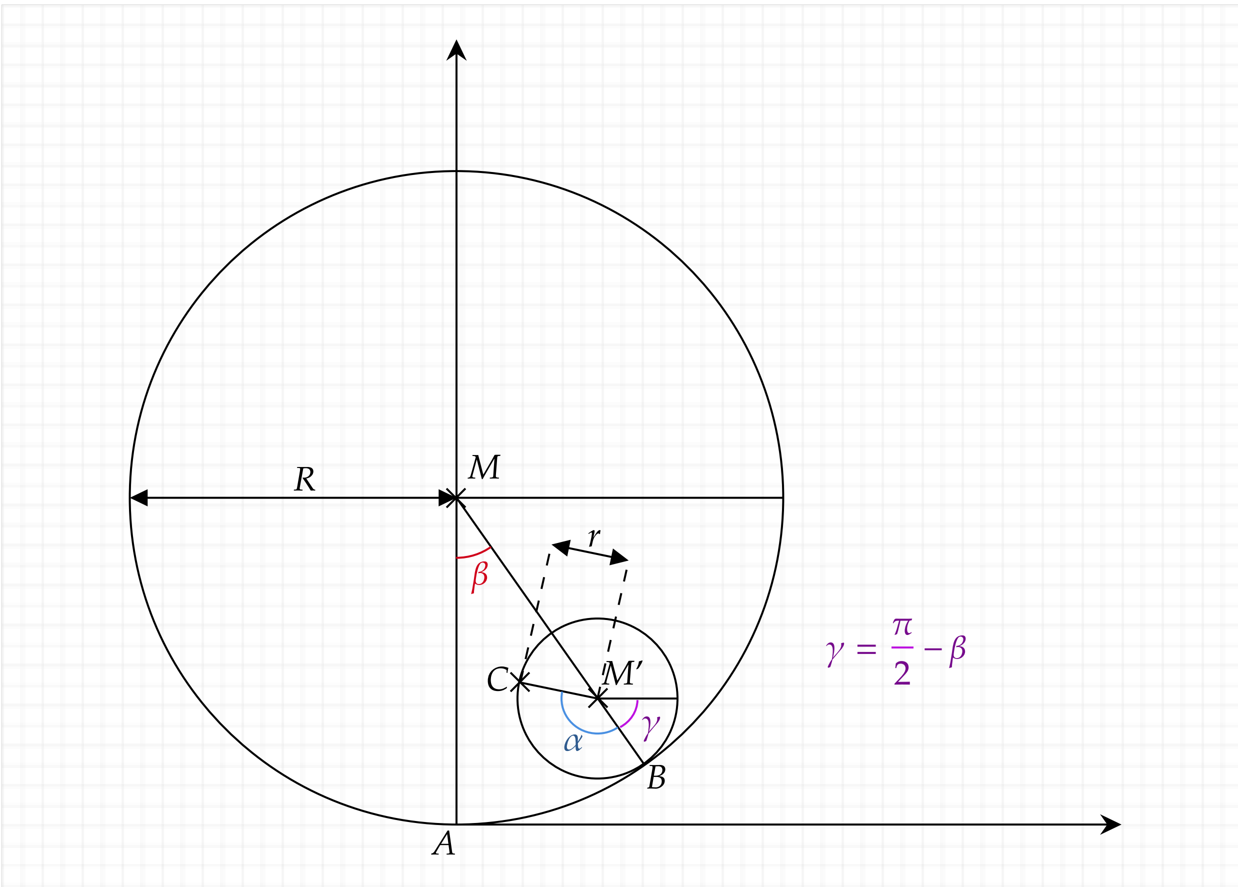
Rappel de l'exercice 5.4 : on avait obtenu le résultat final (pour une distance a parcourue) :

$$\left(a - d\sin\left(\frac{a}{r}\right), r - d\cos\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

