2/ u, v <u>st colinéaires</u> si

$\forall y \in E$, $\det(u,v,y) = 0$ ssi

$\forall y \in E$, $\langle u \wedge v, y \rangle = 0$ ssi $u \wedge v = 0$

3. $u \wedge v \perp u$ ssi $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$

ssi $\det(u,v,u) = 0$

or $\det(u,v,u) = 0 \quad \forall u, v \in E$

dc $u \wedge v \perp u. \quad \forall u, v \in E$

de m̂ $u \wedge v \perp v \quad \forall u, v \in E$

4. $\det(u,v,y)$ ← suppose qu'on a choisit une base de E.

$$= \det\left([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [y]_{\mathcal{B}}\right)$$

cette base $\mathcal{B}$ donne dc une dichotomie des bases de E.

$\mathbb{B}^+(E) := \{ \mathcal{B}' \text{ base de } E \mid \det(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}) = 0 \}$ def

← bases directes

$\mathbb{B}^-(E) := \{ \_\_\_\_\_\_ < 0 \}$

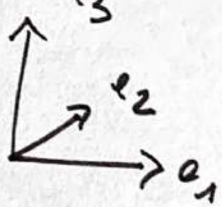
← bases indirectes

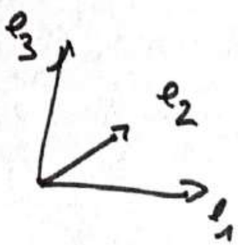
@ $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ base directe

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ base indirecte

$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c)$





(e_1, e_3, e_2) base indirecte.

4. soit $\mathcal{B}$ base de réf de E. ($\mathcal{B}$ base directe)

P : $\text{Pass}_{\mathcal{B} \to (u,v,u \wedge v)} = \left([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [u \wedge v]_{\mathcal{B}}\right)$

$\det P = \det(u, v, u \wedge v)$

$= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$

car u, v ne st pas colinéaires & dc $u \wedge v \neq 0$.

3) $\ker(id_E - u)$ & $\mathrm{Im}(id_E - u)$

Mq st orthogonx & supplémentés

soit $y \in \ker(id_E - u)$

$z \in \mathrm{Im}(id_E - u)$

- $y \in \ker(Id_E - u) \Leftrightarrow u(y) = y$

$z \in \mathrm{Im}(Id_E - u) \Leftrightarrow \exists x \in E \mid$

$z = x - u(x)$.

$\langle y, x \rangle = \langle y, x - u(x) \rangle$

$= \langle y, x \rangle - \langle y, u(x) \rangle$

$u \in O(E) \rightarrow$

$= \langle y, x \rangle - \langle u \circ u^{-1}(y), u(x) \rangle$

$= \langle y, x \rangle - \langle u^{-1}(y), x \rangle$

or $u(y) = y \Leftrightarrow u^{-1}(y) = y$ dc $\langle u^{-1} y, x \rangle = \langle y, x \rangle$

d'où

$\langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$

Dc $\mathrm{Im}(id_E - u) \perp \ker(id_E - u)$

Mq $\mathrm{Im}(id_E - u)$ & $\ker(id_E - u)$ st supplémentaires.

D'après 3, $\ker(id_E - u) \subset \mathrm{Im}(id_E - u)^\perp$.

Mq inclusion récipq.

soit $x \in \mathrm{Im}(id - u)^\perp$ ie $\forall z \in E$,

$\langle x \mid z - u(z) \rangle = 0$.

ie $\langle x, z \rangle - \langle x, u(z) \rangle = 0$

ie $\langle x, z \rangle - \langle u^{-1}(x), z \rangle = 0$

ie $\langle x - u^{-1}(x), z \rangle = 0 \quad \forall z \in E$.

FB md cela signifie que

$\Leftrightarrow x - u^{-1}(x)$ est orthogonal à E tt entier,

étant euclidien ep md

$\Rightarrow x - u^{-1}(x) = 0$

→ vecteur nul

↳ orthogonal à tt élt

ie $u^{-1}(x) = x \iff x = u(x)$

$\iff x - u(x) = 0$

ie $x \in \ker(1-u)$.

dc $\operatorname{Im}(1-u)^\perp \subseteq \ker(1-u)$

d'où finalement $\ker(1-u) = \operatorname{Im}(1-u)^\perp$

on sait que $E = \operatorname{Im}(1-u) \oplus \operatorname{Im}(1-u)^\perp$

$$\boxed{E = \operatorname{Im}(1-u) \oplus \ker(1-u)}$$

4. Mq $(id_E - u)^2 = 0$ ssi $u = id_E$.

$\Leftarrow$ si $u = id_E$ alors

$(1-u) = 0$ et $(1-u)^2 = 0$ ✓.

$\Rightarrow$ on suppose $(1-u)^2 = 0$.

$(1-u)^2 = (1-u)(1-u) = 1 - 2u + u^2$

$(1-u)^2(x) = x - 2u(x) + u^2(x)$

soit $x \in E$, $\exists y \in \ker(1-u)$, $\exists y' \in \operatorname{Im}(1-u)$

tq $x = y + y' = y + z - u(z)$ pr arbitraire $z \in E$

Calculons $u(x) = u(z) + u(z - u(z))$

$= u(y) + u(z) - u^2(z)$

$u(y) = y$ par hypothèse

$= y + u(z) - u^2(z)$.

$\forall z \in E,\ z - 2u(z) + u^2(z) = 0$.

$\Rightarrow u(z) - u^2(z) = z - u(z)$

dc $u(x) = y + z - u(z)$.

$= y + y' = x$

dc $u(x) = x$ ie $x \in \ker(1-u)$

$\forall x \in E$ ie $u = \mathbb{1}d$.

5) Mq $u^2 = id_E$ ssi u est sym. orthogonale

$\Leftarrow$) Supposons u est sym. orthog.

$\exists v, w$, $w \perp v = E$ tq $\underline{id_E = p_v + p_w}$

v et w respect, $u = p_v - p_w$

⚠ endomorph pas commutatif

$u^2 = (p_v - p_w)\cdot(p_v - p_w)$

$= p_v^2 - \underbrace{p_v p_w}_{=0} - \underbrace{p_w p_v}_{=0} + p_w^2$

$= p_v^2 + p_w^2 = p_v + p_w = id_E.$ (car $p_v^2 = p_v$)

$\Rightarrow$) $u^2 = id_E$

soit λ vp de u, suppo qu'il y

ait $\lambda = \pm 1$,

$u = -id$

${}^t MM = (-1)(-1) = Id$

$u(x) = -x$

$u^2(x) = u(-x)$

$= -(-x) = Id$.

(iii)

Ex6 : E ee, $u \in \mathcal{O}(E)$ orthogonale

1) soit $F \subseteq E \mid u(F) \subseteq F$

soit $x \in F^{\perp}$, on vt que $u(x)$ soit orthogonal à y, $\forall y \in E$.

soit $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u \cdot u^{-1}(y) \rangle$

$= \langle x, u^{-1}(y) \rangle$

E stable p $u \iff u(F) = F$

$\iff F = u^{-1}(F)$

Donc F est stable par u^{-1}.

Comme $u^{-1}(y) \in F$, on a

$\langle x, u^{-1}(y) \rangle = 0$.

cl $x \in F^{\perp}$ et $u(F^{\perp}) \subseteq F^{\perp}$.

2) soit λ vp réelle de u & soit $x \neq 0$ un vect^r propre de u $\langle \lambda \rangle$ à

$\langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle$

$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle$

$\lambda^2 \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$

E ee & $x \neq 0$ dc $\lambda^2 = 1$

$\iff \lambda = \pm 1$.

Ex 7. · $\mathcal{O}(2)$: groupe orthogonal des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$,
$\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$; $R^\phi = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$
$\phi \in \mathbb{R}$, $f_v \in \mathcal{O}(2)$, la réflexion ou la symétrie dont l'axe est la droite vectorielle $v^\perp$, perpendicul^{re} au vect^r non nul $v \in \mathbb{R}^2$. La réflexion f_v ne dépd que de classe de proportionnalité de v.

1. soit $u \in \mathcal{O}(2)$ & $\det u = -1$.

Mq u est une réflexion.

$u \in \mathcal{O}(2)$; ${}^t u . u = id$; $\det({}^t u . u) = 1$

$\Rightarrow (\det(u))^2 = 1$, $\underline{\det u = -1} \Rightarrow$ réflexion.

$\det u \in \{\pm 1\}$

1.bis. $\det u = 1 \Rightarrow u$ est une rotaθ.

Écrire la mat de u,

$M = \mathrm{Mat}_{e_1, e_2}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc = 1$

${}^t M M = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Id \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

$(a-d)^2 + (b+c)^2 =$
$= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc - ad) = 2 - 2 = 0$

dc $a = d$ et $b = -c$.

$ad - bc = 1 \Rightarrow a^2 + c^2 = 1$.

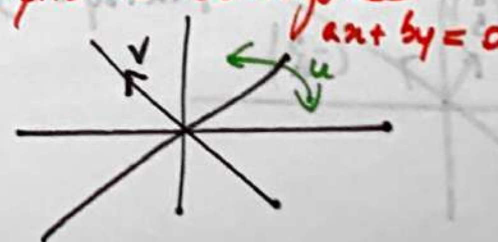
$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid a = \cos\theta$ & $c = \sin\theta$.

$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ & u est la rotaθ d'angle θ.

$\underline{cl}$ $u \in \mathcal{O}(2)$ → $\det u = 1 \Rightarrow u$ est rotaθ
→ $\det u = -1 \Rightarrow u$ est réflexion.

2. Sachant que u est la symétrie orthogonale p/r à la droite d'équaθ $ax + by = 0$, représenter u ss la forme f_v pr un vecteur v convenable.

f_v : la symétrie orthogonale dt l'axe est la droite $v^\perp$.



L'axe de u est la droite $\{ax+by=0\}$
Trouver un vecteur orthogonal à la droite $\{ax+by=0\}$.

$v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ convient. $(x_0,y_0)\in\{ax+by=0\}$
$\Leftrightarrow ax_0+by_0=0$.

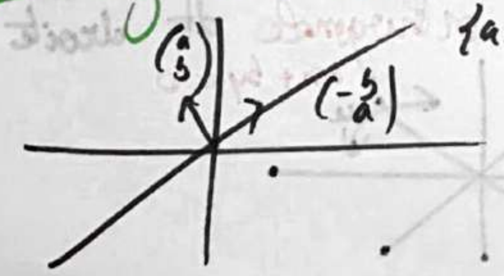
soit $(x_0,y_0)\in\{ax+by=0\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=ax_0+by_0=0$$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
& donc est orthog. à la droite $\{ax+by=0\}$.
Dc si $v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $v^\perp=\{ax+by=0\}$

$u=f_{(a,b)}$

3. Écrire la mat de la réflexion u ds $\mathcal{B}_c$.
⚠ chgt de base.



Ds la base $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$.

$$D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P=P_{\mathcal{B}_c\to\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

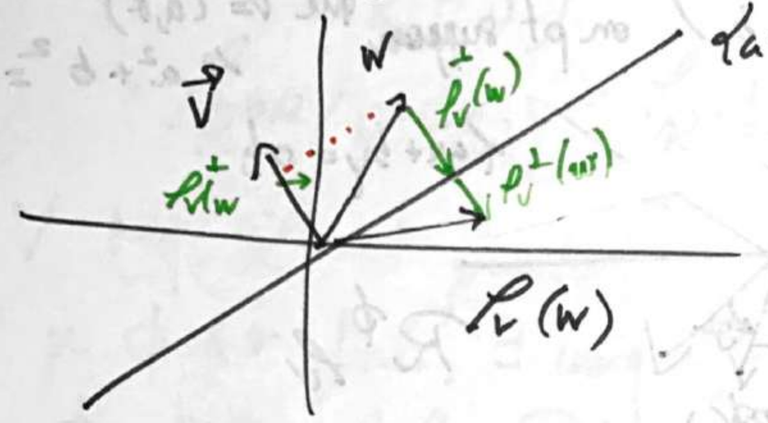
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}') \arrow[r, "D"] \arrow[d, "P"] & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}') \arrow[d, "P"] \\
(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "M"] & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c)
\end{tikzcd}$$

$M=PD.P^{-1}$, $M=\mathrm{Mat}_{e_1,e_2}(u)$

$$M=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

4. Mq $s_v(w) = w - 2\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}\ \forall w \in \mathbb{R}^2.$

La project° orthogonale sur v est définit



Par $p_v^\perp(w) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}\, v.$

dc $s_v(w) = w - 2\, p_v^\perp(w)$

$= w - 2\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}\, v$

5. Mq $s_v R^\phi s_v = s_v R^\phi s_v^{-1}$ est une rotat° & déterm. son angle.

$s_v^2 = id$ (P ex 6. 5) dc $s_v^{-1} = s_v$

$s_v R^\phi s_v^{-1}$ est une $\boxed{\text{rotat°}}$ si $\det(s_v R^\phi s_v^{-1}) = 1$

Mais $\det(s_v R^\phi s_v^{-1}) = \cancel{\det(s_v)}.\det(R^\phi).\cancel{\det(s_v^{-1})}$

$= \det(R^\phi) = 1$

Donc $s_v R^\phi s_v^{-1}$ est une rotat°

$\mathrm{Tr}(R^\phi) = 2\cos\phi.$

$\mathrm{Tr}(s_v R^\phi s_v^{-1}) = \mathrm{Tr}(s_v^{-1} s_v R^\phi) = \mathrm{Tr}(R^\phi)$

$= 2\cos\phi.$

Dc $s_v R^\phi s_v^{-1}$ est aussi une rotat° d'angle ϕ.

