M43 TD1 Ex 1

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \frac{x^0 - x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

$$= \frac{1-(-1)^{N+1}}{2} = 1-1+1-1+\dots+(-1)^n$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ impair} \\ 1 & \text{si } N \text{ pair.} \end{cases}$$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (p+1) = \sum_{p=1}^{n} p = 1+2+\dots+n$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} n = n\sum_{p=1}^{n} 1 = n(\overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ fois}}) = n^2.$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n} = n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

Rq: $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} n^p = \begin{cases} n \cdot \dfrac{1-n^n}{1-n} & \text{si } n \neq 1 \\ n & \text{si } n = 1 \end{cases}$

2) $\displaystyle 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (p\times n) = \sum_{k=1}^{n} (k\times n) = n\sum_{k=1}^{n} k \neq k.\sum_{k=1}^{n} n$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Ex 2 Par ens. ensemblistes : $\cup$ $\cap$ ^{c}.

$D = A \cap B \cap C$ # tous les réussissent à marquer.

$E = A^c \cap B^c \cap C^c$ # aucun ne réussit à marquer.

Rq : $D^c = A^c \cup B^c \cup C^c$ et $E^c = A \cup B \cup C$.

$F = A^c \cap B \cap C^c$ # Béa mange 5 bonbons

$G = D \cup E$ # 3 enfants mangent bonbons.

$H = C \cup E$ # Céc mange au moins un bonbon.

$I = A^c \cap E^c$ # Arthur ne reçoit aucun bonbon

$= A^c \cap (A^c \cap B^c \cap C^c)^c$

$= A^c \cap (A \cup B \cup C) = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)$.

Evénements élémentaires :

Modélisation : $\Omega = \{0,1\}^3$, $\omega \in \Omega$.

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$\omega_1 = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } A \text{ marque} \end{cases}$

$\omega_2 = \begin{cases} 0 \text{ si } B \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } B \text{ marque.} \end{cases}$

$\omega_3 = \begin{cases} 0 \text{ si } C \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } C \text{ marque.} \end{cases}$

$A = \{\omega \in \Omega : \omega = (1, \underbrace{\omega_2}_{\text{2 choix possibles}}, \underbrace{\omega_3}_{\text{2 choix possibles}})\}$.

$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_1 = 1\}$

$\mathrm{card}(A) = 4 \Rightarrow A$ n'est pas un évent élémentaire.

idem pour B et C.

$D = \{(1,1,1)\}$, $\underline{\mathrm{card}(D) = 1} \Rightarrow D$ évent élémentaire

$E = \{(0,0,0)\}$, $\mathrm{card}(E) = 1 \Rightarrow E$ évent élémentaire

$F = \{(0,1,0)\}$, $\mathrm{card}(F) = 1 \Rightarrow F$ évent élémentaire.

$G = \{(1,1,1), (0,0,0)\}$ $\not\,$ ~~élémentaire~~

$H = \{(0,1,1) ; (1,0,1) ; (1,1,1) ; (0,0,1) ; (0,0,0)\} = C \cup E \Rightarrow H$ n'est pas EE.

$I = \{(0,1,1) ; (0,1,0) ; (0,0,1)\}$

Rq : $P(E) = \dfrac{\mathrm{card}(E)}{\mathrm{card}(\Omega)}$; $\mathrm{card}(\Omega) = \mathrm{card}(\{0,1\}^3) = 2^3 = 8$.

Ex3 soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentat° Ω des évts élts de cette expérience

→ un élt ω doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

où $\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Pile} \\ 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\} \} \quad 1 \leq i \leq n \}$

l'ens des n-uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

$n = 5$

FPFPP 01011

FFFFF 00000 ....

⋮

$(\omega_1, \dots, \omega_5)$ où ω_1 res du 1° lancer

⋮

ω_5 res du 5° lancer.

BONUS Réfléchir au cardinal de ces ensembles

2) # event F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 prmrs lancers" ĉ ss-ens de Ω.

Rappels $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$.

$F = \{F\} \times \{F\} \times \{P, F\}^{n-2}$

$F = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 = F \\ \omega_2 = F \end{matrix} \right\}$

3) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

E_i = "résultat du i-ème lancer est pile"

$E_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_i = P\}$

3 Ex 3+4.

Ex 3 soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentation Ω des évts élts de cette expérience

→ un élt ω doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

où $\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Pile} \\ 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\}\ 1 \leq i \leq n\}$

l'ens des n-uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

$n = 5$ FPFPP 01011

FFFFF 00000 ...

$(\omega_1, \dots, \omega_5)$ où ω_1 res du 1° lancer

$\vdots$

ω_5 res du 5° lancer.

BONUS Réfléchir au cardinal de ces ensembles

3 Ex 3+4.

2) # event F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 prmrs lancers" ĉ ss-ens de Ω.

Rappels $A \times B = \{(a,b),\ a \in A,\ b \in B\}$.

$F = \{F\} \times \{F\} \times \{P, F\}^{n-2}$

$F = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \ \middle|\ \begin{matrix} \omega_1 = F \\ \omega_2 = F \end{matrix} \right\}$

3) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

E_i = "résultat du i-ème lancer est pile"

$E_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_i = P\}$

$E_i = \{0,1\}^{i-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-i}$

4) Écrire à p des évents E_i l'évent F.

$F = E_1^c \cap E_2^c$

5) à p E_i écrire G = "au moins une fois pile"

$G = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, n\}\ \omega \in E_i\}$

6) à p E_i écrire H = "au moins deux fois sur pile"

$H = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i<k}}^{n} (E_i \cap E_k) = \{\omega \in \Omega : \exists (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid \omega \in E_i \cap E_j,\ i \neq j\}$

R9 $A\times B \subset \Omega\times\Omega = \{(a,b)\ a\in A \text{ et } b\in B\}$

$A\cap B \subset \Omega = \{w\in\Omega \mid w\in A \text{ et } w\in B\}$

$$H = \bigcup_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n \\ i\neq j}} E_i \cap E_j$$

→ calcul les cardinaux :

- $\mathrm{card}(F) = 2^{n-2} = \mathrm{card}\{\{0\}\times\{0\}\times\{0,1\}^{n-2}\}$.
- $\mathrm{card}(E_i) = 2^{n-1}$
- $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(\Omega) - 1 = 2^n - 1$.

$\mathrm{card}(A\cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$

→ penser au complémentaire

$G^c =$ "aucun pile" $= \{(0,\dots,0)\}$

$\mathrm{card}(G^c) = 1$

$\mathrm{card}(G) + \mathrm{card}(G^c) = \mathrm{card}(\Omega)$

∘

▸ $H^c =$ "au plus 1 fois pile"

$\mathrm{card}(H^c) = n+1 = \{(1,0,\dots,0);(0,1,0,\dots 0);\dots;(0,\dots,1);(0\dots0)\}$

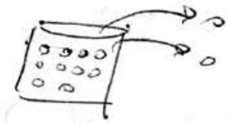
$\mathrm{card}(H) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(H^c)$

$\mathrm{card}(H) = 2^n - n+1$.

→→ si on met l'équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$

Exercice 4

$1, \dots, 10$.



1) 2 boules simult.
2) 2 boules successivement.

∘ $A =$ "la somme est paire".

(1) $\Omega = \{w = (x,y) \mid (x,y) \in [\![1,10]\!]^2, x\neq y\}$

$(1,2)$ et $(2,1)$ st élts $\neq$ts de Ω.

$\Omega = \{(x,y) \in \{1,\dots,10\}^2 : x<y\}$.

$\Omega = \{A \subset \{1,\dots,10\} \mid \mathrm{card}\, A = 2\}$.

$\mathrm{card}(\Omega_1) = 45$.

nbr de possibilité de prendre 2 élts parmi 10 $= C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{90}{2} = 45$

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, \ \omega_1 < \omega_2\}$

(2) bis on tire successivement sans remise

$A \subset \Omega$, A : " la somme est paire ".

$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \ \omega_1 + \omega_2 = 2k\}$.

$A = A_p \cup A_i$.

$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A_p = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in E_p^2\}$

$A_i = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in E_i^2\}$.

$A_p \cap A_i = \emptyset$, A_p et A_i st disjoint.

$\mathrm{card}(A_p \cup A_i) = \mathrm{card}(A_p) + \mathrm{card}(A_i)$

$\mathrm{card}(A_p) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

$\mathrm{card}(A_i) = C_5^2 = 10$.

$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20$.

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$$

(2) on tire successivement & remise.

$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2\}$

$\mathrm{card}(\Omega) = 10^2$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & \cdots & 10 \\ \hline 1 & (1,1) \ \dots \ (1,5) & & (1,10) \\ \vdots & & & \\ 10 & & & (10,10) \end{array}$$

$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$

(5) $[\![1, 10]\!] = \{1, \dots, 10\}$.

$A = A_p \cup A_i$

$A_p = \{w = (x,y) \mid x \in E_p, y \in E_p\}$

$= E_p \times E_p = E_p^2$

$= \{2,4,6,8,10\}^2 \subset \Omega.$

$card(A_p) = car(\{2,4,6,8,10\}^2) = 5^2 = 25$

$card(A) = car(A_p) + card(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$

$P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}.$

Ω est fini.

$\mathcal{F}$ tribu $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathbb{P}$ équiprobabilité

② bis on tire successivement sans remise

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, \ \omega_1 < \omega_2\}$

$A \subset \Omega$, A : " la somme est paire ".

$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \ \omega_1 + \omega_2 = 2k\}$.

$A = A_p \cup A_i$.

$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A_p = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in E_p^2\}$

$A_i = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in E_i^2\}$.

$A_p \cap A_i = \emptyset$, A_p et A_i st disjoints.

$\mathrm{card}(A_p \cup A_i) = \mathrm{card}(A_p) + \mathrm{card}(A_i)$.

$\mathrm{card}(A_p) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

$\mathrm{card}(A_i) = C_5^2 = 10$.

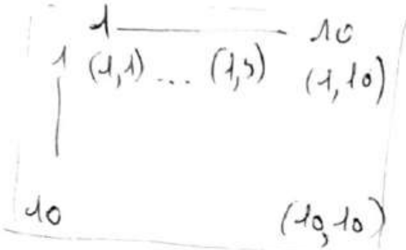
$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20$.

$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$

② on tire successivement avec remise.

$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2\}$

$\mathrm{card}(\Omega) = 10^2$



$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$

⑤ $[\![1, 10]\!] = \{1, \dots, 10\}$.

$A = A_p \cup A_i$

$A_p = \{w = (x,y) \mid x \in E_p,\ y \in E_p\}$

$= E_p \times E_p = E_p^2$

$= \{2,4,6,8,10\}^2 \subset \Omega.$

$card(A_p) = car(\{2,4,6,8,10\}^2) = 5^2 = 25$

$card(A) = car(A_p) + card(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$

$P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}.$

Ω est fini.

$\mathcal{F}$ tribu $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$

$\mathbb{P}$ équiprobabilité

Ex5 (date d'anniversaire).

→ jours ~~A~~ équiprobables ici.

- $\Omega = \{1, \dots, 365\}^{30}$; $w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega.$

w_i : n° du jour annir du $i^{ème}$ étudiant

- on définit la Tribu

Ω est fini de on prd ts les ss-ens de Ω.

$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)}$: ens des évents observables.

- $\mathbb{P}$ équiprobabilité sur Ω.

▸ A_m : "2 pers au moins ont $\hat{m}$ jour anniversaire". déf° event

→ $A_m = \{w \in \Omega : w = (w_i)_{1 \leq i \leq 30}\ \exists (i,j) \in \{1, \dots, 30\}^2$

tq $w_i = w_j$ & $i \neq j\}$

▸ A_m^c = "tous les anniversaires sont jours ≠". calcul proba

$-30+1$

$\mathbb{P}(A_m^c) = \dfrac{card(A_m^c)}{card(\Omega)} = \dfrac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}}$

$A_m^c = \{ w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega,\ w_i \neq w_j,\ \forall i \neq j \}$.

$$\mathrm{card}(A_m^c) = A_{365}^{30} = \frac{365!}{(365-30)!}$$

arrangement

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

- si $w_1 < w_2 < \dots < w_{30}$.

$B = \{ w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega$
$w_1 < w_2 < \dots < w_{30} \}$

$$\mathrm{card}(B) = C_{365}^{30} = \frac{365!}{30!\ 335!}$$

R9 exo 4 1) tirage simultané des 2 boules.

- $\Omega_1 = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x < y \}$

@ $w = (1,2)$ on tire les boules. ici $\boxed{(1,2) = (2,1)}$

$$\mathrm{card}(\Omega_1) = \frac{10 \times 9}{2} = C_{10}^{2}$$

2) tirage successif et sans remise.

$\Omega_2 = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x \neq y \}$.

$\boxed{(1,2) \text{ est } \neq \text{ de } (2,1)}$

$\mathrm{card}(\Omega_2) = 10 \times 9 = A_{10}^2$

(la proba de l'event sera m̂ ds 2 modélisaθs) ce sera $20/45$.

$A =$ "somme paire" $= A_p \cup A_i$.

$A_p = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 : x \neq y \mid \begin{smallmatrix} x \text{ est pair} \\ y \text{ est pair} \end{smallmatrix} \}$

$A_p = \{ (x,y) \in \{2,4,6,8,10\}^2 \mid x \neq y$.

$\mathrm{card}(A_p) = 5 \times 4 = A_5^2$ et $\mathrm{card}(A_i) = A_5^2$

dc $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_p) + \mathrm{card}(A_i)$
$= A_5^2 + A_5^2 = 40$.

$\mathrm{card}(\Omega_2) = A_{10}^2 = 10 \times 9$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{40}{90} = \frac{20}{45}$$

tirage successif $\neq$ toutes permutaθs possibles. A_n^p
tirage simultané $=$ p permutaθs parmi n C_n^p $\binom{n}{p}$

Retour à l'ex 5

$$\mathbb{P}(A^c_m) = \frac{A^{30}_{365}}{365^{30}} = \frac{365!}{335!\,365^{30}}$$

$$= \prod_{i=0}^{29} \frac{(365-i)}{365}$$

$\mathbb{P}(A_m) \simeq 70\%$.

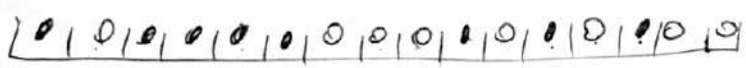
R9 ϱ de 23 étudiants, $\mathbb{P}(A_m) \geq \frac{1}{2}$.

Ex 6 : Autant de piles que de faces

1) en dénombrant façons aligner n boules blanches / noires

mq $C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$

→ nbr possibilités placer n boules blanches & n boules noires



$2n$ cases

$C_n^k = C_{2n}^{n}$: nb de possibilités d'aligner n boules blanches & n b^les noires

$\Omega = \{ w \in \{0,1\}^{2n}, w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n}$

$w \in \Omega$ si $\sum_{i=1}^{2n} w_i = n \}$

$w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n} : \exists\, i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

$w_i = 1$, $w_k = 0$ sinon $\}$.

$\mathrm{card}(\Omega) = C_{2n}^{n}$.

→ Trouver une $\boxed{M}$ pr répartir n boules blanches parmi S cases.

indic $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Trouver $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \times C_n^{n-k}$.

Charles Suquet.