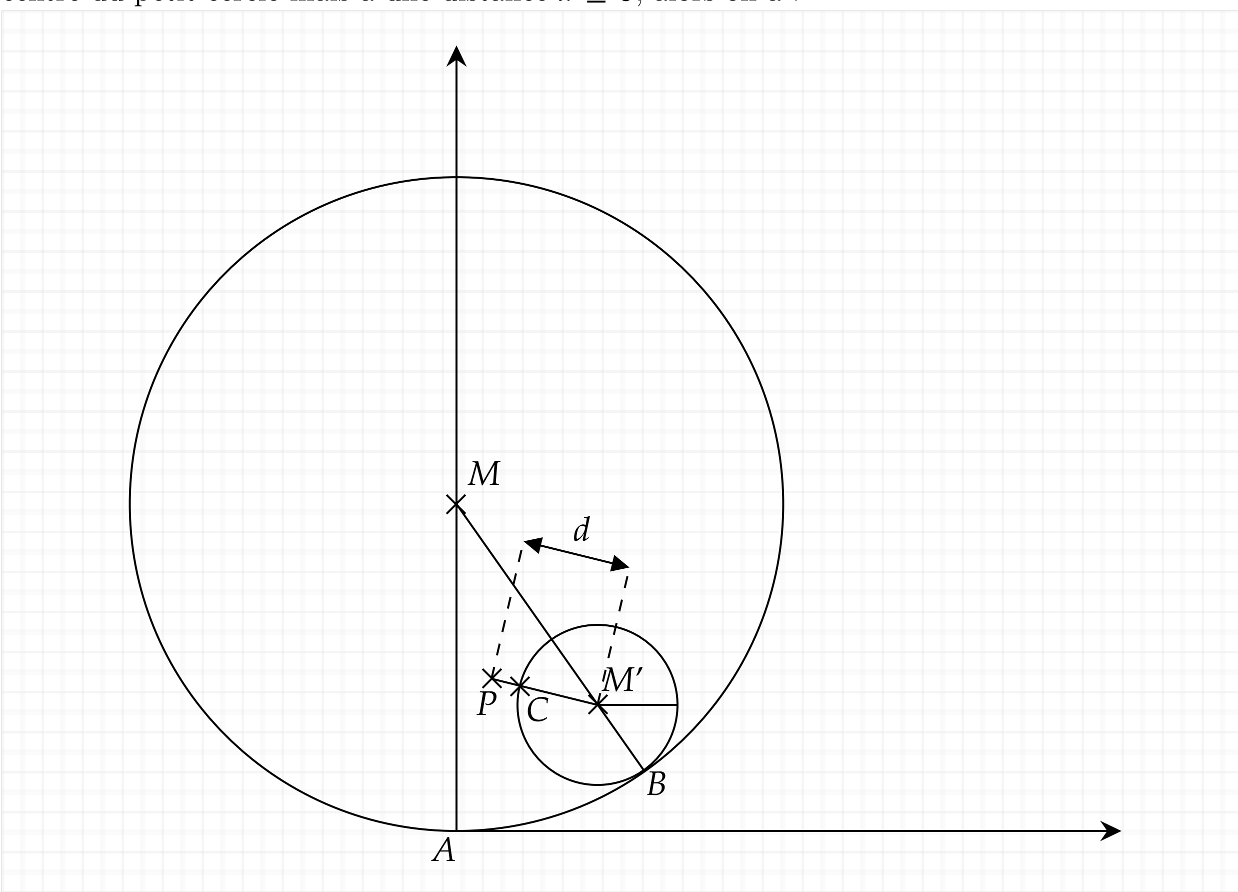
Exercice 5.5 (illustration à https://www.desmos.com/calculator/r8tbk3fgp1)



