OMNIBUS S1

→ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$: y peut dépendre x

→ $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$: il existe 1 y tq ∀t nb x....

SURJECTIVE : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

INJECTIVE : $\forall x_1, x_2 \in E, \; x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

BIJECTIVE : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ | $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p . b^{n-p}$

Inégalité Bernoulli : $1 + nx + x^{(n+1)\,n} \leq (1+x)^n + x$

$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} . b^k$ | $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$\big| |z| - |z'| \big| \leq |z - z'|$ | FFM : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

FFE $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

MA : $\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ x^2 + y^2 = |z| \\ 2xy = y \end{cases}$ où $z = x + iy$.

Racines carré nbr cplxe.

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ & $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$

Racine n-ièmes nbr cplxe.

$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} . e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k = 0, \dots, n-1$

Rq : $w^n - z = \prod_{k=0}^{n-1} (w - w_k)$

$\begin{cases} w_0 + \dots + w_{n-1} = 0 & : \Sigma \text{ racines nulle} \\ z = (-1)^{n-1}\, w_0 \times \dots \times w_{n-1} & \text{Pdt racines} : -z \end{cases}$

$\frac{r . e^{i\theta}}{r' . e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} . e^{i\theta - \theta'}$

$\deg(0) = -\infty$ | $\deg P + \deg Q = \deg(P.Q)$

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Ⓓ $A, B \in K[X]$; $B \mid A$ si $\exists Q \in K[X]$ tq $A = B . Q$.

Ⓟ $A, B \in K[X]$; $A \mid B$ & $B \mid A \iff \exists \lambda \in K^*$, $A = \lambda . B$.

Recipq^t si $\exists \lambda \in K^*$, $B = \frac{1}{\lambda} A$ alors $A \mid B$ & $B \mid A$

Ⓓ $A, B \in K[X]$, tq $B \neq 0$; $\exists$ unique couple (Q, R) ds $K[X]$

$A = BQ + R$ tq $\deg R < \deg B$ ou $R = 0$

2

$P(\alpha) = 0$: racine α du polynôme.

Ⓟ $X - \alpha \mid P(X) \iff \alpha$ est racine de P.

Ⓓ α est racine de multiplicité m de $P(X)$ ssi $(X-\alpha)^m \mid P(X)$ et $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P(X)$.

Ⓣ $P(X)$ de degré $\leq n \Rightarrow$ alors $P(X)$ admet n racines au plus.

α racine de multiplicité $\iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots P^{(m-1)}(\alpha) = 0$

TH D'Alembert-Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet au moins 1 racine ds $\mathbb{C}$.

$(X - w)(X - \overline{w}) = X^2 - (w + \overline{w})X + |w|^2$

$= X^2 - 2\,\mathrm{Re}(w)\,X + |w|^2$

Fract rationnelle à coeff ds K est un quotient de 2 polynômes : $F = \frac{A}{B}$; $A \in K[X]$; $B \in K[X] \setminus \{0\}$

Fract irréductible : $\exists$ 2 polynômes premiers entre eux A & B tq $F = \frac{A}{B}$.

Elt simple est fract rationnelle forme $\frac{A}{B^n}$.

Décomposit ds $\mathbb{R}[X]$ → où $b^2 - 4ac < 0$.

$G = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2 + bX + c)} + \dots + \frac{\alpha_n X + \beta_n}{(X^2 + bX + c)^n} + \frac{R_1}{B_1}$

Décomposit ds $\mathbb{C}[X]$

$G = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + \frac{R_1}{B_1}$

Calcul pie entière en effectuant DE.

. $\vec{w}$ combinaison linéaire de $\vec{u}$ & $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

. 3 vecteurs st coplanaires : l'un est combi lin. ds 2 autres.

→ produit scalaire (bilinéaire, symétriq, définie positive)

$\vec{u} . (\lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda . \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$

→ déterminant → (bilinéaire, antisymétriq)

→ produit vectoriel

→ produit mixte (trilinéaire) $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \lambda . \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$

$\det(\alpha\vec{u}, \beta\vec{u}) = \alpha\beta . \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u}$ & $\vec{v}$ st colinéaires

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}_\perp . \vec{v}$

$\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . |\cos\theta|$ & $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin\theta$. 3

Base ON + directe si $\det(\vec u,\vec v)=1$

$|\det(\vec u,\vec v)|$ = Aire parallélogramme

$\frac{|\det(\vec u,\vec v)|}{2}$ = Aire du triangle.

