M42 TD

C1 Dualité

AL sur ev → corps de base.

Ex 2 Déterminer la forme linéaire f sur $\mathbb{K}^3$ tq $f(1,1,1)=0$; $f(2,0,1)=1$, $f(1,2,3)=4$. Donner une base du plan $\ker(f)$.

AL: $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$

$f \in (\mathbb{K}^3)^*$

$f(x,y,z) = ax + by + cz$ où $a,b,c \in \mathbb{K}$.

- $f(1,1,1) = a+b+c = 0$ (1)
- $f(2,0,1) = 2a + c = 1$ (2)
- $f(1,2,3) = a + 2b + 3c = 4.$ (3)

(3) − (1) $b + 2c = 4 \Rightarrow b = 4 - 2c$

$a = \frac{1-c}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1-c}{2} + (4-2c) + c = 0$

$1 - c + 2(4-2c) + 2c = 0$

$-3c + 9 = 0$

$c = 3.$

puis $a = -1$.

et $b = -2$.

$\Rightarrow f(x,y,z) = -x - 2y + 3z.$

$\ker f$? $(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x - 2y + 3z = 0$

$v \in \ker f \Leftrightarrow \exists\, y,z \in \mathbb{K} \mid$

$x = -2y + 3z.$

Donc $v = (-2y + 3z, y, z)$

$v = (-2,1,0)y + (3,0,1)z$

→ système générateur + libre

[M1] Mq c'est libre, CL, coeff nécessairement = à 0.

[M2] nécessairement libre ? ici f est surjectif

Par ailleurs, $f \neq 0$, dc $\dim \ker f = 2$.

$\hat{g}$ Th du rang $\dim E = \dim \operatorname{rg}(f) + \dim \ker(f)$.

dc $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$. d'après Th du rg, la dimension de $\ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$.

Th système générateur q a un nbr dont le nbr d'élts est exactement la dimension alors ce (SG) est libre.

$\{v_1 = (-2,1,0),\ v_2 = (3,0,1)\}$ est une base de $\ker f$.

Ex 3 f_1, f_2. 2 élts de $(\mathbb{R}^2)^*$ définis par $f_1(x,y) = x+y$ et $f_2(x,y) = x-y$.
Mq (f_1, f_2) est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
Exprimer les formes linéaires suivtes ds la base (f_1, f_2) : $g(x,y) = x$,
$h(x,y) = 2x - 6y$.

M1 ⇔ $\{f_1, f_2\}$ pie libre de $(\mathbb{R}^2)^*$?

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$

⇔ $\lambda_1 = \lambda_2 \overset{?}{=} 0$ linéairement indépendant.

$\forall (x,y)$: $\lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y) = 0$

$\lambda_1 (x+y) + \lambda_2 (x-y) = 0$

$(\lambda_1 + \lambda_2) x + (\lambda_1 - \lambda_2) y = 0, \ \forall x, y$

$x=0, y=1$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$x=1, y=0$

$\Rightarrow \{f_1, f_2\}$ est libre.

TH | si une pie génératrice q' a m̂ nbr élts que la dimension alors génératrice

| si une pie libre, m̂ nbr élts q dimension alors c'est une base.

Comme $\dim (\mathbb{R}^2)^* = 2 = \text{card}\{f_1, f_2\}$ alors $\{f_1, f_2\}$ est une base.

M2 Écrire f_1 et f_2 sur la base $(\mathcal{B}_c^2)^*$ duale de la base canoniq $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$

$\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

$f_1 = f_1(e_1) e_1^* + f_1(e_2) e_2^*$

$f_1 = f_1(1,0) e_1^* + f_2(0,1) e_2^*$

$\boxed{f_1 = e_1^* + e_2^*}$

$f_2 = f_2(e_1) e_1^* + f_2(e_2) e_2^*$

1 ?

Le déterminant de f_1, f_2 dans B_c' est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\Rightarrow \{f_1, f_2\}$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

---

soit g et h 2 formes linéaires.

- $g = e_1^* \quad (= g(e_1)e_1^* + g(e_2)e_2^*)$
- $h = 2e_1^* - 6e_2^*$

On a P la matrice de passage de B_c^* à $\{f_1, f_2\}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

si X' et X sont les coordonnées dans $\{f_1, f_2\}$ et B_c^* respectivement.

Alors on a $X = PX'$ ie $X' = P^{-1}X$.

pour g on a : $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

on a $X' = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$

$$X' = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$g = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$$

<u>Pour h</u> : $X' = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$X' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$g = -2f_1 + 4f_2.$$

Cas gén : <u>$\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E</u>, $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base duale de —

$f \in E^*$, $f = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*$. $\quad a_i \in K$.

$$f = f(v_1)v_1^* + \dots + f(v_n)v_n^*.$$

soit $j (1 \leq i \leq n)$ $\quad f(v_j) = (a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*)(v_j)$

$f(v_j) = a_j v_j^*(v_j)$ $\quad$ autres font 0.

$f(v_j) = a_j$

si $i \neq j$ vaut 0.

Ex 5 soit $v_1 = (1, \dots, 1)$, $v_2 = (0, 1, \dots, 1)$, $\vdots$, $v_n = (0, 0, \dots, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer la base $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$, duale de $(v_1, \dots, v_n)$.

→ on cherche $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$. Ex 4

$$v_1^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*.$$

$$\begin{cases} v_1^*(v_1) = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \\ v_1^*(v_3) = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \alpha_1 \underbrace{e_1^*(v_1)}_{-1} + \alpha_2 \underbrace{e_2^*(v_1)}_{1} + \alpha_3 \underbrace{e_3^*(v_1)}_{0} = 1.$$

et $v_1 = (-1, 1, 0)$ $\quad -\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$v_1 = -e_1 + e_2$$
$$v_2 = -e_1 + e_3$$
$$v_3 = 2e_1 + e_3$$

symbole de Kronecker

$$e_1^*(v_1) = e_1^*(-e_1 + e_2) = -e_1^*(e_1) + e_1^*(e_2)$$
$$= -1 + 0$$
$$= -1.$$

Ex 4 $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (-1\ 0\ 1)$, $v_3 = (2\ 0\ 1)$

Déterminer la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$.

Pour v_2.

$$\alpha_1 \underbrace{e_1^*(v_2)}_{-1} + \alpha_2 \underbrace{e_2^*(v_2)}_{0} + \alpha_3 \underbrace{e_3^*(v_2)}_{1} = 0$$

$$-\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Pour v_3.

$$\alpha_1 e_1^*(v_3) + \alpha_2 e_2^*(v_3) + \alpha_3 e_3^*(v_3) = 0$$

$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 = \alpha_3 \to 3\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0 = \alpha_3$.

$\alpha_2 = 1$

$$\Longrightarrow v_1^* = e_2^* + 0 \times e_1^* + 0 \times e_3^*$$

$V_2^* = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^* + \beta_3 e_3^*$.

$V_2 = -e_1 + e_3$.

$$\begin{cases} v_2^*(v_1) = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \\ v_2^*(v_3) = 0 \end{cases}$$

Pour v_1,

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_1)}_{-1} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_1)}_{1} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_1)}_{0} = 0$

- $\underline{-\beta_1 + \beta_2 = 0}$

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_2)}_{-1} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_2)}_{0} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_2)}_{1} = 1$

$\underline{-\beta_1 + \beta_3 = 1}$

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_3)}_{2} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_3)}_{0} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_3)}_{1} = 0$

- $\underline{2\beta_1 + \beta_3 = 0}$

$$\begin{cases} -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 1 \\ 2\beta_1 + \beta_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \beta_1 = \beta_2 = -3 \\ \cancel{\beta_1} - \beta_3 = -2 \\ -\beta_1 - 2 - 1 = 0 \\ \beta_1 = -3 \end{array}$$

$V_3^* = \gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^*$

$V_3 = 2e_1 + e_3$

$V_2 = $ —

$V_1 = $ —

$$\begin{cases} V_3^*(v_1) = 0 \\ V_3^*(v_2) = 0 \\ V_3^*(v_3) = 1. \end{cases}$$

Pour v_1,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_1)}_{-1} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_1)}_{1} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_1)}_{0} = 0$

$\underline{-\gamma_1 + \gamma_2 = 0}$

Pour v_2,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_2)}_{-1} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_2)}_{0} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_2)}_{1} = 0$

$-\gamma_1 + \gamma_3 = 0$

Pour v_3,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_3)}_{2} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_3)}_{0} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_3)}_{1} = 1$

$2\gamma_1 + \gamma_3 = 1$

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \underline{\gamma_1 = \gamma_2} \\ \cancel{\gamma} \\ -\gamma_3 = 1 \\ \underline{\gamma_3 = -1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -\gamma_1 - 1 = 0 \\ \underline{\gamma_1 = -1.} \end{array}$$

$v_2^* = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^* + \beta_3 e_3^*$.

$v_2 = -e_1 + e_3$.

$\begin{cases} v_2^*(v_1) = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \\ v_2^*(v_3) = 0 \end{cases}$

Pour v_1,

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_1)}_{-1} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_1)}_{1} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_1)}_{0} = 0$

$\underline{-\beta_1 + \beta_2 = 0}$

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_2)}_{-1} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_2)}_{0} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_2)}_{1} = 1$

$\underline{-\beta_1 + \beta_3 = 1}$

$\beta_1 \underbrace{e_1^*(v_3)}_{2} + \beta_2 \underbrace{e_2^*(v_3)}_{0} + \beta_3 \underbrace{e_3^*(v_3)}_{1} = 0$

$\underline{2\beta_1 + \beta_3 = 0}$

$\begin{cases} -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 1 \\ 2\beta_1 + \beta_3 = 0 \end{cases} \iff$ $\beta_1 = \beta_2 = -3$

$\cancel{\beta_1} - \beta_3 = -2$

$-\beta_1 - 2 - 1 = 0$

$\beta_1 = -3$

$v_3^* = \gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^*$

$v_3 = 2e_1 + e_3$

$v_2 =$ —

$v_1 =$ —

$\begin{cases} v_3^*(v_1) = 0 \\ v_3^*(v_2) = 0 \\ v_3^*(v_3) = 1. \end{cases}$

Pour v_1,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_1)}_{-1} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_1)}_{1} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_1)}_{0} = 0$

$\underline{-\gamma_1 + \gamma_2 = 0}$

Pour v_2,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_2)}_{-1} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_2)}_{0} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_2)}_{1} = 0$

$-\gamma_1 + \gamma_3 = 0$

Pour v_3,

$\gamma_1 \underbrace{e_1^*(v_3)}_{2} + \gamma_2 \underbrace{e_2^*(v_3)}_{0} + \gamma_3 \underbrace{e_3^*(v_3)}_{1} = 1$

$2\gamma_1 + \gamma_3 = 1$

$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \iff$ $\underline{\gamma_1 = \gamma_2}$

$\cancel{\gamma}$

$-\gamma_3 = 1$

$\underline{\gamma_3 = -1}$

$-\gamma_1 - 1 = 0$

$\underline{\gamma_1 = -1}.$

5

Ex 1 : V un $\mathbb{K}$-ev, $\dim V = n$, pr tte base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de V, on note $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ base duale de V^*.

1) Soit $(w_1, \dots, w_n)$ une base de V donnée par mat de passage $P = P_{(v_i) \to (w_i)}$.

Comment la base duale $(w_1^*, \dots, w_n^*)$ est-elle liée à $(v_1^*, \dots, v_n^*)$?

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) & & \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*) \\ P \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{B}' (w_1, \dots, v_n) & \longrightarrow & \mathcal{B}'^* = (w_1^*, \dots, w_n^*) \end{array}$$

soit $P = (P_{ij})_{ij}$ la mat de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad w_j = \sum_{k=1}^{n} P_{kj} \, v_k.$$

soit $Q = (Q_{ij})_{ij}$ la mat de psg de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$.

$$w_j^* = \sum_{l=1}^{n} q_{lj} \, v_l^*$$

Calculons $w_j^*(w_k)$ pour tout j et tout k.

$$w_j^*(w_k) = w_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ik} \, v_i\right)$$

car (AL).

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \, w_j^*(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} q_{lj} \, v_l^*\right)(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} q_{lj} \, \underbrace{v_l^*(v_i)}_{\delta_{li}}\right)$$

$$w_j^*(w_k) = \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \, (q_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \cdot q_{ij}$$

$$({}^tP)_{ij} := P_{ji}$$

$$w_j^*(w_k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} ({}^tP)_{ki} \cdot Q_{ij} = ({}^tP \cdot Q)_{kj}}$$

formule du produit d'une matrice.

Ns avons établi que

$$(w_j^*(w_k)) = ({}^tP.\,Q)_{kj}$$
$$= {}^t({}^tP.\,Q)_{jk}$$
$$= ({}^tQ.\,P)_{jk}.$$

La matrice $(w_j^*(w_k))$

$\Omega_j = \Omega_{jk}(w_j^*(w_k)) = Id$

Donc $\underline{I = {}^tP.Q}$

donc $Q = ({}^tP)^{-1}$

$$\boxed{Q = {}^t(P^{-1})}$$

2) m̂ pθ $\mu(w_1, \dots, w_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$

où $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n$.

$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$. ; $P.P^{-1} = Id$

$Q = {}^t(P^{-1}) = P^{-1}$ car mat diagonale.

3) m̂ qθ $\mu(w_1, \dots, w_n) = (v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n)$.

$P = \begin{pmatrix} 1+\lambda & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

4) $f_B : V \xrightarrow{\sim} V^*$ isomorphisme

$w_j \longrightarrow w_j^* \quad \forall j$

$f_{B}(w_j) = w_j^* \quad \forall j$.

$B \xrightarrow{P} B'$

$f_B = f_{B'} \Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP$

(⇒) Supposons $f_B = f_{B'}$,

$\forall j$, on a $f_B(w_i) = f_{B'}(w_j)$ $\to w_j^*$

$= f_B\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f_B(v_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i^*$

dc $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i^* = w_j^*$

cette égalité mq la mat de passage Q entre $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ et $\{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ est P.

Donc d'après 1),

$Q = {}^t(P^{-1}) = P$. ie $P^{-1} = {}^tP$.

(⇐) on suppose $P^{-1} = {}^tP$.

soit j, $\forall j$, $\boxed{f_B(w_j)} = f_B\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f_B(v_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i^* = \boxed{w_j^*} = f_{B'}(w_j)$

nous savons que

$(w_1^*, \dots, w_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*)\, Q$

où $Q = {}^t(P^{-1})$.

si ${}^tP = P^{-1} \Leftrightarrow Q = {}^t({}^tP) = P$

dc on écrit $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*)\, P$

$= (v_1^*, \dots, v_n^*) \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n,1} \end{pmatrix}$

$w_1^* = \sum_{i=1}^{n} p_{i1} v_i^*$

(8) $w_k^* = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} v_i^* = \cdots w_j^*$

dc par def $f_B(w_j) = f_{B'}(w_j)$

$\Leftrightarrow f_B = f_{B'}$

@ (v_1, v_2) $\qquad \{w_1, w_2\}$ base

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2$$

$$w_2 = \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$(v_1, v_2) P = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 , \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2)$$

$$= (w_1, w_2).$$

~~Ex 7~~ f_1

f_2

f_3

Ex 3 $\quad f_1, f_2$ $\qquad$ Ex1 1) tester

Changem^t de base

$$Q = ({}^tP)^{-1}$$

Ex 7 On a les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$

1) $f_1(v) = x + y + z$

$f_2(v) = x - y + z$

$f_3(v) = x + y + z$

soit $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ sa base duale.

$$f_1 = f_1(e_1) e_1^* + f_2(e_2) e_2^* + f_3(e_3) e_3^* = e_1^* + e_2^* - e_3^*$$

$$f_2 = e_1^* - e_2^* + e_3^*.$$

$$f_3 = e_1^* + e_2^* + e_3^*.$$

soit le déterminant des formes linéaires f_1, f_2, f_3 ds la $\mathcal{B}_c^*$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

dc $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $(K^3)^*$.

2) soit $\{v_1, v_2, v_3\}$ la base anti-duale, $f_j(v_i) = \delta_{ij}$

$$v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$f_j(v_1) = \delta_{1j}$$

$f_1(v_1) = (e_1^* + e_2^* - e_3^*)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$ $\boxed{2M}$ K^3 $(K^3)^*$

$= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1$ (1)

$f_2(v_1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$ (2)

$f_3(v_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (3)

$(1)+(2) = 2\alpha_1 = 1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}.$

$(3)-(2) = 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.$

$\alpha_3 = -\frac{1}{2}.$

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3).$

$f_1(v_2) = (e_1^* - e_2^* + e_3^*)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$

$f_2(v_2) =$

$f_3(v_2) =$

$\Rightarrow v_2 =$

$f_1(v_3) =$

$f_2(v_3) =$

$f_3(v_3)$

$\Rightarrow v_3 =$

$$\mathcal{B}_c \xrightarrow{P\,?} \{v_1, v_2, v_3\} \qquad \mathcal{B}_c^* \xrightarrow{Q} \mathcal{B} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$$

→ si P la mat de passage, entre 2 bases dans K^3 et Q celle entre les bases duales ds $(K^3)^*$

Alors (cf ex 1) P et Q st reliées tq

$$Q = {}^t(P^{-1}) \qquad \longleftrightarrow P = ({}^tQ)^{-1}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & +1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} +1&1&-1 \\ 1&-1&1 \\ 1&1&1 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1&0&0 \\ -1&1&0 \\ -1&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1&1&-1 \\ 0&-2&2 \\ 0&0&2 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2&0&0 \\ -1&1&0 \\ -1&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2&2&-2 \\ 0&-2&2 \\ 0&0&2 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1&1&0 \\ -1&1&0 \\ -1&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2&0&0 \\ 0&-2&2 \\ 0&0&2 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1&1&0 \\ +0&-1&+1 \\ -1&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2&0&0 \\ 0&+2&0 \\ 0&0&2 \end{matrix}$$

$$({}^tQ)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$

$v_3 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$

Ex 9 soit $E = K_n[X]$. Mq la famille

$\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*

et donner la base anté-duale lorsq :

1) $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ st élts distincts de K.

- 2) $f_i(P) = P^{(i)}(0)$

1) $f_i : E \longrightarrow K$ $\quad e_i = X^i$

$P \longmapsto f_i(P) = P(x_i)$

soit $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$ une base standard de E et sa base duale $\mathcal{B}^*$.

i fine, $f_i = f_i(e_0)e_0^* + f_i(e_1)e_1^* + \dots + f_i(e_n)e_n^*$

- La matrice de f_i dans $\mathcal{B}^*$ est

$$\begin{pmatrix} f_0(e_0) & f_1(e_0) & \cdots & f_n(e_0) \\ \vdots & f_1(e_1) & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ f_0(e_n) & f_1(e_n) & & f_n(e_n) \end{pmatrix} = Q$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$ mat de Vandermonde.

$\det(Q)$ = det de Vandermonde.

$\det(Q) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0$ car x_i st 2 à 2 distincts.

La base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E anté-duale à $\mathcal{B}$ est associée à la matrice de passage P tq $Q = ({}^tP)^{-1}$ ie $P = ({}^tQ)^{-1}$.

M "À la main" $v_1 = ?$

$f_i(v_1) =$ $\quad 0 \leq i \leq n$

$f_1(v_1) =$

$v_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

$f_0(v_0) = \left(f_0(e_0)e_0^* + f_0(e_2)e_2^* + \dots + f_0(e_n)e_n^*\right)'(v_1)$

$f_0(v_0) = \left(f_0(e_0)e_0^* + f_1(e_1)e_1^* + \dots + f_n(e_n)e_n^*\right)(a_0 e_0 + \dots + a_n e_n)$

$f_0(v_0) = a_0 f_0(e_0) + a_1 f_0(e_1) + \dots + a_n f_0(e_n) = 1$

$f_2(v_0) = a_0 f_2(e_0) + a_1 f_2(e_1) + \dots + a_n f_2(e_n) = 0$

$\vdots$

$f_n(v_0) = a_0 f_n(e_0) + a_1 f_n(e_1) + \dots + a_n f_n(e_n) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \times 1 + a_1 \times x_0 + \dots + a_n x_0^n = 1 \\ a_0 \times 1 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = 0 \\ \vdots \\ a_0 \times 1 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = 0 \end{cases}$$

$N(x_0, x_1, \dots, x_n)$ la mat de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = N^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 17 soit E ⓐ, $F\ G$ sev de E ou E^*.

