$M\,32$

TD

$S_3(nov - dec)$

Correc Θ

DS- M32

(i) $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

- Il y a t-il un maximum, minimum ?

$x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow$ maximum au plus 1.

$f(0) = 1$ donc $x_M = 0$.

$x \in]-1,1[\iff |x| < 1$

$\Rightarrow 1+x^2 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{1}{2}$.

↳ la valeur de $\frac{1}{2}$ n'est pas atteint.

- $\nexists\ x_m \in]-1,1[$ tq $f(x) \geq f(x_m)$.

(ii) $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4$ et $|y| \leq 1\}$.

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x+y} \sin(y-x)$.

A compact $\underset{\text{dans } \mathbb{R}^2}{\iff}$ fermé et borné ?

$A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\} \cap \{(x,y) \mid |y| \leq 1\}$

$\boxed{M1}$ C'est la boule $\overline{B_2((0,0))} \leftrightarrow$ fermé.

$A \subset B_3((0,0)) \Rightarrow$ borné

$\boxed{M2}$

$g_1(x,y) = x^2+y^2$ est continue.

par 2.21/2

$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\exists\ V$ fermé tq $\{(x,y) \mid g_1(x,y) \leq 4\} = V \cap \mathbb{R}^2 = V$.

$g_2(x,y) = |y|$ cont $\Rightarrow$.

$\{(x,y) \mid |y| \leq 1\}$ fermé.

fermé & borné $\Rightarrow$ compact.

f cont & compact $\Rightarrow \exists\ x_m, x_M$

$f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

(iii) $A = \{(x,y) \mid x^3 + y^2 \leq 4 \text{ et } |y| \leq 1\}$.

$f(x,y) = x^3 + y^2$. A est fermé.

Mais A n'est pas borné.

Pour $x < 0$, $y = 0$ $\quad (x,y) \in A$.

$\|(x,0)\| = |x|$ dev^t ai qd on vt.

$x_M \ \exists\ ?$ $\quad x_M = (\sqrt[3]{4}, 0)$

$$f(x_M) = (\sqrt[3]{4})^3 + 0^2 = 4.$$

$$\forall (x,y) \in A : f(x,y) \leq 4.$$

$x_m \nexists$ car $f(x,0) = x^3$ n'a pas de valeur minimale pour $x \to -\infty$.

Ex 5 : Valeur à l'$\emptyset$: 1.

1) si f cont en $(0,0)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$

$\underset{L.2}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - 1| = 0$.

f, g, h cont sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car somme / produit / quotient

$$f(x,y) = (1-x)\,\frac{|y|^2(x+1) - x^3}{|y|^3 + x^4}$$

$$f(x,y) = \frac{|y|^3(1-x^2) - x^3 + x^4}{x^4 + |y|^3} = 1 - \frac{x^2|y|^3 + x^3}{x^4 + |y|^3}$$

$$|f(x,y) - 1| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2|y|^3 + x^3|}{x^4 + |y|^3} \overset{?}{=} 0$$

deg 3

deg 4.

②

si on prend $(x,0)$

$$|f(x,0)-1| = \frac{|x^3|}{|x|^4} = \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0} |f(x,0)-1| \ \nexists \quad (\text{ça n'a certainement pas } 0).$$

$\Rightarrow$ dc f n'est pas cont en $(0,0)$.

- 2) $$g(x,y) = (1-x)\frac{|y|^3(x+1)+x^4}{x^4+|y|^3}$$

$$= \frac{|y|^3(1-x^3)+x^4-x^5}{x^4+|y|^3}$$

$$= 1 - \frac{x^2|y|^3+x^5}{x^4+|y|^3}$$

- $$|g(x,y)-1| = \left|\frac{x^2|y|^3+x^5}{x^4+|y|^3}\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Ⓐ mq que c'est cont

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2|y|^3+x^5}{x^4+|y|^3}\right| = 0$$

Calcul

$$0 \leq \left|\frac{x^2|y|^3+x^5}{x^4+|y|^3}\right| \leq \frac{x^2|y|^3+|x|^5}{x^4+|y|^3}$$

$$\leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2 \cdot (|y|^3+x^2) + (\sqrt{x^2+y^2})^5}{x^4+|y|^3}$$

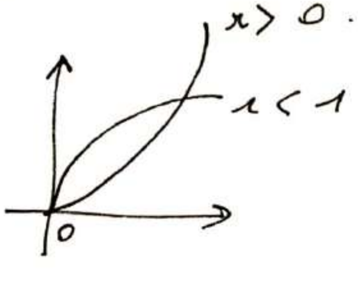
$$= (x^4+|y|^3)^{1/2} + (x^4+|y|^3)^{1/4}$$

Th des gendarmes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+|y|^3)^r = 0 \quad \forall r>0.$$

(x en v^+ par composée

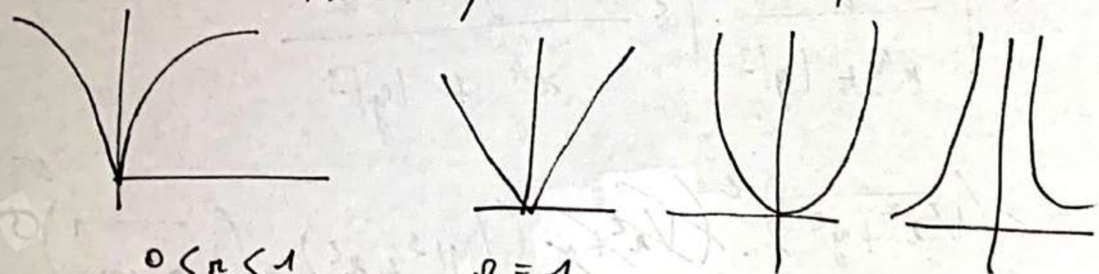
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4+|y|^3 = 0 \text{ car cont}$$



③

$f(t)=|t|^r$, $r \in \mathbb{R}$

non défini en $t=0$ pour $r<0$.



$0<r<1$ $\quad$ $r=1$ $\quad$ $r>1$ $\quad$ $r<0$

$F(x,y)=x^4+|y|^3 \longrightarrow f(F(x,y))=(x^4+|y|^3)^r$.

• $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

3) obtenu 1° avec M32.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |h(x,y)-1| = 0$?

$$h(x,y)-1 = \frac{x^8+|y|^3+|y|^6}{(x^4+|y|^3)^2}-1$$

$$= \frac{-x^4 \times |y|^3}{(x^4+|y|^3)^2}$$

Q° : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = \left| - \frac{x^4|y|^3}{(x^4+|y|^3)^2} \right| = 0$?

→ contre-@ ?