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}d\\e\\j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b&e\\c&j\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a&d\\c&j\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a&d\\b&e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

• $\vec u\wedge\vec v=\vec 0 \iff \vec u$ & $\vec v$ sont colinéaires.

• $\|\vec u\wedge\vec v\|^2+(\vec u.\vec v)^2=\|\vec u\|^2\,\|\vec v\|^2$

Produit mixte : $\det(\vec u,\vec v,\vec w)=\vec u.(\vec v\wedge\vec w)$

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=A\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-B\begin{vmatrix}b&c\\h&i\end{vmatrix}+C\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}$$
où $a=A$, $d=B$, $g=C$

$(\vec u,\vec v,\vec w)$ est base $\iff\det(\vec u,\vec v,\vec w)\neq 0$

$(\vec u,\vec v,\vec w)$ coplanaires $\iff\vec u=\lambda\vec v+\beta\vec w$.

si $\vec u$ & $\vec v$ sont unitaires orthogonaux alors $(\vec u,\vec v,\vec u\wedge\vec v)$ est base orthonormée.

$|\det(\vec u,\vec v,\vec w)|$ = Volume parallélépipède

$\vec{AM}$ et $\vec u$ sont colinéaires $\iff\exists t\in\mathbb R,\ \vec{AM}=t\vec u$

Équat° P. (EP) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in D(A,\vec u)$

$\iff\vec{AM}$ et $\vec u$ sont colinéaires

$\iff\exists t\in\mathbb R,\ \vec{AM}=t\vec u$

$\iff\exists t\in\mathbb R,\ \begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\iff\begin{cases}x=\alpha+ta\\y=\beta+tb\end{cases}$ & $\exists t\in\mathbb R$.

(EC) $\vec{AM}.\vec u^{\perp}=0=\det(\vec{AM},\vec u)$

$\iff D(A,\vec n): a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$

$\iff D(A,\vec n): ax+by+c=0$

Dist^{ce} point à une droite :

$$d(M,D)=\frac{|\det(\vec{AM},\vec v)|}{\|\vec v\|}=\frac{|\vec{AM}.\vec n|}{\|\vec n\|}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4

(P) $\vec{AM}$ combi. liné. $\exists s,t\in\mathbb R,\ \vec{AM}=s\vec u+t\vec v$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P(A,(\vec u,\vec v))\iff\exists s,t\in\mathbb R,\ \vec{AM}=s\vec u+t\vec v$

$\iff\exists s,t\in\mathbb R^2,\ \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$

$\iff\begin{cases}x=a+s\alpha+t\alpha'\\y=b+s\beta+t\beta'\\z=c+s\gamma+t\gamma'\end{cases}$

• $M\in P\iff\det(\vec{AM},\vec u,\vec v)=0\iff\vec{AM}.(\vec u\wedge\vec v)=0$

• $\vec u\wedge\vec v$ est vecteur normal au plan.

(EC) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P\iff\vec{AM}.\vec n=0$

$\iff\begin{pmatrix}x-d\\y-e\\z-f\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$

$\iff a(x-d)+b(y-e)+c(z-f)=0$

$\iff ax+by+cz+g=0$

Repré param droite ds espace $\begin{cases}x=a+\lambda\alpha\\y=b+\lambda\beta\\z=c+\lambda\gamma\end{cases}\iff\begin{cases}\beta x-\alpha y=\beta a-\alpha b\\\gamma x-\beta z=\gamma a-\beta c\end{cases}$

Repré caract droite ds espace inters° 2 plans $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$

Vecteur directeur $\vec n\wedge\vec n'$

(D) D_1 & D_2 non parallèles.

$\exists$ uniq droite Δ perpendicul^{re} à D_1 & D_2.

Alors $\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}$ est un vecteur directeur de Δ.

Dist entre D_1 & D_2

$d(D_1,D_2)=\|\vec{H_1H_2}\|$ où $H_1=D_1\cap\Delta$ et $H_2=D_2\cap\Delta$.