Dmq $\boxed{a}$ $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

$F, G \subseteq E$.

$(F+G) \supseteq F$, $F+G \supseteq G$.

soit $f \in (F+G)^\perp$.

$\forall v \in F+G,\ f(v) = 0$.

comme $F \subseteq F+G$, on a

$\forall v \in F,\ f(v) = 0$ ie $f \in F^\perp$.

et $\forall v \in G,\ f(v) = 0$ ie $f \in G^\perp$

$\Rightarrow (F+G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp$.

Puis $f \in F^\perp \cap G^\perp$

$\Leftrightarrow f \in F^\perp$ $\forall x \in F,\ f(x) = 0$

et $f \in G^\perp$ $\forall y \in F,\ f(y) = 0$.

soit $z \in F+G$ ie $z = x+y \in F+G'$

$f(z) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 0+0 = 0.$

Puis $f \equiv 0$, $F+G$ ie

$f \in (F+G)^\perp$

dc $F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$.

Ainsi $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ trivial.

d) Mq $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$F \cap G \subseteq F$ et $F \cap G \subseteq G$

$\Rightarrow F^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$ d'après b)

idem $G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$

$\Rightarrow F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$

e) $F \subset F^{\perp\perp}$

$x \in$

$x \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall f \in F^\perp, f(x) = 0$

$\forall y \in F \; \forall f \in F^\perp, f(y) = 0 \Rightarrow y \in (F^\perp)^\perp$.

soit $z \in F+G$ ie $z = x+y \in F+G'$

$f(z) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 0+0 = 0.$

Puis $f \equiv 0$, $F+G$ ie

$$f \in (F+G)^\perp$$

dc $F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$

Ainsi $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ trivial.

e) $F \subset F^{\perp\perp}$

$x \in$

$x \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall f \in F^\perp, f(x) = 0$

$\forall y \in F \; \forall f \in F^\perp, f(y) = 0 \Rightarrow y \in (F^\perp)^\perp$.

d) Mq $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$F \cap G \subseteq F$ et $F \cap G \subseteq G$.

$\Rightarrow F^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$ d'après b)

idem $G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$

$\Rightarrow F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$

Ex 22 $u : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto P'$

calculer ${}^t u(\alpha)$

a) $\alpha : P \longmapsto P(0)$

b) $\alpha : P \longmapsto \int_0^1 P(t)\,dt$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_n[X] \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "{}^t u(\alpha)"'] & \mathbb{R}_n[X] \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, ${}^t u(\alpha)(P) = \alpha . u(P)$

a) $\alpha : P \longrightarrow P(0)$

$${}^t u(\alpha)(P) = \alpha(u(P)) = \alpha(P') = P'(0).$$

b) $\alpha : P \longmapsto \int_0^1 P(t)\,dt$

$${}^t u(\alpha)(P) = \alpha(u(P)) = \alpha(P')$$
$$= \int_0^1 P'(t)\,dt = P(1) - P(0)$$

Ex 23 soit E, F 2 ev dim finie,
soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$: Mq

1) $(\operatorname{im} f)^\perp = \ker {}^t f$; $(\ker f)^\perp = \operatorname{im} {}^t f$.

Strat : double inclusion.

$a \subseteq b$
▸ soit $\alpha \in (\operatorname{Im} f)^\perp$,
alors $\forall x \in E$, $\alpha(f(x)) = 0$
$\Updownarrow$
${}^t f(\alpha)(x) = 0 \quad \forall x \in E$

dc ${}^t f(\alpha)$ est le morphisme nul ie $\alpha \in \operatorname{Ker} {}^t f$.
Dc $(\operatorname{Im} f)^\perp \subset \ker {}^t f$.

$b \subseteq a$
▸ $\alpha \in \ker {}^t f$.
${}^t f(\alpha) = \alpha \circ f = 0$
$\Leftrightarrow$ α s'annule sur $\operatorname{Im} f$)
($\forall x \in E$, $(\alpha \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \alpha(f(x)) = 0$)
$\alpha \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ d'où $\ker {}^t f \subseteq (\operatorname{Im} f)^\perp$

b) Mq $(\ker f)^{\perp} = \operatorname{Im} {}^t f$.

→ mq $\operatorname{Im} {}^t f \subseteq (\ker f)^{\perp}$

soit $\alpha \in \operatorname{Im} {}^t f$, $\exists\ \beta \in F^*$,

$$\alpha = {}^t f(\beta) = \beta \circ f$$

soit $x \in E$ tq $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ x \in \ker f$

on a $\alpha(x) = \beta \circ f(x) = \beta(f(x))$

$= \beta(0) = 0$

Donc α s'annule en $\ker f$ ie $\alpha \in (\ker f)^{\perp}$

→ R l'inclu° conv.

$(\ker f)^{\perp} \subseteq \operatorname{Im} {}^t f$.

soit $\alpha \in (\ker f)^{\perp}$, mq $\alpha \in \operatorname{Im} {}^t f$

signifie que α se factorise comme suit

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \\ K & \end{tikzcd}$$

ie $\exists \beta \in F^*$

$\alpha = \beta \circ f$.

Considérons $E \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \subseteq F$.

soit $\beta : \operatorname{Im} f \to K$ df p $\forall y \in \operatorname{Im} f$,

$\beta(y) = \alpha(x)$ si $y = f(x)$

alors $f(x) = f(x') \Leftrightarrow f(x - x') = 0$

ie $x - x' \in \ker f$.

comme $\alpha = 0$ $\ker f$ on a, $\alpha(x) = \alpha(x')$

$\alpha(x - x') = 0$.

si $\operatorname{Im} f \neq F$, soit W un supplémentaire $\operatorname{Im} f$.

$F = W \oplus \operatorname{Im} f$.

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1(y) & \text{si } y \in \operatorname{Im} f \\ 0 & \text{si } y \in W. \end{cases}$$

Vérifier β est une forme linéaire sur F.

Suffit mq β est linéaire sur $\operatorname{Im} f$. (elle l'est sur W)

soit y_1, y_2 dans $\operatorname{Im} f$.

$\exists x_1, x_2 \in \operatorname{Im} / \quad f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

$f(y_1 + y_2) = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$

$= \beta(y_1) + \beta(y_2)$

soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda y = \lambda x$

$\Rightarrow \beta(\lambda y) = \alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x) = \lambda \beta(y)$.

soit $x \in E$, $\beta . f(x)$, ; $y = f(x)$.

$\beta . f(x) = \beta(y) = \alpha(x)$

d'où $\beta \circ f = {}^t f(\beta) = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \in \operatorname{Im} {}^t f}$

dc $(\ker f)^\perp \subseteq \operatorname{Im} {}^t f$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} {}^t f = (\ker f)^\perp$.

2) f surjective $\iff {}^t f$ injective ;
f injective $\iff {}^t f$ surjective.

Mq f surjective $\iff (\operatorname{Im} f)^\perp = 0$.

$\Rightarrow$ f surjectif $\iff \operatorname{Im} f = F$ est
alors $(\operatorname{Im} f)^\perp = F^\perp = \{0\}$
car si $\alpha \in F^*$ tq
$\alpha(y) = 0 \quad \forall y \in F$
alors $\alpha \equiv 0$

$\Leftarrow$ $(\operatorname{Im} f)^\perp = \{0\}$, la forme nulle est la seule q s'annule sur $\operatorname{Im} f$.
dès lors $\operatorname{Im} f = F$.

sinon $\operatorname{Im} f \subsetneq F$.
soit W, $\operatorname{Im} f \oplus W = F$.

$\{w_1, \dots, w_r\}$ une base de W,
soit β la forme définie sur $\mathbb{R}$,
$\beta(x) = 0$
$\beta(w_i) = 1 \; \forall i$ tq $x \in \operatorname{Im} f$
Alors $\beta \neq 0$, $\beta \in (\operatorname{Im} f)^\perp$
dc $\dim (\operatorname{Im} f)^\perp = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Im} f = F \iff f$ est surjectif.

---

f surjectif $\iff (\operatorname{Im} f)^\perp = 0 = \ker {}^t f \iff {}^t f$ injectif

Mq f injectif $\iff (\ker f)^\perp = E^*$
$\Rightarrow f$ injectif $\Rightarrow \ker f = 0 \iff (\ker f)^\perp = \{0\}^\perp = E^*$

$\Leftarrow$ si $(\ker f)^\perp = E^*$
$\forall \alpha \; E \longmapsto K$-linéaire $\forall x \in E$,
$f(x) = 0 \qquad \alpha(x) = 0$

soit $x \neq 0 \in E$,

$f(x) = 0$

$\alpha x \in W = E$.

$\alpha : E \to K$

$\alpha(x) = 1$

$\alpha/_W = 0$

$\alpha(x) \neq 0$

$\Rightarrow (\ker f)^{\perp} = E^*$

$\Rightarrow \ker f = 0$.

---

f injectif $\Leftrightarrow (\ker f)^{\perp} = E^*$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, {}^t f = E^*$

$\Leftrightarrow {}^t f$ est surjectif.

3) Mq $rg(f) = rg({}^t f)$.

soit $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, des bases E et F.

$rg(f) = \text{rang Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = M$

$rg({}^t f) = rg \text{ Mat}({}^t f, \mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*) = {}^t M$

$\Rightarrow rg(f) = rg({}^t f)$

---

1) 5) + ex 1, ex 2, ex 6.

$E \xrightarrow{f} F$

$F^* \xrightarrow{{}^t f} E^*$

$E^{**} \xrightarrow{{}^t({}^t f)} F^{**}$

Ex 23

5) soit $E = F$. Alors f est inversible ssi si ${}^t f$ est inversible, dans ce cas $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$.

$E \xrightarrow{f} E$.

Mq f inversible ssi ${}^t f$ inversible.

- $\Rightarrow$ f inversible $\Rightarrow \exists f^{-1} : E \longrightarrow E$ linéaire tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$.

$${}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t f \circ {}^t(f^{-1})$$

$$= {}^t(Id_E) = Id.$$

$\Rightarrow {}^t f$ est inversible.

- $\Leftarrow$ ${}^t f$ inversible $\Rightarrow \exists\, g : E^* \longrightarrow E^*$ tq $g \circ {}^t f = Id = {}^t f \circ g$.

D'après 2)

f inversible $\Leftrightarrow f$ est injectif et surjective.

f injective $\Leftrightarrow {}^t f$ surjective
f surjective $\Leftrightarrow {}^t f$ injective
$\Leftrightarrow {}^t f$ bijective

$\Updownarrow$

${}^t f$ inversible.

f est un isomorphisme.

$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$$

ceci équivaut à mq

Il suffit,

$${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = Id$$

on a ${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t Id = Id$.

De même, ${}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = {}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t Id = Id$

ceci implique le morphisme réciproque de ${}^t f$ est ${}^t(f^{-1})$.

Donc ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$

4) $E \xrightarrow{f} E$

Mq $\underline{{}^t({}^tf) = f.}$ identificatO.

$F^* \xrightarrow{{}^tf} E^*$

$$\begin{tikzcd} E^{**} \arrow[r, "{}^{tt}f"] & F^{**} \\ E \arrow[u, "\beta_E"] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u, "\beta_F"'] \end{tikzcd}$$

(isomorphismes) identificatOs canoniqs de E & F resp à l^rs bidual.

Avons-nous $\boxed{{}^t({}^tf)\circ \beta_E = \beta_F \circ f.}$?

$E \xrightarrow{\beta_E} E^{**}$

$x \longrightarrow \beta_E(x)$

$\beta_E(x)$ est une forme linéaire sur E^{**}.

$\forall f \in E^*, \quad \beta_E(x)(f) = f(x).$

$\underline{ie}$ $\beta_E(x)$ est l'évaluatO des formes linéaires dans E^{**} en x.

(e_i) base de E.

$(\tilde{e}_i)$ tq $\forall i\ \tilde{e}_i = \beta_E(e_i)$

$E^{**} \xrightarrow{{}^{tt}f} F^{**}$

$s \in E^{**}$ et ${}^{tt}f(s) \in F^{**}$

soit $\alpha \in F^*$, et ${}^{tt}f(s)(\alpha) =$

$= s({}^tf(\alpha))$ ${}^{tt}f(\beta_E(e_i))(\alpha)$

Vi calcul ${}^{tt}f(\tilde{e}_i)(\alpha) = \tilde{e}_i({}^tf(\alpha)) = \tilde{e}_i(\alpha\circ f)$

$= \beta(e_i)(\alpha\circ f) = \alpha\circ f(e_i) = \alpha(f(e_i))$

D'où ${}^{tt}f(\beta_E(e_i))(\alpha) = \alpha\cdot(f(e_i))$

$= \beta_F(f(e_i))(\alpha).$

$\Leftrightarrow \beta_F^{-1}\circ {}^{tt}f\circ\beta_E(e_i) = f(e_i)$

$F^* \xrightarrow{{}^tf} E$

$\alpha \longrightarrow {}^tf(\alpha) = \alpha\circ f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{}^{tt}f"] & F^{*} \arrow[d, "\beta_F^{-1}"] \\ E \arrow[u, "\beta_E"] \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

Ex6 E de dim finie n sur $\mathbb{K}$.

$l_1, \dots, l_n \in E^*$

Considérons l'applicat°

$l : E \longrightarrow K^n$

$x \longmapsto \phi(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$

● ϕ est K-linéaire.

- $\phi(x+y) = (l_1(x+y), \dots, l_n(x+y))$
$= (l_1(x) + l_1(y), \dots, l_n(x) + l_n(y))$
$= \phi(x) + \phi(y)$

- $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$.

$\ker(\phi) = \{x \in E \mid l_1(x) = l_2(x) = \dots = l_n(x) = 0\}$

soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base fixée dans E

● et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ sa duale.

$x = \sum x_i e_i \in E$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\boxed{A = (A_{in})}$

$\phi(x) = AX$.

soit $l_i = \sum a_{ji} e_j^*$

$l_i(x) = \sum a_{ji} e_j^* \left(\sum_k x_k e_k\right)$

$= \sum_{j,k} a_{ji} x_k e_j^*(e_k) = \sum_k a_{ki} x_k$

$l_i(x) = \sum_k a_{ki} e_k^*(x)$

$l_i(x) = \sum ({}^tA)_{ik} x_k$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} l_1 & & l_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & A_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\forall i, \; l_i = \sum_k ({}^tA)_{ik} e_k^*$.

$\phi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$

A ou ${}^tA$ est la mat de $l_1, \dots, l_n$ ds la base duale des l_i.

$\{ l_1(x) = \dots = l_1(x) \cdot \} = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow$ ϕ est injectif

$\Leftrightarrow$ ϕ est bijectif (raison de dim car $\dim E = \dim K^n$)

$\Leftrightarrow$ A est inversible.

$= A$ est la matrice de $\{l_1, \dots, l_n\}$ de la base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$

$\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\{l_1, \dots, l_n\}$ base de E^*.

Ex 11 ⌈ E un $\mathbb{K}$ ev dim finie n.
$\phi, \Psi \in E^*$ tq
$\ker \phi = \ker \Psi$. ⌋

• si $\ker \phi = \ker \Psi = E$.
alors $\phi = \Psi = 0$, les (fl) nulle sur E.

• Donc ϕ et Ψ st proportionnels.

Supposons $\ker \Psi = \ker \phi \subset E$
Alors $\Psi, \phi : E \longrightarrow K$, appli surjectives.

---

soit $W = \ker \phi = \ker \Psi$

(dim $K = 1$) d'après (TH) du rang

Donc $W = \ker \phi = \ker \Psi$ et de dimension $\boxed{n-1}$
($n = \dim E$)

• soit $v_0 \in E$, $E = W \oplus K_{v_0}$.
soit $x \in E$ un vecteur de E,
$\exists \lambda \in K$, $x = \lambda v_0 + w$, $w \in W$

$\phi(x) = \phi(\lambda v_0 + w)$
$= \lambda \phi(v_0) + \phi(w) = \lambda \phi(v_0)$

De m̂ $\Psi(x) = \Psi(\lambda v_0 + w)$
$= \lambda \Psi(v_0) + \Psi(w) = \lambda \Psi(v_0)$.

on sait que $\phi(v_0) \neq 0$ et $\Psi(v_0) \neq 0$.

$\forall x \in E$

$\phi(x) = \dfrac{\phi(v_0)}{\Psi(v_0)} \Psi(x) \Rightarrow \boxed{\phi(x) = \mu \Psi(x)}$

$\dfrac{\phi(x)}{\phi(v_0)} = \lambda = \dfrac{\Psi(x)}{\Psi(v_0)}$

Exo 6 (M) $\{e_1, \dots, e_n\}$ base $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x \mid \ell_1(x) = \dots = \ell_n(x)\} = \{0\}$.

$\phi : E \longrightarrow K^n$

$x \longmapsto \phi(x) = (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$

ϕ linéaire.

$\ker \phi = \{x \mid \ell_i(x) = 0 \ \ 1 \leq i \leq n\}$.

hypo $\Leftrightarrow$ ϕ est injective $\Leftrightarrow$ bijective car ($\dim E = \dim K^n$)

$\Leftrightarrow$ la mat de ϕ a une base inversible.

si β est une base de E.

β_c la base canoniq de K^n

alors $\mathrm{mat}(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$

Alors M est la matrice des vecteurs de β^*

$$M = \begin{array}{c} \ell_1 \quad \dots \quad \ell_N \\ \left| \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array} \right| \end{array}$$

TD 2 : Formes bilinéaires & quadratiqs

Ex 1 Mq formes bilinéaires → sym ? → alt ? → mat de f ?

2) $E = \mathbb{R}^n$, $f(x,y) = (\sum (x_i + y_i))^2 - (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$.

$\ell_1 : E \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \to \ell_1(x) = x_1 + \dots + x_n$

$\ell(x+y) = (x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n) = \ell(x) + \ell(y)$

$\ell(\lambda x) = (\lambda x_1) + \dots + (\lambda x_n) = \lambda \ell(x)$.

$$f(x,y) = \ell(x+y)^2 - \ell(x)^2 - \ell(y)^2$$
$$= (\ell(x) + \ell(y))^2 - \ell(x)^2 - \ell(y)^2$$
$$= 2\,\ell(x)\,\ell(y)$$

$$f(x+x', y) = (2\,\ell(x+x'))\,\ell(y)$$
$$= (2\,\ell(x) \cdot \ell(x'))\,\ell(y).$$
$$= 2\,\ell(x).\,\ell(y) + 2\,\ell(x').\,\ell(y)$$
$$= f(x,y) + f(x',y)$$

A ....

→ forme quadratiq ⟷

$q(x) = f(x,x) = 2\, f(x).$

$q(x) = 2\,(x_1 \ldots, x_n)^2$.

→ base convenable ?

- soit $\mathcal{B}_c$ base canoniq de $\mathbb{R}^n$.

$M = mat(f, \mathcal{B}_c) = mat(q, \mathcal{B}_c)$

$q(x) = 2\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2 x_i x_j\right)$

$$M = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & & 1 \\ \vdots & & & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

det(M) = 0

dégénéré.

- $f((x_1 \ldots x_n), (y_1 \ldots y_n)) = a_{11} x_1 y_1 + \ldots + a_{nn} x_n y_n + \sum_{i<j} (a_{ij} x_i y_j + a_{ij} x_j x_i)$

⚠ diviser par 2 les termes diagonaux.

3) Les Notations précédentes

$E = \mathbb{R}^n$, $f(x,y) = (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$

$f(x,y) = \ell(x)^2 - \ell(y)^2 = (\ell(x) - \ell(y))\,(\ell(x) - \ell(y))$

$=$

- f est bilinéaire, $f(x - x', y) = f(x,y) - f(x',y)$

$\forall x \in E, \quad f(x,0) = 0$

Preuve $f(x, y+0) = f(x,y) \pm f(x,0) \overset{?}{=} 0$

$f(x,y) \quad\quad\quad 0$

$f(x,0) = (\sum x_i)^2 \neq 0 \quad \forall x \in E.$

si $x = (1, 0 \ldots 0)$

si un argument est nul alors la forme bilinéaire s'annule

nécessaire

mais pas nécessairement suffisant.

5) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto \det(M)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$

$M_2(\mathbb{R})$ ev dim $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b \times c$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_e}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1/2} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\left((a+d)^2 - (a-d)^2\right) - \frac{1}{4}\left((b+c)^2 - (b-c)^2\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

calculer P^{-1}

AR-1

Calcul de P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc une base orthogonale est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang, signature.