Façon d'approcher $(0,0)$

$\boxed{1M}$ axes $(x,0)$ et $(0,y)$:

$$\hat h(x,y) = \frac{x^4|y|^3}{(x^4+|y|^3)^2}$$

$\hat h(x,0)=0$, $\hat h(0,y)=0$ $\quad$ axes

$\boxed{2M}$ droite obliq $\hat h(x,\lambda x) = \dfrac{x^4|(\lambda x)|^3}{(x^4+|\lambda x|^3)^2}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$= \frac{|\lambda|^3|x|^7}{x^6(|\lambda|^3+|x|)^2} = \frac{|\lambda|^3|x|}{(|\lambda|^3+|x|)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$\lambda \neq 0$ $\quad$ $\lambda=0$ on a déjà vu.

' ? Ça marche tjrs ? Qlq contre - exemple ? '

Astuce classiq :

$$|\hat{h}(x,y)| = \frac{x^4|y|^3}{(x^4+|y|^3)^2} \leqslant \frac{(x^4+|y|^3)^2}{(x^4+|y|^3)^2} = 1.$$

☹.

$\boxed{\text{NIOI}}$

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$ m̂ phénomène $\to$ $y=x^2$

Approcher par $y=x^2$ parabole.

$$\frac{x^4}{2x^4} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

Astuce : $y = \sqrt[3]{x^4}$

$$\hat{h}(x, \sqrt[3]{x^4}) = \frac{x^8}{(x^4+x^4)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \hat{h}(x, \sqrt[3]{x^4}) = \frac{1}{4} \neq 0$$

Preuve que h n'est pas cont en $(0,0)$.

ⓐ $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+3yz \\ \sin(xy)+z \end{pmatrix}$ il y a 6 dérivées partielles

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}$

$(\partial_1 f_1)(x,y,z) = 2x$

$(\partial_1 f_2)(x,y,z) = y \cdot \cos(xy)$

$(\partial_2 f_1)(x,y,z) = 3z$

$(\partial_2 f_2)(x,y,z) = x \cdot \cos(xy)$

$(\partial_3 f_1)(x,y,z) = 3y$

$(\partial_3 f_2)(x,y,z) = 1$

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 3z & 3y \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 1 \end{pmatrix}$$

on dérive p à x — ondp à y — ondp à z

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \partial_1 f_p & \partial_2 f_p & \cdots & \partial_n f_p \end{pmatrix}$$

⚠ ne pas mettre mat transposée.

Q° : Justifier différentiabilité ?

→ coord. différentiables

→ f ŝ, pdt, composée, quotient → différentiables.

→ $\sqrt{\cdot}$ cont sur $\mathbb{R}^+$. ⚠ $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Démarche : On a une f.

1°) on essaye calculer les dérivées partielles → si cont 🙂 → sinon lim ∃ ?

↳ si pas possible ⇒ f n'est pas différentiable.

2°) si dérivées partielles existent

si elles st cont au point x concerné

⇒ f différentiable en x, Df = mat (dér. part)

$\partial_i f_j$ existent

$\partial_i f_j$ non-cont en x.

On pose $A = \mathrm{mat}(\partial_i f_j(x))$ et on vérifie

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Ah \|}{\| h \|} = 0$$

si oui $Df(x)$ ∃ et $= A$

si non : f non-diffé. en x.

6.21 : Justifier la différentiabilité & calculer la différentielle en un point de l'ens de départ de :

(ii) $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def p $g(x,y) = \sin(x+y)$

→ calcul ∂_i

→ écrire mat $Df = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_m f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p & \cdots & \partial_m f_p \end{pmatrix}$

- $(\partial_1 g)(x,y) = \cos(x+y)$
- $(\partial_2 g)(x,y) = \cos(x+y)$

$$Df = \begin{pmatrix} \cos(x+y), & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

@ simple ; $h(x,y) = x^3 + 2y$

$(\partial_1 h)(x,y) = 3x^2$

$(\partial_2 h)(x,y) = 2$

$j(x,y) = x^3 \cdot y$

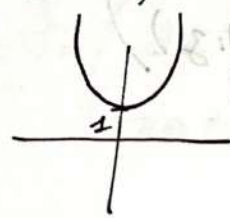
$(\partial_1 j)(x,y) = 3x^2 \cdot y$

$(\partial_2 j)(x,y) = x^3$

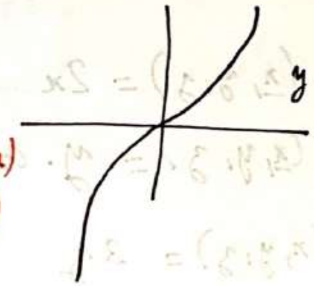
6.22 Déterminer dérivées partielles & la différentielle :

(v) $f(x,y) = \dfrac{x - \sinh y}{\cosh x + y^2}$.

⚠ vérifier dénom. n'est pas nul. $\cosh \geq 1$



$y = \cosh x$



$y = \sinh x$

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}(x)$

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$

On pose :

$u = x - \sinh y$

$v = \mathrm{ch}\, x + y^2$ alors

▸ $\dfrac{\partial}{\partial x} u = 1$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{ch}\, y$

▸ $\dfrac{\partial}{\partial x} v = \mathrm{sh}\, x$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} v = 2y$.

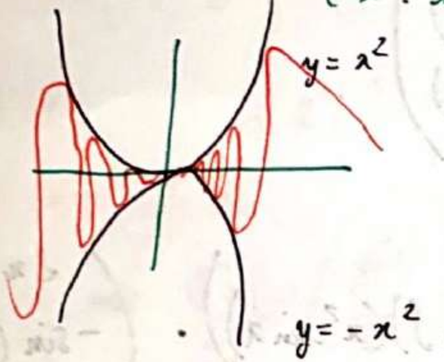
$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\frac{\partial}{\partial x} u \cdot v - \frac{\partial}{\partial x} v \cdot u}{v^2} = \frac{(\mathrm{ch}\, x + y^2) + \mathrm{sh}\, x\,(\mathrm{sh}\, y - x)}{(\mathrm{ch}\, x + y^2)^2}$$

$$(\partial_2 f)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\frac{\partial}{\partial y} u \cdot v - \frac{\partial}{\partial y} v \cdot u}{v^2} = \frac{2y(\mathrm{sh}\, y - x) - (\mathrm{ch}\, y)(\mathrm{ch}\, x + y^2)}{(\mathrm{ch}\, x + y^2)^2}.$$

@ f dérivable et dérivée non cont ?

⚠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

lim ∄ pour $x \neq 0$.

D $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

$-h \leq h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq h$ Th des GDRM.

$\Rightarrow$ Dérivable sur $\mathbb{R}$.
MS la dérivée n'est pas cont en 0.

⚠ m̂ si dérivable,
⚠ à la continuité de la dérivabilité.

5

6.18 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — n'est pas applica° linéaire / représente AL.

$f(x) = ax$, $f'(x) = a$, f' appli cte.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f(x) = Ax$. A mat $(p \times n)$.

f diff en $x \in \mathbb{R}^n$? si oui $Df(x)$ mat $p \times n$.

$Df : \mathbb{R}^n \to \text{mat}(p \times n)$
$x \mapsto Df(x) = A$.

