Université de Lille

L2 Mathématiques - M33

2020/2021

Chapitre 3

–

SÉRIES NUMÉRIQUES

---

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1.1 On appelle *suite des sommes partielles* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Le nombre s_n est appelé *somme partielle* d'ordre n.
La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement noté $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on parle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on dit que u_n est le terme général de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Remarque 1.1.2 Si $(u_n)_n$ n'est définie qu'à partir du rang n_0, la série de terme général est alors notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Les séries semblent être un cas particulier de suites. En fait, toute suite peut-être représentée par une série. Étant donnée une suite $(u_n)_n$, posons $U_n = u_n - u_{n-1}$ si $n > 0$ et $U_0 = u_0$. Alors

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + \ldots + U_n &= u_0 + u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \ldots + u_n - u_{n-1} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ n'est autre que la suite $(u_n)_n$.

1.2 Convergence

Définition 1.2.1 Si la la suite des sommes partielles $(s_n)_n$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge vers un réel s, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On appelle s la *somme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Une série qui ne converge pas est dite *divergente.*
Lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on appelle *reste d'ordre* n de $\sum_{n\geq 0} u_n$ le nombre $r_n = s - s_n$. En particulier, la suite $(r_n)_n$ converge vers 0.

Remarque 1.2.2 La somme de la série de terme générale $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et le reste d'ordre n n'ont de sens que si l'on a établi la convergence de la série alors que la notation $\sum_{n\geq 0} u_n$ représente une suite qu'elle converge ou non. La somme d'une série et le reste d'ordre n d'une série sont des nombres réels.

Proposition 1.2.3 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries dont on suppose qu'elles ne diffèrent que par un nombre fini de termes, autrement dit, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, on a $u_n = v_n$. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Preuve : Notons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $(T_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} v_n$. Pour $n > p$ nous avons

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k \\
&= S_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k \\
&= S_p + \sum_{k=p+1}^{n} v_p \\
&= S_p - T_p + T_n
\end{aligned}$$

où $S_p - T_p$ est une constante. Par conséquent, si $(T_n)_n$ converge, il en est de même pour $(S_n)_n$ et si $(T_n)_n$ diverge, il en est de même pour $(S_n)_n$. □

Remarque 1.2.4 Attention, dans la proposition ci-dessus, la nature des séries est la même, mais pas leur somme !
D'autre part, on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes. La nature d'une série ne dépend donc pas de ses premiers termes.
En particulier, si la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq n} u_k$ est encore une série convergente et

$$\begin{aligned}
r_n &= s - s_n \\
&= \left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k \right) - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.5 (Série géométrique) Une série géométrique est une série de terme général $u_n = aq^n$ où $a \neq 0$ et $q \in \mathbb{R}$. La somme partielle d'ordre n est

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + \ldots + u_n \\
&= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \\
&= a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1,\ a(n+1) \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$.

Exemple 1.2.6 (Série télescopique) Une série télescopique est une série dont le terme général u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$ où $(v_n)_n$ est une suite quelconque. Soit $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Alors en décomposant u_n en éléments simples, il vient :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}.$$

Ainsi, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ converge et sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1$.

Proposition 1.2.7 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve : Soit l la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles. Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = l$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = l - l = 0$$

□

Remarque 1.2.8 La réciproque de la proposition est *fausse*. Considérons par exemple la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Alors pour tout $x \in [1, +\infty[$, nous avons $\ln(1+x) \leq x$. Considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est de classe C^1 et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 \leq 0$. Par conséquent f est décroissante et pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(0) = 0$. On en déduit que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

puis que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.
Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge bien que son terme général tende vers 0.

Par contraposition de la proposition précédente, on en déduit

Corollaire 1.2.9 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série dont le terme général u_n ne tend pas vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge (on parle de divergence *grossière*).

Théorème 1.2.10 Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent respectivement vers s et t et $\sum_{n\geq 0} w_n$ une série divergente. Alors

(i) La série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ converge vers $s+t$, autrement dit $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) La série $\sum_{n\geq 0}(u_n + w_n)$ diverge.

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ converge vers λs, autrement dit $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Preuve : Ce sont des conséquences de la limite de la somme de deux suites et du produit d'une suite par un scalaire.

Définition 1.2.11 (Critère de Cauchy) Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q > p \geq N$, on ait

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.12 Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve : Notons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$. Alors par définition, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ converge.
La suite $(S_n)_n$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on ait $|S_q - S_p| < \varepsilon$.
Mais pour tout $q > p \geq N$, nous avons

$$|S_q - S_p| = \left| \sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right|.$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. □

2 Séries à termes positifs

Définition 2.0.1 Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.0.2 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

Preuve : Notons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Comme $u_n \geq 0$ pour tout n, la suite $(S_n)_n$ est croissante. Par conséquent, $(S_n)_n$ converge si et seulement si elle est majorée. $\square$

Théorème 2.0.3 (de comparaison) Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

(i) si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge également,

(ii) si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge également.

