac{3}{4}\right) = 1 - P(Z \leq 0,75)$

$= 1 - 0,77337$.

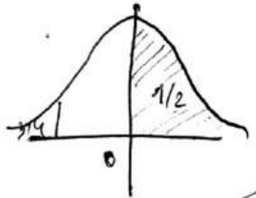
2) On vt améliorer les notes à l'aide d'une transformat° affine $Y = aX + b$. Déterminer a & b pr qu'un étudiant ait la moyenne ay une proba de $\frac{1}{2}$ & une note supérieure à 8 ay proba $\frac{3}{4}$.

$Y = aX + b$

$P(Y \geq 10) = \frac{1}{2}$

$P(Y \geq 8) = \frac{3}{4}$

$X \sim \mathcal{N}(8,5 ; 4)$



$P(aX+b \geq 10) = \frac{1}{2}$ $\cancel{\Leftrightarrow P\left(X \geq \frac{10-b}{a}\right) = \frac{1}{2}}$

$\cancel{\Leftrightarrow P\left(\frac{X-8,5}{2} \geq \frac{1,5-b}{2a}\right)}$

$\cancel{\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{1,5-b}{2a}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1,5-b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}}$

$$P\left(X \geq \frac{10-b}{a}\right) = P\left(\frac{X-8,5}{2} \geq \frac{\frac{10-b}{a} - 8,5}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{10-b-8,5a}{2a}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{10 - b - 8,5a = 0}$$

$$P(Y \geq 8) = P\left(X \geq \frac{8-b}{a}\right) = P\left(Z \geq \frac{\frac{8-b}{a} - 8,5}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{8-b-8,5a}{2a}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{8-b-8,5a}{2a} = -0,68$$

$$a(\underbrace{2 \times 0,68}_{1,36} - 8,5) + 8 - b = 0.$$

$$\begin{cases} -8,5a + 10 - b = 0 \\ -7,14a + 8 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{0,68} \\ b = 10 - \frac{8,5}{0,64} \end{cases}$$

Ex 11 : lois normales & indépendance

1) Un employé E quitte tôt 8h30. Durée moy 25 min, écart type 10 min.
Q^elle est la proba qu'il arrive avt 9h à lieu trvl ?

$T_E \sim \mathcal{N}(25, 10^2)$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\mathbb{P}(T_E \leq 30) = \mathbb{P}\left(\frac{T_E - 25}{10} \leq \frac{30-25}{10}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

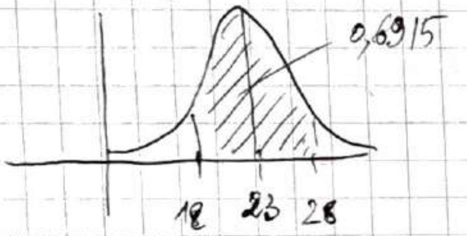
$$= 0{,}69146$$

2) Employé F, train 8h20 $T_T = 23$ min, $\mathbb{P}(18 \leq T_T \leq 28) = 0{,}6915$
bus 8h45 $T_B = 14$ min, $\sigma_B = 2$ min.

σ_T ? Q^elle proba F arrive avant 9h ?

X_T : trajet en train : $\mathbb{E}(X_T) = 23$ min, $\mathbb{P}(18 \leq X_T \leq 28) = 0{,}6915$

X_B : trajet en bus



$$\mathbb{P}\left(\frac{-5}{\sigma_T} \leq \frac{X_T - 23}{\sigma_T} \leq \frac{5}{\sigma_T}\right) = 0{,}6915$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{\sigma_T}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sigma_T}\right)$$

$$= 2\,\Phi\left(\frac{5}{\sigma_T}\right) - 1 = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sigma_T}\right) = 0{,}85575$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sigma_T} \approx 1{,}02$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T = 4{,}902$$

$$\{F \text{ arrive avant } 9^h\} = \{X_T \leq 25\} \cap \{X_B \leq 15\}$$

$$\mathbb{P}(\{F \text{ arrive avt } 9^h\}) = \mathbb{P}(X_T \leq 25) \cdot \mathbb{P}(X_B \leq 15)$$

$$= 0{,}6591 \times 0{,}69146$$

$$= 0{,}456.$$

3) Seuls E & F ont une clé de leur lieu de travail.
Q^elle est la proba que agence ouvre avt 9h ?

$A_E = \{T_E \leq 30\}$

$A_F = \{F \text{ arrive avt } 9^h\}$

$$\mathbb{P}(A_E \cup A_F) = \mathbb{P}(A_E) + \mathbb{P}(A_F) - \mathbb{P}(A_E \cap A_F)$$

$$= \mathbb{P}(A_E) + \mathbb{P}(A_F) - \underbrace{\mathbb{P}(A_E)\,\mathbb{P}(A_F)}_{\text{indépdce}}$$

$$= 0{,}832$$

4) À qθ des hypo ils choisi è n'est tj 2 pr ouverture

$$\mathbb{P}(A_E \cap A_F) = \mathbb{P}(A_E)\,\mathbb{P}(A_F) = 0{,}315$$

5) On rappelle, hyp des tps ∃. Est-il raisonnable de modéliser un tps de trajet p loi normale ?

$$\mathbb{P}(X_T \leq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{X_T - 23}{\sigma_T} \leq \frac{-23}{\sigma_T}\right) \approx 10^{-6}$$

) = 0

A_n ligeable.

finie)

$[n, \infty[\,(x)$.

∞

DV

n

a

3. TD-6- Intégrale de Lebesgue

1 Intégrale de Lebesgue

Ex1 Quizz

1) La somme de 2 fs intégrables est-elle intégrable ?

Vrai, f intégrable, g intégrable $0 \le |f+g| \le |f| + |g|$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ intégrable mais $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ n'est pas intégrable.

2) Carré f integ. est-il integ ? Faux

2) f de carré intégrable est-il intég

Faux $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ intégrable, $f(x) = \frac{1}{x}$ mais $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ DV

Rq si X est de carré intégrable $\Rightarrow X$ est intégrable.