(EP) Dist Point / Plan

$$d(M,P)=\frac{|\vec{AM}.\vec n|}{\|\vec n\|}=\frac{|\det(\vec{AM},\vec u,\vec v)|}{\|\vec u\wedge\vec v\|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dist Point / Droite

$$d(M,D)=\|\vec{MH}\|=\frac{\|\vec{AM}\wedge\vec v\|}{\|\vec v\|}$$

Dist Droite / Droite

$$d(D_1,D_2)=\frac{|\det(\vec{A_1A_2},\vec{v_1},\vec{v_2})|}{\|\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}\|}=\|\vec{H_1H_2}\|$$

5

$D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\mathbb{Z}\}$.

TH Bijecθ | Soit $f : I \to J$; $\exists f^{-1} : J \to I$, $\forall x \in I$, $\forall y \in J$.

→ $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(y)) = y$

→ $\forall y \in J$, $\exists! x \in I$, $f(x) = y$: uniq soluθ.

→ f est bijective

TH Bijecθ | Soit f f réelle & $I \subset D_f$ intervalle. Si f est S^T MONOTONE sur I alors $f : I \to f(I)$ est BIJECTIVE et sa réciproq $f^{-1}(f(I)) \to I$: m̂ monotonie directe.

Pie entière $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ & $a^b = \exp(b.\ln a)$ 4 Im(f)

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos a - 1$

$\sin 2a = 2 \sin a . \cos a$

	D_f	Valeurs possibles	
sin	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$	↗
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
cos	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	↘
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
tan	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	↗
arctan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\mathbb{Z}\}$.	

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Majorée, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$

Minorée, $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, $U_n \geq m$.

Bornée : si majorée & minorée.

Croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$

$\boxed{M}$ $U_{n+1} - U_n$

(U_n) CV vers ℓ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $|U_n - \ell| < \varepsilon$

(U_n) DV vers $+\infty$ si $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ldots$ $U_n > M$.

$\boxed{M}$ → mettre en facteur le terme dominant

→ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$(a^n)_{n \geq 0}$ | si $a > 1$ $\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ | si $a = 1$ $\xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ | si $a \in]-1, 1[$ $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

si $a < -1$: pas de limite

$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

- Si $a \in]-1, 1[$, $\lim S_n = \frac{1}{1-a}$
- Si $a > 1$, $\lim S_n = +\infty$
- Si $a \leq -1$, S_n n'a pas de lim

(D) (U_n) & (V_n) st équivalentes : $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ si $\lim \frac{U_n}{V_n} = 1$

Produit & Division : Aucun pb.

⚠ On n'ajoute pas, on ne soustrait pas $\underset{+\infty}{\sim}$.

$\sin(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$	$e^{U_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} U_n$
$\tan(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$	$\ln(1 + U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
$1 - \cos(U_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{U_n^2}{2}$	$(1 + U_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha . U_n$

$\lim \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$ | $\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ | $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

Si U_n ↗, V_n ↘ alors elles st ADJACENTES.

$\lim_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0$

TH Suite adjacente |
- U_n & V_n CV vers m̂ $\ell \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \ell \leq W_n$

NB : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} . \ln a}$

Suites extraites

- U_n CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi $\begin{cases} (U_{2n}) \\ (U_{2n+1}) \end{cases}$ CV les 2 vers $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si U_n CV vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute sous-suite de U_n CV $\ell \in \mathbb{R}$
- Si $\exists$ 2 sous-suites q ont lim $\neq$ ou en ne sont pas CV alors U_n DV.

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $|x - a| < \delta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$ $|x - a| < \delta$, $f(x) > M$.

Limite à droite de a | $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a, a+\delta[$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Limite à gauche de a | $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a[$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Limite d'une fonction est unique lorsqu'elle existe

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Composit° limites : $\lim_{x \to a} f(u(x)) = \lim_{x \to b} f(u) = \ell$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ | $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Preuve $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$

$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \times \frac{\overset{0}{\sin x}}{\underbrace{1+\cos x}_{2}}$

(D) f CONTINUE ssi 1) $a \in D_f$ 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ $\exists$ 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(D) f CONTINUE $[a,b]$ si : $\forall x \in]a,b[$, f continue en x, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ & $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

TH Pr[o]l[on]g[emen]t CONTINUITÉ : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$

(P) $\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = \ell$ @ $f(2x) = f(x)$ etc ?