Mq $C_{2n}^{n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, C_n^{n-k}}$

Preuve combinatoire.

comment répartir n boules noires parmi $2n$

k boules noires | $n-k$ boules noires $\Rightarrow$ n boules noires

$2n$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \times C_n^{n-k} = C_{2n}^{n}.$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k \quad \text{union disjointe.}$$

$$\Omega_k = \{ w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = k \}$$

$$\text{card}(\Omega_k) = C_n^k \cdot C_n^{n-k}.$$

NB: $\Omega_k = \{ w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \{0,1\}^n :$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = k \text{ et } \sum_{i=i+1}^{2n} w_i = n-k \}$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k \quad \text{union disjointe.}$$

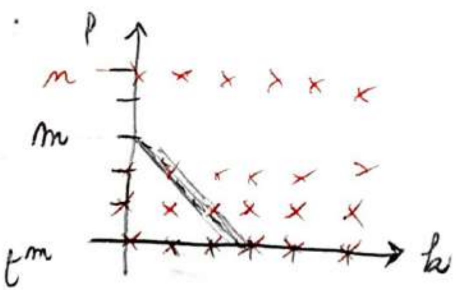
$$\text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(\Omega_k)$$

2) Retrouver (!!) $(1+t)^n (1+t)^n = (1+t)^{2n}$

- $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot t^k \cdot 1^{n-k}$
- $(1+t)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \, t^k$
- $(1+t)^n \cdot (1+t)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l t^l \right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} C_n^k \, C_n^l \, t^k t^l$$

$$= \sum_{0 \le k, l \le n} C_n^k \cdot C_n^l \, t^k t^l = \sum_{0 \le k, l \le n} C_n^k \, C_n^l \, t^{k+l}$$



$$= \sum_{0 \leq k, l \leq n} C_n^k C_n^l t^{k+l}$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{k,l: \\ k+l=m}} C_n^k C_n^l \right) t^m$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \left(\overbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k}}} \right) t^m$$

$$(1+t)^n \times (1+t)^n = (1+t)^{2n}$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \boxed{C_{2n}^m} t^m$$

$m^{\text{è}}$ coeff polynôme

$$\Rightarrow \boxed{C_{2n}^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k}} . \quad \forall m \in \{0, \dots, 2n\}$$

pour $m = n$:

$$\boxed{C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}}$$

3) Deux personnes lancent chacune n fois d'une pièce de monnaie. Quelle est la proba p_n qu'elles obtiennent $m^{\text{è}}$ nbr piles.

Expérience aléatoire

→ Décrire espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

→ calculer $p_n = \mathbb{P}(E_n)$

$$\Omega = \{0,1\}^{2n}, \quad \omega = (\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_n}_{\text{résultats lancers 1° personne}}, \underbrace{\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}}_{\text{rés lancers 2° pers.}})$$

1 pile
0 face

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, · $\mathbb{P}$ équiprobabilité sur Ω

$$\text{card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k$$

toutes les possibilités de combinaisons.

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k \quad , \quad E_k : \text{"2 pers obtiennent } k \text{ piles" exact-t}$$

les E_k st disjoints,

$$\text{card}(E_k) = C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\Rightarrow \text{card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

$$p_n = \mathbb{P}(E_n) = \frac{\text{card}(E_n)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2}{2^{2n}}$$

$$p_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

4) Donner un équivalent de p_n,

avec FF Sterling $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$p_n = \frac{1}{2^{2n}} \times C_{2n}^n = \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}\cdot\sqrt{\pi n}} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{2^{2n}\cdot\sqrt{\pi n}} \times \frac{n^{2n}}{n^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\boxed{p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

5) Affirmation

$$p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

E_k : "les 2 pers obtiennent k piles"

F_k : "k piles pr 1° pers
k faces pr 2° pers" = "n piles - n faces"

$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = p_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ex 1 : Tribu, expérience, format

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ens Ω de ts les rés possibles.

$$\Omega = [\![1,4]\!] = \{1, 2, 3, 4\}$$

2) Une p. lance le dé & annonce résultat tiré.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \Rightarrow$ évents élémentaires.

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

$= \mathcal{P}(\Omega)$: "on connaît tout"

3) p.s ↗ pair $\{2,4\}$
↘ impair $\{1,3\}$

$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4\}, \{1,3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

→ $\mathcal{F}_2$ est la plus tribu q contient $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

4) on n'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Big| \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \quad \Big| \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

sans remise

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

- $$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)}{1} \times \frac{(n-k+2)}{2} \times \cdots \frac{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \text{ pr } k \text{ fixé}$$

$\alpha \in]0,1[$.

$$\binom{n}{k} \underset{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^n$$

- $\underline{\text{Pascal}}$ $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 6 + 4 = 10.$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}$$

$$\sum \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum C_n^k \cdot C_n^k$$

$$= \sum \left(C_n^k\right)^2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad C_{2n}^n = \frac{2n!}{n!(n!)} = 1.$$

2) $(1+t)^n (1+t)^n = (1+t)^{2n}$.

$\underline{\text{FFB}}$ $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$$

$$(1+t)^{2n} = \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k \, 1^k \times t^{2n-k} = t^k \, 1^{2n-k}$$

Prépa

Ex 7 : Tribu, expérience, format

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ens Ω de to les iss possibles.

$$\Omega = [\![1,4]\!] = \{1,2,3,4\}$$

2) Une ps. lance 🎲 & annonce résultat tiré.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ => events élémentaires.

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\},\{2\},\{3\},\{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

$= \mathcal{P}(\Omega)$: "on connaît tout"

3) ps ↗ pair $\{2,4\}$
↘ impair $\{1,3\}$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4\}, \{1,3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

→ $\mathcal{F}_2$ est la plus tribu q contient $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$

4) on n'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

5) $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \{A \subset \Omega, \ \mathrm{card}(A) = k\}$$

@ $\mathcal{P}_1(\Omega) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}_k(A)) = C_4^k.$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{4} \mathcal{P}(\Omega) \quad \left(\text{union disjointe}\right)$$

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = \sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4$$

car $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\mathrm{card}(\Omega)}$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4.$$

Pourquoi $\sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4$?

$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$

$\Rightarrow a=b=1,$

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k}$$

$\mathcal{A}$ $n=4$

mais si card(Ω) alors card$(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

$\tilde{\mathcal{F}}_0 \subset \tilde{\mathcal{F}}_1 \subset \tilde{\mathcal{F}}_2$: on a de + en + d'informaOs sur ce que l'on observe.

$\rightarrow (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$

$\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$: ens des evts observables.

- si Ω est fini & qu'on fournit le résultat de l'exp: les évents élémentaires (13) alors $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$

Si Ω n'est pas fini, on ne prend pas forcément $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\mathbb{P} : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \mathbb{P}(A).$$

@ si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ou autre choix.

$\mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}$.

D@ $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{8}$.

$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{2}$

---

6) $\tilde{\mathcal{F}}_{2 \text{ jours } 2020} \subset \tilde{\mathcal{F}}_{31 \text{ mars } 2022}$,

on observe le passé jusqu'à aujourd'hui.

Ex & FF de Poincaré

• $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

• $\mathbb{P}(\underbrace{A \cup B}_{= A} \cup \underbrace{C}_{= B}) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup P(B \cap C)).$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \left[P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C) \cap (B \cap C)\right]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

FF de Poincaré

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots$$

$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Ex 9 Secrétaire $\begin{cases} \to N \text{ lettres} \\ \to N \text{ enveloppes.} \end{cases}$

→ $\Omega_N = \mathfrak{S}_N$ = {ens des permutaOs de l'ens {1, …, N}}.

Une permutaO : appli bijective

- $\{1, \dots, N\} \longrightarrow \{1, \dots, N\}$.

$card(\Omega) = N!$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}_N(\{\sigma\}) = \dfrac{1}{N!}$

$\sigma \in \Omega_N = \mathfrak{S}_N$

- $\sigma(i) = j$, si la $i^{ème}$ lettre va ds $j^{ème}$ enveloppe.

σ représente bien la répartiO des lettres numérotées de {1, …, N} ds les enveloppes {1, …, N}.

1) Pour $1 \leq j \leq N$

A_j = "la $j^{ème}$ lettre se trouve ds bonne enveloppe"

$A_j = \{\sigma \in \Omega : \sigma(j) = j\}$ $\forall j \in \{1, \dots, N\}$

calcul de $P_N(A_j) = \dfrac{card(A_j)}{card(\Omega)} = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$

car A_j est en bijectO de l'ens des permutaOs privé de j. $\mathfrak{S}_{\{1,\dots,N\} \setminus \{j\}}$.

2) $A_{i_1, \dots, i_k} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(i_1) = i_1 \dots \sigma(i_k) = i_k\}$

$= A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$

$P_N(A_{i_1, \dots, i_k}) = \dfrac{(N-k)!}{N!} = P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

3) B : "au moins une des lettres est ds la bonne enveloppe"

$B = A_1 \cup A_2 \dots \cup \dots \cup A_N = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$

$B = \{\sigma \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, N\}, \sigma(i) = i\}$

4) 4 FF Poincaré, calculer $P_N(B)$
les A_i ne st pas indépdts

$P_N(B) = P_N\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{N} P_N(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + \dots$

$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots +$

$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

$= N \times \frac{1}{N} - C_N^2 \frac{(N-2)!}{N!} + \dots + (-1)^{k+1} C_N^k \frac{(N-k)!}{N!}$

$+ \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$

NB C_N^2 : calcul nbr de couples (i_1, i_2)

$i_1 < i_2$ ds $\{1, \dots, N\}$: C_N^2.

$\rightarrow$ si $i_1 \neq i_2$: A_N^2.

$\rightarrow C_N^k \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{1}{k!}$

$P_N(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{(N!)}$

$\lim_{N \to \infty} P_N(B) =$

TD n° 2

Ex 1 1 urne, 10 jetons jaunes.
5 blancs, 1 rouge.

Modélisa° :

$\Omega = \{ j_1, j_{10}, b_1, b_2, r_2 \}$.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P =$ équiprobabilité.

$\forall \omega \in \Omega, \; P(\{\omega\}) = \frac{1}{16}$.

Autre modélisa°.

$\Omega' = \{J, B, R\}$.

$\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$

$P'(\{J\}) = \frac{10}{16}$ $\quad P'(\{R\}) = \frac{1}{10}$

$P'(\{B\}) = \frac{5}{16}$

→ On annonce qu'il n'est pas rouge $= \Omega \setminus \{r_2\}$ 1° mod $= \{R\}^c$ 2° mod

Probabilité qu'il soit jaune.

A = " le jeton tiré n'est pas rouge " } on cherche $P(B|A)$.

B = " le jeton tiré est jaune " → $\{j_1, \dots, j_{10}\} = \{\omega\}$ (1)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{10/16}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{10}{15}$$

Ex2

• $P/7$ d'ê ds 1 étage.

• 1 (1). $1-p$ ê en dehors immeuble.

$E_i =$ " ê à étage i ", $P(E_i) = \frac{p}{7}$

$I =$ " ê ds immeuble "

$P(I^c) = 1 - p$, $\quad E_1 \cup \dots \cup E_7 = I$.

$$\sum_{i=1}^{7} P(E_i) = 7 \times \frac{p}{7} = p = P(I)$$

1) On sait que $E_1^c \cap \dots \cap E_6^c$ est réalisé.

$$P(E_7 \mid E_1^c \cap \dots \cap E_6^c) = \frac{P(E_7 \cap E_1^c \cap \dots \cap E_6^c)}{P(E_1^c \cap \dots E_6^c)}$$

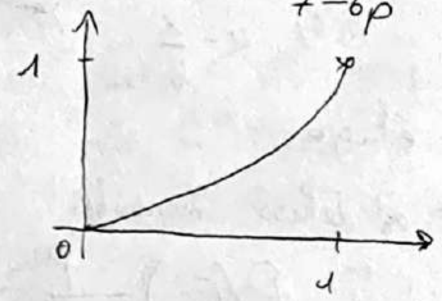
$$= \frac{P(E_7)}{1 - P(E_1 \cup \dots \cup E_6)} = \frac{p/7}{1 - 6p/7} = \frac{p}{7 - 6p}$$

$E_i \cap E_j \neq 0$ disjoints car on ne pt pas ê ds 2 étages ≠

$P(E_1 \cup \dots \cup E_6) = P(E_1) + \dots + P(E_6)$

2) $p \longmapsto \dfrac{p}{7-6p}$ $\quad p \in [0,1]$

→ calcul dérivée
→ ou chgt de repère.



en calculant f' sur $[0,1]$ ou en regardant ça c une hyperbole.

Ex 3

$X =$ " X_{xxx} fait le sujet ", C " le chap tombe "

$Y =$ " Y_{yyy} —— ", $Z =$ " Z_{333} —— ".

Traduire l'énoncé de proba de ces events.

$P(C|X) = 0,1$, $P(C|Y) = 0,4)$, $P(C|Z) = 0,8)$

$\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{2}$, $X \cup Z = Y^c$

$P(X|Y^c) + P(Z|Y^c) = P(Y^c|Y^c) = 1$

$\Rightarrow P(Z|Y^c) = 1 - P(X|Y^c)$

objectif : $\mathbb{P}(X|C)$, $\mathbb{P}(Y|C)$, $\mathbb{P}(Z|C)$

$P(X) = \mathbb{P}(X|Y^c)\mathbb{P}(Y^c) + \underbrace{P(X|Y)}_{=0} P(x)$

$P(X) = \mathbb{P}(X|Y^c) . \mathbb{P}(Y^c) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

∘ $P(X) + P(Y) + P(Z) = 1$.

$P(Z) = 1 - P(X) - P(Y)$
$= 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$P(Z) = \mathbb{P}(Z|Y^c) \ \mathbb{P}(Y^c) = \frac{2}{5} \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

FF proba totale / Conditionnement 3 cas possibles

$P(C) = P(C|X) \mathbb{P}(x) + P(C|Y) P(Y) + P(C|Z) P(Z)$
$= \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{39}{100}$.

ccl $P(X|C) = \dfrac{P(X \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C|X) . P(X)}{\mathbb{P}(C)}$
$= \dfrac{3/100}{39/100} = \frac{3}{39} = \frac{1}{13} \approx 7,7\ \%$

$P(Y|C) = \dfrac{P(C|Y) . \mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{20/100}{39/100} = \frac{20}{39} \approx 51,3\ \%$

$P(Z|C) = \dfrac{P(C|Z) . \mathbb{P}(Z)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{16/100}{39/100} = \frac{16}{39} \approx 41\%$

Ex5 Deux dés : exp. aléatoire !

A : " res 1° impair "

B : " res 2° pair "

C : " res m̂ parité "

$\Omega = \{1,6\}^2$.

$w = (w_1, w_2) \in \Omega$ & $w_1 \in \{1 \ldots 6\}$ res 1° dé, $w_2 \in \{1 \ldots 6\}$ res 2° dé.

$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{F}$.

$\mathbb{P}$: Equiprobabilité

$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{36}$

$A = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1 \in \{1,3,5\}\}$

$= \{1,3,5\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1 \in \{2,4,6\}\}$

$= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}^2$.

