M51 - Groupes, Anneaux & Corps

page moodle ?! cf

C1 Ensembles, $\mathcal{R}^\circ$ équivalces, cardinal, dénombrabilité

1. Ensembles (vp)

⚠ diff $\emptyset \leftrightarrow \{\emptyset\}$.

2. Cardinal, dénombrabilité

2.1. Cardinal

D3 2 ens E & F st $\boxed{\text{équipotents}}$ s'$\exists$ bijec° de l'1 vers l'ôtre. Si équ° : ils ont $\hat{m}$ $\boxed{\text{cardinal}}$.

D4 un ens non vide E est fini s'$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tq E soit équipotent à l'ens $\{1, 2, \dots, n\}$.

on dit Card $E = n$.

$\boxed{\text{D.4.0}}$ Déf des entiers

On pose $0 = \text{card}(\emptyset)$

$1 = \text{card}\{0\}$

$2 = \text{card}\{0, 1\}$

$\vdots$

$\dots$ $n+1 = \text{card}\{0, 1, \dots, n\}$

$1 \neq 0$ sinon $\text{card}\{0\} = \text{card}\,\emptyset$

ie $\{0\}$ & $\emptyset$ st équipotents

ie $\exists$ une bijec° $\{0\} \longrightarrow \emptyset$

cela est contradictoire. non-vide vide

Il n'$\nexists$ pas bijec° $\longleftrightarrow$ ens nV & ens V.

$\rightarrow$ On mq + généralm^t (PR) que $n+1 \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

ens N...

$\boxed{\text{Rq}}$ On mq aussi (PR) que si $\text{card}(E) = n$ & $F \subset E$ alors $\text{card}(F) \in \{0, 1, \dots, n\}$

D+, si $\text{card}\, F = n \Rightarrow \text{card}\, E = F$.

$\mathbb{N} = \{$ les cardinaux obtenus par ce procédé $\}$

P Soit E un ens. ASSE :

(i) $\exists$ injec° $\mathbb{N} \xrightarrow{i} E$

(ii) E équipotent à une partie de E distincte de E (1)

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{card}(E) \neq n$

On dira que l'ensemble est infini.

(1) distincte $\overset{?}{\subsetneq}$ stricte, propre.

@ $\mathbb{N}$ est infini : $\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto n+1 \end{cases}$ est une bijectO.

$\mathbb{N}$ & $\mathbb{N}^*$ est équipotents.

D E est dit fini s'il n'est pas infini.

Preuve de $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$

$(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose i. On a

$$E = i(N) \cup \underbrace{(E \setminus i(N))}$$

car a n'est pas surjectif.

Considérons l'applicaO :

$$f : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \text{si } x \notin i(N),\ f(x) = x$$
$$\text{si } x \in i(N),\ \longrightarrow$$

$\rightarrow \exists! n \in \mathbb{N}$ tq $x = i(n)$, on pose alors

$f(x) = i(n+1)$.

q̂ à l'injection de i.

• f est injective. Soit $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$.

Il est impossible que • $x \in i(\mathbb{N})$ & $y \notin i(\mathbb{N})$ $\left(\begin{array}{l} \Rightarrow f(x) \in i(\mathbb{N}) \\ \Rightarrow f(y) = y \notin i(\mathbb{N}) \end{array} \right)$

et dc $f(x) \neq f(y)$.

• $y \in i(\mathbb{N})$ et $x \notin i(\mathbb{N})$ (idem)

Reste 2 cas :

cas 1 : $x, y \notin i(\mathbb{N})$ alors $f(x) = x$, $f(y) = y$ & dc $x = y$.

cas 2 : $x, y \in i(\mathbb{N})$

$x = i(n)$ $\quad f(x) = i(n+1)$

$y = i(m)$ $\quad f(y) = i(m+1)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow n+1 = m+1 \Rightarrow n = m \Rightarrow i(n) = i(m)$

i injective

ie $x = y$.

Ccl f est une bijectO entre E & $f(E)$

ie E équipotent à $f(E)$ q̂ est une partie (distincte) propre de E. $(i(0) \notin f(E))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii), mq non (iii) $\Rightarrow$ non (ii)

(y réfléchir en utilisant Rq précdte & $F_{ss\text{-}ens}$)

(iii) $\Rightarrow$ (i) On construit une applicaθ ĉ suit : $i : \mathbb{N} \to E$

- card $E \neq 0$ ie $E \neq \emptyset$.

On choisit $e_0 \in E$ & on pose $i(0) = e_0$.

card$(E) \neq 1$ dc $E \neq \{e_0\}$. On choisit $e_1 \in E$ tq $e_1 \neq e_0$.

On pose $i(1) = e_1$.

- card$(E) \neq 2$ dc $E \neq \{e_0, e_1\}$ ....

