Histoire des Maths

➢ Préface, Une histoire des mathématiques, Dahan -Dalmedico & Peiffer : Généralités
➢ HDM : assez récent (qq décennies), fil conducteur : limite, rassembler les **sources** (documents, tablettes, papyrus) de façon chronologique)
➢ La Genèse ? Quand une théorie est née ? Comprendre comment cette idée a évoluée
➢ **sources secondaires** : historiens qui écrivent des **articles** sur des sources primaires)
➢ Histoire exaustive : donc choisir des thèmes, isoler des champs thoriques, distinguer des moments théoriques

Article I Pk HDM peut-ê intéressante ?

- point de vue intellectuel
- pour les chercheurs
- côté pédagogique (définition et théorème actuels : long acheminement au long de l'histoire avant d'arriver à une axiomatisation)
- importance du contexte historique (on pourrait penser que les idées mathématiques sont indépendantes du contexte historique : ce qui est faux)

Exemple : Cauchy, XIX° : introduction à l'Analyse moderne, continuité des fonctions, intégrales...
Cauchy a dû écrire un **Cours d'Analyse, 1821, Ecole Polytechnique**.
(avt XVIII, avt la création des écoles poly, les profs n'enseignaient pas à un grand public d'étudiants : à paritr de la réforme de Napoléon : créatin école Poytech : figure de mathématicien a changé : Cauchy a été obligé d'écrire des cours rigoureux pour les étudiants.

- Comment fait-on HDM ?
  - Naissance de HDM après 2GM mais elle existe déjà chez les Grecs (@ Pappus, Procle : historiens, commentateurs)

Principia mathématica : critique faite par Hessen : manifeste de "externialisme" : expliquer comment mathematica principia est né des besoins de l'économie et de la technique de l'époque.
Livre Montucla : description de la difficulté de la méthode HDM

Méthode (de J.F. Braustein ⚠️ PAS SUR ⚠️) pour effectuer l'HDM :

- origine des sciences (normalement début maths chez les Grecq MS certains considèrent déjà l'existence des maths chez les Babyloniens, Egyptiens, Mésopotamiens)
- liste de chaque mathématicien, chaque époque (MS on oublie le travail des mathématiciens moyens)
- les plus "célèbres"
- corréler la vie du mathématicien avec les mathématiques
- ordonner les sources : pas simple (difficile de définir son propre corpus)

⇒ Il faut une large connaissance des mathématiques pour faire HDM

Article II 1°: Querelle : Externalisme & Internalisme

(débats 50's-60's)

Définition : Externalisme

Les historiens pensaient que HDS étaient provoquées par l'histoire, ce qui s'est passé au niveau économique et social.

Définition : Internalisme

Les mathématiciens, scientifiques; la science est interne : pas de contact réel avec ce qui se passe à l'extérieur.

On souligne que Newton a publié des résultats grâces aux racines sociales et économiques : origine bourgeoise de Newton qui expliquerait la vision de Newton de voir la science. (influence de la doctrine marxiste).

Aujourd'hui : position d'harmoniser les 2 points de vues.

@ Externialisme : Koyré : études galliléennes : intérêt purement théorique des maths ; intéret sur la nature de l'univers a égalmeent influencé les recherches de Galilée. Pour Koyré : la science est avant tout la "théorie".

1° révolution scientifique : XVII : Terre n'est plus considérée comme le centre de l'univers, les formules mathématiques (expliquent le monde) ; on puvait mettre en fondement de l'astronomie ou des autres sciences : si pas correct : les changer. (@ loi d'inerte, trajectoire d'un objet)

Galilée a écrit : "L'Univers est écrit en langage mathématique".

Kuhn, progrès scientifique :
On peut avoir des révolutions, à certains moments la théorie n'est plus la bonne, on doit rejeter les théories.

Science normale | Révolution | Science normale | Révolution | •••

Pendant la période de la *science normale* : à peu près pour tous les scientifiques : OK si même théorie.
@ Théorie de la relativité

Article III 2°: Querelle : Continuisme & Discontinuisme

La recherche scientifique a-t-elle une continuité ? Selon Kuhn : NON (SN / R / SN / R ....)

Pierre Duhem → "Germe" ou "source" : on développe + qq chose qui existe déjà avant : trouver le début d'une théorie dans une théorie précédente.

Idée : MA rien : pouvoir de l'Eglise a mis de côté la science pour la théologie.
→ Au contraire, Duhem (très catholique) : mécanique de Galilée : forme adulte d'une science vivante : @ germe pour mécanique des fluides ??
→ ce n'est pas vrai qu'il ne sait rien passé au MA.

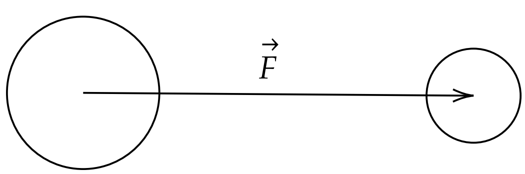
Un progrès scientifique ?

- Idées de Duhem : ps qui se développe avec conitnuité
- Karl Popper : "réfutabilité" comme moteur ps (à travers une expérience crucizle) Michelson-Moiley) : grâce à cette expérience : mise en place de la théorie de la relativité
- Maths : autres géométries réfutant les axiomes de la géométrie euclidienne : géométries non-euclidiennes
- G. Bachelard : critique continuisme : "mutation spirituelle", "allure révolutionnaire" : évoque le génie scientifique
- Kuhn : Science normale : Paradigme partagé / Anomalies : crise : révolution sicientifique : plusieurs paradigmes et retour à la science normale

Article IV 3°: Querelle : Whiggisme ou Présentisme / Historicisme

- H. Butterfield, The Whig (partie du parlement anglais) interpretation of History : critique attitude de plusieurs historiens d'écrire l'histoire en jugeant ou interprétant le passé sur la base des préjugés du présent. (anti-Whiggiste)
- En maths : revoir l'Histoire du passé par rapport aux résultats mathématiques qu'on connait

@ Au XIX° : plusieurs théories sur l'éther (élastique) rempli tout l'univers, propagation, réasction physique par rapport à la 3° Loi de Newton, expliquer la force de gravité : comprendre cette force.

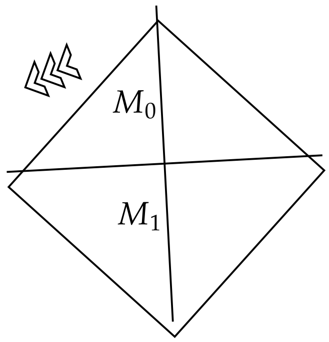


$$\vec{F} = \frac{G.m_1.m_2}{d}.\vec{u}$$

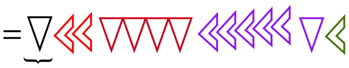
→ imgaination propagation fluide composée de petites particules qui touchent l'autre astre . (un fluide qui propageait les forces) Théorie de l'élasticité

Le présentisme (= whiggisme) amène à écrire une histoire qui est plutôt une comédie des erreurs.

Exemple : tablette Babylonienne YBC 7289 (devoir des élèves)



$M_0 = 1,4142129$

$M_0 =$ 

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

$M_1 = 42,426389$

environ 4000 ans, YBC établit lien entre objet géométrique (carré diagonale) et objet algérbique ($\sqrt{2}$)
le système babylonien n'utilise ni 0, ni virgule

- en base 60 : 42,426389 / en base 10 : 1,4142129 ($1.4142 \times 30 = 42.426389$)
- Voir dessin pour démo
- Méthode de Héron : approx de $\sqrt{a}$:

  $\rightarrow a_0$ (proche de $\sqrt{a}$)

  $$\rightarrow a_n = \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

Est-ce que les Babyloniens connaissaient la $\sqrt{2}$?

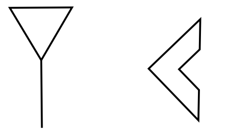
Article V **Contexte : dans la Mésopotamie**

(actuelle Irak) où se trouvent les Babyloniens
tablette d'argile désséchée au soleil : très robuste par rapport au papyrus, papier
trouvaille tablettes vers XIX par archéologue allemand (fouille en mésopotamie)
Les mathématiques étaient utilisées par des **fonctionnaires** (scribes) faisaient des calculs pour l'état (héritage, impôt) : nécessaire pour le bon fonctionnement de l'Etat .

Numération babylonienne : clou et chevron dans la base 60

@ $101_{60} = 1 \times 60^0 + 0 \times 60^1 + 1 \times 60^2$ (de droite à gauche)

Position très importante ! numération babylonienne
Ambiguité aussi pour le 0 (parfois utilsier un point ou mettre le symbôle en oblique pour signaler la présence du 0)
Ambiguité : les fractions @ vvvvv : interprété : $\frac{1}{6}$. . (dépend du contexte).



clou chevron

1 10

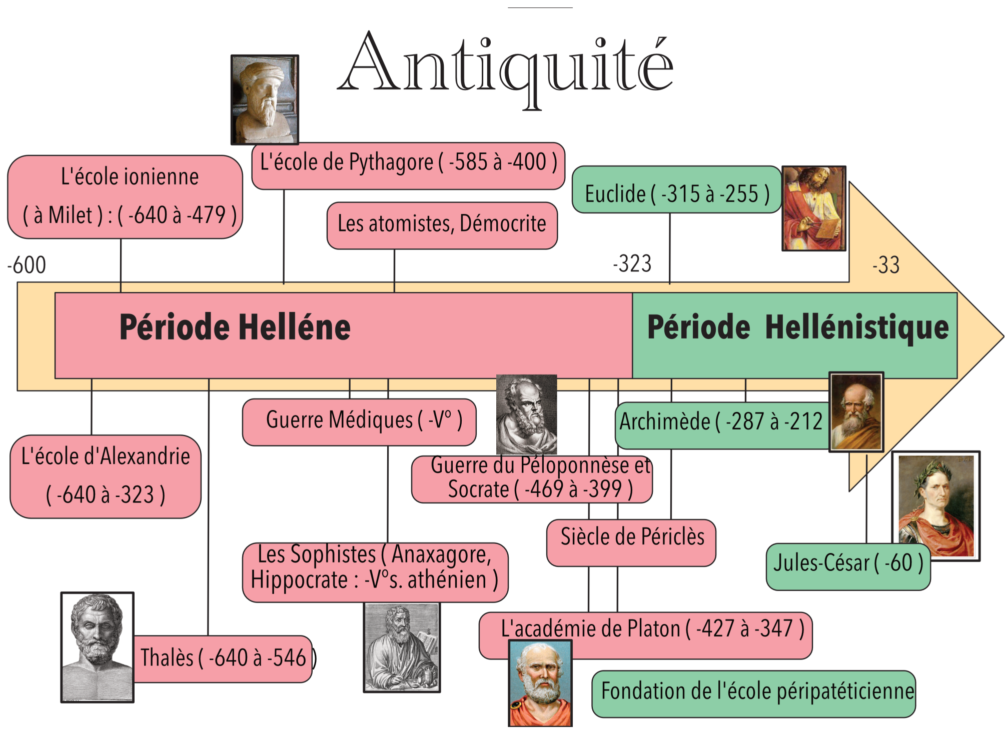
Question : côté d'un carré, on demande la diagonale ?

$30 \times 1,4142129 \approx \frac{1}{6}$. (on a $\frac{D}{C} = \sqrt{2}$)

cela ne signifie pas que les babyloniens ne connaissaient pas $\sqrt{2}$ comme on le connait aujourd'hui .

60 : nombre plus simple pour calculs en astronomie, 60 aussi divisible par plusieurs nombres entiers : plus simple pour les calculs . (calcul angle, horaire)
les Celtes utilisaient la base 20 (quatre-vingt)

Article VI **Grèce Antique**



cf : tableau chronologique des écoles mathématiques grecques

Carte : la grèce du VII s. : la Grande Grèce (grèce, partie de l'italie, partie d'afrique, partie egypte,)

Contexte historique :

- socéitét démocraituqe en petites cités-états (athènes, thèbes, spartes)
- on dit que les mathématiques sont nées en Grèces ≡> grande question : Pk les mathématiques sont nées en Grèce ? Dès chez les babyloniens, égyptiens : présence de numération, fractions...
- les développements intellectuels d'une civilisation est dépendant du contexte historique
- Période classique ou hellénique (600-300 av.J-C) : ville qui sont ds la grèce actuelle
- période alexandrine ou hellénistique (300 environ 30 av-JC) : conquête d'axleandre le grand : a conquis la grèce, consolidait son pouvoir, centre de la capitale actuelle d'egypte
- 360 av.JC : roi de macédoine philippe II occupe la grèce
- pythagore (surtout philosophe et grand mathématicien), aristote (logisiticien) a posé les fodnements de la théorie de la démonstration (tous les hommes sont mortels, charles est un homme donc charles est mortel) principe du tiers exclu
- 30 av.JC : la grèce sous le contrôle de Rome

dans la période classqiue : les MATQ sont plus pures, mais approximation de pi vient de la période alexandrine (calculer une aire) : avant on se contentait de comparer les figures (considération les rapports entre carré, cercle ...), loi d'Archimède, premières machines viennent de la période alexandrine

Aspects **généraux** :

- écoles de philosophies et non de mathémaitques MS parfois contribution remaquable aux MATQ
- école de thalès, pythagore, eleates....
- limite : ici notion philosophique
- problème des sources : preque aucun écrit ; on considère les commentaires (@ com des éléments d'euclide, traduction des arabes, romains venant du grec) : traduyions sont-elles conformes à l'origine ? faire des compariaosns entre les traductions si possible

Article VII Les mathématiques de babylonie et Egypte et mathématiques grecques. Le miracle grec.

MATQS de Babylonie et Egypte :

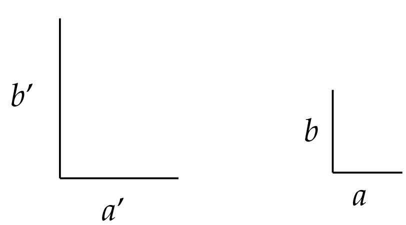
- Pb géométrique (résolution de problème par construction de figures) : pour les résoudre : besoin d'une procédure lié à ce problème : n'existe pas une méthode générale pour résoudre les problèmes (tjrs carré de côté 5, triangle de coté 3 : pas idée d'abstraction des données)
- absence de symbolisme algébrique et formules
- énoncés sans démonstration (lié à l'abstraction)
- recettes : description minutieuse de la démarche qu'il faut faire pour arriver au résultat

MATQS Grecques :

- MATQS abstraites et déductives
- introduction de la démonstration (définition, axiome, théorème)

Ecole MATQS Grecques

- école ionienne de thalès (640-479 av.JC)
- pas totalement le mêe énoncé de thalès
- Thalès a appris les mathématiques en égypte ????
- thalès a calculé la hauteur de la pyramide de khéops : ombre (voir SS) : $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$



- école de pythagore (585-400 av.J-C)   (école de philosphie, secte religieuse)
- pythagore : élève de thalès

- un peu la première école mathématique (élitiste quand même ,même si démocraituqe)
- énoncé de pythagore : généralisation : mais pas encore démontré
- fonde son école à Crotone en 532 av.J-C
- nombreuses règles, (tabous) s'imposent à celui qui adopte la "vie pythagorique "
- la légende attribue à pythagore des pouvoirs merveilleux

Idées mathématiques de l'école de pythagore :

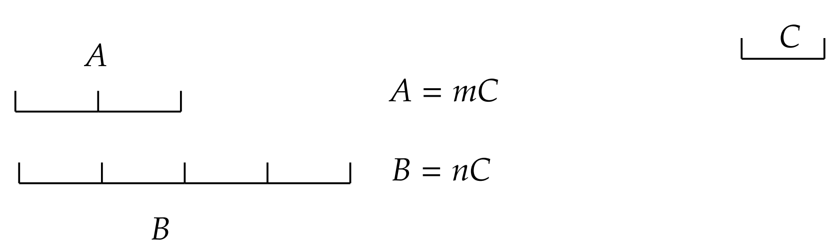
- proportion arithmétique et géométrique : $a - b = b - c$ et $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
- les nombres ne concernent que les nombres entiers (pas de négatifs, pas de 0), ok pour les fractions
- proportions harmoniques (théorie de la musique)
- classification des nombrs (les carrés, les triangles ($\frac{n(n+1)}{2}$) 1,3,6,10..., pair, impair; nombres premiers : rectangles ou oblong) cela amène a dmq certaines ffs comme $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)^2$

L'incommensurabilité :

- J.Tannery : chez l'école de pythagore l'unité est toujours "commensurable" à la longueur
- les Pythagoriciens ont inventé les irrationnels ??? vrai et pas vrai , n'imaginent pas les irr comme nous on l imagine mais connaissait le théorème de pythagore (carré de côté 1, sa diagonale est un nombre irrtionnel pour nous)

Commensurabilité :

- concerne 2 grandeurs (concerne la géométrie : @ segment, aire, volume...
- deux segments A et B : A,B sont commensurables s'il existe une autre grandeur C qui mesure A et B.
  $A = mC \;,\; B = nC$

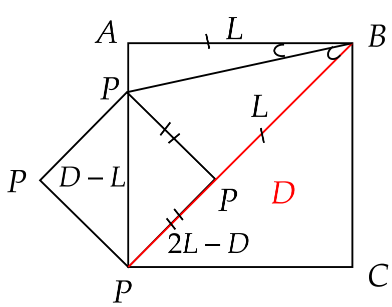


-
- C et C sont-ils commensurables ? (non) pas de nombre rationnels qui soit un multiple de $\sqrt{2}$.
  $\frac{D}{C} = \sqrt{2}$ (D : diagonale et C : côté) mais $2D, D$ sont commensruables car $\frac{2D}{D} = 2$.
  @ 2,4,6,3,9..

démo par l'absurde mais géométrique avec la commensurabilité : démo irrationel racine de 2 par les pythaogiriciens .
Si L, D commensurable $\implies$ $D - L$ et $2L - D$ commensurables .
Par l'absurde, L,D commensurables donc $\exists$ H sous-multiple commun .