$C = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1$ et w_2 paires ou w_1 et w_2 impaires$\}$

$C_p = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1 \in \{2,4,6\}$ et $w_2 = \{2,4,6\}\}$

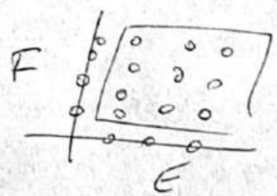
$= \{2,4,6\}^2$

$C_i = \{1,3,5\}^2$

$P(A), \; P(B), \; P(C), \; P(A \cap B), \; P(A \cap C), \; P(B \cap C)$

- $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{3 \times 6}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$

Rq $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$



$E \times F$.

$P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{6 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$

$P(C) = \dfrac{card(C_p) + card(C_i)}{card(\Omega)} = \dfrac{3^2 + 3^2}{36} = \dfrac{2 \times 9}{36} = \dfrac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$card(A) = card(A_1) \times card(A_2)$

Ex5 Deux dés : exp. aléatoire !

A : " res 1° impair "

B : " res 2° pair "

C : " res même parité "

$\Omega = \{1, 6\}^2$.

$w = (w_1, w_2) \in \Omega$ où $w_1 \in \{1, \dots 6\}$ res 1° dé

$w_2 \in \{1, \dots 6\}$ res 2° dé.

$\mathcal{P}(\Omega) = F$.

$\mathbb{P}$: Equiprobabilité

$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{36}$

$A = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1 \in \{1,3,5\}\}$

$= \{1,3,5\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_2 \in \{2,4,6\}\}$

$= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}^2$.

$card(A) = card(A_1) \times card(A_2)$

$C = \left\{ w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; \begin{array}{l} w_1 \text{ et } w_2 \text{ paires ou} \\ w_1 \text{ et } w_2 \text{ impaires} \end{array} \right\}$

$C_p = \{ w = (w_1, w_2) \in \Omega, \; w_1 \in \{2,4,6\} \text{ et } w_2 = \{2,4,6\}\}$

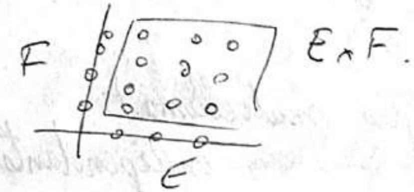
$= \{2,4,6\}^2$

$C_i = \{1,3,5\}^2$

$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$

- $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

Rq $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$



$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{card(C_p) + card(C_i)}{card(\Omega)} = \frac{3^2 + 3^2}{36} = \frac{2 \times 9}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{1,3,5\} \times \{2,4,6\}$ | A et B st indépendts
car $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B)$

$A \cap C = \{1,3,5\}^2, \quad B \cap C = \{2,4,6\}^2$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{card(A \cap C)}{card(\Omega)} = P(A).P(C)$

$\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{card(B \cap C)}{card(\Omega)} = P(B).P(C).$

$\Rightarrow$ indépendance des events 2 à 2.

$\underbrace{\mathbb{P}(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\emptyset})}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{P(A).P(B).P(C)}_{\frac{1}{8}}$

Donc A, B et C ne st pas mutuellement indépendants.

Rq (!!)

$P(T^c | A^c) = 1 - P(T|A^c)$

FF probas totales

Règle de conditionnement

Ex 4 Alcootest

1) A := { "Automobiliste a trop bu" }

T = { "Test positif" }

$P(A) = 0{,}005, \quad P(T|A) = \rho = 0{,}95$

$P(T^c|A^c) = \rho$

2) On cherche $P(A|T) = \dfrac{P(T|A).P(A)}{P(T)}$

$= \dfrac{P(T|A).P(A)}{P(T|A).P(A) + P(T|A^c).P(A^c)} = 8{,}7\% = 0{,}087$

à $\rho = 0{,}95$.

Rq $A \cup A^c = \Omega$

3) Trouver ρ tq $P(A|T) = 0{,}95$.

ici $\rho = 0{,}999736 \approx 99{,}97\%$

$P(A|T) = \dfrac{\rho.P(A)}{\rho.P(A) + P(A^c).P(T|A^c)}$

si $P(A) = 0{,}5$

4) on trouve $P(A|T) = 0{,}95 = 95\%$

Ex6 On s'intéresse à répartition sexes des enfants famille n enfants.

$\Omega_n = \{f, g\}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \{f, g\},\ i = 1, \dots, n\}$

$\mathbb{P}$ équiprobabilité.

$\mathrm{card}(\Omega_n) = 2^n$.

- $\forall w \in \Omega_n,\ \mathbb{P}(\{w\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

A : { la famille a enfants des 2 sexes "

B : { la famille a au plus 1 fille ".

$\mathrm{card}(A) \cup \mathrm{card}(A^c) = \mathrm{card}(\Omega)$.

$\mathrm{card}(A) = 2^n - \mathrm{card}(A^c) = 2^n - 2$

A^c : { famille a q filles ou q garçons }

- $A^c = \{(f, \dots f) ; (g, \dots, g)\}$.

$A = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega\ \exists i \neq j \mid w_i \neq w_j\}$

$\mathrm{card}(A^c) = 2$

Donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$.

$B = B_0 \cup B_1$.

B_0 : { " la famille n'a pas de fille " $= \{(g, \dots g)\}$

B_1 : { " la famille a exactement une fille "

$B_1 = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega$ tq $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ w_i = f$ et $\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\ w_j = g\}$

$\mathrm{card}(B_1) = n$, $\mathrm{card}(B_0) = 1$.

$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B_1) + \mathrm{card}(B_0)$

$\mathrm{card}(B) = n + 1$

$\mathbb{P}(B) = \dfrac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{n+1}{2^n}$

2) en déduire que A et B sont indépendants que si $n = 3$

vérifier $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

car $A \cap B = \underbrace{A \cap B_0}_{\emptyset} \cup \underbrace{A \cap B_1}_{B_1}$.

$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{2^n - 2}{2^n} \times \frac{n+1}{2^n}$

$\Leftrightarrow n 2^n = (2^n - 2)(n+1)$

$\Leftrightarrow 2^n = 2n + 2$

OK pour $n = 3$

FAUX pour $n = 2$.

Par récurrence $\forall n \geq 4, 2^n > 2n+2$

Ex 7 Lancers 4 paires de dés, on calcule la somme. Calculer 2 façons proba E: { " dans la suite des ses observés, la 1° obtenu d'un 9 a lieu avant la 1° obtenu d'un 7 " }

$\Omega = (\{1, \dots, 6\}^2)^{\mathbb{N}^*}$

1) Proba n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer.

$\Omega_1 = (\{1, \dots, 6\}^2)$

(Va) $S : \Omega_1 \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$

$w = (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$.

L'évent $\sigma_7 = \{ w \in \Omega_1 \mid S(w) = 7 \}$

$\sigma_7 = S^{-1}(\{7\}) = \{S = 7\}$

$\sigma_9 = \{S = 9\}$.

$A_1 =$ " ni 7 ni 9 " $= \{S \neq 7 \text{ et } S \neq 9\}$

$A_1 = S^{-1}\{2, \dots, 12\} \setminus \{7, 9\}$

$A_1^c = \{S = 7\} \cup \{S = 9\}$

cf 17, 18, 19.

$P(\{S = 7\}) = \mathbb{P}(S = 7) = \frac{\text{card}(\{S = 7\})}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{6}{36}$

$\{S = 7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

$s \in \{2, \dots, 12\}$

$\{S = s\} = \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_1 + w_2 = s\}$

$= \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_2 = s - w_1\}$.

$1 \leq w_1 \leq 6 \qquad 1 \leq w_2 \leq 6$

6

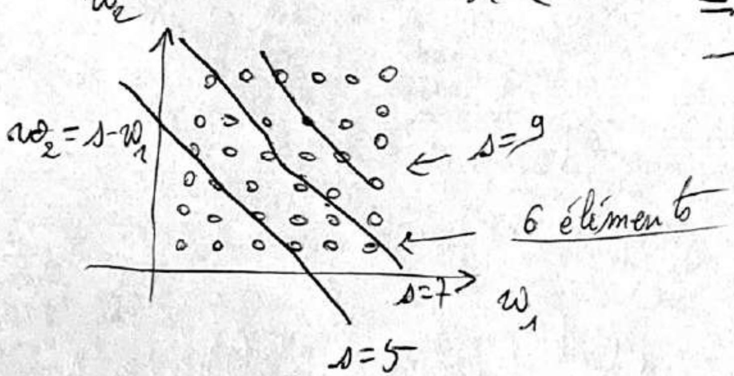
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ s-6 \leq w_1 \leq s-1. \end{cases}$$

pour $s = 7$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq w_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow$ 6 choix possibles pr w_1.

- $s = w_2 + w_1 \Rightarrow w_2 = 7 - w_1$.

pour $s=9$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 3 \leq w_1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq w_1 \leq 6$

$\Rightarrow$ 4 choix possibles



- Pour $P(\{S=9\}) = P(S=9) = \dfrac{\text{card}(\{S=9\})}{\text{card}(\Omega_1)}$

$$= \frac{4}{36}$$

$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$

$P(A_1) = 1 - \left(P(\{S=7\}) + P(\{S=9\})\right) \underset{P}{=} 1 - \dfrac{10}{36} = \dfrac{26}{36}$

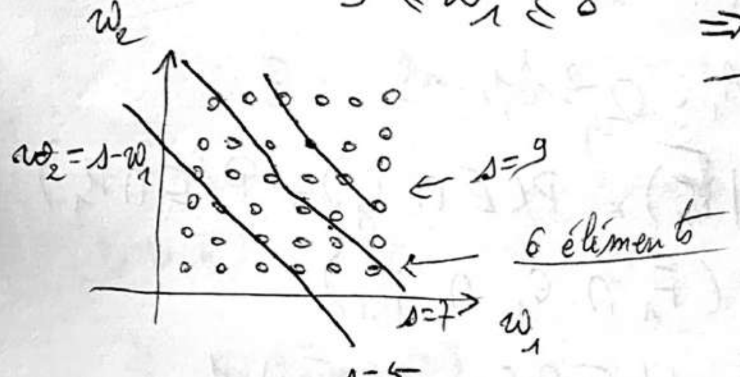
$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ s-6 \leq w_1 \leq s-1. \end{cases}$

pour $s = 7$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq w_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 6$ choix possibles pr w_1

$s = w_2 + w_1 \Rightarrow w_2 = 7 - w_1.$

pour $s = 9$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 3 \leq w_1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq w_1 \leq 6$

$\Rightarrow$ 4 choix possibles



Pour $P(\{S=9\}) = \mathbb{P}(S=9) = \dfrac{card(\{=9\})}{card(\Omega_1)}$

$= \dfrac{4}{36}$

$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$

$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \left(\mathbb{P}(\{S=7\}) + \mathbb{P}(\{S=9\})\right) = 1 - \dfrac{10}{36} = \dfrac{26}{36}$

$6/36 + 4/36$

$S : \Omega_1 \longrightarrow \{2, \dots, 12\}$

$(w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2.$

"obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer"

$\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{26}{36}$

2) E = "la 1° obtent° d'un 9 q arrive avant la 1° obtent° 7"

Modélisat° : $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$ (infini non-dénombrable)

$w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ représente les résultats successifs des lancers. $w_n \in \Omega_1$ représente le résultat du $n^{\text{ième}}$ lancer.

F_i : "obtenir 9 au $i^{\text{ème}}$ lancer", $i \in \mathbb{N}^*$

E_n : "ni 9 ni 7 au cours des $n-1$ premiers lancers & 9 au n-ième lancer"

a) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ car E on obtient 1° 9 av 7, c'est $\exists$ un lancer n où obtient 9 & pas obtenu ni 7 ni 9.

→ H_i : ni 7 ni 9 au $i^{\text{ème}}$ lancer.

$E = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap F_n.$

n-1 lancers $n^{\text{ième}}$ n ième

ni 7 ni 9 9

$E_n \cap E_m = \{\emptyset\}$ disjoints

b) $P(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap E_{n-1}\right)$

$= \prod_{i=1}^{n-1} P(H_i) \; \mathbb{P}(E_n)$ les events s+ indépendants

$\mathbb{P}(F_n) = 4/36$

$\mathbb{P}(H_1) = 26/36$ $\quad \mathbb{P}(E_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on rq $P(E_2) = \mathbb{P}(F_2) = \frac{4}{36}$

c) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$, les E_n s/ disjoints. $\underset{\text{indépdts}}{\Downarrow}$

si $w \in E_n \cap E_m \Rightarrow$ on a 9 au n premiers lancers $\Rightarrow$ on 9 au n-ième lancer 9 au m-ième lancer.

$E_n \cap E_m = \emptyset$

$P(E_n \cap E_p) = 0 \neq P(E_n) P(E_p)$

(si pas disjoint)

$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$

$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{36} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^n = \frac{4}{36} \times \frac{1}{1-\frac{26}{36}} = \frac{4}{10}$

$\boxed{\text{M2}}$ 3)

G_1 : "obtenir 7 au 1° lancer"

a) $\{F_1, G_1, H_1\}$ partition de Ω

car $H_1 \cdot (F_1 \cup G_1)^c = F_1^c \cap G_1^c$

$\Rightarrow H_1 \cup F_1 \cup G_1 = \Omega$ et s/ disjoints

$H_1 = A_1 \times \Omega_1^{\{1,..n\}}$

$P(E) = P(E \mid F_1) \times P(E \cap G_1) + P(E \cap H_1)$

$E = E \cap (F_1 \cap G_1 \cap H_1)$

$= E \cap F_1 \cup E \cap G_1 \cup E \cap H_1$

s/ disjoints

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F_1) + \mathbb{P}(E \cap G_1) + \mathbb{P}(E \cap H_1)$

$\mathbb{P}(E) = P(E \mid F_1) . P(F_1) + \mathbb{P}(E \mid G_1) . P(G_1)$
$+ \mathbb{P}(E \mid H_1) . P(H_1)$

À propos de la partiO :

pk $\{F_1 \cap G_1 \cap H_1\}$ form$^+$ partiO de Ω.

@ lancer ∞ pièce , $\Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$

A : {pile au premier lancer}

$= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mid \omega_1 = P\}$

- B : {face au premier lancer}

$= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega \mid \omega_1 = F\} = A^c$

" $A \cup B = \Omega$ partiO de Ω

on conditionne selon un critère"

$(F_1 \cup G_1)^C = H_1$, $H_1 \cup H_1^{\,c} = \Omega$

$H_1 \cup (F_1 \cup G_1) = \Omega$

- qd on a un événement, c'est tjs une partiO entre cet évent & son complément^R ds Ω.

b) on calcule les probas conditionnelles

$P(E \mid G_1) = 0$ (9 avant 7 si j'ai 7 nul)

$P(E \mid F_1) = 1$ (9 avant 7 arrive

$P(E \mid H_1) = P(E)$ sachant H_1, on a aucune info sur réalisaO de E.

$\Rightarrow$ ĉ si on décalait exp. au 2^e lancer.

$P(E) = P(F_1) + P(E) \times P(H_1)$

$$P(E) = \frac{P(F_1)}{1 - P(H_1)} = \frac{4}{10}$$

Ex 8 Les Menteurs.

→ n personnes, proba p mentir

1° pers oui ou non → 2° pers → … → n personnes

$1 \leq k \leq n$, V_k : "info q reçt k ième pers mn." est vraie

$$p_k = \mathbb{P}(V_k)$$

p_1 ? p_2 ?