6. Mq $g\,\ell_v\,g^{-1}$, $R^\phi\,\ell_v$, $\ell_v\,R^\phi$ st des réflexions $\forall g \in O(2)$, $\phi \in \mathbb{R}$.
Représenter chacune des 3 $\boxed{\text{réflexions}}$ ss la forme ℓ_w pr un vecteur w convenable.

$\det = -1$

- $\det(g\,\ell_v\,g^{-1}) = \det(g)\det(\ell_v)\det(g^{-1})$
$= \det(\ell_v) = -1.$

on cherche w tq $g\,\ell_v\,g^{-1}(w) = w$

$w = g(v)$

$g\,\ell_v\,g^{-1}(g(v)) = g\,\ell(v) = g(-v) = -g(v)$

dc $w = g(v)$ convient & $g\,\ell_v\,g^{-1} = \ell_{g(v)}$

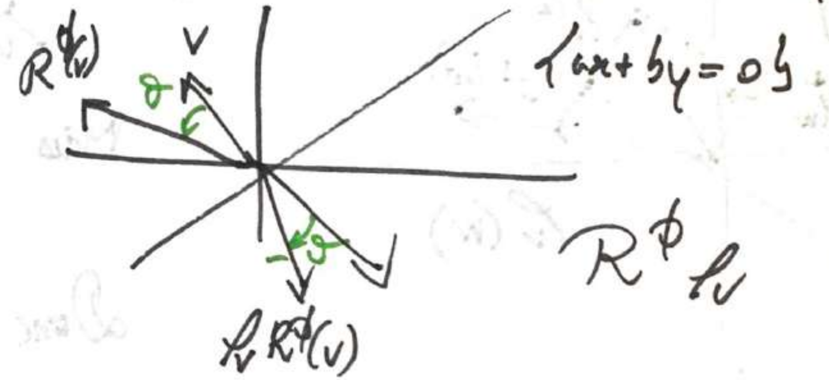
- $\det(R^\phi \ell_v) = \det(R^\phi)\det(\ell_v) = -1$

dc $R^\phi \ell_v$ est une réflexion.

Trouver un vect. propre de $R^\phi \ell_v$ pr $\textcircled{vp}$ -1.

$\ell_v R^\phi + id \ldots$ $\quad R^\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

$\ell_v = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$ on pt supposer que $v = (a,b)$ $\Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$.



$\ell_v R^\phi(v) = R^{-\phi}\ell_v(v) = R^{-\phi}(-v) = -R^{-\phi}(v)$

$R^\phi \ell_v(R^{\phi/2}(v)) = R^\phi(-R^{-\phi/2}(v))$
$= -R^{\phi-\phi/2}(v) = -R^{\phi/2}(v)$

dc $R^{\phi/2}$ est un vect. propre de $R^\phi \ell_v$ pr la vp -1.

dc $R^\phi \ell_v = \ell_{R^{\phi/2}(v)}$

$s_v R^\phi = R^\phi \underbrace{\left((R^\phi)^{-1} s_v R^\phi\right)}$ de $g = (R^\phi)^{-1}$

$g\, s_v\, g^{-1} = s_{g(v)}$

$= R^\phi \left(s_{R^{-\phi}(v)} \right)$

$= s_{R^{\phi/2}(R^{-\phi}(v))} = s_{R^{-\phi/2}(v)}$

7. Mq R^ϕ est produit de 2 réflexions :
pr ϕ & v fixés, $\exists$ uniq réflexion s_w tq $R^\phi = s_v s_w$. Déterminer un vecteur w définissant cette réflexion s_w.

Une rotat° est produit de 2 réflexions :
ϕ & v fixés.

$s_v R^\phi = s_{R^{-\phi/2}(v)}$ p/ 6.

$s_v^2 = id$

$R^\phi = s_v s_{R^{-\phi/2}(v)} = s_v s_w$

de $w = R^{-\phi/2}(v)$.

5) Mq $u^2 = id_E$ ssi u est sym. orthogonale

$\Leftarrow$) Supposons u est sym. orthog.

$\exists v, w$, $w \perp v = E$ tq $\underline{id_E = p_v + p_w}$

v et w respect, $u = p_v - p_w$

⚠ endomorph pas commutatif

$u^2 = (p_v - p_w) \cdot (p_v - p_w)$

$= p_v^2 - \underbrace{p_v p_w}_{=0} - \underbrace{p_w p_v}_{=0} + p_w^2$

$= p_v^2 + p_w^2 = p_v + p_w = id_E$. (car $p_v^2 = p_v$)

$\Rightarrow$) $u^2 = id_E$

soit λ vp de u, supps qu'il y ait $\lambda = \pm 1$,

$u = -id$

${}^tMM = (-1)(-1) = Id$

$u(x) = -x$

$u^2(x) = u(-x)$

$= -(-x) = Id$.

supp $u^2 = 1$, $u \in O_2$

$\Rightarrow u$ est une symétrie orthog^{le}

$u|_{V = \ker(1-u)} = id_V$

$u|_{W = \operatorname{Im}(1-u)} = -id$

cp $u = -id$, $1 - u = 2\,id$

$V = \ker(2\,Id) = \ker(id) = \{0\}$

$W = \operatorname{Im}(2\,Id) = \operatorname{Im}(Id) = E$

$\Rightarrow E = \{0\} \oplus E$

ĉ V et W st orthogonx.

$\Rightarrow u$ symétrie orthogonale.

(iii)

Ex 7 $u \in \mathcal{O}(2)$, $\mathcal{B}c = (e_1, e_2)$

$R^{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, s_v : symétrie d'axe la droite vectorielle $v^\perp$.

1) $u \in O(2) \mid \det u = -1$. Mq u est réflexion.

soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on sait ${}^tAA = Id$ car $u \in \mathcal{O}(2)$.

~~Mq $u^2 = Id$~~ ; $\cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$P_\lambda(u) = \det(u - \lambda Id)$

$= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{trace} + \det$
$= \lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc)$ $=-1$

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$
$= (a+d)^2 + 4 > 0$

$P_\lambda(u) = 0 \iff$ $\Rightarrow$ 2 racines réelles.

$\lambda = \pm 1$

E_λ : ; $E = E_\lambda \oplus E_{-\lambda}$

$\rightarrow u|_{E_1} = x \circ E_1 \Rightarrow u(x) = 1x = x$.

$\rightarrow u|_{E_1} = Id$; $x \in E_{-1}$, $u(x) = -x$

$u|_{E_{-1}} = -Id$

λ_1, λ_2 2 vp de u.

$E(\lambda_1), E(\lambda_2)$ les espaces propres correspdts

$x_1 \in E(\lambda_1)$ (x_1, x_2)
$x_2 \in E(\lambda_2)$

$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle u(x_1), u(x_2) \rangle$
$= \langle \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 \rangle$
$= \lambda_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = -\langle x_1, x_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0$

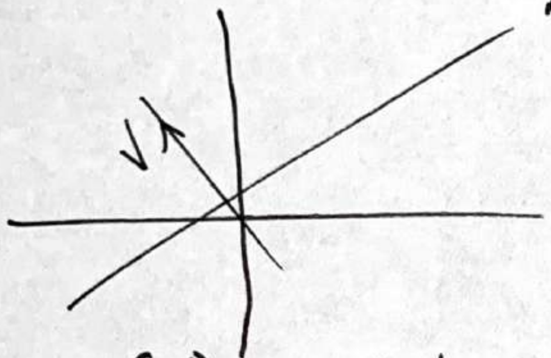
D+, $\mathbb{R}^2 = E_1 \perp E_2$

dc symétrie orthogonale.

2) Sachant u ~~est~~ la symétrie orthogonale ~~p.~~ à $\mathcal{D} = \{ax + by = 0\}$; (a,b) vct$^{\text{r}}$ normal à $\mathcal{D}$

Représenter u sa forme ρ_v.

$\mathcal{D} = \{ax+by=0\}$



ρ_v avec $v = (a,b)$ convient pr u.

3) écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$ de la réflex$^{\circ}$ u ds $\mathcal{B}_c$

Dans $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \begin{array}{cc} \in \mathcal{D}^\perp & \in \mathcal{D} \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soit P mat de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$.

$P = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. , $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c} = P \, \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}} \, P^{-1}$

~~$\cdot w \in \mathbb{R}^2$, $w = p_{\mathcal{D}}(x) + p_{\mathcal{D}^\perp}(x)$~~

$$M = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

4)

$x \in \mathbb{R}^2$, $x = p_{\mathcal{D}}(x) + p_{\mathcal{D}^\perp}(x)$; $u = \rho_v$

$u(x) = p_{\mathcal{D}}(x) - p_{\mathcal{D}^\perp}(x)$ ⚠

$\rho_v(x) = x - 2 p_{\mathcal{D}^\perp}(x)$

or $p_{\mathcal{D}^\perp}(x) = \alpha v$, $v = (a,b)$

$v^\perp = (-b, a)$

posons $x = \alpha v + b v'$

$v \perp v^\perp$

calculons

$\langle x, v \rangle = \langle \alpha v + b v', v \rangle$

$= \alpha \langle v, v \rangle + b \langle v', v \rangle$

$= \alpha \langle v, v \rangle$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle}}$

Ex 13 (endomorphisme adjoint)

1. Soit E (ee) $(E, <\cdot|\cdot>)$ & $u \in \mathcal{L}(E)$

On cherche $v \in \mathcal{L}(E)$ tq

$\forall x, y \in E$, $<u(x), y> = <x, v(y)>$ $(*)$

Soit $\mathcal{B}$ une base E.

- Supposons v existe soit $N = \mathrm{Mat}_\beta(v)$

soit $M = \mathrm{Mat}_\beta(u)$ & enfin $A = \mathrm{Mat}_\beta(<\cdot|\cdot>)$

si X, Y désignant les vect^{rs} colonnes de x, y dans $\mathcal{B}$.

$(*)$ se traduit par :

$${}^t(MX)AY = {}^tXA(NY), \quad \forall X, Y$$

$${}^tX\,{}^tMAY = {}^tXANY, \quad \forall X, Y.$$

- $\Leftrightarrow \quad {}^tMA = AN$

A est inversible car $<\cdot|\cdot>$ est forme non-dégénérée $\Rightarrow$ $\boxed{N = A^{-1}\,{}^tMA}$

Récipqt supposons v est un endom(E) dont la mat dans β est

$$N = A^{-1}\,{}^tM A.$$

Calculons $<x, v(y)>$ matriciellmt :

$$<x, v(y)> = {}^tXANY$$
$$= {}^tXA(A^{-1}\,{}^tMAY)$$
$$= {}^tX\,{}^tMAY$$
$$= {}^t(MX)AY$$
$$= <u(x), y>.$$

Ceci prouve l'existence de v. (unicité montrée).

$$E \xrightarrow{u} E, \quad \text{si } \varphi : <\cdot,\cdot>$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{\varphi}", "\sim"'] \arrow[rrr, bend right, "u^*"'] & E^* \arrow[r, "{}^tu"] & E^* \arrow[r, "\tilde{\varphi}^{-1}"] & E \end{tikzcd}$$

induit par φ

3) Mq $u^{**} = u$.

$\forall x, y \in E$,

$\langle u(x), y \rangle \stackrel{def}{=} \langle x, u^*(y) \rangle$

antisymétrie $= \langle u^*(y), x \rangle$

$= \langle y, (u^*)^*(x) \rangle$

$= \langle u^{**}(x), y \rangle \quad \forall y \in E$

$\Rightarrow \langle u(x) - u^{**}(x), y \rangle = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ non dégénéré.

(le seul vect^{r} orthog^{l} à tt vecteur est vct^{r} nul).

$\Rightarrow u(x) - u^{**}(x) = 0 \quad \forall x \in E$.

ie $u^{**}(x) = u(x)$. $\Rightarrow u^{**} = u$.

4.) soit $F \subset E$ stable par u.

Mq $F^\perp$ stable par u^*.

soit $x \in F^\perp$ & $y \in F$

$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u^{**}(y) \rangle$

$= \langle x, u(y) \rangle = 0$

dc $u^*(x) \in F^\perp$,

ie $u^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

5) Mq $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ &

$\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$

---

soit $x \in E$, $u^*(x) = 0$, soit $y \in E$,

$\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$

dc $x \perp \operatorname{Im} u$

ie $\ker u^* \subseteq (\operatorname{Im} u)^\perp$

soit $y \in (\operatorname{Im} u)^\perp$,

$\forall x \in E$, $\langle y, u(x) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle u^*(y), x \rangle = 0$

dc $u^*(y) \perp E$

$\Rightarrow u^*(y) = 0$

- ie $y \in \ker u^*$

$\Longrightarrow \ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$

Mq $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$

$\ker u = \ker u^{**} = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$

- $(\ker u)^\perp = (\operatorname{Im} u^*)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} u^*$.