- BE : bissectrice de ABP $\implies$ $ABE = BEF$
- $EF \perp BP$

PF et EP ont même sous-multiple.
Si on continue de la sorte, on obtient des carrés de + en + petits MS tous avec le côté et la diagonale multiple de H. Il est absurde car il y aura un moment où ils deviendront + petit que H.



Article VIII Paradoxes de Zénon :

Zénon (495-480 av.JC) : élève de Parménide. premiers paradoxes de l'antiqiutié : PPRR vise à critiquer les idées de l 'espcade et du temps. Pyhtaogre (atomistes) : pensait que toutes les choses étaient constituées de minuscules particules. D'autres philsipohhes pensaient que l'espace et le temps étaient infinment indivisble. é 2 premiers pardaxoes réfutent 1 ère idée , les 2 autres : la 2ème idée.

L'espace : on se fixe à un segment (on divise ainsi de suite le segment jusqu'à arriver à un point. Est appelé un continu car absence de trous. Un segment est-il composé de l'ensemble de tous ces points ? Qu'est-ce qu'un point ? Selon nous : pas possible, en effet on peut diviser le segment et on obtient toujours un segment : idée d'Aristote.

Autre paradoxe : segment A et segment B : un segment est formé par ces points (très petites sphères) : $A = n\epsilon$ (où ϵ : rayon de la sphère), $B = m\epsilon$. Puis $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ d'où A et B sont toujours commensurables alors il n'existe pas de segment incommensurable : ce qui est faux. (point : croisement de deux droites et non une petite sphère).

Pyhtagore : temps et espace constitués de parties inidivisbles (2 derniers paradoxes)

Section 1 Contribution de Zénon :

- les écoles grecques concernent aussi la philosphie, on ensigne la dialectique : comment on doit raisonner : indispensbale pour la justice (avocat, juge) ≡> amenait à montrer la culpabilité ou non d'une personne
- Zénon : iniateur de la dialectique (l'art d'argumenter)
- à partir des informations de l'advsersaire : construitre des affirmations qui sont fuasses, en maths : cela devient un paradoxe, *la reducio ad absurdum* ,
- ce type de raisonnement repris par aristote (pour raisonnement par l'absurde)
- Aristote a écrit plusieurs livres de physique, philosophie (façon de comprendre la nature pour lui), auteur des livres de LOgique ; grâce à lui que le raisonnement logique se développe : la démonstration commence à se développer dans la grèce ancienne. A partir d'un énon général, suite de raisonnement, démontrer le résultat général.

Section 2 PARADOXE 1 / DICHOTOMIE :

- mouvement impossible car avant que l'objet en mvt ne puisse atteindre as destination, il doit d'abord atteindre la moitié de son parcours, mais avant le quart, huitième... ainsi le mvt ne peut jamais commencer.
- une longueur finie contient une infinité de points. pour aller d'un point à l'autre il faut alors parcourir un nombre infini de points en un temps fini. Le mvt est alors impossible.
- pensée intuitive fausse de la divergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^n}$

Section 3 PARADOXE 2 / Achille et la tortue

- pensée intiuitve fausse de la limite $\infty \times 0 = 0$. (∞ : intervalle de temps et 0 : distance)
- $\sum \varepsilon_i = \infty$ ce qui est faux
- $d_{tortue} = vt + 100$ et $d_{Achille} = 10\,vt$ dc $10\,vt = vt + 100 \Rightarrow t = \frac{100}{9v}$, on connait le temps nécessaire pour achille pour rattraper la tortue

Section 4 PARADOXE 3 / LA FLECHE

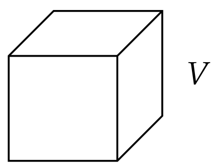
- hypothèses : temps et espace éléments indivisibles
- une flèche en mvt est tjrs arretés car à tt instant la fleche est en une position donnée et occupe un espace égal à elle-même.
- Solution : le mouvement a besoin de temps, application au cinéma avec nombre fini d'images : créer du mouvement

Article IX LES SOPHISTES. PLATON, ARISTOTE.

- Les sophistes (Ve s. av-JC) : protagoras, gorgias, prodicos, antiphon : école à athènes
- développent la rhétorique (espèce de démonstration en mots)

- école très intéressante pour les juristes : art de la rhétorique
- enseignement des 3 pbs matqs classiques : (construction / solution géométrique : à la règle / compas)
  - la duplication du cube
  - la trisection de l'angle
  - la quadrature du cercle

→ aucun des trois problèmes n'a de solution en utilisant que la règle et le compas

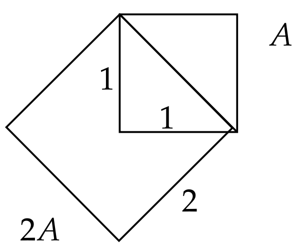


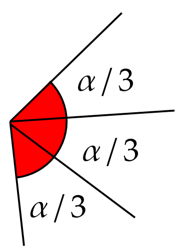
Problème : 2V

Construire à la règle et au compas

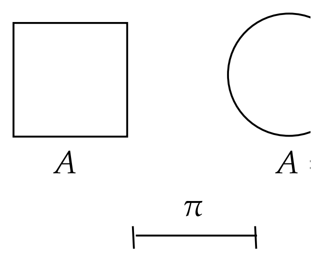
Résoudre $x^3 = 2V$

Approche completement géo chez les grecs, pas question de résoudre de manière numérique.
Droite et cercle : équation, deg 2, voir paire : en général puissance $3 \neq$ intersection cercle, droite
$XIX°$: Galois a démontré quelles sont les formes géométriques que l'on ne peut pas tracer à la règle et au compas.





Impossible R&C car construi



Est-ce que l'on peut construire à la R&C un carré ayant Aire = $2A$.

Section 1 PLATON

- fondateur de l'Académie (école)
- a écrit un traité (fondement de la démocratie : *La République*), dans ce texte : comment construite un état démocratique, qu'est-ce la politique devrait éduquer un homme politique ?
- MATQS importantes pour aider leur façon de voir les choses pour argumenter
- introduction du "monde des idées" : le monde réel et à côté le monde des idées (ce qu'on trouve sur Terre est parfait) (rectangle en tant que figure géométrique dans sa perfection totale), important en MATQs pour apporter l'abstraction : on énonce un théorème de façon générale : idée idéale de la figure.

- polyèdres réguliers : solides de platon

Section 2 Le rôle pédagogique des mathématiques

- La République : l'arithmétique : science générale présente dans toutes les sciences
- glaucon (élève de platon) : *pour en faire des applis à la guerre et pour facilité à l'a^me elle-même le passage du monde sensible à la vérité est à l'essence*. Intérêt de la science des nombres
- arithémtique signification :théorie des nombres

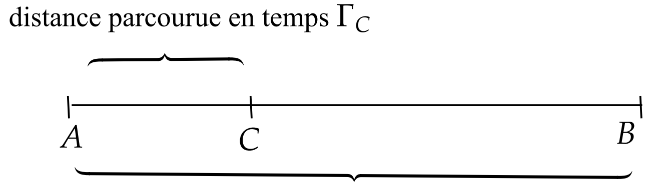
- La géométrie : attire l'âme vers la vérité, dév en elle cet esprit philosphique qui élève les choses vers le haut (étude des surfaces, dimension des profondeurs)
- l'astronomie (étude des solides , mvt de solides)

-⟶ encore ajd : deux façons de regarder les MATQS :

- MATQ existe déjà : on découvre un théroème ou on l'invente ? bcp convaincu que les THs existent déjà: les mathématiciens découvrent les mathématiques petit à petit : le platonisme
- autre point de vue : les mathématiciens inventent les théorèmes

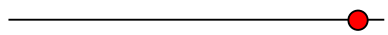
Section 3 ARISTOTE (384 - 322 av-JC)

- sa manière de critiquer les PRDXs de Zénon (élève de Platon)
- théorie de la démonstration
- début réflexion sur différents types d'axiomes (pour aristote et euclide : différences des axiomes selon la disicpline : 2 choses égales à une chose sont égales à la même chose sont égales entre elles; le principe du tiers exclu (la base du TH raisonnement par l'absurde)
- idée de l'infini : "continu" : ce qui est divisble en parties toujours divisibles, les deux catégories ne peuvent pas se mélanger (poiunt et segment/ instant)
- l 'infini potentiel : ensemble des nombres naturels. on peut concevoir l'infini. à chaque pas, on peut imaginer d'autres nombres qui dépassent ce nombre, qq chose en devenir
- l'inifni actuel : il existe vraiment
- REFUTATION des paradxoes 1 et 2 de Zénon : il construit un autre paradoxe : voir schéma : AC : distance parcourue en temps Γ_c, puisque AC fini, $\exists$ multiple de AC, nAC tq $nAC > AB$. Par conséquent, $n\Gamma\Delta$ est plus grand temps ∞ Γ, ce qui contredit le fait que Γ soit ∞ .
- Dans Achille et flèche (conséquence de la supposition erronée que le temps est composé d'instants: mêmes idées



Puisque AC fini, $\exists$ multiple de AC, nAC tq $n.\ AC > AB$. Par conséquent, $n\Gamma\Delta$ est plus grand temps ∞ Γ, ce qui contredit le fait que Γ soit ∞.

(a) Aristote, La Physique



Indivisibles (points) - atomes (les indivisibles de l'univers)
- impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles
- on peut toujours partager en segment
- le consécutif est ce entre qu'il n'y a aucun intermédiaire du même genre
- Il considère le temps comme continu, le temps ne peut se composer d'instants l'un après l'autre.
- Continu reste continu, indivisibles restent indivisibles après division

$\Longrightarrow$ ni la ligne, ni la surface, ni en général aucun des continus ne sera indivisible parce que la conséuence serait la division de l'indivisible.

Article X Euclide (315-255 av.J-C)

- biographie Euclide : on ne sait presque rien
- Les Eléments d'Euclide publié vers -300 entre la période de la grèce classique et de la grèce ellénatique
- PGC : 1° approche abstraite / PGE : approche concrète (sciences appliquées
- Centre culturel PGC : Athènes / PGE : Alexandrie, dev Théorie déductive
- témoignages (Pappus, Proclus) : Euclide a probablement enseigné à Alexandrie (y avait une espèce d'Université : grands savants enseignaient à des jeunes de tout l'empire), *Le Musée* : Bibliothèque à Alexandrie incendiée par les Romains).
- contribution à la physique, coniques
- pas de manuscrit oriignal des éléments

Section 1 Les Eléments

- info viennent traductions latines et arabes faites plusieurs années + tard
- grâce Paul Tannery : manuscrit original, édition française de Bernard Vitrac
- texte plus édité après la Bible

Section 2 L'œuvre

- toutes les mathématiques de Thalès, Platon, Pythagore
- les nouveautés : contenu mathématique même, démonstrations, énoncés, systémétisation des résultats, 13 livres (chapitres), organisations

Section 3 Livres :

- L1: géo. plane, démo TH de Pythagore (n'était pas encore démontré), cercle, figure du plan, géométrie élémentaire
- L2 : algèbre géométrique : collection de résultats, solution équation 1°,2° degré : conséquence pb incommensurable $\frac{d}{c} \neq \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$
- L3 : cercle
- L4 : polygones régulers
- L5 : TH rapports de grandeurs
- L6 : Figures semblables
- L7,8,9 : Théorie des nombres
- L10: quantité irrationnels
- L11 : pptés élémentaires figure ds espace
- L12 : Aires curvilignes
- L13 : polyèdres réguliers dans espace

Section 4 Structure générale de prop (d'après Proclus)

- énoncé / exposition / détermination / construction / démonstration / conclusion

Section 5 Définitions

1. Un point est ce dont il n'y a **aucune partie.** (dimension 0)
2. Une ligne est une longueur sans largeur. (dimension 1)
3. Les limites d'une ligne sont des points.
4. "Rayon de lumière tjrs égale à lui-même" $\approx$ pas de chgt

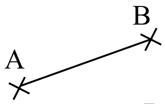
10. Angles perpendiculaires : même valeurs $\forall$ orientation
15. point, rayon, cercle
19. Figures rectilignes contiennent droites

→ Termes inclinaison, partie, longueur, largeur : pas définis
↳ Hilbert, XX désigne ces termes "**primitifs**" : on doit s'appuyer.

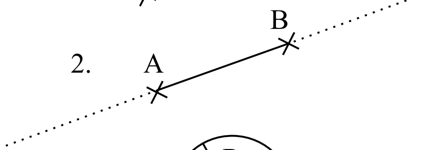
Remarque : Plusieurs définitions pour un même terme (@ $1 \Leftrightarrow 3$: intéressant pour le lecteur)

23. $//$ concerne l'infini. (la 1° fois). "droites" (considère plutôt un segment) parallèles étant dans même plan, indéfiniment prolongées de part & d'autre ne se rencontrent pas.

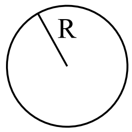
Section 6 Demandes ($\approx$ Postulats, axiomes)

1. 

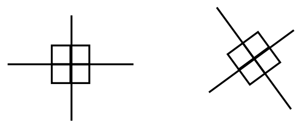
$\exists$ segment qui joigne 2 points quelconque

2. 

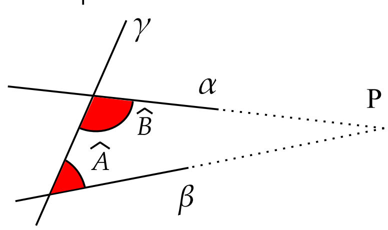
prolongation droite.

3. 

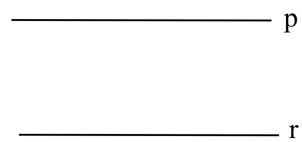
point + rayon $\Rightarrow$ cercle

4. 

toujours égaux

5. 

$\Leftrightarrow$



$\exists!$ s, r $\parallel s,\ s\ passe\ par\ p$

- Négation du 5° postulat $\Longrightarrow$ géométrie non-euclidienne
- 5° postulat indépendant du 1,2,3,4
$\rightarrow$ Dès l'Antiquité, mathématiciens ont cherché proposition équivalentes à cette proposition.