On devine : $Df(x) = A$; à mq :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Ah \|}{\| h \|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\| A(x+h) - Ax - Ah \|}{\| h \|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{0}{\| h \|} = 0,$$ oui !

A mat représente AL u, définie par $u(x) = Ax$
$= A(x)$
$= A \cdot x$

Cas parti :

$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ est une AL

$\pi_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i$

i ème place

est cte.

$D\pi_i(x) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ $D\pi_i : \mathbb{R}^n \to \text{mat}(1 \times n)$

Méthodologie : Différentiable oui ou non ?

Cas ①: Dériv. part^lles $\nexists \Rightarrow$ $\boxed{\text{NON}}$

Cas ②: Dériv part lls $\exists$

(i) que ds point & pas ailleurs

(ii) $\exists$: partout

↳ s^t lls cont ? si $\boxed{\text{OUI}}$ alors différent.

Cas ③: Dériv part pas cont, prendre mat : la Différentielle, calculer si $\lim \frac{\| \dots \text{différentielle} \|}{\| \|} \overset{?}{=} 0$ ← mat

si $\lim = 0$ alors $\boxed{\text{OUI}}$ différentiable.

—

6.26 ⚠ IPY soit

(i) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = f(x^2; \cos x)$

Résol° classiq :

On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$g(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$F_1(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$(DF)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x). \quad ⚠$$

$$Df(x,y) = \Big((\partial_1 f)(x,y) \; ; \; (\partial_2 f)(x,y) \Big)_{1\times 2}$$

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(x) \\ (\partial_1 g_2)(x) \end{pmatrix}$$

alors $(DF)(x) = Df(g(x)) . Dg(x)$

$$= \Big((\partial_1 f)(x^2; \cos x), (\partial_2 f)(x^2 . \cos x) \Big)_{1\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$(DF)(x) = 2x \, (\partial_1 f)(x^2, \cos x) - \sin(x) \, (\partial_2 f)(x^2, \cos x)$$

mat 1×1

$F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\pi_2(x,y,z) = y$

$\pi_3(x,y,z) = z$

(ii). $F_2(x) = f(g(x), h(x))$

Résolu$^{\circ}$ astucieuse :

on fait semblant $h(x) \nexists$, $F_2(x) = f(g(x))$.

$$DF_2(x) = g'(x)\,(\partial_1 f)(g(x), h(x))$$

de m̂ $\quad + h'(x)\,(\partial_2 f)(g(x), h(x))$

- FF officielle :

On pose $G(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}$ $\quad G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$$F_2 = f \circ G \Rightarrow DF_2(x) = DF(G(x)).\,DG(x)$$

$= \left((\partial_1 f)(g(x), h(x)) ; (\partial_2 f)(g(x), h(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$

$$DF(x,y) = \left((\partial_1 f)(x,y) \; ; \; (\partial_2 f)(x,y) \right)$$

$$DG(x,y) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$$

- (vi) $F_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_6(x,y) = f(k(x,y)).\,g(x)$

→ vérifier ⇝ $\boxed{M}$ classiq

ici Résol astucieuse :

$$F_6(x,y) = f(k(x,y)) \cdot g(x)$$

$F_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$DF_6(x,y)$ mat 1×2 $\quad (\partial_1 F_6, \partial_2 F_6)$

1° tps : $F_6(x,y) = f(k(x,y))$

on oublie $F_6(x,y) = f(k(x))$.

$$\underset{\overset{\parallel}{x}}{(\partial_1 F_6)}(x,y) = (\partial_1 k)(x,y) . (\partial_1 f)(k(x,y), g(x))$$

$$+ g'(x).\,(\partial_2 f)(k(x,y), g(x))$$

$$\underset{\overset{\parallel}{y}}{(\partial_2 F_6)}(x,y) = (\partial_2 k)(x,y)\left((\partial_1 f)\, k(x,y), g(x)\right)$$

⇝ ff :

$G(x,y) = \begin{pmatrix} k(x,y) \\ g(x) \end{pmatrix}$ $\quad G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$D_F =$

$$D_G(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 k(x,y) & \partial_2 k(x,y) \\ \partial_1 g(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 23 : 1) $1,9987 \times 3,0008$? $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Idée : (en une variable)

DL $f(a+h) = f(a) + h' f(a) + \dots + \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^k \varepsilon(h)$

où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ $\rightsquigarrow$ h petit (<1)

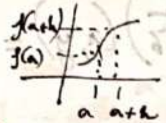
$\rightsquigarrow$ h^2 petit

$\vdots$

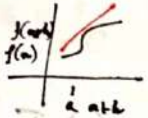
$\to$ qd h devient petit, on pt négliger $h^k \varepsilon(h)$.

Approximat° : f 1 variab

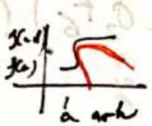
ordre 0 : $f(a+h) = f(a)$



$\boxed{\text{ordre } 1}$: $f(a+h) = f(a) + h . f'(a)$



ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \dfrac{h^2}{2} f''(a)$



Plusieurs variables

$\underset{\in \mathbb{R}^p}{f(a+h)} = f(a) + \underbrace{Df(a)}_{\text{mat } p \times m} . \underset{\in \mathbb{R}^m}{h}$ $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Résolut° de l'ex :

$f(a+h) \cong f(a) + Df(a) + h$.

On a $f(x,y) = x.y$ et $(a,b) = (2,3)$

et $(h,k) = (-0,0013 \; ; \; 0,0008)$.

$(a,b) + (h,k) = (1,9987 \; ; \; 3,0008)$

$f(a+h, b+h) \cong f(a,b) + Df(2,3) . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$1,9987 \times 3,0008 \cong 2 \times 3$

$Df(x,y) = (\partial_1 f , \partial_2 f) = (y, x)$.

$f(a+h, b+h) \cong f(a,b) + Df(2,3) . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$= 2 \times 3 + (3 ; 2) \begin{pmatrix} -0,0013 \\ +0,0008 \end{pmatrix}$

$= 6 + (-0,0039 + 0,0016)$

$= 5,9977$

$\triangle$ DS **Ex 32** : $\mathbb{R}^n$ $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

q° : Différentiable en $a \in U$?

(i) si oui : toutes les dérivées partielles $\exists$

et $Df(a)$ = mat dérivées partielles

On a $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$; $(\partial_1 f)(x,y) = \dfrac{y(x^2+y) - xy.2x}{(x^2+y^4)^2}$

- Revenir à définit° : valable pr $(x,y) \neq (0,0)$

(D) $(\partial_1 f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t.1,0) - f(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{t^2+0^4}}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

$$(\partial_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

- Puis, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|hk|}{(h^2+k^4)\ \|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$

idée Th gendarmes $0 \leq \dfrac{\dots}{\dots} \leq \underset{\to 0}{M}$? ....