Le rang est nbr de carrés non nul ds diagonalisaO de la signature (p, q)

nbr carrés coeff > 0 : p

< 0 : q

1) rang

2) $2(x-y+2z)^2-(y-2z)^2+6y^2$

↳ rang $=3$ signature : $(2,3)$

3) $\frac{1}{4}(\text{———}) - 2z^2$

↳

~~4)~~

↳ ~~rang~~

5) rang $= \cancel{4}$, sign $=(2,2)$

Ex7 R: Un produit scalaire sur E est $\boxed{\text{FBS}}$ déf. positive.

lie signature $(n,0)$

où $n=\dim E$.

1. $\boxed{M}$ de Gauss pr diagonaliser.

$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$

$q(x_1,x_2,x_3) = f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3))$

→ f symétriq ⇒ le coef devant x_1y_3 est égal au coeff devant x_3y_1 ⇒ $\lambda=\mu$.

$$q(x) = x_1^2+6x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+6\lambda x_1x_3$$

$$= (x_1+2x_2+3\lambda x_3)^2-(2x_2+3\lambda x_3)^2 + 6x_2^2+3x_3^2$$

$$= (x_1+2x_2+3\lambda x_3)^2+2x_2^2 + (3-9\lambda^2)x_3^2-(2\lambda x_2x_3)$$

$$= (x_1+2x_2+3\lambda x_3)^2+2(x_2-3\lambda x_3)^2-(3\lambda x_3)^2 + (3-9\lambda^2)x_3^2$$

$$= (x_1+2x_2+3\lambda x_3)^2+2(x_2-3\lambda x_3)^2+(3-27\lambda^2)x_3^2$$

f est un produit scalaire.

f est produit scalaire

ssi $3-27\lambda^2>0$ ssi $27\lambda^2<3$

ssi $9\lambda^2<1$ ssi $(3\lambda)^2<1$

ssi $-1<3\lambda<1$ ie $\lambda\in\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$.

Dc f est PS ssi $\lambda=\mu\in\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$

→ forme quadratiq $\leftrightarrow$

$q(x) = f(x,x) = 2\, f(x)$.

$q(x) = 2\,(x_1 \dots, x_n)^2$.

→ base convenable ?

- soit $\mathcal{B}_c$ base canoniq de $\mathbb{R}^n$.

$M = mat(f, \mathcal{B}_c) = mat(q, \mathcal{B}_c)$

$q(x) = 2\left(x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2 x_i x_j\right)$

$$M = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 0$

dégénéré.

- $f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = a_{11} x_1 y_1 + \dots$
$+ a_{nn} x_n y_n + \sum_{i<j} (a_{ij} x_i y_j + a_{ij} x_j x_i)$

⚠ diviser par 2 les termes diagonaux.

3) Q Notat° précédente

$E = \mathbb{R}^n$, $f(x,y) = (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$.

$f(x,y) = \ell(x)^2 - \ell(y)^2 = (\ell(x) - \ell(y))\,(\ell(x) - \ell(y))$

$=$

- f est bilinéaire, $f(x - x', y) = f(x,y) - f(x',y)$

$\forall x \in E, \quad f(x, 0) = 0$

Preuve $f(x, y+0) = f(x,y) \pm f(x,0) \overset{?}{=} 0$

$f(x,y)$ ‖ $\quad$ ‖ 0

$f(x,0) = (\sum x_i)^2 \neq 0 \quad \forall x \in E.$

si $x = (1, 0 \dots 0)$

‖ si un argument est nul alors la forme bilinéaire s'annule

nécessaire

mais pas nécessairement suffisant.

Ex 1 1) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(A,B) = \det(A+B) - \det(A-B)$

si f est bilinéaire,

on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda A, \lambda B) = \lambda^2 f(A,B)$.

$\forall A, B \in E$,

Ainsi $f(\lambda A, \lambda B) = \det(\lambda(A+B)) - \det(\lambda(A-B))$

$= \lambda^n \det(A+B) - \lambda^n \det(A-B)$

$= \lambda^n (\det(A+B) - \det(A-B))$

$= \lambda^n f(A,B)$.

Donc on devra avoir :

$\lambda^n f(A,B) = \lambda^2 f(A,B)$.

si φ, on prend A, B tq

$f(A,B) \neq 0$,

@ $A = B$ inversible

on avoir $\lambda^n = \lambda^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ce q équivaut à $n = 2$.

Condit° nécessaire

• si $n = 2$, mq f est bilinéaire

Posons $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = f(A,B)$

$= \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ a_3-b_3 & a_4-b_4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 \\ a_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 \\ b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$

$\det(A-B)$

$= |A| + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} - |B|$

$f(A,B) = 2\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix}\right)$

suffisante

$f(A+A', B) = f(A,B) + f(A',B)$.

2b $f(\lambda A, B) = \lambda f(A,B)$.

(FB:) $f : E \times E \longrightarrow K$

bilinéaire

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$f(x,y) = \sum a_{ij}\, x_i y_i$

fixes $\boxed{\deg = 2}$

&

-

μ det $\to$ deg n. & (a_{ij})

$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

---

5. Trivial

6. $E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = |xy|$

$= \sqrt{xy\,\overline{xy}}$

- $x', y \in \mathbb{C}$, $f(x+x', y) = |(x+x')y|$

$= |xy + x'y|$

$\leq |xy| + |x'y|$

$\Longrightarrow f$ n'est pas bilinéaire.

$\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda x, y) = |\lambda x y| = |\lambda|\,|xy|$

$= \lambda\,|xy|$

$f(x,y) = \mathrm{Re}(x\,\overline{y})$

$x, x' \in \mathbb{C}$, $f(x+x', y) = \mathrm{Re}((x+x')\overline{y})$

$= \mathrm{Re}(x\overline{y} + x'\overline{y})$

$= \mathrm{Re}(x\overline{y}) + \mathrm{Re}(x'\overline{y})$

$= f(x,y) + f(x',y)$

$f(x, y+y') = \mathrm{Re}(x(\overline{y+y'})) =$

$= \mathrm{Re}(x\overline{y} + x\overline{y'}) = \mathrm{Re}(x\overline{y}) + \mathrm{Re}(x\overline{y'})$

$= f(x,y) + f(x,y')$.

$\lambda \in \mathbb{R}$

M1 $f(\lambda x, y) = \mathrm{Re}((\lambda x)\overline{y}) = \mathrm{Re}(\lambda x\overline{y}) = \lambda\,\mathrm{Re}(x\overline{y})$

$= \lambda f(x,y)$.

$z = a+ib$, $\bar{z} = a - ib$,

$$f(y,x) = \mathrm{Re}(y\bar{x}) = \mathrm{Re}(\overline{x\bar{y}}) = \mathrm{Re}(x\bar{y})$$

$$(y\bar{x} = \overline{x\bar{y}}) \qquad = f(x,y)$$

$$q(x) = \mathrm{Re}(x\bar{x}) = x\bar{x}.$$

$E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \mathrm{Im}(x\bar{y})$$

$$f(x+x', y) = \mathrm{Im}((x+x')\bar{y})$$

$$= \mathrm{Im}(x\bar{y} + x'\bar{y})$$

$$= \mathrm{Im}(x\bar{y}) + \mathrm{Im}(x'\bar{y})$$

$$= f(x,y) + f(x',y)$$

$$f(\lambda x, y) = \mathrm{Im}(\lambda x \bar{y})$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\, \mathrm{Im}(x\bar{y})$$

$$f(x, \lambda y) = \mathrm{Im}(x \cdot \overline{\lambda y})$$

$$= \mathrm{Im}(\lambda x \bar{y})$$

$$f(y,x) = \mathrm{Im}(y\bar{x}) = \mathrm{Im}(\overline{x\bar{y}})$$

$$= -\mathrm{Im}(x\bar{y})$$

$\boxed{\text{Ex3}}$ $f : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire (FB) de E. On a la famille f pour la matrice A.

$\mathcal{B}'$, P mat de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

X : le vecteur colonne des coord de x dans $\mathcal{B}$.

Puis $f(x,y) = {}^tXAY$

X' et Y' ds base $\mathcal{B}'$!

$X = PX'$, $Y = PY'$

Donc $f(x,y) = {}^tXAY$

$$= {}^t(PX')A(PY')$$

$$= {}^tX'\,{}^tPAPY'$$

Et par ailleurs si A'

$= {}^tX' A' Y'$

$\forall X', Y'$, on a

${}^tX' A' Y' = {}^tX' {}^tP A P Y'$

Donc $A' = {}^tPAP$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A' = {}^tPAP$

- $A' = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

comme ${}^tXX$

Ex 2 | Ex 3 → utiliser linéarité de u.

$g(x,y) = {}^tX G Y$

$\beta(x,y) = g(u(x), y)$ →

$= {}^t(AX) G Y$

$= {}^tX \underbrace{{}^tA G}Y$

La matrice de β est donc ${}^tAG$

$\gamma(x,y) = g(x, u(y))$

$= {}^tX GAY = {}^tX \underline{GA}Y$

dc la mat de γ est GA.

${}^tB = -B$ antisymétriq ?

${}^tB = B$ symétriq ?

29

mat 2x2

B symétriq et γ alterné

$$\begin{cases} {}^t({}^tAG) = {}^tAG & (1) \\ {}^t(GA) = -GA & (2) \end{cases}$$

G mat de g ds $\mathcal{B}_c$ où $E = \mathbb{R}^2$.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1)

soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$${}^tGA = {}^tAG.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -a+c \\ b+d & -b+d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{-a+c = b+d}$$

(2) $GA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$

$${}^t(GA) = \begin{pmatrix} a-c & a+c \\ b-d & b+d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~a+c = b−d.~~

$\Rightarrow a-c = -(a-c) \Rightarrow a-c=0 \Rightarrow a=c$

$\Rightarrow b+d = b-d \Rightarrow d=-b$.

$2c = 2d$ & $c=d$.

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aG, \quad a \in \mathbb{R}$$

Donc u est endomorphisme de E dt la mat ds $\mathcal{B}_c$ est aG où $a \in \mathbb{R}$.

si $A = aG$, $a\,{}^tGG = a\,{}^tGG$

${}^t(GA) = GA$

$A = aG$, $a\,{}^t(GG) = {}^t(GA)$

$-GA = -a.\,GG$.

$\frac{933A + n7/10}{2}$ $\quad 9{,}33 \, 7 \, 1 \, 8{,}0 \, 7 \, \boxed{6{,}67}$ $\quad n7\,3$

Ex 5 Diagonaliser (FB) de Gauss.
Rang ? signature ?

① Rang : nbr de carrés non nul de diagonalisé de la signature (p,q).
∘ nbr carrés coeff >0 : p
<0 : q

---

1) $\circ = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx)$

$\circ = \left[x^2 - 4(xy + xz)\right] + y^2 + z^2 - 4yz$

$\circ = \left[x^2 - 2x(2y + 2z)\right] + y^2 + z^2 - 4yz$

$\circ = \left[x - 2y - 2z\right]^2 - (2y + 2z)^2 + y^2 + z^2 - 4yz$

$\circ = \left[x - 2y - 2z\right]^2 - 3y^2 - 3z^2 - 12yz$

$\circ = A - 3(y^2 + z^2 + 4yz)$

$\circ = A - 3(y^2 + 4yz) - 3z^2$

$\circ = A - 3(y^2 + 2.yz) - 3z^2$

$\circ = A - 3(y^2 + 2yz + 2z^2 - 2z^2) - 3z^2$

~~$\circ = A - 3(y - z)^2$~~

$\circ = A - 3(y + 2z)^2 + 9z^2$

$\circ = (x - 2y - 2z)^2 - 3(y + 2z)^2 + 9z^2$

$\circ = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2$

$\circ = (x' \; y' \; z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Rang $= 3$ (nbr carrés non-nul)
$(p,q) = (2,1)$

rang $= p + q$!

(Prep 1)

2) $q = 2x^2+6y^2-4xy+8xz$

$q = 2(x^2+3y^2-2xy+4xz)$ — mise en facteur

$q = 2(x^2-2xy+4xz)+6y^2$

$q = 2(x^2-2x(y-2z))+6y^2$

$q = 2\left(x^2-2x(y-2z)+(y-2z)^2-(y-2z)^2\right)+6y^2$

$q = 2\left((x+y-2z)^2\right)-2(y-2z)^2+6y^2$

$q = 2A \quad +8z^2+8yz+4y^2$

$q = 2A+4y^2+8yz+8z^2$

$q = 2A+4(y^2+2yz+)+8z^2$

$q = 2A+4\left(y^2+2yz+(z)^2-(z)^2\right)+8z^2$

$q = 2A+\underset{2}{4}(y+z)^2 \quad +\underset{-6}{4}z^2$

$q = 2x'^2+2y'^2+6z'^2$ — -6

$q = (x' \; y' \; z')\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

Rang $q = 3$, sg $(2,1)$

$Q(X,Y,Z) = [X^2+2Y^2-6Z^2]$

on a $\begin{cases}X = x-y+2z\\Y = y+z\\Z = z.\end{cases}$

$\div 2$.

Dans $\mathcal{B}_c$,

$N = \text{mat}(q) = \begin{pmatrix}2&-2&4\\-2&6&0\\4&0&0\end{pmatrix}$

La matrice de q est

$N' = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-12\end{pmatrix}$

soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$

alors on a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$

φ s'écrit $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Rep. 2}}$ → suite

si $a \neq 0$, ${}^t(GG) = -GG$, 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t(GG) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -GG$$

Ex 5 : Diagonaliser FB de Gauss.
Rang.

$Q(x,y,z) =$ ______

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ie} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

on a dc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \to \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \to \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$\to \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \to \frac{1}{3}\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{matrix}\right|$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \to \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

La base $\mathcal{B}$ cherché est $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\boxed{\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}.}$$

4 $\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 - e_3 \end{cases}$

② suite.

Ex 5 3) $Q(x,y,z) = xy + yz + 2zx$

$\to$ choix xy ?...

$\cancel{\ell_1} = \frac{\partial q}{\partial x}$, $\ell_2 = \frac{\partial q}{\partial y}$

ℓ_1''

$\ell_1(x,y,z) = y + 2z$

- $\ell_2(x,y,z) = x + z$

$\ell_1(x) \cdot \ell_2(x) = (y+2z)(x+z)$

$= \underbrace{xy + yz + 2zx}_{Q(x,y,z)} + 2z^2$

$\qquad + 2z^2$

$Q(x,y,z) = \ell_1(x,y,z) \cdot \ell_2(x,y,z) - 2z^2$

- $\cancel{= \frac{1}{4}(\ell_1^2 - \ell_2^2)} - 2z^2$

$4Q = (\ell_1^2 - \ell_2^2) - 2z^2$

$\cancel{(a+b)^2 (a-b)^2 = 2ab}$

$$Q = (x+z)(y+2z) - 2z^2$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\big((x+z)+(y+2z)\big)^2 - \big((x+z)-(y+2z)\big)^2\Big] - 2z^2$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2\Big] - 2z^2$$

$$\boxed{ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)}$$

3

5) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ni M \longmapsto \det(M)$.

$M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto (x, y, z, t)$$

La forme quadratiq est

$$\det M = q(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = xt - yz$$

$$= \frac{1}{4}\left[(x+t)^2 - (x-t)^2 \right] - \frac{1}{4}\left((y+z)^2 - (y-z)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{(x+t)}_{X}{}^2 - \underbrace{(x-t)}_{Y}{}^2 - \underbrace{(y+z)}_{Z}{}^2 + \underbrace{(y-z)}_{T}{}^2 \right]$$

→ signature est $(2,2)$

→ forme non dégénérée.

Base orthogonale ?

$$\det M = q(x,y,z,t) = \frac{1}{4}\left[X^2 - Y^2 - Z^2 + T^2 \right]$$

Le changement de coordonnés s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

soit $\mathcal{B}$ la base ds laqlle les coord st X, Y, Z, T.
la mat de passage de la base standard ou $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}$ est $P = Q^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\mathcal{B}_C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

base orthogonale.

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \\ v_2 = \frac{1}{2}(e_3 + e_4) \\ v_3 = \frac{1}{2}(e_3 - e_4) \\ v_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2). \end{cases}$$

Ex 7 : Pr qlls vlrs param λ, μ (FB) déf un produit scalaire s/ $\mathbb{R}^3$?

$$f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 3\lambda x_1y_3 + 3\mu x_3 y_1.$$

$$q_f(x,x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 3\lambda x_1^2 + 3\mu \underline{x_3^2 x_1} ?$$

- $q_f = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 3\lambda x_1x_3 + 3\mu x_1x_3) + 3x_3^2 + 6x_2^2$

$$= (x_1 + 4(x_2) + 3(\lambda+\mu)x_3)x_1) + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$\cancel{= (x_1 + 2(x_2 + 3(\lambda+\mu)x_3))^2 - 4(x_2 + 3(\lambda+\mu)x_3)^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2}$$

$$\cancel{= A^2 - 4x_2^2 - 24(\lambda+\mu)x_2x_3 - 36(\lambda+\mu)^2 x_3^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2}$$

-

$$= \left(x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}(\lambda+\mu)x_3\right)^2 - \left(2x_2 + \frac{3}{2}(\lambda+\mu)x_3\right)^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= A^2 - 4x_2^2 - 6(\lambda+\mu)x_3x_2 - 9(\lambda+\mu)^2x_3^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= A^2 + 2x_2^2 - 6(\lambda+\mu)x_3x_2 + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda+\mu)^2\right)x_3^2$$

$$= A^2 + 2\left(x_2^2 - 3(\lambda+\mu)x_3x_2\right) + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda+\mu)^2\right)x_3^2$$

$$= A^2 + 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{2}(\lambda+\mu)x_3\right)^2 - \frac{9}{4}(\lambda+\mu)^2x_3^2\right] + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda+\mu)^2\right)x_3^2$$

$$= A^2 + 2B^2 + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda+\mu)^2 - \frac{9}{2}(\lambda+\mu)^2\right]x_3^2.$$

$$= A^2 + 2B^2 + \left(3 - \frac{27}{4}(\lambda+\mu)^2\right)x_3^2$$

soit $A = (a_{ij})$ la mat de f ds la base canoniq $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\lambda \\ 2 & 6 & 0 \\ 3\mu & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow f$ FB Sym $\Leftrightarrow A$ sym $\Leftrightarrow \lambda = \mu$.

f est un produit scalaire $\Leftrightarrow 3 - \frac{27}{4}(2\lambda)^2 > 0$

$\Leftrightarrow 3 - 27\lambda^2 > 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 < \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$.

$\overset{\|}{\mu}$

$g(x,y) = x_1 y_1 + 10 x_2 y_2 + 6 x_1 y_2 + \lambda x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$.

FBSym ? Non car $g(e_1, e_2) = 6$
$g(e_2, e_1) = 0$

$\Rightarrow$ n'est pas symétriq

$\Rightarrow$ n'est pas produit scalaire

---

exo 10 + exo 11

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ex 8 $f : E \to K$, $f' : E' \to K$.

f & f' st équivalents si $\exists$ ε base de E, ε' base de E' tq $\underset{\varepsilon}{Mat}(f) = Mat(f')$

$A = \underset{\mathcal{B}_c}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A' = Mat_{\mathcal{B}_c}(f') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cancel{5} \end{pmatrix}$

A' est sym contrairement à A.

on cd f & f' ne st pas équivalentes.

si f & f' étaient équivalentes alors ds tte base de $\mathbb{R}^3$

alors $\exists P$ inversible tq

$Mat_{\mathcal{B}}(f') = {}^tP \cdot Mat_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$.

