Logique

C1 Logique propositionnelle

C2 Logique prédicats .

C1 : Logique propositionnelle

I / Syntaxe
- → ordre de priorité & associativité
- → ⓓ inductive
- → hauteur ff , substitu° ff
- → le principe d'induc°
- → TH
- → DM

II / Sémantique
- → stq formelle connecteurs
- → stq TDV
- → stq intuitive ⇒
- → satisfaisabilité & tautologie
- → équivalence & csqce stq
- → pptés algébriqs
- → axiomatisa° compétence
- → syst. complet de connecteurs.

ⓞ

Introduct°

→ Antq té au $\overline{XIX}$ ° s.

→ Deb $\overline{XX}$: crise fdmts maths

→ TH de complétude

→ Pb logique

→ Applicat°s

I/ Antqté au $\overline{XIX}$ ° s.

- ϕ, avoir vie bonne, se conforme lois Ω', raisonnements syllogismes.
- Hstqt, ϕ maths utilisées ds syllogismes pr dmg TH.
- Depuis Aristote, très peu d'évolut°.
- Au $\overline{XIX}$ ° : mathématisat° de la logique
- Georges Boole, *The law of Thought*, invent° logique propositionnelle.
- Gottlob Frege, *Begriffsschrift*, quantificat°.

II/ Deb $\overline{XX}$: crise fdmt maths

- Paradoxe de Bertrand Russel dans la TH des ens. $U = \{x,\ x \notin x\}$.
  - $u \notin u \Rightarrow$ par définit° de U que $u \in u$
  - $u \in u \Rightarrow u \notin u$

$\boxed{u \in u \iff u \notin u}$ Menace cohérence maths sciences.

- Prgm Hilbert : prgm finitistes (user ens fini de principes : dmg ∀ maths)
- Kurt Gödel : DMQé prgm voué à ÉCHEC
  - 1er TH d'incomplétude : ∃ proposit° φ de l'arithmétique q n'est pas démontrable & dont la négation n'est pas démontrable.
  - 2° TH incompl. (1931) : Tout système logique contenant l'arithmétique est soit contradictoire, soit il ne peut dmg sa propre cohérence.

→ on ne peut pas discerner certaines pptés sur objets finis.

III/ TH Complétude (1929) : Gödel a dmgé que tt TH de arithmétique est démontrable.

- G numérise les élts.
  - les nbrs permettent de représenter énoncés logiqs
  - arith. permet opéraƟs
  - on pt représenter la logiq elle-mm ds arithm & la réduire à du calcul sur les nbrs.

Alan Turing (1936), thèse de master, lis TH G :

→ modèle de calcul q formalisme : machines de Turing

→ exiber machine q permet exécuter les autres : machine programmable.

→ exibe un pb q n'a pas solᶿ algorithmiq : le pb de l'arrêt des machines de Turing.

- Syntaxe (ff programmables) & sémantiqs (modèles, graphes, entiers...)

IV / Pb logique

$\boxed{\text{VDM}}$ Vérification de Modèle (ff vraie ds $\boxed{\text{M}}$ fixé ?)

$\boxed{\text{S}}$ Satisfaisabilité ($\boxed{\text{M}}$ de ff est vraie ?)

$\boxed{\text{T}}$ Tautologie (ff est vraie ds $\forall$ $\boxed{\text{M}}$?)

$\boxed{\text{D}}$ Démonstration (qu'est-ce dmqᶿ ?)

V / ApplicaƟs

$\boxed{\text{VDM}}$ - En programmaᶿ, recherche de données

$\boxed{\text{S}}$ - optimisaƟ prgm, éliminer code mort
- pb résoluƟs, opt. sj contraintes
- prgmᶿ p contraintes : pb graphes, jeux
- prgmᶿ synchrone : généraƟ de code de machines à états finis par spcfcᶿ logique.

$\boxed{\text{T}}$ - dmq automatiqᵗ TH
- vérif. automatisaᶿ prgms
- certificaᶿ prgms (logique de Hoare)

$\boxed{\text{D}}$ - dmqᶿ continus algorithmes.

- On obtient un algorithme (reste DE)

  ↳ $\boxed{\text{M}}$ dialectica de Gödel

  ↳ CoQ (Curry Howard de Brujin)

    ↳ extraire DM algorithmes

→ article, On the usual Effectiveness of Logic in computer science.

→ complexité descriptive :

→ logiqs épistémiqs

C1 Logique propositionnelle

LP $\leftrightarrow$ articula° vérité.

- énoncés vrais $\vdash$ construire autres vrais
- condi° de vérité d'un énoncé
- dmq énoncé est tjrs vrai.