- $p_1 = \mathbb{P}(V_1) = 1$ (l'informat° transmise à 1° pers est vraie)

$p_2 = \mathbb{P}(V_2) = 1 - p$

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{oui}}$ → $\boxed{2}$ $\boxed{\text{oui}}$

la 2° pers. reçoit info vraie si la 1° pers. ne ment pas

$\boxed{k}$ → $\boxed{k+1}$

- $p_{k+1} = \mathbb{P}(V_{k+1})$

info est fausse de k ième pers.

$$V_{k+1} = (V_k \cap V_{k+1}) \cup (V_k^C \cap V_{k+1})$$

union disjointe

⚠ Il n'y a pas indépendance de on n'a pas Bernoulli.

$$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_k \cap V_{k+1}) + \mathbb{P}(V_k^C \cap V_{k+1})$$

Qd ce n'est pas indépendant ⇒ proba condit°ᵉˡˡᵉ

$$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_{k+1} | V_k)\,\mathbb{P}(V_k) + \mathbb{P}(V_{k+1} | V_k^C) \cdot \mathbb{P}(V_k^C)$$

$$p_{k+1} = (1-p)\,p_k + p\,(1-p_k)$$

car $\mathbb{P}(V_{k+1} | V_k) = 1 - p$ (pas de mensonge.

$\mathbb{P}(V_{k+1} | V_k^C) = p$ (mensonge)

$$p_{k+1} = (1-p)\,p_k + p\,(1-p_k)$$

$$p_{k+1} = p + (1-2p)\,p_k \ , \ k \geq 1.$$

$$p_2 = p + (1-2p)\,p_1 = 1 - p$$

2) $u_k = p_k - C$, $k \geqslant 1$.

Trouver C tq u_k soit une suite géométriq.

relation affine

$p_{k+1} = p + (1-2p)\, p_k$

$\Leftrightarrow u_{k+1} + C = p + (1-2p)(u_k + C)$

$\Leftrightarrow \boxed{u_{k+1} = (1-2p)\, u_k} + \underbrace{C(1-2p) + p - C}_{=0}$

$\Leftrightarrow$ on choisit C tq :

$C(1-2p) + p - C = 0$

$-2pC + p = 0$

→ on suppose $p \neq 0$ sinon l'info tjs vraie

$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$

on a $u_{k+1} = (1-2p)\, u_k$.

$\mathbb{P}(V_{n+1}) = p_{n+1}$

$u_{n+1} = (1-2p)^n\, u_1$

$\Leftrightarrow \left(p_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^n \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{p_{n+1} = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}}$

→ $p \in [0,1]$, $p=0$ ou $p=1$.

3) $\lim_{n \to \infty} p_{n+1} = \frac{1}{2}$

si $|1-2p| < 1$ sauf pour $p=1$ et $p=0$

$\underline{p=0}$ $\mathbb{P}(V_k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$\underline{p=1}$ $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$, … $p_{2k} = 0$, $p_{2k+1} = 1$

TD 3

Ex 1 Dés non pipés.

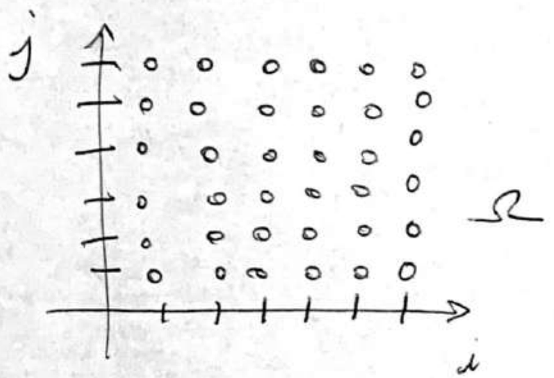
$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathbb{P}$ équiproba

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(i,j) \longmapsto i+j$.



- loi de X :

* $X(\Omega) = \{2, \dots, 12\}$.

$\forall k \in X(\Omega), \ \mathbb{P}(X=k)$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	2	3				
2	3	4	4	5	6	7
3	4	5	5	6	7	
4	5	6	6	7	0	5 5
5	6	7	6	5	5	4 3 3
6	7	7	6	0	5 4	4 3 2

Quelle est la loi de X ? ← donne

mê qd pr v.a. Y = au plus petit pts obtenus.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

loi donnée

une dé à 12 faces ?
n faces ?

$\frac{1}{12^2} \longrightarrow \frac{12}{12^2}$ & $\frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{n}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{n^2}$

Y = + petit points obtenus.

$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(i,j) \longmapsto \min\{i,j\}$

$Y(i,j) = \min(i,j)$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ex2

1) loi de X :

* valeurs prises p variable aléatoire $X(\Omega)$

* $\forall x_k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k)$

$X(\Omega) = \{0, \dots, 20\}$

La proba de choisir une cravate à rayure chaq matin est $\dfrac{1}{50}$.

$$\mathbb{P}(X=k) = C_{20}^{k}\left(\frac{1}{50}\right)^{k}\left(\frac{49}{50}\right)^{20-k}$$

20 jours

$$X \sim \mathcal{B}in\left(20, \frac{1}{50}\right).$$

loi du nbr de succès "avoir une cravate à rayures ds une suite de 20 épreuves indépendantes avec une proba $\dfrac{1}{50}$ de succès.

Autre rédaction :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si M. 222 porte le } i\text{ème jour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{B}ern\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{50}.$$

les $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 20}$ st indépendantes.

$$X = \sum_{i=1}^{20} \varepsilon_i = \text{card}(\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varepsilon_i = 1\})$$

pour $k = 1$,

$$\mathbb{P}(X=1) = 20 \times \frac{1}{50}\left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 0{,}27.$$

2) Mr. Zzz part en voyage $\boxed{\ }$ 1

20

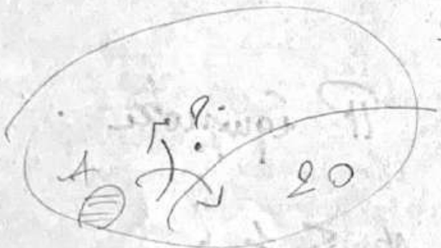
$1 \to 50$ loi V nbr de valise

$20 \to \frac{1}{50} \dots$ C_{50}^{20}

a sera loi de Bernoulli

<u>loi de V</u>

* valeurs prises $V(\Omega) = \{0,1\}$
* $\mathbb{P}(V=1)$ ou $\mathbb{P}(V=0)$



$$\mathbb{P}(V=0) = \frac{C_1^0 \times C_{49}^{20}}{C_{50}^{20}}$$

$$= \frac{49!}{20!\,29!} \times \frac{20!\,.\,30!}{50!}$$

$$= \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

3) 10 chemises dt 3 bleues.

il en choisit 5. Y nbr CB de valise.

- $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$
- $\forall k \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{C_3^k \cdot C_7^{5-k}}{C_{10}^5}$.

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^4}{C_{10}^5} = \frac{3 \times \frac{7.6.5.4}{4!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} =$$

$$= \frac{3.7.5.5!}{10.9.8.7.6} = \frac{5}{12}.$$

Ex3 Urne de N jetons $\{1, \ldots, N\}$

on en tire $n \leq N$ au hasard & sans remise. soit $k \in \{1, \ldots, N\}$

1) Décrire espace de proba $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ $\not\leftrightarrow$ à expé. aléatoire.

- tirage successif un évent élément^r $w = (w_1, \ldots, w_n)$ représente les n numéros tirés l'1 à la suite des autres.

tirage sans remise $w_i \neq w_j$ $\forall\, i \neq j$

$$\Omega = \{(w_1, \ldots, w_n) \in \{1, \ldots, N\}^n \text{ tq } w_i \neq w_j \ \forall\, i \neq j\}.$$

$$\text{card}(\Omega) = A_N^n = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

$\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ équiproba

- Autre modélisat°:

Un évent élément^r est un ss-ens de n éléments parmi $\{1, \ldots, N\}$

- $\Omega = \{A \subset \{1, \ldots, N\},\ \text{card}(A) = n\}$
$= \{\{w_1, \ldots, w_n\} \subset \{1, \ldots, N\} \ w_i \neq w_j \ \forall\, i \neq j\}$
$= \{(w_1, \ldots, w_n) \in \{1, \ldots, N\}^n \ w_1 < \ldots < w_n\}$

- $\text{card}(\Omega) = C_N^n$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\qquad \mathbb{P}$ équiproba.

2) $A_k =$ "les n° tirés st $\leq k$"

$$A_k = \{(w_1, \ldots, w_n) \in \Omega \text{ tq } w_n \leq k\} = \{A \subset \{1, \ldots, k\},\ \text{card}(A) = n\}$$

$$\text{card}(A_k) = C_k^n$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{C_k^n}{C_N^n} = \frac{k!}{n!\,(n-k)!} \times \frac{n!\,(N-n)!}{N!} = \frac{k!\,(N-n)!}{(k-N)!\,N!} = \frac{A_k^n}{A_N^n}$$

→ suite en 3 tirage ~~s~~ remise ds urne. !

2) $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{C_k^m}{C_N^m} = \dfrac{A_k^m}{A_N^m} = \dfrac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}$

→ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$

$w \longmapsto X(w)$

- (1) $\Omega : \{A \subset \{1, \dots, N\} \quad card(A) = m\}$

si $w \in \Omega$ (w est un ss-ens de $\{1, \dots, N\}$) $X(w) = max(w)$

(3) $\Omega = \{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, \dots, N\}^m$ & $w_1 < \dots < w_m$ si $(w_1, \dots, w_m) \in \Omega \}$

loi de X

X est à valeurs ds $\{m, \dots, N\}$

- $\forall k \in \{m, \dots, N\}$

$\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(A_k)} = \dfrac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}$

$N = 10$, $m = 3$, X est à v^{R} ds $\{3, 10\}$

Rq : $\boxed{\sum_{k=m}^{N} \mathbb{P}(X = k) = 1 \iff}$

$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$

$= \dfrac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m}$

$\sum_{k=m}^{N} \dfrac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m} = 1$

) Tirage ~~s~~ remise.

$\Omega = \{w = (w_1, \dots, w_m) \quad w_i \in \{1, \dots, N\} \quad 1 \leq i \leq m\}$

$\Omega = \{1, \dots, N\}^m$, $card(\Omega) = N^m$.

$\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k^m}{N^m}$

$A_k = \{1, \dots, k\}^m \; (\subset \{1, \dots, N\}^m)$

∘ X est à val^{rs} ds $\{1, \dots, N\}$ $\forall k \in \{1, \dots, N\}$

$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$

$= P(A_k) - P(A_{k-1})$

$= \dfrac{k^m - (k-1)^m}{N^m}$

Ex4 $X \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$

- X prd ses val^{es} ds $\mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

on def (va) Y :

- si $X = 0$ ou $2k+1 \Rightarrow Y = 0$, $k \in \mathbb{N}$.
- si $X = 2\ell \Rightarrow Y = X/2$.

Trouver loi de Y.

→ val^{es} prises par Y ?

→

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=m)$

X	0	1	2	3	4	5	...
Y	0	0	1	0	2	0	3

1

- $m=0$:

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\{X=0, X=2k+1, k\in\mathbb{N}\})$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X=2k+1\}\Big)$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=2k+1)$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $m \geq 1$: $\mathbb{P}(Y=m) = \mathbb{P}(X=2m) = \dfrac{\lambda^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$e^x - e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$= e^{-\lambda}(1 + \sinh(\lambda))$$

Ex 5 Une loi de minimum

X & Y va indp.

$X \sim \mathcal{G}eom(\alpha)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Y \sim \mathcal{G}eom(\beta)$ $\in]0,1[$.

Z va $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

---

1) Pr $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i)$$

$$\{X>k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X=i\}$$

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{P(X=i)}$$

$$= \alpha \sum_{j=k}^{\infty} (1-\alpha)^{j}$$

$$= \alpha(1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k$$

le premier succès arrive après k $\Leftrightarrow$ on a eu que des échecs avant k.

Ex 5 Une loi de minimum

X & Y va indp.

$X \sim \mathcal{G}eom(\alpha)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Y \sim \mathcal{G}eom(\beta)$ $\in]0,1[$.

Z va $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

---

1) Pr $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i)$$

$$\{X>k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X=i\}$$

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{P(X=i)}$$

$$= \alpha \sum_{j=k}^{\infty} (1-\alpha)^{j}$$

$$= \alpha(1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k$$

le premier succès arrive après k $\Leftrightarrow$ on a eu que des échecs avant k.

2) $\{Z=k\} = (\{X=k\} \cap \{Y>k\}) \cup (\{Y=k\} \cap \{X>k\}) \cup (\{X=k\} \cap \{Y=k\})$

$A \cap B = \emptyset$

⚠ on ne pt remplacer $>$ par $\geq$ car sinon l'union ne serait pas disjointe.

$$P(Z=k) = P(\{X=k\} \cap \{Y>k\}) + P(\{Y=k\} \cap \{X>k\}) + P(\{X=k\} \cap \{Y=k\})$$

$$= P(X=k).P(Y>k) + P(Y=k).P(X>k) + P(X=k).P(Y=k)$$

$$= (1-\alpha)^{k-1}\alpha(1-\beta)^k + (1-\beta)^{k-1}.\beta.(1-\alpha)^k + (1-\beta)^k.\beta.(1-\alpha)^{k-1}.\alpha$$

$$= (1-\beta)^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}\left[(1-\beta)\alpha + \beta(1-\alpha) + \beta\alpha\right]$$

$$= \left[(1-\beta)(1-\alpha)\right]^{k-1}\left[\alpha - \alpha\beta + \beta - \alpha\beta + \alpha\beta\right]$$

$$= \left[1-(\alpha+\beta-\alpha\beta)\right]^{k-1}(\alpha+\beta-\alpha\beta)$$

$$= \sim \mathcal{G}eo(\alpha+\beta-\alpha\beta)$$

X premier succès S_α & proba α
Y S_β β.

Z premier instant où on a S_α ou S_β.

$\mathbb{P}(S_\alpha \cup S_\beta) = \mathbb{P}(S_\alpha) + \mathbb{P}(S_\beta) - \mathbb{P}(S_\alpha \cap S_\beta)$
$= \alpha + \beta - \alpha\beta$

car S_α & S_β st dépdts.

$\mathbb{P}(S_\alpha \cap S_\beta) = \mathbb{P}(S_\alpha) + \mathbb{P}(S_\beta) = \alpha\beta$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{G}eo(\alpha + \beta - \alpha\beta)$

Ex6 Galette des rois

1) • N galettes $\Rightarrow$ 8N parts
dt N fèves.

Proba avoir 1 fève : $\frac{N}{8N} = \frac{1}{8}$

• 24 étud.

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i\text{ème étud a fève} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

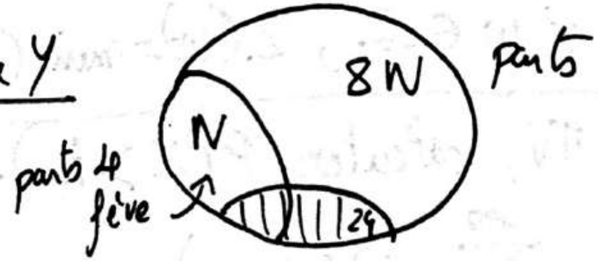
$X_i \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{8}\right)$

⚠ Ils ne st pas indépdts.