$\underline{Ex 5}$ $q(x,y,z,w) =$

$= 9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw$
$+ 8zy + 12yw - 4zw.$

$= (3x + y - \frac{7}{3}z + 3w)^2 - (y - \frac{7}{3}z + 3w)^2$
$- 6y^2 - 8z^2 + 8zy + 12zw - 4zw$

$= A^2 - y^2 - 6y^2 + \frac{14}{3}yz - (\frac{7}{3}z)^2 - 6yw$
$+ 14zw - 9w^2 - 8z^2.$

$= A^2 - 7\left[y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{7}z - \frac{3}{7}w\right]^2 + 7(\frac{1}{3}z + \frac{4}{7}z + \frac{3}{7}w)^2$
$- (\frac{7}{3}z)^2 + 14zw - 9w^2 - 8z^2.$

$= A^2 - 7B^2 + 7(\frac{19}{21}z + \frac{3}{7}w)^2 - (\frac{7}{3}z)^2$
$- 8x^2 + 10zw - 9w^2.$

$= A^2 - 7B^2 + \frac{1}{7}(\frac{19}{3}z + 3w)^2 - (\frac{7}{3}z)^2 - 8x^2 + 10zw - 9w^2$

$= A^2 - 7B^2 + \frac{1}{7}\left[\frac{361}{9} - \frac{49}{9}\right] 8z^2 + \frac{9}{7}w^2 - 9w^2$
$+ \frac{38}{7}zw + 10zw$

$= A^2 - 7B^2 + (\frac{104}{21} - 8)z^2 - \frac{54}{7}w^2 + \frac{108}{7}zw$

$= A^2 - 7B^2 + \frac{2}{7}\left[\frac{64}{3}z^2 - 27w^2 + 54zw\right]$

$= A^2 - 7B^2 + \frac{2}{7}\left[\frac{32}{3}(z + \frac{54\times3}{32\times2}w)^2 - \left[27 + \frac{54\times3}{32\times2}\right]w\right]^2$

$\boxed{\text{Rang} = 4, \quad \text{signature} = (2,2)}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7/3 & 3 \\ 1 & -1/3 & -4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{54\times3}{32\times2} \\ 0 & 0 & 0 & 27 + \frac{54\times3}{32\times2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\to$ base orthogonale : $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Ex7 $g(x,y) = x_1 y_1 + 10 x_2 y_2 + 6 x_1 y_2$
$+ \lambda x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$.

→ $6x_1 y_2$ mais on a pas terme symetriq $6 x_2 y_1$.
Donc ce n'est pas forme bilin. symétriq.
Dc ne définit jms un produit scalaire.

$h(x,y) = 2 x_1 y_1 + 7 x_1 y_2 + 7 x_2 y_1 + 8 x_2 y_2$
$- 3 x_3 y_3 + \lambda x_2 y_3 + \mu x_3 y_2$.

h est FB $\underline{Sym}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\lambda = \mu}$

Diagonalisons h $\cancel{\text{à}}$ $\boxed{M}$ PDG.

La $\boxed{FQ}$ $\Leftrightarrow$ est $h(x,x) = 2x_1^2 + 14 x_1 x_2 + 8 x_2^2$
$- 3x_3^2 + (\lambda + \mu) x_2 x_3$

$$h(x,x) = 2\left[x_1 + \frac{7}{2} x_2\right]^2 - \frac{49}{2} x_2^2 + 8x_2^2 - 3x_3^2 + (\lambda+\mu) x_2 x_3$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{7}{2} x_2\right)^2 - \frac{33}{2} x_2^2 + (\lambda+\mu) x_2 x_3 - 3x_3^2$$

$$= 2A^2 - \frac{33}{2}\left(x_2 + (\lambda+\mu) x_3\right)^2 + \frac{(\lambda+\mu)^2}{33} x_3^2 - 3x_3^2$$

signature n'est dc jms $= (3,0)$.
Dc h n'est jms un produit scalaire A2

Prop $f : E^2 \to \mathbb{K}$, $f' : E^2 \to \mathbb{K}$ '

$f \sim f' \iff \exists\, \varphi : E \to E'$ isomorphisme

tq $\forall x, y \in E$, $f'(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x,y)$

Preuve $f \sim f'$: $\exists\, \mathcal{E}, \mathcal{E}'$ bases de E & E'

tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f')$

- ($\Rightarrow$)

soit $\varphi : E \to E'$ d'AL def p $\varphi(v_i) = v'_i \ \forall i$

φ est un isomorphisme.

soit $x, y \in E$,

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$

$$\begin{aligned} f'(\varphi(x), \varphi(y)) &= f'\left(\varphi(\textstyle\sum x_i v_i), \varphi(\sum y_j v_j)\right) \\ &= f'\left(\textstyle\sum x_i \varphi(v_i), \sum y_j \varphi(v_j)\right) \\ &= f'\left(\textstyle\sum x_i v'_i, \sum y_j v'_j\right) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j f'(v'_i, v'_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j f(v_i, v_j) \quad \text{par hypo } f \sim f' \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

-

(1)

Ex 11 soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, $\phi \in \mathcal{S}(E)$

def p $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$.

a) Mq ϕ est non-dégénérée.

$\phi : (A, B) \mapsto \phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$

on vt mq si $A = (a_{ij})_{ij}$ est tq

$\forall M \in E$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$ alors $A = 0$.

[$\ker \varphi = \{ x \in E \mid \varphi(x, y) = 0 \ \ \forall y \in E \}$]

non-dégénéré : $\ker \varphi = \{0_E\}$.

soit A tq $\mathrm{Tr}(AM) = 0 \ \ \forall M$.

op $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$\mathrm{Tr}(A E_{ij}) = 0$ où E_{ij} est la mat $n \times n$

ayant 1 à la place (i,j) et 0 aill^rs.

(les E_{ij} forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & j & \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} i$$

Évaluons AE_{ij} (i,j) fixés

$(AE_{ij})_{pq} = \sum_{k=1}^{n} A_{pk} (E_{ij})_{kq}$

⚠ manip formule $A \times B$

$(AE_{ij})_{pq} = \sum_{k=1}^{n} A_{pk}(E_{ij})_{kq}$

$= A_{pi}(E_{ij})_{iq}$ $\quad$ $k=i \to 1$ sinon 0 pr H.

$= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq j \\ A_{pj} & \text{si } q = j \end{cases}$

$(AE_{ij})_{pj} = A_{pi}$

$(AE_{ij})_{pq} = 0$ si $q \neq j$.

$$\begin{array}{c|c} & i \quad j \\ i & \\ j & \begin{pmatrix} & & | & \\ \hline & & 0 & \end{pmatrix} a_{ji} \end{array}$$

colonne d'indice j de $(A \times E_{ij})$ remplacée p colonne i de A.

$Tr(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$ (on a pas $\sum a_{ji}$ car (AE_{ij}) a des 0 si ttes autres colonnes)

on a vu cas $i \neq j$ alors non diagonx de E_{ij}.

→ si on a l'indice (i,i) → $E_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

→ $(AE_{ii})_{pq} = \sum_{k=1}^{n} A_{pk}(E_{ii})_{kq} = A_{pi}(E_{ii})_{iq}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq i \\ A_{pi} & \text{si } q = i \end{cases}$.

$$\underset{(AE_{ii})}{\overset{C_i(A)}{\begin{pmatrix} \emptyset & . & \emptyset \end{pmatrix}}} a_{ii}$$

colonne indice i de (AE_{ii}) = colonne indice i de A.

$Tr(AE_{ii}) = a_{ii} = 0$.

ccl $\forall\, i,j$, $a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$.

b) $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriq

A antisymétriq. On vt mq $Tr(AS) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{Tr}}(SA)$

$Tr(AS) = Tr({}^t(AS)) = Tr({}^tS\,{}^tA)$

$= Tr({}^tS(-A)) = -Tr(SA) = -Tr(AS)$

car φ BSym

$\Rightarrow 2\,Tr(AS) = 0$

$\Rightarrow Tr(AS) = 0$

car 2 inversible si $car(\mathbb{R}) \neq 2$

↳ caractéristiq

on suppose que les corps sr lsq lo 2 est inversible.

Ex 12 ⊕ ⊕

Ex 13 (PR)

si dim $E = 1$ évident

supp res vrai $\forall$ ev dim n.

Mq μ ev dim $n+1$.

- soit $v \in E$ vecteur isotrope.

on pt compléter ce vecteur en une base $(v, v_1, \dots, v_n)$ de E

Appliq$^\circ$ hyp récurr à $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

Il fr mq F admet vecteur isotrope.

comme Q non-dég, $\exists\, y \in E$ tq $\varphi(v, y) \neq 0$.

- $\circ$ v & y ne st pas colinéaires (car $\varphi(v,v) = Q(v) = 0$)

on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $y' = y + \lambda v$ soit isotrope.

$$Q(y') = Q(y + \lambda v) = \phi(y + \lambda v, y + \lambda v)$$

dev par bilinéarité

$$= \phi(y) + 2\lambda . \phi(y, v) + \lambda^2 \underbrace{\phi(v,v)}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-Q(y)}{2\,\phi(y,v)}.$$

v & y' ne st pas colinéaires. dc libre.

Dc on pt compléter cette famille en une base de E : $(v, y', v_2', \dots, v_n')$

applique HDR à $G = \mathrm{Vect}(y', v_2', \dots, v_n')$

(il admet un vecteur isotrope y' & dc par HDR il admet une base formée de vecteurs isotropes $y', y_2, \dots, y_n$.

Dc $v, y', y_2, \dots, y_n$ est une base de E formée de vecteurs isotropes

Procédé orthogonalisation Gram-Schmidt

quand (nd) $\forall$ bases $\exists$ base $(v_1, \dots v_n)$ q restreint à F
les espaces $F_i = Vect(v_1, \dots v_i)$ est (nd).

ie si mat q ds base $(v_1, \dots, v_n)$ est

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ les mineurs.

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1i} \\ & & \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix} \neq 0,$$

la forme q pt ê dégénérée MS pas trop (dim ker q ≤ 1).

cp si la forme est non dégénérée (@ si produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$). on pt appliquer Gram-Schmidt à n'importe quelle base.

1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

$$\text{Mat } q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

NB : $2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$
$6x_2x_3 = 3x_2x_3 + 3x_3x_2$

vérifs si on pt appliq GS à base canoniq.

$\Delta_1 = \det(1) = 1 \neq 0$
$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$

on cherch base ortho ie y_1, y_2, y_3 tq

$$\phi(y_1, y_2) = \phi(y_1, y_3) = \phi(y_2, y_3) = 0.$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on prd $y_1 = v_1$.
On cherche y_2 tq $Vect(v_1, v_2) = Vect(y_1, y_2)$
et $\phi(y_2, y_1) = 0$

$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ & $\phi(y_2, y_1) = 0$.

on cherche y_2 tq $y_2 = v_2 + \lambda y_1$.

on vt trouver λ tq $\phi(y_2, y_1) = 0$.

$$\phi(y_2, y_1) = \phi(v_2, y_1) + \lambda \phi(y_1, y_2)$$
$$= \phi(v_2, v_1) + \lambda \phi(v_1, v_1)$$
$$= 1 + \lambda$$

Dc $\lambda = -1$ & $y_2 = v_2 - y_1 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on cherche y_3 tq

$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2, y_3)$

& $\phi(y_3, y_2) = \phi(y_3, y_1)$

cherche $y_3 = v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1$

tq $\begin{cases} \phi(y_3, y_1) = 0 \\ \phi(y_3, y_2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_2) = \phi(v_3, y_2) + \lambda \phi(y_2, y_1) = 0 \\ \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \mu \phi(y_3, y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\phi(v_3, y_2)}{\phi(y_2, y_2)} \\ \mu = -\dfrac{\phi(v_3, y_1)}{\phi(y_1, y_1)} \end{cases}$$

$$\phi(v_3, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3$$

$$= \phi((x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')) =$$
$$= x_1 x_1' + 4 x_2 x_2' + 9 x_3 x_3' + x_1 x_2' + x_1' x_2 + 3 x_2 x_3' + 3 x_2' x_3$$

$$\phi(y_1, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + 4 - 2 = 3$$

$\lambda = -1$

$\mu = \phi(v_3, y_1) = \phi(v_3, v_1) = 3$

$\phi(y_1, y_2) = 1$ Dc $\mu = -3$

& $y_3 = v_3 - y_2 - 3 y_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dc la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

est une base orthogonale μ q.

~~5) calculer $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx$ & $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx$~~

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}$$

$$q\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 3$$

$$q\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = 4+4+9+4-6 = 15$$

Dc la signature de q est $(3,0)$.

& une expression de q ds la base orthogonale $\mathcal{B}$ est : $q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_3) = \tilde{x}_1^2 + 3\tilde{x}_2^2 + 15 x_3^2$

nécess^{rs}

Hypo^{ns} { ~~nd~~ ou min^{rs} successifs non nul

G-Schmidt

Diago Gauss strong $\forall$ FQ

base orthogonale

A4

2) $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$

~~$\int_0^1 x(1-x)^n dx = -\left[x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$~~

$$\mathrm{Mat}\, q = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -5\\ 1 & -5 & -8\end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Dc G-S applicable.

on pose $y_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

on cherche $y_2 = v_2 + \lambda y_1$ tq $\phi(y_2, y_1) = 0$

ie $\phi(v_2 + \lambda y_1, y_1) = 0$

$\Rightarrow \phi(v_2, y_3) + \lambda\,\phi(y_1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-q(y_1)}{\phi(v_2, y_3)} = \dfrac{1}{2}$

$y_1 = \begin{pmatrix} \cancel{1}\,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on pt multiplier p 2.

on cherche $y_3 = v_3 + \lambda v_2 + \mu v_1$ $\perp_q$

$$\begin{cases} \phi(y_3, y_2) = \phi(v_3, y_2) + \lambda q(y_2) = 0 \\ \phi(y_3, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \mu\, q(y_1) = 0 \end{cases}$$

Dc $\lambda = \dfrac{-\phi(v_3, y_2)}{q(y_2)} = -3 \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$q(y_2) = \cancel{\ldots}$ $4+3-8 = -1$

$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \phi((x,y,z),(x',y',z'))$

$= xx' + 3yy' - 8zz' - 2xy' - 2x'y$

$+ xz' + x'z - 5yz' - 5y'z$

$= 2 - 5 = -3$

$\mu = -\dfrac{\phi(v_3, y_2)}{q(y_1)} = -1$

$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$

3° lig. 1° colon coeff.

Dc $y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ ~~écrire mat~~ $\mathcal{B} = \left\{ (\quad), (\quad), \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est base orthogonale p q.

→ écrire mat ds la base $\mathcal{B}$.

Ex 5 Base orthogonale

si $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est FB sym n E ⓔⓥ dim n, une base orthog p^r f est 1 base de E $\{e_1, \dots, e_n\}$ tq $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

@ si $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(x_i)_{i=1}^n, (y_i)^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La base canoniq de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale.

→ Une base orthogonale p $\boxed{FQ}$ est une base orthogonale pr FB $\longleftrightarrow$.

Rq : si $X = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ & $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthogonale p^r q alors ds c^{tt} base

$$q(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (\lambda_i \in K)$$

→ Comment trouver base orthogonale ?

- → $\boxed{M}$ de Gauss
- → Orthogonalisat° Gram-Schmidt

A1

@ $\boxed{M}$ Gauss

$1) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx) = q(x,y,z)$

$= (x - 2y - 2z)^2 - 3(y + 2z)^2 + 9z^2$

$q'(x', y', z') = (x')^2 - 3(y')^2 + 9(z')^2$

alors $q(x,y,z) = q'(x - 2y - 2z,\ y + 2z,\ z)$

on a fait chgt $\begin{cases} X = x - 2y - 2z \\ Y = y + 2z \\ Z = z \end{cases}$ on a $q(x,y,z) = q'(x', y', z')$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}\, q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ & $P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Expression matricielle de q :

$$q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$q'(x', y', z') = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow (x'y'z')\, {}^tP^{-1} = (x\,y\,z)$$

on obtient

$$q(x,y,z) = (x'y'z')\, {}^tP^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\overset{\shortparallel}{q'(x',y',z')}$$

Donc $${}^tP^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Une base orthogonale pr q était donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, une base orthogonale pr q est ~~donnée~~ donnée par $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>calcul de P^{-1}:</u>

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dc une base orthogonale pr q & donnée ℓ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

A2

Vérifier $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base orthogonale pr q.

On écrit FB sym $\Leftrightarrow$ à q:

$$q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - 4(xy+xz+yz)$$

$$xy \rightarrow \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1.$$

$$f((x,y,z),(x,y,z)) = q(x,y,z)$$

$$f((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_1 + z_1y_2 + z_1x_2 + z_2x_1)$$

$$f((1,0,0),(2,1,0)) = 2+0+0-2(1+0+0+0+0+0) = 0$$

De m̂ $f((1,0,0),(-2,-2,1)) = 0 = \ldots$

enfin $f((2,1,0),(-2,-2,1)) = \text{---} = 0$

$\boxed{M}$ Trouver base orthogonale

$\boxed{M1}$ Diagonalisation $\boxed{FQ}$ par $\boxed{M}$ de Gauss

$\to$ on trouve $q = \alpha(x+y+z)^2 + \beta(x-y-z)^2 + \gamma(x+2y)^2$

$\begin{cases} X' = x+y+z \\ Y' = x-y-z \\ Z' = x+2y \end{cases} \to P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}c}\, q = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix} \div 2$ mat départ q ds base canoniq

$\div 2$

Calcul $P^{-1} \to P^{-1}\begin{pmatrix} | & | & | \end{pmatrix}$

base orthogonale pr q.

ⓐ $q = x^2+y^2+z^2 - 4(xy+yz+zx)$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}c}\, q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{M2}$ Orthogonalisation par Gram-Schmidt.

⚠ Hypothèse : $\boxed{FQ}$ ⓝⓓ ou $\Delta_i(\text{mineurs}) \neq 0$

$\cdot\, q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}c}\, q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, check $\Delta_1 = |1| = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\{y_1, y_2, y_3\}$? tq $\phi(y_1,y_2) = \phi(y_1,y_3) = \phi(y_2,y_3) = 0$

$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\to y_1 = v_1$; y_2 tq $\text{Vect}(v_1,v_2) = \text{Vect}(y_1,y_2)$ & $\phi(y_2,y_1) = 0$

$\to y_2 = v_2 + \lambda v_1$; λ tq $\phi(y_2, y_1) = 0$.

$\phi(y_2,y_1) = \phi(v_2,y_1) + \lambda\phi(y_1,y_2) = \phi(v_2,v_1) + \lambda\phi(v_1,v_1)$
$= 1+\lambda$

Dc $\lambda = -1$, $y_2 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y_3$ tq $\text{Vect}(v_1,v_2,v_3) = \text{Vect}(y_1,y_2,y_3)$ & $\begin{cases} \phi(y_3,y_2) = 0 \\ \phi(y_3,y_1) = 0 \end{cases}$

$y_3 = v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1$ tq $\begin{cases} \phi(y_3,y_1) = 0 \\ \phi(y_3,y_2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi(v_3+\lambda y_2+\mu y_1, y_2) = \phi(v_3,y_2) + \lambda\phi(y_2,y_2) = 0 \\ \phi(v_3+\lambda y_2+\mu y_1, y_1) = \phi(v_3,y_1) + \mu\phi(y_1,y_1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-\phi(v_3, y_2)}{\phi(y_2, y_2)} = \dfrac{-3}{3} = -1 \\[2ex] \mu = \dfrac{-\phi(v_3, y_1)}{\phi(y_1, y_1)} = -3 \end{cases}$$

$$\phi(v_3, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 3$$

$- \phi((x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')) = x_1x_1' + 4x_2x_2' + 9x_3x_3' + x_1x_2' + x_1'x_2 + 3x_2x_3' + 3x_2'x_3 . = -1+3+1$

$$\phi(y_1, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 1+4-2 = 3$$

$- \mu = \phi(v_3, y_1) = \phi(v_3, v_1) = 3 \quad (\phi(y_1, y_1) = 1)$

Dc $\mu = -3$

$$\Rightarrow y_3 = v_3 - y_2 - 3y_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$y_3 \mid y_2 \mid y_1$

$\Rightarrow$ base orthogonale $\{y_1, y_2, y_3\} = \mathcal{B}$

pr q
$$= \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

H4

Dc $q\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 3$, $q\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = 4+4+9+4-6 = 15.$

Dc signature de q : $(3, 0)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}$$

$q(x) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 6yz .$

$q\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 1+4-2 = 3.$

Ex 1 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{S}(E)$ FBSym

$$(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}(AB) = \phi(A,B)$$

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1) on a mq ϕ nd

b) on a mq mat sym est ϕ-orthogonale à tte mat anti-symétriq $\phi(A,B) = 0$.

c) Signature de ϕ ?

↳ trouver une base.

On mq $\forall S$ mat sym^tq :

$\phi(S,S) > 0$ & $\forall A$ mat anti-sym

$\phi(A,A) < 0$.

(R1) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on pose $\mathcal{S}(E)$: sym à E

$\mathcal{A}(E) = A \in E$.

→ mq $E = \underset{\sim}{\mathcal{S}(E)} \oplus \mathcal{A}(E)$.

on cherche dim^s ?.