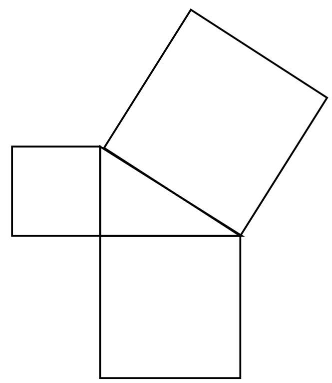
- Euclide fait la différence entre axiome et notions communes (pour toutes sciences), les postulats considérés vrais sur lesquels il fondait pour la géométrie du plan
- Livre 1 : théorie mtq : système déductif
  - définitions (23)
  - demandes ou postulats (5) (surtout droite et cercle), construction R&C pour 4 premiers postulat de l'unicité de la parallèle (5° postulat)
  - notions communes (évident en terme algébrique) mais pas ça esprit pour Eulicde : propositions vriaes dans toutes les sciences (@ $a = c$ et $b = c \quad \Leftrightarrow a = b$)
  (concernent la géométrie, superposer des figures : égalité des figures : surtout égalité des Aires)
- @ Cantor (connu pour concept de l'infini) : ep : difficulté à se positionner par rapport à la 8° proposition : *Le tout est plus grand que la partie.*
  $\rightarrow 1, 2, 3, ... \ : \mathbb{N} \qquad \mathbb{N} \leftrightarrow 2\mathbb{N}$
  $\rightarrow 2, 4, 6, ... \ : 2\mathbb{N} \qquad n \leftrightarrow 2n$
  $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(2\mathbb{N}) = \aleph_0$

  $\hookrightarrow 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$: on y voit une contradiction.

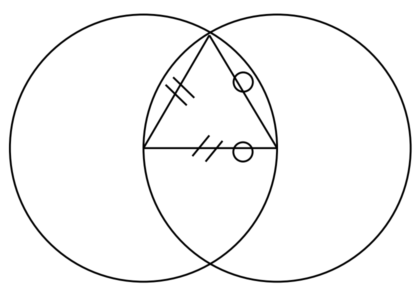
Section 7 Propositions d'Euclide, Livre I

(cf : pdf moodle)

- Prop 47 : énoncé du théorème de Pythagore et Prop 48 : inverse TH Pythagore

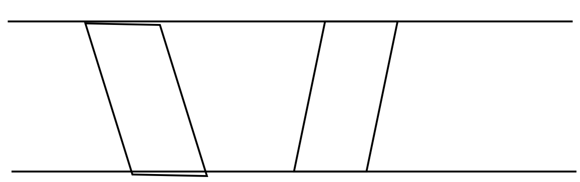


- P1 : construction triangle équilatéral (exercice déductif)
  Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.
  → il utilise la demande 3 : à chaque point du plan et rayon donné : on peut toujours construire un cercle

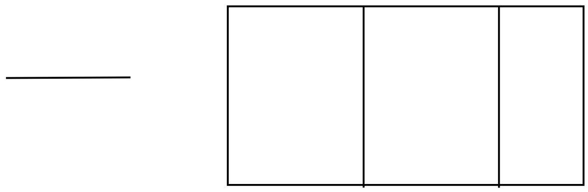


→ BCD est équilatéral , DCE centre B : définition 15 : $BC = BD$
DBE centre C : définition 15 : $CD = BC$

- parallélogrammes utiles pour démo du TH de Pythagore

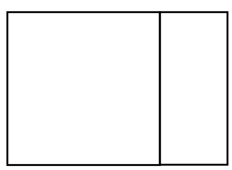


- Livre 2, prop 1



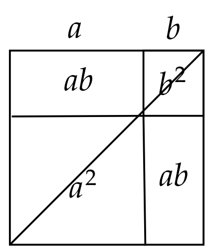
- $BG \times BC =$ Aire($BGBC$) = Aire(BDKG) + Aire (DELK) + Aire (ECHL)
  - il le démontre , ie : $(a+b+c+\ \cdots\ )m = am + bm + cm + \ \cdots$
  - pour ça : livre 2 s'appelle algèbre géométrique mais encore loin de l'algèbre du début de Viet (XVII)
  - pédagoqieument : intéressant de donner des repères géométriques plutôt que de limiter l'esneignement à apprendre des formules algébriques à apprendre par cœur

- Prop 2 : *si une ligne droite est coupée au hasard, les rectangles contenus par la droite entière et chacun des segments sont égaux au carré décrit sur la droite entière.*



- $(a+b)a + (a+b)b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

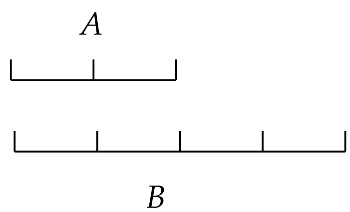
- Prop 4: *si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments.*



$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a+b)(a+b)\end{aligned}$$

Section 8 Euclide, les Eléments, Définitions

- 1° et 2° définition :



$A = mC$

$B = nC$

- la raison est un rapport entre des grandeurs
- 4° def : n'est pas dans Vitrac
- 5° def : fourmulation particulière du principe d'Archimède
  Avec deux grandeurs différentes : $\exists$ toujours un multiple qui dit que la plus petite dépasse la plus grande.
- 6° def : *des grandeurs sont dites ê ds le même rapport [...]*
  Notation moderne : $\frac{A}{B}$ $\quad \frac{C}{D}$: $\frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{6}$, $n2 > m3 \Rightarrow n4 > m6$

si $(1)\ :\ nA > mB \Rightarrow nC > mD \quad (2)\ = \quad (3)\ <$

Section 9 Euclide, Les nombres

- Livre 7,8,9 : Livres d'arithmétiques : à propos des nombres (idée géométrique : besoin de les représenter géométriquement)
- un nombre est un segment d'une certaine longueur, de même pour les opérations

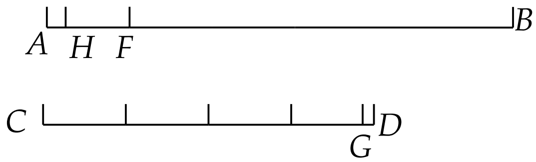
(a) Définitions des nombres

- le nombre 1 n'est pas un nombre pour lui : c'est *l'unité.* (ressemble à une classe d'équivalence)
- Un nombre est la multitude d'unités.
- Un nombre est une partie d'unnombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand. (y-a-t-il un pont entre grandeur et nombres ? oui entre commensurabilté et rapport nombres entiers)
- Les nombres ne sont que les entiers. (pas de négatifs)
- définition nombre pair, impair, pas divisible en 2, nombre premier, nombres pairement-impair (oubli de cette définition : pas utilisé ajd) (celui qui est mesuré par un nombre impair selon un nombre pair) : 8 : pairement-pair car 4/8
- nombre parfait : si égal à la somme de ses parties : 6 , 2/6, 3/6, 1/6

(b) Proposition 1), LIVRE VII

- deux nombres ont une mesure commune
- deux nombres inégaux , si on arrive à un moment où le reste est l'unité alors les nombres n'ont pas de diviseurs communs. (reste ici AH)
  Exemple : $(5, 6) \qquad (48, 5)$
  $6 = 5 \times 1 + 1 \qquad 48 = 5 \times 9 + 4,\ \ 5 = 4 \times 1 + 1$

-

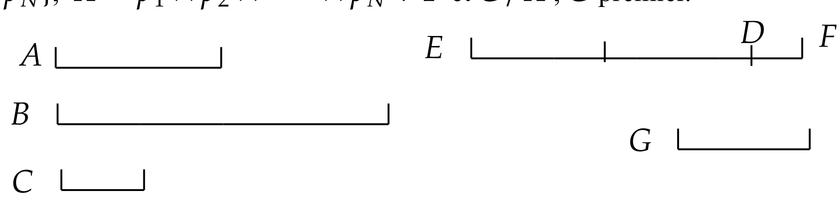


$CD < AB$
$AF < CD$
$GD < AF$
$AH < GD$

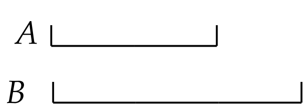
- Notation moderne de cela : Algorithme Euclidien
  Exemple : (67,24) on a bien le reste $= 1$
  $\text{pgcd}(66, 24) = 6$ (voir AE)

- Nombres premiers sont infinis, chaque nombre qui n'est pas premier est composé par des nombres premiers $\left(@\, 20 = 2^2 \times 5\right)$, les Pyhtgaoriciens avaient déjà découvert les nombres premiers.
  ↪ On sait que les nombres entiers sont infinis mais peut-être on peut les écrire avec un nombre fini de nombres premiers : réponse à travers la proposition : les nombres premiers sont infinis.
  ↪ DEMO par l'absurde, nous on imagine $\{p_1, \ \dots, p_N\}$:
  démontrer qu'il y a un autre nombre premier p_{N+1} qui n'est pas dedans.
  Soit EF est premier soit il ne l'est pas alors il faut un nombre premier qui le mesure par définition.
  Soit le nombre premier G, G mesure EF. $G \ \neq A, B, C$. On a trouvé un nombre premier qui n'est pas dans cette liste.

- DEMO moderne : On suppose par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombre premiers $\{p_1, \ \dots, p_N\}$, $X = p_1 \times p_2 \times \ \cdots \ \times p_N + 1$ et G / X, G premier.

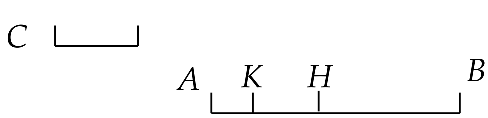


- Principe d'Archimède



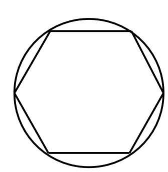
$nA > B$

- Proposition d'Euclide



$AH > C$
$AK < C$

S : aire du cercle



P_n
$S - P_n <$

↪ Début de concept de limite

(c) Propostions du livre X

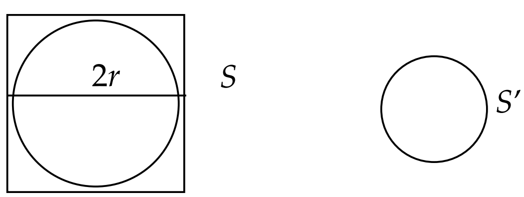
- prop 5/6 : soit 2 grandeurs commensurables, si $\exists\, C,\ A = nC$ & $B = mC.\ \dfrac{A}{B} = \dfrac{n}{m}$

Section 10 Y-a-t-il eu un miracle grec ?

- on définit faire des mathématiques : on connait l'abstraction, généralisation d'énoncés, un triangle rectangle, un cercle , idée de démonstration aussi (déduction rigoureuse, passages déductifs)
- *Ce qui marque l'originalité des Grecs réside en ceci: on passe de la connaissance des faits à la recherche des causes, de la maitrise de certains savoirs à la démonstration rigoureuse de leur validité. (valable dans tous les domaines du savoir).*
- passage d'une science descriptive (babyloniens : calcul mvt des planètes), Grecs : recherchent les causes
- les sciences se fondent sur les mathématiques (pr les mtqs : justification : démonstration , construction de théorie déductive)
- lien entre la science et le degré du niveau de démocratie; dans didacture : arrêt de développement de la culture démocratique

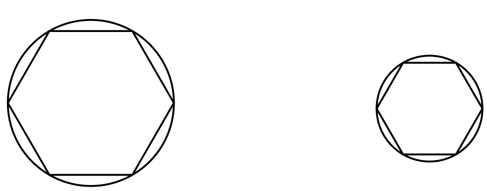
Section 11 Méthode d'exhaustion d'Euclide (L.10-12)

- Prop 2 : *Les cercles sont l'un relativement à 'autre comme les carrés sur leurs diamètres*.
- Euclide, mt1s interssés par les rapports et non la valeur des aires



$\dfrac{S}{(2r)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{S}{S'}$

- Approximation de π donnée par Archimède, on savait l'existence de cette constante chez les Egyptiens, Babyloniens, Euclide ne s'intéresse pas directement à cette constante
- Prop 1, Livre 10 : idem que la dernière fois avec le segment ($AK < C$)
- Prop : 2 polygones réguliers sont semblables dans des cercles différents s'ils ont le même nombre de côtés



- PROP 1 : $\dfrac{\text{Aire}(P_6)}{\text{Aire}(P_6')} = \dfrac{d^2}{d'^2}$, $\text{Aire}(P_6) :\ \text{Aire}(P_6') = d^2 : d'^2$, d, d' : diamètres de S et

S'

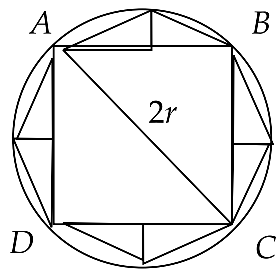
Méthode d'Euclide : $\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2}$

- N'importe quel Σ est une grandeur donnée : on peut toujours trouver un n tq $S - P_n < \Sigma$.

$S - P_4$

$S - P_8$

$S - P_{16}$



$S - P_4 = S - 2r^2 < \frac{S}{2}$ PROP 1, Liv

$2Lr^2 = 2AB^2$

S

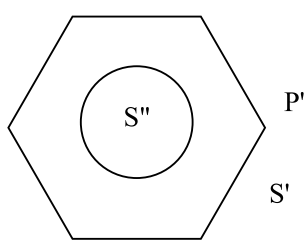
$\hookrightarrow$ Aire du carré circonscrit à $S \Rightarrow 4r^2 > S$

$\rightarrow$ Aire($arc(ACB)$-Aire triangle (ACB) < Σ < $\frac{1}{2}$Aire arc(ACB)

$\forall C,\ P_N\ :\ S - P_N < C$, Prop 1, Livre 12 : $P_n \sim P_{n'}$: $P : P_{n'} = d^2 : d'^2$

PROP 2, livvre 12 , $S : S' = d^2 : d'^2$ ($\star$)

DEMO par l'absurde : L'expression est fausse. Il existe S'' tq $\boxed{S : S'' = d^2 : d'^2}$ ($\star\star$) avec
$S' > S''$.
$C = S' - S'' > 0$.
Pour n'importe quelle grandeur fixée, $\exists\, P'$ inscrit dans S' tq $S' - P' < C$. (partie 1)
$\Rightarrow S' - P' < S' - S'' \Rightarrow P' < S''$
Ainsi : $\boxed{S'' < P' < S'}$



Avec la PROP 1, livre 12, $P : P' = d^2 : d'^2$
$P : P' = S : S''$ donc $\boxed{P : S = P' : S''}$, puis $P < S \Rightarrow \boxed{P' < S''}$. Ce qui est absurde.

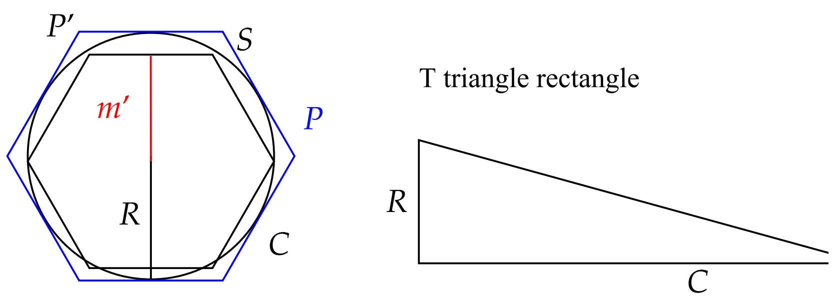
Concept de limites géométriques : approximer aire d'un cercle via un polygône. (méthode d'exaustion), grâce à la méthode d'exaustion : cela lui permet de démontrer la prop 2, livre 12.

Section 12 Archimède, la mesure du cercle

- Matc1, physicien, ppes fondamentaux hydrostatiques, hydrauliques, considère que les mtqs peuvent être utilisées
- PROP 1 : *L'aire d'un cercle de circonférence* c *et rayon* R *est égale à l'aire d'un triangle rectangle de côtés* c *et* R.

C: circonférence de S

R: rayon de S



$S = T$

- PROP 1 : *Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des cotés de l'angle droite est égal au rayon du cercle et la base égale au périmètre du cercle.*
- DEMO via $\boxed{\text{M d'exaustion}}$:

  1) Suppose $C > T$ par l'absurde

  2) $C < T$ par l'absurde

  $\Rightarrow \; C = T$ et alors on considère $A = C - T > 0$.

  P' inscrit dans le cercle tq $C - P' < A$.

  D'où $\cancel{C} - P' < \cancel{C} - T \;\Rightarrow P' > T$.

  Or $Aire(P') = \dfrac{p'.m'}{2}$, ainsi : $P' > T \;\Leftrightarrow\; \dfrac{p'.m'}{\cancel{2}} > \dfrac{c.R}{\cancel{2}}$: ABSURDE mais

  $p'.m' < c.R$.