Soit $t \geq 0$ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, autrement dit la distance parcourue par le petit cercle.
Avec le même raisonnement que celui utilisé à l'exercice 5.4, on trouve que
$\frac{AB}{2\pi R} = \frac{t}{2\pi R} = \frac{\beta}{2\pi} \Longleftrightarrow \beta = \frac{t}{R}$, et comme la longueur de l'arc $\overset{\frown}{CB}$ est égale à celle de $\overset{\frown}{AB}$,
$\frac{t}{2\pi r} = \frac{\alpha}{2\pi} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{t}{r}$. On dispoe de toutes les données (coordonnées des vecteurs déterminées par simple lecture graphique) :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'C} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R-r)\sin(\beta) \\ -(R-r)\cos(\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(-\gamma-\alpha) \\ r\sin(-\gamma-\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (R-r)\sin(\beta) + r\cos(\gamma+\alpha) \\ R + (r-R)\cos(\beta) - r\sin(\gamma+\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (R-r)\sin\left(\frac{t}{R}\right) + r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{R} + \frac{t}{r}\right) \\ R + (r-R)\cos\left(\frac{t}{R}\right) - r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{R} + \frac{t}{r}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (R-r)\sin\left(\frac{t}{R}\right) + r\sin\left(\frac{t}{R} - \frac{t}{r}\right) \\ R + (r-R)\cos\left(\frac{t}{R}\right) - r\cos\left(\frac{t}{R} - \frac{t}{r}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que le point étudié ne soit plus à une distance exactement égale à r du centre du petit cercle mais à une distance $d \geq 0$, alors on a :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'P} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R-r)\sin(\beta) \\ -(R-r)\cos(\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\cos(-\gamma-\alpha) \\ d\sin(-\gamma-\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \begin{pmatrix} (R-r)\sin\left(\frac{t}{R}\right) + d\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \\ R+(r-R)\cos\left(\frac{t}{R}\right) - d\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fixons maintenant $t \in \mathbb{R}^+$, et calculons la limite du point en $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} (R-r)\sin\left(\frac{t}{R}\right) + d\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \\ R+(r-R)\cos\left(\frac{t}{R}\right) - d\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} R\sin\left(\frac{t}{R}\right) - r\sin\left(\frac{t}{R}\right) + d\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \\ R\left(1-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right) + r\cos\left(\frac{t}{R}\right) - d\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En sachant que $\sin(x) \sim x$ pour $x \to 0$, on a $R\sin\left(\frac{t}{R}\right) \underset{R\to+\infty}{\sim} R \cdot \frac{t}{R} \to t$, ensuite l'autre limite "génante" est $R\left(1-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right)$, mais $\cos\left(\frac{t}{R}\right) = 1 - \frac{t^2}{2R^2}\epsilon\left(R^2\right)$ et donc $\lim\limits_{R\to+\infty} R\left(1-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right) = \lim\limits_{R\to+\infty} R\left(1-1+\frac{t^2}{2R^2}\epsilon\left(R^2\right)\right) = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{t^2}{2R}\epsilon\left(R^2\right) = 0$.
Puis, $\lim\limits_{R\to+\infty} -r\sin\left(\frac{t}{R}\right) = 0$, $\lim\limits_{R\to+\infty} r\cos\left(\frac{t}{R}\right) = r$, $\lim\limits_{R\to+\infty} d\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) = -d\sin\left(\frac{t}{r}\right)$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} -d\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) = -d\cos\left(\frac{t}{r}\right)$

Finalement, en combinant tout ces résultas on obtient :

$$\begin{aligned}
R\sin\left(\frac{t}{R}\right) - r\sin\left(\frac{t}{R}\right) + d\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) &\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t - d\sin\left(\frac{t}{r}\right) \\
R\left(1-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right) + r\cos\left(\frac{t}{R}\right) - d\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{t}{r}\right) &\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} r - d\cos\left(\frac{t}{r}\right)
\end{aligned}$$

On retrouve exactement les coordonnées de $\left(a - d \sin\left(\frac{a}{r}\right), r - d \cos\left(\frac{a}{r}\right)\right)$, coordonnées obtenues dans l'exercice 5.4. Ce résultat est intéressant dans le sens où il est un résultat de plus notant grossièrement le fait qu'une droite "est un cercle de rayon infini".