(P) f continue, $\lim_{n \to +\infty} U_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(U_n) = f(a)$

@ $U_{n+1} = f(U_n)$

$\to$ si U_n admet lim $\ell \in I$, si f continue :

$\ell = \lim U_n = \lim U_{n+1} = \lim f(U_n) = f(\ell)$

$\Rightarrow \boxed{\ell = f(\ell)}$ Remplacer $f(\ell)$ & résoudre équa°

TVI Soit I, $\forall y$ entre $f(a)$, $f(b)$, $\exists x \in [a,b]$, $y = f(x)$

TVE $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b]$,

$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ Adit $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

Suite TAF : $\forall x, y \in I$,

si $f'(x) \leq M$ alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

(puis on fixe $y = 0$)

Taux Accroissement : $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(D) f est dérivable en a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\exists$ et $\mathbb{R}$

ĉ $\lim_{h \to 0} a + h = a \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Tangente en $(a, f(a))$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty$: C_f : t[an]g[en]te verticale en a.

Si f dérivable en a Alors f continue en a

$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

$\tan' x = 1 + \tan^2 x$ & $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$ | • si f dérivable en $a \in I$ • $f'(a) \neq 0$ $\Rightarrow f^{-1}$ dérivable en $b = f(a)$

FF Leibniz : $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

$f'(a) = 0 \iff$ extremum local

$f''(a) > 0$: en a min local | $f''(a) = 0$ aucune info.

$f''(a) < 0$: en a max local

TH Rôlle : $\forall f$ continue sur $[a,b]$ & dérivable sur $]a,b[$

$\forall f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$.

TAF : $\forall f$ continue sur $[a,b]$ & dérivable sur $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Pr[o]l[on]g[emen]t dérivabilité :

Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ $\exists$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(x)$

$\Rightarrow$ si $\lim_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en a.

$\Rightarrow$ si $\lim_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$ alors f a tangente verticale

f est convexe si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$,

$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + f(y)$

⚠ f est concave si $-f$ est convexe

(TH) $\forall f$ continue sur $[a,b]$ & dérivable sur $]a,b[$

$\forall f''(x) > 0$: f convexe | $f''(x) < 0$: f concave

$\forall f''(c) = 0$: point inflexion

Plan Étude Fonctions

$\boxed{1}$ $\mathcal{D}f$

$\boxed{2}$ Étude f aux bornes $\mathcal{D}f$

(i) borne $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to a} f(x) = ?$

→ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ⇒ asymp. verticale $x = a$

→ $\lim f(x) = l \in \mathbb{R}$ ⇒ f admet prolgt contté en a.

(ii) borne $= \pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = ?$

→ si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$: ÉTUDE $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = ?$

▶ si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$: bpda : $x = 0$.

▶ si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$: ÉTUDE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - lx = ?$

▶▶ si $\lim f(x) - lx = \pm\infty$, bpda : $y = lx$

▶▶ si $\lim f(x) - lx = b \in \mathbb{R}$; en $\pm\infty$, asymp : $\Delta : lx + b$

(étude signe $f(x) - lx - b$: posit° $\mathcal{C}f$ / Δ)

→ si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$: $y = l$ asymp horizle

$\boxed{3}$ Étude var° f ⇔ signe f'
+ points critiqs & extrema locaux.

$\boxed{4}$ Convexité & pts inflexion : étude f''

24

ONDE

onde : perturbation q se propage ds milieu ss déplct matière.

onde progr : O q se propage ≠ O stationn^re

perturbation : var^o locale à mmt donné variable physiq. $v = \frac{c}{\lambda}$

$$P(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = g(x \pm vt)$$

onde progr mono λ : varie sinusoïdal^t + ps

onde plane : si Ⓒ progress, mono λ, ne dpd pas coord ⊥ à propagation.