$\Longrightarrow \boxed{(\ker u)^\perp = \operatorname{Im} u^*}$

6. Mq $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$ inversible & $u^{-1} = u^*$.

si $u \in \mathcal{O}(E)$,

soit ds l'espace matricielle,

$\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ isométrie

$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, u^*u(y) \rangle$

$\Longrightarrow \langle x, u^*u(y) - y \rangle = 0$

$\Longrightarrow u^*u = Id$.

~~$\langle u(x), u(y) \rangle$~~

$\Longrightarrow u^*u = uu^* = Id$

$\Longleftrightarrow u^* = u^{-1}$

Supposons que u inversible & $u^* = u^{-1}$!

$\forall x, y \in E$,

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^* u(x), y \rangle$$
$$= \langle u^{-1} u(x), y \rangle$$
$$= \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$$

dc u isométrie dc $u \in O(E)$.

7) Mq u est projecθ linéaire $\Leftrightarrow u^2 = u$.

$\Leftarrow$

- $\exists V \subset E$ & $W \subset E$ tq, $V \oplus W = E$

$$u|_V = \mathbb{1}_V \quad \& \quad u|_W = 0.$$
$$\underbrace{u^2|_V = \mathbb{1}_V \quad \& \quad u^2|_W = 0.}$$

$$\Rightarrow u^2 = u.$$

$\Rightarrow$) soit $x \in E$,

considérons $x - u(x)$.

alors $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0$

car $u = u^2$.

d'où $x - u(x) \in \operatorname{Ker} u$.

Ainsi $x \in \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker} u$

soit $x \in E$ tq $x \in (\operatorname{Im} u) \cap \operatorname{Ker} u$.

i.e $u(x) = 0$ & $\exists z \in E$,

tq $x = u(z)$.

dc $u(x) = u(u(z)) = u^2(z)$

On a donc $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

$u|_{\operatorname{Ker} u} = 0$ & $u|_{\operatorname{Im} u}$

$$u(u(y)) = u^2(y) = u(y)$$

dc sur $\operatorname{Im} u$, u est l'identité.

40

$$s_v R^\phi = R^\phi \underbrace{\left((R^\phi)^{-1} s_v R^\phi\right)}_{}$$ de $g = (R^\phi)^{-1}$

$g s_v g^{-1} = s_{g(v)}$

$$= R^\phi \left(s_{R^{-\phi}(v)}\right)$$

$$= s_{R^{\phi/2}(R^{-\phi}(v))} = s_{R^{-\phi/2}(v)}$$

7. Mq R^ϕ est produit de 2 réflexions : pr ϕ & v fixés, $\exists$ uniq réflexion s_w tq $R^\phi = s_v s_w$. Déterminer un vecteur w définissant cette réflexion s_w.

Une rotat° est produit de 2 réflexions : ϕ & v fixés.

$s_v R^\phi = s_{R^{-\phi/2}(v)}$ p/ 6. $s_v^2 = id$

$$R^\phi = s_v s_{R^{-\phi/2}(v)} = s_v s_w$$

ds $w = R^{-\phi/2}(v)$.

Ex 10 : Pptés de base du produit vectoriel

soit E (ee) orienté dim 3 ; produit vectoriel

$\forall y \in E,\ [u,v,y] = \langle x, y\rangle = \langle u\wedge v, y\rangle$

le vecteur x est noté par $u\wedge v$.

1. Mq L'appli $E\times E \to E$, $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire & antisymétriq. ✓.

2. Mq $\forall u,v\in E$, $u\wedge v = 0 \iff u,v$ colinéaires. (ie $\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $u=\lambda v$ ou $v=\lambda u$)

3. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v\perp u$ & $u\wedge v\perp v$.

4. Si u,v non colinéaires alors $(u,v,u\wedge v)\in\mathcal{B}^+(E)$ (bases directes de E). Si de + (u,v) est une famille orné (ie $\|u\|=\|v\|=1$ & $u\perp v$) alors $(u,v,u\wedge v)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$.

E orienté $\mathcal{B}_c$ base d'orientat°.

$\mathcal{B}$ est directe si $\det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c})>0$.

$\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$. $\boxed{\mathcal{B} \text{ est directe ssi } [v_1,v_2,v_3]>0.}$

A-32

5. Si $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$, alors $\forall i,j\in\{1,2,3\}$,

$$e_i\wedge e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ \varepsilon_{ijk}\, e_k & \text{si } i\neq j.\end{cases}$$

$\mathcal{B}^+_{om}(E)$ base orné directe

$\{e_1,e_2,e_3\}$; $\|e_1\|=\|e_2\|=\|e_3\|=1$.

et $e_1\perp e_2$, $e_2\perp e_3$, $e_3\perp e_1$.

$e_i\wedge e_j = 0$ si $i=j$ (2.)

si $i=j$: $e_i\wedge e_j = \pm e_k$

car $e_i\wedge e_j\perp e_i$ et $e_i\wedge e_j\perp e_k$

$(e_i,e_j,e_i\wedge e_j)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$.

$(e_1,e_2,e_1\wedge e_2)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$ $i=1$, $j=2$

et $(e_1,e_2,e_3)\in\mathcal{B}^+_{om}(E)$ aussi

dc $e_1\wedge e_2 = e_3$.

$i=1,\ j=3,\ (e_1, e_3, e_1 \wedge e_3) \in \mathbb{B}^+_{om}(E)$

dc $e_1 \wedge e_3 = -e_2$. $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\varepsilon_{132} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \varepsilon = -1$

$(e_2, e_3, e_2 \wedge e_3) \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$ dc $e_2 \wedge e_3 = e_1$

$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$ dc $e_2 \wedge e_3 = e_1$

$\varepsilon_{231} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}^+_{om}(E)$,

$u = \sum_i u_i e_i, \quad v = \sum_i v_i e_i$ alors

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

$$u \wedge v = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3)$$

$$= u_1 v_2 \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{e_3} + u_1 v_3 \underbrace{e_1 \wedge e_3}_{-e_2} + u_2 v_1 \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{-e_3}$$

$\varepsilon_{213} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$

$$+ u_2 v_3 \underbrace{e_2 \wedge e_3}_{e_1} + u_3 v_1 \underbrace{e_3 \wedge e_1}_{e_2} + u_3 v_2 \underbrace{e_3 \wedge e_2}_{-e_1}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3.$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

7. $\forall (x,y) \in (E \setminus \{0\})^2, \quad \beta = \widehat{(x,y)}$

$\|x \wedge y\| = \|x\| . \|y\| . \sin\beta$, où

↳ ex. 9.

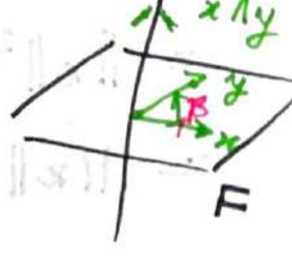
$[x, Ax, v] = \|v\| \ \|p_F(x)\|^2 \sin\theta$ où $A = R_v^\theta$

Mq la ff pr $\|x\| = \|y\| = 1$.

v un vecteur non nul ds la droite orthogonale au plan $F = \mathrm{Vect}(x, y)$

alors $y = R_v^\beta x$.

(on pt choisir $v = x \wedge y$)



$$\|x\wedge y\|^2 = [x, y, x\wedge y]$$

$$\|x\wedge y\|^2 = \|x\wedge y\| . \cancel{\|x\|^2} . \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \|x\wedge y\| = \sin\beta .$$

Em général:

$$\|x\wedge y\| = \left\| \|x\|\,\|y\| \frac{x}{\|x\|}\wedge\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

$$= \|x\|\,\|y\| \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\wedge\frac{y}{\|y\|_1}\right\|$$

$$= \|x\|\,\|y\|\,\sin\beta$$

8. $\forall (x,y) \in E^2$,

idité de Lagrange

$$\|x\wedge y\|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$$

$$\|x\wedge y\|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 =$$

$$= \|x\|^2\|y\|^2\sin^2\beta + \|x\|^2\|y\|^2\cos^2\beta$$

$$= \|x\|^2\|y\|^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

$$= \|x\|^2\|y\|^2$$

9. $\forall (x,y,z) \in E^3$, ff double prod. vectori'

$$x\wedge(y\wedge z) = \langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z$$

(dev ds $\mathcal{B}^+_{om}(E)$).

$$x\wedge(y\wedge z) = \langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z .$$

$y = \lambda z$.

si y & z st colinéaires alors $y\wedge z = 0$

& $\langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z =$

$$= \lambda\langle x,z\rangle z - \lambda\langle x,z\rangle z = 0$$

• si $x \in Vect(y,z)^\perp$, $(y\wedge z) \in Vect(y,z)^\perp$,

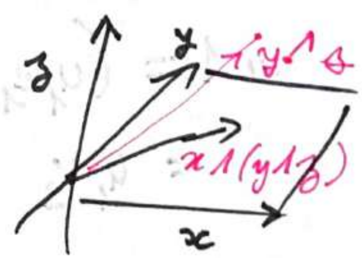
dc x & $y\wedge z$ st colinéaires.

Dc $x\wedge(y\wedge z) = 0$ & de m̂

$(x,z) = 0$ & $\langle x,y\rangle = 0$.

$x\wedge(y\wedge z)$

$y\wedge z \in Vect(y,z)^\perp$



$x\wedge(y\wedge z) \in Vect(x, y\wedge z)^\perp \in Vect(y,z)$

$\in Vect(y,z)^\perp$

$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $x \wedge (y \wedge z) = \alpha y + \beta z$

$\langle x \wedge (y \wedge z), x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

$\overset{\text{def}}{=} [x, y \wedge z, x] = 0$

Dc $\alpha \langle x, y \rangle = -\beta \langle x, z \rangle$

- dc $x \wedge (y \wedge z) = \alpha y - \alpha \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle x, z \rangle} z$

$x \wedge (y \wedge z) = \left(\dfrac{\alpha}{\langle x, z \rangle}\right)(\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z)$

$\dfrac{\alpha}{\langle x, z \rangle}$ ne dépd pas du vecteur x, y, z choisit.

Dc on pt évaluer pr x, y orné : $x \wedge (y \wedge x) = y$

- dc $\dfrac{\alpha}{\langle x, z \rangle} = 1$.

ie le prod. vect n'est pas une loi associative

$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$

$(x \wedge y) \wedge z = -z \wedge (x \wedge y)$

$= -\langle z, y \rangle x + \langle z, x \rangle y$

$\neq x \wedge (y \wedge z)$

A 35

10. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\boxed{\text{idté de Jacobi}}$

$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$

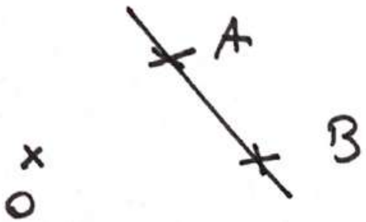
$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) =$

$= \cancel{\langle x, z \rangle y} - \cancel{\langle x, y \rangle z} + \cancel{\langle y, x \rangle z} - \cancel{\langle y, z \rangle x}$

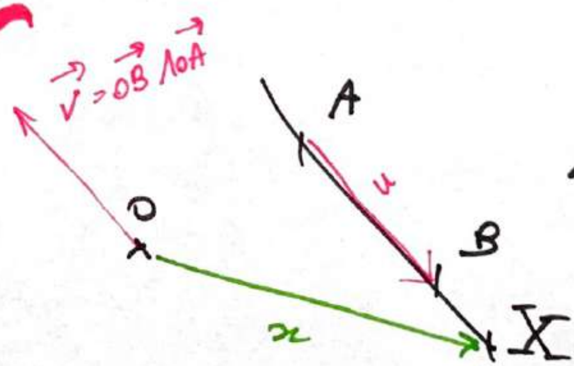
$+ \cancel{\langle z, y \rangle x} - \cancel{\langle z, x \rangle y} = 0$,

Ex 12 Équat° d'une droite affine via le produit vectoriel

1. Mq pr 2 pts A, B de E, la droite (AB) est l'ensemble des soluts de $x \in E$ de $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ où $\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} \end{cases}$



$AB = \{x \in E, u \wedge x = v\}$



$x = \overrightarrow{OX}$

$x \in AB$ ssi $\exists \lambda$, $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Si $\exists \lambda$ tq $\vec{AO} + x = \lambda \vec{AB}$

$\Leftrightarrow x = \lambda \vec{AB} - \vec{AO}$.

$$\vec{AB} \wedge x = \vec{AB} \wedge (\lambda \vec{AB} - \vec{AO})$$

$$= \lambda \underbrace{\vec{AB} \wedge \vec{AB}}_{=0} - \vec{AB} \wedge \vec{AO}$$

$$= -(\vec{AO} + \vec{OB}) \wedge \vec{AO}$$

$$= -\vec{OB} \wedge \vec{AO} = \vec{OB} \wedge \vec{OA} = v$$

Ex14 Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ ds base or née.

$$\chi_A(t)=\begin{vmatrix}1-t&2\\2&5-t\end{vmatrix}=(5-t)(1-t)-4$$
$$=t^2-6t+1.$$

- $\Delta=36-4=32$, $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}$.

Les 2 valeurs propres st :

$t_1=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2}$, $t_2=3+2\sqrt{2}$.