① ① Y_{24} : nbr étud groupe de 24 q ont fève

$Y = \sum_{i=1}^{24} X_i = \text{card}\{i \in \{1, \dots, 24\},\ X_i = 1\}$

loi de Y



• Y est à valr ds $\{0, \dots, 24\}$

• $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{\binom{N}{k} \times \binom{7N}{24-k}}{\binom{8N}{24}} \quad \forall k \in \{0, \dots, 24\}$.

$Y \sim \mathcal{H}ypergeom(8N, N, 24)$

Rq les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne st pas indépendantes.

→ la loi de Y pt ê approchée p loi Binomiale $(24, \frac{1}{8})$

⑯ HiBou Plume : Hyperg → Binom → Poisson.

2) Soit 3 galettes, 3 fèves, supposons que les fèves st ds les parts $\{1, 2, 3\}$.

- Numérotons les étud de $\{1, \dots, 24\}$ alors $\Omega = \mathfrak{S}_{24}$ = l'ens $\{1, \dots 24\} \to \{1, \dots, 24\}$

$\sigma \in \Omega$ signifie $\sigma(i) = j$ signifie

- que l'étudiant n° i prd la part n° j.

$card(\Omega) = 24!$

$A_i = \{$ le $i^{ème}$ étud a une fève $\}$, l'ens des permutat s

$= \{\sigma \in \Omega, \sigma(i) \in \{1, 2, 3\}\}$

$card(A_i) = \frac{3.23!}{}$

- $A_1 = \{$ le premier étud a 1 fève $\}$

$= \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(1) \in \{1, 2, 3\}\}$

$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$

$A_1^{(i)} = \{\sigma \in A_1, \sigma(1) = j\}$

$card(A_1^{(1)}) = \cancel{3}\,23!$

$card(A_1) = 3 . 23!$

$P(A_1) = \frac{3.23!}{24!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = P(A_i)$

$23! + 23! + 23!$

vu cto

17 3 fèves.

2) Soit 3 galettes, 3 fèves, supposons que les fèves st ds les parts $\{1,2,3\}$.

∘ Numérotons les étud de $\{1,\dots,24\}$

alors $\Omega = \mathfrak{S}_{24}$ = l'ens $\{1,\dots 24\} \to \{1,\dots,24\}$

$\sigma \in \Omega$ signifie $\sigma(i)=j$ signifie

• qu l'étudiant n° i prd la part n° j.

$\text{card}(\Omega) = 24!$

A_i = {le i ème étud a une fève}, l'ens des permutations

$= \{\sigma \in \Omega,\ \sigma(i) \in \{1,2,3\}\}$

$\text{card}(A_i) = 3.23!$

• A_1 = {le premier étud a 1 fève}

$= \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(1) \in \{1,2,3\}\}$

$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$

$A_1^{(i)} = \{\sigma \in A_1,\ \sigma(1) = j\}$

$\text{card}(A_1^{(1)}) = 23!$

$\text{card}(A_1) = 3.23!$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{3.23!}{24!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_i)$$

$V_i \sim \text{Bern}(\frac{1}{8})$ (mais les V_i ne st pas indépendantes *)

$$W = \sum_{i=1}^{24} V_i = 3$$

→ W est cte

Dc sa loi est Dirac δ_3 masse de Dirac est 3. $\mathbb{P}(W=3) = 1$

* $\mathbb{P}(V_2=1 \mid V_1=1) = \frac{2}{23} \neq \mathbb{P}(V_2=1)$

$$\mathbb{P}(V_1=1, V_2=1, V_3=1, V_4=1) = 0 \neq \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(V_i=1)$$

$\mathbb{P}(V_2=1) = \frac{1}{8}$

$23!. + 23!. + 23!.$

va cte

17 3 fèves.

3) $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(p)$

loi de $X = \sum_{n=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n,p)$

ssi les $(X_i)_{1 \le i \le n}$ indépendts.

Sinon on ne sait pas :

* pt ê cte
* si $X_1 = X_2 = \dots = X_n$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = nX_1 = \begin{cases} n & \text{à proba } p \\ 0 & \text{— } 1-p \end{cases}$$

Ex 7 :

gardien 10 clés indisc. 1 sl ☐ Maths

1) sobre :  essay^t ∀ clés en écartant clés déjà testées

X : nbre essais nécess^{re} pr trouver bonne clé

X = 1 si clé 1° coup.

2) Y : mem$_p$ tbc ds circonstas

1 : ✓
3
4 ⇒ Y = 4
3
1

1) loi de X : Valeurs ?

$X(\Omega) = \{1, \dots, 10\}$

$\forall k \in \{1, \dots, 10\}$; $\quad P(X=1) = \frac{1}{10})$

$\mathbb{P}(X=k) =$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9}$

A_i = "la bonne clé est trouvée au i-ème coup"

$\{X=2\} = A_2 \cap A_1^c$

$$P(X=2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c)$$
$$= \mathbb{P}(A_2 | A_1^c) \times \mathbb{P}(A_1^c)$$
$$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$\{X=3\} = A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(A_3 | A_2^c \cap A_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) \times \mathbb{P}(A_1^c)$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{10}$: $X \sim \text{Unif}(\{1, \dots, 10\})$

2) Loi de Y

- Val^{ns} possibles $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $P(Y=k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépdts en gard ivre

$$P(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(A_i^c)\, P(A_k)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{G}eo\left(\frac{1}{10}\right)$

3) On note W la va représentant le nbr em ptlclé. (I : ivre)

Sachant I, W a m̂ loi Y

—— I^c, W —— X.

On cherche $P(I/W>8) = \dfrac{P(I\cap W>8)}{P(W>8)}$

$$= \frac{P(W>8 \mid I)\, P(I)}{P(W>8)}$$

$$P(W>8 \mid I) = P(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10}\sum_{k=9}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \frac{1}{1-9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{8}$$

on a que échecs aux 8 premiers essais.

$$P(W>8 \mid I^c) = P(X>8) = P(X\in\{9,10\}) = \frac{2}{10}$$

$$P(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\times\frac{2}{3}$$

$$P(I \mid W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{8}\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3}} \approx 51,8\,\%$$

$$P(W>8) = P(W>8 \mid I^c)\,.\,\underbrace{P(I^c)}_{=2/3} + P(W>8 \mid I)\,.\,\underbrace{P(I)}_{1/3}$$

2) Loi de Y

- Val^{ns} possibles $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépdts au gaud ivre

$$\mathbb{P}(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_i^c)\,\mathbb{P}(A_k)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{G}eo\left(\frac{1}{10}\right)$

3) On note W la va représentant le nbr em ptlclé. (I: ivre)

Sachant I, W a m̂ loi Y

— I^c, W — X.

On cherche $P(I/W>8) = \dfrac{\mathbb{P}(I \cap W>8)}{\mathbb{P}(W>8)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(W>8 \mid I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(W>8)}$$

$$\mathbb{P}(W>8 \mid I) = \mathbb{P}(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} \mathbb{P}(\cancel{X}Y=k)$$

$$= \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10} \sum_{k=9}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \frac{1}{1-9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^8$$

on a que échecs aux 8 premiers essais.

$$P(W>8 \mid I^c) = P(X>8) = P(X \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10}$$

$$\mathbb{P}(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}$$

$$P(I \mid W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}} \approx 51{,}8\ \%$$

$$P(W>8) = \mathbb{P}(W>8 \mid I^c).\ \underbrace{P(I^c)}_{=2/3} + P(W>8 \mid I).\ \underbrace{P(I)}_{1/3}$$

Ex 6 $X \sim \mathrm{Pois}(\alpha)$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$Y \sim \mathrm{Pois}(\beta)$.

X & Y st indépdtes.

nbr total de pannes : $Z = X + Y$.

Loi de Z ?

- Val^rs prises $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z = k)$

chercher $\mathbb{P}(Z=0)$, $\mathbb{P}(Z=1)$, $\mathbb{P}(Z=n)$

$$\{Z=k\} = \{X+Y=k\}$$

$$= \bigcup_{n=0}^{k} \left(\{X+Y=k\} \cap \{Y=n\}\right)$$

union disjointe

$$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(\{X+Y=k\} \cap \{Y=n\})$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(\{X=k-n\} \cap \{Y=n\})$$

$$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-n) \times \mathbb{P}(Y=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \alpha^{k-n} \cdot \beta^n$$

$$= \frac{e^{-\alpha-\beta}}{k!} \sum_{n=0}^{k} C_n^k \beta^n \cdot \alpha^{k-n} \qquad \text{FF Bin Newton}$$

$$= \frac{e^{-\alpha-\beta}}{k!} (\alpha+\beta)^k$$

$$Z \sim \mathrm{Pois}(\alpha+\beta)$$

2) **Sachant qu'il y a eu n pannes** ce mois-ci, proba$^{\mathrm{té}}$ que 1° resp. se fait, de r d'entre elles.

$$\mathbb{P}(X=x \mid Z=n) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Z=n\})}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

⚠ X & Z ne st pas indpdts.

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{X+Y=n\})}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=n-x\})}{\mathbb{P}(Z=n)}$$ var indep

$$= \frac{\mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=n-x)}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^x}{x!} \times e^{-\beta} \times \frac{\beta^{n-x}}{(n-x)!}}{e^{-\alpha-\beta} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^x \times \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-x}$$

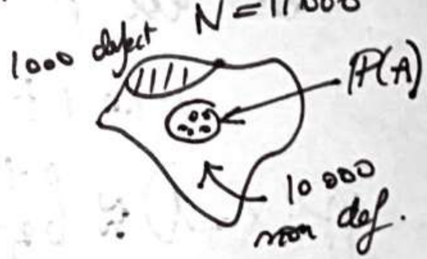
$$= C_n^x \cdot p^x (1-p)^{n-x} \qquad p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Ex 9 Chaises à Roulettes.

$N = 11\,000$ roulettes $\Rightarrow$ 2200 chaises

Tirer 1 chaise au hasard revient à prendre 5 roulettes au hasard parmi les 11 000.

A : " les 5 roul. st en bon état "



on a $\mathbb{P}(A) = \frac{C_{10\,000}^5}{C_{11\,000}^5}$

$$= \frac{10\,000!}{5!(10\,000-5)!} \times \frac{5! \times (11\,000-5)!}{11\,000!} = \frac{10\,000!}{11\,000!} \frac{(10\,995)!}{9995!}$$

2) Loi nbr roulettes défectueuses de la chaise.

$X(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$

$P(X=k) = \dfrac{C_{1000}^{k} \times C_{10\,000}^{5-k}}{C_{11\,000}^{5}} \quad \forall k \in \{0, \dots, 5\}$

$X \sim \mathcal{H}ypergeom\,(11\,000, 1000, 5)$

$A = \{X = 0\}$.

La loi pt s'approcher p/

- $\mathcal{B}in\left(5, \frac{1}{11}\right)$

$P(X=1) \approx C_5^1 \left(\frac{1}{11}\right)^1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^4 = 5 \times \frac{10^4}{11^5}$

$P(X=3) \approx C_5^3 \left(\frac{1}{11}\right)^3 \times \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0{,}006$.

3) $P(X=0) = \dfrac{10^5}{11^5} \approx 0{,}6$

2) Loi nbr roulettes défectueuses de la chaise.

$X(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$ $\quad \forall k \in \{0, \dots, 5\}$

$$P(X = k) = \frac{C_{1000}^{k} \times C_{10\,000}^{5-k}}{C_{11\,000}^{5}}$$

$X \sim \mathcal{H}ypergeom(11\,000, 1000, 5)$

$A = \{X = 0\}$.

La loi pt s'approcher p/

$\mathcal{B}in\left(5, \frac{1}{11}\right)$

$$P(X=1) \approx C_5^1 \left(\frac{1}{11}\right)^1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^4 = 5 \times \frac{10^4}{11^5}$$

$$P(X=3) \approx C_5^3 \left(\frac{1}{11}\right)^3 \times \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0{,}006.$$

3) $P(X=0) = \dfrac{10^5}{11^5} \approx 0{,}6$

Ex 10 500 navires.

nbr succès

Géom → 1° succès

1) $X \sim \mathcal{B}in(500, 10^{-3})$.

2) $P(X=10)$?

Approximer loi de X p/ loi de $\mathcal{P}ois(500, 10^{-3})$.

$n = 500$ grand devient $np = 500 \times 10^{-3} = \frac{1}{2}$. < 10.

si $X_n \sim \mathcal{B}in(n, p_n)$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(Y = k) \quad \text{où } Y \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$$

$P(X = 10) \approx P(Y = 10)$

si $Y \sim \mathcal{P}ois\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10!} = \dfrac{1}{2^{10}\, 10!} e^{-1/2}$

$\approx 1{,}63 \cdot 10^{-10}$

$$P(X = 10) = C_{500}^{10} (10^{-3})^{10} (0{,}999)^{490} \approx 1{,}51 \cdot 10^{-10}.$$

3) r : réserves financières.

$r = m \cdot 10^6$, m : nbr naufrages max.

$\mathbb{P}(X \leq m) \geqslant 99{,}9\,\%$

$\mathbb{P}(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_{500}^{k} (10^{-3})^k (0{,}999)^{500-k}$

$\approx \mathbb{P}(Y \leq m) = \sum_{k=0}^{m} e^{-1/2} \frac{1}{2^m \cdot k!}$

$= e^{-1/2} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m \cdot k!}$

m	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=m)$	0,606	0,303	0,076	0,0103	0,0015		
$\mathbb{P}(Y\leq m)$	0,606	0,909	0,985	0,998	0,9998		

$\mathbb{P}(Y \leq 3) \leqslant 0{,}999$

$\mathbb{P}(Y \leq 4) \geqslant 0{,}999$

$\{X \leq k\} = \bigcup_{k=0}^{m} \{X = k\}$

La société d'assur. doit avoir au moins $4 \cdot 10^6$ de réserves par année.

Elle doit demander une cotisation annuelle de $\frac{4 \cdot 10^6}{500} = 8000$ € /an.

4) Fusion des 2 compagnies. (500 navires)

1000 navires ; $X \sim \mathcal{B}in(1000, 10^{-3})$

$n = 5$; $Y \sim \mathcal{P}ois(1)$

$\Rightarrow \frac{5 \cdot 10^6}{1000} = 5000$ €.