○ OPPM : $\Psi(x,t) = \Psi\left(\frac{t-x}{v}\right) = a_0 \cdot \sin\left(w\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right)$

$t - \frac{x}{v}$: x croissant   amplitude   pulsaθ   phase 1re

$w = \frac{2\pi}{T}$	$\lambda = \frac{2\pi v}{w}$	$\lambda = v.T$	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{w}{v}$

plane : point m̂ abscisse ont m̂ phase.

Surface onde : ens pts géo ayt m̂ ph à idt, à date donnée

$$\boxed{v' = \frac{v}{1 - \frac{v}{c}}}$$

	cos	sin
0	π/2 2π	π kπ
1	2kπ	π/2
-1	π	-π

MÉCANIQUE

$$V_m = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

- Mvt rectiligne uniforme : si $\vec{v} = cte \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- Mvt uniform^t accéléré : si $\vec{a} = cte$
- Mvt accéléré : si $\vec{a}.\vec{v} > 0$
- Mvt retardé : si $\vec{a}.\vec{v} < 0$.

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{T}(t) + \frac{v^2(t)}{R}.\vec{N}(t)$$

Ppe inertie : 1LON :

Ds ⓇⒼ, point matériel q n'est soumis à aucune force soit conserve son état de repos soit est animé mvt rectiligne uniforme.

PFD : 2 LDN :

Ds ⓇⒼ, somme vectorielle de ttes forces appliqués à un système matériel est égal à la dérivée par rapport au tps Qtté mvt. $\frac{d}{dt}\vec{P} = \Sigma \vec{F}_{ext}$

PAR : 3 LDN :

Ds systm̂ isolé comportant Σ_1 & Σ_2. La force exercée par Σ_1 sur Σ_2 est m̂ norme, directθ MS sens opposé par rapport à force exercée par Σ_2 sur Σ_1

$$\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1} = -\vec{F}_{\Sigma_1/\Sigma_2}$$

INTERACTIONS

- 2 systèmes st en interactθ si une modif l'un entraîne une modif de l'autre.
- système isolé : Σ tq interacθs st nulles.
- Σ matériel : ens atomes q interagissent entre eux, en maintenant une cohérence.
- Surface contact : Lieu géométrique où dist ↔ 2 Σ matériel est suffisamment faible pr q 2 atomes ds 2Σ interagissent.
- Force de contact : Résultante interacθ ↔ 2 Σ en contact (composante normale & tangentielle)
  - ▸ $\vec{N}$: intégrité Σ_1 & Σ_2 (ne passe pas à travers)
  - ▸ $\vec{T}$: dépd nature atomes & rugosité SDC F/ micro... : force de frottement.
- **Loi universelle gravitaθ** : $\vec{F}_{M/m} = -G\frac{Mm}{r}.\vec{e_r}$

Un corps ponctuel de masse M placé en un point choisi pour origine, induit sur un autre corps de masse m placé au point P (tq $\vec{OP} = r.\vec{e_r}$) une force d'expreθ :

- **Champ de gravitaθ** : $\vec{F}_{M/m} = m.\vec{\mathcal{G}}_M(\vec{r})$

- **Loi de Coulomb** : $\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{qQ}{\|\vec{OP}\|^2}.\frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$

La force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par 1 charge Q placée au point O sur 1 charge q placée au point P soit

→ Force répulsive si $qQ > 0$ & F. attractive si $qQ < 0$

⚠ LDC n'est valable q si charges st immobiles

- **Champ électrostatiq** : $\vec{F}_{Q/q} = q.\vec{E}_Q(P)$
- **Force de Lorentz** : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Une particule ponctuelle de charge électriq q plongée ds champ électromagnétiq $(\vec{E}, \vec{B})$ subit une force nommée force de Lorentz.

PRESSION

- Milieu continu : pptés évoluent continûment.
- Fluide : continu & déformable q pt s'écouler
- À $\exists$ microscpq, fluide : ens discret particules en interac°
- Étude fluide à $\exists$ mésoscopiq
- Particule de fluide : ens composé grd nbr particules discrètes MS DIM faible devant extens° fluide.
- Pptés MÉCA (PDF) st moyennes pptés microscopiqs.

→ forces surfaciqs : $d\vec{F_s} = -p\vec{dS}$
→ $\vec{dS}$ orienté vers ext.