Une base de E est donnée par $\{E_{ij} + E_{ji}\}$, $\underset{i \leq j}{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2}$

Une base de $\mathcal{A}(E)$ f l'ons $\{E_{ij} - E_{ji},\ i = j,\ (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2\}$

$S =$ 

$$\frac{A^t - A}{2} = A$$

S symétriq $S = \dfrac{S + {}^tS}{2}$

$$M = (a_{ij})_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

S symétriq

$$S = \frac{S + {}^tS}{2} = \left(\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i,j} a_{ij} E_{ji}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

$\{E_{ij} + E_{ji},\ i \leq j\}$ systm^ générat^r.

il est facile mq c'est une base.

(SG) d^t le nbre é^lt est

$$C_n^2 + n = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n$$

Pr Antisymétriq, de m̂ calcul... !

$A = \dfrac{A - {}^tA}{2}$, calculons $\phi(S,S) = \mathrm{Tr}(S^2)$

utilisons la relat° : ⊛

$S_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \quad (i \leq j)$

$S_{ij}^2 = (E_{ij} + E_{ji})^2 = (E_{ij} + E_{ji})(E_{ij} + E_{ji})$

⊛ $\begin{cases} E_{ij} E_{ke} = 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{ij} E_{jl} = E_{il} \end{cases}$

$= E_{ij}E_{ij} + E_{ij}E_{ji} + E_{ji}E_{ij} + E_{ji}E_{ji}$

→ (si $i < j$), ça donne

$= {}^{0+}E_{ii} + E_{jj} + 0 + 0$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} i \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\mathrm{Tr}(S^2) = 2$

$$\begin{array}{c} \\ j \end{array} \begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

→ si $i = j$

$\mathrm{Tr}(S_{i,i}^2) = \mathrm{Tr}(2E_{ii}) = 2^2 = 4$

• $S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$; on doit mq si $(i,j) \neq (k,l)$

$A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$; $\phi(S_{ij}, S_{kl}) = 0$

$\phi(A_{ij}, A_{kl}) = 0$

$S_{ij} S_{ij}$ $\quad i<j$

Antisymétriq, $(E_{ij} + E_{ji})(E_{kl} + E_{lk})$ $k<l$.

$(i,j) \neq (k,l)$

si $j \neq k$, $E_{ij}E_{kl} + E_{ij}E_{lk} + E_{ji}E_{kl} + E_{ji}E_{lk}$

si $j \neq l$, $E_{ij}E_{kl} + E_{ji}E_{lk}$

si $i = k$ $\quad E_{jl} + 0$

$D = E_{ik}(E_{kl} + E_{lk}) \quad k < l$

$= E_{ik}E_{kl} + E_{ik}E_{lk}$

si $i \neq k$, $D = E_{ii}E_{ik}$ $\Big\{$ si $i = l$

si $i = k$, $D = E_{il}$ et $\mathrm{Tr}(E_{il})$

alors $i = l$ ⇗

⑩

Si on prd le vecteurs de la forme,

S_{ji} et S_{ij} , $i \neq j$.

$\phi(S_{ii}, S_{jj}) = Tr(S_{ii}, S_{jj})$

$Tr((2E_{ii})(2E_{ij}))$

$= 4\, Tr(\underbrace{E_{ii}E_{jj}}_{0})^2 = 0$

→ De manière analogue, on pt mq

$\phi(A_{ij}, A_{ji}) = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$.

En Résumé, $\phi(S_{ij}) > 0 \quad \forall\, i,j$

$\phi(A_{ij}) < 0$

$\phi(A_{ij}, A_{kl}) = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$

$\phi(S_{ij}, S_{kl}) = 0$ si ______.

La signature est $si\left(\frac{(n+1)n}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$

Ex 15: Orthogonalisation de Gram-Schmidt

$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

$Mat_{\mathcal{B}_c}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 0$

fq de forme polaire $f(e_1, e_3) = (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= (1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

TD 3 Espaces Euclidien

D | Un ee est un espace vectoriel E de dim finie munit d'un produit scalaire

o $\langle , \rangle$ déf norme & dist s E.

- $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$d(x,y) := \|x-y\|$

$O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) : \forall x,y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \}$

$\langle x, y\rangle \overset{not}{=} \langle x | y\rangle$.

Ex 1 Mq $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$.

- $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$

$1 \Rightarrow 2$ $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \overset{f \in O(E)}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

$2 \Rightarrow 3$: $d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|$

$\overset{f \in \mathcal{L}(E)}{=} \|f(x-y)\| \overset{f \text{ préserve norme (isométrie)}}{=} \|x-y\| = d(x,y)$.

Mq aussi $3 \Rightarrow 2$ & $2 \Rightarrow 1$

$3 \Rightarrow 2$ $\|f(x)\| = d(f(x), 0) \overset{f \in \mathcal{L}(E) \text{ et}}{=} d(f(x), f(0))$ dc $f(0)=0$

$\overset{f \text{ isométrie}}{=} d(x, 0) = \|x\|$

$2 \Rightarrow 1$

N si b FBS de FQ q $(q(x) := b(x,x)) \Rightarrow$

$\rightarrow b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$

ici $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

de $\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$

$f\in\mathcal{L}(E)$ — f préserve norme

$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x,y\rangle$.

$\overset{m}{a}$ mqé (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3)

Mq (1) $\Longleftrightarrow$ (5) :

$\mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_n\}$ base orth.

$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Alors son image p f q est $\{f(b_1),\dots f(b_n)\}$ est une base ortho

• $\mathcal{B}'$ est une base car f est un isomorph & dc envoie 1 base sur 1 base

$f: E\longrightarrow E$

$\ker f = \{0\}$. En effet si $f(x)=0$
$\Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ & $x=0$

Elle est orthon. car

$\langle f(b_i), f(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ 1 & \text{si } i=j\end{cases}$

$5\Rightarrow 4\Rightarrow 1$.

$5\Rightarrow 4$ évident.

($\exists$ base orth. de E ; ∂ procédé d'orthog. de Gram - Schmidt) linear → $\mathcal{D} = \{b_1, \dots, b_n\}$

& écrire $x = \sum x_i b_i$ & $y = \sum y_i b_i$ ds cette base.

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i , \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle b_i , \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle b_i , b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$f(x) = f(\sum x_i b_i) = \sum_{i=1} x_i f(b_i)$$

$$= \sum x_i c_i$$

$\{c_1, \dots, c_n\}$ base de $= \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$

est 1 base orth. de E

, $f(y) = \sum^{n} y_i c_i$

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle \sum_i x_i c_i , \sum_j y_j c_j \rangle$$

bilin. → $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle c_i , c_j\rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle$$

Dc (1) ⇔ (2) ⇔ (3) ⇔ (4) ⇔ (5)

(5) ⇒ (1) ⇒ (2) ⇒ (5)

RQ $\boxed{\text{M est mat orthog si } {}^tMM = Id}$.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \langle z_1, z_1\rangle & \dots & \langle z_1, z_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_n, z_1\rangle & \dots & \langle z_n, z_n\rangle \end{pmatrix} = Id \text{ ssi } \langle z_i, z_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$z_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

M est orthog. ssi $\{z_1, \dots, z_n\}$ forme base orth. de $\mathbb{R}^n$.

A3

$^tMM = Id \Rightarrow M$ inv & dc colonnes forment base de $\mathbb{R}^n$.

Ceci mq. (6) $\Longleftrightarrow$ (7).

<u>(5) $\Longleftrightarrow$ (6) :</u> $\{b_1, \dots, b_n\}$ base ortho.

$$f(b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i$$

$$\mathrm{Mat}_{b_k} f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est base orth. ssi

$$\langle f(b_k), f(b_\ell) \rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{ssi} \quad \langle z_k, z_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$$

en effet :

$$\langle f(b_k), f(b_\ell) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_k, \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell} b_\ell \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell} \langle b_k, b_\ell \rangle$$

$= 0$ si $k \neq \ell$ AR

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}\right) \quad \text{si } k = \ell$$

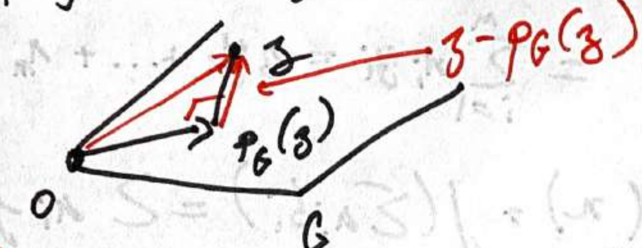
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)^2$$

<u>Ex 4</u> soit $\mathbb{R}^3$ de s^e eucli.

$w = (4, -2, -5) \in \mathbb{R}^3$ & F sev

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 0\}$.

(projection orthogonale)



$[\; p_G(z) \in G$ & $p_G(z) \perp (z - p_G(z))$

caractérisation projection orthog.

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-2z=0\}$

$G = F^\perp$

1. Déterm. $G = F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v,w\rangle = 0 \ \forall w \in F\}$

$\dim F = 2$ p TH Rg

• ($\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x-2y-2z$) fl

$F = \ker \varphi$ & $\dim \ker \varphi = 3 - rg\,\varphi = 2$

$\dim G = \dim F^\perp = 3-2 = 1$

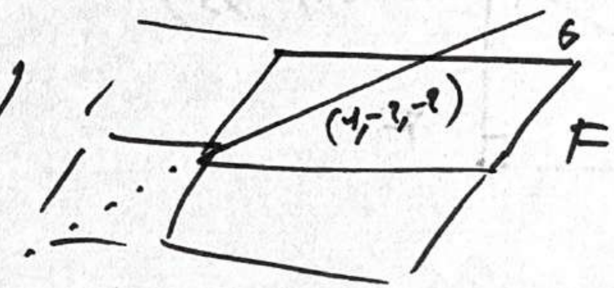
$(\dim + \dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3)$ / nd

• Trouver base de G revient dc à trouver vct^r non nul de G.

le vct^r (x_1, x_2, x_3) vérifie $\forall (x,y,z) \in F$, $x_1 x + x_2 y + x_3 z = 0$.

ℓ $(1,-2,-2)$ convient ie $(1,-2,-2) \in G$.

Dc $(1,-2,-2)$ est une base de G.



$w = (4,-2,-5)$

on cherche $w_G \in G$ tq $\langle w_G, w - w_G\rangle = 0$

$w_G \in G$ dc $w_G \in Vect((1,-2,-2))$

dc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $w_G = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}$ &

$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-\lambda \\ -2+2\lambda \\ -5+2\lambda \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

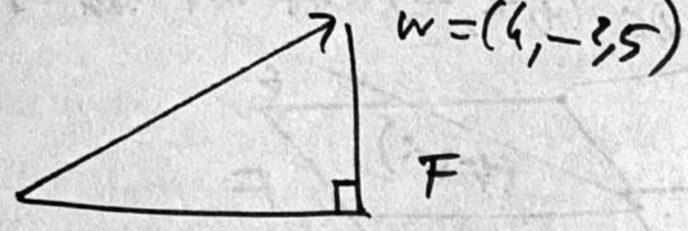
$\Leftrightarrow 4\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda^2 + 10\lambda - 4\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow -9\lambda^2 + 18\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$

Dc $w_G = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$



On cherche $w_F \in F$ tq $\langle w_F, w - w_F \rangle = 0$

$$w - w_G = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$w - w_G \in F$; $(2\times 2 - 2\times 2 - 2\times(-1)) = 4$

& $a\perp$ $\langle w - w_G, w_G \rangle = 0$ $= 2 - 4 + 2 = 0$

pr ce q précède :

dc $w_F = w - w_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

en général si $E = F \oplus G$

$\Rightarrow \forall x \in E,\ p_F(x) + p_G(x) = x$.

dc $d(w, F) = d(w, w_F)$

$= \|w - w_F\| = \|w_G\|$

$= \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

3. $w_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Si on prd l vect^rs de la forme ,

S_{ji} et S_{ij} , $i \neq j$.

$\phi(S_{ii}, S_{jj}) = Tr(S_{ii}, S_{jj})$

$Tr((2E_{ii})(2E_{ij}))$

$= 4 \, Tr(\underbrace{E_{ii} E_{jj}}_{0})^2 = 0$

- ...

→ De manière analogue, on pt mq

$\phi(A_{ij}, A_{ji}) = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$.

En Résumé, $\phi(S_{ij}) > 0 \quad \forall i,j$

$\phi(A_{ij}) < 0$

$\phi(A_{ij}, A_{kl}) = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$

$\phi(S_{ij}, S_{kl}) = 0$ si ______.

- La signature est $si\left(\frac{(n+1)n}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$

Ex 15 : Orthogonalisat° de Gram-Schmidt

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 0 \quad , \mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$$

Fq de forme polaire $f(e_1, e_3) = (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

FB ↔ A

vctrs orthgnx p/ FQ.

$= (1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

$f(e_1, e_2) = 1 \quad | \quad f(e_2, e_3) = 3$

$f(e_1, e_3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e_1 \perp_q e_3$

~~Il suffit de~~ Bon trouver une base orthog^le selon $\boxed{M}$ Gram-Schmidt.

Posons $v_1 = e_1$

$v_2 = e_3$

$v_3 = e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Sous la conditθ q

$f(v_1, v_3) = f(v_2, v_3) = 0$

ce q équivaut à

$f(v_1, v_3) = 0 = f(v_1, e_2) + \lambda_1 f(v_1, v_1) + \lambda_2 \cancel{f(v_1, v_2)}$

$f(v_1, e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$\overset{\shortparallel}{0}$

~~$\Rightarrow \lambda_1 = f(v_1,$~~

$f(v_1, v_1) = \underline{f(e_1, e_1)} = (1,0,0)\, M \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$= (1\,0\,0) \begin{pmatrix}1&1&0\\1&4&3\\0&3&9\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$= (1\,0\,0) \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{1}. \neq 0$

$\underline{f(v_2, v_2)} = f(e_3, e_3) = (0\,0\,1) \begin{pmatrix}1&1&0\\1&4&3\\0&3&9\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$= (0\,0\,1) \begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix} = \underline{9} \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{f(v_1, e_2)}{f(v_1, v_1)} = -\dfrac{f(e_1, e_2)}{1} = \dfrac{-1}{1} = -1$

- $f(v_2, v_3) = 0 = f(v_2, e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$= f(v_2, e_2) + \lambda_1 \cancel{f(v_2, v_1)} + \lambda_2 f(v_2, v_2)$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$\lambda_2 = -\dfrac{f(v_2, e_2)}{f(v_2, v_2)} = \dfrac{-f(e_3, e_2)}{+f(e_3, v_3)} = \dfrac{-3}{9} = -\dfrac{1}{3}$

$v_3 = e_2 - v_1 - \dfrac{1}{3} v_2$

$v_3 = e_2 - e_1 - \dfrac{1}{3} e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1/3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1\\1\\-1/3\end{pmatrix}$

dc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthogonale pr q.

Pr calculer signature, il nous faut une base orthogonale :

$q(v_1) = q(e_1) = 1$

$q(v_2) = q(e_3) = \underline{9}$

$q(v_3) = q\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 2$

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

dc signature de q est $(3,0)$.

La mat de q est dans la base orthogonale $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est : $\begin{pmatrix} q(v_1) & 0 & 0 \\ 0 & q(v_2) & 0 \\ 0 & 0 & q(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$q(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2$.

-

$\phi(u_1, e_3) = \phi(e_1, e_3) = 1$

$\phi(e_1, e_1) = \phi(u_1, u_1) = 1$

$\phi(u_2, e_3) = \phi(e_2 + 2e_1, e_3) = -3$

$\phi(u_2, u_2)$

$\dots \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

$2 - 5 = -3$

$(2\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ 13

2) $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$

$\mathcal{B}_C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_C}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}$

on cherche base orthogonale $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$

ϕ : forme polaire de q.

on pose $u_1 = e_1$; $u_2 = e_2 - \dfrac{\phi(u_1, e_2)}{\phi(u_1, u_1)} u_1$

$\phi(u_1, e_2) = \phi(e_1, e_2) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$

$\phi(e_1, e_1) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$

$u_2 = e_2 + 2e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$u_3 = e_3 - \dfrac{\phi(u_1, e_3)}{\phi(u_1, u_1)} u_1 - \dfrac{\phi(u_2, e_3)}{\phi(u_2, u_2)} u_2$

$u_3 = e_3 - u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$q(u_3) = q\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-7\ 3\ 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-7\ 3\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

↳ u_3 vecteur isotrope.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -49 + 2(21) + 7$$

$$= -49 + 42 + 7 = 0 .$$

signature de q est $(1,1)$

dim espace $= 3$.

$\Longrightarrow$ forme dégénérée ssi mat n'est pas inversible.

Ex 12 P : plan vectoriel

q : FQ nd sur P.

on suppose $\exists$ vct^{r} isotrope pr q

ie $v \in P \mid v \neq 0$ et $q(v) = 0$.

Mq $\exists$ base de P ds laq^{lle} mat(q)

- est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un plan P muni d'une FQ q ĉ celle-ci s'appelle plan hyperboliq.

---

si $\{v_1, v_2\}$ est une telle base, cela vt dire v_1 et v_2 st isotropes.

$q(v_1) = 0 = q(v_2) \rightarrow$ v_1, v_2 isotropes.

---

comme q est non-dégénéré et $v \neq 0$

- $\Rightarrow \exists w \in P \mid (v, w) \neq 0$

v étant de la forme polai^{re} $\leftrightarrow$ q.

q dégénéré $\Rightarrow$ ∃ vct^{r} ⊥ à tt le monde vt^{r} nul)

15

Quitte à ÷ par scalaire approprié,

on pt supposer qu'on ait

$(v, w_1) = 1$

Cherchons w isotrope ss la forme

$w = w_1 + av$ isotrope $q(w) = 0$?

$(v, w) = (v, w_1) + a(v, v) \overset{?}{=} 1$!!? ✓

$= 1 + 0 = 1$

$q(w) = (w, w) = (w_1 + av, w_1 + av)$

$= (w_1, w_1) + \underbrace{a^2 \cancel{(v, v)}}_{0} + 2a(v, w_1)$

car isotrope

$= (w_1, w_1) + 2a\,(v, w_1)$

$q(w) = 0 \Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a(v, w_1) = 0$

$\Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1)$

ℓ $(v, w_1) \neq a \neq 0$.

$\left(v, \frac{w_1}{a}\right) = 1$

Résumé :

Ex 10

Donc $w = w_1 + av$ où $a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1)$

$\{v, w\}$ est une base de $\underline{P}$.

& la mat de q ds $\{v, w\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si $\alpha v + \beta w = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$0 = (\alpha v + \beta w, v) = \alpha \underbrace{(v, v)}_{= 0} + \beta (v, w)$

$= \beta (v, w) = \beta = 0$

→ vct^rs font bien une base.

v & w st linéairt indépdts

$\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$

Ex 12 P : plan vectoriel

q : FQ nd sr P.

on suppose $\exists$ vct^{e} isotrope pr q

ie $v \in P \mid v \neq 0$ et $q(v) = 0$.

Mq $\exists$ base de P ds lq^{lle} mat(q) est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un plan P muni d'une FQ q ĉ celle-ci s'appelle plan hyperboliq.

---

si $\{v_1, v_2\}$ est une telle base, cela vt dire v_1 et v_2 st isotropes.

$q(v_1) = 0 = q(v_2) \rightarrow$ v_1, v_2 isotropes.

---

comme q est non dégénéré et $v \neq 0$

$\Rightarrow \exists w \in P \mid (v, w) \neq 0$

v étant de la forme polai^{re} $\leftrightarrow$ q.

---

q dégénéré ↳ $\exists$ vct^{r} $\perp$ à tt les vct^{rs} non nul)

Quitte à $\div$ r p scalaire approprié, on pt supposer qu'on ait

$(v, w_1) = 1$

Cherchons w isotrope ss la forme

$w = w_1 + av$ isotrope $q(w) = 0$?

$(v, w) = (v, w_1) + a(v, v) \overset{?}{=} 1$!!? ✓

$= 1 + 0 = 1$

$q(w) = (w, w) = (w_1 + av, w_1 + av)$

$= (w_1, w_1) + a^2 \cancel{(v, v)} + 2a(v, w_1)$

$\overset{!!}{0}$ car isotrope

$= (w_1, w_1) + 2a\,(v, w_1)$

$q(w) = 0 \iff (w_1, w_1) + 2a(v, w_1) = 0$

$\iff (w_1, w_1) + 2a = 0$

$\iff a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1)$

C $(v, w_1) \neq a \neq 0$:

$\left(v, \frac{w_1}{a}\right) = 1$

Résumé :

Donc $w = w_1 + av$ $\langle a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1)\rangle$

$\{v, w\}$ est une base de P.

