M-61B Pr: Erignoux Clément

PROBABILITÉS
INTÉGRATION

Objectifs

1. savoir modéliser une expérience aléatoire en faisant appel à des variables aléatoires réelles
2. savoir déterminer leur loi, calculer leur espérance pour répondre à des questions concrètes sur le modèle initial
3. notions probabilistes rencontrées
4. éléments minimaux de théorie de la mesure et d'intégration au sens de Lebesgue
5. notions de convergence presque sûre et en loi
6. la loi forte des grands nombres et du théorème central limite

Probabilités

1. Loi d'une variable aléatoire réelle : rappel sur les lois discrètes, loi à densité C 1 par morceaux, fonction de répartition, "catalogue" de lois classiques, exemples simples de lois ni discrètes ni à densité.
2. Variables aléatoires indépendantes : loi forte des grands nombres ; théorème de la limite centrale, application à la marge d'erreur d'un sondage.Les 36h de TD comportent 6h de TP avec Python

Intégrations

1. Rudiments de la théorie de la mesure : tribu, tribu borélienne, fonctions mesurables (= variables aléatoires), mesure, mesure de Lebesgue.
2. Intégrale par rapport à une mesure -finie et espérance : intégration des fonctions étagées, des fonctions positives, fonctions intégrables, propriétés de l'intégrale ; théorème de convergencedominée (admis) ; espérance d'une variable aléatoire réelle, théorème de transfert, moments, variance ; inégalité de Markov, de Bienaymé-Chebychev.

M61 Probabilités & Intégrations

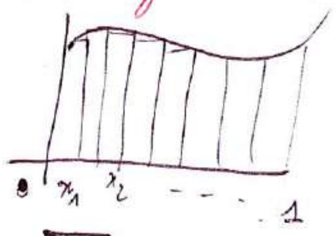
CM

clement.erignaux@inria.fr

Intro / Th de la mesure + Proba discrète → Int de Lebesgue
Probas cont / Th ∫ & lim / Loi Grd Nbr

Intro : Pk une nouvelle intégrale ?

f fonction sur $[0,1]$



$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx \text{ (Riemann)} = \lim_{\sup|x_{n+1}-x_n| \to 0} \sum (x_{i+1}-x_i) f(x_i)$$

CV si f est cont.

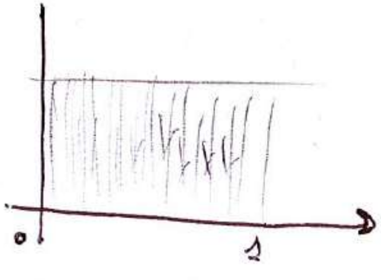
(*) L'int de Lebesgue est déf sur un ens de fs mesurables, ce q est bcp plus général

@ $f : x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f : \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

faisons comme ça (1)

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$



int de Lebesgue $\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0$.

(**) Nbs de CV

$(f_n)_n$ suite de fs, sppo $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

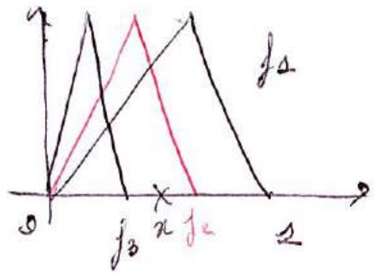
Ss q^elle(s) condi(s) ? $\int f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g(x)\,dx$

Riemann : Th de CV UN :

Si $f_n \to f$ UN
(ie $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
Alors $\int f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)\,dx$.

Lebesgue Th CV dominée

Sppo $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ (CV simple),
Sppo $\exists c > 0$, $|f_n(x)| \leq c$ $\forall x$ $\forall n$
Alors $\int |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



pic sur $[0,\frac{1}{n}]$.

$\forall x \in [0,1]$:

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

$\forall x \in]0,1]$, $\exists\, n_x > \frac{1}{x}$ tq

$\forall n \geq n_x$: $f_n(x) = 0$.

et $f_n(x) \longrightarrow f(x) = 0 \ \forall x$

$\rightarrow (f_n)$ CV simplement vers f cte $= 0$.

(f_n) CV-t-elle UN ? $\rightarrow$ NON.

soit $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$

$= f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$

Essayons d'appliquer le TH de CV dominée :

- $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in [0,1]$.

On peut choisir $c = 1$, $\sup\limits_{\substack{x\in[0,1] \\ n\in\mathbb{N}}} |f_n(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int |f_n(x) - f(x)|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

"

$\displaystyle\int f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. TH de la Mesure

A Tribu

$\rightarrow$ Définir ens. mesurables.

@ Sur $\mathbb{R}$, on vt définir va sur $\mathbb{R}$, ep définir que

va $\mathbb{P}(X \in M)$, $M \subset \mathbb{R}$

- Pb : Si on choisit n'importe ql $M \subset \mathbb{R}$, il pt y avoir des soucis.

$\rightarrow$ Si on vt définir une proba "proportionnelle au volume"

$\mathbb{P}(X \in M) \sim C.\, |M| \quad \forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ on pt arriver à des paradoxes où $\mathbb{P}(X\in M) = 1 = 2$.

(Paradoxe de Banach - Tarski)

$\Rightarrow$ On doit enlever les ens trop irréguliers.

B Tribu E ens, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu (σ - Algèbre) sur E, si

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ stable par union & intersectO d

cad si $\forall n$, $A_n \in \mathcal{T}$ alors

$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ & $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

• $\mathcal{T}$ est stable p passage au complément^R :
si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$

• $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable. ⚠
• Les élts de de $\mathcal{T}$ st ds ens mesurables.

ex • $\{\emptyset, E\}$ tribu grossière
• $\mathcal{P}(E)$ l'ens des pies de E est une tribu.
→ tribu discrète.

Exercice : $\phi : E \longrightarrow F$ applicaθ,
sppo $(F, \mathcal{T})$ espace mesurable, ($\mathcal{T}$ tribu)

$\mathcal{T}' = \{\phi^{-1}(A), A \in \mathcal{T}\}$ "image réciproq de $\mathcal{T}$".

$\phi^{-1}(A) = \{x \in E, \phi(x) \in A\}$.

Mq $\mathcal{T}'$ est une tribu sur E : c'est la tribu image réciproq.

Sol : (i) $\phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ & $\emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \phi^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}'$ (car $\mathcal{T}$ tribu)

$\phi^{-1}(F) = E$ & $F \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \mathcal{T}'$. (car $\mathcal{T}$ tribu)

(ii) Stabilité par union/ intersecθ (d) !

$A_n \in \mathcal{T}'$ $\forall n$
$\parallel$
$\phi^{-1}(B_n)$ 4 $B_n \in \mathcal{T}$.

$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ tribu

$B' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ tribu. $\in \mathcal{T}'$

$$\phi^{-1}(B) = \phi^{-1}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \overset{?}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(B_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

À vérifier — car $B \in \mathcal{T}$.

idem $\phi^{-1}(B') = \phi^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}'$

(iii) Passage au complément^R.

$A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \exists B \in \mathcal{T}$ tq $\phi^{-1}(B) = A$.

or $B^c \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ tribu.

$\phi^{-1}(B^c) = E \setminus \phi^{-1}(B) \in \mathcal{T}'$ car $B^c \in \mathcal{T}$.
$= E \setminus A = A^c$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{T}'$

$\Rightarrow \{\phi^{-1}(B), B \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de E

Rq En pratiq il suffit de vérifier la stabilité soit p union dénombrable soit p $\cap$ (d) car une tribu est stable p psg ∂ complément^R.

(Prop) soit I un ens (nv) d'indices (pas suppos $\mathbb{d}$)
soit une famille de tribu $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$
$\Rightarrow \forall i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.
Alors
$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \text{ est une tribu sur } E.$$
Preuve exo (voir ex. d'avt).

(5) (Tribu engendrée par une des parties de E)
Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on définit
$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{T}_{\in \mathcal{P}(E)}, \text{ tribu sur } E \text{ contenant } \mathcal{C}\}.$$
(on tribu & contient $\mathcal{C}$)

↳ $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu par la prop. précédente, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$

- $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$
- si $\mathcal{C}$ est une tribu, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

On choisit $E = \mathbb{R}$.

(6) (Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$)
On déf $\mathcal{I} = \{\text{interv. ouverts}\} = \{\,]a,b[\text{ tq } a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\}$
On déf alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$$= \bigcap\{\mathcal{T}, \text{ tribu sur } \mathbb{R} \text{ contenant } \mathcal{I}\}$$

Rq : La tribu borélienne peut être définie sur tout espace topologiq $(E, \mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ ens des ouverts.
La (tb) sur $(E,\mathcal{O})$ est déf par $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)$.

* Boréliens sur $\Gamma = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$,
$$\mathcal{B}(\Gamma) = \{A\cap\Gamma,\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$
* Borélien sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1 = \sigma(\{B_r(x),\ r\in]0,\infty],\ x\in\mathbb{R}^d\})$
où $B_r(x) = \{y\in\mathbb{R}^d, |y-x|<r\}$
Boule ouverte de rayon r centrée en x.

→ En pratiq, il est très difficile de construire des ens non-boréliens.

Exo : Sur $\mathbb{R}$, on a $\exists$ 2 déf°s des boréliens.
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{?}{=} \sigma(\{\,]a,b[,\ a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\})$$
$$\overset{?}{=} \sigma(\{\mathcal{O} \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^d\}).$$

or O ouvert de $\mathbb{R}$, $O = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$,
∄ 2 suites (a_k), (b_k)

$O \cap \mathbb{Q}$ est dense ds O et $O \cap \mathbb{Q}$ ⓓ.

$(x_k) = O \cap \mathbb{Q}$

$\exists$ un voisinage $]x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k[\subset O$

On pt construire $O = \bigcup_{k=1}^{\infty}]x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k[\in B(\mathbb{R})$
car $B(\mathbb{R})$ est une tribu.

$\Rightarrow$ (*) (**) st équivalentes

B) Fonctions mesurables

Ⓓ (f mesurable)

$(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables.

Soit f appli $f: E \to F$. On dit que f est mesurable (s-entendu de $(E, \mathcal{T})$ ds F muni $\mathcal{T}'$)

si $\forall A \in \mathcal{T}'$, $B := f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$
$\in \mathcal{T}$.

→ f est mesurable si l'image réciproq de tt ens mesurable est mesurable.

→ si $\mathcal{T}'$ est la tribu borélienne, on dit que f est borélienne ou Borel-mesurable.

- "Un borélien, un ens borélien"
→ un élt $A \in B(\mathbb{R})$ de la tribu borélienne.

Une f borélienne "f-Borel-mesurable"
→ une fonction $(\mathcal{T}, B(\mathbb{R}))$-mesurable.

⚠ (not° de mesurabilité dépd fondamentalmt des tribus que l'on a munie les espaces).

ⓔ Q$^{\text{lles}}$ st les applicat°s mesurables si
$(E, \mathcal{T}) \longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ si $\mathcal{T}' = \{\emptyset, F\}$
est la tribu grossière. → TOUTES

→ ls sls élts de $\mathcal{T}'$ st $\emptyset$, F or $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$
car $\mathcal{T}$ est tribu & $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{T}$
car $\mathcal{T}$ est tribu.

Récap : • $\mathcal{T}$ tribu sur E

$\phi, E \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, stable par complémentaire & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$.

• Tribu engendrée p. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{C} = \bigcap \{ \mathcal{T} \text{ tribu contenant } \mathcal{C} \}$$

• Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(\text{intervalles}) \text{ ouverts}\}$$

• Fonction mesurable = ens mesurable $A \in \mathcal{T}$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{T}')$

Exo : Mesurabilité de f cont.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont

1) $g = \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

$\neq$ Tribu image réciproq p f ou $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{T}_f$ tribu sur l'espace de départ.

$$\mathcal{T}_f = \{ f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

Mq g est une tribu (check $\boxed{z}$)

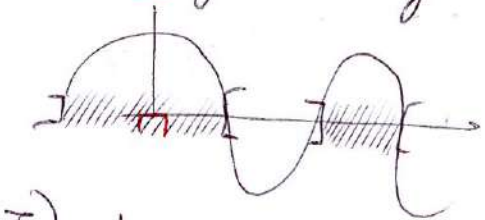
2) Mq $\forall$ ouvert est un borélien cf séance précédente

ouvert est réunion ouvert dénombrable.