- Loi Hydrostatiq : $\vec{F_s} = -dV.\vec{\nabla}P \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}P = \rho.\vec{g}}$
- Force volumiq : $\vec{F_V} = m_{(PF)}.\vec{g} = \rho_{(PF)}.V.\vec{g}$
- Équilibre : $\frac{M}{S} = \frac{m}{s}$

- Si fluide au repos, sans force de pesanteur $\rho = cte$ & $\vec{g}$ uniforme : $P_B - P_A = \rho g h$

- Poussé Archimède :

$\vec{A} = -$ Poids masse liquide déplacé
$\vec{A} = -$ Masse liquide déplacée $.\vec{g}$
$\vec{A} = -\rho_L.Vd.\vec{g} = \rho_L.Vd.g$.

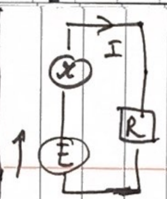
62

$I = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t}$ & $R = \rho.\frac{L}{S}$ $\quad U = RI = \frac{1}{G}$

$G = \sigma.\frac{S}{L}$

$\Sigma U_{maille} = 0$.

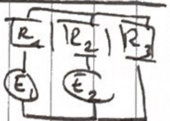
$P = UI \quad E = P.t \quad P = G.U^2 \quad U_{AB} = V_A - V_B$



Générateur	Récepteur
$P_E = E.I$	$P_R = P_{fournie}$
$P_{perte} = r I^2$	$P_R = EI - rI^2$
$P_{fournie} = P_E - P_{perte}$	$P_R = \frac{U^2}{R} = RI^2$

Div Tension : $U = \frac{E R_2}{R_1 + R_2}$ Div Courant : $I_1 = \frac{I R_1}{R_1 + R_2}$

Lois Superposit° : $V = R_3.\frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$



↳ Pr circuit à n générat^rs remplacer par n circuits à 1 générateur.

Th Thévenin : isoler / $R_{th} = R_{eq}$ / E_{th} : remplacer générat^rs par fils connexions

T^h Norton : générat^r courant

$1\,J = 1\,W$ pdt $1\,s$ & $1\,kWh = 1\,W$ pdt $1\,h = 3600\,J$

$P = R.I^2 = \frac{U^2}{R} = U^2.G$

⇝ Pont Wheastone & Th Kenelly & $\Delta \Rightarrow$ ☆

EEA

120

Masse molaire atomiq = $\frac{\text{masse atomiq}}{N_a} \times N_a = g.mol^{-1}$

$1\,u = \frac{1}{N_a}\,g = \frac{10^{-3}}{N_a}\,kg$. $1\,cm^{-1} = 10^2\,m^{-1}$

$M^x_{uma} = 12 \times \frac{M^x\text{réelle}}{M^C\text{réelle}}$ $\lambda = \frac{1}{\sigma} = c.T = \frac{c}{\upsilon} = \frac{1}{\bar{\upsilon}}$

$\bar{\upsilon}_{cm^{-1}} = \frac{10^7}{\lambda_{nm}}$

- Effet photoélectiq : extracᶿ/éjecᶿ électrons
- Tᴴ corpusculaire lux : E lux pas répartie unifᵐᵗ
- $h\upsilon_i = W + \frac{1}{2} m_e v^2$ & $W = h\upsilon_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$

$h\upsilon = |E_2 - E_{fondamentale}|$

$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

Tᴴ Bohr : uniq électron, se déplace sur orbite circulaire centrée sur (n) supposée immobile

$a_0 = 0{,}529$ Å
$R_H = 1{,}096.10^7\,m^{-1}$
$E_1^H = -13{,}6\,eV$

$E_n = E_1^H \times \frac{Z^2}{n^2}$

$r_n = a_0 \times \frac{n^2}{Z^2}$

$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_H . Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

$\Delta E = E_1^H . Z^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

$n = \frac{N}{N_a} = \frac{m}{M} = CV = \frac{V}{V_m}$

$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$

Relaᶿ incertitude Heisenberg : $\Delta x \Delta v \geq \frac{h}{4\pi m}$

Eqⁿ Sch. : $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r).\Theta(\theta).\Phi(\varphi)$

- n : quantum principal : $n \in \mathbb{N}$.
- l : qtm azimutal : $0 \leq l \leq (n-1)$
- ml : qtm magnétiq : $-l \leq ml \leq l$. nb OA

→ densité | volumiq / radiale proba présence

80

|Aufbau| : Si atome E fond e- occupant niv$\times$ E + bas.

|Exclu$^\theta$ Pauli| : Deux e- ne pvt avoir 4 nbrs quantiqs idtqs.

|Hund| : Plus e- occpt OA ocpt m̂ énergie, spin e- restent non appariés.