  Puis $Aire\ P = \dfrac{p \times R}{2}$, et $P - C < A \;=\; T - C \;\Rightarrow P < T$

  $\dfrac{p \times \cancel{R}}{\cancel{2}} < \dfrac{c\cancel{R}}{\cancel{2}} \quad \Rightarrow p < c$.

- PROP 3 : *Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segme,t compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre.*

  $\hookrightarrow 3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$ (bonne approximation avec $\boxed{\text{M d'exaustion}}$ quand P_{96} .)

  (il y a une série de polygones circonscrits et inscrits)

Section 13 Archimède, les nombres et l'infini

(a) Logistique / Arithmétique

- Définitions de Logistique et Arithmétique
- idées des nombres : nombre de l'arithétmqiue (entiers , de la théorie des nombres) et la

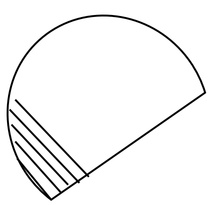
logistique : numération utlisé pour faire des calculs en base 10, numération assez lourde

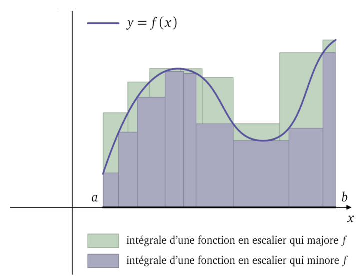
- système de numération non positionnel, : $I, \ \Gamma, \ \Delta, H, X, M.$ (1,5,10,100,1000,10000) (10^8 : myriade de myriade: plus grand nombre chez les grecs)
- Tablette de Salamine (V-IV s. av-JC)
- Monnaies athéniennes (pas un système unique) @ 1 drachme : 4,36 gr car 1 drachme est une monnaie d'or pesant 4,36 gr.
- Numération alphabétique
- Archimède invente une méthode pour écrire des nombres plus grands :

  $\hookrightarrow$ voir sur la feuille comment il élargit la numération avec les bases en 10^8
- Archimède utilise ce type de formule : $a^m . a^n = a^{m+n}$ et $a^{mn} = \left(a^m\right)^n$

(b) Lettre d'Archimède pour Erathostène : Méthode Mécanique

- méthode " d'intégration", supportée par théorème de mécanique, ppe de levier d'Archimède
- document retrouvé en 1906 par hasard dans une bibliothéque
- Il explique la méthode dans un cas pratique : trouver les secteurs d'une parabole par rapprot à l'aire du triangle inscrit



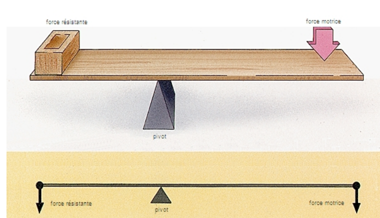


$f(x)$

- idée d'appliquer les mathématiques à d'autres sciences
- ppe mécanique : appliqué pour résoudre un problème mathématique dans ce cas là : assez RARE !

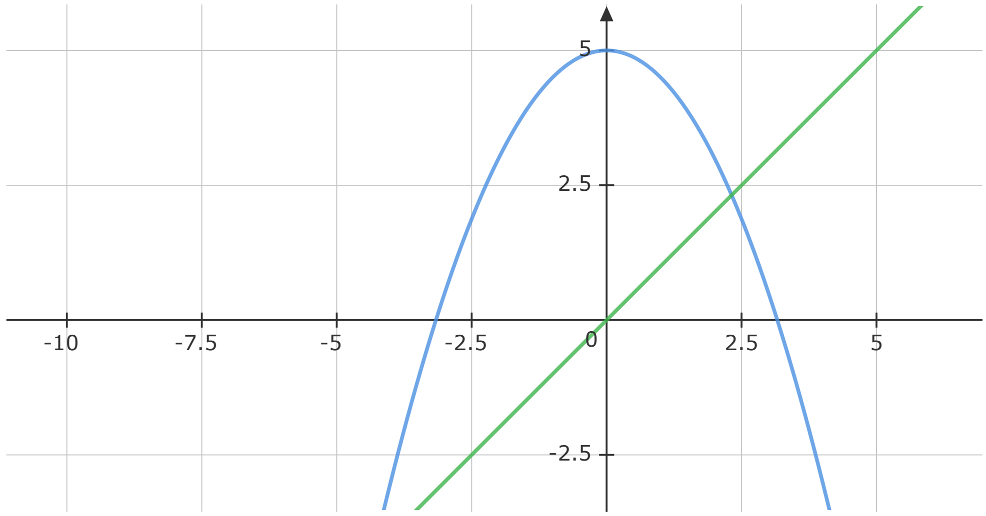
Explication de la méthode :

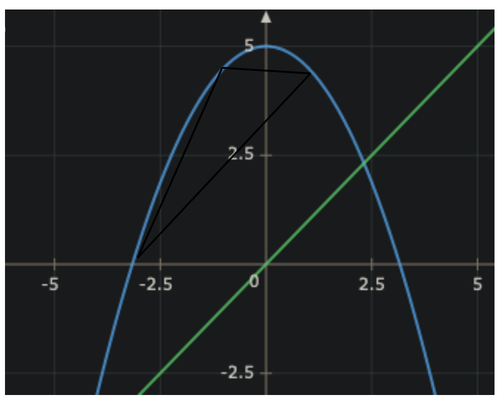
- Principe de levier



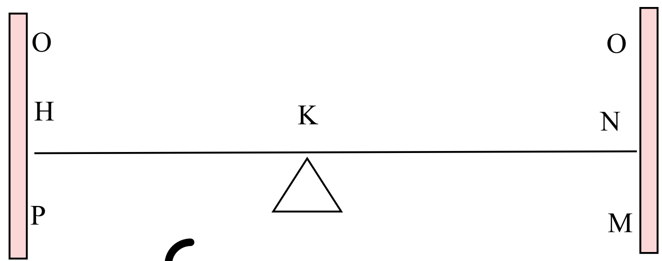
$$l_1 = l_2$$
$$m_1 = m_2$$
$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

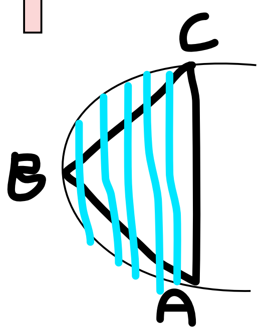
- Segment de parabole et triangle inscrit





- VOIR POLY avec les relations
- On peut interprété la relation $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{HK}{KN} \Leftrightarrow OM \times KN = HK \times OP$





- Archimède connait la relation du centre de gravité dans un triangle : $RK = \frac{1}{3}CK.$
- A. a découvert relation entre aire du segment de parabole et aire du triangle inscrit de façon heuritsituqe gr^âce aux résultats mécaniques sur le levier
- a démontré grâce à la méthode d'exhaustion (pas considéré comme rigoureuse à l'époque , seulement égalités des grandeurs valables)

Article XI Diophante

- Al-gèbre : al-djabr (الجبر) mot arabe, n'existe pas encore le mot en Grèce
- Chez Euclide, pas trop l'idée des nombres (on a les multiples d'unités) mais chez Diophante: idées assez novatrices : énoncés très généraux.
  Trouver deux nombres dont la domme est le produit de facteur de nombres donnés.
- $ax + by + cz + \cdots = 0$: équation diophantienne
- Trouvait une solution pour un cas particulier : pas son but de trouver toutes les solutions possibles malgré l'énoncé très général.
- $x^2 + y^2 = z^2$: vérifier par plusieurs triplets, problèmes toujours ENONCES en MOTS : attendre le XVII° s. Fermat $\rightarrow$ $x^n + y^n = z^n,\ n \geq 2.$? non
- Diophante : un des premiers a utilisé des symboles, début de l'algèbre rhétorique : mixte entre symbole et lettres
- D: introduction de l'aithme : l'inconnue x .
  $\begin{cases} x + y = 20 \\ x \times y = 96 \end{cases}$, Diophante veut réduire ce pb à une seule inconnue

Dio : $\begin{cases} Excédent\ :\ 10 + x \\ 10 - x \end{cases}$ où $10 + x + 10 - x = 20$

D'où $100 - x^2 = 96 \quad \Rightarrow x = 2.$ (ce ne sont pas des solutions générales)

- QUESTIONS : sur méthode d'exhaustion, mq à travers un exemple, discuter la méthode de l'exhaustion par rapport à la mécanique

Article XII A propos de l'infini

Section 1 Aristote

Considère une ligne comme une infinité de points

De Diophante (250) à Galillée (fin XVI°s.) : grand écart

Période Diophante jusque déb XV°s. : période inclue le MA: où les mtqs ont avancé lentement, les études de cette période, période où l'églice catholique a un pouvoir énorme. Civilisation arabe a donné des contributions à toutes les sciences (bio, astronomie, physique, mtq) : les arabes ont découvert l'algèbre : manipulation de coeff algébrique; ont étudié les ouvrages de la Grèce Ancienne (Archimède, Euclide ...).

L'Europe occdientale marquée par le pouvoir de l'église n'a pas bcp avacné : développé en ingénierie, médecine mais peu d'avancées en mtqs. L'Eglise catholique, l'enseignement passait par l'église, les mtqs : essentiellment calculs pratiques, géométries élémentaires. EC concentrée sur la théologie ou sinon aux écrits philosophiques d'aristote mais on "a perdu les traces" (biblio d'alexandrie brûlée par les Romains).
La plupart des sources ont été perdues et plus d'intérêt pour ces mtqs, ce type d'abstraction. Un moment de tournant, de changement quand il y a eu des (1202-1210) échanges commerciaux avec le monde arabe : @ un mtq1 de Pise a fait du commerce avec des arabes et a amené en Europe les chiffres arabes. Plus simple de faire des calculs : *Liber Abacci (* écrit par Fibonacci en 1202) (outils des arabes pr faire des calculs).
Grâce au commerce: on a eu la conscience en Europe qu'un monde mtq a été perdu qui a été commenté et traduit ds le monde arabe.
Début de la Renaissance : ouverture vers le monde arabe, chinois, l'Orient de l'Est a été découvert. A cette époque : explosion de traduction du grec, latin et après ds les différentes langues nationales, Aristote, Euclide, Archimède traduit au XV-XVI traduits en italiens, français, anglais... et début de l'imprimerie aussi vers le XV°s. : les livres ne sont plus seulement confiés aux Jésuites, à l'Eglise où qq va les recopier. (même si imprimerie très chère encore à l'époque mais progrès énorme pour la diffusion de la culture humaniste).
Au début ces traductions mtqs n'étaient pas trop correctes d'un pt de vue scientifique car les traducteurs étaient des humanistes : qq soucis : Rq pas assez de COss mtq pr traduire ces ouvrages.

Galilée : période de Renaissance : a fondé, construit ce que l'on appelle la *première révolution scientifique . Galillée et Descartes* ont posé cette idée : fonder le savoir scitnfiqiue sur une méthode : méthode scientifique. A l'époque écrits religieux, la théologie, le fait que les penseurs ont proposé une méthode scientifique est très nouveau : Méthode repose sur l'idée comme disait Gal que l'univers est écrit en langage mtq; avec les symbolismes mtqs : on peut écrire des expressions qui étaient à la base des phénomènes physiques : @ chute d'un objet : suit une loi, exprimé en terme

mtq, proposait de faire des expériences, un peu différentes : voir si ces lois mtqs continuaient à être les bonnes lois pour ce type d'expériences. Sinon si pas bonne loi : refaire les expériences et vérifier les lois. @ loi de la mécanique
grandeurs physiques n'étaient pas encore introduites : masse, vitesse, temps, distance, poids, force... : ont été mises en places pr fondement de la mécanique, les expressions mtqs qui liaient toutes ces grandeurs sont les lois qu'on connait encore ajd : @ la loi d'un mvt uniformément lié, principe d'inertie.

Idées révolutionnaires de Galillée par rapport à la conception de l'infini. (a repris un peu la conception d'Aristote): différence entre infini potentiel (@ $\mathbb{N}$)et actuel ($\exists$ effectivement)
Aristote : un *continu* : on peut diviser ce segment une infinité de points : ce que j'obtiens sera toujours un segment : idée d'infini en puissance. DM mise en place d'un système topologique de la droite.

Galilée : prof à l'univ de Padoue (1604) était un scientifique humaniste, à cette époque pas de distinction nette entre les disciplines. (fabriquait lui même des lunettes astronomiques aux Pays-Bas). A remarqué que la Terre ne pouvait pas être le centre de l'unviers : s'oppose au géocentrise et supporte les théories de Copernicus. Déclaré hérétique en 1616 : interdit d'enseigner ses idées; a perdu son poste d'esneignement en mtq. A publié un livre : dialogue sur 2 grds systèmes du monde : héliocentrisme contre les idées de l'Eglise. 1633 : tribunal d'inquisition, a échappé à la prison en reniant ses idées.

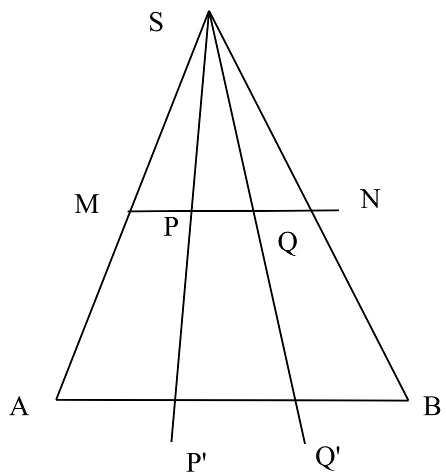
XIX°s : Cantor
Dans sa définition d'ens infinis : un ens A est infini s'il existe une bijection entre A et B, où $B \subsetneq A$.
$\mathbb{N}$ est infini. $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Livre : *Dialogue sur les sciences nouvelles (1638)* : 3-4 personnages (Salviati, Simplicio, Sagredo)

Paradoxe de Galilée : est-ce que la qtté des nombres entiers est plus grde que celle de leur carré ? idée de bijection, à l'inifni la notion de plus grand, plus petit ou égal n'est pas applicable. En effet, i lfaurda attendre Cantor pour introduire la cardinalité.

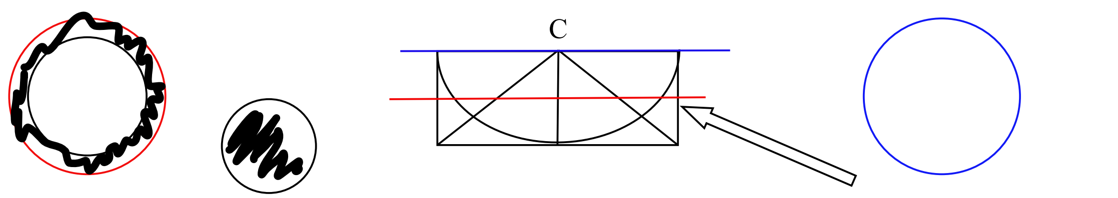
$c(\mathbb{N}) = \aleph_0$, soit un ens $A,\ A \leftrightarrow \mathbb{N},\ c(\mathbb{N}) = c(A) = \aleph_0$.

Un autre paradoxe de Galilée qui implique le *continu :* $MN < AB$.
Les points de MN st moins nbrx que les pts de AB mais bijection entre MN et AB . Absurde.



En effet : $c(MN) = c(AB) = c(\mathbb{R}) \neq c(\mathbb{N})$.

Un autre paradoxe de l'infini chez Galillée



- imaginer figure tridimensionnel : prendre un plan qq : coupe le bol : forme une couronne circulaire
- ABSURDE de trouver la circonférence est un point (aire circonférence = 0 en réalité :)

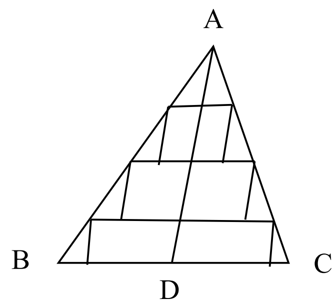
exposé : 28/03 et 4/04

Section 2 Simon Stevin (1548-1620)

Exemple particulier de la méthode d'exaustion dans le cadre de la mécanique bien après l'époque d'Archimède. Md'E dev ds période de la grèce ancienne autour de -330: démo de la prop : rapports entre aires de deux cercles = rapport diamètres aux carrés.
Les méthodes euclidiennes : fondement des méthodes matqs .
Simon Stevin : *livre La Disme* (1585), néerlandais, comptable, capable avec ce livre de diffuser dans le nord de l'europe le système décimal. Un an après : publié et traduit en français.
Contribution à la mécanique, mtq pratique (@ cadre construction portuaire et navale).

