

## M 53 - Intégrales à Paramètres

### C-1 - Continuité Uniforme & Integ Génér.

① Continuité Simple

② Continuité Uniforme

TH<sub>1</sub> Heine

TH<sub>2</sub> Heine  $\mathbb{R}^2$

#### 2.1. Integ Généralisés

③  $f$  localement intégrable

④ Intégrale de  $f$  (CV)

#### 2.2. Fausse Généralité

⑤  $f$  cont &  $L^1$  finie  $\Rightarrow \int f$  (CV)

#### 2.3. Crit (CV) si $f$ signe etc

TH<sub>3</sub>  $\oplus f$  & comparaison ( $f \leq g$ )

TH<sub>4</sub>  $\oplus f$  & équiv<sup>lt</sup> ( $f \sim g$ )

#### 2.4. Crit (CV) n. VL<sup>R</sup> Absolue

TH<sub>5</sub>  $\|f\|$  (CV)  $\Rightarrow \int f$  (CV)

#### 2.5. Crit Cauchy

TH<sub>6</sub>  $f \leq g$ ,  $\int f$  (CV) si  $|\int_x^{x'} f| \leq \varepsilon$

## C2 - Intégrales définies à Paramètres

TH<sub>1</sub>  $f$  cont  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow F$  def & cont sur  $I$ . ( $\Delta a, b \in \mathbb{R}$ )

1. Continuité de  $F$

2. Conditions sur  $F$  suit  $C^1$

TH<sub>2</sub>  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  (i)  $f$  cont (ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}$   $\exists$  & cont  $\Rightarrow F$  bien def &  $C^1$   
&  $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

## M 53 - Intégrales à Paramètres

### C-1 - Continuité Uniforme & Integ Génér.

① Continuité Simple

② Continuité Uniforme

TH<sub>1</sub> Heine

TH<sub>2</sub> Heine  $\mathbb{R}^2$

#### 2.1. Integ Généralisés

③  $f$  localement intégrable

④ Intégrale de  $f$  (CV)

#### 2.2. Fauste Généralité

⑤  $f$  cont &  $L^1$  finie  $\Rightarrow \int f$  (CV)

#### 2.3. Crit (CV) & $f$ signe etc

TH<sub>3</sub>  $\oplus f$  & comparaison ( $f$  li)

TH<sub>4</sub>  $\oplus f$  & équiv<sup>lt</sup> ( $f$  li)

#### 2.4. Crit (CV) m VL<sup>re</sup> Absolue

TH<sub>5</sub>  $\int |f|$  (CV)  $\Rightarrow \int f$  (CV)

#### 2.5. Crit Cauchy

TH<sub>6</sub>  $f$  li,  $\int f$  (CV) &  $|\int_x^{x'} f| \leq \varepsilon$

## C2 - Intégrales définies à Paramètres

TH<sub>1</sub>  $f$  cont  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow F$  def & cont n I. ( $\Delta a, b \in \mathbb{R}$ )

1. Continuité de  $F$

2. Condi<sup>s</sup> p<sup>r</sup>  $F$  soit  $C^1$

TH<sub>2</sub>  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  (i)  $f$  cont (ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}$   $\exists$  & cont  $\Rightarrow F$  bien def &  $C^1$

TH Fubini  $\int_a^B \left( \int_a^b f(x,t) dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_a^B f(x,t) dx \right) dt$  &  $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$

#### 2.4. Integ à Param dt bonnes dpt ari du Param

TH  $\Psi'(x) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$

## C3 - Intégrales généralisées à paramètres : $I \times [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

TH<sub>1</sub>  $f$  cont,  $\exists g$  (li),  $|f| \leq g$ ,  $\int g$  (CV)  $\Rightarrow F$  def, cont  $-\infty < a < b \leq \infty$

TH<sub>2</sub>  $f$  cont,  $\int f$  (CV),  $\frac{\partial f}{\partial x}$   $\exists$  cont,  $\exists g$  (li),  $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq g$ ,  $\int g$  (CV)  $\Rightarrow F \in C^1$

Fubini TH  $f: [a,b] \times [a,b[$  cont,  $|f(x,t)| \leq g(t)$ ,  $\int_a^b g(t) dt$  (CV)  $\Rightarrow \int_a^b \int_a^t f = \int_a^t \int_a^b f$

## C4 - Transformée de Fourier

① Série de Fourier

② Transformée de Fourier.

①



(Th)  $\hat{f}$  cont

(Th)  $\hat{f} \in C^1$  &  $\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-its} dt$

(Th) Riemann-Lebesgue  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$

(L) Dérivée:

(Th)  $\widehat{f'}(s) = is \hat{f}(s)$

## 4.1. Séries Trigonométriques

(D) (ST) série trigonométrique

(FF) Euler (RQ) série  $\rightarrow$  (SE) (RQ)  $\sum \hat{f}_n \cos n\theta$

(Th) CV normalmt, sont (Th) ABS  $\rightarrow$  CV, CV. VN, S cont

(RQ) CV st  $/ 2\pi$  périodq / cont /  $C^1$  & dérivée

$\rightarrow$  Coeff (ST), sd Fourier ;  $2\pi$ -périodicité

(Prop) si  $f$  paire / impaire

Règle: (CV) sdF : (Th) Dirichlet / (Th) CV  $L^2$  / (Th) Fija.

(L) Riemann Lebesgue. (Con)

(Th) Dirichlet (Con)