$E_{t_1}=\ker\left(A-(3-2\sqrt{2})\,Id\right)$

- $\begin{pmatrix}-2+2\sqrt{2}&2\\2&2+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 2 vp distinctes, $\dim E_{t_1}=1$

$\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}\in\ker A$ ssi $\begin{cases}(-2+2\sqrt{2})x+2y=0\\2x+(2+2\sqrt{2})y=0.\end{cases}$

(i) $x=(\sqrt{2}-1)y$

Par @ $\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}\in E_{t_1}$.

$E_{t_1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$E_{t_2}=\ker\begin{pmatrix}-2-2\sqrt{2}&2\\2&2-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_{t_2}$ ssi $2x+(2-2\sqrt{2})y=0$

$\Leftrightarrow x=(\sqrt{2}-1)y \rightarrow E_{t_2}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base formée de vecteurs propres.

On veut la transformée en une base or née.

Vérifions bien base orthogonale :

$\langle b_1,b_2\rangle=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-1=2-1-1=0$

$\langle b_1,b_1\rangle=(\sqrt{2}+1)^2+1=2\sqrt{2}+2+1+1=4+2\sqrt{2}$

$\langle b_2,b_2\rangle=4-2\sqrt{2}$.

Dc mtn on divise p la racine carée de la norme de chq vecteur.

Dc $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

et $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

est une base ornée formée de $\overrightarrow{vp}$.

$P_{(e_1,e_2)\to(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2)} = \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

(ii)

Comme c'est une base orthonormale.

$P^{-1}_{(e_1,e_2)\to(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2)} = {}^tP_{(e_1,e_2)\to(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2)}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2_{(e_1,e_2)} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2_{(e_1,e_2)} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{R}^2_{(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2)} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^2_{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)} \end{tikzcd}$$

$D = P^{-1}A.P$, $D = \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3-2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

et $B = P\tilde{D}P^{-1}$

$B^2 = (P\tilde{D}P^{-1})(P\tilde{D}P^{-1})$

$= P\tilde{D}^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$

$$\mathcal{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt2}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} \end{pmatrix}}_{d} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3-2\sqrt2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3+2\sqrt2} \end{pmatrix}}_{e}$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt2}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} \\ \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} \end{pmatrix}}_{f}$$

$$d.e = \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt2}/2 & \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10-7\sqrt2}}{2} & \frac{\sqrt{10+7\sqrt2}}{2} \end{pmatrix}$$

NB :

$$(1+\sqrt2)\sqrt{3-2\sqrt2} = \sqrt{(3+2\sqrt2)(3-2\sqrt2)} = \sqrt{9-8} = 1$$

- $$\frac{-\sqrt{3-2\sqrt2}}{\sqrt{4+2\sqrt2}} = \frac{-\sqrt{(3-2\sqrt2)(4-2\sqrt2)}}{\sqrt{16-8}}$$

$$= \frac{-\sqrt{12-14\sqrt2+8}}{\sqrt8} = -\frac{\sqrt{20-14\sqrt2}}{\sqrt8}$$

$$= \frac{-\sqrt{10-7\sqrt2}}{2}$$

- $$\frac{(\sqrt2-1)(\sqrt{3+2\sqrt2})}{\sqrt{4-2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{(3-2\sqrt2)(3+2\sqrt2)}}{\sqrt{4-2\sqrt2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt2}}{\sqrt8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2} \quad \Big| \quad \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt2}}{\sqrt8} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt2}}{\sqrt{4-2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{12+2\sqrt2+8}}{\sqrt8} = \frac{\sqrt{20+14\sqrt2}}{\sqrt8}$$

(iii)

$$\text{def} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{10-7\sqrt2}}{2} & \frac{\sqrt{10+7\sqrt2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt2}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} \\ \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = B$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{\sqrt{4+2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt2)(4+2\sqrt2)}}{\sqrt8} = \frac{\sqrt{8-8\sqrt2+4}}{\sqrt8} = \frac{\sqrt{6-4\sqrt2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}\,\frac{(1+\sqrt2)}{\sqrt{4+2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{6-4\sqrt2}\,(1+\sqrt2)}{2} = \frac{\sqrt{(6-4\sqrt2)(3+2\sqrt2)}}{4} = \frac{\sqrt2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}\,\frac{(\sqrt2-1)}{\sqrt{4-2\sqrt2}} = \frac{\sqrt{6+4\sqrt2}\,(\sqrt2-1)}{4} = \frac{\sqrt{(6+4\sqrt2)(3-2\sqrt2)}}{4}$$

dc $\alpha = \frac{\sqrt3}{2}$, de m pu $\beta, \gamma, \delta \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

(iv)

Ex 15 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1)

• A mat sym de l'endom. correspondant est un autoadjoint. Dc par le Th Spectral, ∃ base orné ds f_q^{ll} et endomorphisme est diagonal.

ie ∃ mat P orthogonal tq

$D = P^{-1} A P$ est diagonale et $P^{-1} = {}^tP$.

• 2)

Calcul du polyn. caractéristq de A :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -2 & -4 \\ -2 & 8-t & -2 \\ -4 & -2 & 5-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-t & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ -9+t & -2 & 5-t \end{vmatrix}$$

(v)

$$= (9-t)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ -1 & -2 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$= (9-t)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ 0 & -4 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (9-t)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -t & -2t \\ 0 & -4 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (9-t)\,t\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= -(9-t)^2 t$$

$\mathrm{Spec}_A = \{0, 9\}$.

mult 1 mult 2

E_0 : ? $\ker(A)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$E_9 = \ker \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_9 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On doit mtn orthonormaliser la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On divise $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ par sa norme $\sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

$b_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

et $b_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Gramm-Schmidt :

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $\left\langle \begin{pmatrix} -\lambda \\ -2+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \cancel{4-4\lambda+1=0}$

$-\lambda + 4 - 4\lambda = 0$

$\lambda = \cancel{5/4}\ \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{4}$

On pt choisir $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ q est dans E_9 & orthogonal à b_2.

$b_3 = \begin{pmatrix} -4/3\sqrt{5} \\ -2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad 25+4+16 = 45$, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Dc $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$

& $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

3) $P^{-1} = {}^tP$.

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ -4/3\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$

(vi)

d) A mat déf positive ?
(A induit elle une FQ $\oplus$?
définie positive ?)

La signature de la FQ de A est $(2,0)$.
$(rg = 2)$

- Dc la mat A est $\oplus$
mais non définie positive.

e) Trouver ttes les mat $B \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$
tq $B^2 = A$.

- La sle mat $B \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ vérifiant
$B^2 = A$ est

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

En revanche il existe plusieurs mat ds $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ q vérifient $B^2 = A$.
Ce sont :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Ex 16 ed rg & signature.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= t\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-t \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= -t(2-t)(1-t).$$

Dc la FB sym donné par A.

se ~~donne par~~ diagonalise en

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ds une base

ornée de $\mathbb{R}^3$.

Sa signature est $(2,0)$ et son rang 2.

(viii)

fin ex 13 $u \in \mathcal{O}(E)$

7. b)

7. a) u projecθ linéaire $\Leftrightarrow u^2 = u$.

b) si u est orthogonale, u est une projecθ

- projecθ linéaire $\Rightarrow$

$\Rightarrow u^2 = u$.

u orthogonal $\Rightarrow u^{-1} = u^*$.

$\langle ux, uy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y$.

$\langle x, u^*u y \rangle = \langle x, y \rangle$.

de m̂, $\langle u^* y, u^* \cancel{x} \rangle = \langle x, y \rangle$

$\langle u u^* y, \cancel{x} \rangle$

$\Rightarrow uu^* = u^*u = Id$

$\Leftrightarrow u^* = u^{-1}$

, $\Leftarrow$ On suppose $u^2 = u$ & $u^* = u^{-1}$.

Alors $uu^* = u^*u = Id$
$= uu^{-1}$

$\Rightarrow u$ est orthogonal.

$u^2 = u \Rightarrow u$ est une projecθ.

$$\boxed{u^2 = u \Rightarrow E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u}$$

$u|_{\operatorname{Ker} u} = 0$, $u|_{\operatorname{Im} u} = ?$

soit $z \in \operatorname{Im} u$, $z = u(x)$, $x \in E$

$u(z) = u(u(x)) = u^2(x) = u(x) = z$.

$\Rightarrow u(z) = z$.

$u|_{\operatorname{Im} u} = Id$.

- $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$,

~~$\forall y \in E$~~, $\langle x, u(y) \rangle$ ~~$= \langle u(x), u^2(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle 0, \dots \rangle = 0$~~

41

si $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$.

$\exists y \in E$ tq $x = u(y)$.

$\cancel{\langle x, x\rangle = \langle u(y), u(y)\rangle}$

$x \in \operatorname{Ker} u$. $\cancel{= \langle u(x), u(x)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0}$

$\forall z \in \operatorname{Im}(u)$, $\langle x, z\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ $\forall y \in E$

$$\langle x, z\rangle = \langle u(x), u^2(y)\rangle$$

$$= \langle u(x), u(y)\rangle$$

$$= \langle 0, u(y)\rangle = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} u \perp \operatorname{Im}(u)$

$\Leftarrow$ $u^2 = u$ et $u^{-1} = u^*$

$$\begin{cases} u|_{\operatorname{Ker} u} = 0 \\ u|_{\operatorname{Im} u} = Id \end{cases}$$

et $\operatorname{Ker} u \perp \operatorname{Im} u$

cl u est une projecθ orthogonale sur $\operatorname{Im} u$.

(42)

Reprise exo : errare humanum est.

i) $u^2 = u$ et ii) $u^* = u$.

(i) $\Rightarrow E = \operatorname{Ker} u \perp \operatorname{Im} u$

$$\begin{cases} u|_{\operatorname{Ker} u} = 0 \\ u|_{\operatorname{Im} u} = Id \end{cases} \Rightarrow u \text{ est projecθ orthogonale.}$$

u est autoadjoint, $u^* = u$.

$u = u|_{\operatorname{Ker} u} \oplus u|_{\operatorname{Im} u}$

$x \in E$, $x = x_V + x_W$.

$u(x) = u(x_V) + u(x_W) = u(x_W)$

(ii) $u^* = u \Rightarrow E = \operatorname{ker} u \perp \operatorname{Im} u$

$x \in \operatorname{Ker} u$, $u(y) \in \operatorname{Im} u$, $\langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$

$= \langle u(x), y\rangle$ car $u^* = u$.

$= \langle 0, y\rangle$

$= 0$

Ex 9 $A \in SO(3)$, $\exists P$ inversible

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A' \end{pmatrix}$$

[redacted] mat ds une base orné où A' est la mat d'une rotaθ de $\mathbb{R}^2$, $A' \in SO(2)$

- $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

→ trace ne dépd pas base.

dc $tr(A) = 1 + tr(A') = 1 + 2\cos\theta$

$$\boxed{tr(A) = 1 + 2\cos\theta}$$

- • soit $v \neq 0$ tq [redacted] $\mathbb{R}v = E$ (axe de rotaθ)

$x \in \quad - \mathbb{R}v$

$[x, Ax, v]$ → à calculer

produit mixte, det 3 vecteurs.

soit $F^{\perp} = \mathbb{R}v$. ; $F = v^{\perp}$.

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$, $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$

$[x, Ax, v] = [p_F(x) + p_{F^\perp}(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$

~~$= [p_F(x), p_F(Ax), v] + [p_{F^\perp}(x), p_{F^\perp}(Ax), v]$~~

$= [p_F(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$
$+ [p_{F^\perp}(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$

$= [p_F(x), p_F(Ax), v] + \underbrace{[p_F(x), p_{F^\perp}(Ax), v]}_{0}$
$+ [p_{F^\perp}(x), p_F(Ax), v] + \underbrace{[p_{F^\perp}(x), p_{F^\perp}(Ax), v]}_{0}$

car $p_{F^\perp}(Ax)$ colinéaire à v.

$F^\perp = \mathbb{R}v$

dc $= 0$

propté du det

$\Rightarrow \det = 0$

2 colnes colinéaires ds det

$[x, Ax, v] = [p_F(x), p_F(Ax), v]$

& $p_F(Ax) = A p_F(x)$

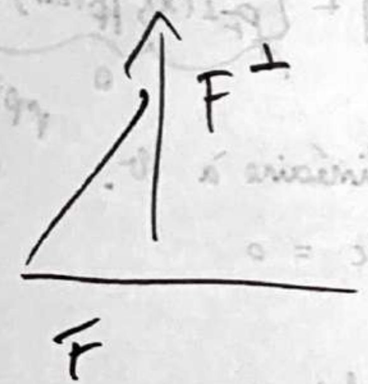
d'autre part, ~~$p_F Ax$~~

$A(x) = p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax)$.

~~$A(p_F(x))$~~ $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$.

$A(x) = A(p_F(x) + p_{F^\perp}(x))$

$A(x) = \underbrace{A(p_F(x))}_{\in F} + \underbrace{A(p_{F^\perp}(x))}_{\in F^\perp}$.



