M43

C1 Espaces probabilisés

I / Evts obs. & opé. ensemblistes

- Ω : ens rés possibles de exp.
- ces résultats : évts élémentaires. si card(ens) = 1.
- évts observables : event où l'on pt dire si produit oui ou non.
- A : event obs d'où $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $A \Rightarrow B$ ie $A \subset B$.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Big| \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- nbr ordres possib pr n objets : $n!$
- nbr façon prdre p objets parmi n : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$
- ens ∞ E dénombrable s'$\exists$ bijecto de $\mathbb{N}^*$ vers E, $E = \{u_1, u_2, \dots\}$.
- FF Binôme de N : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$
- séries géo : ▸ si $x \neq 1$, $\sum_{k=M}^{N} x^k = \dfrac{x^M - x^{N+1}}{1-x}$

  ▸ si $|x|<1$, $\sum_{k=M}^{\infty} x^k = \dfrac{x^M}{1-x}$
- série expo, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

II / Une proba est une f d'ens

- Ω : ens rés poss. de exp
- $\mathcal{F}$: ens evts observables.

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega$ ie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$

⚠ $\mathcal{F}$ n'est pas partie de Ω.

D $\mathcal{F}$ est tribu si :

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$: on st dire si évt cert$_1$ a eu lieu

(ii) si $B \in \mathcal{F}$ alors $B^c \in \mathcal{F}$ (voir evt réalisé ou non)

(iii) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

→ un ens $\mathcal{F}$ à pptés s'appelle tribu sur Ω.

→ si Ω est fini, on choisit svt $\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)}$!

D Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une applicat° σ-additive de masse totale 1 :

$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ et $P(\Omega) = 1$ masse totale

$A \longmapsto P(A)$

- σ-additivité : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ pr tte suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'élts de $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints.

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé. $(\Omega, \mathcal{F})$ espace probabilisable.

Pptés probas : Toute proba P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie :

(i) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$. (ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$ indépendants.

si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ st 2 à 2 disjts $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

(v) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ génrl° FF Poincaré.

(vi) Continuité séquentielle ↗ / ↘ :

▸ pr tte suite ↗ evts $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$

▸ pr tte suite ↘ evts $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(C_n)$.

(vii) Pour events qq (m̂ non disjoints)

▸ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

▸ $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ et $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

FF 1

C2 Probabilité conditionnelles, indépendance

$$P_H(A) = P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad \text{tq} \quad P(H) \neq 0.$$

$P_H = P(\ \mid H)$: $\begin{array}{l} \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A \mid H) \end{array}$ est une proba sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Règle de conditionnement successif (ou proba composées):
si les evts $A_1, \dots, A_n$ st tq $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ alors
$$P(A_n \cap \dots \cap A_1) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \times \dots \times P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_1)$$

(D) **Une partit° de Ω** : une famille $(H_i)_{i \in I}$ d'evts non vides ($\forall i \in I$, $H_i \neq \emptyset$) 2 à 2 disjoints ($i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$) et dont l'union est Ω. ($\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$). (un système complet d'evts).

- si $P(H) \neq 0$ et $P(H^c) \neq 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$, $\boxed{P(A) = P(A \mid H) . P(H) + P(A \mid H^c) . P(H^c)}$
- si $H_1, \dots, H_n$ est une partit° de Ω constituée d'evts tous de proba non-nulle : $\forall A \in \mathcal{F}$: $\boxed{P(A) = P(A \mid H_1) . P(H_1) + \dots + P(A \mid H_n) . P(H_n)}$
- si $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partit° de Ω, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}$,
$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid H_i) . P(H_i)}$$

FF de Bayes : $$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j) . P(H_j)}{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A \mid H_i) . P(H_i)}$$ où H_i est une partit° de Ω.

II / Indépdce

- Initialement si aucune info sur A : $P(A \mid B) = P(A)$.

(D) 2 evts A, B st **indépendants** ss la proba P si $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

Rq $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A) . P(B)$.