3) Mq g contient les intervalles.

$I \subset \mathbb{R}$, $I \in g$ si ssi $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

int ouvert



$f^{-1}(I)$ est ouvert car f cont

(Rq f cont $\iff f^{-1}(\text{ouvert})$ est ouvert

$\to f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to g$ contient les interv. ouverts $\mathcal{I}$

4. Mq $g = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$, g tribu et $g \supset \mathcal{I}$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset g$ par définit de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

or $g \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ p définit de $g \Rightarrow g = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Est-ce que f est mesurable ? soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = g$.

on veut mq $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est mesurable.

(D) (Mesure (positive))

On se donne un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$, une applicat° $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure si :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite disjointe d'ens. mesurables ← sigma additivité

$(A_n \in \mathcal{T},\ \forall n,\ \text{et } A_n \cap A_m = \emptyset\ \forall n \neq m)$

alors $\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Not : $\bigsqcup A_n \Leftrightarrow \bigcup A_n$ si $A_n \cap A_m = \emptyset\ \forall n \neq m$)

→ Un triplet $(E, \mathcal{T}, \mu)$ où $\mathcal{T}$ tribu sur E et μ est un espace mesuré.

⚠ Ne pas confondre mesure & f mesurable.

→ une mesure a pr argument un ens. mesurable $B \in \mathcal{T}$.

→ une f mesurable prend son argument ds E.

(D) Une mesure μ sur $(E, \mathcal{T})$ est dite :

1) finie si $\mu(E) < \infty$.

2) σ-finie si $\exists$ partit° dénombrable $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$

& tq $\mu(E_n) < \infty\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

3) de probabilités si $\mu(E) = 1$

(e) La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est l'uniq mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a$ $\forall a \leq b$.

- $[a,b]$ borélien car $[a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$ $= \mathbb{R} \setminus \{]-\infty, a[\cup]b, \infty[\}$.
- $\lambda(\{a\}) = \lambda([a,a]) = 0$
- On a pas mqé qu'$\exists$ une telle mesure, ni qu'elle est uniq. On le fera + tard.
- $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$, $\lambda([n,n+1[) = 1$

$$\lambda(\mathbb{R}) \underset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum \mu([n,n+1[) = \infty.$$

λ pt ê définie sur $[0,1]$

$\forall a \leq b \in [0,1]$, $\lambda(]a,b[) = b-a$.

$\lambda_{[0,1]}$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est une mesure de probas.

(a) soit $x \in \mathbb{R}$, la mesure de Dirac en $x \in \mathbb{R}$ est définie p $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \delta_x(\mathbb{R}) = 1$$

→ δ_x est une mesure de probabilités

$$\mathbb{1}_B(x) = \delta_x(B) \quad \text{où } \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathbb{1}_B : E \longrightarrow [0,1]$ fonction

$\delta_x : \mathcal{T} \to [0,1]$ mesure

• λ mesure ? $\lambda(\emptyset) = \lambda(]-a,a[) = 0$

σ-additivité : il faut attendre.

• δ_x mesure ? $\delta_x(\emptyset) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 0$

$$\delta_x\Big(\underbrace{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}_{= B}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $x \in B \iff \exists!\, n \in \mathbb{N}$ tq $x \in B_n$.

$\delta_x(B) = 1 \iff x \in B \iff \exists!\, n,\ x \in B_n$

$$\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(B_n) = \delta_x(B_n) = 1.$$

Ptés (des mesures)

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré.

1) (Monotonie) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) (sous-additivité) soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$

alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$

3) (continuité p/ unions croissantes) $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ tq $B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

4) (Continuité p/ aux intersections décroissantes $B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ tq $B_{n+1} \subset B_n$ si il existe n tq $\mu(B_n) < \infty$.

alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

Preuve 1). σ additivité A et $B \setminus A$.

σ-additivité : $\underbrace{\mu(A)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0} = \underbrace{\mu(B)}_{\geq 0}$ car $A \subset B$

$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Preuve 2) soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$,

Mq → alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$

$A_n = B_n \setminus \left\{\bigcup_{k<n} B_k\right\} \in \mathcal{T}$ si $B_n \in \mathcal{T}\ \forall n$

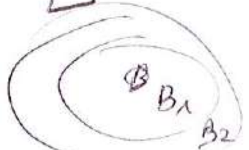
▸ les A_n st disjoints $\Rightarrow \mu\left(\bigsqcup A_n\right) \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum \mu(A_n)$

▸ $\bigsqcup A_n = \bigsqcup B_n$ $\quad \mu\left(\bigcup B_n\right) \overset{\shortparallel}{\leq} \sum \mu(B_n)$

▸ $A_n \subset B_n \Rightarrow \mu(A_n) \leq \mu(B_n)$

Preuve 3. (Continuité p/ aux unions croissantes)

Mq $\left[\ (B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}\ \&\ B_n \subset B_{n+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)\right.$



$A_n = B_n \setminus B_{n-1}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $B_n = \bigsqcup_{k<n} A_k$

$$\mu\left(\bigcup B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup A_n\right) \overset{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

Preuve 4 Mq (continuité p/ intersections ↘)

$\left[\ B_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}\ \&\ B_{n+1} \subset B_n\right.$ si il $\exists n$ tq $\mu(B_{n_0}) < \infty$.

$B_{n+1} \subset B_n\ \forall n$, on suppose $\exists n_0$ tq $\mu(B_n) < \infty$

$\forall n \geq n_0$, $\tilde{B}_n = B_{n_0} \setminus B_n$ $\quad \tilde{B}_n \subset \tilde{B}_{n+1}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{n_0} \setminus B_n)$$

$= \lim_{n\to\infty} \mu(B_{n_0}) - \mu(B_n)$ car $B_n \subset B_{n_0}$ & σ-additivité

$= \mu(B_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} B_n\right)$ or

$$\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n = \bigcup_{n\geq n_0} (B_n{}^c) = \left(\bigcap B_n\right)^c = B_{n_0} \setminus \left(\bigcap B_n\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} \tilde{B}_n\right) = \mu(B_{n_0}) - \mu\left(\bigcap B_n\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Trouver un c@ au 4) si on ne suppose pas $\exists n_0$, tq $\mu(B_{n_0}) < \infty$.

λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $B_n =]n, \infty[$

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lambda(\emptyset) = 0$$

or $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda(B_n) = \infty$ $\boxed{\text{c?!..c!}}$

(P) (L) de Borel Cantelli)

soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

$$\Rightarrow \mu\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0$$

(D) (lim sup & lim inf d'ensembles)

soit $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ $\leftarrow$ mesurable, on définit

$$\limsup_{n \to \infty} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} B_p \quad (1)$$

$$\liminf_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} B_p. \quad (2)$$

(1) L'ens $x \in E$ q st ds une infté de B_n.

(2) L'ens $x \in E$ q st ds tous les B_n à apcr n_x.

<u>Récap</u> : Mesure μ sur $(E, \mathcal{T})$ $\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0 \\ \sigma\text{-additivité}, \\ \mu(\bigsqcup B_i) = \sum \mu(B_i) \end{cases}$

<u>Pptés</u> : 1) monotonie : $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

2) ss-additivité $\mu(\bigcup B_i) \leq \sum \mu(B_i)$

3) continuité aux unions $\nearrow$

$\forall i\ B_i \subset B_{i+1} \Rightarrow \mu(\bigcup B_i) = \lim \mu(B_i)$

4) continuité aux intersects $\searrow$

$\forall i\ B_{i+1} \subset B_i$ et $\exists n_0$ tq $\mu(B_{i_0}) < \infty$

$\Rightarrow \mu(\bigcap B_i) = \lim \mu(B_i)$

Retour sur Ⓛ Borel-Cantelli ; espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$,
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, on suppose $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$

alors $\mu(\limsup A_n) = 0 = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p\right)$

DM $B_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$ suite ↘. $\bigcup B_p = \bigcup A_n$

ens mesurable

$\mu(\bigcup B_p) = \mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n) < \infty$.

→ $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mu(B_p) < \infty$.

→ continuité : $\mu\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p\right) = \lim_{p\to\infty} \mu(B_p) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geq p} A_n\right)$

$\quad \| \qquad\qquad \leq \lim_{p\to\infty} \sum_{n\geq p} \mu(A_n)$

$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$

→ reste d'une série ⓒⓥ (abs)

⇒ le reste tend vers 0

□.

2. Variables aléatoires

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Ⓓ On appelle **espace de probabilités** un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est univers, $\mathcal{F}$ est **tribu sur Ω** et $\mathbb{P}$ **une mesure de probabilités** sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
= un espace mesuré dont la mesure est de probas.

→ On appelle **variable aléatoire** ttefonction f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$. On appelle alors E **l'espace d'events** de X. Dans le contexte des probas, on appelle **événements** les élts $\mathcal{F}$ par X une ⓥⓐ, on définit sa **loi ou distribution** à la mesure sur $(E, \mathcal{T})$, notée $\mathbb{P}_X$, déf. par $(X : \Omega \to E)$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\text{event}})$ $\in \mathcal{F}$ car X ⓥⓐ

Notation On notera $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$ ⇒ mesurable.

$\{X^{-1}(A)\} = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in A\}$

de même $\{X \in A, Y \in B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)$

ⓔ lancer de dé, ⓥⓐ $X : \Omega \to \{1, 2, \dots, 6\}$
$\omega \longmapsto$ résultat dé.
conditio PC de l'exp

⚠ X ⓥⓐ $\Omega \to E$, mq $\mathbb{P}_X$ est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$

• $\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
car P mesure de proba

- $\mathbb{P}_X\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup A_k\right)\right)$

$= \mathbb{P}\left(\bigsqcup X^{-1}(A_k)\right) \overset{\sigma\text{-additivité de } \mathbb{P}}{=} \sum \mathbb{P}(X^{-1}(A_k))$

$= \sum \mathbb{P}_X(A_k)$

$X^{-1}(A) \sqcup X^{-1}(B) = X^{-1}(A \sqcup B)$

2.2. Variables aléatoires discrètes

(D) On considère ici des va dont l'espace d'états est soit fini soit d. Sans perte de généralité, on supp que $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\{1, \dots, n\}$.

Ds le cas discret, on munit E de la tribu discrète,

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$

Pour déterminer $\mathbb{P}_X$, la loi d'une variable aléatoire, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(A)$ $\forall A \subset E$, il suffit de connaître les $\mathbb{P}_X(\{e\})$ $\forall e \in E$. Car $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{e\in A} \mathbb{P}_X(\{e\})$ p σ-additivité

$\mathbb{P}_X(\{e\}) = \mathbb{P}(X = e) = \mu_e$, μ encode la loi de X

($\mathbb{P}_X$ est déterminé p μ).

(D) (Espérance) $E \subset \mathbb{N}$, $X : \Omega \to E$ une va discrète, on appelle espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, la qté

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in E} k\mu_k \quad \text{où} \quad \mu_k = \mathbb{P}(X=k) \text{ est la loi de } X$$

sous réserve de convergence absolue si $E = \mathbb{N}$.

(D) (Variance) de X est donné p

$V(X) = \sum_{k\in E} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k$ ss réserve d'absolue CV si $E = \mathbb{N}$

$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

(D) soit $A, B \in \mathcal{F}$, on définit la proba conditionnelle de A sachant B p

$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ $\in [0,1]$ & monotone, supp $\mathbb{P}(B) > 0$.

On dit que les évents st indépts si

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$\iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) > 0$

⚠ soit $B \in \mathcal{F}$, on suppose $\mathbb{P}(B) > 0$!
Mq $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ est une mesure de probas
$A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$

- $\mathbb{P}_B(\emptyset) = \dfrac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = \emptyset$ car $\mathbb{P}$ mesure.