→ approche :
→ axes
→ obliqs
→ paraboliq
⋮

(I) (I) deg $\dfrac{num}{den}$ → devine $\lim \nexists\ (0,0)$.

$$\lim_{(h,h)\to(0,0)} \frac{h^2}{(h^2+h^4)\ \|(h,h)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h^2\ |h|\ \underbrace{\|(1,1)\|}_{\text{nbr fixe}}} = \infty$$

$\exists$ un chemin q ne td pas vers 0.

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

$$g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^4} \qquad u = x^3 y \quad v = x^2 + y^4$$

1° étape : Calcul des dérivées partielles si elles $\exists$....

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \ ; \ \frac{\partial v}{\partial y} = 4y^3$$

$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} u}{v^2} = \frac{x(3xy(x^2+y^4) + 2(-x^3-y))}{(x^2+y^4)^2}$$

$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{x^3(x^2-3y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$ valables pr $(x,y) \neq (0,0)$

2° étape : Revenir à la définit° d'une dérivée partielle q est un cas particulier d'une dérivée directionnelle

Par définit°, $(\partial_1 f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t.1,0) - f(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3.0}{t^2+0^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

Puis, $(\partial_2 f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$

$= \dfrac{0.\,t}{0^2+t^4} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^4} = 0$.

Puis, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|h^3 k|}{(h^2+k^4)\,\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$?

① ① $\dfrac{\deg 4}{\deg 4}$ ☺ ? ; on ignore $\dfrac{1}{\|(h,k)\|}$.

Astuce classiq :

$$\frac{|h^3 k|}{h^2+k^4} \leqslant \frac{\left(\sqrt{h^2+k^4}\right)^3\left(\sqrt[4]{h^2+k^4}\right)^3}{h^2+k^4}$$

$$= (h^2+k^4)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1} = (h^2+k^4)^{3/4} \longrightarrow 0$$

q° $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{(h^2+k^4)^{3/4}}{\|(h,k)\|}$

R4 Pour 3 normes :

$\|(h,k)\|_1 = |h| + |k|$

$\|(h,k)\|_2 = \sqrt{h^2+k^2}$

$\|(h,k)\|_\infty = \max(|h|, |k|)$

on a : $\begin{cases} |h| \leqslant \|(h,k)\| \\ |k| \leqslant \|(h,k)\| \end{cases}$

$h^2 + k^4 \leq \|(h,k)\|^2 + \|(h,k)\|^4$

$= \|(h,k)\|^2 \left(1 + \|(h,k)\|^2\right)$

$(h^2+k^4)^{3/4} \leqslant \|(h,k)\|^{\frac{6}{4}} \left(1+\|(h,k)\|^2\right)^{3/4}$

cl

$$0 \leqslant \frac{|g(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|(h,k)\|^{3/2}\left(1+\|(h,k)\|^2\right)^{3/4}}{\|(h,k)\|}$$

$$= \underbrace{\underset{\downarrow\, 0}{\sqrt{\|(h,k)\|}} \;.\; \underset{\downarrow\, 1}{\left(1+\|(h,k)\|^2\right)^{3/4}}}_{0 \times 1} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

- si $Df(0,0)$ $\exists$ alors on doit avoir $Df(0,0) = (\partial_1 f, \partial_2 f) = (0,0)$

⚠ c'est une condit° nécessaire & pas suffisante.

- À vérifier $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\|f(0+h, 0+k) - f(0,0) - Df(0,0)\binom{h}{k}\|}{\|(h,k)\|} = 0$?

si cela marche alors c'est bien différentiable.
sinon ça v^t dire la différentielle n'$\nexists$.

- À vérifier $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\left|\frac{hk}{h^2+k^4} - 0 - (0;0)\binom{h}{k}\right|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$

⑩ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|hk|}{(h^2+k^4)\|(h,k)\|} = 0$?

Résolu° en pie exo 32 :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$$

i) Appli partielles : on fixe $y \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{xy}{x^2+y^4}$

somme / cont / produit / quotient dénominateur $\neq 0$ car $y^4 > 0$ $\Longrightarrow$ cont.

pour $y = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{0.x}{x^2+0^4} = 0 \Longrightarrow$ cont.

- On fixe $x \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{xy}{x^2+y^4}$ somme pdt quot^t dén $\neq 0$ $\Longrightarrow$ cont.

pour $x = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{0 \cdot y}{0^2+y^4} = 0 \Rightarrow$ cont.

ii) f cont ? Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car $\boxed{SPQR \neq} 0$.

cont en $(0,0)$? $\Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy}{x^2+y^4} \right| \overset{?}{=} 0$.

Droite

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ k = \lambda k}} \frac{|\lambda h^2|}{h^2+\lambda^2 h^4} = \lim_{h\to 0} \frac{|\lambda|}{1+\lambda^2 h^2} = \frac{\lambda}{1} = \lambda \neq 0$$

↳ pas cont à l'$\varnothing$ donc pas différentiable à $\varnothing$.

(iv) $\partial_i f$ cont sur $\mathbb{R}^2$?

$\boxed{2M}$ $\boxed{M1}$ on vérifie $\lim (\partial_1 f)(x,y) = (\partial_1 f)(0,0) = 0$

$x = y$ donne pas 0 ☺

$$\frac{y(x^2+y^4) - xy\,2x}{(x^2+y^4)^2}$$

$\boxed{M2}$ si oui, TH f est différentiable partout

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(Df)(x) = \left((\partial_1 f)(x) \, ; \, (\partial_2 f)(x) \, ; \dots ; \, (\partial_n f)(x) \right).$$

$Df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire

n colonnes, p lignes : $(n \times p)$

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \partial_1 f_p & \partial_2 f_p & \cdots & \partial_n f_p \end{pmatrix}$$

$\boxed{28}$ $g(x,y,z) = f(x-y, \, y-z, \, z-x)$.

Composée : on pose

$$F(x,y,z) = (x-y, \, y-z, \, z-x) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}.$$

$$g(x,y,z) = f(F(x,y,z))$$

$$D_g(-) = Df(F(-)) . DF'(-) = \because$$

$$\cdot \; Df(x,y,z) = \left(\partial_1 f(x,y,z) \, ; \, \partial_2 f \, ; \, \partial_3 f \right)$$

$$DF(x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \partial_1 F & \partial_2 F & \partial_3 F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{par rapport à } x & \text{par rap à } y & \text{par rap à } z \end{array} \end{array}$$

⚠ Écrire les coordonnées.

$$\because = \left(\partial_1 f(F(x,y,z)) ; \partial_2 f ; \partial_3 f \right) . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\partial_1 f(F(x,y,z)) - \partial_3 f \, ; \, \partial_1 f(F(x,y,z)) + \partial_2 f \, ; \, -\partial_2 f + \partial_3 f \right).$$

Compliment

$f(x,y)$ $\quad Df(x,y) = \left(\partial_1 f(x,y) \; ; \; \partial_2 f(x,y) \right)$

$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \quad Dg(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}.$