$\Rightarrow p_F(Ax) = A(p_F(x))$

$p_{F^\perp}(Ax) = A(p_{F^\perp}(x))$

D'où $[x, Ax, v] = [p_F(x), A p_F(x), v]$

soit $\{w_1, w_2, w_3\}$ une base orné de F,

de sorte $\{w_1, w_2, \tilde{v}\}$ ~~de~~ tq $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$,

soit une base ornée de $\mathbb{R}^3$.

soit $x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$A(p_F(x)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in F, x \neq 0$,

$$[x, Ax, \tilde{v}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta & 0 \\ x_2 & x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)$$

$$- x_2 (x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

$$= x_1^2 \sin\theta + x_2^2 \sin\theta$$

$$\cancel{+ x_1 x_2 \cos\theta} \; \cancel{- x_2 x_1 \cos\theta}$$

- $$= (x_1^2 + x_2^2) \sin\theta = \|x\|^2 \sin\theta.$$

$$= \| pF(x) \|^2 \sin\theta.$$

$$[x, Ax, v = \|v\| \tilde{v}] = \|v\| \, [x, Ax, \tilde{v}]$$

$$= \|v\| \, \|pF(x)\|^2 \sin\theta.$$

-

$= x_1(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta)$

$\quad - x_2(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$

$= x_1^2\sin\theta + x_2^2\sin\theta$

$\quad \cancel{+x_1x_2\cos\theta} \cancel{-x_2x_1\cos\theta}$

$= (x_1^2+x_2^2)\sin\theta = \|x\|^2\sin\theta.$

$= \|p_F(x)\|^2 \sin\theta.$

$[x, Ax, v = \|v\|\tilde{v}] = \|v\|[x, Ax, \tilde{v}]$

$= \|v\|\,\|p_F(x)\|^2 \sin\theta.$

2) Applicat°.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \in SO(3)$?

${}^tAA = Id$ oui dc $A \in O(3)$

$\det(A) = 1$ dc $A \in SO(3)$

45

L'axe de rotat° est l'espace propre.

$E_1 = \ker(A - Id)$ est l'axe de rotat°.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ x=z \end{cases}.$

Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v$ un $\overrightarrow{vp}$ de A vp 1.

$\boxed{tr(A) = 1 + 2\cos\theta}$

$tr(A) = 0 = 1 + 2\cos\theta$

$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$.

$\boxed{[x, Ax, v] = \|v\|\,\|p_F(x)\|^2 \sin\theta.}$

Prenons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ arbitraire $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$.

calcul de Ax: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[x, Ax, v] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$
$$= 1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^tBB = \dots = Id \in O(3)$$
$$\det(B) = 1 \in SO(3).$$

$$\ker(B-Id) = \ker\begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B-Id) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-y+2z=0 \\ 2x-5y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-y+2z=0 \\ -9y+3z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 3y \quad \& \quad x = y$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un $\vec{v_p}$ de A · vp 1.

$$\mathrm{tr}\, A = 1 + 2\cos\theta = \frac{1}{3}(-2)$$
$$2\cos\theta = -5/3$$
$$\cos\theta = -5/6.$$

Prenons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin$ axe rotaθ. $Ax = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$

$$[x, Ax, v] = \begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\sin\theta > 0 \rightarrow \sin^2\theta = 1-\left(-5/6\right)^2 = \frac{11}{36}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Ex 15. soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) A est mat sym alors $\exists$ P mat. orthogonale q la diagonalise, ie $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

b) Déterminer P.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$\lambda = \{0, 9\}$.

$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)^2$

Pour $\lambda = 0$: $\vec{vp} \Leftrightarrow$

$E_0 = \ker(A)$

$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} +5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{matrix} \rightarrow E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Dc $\underline{E_0 = \mathbb{R}v_1}$

$E_9 = \ker(A - 9Id)$

$E_9 = Vect\left\{\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$.

Il faut Base orthonormé.

Orthogonalisat° de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Prenons $u_2 = v_2$

$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_2 \, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_2 \rangle} u_2$

$\frac{\langle u_2 ; v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{4}{5}$.

Dc $u_3 = v_3 - \frac{4}{5} v_1$

$\Rightarrow u_3 = (0, -2, 1) - \frac{4}{5}(1, -2, 0) = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dc une base o.née de $\mathbb{R}^3$ est :

$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right)$.

$v_1 = (2,1,2)$; $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$ $\|v_2\| = \sqrt{5}$, $\|v_3\| = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Dc $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & 2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d) A est ⊕ car ttes les vp st ⊕.
Elle n'est pas définie ⊕ car l'une de ses vp est nulle.

e) Trouver mat $B \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ tq $B^2 = A$.

$B^2 = PDP^{-1}$,

soit $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^2 = D$

$B^2 = PE^2P^{-1}$

$(PEP^{-1})^2 = A$.

${}^tM . M = Id$
${}^tM A . M = Id$
${}^tM$. mat ap FB . M = 1
$\langle g(u(a)), g(u(y)) \rangle = \langle u(a), u(y) \rangle$

obligé de normaliser les $\vec{vp}$.

[prod^t scal^R standard de $\mathbb{R}^n$]
tq Base canoniq soit onée.

onée.

appli° orthogonale ssi conserve norme.

$\boxed{\text{isométrie}}$

χ_A | | | images vect^{res} de base canoniq soit onée.

↑ ↑ ↑

colonnes mat $\|\cdot\| = 1$

R M Décompos° polaire.

soit mat M. $\ {}^tMM$.

Résoudre $S^2 = {}^tMM$ (⚠ déf-positive)

- $\Omega = MS^{-1}$.

d'où décomp. polaire $M = \Omega S$

$\Omega \in O(2)$, $S \in \mathcal{S}_2^{++}$.

---

mat déf ⊕ ssi signe ⊕ det (mat mineures)

$\boxed{M}$ Réduire à forme normale p une isométrie affine, en coniq

---

$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + b_1 x + b_2 y + cte$.

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ où $a_{12} = a_{21}$.

$P_A(\lambda) = ?$ vp ? $\overrightarrow{vp}$?

$P = \begin{pmatrix} \overrightarrow{vp_1} & \overrightarrow{vp_2} \end{pmatrix}$ orthonormalisé $P \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \dfrac{\overrightarrow{vp_1}}{\|\overrightarrow{vp_1}\|} & \dfrac{\overrightarrow{vp_2}}{\|\overrightarrow{vp_2}\|} \end{pmatrix}$

c, d st ctes ; $c = \|\overrightarrow{vp_1}\|$, $d = \|\overrightarrow{vp_2}\|$

$P = \begin{pmatrix} c.\alpha & d.\beta \\ c.\gamma & d.\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = c\alpha x' + d\beta y' \\ y = c\gamma x' + d\delta y' \end{cases}$

$f = vp_1 x'^2 + vp_2 y'^2 + b_1' x + b_2' y + cte$

$$\boxed{(b_1' \ b_2') = (b_1 \ b_2)\, P}$$

- Réduct° de Gauss de f. (éliminer les termes en x, y)

Expression de $\tilde{x}$ en f de x'.

Trouver expression de x, y f $\tilde{x}, \tilde{y}$.

$\frac{1}{2}$ axes : $(a, b) = \left(\sqrt{vp_1} \ \ \sqrt{vp_2}\right)$

$\begin{cases} x = \ldots \tilde{x} + \ldots \tilde{y} + \eta \\ y = \ldots \tilde{x} + \ldots \tilde{y} + \xi \end{cases}$

centre $(x,y) = (\eta, \xi)$.

Ex 1 Réduct° de coniqs

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

(i) $q = 5x^2 + 4xy + 8y$.

Diagonaliser dans $B_{o.n}$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\chi_A(t) = (\lambda-4)(\lambda-9)$

$E_{\lambda_4} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$ $\quad E_{\lambda_9} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2$

$\{v_1, v_2\}$ forme base orn. de q lle

Fq q est diagonale de mat $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = P_{(e_1,e_2)\to(v_1,v_2)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x' + y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}$$

(ii) RDG : $f = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

$$f = \frac{5}{5}(2x'+y')^2 + \frac{4}{5}(2x'+y')(-x'+2y') + \frac{8}{5}(-x'+2y')^2 - \frac{32}{\sqrt{5}}(2x'+y') - \frac{56}{\sqrt{5}}(-x'+2y') + 80.$$

$$f = vp_1\, x'^2 + vp_2\, y'^2 + b_1' x + b_2' y + 80$$

+ simple

$$(b_1' \ b_2') = (b_1 \ b_2)P = (-8 \ -144)\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(iii) Eliminer termes en x, y

$$f = 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}$.

f ds les coordonnées $\tilde{x}, \tilde{y}$ est

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1 \ : \ \text{ellipse}.$$

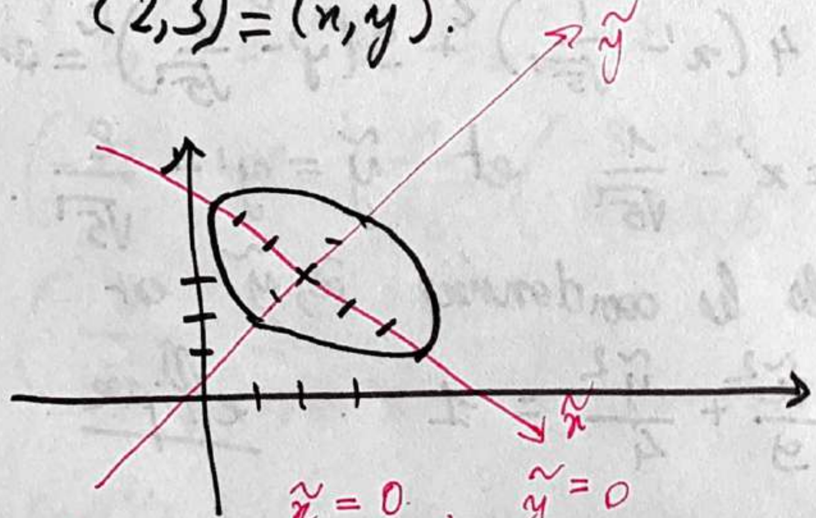
L'O du nouvel axe de coord. est $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$.

$$x' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \ , \quad y' - \frac{8}{\sqrt{5}} = 0 .$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{16}{\sqrt{5}}\right) = 3 .$$

Le centre de l'ellipse est $(2,3) = (x,y)$.



$\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$

$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} .$$

3) $f = 12xy + 5y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; $\chi_A = (\lambda+4)(\lambda-9)$

$\overrightarrow{vp}$? $\overrightarrow{vp_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{vp_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3y'). \end{cases}$

$(b_1' \ b_2') = (b_1 \ b_2)\, P$

$= (-12 \quad -26) \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{-8}{\sqrt{13}} \quad \frac{-90}{\sqrt{13}} \right)$

$f = -4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{13}}x' + \frac{-90}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$

RDG

$f = -4x'^2 + 9y'^2 + \frac{8}{\sqrt{13}}x' + \frac{-90}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$

$f = -4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{4}{13} + 9\left(y' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{225}{13} - 19$

$f = -4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + 9\left(y' - 5/\sqrt{13}\right)^2 - 36$

$f = -4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - 36 = 0$

dc la coniq ds nvlls coord $(\tilde{x}, \tilde{y})$ a p équa° $-4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 = 36$.

$\Leftrightarrow -\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$ hyperbole

$-\frac{\tilde{x}^2}{3^2} + \frac{\tilde{y}^2}{2^2} = 1 \rightarrow \frac{\tilde{y}^2}{2^2} - \frac{\tilde{x}^2}{3^2} = 1$

$\Rightarrow (a, b) = (2, 3)$.

2). $x^2+2xy+y^2-8x+4=0.$

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\rightarrow P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$$

$Spec(A)=\{0,2\}$. forme parabolig

$\vec{vp}$? $\vec{vp_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{vp_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')\end{cases}$$

$$(b_1'\ b_2')=(b_1\ b_2)P$$

$$=(-8\ \ 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-8\ \ -8)=\frac{-8}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)$$

$$\Rightarrow f=0x'^2+2y'^2-\frac{8}{\sqrt{2}}x'-\frac{8}{\sqrt{2}}y'+4=0$$

$$f=2y'^2-\frac{8}{\sqrt{2}}x'-\frac{8}{\sqrt{2}}y'+4$$

$$f=2\left(y'-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{8}{\sqrt{2}}x'=0$$

$$2\tilde{y}^2=\frac{8}{\sqrt{2}}x'\Leftrightarrow\boxed{\tilde{y}^2=\frac{4}{\sqrt{2}}x'}$$

$$\tilde{y}^2=2.\frac{2}{\sqrt{2}}x'\quad \text{où}\ \tilde{y}=y'-\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

$\tilde{x}=0$

$$y'=\tilde{y}+\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

$$x'=\frac{2^{1/4}}{2}\tilde{y}=2^{-3/4}\tilde{y}.$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^{-\frac{3}{4}}\tilde{y}+\tilde{y}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\ldots+1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-2^{-3/4}\tilde{y}+\tilde{y}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\ldots+1.$$

C2

TD4 ex2 E (ee) $\dim(E) = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

$u : E \to E$. linéaire, u^* est linéaire.

$(\langle , \rangle = f)$. u^* est l'adjoint de E. S^{ce} euclid

$\overset{def}{\iff} \forall x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$

soit β base orné de E.

- $A = \mathrm{Mat}(f)$, $M = \mathrm{Mat}_\beta(u)$,

$N = \mathrm{Mat}_\beta(u^*)$.