Définit le centre de gravité, veut dmq ds le cadre d'un triangle : le centre de gravité tombe sur le segment de la "médiane".

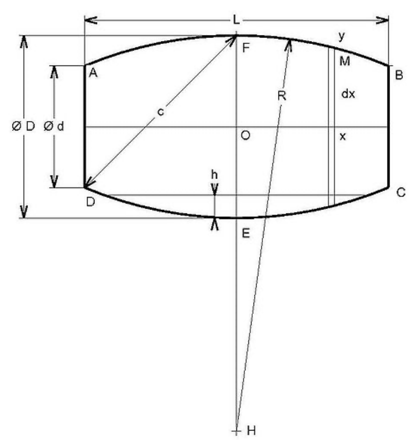
Donnée du pb :



le requis signifie ce que l'on veut démontrer. Construction de 3 parallélogrammes, par la méthode d'exhaustion : on peut construire une infinté de parallélogrammes.
Chaque parallélogramme par symétrie aura le centre de gravité sur la droite (AD).

Section 3 Johannes Kepler (1571-1630)

- contribution aux mtqs, ep à la théorie des infinitésimaux, astronome : a étudié hypo héliocentrique de Copernicus, a découvert les lois de Kepler
- 1615, *Stereometria doliorum vinarorum,* sur les unités de mesures usuelles dans le commerce.
- mesuration de tonneaux de vin avec une tige graduée = velte, lire la mesure sans calcul : comment une logneur peut mesurer un volume ? graduation régulière et tige adaptée pour la forme des tonneaux

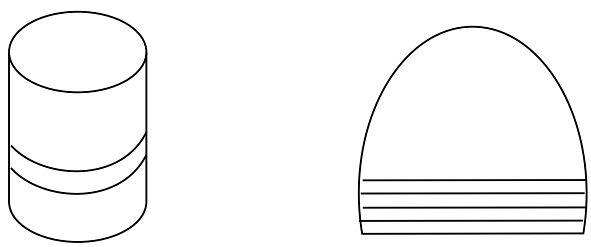
• c: longueur de la tige • FF approchée de Kepler : $V = \frac{\pi L}{12}\left(D^2 + Dd + d\right.$ • La solution pour un cylindre : parmi tous les culindres uqi ont la même diagonale c, celui qui a la contient la contenance maximaile est le culindre dont ler apport entre la hauteru et le diamètre est $\sqrt{2}$.	

Article XIII Les problèmes du calcul infinitésimal

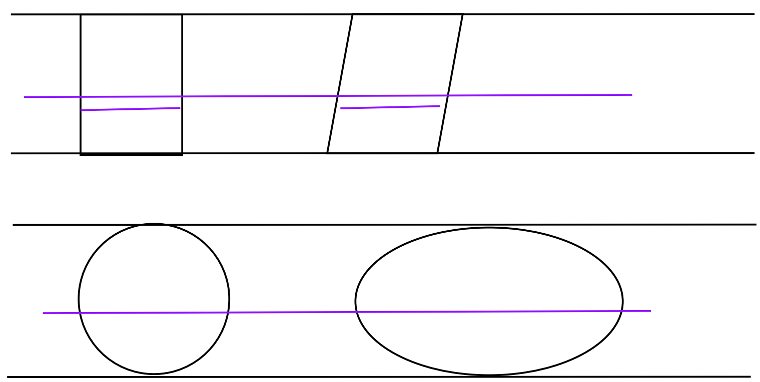
Analyse, intégration, dérivation, théorème fondamental de l'analyse, quadrature (calcul d'aire ou encadrement en comparant avec des aires rectilignes), mouvements, (vitesse, distance), tangentes, optimisation, utilisation de l'infini, développement en parallèle au XVII l'idée de fonctions, début avec Descartes : une courbe peut être représentée sur des axes; exprimer une variable en fonction d'une autre variable. Le nom *fonction* donné par Leibniz.

Section 1 Bonaventura Cavalieri

- élève d'un élève (Castelli) de galilée, jésuite, poste temporaire à bologne, écrit son livre *Géométrie des indivisibles*. Galillée était opposé à travailler avec l'infini. (voir paradoxes liés à une mauavise interprétation de l'infini). Galillée assez critique par rapport aux méthodes de Cavalieri.
- Il conqidère *toutes les lignes d'une figure plane* ou *tous les plans d'un solide*.



toutes les lignes
de cette figure

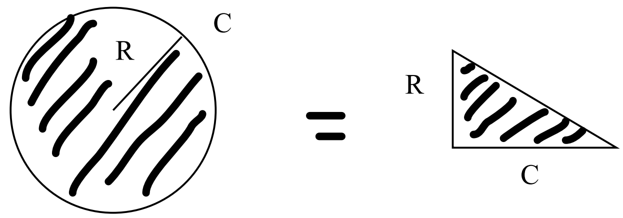


- dans la 3° figure : il conclut que les figures sont de mêmes aires.

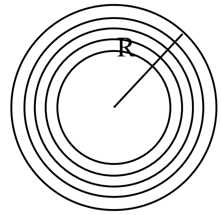
- trouver l'aire de l'ellipse grâce en connaissant l'aire du cercle : on dilate le cercle d'un rapport $\frac{b}{a}$.
- On obtient $A_{\text{ellipse}} = \pi . ab$

Section 2 Antoine Arnauld ($\approx$ 1650)

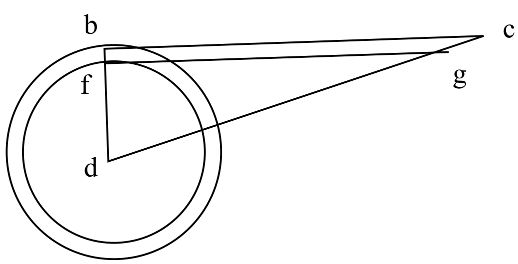
- religieux, français, exclu de la Sorbonne, Janséniste (contre les Jésuites), fait partie de l'école de Port Royale, a étudié les invdivisibles courbes en partant de la méthode de Cavalieri en essayant de rendre la méthode plus rigoureuse.
- *Nouveaux éléments de la géométrie,* 1667.
- cherche à améliorer la méthode des indivisibles
- Il part d'un pb connu :



- cas connu depuis l'antiquité (archimède) , arnaud va dmq plus rigoureusement
- Ppe de Cavalieri : *Deux surfaces sont estimées égales, qd l'une et l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales, soit que chacune de celle d'une somme soit égale à chacune de celles de l'autre somme*.



- Cinquième Théorème



Il arrive à démontrer que $bc =$ circonférence cercle de rayon bd.
On a que $bd : df = \text{circonf }(bd) : \text{circonf }(df)$. (ppté de la circonférence).
Comme $\triangle_{bcd} \sim \triangle_{fgd}$, $bd : df = bc : fg$

$$\Rightarrow \text{circonf }(bd) : bc = \text{circonf }(df) : fg$$
$$\Rightarrow \frac{\text{circonf }(bc)}{} = \frac{\text{circonf }(df)}{fg} df$$

Méthode pour trouver l'aire des figures (pb d'intégration), trouver la tangente en une courbe grpace au calcul infinitésimal (pb de dérivation), les pbs sont à l'inverse de l'autre, à partir des grecs on connaissait les pbs mais on ne savait pas qu'il étaient liés. La méthode des inidivisbles va résoudre en partie

Section 3 Pierre de Fermat (1601-1665)

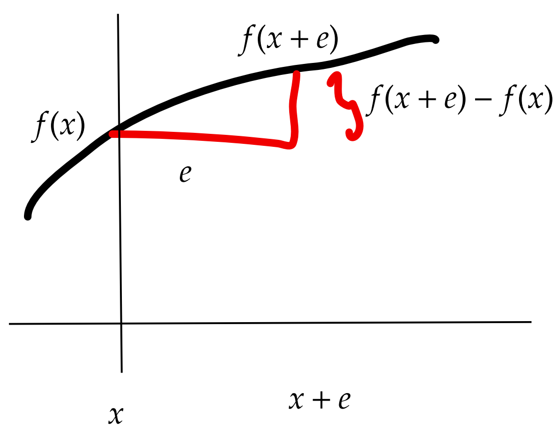
- mathématicien amateur (prof de maths n $\nexists$), avocat, né à Toulouse (avt académie, rente ou pape pour être financé; pas trop de journaux spécifiiques aux mtqs : dc la circulaitun du savoi rmtq plus diificle : bcp de lettres entre les mathématiciens, peu nombreux)
- grd lecteur de classique (ep l'Arithmétique de Diophante : fondateure de la théorie des nombres)
- Petit th de Fermat : $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ où a et p sont pee.

Fermat et le calcul : méthode valable pour les polynômes

@ $f(X) = X + 3X^2$, $\dfrac{f(X+e) - f(X)}{e}$,

On incrémente X : $X \to X + e$. $(X+e) + 3(X+e)^2 - \left(X + 3X^2\right) = X + e + 3X^2 + 3e^2 + 6eX - X - 3X^2$

Soit $e = 0$, $1 + 6X$



Une méthode pour l'intégration :

$nd = OB,$

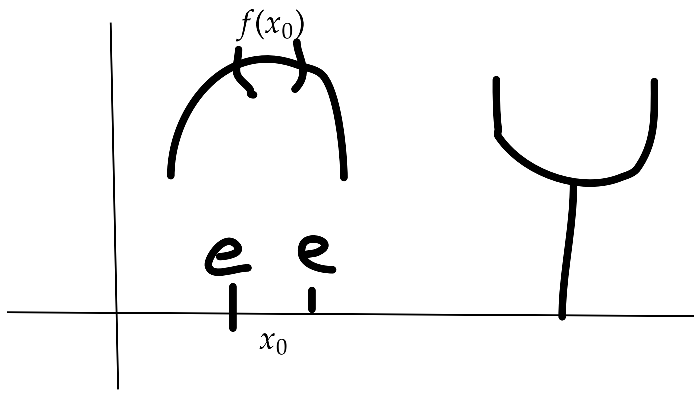
$$
\begin{aligned}
d\left(d^2\right) + d(2d)^2 + d(3d)^2 + \cdots + d(nd)^2 &= d^3\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{OB^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{6} + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{6}\right) \\
&= \frac{OB^3}{3} + \frac{OB^3}{2n} + \frac{OB^3}{6n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{\left(n^2 + n\right)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^3}{6} + \frac{n^2}{6} + \frac{2n^2}{6} + \frac{n}{6}
\end{aligned}
$$

Méthode d'adégalisation (1629)

$$\frac{f(x_0+e)-f(x_0)}{e} \xrightarrow[e\to 0]{} f'(x_0)$$

$f(x+e) =_{ad} f(x)$ adégaliser



$$f(x_0+e) \sim f(x_0)$$

Exemple :

AE $\times EC$ max ?

AC $= b$

$a =$ AE

EC $= b - a$

A E C

AE $\times EC = a(b-a) = ab - a^2$

$f(a) = ab - a^2$

$f(a+e) = (a+e)b - (a+e)^2$

$ab - a^2 = ab + eb - a^2 - e^2 - 2ae$

$b - 2a - e = 0$

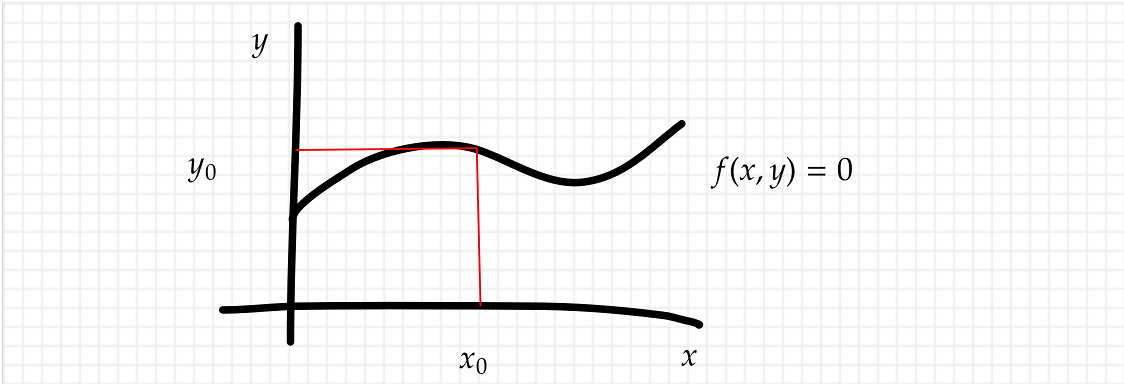
$\boxed{a = \frac{b}{2}}$ avec $e = 0$

Section 4 René Descartes (1596-1650)

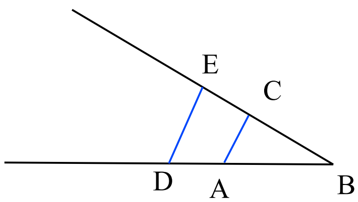
- croit en la théorie de l'éther, protagoniste de la révolution scientifique du XVII
- sensibilité en philosphie ressentie ds ouvrgae en mtq
- étude chez jésuites, voyage en europe (hollande : rencontre de scientifique)
- publication du *discours de la méthode* (annexe à son livre sur la géométrie)
- coordo cartésiennes introduits ds les traités : un peu différent que la visualisation moderne

Discours de la Méthode : "Le premier était de de Ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne le connusse évidemment être telle, cad d'éviter soigneusement de la précipation et la prévention [...], le second diviser les problèmes en petites parcelles, [...], le troisième : commencer par les objets les plus aisés, le dernier de un dénombrements si entiers des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre."

- essayer de donner une interprétation géométrique à nos opérations algébriques élémentaires (multiplication, division,
- idée de descartes : se référer à un plan construit par 2 axes (légérement différent chez Descartes), considérer une relation entre ses coordonnées



- devient la géométrie analytique
- interpréter 3×2 : idée rectangle de longueur 3 et de largeur 2.