I Syntaxe

D syntaxe : des termes ou formules.

Atomes

- $\top$ et $\perp$: tautologie & absurde, true/false (top / bottom)

FF composites

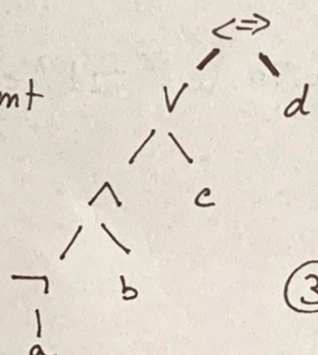
termes conjonc° disjonc°

Syntaxe concrète & Abstraite.

- Ordre de priorité : $\neg > \wedge > \vee > \{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

$\neg a \wedge b \vee c \Leftrightarrow d$

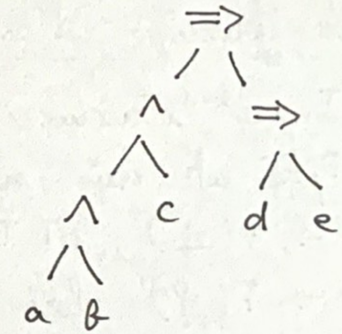
$((\neg a \wedge b) \vee c) \Leftrightarrow d$ dénotent



3

- Associativité :

$(a \wedge b) \wedge c \Rightarrow (d \Rightarrow e)$ dnt



- Défini° inductive (récursive)

$\rightarrow$ variable d'une ff : var (φ).

$var(\varphi) = \emptyset$ | $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$

$var(x) = \{x\}$ | $var(\varphi \text{ op } \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$

- Hauteur d'une ff $h(\varphi)$.

- Substitu° ff : subs (φ, σ)

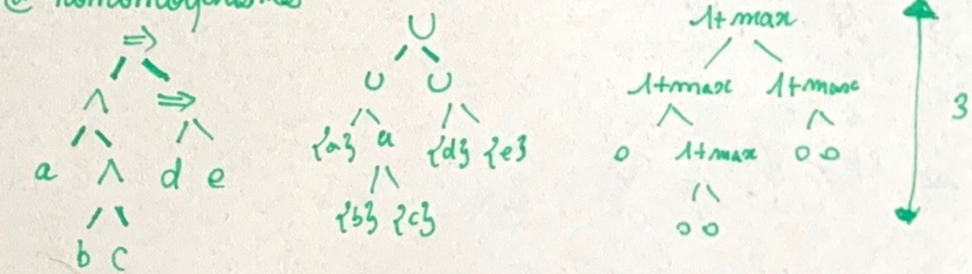
$subst(\varphi, \sigma) = \varphi$ si $\varphi \in \{\top, \perp\}$.

$subst(x, \sigma) = \sigma(x)$

$subst(\neg\varphi, \sigma) = \neg\, subst(\varphi, \sigma)$

$\hookrightarrow$ ces définit° st : homomorphismes (se base sr S^{ce}) qq chose

@ homomorphismes



Le principe d'induc°

Induc° structurelle

Ppté est vraie sr $\forall$ ff ?

- $\rightarrow P(\bot), P(\top), P(x)$
- $\rightarrow P(\varphi)$ alors $P'(\neg\varphi)$
- $\rightarrow$ si $P(\varphi) \wedge P(\psi)$ alors $P(\varphi \text{ op } \psi)$ pr tt op ds $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow\}$

$\rightarrow$ induc° : cas particulier de récurrence.

TH Une ff φ ds prop(X) et tte subs σ, si $\forall x$ dans X, $h(\sigma(x)) \leq N$ alors $h(\text{subs}(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N$

DM par induc° sr S^e de φ :

× cas $\varphi = \bot$ ou $\varphi = \top$

× cas $\varphi = x$

× cas $\varphi = \neg\varphi$

× cas $\varphi = \psi_1 \text{ op } \psi_2$

II/ Sémantique

sémantiq intuitive connecteurs

- $\top, \bot$
- conjonc°, disjonc°, néga°.

Sémantiq formelle connecteurs :

Évalua° ff, valua° v.