- σ-additivité ? $\mathbb{P}_B(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} A_K) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} A_K)}{\mathbb{P}(B)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} (A_K \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{K\in\mathbb{N}} \dfrac{\mathbb{P}(A_K \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_K)$

Prop : (FF Probas totales) soit $\Omega = \bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} B_K$.

alors $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A \mid B_K) \times \mathbb{P}(B_K)$.

DM : $P(A) = \mathbb{P}(A \cap (\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} B_K)) = \mathbb{P}(\bigsqcup_{K\in\mathbb{N}} (A \cap B_K))$

$(= \mathbb{P}(A \cap \Omega))$

$\overset{\sigma\text{-addi}}{=} \sum \mathbb{P}(A \cap B_K)$

$= \sum_{K\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A \mid B_K) \cdot \mathbb{P}(B_K)$.

Ⓑ

Prop : (Th) du transfert ds le cas discret

soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une va discrète & soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une applicat° alors
$\varphi(X) : \omega \in \Omega \longrightarrow \varphi(X(\omega))$ est également une va & $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e\in E} \varphi(e)\, \mu_e$,

où (μ_e) est la loi de X.

$(X : \Omega \to E)$

DM 1) Mq $\varphi(X)$ est une va
$\forall A \subset \mathbb{N}$, $(\varphi(X))^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.
On va le vérifier uniqt sur les singletons
soit $K \in \mathbb{N}$,
$\varphi(X)^{-1}(\{K\}) = \{\omega \in \Omega, \varphi(X(\omega)) = K\}$
soit $E_K = \{e \in E \text{ tq } \varphi(e) = K\}$
$= \varphi^{-1}(\{K\}) \in \mathcal{P}(E)$

$\Rightarrow X^{-1}(E_K) \subset \Omega$, $\in \mathcal{F}$ car X va (car appli mesurable)

$X^{-1}(E_K) = X^{-1}(\varphi^{-1}(\{K\})) = (\varphi \circ X)^{-1}(\{K\})$
$= \varphi(X)^{-1}(\{K\}) \in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow \varphi(X)$ est appli mesurable $\Rightarrow \varphi(X)$ est va.

2) Mq $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{e \in E} \varphi(e) \mu_e$.

P définit° $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{K \in \mathbb{N}} K\, \mathbb{P}(\varphi(X) = K)$

$= \sum_{K \in \mathbb{N}} K\, \mathbb{P}(X \in E_K) = \sum_{K \in \mathbb{N}} K \sum_{e \in E_K} \mathbb{P}(X = e)$

$= \sum_{K \in \mathbb{N}} \sum_{e \in E_K} \varphi(e)\, \mathbb{P}(X = e)$ car $E_K = \bigsqcup_{e \in E_K} \{e\}$

$= \sum_{e \in E} \varphi(e)\, \mathbb{P}(X = e) = \sum_{e \in E} \varphi(e) \mu_e$

D (Indépendance de suites d'événements)

- soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, cette suite est dite indépendante, si $\forall K \in \mathbb{N}$, $\forall n_1 \neq n_2 \neq \dots n_K$

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_K}) = \prod_{p=1}^{K} \mathbb{P}(A_{n_p}).$$

- elle est dite indépendante 2 à 2 si c'est vrai pr $K = 2$, ie $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_m)$$

(5) (Indépendances de suites de VA discrètes)

soit X, Y 2 VA discrètes à val^{rs} ds E, F.

X & Y st indépendantes si $\forall e \in E, \forall f \in F$,

$$\mathbb{P}(X = e, Y = f) = \mathbb{P}(X = e) \cdot \mathbb{P}(Y = f).$$

Une suite X_n de VA d à v^{rs} ds $\mathbb{N}$ est indépendante si $\forall (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite d'événements $(\{X_n = p_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est indépend^t.

si ——— 2 à 2 ———

si ——— est 2 à 2 indép.

@ (tirer pièce 4x de manière indép)

$X_i \in \{P, F\}$ $i = 1, \dots, 4$. On suppo $\mathbb{P}(X_i = P) = \mathbb{P}(X_i = F) = \frac{1}{2}$.

Quelle est proba de n'avoir que des piles $= \frac{1}{2^4}$.

On cherche $\mathbb{P}(X_1 = P, \dots, X_4 = P) = \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_i = P)$

events indépdts p déf de l'indépce des X.

① de Borel Cantelli n°2

$(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on spps la suite (A_n) indépendante, si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

→ si la somme des probas d'une suite d'events est ∞, alors ap proba 1, une qté de ces events se produit.

Trouver ⓒⓔ si on ne spps pas indépendance.

On prd $A_n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$ pr $A \in \mathcal{F}$.

On spps $\mathbb{P}(A) \neq 0, 1$, $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$.

∘ $\sum \mathbb{P}(A_n) = \sum_{A=1}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \infty$

∘ $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p = A$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(A) < 1$

Récap

ⓥⓐ $X : (\Omega \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ mesurable

$A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$

ⓥⓐ discrètes : $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$,

si la $\mathbb{P}_X$ est caractérisée p $\mu_k = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \in \{k\})$

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mu_n$, $\exists$ abslt ⓒⓥ^ce.

$V(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \sum (k - \mathbb{E}(X))^2 \mu_k$
$= \sum k^2 \mu_k - (\sum \mu_k)^2$.

FF Probas Totales : $E = \bigsqcup E_k$

$\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) = \sum \underbrace{\mathbb{P}(A | E_k)}_{\frac{\mathbb{P}(A \cap E_k)}{\mathbb{P}(E_k)}} . \mathbb{P}(E_k)$

Th Transfert :
$X : \Omega \longrightarrow E$, $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{N}$
$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k \in E} \varphi(k) \underbrace{\mu_k}_{\mathbb{P}(X=k)}$

(A_n) events $\perp\!\!\!\perp$ (indépdts)

$\forall k$, $\forall n_1, \dots n_k$

$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_j})$

(X_n) ⓥⓐⓓ est $\perp\!\!\!\perp$ si $\forall e_1, e_2 \in F^{\mathbb{N}}$

les events $(X_i = e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ st indép.

2.3. Lois discrètes classiqs

1) • Loi de Bernoulli (p), $X \sim \mathcal{B}(p)$

- paramètre $p \in [0,1]$
- espaces d'états $E = \{0,1\}$, $\mu_1 = p$, $\mu_0 = 1-p$
- $\mathbb{E}(X) = p = 1\, \mathbb{P}(X=1) + 0\, \mathbb{P}(X=0)$.
- $V(X) = p(1-p)$.

2) Loi Binomiale, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

- 2 paramètres, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$
- $E = \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$

3) Loi Uniforme $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$

- 1 paramètre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $E = \{1,\dots,n\}$, $\mu_K = \frac{1}{n}\ \forall K \in \{1,\dots,n\}$.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

4) Loi géom $X \sim \text{Géom}(p)$

- paramètre $p \in [0,1]$
- $E = \mathbb{N}^*$
- $\mu_K = p(1-p)^{K-1}$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

5) Loi de Poisson

- paramètre $\lambda > 0$
- $E = \mathbb{N}$, $\mu_K = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$
- $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

2.4- Variables à densité

On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on généralise Riemann Id

(D) Soit f positive tq $\forall A > 0$ (on suppose f est $CM(\mathbb{R})$)

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx \quad \exists$$

On suppose qu'il $\exists \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \infty$

alors on dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}$,

et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$

NB : Signifiant CM($\mathbb{R}$), $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
$\exists\ a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b = x_{n+1}$ tq
f est cont sr $]x_k, x_{k+1}[$, $\forall\ k \in \{0, \dots, n\}$
& prolongeable en une f cont sr $[x_k, x_{k+1}]$

→ soit f une f cont p mrcx, on dit que f est intégrable si $|f|$ l'est en admettant alors

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx\ \exists, \text{ on l'appelle } \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

D Une f f (cont p mrcx) est une densité de probas sr $\mathbb{R}$.

* $f \geq 0$ ie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
* borélienne (≈ mesurable) & intégrable sr $\mathbb{R}$ & satisfaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

• soit f une densité de probas, on dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une va à densité ou densité f si $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

D soit X une va réelle à densité de densité f_X, on définit la f de répartition de X comme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Rq : La déf $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est valable $\forall$ va réelle

Pptés de F_X : soit X une var, F_X est ↗ à vals ds $[0, 1]$, cont à droite, et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

Par ailleurs F_X détermine entièremt la loi $\mathbb{P}_X$ de X ds le sens où si $F_X = F_Y$ sr $\mathbb{R}$ pr 2 var X et Y $\Longrightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

ie $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A).$$

Admis

Prop soit X une var à densité f_X,
on suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx < \infty$

alors on définit $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$,
on dit que X est intégrable.

X var est intégrable $\iff$ $x f_X(x)$ est intégrable.
← f mesurable.

- On spps $x^2 f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
on pt alors définir la variance de X comme

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx\right)^2$$

$$\left(= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right)$$

2.5. Qqs lois classiqs à densité

1. Loi uniforme sur $[a,b]$, $a<b \in \mathbb{R}$

"La proba d'être ds $[\alpha, \alpha+\varepsilon]$, $\alpha, \alpha+\varepsilon \in [a,b]$ ne doit répondre que de ε et ê proportionnel à ε.

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha+\varepsilon) = \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f_X(x)\,dx$$

On choisit $f_X(x) = C$.

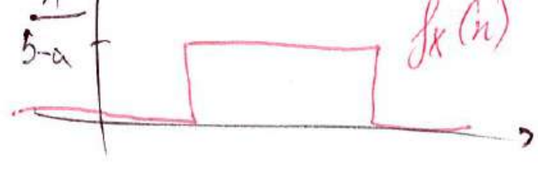
$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha+\varepsilon) = C.\varepsilon$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1 = \int_a^b f_X(x)\,dx = (b-a).C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

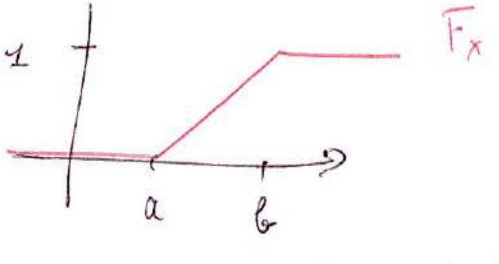
La loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi à densité de densité $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{a \leq x \leq b}$

où



Calculons $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \mathbb{P}(X \le x)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \ge b. \end{cases}$$



Rq P les variables à densité, la f de répartition est cont

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ dérivable de dérivée $f_X \Rightarrow$ cont

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Soit X var uniforme sur $[0,1]$.

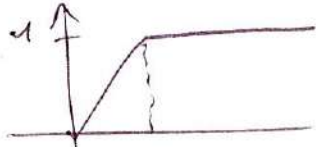
Mq $1-X$ est va sur $[0,1]$.

$Y = 1 - X : w \longrightarrow 1 - X(w)$

1) On calcule F_Y & on mq $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{x\in[0,1]}\,dx$

$= \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{x\in[0,1]}\,dx$

2° qu°) Mq $F_X = F_Y$.



$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x)$

$= \mathbb{P}(1 - X \le x)$

$= \mathbb{P}(X \ge 1 - x)$

$= \mathbb{P}(X > 1-x) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1-x) = 1 - F_X(1-x)$

car X est à densité.

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Rq : X est à densité $\mathbb{P}(X = a) = 0$

$\mathbb{P}(a \le X \le a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$

- si $x < 0$, $1 - F_X(1-x) = 0$
- si $x > 1$, $1 - F_X(1-x) = 1$.
- si $x \in [0,1]$, $1 - F_X(1-x) = 1 - (1-x) = x$.

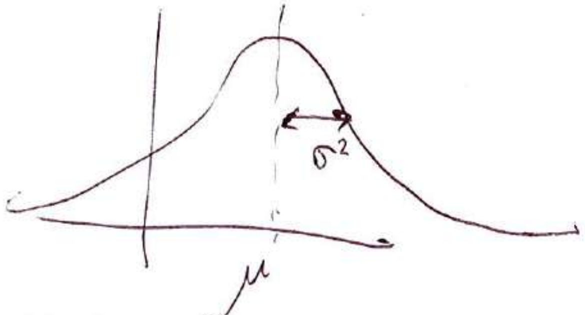
$\Rightarrow F_Y(x) = F_X(x)$

2) Loi Gaussienne / normale

La loi normale, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

C'est une loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$\mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

- La f de répartition de la loi normale n'est pas explicite.
- Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$, on dira qu'une var est centrée.
- — $V(X) = 1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$ — — réduite

→ une loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée une loi normale centrée réduite.