$h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$

$Dh(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t)$

$= \left(\partial_1 f(g(t)) \; ; \; \partial_2 f(g_1(t), g_2(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$

$= \partial_1 f(g_1(t), g_2(t)) . g_1'(t) + \partial_2 f(g_1(t), g_2(t)) . g_2'(t)$

$g(t) = (e^t + t \, , \sin(t^2))$ deux coordonnées

$Dg(t) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(t) \\ (\partial_1 g_2)(t) \end{pmatrix}$

- $(\partial_1 g_1)(t) = e^t + 1 \ldots$
- $(\partial_1 g_2)(t) = Dg(f) \times Df = \cos(t^2) . 2t$

$Dg(t) = \begin{pmatrix} e^t + 1 \\ \cos(t^2) . 2t \end{pmatrix}$

Ex 84

$f(x,y) = x^2 + \dfrac{y}{x}$ (Un seul coordonné)

$Df(x,y) = \left((\partial_1 f)(x,y) \quad (\partial_2 f)(x,y) \right)$

- $(\partial_1 f)(x,y) = 2x - \dfrac{y}{x^2}$
- $(\partial_2 f)(x,y) = \dfrac{1}{x}$.

$Df(x,y) = \left((\partial_1 f)(x,y) \quad (\partial_2 f)(x,y) \right)$

$Df(x,y) = \left(2x - \dfrac{y}{x^2} \quad \dfrac{1}{x} \right)$

complément $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$(\partial_1 f)(0,0,\ldots,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,0,\ldots,0) - f(0,\ldots,0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+0}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h} \quad \nexists \quad \cancel{= \pm 1}$.

mais $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1$.

$\Rightarrow (\partial_1 f)(0) \nexists \quad \Rightarrow Df(0) \nexists$.

ou Différentielle : matrice n colonnes $\times$ p lignes.

Compliment

$$(\partial_1 h)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0+t,0) - h(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

25 : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \sin(x^2 y)$

. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $g(x,s) = (x^2+s,\ s-x)$

Déterminer dérivées partielles / différentielle
En déduire la différentiel de f composée $h(x,s) = f(g(x,s))$.

f : une seule coordonnée

g : 2 coordonnées.

$$Df = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(x,y) & (\partial_2 f)(x,y) \end{pmatrix} \qquad Dg = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(x,y) & (\partial_2 g_1)(x,y) \\ (\partial_1 g_2)(x,y) & (\partial_2 g_2)(x,y) \end{pmatrix}$$

- $(\partial_1 f)(x,y) = \cos(2x.y).\ 2xy$
- $(\partial_2 f)(x,y) = \cos(x^2).\ x^2$

$$\Rightarrow Df = \begin{pmatrix} \cos(2xy).\ 2xy & \cos(x^2).\ x^2 \end{pmatrix}$$

- $(\partial_1 g_1)(x,s) = 2x \qquad (\partial_1 g_2)(x,s) = -1$
- $(\partial_2 g_1)(x,s) = 1 \qquad (\partial_2 g_2)(x,s) = 1$

$$\Rightarrow Dg = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la différentielle de la f composée $h(x,s) = f(g(x,s))$.

$$h = f\circ g = Df(g).Dg = Dh(x,s)$$

$$Df(g(x,s)) = \big(\cos(2(x^2+s)(s-x)).\ 2(x^2+s)(s-x) \quad \cos(x^2+s)^2.(x^2+$$

Donc $Dh = Df(g(x,s)).\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Dh = \big(\cos(2(x^2+s))(s-x)^2.\ 2(x^2+s) \quad \cos(x^2+s)^2.(x^2+s)^2\big)\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Dh = \big(4x(x^2+s)(s-x)^2\cos(2(x^2+s)) - \cos(x^2+s)^2(x^2+s)^2$$

$$2\cos(2(x^2+s))(s-x)^2(x^2+s) + \cos(x^2+s)^2(x^2+s)^2\big)$$

⚠ Dh : matrice 1×2 : 1 ligne × 2 colonnes.

$$t(a\pm b) = \frac{t(a) \pm t(b)}{1 \mp t(a).\ t(b)}$$

$s(a\pm b) = s(a).\ c(b) \pm c(b).\ s(a)$ | $c^2(a) = \dfrac{1+c(2a)}{2}$

$c(a\pm b) = c(a).\ c(b) \mp s(a).\ s(b)$ | $s^2(a) = \dfrac{1-c(2a)}{2}$

$$t^2(a) = \frac{1-c(2a)}{1+c(2a)}$$

25 **26** : soit $f, k, l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des appli différentiables. Exprimer les dérivées partielles des fs F_i en termes des dérivées partielles des foncts f, g, h, k, l.

(ii) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = f(g(x), h(x))$

$$(DF_2)(x) = Df(h(x), g(x)) = Df(J(x))$$
$$= (Df)(J(x)).(DJ(x))$$

▸ $DJ(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 h)(x) \\ (\partial_2 g)(x) \end{pmatrix}$ on dérive par rapport à x.

▸ $(Df)(J(x)) = (Df)((\overset{a}{h(x)}, \overset{b}{g(x)}) = ((\partial_1 f)(J(x)) \quad (\partial_2 f)(J(x)))$

ici on dérive ~~f~~ à $J(x)$. ⚠ 2 coord. ds $J(x)$.

Donc $(DF_2)(x) = (Df)(J(x)).(DJ(x))$

$$= \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(J(x)) & (\partial_2 f)(J(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial_1 h)(x) \\ (\partial_2 g)(x) \end{pmatrix}$$

$$= \left(((\partial_1 f)(J(x)).(\partial_1 h)(x) + (((\partial_2 f)(J(x)).(\partial_1 g)(x) \right).$$

(iii) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_3(x,y) = f(g(x), h(y))$.

on pose $J = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix}$: 2 coord.

$$DF_3(x,y) = Df(J(x,y)).DJ(x,y).$$

▸ $(DJ)(x,y) = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$
$$\begin{pmatrix} (\partial_1 g)(x) & (\partial_2 g)(y) = 0 \\ (\partial_1 h)(x) = 0 & (\partial_2 h)(y) \end{pmatrix}$$

▸ $(Df)(J(x,y)) = (Df)\begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(J(x,y)) & (\partial_2 f)(J(x,y)) \end{pmatrix}$

Donc $Df(J(x,y)).DJ(x,y) = *$

$$* = \left((\partial_1 f)(J(x,y)).(\partial_1 g)(x) + (\partial_2 f)(J(x,y)).(\partial_2 h)(y) \right).$$

30 soit E evn et f une appli de E dans $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in E$: on ait : $|f(x)| \leq \|x\|^2$.

Mq f est différentiable en 0. Calculer sa différentielle en ce point.

On cherche à différentier en $a=0$, de plus ?