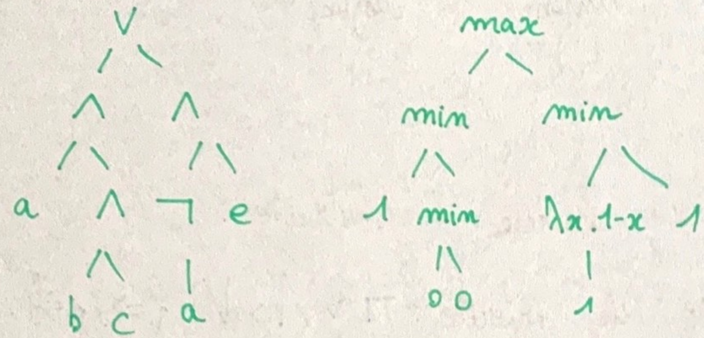
$[\![\top, v]\!] = 1$ | $[\![\neg\varphi, v]\!] = 1 - [\![\varphi - v]\!]$

$[\![\bot, v]\!] = 0$ | $[\![\varphi \wedge \psi, v]\!] = \min([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

$[\![x, v]\!] = v(x)$ | $[\![\varphi \vee \psi, v]\!] = \max(- - - - - -)$

@ σ est valua° : $a=1, b=0, c=0, d=1, e=1$

Evalua° de $[\![(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg d \wedge e), \sigma]\!]$



NB: $\lambda(x) = 1-x \Leftrightarrow \lambda x. 1-x$

$[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!] = \max([\![a \wedge b \wedge c, \sigma]\!], [\![\neg d \wedge e, \sigma]\!]$

Sémantique par table de vérité

@

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

On prend le min pour $\wedge$, max pour $\vee$ et $\lambda x.\, 1-x$ pour $\neg$.

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

$\varphi \Rightarrow \psi$: si φ (est vraie) alors ψ (est vraie)

@ si le bord du carré est Rge alors son intérieur est gris.

Table de vérité :

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$\varphi \Leftrightarrow \psi = (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

a	b	c	$a = b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c \vee \neg a$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Nbr lignes : 2^n, n : nbr variables

Satisfaisabilité & Tautologie

$\boxed{S}$ Une ff φ est s. s'$\exists$ une valua$^{\circ}$ v tq

$$[\![\varphi, v]\!] = 1 .$$

On dit que v satisfait φ.

$\boxed{T}$ Une ff φ est t. si $\forall$ valua$^{\circ}$ v, $[\![\varphi, v]\!] = 1$.

On note $\models \varphi$, le fait φ soit tautologie.

Equivalence & Conséquence sémantique

Equivalentes sémantiques, $\varphi \equiv \psi$ lorsque $\forall$ valua$^{\circ}$ v, $[\![\varphi, v]\!]$, $[\![\psi, v]\!]$.

On pt internaliser ds logiq l'équivalence sémantiq.

$\varphi \equiv \psi$ ssi $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Congruence $\equiv$

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$

Symétrie $\varphi \equiv \psi \vdash \psi \equiv \varphi$

Transitive $\varphi \equiv \psi \land \psi \equiv \theta \vdash \varphi \equiv \theta$

Ptés Algébriques

Commut

Associat

Distrib.

Identité. $\varphi \lor \bot \equiv \varphi$, $\psi \land \top \equiv \psi$

Zéro $\varphi \lor \top \equiv \top$, $\varphi \land \bot \equiv \bot$

Itempotence $\varphi \lor \varphi \equiv \varphi$, $\varphi \land \varphi \equiv \varphi$

Absorption $\varphi \lor (\varphi \land \psi) \equiv \varphi$, $\varphi \land (\varphi \land \psi) \equiv \varphi$

Complémentaθ $\varphi \lor \neg \varphi \equiv \top$, $\varphi \land \neg \varphi \equiv \bot$

Double négaθ $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Morgan $\neg(\varphi \lor \psi) \equiv \neg\varphi \land \neg\psi$

$\neg(\varphi \land \psi) \equiv \neg\varphi \lor \neg\psi$

Défini° $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi$

$\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi)$

Complétude équationnelle

Axiomatisaθ de compétence.

si $\varphi \equiv \psi$, on pt réécrire αφ équaθ données ds axiomatisaθ.

Système Complet de connecteurs

SC : Si pr tte ff φ, $\exists$ ff ψ tq :

→ ψ n'est construite αφ connecteurs de φ

→ $\varphi \equiv \psi$.

@ SC $\{\lor, \neg\}$, $\{\land, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \bot\}$

@ $\underline{\{\neg, \lor\}}$, transformaθ $\overline{\cdot}$

- $\overline{\bot} = \neg(x \lor \neg x)$
- $\overline{\top} = x \lor \neg x$
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \lor \psi} = \overline{\varphi} \lor \overline{\psi}$
- $\overline{\varphi \land \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \lor \neg\overline{\psi})$
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \lor \overline{\psi}$
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \lor \overline{\psi}) \lor \neg(\neg\overline{\psi} \lor \overline{\varphi}))$

↳ $\overline{\varphi}$ ne contient que $\neg$ et $\lor$.