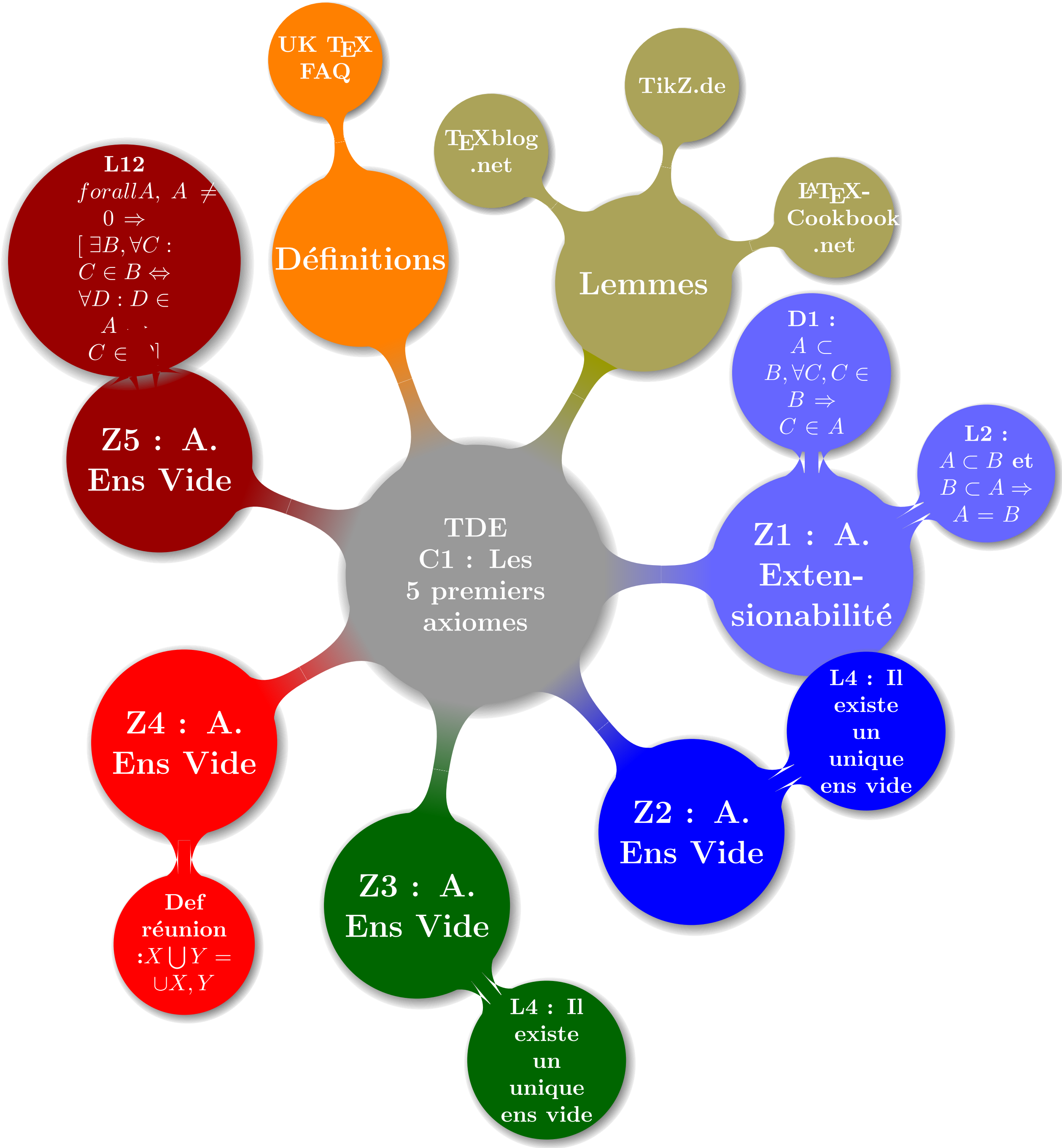

TDE C1 : Les 5 premiers axiomes
Définitions
UK TEX FAQ
Lemmes
TEXblog .net
TikZ.de
LATEX-Cookbook .net
Z1 : A. Exten-sionabilité
D1 : $A \subset B, \forall C, C \in B \Rightarrow C \in A$
L2 : $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$
Z2 : A. Ens Vide
L4 : Il existe un unique ens vide
Z3 : A. Ens Vide
L4 : Il existe un unique ens vide
Z4 : A. Ens Vide
Def réunion :$X \bigcup Y = \cup X, Y$
Z5 : A. Ens Vide
L12
$forall A,\ A \neq 0 \Rightarrow [\ \exists B, \forall C : C \in B \Leftrightarrow \forall D : D \in A$

TDE ① 5 premiers axiomes

Z1 Axiome extensionabilité

$\forall A, B : [\forall C, C \in B \iff C \in A] \Rightarrow A = B$.