$\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{|X| \le 1\}}) + \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{|X| > 1\}})$$
$$\le \mathbb{P}(|X| \le 1) + \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X| > 1\}})$$
$$\le 1 + \mathbb{E}(X^2) < \infty$$

3) La composée de 2 fs intégrable est-elle intégrable ?

ca $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto x^2$, $g :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

4) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sdf positives convergeant simplement vers f. Sppo $\exists$ cte K tq $\int f_n d\mu \le K \ \forall n$. Mq $\int f d\mu \le K$.

L de Fatou : $\int_E \liminf f_n d\mu \le \liminf \underbrace{\int_E f_n d\mu}_{\le K} \le K$

$= \int_E f d\mu$

Ex 3 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$, $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$.

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ g(-x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Mq $\int_{[-1,1]} \liminf f_n d\lambda < \liminf \int_{[-1,1]} f_n d\lambda$.

↳ On vt mq $\int_{[-1,1]} \liminf f_n d\lambda \neq \liminf \int_{-1}^1 f_n d\lambda$

$a \neq b$

a) $\liminf_{x \in [0,1]} f_n(x)$

b) $\int_{-1}^1 f_n d\lambda = \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{\{2\mathbb{N}\}}(n) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{\{2\mathbb{N}+1\}}(n) \mathbb{1}_{[0,1]}(-x) \, d\lambda(x)$

$= \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n) + \mathbb{1}_{2\mathbb{N}+1}(n) = 1$ de $\liminf = 1$

Ex 4 : Un critère d'intégrabilité

Spps μ mesure finie, $f : E \to \mathbb{R}$ f mesurable.

$A_n = \{x \in E, |f(x)| \geq n\}$, $B_n = \{x \in E, n \leq |f(x)| < n+1\}$

Mq prop° st équivalentes. 1) f f intégrable

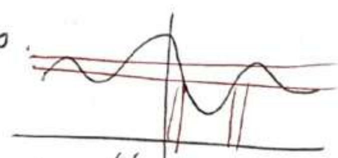
2) $\sum_{n \geq 0} n \mu(B_n)$ CV

3) $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$ CV

$\boxed{\text{Mq } 1) \Rightarrow 2)}$

f intégrable $\Rightarrow \int_E |f(x)| \, d\mu(x) < \infty$.

On a facilement $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$,



est + petit l'aire du $\int |f| \, d\mu$ que B_n rectangle q minore f sur ces B_n.

$$\int_E |f| \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} |f| \, d\mu > \sum_{n=0}^{\infty} n \mu(B_n).$$

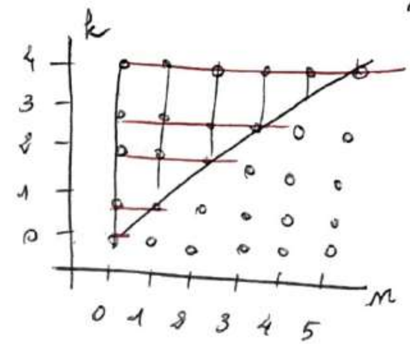
$+\infty > \ldots$ d'où la CV.

Mq 2) $\to$ 3)

$B_n = A_n \cap A_{n+1}^c$, $A_n = \bigcup_{k \geq n} B_k$ car $\cup$ disjointe

$$\Rightarrow \sum \mu(A_n) = \sum \mu\left(\bigcup_{k \geq n}^{\infty} B_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \geq n}^{\infty} \mu(B_k)$$

on interv. les itérandes $$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \leq k}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mu(B_k)$$ → on ed facilem^t ce que l'on veut.



∩ ∩ ∪ si $n \in \mathbb{R}$

Mq 3) $\to$ 1)

Hypo : $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \overset{\text{(L) Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 0$

$= \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n^c\right) = \mu(E)$ pp μ x car A_n négligeable.

$\Rightarrow$ pp f est bornée $\Rightarrow$ f est intégrable (car μ finie)

Ex 5 : $n \geq 0$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ p $f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[n,\infty[}(x)$.

1) Les f_n st-elles intégrables sr $\mathbb{R}$?

Non, en effet à n fixé ≥ 0 :

$$\int \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[n,\infty[}(x) \, dx = \int_n^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_n^{\infty} \text{ DV}.$$

2) Ds Th de CV monotone, pt-on remplacer "↗" p "monotone" ?

Non, en effet ici à x fixé, suite $(f_n(x))_n$ ↘

car $\lim \int f_n = \infty$ DV

et $\int \lim f_n \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$] Absurde.

3) Mq si on spps $\exists\ n_0$ tq $\int f_{n_0}\,d\mu < \infty$, le Th de CVce monotone $\bar{E}$ s'appliq églmt aux suites décroissantes de f positives.

$g_n : f_{n_0} - f_n \to$ positive $\nearrow$

On appliq CV monotone à g_n & on a ce qu'on veut (en utilisant CV & en argumentant).

Ex6 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ f réelle, mesurable, $s^T > 0$ & intégrable sur $\mathbb{R}$. soit $a \in \mathbb{R}_*^+$,
Mq $\exists$ constante c (à déterminer) tq

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right) dx = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ c & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < a. \end{cases}$$

Regardons CV simple (en f de a)

$\forall x \in \mathbb{R}$ (x fixé) : $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \left(\frac{f(x)}{n}\right)^a = \frac{f^a(x)}{n^{a-1}}$

- $a \in]0,1[$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$
- $a = 1$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- $a \in]1,\infty[$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

• CVce des intégrales (intervertir limite intégrale)

▶ $\underline{a = 1}$: $0 \leq f_n(x) \leq n \cdot \frac{f(x)}{n} = f(x) \leftarrow$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{TCD}}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = c$$

On pt tjrs dire : $0 \leq f_n(x) \leq n \frac{(f(x))^a}{n^a} = \frac{(f(x))^a}{n^{a-1}}$

$\underline{\text{si } a \geq 1}$: $0 \leq f_n(x) \leq (f(x))^a$

$\underline{\text{si } a < 1}$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} n^{1-a} f^a(x) \to$ Th CV monotone

$\rightsquigarrow$ si $a \geq 1$: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$, f positive

f est $\underline{\text{cont}}$ et si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \ell = 0$.