Fiche 4

Ex 1

$P(X=i \quad Y=j)$

$j \backslash i$	0	1	$P(Y=j)$
0	0	1/5	1/5
1	1/5	1/5	
2	1/5	1/5	
$P(X=i)$	2/5	3/5	

1) loi de X

- Valeurs prises p la v.a X :

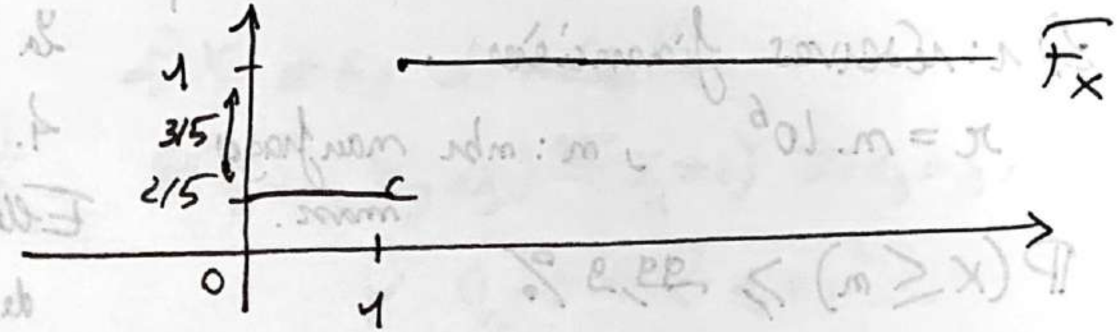
$X(\Omega) = \{0,1\}$

- $P(X=0) = 2/5$

$$P(X=1) = \sum_{j=0}^{2} P(X=1, Y=j) = \frac{3}{5}.$$

f de répartit° :

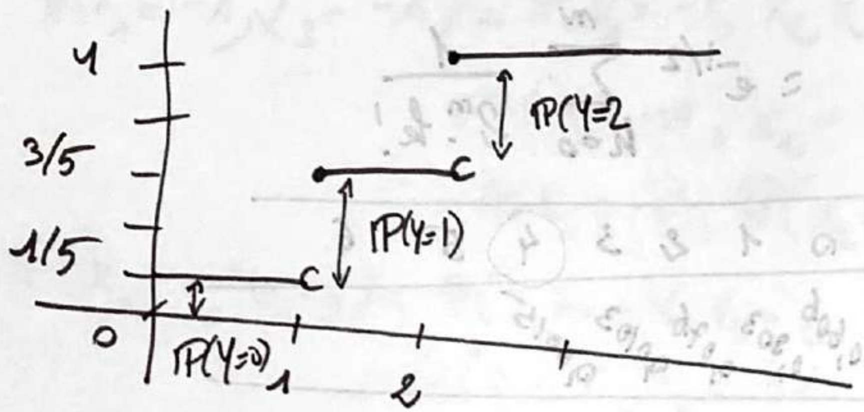
$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto P(X \leq x)$$



2) loi de Y

- $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$
- $P(Y=0) = 1/5$
- $P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{2}{5}$

f de répartit° de Y :



$P(Y \leq 1)$
$= P(Y=0) + P(Y=1)$

3) si X & Y indépdtes $\Rightarrow \forall i \in \{0,1\} \; \forall j \in \{0,1,2\}$

$$P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

$i=1 \quad j=1$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{5}$$

$$\neq P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Ex 2 X_1, X_2 2 va ind tq

pr $i \in \{1,2\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

on pose $X_3 = X_1 X_2$.

1) loi de X_3 ?

$X_3(\Omega) = \{1, -1\}$

- $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1)$

car X_1, X_2 indpdtes.

$= \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = -1).\ \mathbb{P}(X_2 = -1$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

- $\Rightarrow P(X_3 = -1) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow X_3$ a m̂ vlk que X_1 & X_2.

2) X_1 et X_3 st indépdtes

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_3 = j)\ \mathbb{P}(X_1 = i)\ \mathbb{P}(X_3 = j)$

$\forall (i,j) \in \{-1, 1\}^2$.

j \ i	-1	1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 X_1 = -1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = -1).\ \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_3 = j) = \mathbb{P}(X_1 = i, X_1 X_2 = j)$

$= \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j/i)$

$= \mathbb{P}(X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_2 = j/i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3) $\mathbb{P}(X_1=i, X_2=j, X_3=k)$

$= \mathbb{P}(X_1=i) . \mathbb{P}(X_2=j) \mathbb{P}(X_3=k)$

$i=j=k=1$ ✓ cw

$i=j=1, k=-1$

$P(\cap \dots) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(\cap \dots) = 0$

$\prod P(\ ) = \frac{1}{8}$ $\quad$ $\prod P(\dots) > 0.$

$(X_i)_{1\leq i\leq 3}$ st indp 2 à 2 mais ne forment pas 1 famille de v.a indp.

Ex3 Couple de variables sur quadrillage

S : support de loi (X,Y)

$\forall (i,j) \in \{2,3\}^2$

$P((X,Y) = (i,j)) = c$

1) $S_3 = \{2,3\}^2$ ont tous même proba.

- $X \sim Unif(\{0,1,2,3\})$
  $Y \sim Unif(\{0,1,2,3\})$ $\neq (X,Y) \sim Unif(\{0,1,2,3\}^2)$

$P((X,Y) = (1,2)) = 0$

$P(X=1) \neq 0,\ P(Y=2) \neq 0.$

- $P(X=0) = P((X,Y) = (0,0))$
- $P(X=2) = P(X=2,\ Y \in \{2,3\})$
  $= P((X,Y) = (2,2)) + P((X,Y) = (2,3))$

$\rightarrow P(X=0) = \frac{1}{4} = P(X=0,\ Y=0)$

$\rightarrow P(X=1) = \frac{1}{4} = P(X=1,\ Y=1).$

$\sum_{(i,j) \in S} P((X,Y) = (i,j)) = 1$

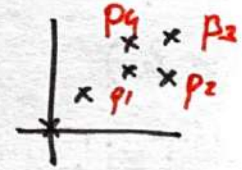
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{8}$

2) Pas indépdce à

$P((X,Y) = (1,2)) = 0 \neq P(X=1).P(Y=2)$

3) Mq $\exists \infty$ té lois (X,Y) tq

$X \sim Unif(\{0,1,2,3\})$ & $Y \sim Unif(\{0,1,2,3\})$



$$\begin{cases} p_1 + p_4 = \frac{1}{4} \\ p_3 + p_2 = \frac{1}{4} \\ p_4 + p_3 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad p_1 + p_2 = \frac{1}{4}$$

& $p_2 + p_3 + p_1 + p_4 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

↳ det = 0 ⇒ mat n'est pas inversible.

Ex4 • T & U 2 va indep. de loi géométriqs. $\in \mathbb{N}^*$

1) loi de $Z = T + U$

α, β quelconque puis $\alpha = \beta$.

⚠ Z prd vl^rs entières ≥ 2.

$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(T+U=k)$

$= \bigcup_{i=1}^{k-1} (\{T+U=k\} \cap \{T=i\})$

$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(T+U=k,\ T=i)$

$\Rightarrow k-1$ car $\{T+U=k, T=i\} = \emptyset$ si $i \notin \{1, \dots, k-1\}$.

$U = k-T$, $T \geq 1 \Rightarrow U \leq k-1$.

$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(U=k-i, T=i)$

$= \sum_{i=1}^{k-1} P(U=k-i) . P(T=i)$ car T & U st indep.

$= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha(1-\alpha)^{i-1} . \beta(1-\beta)^{k-i-1}$

$= \alpha\beta \sum_{i=1}^{k-1} (1-\alpha)^{i-1} (1-\beta)^{k-i-1}$

$= \alpha\beta (1-\beta)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{i-1}$ $(\beta \neq 1)$

$= \alpha\beta(1-\beta)^{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{i}$

$= \alpha\beta(1-\beta)^{k-2} \dfrac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{k-1}}{1 - \frac{1-\alpha}{1-\beta}}$

$= \alpha\beta \dfrac{(1-\beta)^{k-1} - (1-\alpha)^{k-1}}{\alpha - \beta}$

NB $(1-\beta)^{k-i-1} = \dfrac{(1-\beta)^{k-2}}{(1-\beta)^{i-1}}$, $k \geq 2$.

si $\alpha = \beta$: $\dfrac{1-\alpha}{1-\beta} = 1$

$= \beta^2 (k-1)(1-\beta)^{k-1}$ ← significatiO ..?

(P) si X (va) d. intégrable $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Rq : On pt avoir $f(X)$ intégrable & X non intégrable.

II / Moments de (va) & inégalité Markov

(D) $r \in \mathbb{N}^*$ fixé, le moment d'ordre r de (va) X est $E(X^r)$.

→ X a un moment d'ordre r (ssi) $E(|X|^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|^r P(X = x_k)$

Rq : • espérance : moment d'ordre 1

• 1 (va) bornée ($\exists M \in \mathbb{R}, \forall x_k \in X(\Omega), |x_k| \leq M$) a des moments de tt ordre.

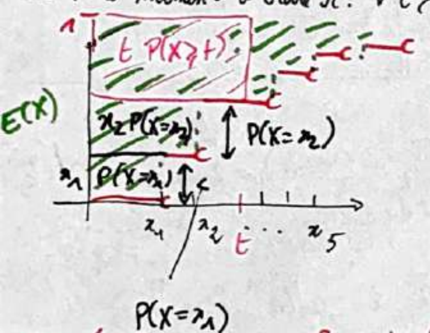
(P) Une va q a un moment d'ordre r a des moments de ts les ordres inférieurs :
$E(X^r) \, \exists \Rightarrow \forall n \in \{1, \dots, r\} \; E(X^n) \, \exists$

Inégalité de Markov

vad,

• si X ⊕ & int : $\forall t > 0 : P(X \geq t) \leq \dfrac{E(X)}{t}$

• si X a moment d'ordre r : $\forall t > 0 : P(|X| \geq t) \leq \dfrac{E(|X|^r)}{t^r}$



$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq t}} P(X = x_k)$$

III / Variance & inégalité de Tchebichev

(D) soit X une (va) ayant un moment d'ordre 2 :

sa variance est $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Pptés de la variance

si X a un moment d'ordre 2 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$ 2) $\forall b \in \mathbb{R}$, $Var(X + b) = Var(X)$

3) $Var(X) = 0 \iff X \sim \delta$ où $c = E(X) \iff P(X = c) = 1$.

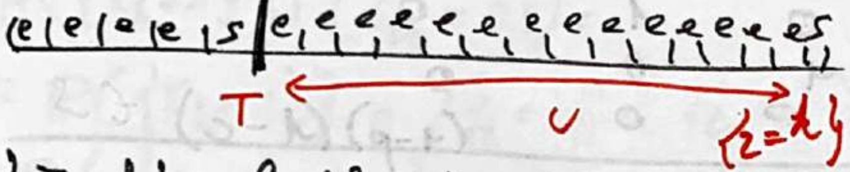
Variances des lois classiqs

1) $\alpha \neq \beta$ $\quad Z = T + U$.

2) $\alpha = \beta$ $\quad Z$ est à v.a. $\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$

$\mathbb{P}(Z = k) = (n-1)\,\alpha^2 (1-\alpha)^{k-2}$

T : n° du 1° succès ; U : n° 2° succès après T



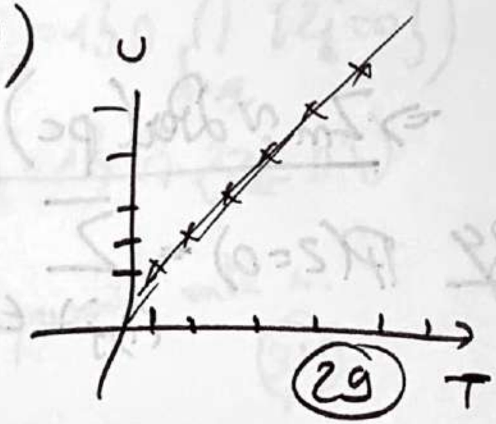
$\{Z = k\}$: le 2° succès se produit à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

$$\mathbb{P}(Z=k) = \underbrace{(k-1)}_{\text{nbr possibilités pr 1° succès, succès} \leq k-1} \alpha^2 (1-\alpha)^{k-2}$$

3) $\alpha = \beta$, calcul $P(T \neq U)$

$P(T \neq U) = 1 - P(T = U)$

et $P(T=U) =$



29

$$P(T=U) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{T=k\} \cap \{U=k\})$$

car $\{T = U\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T = U = k\}$.

$$P(T=U) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha(1-\alpha)^{k-1}\right)^2$$

$$P(T=U) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^{2(k-1)}$$

$$= \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-\alpha)^2\right]^{k-1} \quad \text{car } 1-\alpha \in]0,1[.$$

$$= \alpha^2 \frac{1}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{2\alpha - \alpha^2} = \frac{\alpha}{2-\alpha}$$

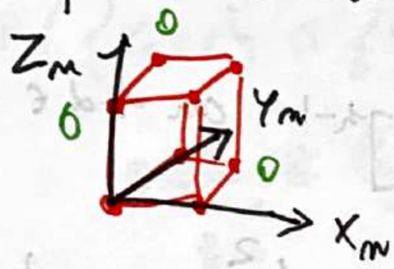
$$P(T \neq U) = 1 - P(T=U) = 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{2-2\alpha}{2-\alpha}.$$

Ex 5 Contrôle de qualité

1) $(i,j,k) \in \{0,1\}^3$

$\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j, Z_n = k)$ loi du triplet ?

si on a la loi de X_n, Y_n, Z_n ; on n'a pas la loi de (X_n, Y_n, Z_n).



$\{0,1\}^3$

si $k \neq ij \Rightarrow \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j, Z_n = k) = 0$

si $k = ij \Rightarrow \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j, Z_n = k) =$
$= \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j)$
$= \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(Y_n = j)$

$X_n \sim \mathrm{Bern}(p)$

$Y_n \sim \mathrm{Bern}(c)$

$X_n = i$	$Y_n = j$	$Z_n = k$	$\mathbb{P}(Z_n = k, Y_n = j, X_n = i)$	
1	1	1	$p.c$	$\in S$
1	1	0	0	
0	1	1	$c(1-p)$	$\in S$
1	0	1	0	
1	0	0	$p(1-c)$	$\in S$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	0	0	$(1-p)(1-c)$	$\in S$

Support de la loi : endroits non nuls.

2) loi de Z_n ?

comme $Z_n = X_n Y_n$; Z_n est à v$^{\text{le}}$ de $\{0,1\}$

$\Rightarrow Z_n \sim$ ~~Ber~~ loi Bernoulli

$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(X_n Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1).\mathbb{P}(Y_n = 1)$

$= p.c$

$\Rightarrow Z_n \sim \mathrm{Ber}(pc)$

Rq $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = J)$

30

3) soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
on note B_k l'event $\{Z_k = 0\}$

→ Déterminer $P(\{X_k=1\} \cap B_k)$
puis $P(\{X_k=1\} \cap A_n)$.

• $\mathbb{P}(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}) =$

$= \mathbb{P}(\{X_k=1\} \cap \{Y_k=0\} \cap \{Z_k=0\})$

$= \mathbb{P}(\{X_k=1\} \cap \{Y_k=0\}) = p(1-c)$

proba $\hat{k}$ ê défectx & non contrôlé.

• $A_n = \{Z_n=1\} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k=0\}$.

$P(\{X_k=1\} \cap A_n) =$

$= P(\{X_k=1\} \cap \{Z_n=1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{Z_i=0\})$

$= \mathbb{P}(\{Z_n=1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_k=1\} \cap \{Z_i=0\})$

P l'indep des composants entre .

$= \underbrace{\mathbb{P}(Z_n=1)}_{\text{dépd } n} . \underbrace{\mathbb{P}(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-1} \{X_k=1\} \cap \{Z_i=0\})}_{\text{dpd } n-1}$

$\times \mathbb{P}(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\})$.

indep comp entre eux.