... & ainsi de suite

TH Cantor - Bernstein.

soit E, F 2 ens, on sppo $\exists$ appli injectθ $f : E \to F$ & appli injectθ $g : F \to E$. Alors les ens E, F st en bijecθ, ils ont de m̂ cardinal.

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

TH.2 - Cantor

soit E un ens nv & $\mathcal{P}(E)$ l'ens de ses parties. $\nexists$ pas de surjecθ de E sr $\mathcal{P}(E)$.

?! $\cancel{\mathcal{P}(E) \longrightarrow E}$ à cause TH Cantor.

Q° Mq $\exists$ injecθ de $\mathcal{P}(E)$ dans E.

Voir $\boxed{\text{DM}}$ TH. Cantor

P1 L'ens $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ens E est en bijecθ av l'ens $\{0,1\}^E$ des appli de E ds $\{0,1\}$.

ens de ttes appli possible de E ds $\{0,1\}$.

$\mathcal{P}(E)$ équipotent à $\{0,1\}^E$.

cet ens : les élts st applicatθs.

3 △ DM

2.2. Dénombrabilité

(D5) Un ens infini E est dit **dénombrable** s'il est en bijectᵒ de l'ens $\mathbb{N}$, ie équipotent à $\mathbb{N}$.

ê équipotent à $\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ ens est infini.

$$\mathbb{N} \xrightarrow{bij} E$$

$1 \longmapsto 1^{\circ}$ élt

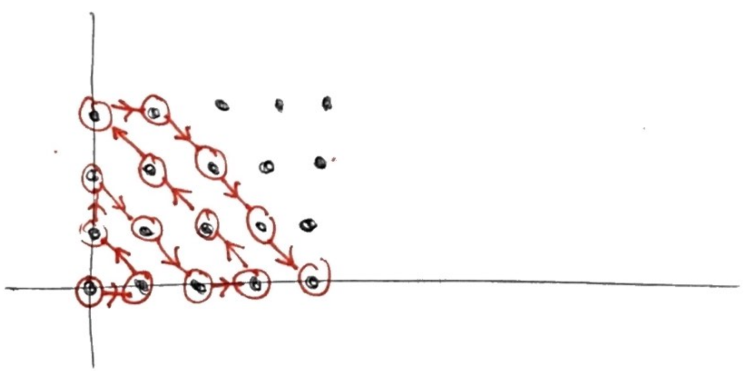
$2 \longmapsto 2^{e}$ élt

$\vdots$

@ ens dénombrable

$$\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$
$$x \longmapsto 2x$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



(P2) Tout ss-ens infini d'un ens dénomb est dénombrable.

DM soit F un ens. dénombrable & $E \subset F$ un ens infini.

1) Il existe une bijectᵒ $f : F \longrightarrow \mathbb{N}$.
(hypothèse que F est dénombrable par défᵒ).

2) E infini. D'après une Prop-précédente, $\exists$ une injectᵒ $\mathbb{N} \to E$

1) $\Rightarrow$ $f|_E : E \to \mathbb{N}$ est injective

cl d'après le (Th) Cantor-Bernstein, E & $\mathbb{N}$ st équipotents, ie dénombrables.

(4) lire (C1) § 3 - (C2) § 1.

C1

§2. Cardinal dénombrabilité

2.2. Dénombrabilité

P2 ✓ Tt ss-ens ∞ d'un ens dén. est dén.

P3 soit E un ens ∞, on spps q' $\exists$ surjec° $f : \mathbb{N} \to E$ alors E dén.

NB : E infini $\Rightarrow$ E contient un ens dén (3,5 Prop)

(si E est infini, $\exists$ une injec° $\mathbb{N} \xrightarrow{i} E$

Donc E contient $i(\mathbb{N})$ q est équipotent à $\mathbb{N}$.)

DM Prop 3 : (vp)

Prop 4 soit E, F 2 ens dén

$\Rightarrow$ produit cartésien $E \times F$ est ens dén.

DM (vp) "il suffit de mq $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dén".

Cas général.

soit E, F dén, soit $f : \mathbb{N} \to E$ & $g : \mathbb{N} \to F$ 2 bijec°s.

Considérons l'applicat

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$$
$$(n, m) \mapsto (f(n), g(m))$$

mq F est bijective

Mq F injective : pr $(n,m), (n',m') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$

$F(n,m) = F(n',m') \Leftrightarrow (f(n), g(m)) = (f(n'), g(m'))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = f(n') \\ g(m) = g(m') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = n' \\ m = m' \end{cases}$ (injectivité de f, g)

$\Leftrightarrow (n,m) = (n',m')$

Mq F surjective : soit $(x,y) \in E \times F$, f surjective dc $\exists n \in \mathbb{N}$, $x = f(n)$.

g surjective dc $\exists m \in \mathbb{N}$, $y = g(m)$.

5 On a alors $(x,y) = F(n,m)$.

Cl $\overrightarrow{F}$ est bijective cad

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ équipotent à $E\times F$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ équipotent à $\mathbb{N}$ (1° cas)

D'où $\mathbb{N}$ équipotents $E\times F$.