D_1 $A \subset B$ un ss-ens donné par :

$\forall C, C \in B \Rightarrow C \in A$.

L_2. si $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$.

4)

L_3. si $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Z2 Axiome d'ensemble vide

$\exists B, \forall A : B \notin A$.

L_4. Il n'existe qu'un seul ens. vide.

Z3 Axiome de la Paire

$\forall A, B, \exists C \ \forall D : D \in C \iff [D = A \text{ ou } D = B]$

Z4 Axiome de Réunion

8)

$\forall A \ \exists B \ \forall C, C \in B \iff [\exists D : D \in A \text{ et } C \in D]$

$$B = \bigcup_{D \in A} D = \cup A.$$

Z5 Axiome de Séparat°

$\forall A \ \exists B \ \forall C : C \in B \iff [C \in A \text{ et } p(C)]$

L12 $\forall A.\ A \neq \emptyset \Rightarrow [\exists B \ \forall C : C \in B \iff \forall D : D \in A \Rightarrow C \in D]$.

D, 3!. intersec°

①

C2 Le produit cartésien

- produit cartésien $\longleftrightarrow$ produit direct.
- (a,b) tq $a \in A$ et $b \in B$.

Z3 AdP 3 fois

D $(a,b) \stackrel{def}{=} \{\{a\}, \{a,b\}\}$

L1 $\{x,y\} = \{x,z\} \Rightarrow y = z$.

on suppose x, y, z, a, b, c, d ensembles.

L2 $(a,b) = (c,d) \iff a = c$ et $b = d$.

- La collect° de ts les ss-ens d'un ens A est un ensemble, noté $P(A)$. (parties de A). $P(A)$ ens $\Leftarrow$ Z3 Z4.

$C \in P(A) \iff C \subset A$.

Z6 Axiome de l'ensemble des parties

$\forall A \ \exists B \ \forall C : C \in B \iff C \subset A$.

$B \stackrel{not}{=} P(A)$ unique par Z1.

L3 $\exists! / \exists!$. P tq. $P =. A \times B$:

$\forall A, B \ \exists P \ \forall C$

$(C \in P \iff [\exists a \in A \ \exists b \in B : C = (a,b)])$

$P = \{C \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \in A \ \exists b \in B : C = (a,b)\}$

$P = \{(a,b) \in P(P(A \cup B)) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

$P = \{(a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

(L.7) Une équivalence en logique

$\forall C \in A\times B : p(C) \Leftrightarrow \forall a \in A\ \forall b \in B : p(a,b)$

(L.8) si A ens abs $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

(L.9) si $A \subset A'$ et $B \subset B' \Rightarrow A\times B \subset A'\times B'$.

(C3) Relations & relations d'ordre

(D1) (Relation) R est une relation entre A et B si $R \subset A\times B$. $aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$.

$R^{-1} \overset{def}{=} \{(b,a) \in B\times A \mid (a,b) \in R\}$

Par définitio : $R \subset A\times B \subset A'\times B'$.

$Im(R) = \{y \in B \mid \exists x : (x,y) \in R\}$

(L3) A,B,C,D,R vérifient $R \subset A\times B$ et $R \subset C\times D$

$\Rightarrow \{y \in B \mid \exists x : (x,y) \in R\} = \{y \in D \mid \exists x : (x,y) \in R\}$

(D4) $Im(R) \overset{def}{=} \{y \in B \mid \exists x : (x,y) \in R\}$.

$Dom(R) \overset{def}{=} Im(R^{-1}) \equiv \{x \in A \mid \exists y : (y,x) \in R^{-1}\}$
$\equiv \{x \in A \mid \exists y : (x,y) \in R\}$

$Dom(R^{-1}) = Im(R)$

(L6) R est une relatio entre A et B ssi $Dom(R) \subset A$ et $Im(R) \subset B$.

(D) Image direct de X par la relatio R : $R[X]$,

$R[X] \overset{def}{=} \{b \in Im(R) \mid \exists a \in X : (a,b) \in R\}$

- $R^{-1}[Y] = \{a \in Im(R^{-1}) \mid \exists b \in Y : (b,a) \in R^{-1}\}$
$= \{a \in Dom(R) \mid \exists b \in Y : (a,b) \in R\}$

(P.7) (i) $R[X] = \{b \in B \mid \exists x \in X : (x,b) \in R\}$

(ii) $R^{-1}[Y] = \{a \in A \mid \exists y \in Y : (a,y) \in R\}$

(iii) $Im(R) = R[A]$ et $Dom(R) = R^{-1}[B]$

(D.8) Relat° d'ordre ® soit A ens, alors une relat° d'ordre (partiel) sur A est un sous-ensemble $R \subset A \times A$ vérifiant (i), (ii), (iii).