Preuve : Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, nous avons pour tout n :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs majorée donc elle converge.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$. D'autre part, nous avons pour tout n :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$. $\square$

Exemple 2.0.4 Considérons la série de terme général $1/n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq 2$, nous avons $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Comme la série télescopique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est une série à termes positifs convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Rappelons :

Théorème 2.0.5 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$. Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature. De plus, dans le cas où les séries convergent, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} u_n \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} v_n$.

Preuve : Comme $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.
Comme $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2}$. Puisque $(v_n)_n$ est à terme positif, on en déduit que pour tout $n \geq N$, on a :

$$\frac{1}{2} v_n \leq (1+\varepsilon_n) v_n = u_n \leq \frac{3}{2} u_n.$$

Ainsi, si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} v_n$ et donc pour la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} v_n$ et donc pour la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

D'autre part, lorsque les séries convergent, pour tout $q > p$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q} u_k - \sum_{k=p}^{q} v_k\right| &= \left|\sum_{k=p}^{q} \varepsilon_n v_n\right| \\ &\leq \sum_{k=p}^{q} |\varepsilon_n v_n| \\ &\leq \sup_{q\geq k\geq p} |\varepsilon_k| \sum_{k=p}^{q} v_n.\end{aligned}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, il vient

$$\left|\sum_{k=p}^{+\infty} u_k - \sum_{k=p}^{+\infty} v_k\right| \leq \sup_{k\geq p} |\varepsilon_k| \sum_{k=p}^{+\infty} v_n.$$

Si la suite $(v_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang, il n'y a rien à montrer. Par conséquent, on peut supposer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=p}^{+\infty} v_n > 0$. Par suite, il vient

$$\frac{\left|\sum_{k=p}^{+\infty} u_k - \sum_{k=p}^{+\infty} v_k\right|}{\sum_{k=p}^{+\infty} v_n} \leq \sup_{k\geq p} |\varepsilon_k|.$$

Mais comme $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0, pour tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\varepsilon_n| < \delta$. Ainsi pour tout $p \geq N$, $\sup_{k\geq p} |\varepsilon_k| \leq \delta$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \sup_{k\geq p} |\varepsilon_k| = 0$.
Par conséquent, si nous définissons la suite $(\varepsilon'_p)_p$ par $\varepsilon'_p = \frac{\sum_{k=p}^{+\infty} u_k - \sum_{k=p}^{+\infty} v_k}{\sum_{k=p}^{+\infty} v_n}$, la suite $(\varepsilon'_p)_p$ converge vers 0 et

$$\sum_{k=p}^{+\infty} u_k = (1 + \varepsilon'_p) \sum_{k=p}^{+\infty} v_k,$$

ce qui prouve l'équivalence des restes des séries. $\square$

Exemple 2.0.6 $(n^2 + 1)/(n^4 + 1) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum_{n\geq 0}(n^2 + 1)/(n^4 + 1)$ converge.
$\sin \frac{1}{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 2.0.7 (Règle de d'Alembert) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. S'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (c'est en particulier le cas si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement (c'est en particulier le cas si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$).

Preuve : Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$. Montrons alors que pour tout $n \geq N$, on a

$$0 \leq u_n \leq \lambda^{n-N} u_N. \qquad (1)$$

En effet, l'inégalité (1) est vraie pour $n = N$.
Supposons l'inégalité (1) vraie au rang n. Alors

$$u_{n+1} \leq \lambda u_n \leq \lambda^{n+1-N} u_N.$$

Par récurrence, l'inégalité (1) est donc vérifiée pour tout $n \geq N$.

Comme $0 < \lambda < 1$, la série $\sum_{n \geq N} u_N \lambda^{n-N}$ converge et par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge également.
Remarquons maintenant que si $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors il existe $\lambda = \frac{\ell+1}{2} < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$.
Supposons maintenant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ et donc $u_n \geq u_N$. Ainsi $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 puisque $u_N > 0$.
Enfin, si $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors il existe $\lambda = \frac{\ell+1}{2} > 1$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$.
$\square$
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ on ne peut pas conclure en général. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Mais si $v_n = \frac{1}{n^2}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple 2.0.8 Considérons la série de terme général $u_n = (3n)!/(5^n(n!)^3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(3(n+1))!}{5^{n+1}((n+1)!)^3}}{\frac{(3n)!}{5^n(n!)^3}} \\
&= \frac{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{5\cdot 5^n(n+1)^3(n!)^3}}{\frac{(3n)!}{5^n(n!)^3}} \\
&= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{5(n+1)^3} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{9}{5} > 1
\end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{5^n(n!)^3}$ diverge.