$\sum_i a_i = 1$

$m = \sum_i a_i \times m_i$

γ | X | UV | V | IR | μo | on

Z^* : charge nucléaire effective.

I : alcalins / II : alcalino-terreux / XVI : chalogènes.
XVII : halogènes / XVIII : gaz rares

$Z_i^* = Z - \sum \sigma_{ij}$

↓ R ↗ ← ; ↑ X ↗, AE ↗, E ↗ →

→ cation : Z^* ↗ & Anion Z^* ↘.

$r(M^{n+}) < r(M)$
$r(M) < r(M^{n-})$.

(EI) E nécessᴿ pr arracher e⁻ à attracᶿ (n).
$\boxed{EI_n > EI_{n-1}}$

(AE) Gain E ←A→ ps en pH gaz :

Pptés Métaux : Règle Sanderson :
Si nbr cche n + elevé est ≤ numéro période.
S (Ne) : $3s^2 3p^4$ → 6e⁻ & période 3 : 6>3 ⇒ S n'est pas métal

- Liaison chimiq : résult intᴺ coulombienne stb ↔ 2 atomes.
- Valence : nbr liaisons atome pt former ds molécule.
- Liaison covalente : mise en commun doublet e⁻
- CF = (nbr e⁻ vlce atome isolé) - (nbr e⁻ vlce entourant cet atome ds molécule)

SS Lewis

Degré oxydat : O : +2e⁻ : Ne : -II (Ne) - 4e⁻ : +IV (Ne)

Mésomères : écriture ≠ plsrs fᵐᵉˢ Lewis.
Hybride de résonnance : mlcle réelle est moyenne fᵐᵉˢ mésomères

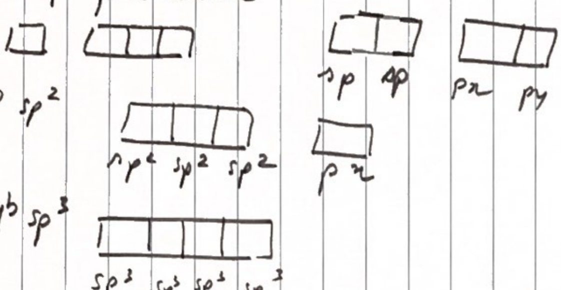
[M] VSEPR : Vlce Shell Electron Paires Répulsion.
AX_nE_m
FDR : géo ds dblts liants & non liants : $p = n + m$

p=2 (linéaire 180°) p=3 ∆ 120° p=4 : tétraèdre 109,5°
p=5 (Bipyramide base triangl^{re}) p=6 : octaèdre.

Indice de liaison : $n_\ell = \frac{1}{2}[n_{liant} - n_{non\text{-}liants}]$
→ paramagnétiq (e- célib)
→ diamagnétiq ↑↓ : ⚠ Inversion σ_z & $\pi_x . \pi_y$

Hybrida° : combi linéaire OA pures

Hyb sp pour carbone



Hyb sp^2

sp^2 sp^2 sp^2 pz

Hyb sp^3

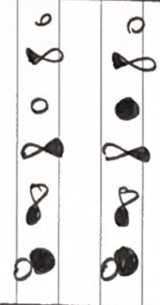
sp^3 sp^3 sp^3 sp^3

	FDR	
sp	linéaire	AX_2
sp^2	trigl^{le} plane	AX_3
sp^3	tétraédriq	AX_4

$\mu = q\, d$ $q = \delta . e$

$\vec{\mu}$: du plus électro au moins électro$_3$ ⚡

% $I_{ion} = 100 . \frac{\mu}{e d} = 100\, \delta$. & $\mu_{tot} = \Sigma \mu_i$



σ			1s+1s
			2pz + 2pz
σ*			1s − 1s
			2pz − 2pz
π			2px + 2px
			2py + 2py
π*			2px − 2px
			2py − 2py
NL			1s + 2px

