Defraiteur
Marcence

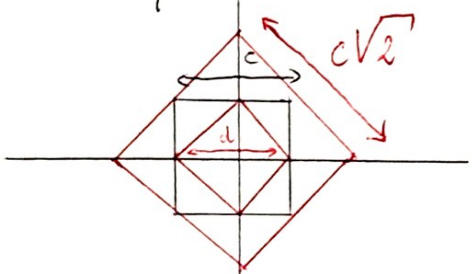
Démonstration du Lemme I.9

Soit E un espace vectoriel, on souhaite démontrer l'équivalences des normes N_1, N_2, N_∞.

On s'aidera de l'interprétation géométrique des normes, représentées respectivement dans un repère orthonormé cartésien :

- N_1 : des losanges.
- N_2 : des cercles
- N_∞ : des carrés.

Premièrement, on souhaite montrer que $N_1(x,y) = |x| + |y|$ et $N_\infty = \max(|x|, |y|)$ sont équivalentes.



On trace les normes $N_1(x,y)$ dont la diagonale vaut d et $N_2(x,y)$ de côté c.

- Tout losange peut être inclus dans un carré si

$$d_{losange} \leq c_{carré} \iff |x| + |y| \leq \max(|x|, |y|)$$

On pose $C_1 > 0$, $\iff C_1(|x|+|y|) \leq C_1 \cdot \max(|x|, |y|)$

$\forall x, y \in E$, $\iff |x| + |y| \leq C_1(|x|+|y|) \leq C_1 \max(|x|, |y|)$

car C_1 est une quantité positive.

$$\iff N_1(x,y) \leq C_1 \cdot N_\infty(x,y)$$

- Tout carré peut être inclus dans un losange si la diagonale du carré équivalant à $c\sqrt{2}$ est inférieure ou égale au côté du losange valant $|x|+|y|$.

Autrement dit, $c\sqrt{2} \leq |x| + |y|$

$\forall x, y \in E$ $\iff \sqrt{2} \cdot \max(|x|, |y|) \leq |x| + |y|$

On pose $C_2 > 0$, $\iff C_2 \times \sqrt{2} \cdot \max(|x|, |y|) \leq C_2(|x|+|y|)$

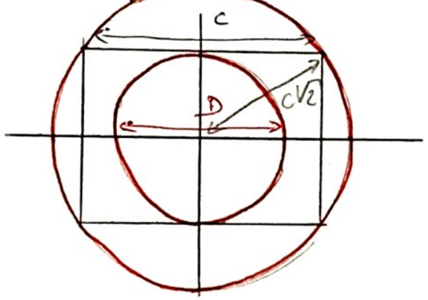
$\iff \max(|x|, |y|) \leq C_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \max(|x|, |y|) \leq C_2(|x|+|y|)$

$\iff N_\infty(x,y) \leq C_2 \cdot N_1(x,y)$.

Donc $\forall x, y \in E$, $\begin{cases} N_1(x,y) \leq C_1 \cdot N_\infty(x,y) \\ N_\infty(x,y) \leq C_2 \cdot N_1(x,y) \end{cases}$,

équivaut à dire que $N_1(x,y)$ et $N_\infty(x,y)$ sont équivalentes.

Deuxièmement, on souhaite montrer que $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$ sont équivalentes.



On trace les normes $N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$ et $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

- Tout cercle peut être inclus dans un carré si le diamètre du cercle noté D est inférieure ou égale au côté c du carré. $\forall x,y \in E$,

Autrement dit, $2\sqrt{x^2+y^2} \leq \max(|x|,|y|)$

on pose $C_1 > 0$, $\Leftrightarrow 2 \times C_1 \times \sqrt{x^2+y^2} \leq C_1 \cdot \max(|x|,|y|)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \cdot C_1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leq C_1 \cdot \max(|x|,|y|)$

$\Leftrightarrow N_2(x,y) \leq C_1 \cdot N_\infty(x,y)$

- Tout carré peut être inclus dans un cercle si la moitié de la diagonale du carré est inférieure ou égale au rayon du cercle.

Autrement dit, $c\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall x,y \in E$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} \times \max(|x|,|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2}$

On pose $C_2 > 0$, $\Leftrightarrow C_2 \times \sqrt{2} \times \max(|x|,|y|) \leq C_2 \sqrt{x^2+y^2}$

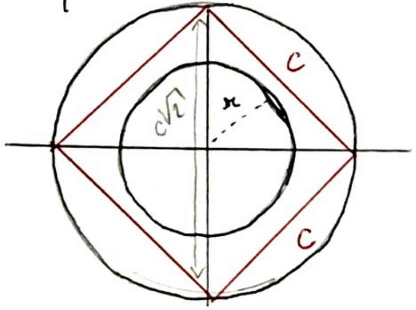
$\Leftrightarrow \max(|x|,|y|) \leq C_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \max(|x|,|y|) \leq C_2 \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow N_\infty(x,y) \leq C_2 \cdot N_2(x,y)$

Donc $\forall x,y \in E$, on a $\begin{cases} N_2(x,y) \leq C_1 \cdot N_\infty(x,y) \\ N_\infty(x,y) \leq C_2 \cdot N_2(x,y) \end{cases}$

Ainsi les normes $N_2(x,y)$ et $N_\infty(x,y)$ sont équivalentes.

Troisièmement, on souhaite montrer que $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $N_1(x,y) = |x| + |y|$ sont équivalentes.



On trace $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, formant un cercle de rayon r et $N_1(x,y) = |x| + |y|$ formant un losange de côté c.

- Tout cercle peut être inclus dans un losange, si le rayon r du cercle est inférieure ou égale à la moitié du côté du losange.

Autrement dit, $r \leqslant \frac{1}{2} c$

$\forall x,y \in E, \iff \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}(|x| + |y|)$

on pose $C_1 > 0$, $\iff C_1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{C_1}{2}(|x|+|y|)$

$\iff \sqrt{x^2+y^2} \leqslant C_1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{C_1}{2}(|x|+|y|) \leqslant C_1(|x|+|y|)$

$\iff N_2(x,y) \leqslant C_1 \cdot N_1(x,y)$

- Tout losange peut être inclus dans un losange, si la diagonale du losange $c\sqrt{2}$ est inférieure ou égale au rayon R du cercle.

Autrement dit, $c\sqrt{2} \leqslant R$

$\forall x,y \in E, \iff \sqrt{2}(|x|+|y|) \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.

on pose $C_2 > 0$, $\iff C_2 \cdot \sqrt{2}(|x|+|y|) \leqslant C_2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}$

$\iff |x|+|y| \leqslant C_2\sqrt{2}(|x|+|y|) \leqslant C_2\sqrt{x^2+y^2}$.

$\iff N_1(x,y) \leqslant C_2 \cdot N_2(x,y)$.

Donc $\forall x,y \in E, \begin{cases} N_2(x,y) \leqslant C_1 \cdot N_1(x,y) \\ N_1(x,y) \leqslant C_2 N_2(x,y) \end{cases}$

Ainsi N_1 et N_2 sont équivalentes.

En résumé, on a démontré que $N_1(x,y)$ et $N_\infty(x,y)$ sont équivalentes, puis $N_2(x,y)$ et $N_\infty(x,y)$ le sont aussi, puis N_1 et N_2 de même.

Par conséquent les trois normes N_1, N_2, N_∞ sont toutes les trois équivalentes entre elles.

$\square$