$\exists\, x_0 > 0$ tq $\forall x \in]-\infty, -x_0] \cup [x_0, \infty[$
$0 < f(x) < 1$.

$\Rightarrow f^a(x) \leq f(x) \Rightarrow$ si $|x| > x_0$ alors
$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ intégrable en $\pm\infty$.

& on pt appliquer le $\boxed{\text{TCD}}$

$\Rightarrow \lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n = 0$.

* Mq monotonie pr $a \in]0,1[$.

$$a_n = n \cdot \log\left(1 + \frac{\alpha}{n^a}\right), \quad \alpha = f(x).$$

Monotonie en n.

$g(x) = x \cdot \log\left(1+\frac{\alpha}{x^a}\right)$ $g \nearrow$ sur $]0,\infty[$ pr $a<1$.

$$g'(x) = \log\left(1+\frac{\alpha}{x^a}\right) + x \frac{\alpha(-a\, x^{-a-1})}{1+\frac{\alpha}{x^a}}$$

$$g'(x) = \log\left(1+\frac{\alpha}{x^a}\right) - \frac{\alpha a}{x^a+\alpha}.$$

$$g''(x) = \frac{\alpha(-a\, x^{-a-1})}{1+\frac{\alpha}{x^a}} + \frac{\alpha a^2 x^{a-1}}{(x^a+\alpha)^2}$$

$$= \frac{-\alpha a}{(x^a+\alpha)x} + \frac{\alpha a^2 x^{a-1}}{(x^a+\alpha)^2}$$

$$= \frac{-\alpha a(x^a+\alpha) + \alpha a^2 x^a}{(x^a+\alpha)^2 x} = \frac{-\alpha a}{(x^a+\alpha)^2 x} \cdot \underbrace{(x^a(1-a)+\alpha)}_{\geq 0}$$

≤ 0.

$g'' \leq 0$ sur $]0,\infty[$. g' est $\searrow$ comme

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0,\infty[$

$\Rightarrow g$ est $\nearrow$ sur $]0,\infty[$.

$g(n) \leq g(n+1) \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$

Ex 11 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée est bornée sur $[a,b]$.

Mq f' est intégrable sur $[a,b]$ & que

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Indic : $g_n(x) = n\, \mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}(x)\left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)$.

RQ $\bigcup_{n\geq 1} [a, b-\frac{1}{n}[= [a,b[$

$\bigcap_{n\geq 1} [a, b+\frac{1}{n}[= [a,b]$.

$x \in [a,b[$

$$g_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{cv.\ simpl.} f'(x)$$

Pour n assez grand (tq $x < b-\frac{1}{n}$, $n \geq \left\lceil \frac{1}{b-x} \right\rceil$)

$x = b$, $g_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)\, \mathbb{1}_{[a,b[}(x).$$

$$\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{1/n} = f'(\theta_{x,n})$$

$\theta_{x,n} \in]x, x+\frac{1}{n}[$

si $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left| \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \right| \leq M$

Comme $|g_n(x)| \leq M$ TCD

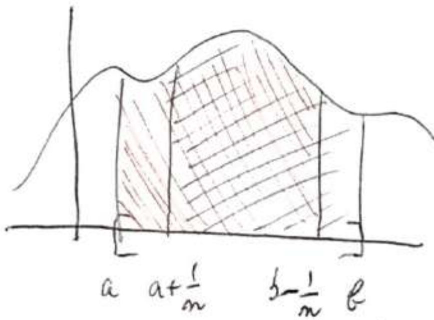
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Reste à calculer : $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$

$$\int_a^b g_n(x)\,dx = n \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\ dx$$

$$= n \left[\int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x+\tfrac{1}{n})\,dx - \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx \right]$$

$$= n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx - \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx \right] = n \int_{b-\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$



$\forall x \in [b-\frac{1}{n}, b]$

$$\min_{x\in[b-\frac{1}{n},b]} f(x) \leq f(x) \leq \max_{x\in[b-\frac{1}{n},b]} f(x)$$

$$\min_{x\in[b-\frac{1}{n},b]} f(x) \leq n \int_{b-\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx \leq \max_{x\in[b-\frac{1}{n},b]} f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(b)$$

$\xrightarrow{n\to\infty} f(b)$

f cont sur $[a,b]$ car f cont.

Ex 3 : Mesure de dirac

1) soit $a \in \mathbb{R}$, on déf $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Mq l'appli° δ_a est une mesure sur $\mathbb{R}$, appelée la mesure de Dirac en a.

(cf ex2. fiche 3) disj° cas $\exists i, a \in A_i$ —
$\nexists i, a \notin A_i$ —

RP (D) (mesure) $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ $\to \mu(\emptyset) = 0$
$\to \mu(\sqcup A_n) = \sum \mu(A_n)$ ↑ sté dsté ens mes.

(ii) Quelles sont les pies de $\mathbb{R}$ négligeables pr δ_a ?

Ens de mesure nulle. $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$.
Les négligeables sont les boréliens de $\mathbb{R}$ q ne contiennent pas a.

(iii) soit f borélienne. Calculer $\int f \, d\delta_a$.

$$\int_{\mathbb{R}} f \delta_a \xrightarrow{\text{se ramener}} f = \mathbb{1}_B, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

si $f = \mathbb{1}_B$, $\int \mathbb{1}_B \, d\delta_a = \delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$= \mathbb{1}_B(a) = f(a)$.

→ On passe aux fs étagées $\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}}$ positives.