Récap Indépendance

X, Y vad sur $\mathbb{N}$: $X \perp\!\!\!\perp Y$ si

$$\mathbb{P}(X = k \cap Y = k) = \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k).$$

- Lois classiques $\mathcal{B}(p)$, $Bin(n,p)$, $Geom(p)$, $Poiss(\lambda)$
- va à densité f_X : – f_X positive
  – f_X cont par morceaux.
  $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1$.
- X va de densité f_X si $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$
- f de Répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$
- $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$
- $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\, dx$

⚠ $\int f$ $\boxed{\text{positive}}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on admet le (Th) de Fubini, q dit que si I & I' soit 2 intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\int_I dx \int_{I'} dy}\ f(x,y) = \int_{I'} dy \int_I dx \ f(x,y)$$

$$F(x) = \int_{I'} f(x,y)\,dy$$

Soit x (va) à vlrs positives, à densité f_X CM, on suppose que $\mathbb{E}(X)$ est bien déf. $\left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx < \infty\right)$

Mq $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(y))\,dy$

On vt mq $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty (1 - F_X(y))\,dy$

° On Rq : $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx$.

X (va) à valeur positives : $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega$.

$\{\omega, X(\omega) < 0\} = \emptyset \rightarrow \mathbb{P}(X(\omega) < 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$= \int_{-\infty}^0 f_X(x)\,dx \Rightarrow f_X = 0$ sur $]-\infty, 0[$

On a $F_X(y) = \int_0^y f_X(x)\,dx$ car $F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq y) = \int_0^y f_X(x)\,dx$

car X est positive $\rightarrow 0$

$\Rightarrow 1 - F_X(y) = \int_0^\infty f_X(x)\,dx - \int_0^y f_X(x)\,dx$.

$$\int_0^\infty \underbrace{(1 - F_X(y))}_{\int_y^\infty f_X(x)\,dx}\,dy = \int_0^\infty \int_y^\infty f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} f_X(x)\, \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}\,dx\,dy \quad \otimes$$

Rq on ne se soucie pas inég. ST/ larges car X est à densité & de $\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f_X(y)\,dy = 0$

où $\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$, $(x,y) \mapsto 0$ si $x < y$, $(x,y) \mapsto 1$ si $x \geq y$

On pose $f : x,y \longrightarrow f_X(x)\, \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}$

On appliq Fubini,

$$(*) = \int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} \left\{ \mathbb{1}_{\{x \geq y\}} f_X(x)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_{[0,\infty[} f_X(x) \left\{ \int_{[0,\infty[} \mathbb{1}_{\{x \geq y\}}\, dy \right\} dx$$

et $\displaystyle\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}\, dy = \int_0^x 1\, dy = x$

$$\Rightarrow (*) = \int_0^\infty x f_X(x)\, dx = \mathbb{E}(X).$$

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x \in I} f_X(x)\, dx$$

On revient aux lois à densité.

(D) La loi exponentielle représente un tps d'attente.
On dit qu'une (va) X suit une loi exponentielle du paramètre λ, si X est variable à densité de densité
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sa f de répartiO est donnée par sa f de répartiO est donnée p

$\forall x \geq 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}\, dy$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x} = F_X(x)}$$

$= 0 \quad \forall x < 0$

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$\emptyset$ de mémoire de la loi exponentielle, on spps que le tps entre 2 métros successifs est exponentiel de paramètre $\lambda = 1$ h.

1) Spps qu'un métro est passé à 16h. Quelle est la proba qu'un autre métro passe avant 16h30 ?

→ notons $X_1, X_2, \dots, X_K$ les heures de passage des métros successifs.

$Y_K = X_{k+1} - X_k \sim Exp(1)$,

$Y_k = X_{k+1} - X_k \sim \mathcal{E}xp(1)$

On suppose $X_1 = 16$; on cherche $\mathbb{P}(X_2 \leq 16,5) = \mathbb{P}(Y_1 \leq 0,5)$

$= F_Y(0,5) = 1 - e^{-0,5}$.

2) Un métro est passé à 16h, en arrivant à 16h30 à l'arrêt, on sait que le métro suivant n'est pas passé. Quelle est la proba que le métro suivant arrive avant 17h ?

→ On cherche $\mathbb{P}(X_2 < 17 \mid Y_1 > 0,5) = \mathbb{P}(Y_1 < 1 \mid Y_1 > 0,5)$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_1 \in [0,5;1])}{\mathbb{P}(Y > 0,5)} = \frac{\mathbb{P}(Y \leq 1) - \mathbb{P}(Y \leq 0,5)}{1 - \mathbb{P}(Y \leq 0,5)}$$

$$= \frac{e^{-0,5} - e^{-1}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,5} = \mathbb{P}(Y_1 \leq 0,5)$$

3) Mq l'∅ de mémoire, soit X une va de loi exponentielle de paramètre λ ; $\forall a, b > 0$: ← important

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X > a+b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > a+b)}{\mathbb{P}(X > a)} = \frac{1 - F_X(a+b)}{1 - F_X(a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = \mathbb{P}(X > b)$$

On arrive à un guichet, qui est vide + Proba $\frac{1}{2}$ s'il est vide, s'il est occupé, on attend un tps exponentiel de param 1.

1) On note X notre tps d'attente, X est-il discret ? X est-il à densité ?

L'espace d'états de X est $\mathbb{R}_+$ qui n'est pas (d) $\Rightarrow X$ n'est pas discret.

- $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \mid V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(X = 0 \mid V^c)\mathbb{P}(V^c)$

→ V : évent guichet vide.

$$= \underbrace{1 \times \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\cdots}_{\geq 0} > 0 \Rightarrow X \text{ n'est}$$

pas à densité car si Y est à densité $\mathbb{P}(Y = x) = 0 \quad \forall x$.

2) Calculer la proba d'attendre moins d'1h ?

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) \cancel{=} \int_{-\infty}^{1} f_X(y)\,dy$$

Faux car X pas à densité.

$$\mathbb{P}(X\le 1) = \mathbb{P}(X\le 1|V)\underbrace{\mathbb{P}(V)}_{1/2} + \mathbb{P}(X\le 1|V^c)\,\mathbb{P}(V^c)$$

$$= 1\times\frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{E}xp(1)\le 1)}_{F(1)\,=\,\text{fdR d'un exp}(1)}\times\frac{1}{2}$$

car $X|V$ vaut 0

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X\le 1) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-1}) = 1-\frac{e^{-1}}{2}$$

3] Intégrale p/r à une mesure σ-finie

3.1) Déf. de l'intégrale d'une f mesurable

ⓔ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R}\longrightarrow\{0,1\}$

$x \longmapsto 1$ si $x\in\mathbb{Q}$

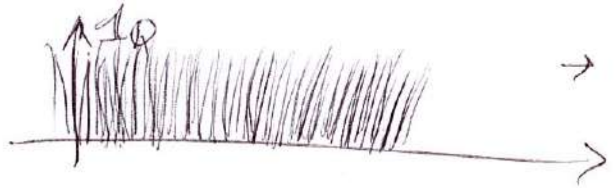
$\longmapsto 0$ sinon.

On pt voir $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ≅ une f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\underbrace{\{q\}}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ borélien}$$

d

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$ borélien car complémentaire d'un borélien.



→ intégrale de Riemann "aire ss la courbe" c'est Mort !

On se place ds cadre $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré (tribu, mesure)

Ⓓ soit $A\in\mathcal{T}$, on définit la f $\mathbb{1}_A : E\longrightarrow\mathbb{R}$ appelée l'indicatrice de A comme $\forall x\in E$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\notin A \\ 1 & \text{si } x\in A.\end{cases}$$

Rq Une fonction $f : E\to\mathbb{R}$ est dite étagée s'$\exists\, n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et des ens mesurables $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{T}$ tq $\forall x\in E$, $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{1}_{A_i}(x)$
(étagée = combinaison linéaire d'indicatrices).
On note $\mathcal{E}$ l'ens des fs étagées,
$\mathcal{E}^+$ ——— positives.

Ⓓ soit $f\in\mathcal{E}_+$, $f=\sum a_i\,\mathbb{1}_{A_i}$, $a_i\ge 0\ \forall i$, on déf. l'intégrale de f contre μ par $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(A_i)$

Rq Cette déf° est encore valide pr $f\in\mathcal{E}$ si μ est une mesure finie.

Récap Loi exponentielle $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

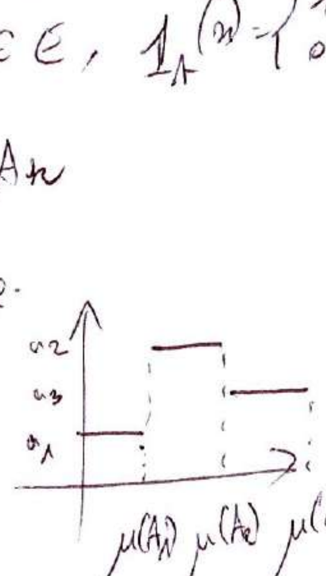
→ loi sans mémoire $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

∘ f indicatrice : $A \in \mathcal{T}$, $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

∘ f étagées : $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}$

∘ Intégrale d'une f étagée positive.

$$\int f \, d\mu = \sum a_i \, \mu(A_i)$$



⚠ λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$\lambda(]a, b[) = b - a$.

Mq $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est 1) mesurable 2) intégrable sur $\mathbb{R}$ 3) calculer $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \, \lambda(dx)$

1) $x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ mesurable ?

Notat° $\int f \, d\mu = \int f(x) \, \mu(dx) = \int f(x) \, d\mu(x)$.

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

∘ si $0, 1 \in B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

∘ si $0, 1 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

∘ si $0 \in B$, $1 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

car $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}$ ← dénombrable.

∘ si $1 \in B$, $0 \notin B$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(B) = \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

∘ f étagée positive est intégrable ssi

$$\int f \, d\mu < \infty$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est intégrable ssi $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda < \infty$

$$\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 1 \times \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

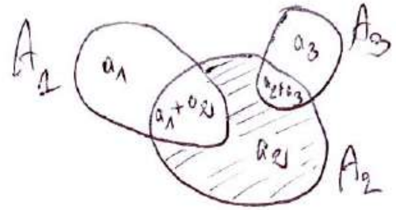
car $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ et $\underset{\text{mesure}}{\lambda}(\{q\}) = 0 \ \forall q \in \mathbb{Q}$

mesure ⇔ σ-additivité : $\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\{q\})$

Ex Mq f est étagée ssi $\exists$ ens $B_1, \dots, B_N$ mesurables & disjoints, et des réels $b_1, \dots, b_N$ tq

$$f = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbb{1}_{B_i}.$$

Sol° soit $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, A_i mesurables, $a_i \in \mathbb{R}$.



$N = 2^n$

$\sigma \subset \{1, \dots, n\}$

$\Sigma = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$, $|\Sigma| = N$

$$B_\sigma = \Big[\bigcap_{K \in \sigma} A_K\Big] \cap \Big[\bigcap_{K' \notin \sigma} A_{K'}^c\Big] \Rightarrow B_\sigma \text{ mesurable } \forall \sigma.$$

 $= A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c = B_{\{2\}}$.

Pk $(B_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ est-elle disjointe ?

$\sigma \neq \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \exists K_0$ tq $K_0 \in \sigma$ et $K_0 \notin \sigma'$

$B_\sigma \subset A_{K_0}$ $\Rightarrow B_\sigma \cap B_{\sigma'} = \emptyset$

$B_{\sigma'} \subset A_{K_0}^c$

On écrit mtn $f = \sum_{\sigma \in \Sigma} b_\sigma \mathbb{1}_{B_\sigma}$

À vérifier en calculant la valeur sur chacun des B_σ: $f = \sum a_K \mathbb{1}_{A_K}$.

$$b_\sigma = \sum_{K \in \sigma} a_K$$

$$\Big(\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma = E\Big).$$

D) L'intégrale d'une f mesurable positive

f cont, mesure σ-finie, μ est déf ĉ

$$\int_E f \, d\mu = \sup \Big\{\int_E g \, d\mu,\ g \in \mathcal{E}^+ \text{ et } g \leq f\Big\}$$

f est dite intégrable si $\int f \, d\mu < \infty$.