Théorème 2.0.9 (Critère de Cauchy) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

(i) S'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel qu'à partir d'un rang, $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (en particulier si $(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n})_n < 1$).

(ii) S'il existe un rang à partir duquel $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement (en particulier si $(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n})_n > 1$)

Preuve : Supposons qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \geq N$. Cela implique que $0 < u_n \leq \lambda^n$ pour tout $n \geq N$.
Comme $\lambda < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ converge et par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
Remarquons que si $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, alors $\lambda = \frac{\ell+1}{2} < 1$ et il existe un rang à partir duquel $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
Si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq N$, alors $u_n \geq 1$ et la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
Remarquons que si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, alors il existe un rang à partir duquel $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. $\square$
Lorsqu'on utilise le critère de D'Alembert ou de Cauchy, on calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Si ces limites existent et sont différentes de 1, les critères s'appliquent. Si la limite vaut 1, les règles ne permettent pas de conclure

Exemple 2.0.10 Considérons la série de terme général $u_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u_n} &= n^{\frac{1}{n}} - 1 \\
&= e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n \xrightarrow{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

et donc la série $\sum_{n\geq 0}(n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$ converge.

La proposition suivante montre que si le critère de D'Alembert s'applique, alors le critère de Cauchy s'applique aussi. Elle montre aussi que si la limite dans le critère de D'Alembert vaut 1, il est inutile d'essayer d'appliquer le critère de Cauchy.

Proposition 2.0.11 Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs. Alors l'égalité $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ implique $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$$

et donc

$$(l-\varepsilon)u_n \leq u_{n+1} \leq (l+\varepsilon)u_n.$$

On en déduit alors par récurrence que pour tout $n \geq n_0$,

$$(l-\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0} \leq u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0}} = l-\varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(l+\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0}} = l+\varepsilon$.
Ainsi, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait

$$l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. $\square$

Théorème 2.0.12 (Comparaison à une intégrale généralisée) Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n\geq a} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on suppose $a = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [k, k+1]$, on a puisque f est décroissante :

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[k, k+1]$, il vient

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k), \tag{2}$$

En sommant pour k compris entre 0 et un entier n arbitraire, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k). \tag{3}$$

Si la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge, la fonction f étant positive, on en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\int_0^x f(t)dt$ est majorée par $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et, encore puisque f est positive, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, on déduit de l'inégalité (3) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n f(k)$ est majorée par $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ car f est positive. Encore parce que la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge.
En sommant (2) pour k compris entre les entiers n et N, $n < N$, nous avons

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \leq \int_n^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{N} f(k).$$

Si la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ convergent, lorsque N tend vers $+\infty$, il vient alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k).$$

$\square$

Exemple 2.0.13 (Séries de Riemann) On étudie la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$? Considérons pour cela $f : [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. Alors f est à valeurs positives et si $\int_1^{+\infty}f(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha>1$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.
Remarquons encore que si on approche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ par $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$, alors l'erreur commise est comprise entre $\int_{N+1}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{(\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}}$ et $\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{(\alpha-1)(N)^{\alpha-1}}$. Pour $\alpha=2$ et $N=1000$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ est approximé par $\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{n^2}\approx 1,64393$.

Exemple 2.0.14 Étude de la série $\sum_{n\geq 0}e^{-\sqrt{n}}$. Si on essaie d'appliquer le critère de D'Alembert, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{e^{-\sqrt{n}}} &= \lim_{n\to+\infty}e^{-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1.\end{aligned}$$

Par conséquent, le critère de D'Alembert ne s'applique pas et celui de Cauchy non plus. Remarquons alors que $\lim_{n\to+\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}=0$. Par conséquent, il existe un rang N à partir duquel $n^2e^{-\sqrt{n}}\leq 1$.
Ainsi pour tout $n\geq N$, on a

$$0\leq e^{-\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}e^{-\sqrt{n}}$ converge.

3 Séries à termes quelconques

3.1 Convergence absolue

Définition 3.1.1 (Série absolument convergente) On dit que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ *converge absolument* si la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge.

Exemple 3.1.2 La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ avec $a>1$ est absolument convergente car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ converge pour tout $a>1$. Par contre, elle n'est pas absolument convergente si $0<a\leq 1$.