$|f(0)| \leq \|0\|^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$; $|f(x)| \leq \|x\|^2$

$\Rightarrow \|f(x)\| \leq \|x\|^2 \Rightarrow \dfrac{\|f(x)\|}{\|x-a\|} \leq \|x\|$

$\Rightarrow \dfrac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq \|x\|$ où g est une AL nulle.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq \lim\limits_{x \to a=0} \|x\|$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq 0$ (TD6)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \Rightarrow f$ est différentiable en 0.

31 (i) En quels pts l'applicat° de $\mathbb{R}$ ds lui-même : $x \to |x|$ est-elle différentiable ?

(ii) En quels pts l'applicat° de $\mathbb{R}^n$ ds $\mathbb{R}$: $x \mapsto \|x\|_2^2$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle en ces points.

(iii) Même q° pour l'appli de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \|x\|_2$

(iv) Même q° pour ——— ——— : $x \mapsto \|x\|_1$.

34 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une f deux fois dérivable sur int. $I \subset \mathbb{R}$. On considère appli $g : I \times I \to \mathbb{R}$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Pour $x_0 \in I$ fixé et $u \in I \setminus \{x_0\}$, on déf :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{f'(u) - f'(x_0)}{u - x_0} - f''(x_0)$$

$$\varphi(u) = f(u) - u . f'(x_0) - \frac{1}{2}(u - x_0)^2 . f''(x_0)$$

(i) Mq g est différentiable en tt point $(x_0, y_0) \in I \times I$ tq $x_0 \neq y_0$ et déterminer sa différentielle en ce point.

(ii) En appliquant TAF à φ, Mq $\forall x,y \in I$, $x<y$:

$$\left| g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{1}{2} . f''(x_0) . (x - x_0 + y - y_0) \right| \leq \max_{u \in [x,y]} |u - x_0| . |\mathcal{E}(u)|$$

(iii) Mq g est différentiable en (x_0, x_0). Déterminer $(Dg)(x_0, x_0)$, sa différentielle en ce point.

(i) TH $\boxed{SPQ\ R}$, on ne divise pas par 0, dc f cont, g est différentiable.

Cas $x \neq y$: • $(\partial_1 g)(x,y) = \left[\dfrac{\partial u}{\partial x} v - \dfrac{\partial v}{\partial x} u \right] \dfrac{1}{v^2}$

$$= \frac{f(x)\,[(x-y) + f(y)]}{(x-y)^2}$$

• $(\partial_2 g)(x,y) = \dfrac{f(y)\,[x - y - 1] + f(x)}{(x-y)^2}$

(ii) $\varphi(u) = f(u) - u . f'(x_0) - \frac{1}{2}(u - x_0)^2 f''(x_0)$

$\varphi'(u) = f'(u) - f'(x_0) - (u - x_0) f''(x_0)$.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sup_{u \in [x,y]} |\varphi'(u)| . |x - y| = \mathcal{E}(u) . (u - x_0)$$

$$\left| \begin{matrix} f(x) - x . f'(x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \\ + y f'(x_0) + \frac{1}{2}(y - x_0)^2 f''(x_0) \end{matrix} \right| \leq \sup_{u \in [x,y]} \left(|\mathcal{E}(u)| . |u - x_0| \right)$$

Puis $g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0) . (x - x_0 + y - x_0)$

$$= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0 + y - x_0)$$

$$= \frac{f(x) - f(y) - f'(x_0)(x-y) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0 + y - x_0)(x-y)}{x - y}$$

$$= \frac{f(x) - f(y) - x . f'(x_0) + y f'(x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0) \left[(x-y)^2 - 2x_0(x-y) \right]}{x - y}$$

On a $f(x) - x. f'(x_0) - \frac{1}{2}(x-x_0)^2 . f''(x_0)$

$- f(y) + y f'(x_0) + \frac{1}{2}(y-x_0)^2 . f''(x_0)$.

Q° ? $\frac{1}{2}(x-x_0+y-x_0)(x-y) \overset{?}{=} -\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}(y-x_0)^2$?

oui

(iii) Différentielle en (x_0, x_0).

$Dg(x_0, x_0)$ mat (1×2).

Vérifions $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \dfrac{\left|g(x,y) - g(x_0,x_0) - Dg(x_0,x_0).\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-x_0\end{pmatrix}\right|}{\|(x-x_0, y-x_0)\|}$

D'après (ii), $|g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0+y-x_0)\|$

$\le \max\limits_{u\in[x,y]} |u-x_0| . |\varepsilon(u)|$.

$Dg(x_0,x_0) = (A, B)$

$A, B \in \mathbb{R}$.

$Dg(x_0,x_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-x_0\end{pmatrix} = A.(x-x_0) + B(y-x_0)$.

On devine $Dg(x_0,x_0) = \left(-\frac{1}{2} f''(x_0) ; -\frac{1}{2} f''(x_0)\right)$

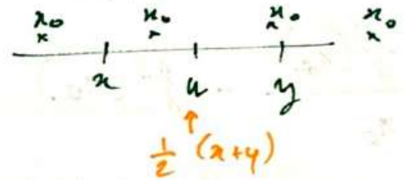
À vérifier $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \dfrac{|g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x+y-2x_0)|}{\|(x-x_0), (y-x_0)\|} \overset{?}{=} 0$

Par (ii) : $\dfrac{|g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x+y-2x_0)|}{\|(x-x_0, y-x_0)\|} \le \dfrac{\max\limits_{u\in[x,y]} |u-x_0|\,|\varepsilon(u)|}{\|(x-x_0, y-x_0)\|}$

Q° : P-t on trouver une cte ? (1 ou 2 ou ?)

$\max\limits_{u\in[x,y]} \dfrac{|u-x_0|}{|x-x_0|+|y-x_0|} \le$ cte.

oui



Distinguer 2 cas.

si $x_0 \le \frac{1}{2}(x+y)$

si $x \le u \le y$. $\Rightarrow |u-x_0| \le |y-x_0| \le |y-x_0| + |x-x_0|$

si $x_0 \ge \frac{1}{2}(x+y)$

Dans t les cas de figure

si $x \le u \le y \Rightarrow |u-x_0| \le |x-x_0| \le |x-x_0| + |y-x_0|$

$\Rightarrow \max\limits_{u\in[x,y]} \dfrac{|u-x_0|}{|x-x_0|+|y-x_0|} \le \dfrac{|x-x_0|+|y-x_0|}{|x-x_0|+|y-x_0|} \le 1$.

Il ns reste à mq : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \max\limits_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| = 0$.

$$\varepsilon(u) = \frac{f'(u) - f'(x_0)}{u - x_0} - f''(x_0).$$

Par définit° de $f''(x_0)$: $\lim\limits_{u\to x_0} \varepsilon(u) = 0$.

→ On sait $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall u$:

$|u - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1$.

→ On veut $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall (x,y)$:

$|x-x_0| + |y-x_0| < \delta_2 \Rightarrow \max\limits_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_2$.

On prend $\varepsilon_2 > 0$ arbitraire,

on sait $\forall \varepsilon_2$, prenons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, on aura $\varepsilon_1 > 0$.