Isomère : m̂ FF brute ≠ si FF semi-dev.
cis (Z) & (E) trans

$\vec{F}$ Keesom : 2 mol polaires : dipôle - dipôle
$\vec{F}$ Debye : mol pol^{re}/mol apol^{re} : dipôle - dipôl induit
$\vec{F}$ London : 2 mol apol^{res} : mom^t dipol^{re} instant

(K) ↔ μ (D) ↔ $\vec{\mu}$ induit (L) ↔ masse molaire.

→ Si $\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{M_K}(\vec{F}, A) = \vec{KA} \wedge \vec{F}$

$\vec{M_K}(\vec{F}, A) = \vec{M_J}(\vec{F}, A) + \vec{KJ} \wedge \vec{F}$.

∘ Résultante : $\vec{R}\{F\} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$

• $\vec{M_K}\{F\} = \sum_{i=1}^{n} M_K(\vec{F_i}, A_i)$

$\vec{M_K}\{F\} = \vec{KA} \wedge \vec{F}$

∘ $\vec{M_K}\{F\} = \vec{M_J}\{F\} + \vec{KJ} \wedge \vec{R}$

$\vec{R} = \|\vec{R}\| . \vec{n}$ force de contact si $\|\vec{R}\| > 0$

(PFS) ∃ (Rg) tq ∀ SM S en Ē, TAM E à S SN.

PFS ⇒ $\{0\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M_K} = \vec{0} \end{matrix} \right\}$

Couple : ac° méca est un couple si résultante est nul.
$\{F\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{matrix} \right\}$: un couple tend imprimer rota° au système méca

$\vec{M} = \vec{BA} \wedge \vec{F}$: couple ne varie pas.

MÉCA

$\sigma = m_c + m_s = DLB + DLA$.

▷ Encastrement
▷ Pivot
▷ Glissière
▷ Hélicoïdale $R_x (M_x)$
▷ Rotule
▷ Appui plan

Trans° Rota°

Cinématiq : étude mvt corps ds espace indépendamment causes q produisent ce mvt.

$\frac{d_b(\lambda \vec{u})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda \frac{d_b \vec{v}}{dt}$

$\frac{d_{b_1}(\vec{u})}{dt} = \dot{\alpha}(t) . \vec{v}$: TH Vecteur Unitaire Tournant

$\frac{d_{b_1} \vec{v}}{dt} = -\dot{\alpha}(t) . \vec{u} = -\dot{\alpha}(t) [\cos\alpha(t) . \vec{e_1} + \sin\alpha(t) . \vec{e_2}]$

FF Bout : $\frac{d_B \vec{X}}{dt} = \frac{d_E \vec{X}}{dt} + \vec{\Omega}(E/B) \wedge \vec{X}$

Rot° autour axe : $\vec{\Omega}(b_2/b_1) = \dot{\alpha}(t) . \vec{e_3}$

FFCS : $\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(b_1/b_0) \wedge \vec{AB}$

Torseur cinématiq:

$$\vec{H}(B) = \vec{H}(A) + \vec{S} \wedge \vec{AB}$$

$$\{F\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{H}(B) \end{Bmatrix}_B$$

$$\{T_c(S_1/R_0)\}_K = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(b_1/b_0) \\ \vec{V}(K/R_0) \end{Bmatrix}_K$$

* Solide repos $\{T_c\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

* Mvt translaᵒ $\{T_c\}_K = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(K/R_0) \end{Bmatrix}_K$

* Rotaᵒ autour axe $\{T_c(S_1/R_0)\}_K = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$.

PFS $\exists$ RG, $\forall$ SM S en E, TAM E à SSN:

$$\{F(\bar{S} \to S)\} = \{0\}.$$

Torseur acᵒs mécas exercées par S_1 sur système S_2 est opposé au torseur des acᵒs mécaniqs exercées par S_2 sur système S_1.

$$\{F(S_1 \to S_2)\} = -\{F(S_2 \to S_1)\}$$