Théorème 3.1.3 Si la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge absolument alors elle converge.

Preuve : Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ vérifie le critère de Cauchy des séries ce qui montrera qu'elle converge.
Soit $\varepsilon>0$. Comme la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p>q\geq N$ on ait

$$\sum_{n=q+1}^{p}|u_n|<\varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=q+1}^{p}u_n\right| &\leq \sum_{n=q+1}^{p}|u_n|\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

3.2 Semi-convergence

Définition 3.2.1 (Série semi-convergente) On dit qu'une série est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

Définition 3.2.2 Deux suites de nombres réels $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont dites adjacentes si

1. $(a_n)_n$ est décroissante,
2. $(b_n)_n$ est croissante,
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$.

Théorème 3.2.3 Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites adjacentes telles que $(a_n)_n$ soit décroissante et $(b_n)_n$ croissante.
Alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \ell \leq a_n$.

Définition 3.2.4 On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est alternée si et seulement si pour tout n $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Théorème 3.2.5 (Critère des séries alternées) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_n$ soit une suite décroissante qui converge vers 0.
Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n satisfait $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$ et est du signe de u_{n+1}.

Preuve : Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous allons montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont des suites adjacences ce qui prouvera que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Sans restriction, on suppose que pour tout n, u_n est du signe $(-1)^n$. Alors puisque $(|u_n|)_n$ est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0. \end{aligned}$$

donc $(S_{2n})_n$ est décroissante.
De même

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} \\ &= |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0. \end{aligned}$$

donc $(S_{2n+1})_n$ est croissante.
Enfin

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0,$$

ce qui prouve que $(S_{2n+1})_n$ et $(S_{2n})_n$ sont adjacentes et donc que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Notons S la somme de cette série.
Nous avons pour tout n

$$S_{2n+1} = S_{2n} - |u_{2n+1}| \leq S \leq S_{2n}$$

donc

$$-|u_{2n+1}| \leq \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k = S - S_{2n} \leq 0$$

d'où le reste d'ordre $2n$ est du signe de u_{2n+1} et vérifie

$$\left|\sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{2n+1}|.$$

De même

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + |u_{2n+2}|$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=2n+2}^{+\infty} u_k = S - S_{2n+1} \leq |u_{2n+2}|$$

d'où le reste d'ordre $2n+1$ est du signe de u_{2n+2} et vérifie

$$\left| \sum_{k=2n+2}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{2n+2}|.$$

□

Exemple 3.2.6 Étudions la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.
Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument.
Si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne converge pas absolument puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente. Comme $(\frac{1}{n^\alpha})_n$ est une suite décroissante qui converge vers 0, le critère des séries alternées implique que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
On en conclut que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente lorsque $\alpha > 1$ et semi convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Théorème 3.2.7 (Théorème d'Abel) Si $u_n = \epsilon_n v_n$ où :

(i) la suite $(\epsilon_n)_n$ est une suite positive, décroissante et converge vers 0,

(ii) il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} v_k| \leq M$.

alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et le reste de la série vérifie

$$\left| \sum_{k=q+1}^{+\infty} u_k \right| \leq 2\varepsilon_{q+1} M.$$

Preuve : Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy des séries en faisant une *transformation d'Abel*. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $p > q$, entiers, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{p} u_k &= \sum_{k=q+1}^{p} \varepsilon_k v_k \\
&= \sum_{k=q+1}^{p} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) \\
&= \sum_{k=q+1}^{p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=q}^{p-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\
&= \varepsilon_p V_p - \varepsilon_{q+1} V_q + \sum_{k=q+1}^{p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| \leq |\varepsilon_p V_p| + |\varepsilon_{q+1} V_q| + \left| \sum_{k=q+1}^{p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k \right|.$$

La suite $(\varepsilon_k)_k$ étant une suite positive et décroissante, nous avons

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \varepsilon_p \left|V_p\right| + \varepsilon_{q+1} \left|V_q\right| + \sum_{k=q+1}^{p-1} \left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}\right) \left|V_k\right|.$$

La suite $(V_k)_k$ étant majorée par M, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| &\leq \varepsilon_p M + \varepsilon_{q+1} M + M \sum_{k=q+1}^{p-1} \left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}\right) \\ &\leq \varepsilon_p M + \varepsilon_{q+1} M + M\varepsilon_{q+1} - M\varepsilon_p \\ &= 2\varepsilon_{q+1} M.\end{aligned}$$

La suite $(\varepsilon_n)_n$ tendant vers 0, il existe N tel que pour tout $n > N$, on a $|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi, pour tout $p > q \geq N$, nous avons