& la mat de q ds $\{v, w\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si $\alpha v + \beta w = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$0 = (\alpha v + \beta w, v) = \alpha \underbrace{(v, v)}_{0} + \beta (v, w)$

$= \beta (v, w) = \beta = 0$

→ vct fmt bien une base.

v & w st linéairnt indépdts

$\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$

Ex 10 $P, Q \in K_n[X]$, on pose

Pr $\phi(P, Q) = P(1) . Q(1)$

Mq → ϕ FBS s $K_n[X]$.

noyau ?
rg ?
base orthog

$\phi : \mathbb{K}_n[X] \times \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(P, Q) \longmapsto P(1) . Q(1)$

$\phi(P_1 + \lambda P_2, Q) = (P_1 + \lambda P_2)(1)\, Q(1)$

$= (P_1(1) + \lambda P_2(1))\, Q(1)$

$= P_1(1) Q(1) + \lambda P_2(1) . Q(1)$

$= \phi(P_1, Q) + \lambda \phi(P_2, Q)$

$\phi(P, Q) = P(1) . Q(1) = Q(1) P(1) = \phi(Q, P)$

ϕ est une forme bilinéaire symétriq.

$\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \cdots & \phi(1, X^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(X^n, 1) & \cdots & \phi(X^n, X^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le rg de la mat est 1.

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, \varphi = 1$ ($\forall$ colonnes st $\hat{m}$)

& $\dim \ker \varphi = n$

$\varphi(P,Q)=0$

$\ker \varphi = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P$ soit orthogonal à Q $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X] \}$

- $\ker \varphi = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid MX = 0 \}$

où X est vct^R colonne des coord. de P ds $\mathcal{B}$ & $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

- $\boxed{R}$

$\phi : E \times E \longrightarrow K$ linéaire symétriq

ϕ induit $E \xrightarrow{\tilde{\varphi}} E^*$

$v \longmapsto f(v) \mid f(v)(w) = \phi(v,w)$

(17)

Si E muni base $\mathcal{B}$.

E^* —— base $\mathcal{B}^*$ Alors la mat. de $\tilde{\varphi}$ ds $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si $v \in \ker \tilde{\varphi} \Leftrightarrow f(v) = 0$ la forme linéaire nulle.

$\Leftrightarrow \forall w \in E,\ f(v)(w) = 0$

$\Leftrightarrow \forall w \in E,\ \varphi(v,w) = 0$

soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$P(X) \in \ker \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + \dots + a_n \\ \vdots \\ a_0 + \dots + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a_0 + \dots + a_n = 0$

L'ens des sol$^{\text{ds}}$ du syst est

$(-a_1 + \dots + a_n)e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $e_i = X^i$

$a_1(e_1 - 1) + a_2(e_2 - 1) + \dots + a_n(e_n - 1)$

Une base de $\ker \varphi$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \ker \varphi = n$.

Trouver une base orthogonale de $\mathbb{K}_n[X]$

Si pour $1 \leq i \leq n$,

$P_i(X) = X^i - 1$.

$\mathcal{B} = \{P_1(X), \dots, P_n(X)\}$ est une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.

→ 2 à 2 orthgx
→ orthgn à tt espace
→ orthgnl à lui m.
→ vectrs isotropes.
→ fl ⓓ
→ noyau : hyperplan ← annule tout d'une fl.

coeffts d'un H. ⇒ vect^R normal.

$AX + BX = 0 \to$ vct^R normal (A, B)

Soit $Q_0(X)$ tq $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{(a_0, \dots, a_n) \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\}$

Prenons $Q_0(X) = (1, \dots, 1)$
$= 1 + X + \dots + X^n$.

$Q_0(X) \perp \operatorname{Ker} \varphi$: $\forall i, P_i(1) = 0$

$\varphi(Q_0, P_i) = Q_0(1) P_i(1) = Q_0(1) \times 0 = 0$.

Dc $(1, \dots, 1)$ vct^R orthog. au noyau de φ.

Pour Q_0, on pt prendre n'importe quel vect^R q n'est pas dans $\operatorname{Ker} \varphi$.

on a bien complété la base $\operatorname{Ker} \varphi$.

⇒ base orthog. de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ex 15

3) q de mat $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, φ la forme polaire $\Leftrightarrow q$.

$\varphi(e_1, e_1) = 0 = \varphi(e_2, e_2) = \varphi(e_3, e_3)$.

$e_1' = e_1 + e_2$, $\varphi(e_1+e_2, e_1+e_2) =$
$= \varphi(e_1+e_2) + 2\varphi(e_1+e_2) + \varphi(e_1, e_2)$
$= 0 + 2 + 0 = 2 \neq 0$

Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2, e_2)$

$\varphi(e_1', e_2) = (1\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\varphi(e_1', e_3) = (1\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} \varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_2, e_3) = (0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$\mathcal{B}'$ est une base car

$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

$v_1 = e_1'$
$v_2 = e_2 + \lambda v_1$

Fiche 3 Espace euclidien

↳ FBS déf > 0

Dm ...diag

$1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 5$, $5 \Rightarrow 6$, $6 \Rightarrow 7$, $7 \Rightarrow 1$
Équivalences dmo.

Ex 1 soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $\quad \langle x|y \rangle$

1. $f \in O(E)$, ie $\forall x, y \in E$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x|y \rangle$
2. f préserve la norme ie $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

$1 \Rightarrow 2$ $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x|y \rangle$

en si $x = y$, $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x|x \rangle$

ie $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$

dc $\|f(x)\| = \|x\|$ (car norme vct^x ≥ 0)

$2 \Rightarrow 3$

3. f est une isométrie ie $\forall x, y \in E$,
$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

15

$\underline{2 \Rightarrow 3}$ soit $d(f(x), f(y)) = \|f(y) - f(x)\|$,

on a $d(f(x), f(y))^2 = \|f(y) - f(x)\|^2$

f (AL) $\rightarrow = \|f(y-x)\|^2 \underset{\uparrow}{=} \|y-x\|^2$

$= d(x,y)$ par hypoth. f préserve norme.

4) $\exists$ base ortho. de E dont l'image par f est encore une base ortho.

$\rightarrow$ Par Gram-Schmidt $\exists$ base orthonormée.

$\underline{3 \Rightarrow 4}$ on sait q'$\exists$ base orthonormée d'après l'orthogonalisat° de Gram-Schmidt.

soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base orthonormée.

soit $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ l'image de v par f.

soit i, j tq $i \neq j$

$< f(v_i), f(v_j) > \overset{?}{=} 0$

$d(f(v_i), f(v_j)) = d(v_i, v_j)$

$< f(v_i) - f(v_j), f(v_i) - f(v_j) > = < f(v_i - v_j), f(v_i - v_j) >$

$= < f(v_i), f(v_i) > \cancel{+ f(v_j)} - 2 f(v_i) f(v_j) >$

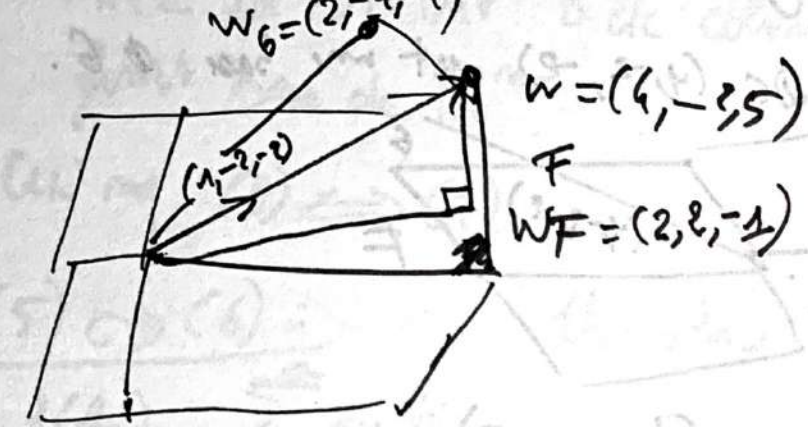
$+ < f(v_j), f(v_j) >$

$d(f(v_i), f(v_j))^2 = (d(v_i, v_j))^2$

20

+ ex 4 :

Dc $(1,-2,-2)$ est une base de G



On cherche $w_F \in F$ tq $\langle w_F, w-w_F \rangle = 0$

$$w - w_G = \begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$w - w_G \in F$; $(2\times 2 - 2\times 2 - 2\times(-1)) = 4$

& ou $\perp$ $\langle w-w_G, w_G \rangle = 0$ $= 2-4+2 = 0$

par ce qui précède :

dc $w_F = w - w_G = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

en général si $E = F \oplus G$

$\Rightarrow \forall x \in E,\ p_F(x) + p_G(x) = x$.

dc $d(w,F) = d(w, w_F)$

$= \|w - w_F\| = \|w_G\|$

$= \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

3. $w_F = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $w = w_F + w_G$.

Compléter w_F en une base orthogonale de F.

on cherche un vecteur $(x,y,z) \neq 0$ appartenant à F & orthogonal à $w_F = (2,2,-1)$.

Ce vecteur doit vérifier le système:

$$\begin{array}{l}\in F \rightarrow \\ \text{orthogonal à } w_F \rightarrow\end{array} \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 6y+3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y-4y = -2y \\ z = -2y. \end{cases}$$

& @ le vecteur $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ convient.

On a dc construit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ adapté à la décomposi° $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

$$\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\in F}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}}_{\in F^{\perp} = G} \Big\}$$ base orthogonale.

4. Ds $\mathcal{B}$, déterminer les mat de p_F & p_G ds les bases canoniqs.

- $Mat_{\mathcal{B}}(p_F)$? $P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$

Appliquer chgt de base.

$$Mat_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ en effet $p_F|_F = Id$

et $p_F|_{F^\perp} = 0$.

$$P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix} = P.$$

$${}^tP.P = \begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{9}\,{}^tP$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{B}}(p_F)"] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[d, "P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}"] \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{B}_c}(p_F)"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c)
\end{tikzcd}$$

$$P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

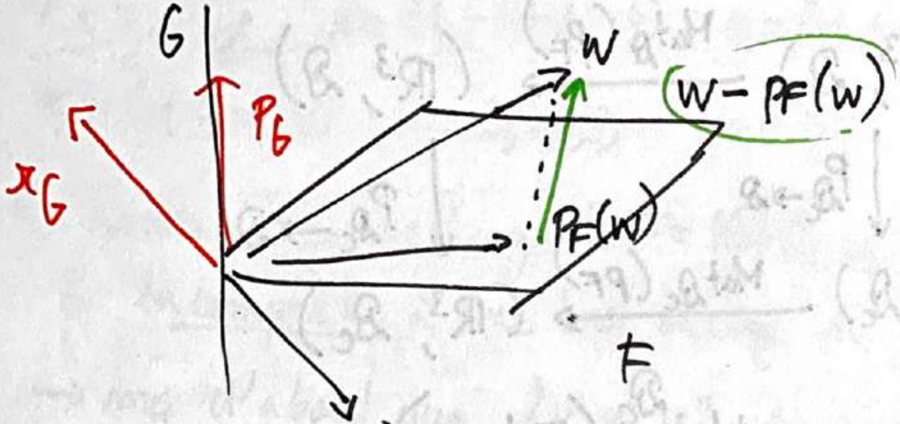
FF chgt de base

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(p_F) = P.\,Mat_{\mathcal{B}}(p_F).\,P^{-1}$$

Dc $$Mat_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&3&2\\2&5&-4\\2&-4&5\end{pmatrix}.$$

De m̂ $$Mat_{\mathcal{B}}(p_G) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \left(p_G|_F = 0 \ \& \ p_G|_F = Id \right.$$

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(p_G) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&+2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&4&4\\-2&4&4\end{pmatrix}$$



$$r_F(w) = w - 2(w - p_F(w))$$
$$= 2\,p_F(w) - w$$

$r_F|_F = Id$ $\qquad$ $r_F|_G = -Id$.

De m̂ $\; r_G(w) = 2\,p_G(w) - w$.

$r_G|_G = Id$ & $r_G|_F = Id$

3) Matrice de réflexion orthogonale $r_F = P$ au plan F ds base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(r_F) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -Mat_{\mathcal{B}}(r_F)$$

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(r_G) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 5 : 1. $x=(4,-1,-3,+4)$; $v_1=(1,1,1,1)$

$v_2=(1,2,-2,-1)$; $v_3=(1,0,0,3)$

a) Trouver base orthog. de $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$
& la compléter à une base orthog de $\mathbb{R}^4$.

→ mq d'abord que $\{v_1,v_2,v_3\}$ forment base de F.

→ vérifions v_1, v_2, v_3 linéairt indep :

$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta=0\\ \alpha-2\beta=0\\ \alpha-\beta+3\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha=-2\beta\\ \alpha=2\beta\\ \alpha-\beta+3\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Dc $\{v_1,v_2,v_3\}$ forment une base de F.

→ Appliquons Gram-Schmidt.

on construit une base orthogonale de F, notée w_1, w_2, w_3.

$w_1=v_1$, $w_2=v_2-\alpha w_1$

4 α vérifiant condi° $\langle w_2,w_1\rangle=0$

$\langle w_2,w_1\rangle=0$ ie $\langle v_2,v_1\rangle=\alpha\langle v_1,v_1\rangle$

dc $\alpha=\dfrac{\langle v_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=0$

Dc $w_2=v_2$

$w_3=v_3-\alpha v_2-\beta v_1$, 4 α & β vérifiant

$$\begin{cases}0=\langle w_3,v_2\rangle=\langle v_3,v_2\rangle-\alpha\langle v_2,v_2\rangle\\ 0=\langle w_3,v_1\rangle=\langle v_3,v_1\rangle-\beta\langle v_3,v_2\rangle\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\langle v_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}=\dfrac{-2}{10}=-\dfrac{1}{5}\\ \beta=\dfrac{\langle v_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=\dfrac{4}{4}=1\end{cases}$$

$v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\langle v_2,v_2\rangle=1\times1+(2\times2)+(-2\times-2)+(-1\times-1)=10$

Dc $w_3=v_3+\frac{1}{5}v_2-v_1$; pr simplifier on pt choisir

$w_3'=5w_3=5v_3+v_2-5v_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\9\end{pmatrix}$

La base $(v_1,v_2,w_3')=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\9\end{pmatrix}\right\}$
est une base orthogonale pr F.

AB

Compléter là en 1 base orthog. de $\mathbb{R}^4$.

on cherche $(x,y,z,t) \neq 0 \in \mathbb{R}^4$ orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\9\end{pmatrix}$.

(x,y,z,t) doit vérifier le système :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y-2z-t=0 \\ x-3y-z+9t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-3z-2t=0 & L_2-L_1 \\ -4y-8z+8t=0 & L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-3z-2t=0 \\ -y-2z+2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-3z-2t=0 \\ z=0 \end{cases}$$

on pt choisir (x,y,z,t) tq $t=\underline{1}$.

Dc $z=0$, $y=2$. $x=-y-z-t=-2-1=-3$

$$\mathcal{B}=\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\9\end{pmatrix}}_{\in F}, \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in F^\perp}\Big\} \text{ est}$$

base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ adaptée à la décomposit° $\mathbb{R}^4 = F \oplus F^\perp$.

b) Calculer $p_F(x)$ et $p_{F^\perp}(x)$, où p_G dénote proj. orth de $\mathbb{R}^4$ sur G, G sev de $\mathbb{R}^4$

$p_F(x) = ?$ $\quad p_{F^\perp}(x) = ?$

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p_F} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \& \quad \underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p_{F^\perp}} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

→ Décomposer $x=(4,-1,-3,4)$ ds la base $\mathcal{B}$ & appliquer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p_F$ & $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p_{F^\perp}$.

on cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\9\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

ie

$$\begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ a+2b-3c+2d=-1 \\ a-2b-7c=-3 \\ a-b+9c+d=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ b-4c+5d=-5 & L_2-L_1 \\ -3b-8c+3d=-7 & L_3-L_2 \\ -2b+8c+4d=0 & L_4-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ b-4c+5d=-5 \\ -3b-8c+3d=-7 \\ -2b+8c+4d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ b-4c+5d=-5 \\ -20c+18d=-22 \\ 14d=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5+(4\times 16)\frac{1}{35}+\frac{25}{7}=2/5 \\ c=(-45/7+11)\div 10 = 32/70 = 16/35 \\ d=-5/7 \end{cases}$$

$\boxed{A14}$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 16/35 \\ -5/7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 16/35 \\ -5/7 \end{pmatrix}$$

$$p_F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{16}{35}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

&

$$p_{F^\perp}(x) = -\frac{5}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 6 E ee dim finie & prod scal^{re}

R : $u \in O(E)$: $O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \}$.

1. soit F sev de E. Mq si F est stable par $u \Rightarrow F^\perp$ est aussi stable p u.

- R F stable p u : $u(F) \subset F$.

on vt mq $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

soit $x \in F^\perp$, on vt mq $\langle u(x), y \rangle = 0 \ \forall y \in F$

" On aimerait appliquer l'égalité $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ & mq $u|_F$ est isom. bijectif. "

Premièrem^t, mq u est un isomorphisme

- $u : E \longrightarrow E$ $\quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in E$.

soit $x \in \ker u$.

Et $u(x) = 0$

Alors $\forall y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle 0, u(y) \rangle = 0$

comme produit scalaire est non-dégénéré.

Donc $\ker u = \{0\}$ & u est un isomorphisme.

$\rightarrow u|_F$ est aussi un isomorphisme sur F.

D'où $\exists y' \in F \mid y = u(y')$. $\quad u \in O(E)$

D'où $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(y') \rangle = \langle x, y' \rangle = 0$

car $x \in F^\perp$ & $y' \in F$.

De $u(x) \in F^\perp$ & u laisse stable $F^\perp$.

$[u(F) = F$ & $u(F^\perp) = F^\perp]$.

si $\mathcal{B}$ est une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_{F^\perp}$

$$\Rightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} Mat_{\mathcal{B}_F}(u) & 0 \\ 0 & Mat_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u) \end{pmatrix}$$

2) Mq si λ vp réelle de $u \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Mq $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) = \{$vp réelles de $u\}$.

soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u)$ Alors $\exists x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$.

dc $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle \overset{u \in O(E)}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

comme $u(x) = \lambda x$, on obtient aussi

$\|u(x)\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$,

comme $x \neq 0$, $\|x\|^2 \neq 0$ (car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est pdt scalaire)

Dc $\lambda^2 = 1$ dc $\lambda \in \{\pm 1\}$.

3) Mq $\ker(id_E - u)$ & $\mathrm{Im}(id_E - u)$ st orthogonx & supplm^{tres} ds E.

soit $x \in \ker(id_E - u)$ & $y \in \mathrm{Im}(id_E - u)$

Mq $\langle x | y \rangle = 0$.

$\exists y' \in E \mid y = y' - u(y')$. car image.

$x \in \ker(id_E - u) \Rightarrow x - u(x) = 0 \Rightarrow x = u(x)$

$\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle - \langle x, u(y') \rangle$

$= \langle x, y' \rangle - \langle u(x), u(y') \rangle$

$\overset{u \in O(E)}{=} \langle x, y' \rangle - \langle x, y' \rangle = 0$

D+, P $\boxed{\text{TH Rang}}$

$\dim \ker(id_E - u) + \dim \mathrm{Im}(id_E - u) = \dim E$

Dc ces 2 espaces st orthognx & supplm^{tres}.

4) Mq $(id_E - u)^2$ ssi $u = id_E$.

$\Leftarrow$) easy si $u = id_E$ alors $id_E - u = 0$

$(id_E - u)^2 = (id_E - u) \circ (id_E - u)$

$\Rightarrow$) $(id_E - u) \circ (id_E - u) = 0$

$\forall x \in E$, $(id_E - u)((id_E - u)(x)) = 0$

$\forall x \in E$, $(id_E - u)(x) \in \ker(id_E - u)$

dc $\mathrm{Im}(id_E - u) \subset \ker(id_E - u)$

or $\mathrm{Im}(id_E - u) \cap \ker(id_E - u) = 0$

P. 93.

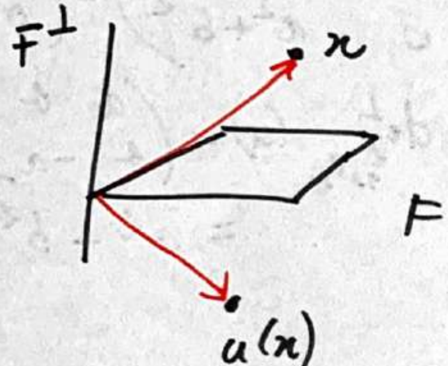
Dc $Im(id_E - u) = \{0\}$ & $\ker(id_E - u) = E$

Dc $u = id_E$.