Prop si A, B indpdts ss $P \Rightarrow A, B^c$ aussi (resp A^c, B, A^c, B^c)
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

III / Indepdce de + 2 evts

(P) (i) A, B, C st **indépdts** sous P si $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) . P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) . P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = P(A) . P(B) . P(C)$

(ii) n évts st **indpdts** si proba intersect° = produit probabilités

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appelé "**suite évts indpdts**" si $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ st indpdts pr chq chx nbr fini d'indices distincts

- Suites épreuves indép : lors suite xp, elles st **indpts** si tte suite evts $A_1, \dots, A_q, \dots$ où chq A_i ne d'pd q ses prochaine xp, forme suite évts indpts.

- **Schéma de Bernoulli** : suite xp indép ttes m̂ proba p succès, $1-p$ échec.
- $A_i = \{\text{succès } i^{è} \text{ épreuve}\}$, $D_n = \{1^{er} \text{ succès arrive à } n^{e} \text{ épreuve}\}$ A_i indpdts
$$P(D_n) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) = P(A_1^c) \times \dots \times P(A_n)$$
$$P(D_n) = (1-p)^{n-1} . p$$
- $G_{n,k} = \{k \text{ succès } \& \ n-k \text{ échecs parmi } n \text{ épreuves}\}$
$$P(G_{n,k}) = P\Big(\bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \text{card}(I) = k}} \overbrace{\Big((\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{\substack{j \notin I \\ j \leq n}} A_j^c) \Big)}^{\text{2 à 2 disjts}}\Big)$$
$$= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} P\Big((\bigcap A_i) \cap (\bigcap A_j^c)\Big) \qquad A_i \text{ indpdts}$$
$$= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \prod P(A_i) . \prod P(A_j^c) = C_n^k \, p^k . (1-p)^{n-k}$$

Loi binomiale.

◦ Loi de Murphy : "Tout ce q pt mal tourner finira par mal tourner" bes1 hypo evts indpdts

(C3) Variable Aléatoire & Lois

(D) Une (va) discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appli $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$
tq $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ → ens fini ou dénomb
$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

• $\forall x_k \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x_k\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k \in \mathcal{F}\}$

$X^{-1}(\{x_k\}) \overset{\text{not}}{=} \{X = x_k\}$. image réciproq

Notaº : $\{X \leq t\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\} = X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$.
$\{a \leq X \leq b\} = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\} = X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}$.

• Pour X (vad), on note $p_k = P(X = x_k)$ pr chq $x_k \in X(\Omega)$

$$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_X(B) = \sum_{x_k \in B} p_k = \sum_{x_k \in B} P(X = x_k) = P(X \in B)$$

• P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée loi de X.

(D) La f de répartiº de (va) X est f, $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F_X(t)$

$$F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t) = \sum_{x_k \in X(\Omega),\, x_k \leq t} P(X = x_k)$$

$\boxed{\text{rq}}$ L'indicatrice evt A : $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

(*) (si $n \geq 100$, $np \leq 10$ → ue Pois(n, p) que Bin(n,p).

• Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $X \sim \text{Ber}(p)$
si $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

• Loi uniforme sr ens fini $\{x_1, \dots, x_n\}$: $X \sim \text{Unif}(\{x_1, \dots, x_n\})$
si $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\forall 1 \leq k \leq n$ ie P_X équiproba.

• Loi Binomiale de param n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$) : $X \sim \text{Bin}(n,p)$
si $P(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$ où $\sum C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$

si evts $A_1, \dots, A_n$ indpdts proba p : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \sim \text{Bin}(n,p)$

• Loi Hypergéomtiq de param N, M, n : $X \sim \text{Hypergéom}(N, M, n)$

$$\text{si } P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} & \text{si } 0 \leq k \leq n,\ 0 \leq k \leq M,\ 0 \leq n-k \leq N-M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

@ ampoules grillées

• Loi géométiq param p : $X \sim \text{Géom}(p)$ si $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

• Loi de Poisson param λ, $\lambda \in]0, \infty[$: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ si
$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$
(va détermi-niste)

• Mesure de Dirac en $c \in \mathbb{R}$: $X \sim \delta_c$ si $P(X = c) = 1$.