31

3) soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
on note B_k l'event $\{Z_k = 0\}$
→ Déterminer $P(\{X_k=1\} \cap B_k)$
puis $P(\{X_k=1\} \cap A_n)$

• $P(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}) =$
$= P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k=0\} \cap \{Z_k=0\})$
$= P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k=0\}) = p(1-c)$

proba $\hat{e}$ défectx & non contrôlé.
$k^{\hat{o}}$

• $A_n = \{Z_n = 1\} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k = 0\}.$

$P(\{X_k=1\} \cap A_n) =$
$= P(\{X_k=1\} \cap \{Z_n=1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{Z_i=0\})$
$= P(\{Z_n=1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_k=1\} \cap \{Z_i=0\})$

P l'indep des composants entre x.

$= \underbrace{P(Z_n=1)}_{\text{dépd } n} . P(\underbrace{\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} \{X_k=1\} \cap \{Z_i=0\}}_{\text{dpd } n-1})$

$\times P(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\})$.

indep comp entre eux.

séparer termes entre eux

$= P(\bigcap_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq n-1}} \{Z_i=0\} \cap \{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}) \cap \{Z_n=1\})$

$= \prod P(Z_i=0) \, P(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}) . P(Z_n=1)$

$= (1-pc)^{n-2} \, p(1-c)pc$

$= (1-pc)^{n-2} p^2 c(1-c)$

4) $P(X_k=1 \mid A_n) = \dfrac{P(X_k=1 \cap A_n)}{P(A_n)}.$

$= \dfrac{(1-pc)^{n-2} p^2 c(1-c)}{pc \; (1-pc)^{n-1}} = \dfrac{p(1-c)}{1-pc} = \dfrac{p-pc}{1-pc}$

$P(A_n) = P(\{Z_n=1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{Z_i=0\}) = P(Z_n=1) . \prod_{i=1}^{n-1} P\{Z_i=0\}$

Rq : $P(X_k=0 \mid A_n) = 1 - P(X_k=1 \mid A_n)$

$= 1 - \dfrac{p-pc}{1-pc} = \dfrac{1-p}{1-pc}$

Rq si $Y \sim \mathrm{Bern}(\theta)$; $P(Y=x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{(1-x_i)}$ $x_i \in \{0,1\}$

$$P(X_k = x_i \mid A_n) = \frac{(p-pc)^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{1-pc}$$

5) $P(\{X_1 = x_1, \dots X_{n-1} = x_{n-1}\} \mid A_n) =$

$$= \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i = x_i\} \cap \{Z_n = 1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1}\{Z_i = 0\}\right)}{pc(1-pc)^{n-1}}$$

$$= \frac{P(Z_n=1)\prod_{i=1}^{n-1} P(\{X_i = x_i\} \cap \{Z_i = 0\})}{pc(1-pc)^{n-1}} = \cdot$$

$$P(\{X_i = x_i\} \cap \{Z_i=0\}) = \begin{cases} p(1-c) & \text{si } x_i = 1 \\ 1-p & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

$$" \quad [p(1-c)]^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$\cdot = \frac{(p-pc)^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n-1} x_i}}{(1-pc)^{n-1}}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = x_i \mid A_n) = \prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(p-pc)^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{(1-pc)}\right]$$

$$= \frac{(p-pc)^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}(1-p)^{n-1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i}}{(1-pc)^{n-1}}$$

6) $S_n = X_1 + \ldots + X_n$

S_n représente le nb de défectueux parmi les n composants, à v$^{\text{les}}$ ds $\{0, \ldots, n\}$.

7) $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(S_n = m \mid A_n) =$

- si $m > n$, $P(S_n = m \mid A_n) = 0$ car $\{S_n = m\} = \emptyset$ pour $m > n$.

Si $m = 0$ $P(S_n = 0 \mid A_n) = 0$ car $\{S_n = 0\} \cap A_n = \emptyset$

si $1 \leq m \leq n$

$$\{S_n = m\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \{X_{i_1} = 1, \ldots, X_{i_m} = 1\} \cap \{X_j = 0 \text{ si } j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}\}$$

$$= \bigcup_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \left(\bigcap_{j=1}^{m} \{X_{i_j} = 1\} \cap \bigcap_{k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}} \{X_k = 0\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\} \\ \mathrm{card}(I) = m}} \left(\bigcap_{j \in I} \{X_j = 1\} \cap \bigcap_{k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I} \{X_k = 0\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{\{x_1, \ldots, x_n\} \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = m}} \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}$$

33

$$P(S_n = m \mid A_n) = P\Big(\bigcup_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = m}} \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = x_i\} \mid A_n \Big) \quad \dots \quad \frac{(p-pc)^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \times (1-p)^{\sum_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}}{(1-pc)^{n-1}}$$

$$= \sum_{\substack{\text{blibli} \\ x_{m-1} \ m-1}} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = x_i\} \mid A_n\Big) = \sum_{\text{blibli}} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i \mid A_n) = \sum_{m} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(p-pc)^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{(1-pc)}$$

$$= C_{n-1}^{m-1} \, \frac{(p-pc)^{m-1}(1-p)^{n-m}}{(1-pc)^{n-1}}$$

Ex 6 Multinomiale

Ex 7 $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, α fixé >0,

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!}$$

1) Pk les marginales X & Y ont m̂ loi ?

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+i+j)!}$$

$$\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=i, X=j) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+i+j)!}$$

$$= \mathbb{P}(X=i)$$

2) On pose $S = X+Y$

Mq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S=k) = \frac{\alpha}{k!}$

$$\{S=k\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{X=i, S=k\}$$

$$= \bigcup_{i=0}^{\infty} \{X=i, Y=k-i\}$$

$\{X=i, Y=k-i\} \neq 0$ si $i \neq k$

$$\{S=k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \{X=i, Y=k-i\}$$

$$\mathbb{P}(S=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha}{(1+i+(k-i))!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha}{(1+k)!} = (k+1)\frac{\alpha}{(1+k)!}$$

$$= \frac{\alpha}{k!}$$

3) cd α ? loi de S ?

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S=k) = \frac{\alpha}{k!}$

$\Rightarrow \alpha$ est déterminé par la somme de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=k) = 1 \iff \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k!}}_{e} = 1$$

$$\iff \alpha = \frac{1}{e}$$

dc $\mathbb{P}(S=k) = \frac{e^{-1}}{k!}$

$\Rightarrow S \sim \text{Pois}(1)$

4) Calcul $P(X=0)$; les var X & Y st. elles independ.?

$\bigcup_{j=0}^{\infty}\{Y=j\} = \Omega$

$$P(X=0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=0, Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+j)!} = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+j)!} \quad \rightarrow k = 1+j$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \alpha(e-1)$$

1° terme

$$= e^{-1}(e-1) = \frac{e-1}{e}$$

X & Y independ ?

$$P(X=0, Y=0) = \frac{\alpha}{1!} e^{-1}$$

$$\neq \underbrace{P(X=0)}_{e^{-1}(e-1)} \times P(Y=0)$$

$$e^{-1}(e-1) \times e^{-1}(e-1)$$

5) $E(S)$? et $E(X)$? $Var(X)$!

$$\mathbb{E}(S) = 1, \quad \text{car } S \sim Pois(1)$$

$$E(S) = E(X+Y) \overset{\text{linéarité}}{=} E(X) + E(Y)$$

$$= 2E(X) \quad \text{car } E(X) = E(Y)$$

car X & Y m̂ loi

$$\rightarrow E(X) = \frac{1}{2} E(S) = \frac{1}{2}$$

Non pour Var pas linéaire.

$$Var(S) = \underline{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)}$$

6) calcul $P(X=Y)$ et $P(X>Y)$.

$$\{X=Y\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X=Y=k\}$$

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+2k)!}$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \alpha \sinh(1) = e^{-1}\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right) = \frac{1-e^{-2}}{2}.$$

$P(X>Y) = P(X=Y) + P(X<Y) - 1$

or $P(X>Y) = P(X<Y)$.

$$P(X>Y) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X>j,\ Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} P(X=i, Y=j)$$

$$\Rightarrow P(X>Y) = \frac{1-P(X=Y)}{2}$$

$$= \frac{e^{-2}+1}{4}$$

TD5 : Ex 1 (A) & (B) → dés

(A) → 2 dés ; si $\frac{1}{2}$ 5 → w(!)(A) . (B) → 11€ (A)

sinon → l(!)(A) : (A) → 11€ . (B)

→ don't drop ~~ale~~ jacta give 4 €.

1) X somme (€) (B). loi de X ?

P ("obtenir au moins 1 cinq")

$= 1 - P(\text{"ne pas obtenir"}) = 1 - \frac{5^2}{36} = \frac{11}{36}$

$X \in \{11, -11\}$; $P(X=11) = \frac{11}{36}$; $P(X=-11) = \frac{25}{36}$

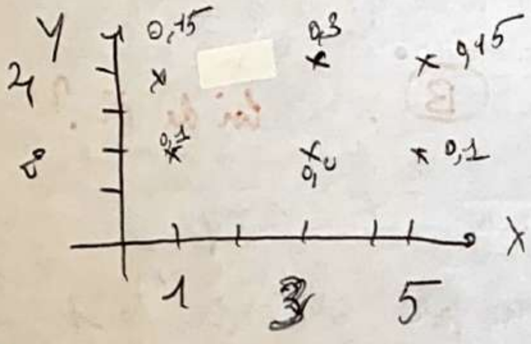
2) E(X) ? $E(X) = 11 \times \frac{25}{36} - 11 \times \frac{11}{36} = \frac{154}{36} = 4{,}3$

Ex2 : vect^r aléa $Z=(X,Y)$

$P(Z=(1,2)) = 0,1$ $\quad$ $P(Z=(3,4)) = 0,3$

$P(Z=(1,4)) = 0,15$ $\quad$ $P(Z=(5,2)) = 0,1$

$P(Z=(3,2)) = 0,2$ $\quad$ $P(Z=(5,4)) = 0,15$



1) loi de X :

$j \backslash i$	1	3	5	$P(Y=j)$
2	0,1	0,2	0,1	0,4
4	0,15	0,3	0,15	0,6
$P(X=i)$	0,25	0,5	0,25	1

$E(X) = \cancel{1\times 0,1 + 3\times 0,2 + 5\times 0,1 = 1,2}$

$= 1\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{4} = 3$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = 1\times\frac{1}{4} + 3^2\times\frac{1}{2} + 5^2\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1+12+25}{4} = 11.$

$Var(X) = 11 - 3^2 = 2$

$E(Y) = 2\times\frac{2}{5} + 4\times\frac{3}{5} = \frac{4+12}{5} = \frac{16}{5}$

$E(Y^2) = 2^2\times\frac{2}{5} + 4^2\times\frac{3}{5} = \frac{4\times 2 + 16\times 3}{5}$

$= \frac{8+48}{5} = \frac{56}{5}$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$= \frac{56}{5} - \left(\frac{16}{5}\right)^2 =$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k}\, \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e} = e^{\lambda(e-1)}$$

$\Rightarrow$ Série CV.

dc espérance $\exists$.

Ex 5 X & Y 2 va indépend. loi de Bernoulli

$X \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$.

on déf $S = X + Y$ & $D = |X - Y|$.

1) Donner lois S, D 2) $cov(S, D)$. indepdc ?

loi de S

$\mathbb{P}(S=0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(S=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S=2) = \frac{1}{4}$

- $S = X + Y \sim Bin(8, \frac{1}{2})$

$$C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \frac{C_2^k}{4}.$$

loi de D

$D = |X - Y|$, D prend ses val^{rs} ds $\{0, 1\}$.

$\mathbb{P}(D=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$\mathbb{P}(D=0) = \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\mathbb{P}(D=1) = \dots = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow D \sim Bern\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\mathrm{cov}(S,D) = \mathbb{E}(SD) - \underbrace{\mathbb{E}(S)}_{1}.\underbrace{\mathbb{E}(D)}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0.$$

NB :

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \sum \varphi(x_k, y_\ell)\, \mathbb{P}(X=x_k, Y=y_\ell)$$

$$\mathbb{E}(SD) = \sum_{(i,j)\in\{0,1\}^2} (i+j)|i-j|\,\mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

$$= \sum (i+j)|i-j|\ \mathbb{P}(X=i).\mathbb{P}(Y=j)$$

$$= \frac{1}{4}(0+1+1+0) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ S & D st-elles indép ?

$$\mathbb{P}(S=1, D=0) = 0 \neq \mathbb{P}(S=1).\mathbb{P}(D=0)$$

⚠ m̂ si $\mathrm{cov}(S,D)=0$ les variables ne st pas forcément indépendantes.

ici S & D ne st pas indépdtes.

Ex 6 (supporters, trains, inégalité Tchebichev)

→ 700 + n places. ; se répartiss^t au hasard

→ 1400 supporters

$X \sim \mathcal{B}in(1400, \frac{1}{2})$

$Y \sim \mathcal{B}in(1400, \frac{1}{2})$

si $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ supp. ds train à gauche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$1 \leq i \leq 1400.$

$$X = \sum_{i=1}^{1400} \varepsilon_i$$

$(\varepsilon_i)_{1\leq i \leq 1400}$ ie $\mathcal{B}ern(\frac{1}{2})$.

© $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$ (evt impo)

or $\underbrace{\mathbb{P}(X=0)}_{(\frac{1}{2})^{1400}}.\underbrace{\mathbb{P}(Y=0)}_{(\frac{1}{2})^{1400}} \neq 0$

dc non indép.

2) Chq train → 700 + n places assises.

↳ X, exprimer :

E = { au moins un des 1400 supporters est obligé de voyager debout }.

Majorer E en usant inég Tchebichev.

$E = \{ X > 700+n \text{ ou } Y > 700+n \}$.

$E = \{ X > 700+n \text{ ou } 1400 - X > 700+n \}$

$E = \{ X > 700+n \text{ ou } 700-n > X \}$

$E = \{ |X - 700| > n \}$

Inégalité de Tchebichev.

si X (va) de mmt ordre 2,

$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\{ |X - E(X)| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

on a ici $E(X) = 700$, on écrit E.

$E = \{ |X - 700| \geqslant \underbrace{n+1}_{\varepsilon} \}$

$P(E) \leqslant \frac{Var(X)}{(n+1)^2}$

$P(E) \leqslant \frac{350}{(n+1)^2}$.

Tous assis ?

3) On cherche n tq

$P(E) \leqslant 1 - 95\% = 5\%$.

on cherche n tq $\frac{350}{(n+1)^2} \leqslant 0,05$

$\frac{350}{0,05} \leqslant (n+1)^2 \leftrightarrow \sqrt{\frac{350}{0,05}} \leqslant (n+1)$

$\leftrightarrow \sqrt{\frac{350}{0,05}} \cancel{- 1} \leqslant n + 1$

$\approx 83,67$

$\Leftrightarrow 82,67 \leqslant n$.

Le + petit n possible est 83.