D) Un ens $N \subset E$ est dit négligeable s'$\exists A \in \mathcal{C}$ tq $N \subset A$ & $\mu(A) = 0$.

soit f & g 2 fs positives, mesurables, !
on suppose que $\{x \in E, f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.

Mq $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$. $\searrow$ ($\Leftrightarrow f = g$ μ-presq partout)

solut°: $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu \Leftrightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$
et $\int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu$

$\Rightarrow$ il suffit de mq $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$

$\Leftrightarrow \sup\{\int h\,d\mu,\ h \leq f,\ h \in \mathcal{E}^+\} \leq \int g\,d\mu$

$\Rightarrow$ il suffit de choisir $h \leq f$, $h \in \mathcal{E}^+$ & mq

mq $\int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

- si $h \leq g$, $\int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ p déf° de $\int g\,d\mu$
car h est étagée positive.

- $f = g$ μ presq partout $\Rightarrow \exists N$ mesurable tq $\mu(N) = 0$
& tq $f(x) = g(x)$ sur N^c.

$\tilde{h} = h \times \mathbb{1}_{N^c}$ étagée

$h = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\tilde{h} = \sum a_i \mathbb{1}_{B_i}$

$B_i = A_i \cap N^c$

$\tilde{h} \leq f$ car $\tilde{h} \leq h$.

$$\int \tilde{h}\,d\mu = \sum a_i\, \mu(A_i \cap N^c)$$
$$= \sum a_i \big[\mu(A_i) - \underbrace{\mu(A_i \cap N)}_{\leq \mu(N) = 0 \text{ par monotonie}}\big]$$
$$= \int h\,d\mu.$$

si $x \in N^c$, $\tilde{h}(x) = h(x) \leq f(x) = g(x)$
si $x \in N$, $\tilde{h}(x) = 0 \leq g(x)$

$\Rightarrow \tilde{h}$ est étagée, positive & $\leq g$.

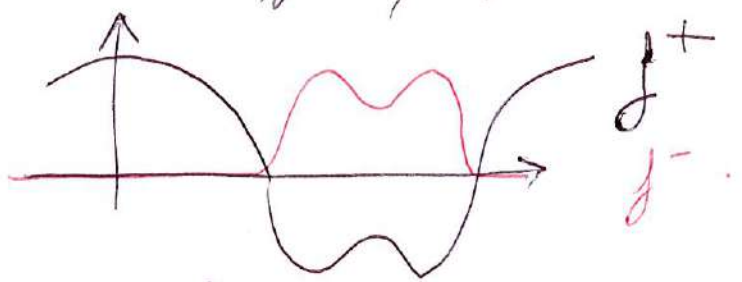
$\Rightarrow \int \tilde{h}\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ par déf,

$\Leftrightarrow \int h\,d\mu \leq \int g\,d\mu$ $\forall h \leq f, h \in \mathcal{E}^+$

$\Leftrightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

(D) Soit f f mesurable, on définit les fs

$f^+(x) = \max(0, f(x))$, $f^-(x) = \max(0, -f(x))$.



Alors on a les identités.

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Par ailleurs f^+ & f^- st mesurables.

~~Toutes~~ Si f^+ & f^- st intégrables ttes ds les 2, on dit que f est intégrable, et on dit :

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(E)$ ou $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ens des fs ~~[illegible]~~ intégrables par rapport à μ.

(Rq). À noter f intégrable $\Leftrightarrow$ $|f|$ est intégrable.

Notat° : $\int f\,d\mu = \int f(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,d\mu(x)$

(si $\mu = \lambda$ & la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $= \int f(x)\,dx$)

(Rq) On voit facilement que si f, g st mesurables & égales presq partout, alors f intégrable $\Leftrightarrow g$ intégrable et alors $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

$\|f\|_1 = \int |f|\,d\mu$, $f = g$ μ p.p, $f = g$ ds $\mathcal{L}^1$

L'espace $\{\mathcal{L}^1(\mu), \|f\|_1\}$, on ne pt pas parler de $f(x)$ pr un x donné car $f \in \mathcal{L}^1$ est une classe d'équivalence de fs égales presque-partout, mais pas partout. → semi-norme

$\int f$ étagées $\Rightarrow \int \forall f$ non positives

décomposit m → pie ≥0
qq → pie <0.

Ⓓ soit A ens mesurable & f une f intégrable, on déf :

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu .$$

car f intégrable $\Rightarrow f \mathbb{1}$ intégrable. (monotonie de l'intégrale)

Ptés Admises

L'int de Lebesgue est linéaire, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{L}^1$ et $\int af + bg \, d\mu =$

$$= a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu .$$

∘ Monotone : si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f \leq g$ μ-pp.

Alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

3.2. Convergence d'intégrales

Ⓓ soit (f_n) une suite de f mesurables, on dit que f_n CV simplem^t vers f si $\forall x \in E$:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x).$$

On dit que f_n CV μ presque partout vers f, s'il existe un ens négligeable N tq f_n CV simplem^t vers f sur N^c.

Ⓓ soit f_n suite de fs intégrables, & soit $f \in \mathcal{L}^1$; on dit que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$

si $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

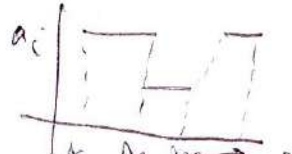
(c'est la CV associée à $\|\cdot\|_1$).

$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \not\Rightarrow f_n \to f$ simplem^t

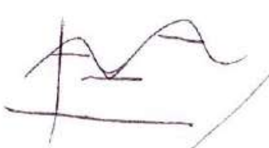
$f_n \to f$ simpl^t $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

<u>Récap</u> • $f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ étagée positive

$$\int f\,d\mu = \sum a_i \, \mu(A_i)$$



• $\int f\,d\mu = \sup\{\int h\,d\mu,\ h \le f,\ h \in \mathcal{E}^+\}$



• f intégrable si ce sup est fini.

• f mes : $f = f^+ - f^-$

$$\int f\,d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

f intégrable $\Leftrightarrow |f|$ intégrable.

espace des fs intégrables

<u>Pptés</u> : • $\int \alpha f + \mu g = \alpha \int f + \mu \int g \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1$

• $f \le g$: $\int f \le \int g$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$.

(Nce) ▷ $f_n \to f$ simplemt $\Leftrightarrow \forall x \in E : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

▷ $f_n \to f$ μ-presque partout $\Rightarrow \exists N$ négligeable
$f_n \to f$ simplt sur

▷ $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \Leftrightarrow \int |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ μ $f_n, f \in \mathcal{L}^1$

Ex $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une f mesurable positive.

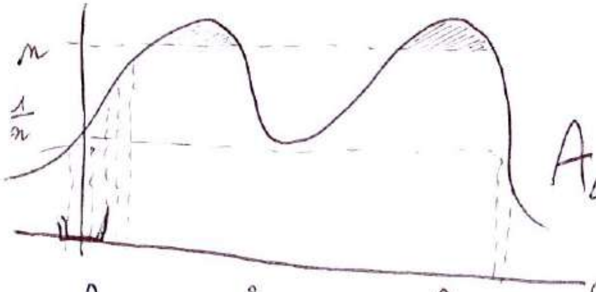
1) Mq f est limite simple d'une suite de fs mesurable & étagée.

2) Idem si f n'est pas positive.

3) On supps f bornée, Mq f est la limite uniforme d'une suite de fs mesurables étagée (f_n) ds le sens $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sur (30) le cours dans le DS1.

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, 1) Mq f est limite simple d'une suite de f mesurables & étagées.

1) 

$B_{n*} = f^{-1}(A_{n*})$

$A_{n*} = [n, \infty]$

Pour $k = 0 \dots n^2 - 1$, $A_{n,k} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

$B_{nk} = f^{-1}(A_{nk})$ sont mesurables car f mesurable.

$$\hat{f}_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{B_{n,k}} + n \mathbb{1}_{B_{n*}}$$

Mq $\hat{f}_n \xrightarrow{\text{simplement}} f$; soit $x \in E$,

- si $f(x) = \infty \Rightarrow \hat{f}_n(x) = n \ \forall n$

$\Rightarrow x \in B_n \ \forall n$.

donc $f(x) = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(x)$

- si $f(x) < \infty$ alors $\exists n_0$ tq $f(x) < n_0$.

$\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

car pour $K = K(x)$, $f_n(x) = \frac{k}{n}$ & $f(x) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k_n}{n}\right[$

$\Rightarrow \hat{f}_n(x) \longrightarrow f(x)$ donc f_n cv simplt vers f.

2) Idem si f n'est pas positive

$f = f^+ - f^-$, $f^{\pm} = $ lim simple de $\hat{f}_n^{\pm}$

$\to f = $ lim simple de $\hat{f}_n^+ - \hat{f}_n^-$.

3) Suppo f bornée : $\exists n_0$ tq $f(x) \leq n_0 \ \forall x \in E$

alors $\forall n \geq n_0$: $B_{n*} = \emptyset$.

$\to \forall n \geq n_0 : \hat{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{B_{n,k}}$

or sur $B_{n,k}$, $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$.

$\to$ Sur E, $\forall n \geq n_0$, $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$.

ie $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Q° : On suppose $f_n \longrightarrow f$ dans un certain type, sous quelles conditions $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$?

① Lim inf & limsup de suites réelles

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère

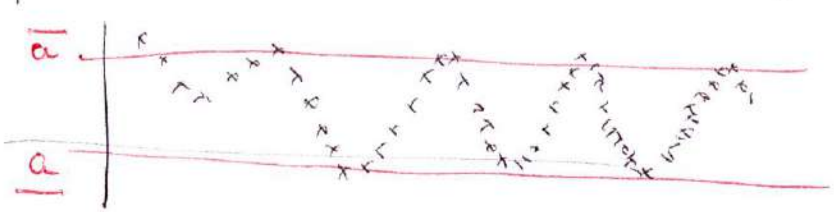
$$b_p = \sup_{n \geq p} a_n \quad \& \quad c_p = \inf_{n\geq p} a_n \quad , \ p \in \mathbb{N}, \ b_p, c_p \in \overline{\mathbb{R}}$$

$b_p \searrow$, $c_p \nearrow$ & $c_p \leq b_p$

il existe donc $\overline{a} = \lim_{p\to\infty} b_p = \lim_{p\to\infty} \sup_{n\geq p} a_n$

$$\underline{a} = \lim_{p\to\infty} c_p = \lim_{p\to\infty} \inf_{n\geq p} a_n .$$

$\overline{a}$ & $\underline{a}$ sont respectivement la + grande & la + petite valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\geq 0}$.



$\overline{a}$ (resp. $\underline{a}$) est la + grande (resp. petite) valeur dont a_n va passer infiniment proche infiniment souvent.

Ⓓ Soit f_n une suite de fonctions $E \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit limsup f_n & liminf f_n :

$$\limsup f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x))$$

$$\liminf f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} (f_n(x))$$

Soit (a_n) une suite réelle ⓐ mq

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Rq si f_n est suite de fonctions mesurables alors limsup f_n & liminf f_n sont mesurables

(TH) (L de Fatou)

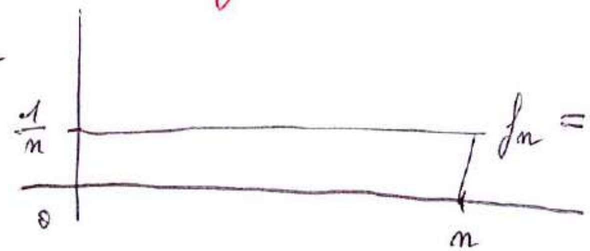
soit (f_n) suite de fs mesurables positives

alors $\int \underbrace{\liminf f_n}_{\text{fonct}^\circ\ g} \, d\mu \leq \liminf \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{suite réelle}}$.

