Université de Lille, FST
2019/2020 – SESI – L1, Semestre 1

Mathématiques élémentaires, M11
Jeudi 7 Novembre 2019. **Durée** : 3h.

Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des réponses. Le sujet comporte deux pages. Le barème est donné à titre indicatif.

Notez votre numéro de groupe sur votre copie.

Partie I. Algèbre (10 points : 3+3+4)

Exercice 1 – Soit f une fonction réelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Ecrire à l'aide de quantificateurs l'assertion « *f est une fonction surjective* ».
   (b) Ecrire à l'aide de quantificateurs la **négation** de l'assertion « *f est une fonction surjective* ».
   (c) Vérifier que f n'est pas une fonction surjective lorsque $f(x) = |x^3 - 5| - 5$.
2. (a) Rappeler la définition de l'image $Im(f)$ d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, en justifiant votre réponse, l'ensemble $Im(f)$ lorsque $f(x) = |x^3 - 5| - 5$.

Exercice 2 – On rappelle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour toute paire d'entiers (k, n) tels que $0 \leq k \leq n$.

1. Calculer C_4^2 et C_7^6.
2. Citer la formule du binôme de Newton pour $(a+b)^3$, en explicitant la valeur de chaque coefficient.
3. En utilisant le fait que $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les coefficients réels λ et μ tels que $(\sin\theta)^3 = \lambda \sin(3\theta) + \mu \sin\theta$.

Exercice 3 – Soit $z = -i(2+2i)^3$.

1. Déterminer le module et un argument de z.
2. Déterminer les parties réelle et imaginaire de z.
3. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de z.
4. En utilisant la forme trigonométrique de z, déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que $z^n \in]0, +\infty[$.

Partie II. Analyse (10 points : 3+2+5)

Exercice 4 – Soit $f(x) = |x^2 - x - 2| - |x + 1|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner une expression de f n'utilisant pas la valeur absolue.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Soit $I = [2, +\infty[$ et $J = f(I)$. Démontrer que la restriction de f sur I, notée $f|_I : I \to J$, est une bijection dont l'on précisera la fonction réciproque $f|_I^{-1}$.

Exercice 5 –

1. Rappeler la définition de la fonction $\arccos x$, en précisant notamment <u>les</u> domaines de définition et d'arrivée.
2. On rappelle que $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $f(x) = \sin(\arccos x)$. Exprimer, en justifiant votre réponse, la fonction f au moyen de $\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 6 –

1. Etudier la convergence des suites définies par leur terme général suivant ($n \geq 1$) :
   (a) $u_n = \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
   (b) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - n$;
   (c) $u_n = \dfrac{4^n + 1}{2^n + 1} - 2^n$;
   (d) $u_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 1 + u_n - \sqrt{u_n}$.
   (a) Vérifier par récurrence que $u_n > 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Université de Lille 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

UFR de Mathématiques

L1 SESI - PEIP - Semestre 1

Devoir Surveillé de Maths 11 - Samedi 28 octobre 2017

Durée : 3 heures

Sans document ni calculatrice

Le barème est donné à titre indicatif

Attention : noter le numéro de votre groupe sur votre copie

Partie I : Algèbre

Exercice 1 (2 points). Dire, en justifiant votre réponse, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, puis écrire leur négation :

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x^2 + y^2 = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\quad (x \leq 2) \Rightarrow (x^2 \leq 4).$

Exercice 2 (3,5 points).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = (x-1)^2$.
   (a) Dessiner le graphe de f.
   (b) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer les ensembles suivants :
   $$f(\mathbb{R})\,;\quad f(]-\infty, 1])\,;\quad f^{-1}([0,1])\,;\quad f^{-1}([1,+\infty[).$$
2. Soit $g : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ la fonction définie par : $g(x) = (x-1)^2$.
   Montrer que g est une application bijective et donner une expression de l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 3 (1 point). Ecrire la formule du binôme et en déduire la valeur de :
$$\sum_{k=0}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^k \mathrm{C}_{50}^k.$$

On rappelle que C_n^k désigne k parmi n.

Exercice 4 (3,5 points).

1. (a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$z^5 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
   $$z^2 = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z^2 - (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0.$$

Tournez la page SVP

Partie Algèbre

Exo 3 Soient a et b deux réel et $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ Alors $(a+b)^n = \sum_{p=0} C_n^p a^p b^{n-p}$

Partie II : Analyse

Exercice 1 (2 points). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = |2x+2| - |x-1|$.

1. Donner une expression de f n'utilisant pas la valeur absolue.
2. Tracer le graphe de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 (1,5 points). On considère l'équation (E) :

$$\ln(x^2+1) - \ln(x-1) = \ln 5.$$

Déterminer le domaine de validité de l'équation (E) et la résoudre.

Exercice 3 (1,5 points). Simplifier les expressions suivantes :

$$\arcsin\left(\sin\frac{19\pi}{2}\right) \;; \qquad \arccos\left(\cos\frac{33\pi}{9}\right).$$

Exercice 4 (2,5 points). Calculer les limites des suites définies par leur terme général suivant :

$$u_n = \frac{n^3+1}{n^3+n} \;; \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \;; \qquad w_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} \;;$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} \;; \qquad y_n = \frac{e^{-n}\cos n}{n^2+1}.$$

Exercice 5 (2,5 points). On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \;; \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Calculer u_2 et v_2.
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ et que $\frac{9}{8} \leq \ell \leq \frac{13}{8}$.

—oooOooo—

Partie II : Analyse

Exercice 1 (2 points). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = |x^2 - 1| - |x - 1|$.

1. Donner une expression de f n'utilisant pas la valeur absolue.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 2 (1,5 points). On considère l'équation (E) :

$$\ln(x^2 - 4) - \ln(x - 1) = \ln 4.$$

Déterminer le domaine de validité de l'équation (E) et la résoudre.

Exercice 3 (1,5 points). **Simplifier les expressions suivantes :**

$$\arcsin\left(\sin\frac{11\pi}{5}\right) \;; \qquad \arccos\left(\cos\frac{23\pi}{7}\right) \;; \qquad \arctan\left(\tan\frac{17\pi}{3}\right).$$

Exercice 4 (2,5 points). **Calculer les limites des suites définies par leur terme général suivant :**

$$u_n = \frac{n^3 + 2}{n^3 - n} \;; \qquad v_n = n - \sqrt{n^2 + 1} \;; \qquad w_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} \;;$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \;; \qquad y_n = \frac{\cos n}{1 + n^2}.$$

Exercice 5 (2,5 points). **On considère la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ de terme général**

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln k}$$

et on pose $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1. **Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.**
2. **En déduire que la suite (S_n) est convergente. Justifier votre réponse.**

—oooOooo—