- Puis aux fs mesurables positives (lim croissante de fs étagées)
- Puis aux fs mesurables $f = f_+ - f_-$

$$\Longrightarrow \int f \, d\delta_a = f(a)$$

Ⓡ si $X \sim \mathrm{Unif}(\{x_1, \dots, x_n\})$ alors la loi de X est $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \delta_{x_i} = P_X$.

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{n} \operatorname{card}(A \cap \{x_1, \dots, x_n\}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(A)$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d\delta_{x_i}(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int x \, d\delta_{x_i}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$, on déf l'appli υ_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

p $\upsilon_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n} \delta_k(B)$.

(i) Mq υ_n est une mesure de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\upsilon_n(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} \delta_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} = 1$$

(ii) soit X une v.a.r de distribution $\mathbb{P}_X = \upsilon_n$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer proba $\mathbb{P}(X=x)$

$\upsilon_n = P_X \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$. $\quad B = \{j\}$

$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X=j) = \upsilon_n(B) = \frac{C_n^j}{2^n} \quad \forall j \in \{0,\dots,n\}$

$X \sim \mathcal{B}in(n, \frac{1}{2})$.

$B = \{x\}$ si $x \notin \{0,\dots,n\}$; $\mathbb{P}(X \in B) = 0$.

Ex5 : Le tps d'attente (en min) pr accéder à des données suit $\mathcal{U}nif([1,6])$.

1) Déterminer proba d'attendre au moins 5min.

$X \sim \mathcal{U}nif([1,6])$, $\quad \mathbb{P}(X \geq 5)$?

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\lambda(A \cap [1,6])}{\lambda([1,6])} \to$$

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \frac{\lambda([5,6])}{\lambda([1,6])} = \frac{1}{5}.$$

2) Déterminer le tps d'attente moyen.

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^6 \frac{1}{5} x \, dx = \frac{1}{10} [x^2]_1^6 = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

3. Moments

Ex 10 : soit X v.a uniforme sur $[1,3]$ et $a \in [1,3]$

1) Q$^{\text{le}}$ est la loi de la va $Y = \min\{X, a\}$

⚠ Loi ni discrète ni à densité si $a \in]1,3[$.

- si $a=1$: $Y = a$ ps loi discrète
- si $a=3$: $Y = X$ ps loi à densité

NB : $a = 3$ $\quad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega \longmapsto X(\omega)$

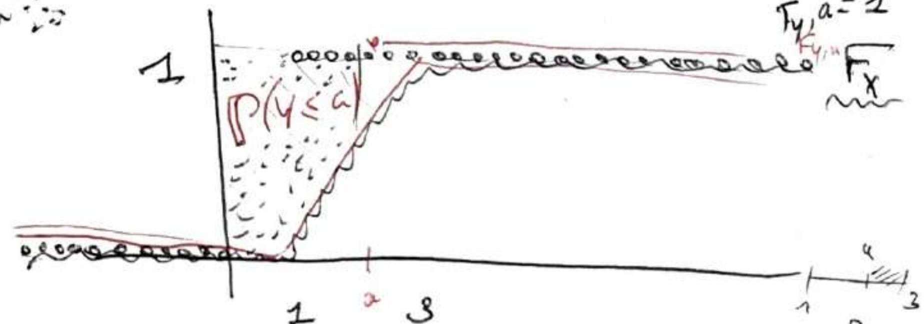
$\mathbb{P}(X \in A)$
$\mathbb{P}(X > 3) = 0$

$Y = \min(X,3) = X$ si $X \in [1,3]$

$\mathbb{P}(X \in [1,3]) = 1$

$X \in [1,3]$ ps.

calcul



$$\mathbb{P}(Y=a)=\mathbb{P}(X\geq a)=1-F_X(a)=\frac{3-a}{2}$$

Rq → $\mathbb{P}(Y\leq t)=\{Y\leq t\}\cap\{X\leq a\}\cup\{Y\leq t\}\cap\{X>a\}.$

cf ens, fiche 5

2) Admet-elle une espérance ?

$$\mathbb{E}(Y)=\int_0^\infty \mathbb{P}(Y>t)\,dt=\int_0^\infty (1-F_Y(t))\,dt$$

ex 9, fiche 4.

si Y est (ps) positive

Preuve $\int_0^\infty \mathbb{P}(Y>t)\,dt=\int_0^\infty\int_\Omega \mathbb{1}_{\{Y(\omega)>t\}}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt$

$$=\int_\Omega\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{Y(\omega)>t\}}\,dt\right)d\mathbb{P}(\omega)=\int_\Omega\left(\int_0^{Y(\omega)} dt\right)d\mathbb{P}(\omega)=\int_\Omega Y(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{E}(Y)$$

54

Charles Suquet, IPEIS, poly, exo, devoir, corrigés

Aix [illegible]

$$F_Y(t)=\begin{cases}F_X(t) & t<a\\ 1 \text{ si } & t\geq a\end{cases}$$

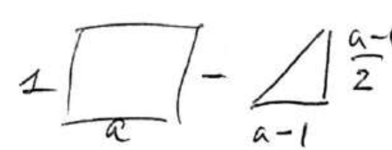
$$\mathbb{E}(Y)=\int_0^\infty \mathbb{P}(Y>t)\,dt$$ car Y est une vad p.s positive.

et $$F_X(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ \frac{t-1}{2} & \text{si } 1\leq t<3\\ 1 & \text{si } t\geq 3.\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Y)=\int_0^\infty \mathbb{P}(Y>t)\,dt=\int_0^1 dt+\int_1^a\left(1-\frac{t-1}{2}\right)dt$$

$$=1+\int_1^a\left(\frac{3-t}{2}\right)dt=1+\left[-\frac{(3-t)^2}{4}\right]_1^a=1+1-\frac{(3-a)^2}{4}$$

$$=\frac{-a^2+6a-1}{4}$$



$$a-\frac{a-1}{2\times 2}(a-1)=(a)-\frac{(a-1)^2}{4}=-\frac{a^2}{4}+\frac{3a}{2}-\frac{1}{4}$$

NB : $\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y>t)\,dt = \int_0^1 \mathbb{P}(Y>t)\,dt + \int_1^a \sim + \int_a^{\infty} \sim$

Q° supplémentaire : Quelle est la loi P_Y ?