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité $\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq 2\varepsilon_{q+1} M$, nous obtenons la majoration du reste

$$\left|\sum_{k=q+1}^{+\infty} u_k\right| \leq 2\varepsilon_{q+1} M.$$

□

Exemple 3.2.8 Étude de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$. On applique le théorème d'Abel en posant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sin n$. La suite $(\varepsilon_n)_n$ est décroissante, positive et converge vers 0. De plus pour $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin k &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\ (e^{ik}) \\ &= \mathrm{Im}\ \left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \\ &= \mathrm{Im}\ \left(\frac{1 - e^{in)}}{1 - e^{i}}\right)\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| &\leq \left|\frac{1 - e^{in}}{1 - e^{i}}\right| \\ &\leq \frac{2}{|1 - e^{i}|}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $|\sum_{k=1}^{n} v_n| \leq M$ où $M = \frac{2}{|1-e^{i}|}$.
Le théorème d'Abel implique que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge.

3.3 Utilisation d'un développement asymptotique

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ dont on cherche à déterminer la nature. Lorsque l'on utilise un équivalent v_n de u_n, on réalise souvent un développement à l'ordre 1. Cela n'est pas toujours suffisant et il faut parfois un développement à un ordre plus élevé.

Exemple 3.3.1 Considérons par exemple la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$. Alors u_n n'est pas de signe constant et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas absolument puisque $|u_n| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. De plus $(|u_n|)_n$ converge vers 0 mais on va voir qu'elle n'est pas décroissante. Nous avons :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(1+\varepsilon(n))\right), \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0 \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon(n)).
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon(n))$ est une série convergente puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente et $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon(n)) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente. On en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge et aussi que $(|u_n|)_n$ n'est pas décroissante sinon le critère des séries alternées se serait appliqué et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ aurait convergé.
Remarquons enfin que $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge alors que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exemple 3.3.2 Étudions la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$, $n \geq 1$. Puisque $1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \leq 1 \leq 1 + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée et on ne peut pas juste l'étudier au moyen d'un équivalent. Nous avons

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{1}{2n^2}(1+\varepsilon(n)) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée convergente.
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n^2}(1+\varepsilon(n))$ converge car $\frac{1}{2n^2}(1+\varepsilon(n)) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

4 Opérations algébriques sur les séries

4.1 Associativité : groupements de termes

Plutôt que de considérer une série sous la forme $u_0 + u_1 + \ldots$, on peut se demander ce qui se passe si on groupe les termes en paquets, i.e. en calculant $v_0 = u_0 + u_1$ puis $v_1 = u_2 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_5 + u_6$ et ainsi de suite. La nouvelle série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est-elle de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$?

Théorème 4.1.1 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $v_0 = \sum_{k=0}^{\phi(0)} u_k$ et pour $n \geq 1$, $v_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} u_k$. Alors

(i) si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et a même somme,

(ii) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et si la condition (a) ou si la condition (b) suivantes est réalisé, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et a même somme que $\sum_{n\geq 0} v_n$.

(a) la suite $(u_n)_n$ converge vers 0 et $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\phi(n+1) - \phi(n))$ est fini,

(b) pour tous les $k \in [\phi(n-1) + 1, \phi(n)]$, les u_k sont de même signe.

Preuve : Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Alors, en posant $\phi(-1) = 0$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=\phi(k-1)+1}^{\phi(k)} u_l \\ &= \sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} u_k$ converge, la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ converge et par conséquent la suite extraite $(\sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k)_n$ converge et a même limite. Cela prouve que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et a même somme que $\sum_{n\geq 0} u_n$. On observe que c'est faux pour les séries divergentes (à travers l'exemple historique de $(-1)^n$)

Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et que la condition (a) est vérifiée. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$ et on note $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi(n+1) - \phi(n)$. Soient $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier tel que $\phi(p) \leq n < \phi(p+1)$. Alors

$$|S - \sum_{k=0}^{n} u_k| \leq |S - \sum_{k=0}^{p+1} v_k| + |\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k|.$$

Nous réécrivons

$$|\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| = |\sum_{k=n+1}^{\phi(p+1)} u_k|.$$

Puisque $(u_n)_n$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, puisque $\phi(p+1) - n \leq \phi(p+1) - \phi(p) \leq K$, il vient :

$$\begin{aligned}|\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| &\leq \sum_{k=n+1}^{\phi(p+1)} |u_k| \\ &\leq K\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_n$ converge vers S, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on ait

$$|S - \sum_{k=0}^{n} v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc si $n \geq \phi(N')$, on a $\phi(p+1) > n \geq \phi(N')$ et donc $p+1 > N'$ car ϕ est strictement croissante et donc

$$|S - \sum_{k=0}^{p+1} v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq max(N, N')$, nous avons

$$|S - \sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge également et sa somme est aussi S.

Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et que la condition (b) est vérifiée. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$ Soient $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier tel que $\phi(p) \leq n < \phi(p+1)$. Comme précédemment

$$|S - \sum_{k=0}^{n} u_k| \leq |S - \sum_{k=0}^{p+1} v_k| + |\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k|.$$

et

$$|\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| = |\sum_{k=n+1}^{\phi(p+1)} u_k|.$$

Comme tous les u_k sont de même signe à l'intérieur d'un paquet, il vient

$$\begin{aligned} |\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| &= \sum_{k=n+1}^{\phi(p+1)} |u_k| \\ &\leq \sum_{k=\phi(p)+1}^{\phi(p+1)} |u_k| \\ &= |v_{p+1}|. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, $(v_n)_n$ converge vers 0. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc, pour $n \geq \phi(N)$ (ce qui implique $p + 1 \geq N$), nous avons

$$|\sum_{k=0}^{p+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme précédemment, puisque $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_n$ converge vers S, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on ait

$$|S - \sum_{k=0}^{n} v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc si $n \geq \phi(N')$ (ce qui implique $p + 1 > N'$), nous avons

$$|S - \sum_{k=0}^{p+1} v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq max(N, N')$, nous avons

$$|S - \sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 4.1.2 En général, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ n'implique pas celle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement. Cependant, si ϕ est définie par $\phi(n) = 2n$, alors $v_n = 0$ et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

4.2 Commutativité : permutation de termes

Définition 4.2.1 Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *commutativement convergente* si pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et a la même somme.

Théorème 4.2.2 Une série absolument convergente est commutativement convergente.

Preuve : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Montrons qu'elle est aussi commutativement convergente. On note S la somme de cette série.
Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même et soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\sum_{n\geq 0} u_k$ est une série absolument convergente de somme S, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - S\right| < \varepsilon.$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon. \tag{4}$$

Nous écrivons :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - S\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N} u_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{N} u_k - S\right|.$$

Soit $M = \max \sigma^{-1}\{0, \ldots, N\}$ de sorte que si $\sigma(k) \leq N$ alors $k \leq M$ et donc si $k > M$ nécessairement $\sigma(k) > N$.
On écrit alors pour $n > M$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N} u_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{M} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l\right| + \left|\sum_{k=M+1}^{n} u_{\sigma(k)}\right|.$$

Pour $k > M$, $\sigma(k) > N$ donc

$$\left|\sum_{k=M+1}^{n} u_{\sigma(k)}\right| \leq \sum_{k=M+1}^{n} \left|u_{\sigma(k)}\right| \tag{5}$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon. \tag{6}$$

Enfin

$$\left|\sum_{k=0}^{M} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l\right| = \left|\sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k)>N}}^{M} u_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k=0 \\ 0\leq\sigma(k)\leq N}}^{M} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l\right|.$$

Si $0 \leq l \leq N$ nous avons $0 \leq k = \sigma^{-1}(l) \leq M$ donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{M} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N} u_k\right| &= \left|\sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k)>N}}^{M} u_{\sigma(k)}\right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |u_k| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Nous avons donc pour $n > N$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - S\right| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme S.

La réciproque sera une conséquence du théorème suivant :