(D)
• La loi Bin(n,p) est loi nbr "succès" obtenus en n expériences aléat. indépendantes q ont ttes m̂ proba p de "succès".
• La loi Hypergeom (N, M, n) est loi nbr objts remarquables tirés qd on tire au hasard sans remise ds tas N objets dont M st remarquables.
• La loi Géom (p) est loi nbr tentatives nécessᵉ pr obtenir 1° "succès" ds suite de tentatives indpdtes q ont toutes m̂ proba p de succès.

Th Convergence des binomiales vers les Poisson.

si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $[0,1]$ tq

$\lim_{n\to\infty} n\,p_n = \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$ si

$X_n \sim \mathcal{B}in(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$.

Th CVce des hypergéométriqs vers les binomiales

si $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = p \in [0,1] \Rightarrow \forall k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M(N)}{k}\cdot\binom{N-M(N)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ie $\lim_{N\to\infty} P(X_n=k) = P(Y=k)$ si $\begin{cases} X_n \sim Hyperg(N, M(N), n) \\ Y \sim \mathcal{B}in(n,p). \end{cases}$

(si taille N objts très grd ⇒ tirer n objts AVEC ou SANS remise ne chge pas grd chose.

IV / Vecteurs aléatoires discrets

D soit $X_1, X_2, \dots, X_m$ des va def sr m̂ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On appelle **vecteur aléatoire** $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ l'applicat° :

$\Omega \to \mathbb{R}^m$

$w \mapsto (X_1(w), X_2(w), \dots, X_m(w))$

Sa loi est la proba $P_{X_1,\dots,X_m}$ def sr $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ par :

$\forall B \subset \mathbb{R}^m$, $P_{X_1,\dots,X_m}(B) = P(\{w \in \Omega, (X_1(w),\dots,X_m(w)) \in B\})$

Elle est caractérisée p/ $P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right)$

pr ttes vl^rs x_1 de $X_1(\Omega)$, ... etc.

si $m=2$: **couple aléatoire**, la va X_i est **i^è marginale** du vect^r aléat^r, sa loi P_{X_i} est **i^è loi marginale**.

Rq loi → lois marginales. Mais $l_m \not\Rightarrow l$. (déducº)

Astuce si (X, Y) couple aléatoire $\forall x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

car $\{X = x\} = \bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{X = x \text{ et } Y = y\}$.

D
- 2 va discrètes X & Y def sr 1 m̂ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ st **indpdtes** si $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A) . P(Y\in B)$.
- les 2 va d. $X_1, \dots, X_m$ def sr $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ st **indpdtes** si les evts $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ st **indptes** pr ttes parties de $A_1, \dots, A_m$ de $\mathbb{R}$.
- suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vad **indp.** si ∀ ss-suite **indp.**

P $X_1, \dots, X_m$ vad **indp** si $\forall x_1 \in X_1(\Omega) \dots \forall x_m \in X_m(\Omega)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^m P(X_i = x_i)$$

P si $X_1, \dots, X_m$ st vad **indpd** & si $f_1, \dots, f_m$ st des applis def resp sr $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ st **indpts.**

on note : $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

Loi multinomiale de param $n, p_1, p_2, \dots, p_n$

- $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r \in [0,1]$ tq $p_1 + \dots + p_r = 1$.
- n expériences indp. ont chacune r résultats possibles de probabilit. resp $p_1, \dots, p_r$.

On note X_1 le nbr fois où on a res type 1, …, X_r nbr … type r.

- $(X_1, \dots, X_r) \sim \mathcal{M}ult(n, p_1, \dots, p_r)$; $\forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{k_i}) \quad \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{r} k_i = n}$$

Rq : $\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)}$

@ $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \sim \mathcal{M}ult(n, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ dé lancer 1000 fois.

Rq : $X \sim \mathcal{B}in(n, p) \iff (X, n-X) \sim \mathcal{M}ult(n, p, 1-p)$.

C1 Espérance, Variance, Inégalités de Марков & de Чебышев.