$\mathbb{P}(Y\in A) = P_Y(A) = \int \mathbb{1}_A \, dP_Y$

$A =]-\infty, t]$.

$$\mathbb{P}(Y\le t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1. \\ \frac{t-1}{2} & \text{si } 1\le t<a \\ 1 & \text{si } t\geq a. \end{cases}$$

$= \int_{-\infty}^{t} dP_Y$.

ie $\mathbb{P}(Y=a) = \frac{3-a}{2}$.

$dP_X = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,3]}\,d\lambda$

dP_Y ? $\quad dP_Y = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,a]}\,d\lambda + \frac{3-a}{2}\,d\delta_a$.

$$\int_{-\infty}^{t} dP_Y = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,a]}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{t} \frac{3-a}{2}\,d\delta_a(x)$$

Or $\int_{-\infty}^{t} d\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a\in]-\infty, t] \\ 0 & \text{si } a\notin]-\infty, t]. \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{t} dP_Y = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \frac{t-1}{2} & \text{si } 1\le t<a \\ \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2}\times 1 = 1 & \text{si } t\geq a. \end{cases}$$

Ex 9 : 1) soit X var de $X \sim \mathcal{U}nif([1,3])$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$

Rq si X est ps positive $\mathbb{P}(X\geq 0) = 1$,

$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1-F_X(t))\,dt$, si X est signe qq intégrable

$\mathbb{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt + \int_0^{\infty} 1-F_X(t)\,dt$

Rq $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1,3]}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[x^3\right]_1^3 = \frac{13}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} 2t \, \mathbb{P}(Y > t)\, dt$$

Or $\mathbb{P}(Y > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{t-1}{2} & \text{si } t \in [1, a[\\ 0 & \text{si } t \geq a \end{cases}$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^1 2t \, dt + \int_1^a 2t\left(1 - \frac{t-1}{2}\right) dt$$

$$= 1 + \left[t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_1^a = \frac{3}{2}a^2 - \frac{a^3}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 1$$

Rq Si X va positive, $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t))\, dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

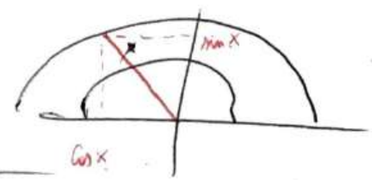
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X^2(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \int_0^{X(\omega)} 2t \, dt \, d\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq X(\omega)\}} 2t \, d\mathbb{P}(\omega) \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} 2t \, \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

2) Soit X va1, $X \sim \mathrm{Unif}([0, \pi])$

Calculer $\mathbb{E}(\sin(X))$ et $\mathbb{E}(\cos(X))$



$$\mathbb{E}(\cos(X)) = \int_{\mathbb{R}} \cos x \, \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

$$\mathbb{E}(\sin(X)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi}$$

Trouver la loi de $\cos X$ & $\sin X$.

3) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

$$\mathbb{E}(e^{X/2}) = \int_\Omega e^{X(\omega)/2}\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{x/2}\, \underline{dP_X(x)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{x/2}\, \underline{\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)\, dx} = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - \frac{1}{2})x}\, dx$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - \frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\infty \underbrace{(\lambda - \tfrac{1}{2}) e^{-(\lambda - \frac{1}{2})x}}_{\text{densité de la loi } \mathcal{E}xp(\lambda - \frac{1}{2})} dx \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \leq 1/2 \\ \dfrac{2\lambda}{2\lambda - 1} & \text{si } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$A = [a,b]$ $\quad \int \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda(x) = \lambda(A) = b - a$

$\int \mathbb{1}_A(x)\, dx = b - a$

À retenir (si série abs (CV)).

- si X discrète : $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi(x_k)\, \mathbb{P}(X = x_k)$
- si X est à densité (λ mesure de Lebesgue)

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

pourvu que $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, f(x)\, dx < \infty$.

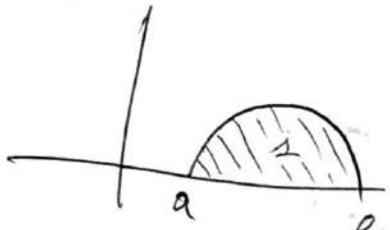
- sinon utiliser la f de Répartitio -

Ex 11 Consommat° d'eau.

X (va) dont la densité f : $a, b, c > 0$, $a < b$

$a < b$

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\, \mathbb{1}_{[a,b]}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$



1) Vérifier $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n (b-t)\, dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$\int_a^b (t-a)^n (b-t)\, dt = \qquad u = \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} \quad du = (t-a)^n$$

$$dv = -1 \qquad v = b-t$$

$$= \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}(b-t)\right]_a^b + \frac{1}{n+1}\int_a^b (t-a)^{n+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{(t-a)^{n+2}}{n+2}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

2) Exprimer cte c en f a & b.