(Rq) si $\liminf \int f_n \, d\mu = \infty$, L dF est inutile.

CAS d'inégalité STRICTE

ex1



$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$.

$$\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0,n]) = 1.$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

• Calculer $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pr $x \geq 0$

$\exists n_0 = \lceil x \rceil$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$.

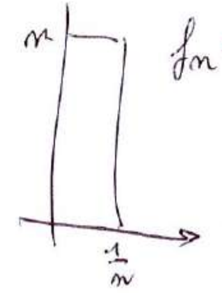
à x fixé, $f_n(x)$ (CV) & $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Donc $\liminf_{n\to\infty} f_n \equiv 0$. (On Rq pr $x < 0$, $f_n(x) = 0 \ \forall n$)

$\Rightarrow \int \liminf f_n \, d\lambda = 0$ car $0 \times \mathbb{1}_{[0,1]}$ est étagée d'int 0.

Fatou: $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1$

ex2



$f_n = n \, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ $\quad \int f_n \, d\lambda = n \times \frac{1}{n} = 1$

$\Rightarrow \liminf \int f_n \, d\lambda = 1$

$\underbrace{\liminf f}_{g} = +\infty \, \mathbb{1}_{\{0\}}$

$h = a \mathbb{1}_{\{0\}}$ et $\int a \, \mathbb{1}_{\{a\}} \, d\lambda = 0$

• $\int g \, d\lambda = \sup\{ \int h \, d\lambda, \ h \in \mathcal{E}^+, \ h \leq g \}$

• si $f = g$ λ-presque-partout alors

$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda \Rightarrow \int +\infty \, \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda = \int 0 \times \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda.$$

Th (de CVce monotone)

soit (f_n) une suite $\nearrow$ de f **mesurables** & **positives** (ie $\forall x$, $f_n(x) \underset{n}{\nearrow}$)

alors (f_n) CV **simplement** vers f **mesurable**, & $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Rq $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Rq . La f f prend ses valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}_+$.

. On ne fait aucune hypothèse d'intégrabilité de f_n

. Idem pr des suites $\searrow$ de fs négatives.

---

ex pr f_n non-positive. $f_n = -\mathbb{1}_{[n,\infty]}$

ok $\nearrow$

ok mesurables (fs indicatrices de fs mesurables)

ok $f_n \xrightarrow{\text{simplement}} 0$

$\int f_n \, d\lambda = -1(\lambda[n,\infty[) = -\infty \neq \underbrace{\int \lim f_n(x) \, \lambda(dx)}_{=0}$

Preuve : $I_n = \int f_n \, d\mu$, $I = \int f \, d\mu$.

. $I_n \nearrow$ car $(f_n) \nearrow$ + monotonie.

& $I_n \leq I$ par monotonie.

. L de Fatou : $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

$= I \leq \lim\limits_{n\to\infty} I_n \leq I$

Th (CVce dominée)

soit (f_n) suite de fs mesurable, CV simplement vers f. On spps $\exists$ f $g \in \mathcal{L}^1$ (intégrable) positive tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, cad $\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\Rightarrow$ $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$.

(car $\int f_n - f \, d\mu = \int (f_n - f)^+ d\mu - \int (f_n - f)^- d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Rq : • f_n, f bornée par C sur $[0,1]$

& si $f_n \longrightarrow f$ simplement sur $[0,1]$

$|f_n(x)| \leq C \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall n$

→ On pose $g(x) = C \quad \forall x \in [0,1]$

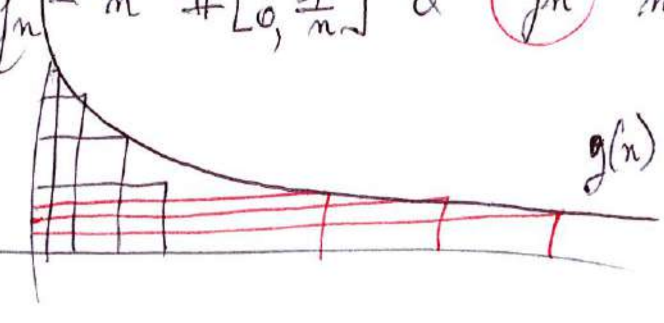
est intégrable $\left(\int_{[0,1]} g \, d\lambda = C < \infty \right)$

$\Rightarrow \int |f_n - f| \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par CVD.

• On pt tjrs choisir $g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$ mais en pratiq cette f n'est pas forcément calculable ou son intégrale ne l'est pas.

• Inégalité Stricte de Fatou, ∄ dominat° g intégrable.

@ $f_n = n \, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ & $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$



$g(x) = \frac{1}{x}$.

$\boxed{\text{Récap}}$ • (f_n) CV simp. si $\forall x \in E : f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

• $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ si $\int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$, $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$.

• $(f_n) \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$ si $\exists N$ négligeable par μ tq $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c$.

• $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ si $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

si μ mesure finie & $(f_n) \xrightarrow{UN} f$

$0 \leq \int |f_n - f|(x) \, d\mu \leq \int g_n(x) \, d\mu = g_n \underbrace{\mu(E)}_{<\infty}$

$g_n = g_n(y) = \sup |f_n - f|(x)$.

$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $f_n \longrightarrow f$ U.N.

Th des gendarmes $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$.

limsup & liminf

$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{p \geq n} a_p}^{b_p \searrow}$

$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{p \geq n} a_p}_{c_p \nearrow}$

① Fatou
f_n mesurable ⊕
$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

Th CVM monotone
(f_n) suite ↗ f ⊕
$\Rightarrow \lim \int f_n = \int \lim f_n$

Th CV dominée

(f_n) st $\xrightarrow{CV.s} f$, sppo $\exists \varphi$ intég, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$

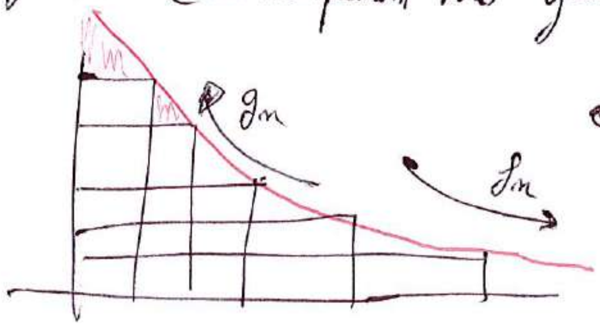
$\Rightarrow \lim \int f_n(x) \, dx = \int f(x) \, dx$

→ Retour sur (Th) CV Dominée & cas d'inégalité
St de Fatou : $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$

$$f_n \xrightarrow{cv.s.} f \equiv 0 \qquad \int f_n(x)dx = 1.$$

$$g_n(x) = n \, \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}(x)$$

$g_n(x)$ CVe simplement vers $g \equiv 0$. $\int g_n(x)dx = 1$.



$\sum \frac{1}{K} \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{x}dx$ n'est pas intégrable.

$$\varphi(x) = \sup_n f_n(x)$$

Ne pas écrire $\int f(x)\,d\mu$.

si λ mesure de Lebesgue : $\lambda(dx) = dx$

X de FdR° F_X. q^{lle} condio X est à densité ?

si X est à densité, $\exists f_X$ tq f_X mes, pos, $\int f_X d\mu = 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \to$ cont & déri (sauf en nbr fini de pts)

→ $f_X(x)$ sa dérivée,

$$\int_a^b f_X(y)dy = F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

X est sans mémoire si $\mathbb{P}(X \geq a+b \mid X \geq b) = \mathbb{P}(X \geq a)$

Int de Lebesgue	Riemann
• f mesurable	• f CM
• CVD	• $f_n \xrightarrow{UN} f$ ..

CVD sur un segment (ens de mesure finie)
$f_n \to f$ simplement sur E, $\mu(E) < \infty$,
si $|f_n(x)| \leq C$ $\forall n, \forall x$, $g(x) = C$.

Intégrable ⇒ sous-entendu mesurable.

4. Variables Aléatoires

4.1 Préambule : caractérisatØ des mesures

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

Q° : Comment déterminer si X & Y, 2 va ont m loi ?
"est-ce que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$"

$\mathbb{P}_X ; \mathbb{P}_Y : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$. va borélien.

On ne peut pas vérifier "à la main" $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$

D Soit E ens, on considère $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est un **π-système** si $\mathcal{C}$ est stable p intersecØ finie.
$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.

e L'ens $\mathcal{I}_1 = \{$intervalles ouverts de $\mathbb{R}\}$ est un π-système.

D Un ens $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone, ou λ-système si :

- $E \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ est stable p différence
  1) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ et $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$
  2) $A_n \in \mathcal{C}$, $\forall n$ $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{C}$.

P Soit $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ 2 mesures de probas sur $(E, \mathcal{T})$ alors
$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ est une classe monotone.

- $E \in \mathcal{C}$ car $\mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E) = 1$ & $E \in \mathcal{T}$ tribu
- $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T}$ si $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}$ ($= A \cap B^c$)

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Big| \quad \mathbb{Q}(A \setminus B) = \mathbb{Q}(A) - \mathbb{Q}(B)$$

si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{Q}(A_n) = \mathbb{Q}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big)$$

L des classes monotones

La petite classe monotone contenant un π-système $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée p $\mathcal{C}$.

e mq $\exists$ pile uniq mesure sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ tq $\mu(]a,b[) = b - a$ (*)

Soit μ, λ 2 mesures sur $\mathcal{B}([0,1])$ tq (*)
$\to \mu, \lambda$ mesures de proba.
$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}([0,1]), \mu(A) = \lambda(A)\}$ est une classe monotone.

$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(\mathcal{I})$ où $\mathcal{I} = \{$inter. ouverts de $[0,1]\}$.

$\mathcal{I}$ est un π-système.

[LCM] (classe monotone) à appliquer

↳ "la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{I}$ est $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}([0,1])$"

$\Rightarrow \mathcal{C} \supset \mathcal{B}([0,1]) \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}([0,1])$.

$\mathcal{I}'$

@$_2$ "$\{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ est un π-système.

q engendre les $]a,b[$ $\forall a,b$

$$]a,b] =]-\infty, b] \cap [-\infty, a]^c.$$

$$]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - \tfrac{1}{n}[.$$

X, Y 2 (va), on suppose X & Y ont m fdR$^{\circ}$

$F_X(x) = F_Y(x)$ $\forall x$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, x])$ $\forall x$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident sr $\mathcal{I}$, q est un π système q engendre les boréliens

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident s. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (38)

$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(\mathcal{I})$ où $\mathcal{I} = \{$intervalles de $[0,1]\}$.

$\mathcal{I}$ est un π-système.

$\boxed{LCM}$ (Classe monotone) à appliquer

↳ "la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{I}$ est $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}([0,1])$" :

$\Rightarrow \mathcal{C} \supset \mathcal{B}([0,1]) \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}([0,1])$.

@$_2$ $\mathcal{I}' = \{]-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$ est un π-système.

qui engendre les $]a,b[\ \forall a,b$

$]a,b] =]-\infty, b] \cap [-\infty, a]^c$,

$]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b-\frac{1}{n}[$.

X, Y 2 va, on suppose X & Y ont m fdR

$F_X(x) = F_Y(x)\ \forall x$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, x])\ \forall x$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident sur $\mathcal{I}$, qui est un π système qui engendre les boréliens

$\Rightarrow \mathbb{P}_X$ & $\mathbb{P}_Y$ coïncident à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (38)

Erratum DS

- $\mathcal{T} \cancel{\in} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$
- $\cos(2\pi n x) = \cos(nx)$ car $\cos$ 2π-périodique

  Vraie que si $nx \in \mathbb{Z}$!
- $\mathcal{T} = \{E \subset \mathbb{N},\ E$ ne contient que des entiers pairs$\}$

  ↳ pas stable en passant au complémentaire.
- $X \perp\!\!\!\perp Y,\ Y \perp\!\!\!\perp Z,\ X \perp\!\!\!\perp Z \Rightarrow (X, Y, Z) \perp\!\!\!\perp$.