I/ Espérance

@ $\frac{\sum_{i=0}^{20} i\, n_i}{n} = \sum_{i=0}^{20} i \frac{n_i}{n} = \sum_{i \in X(\Omega)} i\, P(X = i)$

1) Def

→ une v.a. discrète X est intégrable si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < \infty$$

→ Une espérance alors $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$

→ si $X(\Omega)$ finie ou bornée : $|x_k| \leq M \Rightarrow X$ est intégrable.

⇒ 2 v.a. q ont m̂ loi ⇒ ont m̂ espérance.

@ $X \sim \mathcal{U}nif(\{1,2,3,4,5,6\})$; $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i\, P(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7}{2} \times \frac{1}{6} = 3{,}5$.

→ l'espérance n'est pas une v.a. très probable. | X pt ne pas avoir d'espérance.

2) Pptés

soit X, Y 2 vad intégrables.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
- si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$; si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.
- si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intég.

Loi multinomiale de param $n, p_1, p_2, \dots, p_r$

- $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r \in [0,1]$ tq $p_1 + \dots + p_r = 1$.
- n expces indp. ont chacune r résultats possibles de probabit. resp $p_1, \dots, p_r$.

On note X_1 le nbr fois où on a res type 1, …, X_r nbr … type r.

- $(X_1, \dots, X_r) \sim \mathcal{M}ult(n, p_1, \dots, p_r)$; $\forall k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$,

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{k_i}) \quad \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{r} k_i = n}$$

Rq : $\binom{k_1}{n} \binom{k_2}{n-k_1} \binom{k_3}{n-k_1-k_2} \cdots \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)}$

@ $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \sim \mathcal{M}ult(n, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ dé lancer 1000 fois.

Rq : $X \sim \mathcal{B}in(n, p) \iff (X, n-X) \sim \mathcal{M}ult(n, p, 1-p)$.

C4 Espérance, Variance, Inégalités de MapKoB & de Чебышев.

I/ Espérance

@ $\frac{\sum_{i=0}^{20} i\, n_i}{n} = \sum_{i=0}^{20} i \frac{n_i}{n} = \sum_{i \in X(\Omega)} i\, P(X=i)$

1) Def

→ une va discrète X est intégrable si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < \infty$$

→ Une espérance alors $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$

→ si $X(\Omega)$ finie ou bornée : $|x_k| \leq M \Rightarrow X$ est intégrable.

→ 2 va qui ont m̂ loi ⇒ ont m̂ espérance.

@ $X \sim \mathcal{U}nif(\{1,2,3,4,5,6\})$; $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i\, P(X=i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7}{2} \times \frac{1}{6} = 3{,}5$.

→ l'espérce n'est pas une vlr très probable. | X pt ne pas avoir d'espérance.

2) Ptés

soit X, Y 2 va d intégrables.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ • $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$ • si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$; si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.
- si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intég.

Espce lois classiqs

$X \sim \delta_c$	$E(X) = c$	$X \sim \mathcal{U}nif(\{x_1, \dots, x_n\})$	$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
$X \sim \mathcal{B}er(p)$	$E(X) = p$	$X \sim \mathcal{B}in(n, p)$	$E(X) = np$
$X \sim \mathcal{H}yperg(N, M, n)$	$E(X) = M \cdot \frac{n}{N}$	$X \sim \mathcal{G}eom(p)$	$E(X) = \frac{1}{p}$

L $\sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P(X=k) = \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} P(X=k) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} P(X=k)}_{P(X \geq i)}$

- pr X va | $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$ si cette série CV.

TH Fubini $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}$ → si les u_{ik} tous ≥ 0 ou → si $\sum_i \sum_k |u_{ik}| < \infty$

Espce f va

$$E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k).$$

5 @ $E(X^2) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^2 P(X = x_k)$ si cette série CV Abs.

(P) si X (va) d. intégrable $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Rq : On pt avoir $f(X)$ intégrable & X non intégrable.

II / Moments de (va) & inégalité Markov

(D) $r \in \mathbb{N}^*$ fixé, le moment d'ordre r de (va) X est $E(X^r)$.

→ X a un moment d'ordre r (ssi) $E(|X|^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|^r P(X = x_k)$

Rq : • espérance : moment d'ordre 1

• 1 (va) bornée ($\exists M \in \mathbb{R}, \forall x_k \in X(\Omega), |x_k| \leq M$) a des moments de tt ordre.