Cela s'écrit :

${}^t(MX) AY = {}^tX ANY$, $\forall X, Y$ 2 vct^{les} col.

on vt mq $\forall x \in E$,

- $\to$ $(\lambda f + \mu g)^*(x) = (\lambda f^* + \mu g^*)(x)$

soit $x \in E$, $y \in E$

$\langle (\lambda f + \mu g)^*(x), y\rangle =$

$= \langle x, (\lambda f + \mu g)(y)\rangle$

$= \langle x, \lambda f(y) + \mu g(y)\rangle$

$= \lambda\langle x, f(y)\rangle + \mu\langle x, g(y)\rangle$

$= \lambda\langle f^*(x), y\rangle + \mu\langle g^*(x), y\rangle$

$= \langle \lambda f^*(x), y\rangle + \langle \mu g^*(x), y\rangle$.

$= \langle \lambda f^*(x) + \mu g^*(x), y\rangle$

$\Rightarrow \langle (\lambda f + \mu g)^*(x), y\rangle$

$= \langle \lambda f^*(x) + \mu g^*(x), y\rangle$

$= \langle (\lambda f - \mu g)^*(x) - (\lambda f^*(x) + \mu g^*(x)), y\rangle = 0$

$\langle ; \rangle$ est non. dég $\forall y \in E$,

$\Rightarrow (\lambda f + \mu g)^*(x) = \lambda f^*(x) - \mu g^*(x)$ $\forall x$

$\iff (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

si vct^{r} orthog à esp. tout entier, vct^{r} nul.

$(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$,

soit $x, y \in E$,

$< (g\circ f)^*(x), y > = < x, (g\circ f)(y) >$

$= < x, g(f(y)) >$

$= < g^*(x), f(y) >$

$= < f^*(g^*(x)), y > \ \forall y$

$\Rightarrow (g\circ f)^*(x) = f^* \circ g^*(x) \ \forall x$

ie $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3) Mq $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible ssi f^* l'est & $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

$\Rightarrow$ soit $f \in \mathcal{L}(E)$ & u inversible

f est inversible, $\exists g \in \mathcal{L}(E)$ tq

$f\circ g = id_E = g\circ f$

si on prd l'adjoint de l'égalité

$g^* \circ f^* = (\mathbb{1}d)^* = f^* \circ g^*$.

$= \mathbb{1}d_E$.

---

cl f^* est inversible.

$g = f^{-1}$.

Mq $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

- $\boxed{(f^*)(f^{-1})^*} = (f^{-1} \circ f)^*$
$= (\mathbb{1}d_E)^* = \boxed{\mathbb{1}d_E}$.

- $(f^{-1})^* \circ (f^*) = (f \circ f^{-1})^*$
$= (\mathbb{1}d_E)^* = \mathbb{1}d_E$.

La réciproq est uniq.
$\Rightarrow (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

Ex 4. soit E ee dim finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Mq $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ et
$\mathrm{Im}(u \circ u^*) = \mathrm{Im}(u)$

mq $\ker(u^* \circ u) \subseteq \ker u$

soit $x \in \ker(u^* \circ u) \rightarrow u^* \circ u = 0$

$\forall y \in E$, $\langle u^* \circ u(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$
$\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\langle u(x), u(y) \rangle =$

on a dc si $y = x$, $\langle u(x), u(x) \rangle = 0 = \|u(x)\|^2$
$\Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u$
$\Rightarrow \ker(u^* \circ u) \subseteq \ker u$.

Inversement $x \in E$ & tq

$x \in \ker u$ ie $u(x) = 0$.

$u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(u^* \circ u)$

& $\ker(u) \subseteq \ker(u^* \circ u)$

$\mathrm{Im}(u \circ u^*) = \mathrm{Im}\, u$?

---

ppté $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

$\ker u = \ker u^{**}$

$= (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp$

$(\ker u)^\perp = \mathrm{Im}\, u^*$.

$\ker (u^* \circ u)^\perp$

$\mathrm{Im}\, (u^* \circ u)^* = \mathrm{Im}\, (u^* \circ u)$

$\boxed{\text{M2}}$ $\mathrm{Im}(u \circ u^*) \subseteq \mathrm{Im}\, u$.

$\mathrm{Im}(u \circ u^*) = u(u^*(E))$

or $u^*(E) \subseteq E$ dc

$u(u^*(E)) \subseteq u(E) = \mathrm{Im}(u)$.

Il faut mq $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Im}(u \circ u^*)$.

TH rg $\dim E = \dim \ker u + rg(u)$

$\Rightarrow rg(u^* \circ u) = rg(u)$,

si on met u^* au lieu de u

$rg(u \circ u^*) = rg(u^*)$

Important $rg(u) = rg(u^*)$.

On a $rg(u \circ u^*) = rg(u^*) = rg(u)$

$Im(u \circ u^*) \subseteq Im\, u$

dc ces 2 sev st emboîtés & ont la m̂ dimension

- De il st égx

$$Im(u \circ u^*) = Im\, u .$$

Rq Preuve $rg(u) = rg(u^*)$ $\in$ TH rg.

Th rg $\dim Im\, u^* = \dim E - \dim \ker u^*$

$= \dim E - \dim (Im\, u)^{\perp}$

$= \dim E - (\dim E - \dim Im\, u)$

$= \dim Im\, u .$

ie $\boxed{rg(u^*) = rg(u)}$

b) Mq $u^* \circ u$ & $u \circ u^*$ st auto-adjoints (+)

Mq auto-adjoints : $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^*$

$= u^* \circ u$

idem p $u \circ u^*$.

A positif $\iff$ vp de A st ≥ 0.

A déf-positive $\iff$ vp st > 0.

$A \longrightarrow (x,y) \longmapsto {}^tXAY$

soit $\Delta = u^* \circ u$ & λ vp de Δ

soit x $\vec{vp}$ $\langle A \rangle$ λ.

$\langle \Delta x, x \rangle = \boxed{\langle (u^* \circ u)(x), x \rangle}$

$= \langle u(x), u(x) \rangle$

$= \boxed{\langle \lambda x, x \rangle} = \lambda \langle x, x \rangle .$

Ex2 E ee dim finie n.

1) Rf D endom. adjoint & caractérisaθ mat d'un end. adj.

D soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E ee dim n,

$\exists!\, v \in \mathcal{L}(E)$ tq

- $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

notaθ : $v := u^*$.

$$\boxed{\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ si $\mathcal{E}$ base ornée.

soit β une base de E, supposons v existe, soit $N = \mathrm{Mat}_\beta(v)$, soit $M = \mathrm{Mat}_\beta(u)$,

- $A = \mathrm{Mat}_\beta(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, si X, Y désignant les vecteurs colonnes de x, y ds β.

$(\cancel{{}^tM})AY = {}^tXANY$, $\forall X, Y$.

${}^tX\,{}^tMAY = {}^tXANY \iff {}^tMA = AN$.

$\to$ A est inversible car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est fm nd

$$\implies \boxed{N = A^{-1}\,{}^tMA}$$

2) Mq $\forall$ 2 endom $f, g \in \mathcal{L}(E)$; on a :

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\underline{(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu . g^*}$.

$N = \mathrm{Mat}_\beta(g)$, $M = \mathrm{Mat}_\beta(f)$

$N' = \mathrm{Mat}_\beta(g^*)$, $M' = \mathrm{Mat}_\beta(f^*)$

$$\left| \begin{array}{l} N' = A^{-1}\,{}^tN A \\ M' = A^{-1}\,{}^tM A . \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle \\ \langle \mu g(x), y \rangle = \langle x, \mu g^*(y) \rangle \end{array} \right.$$

$\langle x, \lambda f^*(y) \rangle + \langle x, \mu g^*(y) \rangle = \lambda f^* + \mu g^*$

$= \langle \lambda f(x), y \rangle + \langle \mu g(x), y \rangle$

$= \langle (\lambda f(x) + \mu g(x)), y \rangle$

R13

ex 2.

Mq $(fg)^* = g^* f^*$

$$N'M' = (A^{-1}\,{}^tN A)(A^{-1}\,{}^tM A)$$
$$= (A^{-1}\,{}^tN\,{}^tM A)$$
$$= A^{-1} (MN)^t A.$$

D'où $g^* f^* = (fg)^*$

3) Mq $f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible ssi f^* l'est et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

$\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible,

$N = Mat_\beta(f)$ inversible.

~~Et~~ or $N' = A^{-1}\,{}^tN A$

où A est inversible car f^{me} nd

et N est inversible par hypothèse

A inv car f^{me} nd

$\boxed{R14}$

Dc N' est inversible que l'on a noté $N' := Mat_\beta(f^*)$.

$\Longleftarrow$ $f^* \Rightarrow$ $N' = Mat_\beta(f^*)$ est inversible par hypothèse.

$N' \to$ d'où $(A^{-1}\,{}^tN A)$

m̂ arguments que tt à l'heure.

$\to$ Mq aussi $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$
$$= \langle f f^{-1}(x), f^*(y)\rangle$$

$$(f^*)^{-1} = (N')^{-1} = (A^{-1}\,{}^tN A)^{-1} = A\,({}^tN)^{-1} A^{-1}$$
$$= A\,{}^t(N^{-1}) A^{-1} = (f^{-1})^*.$$

~~$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^* u(y)\rangle$~~

Ex 3 Endom Auto-adjoint

E ee, dim finie n, $u \in \mathcal{S}(E)$

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists ! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq

$u \in \mathcal{S}(E)$

$<u(x), y> = <x, u^*(y)>$

- et $u = u^*$.

$<u(x), y> = <x, u(y)>$.

$M = Mat_\beta(u)$, $A = Mat_\beta(<\cdot,\cdot>)$

β base orné de E.

def : $MXAY = XAMY$

$MXA = XAM \leftrightarrow \cancel{XA = AX}$.

- $A^{-1}X^{-1}MXA = M$.

$\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{matrix} \text{endom sym} \\ \text{de } E \end{matrix} \right\} \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}(E) = \left\{ \begin{matrix} FBS \\ \text{de } E \end{matrix} \right\}$

(i) $u \in \mathcal{S}_E \longmapsto \Phi(u) = \varphi \in \mathcal{S}(E)$,

$\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = <x, u(y)>$.

(ii) $\varphi(y,x) = <y, u(x)> = <u(x), y> = <x, u(y)>$
$= \varphi(x,y)$.

D $u \in \mathcal{S}_E$ est ⊕ ie $u \in \mathcal{S}_E^+$ si la FBS $\leftrightarrow \Phi(u)$ est ⊕ : $\Phi(u) \geq 0$.

ie $u \in \mathcal{S}_E^+ \iff u \in \mathcal{S}_E, \forall x \in E, <x, u(x)> \geq 0$.

---

1) Mq $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$

$\Rightarrow$ si $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ie $u \in \mathcal{S}_E, \forall x \in E$,

$<x, u(x)> \geq 0$.

D'après TH diagonalisation endom sym en base orné, $u \in \mathcal{S}_E \Rightarrow$ ttes vp complexes de u st réelles : $Spec(u) \subset \mathbb{R}$

ici $u \in \mathcal{S}_E^+ \Rightarrow Spec(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$

suite 4) 1) $\Leftarrow$ si $Spec(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$.

→ les val^{ts} complexes de u st réelles, E ee dim & par hypothèse $u \in \mathcal{S}(E)$ (FBS de E).

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. vp réelles de $u \in \mathcal{S}(E)$

ε base orn^{ée}.

$< \lambda_i, u(\lambda_i) > = < u(\lambda_i), \lambda_i >$

$\lambda_i < 1, u(\lambda_i) >$

$\to$ <A> vp

vp

→ ccl $\forall x \in E$, $< x, u(x) > \geq 0$

$< u(x), x >$

3) (i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$.

ie: $XAMX$ mat^r déf. positive

$\iff Spec(A) \subset \mathbb{R} \geq 0$.

$X = Mat_\beta(x)$, $A = Mat_\beta(<\cdot,\cdot>)$

$M = Mat_\beta(u)$, β base orn^{ée}.

(ii) idem ST >0

4) À propos endomorphisme auto-adjoint ⊕ de trace nulle ?

$< x, u(x) > = < u(x), x >$

trace $= \sum$ vp

$\Downarrow$

ttes les vp st nulles.

<u>Ex</u>[4] E ee, $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Mq $\ker(u^* \circ u) = \ker u$. (i)

et Mq $\mathrm{Im}(u \circ u^*) = \mathrm{Im}\, u$.

Idée double inclusion.

(i) $\subset$: $\ker(u^* \circ u) \subset \ker u$.

Soit $x \in \ker(u^* \circ u)$.

ie $\forall x \in E, (u^* \circ u)(x) = 0$

$u^*(u(x)) = 0$

$\cancel{\langle u^* u(x), y}$

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

$= \langle u^*(u(x)), u^*(y) \rangle$

$= \langle 0, u^*(y) \rangle$

$= 0$.

$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

' <u>Mq</u> $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$.

soit $x \in \ker u$ <u>ie</u> $u(x) = 0$.

$u^*(u(x)) = u^*(0) = 0 \Rightarrow$

d'où $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$.

---

b) Mq $u^* \circ u$ & $u \circ u^*$ st auto-adjoints positifs & déf ⊕ ssi u est inversible.

Mq $(u^* \circ u)^* = u \circ u^*$ ⟵

$\langle u(x), y \rangle$

RIA $u^* = u$.

c) Mq $(u,v) \mapsto \mathrm{tr}(u^* \circ v)$ est produit scal^{re} euch sur $\mathcal{L}(E)$.
Exprimer ce pse f mat
$\mathrm{Mat}_\beta(u) = M$ & $\mathrm{Mat}_\beta(v) = N$
où β base ornée standard de $\mathbb{R}^n$.