$|u - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

q° trouver δ_2 tq

$|x-x_0| + |y-x_0| < \delta_2 \Rightarrow \forall u \in [x,y], |u-x_0| < \delta_1$

$\Downarrow$

$\max\limits_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \Leftarrow \quad \forall u \in [x,y], |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

On a mq' $\forall u\ [x,y]$:

$$\max_{u\in[x,y]} |u - x_0| \leq |x-x_0| + |y-x_0|.$$

On prend $\delta_2 = \delta_1$,

$|x-x_0| + |y-x_0| < \delta_1 \Rightarrow \forall u \in [x,y] : |u-x_0| < \delta_1$

$\Rightarrow$ ——— $: |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$\Rightarrow \max\limits_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_2$.

Méthode

On sait $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$ tq ———

On veut $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2$

On prend $\varepsilon_2 > 0$ arbitraire

On choisit ε_1 en f de ε_2 → svt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_2$

On obtient δ_1.

On choisit δ_2 en f de δ_1.

T.D

Différentiabilité

DS 6.19 : Déterminer les dérivées partielles $\partial_i f$:

(i) $f(x,y) = (y+2)^{x+2}$ (ii) $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} . \cos y$ (iii) $f(x,y) = \sqrt[5]{\cos(x^2y)}$

(iv) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (v) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$.

DS 6.20 : soit $f(x,y) = \exp((x^2+y^2)/(xy))$. Mq $\forall (x,y)$ de D_f on a :

$$x . (\partial_1 f)(x,y) + y(\partial_2 f)(x,y) = 0.$$

Rq : on écrit cette égalité ss forme $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

6.19

(i) $f(x,y) = (y+2)^{x+2} = e^{x+2 . \ln(y+2)}$

Or $(e^u)' = u'e^u$.

Calculons $(\partial_1 f)(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} . v + \frac{\partial v}{\partial x} u\right) e^{x+2 . \ln(y+2)}$

$(\partial_1 f)(x,y) = (\ln(y+2)) \quad (y+2)^{x+2}$

et $(\partial_2 f)(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial y} u\right) e^{x+2 . \ln(y+2)}$

$(\partial_2 f)(x,y) = \left(\frac{x+2}{y+2}\right) . (y+2)^{x+2}$.

(ii) $f(x,y) = e^{x^2/y} . \cos y$ $\quad \begin{cases} u = e^{x^2/y} \\ v = \cos y . \end{cases}$

- $(\partial_1 f)(x,y) = e^{x^2/y} . \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y$

$(\partial_1 f)(x,y) = \cos y . \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2/y}\right)$

$(\partial_1 f)(x,y) = \cos y . \frac{2x}{y} . e^{x^2/y}.$

- $(\partial_2 f)(x,y) = e^{x^2/y} . \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} . \cos y$

$(\partial_2 f)(x,y) = -\sin(y) . e^{x^2/y} + -\frac{x^2}{y} . e^{x^2/y} . \cos y.$

$$(\partial_2 f)(x,y) = -\frac{e^{x^2/y}(x^2 . \cos(y) + y^2 . \sin(y))}{y^2}$$

⚠ $\frac{d}{dx}\cos(2) = 0 \quad g(x,y) = \cos(y) \rightarrow (\partial_1 g)(x,y) = 0$
$\rightarrow (\partial_2 g)(x,y) = -\sin y$

(iii) $f(x,y) = \sqrt[5]{\cos(x^2y)}$

$$\frac{d\sqrt[5]{u}}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{u^{4/5}} \times \frac{du}{dx}$$

$4/5 = 1 - \frac{1}{5}$

- $(\partial_1 f)(x,y) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{u^{4/5}} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{\cos(x^2y)^4}} \times -2xy . \sin(x^2y)$

- $(\partial_2 f)(x,y) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{(\cos(x^2y))^4}} \times -x^2 . \sin(x^2y).$

(v) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$$

- $(\partial_1 f)(x,y) = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ • $(\partial_2 f)(x,y) = \dfrac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

(iv) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$.

25 **26** : soit $f, h, \ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des appli différentiables. Exprimer les dérivées partielles des fs F_i en termes des dérivées partielles des foncts f, g, h, k, ℓ.

(ii) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = f(g(x), h(x))$

$$(DF_2)(x) = Df(h(x), g(x)) = Df(J(x))$$
$$= (Df)(J(x)).(DJ(x))$$

▸ $DJ(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 h)(x) \\ (\partial_2 g)(x) \end{pmatrix}$ on dérive par rapport à x.

▸ $(Df)(J(x)) = (Df)(\overset{a,\,b}{(h(x), g(x))}) = ((\partial_1 f)(J(x)) \quad (\partial_2 f)(J(x)))$

ici on dérive f à $J(x)$. ⚠ 2 coord. de $J(x)$.

Donc $(DF_2)(x) = (Df)(J(x)).(DJ(x))$

$$= \left((\partial_1 f)(J(x)) \quad (\partial_2 f)(J(x))\right) \begin{pmatrix} (\partial_1 h)(x) \\ (\partial_2 g)(x) \end{pmatrix}$$

$$= (((\partial_1 f)(J(x)).(\partial_1 h)(x) + (((\partial_2 f)(J(x)).(\partial_1 g)(x))$$

(iii) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_3(x,y) = f(g(x), h(y))$.

on pose $J = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix}$: 2 coord.

$$DF_3(x,y) = Df(J(x,y)).DJ(x,y).$$

▸ $(DJ)(x,y) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} x & y \end{array}$

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \left(\begin{array}{c} (\partial_1 g)(x) \\ (\partial_1 h)(x) = 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} (\partial_2 g)(y) = 0 \\ (\partial_2 h)(y) \end{array}\right) \end{array}$$

▸ $(Df)(J(x,y)) = (Df)\begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix} = \left((\partial_1 f)(J(x,y)) \quad (\partial_2 f)(J(x,y))\right)$

Donc $Df(J(x,y)).DJ(x,y) = *$

$$* = \left((\partial_1 f)(J(x,y)).(\partial_1 g)(x) + (\partial_2 f)(J(x,y)).(\partial_2 h)(y)\right).$$

Il ns reste à mq : $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \max_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| = 0$.

$$\varepsilon(u) = \frac{f'(u) - f'(x_0)}{u - x_0} - f''(x_0).$$

Par définition de $f''(x_0)$: $\lim_{u\to x_0} \varepsilon(u) = 0$.

→ On sait $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall u$:
$|u - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1$.

→ On veut $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall (x,y)$:
$|x - x_0| + |y - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \max_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_2$.

On prend $\varepsilon_2 > 0$ arbitraire,
on sait $\forall \varepsilon_2$, prenons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, on aura $\varepsilon_1 > 0$.
$|u - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

q$^{\text{a}}$ trouver δ_2 tq
$|x - x_0| + |y - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \forall u \in [x,y], |u - x_0| < \delta_1$
$\Downarrow$
$\max_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \Leftarrow \quad \forall u \in [x,y], |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

On a mq' $\forall u\ [x,y]$:
$\max_{u\in[x,y]} |u - x_0| \le |x - x_0| + |y - x_0|$.