5. Mq $u^2 = id_E$ ssi u est une symétrie orthogonale.

Rq u symétrie orthogonale :

$E = F \oplus F^\perp$ | $u|_F = id$ & $u|_{F^\perp} = -id$.



$\Leftarrow$] Vrai car $u^2|_F = id$ & $u^2|_{F^\perp} = id$ dc $\underline{u^2 = id}$.

$\Rightarrow$] $E = \ker(id_E - u) \oplus Im(id_E - u)$

(p q° 3) $F = \ker(id_E - u)$ "$\ker(id_E - u)^\perp$"

$u|_F = id$ $\quad (\forall x \in E \quad (id_E - u)(x) = 0 \Rightarrow x = u(x))$

soit $y \in Im(id_E - u)$; $\exists y' \in E$ | $y = y' - u(y')$

$u(y) = u(y') - u^2$.

Dc $u|_{F^\perp} = -id$.

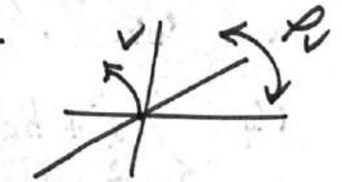
Dc u est la symétrie orthogonale p/ à $\ker(id_E - u)$

Ex7 Etude $O(2) = O(\mathbb{R}^2)$

(e_1, e_2) base canoniq

$R^\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ rotatº d'angle φ

ρ_V réflexion d'axe $V^\perp$



$\rho_V(V) = -V$

1. soit $u \in O(\mathbb{R}^2)$, $\det u = -1$.

Mq u est une réflexion.

$\underset{(e_1,e_2)}{Mat_u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $ad - bc = -1$

$u \in O(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=-1 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

On vt mq u est réflexion orthog

ie p l'en 6 tq $\boxed{u^2=id}$

$$\left(\underset{e_1,e_2}{\mathrm{Mat}}(u)\right)^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Mq $\begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ ac+dc=0 \\ ab+bd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ c(a+d)=0 \\ b(a+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-d^2=0 \\ a^2+bc=1 \\ c(a+d)=0 \\ b(a+d)=0 \end{cases}$

$c^2+d^2=1$

NB : $(a+d)^2 = a^2+2ad+d^2$

$= a^2-2+2bc+d^2$

$= \underbrace{a^2+b^2+c^2+d^2}_{2}-b^2-c^2-2+2b$

$= -b^2-c^2+2bc$

$= -(b-c)^2$

$(a+d)^2+(b-c)^2=0$

$\Rightarrow a+d=0$ & $b-c=0$

$\Rightarrow \underset{e_1,e_2}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

& $-a^2-b^2=-1$.

$$\underset{e_1,e_2}{\mathrm{Mat}^2}(u) = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\underset{e_1,e_2}{\det}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

$= a^2-b^2=1$

$\Rightarrow \underline{a^2+b^2=1}$

suite en 1 : 3 => 5

On suppose f est une isométrie ie, $\forall x,y \in E$, $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$

soit $(v_i)_{1\le i\le n}$ une base orthon de E, on doit mq $< f(v_i), f(v_j) > = \delta_{ij}$

Rq : si on fait $j=0$, ds l'hypo on a
(*) $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$.

Ceci étant, on a :
$$<f(v_i), f(v_j)> = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} q(f(v_i)+f(v_j)) \\ -q(f(v_i)) - q(f(v_j)) \end{array}\right]$$

où q est la forme quad ass à $<\cdot|\cdot>$.

$$<f(v_i), f(v_j)> = \frac{1}{2}\left[q(f(v_i+v_j)) - q(f(v_i)) - q(f(v_j))\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[q(v_i+v_j) - q(v_i) - q(v_j)\right]$$
$$= <v_i, v_j> = \delta_{ij}$$ $\Rightarrow$ dc la base des (v_i) est orthonormée.

Dc $f(v_i)_{1\le i\le n}$ est orthonormée.

(*) $\Leftrightarrow q(f(x)) = q(x)$

3 => 4 : trivial, on sait $\exists$ une base orthonormée ds E. D'après 5), l'image par f de cette base est orthonormée.

4 => 5 : $\exists\ \mathcal{B}$ base orthon. de E dont l'image $f(\mathcal{B})$ est une base orthonorm.

soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$; soit $\{w_1, \dots, w_n\} = W$ une base orthonormée de E.

On doit mq $f(V)$ est orthonormée.

$\rightarrow$ w_i s'écrivent ds base $\mathcal{B}$:
$$w_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \quad \forall i,\ 1\le i\le n$$

$$<f(w_i), f(w_j)> = <f(\sum a_{ki} v_k), f(\sum a_{lj} v_l)>$$
$$= \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} <f(v_k), f(v_l)>$$
$$= \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj}\, \delta_{kl}$$
$$= \sum_k a_{ki}\, a_{kj}\, \delta_{kl} \quad l=k.$$

Puis, d'un autre côté on a :

$<w_i, w_j> = <\sum_k a_{ki} v_k, \sum_\ell a_{\ell j} v_\ell>$

$= \sum_{k\ell} a_{ki} a_{\ell j} <v_k, v_\ell>$

$= \sum_k a_{ki} a_{\ell j} \delta_{k\ell} = *$

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base.

Dc $<f(w_i), f(w_j)> = <w_i, w_j> = \delta_{ij}$

ce q mq $f(w_i)$, $1 \leq i \leq n$ est

une base orthonormée.

$5 \Rightarrow 6$ on suppose f renvoie tte base orthon. sur une base orthon.

soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

$\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$

soit $x = \sum x_i v_i$

$y = \sum y_j v_j$.

$<f(x), f(y)> = \sum_{i,j} x_i y_j <f(v_i), f(v_j)>$

$= \sum_i x_i y_i$ car $f(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est base orthonormée

$= <x, y>$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée & hypothèse.

si $A = mat_{\mathcal{B}}(f)$ $\qquad \varphi(v, w) = {}^t(\dots) A \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

${}^t(AX) I (AY) = {}^tXY$

ie ${}^tX\,{}^tAAX = {}^tXY$ $\quad \Leftrightarrow {}^tAA = I$

dc A est orthogonale.

$6 \Rightarrow 7$ soit $M = Mat(g, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ orthonormée $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$

$\{f(v_i)\ 1 \leq i \leq n\}$ est orthonormée

or les $f(v_i)$ st les vecteurs colonnes de la matrice M

$<f(v_i), f(v_j)> = {}^t(MX_i)(MX_j)$

$= {}^tX_i\,{}^tMMX_j$

$v_i \rightarrow X_i$

$v_j \rightarrow X_j$

(22)

$\dim F = 2$, (car $\dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$

Par hypothèse, M est orthogonale !

$\Rightarrow {}^tMM = I$. dc $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = {}^tX_i X_j = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

7 ⇒ 1

On suppose les colonnes de la mat de f ds base orthon. de E

- forment une base orthon.

soit $x, y \in E$, $x = \sum x_i v_i$, $y = \sum y_j v_j$ avec $\mathcal{B}$ orthonormée.

$\mathcal{B} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle \sum x_i f(v_i), \sum y_j f(v_j)\rangle$$
$$= \sum x_i y_j \langle f(v_i), f(v_j)\rangle.$$

- $f(v_i)$ est la colonne C_i d'après l'h

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij}$$
$$= \sum_i x_i y_i$$
$$= \langle x, y\rangle$$

car base orthonorm

Ex 4 : $\mathbb{R}^2$, $w = (4\ -2\ -5) \in \mathbb{R}^3$,

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 0\}$.

1) Donner une base de $G = F^\perp$, déterminer la projeco orthogonale w_G de w sur G.

→ soit $G = F^\perp$, $v = (x_1, x_2, x_3)$

F → est un hyperplan

G est dirigé p le vect^R normal à l'hyperplan.

$v_3 = (1\ -2\ -2)$ est un vct^R normal à F.

$\forall w \in F$, $\langle v_3, w\rangle = 0$

sinon $\boxed{M}$ procéder c̄ suit :

$(x,y,z) \in F \iff \exists x,y,z \in \mathbb{R}^3$ tq

$(x,y,z) = (2z + 2y, y, z) = y(2,1,0) + z(2,0,1)$

dc une base de F est donnée p

$\{v_1 = (2,1,0),\ v_2 = (2,0,1)\}$.

dc $\dim G = 1$; (car $\dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$)

$\dim F = 2$

soit $\{v_3\}$ une base G.

on doit avoir $\langle v_3, v_1\rangle = \langle v_3, v_2\rangle = 0$

$v_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

$\left\langle v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$\langle v_3, v_1\rangle = 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$
$\langle v_3, v_2\rangle = 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_1 \\ \alpha_3 = -2\alpha_1 \end{cases}$

Pr $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$.

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$ax + by + cz = 0$ $\Leftrightarrow$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow$ Vect^r normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Équat hyperplan.

$G = \mathbb{R} v_3$ où $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer la projec° orthogonale w_G de w sur G.

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ aussi $\mathbb{R}^3 = F \perp G$.

$x \in \mathbb{R}^3$, $\exists!\, x_F \in F$, $\exists!\, x_G \in G$,

$x = x_F + x_G$; $p_F(x) = x_F$; $p_G(x) = x_G$

$x = p_F(x) + p_G(x)$

$\{v_3\}$ base de G ; $w_G \in G$, s'écrit

dc $w_G = \alpha v_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\langle w, v_3\rangle = \langle w_F + w_G, v_3\rangle$

$= \underbrace{\langle w_F, v_3\rangle}_{\substack{\in F \quad \in F^\perp \\ = 0}} + \langle w_G, v_3\rangle$

$\langle w, v_3\rangle = \langle w_G, v_3\rangle = \langle \alpha v_3, v_3\rangle = \alpha \langle v_3, v_3\rangle$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\langle w, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle} = \dfrac{18}{9} = 2$

24

$\Rightarrow w_G = 2 v_3 = (2\ -4\ -4)$

a) 2) $d(w,F) = \inf_{v \in F} d(v,w)$; $\widehat{(w,F)} = \inf_{v \in F \setminus \{0\}} \widehat{(v,w)}$

$d(w,F) = d(w, p_F(w))$

$p_F(w) + p_G(w) = w \Rightarrow$

$p_F(w) = w - p_G(w)$

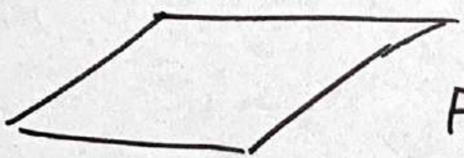
- $d(w,F) = d(w, p_F(w)) = d(w, w - p_G(w))$

$= d(w, w - p_G(w))$

$= \|w - p_G(w) - w\| = \|p_G(w)\|$

$w - p_G(w) = (4\ {-2}\ {-5}) - (2\ {-4}\ {-4})$

$= (2\ 2\ {-1})$

- 

F

1) $d(w,F) = \inf_{v \in F} d(v,w)$; $\widehat{(w,F)} = \inf_{v \in F\setminus\{0\}} \widehat{(v,w)}$

2)

$$d(w,F) = d(w, p_F(w))$$

$$p_F(w) + p_G(w) = w \Rightarrow$$

$$p_F(w) = w - p_G(w)$$

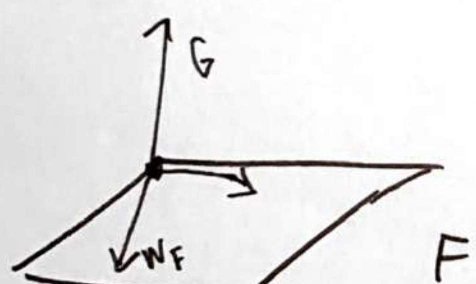
$$\underline{d(w,F)} = d(w, p_F(w)) = d(w, w - p_G(w))$$

$$= d(w, w - p_G(w))$$

$$= \|w - p_G(w) - w\| = \underline{\|p_G(w)\|}$$

$$w - p_G(w) = (4\ -2\ -5) - (2\ -4\ -4)$$

$$= (2\ 2\ -1)$$



3)

$$w = p_F(w) + p_G(w) = w_F + w_G$$

$$\Rightarrow w_F = w - w_G = \begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Compl. w_F en une base orthogonale de F.

on cherche ~~tout~~ $u \in F \mid \cancel{\langle u, w_F \rangle} = 0$

$v = (x\ y\ z) \in F \iff \exists\, y, z \in \mathbb{R},\ v = (2y+2z, y, z)$

$v = y\underbrace{(2,1,0)}_{v_1} + z\underbrace{(2,0,1)}_{v_2}$.

$u = (u_1\ u_2\ u_3)$

$$\begin{cases} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 + u_3 = 0 \end{cases} \iff \{$$

$u \in F$ / $\{w_F, u\}$ une base de F.

$$\langle w_F, u \rangle = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2y+2z\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 4y + 4z + 2y - z = 0 = 6y + 3z = 0$$

$$\Rightarrow z = -2y$$

$$u = \begin{pmatrix}-2y\\y\\-2y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Prenons p@ $u = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

$\{w_F, u\}$ forme une base orthogonale.

4. Déterminer matrice de p_F & p_G ds les bases canoniqs & $\mathcal{B}$.

calculer $M = \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(p_F)$

$\tilde{\mathcal{B}} = \{w_F, u, \underset{\in F^\perp \mathcal{B}}{v_3}\} \rightarrow M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^tP . P} = \begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$P^{-1} = \frac{1}{9}\,{}^tP$ ← Astuce

AL

$M = P^{-1}.M'.P$

$M' = P.M.P^{-1}$

$$M' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&-2&+1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&+2&-1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$N = \mathrm{Mat}(p_G, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$N' = \mathrm{Mat}(p_G | \mathcal{B}_c)$

car $v_3 \in F^\perp = G$

$N' = P.N P^{-1}$

5) Matrice de la réflexion orthogonale

r_F : réflexion orthogonale ~~P~~ à F.

$x = p_F(x) + p_G(x)$

$r_F(x) = p_F(x) - p_G(x) \iff T = M' - N'$.

↑ matrice ⟺ T

Ex 2

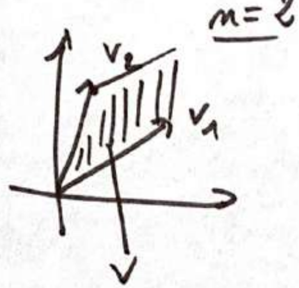
soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ sur $(E, \langle \mid \rangle)$

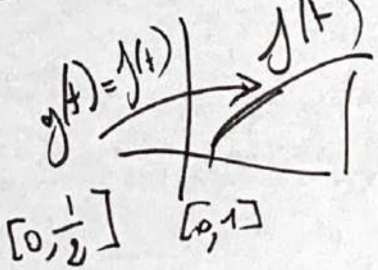
V = parallélépipède construit p. ces vect^{rs}.

$V = \{ t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \mid 0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i \}$

$$[0,1] \longrightarrow V$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto t_1 v_1 + t_2 v_2$$





le résultat ne dépend pas du paramétrage.

Ex 9 $SO(3) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = Id\}$ 1

Un élt de $SO(3)$ est une rotaθ R_v^θ

0. Mq mat $M \in SO(3)$ admt 1 vp.

(on notera v vp $\leftrightarrow$) Rappeler pk M

- laisse stable $v^\perp$ & induit une rotaθ sr ce plan $v^\perp$. (user ex. 6).

Notons u AL $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \leftrightarrow M$.

$u \in SO(\mathbb{R}^3)$ $(\det u = 1)$

- $\det(u - \lambda Id)$ est un polyn. deg 3 en la variable λ. Dc ce polyn. admt 1 vp réelle. Cette vp est ± 1. (cf ex 6.R)

- supp $\lambda = -1$:

soit w un vect p. $\leftrightarrow -1$. Alors p ex 6.1), u laisse stable $w^\perp = P$ & u induit AL

$u|_P : P \to P$, $u|_P \in O(P)$.

soit $\{z_1, z_2\}$ une base de P.

$$\underset{\{w, z_1, z_2\}}{\mathrm{Mat}}\, u = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$$

& $\det u = 1$, alors $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -1$.

Dc $u|_P$ est une réflexion. (cf ex 7.1)

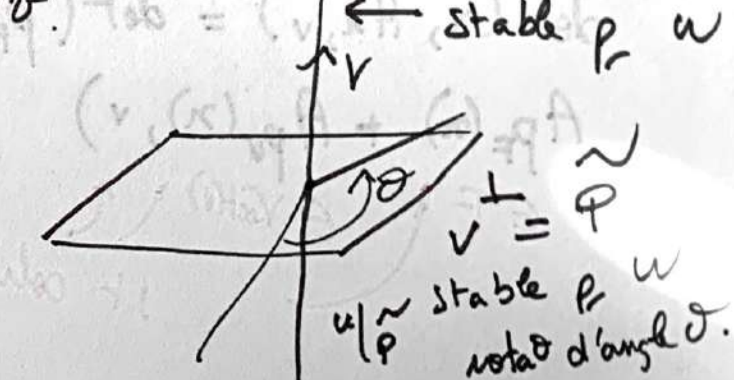
Dc $\exists\, v \in P \mid u(v) = v$ (v engendre l'axe de symétrie de $u|_P$).

$u^\perp = \tilde{P}$ et $\tilde{P} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

$$\underset{v, v_1, v_2}{\mathrm{Mat}}\, u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Dc $\exists\, \theta$ $$\underset{v, v_1, v_2}{\mathrm{Mat}}\, u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

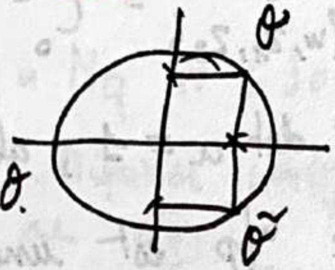
Dc $u = R_v^\theta$.



$\boxed{M}$ 1) Trouver vp $\Leftrightarrow A \to 1$.

2) $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta$

$\cos\theta = \cos\tilde{\theta}$

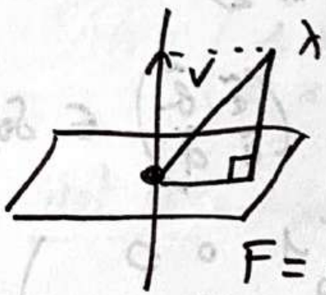


Trouver $\sin\theta$ pr determinant.

Mq si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$

$$\det(x, Ax, v) = \|v\|\,\|p_F(x)\|^2 \sin\theta$$

$F = v^\perp$ (on avait $\tilde{P}$ noté)



$x = p_F(x) + p_v(x)$

$$\det(x, Ax, v) = \det\big(\underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{p_v(x)}_{\in \operatorname{Vect}(v)}, \underbrace{Ap_F(x)}_{\in F} + \underbrace{Ap_v(x)}_{\in \operatorname{Vect}(v)}, v\big)$$

st colinéaires

$= \det(p_F(x), Ap_F(x), v)$.

der q linéarité

$\{p_F(x), \operatorname{Rot}_F^{\pi/2}(p_F(x)), v\}$

$\operatorname{Rot}_F^{\pi/2}(p_F(x)) = p_F(x) \wedge v$

forme une base orthogonale

Considérons $\left\{\dfrac{p_F(x)}{\|p_F(x)\|}, \dfrac{w}{\|p_F(x)\|}, \dfrac{v}{\|v\|}\right\}$

q forme une base orthon.

$$\det(p_F(x), Ap_F(x), v) = \det\begin{pmatrix} \|p_F(x)\| & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \|v\| \end{pmatrix}$$

j'exprime $p_F(x), Ap_F(x), v$ ds base v

$x_1 : \|p_F(x)\|\cos\theta$

$x_2 : \|p_F(x)\|\sin\theta$

$= \|v\|\,\|p_F(x)\|^2 \sin\theta$

A22

2) Mq les mat $\in SO(3)$, puis déterminer les axes, angles rotats

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

- Mq $A \in SO(3)$
- trouver vect p μ vp 1
- trouver l'angle ϑ $(\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\vartheta)$
- trouver signe $\sin\vartheta$
- cdc ϑ

• $^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

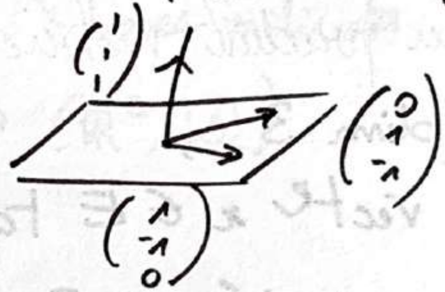
• $\underline{\det A} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\left(-\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

$\ker(A - I_d) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \longleftrightarrow$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vp μ val p. 1 cf $\boxed{A23}$

$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$



$\operatorname{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos\vartheta$

$\Rightarrow \cos\vartheta = -\frac{1}{2}$.