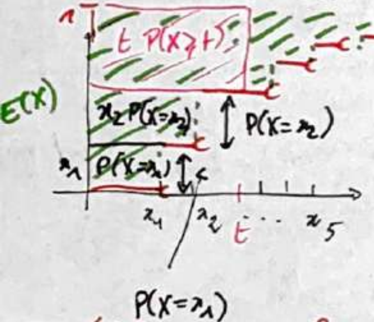
(P) Une va q a un moment d'ordre r a des moments de to les ordres inférieurs :
$E(X^r) \; \exists \Rightarrow \forall n \in \{1, \dots, r\} \; E(X^n) \; \exists$

Inégalité de Markov

vad,

• si X ⊕ & int : $\forall t > 0 : P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$

• si X a moment d'ordre r : $\forall t > 0 : P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^r)}{t^r}$



$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq t}} P(X = x_k)$$

III / Variance & inégalité de Tchebichev

(D) si X une (va) ayant un moment d'ordre 2 :
sa variance est $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Pptés de la variance

si X a un moment d'ordre 2 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$ 2) $\forall b \in \mathbb{R}$, $Var(X+b) = Var(X)$

3) $Var(X) = 0 \iff X \sim \delta$ où $c = E(X) \iff P(X=c) = 1$.

Variances des lois classiqs

$X \sim Ber(p)$ $Var(X) = p(1-p)$ $X \sim Bin(n,p)$ $Var(X) = np(1-p)$

$X \sim Pois(\lambda)$ $Var(X) = \lambda$ $X \sim Geom(p)$ $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Inégalité de Tchebichev

si X a mmo2, $\forall t > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}.$$

Covariance

(P) si X, Y (va) indep à esp'rce ⇒ XY a espérce. $E(XY) = E(X).E(Y)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

si X a mmo 2,

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}$$

(D) si (X,Y) couple de va de mmo2, la **covariance** est :

$$cov(X,Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

si ct variances non-nulles ; **coeff de corrélat°** est :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

(P) • $cov(X,Y) = cov(Y,X)$ si X, Y, Z mmo 2

• $cov(X+Y, Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

• $cov(aX+b, cY+d) = ac \; cov(X,Y)$

(G) • $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}$ ie $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

Corrélaθ :

- si $cov(X,Y) = 0$: X & Y décorrélées (st indep)
- si $cov(X,Y) > 0$: X & Y ⊕ corrélés (Y tdce ↗ qd X ↗)
- si $cov(X,Y) < 0$: X & Y ⊖ corrélés (Y tda ↘ qd X ↗)

(P) si X & Y st independ $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$.

⚠ Réciproq fausse.

Variance d'une somme de (va)

si (va) mmto 2.

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j)$$

C5 : (Cv)ce & Lois grds nbrs

I / Convergce de moyennes empiriqs

- Répétiθ n fois indep. m̂ loi $\Rightarrow$ val^{rs} $x_1, \dots, x_n$ q st (va) indep & m̂ loi.
- Moyenne empiriq : $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(proporθ empiriq, fréqce empiriq)

(D) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la suite de (va) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (CV) en probabilité vers les (va) W si $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|V_n - W| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{ie } V_n \xrightarrow[n \to \infty]{proba} W$$

(TH) **Loi faible des grds nombres**

si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de (va) independ ayant ttes m̂ loi q a mmo2 alors : $\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X_1)}{n \varepsilon^2}$$

& donc $\overline{X_n} \xrightarrow[n \to \infty]{proba} E(X_1)$ ← va cte loi de Dirac.

II / (Cvce) presq sure

(D) $A \in \mathcal{F}$ est evt négligeable si $P(A) = 0$.

(D) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suite (va) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (CV) presq sûrement vers (va) W si $P(\{w \in \Omega, \lim_{n \to \infty} V_n(w) = W(w)\}) = 1$

ie si evt $\{V_n$ ne (CV) pas vers $W\}$ est négligeable.

$$V_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.p.s} W$$