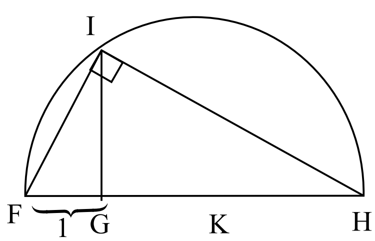
BD $\times$ BC $=$ BE

ED // AC; AB $= 1$

BD:AB=EB:BC

$$\text{EB}=\frac{BC \times BD}{AB} = BC \times BD$$

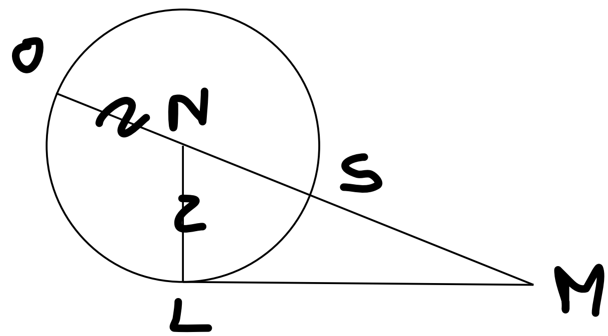
- Extraction de racine carré



$$IG^2 = FG \times GH$$
$$IG^2 = GH$$

- Problème : $z^2 = az + b^2 \quad \left(z^2 - az - b^2 = 0 \right)$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$



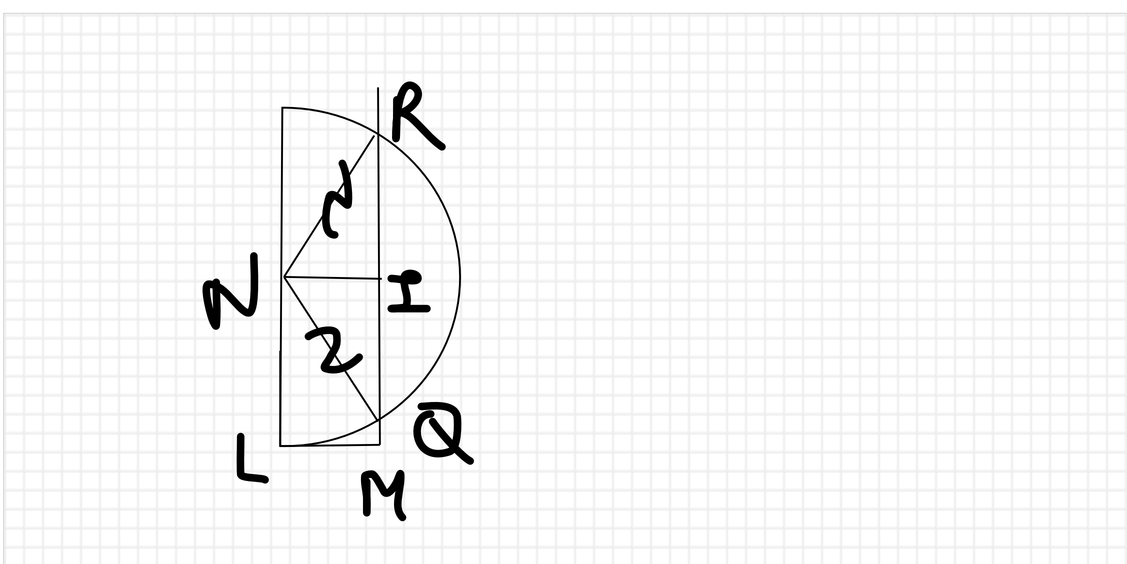
- OM $= z$, LM $= b$, LN $= \dfrac{a}{2}$

  OM=ON+NM=NL+$\sqrt{NL^2 + LM^2} = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + b^2} = z$

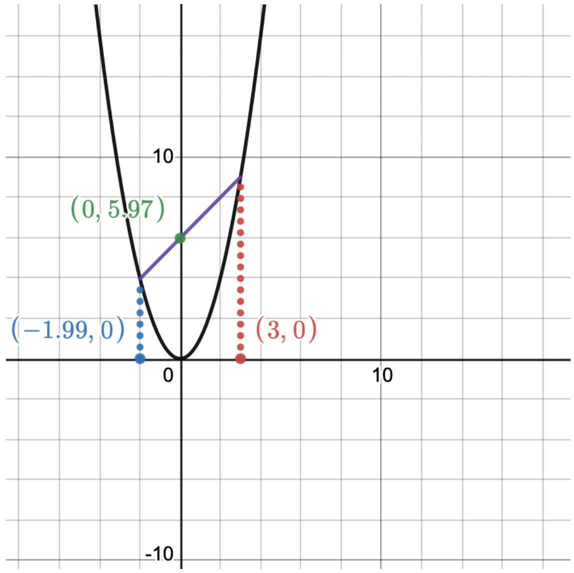
$$z^2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + b + 2\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$
$$= \frac{a^2}{2} + b^2 + a\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$
$$= a\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}\right) + b^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

- Autre problème



- https://www.desmos.com/calculator/ncxzbr3hti



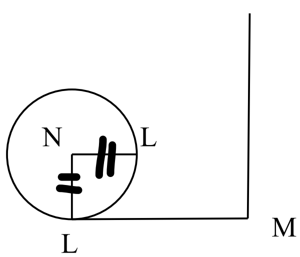
- NL $= \dfrac{a}{2}, LM = b\ ,\ z_1 = MQ,\ z_2 = MR$

  $z^2 = -az - b^2$

  $z_1 =$ MQ=MI-IQ= $\dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b^2}$ où $NQ = NL = \dfrac{a}{2}$ et NI=LR=b

  $z_2 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b^2}$ et $z_1^2 + az_1 + b^2 = 0$ avec $\dfrac{a^2}{4} < b^2$

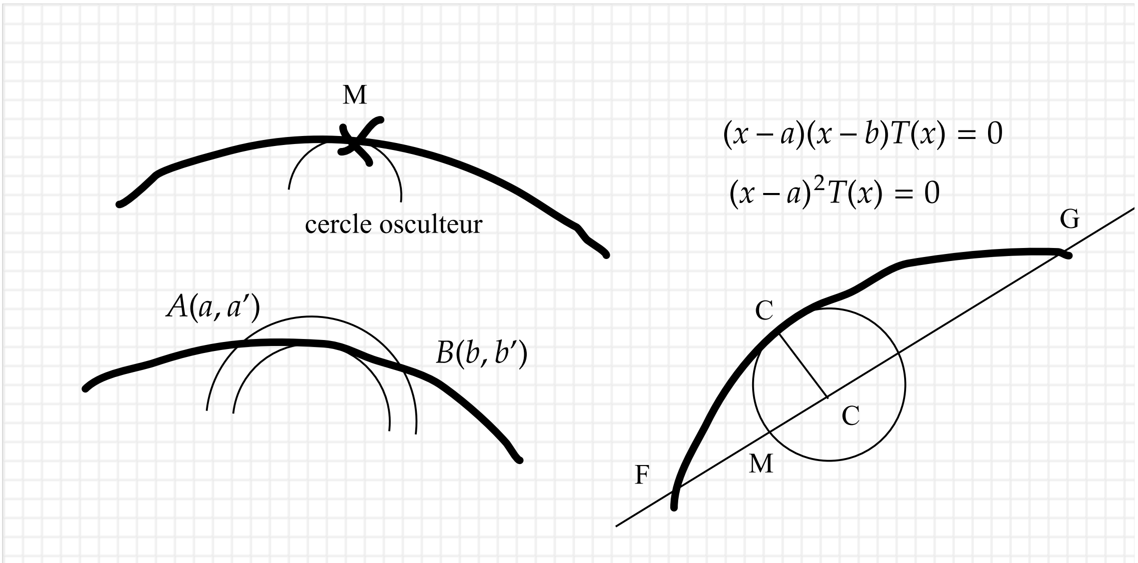
  $z_2^2 + az_2 + b^2 = 0$ avec $\dfrac{a}{2} < b$

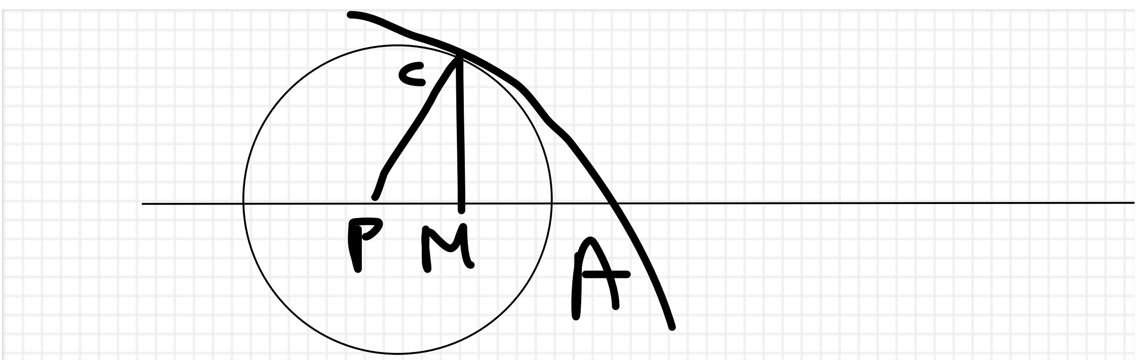


- On privilégie la géométrie à l'algèbre

- INTRODUCTION DES COORDONNEES
  - les axes ne sont pas forcément orthogonaux entre eux
  - équation de la courbe

- PB des tangentes





$AM = y,\ v = AP,\ PC = s\ ;\ S^2 = x^2 + (v-y)^2 \ \Rightarrow x^2 = s^2 - (v-y)^2$

$s^2 - (v-y)^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$

$(q-r)y^2 + q(r-2v)y + q\left(r^2 - s^2\right) = 0$ où e est l'abscisse que l'on cherche

$y^2 - 2ey + e^2 = 0$

$2e = \frac{q(2v-r)}{q-r}$

$$y^2 + \frac{q(r-2v)}{q-r}y + \frac{q\left(r^2-s^2\right)}{q-r} = 0$$

Section 5 Newton,Leibnitz

- fondateurs du calcul infinitésimal (analyse) devient une branche autonome indépendante de la géométrie, utlisation des infiniments petits
- le problème de tangente, pb de l'intégrale (aire soutenue par une courbe), pb de la physique

(vitesse, accélération ; à partir de la loi horaire : trouver v ou a ; ou à partir de la vitesse et acceleration trouver equaiton horaire) : sont tous des pbs qui utilisent des infinments petits, considèrent une certaine notion de limite pas forcèment rigoureuse

- $\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}$ tq $e \to 0$
- ils inventent procédés algorithmiques ± même moment mais de façon indépedante
- pb de tangente: pb inverse des quadratures

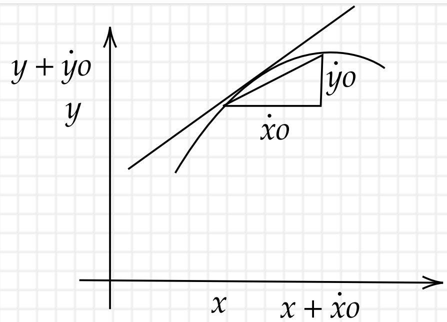
Section 6 Isaac Newton (1642-1727)

- mtc1 anglais, entre au Trinity College de Cambridge
- Annus mirabilis (peste) vers 1666 : trinity college fermé : pdt cette période : réfléchit sur période questions de physiques, mtqs (rédige l'Optique), à l'idée du calcul infinitésimal mais publie ses réultats très tardivement vers 1703
- en 1669 : il succède à Barrow à la chaire lucasienne
  - en 1687 : publication Philosophiae naturalis principia mathematica ($F = ma$, ppes mécanique, lois de la dynamique, lois de gravitation universelle)
- devient président de la Royal Society en 1703
- Publications vers années 1660 en calcul infinitésimal: son maitre Isaac Barrow, ses manuscrits trainent longtemps avant d'être publié
- Manuscrit de Analysi : Aire $z = ax^m$, pour lui une courbe est la trajectoire d'un point mobile, fluentes sont les variables qui fluctuent
  - fluentes $x, y, z \ \cdots \ x(t), y(t), z(t)$
  - fluxions $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (notation de Newton) $\cdots$ $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$: notation de Leibniz

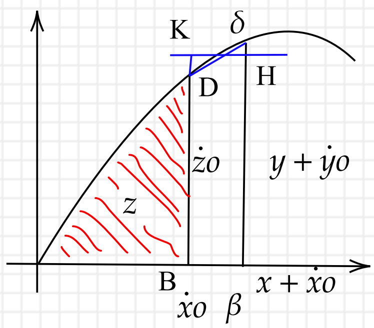
Problème $y = ax^m,\ x \to \dot{x}(\theta) = \dfrac{dx}{dt}dt = dx$ où $\dot{x}(\theta)$: moment.

$$y + \dot{y}o = a(x + \dot{x}o)^n \underset{Binome\ de\ Newton}{=\!=\!=\!=} a\left[\ x^m + x^{m-1}\dot{x}o + \frac{x^{m-2}\dot{x}o^2}{2} + \ \cdots\ + \dot{x}^m o^m\right]$$

$$\cancel{y} + \dot{y}\cancel{o} \underset{Binome\ de\ Newton}{=\!=\!=\!=} \cancel{a}x^m + a\cancel{o}\left[\ x^{m-1}\dot{x} + \frac{x^{m-2}\dot{x}^2o^2}{2} + \ \cdots\ + o^2\right]$$



- ppté fondamentale découverte par Newton que que la fluxion de l'aire z soutenue par une courbe d'équation $y = f(x) = y$



"dérivée de z"

dérivée integr

$D\delta\beta B$

$$\frac{\dot{z}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} \qquad \left(\frac{dz}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}\right)$$

Incrément de l'aire $\dot{z}o = \text{Aire}(D\delta\beta B) = \text{Aire}(KH\beta B)$, $\dfrac{\dot{z}o}{\dot{x}o} = \dfrac{\text{Aire}(KH\beta B)}{B\beta} = KH \sim DE$

- Pour nous ce n'est pas une vraie démonstration mais pour l'époque : l'idée du calcul infinitésmal venait d'apparaître
- attention rigueur de Newton $\neq$ rigueur actuelle

(a) Les 3 règles (1664-1690)

- trouver intégrale d'une fonction qq : difficile , Newton réfléchit sur ce concept
- si on a une fonction qq : on peut tjrs la développer en série (en réalité il faut remplir des conditions), à l'époque on considérait des fonctions C^∞ : pas trop de pbs mais ttes les fonctions ne sont pas infiniment dérivables

- Règle 1 : Si $y = ax^m$ alors l'aire sous y est $\dfrac{ax^{m+1}}{m+1}$.

$$f(x) = f(x_0) + ax + bx^2 + cx^3,\ ax^m \ \rightarrow \frac{ax^{m+1}}{m+1} \quad \text{où } x_0 \ :\ cte$$

$$cte.\, x + a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^3}{3} + \cdots$$

@ $\ln(x+1), x > -1$; $\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots$ (voir suite) avec les aires

- capable de déterminer l'aire sous la courbe de n'importe quelle fonction
- pas encore de définition nette encore de la dérivée au fin XVII° s., attendre années 1920 pour $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'$
- Newton : pas de déinition rigoureuse pour le moment o et dt.

@ $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \iff (x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$
puis on développpe puis on impose $o = 0$

$$3x^2 - 2ax + ay + \frac{ax\dot{y} - 3y^2\dot{y}}{\dot{x}} = 0 \iff \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(ax - 3y^2\right)$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

$$\to x^3(t) = 3x^2\dot{x}$$

Section 7 Gottfried Leibniz (1646-1716)

- Conseiller du baron Von Boyneburg à Frankfurt
- Leibniz : plutôt philosophe, allemand, diplomate de profession / Newton (physicien)
- Voyages en France et aux Pays-Bas
- Il devient bibliothécaires : rédaction ouvrages philosophiques

(a) Fondation du calcul

- Pdt période à Paris, élabore son calcul infinitésimal
- Introduction de la notation très efficace dx, dy; considère $\frac{dy}{dx}$. Très important.

  Chez Newton : $x + \dot{x}o, \quad o = dt, \ \dot{x} = \frac{dx}{dt}$
- Publication sur le calcul en 1684 : donne les règles de dérivation
  $d(x+y) = d(x) + d(y)$
  $d(xy) = xdy + ydx$, ne donne pas vraiment la définition analytique de la dérivée, on expose les idées de façon algorithmique; puis considère les fonctions $\ln$, $\exp$.

  $$\mathrm{S} \to \int$$
- Leibniz considère plus spécifiquement l'intégrale défini

- Développement de la théorie des équations différentielles

(b) Querelle Leibniz / Newton

- même si méthodes différentes, la théorie était la même, Newton était supporté par la Royal Society de Londres; publication de Leibniz en 1684 tandis que Newton a travaillé sur le calcul infinitésimal vers 1664 mais ses manuscrits circulaient seulement dans la Royal Society de Londres : officiellment publié à partir de 1711. Leibniz avait pu lire les manuscrits de Newton
- Querelle résolue par un collègue de Newton : *Je reconnais que Newton est le premier inventeur des notions sur le calcul infinitésimal*. Commission au sein de la Royal Society pour trancher : ils choississent Newton (Leibniz était un amateur)
- Mathématicien britannique : méthode de Newton / mathématicien continentaux : méthode de Leibniz: ce type d''aptitude a continué pdt des siècles
- Les historiens s'accordent qu'ils ont développé leurs théories de façon indépendante : on ne pense pas que Leibniz s'est inspiré par les idées de Newton ou l'inverse
- Cela arrive svt : la fleuraison de mêmes idées : autre @ géo non-euclidiennes (Goet (réfuter 5° postulat d'Euclide) , Lobashiesky (geo sur plan hyperbolique)) chacun avec son propre parcours pr y arriver

(c) Les applications à la mécanique

- pb physique, cinématique très simple abordées à travers le $\boxed{CI}$ (calcul infinitésimal), mvts décrits par des trajectoires (courbes isochrones), pbs isopérimètres (la figure qui a l'aire maximale): Jean Bernoulli élève de Leibniz : $\boxed{CI}$ avec approche physique
- construction nouveau concept : $\boxed{\text{Fonctions}}$. (base de concept d'Analyse) (idées divergentes des mahtmaticiens : def de fonctions arrivée vers 1920)
- 1° def de fonciton : on appele fonciton d'une grandeur variable, une quantité compose de qq manière que ce soir soit grndeur est variable ou constante . 1718 par Jean Bernoulli

(d) Emergence de la notion de fonction

- Relation entre des qqtés inconnues : 1° moitié du XVII° s.
- Fermat , 1637 propose une idée de fonction, Descartes
- Gregory, qtté composée à partir d'autre qttés
- Plusieurs résultats mathématiques pas publiés : envoyés par lettres

Section 8 Leonhard Euler (1707-1783)

- th des nombres, algèbre, géométrie, théorie des graphes, premier introduction la notation moderne de fonction f
- S'installe à l'Académie de Saint-Petersbourg auprès de Pierre le Grand, puis à Berlin sous Frédéric II
- Donne plusieurs définitions de fonctions: 1° introduite dans *Intructio 1748*: écrivent en latin

, écrivent dans leurs langues natales à partir du XIX° ; la *variable* devient une qtté abstraite *universelle. Une qtté variable est une qtté indeterminée, ou si lo'n veut une qtté universelle qui comprrend toutes les valeurs déterminées.*

- Idée large : une *expression analytique composée d'une manière qq de cette qtté variable et de nmbrs ou de qttés constantes.*, introductions fonctions algébriques, transcendantes
- Les fonctions algébriques sont composées de qttés variables composées entre elles, il considère que toute fonction peut être développée en séries, il distingue les fonctions continues des fonctions discontinues
- Classification des fonctions d'aprrès Euler

$$\begin{cases} \text{transcendantes} \\ \text{algébriques} & \begin{cases} \text{irrationnelles} & \begin{cases} \text{explicites} \\ \text{implicites} \end{cases} \\ \text{rationnelles} & \begin{cases} \text{fractionnaires} \\ \text{entières} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

- Toutes les fonctions pouvaient être transformées en séries infinies.