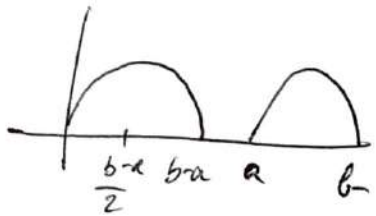
Or pour $n = 1$, $\displaystyle\int_a^b (t-a)(b-t)\, dt = \frac{(b-a)^3}{6}$

$$c = \frac{6}{(b-a)^3}.$$

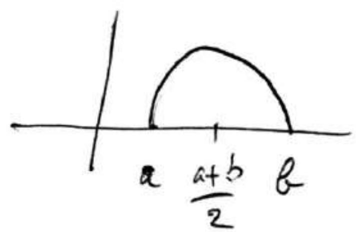
3) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ & $\mathbb{E}((X-a)^2)$. ed $\mathbb{E}(X)$ & $\mathrm{Var}(X)$

$$\mathbb{E}(X-a) = \int_{\mathbb{R}} (x-a) f(x)\, dx = c\int_a^b (x-a)^2 (b-x)\, dx$$

$$= c\,\frac{(b-a)^4}{12} = \frac{6}{(b-a)^3} \times \frac{(b-a)^4}{12} = \frac{b-a}{12}.$$



$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = a + \mathbb{E}(X-a) = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$



$$\mathbb{E}\left((X-a)^2\right) = c\int_a^b (x-a)^3 (b-x)\,dx$$

$$= c\,\frac{(b-a)^5}{20} = \frac{3}{10}(b-a)^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X-a) = \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] - \mathbb{E}^2\left((X-a)\right)$$

$$= \frac{3}{10}(b-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{20}(b-a)^2.$$

4) Donner la f de Répartiti⊘ F de la (va) X : on distinguera pr le calcul de $F(x)$ les cas $x<a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$; on écrira ds 2° cas $F(x)$ en f $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer le polynôme. Donner l'allure des représentat⊘s graphiqs de f & F. Proposer interprétat⊘ cte a & b.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} c(t-a)(b-t)\,\mathbb{1}_{[a,b]\cap]-\infty,x]}(t)\,dt.$$

si $x<a$ $F(x) = 0$ et si $x \geq b$ $F(x) = 1$

si $x \in [a,b[$, $F(x) = c\int_a^x (t-a)(b-t)\,dt$.

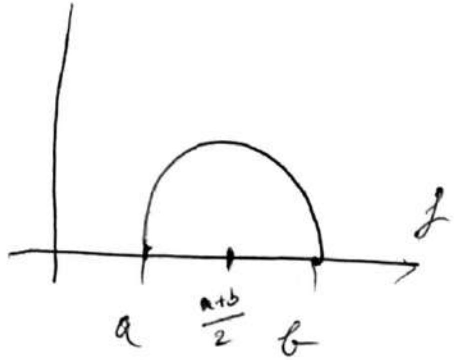
$u'(t) = t-a \qquad u(t) = \frac{(t-a)^2}{2}$

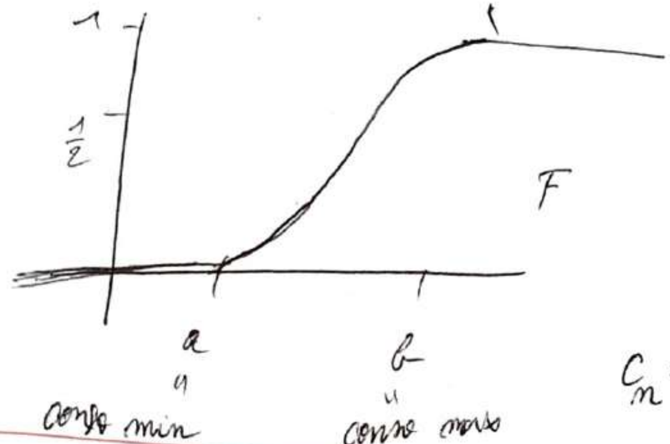
$v(t) = b-t \qquad v'(t) = -1.$

$$F(x) = c\left(\left[(b-t)\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(t-a)^2}{2}\,dt\right)$$

$$= c\left(\frac{(b-x)(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{6}\right)$$

$$= c\,\frac{(x-a)^2}{2}\left[b-x+\frac{x-a}{3}\right].$$





Exo 12 Soit X va normale centrée réduite.

1) Que vaut $\mathbb{P}(X \geq 0)$?

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

2) Que valent $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pr $n \in \mathbb{N}$?

$$\mathbb{E}(X^{2n+1}) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0.$$

(intégrale cv g au terme $e^{-x^2/2}$)

3) Pr $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}(X^{2n})$.
Mq $c_n = (2n-1) c_{n-1}$ pr $n \in \mathbb{N}^*$.
ed ff explicite $\mathbb{E}(X^{2n})$.

$$c_n = \mathbb{E}(X^{2n}) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x^{2n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x^2/2}}_{v'(x)} dx$$

$\boxed{\text{IPP}}$

$$c_n = (2n-1) c_{n-1} = (2n-1)(2n-3) \dots c_0.$$

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n-1)!}{2^n \cdot n!} = \text{produit entiers impairs} < 2n.$$

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}(Z^4) - \mathbb{E}(Z^2)^2 = 3 - 1 = 2.$$

ex @ $\mathbb{E}(X^4) = 3 \times 1$.

4) $Y = \sigma X + m, \quad \sigma > 0$.

(i) $\mathbb{E}(Y) = \sigma \mathbb{E}(X) + m = m$

$Var(Y) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2$.

(ii) Déterminer la loi de Y.

$\hookrightarrow \boxed{M}$ $Y = g(X)$, $\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) f_Y(y)\, dy$

soit mesurable bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(\sigma X + m))$$

$x = \frac{y-m}{\sigma}$ $\uparrow$ $y = \sigma x + m$, $dx = \frac{1}{\sigma} dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma x + m) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma x + m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2}}_{f_Y(y)}\, dy$$

On reconnait la densité $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

⚠ Trouver la densité de X^2

(CM66 $\chi^2(1)$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$$

TD 8 Inégalités probabilités, LFGN, TCL

1. Convexité & inégalité de Jensen

Ex 1: Moyenne quadratiq & moyenne arithmétiq

soit $n > 0$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de réels.

1) Définir la loi uniforme $\mu_{\underline{x}}$ sur l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ muni de la tribu discrète.