PS forme polaire $b_Q : E \times E \to K$
$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$
est forme linéaire ?

PS : do ee $\mathbb{R}$ dim finie muni FQ
def ⊕ Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

~~A~~ d) $u \in \mathcal{S}(E)$, exp $\|u\|$
⟺ av PS c) f vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de u.

- Équat° cône isotrope / mat de Gram / dist° vecteurs (ev), mat sym, antisym, orthgles
- (D) $O(2)$, $SO(2)$ / (TH) Rédct° endom. orthgnx à f^{me} normale / Mq tt élt $O^-(2)$ est réflexn orthgle ; $O^-(2) = \{A \in O(2), \det A = -1\}$ /
- Mq endo $u = R^\theta \circ S_v \circ (R^\theta)^{-1}$ est ssi réflexn
- Réflexns, sym orthgles, projct°s orthgles, classes équivlces (FQ) (nd) / (D) endo auto-adjoint /
- Mq $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint ssi $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \in \mathbb{R}$.
- $\emptyset$ calcul, justif (FB) se réduist à f^{me} diagonale ds base convenable.
- $F^\perp$, (FQ) équivalents.

Cône isotrope

soit Q (FQ) sur E, $x \in E$. x est isotrope si $Q(x) = 0$. L'ens ds vect^{rs} isotropes pr Q s'appelle le cône isotrope.

(FQ) déf si son cône isot. réduit $\{0\}$ (R1)

(FB)S positive, définie, (nd)

E $\mathbb{R}$-ev dim finie, φ forme bil. sym sur E. On dit φ est :

- positive si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$.
- définie si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- définie-positive si définie & positive.
- (nd) si vecteur x tq $f(x,y) = 0$ $\forall y \in E$ est le vecteur nul.

ie seul le vecteur nul est orthogonal à ts ls vecteurs de l'espace.

- déterminant de la mat de la FBS

@ $\Delta = \mathbb{R} \Rightarrow$ dc FBS (nd) $\Rightarrow$ mat inversible $\Rightarrow \ker(A) = \{0\}$

Mat de Gram

La mat de Gram $\Leftrightarrow$ est la mat sym. de terme général $\langle x_i ; x_j \rangle$.

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \dots & \langle x_1, x_m\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_m\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_m, x_1\rangle & \langle x_m, x_2\rangle & \dots & \langle x_m, x_m\rangle \end{pmatrix} = G(x_1, \dots, x_m)$$

Relations & normes

$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$

si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. P.

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| . \|y\|$ I.C.S.

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ I.M.

Distance vecteur / espace vectoriel

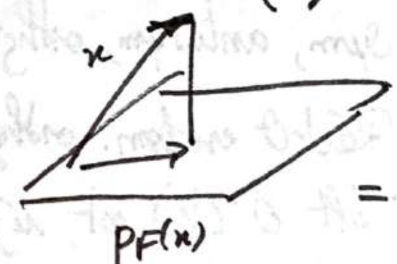
$d(x,F) = ?$

calcul $p_F(x)$.

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

@ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $p_F(x) = \dots + \dots = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ R2 $d(x,F) =$

$$d(x,F) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\|$$



$\|x + p_F(x)\|^2 =$
$= \|x\|^2 + \|p_F(x)\|^2 + 2\langle x, p_F(x)\rangle$

Angles

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| . \|y\|} , \quad \widehat{(x,y)} = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| . \|y\|}\right)$$

Noyaux & Orthogonaux

$\ker \varphi = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$.

$A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E, \varphi(x,y) = 0, \forall y \in A\}$.

$\rightarrow A \in O(2) \Leftrightarrow \{{}^tAA = Id\}$

$\rightarrow A \in SO(2) \Leftrightarrow \{u \in O(2), \det u = 1\}$

$\rightarrow O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E), \det u = -1\}$

$O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E)$.

- $u \in SO(E) \iff \exists \vartheta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$
rotatⁿˢ

- $u \in O^-(E) \iff \exists \vartheta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$
réflexions

(Th) endom. orthognx ds ee de dim qq.
soit E ee dim $n \geq 1$ alors $\exists$ base orné de E ds lq^{ll} u s'écrit p la mat :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \varnothing & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \varnothing & & & -1 & & \\ & & & & & R^{\vartheta_1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & R^{\vartheta_r} \end{pmatrix} \quad \vartheta_1, \dots, \vartheta_r \in \mathbb{R}, \quad R^{\vartheta_k} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_k & -\sin\vartheta_k \\ \sin\vartheta_k & \cos\vartheta_k \end{pmatrix}.$$

Équivalences

(D) 2 FQ $q \in Q(E)$, $q' \in Q'(E')$ st Équivalentes si :
(i) $\exists$ isomorphisme $h : E' = E$, $Q' = Q \circ h$.
(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' ($\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'} Q'$)
(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'} Q' = {}^tT . \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} Q . T$.

(Th) Tte FQ Q sur un $\mathbb{C}$-ev E de dim n s'écrit ds 1 base convenable p mat $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix}$ où $r = \mathrm{rg}\, Q$.
2 FQ complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$-ev E, E' Équivalentes ssi $\boxed{\dim E = \dim E'}$ & $\boxed{\mathrm{rg}\, Q = \mathrm{rg}\, Q'}$. R3

(Cor) Sur un $\mathbb{C}$-ev de E, dim n, $\exists$ $n+1$ classes d'équivalences de FQ distinguées p rg.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

(Th) on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $q \in Q(E)$ alors $\exists$ uniq $p \in \mathbb{N}$ tq q s'écrit ds base convenable p mat diagonale :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } q = r - p, \; r = \mathrm{rg}(q).$$

signature de (p, q).

(Cor) 2 FQ q, q' sur des $\mathbb{R}$ ev dim n st équiv'ts ssi m̂ signature.

Endom. Adjoint

(D) E ee, $u \in \mathcal{L}(E) \implies \exists!\, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, \forall y \in E, \; \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$
→ v : adjoint de u : $v := u^*$.
→ si $\mathcal{E}$ base ornée de E,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$$

(D) endom adjoint $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ $= \langle x, u^*(y) \rangle$

et $v := u^*$.

(D) endom auto-adjoint ou symétiq $\forall x, y \in E$ et $u = u^*$

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

↦ une mat A est symétiq si ${}^tA = A$.

↦ une projecⁿ orthogonale est sym.

↦ tte sym orthog. est sym.

(Cor) $u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow u \in O(E)$

$\Leftrightarrow u$ inversible et $u^* = u^{-1}$.

$\Leftrightarrow u^* u = u u^* = id_E$.

(Cor) si $u \in \mathcal{S}_E$, $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ 2 à 2 λ_i distinctes alors $E = E_{\lambda_1} \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\lambda_r}$.

(Cor) soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists P \in O(n)$ tq $D = P^{-1} A . P$ et $P^{-1} = {}^tP$ soit diagonale.

$$\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{matrix} \text{endom sym} \\ \text{de } E \end{matrix} \right\} \underset{\mathcal{H}^{-1}}{\overset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}(E) = \left\{ \begin{matrix} \text{FBS} \\ \text{ds } E \end{matrix} \right\}$$

(R4)

(P) Tte FBS $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise ds base o.n de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(D) Un endom. sym $u \in \mathcal{S}_E$ est ⊕ : $u \in \mathcal{S}_E^+$ si FBS $\longleftrightarrow$ $\mathcal{H}(u)$ ⊕ : $\mathcal{H}(u) \geq 0$.

ie : $u \in \mathcal{S}_E^+ \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}_E$, $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$.

$u \in \mathcal{S}_E^{++} \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}_E^{++}$, $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle > 0$.

(P) $u \in \mathcal{S}_E^+ \Leftrightarrow Spec(u) \subset \mathbb{R}^+$.
$u \in \mathcal{S}_E^{++} \Leftrightarrow Spec(u) \subset \mathbb{R}^{>0}$.

(TH) soit $u \in \mathcal{S}_E^+ \Rightarrow \exists!\, v \in \mathcal{S}_E^+$ tq $v^2 = u$.

TD-4 : Réduct° des coniqs & endomorphismes symétriqs.

ⓐ coniqs à m̂ foyer, m̂ directrice

K := projeté de M sur $\mathcal{D}$.

- Coniq de droite directrice $\mathcal{D}$, de foyer F, d'excentricité e l'ens des pts M du plan p vérifiant :

$$d(M,F) = e.\ d(M,\mathcal{D}) \quad (*)$$

- si $e<1$: courbe fermée & bornée : ellipse
- si $e=1$: courbe ouverte & ∞ : parabole
- si $e>1$: courbe de 2 branches symétriq ~~p~~ au point intersect° de 1e asymptote communes : hyperbole.

→ Ttes ces courbes possèdent ĉ axe de symétrie la droite $\mathcal{D}^\perp$ passant par F appelé $\boxed{\text{axe principal de la coniq}}$ $\mathcal{D}_F^\perp$.

- Paramètre de la coniq : $\underline{p = e.h}$.

Ds $(O,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{h}\overrightarrow{KF}$.

Abscisse de F : α.

$d(M,F) = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-0)^2}$; $d(M,\mathcal{D}) = \sqrt{(x-\alpha+h)^2}$

$\overset{(*)}{\rightarrow}$ $(x-\alpha)^2+y^2 = e^2(x-\alpha+h)^2$

→ $x^2(1-e^2)+y^2 = 2Bx + C$

où $\begin{cases} B = (1-e^2)\alpha + ep \\ C = (p-e\alpha)^2 - \alpha^2. \end{cases}$

Prep.

• cas $e < 1$: ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \left|\frac{p^2}{1-e^2}\right| \end{cases}$, $e \neq 1$.

• cas $e > 1$: hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

• cas $e = 0$, $p = 1$: foyer au centre cercle, la directrice est envoyée à l'∞.

(D) Algébriq, coniq tt ens de pts $M(x, y)$ vérifiant :

$$A x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

A, B, C, D, E, F cte tq $(A, B, C) \neq (0,0,0)$.

→ une coniq étant donnée φ son équat° ds repère quelconque, on cherche un repère orthonormal ds lq1 l'équat° de la coniq sera la + simple possible. (R6)

→ on se place ds repère orthonormal sinon chgt de base $\mathcal{M}$ y $\hat{e}$.

→ Elimin. terme xy en changeant de base par rotat°.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R^{\theta} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Ainsi $2B$ se réécrit : $(C-A)\sin(2\theta) + 2B\cos(2\theta)$

↳ on se place dans

$$A_1 x^2 + C_1 y^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F = 0$$

---

3 cas : $A_1 C_1 > 0$; $A_1 C_1 < 0$, $A_1 C_1 = 0$

Si $A_1C_1 > 0$: chgt d'⊕ O_1 :

$O_1\left(\frac{-D_1}{A_1}, \frac{-E_1}{C_1}\right) \to$ élim termes en x et en y.

↳ $A_1x^2 + C_1y^2 + F_1 = 0$.

⇒ 3 cas :

- si F_1 signe opposé à A_1 & C_1, on pose $a^2 = \frac{-F_1}{A_1}$, $b^2 = \frac{-F_1}{C_1}$: équ° réduite ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- si $F_1 = 0$, coniq réduite au point O_1.
- si F_1 est m̂ signe A_1 & C_1, coniq est vide

si $A_1C_1 < 0$: chgt $O_1\left(\frac{-D_1}{A_1}, \frac{-E_1}{C_1}\right)$.

↳ $A_1x^2 + C_1y^2 + F_1 = 0$.

éventuell^t permutat° vect^{rs} base, suppose $C_1F_1 \geq 0$:

2 cas :

- si $F_1 \neq 0$, $a^2 = \frac{-F_1}{A_1}$, $b^2 = \frac{-F_1}{C_1}$:

équa° réduite hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- si $F_1 = 0$, $a^2 = \left|\frac{1}{A_1}\right|$, $b^2 = \left|\frac{1}{C_1}\right|$, la coniq est réunion de 2 droites sécantes $bx \pm ay = 0$.

si $A_1C_1 = 0$ si besoin permutat° vect^{rs} de la base, suppose $A_1 = 0$, $C_1 \neq 0$, chgt ⊕ O_1

$O_1\left(0, \frac{-E_1}{C_1}\right) \Rightarrow C_1y^2 + 2D_1x + F_1 = 0$

2 cas :

- si $D_1 \neq 0$, chgt ⊕ $O_2\left(-\frac{F_1}{2D_1}, 0\right)$

↳ élimine terme cte, pose $p = \frac{-D_1}{C_1}$, équa° réduite parabole : $y^2 = 2px$.

- si $D_1 = 0$, $C_1y^2 + F_1 = 0$. → 3 cas
  - ▸ si F_1 est signe opposé C_1, $p^2 = \frac{-F_1}{C_1}$, la coniq est réunion de 2 droites // d'équa° $y = \pm p$
  - ▸ si F_1 est nul, coniq se réduit à droite $y = 0$.
  - ▸ si F_1 m̂ signe C_1, coniq est vide.

⇒ MEE orbites des coniqs par isométries

Classificat° affine

Ds plan affine réel muni repère ; f déf $\forall M(x,y)$:

$$f(M) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ la coniq d'équat° $\mathcal{C}_f = 0$.