- Qqs contre-exemples ± célèbres
  distinction entre fonction transcente et algébrique mais c@ : fonctiond éfjinie par une seule expression et qui algérbique ou transcendante suivant les valeurs de x
  pour $x \geq 0,\ f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+1} + e^x + 1 - e}{x^n + 1}$, on a $f(x) = e^x + 1 - e$ ($trancendante$)
  pour $o \leq x \leq 1,\ f(1) = 1$ et $f(x) = x$ pour $x > 1$
  c@ continue et discontinue (voir poly)
-
- Introduction de la qtté variable x, 1755
- L'Encyclopédie, D'Alembert-Diderot
- stratégie militaire

Section 9 Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

- BUT : rendre plus rigoureux les fondements du $\boxed{CI}$, ne considéraient pas trop théoride de Newton ou de Leibniz comme des théories fiables (voir contexte Académie des Sciences)
- Contribution intéressante à l'Analyse, intègre l'acédémie des sciences, écrit 3 mémoires avec calcul leibnizien en 1693, 1694 : Pierre de Varignon dans 4 mémoires utlise aussi le $\boxed{CI}$.
- *On suppose ordinairement dans la suite les dernières lettres de l'alphabet z, y, x... marquent des quantités vairables*

- Corollaire : La Différence d'une quantité constante vaut 0.
- Introduit la demande ou la supposition
- Considérer $x = y$ si $x - y = \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$
- La différence de xy est $ydx + xdy$
  $d(xy) = xdy + ydx$
  $(x + dx)(y + dy) = xy + \underbrace{ydx + xdy + dxdy}_{= 0} = xy$
- $\frac{x}{y} = z \Rightarrow zy = x$, $d(zy) = dz\, y + z\, dy = dx$

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{dx - \frac{x}{y}dy}{y} = \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}$$

(a) L'Académie des Sciences et le calcul

- en 1697, Philippe de la Hire présente le mémoire *Remarques sur l'usage qu'on doit se faire de qqs supposition ds la méthode des infiniment petits.*
- sans précautions, les méthodes de N/L peuvent amener à des erreurs
- Varignon (lié à l'Hospital) pense qu'il faut continuer (*je me trouve le seul défenseur des infiniment petits* . Les mathématiciens sont assez conservateurs, attachés aux méthodes, concepts

Section 10 Lagrange (1736-1813)

- extrême tentative d'introduire les limites à travers un algoithme, Lagragnd qui a introduit la notion de dérivée
- Français mais né à Turin en Italie, devient enseignant, fonde l'acaémie de sciences de Turin
- a gagné plusieurs prix de l'acédémie des sciences : en mécanique analytique (perturbations des orbites lunaires), a succédé Euler à l'académie des sciences de Berlin
- le métier de mathématcien est assez restreint : on trouve les mathématiciens dans l'académie des sciences
- Traité de Mécanique analytique, indemne de la Révolution Française (Cauchy est parti en exil volontaire), fondation de l'éclole française dont l'école polytechnique : c'est là qui donne ses cours d'analyses : fondamentaux dans la publication de ses traités
- Difficulté au XVII : infiniment petit: pour calculer la tangente à la courbe, quadrature, Leibniz et Newton utilisaient les infiniments petits sans donner une définition particulière; cela a amené à chercher des fondements de calculs plus rigoureux : donner des règles par rapport au comportement des infiniments petits
- n'importe quelle définition est développable en série de Taylor (pas tjrs vrai attention) : arrive formellement à définir la dérivée d'une fonction: idée fortement; originale: il considère les manipulations algébriques comme les fondements de l'analyse

(a) Le Traité

- attendre encore une centaine d'années la définition d'une fonction moderne
- $f(x+i) = f(x) + ip + qi^2 + ri^3 + \&c$
  $f(x+i) = f(x) + iP(x,i)$
  $si\, g(x,i) = 0 \;\Rightarrow\; g(x,i) = i^a P(x,i)$ où $P(x,0) \neq 0$. (puis dmqra que $a = 1$)
  $g(x,i) = f(x+i) - f(x),\; g(x,0) = 0$
  $\Rightarrow\; f(x+i) - f(x) = i^a P(x,i)$ où $P(x,0) = \gamma \neq 0$
  $P(x,i) - p = 0$ pour $i = 0 \;\Rightarrow\; P(x,i) - p = i^a Q(x,i)$ où $Q(x,0) = q \neq 0$

D'où $P(x,i) = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, il ne parle jamais d'infiniment petit.

Exemples :

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, considérer $f(x+i) = \dfrac{1}{x+i}$.

$$iP = f(x+i) - f(x) = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - i}{x(x+i)} = \frac{-i}{x(x+i)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{-i}{x(x+i)},\quad p = P(x,0) = -\frac{1}{x^2}$$

$$iQ = P - p = \frac{-1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x + (x+i)}{x^2 + xi} = \frac{-x + x + i}{x^2(x+i)}$$

$$Q = \frac{1}{x^2(x+i)},\quad q = Q(x,0) = \frac{1}{x^3},\quad R = Q - q,\quad r = \frac{-1}{x^4}$$

$$f(x+i) = f(x) - \frac{1}{x^2}i + \frac{1}{x^3}i^2 - \frac{1}{x^4}i^3 + \&c$$

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}\,,\; f(x+i) = \sqrt{x+i}$

$$iP = f(x+i) - f(x) = \sqrt{x+i} - \sqrt{x} = \frac{x+i-x}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}} = \frac{i}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}},\quad p = P(x,0) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{x+i} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+i} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+i}\right)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+i}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+i} + \sqrt{x}\right)} = \frac{-i}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+i}\right.}$$

$$Q = \frac{-1}{\left(2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+i}+\sqrt{x}\right)\right)^2},\quad q = Q(x,0) = \frac{-1}{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-1}{8x\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+i} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}i - \frac{1}{8x\sqrt{x}}i^2 + \&c$$

(b) Remarques

- *les fonctions p,q,r dérivées de la fonctionf; et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction f par le moyen de ces dernières fonctions.*
  $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \&c,$ intégrer les fonctions $p, r \ \cdots$.
- la dérivation des fonctions devient donc une nouvelle opération d'algèbre
- essaye d'établir l'existence en série de toutes les fonctions (mais ce n'est en réalité pas possible)

Section 11 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

- fondateur de l'analyse, notion explicite de la limite, dérivée, intégrale avec les utliisations modernes
- Polytechnicien, a suivi les cours de Lagrange (grand analyste français) : 1° qui enseigne dans l'école polytechnique en 1790, création ENS, école des Mines : idée : créer des ingénieurs (développment de la structure française : ponts) ou des enseignants (élèves de l'ENS)
- Ecole Polytechnique fondé sur les cours de mathémaqitues, algèbre, analyse, géométrie, ç achange la figure des mathématiciens, du statut d'académicien deivent professeur, enseignant en université, change le rôle social du mathématicien
- <u>Cours d'Analyse</u>, 1821, cours donné à l'école Polytechnique
- Pas mal de publications d'articles, pas très soucieux de définir les fonctions... Ils correspondent avec bcp de lettres, publient mais pas trop : pas trop de concurrence, déjà dans des académies : ils gagnetn leur vie tandis qu'au XIX° : en enseignant : ils sont obligés auprès des étudiants les fondements de la disicpline : traité de géomtrie projective, d'analyse, d'algèbre : traités qui sont rédigés pour les étudiants, mettre à clair les définitions, théorèmes; fort impact sur la recherche car émergence d'une riguer qui n'était pas nécessaire avant : ça va être développé
- L'artihmétisation de l'analyse : procédé qui commence sosu cauchy et se déroule tout le XIX : but : fonder l'analyse sur des bases saines
- conservateur, s'est auto exilé en 1830 : il quitte la France pour l'Italie : a enseigné à l'école de Turin, est revenu en France quand retour du roi Charles X
- pas de disctinction nette entre mathémaiques pures et appliqueées (physique : considérée comme branche mathématique); séries de Fourier déduites ds le cadre de la théorie de la chaleur. Cauchy fait de la théorie de l'élasticité

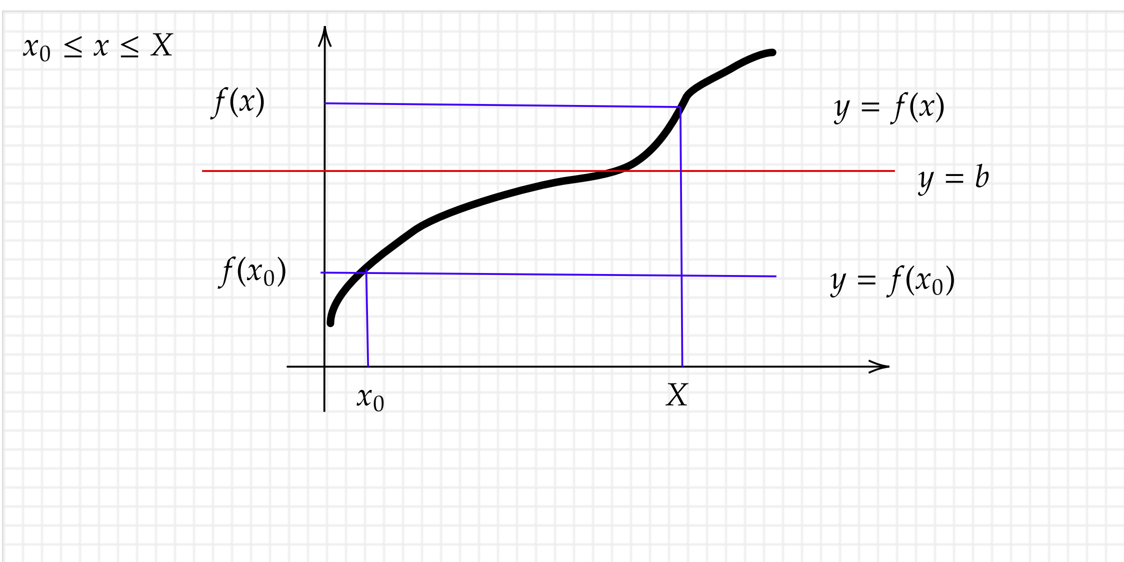
(a) Continuité

- Rappel : méthode d'exaustion : Aire d'un Cerlce $= S$, polygone inscrit dans ce cercle : P_6. Pour n'importe quelle grandeur Σ, on a $P_n \longrightarrow \Sigma$. de même pour des polygones circonscrits.
- Prend l'exemple de $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
- 1870 : au cœur des débuts de l'Analyse : introduction des notions de la continutié,d e la dérivation en introduisant les mêmes symboles que nous mais Cauchy en 1820 est encore dans une situation intermédiaire avec bcp d'interprétations géométriques.
- Il suppose $x_0 \le x \le x_1$ tq $f(x)$ unique et finie (ne peut pas considérer hyperbole entre 0 et 1 car n'est pas finie en 0).

  Infiniment petit α : $f(x+\alpha) - f(x) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$: bcp expliqué en mots

  $\lfloor x+\alpha \rfloor - \lfloor x \rfloor \rightarrow \pm 1,$ donc la fonction est discontinue
- De la même façon, il définit la continuité pour des fonctions définies à plusieurs variables : $f(x, y, z)$
- TVI : *Si la fonction* $f(x)$ *est continue par rapport à la varaible* x *entre les limites* $x = x_0,\ x = X,$ *et que l'on désigne par* b *une quantité intermdéiaire entre* $f(x_0)$ *et* $f(x)$, *on pourra toujours satisfaire à l'équation* $f(x) = b$ *par une ou plusieurs valeurs réelles de* x *comprises entre* x_0 *et* X.

Démonstration du TVI : Approche très géométrique, graphique d'une fonction assez fondamental



Ce n'est pas une démonstration qui se fonde sur l'analyse, purement géométrique.

(b) Dérivées des fonctions d'une seule variable

$y = f(x)$ cont, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

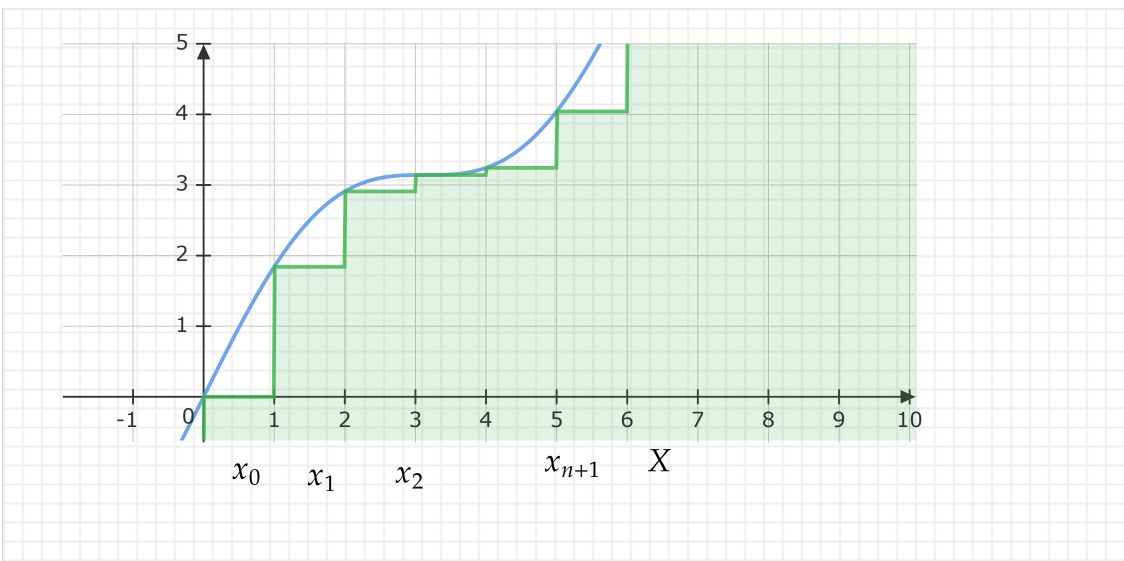
$\dfrac{(x+i)^m - x^m}{i} = \dfrac{x^m + mx^{m-1}i + i^2(\ \cdots\ )x^m}{i} = mx^{m-1} + i(\ \cdots\ ) \xrightarrow[i\to 0]{} mx^{m-1}$. Le nom dérviée était déjà donné par Lagrange.