$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$

soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 = 1$

dc $\sin\vartheta > 0$ et $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$.

~~Endomorphisme adjoint~~

Ex 10 pptés base du produit vectoriel

$u, v \in E$, E ev dim 3.

$u \wedge v$ est l'uniq vecteur $x \in E$ tq

$\det(u, v, y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in E$.

Rq : $y \mapsto \det(u, v, y)$ est une fl

Or $E \longrightarrow E^*$ est un isomorphisme.

$z \mapsto (u \mapsto \langle u, z \rangle)$

dc $\exists !\, x \in E \mid \det(u, v, y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in E$.

$\det(u, v, y) = \langle u \wedge v, y \rangle \quad \forall y \in E$.

1. $E \times E \to E$ est bil & antisym
$(u, v) \mapsto u \wedge v$

$u \wedge v = -v \wedge u$

$\forall y \in E$, $\langle (u+u') \wedge v, y \rangle = \det(u+u', v, y)$

$= \det(u, v, y) + \det(u', v, y)$

$= \langle u \wedge v, y \rangle + \langle u' \wedge v, y \rangle$

$\forall y \in E$, $\langle (u+u') \wedge v, y \rangle = \langle u \wedge v + u' \wedge v, y \rangle$

$\forall y \in E$, $\langle (u+u') \wedge v - (u \wedge v + u' \wedge v), y \rangle = 0$

dc $(u + \lambda u') \wedge v = u \wedge v + \lambda u' \wedge v$

car $\langle , \rangle$ est non dégénéré.

De m̂ pr la linéarité ~~P~~ seconde variable.

$\forall y \in E$. $\langle u \wedge v, y \rangle = \det(u, v, y)$

$= -\det(v, u, y)$

$= -\langle v \wedge u, y \rangle$ dc $u \wedge v = -v \wedge u$

2/ u, v st colinéaires si

$\forall y \in E$, $\det(u,v,y) = 0$ ssi

$\forall y \in E$, $\langle u \wedge v, y \rangle = 0$ ssi $u \wedge v = 0$

3. $u \wedge v \perp u$ ssi $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$

ssi $\det(u,v,u) = 0$

~~or~~ $\det(u,v,u) = 0$ $\forall u, v. \in E$

dc $u \wedge v \perp u$. $\forall u, v \in E$

de m̂ $u \wedge v \perp v$ $\forall u, v \in E$

4. $\det(u,v,y)$ ← suppose qu'on a choisit une base de E.

$\shortparallel$

$\det\left([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [y]_{\mathcal{B}} \right)$

cette base $\mathcal{B}$ donne dc une dichotomie des bases de E.

$\mathbb{B}^+(E) := \{ \mathcal{B}' \text{ base de } E \mid \det(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}) > 0 \}$ def

bases directes

$\mathbb{B}^-(E) := \{ \_\_\_\_\_\_\_\_ < 0 \}$

bases indirectes

@ $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c)$

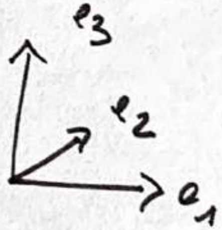
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

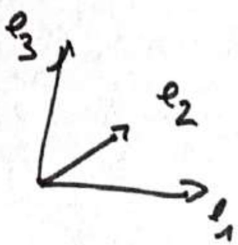
base directe

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 0

base indirecte

$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c)$





(e_1, e_3, e_2)

base indirecte.

4. soit $\mathcal{B}$ base de réf de E. ($\mathcal{B}$ base directe)

P : Pass $_{\mathcal{B} \to (u,v,u \wedge v)} = \left([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [u \wedge v]_{\mathcal{B}} \right)$

$\det P = \det(u, v, u \wedge v)$

$= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$

car u, v ne st pas colinéaires & dc $u \wedge v \neq 0$.

3) $\ker(id_E - u)$ & $\mathrm{Im}(id_E - u)$

Mq st orthogonx & supplémentés

soit $y \in \ker(id_E - u)$

$z \in \mathrm{Im}(id_E - u)$

- $y \in \ker(Id_E - u) \Leftrightarrow u(y) = y$

$z \in \mathrm{Im}(Id_E - u) \Leftrightarrow \exists x \in E \mid z = x - u(x)$.

$$\langle y, x \rangle = \langle y, x - u(x) \rangle$$
$$= \langle y, x \rangle - \langle y, u(x) \rangle$$
$$\overset{u \in O(E)}{=} \langle y, x \rangle - \langle u \circ u^{-1}(y), u(x) \rangle$$
$$= \langle y, x \rangle - \langle u^{-1}(y), x \rangle$$

or $u(y) = y \Leftrightarrow u^{-1}(y) = y$ dc $\langle u^{-1}y, x \rangle = \langle y, x \rangle$

D'où $\langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$

Dc $\mathrm{Im}(id_E - u) \perp \ker(id_E - u)$

Mq $\mathrm{Im}(id_E - u)$ & $\ker(id_E - u)$ st supplémentaires.

D'après 3, $\ker(id_E - u) \subset \mathrm{Im}(id_E - u)^\perp$.

Mq inclusion réciproq.

soit $x \in \mathrm{Im}(id - u)^\perp$ ie $\forall z \in E$,

$$\langle x \mid z - u(z) \rangle = 0.$$

ie $\langle x, z \rangle - \langle x, u(z) \rangle = 0$

ie $\langle x, z \rangle - \langle u^{-1}(x), z \rangle = 0$

ie $\langle x - u^{-1}(x), z \rangle = 0 \quad \forall z \in E$.

FB md cela signifie que $\Leftrightarrow x - u^{-1}(x)$ est orthogonal à E tt entier, étant euclidien ep md

$\Rightarrow x - u^{-1}(x) = 0$

vecteur nul

orthogonal à tt élt

ie $u^{-1}(x) = x \iff x = u(x)$

$\iff x - u(x) = 0$

ie $x \in \ker(1-u)$.

dc $\operatorname{Im}(1-u)^\perp \subseteq \ker(1-u)$

d'où finalement $\ker(1-u) = \operatorname{Im}(1-u)^\perp$

on sait que $E = \operatorname{Im}(1-u) \oplus \operatorname{Im}(1-u)^\perp$

$$\boxed{E = \operatorname{Im}(1-u) \oplus \ker(1-u)}$$

4. Mq $(id_E - u)^2 = 0$ ssi $u = id_E$.

$\Leftarrow)$ si $u = id_E$ alors

$(1-u) = 0$ et $(1-u)^2 = 0$ ✓.

$\Rightarrow)$ on suppose $(1-u)^2 = 0$.

$(1-u)^2 = (1-u)(1-u) = 1 - 2u + u^2$

$(1-u)^2(x) = x - 2u(x) + u^2(x)$

soit $x \in E$, $\exists y \in \ker(1-u)$, $\exists y' \in \operatorname{Im}(1-u)$

tq $x = y + y' = y + z - u(z)$ pr arbitraire $z \in E$

Calculons $u(x) = u(z) + u(z - u(z))$

$= u(y) + u(z) - u^2(z)$

$u(y) = y$ par hypothèse

$= y + u(z) - u^2(z)$.

$\forall z \in E$, $z - 2u(z) + u^2(z) = 0$.

$\Rightarrow u(z) - u^2(z) = z - u(z)$

dc $u(x) = y + z - u(z)$.

$= y + y' = x$

dc $u(x) = x$ ie $x \in \ker(1-u)$

$\forall x \in E$ ie $u = \mathbb{1}d$.

5) Mq $u^2 = id_E$ ssi u est sym. orthogonale

$\Leftarrow$) Supposons u est sym. orthog.

$\exists v, w$, $w \perp v = E$ tq $\underline{id_E = p_v + p_w}$

v et w respect, $u = p_v - p_w$

$u^2 = (p_v - p_w) \cdot (p_v - p_w)$

⚠ endomorph pas commutatif

$= p_v^2 - \underbrace{p_v p_w}_{= 0} - \underbrace{p_w p_v}_{= 0} + p_w^2$

$= p_v^2 + p_w^2 = p_v + p_w = id_E$. (car $p_v^2 = p_v$)

$\Rightarrow$) $u^2 = id_E$

soit λ vp de u, supps qu'il y

ait $\lambda = \pm 1$,

$u = -id$

$^tMM = (-1)(-1) = Id$

$u(x) = -x$

$u^2(x) = u(-x)$

$= -(-x) = Id$.

(iii)

Ex6 : E ee, $u \in \mathcal{O}(E)$ orthogonale

1) soit $F \subseteq E \mid u(F) \subseteq F$

soit $x \in F^\perp$, on vt que $u(x)$ soit orthogonal à y, $\forall y \in E$.

soit $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u.u^{-1}(y) \rangle$

$= \langle x, u^{-1}(y) \rangle$

E stable p $u \Leftrightarrow u(F) = F$

$\Leftrightarrow F = u^{-1}(F)$

Donc F est stable par u^{-1}.

Comme $u^{-1}(y) \in F$, on a

$\langle x, u^{-1}(y) \rangle = 0$.

cl $x \in F^\perp$ et $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

2) soit λ vp réelle de u & soit $x \neq 0$ un vect^r propre de u $\langle \lambda \rangle$ à

$\langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle$

$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle$

$\lambda^2 \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$

E ee $\& x \neq 0$ dc $\lambda^2 = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.

Ex 7. · $\mathcal{O}(2)$: groupe orthogonal des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2)$; $R^{\phi}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$

$\phi\in\mathbb{R}$, $f_v\in\mathcal{O}(2)$, la réflexion ou la symétrie dont l'axe est la droite vectorielle $v^{\perp}$, perpendicul^re au vect^r non nul $v\in\mathbb{R}^2$. La réflexion f_v ne dépd que de classe de proportionnalité de v.

1. soit $u\in\mathcal{O}(2)$ & $\det u=-1$.

Mq u est une réflexion.

$u\in\mathcal{O}(2)$; ${}^tu.u=id$; $\det({}^tu.u)=1$

$\Rightarrow \underset{\det u\in\{\pm1\}}{(\det(u))^2=1}$, $\underline{\det u=-1}\Rightarrow$ réflexion.

1.bis. $\det u=1\Rightarrow u$ est une rotat°.

Écrire la mat de u,

$M=\mathrm{Mat}_{e_1,e_2}(u)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$ad-bc=1$

${}^tMM=Id\Rightarrow\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=Id\Rightarrow\begin{cases}a^2+c^2=1\\ab+cd=0\\b^2+d^2=1\end{cases}$

$(a-d)^2+(b+c)^2=$

$=a^2-2ad+d^2+b^2+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2(bc-ad)=2-2=0$

dc $a=d$ et $b=-c$.

$ad-bc=1\Rightarrow a^2+c^2=1$.

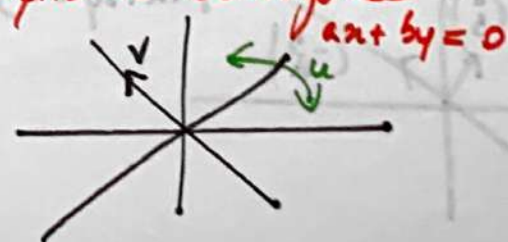
$\exists\,\theta\in\mathbb{R}\mid a=\cos\theta$ & $c=\sin\theta$.

$M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ & u est la rotat° d'angle θ.

cl $u\in\mathcal{O}(2)$ → $\det u=1\Rightarrow u$ est rotat°
→ $\det u=-1\Rightarrow u$ est réflexion.

2 Sachant que u est la symétrie orthogonale p/r à la droite d'équa° $ax+by=0$, représenter u ss la forme f_v pr un vecteur v convenable.

f_v : la symétrie orthogonale dt l'axe est la droite $v^{\perp}$.



L'axe de u est la droite $\{ax+by=0\}$

Trouver un vecteur orthogonal à la droite $\{ax+by=0\}$.

$v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ convient. $(x_0,y_0) \in \{ax+by=0\}$

$\iff a x_0 + b y_0 = 0$.

soit $(x_0,y_0) \in \{ax+by=0\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = a x_0 + b y_0 = 0$$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

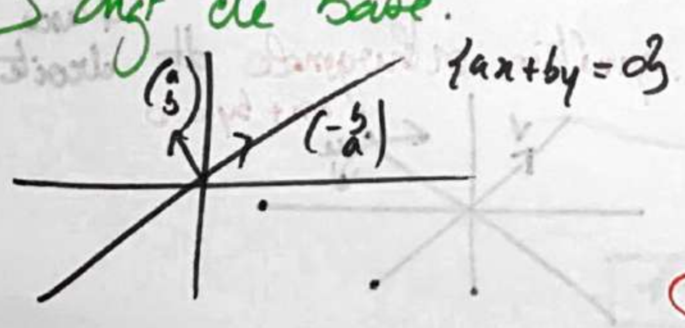
& donc est orthog. à la droite $\{ax+by=0\}$.

Dc si $v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $v^{\perp} = \{ax+by=0\}$

$u = s_{(a,b)}$

3. Écrire la mat de la réflexion u ds $\mathcal{B}_c$.

⚠ chgt de base.



Ds la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$.

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') \arrow[r, "D"] \arrow[d, "P"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') \arrow[d, "P"] \\
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "M"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c)
\end{tikzcd}$$

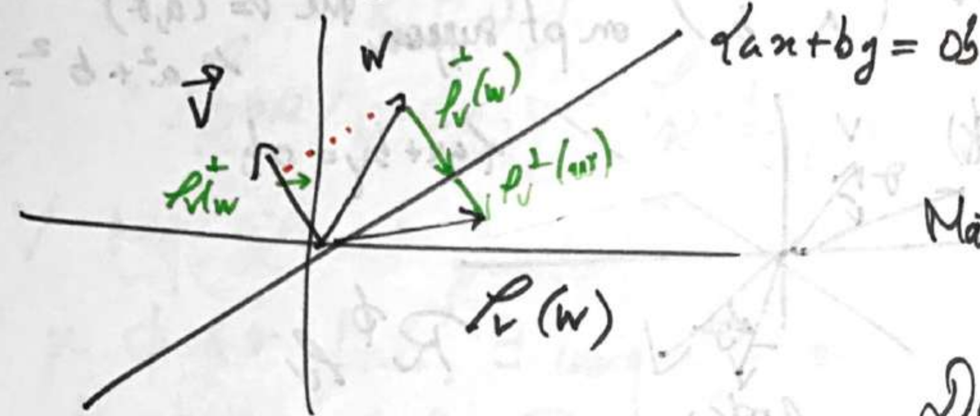
$M = PD.P^{-1}$, $M = \mathrm{Mat}_{e_1,e_2}(u)$

$$M = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

4. Mq $f_v(w) = w - 2\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$ $\forall w \in \mathbb{R}^2$.

La project° orthogonale sur v est définit



Par $p_v^\perp(w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v$.

dc $f_v(w) = w - 2\, p_v^\perp(w)$

$= w - 2\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v$

5. Mq $f_v R^\phi f_v = f_v R^\phi f_v^{-1}$ est une rotat° & déterm. son angle.

$f_v^2 = id$ (P ex 6.5) dc $f_v^{-1} = f_v$

$f_v R^\phi f_v^{-1}$ est une $\boxed{\text{rotat°}}$ si $\det(f_v R^\phi f_v^{-1}) = 1$

Mais $\det(f_v R^\phi f_v^{-1}) = \cancel{\det(f_v)}.\det(R^\phi).\cancel{\det(f_v^{-1})}$

$= \det(R^\phi) = 1$

Donc $f_v R^\phi f_v^{-1}$ est une rotat°

$Tr(R^\phi) = 2\cos\phi$.

$Tr(f_v R^\phi f_v^{-1}) = Tr(f_v^{-1} f_v R^\phi) = Tr(R^\phi)$

$= 2\cos\phi$.

Dc $f_v R^\phi f_v^{-1}$ est aussi une rotat° d'angle ϕ.

6. Mq $g\,\ell_v\,g^{-1}$, $R^\phi\,\ell_v$, $\ell_v\,R^\phi$ st des réflexions $\forall g \in O(2)$, $\phi \in \mathbb{R}$.
Représenter chacune des 3 $\boxed{\text{réflexions}}$ ss la forme ℓ_w pr un vecteur w convenable.

dét $= -1$

- $\det(g\,\ell_v\,g^{-1}) = \det(g)\det(\ell_v)\det(g^{-1})$
$= \det(\ell_v) = -1$.

on cherche w tq $g\,\ell_v\,g^{-1}(w) = w$

$w = g(v)$

$g\,\ell_v\,g^{-1}(g(v)) = g\,\ell_v(v) = g(-v) = -g(v)$

dc $w = g(v)$ convient & $g\,\ell_v\,g^{-1} = \ell_{g(v)}$

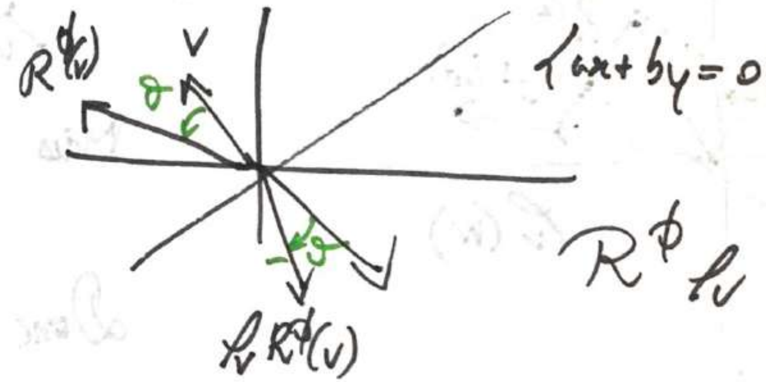
- $\det(R^\phi\,\ell_v) = \det(R^\phi)\det(\ell_v) = -1$

dc $R^\phi\,\ell_v$ est une réflexion.

Trouver un vect. propre de $R^\phi\,\ell_v$ pr vp -1.

$\ell_v\,R^\phi + id$ ... $R^\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

$\ell_v = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$ on pt supposer que $v = (a,b)$ & $a^2+b^2 = 1$.



$\ell_v\,R^\phi(v) = R^{-\phi}\,\ell_v(v) = R^{-\phi}(-v) = -R^{-\phi}(v)$

$R^\phi\,\ell_v\,(R^{\phi/2}(v)) = R^\phi(-R^{-\phi/2}(v))$
$= -R^{\phi-\phi/2}(v) = -R^{\phi/2}(v)$

dc $R^{\phi/2}$ est un vect. propre de $R^\phi\,\ell_v$ pr la vp -1.

dc $R^\phi\,\ell_v = \ell_{R^{\phi/2}(v)}$

$s_v R^\phi = R^\phi \left(\underbrace{(R^\phi)^{-1} s_v R^\phi}\right)$ de $g = (R^\phi)^{-1}$

$g\, s_v\, g^{-1} = s_{g(v)}$

$= R^\phi \left(s_{R^{-\phi}(v)} \right)$

$= s_{R^{\phi/2}(R^{-\phi}(v))} = s_{R^{-\phi/2}(v)}$

- 7. Mq R^ϕ est produit de 2 réflexions : pr ϕ & v fixés, $\exists$ uniq réflexion s_w tq $R^\phi = s_v s_w$. Déterminer un vecteur w définissant cette réflexion s_w.

Une rotat° est produit de 2 réflexions : ϕ & v fixés.

- $s_v R^\phi = s_{R^{-\phi/2}(v)}$ p/ 6.

$s_v^2 = id$

$R^\phi = s_v s_{R^{-\phi/2}(v)} = s_v s_w$

d'où $w = R^{-\phi/2}(v)$.