@ $a \leq b \overset{def}{\iff} (a,b) \in \leq$.

(i) $\forall a \in A : a \leq a$ réflexivité

(ii) $\forall a,b \in A : a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a = b$ anti-symétrie

(iii) $\forall a,b,c \in A : a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ transitivité

® est total si : (iv) $\forall a,b \in A : a \leq b$ ou $b \leq a$.

(L10) si $\leq$ est une relat° d'ordre sur un ens A alors la relat° inverse $\geq$ est aussi une relat° d'ordre sur A. et si $\leq$ est ® total alors $\geq$ l'est aussi.

(L12) soit $\leq$ ® partiel sur un ens A alors ASSE :

(i) $\leq$ est une ® total.

(ii) $\forall a,b \in A$, on a l'équivalence $a \nleq b \iff a > b$

(iii) $\forall a,b \in A$, $a \not< b \iff a \geq b$

(iv) $\forall a,b \in A$ il y a une & une sle ppté vraie parmi les trois : $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

(L13)

$\forall X,Y \subset A : X R Y \overset{def}{\iff} X \subset Y$.

• $C \subset P(A) \times P(A)$ ou $C = \{(x,y) \in P(A) \times P(A) \mid x \subset y\}$

C4 - Applicat°s

(D1) (Applicat°) soit f une relat° entre 2 ens A et B. Alors f est appelée une applicat° de A ds B, l'ens A est appelé l'ens source de l'applicat° f et l'ens B est appelé l'ens but de l'applicat° f si le sous-ens $f \subset A \times B$:

(i) $\forall x \in A \ \exists y : (x,y) \in f$.

(ii) $\forall x,y,z : [(x,y) \in f$ et $(x,z) \in f] \Rightarrow y = z$.

→ si $f \subset A \times B$ on note $f : A \to B \overset{def}{\iff} f \subset A \times B$.

→ on pt noter $b \in B$ par $b = f(a)$:

$b = f(a) \overset{def}{\iff} (a,b) \in f$.

• $f : A \to B$ est injective si $f \subset A \times B$:

(iii) $\forall x,y,z : [(y,x) \in f$ et $(z,x) \in f] \Rightarrow y = z$.

• f est surjective si (iv) $\forall x \in B \ \exists y : (y,x) \in f$.

• bijective : injective & surjective.

(L2) (i) $\forall x \in A\ \exists y : (x,y) \in f \Leftrightarrow Dom(f) = A$

(ii) $\forall x,y,z : [(x,y) \in f \text{ et } (x,z) \in f] \Rightarrow y = z$

$\Leftrightarrow f : Dom(f) \longrightarrow B$.

(L3) $f, g : A \longrightarrow B$, on a l'égalité $f = g$ ssi

$\forall a \in A : f(a) = g(a)$

L4/D $\Delta \subset A \times A$,

$\Delta = \{ C \in A \times A \mid \exists a \in A : C = (a,a) \}$.

Notat°: $\Delta = \{ (a,a) \mid a \in A \}$.

(L6) soit $f \subset A \times B$ une applicat° de A dans B. Alors la relat° d'inverse $f^{-1} \subset B \times A$ est une applicat° de B ds A ssi f est bijective.

(P8) $\pi_A = \{ C \in (A \times B) \times A \mid \exists a \in A\ \exists b \in B : C = ((a,b),a) \}$

et $\pi_B = \{ C \in (A \times B) \times B \mid \exists a \in A\ \exists b \in B : C = ((a,b),b) \}$

st des applicat°s de $A \times B$ dans A et de $A \times B$ dans B respectivement $\pi_A((a,b)) = a$ et $\pi_B((a,b)) = b$.

Notat°: $\pi_A = \{ ((a,b),a) \mid a \in A \text{ et } b \in B \}$ et

$\pi_B = \{ ((a,b),b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \}$

(P11) soit A ens. Alors $\exists$ 1 et 1 sle applicat° $f : \emptyset \to A$. cette applicat° est tjrs injective : elle est surjective ssi $A = \emptyset$. Par contre, si A n'est pas vide, alors $\nexists$ d'applicat° de A dans $\emptyset$.

(D) (Composit°)

$S \circ R = \{ (a,c) \in A \times C \mid \exists b : (a,b) \in R \text{ et } (b,c) \in S \}$.

(L12') Soit A, B et C trois ens, soit $f : A \longrightarrow B$ une appli de A dans B et soit $g : B \longrightarrow C$ une applicat° de B ds C. Alors la relat° $g \circ f \subset A \times C$ est une applicat° de A ds C.