M-53 Pr: Emmanuel Fricain

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

SÉRIES DE FOURIER

1. Intégrales définies dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre.
2. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; mise en parallèleavec des résultats connus pour des séries de fonctions.
3. Critères de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales ; la convergence normale implique la convergence uniforme. (if time left)
4. Polynômes et séries trigonométriques, calcul pratique des coefficients de Fourier, forme complexe de la série de Fourier.
5. Formes hermitiennes et identité de Parseval ; convergence en moyenne quadratique pour les fonctions continues par morceaux.6.Lemme de Riemann-Lebesgue, théorème de convergence simple de Dirichlet pour les fonctions C^1 par morceaux, théorème de convergence uniforme pour les fonctions continues C^1 par morceaux.

M53 - Intégrales à Paramètres

C1 - Continuité UN & Integ Génér.

D C-S : I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ alors f est cont, $\forall x \in I$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall y \in I$, $|x-y| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

D C-U : ..., f cont & UN sr I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall x, y \in I$, $|x-y| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

⚠ f UN cont sr I
$\Rightarrow f$ cont sr I. (~~RF~~)

TH Heine

soit I compact de $\mathbb{R}$ & $f : I \to \mathbb{R}$ cont alors f est UN cont.

TH Heine $\mathbb{R}^2$

soit I, J compacts de $\mathbb{R}$ soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont alors f est UN cont sr $I \times J$.

→ f UN cont sr $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$, $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$

2.1. Intég. Généralisées

D soit I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est locmlt intégrable (au sens de Riemann) si f est Riemann intégrable sr tt intervalle compact.

D soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ & spps f loclmt integ sr $[a, b[$, on dit q l'intégrale de f sr $[a, b[$ est CV si $f : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b[$ a une limite finie qd $x \to b$.
On note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$.

Cette limite s'appelle l'ig de f sr $[a, b[$. $(-\infty < a < b < \infty)$

2.2. Fausse Généralité

P soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ cont & spps que $\lim_{x \underset{<}{\to} b} f(x)$ $\exists$ (& est finie) alors
$\int_a^b f(x)\,dx$ CV.

2.3. Cit CV sr f signe cte

TH soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ & spps que :
(i) $\exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[$: $f(x) \geq 0$
(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$
(ie : $\exists M > 0, \forall x \in [c, b[$, $f(x) \leq M . g(x)$)

Alors :
a) si $\int_a^b g(x)\,dx$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CV
b) si $\int_a^b g(x)\,dx$ DV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ DV

TH $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ
spps (i) $\exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[, f(x) \geq 0$
(ii) $f(x) \underset{x \underset{<}{\to} b}{\sim} g(x)$
(ie : $\exists \varepsilon : [c, b[\to \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \underset{<}{\to} b} \varepsilon(x) = 0$ & $\forall x \in [c, b[$, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$)

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx$ CV ssi $\int_a^b g(x)\,dx$.

2.4. Cit de CV en Valeur Absolue

TH $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ li & spps que
$\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ CV.

2.5. Cit de Cauchy

TH soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ li
alors $\int_a^b f(t)\,dt$ CV $\boxed{\text{ssi}}$ $\forall \varepsilon > 0$,
$\exists x_\varepsilon \in [a, b[$, $\forall x, x'$:
$x_\varepsilon < x < x' \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$.

C2 : Integ définies à paramètres

1. Continuité de F

- I int de $\mathbb{R}$ borné ou non
- $J = [a,b]$, $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$

n spps $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est Riemann Intégrable sr I.

(Th) Spps $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont alors $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$,

la f F est bien déf & cont sr I.

⚠ a,b dvt ê réels finis ! Ne f pas pr (IG).

2. Condi°s pr F soit C^1

(Th) soit $f : I \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

spps (i) f cont sr $I \times [a,b]$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sr $I \times [a,b]$

alors f $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est bien déf & classe C^1 sr I.

et $\forall x \in I$,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$