$E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$

Si $A \in \mathcal{T}$ $(A \subset E)$: $\mu_{\underline{x}}(A) = \sum_{x \in A} \mu_{\underline{x}}(\{x\}) = \frac{\text{card}(A)}{n}$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_{\underline{x}}(\{x_i\}) = \frac{1}{n}$

et $\mu_{\underline{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$

2) Soit X une va de distribuθ (loi) $\mu_{\underline{x}}$, X est-elle intégrable? Admet-elle un second moment?

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{T}, \mu_{\underline{x}})$

tq $P_X = \mu_{\underline{x}}$

image

$\forall A \in \mathcal{T}$, $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$
$= \mu_{\underline{x}}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n}$.

X est bornée, $|X| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

dc X est intégrable.

@ $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ équiprobabilité sur Ω.

$X(i,j) = i$ $\quad X : \Omega \to E$, $E = \{1, \dots, 6\}$

X résultat dé bleu ds un lancer de 2 dés.

3) $\mathbb{E}(X) = \int_E x \, d\mu_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

• X^2 est bornée dc intégrable.

$\mathbb{E}(X^2) = \int_E x^2 \, d\mu_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

4) ccl l'inégalité entre moy quadratiq et moy arithmétiq

$\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum x_i^2}{n}$

$(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$ Jensen $\Leftrightarrow \text{Var}(X) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum x_i^2}{n}$.

2. Inégalité de Markov & Bienaymé Tchebitchev

Ex2 Pièces défectueuses

- pièces, proportion $p \in]0,1[$ inconnue
- prélèvement de n pièces (grd échantillon)
- ↳ n tirages indep ap remise (Hypergeom → Binom)

→ X_n (va) = nb pièces défectueuses.

On veut quantifier $\frac{X_n}{n}$ approche p.

1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moy ? Sa variance

$X_n \sim \mathcal{B}in(n; p)$. $\quad X_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$

$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\circ} \text{ pièce tirée est défectueuse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$,

$\varepsilon_i \sim \mathcal{B}ern(p)$, les $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ st indep.

$\mathbb{E}(X_n) = np \quad , \quad Var(X_n) = np(1-p)$

2) Dmq $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

(R4) Markov : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right|\right)}{\varepsilon}$

Exp compliqué

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2 \geq \varepsilon^2\right)$

Markov $\leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2\right]}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

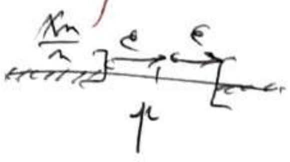
$\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) = p$.

$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2\right) = Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(X_n)$

$= \frac{np(1-p)}{n^2}$

$= \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.

3) cd une conditio sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valR approchée de p à 10^{-2} près ac une proba sup ou égale à 95 % ?



$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05$

Pr avoir cette inégalité : il suffit de prendre n tq $\frac{1}{4n} \cdot 10^{4} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{10^4}{4 \times 0,05}$

Ex 9 Loi faible GN

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite va indep $\mathbb{E}(X_n) = m$ $V(X_n) = \sigma^2$

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dmq 4 inég Bienaymé-Tchebitchev $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

ne permet pas un interv de confiance si σ^2 est inconnue.

$$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} Var(X_1).$$

$$\lim \mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) = 0.$$

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{proba} m$$

Ex 7 Une applicat° du TCL.

Soit f f cont & bornée sur $\mathbb{R}$. Justifier $\exists$ limite,

Mq $$\lim e^{-n}\sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt$$

Indice : considérer suite de var indep de Poisson.

$$\frac{n^k}{k!}e^{-n} = \mathbb{P}(Y_n = k) \text{ où } Y_n \sim Pois(n).$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)\frac{n^k}{k!}e^{-n} = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{P}(Y_n = k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k)\,\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(\varphi(Y_n))$$

$$\varphi(k) = f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{Y_n - \mathbb{E}(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}}$$

où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ st iid Pois (1)

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois(n)$$

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Par le TCL,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} Z \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

comme f est cont & bornée.

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(Z)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ex3 Marches aléatoires

soit $(X_k)_k$ suite iid de va de loi commune

$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

$\forall n,\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{u^k}{k!} + \sum (-1)^k \frac{u^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 \sum \frac{u^{2k}}{(2k)!}\right)$$

65

marche aléatoire.

1) On admettra que si X & Y st 2 va ind, on a $\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X)).\mathbb{E}(h(Y))$.

$\forall t$, calculer $\mathbb{E}(e^{tS_n})$

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(tX_k)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_k})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \prod_{i=1}^{n} \cosh(t) = \cosh^n(t)$$

2) Mq $\forall u,\ \cosh(u) \leq e^{u^2/2}$

Série entière $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{u^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{2^k\, k!}$$

et $\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k\, k!} \iff 2^k\, k! \leq (2k)!$

$$(2k)! = \underbrace{2k \times (2k-1) \times \cdots \times (k+1)}_{k \text{ termes} \geq 2 \text{ si } k \geq 1} \times k!$$

si $k \geq 1 \quad 2^k k! \leq$

3) Déduire des 2 résultats précédents que $\forall n>0, \forall \lambda>0$:

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \lambda) \leq 2 . e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) + \mathbb{P}(S_n \leqslant -\lambda)$$

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -\lambda).$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. (la loi de S_n est symétriq $\not\!\!/$ à 0)

S_n et $-S_n$ ont la m̂ loi car X_k & $-X_k$ ont la m̂ loi.

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(-S_n \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -\lambda).$$

$\underline{\forall t>0}$, $\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{\lambda t})$

$\underset{\text{Markov}}{\leqslant} \dfrac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{\lambda t}}$ (car e^{tS_n} est une v.a. positive)

$$= \frac{(\cosh(t))^n}{e^{\lambda t}} \leqslant e^{-\lambda t + n\frac{t^2}{2}} \quad \forall t>0$$

On optimise en t $\underline{\text{cad}}$, on prend $t>0$ qui minimise la borne $e^{-\lambda t + n\frac{t^2}{2}}$ (à λ fixé)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) \leq e^{\inf_{t>0}\{-\lambda t + \frac{nt^2}{2}\}}.$$

$$\parallel$$

$$e^{-\frac{\lambda^2}{n} + \frac{n}{2}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2} = e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$$

$-\dfrac{\Delta}{4a}$

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}.$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant -\lambda)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}.}$$

4) soit $c>1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on déf l'évent $A_n = \{|S_n| \leq \sqrt{2cn \log n}\}$.