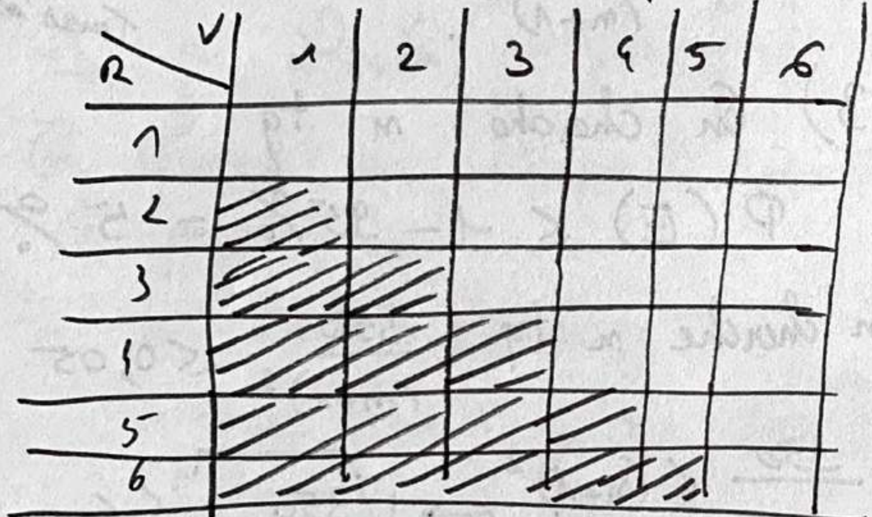
Ex 7 Dé Rouge Supérieur au dé Vert

A = "score dé rouge > score vert"

1) $P(A) = ?$

lancer 2 dés $\neq$, $\Omega = [\![1,6]\!]^2$

$\mathrm{card}(\Omega) = 36$, équiprobabilité



$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Plus formellement,

$$A = \bigcup_{k=1}^{6} \bigcup_{\substack{j=1 \\ k>j}}^{6} (R=k, V=j)$$

$$A = \bigcup_{k=2}^{6} \bigcup_{j=1}^{k-1} (R=k, V=j)$$

$$P(A) = \sum_{k=2}^{6} \sum_{j=1}^{k-1} P(R=k, V=j)$$

$$P(A) = \sum_{k=2}^{6} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{36} = \sum_{2}^{6} (k-1) \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{5} i = \frac{1}{36} \, \frac{5 \times 6}{2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

2) On lance n fois la paire de dés & on note S_n le nbr de réalisations de A & $Z = S_n/n$ la fréq des réalisations de A.

Calculer $E(Z)$ & $Var(Z)$

- $S_n \sim \mathcal{B}in(n, p = P(A) = \frac{5}{12})$.

On reconnait un schéma de Bernoulli de param $5/12$.

↳ n lancers indépendants

→ lancer modélisé p v.a. $Ber(\frac{5}{12})$

S_n : compte nbr succès.

Ainsi $Z = \frac{S_n}{n}$

- $E(Z) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{n \times 5/12}{n} = \frac{5}{12}$

$Var(Z) = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{1}{n^2} n \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$

45

$Var(Z) = \frac{35}{144n}$

3) Inégalité Tchebichev pr Z.

Z va possède moment ordre 2.

$\forall \varepsilon > 0, \ P(\{|Z - E(Z)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{35}{144 n \varepsilon^2}$.

4) $n = 700$

a) $P(Z \leq \frac{1}{3} \text{ ou } Z \geq \frac{1}{2})$

$= P(Z - \frac{5}{12} \leq \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \text{ ou } Z - \frac{5}{12} \geq \frac{1}{2} - \frac{5}{12})$

$= P(\{|Z - E(Z)| \geq \frac{1}{12}\}) \leq \frac{35 \times 144}{144 \times 700} = \frac{35}{700} = \frac{1}{20}$

Tchebichev à $\varepsilon = \frac{1}{12}$.

b) $P(Z \geq \frac{7}{12}) = P(Z - \underbrace{\frac{5}{12}}_{E(Z)} \geq \frac{1}{6})$

$$P(Z \geq \frac{7}{12}) = P(Z - E(Z) \geq \frac{1}{6})$$
$$\leq P(|Z - E(Z)| \geq \frac{1}{6})$$

μ $\varepsilon = \frac{1}{6}$

$$\leq \frac{35 \times 36}{144 \times 700} \leq \frac{1}{80}$$

5) comment choisir n pour :

$$P\Big(\frac{5}{12} - \underbrace{10^{-2}}_{\varepsilon} < Z < \frac{5}{12} + 10^{-2}\Big) \geq 0,99 \,?$$

$$P(-10^{-2} \leq Z - E(Z) < 10^{-2}) \geq 0,99$$

$$1 - P(|Z - E(Z)| \geq 10^{-2}) \geq 0,99$$

$$P(|Z - E(Z)| \geq 10^{-2}) < 1 - 0,99$$

Par ailleurs $P\{|Z - E(Z)| \geq 10^{-2}\} \leq \frac{35}{144 \cdot n \cdot 10^{-4}}$

$\varepsilon = 10^{-2}$

dc on recherche n tq

$$\frac{35 \cdot 10^4}{144 \cdot n} < 0,01$$

$$\frac{35 \cdot 10^6}{144} < n \quad ; \quad n \geq 0,24305556 \cdot 10^6$$

$$n \geq 243\,055,56$$

$$n \geq 243\,056$$

40

Ex 8 Preuve probabiliste du TH de Stone-Weierstrass.

f cont sur $[0,1]$

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

- 1) Degré du polynôme ? $\to$ au plus n

2) si $S_n \sim \mathcal{B}in(n,x)$; $x \in [0,1]$

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k).$$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Rq : si X vad $E(|X|) = \sum |x_k| \, P(X = x_k) < \infty$
alors $E(X)$ $\exists$ & elle vaut $E(X) = \sum x_k \, P(X = x_k)$

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = B_n^f(x)$$

3) Mq $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x) x^k (1-x)^{n-k}$

$$= f(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_{(x+1-x)^n = 1} = f(x)$$

4) soit $\varepsilon > 0$, fixé, $A_n^\varepsilon(x) := \{k \in \{0, \dots, n\}$ tq $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon\}$.

$$|f(x) - B_n^f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$|f(x) - B_m^f(x)| \leq \sum_{k=0}^{m} |f(x) - f(\tfrac{k}{m})| C_m^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k \in A_m(\varepsilon)} |f(x) - f(\tfrac{k}{m})| C_m^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$+ \sum_{k \notin A_m(\varepsilon)} |f(x) - f(\tfrac{k}{m})| C_m^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

$$A_m(\varepsilon) = \{k \in \{0, \dots, n\} \quad |f(x) - f(\tfrac{k}{m})| < \varepsilon\}$$

$$\leq \sum_{k \in A_m(\varepsilon)} \varepsilon C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \leftarrow$$

$$|f(x) - f(\tfrac{k}{m})| \leq |f(x)| + |f(\tfrac{k}{n})| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$$
$$= 2 \|f\|_\infty$$

$$\leftarrow + \sum_{k \notin A_m(\varepsilon)} 2 \|f\|_\infty C_m^k (1-x)^{n-k} x^k.$$

or $\displaystyle\sum_{k \in A_m(\varepsilon)} \varepsilon C_m^k x^k (1-x)^{m-k}$

$$= \varepsilon \sum_{k \in A_n(\varepsilon)} C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \leq \varepsilon$$

car $\displaystyle\sum_{k \in A_m(\varepsilon)} C_m^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_m^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$

$$\sum_{x \notin A_m(\varepsilon)} 2 \|f\|_\infty C_m^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= 2\|f\|_\infty \sum_{k \cdot |f(x) - f(\frac{k}{m})| \geq \varepsilon} C_m^k x^k (1-x)^{m-k}$$

$$= 2 \|f\|_\infty \underbrace{\sum_{k \notin A_m(\varepsilon)} P(S_m = k)}_{P(S_m \notin A_m(\varepsilon))}$$

$$P(S_m \in \{k \mid |f(x) - f(\tfrac{k}{m})| \geq \varepsilon\}) = P(|f(x) - f(\tfrac{S_m}{m})| \geq \varepsilon)$$

$$= 2\,\|f\|_\infty \sum_{k \notin A_n(\varepsilon)} P(S_n = k)$$

$$= 2\,\|f\|_\infty \, \mathbb{P}\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right)$$

5) cd ∞ $\exists\, \delta$ ne dépdt que ~~pas~~ f & ε tq

- $\mathbb{P}\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq P\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right)$

f unif cont sur $[0,1]$?

f cont en $x_0 \in [0,1]$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{x_0} > 0, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

f uniformt cont sur $[0,1]$:

- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, \delta > 0, \ \forall x, y, \ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

$\exists\, \delta > 0$ tq $\forall (x,y) \in [0,1]$,

$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

$$\rightarrow \left\{ w \in \Omega, \left| f(x) - f\left(\frac{S_n(w)}{n} \right) \right| \geq \varepsilon \right\}$$

$$\subset \left\{ w \in \Omega, \left| x - \frac{S_n(w)}{n} \right| \geq \delta \right\}$$

$$\mathbb{P}\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}\left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \geq \delta \right)$$

6) $S_n \sim \mathcal{B}in(n, x)$.

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(S_n) = x.$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\, \mathrm{Var}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}$$

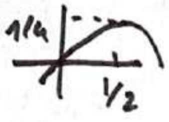
7) cd : $P\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq$

$$\leq \frac{x(1-x)}{n\,\delta^2} \leq \frac{1}{4\,\delta^2}.$$

$P\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq$

$\leq P\left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \geq \delta \right) \leq$

$$\leq \frac{1}{\delta^2}\, \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{x(1-x)}{n\,\delta^2} \leq \frac{1}{4n\,\delta^2}$$



$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

Résumé : $x \in [0,1]$.

- $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - B_n^f(x)| \leq \varepsilon +$ $2\,\|f\|_\infty \, P\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right)$.

- $\exists \delta_f^\varepsilon > 0$, $P\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n}\delta^{-2}$

$\exists N \in \mathbb{N}$, $N(\varepsilon)$, $\frac{1}{4n\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty}$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

$N(\varepsilon) = \left[\frac{2\,\|f\|_\infty}{4\varepsilon\delta^2}\right]$ ne dépd pas x.

$\forall x \in [0,1]$.

$\forall n \geq N$, $|f(x) - B_n^f(x)| \leq 2\varepsilon$

D'où la CVce uniforme de (B_n^f) vers f sur $[0,1]$.

Ex9 : Covariance & piles ou faces

Exos Révisions 1

→ lance 3 fois pièce équilibrée. | Y : nbr total fois pile

$$\begin{cases} X \text{ (va)} = 1 & \text{si } 1^\circ \text{ lancer pile} \\ X = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad X \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{2}\right)$$

1) • $Y = \{0,1,2,3\}$ $\quad \mathcal{B}in\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

→ Espérance & variances. $\quad p(1-p)$

$E(X) = \frac{1}{2}$, $Var(X) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$np(1-p)$

$E(Y) = \frac{3}{2}$, $Var(Y) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

2)

Y \ X	0	1	
0	1/8	0	1/8
1	2/8	1/8	3/8
2	1/8	2/8	3/8
3	0	1/8	1/8
	1/2	1/2	1

(45)

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

~~$P(X=0, Y=0) \overset{\text{indep}}{=} P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$~~ pas indep.

pas indep

Correct° $\forall k \in \{0, \dots, 3\}$,

$$P(Y=k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

R9 $\Omega = \{P, F\}^3 = \{0,1\}^3$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P équiproba.

si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

$X(\omega) = \omega_1$

$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

$\{X=0, Y=1\} = \{F \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ lancer}, F_{2^\circ}, P_{3^\circ}\}$

$$P\{\{0,0,1\} ; \{0,1,0\}\} = \frac{2}{2^3}$$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\cancel{E(XY)}$ $E(X,Y) =$

• $\underline{Var(X+Y)} = Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)$

XY à valeurs ds $\{0,1,2,3\}$.

$P(XY=0) = P(X=0 \text{ ou } Y=0)$

$= P(\{X=0\} \cup \{Y=0\})$

$= P(X=0) + P(Y=0) - P(\{X=0\} \cap \{Y=0\})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$P(XY=k) = P(X=\cancel{1}, Y=k) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k=0 \\ 1/8 & \text{si } k=1 \\ 2/8 & \text{si } k=2 \\ 1/8 & \text{si } k=3 \end{cases}$

$\Rightarrow E(XY) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

(cp, on retrouve que X et Y ne st pas indep car $cov \neq 0$).

$E(X) = 1/2$, $Var(X) = 1/4$.

$E(Y) = 3/2$, $Var(Y) = 3/4$,

$cov(X,Y) = 1/4$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

$Var(3X-Y) = Var(3X) + Var(-Y) + 2\,cov(3X,-Y)$.

$= 9\,Var(X) + Var(X) - 6\,cov(X,Y)$

$= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - 6 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

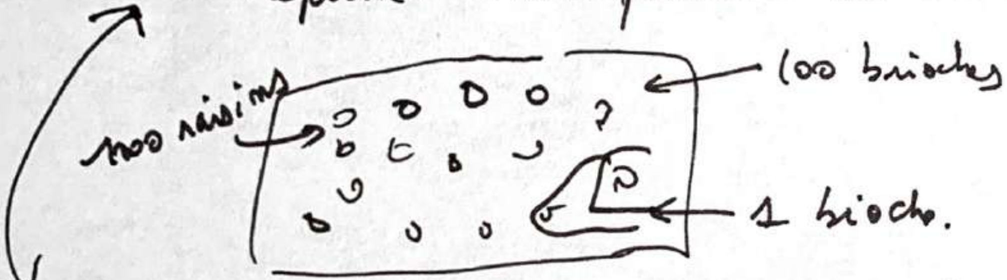
Ex 10 : Brioches aux raisins

Un boulanger mélange 1000 raisins ds pâte pr fabriquer 100 brioches de m̂ masse.

1) loi nbr X raisins ds 1 sl brioche.

+ hypothèses ?

↳ répartiθ indépendante des raisins.



$X \sim Bin(1000, \frac{1}{10})$ parmi

→ $E(X) = np = 1000 \times \frac{1}{10} = 100$.

$\lim P(X) \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

↪ $Var(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{9}{10} = 90$.

Hibou Plassmé. $\lambda = np$?

Correctθ

$X = \sum_{i=1}^{1000} \varepsilon_i$

$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème raisin est ds la brioche.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\varepsilon_i \sim Ber(\frac{1}{10})$; les ε_i st indep.

Une somme de Bernoulli indépendantes suit une Binomiale.

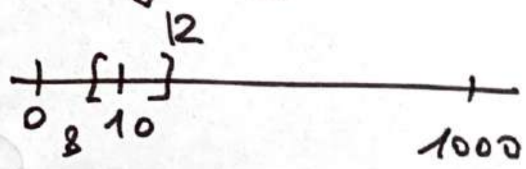
$X \sim Bin(1000, \frac{1}{10}) \approx Pois(100)$.

$P(8 \leq X \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} C_{1000}^{k} \left(\frac{1}{100}\right)^k \left(\frac{99}{100}\right)^{1000-k}$

$= e^{-10} \left(\sum_{k=8}^{12} \frac{(10)^k}{k!} \right)$

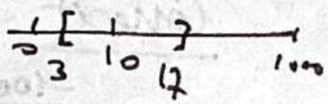
$\approx 0,57$

+ 1 chance sur 2



47

3) 4 Tchebichev



$$P(\{X \leq 3\} \cup \{X \geq 17\}) =$$

$$= P(|X - 10| \geq 7) \leq \frac{Var(X)}{7^2} = \frac{9,9}{7^2} = 0,2.$$

Ex 11 Cage à Rat & somme de lois