$\Rightarrow$ orbite μ $\longleftrightarrow^\vartheta$ affines ?

Pour $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$: $\exists \longleftrightarrow$ affine φ réel $\lambda \neq 0$, $f_1 \circ \phi = \lambda f_2 \Rightarrow \varphi(\mathcal{C}_{f_2}) = \mathcal{C}_{f_1}$

f_1 & f_2 st affinement équivattes.

$Q_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $L_f = \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix}$

$M_f = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow f(M) = {}^tX\, Q_f\, X + L_f X + F$$

$$= {}^t\tilde{X}\, M_f\, \tilde{X}.$$

f_1 & f_2 équivttes ssi m̂ signature.

$\Rightarrow$ signature de Q_f caractérise le signe de son déterminant Δ_{Q_f}.

Signature Q_f	signe Δ_{Q_f}	sig M_f	Δ_{M_f}	équa	Classe
(2,0)	$\oplus$	(3,0)	$\neq 0$	$x^2+y^2+1=0$	vide
		(2,1)	$\neq 0$	$x^2+y^2-1=0$	ellipse
		(2,0)	$=0$	$x^2+y^2=0$	point
(1,1)	$\ominus$	(1,2)	$\neq 0$	$x^2-y^2-1=0$	hyperbole
		(1,1)	$=0$	$x^2-y^2=0$	2 droites sécantes
(1,0)	nul	(2,1)	$\neq 0$	$x^2-y=0$	parabole
		(2,0)	$=0$	$x^2+1=0$	vide
		(1,1)	$=0$	$x^2-1=0$	2 droites //
		(1,0)	$=0$	$x^2=0$	1 droite

si $\Delta_{M_f} = 0 \Rightarrow$ coniq dégénérée.

Pratiq de la réducθ d'une équaθ de coniq à centre en repère orné

ⓐ Réduire l'équaθ d'un coniq f représentée ds repère orné $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$g(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 1.$$

↳ $\boxed{\text{Maple}}$.

Diagonalisaθ de l'endo ax direcθs asymptotiqs

endo sym A de E_2 tq $\vec{u}.A(\vec{u}) = 3x^2 - 2xy + y^2$

$\forall\ \vec{u} = xi + y\vec{j}$ de E_2 a pr mat ds base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ on cherche (Vp) & $\vec{Vp}$ de M q fournirent

les direcθs principales $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

```
with (linalg):
M := matrix(2,2, [3,-1,-1,1]):
eigenvects;
```

Rq

$x_M = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = (\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda + 2 - \sqrt{2})$

$= (\lambda - \alpha)(\lambda + \beta)$.

Puis la mat orthogonale P de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à base de $\vec{Vp}$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ en normant ces 2 vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \frac{-\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha}} & \frac{-\beta + 1}{\sqrt{2\beta}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} & \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \end{pmatrix}.$$

Recherche du centre

Résoudre $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$

```
> eq := {diff(g(x,y),x) = 0, diff(g(x,y),y)=0};
vas = {x,y};
```

$\Rightarrow\ 6x - 2y + 1 = 0$ et $-2x + 2y - 1 = 0$

```
> solve(eq, vas);
```

$\Rightarrow$ centre $w = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

> omega := (0, 1/2) ; g(omega);

$g(w) = -\frac{5}{4}$.

D'où équat° réduite ds repère $\mathcal{R}' = (w, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 - \frac{5}{4}.$$

Rq calcul angle de 2 droites

(P) soit θ mesure angle (D_1, D_2) (mod π).

- si $tr(A) = 0 \Rightarrow D_1$ & D_2 orthogonales
- si $tr(A) \neq 0 \Rightarrow D_1$ & D_2 pas orthog

et $\tan\theta = \pm 2 \frac{\sqrt{-\det A}}{tr(A)}$.

NB f est équat° de coniq à centre si elle admet un centre uniq.

(D) Centre $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}_f$ tt pt $\Omega \in \mathcal{E}_2$ tq

$\forall M \in \mathcal{E}_2, \; f(s_\Omega(M)) = f(M)$.

où s_Ω : symétrie centrale de centre Ω.

RIO

Ex 1 $g(x,y) =$ 1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

Diagonalisons l'endo. aux directs asymptotiqs.

$\forall \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de $\mathbb{E}_2$ a pr mat ds base $(\vec{i},\vec{j})$:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$ cherchons vp & $\vec{vp}$.

$$\chi_M = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-9)$$

$$E_{\lambda_4} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\{(\vec{e_1})\}.$$

$$E_{\lambda_9} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\{(\vec{e_2})\}.$$

Puis on normalise ces 2 vect^{rs} pr obtenir la mat orthogonale P de de passage de la base $(\vec{i},\vec{j})$ à la base de $\vec{vp}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Recherche du centre :

Résoudre $(\partial_1 g)(x,y) = (\partial_2 g)(x,y) = 0$.

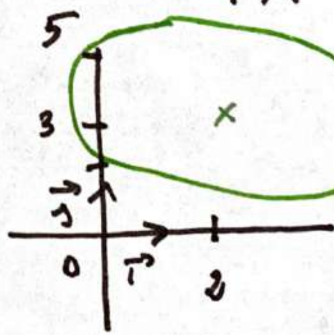
$$\begin{cases} 10x + 4y - 32 = 0 \\ 16y + 4x - 56 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (2,3)$$

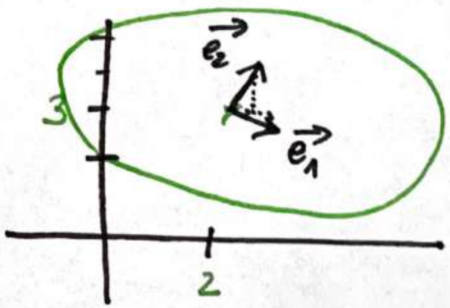
$\Rightarrow \omega = (2,3)$ coordonnées du centre.

$g(\omega) = -176$.

D'où équaθ réduite ds repère $\mathcal{R}' = (\omega, \vec{e_1}; \vec{e_2})$.

$$4X^2 + 9Y^2 - 176.$$





ex 1.

On a $rg(u \circ u^*) = rg(u^*) = rg(u)$

$Im(u \circ u^*) \subseteq Im\, u$

dc ces 2 sev st emboîtés & ont la m̂ dimension

- Dc il st égx

$$Im(u \circ u^*) = Im\, u.$$

Rq Preuve $rg(u) = rg(u^*)$ ℓ TH rg.

Th rg $\dim Im\, u^* = \dim E - \dim \ker u^*$

$= \dim E - \dim (Im\, u)^\perp$

$= \dim E - (\dim E - \dim Im\, u)$

$= \dim Im\, u.$

ie $\boxed{rg(u^*) = rg(u)}$

33

b) Mq $u^* \circ u$ & $u \circ u^*$ st auto-adjoints (+)

Mq auto-adjoints : $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^*$

$= u^* \circ u$

idem pr $u \circ u^*$.

A positif $\iff$ vp de A st ≥ 0.

A déf-positive $\iff$ vp st > 0.

$A \to (x,y) \longmapsto {}^tX A Y$

soit $\Delta = u^* \circ u$ & λ vp de Δ

soit x $\vec{vp}$ $\langle\Delta\rangle$ λ.

$\langle \Delta x, x \rangle = \boxed{\langle (u^* \circ u)(x), x \rangle}$

$= \langle u(x), u(x) \rangle$

$= \boxed{\langle \lambda x, x \rangle} = \lambda \langle x, x \rangle.$

λ vp de $u^* \circ u$ & $x \neq 0$

un $\vec{vp}$. $\Leftrightarrow$ λ.

$\langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$

$\langle u(x), u(x) \rangle$ $=$ si $u(x)$,

alors $0 = \lambda \langle x, x \rangle$,

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

si $\langle u(x), u(x) \rangle > 0$

la m̂ égalité $\Rightarrow \lambda > 0$.

$A = \mathrm{Mat}(u^* \circ u, v)$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}^{\,V_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix}}^{\,V_r} \end{pmatrix}$$

$v = v_1 + \dots + v_r$, $v_q \in V_q = E(\lambda_q)$

$\langle v, v \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \langle v_r, v_r \rangle$

$v_1 \in V_1$, $B_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ base orné de V

$V_1 = \sum a_{j1} e_j$

$\langle v_1, v_1 \rangle = \sum a_{j1}^2 \langle e_i, e_j \rangle$

Supposons u inversible alors $\ker u = \{0\}$

d'après 1) $\ker u = \ker u^*$

$\Leftrightarrow u^* \circ u$ est inversible

$\Rightarrow u^* \circ u$ n'a pas de vp égale à 0

$\Rightarrow \forall\ \lambda$ vp de $u^* \circ u$; λ est > 0.

si $u^* \circ u$ est définie > 0, si $\langle u(x), u(x) \rangle > 0$

$\forall x$, $\|u^* u(x)\|^2 = 0 \Rightarrow u^* \circ u(x) = 0$

$\Leftrightarrow u(x) = 0$.

& u est dc injectif $\Leftrightarrow$ bijectif (en dim finie).

(si $\langle u(x), u(x) \rangle > 0$ la m̂ égale)

$\lambda > 0$

c) $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\phi : \mathcal{L}(E)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(u,v) \longmapsto tr(u^*, v)$$

$\phi(u,v) = tr(u^* \circ v)$

$\phi(u_1+u_2, v) = tr((u_1+u_2)^* \circ v)$

$= tr((u_1^* + u_2^*) \circ v)$

$= tr(u_1^* \circ v + u_2^* \circ v)$

$= tr(u_1^* \circ v) + tr(u_2^* \circ v)$

$= \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$

$\lambda \in \mathbb{R}$,

$\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u,v)$

signature $\phi(u,v) = \phi(v,u)$

$tr(u^* \circ v) = tr(v \circ u^*)$

$= tr((v \circ u^*)^t)$

do base ornée en termes matrice, l'adjoint est la transposée. $= tr(u \circ v^*)$

$= tr(v^* \circ u)$

Comme $M = Mat(u)$, $N = Mat(v)$

soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\phi(u,u) = tr(u^* \circ u)$

$u^* \circ u$ est symétriq dc diagonalisable.

soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vp 2 à 2 distinctes.

$E(\lambda_j)$ Espace associé à λ_j $\forall j$.

$\forall v \in E$, v s'écrit $v = v_1 + v_2 + \dots + v_r$

$v_j \in E(\lambda_j)$, on sait q $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_i)$ si $i \neq j$.

$\phi(u,u) = Tr(u^* \circ u)$

$Tr(u^* \circ u) = Tr({}^tM \cdot M)$

Dc $M = (M_{ij})_{ij}$, $({}^tMM)_{ij} =$

$= \sum_{k=1}^{n} M_{ki}$,

$Tr({}^tMM) = \sum_{i=1}^{n}$

$\cdot\ \phi(u,0) = \sum_{i,j} u_{ij}^2 = 0$

$\Leftrightarrow M_{ij} = 0\ \forall i,j$. ie $u = 0$.

$\phi(u,u) = Tr(u^* \circ u)$.

$Tr(u^* \circ u) = Tr({}^tM.M)$

$\boxed{Trace : \Sigma\ vp}$

d) $\|u\|^2 = \phi(u,u) = Tr(u^* \circ u)$

u est diagonalisable $\underline{P}$ $\alpha_1, \dots \alpha_n$

si vp 2 à 2 distinctes.

$\{$ $\exists P$ inversible tq $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$\exists$ dc base $\mathcal{B}$ de E tq base ortho.

$Mat_\beta(u) = A$ est diagonale :

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_N \end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$\boxed{Mat_\beta(u^*) = {}^tA}$

dc $tr(u^* \circ u) = tr({}^tAA) = tr(A^2)$

$= tr(A^2) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2$

Review ex15. fiche 3

$\exists P$ tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

On cherche B Sym (+) tq

$$B^2 = A$$

- soit λ une valp de B,

$\exists v \neq 0$, $Bv = \lambda v$

$B^2 v = \lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow \lambda^2$ est vp de A.

B (+) $\Rightarrow$ vp de B st racines carrées (+) de vp de A $\quad \mathrm{Spec}(B) \subseteq \{0, 3\}$.

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \exists Q$ tq $E = Q^{-1}BQ$.

- $(P^{\,t} E P^{-1})^2 = P^{\,t} E^2 P^{-1}$

$\quad \underset{B_0}{\parallel} \qquad P^{\,t} D P^{-1} = A$

et $B_0^2 = A$

$\mathrm{Spec}(B) = \{0, 3\}$, $\exists Q$ tq $Q^{-1}BQ = E$

$B^2 = QE^2Q^{-1} = Q\underset{PDP^{-1}}{\underset{\parallel}{D}}Q^{-1} = A$

$QDQ^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow P^{-1}QD = DP^{-1}Q$

$\Leftrightarrow P^{-1}Q$ commutent $\forall = PDP^{-1}$

soit $C(D)$ ss-grpe des mat commut $\forall D$.

dc $P^{-1}Q \in C(D)$, $Q = PK$.

où $K \in C(D)$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{pmatrix} M$

$B = QEQ^{-1} = PKE(PK)^{-1}$

$B^2 = PKE^2(PK)^{-1}$

$= PKDK^{-1}P^{-1}$

$= PDKK^{-1}P^{-1}$

$= A$.