  (indépendance) Faux

@ X, Y $Ber(\frac{1}{2})$ $\perp\!\!\!\perp$

$Z = X + Y\ [2]$ $Ber(\frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(Z=0, X=0) = \mathbb{P}(Y=1, X=0) = \frac{1}{4}$

... $Z \perp\!\!\!\perp X,\ Z \perp\!\!\!\perp Y,\ X \perp\!\!\!\perp Y$

$\mathbb{P}(X=0, Y=0, Z=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0)$

" si indep

$\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{8}$.

- Espace mesurable ~~#~~ ens mesurable

$(E, \mathcal{T})$ tribu $\qquad A \in \mathcal{T}$

$(\int a_n) = \int$ densité

- f densité sur $\mathbb{R} \not\Rightarrow f \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$

$\sum a_k = 1.$

① classes monotones

si $\mathbb{P}$ & $\mathbb{Q}$ st 2 mesures q coïncident sur un π-système $\mathcal{C}$ engendrant $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \mathbb{P}$ & $\mathbb{Q}$ st égales.

$\Rightarrow$ si $\forall x \ \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \mathbb{Q}(]-\infty, x]) \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{Q}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

4 : var réelles

4.1 var & FdR°

(D) Une pté est vraie ps si elle est vraie sur un ens $\Omega' \subset \Omega$ de proba 1.

(D) va $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est f mesurable $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

étant donné var X, on définit sa loi/distributio

$\mathbb{P}_X$ ĉ $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\underbrace{X \in A}_{\in \mathcal{F}}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

$\mathbb{E}(X) = \int X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$ $\quad X$ positive

⚠ $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longmapsto [0,1].$

les variables à densité st un φ, si X est à densité f_X

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx = \int_A \mathbb{P}_X\, dx$

$\mathbb{P}_X([a,b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx = F(b) - F(a)$

$\boxed{\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)\, dx}$ écriture formelle.

(D) soit X var, on déf FdR de X ĉ

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\quad$ sur $\mathbb{R}$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty, x]}\, \mathbb{P}_X(dx)$

$\int \mathbb{1}_A \, d\mu$ $\quad \mathbb{R} \quad \in \quad \mathbb{P}_X \quad]-\infty, x]$

$= \mathbb{P}(X \in \ ]-\infty, x])$ } sur Ω

$= \mathbb{P}(X \leq x)$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$ sur $\mathbb{R}$

(Prop) La FdR° F_X d'une var X est

est $\nearrow$, $F_X(x) \in [0,1] \ \forall x$,

cont à droite, $F_X(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$

et $F_X(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1$

F_X caractérise entièrement la loi de X.

si $F_X = F_Y$ sur $\mathbb{R}$ pr X, Y 2 var $\Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Démo • $\nearrow$ (par σ-additivité)

• $F_X \in [0,1]$ car F_X est la proba de qq chose.

• $\exists \lim_{\pm\infty}$ ok $\nearrow$ & bornée.

• Cont à droite : si $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$

$\Rightarrow F(x+\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$?

$F_X(x+\varepsilon_n) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x+\varepsilon_n])$

or $]-\infty, x] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, x+\varepsilon_n]$.

$F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, x+\varepsilon_n]\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty, x+\varepsilon_n])$

$= \lim_{n\to\infty} F_X(x+\varepsilon_n)$ $\Rightarrow F_X$ est càd

• $F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$

$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(n)$ car $F_X \nearrow$

$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty, n])$

$= \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]\right)$ (cont de $\mathbb{P}_X$ & unions croissantes)

$= \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$ (l'autre limite idem)

• F_X caractérise entièrement la mesure car

$F_X = F_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, x])\ \forall x \in \mathbb{R}$

& $\{]-\infty, x[, x \in \mathbb{R}\}$ est un π-système

qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

4.2. Moments des var

(D) On dit var X est intégrable si

$\int_{\mathbb{R}} |x| \, \mathbb{P}_X(dx) < \infty$. On peut alors

définir son espérance $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X(dx)$

On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Ptés : Comme l'intégrale, l'espérance est monotone & linéaire si X, Y var intégrable, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $X \leq Y$ ps $\Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

• $\alpha X + \beta Y$ est intégrable, d'espérance

$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$

RQ Une vai bornée p.s est tjrs intégrable

X intégrable $\Leftrightarrow \mathbb{E}(|X|) < \infty$ or

$\mathbb{E}(|X|) \leq \underset{\overset{\shortparallel}{C}}{\mathbb{E}(C)}$ si X est bornée p.s par C

⚠ Th de Fubini : si f est f positive sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

alors $\displaystyle\int_{E'}\left[\int_E f(x,y)\,\mu(dx)\right]\nu(dy)$

$\displaystyle = \int_E\left[\int_{E'} f(x,y)\,\nu(dy)\right]\mu(dx)$ $\quad$ μ ttes mesures μ sur $(E,\mathcal{T})$ ν sur $(E',\mathcal{T}')$.

1. Mq si X est intégrable & positive alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1-F_X(y))\,dy = \int_0^\infty \mathbb{P}(X>y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x>y\}}\,\mathbb{P}_X(dx)\right]dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y<x\}}\,dy\right]\mathbb{P}_X(dx) \quad (1)$$

2. Mq $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ $\quad$ X positive

$$\hookrightarrow \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega\left[\int_0^{X(\omega)} dx\right]\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<X(\omega)\}}\,dx\right]\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left[\int_\Omega \mathbb{1}_{\{x<X(\omega)\}}\,\mathbb{P}(d\omega)\right]}_{\mathbb{P}(X>x)} dx$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(X>x)}_{1-F_X(x)}\,dx = \mathbb{E}(X).$$

RQ $\int \mathbb{1}_A\,d\mu = \mu(A)$.

y a la forme $\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ $\to$ linéarisable ↳ monotonie.

Th de transfert soit X var, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonc° mesurable. La va $\varphi(X)$ est intégrable ssi la fonc° $\varphi(\cdot)$ est intégrable par rapport à la mesure $\mathbb{P}_X$ & on a alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_\Omega \varphi(X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{P}_X(dx)$$

Rappel: $\varphi(\cdot)$ est intégrable par rapport à la mesure $\mathbb{P}_X$ $\iff \int |\varphi(x)|\, \mathbb{P}_X(dx) < \infty$

Exemple: X var, B borélien.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \in B}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \in B\}}\, \mathbb{P}_X(dx)$$

On pose $\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{x \in B\}} = \mathbb{1}_B(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \in B\}}(x)\, \mathbb{P}_X\, dx = \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

Retour sur les var à densité & discrète.

- va à densité. X à densité f_X alors $\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)\,dx$, écriture formelle.

$\iff \mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\,dx$ (correcte)

$$\mathbb{E}(X) = \int x \underbrace{f_X(x)\,dx}_{\mathbb{P}_X(dx)}$$

(défini si ssi $\int |x|\, \mathbb{P}_X(dx) < \infty \iff \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx < \infty$

$\iff \int_\Omega |X(\omega)|\, \mathbb{P}(d\omega) < \infty$.

- va discrète : X à valeurs dans $D \subset \mathbb{R}$ avec $|D|$ fini

- $\mathbb{P}_X(\{d\}) = \mu_d \quad \forall d \in D$
- $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus D) = 0$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$\hookrightarrow X(\omega) = \sum_{d \in D} d\, \mathbb{1}_{\{X = d\}}(\omega)$ "fonc° étagée"

$$\int X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{d \in D} d\, \underbrace{\mathbb{P}(X = d)}_{\mu_d}$$

- Supposons $\mathcal{D}$ dénombrable, spps X positif (ie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+$).
$X_n = \mathbb{1}_{\{X \leq n\}} X$ $\quad \mathcal{D}_n = \{d \dots d_n\}$

si X est intégrable, on a $\sum_{n=0}^{\infty} d \mu_d$ (cv) abs $< \infty$.

$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} d \mu_d$, on veut $\mathbb{E}(X) = \sum_{d \in \mathcal{D}} d \mu_d$

$X_n(\omega) \underset{n \to \infty}{\nearrow} X(\omega) \Rightarrow$ (cv) monotone

$\int X_n(\omega)\, \mathbb{P}_X(d\omega) \xrightarrow{n \to \infty} \int X(\omega)\, \mathbb{P}_X(d\omega) \to \sum_{d \in \mathcal{D}} d \mu_d$

(D) soit X var, on déf sous réserve $|x|^k$ soit intégrable par rapport à $\mathbb{P}_X$, le moment d'ordre k de X comme : $m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathbb{P}_X(dx)$

$= \int_{\Omega} X(\omega)^k \mathbb{P}(d\omega)$ $\quad (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

On dira que X admet un k° moment fini si X^k est intégrable.

En particulier, X intégrable $\Leftrightarrow$ premier moment fini

X de carré " $\Leftrightarrow$ 2° " "

(D) soit X var de carré intégrable, on définit la variance de X par

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{P}_X(dx) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$V(X) = \int_{\Omega} X(\omega)^2 \mathbb{P}(d\omega) - \mathbb{E}^2(X)$$

On définit l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, on dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$.

Exo 1) soit X une var positive ps.
On suppose $\mathbb{E}(X) = 0$, mq $X = 0$ ps.

2) si X de carré intégrable, on suppose $V(X) = 0$. Mq $\exists\, c \geq 0$ tq $X = c$ ps.

---

1) $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$

$\{X(\omega) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X(\omega) \leq \frac{1}{n}\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{n})}_{a_n \searrow}$ $\Rightarrow$ on veut mq $a_n = 1$ $\forall n$.

Supposons $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{n}) < 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > \frac{1}{n_0}) > 0$

$X \geq \frac{1}{n_0} \mathbb{1}\{X > \frac{1}{n_0}\} = Y$

et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\frac{1}{n_0} \mathbb{1}_{\{X > \frac{1}{n_0}\}}) = \frac{1}{n_0}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X > \frac{1}{n_0}})$

$= \frac{1}{n_0} \underbrace{\mathbb{P}(X > \frac{1}{n_0})}_{>0}$

$\Rightarrow \underset{0}{\underset{\vee}{\mathbb{E}(Y)}} \leq \mathbb{E}(X)$ $\rightsquigarrow$ Contradiction

2. $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $V(X) = 0$

$V(X) = \mathbb{E}(\underbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}_{Y \geq 0}) = 0$ $\Rightarrow Y = 0$ p.s.

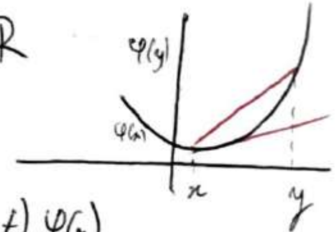
$\Rightarrow |X - \mathbb{E}(X)| = 0$ p.s. $\Rightarrow X = \mathbb{E}(X)$ p.s.

4.3. Propriétés & inégalités classiques

Rappel : Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$\forall\, t \in [0,1]$:

$\varphi(ty + (1-t)x) \leq t\varphi(y) + (1-t)\varphi(x)$.



φ C^2, φ convexe $\Leftrightarrow \varphi'' \geq 0$

Proposition (Inégalité de Jensen)

soit X var & φ une fonction convexe

$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$.

↳ Pour s'en rappeler : $\varphi(x) = |x|$.

$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

(Si X est centrée $0 \leq \mathbb{E}(|X|)$)

Rq : si φ est concave, l'inégalité de Jensen est inversée car φ convexe $\Leftrightarrow -\varphi$ concave.

Exo : Mq si $K > n$, on a
X admet un k° moment $\Rightarrow$ X admet un n° moment.

On veut mq $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}(\underbrace{|X|^n}_{Y}) < \infty$
$n < k$.

$\varphi : x \longrightarrow x^{k/n}$ est convexe car $k > n$.