Fonctions composées : $z = F(y)$ où $y = f(x)$, ils appellent les incréments $\Delta x,\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta z = F(y+\Delta y) - F(y)$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \underbrace{\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}}_{F'(y)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{f'(x)} \to F'(f(x)) \cdot f'(x)$$

(c) Intégrales définies

$y = f(x)$ cont , $x_0 \le x \le X$



$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ \cdots\ + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$
$S_1 = (x_1 - x_0)f(x_0 + \theta_0(x_1 - x_0) + \ldots + (X - x_{n-1})f(X_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})$

$$S_1 = S \pm \varepsilon_0 \underbrace{(x_1 - x_0) \pm \varepsilon(x_2 - x_1) \pm\ \cdots\ \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})}_{\to 0}$$

Après la publication de lagrande : plusierus ctritiques : fondemetns sr qq chose qui n'a pas démontré et eon rermque que certianes séries ne euvent pas ^être déve en séries de Taylor: Cauchy est assez fiez que sa théorie est au-dessus de ces critiques là.

(d) Intégrales indéfinies

$f(x)$ continue, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)\, \mathrm{d}y$

- recherhce en analyse réelle, complexe, théorie des nombres, la géométrie

Section 12 Un précurseur : Bernhard Bolzano (1781-1848)

- né à Prague où il étudie la théologie, philosophie, mathématiques
- a obtenu la chaire de science de la régligion en 1805
- publication ouvrage connu *paradoxe de l'inifni :* infini actuel est non contradictoire et son existence peut être prouvée (Aristote)
- Tannery, 1886 : *C'est M. Weierstrass qui a introduit les mots limite sup, limite inf mais retrouvées dans œuvres de Bolzano mais pas attiré toute l'attention qu'on pouvait lui apporter.*
- Bolzano : assez isolé même si publiait des articles à Prague : restaient dans ces lieux : ses découvertes n'étaient pas trop connues
- Questions plus larges : Comment démontrer ? Quelles sont les bonnes démonstrations ? Je ne crois pas pouvoir me satisfaire d'une démonstration si rigoureuse , pureté de méthode, doit fonder la certitude, l'enchainement déductif est fondamental
  Cauchy mobilisait des intuitions géométriques plutôt que des idées analytiques

Section 13 L'école de Weierstrass (1815-1897)

- il va pousser plus loin l'effort de la rigueur en analyse ("arithmétisation de l'analyse")

Quête de rigueur (commence avec Cauchy et se termine avec Weir) : apporter de la rigueur au fondement de l'analyse, anrithmétisation : terme rétrospectif : les historiens ont reconnu un but d'essayer d'aller au delà de l'analyse en s'appuyant sur les nombres réels (contraire de géométrisation), tandis que les infiniments petits ont une interprétation géométrique; pk Cauchy n'a pas totalement abouti à fonder l'naalyse sur les concepts de limites : limite de qq chose qui fait 0, il ne fallait pas y avoir des trous dans les nombres réels
Attendre vers 1870 : Cantor | Dedekind

- la méthode "ε, δ ": limite, continuité, dérivée, intégrale
- entourage à Berlin
- manque encore la construction des nombres réels pr une définition rigoureuse du concept de limite

(a) Avancées de Weirstrass

- *une variable s'approche indéfiniment d'une valeur fixe*
- Définition moderne de **fonction** de Dirichlet (école de Weirstrass), la fonction ne doit posséder qu'une seule valeur

- définition de limites, conitnnuités d'une fonction en découlent immédiatement
- fonctions pathologiques (*fonctions bizarres*) ou les contre-exemples remarquables @ XVIII : Lagrange considérait des fonctions très lisses, indéfiniment dérivable, considérait que toutes foncitons pouvaient être développées en série

Section 14 Bernard Riemann (1826-1866)

- avancées en analyse réelle, complexe, concept variété riemanienne, fonction *zêta* de Riemann, cas de l'intégrale (la subdivision comprend des points qui ne sont pas forcèment à la même distance)

$\delta_i = x_i - x_{i-1}$

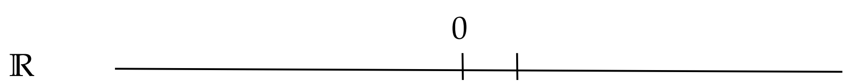
- élève de Gauss
- Berlin : capitale d'importants mathématiciens
- a étudié à l'école de Weierstrass
- programme unitaire qui comprend sa vision physique en passant par la géométrie, comprendre mieux comment les forces pouvaient se propager dans l'espace (@ l'interaction gravitationnelle).

Article XIV Les axiomes des nombres réels

Section 1 Les nombres réels = vrais nombres ?

Quel est le pb à la base ? Qθ aassez importante chez les Grecs aussi

Il y a une bijection entre l'ensemble des nombres réels et la droite réelle : fondement aussi du concept de limite, il n'y a pas de trous : ce n'est pas évident : il faut des axiomes : voir axiome de Dedekind, Cantor.



- Grecs : arithmétique et géométrie (coupure)
- Euclide : nombres et *grandeurs incommensurables* , les grandeurs étaient plus riches que les nombres (@ considérer triangle rectangle de côté 1)

Section 2 Problème autour du concept de limite

- pb sur la définition rigoureuse de limite
- l'Hopital, 1696 : *on concoit facilement qu'une qtté qui diminue continuellement, ne peut devenir positive à négative sans passer par le zéro*

Section 3 Richard Dedekind (1831-1916)

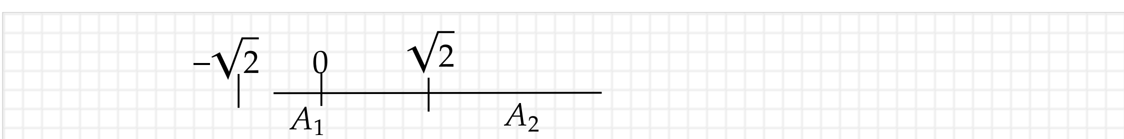
- élève de Gauss à gottingen
- concept d'idéal

- devient prof à l univ gottengien
- dans le cadre de l'enseignement, il se trouve confronté aux nombres réels et en cherche une bonne définition : donner formulation axiomatique des nombres réels (bien définir la droite réelle)
- les nombres sont des libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permmettant de saisir avec faciklité et précision diversité des choses
- <u>continuité et nombres irrationnels</u>, 1872 : conception des nombres réels

Première idée :
- nbrs négatigs pr soustraction tjrs possible
- nbrs rationnels pr division tjrs possible
- on sait les additionner, multilier, ordenner (dedekin introduit concept de corps) : enrichissement nombres naturels (@ équations algébriques : $x^2 - 2 = 0$: solutions dans champs des réels)

Deuxième idée :
- longueurs mêmes pptés sur les opérations

Troisième idée
- schnitt : coupure de la droite réelle, existence d'un point de séparation:
  $(A_1, A_2),\ A_1,\ A_2 \subset \mathbb{Q}$
  $x \in A_1, x \leq y,\ \forall y \in A_2$
  Axiome : toute partition (A_1, A_2) définit un nombre réelle.
  @ r
  $A_1 = \{x \in \mathbb{Q},\ x \leq r\}$
  $A_2 = A_1^C$
  $(A_1, A_2) \rightarrow r \in \mathbb{Q}$



@ $\begin{aligned} A_2 &= \left\{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 > 2\right\} \\ A_1 &= A_2^C \end{aligned}$

$\mathbb{R}$ est complet : on ne peut pas élargir le système (en faisant d'autres coupures) : ce que l'on trouve : c'est encore un nombre réel
- chercher les fondements des displicines

Section 4 Cantor (1845-1918)

- Russe

- a étudié en Allemagne, école polytechnique de Zurich
- suit les cours de Weirstrass, Kronecker
- thèse sur la théorie des nombres
- enseigne dans une école de filles à Berlin
- poste à l'univ de Halle, a eu plusieurs tensions avec Kronecker (n'acceptait les idées de Cantor), Cantor : attitude paritculière avec l'infini (idées sur cadinalité)
- école de weirstrass a refusé canditature de Cantor, santé mentale faible, cliniques psychatriques, suicide

(a) Suites fondamentales

- *suite fondamentale* (a_n), avec a_n rationnel
  Si $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N$ (dépendant d'ordinaire de ϵ) tq
  (i) $|a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n, m > N$: suite dite fondamentale mais si
  (ii) $|a_n - L| < \epsilon\ \forall n > N$: suite CV vers limite l.

AXIOME DE CANTOR : Chaque suite fondamentale dans $\mathbb{Q}$ est CV.
Cet axiome est suffisant pr donner construction suffisament rigoureuse pr construction des nbrs réels.

On peut les appeler aussi *suites de cauchy.*
Il associe chaque (a_n) sa limite L ($\in\ \mathbb{Q}\ ou\ pas$).

@ $\left(\frac{1}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to \frac{1}{2}\ \in \mathbb{Q}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ (mais il y a des suites de rationnels qui CV vers des nbrs irrationnels)

(b) Les opérations

- définir la somme de deux nombres $x + y$, on retombe sur les suites fondamentales
  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to y$, d'où
  $(a_n + b_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} x + y$
- on peut aussi dmq les relations d'ordre : $\forall\ x \in \mathbb{R}$,
  $x \leq x,\ x \leq y,\ y \leq z\ \Rightarrow x \leq z\ ;\ x\ \leq y,\ y \leq x,\ x = y.$
- $\mathbb{R}$ reste un ensemble bien ordonné

(c) $\mathbb{R}$ est complet

- opérations entre nbrs réels : st celles entre suites fondamentales
- si on réitère le processus, en faisant des suites suites fondamentales de réeles, on n'obitent

rien d'autres que des réels : l'ens des nombres réels est dit complet

Dedekind $\underbrace{(A_1, A_2)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$

Cantor : $(a_n)_n$ suite fondamentale $\longrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $a_n \ \in \mathbb{R}$;

(d) Cardinalité d'un ensemble

A fini, $A = \{a_1, \ \cdots, a_n\}, \ |A| = n = card(A)$

$B = \{b_1, \ \ldots, b_n\}, \ |B| = m$

A et B sont en bijection ? $n = m$

$\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, \ 2\mathbb{N}+1, \ \mathbb{N}^2, \ \cdots$: tous en bijection

(e) Une nouvelle définition d'un infini

- *Un ensemble A est infini s'iil existe une bijcection entre A et B , où B est un sous-ensemble de A. Tous les ensembles qui sont en bijection ont la même cardinalité.* Cantor.
- Caridnalité (nbr élmts à des entiers est $\aleph_0 = |\ \mathbb{N}\ |$. (nbrs dénombrables)
- la diagonale de cantor : donner une deuxième démonstration de la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels, on peut compter tous les rationnels, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

1/1	1/2 →	1/3	1/4 →	1/5	1/6 →	1/7	1/8 →	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

L'ens des réels n'est pas dénombrable

DEMO par l'absurde : $\mathbb{R}$ est dénombrable $\longrightarrow [0, 1]$

$0, a_1 \ \ \cdots \ a_2 \ \cdots$

$0, 5 = 0, 4999 \ \ \cdots \ 9 \ \cdots$

On peut construire un nombre qui n'est pas dans cette matrice. Considérer la diagonale de la matrice.

$0, h_1 h_2 h_3 h_4 \ \cdots$ or $h_i \neq a_{i\,i}$

Donc $[0, 1]$ pas dénombrable donc $\mathbb{R}$ pas dénombrable.

(f) Combien de nombres algébriques ?

Solution d'une équation algébrique
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \, , a_i \in \mathbb{Z}.$

$\mathbb{Q}$? $x^2 = 1, \; x^2 = 4, \; 2x = 1 \; : \; x \in \mathbb{Q}$ donc algébrique

$\pm\sqrt{2}$: $x^2 = 2$ mais π n'est pas algébrique, c'est un nbr transcendant.

Les nombres algébriques sont dénombrables. (dmq ↴ : voir poly)
On doit définir la hauteur des nombres algébriques. (savoir reconnaitre la HAUTEUR !)
$h = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 + n$
On peut numéroter les nombres algébriques en utilisant le concept d'hauteur.

- Cantor fait connaissance de Dedeking en 1872
- correspondance par lettres entre les deux
- 29 nov 1873 (VOIR DIAPO)
- signale à Dedekind : existence de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$
- Cantor était mal vu
- courbes de Hilbert : bijection entre $[0, 1] \; et \; [0, 1] \times [0, 1]$: Je le vois, mais je ne le crois pas ! (de Cantor à Dedekind)
  @ $P = (0, x_1, x_2, \; \cdots \; , x_n)$ sur le segment on fait correspondre
  le point $M = (0, x_1, x_3, \; \cdots \; ; 0, x_2, x_4, \; \cdots \;)$

(g) Problème du continu (de Cantor)

- $c(\mathbb{N}) = c(\mathbb{Q}) = \aleph_0$ et $c(\mathbb{R}) = c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$: y en a-t-il entre les deux ?
- Cantor n'arrive jamais à démontrer l'hypothèse dite du continu
- Kronecker attaque avec violence l'approche à l'inifni de Cantor

- crise des fondements : bcp de paradoxes (Hilbert : cherchait des problèmes aux fondements en mathématique)

Section 5 Crise des fondements. Hilbert et la géométrie

Fin XIX, axiomatisation nbrs réels, Cantor a introduit la TH des ensembles, découvertes de paradoxes concernant la théorie des ensembles

(a) Problème autour des ensembles, Russell, 1903

- PRDX le plus simple : PRDX concernant les ensembles de tous les ensembles
  @ on ne pourrait pas considérer l'ensemble de tous les ensembles (cf ppté)
  ↳ paraoxe du Barbier (exemple typique)

- tous les prdx font une sorte de référence à soi réflexive qui doit être condamnée pr la même raison
- THéorie axiomatique des ensembles (Hilbert) : dev théorie formaliste : paradis de Cantor, appliqué à la théorie des ensembles : objectif : consituter une logique plus rigoureuse

- Les axiomes de $\mathbb{N}$ (G.Peano)
  - $\mathbb{N}$ contient au moins un élément noté 0
  - tt élément n de $\mathbb{N}$ admet un successeur $S(n)$
  - voir les autres

- proposition de Peano : *latino sine flexione* , a travaillé *formulaires* (texte mtq qui devait contenir ds un livre toutes les mtqs possibles), pas de mots naturels, que des symboles logiques, idée assez bizarre et difficile à comprendre; logique : fondement de toutes les mtqs. Livres écrits pour collège et lycée : seulement avec des symbôles : voulait démocratiser les mtqs : les rendre compréhensible pour tt le monde de cette façon.
- sur le modèle de Godel: établit ds une théorie axiomatique en 1931 : on peut tjrs trouver une proposition qui ne soit ni la conséquence des axiomes, ni en contradiction avec eux. Il y a des propositions indécidables. (ni prouver ni réfuter)

- CHOC EPISTEMOLOGIQUE :
  - mtq binairement faux ou vrai ?
  - autre concept ds mtq : indécidable
  - existe-t-il une valeur entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$.
  - l'hypothèse du continu est une proposition indécidables, 1963

- Hilbert veut donner la certitude aux méthodes mathématiques, aussi ds le cadre de la géométrie. Pdt le XIX, bouleversement géométrie (naissance 1820 : géomtrie non-euclidienne : Lobachevski, Bolyai, Gauss).
- Hilbert : point, droite, plan : 3 systèmes de choses différentes, l'intiuiton obtenue à travers les aixomes, permet de comprendre ce qu'ils représentent
- dans une théorie : tjrs des termes primitifs, on ne les définit pas
- quand on élabore uné définition, on définit tjrs des symboles, mots que l'on ne définit pas : ce sont les termes primitifs
- réfutation du 5°
- axiomes d'appartenance : à partir des axiomes d'appartenance : il va en déduire des théorèmes

- Poincaré n'appréciait pas la façon dont Hilbert introduisait la géométrie, il faut donner une vraie signification aux choses (points, droites, plans), pr ainsi construitre toute la géométrie " sans y rien voir", on pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner : la géométrie y sortirait. Il faut chercher si la géométrie est une conséquence logique des axiomes explicitement énoncés, cad si axiomes confiés à la machine peuvent en faire sortir toute la suite des propositions.

A chaque fois qu'on enlève un axiome : on obtient une géométrie différente. (non pascalienne, porjective, non euclidienne)