Théorème 4.2.3 (de Riemann sur le réarrangement des séries semi-convergentes)
Soit une série semi-convergente $\sum_{n\geq 0} u_n$. Alors quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme α.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \min(u_n, 0)$ (autrement dit, $u_n^+ = u_n$ si $u_n \geq 0$, 0 sinon et $u_n^- = u_n$ si $u_n \leq 0$, 0 sinon).
Nous avons alors $u_n^+ = \frac{|u_n|+u_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique que $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ est une série divergente puisque somme d'une série divergente ($\sum_{n\geq 0} |u_n|$) et d'une série convergente ($\sum_{n\geq 0} u_n$). Comme c'est une série à termes positifs, elle diverge vers $+\infty$. En particulier, il y a une infinité de termes u_n^+ strictement positifs. On note $A = \{n \ / \ u_n^+ \geq 0\}$.
De même, nous avons $u_n^- = \frac{u_n-|u_n|}{2}$ et donc $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ diverge vers $-\infty$ et il y a une infinité de termes u_n^- strictement négatifs. On note $B = \{n \ / \ u_n^- < 0\}$.
Supposons sans restriction que $\alpha \geq 0$.
On pose $\sigma(0) = \inf(A)$. Lorsque $\sigma(n)$ est définie, soit $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} > \alpha$ et on définit $\sigma(n+1) = \min(B \setminus \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$, soit $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leq \alpha$ et on définit $\sigma(n+1) = \min(A \setminus \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$.
Par construction, σ est injective. Montrons qu'elle est surjective en raisonnant par l'absurde et en supposant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ n'appartenant pas à l'image de σ.
Comme $A \cup B = \mathbb{N}$, N appartient à A ou B. Supposons que N appartienne à B.
Soit (s'il existe !) k tel que $\sigma(k)$ appartienne à B et $\sigma(k) > N$. Alors $\sigma(k) = \min(B \setminus \{\sigma(0), \ldots, \sigma(k-1)\}) > N$ et N appartient à B donc N est l'un des $\sigma(0), \ldots, \sigma(k-1)$, ce qui est absurde.
Donc les $\sigma(k)$ dans B sont tous inférieurs à N et ils sont alors nécessairement en nombre fini. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les $\sigma(n)$ sont dans A et donc si $n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} < \alpha$. Comme la série est à un terme positifs à partir d'un certain rang et que la série est majorée, elle converge ce qui est absurde car $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ diverge. On raisonnerait de même si N appartenait à A, ce qui montre que σ est bijective. On remarquera que nous avons montré que A et B sont nécessairement infini.
Enfin, montrons que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge vers α.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, $(u_n)_n$ converge vers 0 et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| < \varepsilon$.
Soit $M = \max\{\sigma^{-1}(0), \ldots, \sigma^{-1}(N)\}$. Par définition de M, $\sigma(n) \leq N$ implique $\sigma^{-1} \circ \sigma(n) \leq M$, i.e. $n \leq M$. Par contraposition, si $n > M$ alors $\sigma(n) > N$ et donc pour tout $n > M$, $|u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$. Cela montre que $(u_{\sigma(n)})_n$ converge vers 0.
Puisque A et B sont infinis, il existe $M' \geq M$ tel que $\sigma(M')$ appartient à A et $\sigma(M'+1)$ appartient à B.
On pose maintenant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$. Comme $\sigma(M')$ appartient à A, $S_{M'-1} \leq \alpha$ et comme $\sigma(M'+1)$ appartient à B, $S_{M'} > \alpha$. Ainsi $\alpha < S_{M'} = S_{M'-1} + u_{\sigma(M')} \leq \alpha + \varepsilon$, donc $|S_{M'} - \alpha| < \varepsilon$.
Si maintenant $S_n > \alpha + \varepsilon$, comme $|u_{\sigma(n)}| < \varepsilon$, $S_{n-1} = S_n - u_{\sigma(n)} > \alpha$. Par définition de $\sigma(n)$, $\sigma(n)$ appartient à B donc $u_{\sigma(n)} < 0$ et par suite $S_{n-1} \geq S_{n-1} + u_{\sigma(n)} = S_n > \alpha + \varepsilon$. En réitérant, on obtient $S_{M'} > \alpha + \varepsilon$, ce qui est aburde, donc $S_n < \alpha + \varepsilon$ pour tout $n \geq M'$.
De la même manière, on montre que $S_n > \alpha - \varepsilon$ pour tout $n \geq M'$. Ainsi, pour tout $n \geq M'$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

□

Exemple 4.2.4 Considérons la série harmonique $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ dont on a déjà montré qu'elle converge. Nous allons calculer sa somme en utilisant la formule de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction $n+1$-fois dérivable sur un intervalle I, pour tout x_0 et tout x dans I, il existe $t = t(x_0, x, n)$ compris entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f^{(1)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t).$$

Nous appliquons cette formule à $f : x \mapsto \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ et $x = 1$. Nous avons $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ donc :

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+t)^{n+1}},$$

d'où

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.
Considérons alors le réarrangement suivant :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8} \ldots$$

(le premier terme impair, les deux premiers termes pairs, le terme impair suivant, les deux termes pairs suivant...). Ce réarrangement est donnée par $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $\sigma(3k) = 2k$, $\sigma(3k+1) = 4k+1$ et $\sigma(3k+2) = 4k+3$. Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et calculer sa somme. Pour cela, nous allons faire une sommation par paquets. Soit $v_{2k} = u_{\sigma(3k)} + u_{\sigma(3k+1)}$ et $v_{2k+1} = u_{\sigma(3k+2)}$. Nous avons alors

$$v_{2k} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} = \frac{1}{2} u_{2k},$$
$$v_{2k+1} = -\frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1+1} = \frac{1}{2} u_{2k+1}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ n'est autre que $\frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} u_n$. Par conséquent elle converge et sa somme vaut $\frac{1}{2} \ln 2$.
Comme la suite $(u_{\sigma(n)})_n$ converge vers 0 et comme la longueur des paquets est majorée par 2, le théorème de sommation par paquet montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2} \ln 2$. Ainsi, bien que nous n'ayons fait que permuter les termes et bien que l'addition soit commutative sur $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln 2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

4.3 Produit de séries

Définition 4.3.1 (Séries produits) Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \ldots + u_0 v_n.$$

La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est appelé *série produit* des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Lemme 4.3.2 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes, $\sum_{n\geq 0} w_n$ leur série produit.

Alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

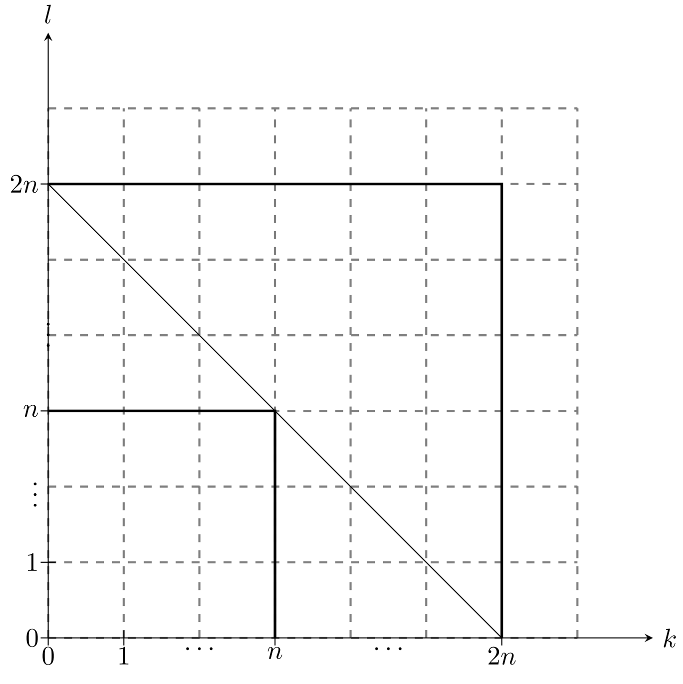
Preuve : Soient $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Alors pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$W_{2n} = \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{l} u_k v_{l-k},$$

$$U_n V_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} u_k v_l$$

$$U_{2n} V_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2n} u_k v_l.$$

Les produits $u_k v_l$ pour les couples (k, l) délimités par le plus petit carré du schéma apparaissent tous exactement une fois dans le produit $U_n V_n$. De même, les produits $u_k v_l$ pour les couples (k, l) délimités par le plus grand carré apparaissent tous exactement une fois dans le produit $U_{2n} V_{2n}$ et les produits $u_k v_l$ pour les couples (k, l) délimités par le triangle apparaissent tous exactement une fois dans W_{2n}.



On en déduit que

$$U_n V_n \leq W_{2n} \leq U_{2n} V_{2n} \leq UV.$$

La suite $(W_{2n})_n$ étant croissante et majorée, elle converge. De plus, puisque $(U_n V_n)_n$ converge également vers UV, on en déduit que $(W_{2n})_n$ converge vers UV.
Comme la suite $(W_n)_n$ est croissante, on en déduit que pour tout n, $W_{2n} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n+2}$ et donc la suite $(W_{2n+1})_n$ converge également vers UV.
Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente et sa somme vaut $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. □

Théorème 4.3.3 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergente et $\sum_{n\geq 0} w_n$ leur série produit.

Alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k| \cdot |v_{n-k}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout n on a $|w_n| \leq w'_n$. Puisque $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, le lemme précédent implique que la série $\sum_{n\geq 0} w'_n$ est convergente et converge vers $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} |v_l|\right)$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est (absolument) convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} v_l\right) - \sum_{k=0}^{n} w_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=n-k+1}^{n} u_k v_l\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=n-k+1}^{n} |u_k v_l| \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{n} |v_l|\right) - \sum_{k=0}^{n} |w'_k| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, il vient alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. $\square$

Dans le cas de série non absolument convergente, le théorème précédent est faux. Considérons la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et étudions $\sum_{n\geq 1} w_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec elle même. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est semi-convergente et pour tout n, nous avons :

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} \\
&= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}
\end{aligned}$$

Une étude de la fonction $x \mapsto x(n-x)$ montre que pour tout $x \in [1, n-1]$, $k(n-k) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$. On en déduit que

$$|w_n| \geq (n-1)\frac{2}{n}.$$

Par suite, $(w_n)_n$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ diverge grossièrement.