Jensen $\Rightarrow \mathbb{E}(\varphi(Y)) > \varphi(\mathbb{E}(Y))$

$$\mathbb{E}\left((|X|^n)^{\frac{k}{n}}\right) > \varphi(\mathbb{E}(|X|^n))$$

$$+\infty > \mathbb{E}(|X|^k) \Rightarrow \mathbb{E}(|X|^n) < \infty$$

Inégalité de Markov

Soit X var positive & $a > 0$

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Preuve On veut mq

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x > a\}} \mathbb{P}_X(dx) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

$\rightarrow Y = a \mathbb{1}_{\{X > a\}} \leq X$

$\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{P}(X > a) \leq \mathbb{E}(X)$ (45) (monotonie)

Exo : Contre-ex de Markov si X pas positive
↳ X variable centrée, on suppose qu'$\exists\, a_0 > 0$ tq $\mathbb{P}(X > a_0) > 0$.
On n'a pas alors $\mathbb{P}(X > a_0) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Ppté (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X var de carré intégrable

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Rq On peut réécrire (BT) comme $\forall$ k entier

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}$$

$(a = k\sigma(X))$.

Preuve : $Y = |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 0$

Markov : $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(Y > a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a} \overset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}}{a}$.

Markov : $\mathbb{P}(Y^2 > a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$

$= \mathbb{P}(Y > a)$

5. Indépendance, LGN & TCL

5.1 CV ce de va

D $(X_n)_n$ suite var, on dit que $X_n \xrightarrow{ps} X$ si $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow{n\to\infty} X) = 1$ ou plus précisément, s'$\exists$ un évènement A tq $\mathbb{P}(A) = 1$ & $\forall \omega \in A$

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$$

- On dit que (X_n) CV ds $\mathcal{L}^1$ vers X si (si $X_n, X \in \mathcal{L}^1$)

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$

$$\int |X_n(\omega) - X(\omega)| \, \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0.$$

- (X_n) CV en proba vers X si $\forall \varepsilon > 0$,

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- (X_n) CV en loi (distribution) vers X si $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont bornée,

$X_n \xrightarrow{loi} X$

$$\mathbb{E}(\varphi(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

$$\left(\text{"} \mathbb{P}_{X_n} \longrightarrow \mathbb{P}_X \text{"} \right)$$

$\varphi(X_n)$ intégrable ssi $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)|) < \infty$.
$\le C < \infty$ & monotonie de φ
idem p $\varphi(X)$

Rq CV ce en loi est différente des autres car elle porte sur $\mathbb{P}_{X_n}$ et $\mathbb{P}_X$ et non pas X_n et X.
(Et ne requiert donc pas que X_n & X soient définies sr le m̂ espace de probas)

⚠ Dire $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ n'a pas de sens, il faut préciser le type de CV ce.

Implications ? $(X_n)_n$ suite de va

- $X_n \xrightarrow{p.s} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$; $\not\Leftarrow$
- $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{loi} X$
- $X_n \xrightarrow{loi} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

NB : f cont $\Rightarrow$ f mesurable

Prop : Caractérisation de la CV en loi

soit $(X_n)_n$ var & X var, on note $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \le x)$ et $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ leurs f de Répartition

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff F_n \longrightarrow F$ simplement en tt pt de continuité de F (*).

(*) $\forall x \in \mathbb{R}$ tq F est cont en x, on a $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$.

5.2 Indépendance

(D) · soit X, Y var, X & Y st dites indépendantes, $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{P}(X \in B \text{ et } Y \in C) = \mathbb{P}(X \in B) \cdot \mathbb{P}(Y \in C).$$

· une famille de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite mutuellement indépendante si $\forall M \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_M \in \mathbb{N}^*$ et $\forall$ boréliens $B_1, \dots, B_M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a $\mathbb{P}(X_{n_i} \in B_i \ \forall i = 1 \dots M) = \prod_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_{n_i} \in B_{n_i})$

· $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite indépendante 2 à 2 si (*) est vraie pr $M = 2$.

Prop · soit φ & ψ 2 fs mesurables, bornées ; X, Y 2 var indépendantes alors si

si tt est intégrable pas besoin de bornes (conséq Jensen)

$$\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X)) \, \mathbb{E}(\psi(Y)).$$

· De manière analogue, si (X_n) est mutuellement $\perp\!\!\!\perp$ et si (φ_n) est une suite de fs mesurables & bornées $\Rightarrow \mathbb{E}\left(\prod_{n \in I} \varphi_n(X_n)\right) = \prod_{n \in I} \mathbb{E}(\varphi_n(X_n))$.

$|I| < \infty$

$\forall I \subset \mathbb{N}$

Prop : soit X & Y var de carré intégrable, et indépendantes alors

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Preuve
$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}^2(X+Y) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) \\ &\quad - \mathbb{E}^2(X) - \mathbb{E}^2(Y) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) \end{aligned}$$
où $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Rq: $cov(X,X) = Var(X)$

si X et Y st indépendantes

$\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

$\Rightarrow cov(X,Y) = 0.$

$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$

Voc: si X_n est une suite var mutuellement indépendante & ttes de m̂ loi, on dit que la suite (X_n) est iid (ind identy distr).

5.3. Loi des gds nbrs

soit (X_n) une suite de var, on déf. sa moyenne empiriq ĉ la suite

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Th LFGN Soit (X_n) une suite iid de var, on suppose X_1 est intégrable alors

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$$

⚠ Il est fondamental que les X_i soit indép.

ex $X_1 \sim Bern(\frac{1}{2})$, on choisit

$X_n(\omega) = X_1(\omega)\ \forall \omega$

$$\overline{X_n}(\omega) = \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = X_1(\omega)$$

$\overline{X_n}$ est constant égal (p.s) à X_1. de a fortiori

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} X_1 \neq \mathbb{E}(X_1)$$

Vitesse de cvce de la LFGN

soit (X_n) suite iid & on spps que X_1 est de carré intégrable.

Estimer $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon)$

Estimer $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon)$

1) $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\overline{X}_n)$ car $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right) = \frac{\sum \mathbb{E}(X_k)}{n} = \mathbb{E}(X_1)$

2) $\overline{X}_n$ est-elle de carré intégrable ?

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \frac{\left(\sum_{k,p=1}^n \mathbb{E}(X_k X_p)\right)}{n^2} = \frac{n}{n^2}\mathbb{E}(X_1^2) + \frac{n(n-1)}{n^2}\mathbb{E}(X_1)^2$$

$\mathbb{E}(X_1)^2 < \mathbb{E}(X_1^2)$ (Jensen + $x \to x^2$ convexe)

$\to \mathbb{E}(\overline{X}_n^2) \leq \mathbb{E}(X_1^2)$

$$V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n} V(X_1).$$

BT $\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon)}_{\approx \frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{V(X_1)}{n\,\varepsilon^2}.$

non trivial si $\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5.4. TCL

Th (Centrale limite) soit (X_n) une suite iid de var, on spps que X_1 est de carré intégrable. On note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$ alors

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\,[\overline{X}_n - \mu]}{\sigma} \xrightarrow{\text{loi}} Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- (ou $\sqrt{n}\,[\overline{X}_n - \mu] \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$)

et $\mathrm{Var}(\overline{X}_n - \mu) = \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{V(X_1)}{n}$

$$V\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu)\right) = \frac{n}{\sigma^2}\frac{\mathrm{Var}(X)}{n} = 1.$$

(R) Convergences (va).

- $X_n \xrightarrow{L^1} X$ ssi $\mathbb{E}(|X_n - X|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $X_n \xrightarrow{PS} X$, $\exists A$ mesurable, $\mathbb{P}(A) = 1$ tq $X_n(\omega) \to X(\omega)$ $\forall \omega \in A$.
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall \varepsilon > 0$
- $X_n \xrightarrow{loi} X$, $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) \to \mathbb{E}(\varphi(X))$ $\forall \varphi$ cont bornée

"$\mathbb{P}_{X_n} \to \mathbb{P}_X$" $\Leftrightarrow F_{X_n}(x) \to F(x)$ en tt pt x de cont de F

LFGN

(X_n) (va) iid X_1 intégrable.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_1)$$

TCL

φ bc $\hat{m}$ de borné

$$\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)|}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

(59)

Rq : Soit $(X_n) \xrightarrow{loi} X$, sppo X est à densité :

Mq $\mathbb{P}(X_n \in]a,b]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in]a,b])$.

"$\varphi = \mathbb{1}_{]a,b]}$"

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{]a,b]}(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{]a,b]}(X))$$

Pas vrai par définition car $\mathbb{1}_{]a,b]}$

- X à densité $\Rightarrow F_X$ est cont

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$

$a, b \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) = \mathbb{P}(X_n \leq b) - \mathbb{P}(X_n \leq a)$

$= \mathbb{P}(X_n \in]a,b])$

$\lim F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) = F_X(b) - F_X(a)$

$= \mathbb{P}(X \in]a,b])$

ex (X_n) iid

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\underbrace{\sqrt{n}[\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)]}_{\overset{loi}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)} \in]a, b])$$

$= \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,\sigma^2) \in]a,b])$

C6 Vecteurs aléatoires

6.1 : Espaces mesurés produits

D Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables, on définit la $\boxed{\text{tribu produit}}$ de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 := \sigma\{A \times B, A \in \mathcal{T}_1, B \in \mathcal{T}_2\}$

tribu sur $E_1 \times E_2$

ex $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[$ $a < b \in \mathbb{R}$ $)$

D Etant donnés 2 espaces mesurables $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$; $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$; on définit $\boxed{\text{la mesure produit}}$ $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$.

par $\mu_1 \otimes \mu_2 (A \times B) := \mu_1(A)\, \mu_2(B)$ $\forall A \in \mathcal{T}_1, \forall B \in \mathcal{T}_2$.

q définit entièrement $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ par le corollaire des classes monotones car $\{A \times B, A \in \mathcal{T}_1, B \in \mathcal{T}_2\}$ est un π-système.

Th Fubini - Tonelli

soit $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ 2 espaces mesurés & f mesurable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ positive. Alors

(i) $\forall x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot)$, $x_2 \longrightarrow f(x_1, x_2)$ est mesurable positive sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et la fonction $\varphi_f(x_1) \longrightarrow \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2)$ est mesurable $\in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. positive sur $(E_1, \mathcal{T}_1)$.

(ii) On a l'identité

$$\int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1) \right] \mu_2(dx_2)$$

$$= \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2) \right] \mu_1(dx_1).$$

ex, f est intégrable contre la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$. (f n'est pas positive) ssi $|f|$ l'est, cad si

$$\int_{E_1}\left[\int_{E_2} |f|(x_1,x_2)\,\mu_2(dx_2)\right]\mu_1(dx_1) < \infty.$$

§2. Vecteur aléatoire

(D) Un vecteur aléatoire est une va à valeurs dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, la loi d'un vecteur aléatoire X est la mesure de probas $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}^N$ telle $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

→ Un vecteur aléatoire est dit à densité, s'$\exists$ une f mesurable positive

$$f : \mathbb{R}^N \to [0,\infty[\text{ tq } \int_{\mathbb{R}^N} f_X\, dx = 1$$

et va $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_A(x)\,dx.$$

Notat : pr $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$, on note Π_n le projecteur sur sa $n°$ coordonnée $\Pi(\underline{x}) = x_n$

(D) soit μ une mesure de probas sur $\mathbb{R}^N$, on appelle $n°$ probabilité marginale de μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tq

$$\mu_n(B) = \mu(\Pi_n^{-1}(B)) = \mu(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times B\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R})$$

- soit X un vecteur aléatoire, on appelle $n^{ème}$ loi marginale de X : $\mathbb{P}_X^n$ la $n^{ème}$ proba marginale de $\mathbb{P}_X$ & on a $\mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_{X_n}$ (c'est la loi de la $n^{ème}$ coordonnée de X).

(D) X vecteur aléatoire, on suppose que toutes ses marginales sont intégrables.

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \int_{\mathbb{R}} |x|\,\mathbb{P}_X^n(dx) < \infty \quad \forall n \in \{1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1),\dots,\mathbb{E}(X_n)) \in \mathbb{R}^N$$

6 X vecteur aléatoire, on suppose $\forall n$, X_n est de carré intégrable, on définit sa matrice de covariance comme

$$\mathrm{Cov}_{m,n}(X) = \mathbb{E}(X_m X_n) - \mathbb{E}(X_m)\,\mathbb{E}(X_n)$$

voir Vecteur Gaussien (clément_cignoux)