P5 Tte réunion ~~de~~ dén d'ens dén est dén.

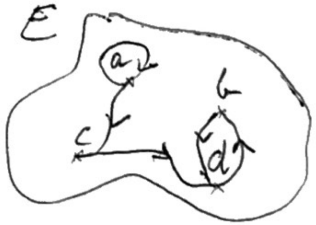
DM (vp)

P6 L'ens $\mathbb{R}$ n'est pas dén

DM (vp)

§ 3. Relat°s d'équivalence

3.1. Définit°s



$\mathcal{R}$ correspd au ss-ens.

$\{(a,a),(a,c),(c,d),(d,b),(b,d)\}$

$\subset E\times E$

(D6) Une relat° binaire $\mathcal{R}$, déf ss ens E est ss-ens $R \subset E\times E$, pr $(a,b)\in R$.

On note $a\mathcal{R}b$.

(D7) RST

(D8) $E, \mathcal{R}$ classe d'équivalence.

$x\in E$

$\bar{x} \overset{def}{=} \{y\in E \mid x\mathcal{R}y\}$

cmd

$[\,\bar{x} \subset E$ ou $\bar{x}\in\mathcal{P}(E)\,]$

$E/\mathcal{R} \overset{def}{=} \{\bar{x} \mid x\in E\}\subset \mathcal{P}(E)$

NB Pr $x,y\in E$, on a :

$$\boxed{\bar{x}=\bar{y} \iff x\mathcal{R}y}$$

spps $\bar{x}=\bar{y}$,

(⇒) On a $x\mathcal{R}x$, dc $x\in\bar{x}$ dc $x\in\bar{y}$ dc $x\mathcal{R}y$.

(⇐) spps $x\mathcal{R}y$

(⊂) soit $z\in\bar{x}$, ie $z\mathcal{R}x$ comme $x\mathcal{R}y$ on a aussi $z\mathcal{R}y$ (par transitivité) ie $z\in\bar{y}$. D'où $\bar{x}\subset\bar{y}$.

(⊃) idem.

Congruence modulo 7.

pr $x,y\in\mathbb{Z}$, $x\equiv y$ [mod 7]

si $x-y$ divisible par 7

ssi ils ont m̂ reste par div. eucl. par 7.

$\mathbb{Z}/\equiv \overset{not}{=} \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$

ainsi $\bar{3}=\{7k+3 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

D9 soit E un ens, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de ss-ens nv de E, on dit la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partiθ de l'ens E si :

- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall (i,j) \in I^2$ tq $i \neq j$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

DM (vp, ad)

P7 soit E ens nv, $\mathcal{R}$ relθ d'éq déf sur E.
Les classes d'équivalences forment une partiθ de E, tte partiθ de E pt s'obtenir de manière uniq ∁ relθ équlce.

∁ $\bar{x}$ & $\bar{y}$

$z \in \bar{x}$, $z \in \bar{y}$

si $z \in \bar{x} \Rightarrow z \mathcal{R} x$

si $z \in \bar{y}$ $\quad z \mathcal{R} y$

⊕

$\Rightarrow x \mathcal{R} y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

2 classes d'éq : st soit EXACTES
soit DISJOINTES.

3.2. Compatibilité

D10 E, F ; $f : E \longrightarrow F$. E muni $\mathcal{R}$.
L'appli f est compatible av $\mathcal{R}$ si
$\forall (x,y) \in E^2, \; x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

si f est compatible av $\mathcal{R}$, on dit qu'elle passe au quotient, ie prop 8.

P8 $E, F, f : E \to F$, sppo f compatible av $\mathcal{R}$ déf sur E.
$\exists!$ appliθ $\bar{f}$ déf sur $E/\mathcal{R}$
tq $\forall x \in E : f(x) = \bar{f}(\bar{x})$.

(vp)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$? tq $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ $\forall x \in E$

L'unicité découle de $\bar{f}(x) = f(x)$ q' détermine $\bar{f}$.

$\triangle$ on pose $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ $\forall x \in E$.

si $\bar{x} = \bar{y} = c$, $f(c) = \underbrace{f(x) \text{ ou } f(y)}_{\text{ils st égx.}}$?

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] & f(x) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F \\ p(x) = \bar{x} & E/\mathcal{R} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \\ & \bar{x} \arrow[r] & \bar{f}(\bar{x}) = f(x) \end{tikzcd}$$

On a $\boxed{\bar{f} \circ P = f}$

ⓐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin(x)$

$x \mathcal{R} y$ si $x - y = 2\pi k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

f est compatible $\forall$ $\mathcal{R}$.

D'après la prop 8, $\exists \bar{f} : \mathbb{R}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ q' fait commuter le diagramme.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/\mathcal{R} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}/\mathcal{R}$ se note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.