En utilisant $\boxed{LBC}$, Mq $\mathbb{P}(\liminf A_n) = 1$.

$$A_n^c = \{|S_n| > \sqrt{2cn \log(n)}\}.$$

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq 2e^{-\frac{1}{2n}(2c.n \cdot \log(n))} = 2\frac{1}{n^c}$$

$$\forall c>1, \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n^c) < \infty.$$

$$\text{(L)}_{BC} \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geqslant n} A_m^c\Big) = 0$$

les A_n se produisent infiniment sont de proba nulle

TK_{BC}	L_{BC}
$\sum \mathbb{P} = \infty$	$\sum \mathbb{P} < \infty$
$\mathbb{P}(\bigcup\bigcap A_n) = 0$	$\bigcap \bigcup = 1$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{m\geq n} A_m^c\Big)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{m\geq n} A_m\Big)=1$$

4 $\dfrac{\text{proba } 1}{\text{c}}$ tous les $(A_n)_n$ se réalisent à proba 1

$$\exists\, m\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq m,\ |S_n|\leq\sqrt{2cn\log n}.$$

3. LFGN & TCL

Ex 5 Autour loi binomiale.

$B_1, \dots, B_n$ v.a. $\sim$ Bern indep de param $p\in[0,1]$.

1) loi de $B^{(n)} := B_1+\dots+B_n$?

$B^{(n)}\sim \mathrm{Bin}(n,p)$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1$

3) Si f cont sur $[0,1]$. À l'aide du Th de transfert, exprimer $\mathbb{E}\Big(f\Big(\frac{B^{(n)}}{n}\Big)\Big)$ en f de p, n & f.

$$\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,\mathbb{P}(B^{(n)}=k)=\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

4) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\Big(\frac{k}{n}\Big)$

f continue sur $[0,1]$

$\Rightarrow \big[\,\overline{B_n}(\omega)\to p \Rightarrow f(\overline{B_n}(\omega))\to f(p)\big)$

$$Y_n = f(\overline{B_n})\xrightarrow{ps} f(p)$$

On voudrait dire que

$$\mathbb{E}(Y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}(f(p))=f(p)$$

→ On vt appliquer le Th cv dominée

→ il ns faut va X tq ▸ X intégrable

▸ $|Y_n(\omega)|\leq X(\omega)\ \forall n\in\mathbb{N}$

TCD
TCM
Fatou

Gr f continue sur $[0,1]$ de bornée par $C = \|f\|_\infty$, on choisit $X(\omega) = C$ $\forall \omega$ intégrable (proba). $\underline{\mathbb{E}(X) = C}$.

4. Pour approfondir

Ex 10 : Th Bernstein - Weierstrass

f f cont de $[0,1] \to \mathbb{C}$. Le n° polynôme de Bernstein de f, $B_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\mathbb{P}(S_n(x) = \frac{k}{n})} f\left(\frac{k}{n}\right)$

1) $S_n(x) = \frac{Bin(x,n)}{n}$

(i) Vérifier que $B_n(x) = \mathbb{E}(f(S_n(x)))$

(ii) $\mathbb{E}(S_n(x)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(Bin(n,x)) = x$

$\operatorname{Var}(S_n(x)) = \frac{1}{n^2} V(Bin(n,x)) = \frac{nx(1-x)}{n^2}$

$= \frac{x(1-x)}{n}$

2) Mq $\forall \eta > 0$ & $\forall x \in [0,1]$.

$\mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta) \leq \frac{1}{n\eta^2}$.

BT : $S_n(x)$ est de carré intégrable.

$\mathbb{P}(|S_n(x) - \mathbb{E}(S_n(x))| \geq \eta) \leq \frac{V(S_n(x))_{= \frac{x(1-x)}{n\eta^2}}}{\eta^2}$

3) f <u>UC</u> cont

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \mid$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(ii) Mq $\forall \eta > 0$ tq

$|B_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(x) - f(S_n(x))| \mathbb{1}_a)$
$+ 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta)$

$a = |S_n(x) - x| < \eta$.

$|B_n(x) - f(x)| = |\mathbb{E}(f(S_n(x)) - f(x))|$

=

$$\left|\mathbb{E}\left(f(S_n(x)) - f(x)\right)\right| = \mathbb{E}\left(\overbrace{f(S_n(x)) - f(x)}^{\leq \varepsilon}\, \mathbb{1}_{|S_n(x)-x|<\eta}\right)$$
$$+\,\mathbb{E}\left(\left[f(S_n(x)) - f(x)\right] \mathbb{1}_{|S_n(x)-x|\geq\eta}\right)$$

$\overset{\text{I}}{\triangle}\ \leq |\mathbb{E}(\quad)| + |\mathbb{E}(\quad)|$

$x \mapsto |x|$ convexité $\Rightarrow |\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

$$\leq \mathbb{E}(|\quad|) + \mathbb{E}\left(\left|\underbrace{\left[f(S_n(x)) - f(x)\right]}_{\leq 2\|f\|_\infty} \mathbb{1}_{|S_n(x)-x|\geq\eta}\right|\right)$$

$$\leq \mathbb{E}(|\quad|) + 2\|f\|_\infty\, \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta)$$ Monotonie de l'espérance

(iii) est $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ tq

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty\, \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta)$$

soit $\varepsilon > 0$, on choisit η tq $|x-y| < \eta$
$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

cf (ii) de $y = S_n(x)$

4) Déduire le Th BW

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty\, \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta)$$
$$\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

$\boxed{\text{proba} = \text{espérance}(\mathbb{1})}$

69