On prend $\delta_2 = \delta_1$,
$|x - x_0| + |y - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \forall u \in [x,y] : |u - x_0| < \delta_1$
$\Rightarrow$ —— $: |\varepsilon(u)| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2$
$\Rightarrow \max_{u\in[x,y]} |\varepsilon(u)| < \varepsilon_2$.

Méthode

On sait $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$ tq ——
On veut $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2$
On prend $\varepsilon_2 > 0$ arbitraire
On choisit ε_1 en f de ε_2 → soit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \dots \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_2$
On obtient δ_1.
On choisit δ_2 en f de δ_1.

Différentiabilité ordre supérieur

Mq f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f déf par

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$(x,y) \neq (0,0)$.

$$= \frac{x^4y - 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(\partial_2 f)(x,y) = \frac{-y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$(x,y) \neq (0,0)$

$\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ st cont sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\boxed{SPQR}$ somme / produit / quotient & dénominat^n de f non nul.

- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0 = (\partial_1 f)(0,0)$
- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0 = (\partial_2 f)(0,0)$.

Si $Df(0,0)$ $\exists$, c'est $(\partial_1 f ; \partial_2 f) = (0,0)$

À vérifier :

* pas utile ici car q° classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\| f(h,k) - f(0,0) - (0;0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{| hk(h^2-k^2)|}{(h^2+k^2)\,\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$$

Calcul :
$$0 \leq \frac{|hk(h^2-k^2)|}{(h^2+k^2)\,\|(h,k)\|} \leq \frac{|hk|\,(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\,\|(h,k)\|}$$

On sait pour $\|(h,k)\|_{1,2,\infty}$: $|h| \leq \|(h,k)\|_{1,2,\infty}$
$|k| \leq \|(h,k)\|_{1,2,\infty}$

$$\leq \frac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|} = \|(h,k)\| \quad \text{a} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \|(h,k)\| = 0.$$

↳ Par Th des gendarmes : $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|f(h,k) - f(0,0) - (0;0)\binom{h}{k}|}{\|(h,k)\|} = 0$

- $\partial_i f$ cont en $(0,0)$ $\iff$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\partial_1 f(x,y) - \partial_1 f(0,0)| = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \right| = 0 \ ?$$

$$0 \leq \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{4+1} + 4\sqrt{\ }^{2+3} + \sqrt{\ }^{5}}{(x^2+y^2)^2} = 6\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(\partial_2 f)(x,y) = \frac{-y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

- $\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial_2 f(t,0) - \overset{0}{\partial_2 f(0,0)}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left.\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right|_{x=t,\,y=0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

- $\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left.\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right|_{x=0,\,y=t}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1.$$

On a bien mq $\underline{\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)}$

dc ce n'est pas différentiable

?n mq f est 2 fois diffé $\Leftarrow$ $\exists$ cont.

Rq $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$Df : \mathbb{R}^2 \to AL(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(1\times 2) \cong \mathbb{R}^2$

$Df(x,y) = (\partial_1 f(x,y) \quad \partial_2 f(x,y))$

$$D(Df)(x,y) \quad \mathrm{mat}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \overset{1}{\partial_2\partial_1 f} \\ \underset{-1}{\partial_1\partial_2 f} & \partial_2\partial_2 f \end{pmatrix}$$

or ils doivt ê idtq pr q cela soit 2 fois différentiable.

__Notat°__ : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$(\partial_1 f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = \partial_{x_1} f(x)$$

$n=3$: $(\partial_1 f)(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (\partial_x f)(x,y,z)$

$(\partial_2 f)(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$

⚠ $f(x,y) \to g(x,y) = f(y,x)$

- $\partial_1\partial_2 f(x) = \partial_1(\partial_2 f)(x) \overset{\text{notat°}}{=} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$

$$0 \leq \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{4+1} + 4\sqrt{\ }^{2+3} + \sqrt{\ }^{5}}{(x^2+y^2)^2} = 6\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(\partial_1 f)(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(\partial_2 f)(x,y) = \frac{-y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

- $\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0) - \overset{0}{\partial_2 f(0,0)}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left.\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right|_{x=t,\, y=0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

- $\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left.\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right|_{x=0,\, y=t}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1.$$

On a bien mq $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$

dc ce n'est pas différentiable

?n mq f est 2 fois diffé $\Leftrightarrow$ $\exists$ cont.

Rq $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$Df : \mathbb{R}^2 \to AL(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) = Mat(1\times 2) \cong \mathbb{R}^2$

$Df(x,y) = (\partial_1 f(x,y) \quad \partial_2 f(x,y))$

$$D(Df)(x,y) \underset{\text{mat } 2\times 2}{=} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \overset{1}{\partial_2\partial_1 f} \\ \underset{-1}{\partial_1\partial_2 f} & \partial_2\partial_2 f \end{pmatrix}$$

or ils doivt ê idtq pr q cela soit 2 fois différentiable.

Notaº : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$(\partial_1 f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \partial_{x_1} f(x)$$

$n=3$ $(\partial_1 f)(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (\partial_x f)(x,y,z)$

$(\partial_2 f)(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$

⚠ $f(x,y) \to g(x,y) = f(y,x)$

- $\partial_1\partial_2 f(x) = \partial_1(\partial_2 f)(x) \overset{\text{notaº}}{=} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$

5° Exos Suppl: Mat Hessienne

(D) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une f (au moins) deux fois différentiable. Alors la mat Hessienne (appelé Hessien) de f en un point $x \in U$ est la mat $(n \times n)$ des dériv. part. secondes $(\partial_i \partial_j f)(x)$ au point x.

Ex 0.2 (ii) $g(x,y) = f(x^2+y, \sin(xy))$

$F(x,y) = (x^2+y, \sin(x,y))$

$g = f \circ F$.

$Dg(x,y) = Df(F(x,y)) \cdot DF(x,y)$.

$Dg(u,v) = (\partial_1 g(u,v) \;;\; \partial_2 g(u,v))$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x,y) & \partial_2 F_1(x,y) \\ \partial_1 F_2(x,y) & \partial_2 F_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$Dg(x,y) = Df(F(x,y)) \cdot DF(x,y)$$
$$= (\partial_1 f(F(x,y)) \;;\; \partial_2 f(F(x,y))) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\partial_1 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_1 + \partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2 \;;\; \partial_1 f(F(x,y)) \cdot \partial_2 F_1 + \partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_2 F_2\Big)$$

$= (\partial_1 g(x,y) \;;\; \partial_2 g(x,y))$.

or $\underline{\partial_1 g(x,y) = \partial_1 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_1(x,y) + \partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)}$

$D(\partial_1 g)(x,y) = D(\;\text{———}\;)$

Calculons la différentielle de $\partial_1 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_1(x,y)$.

$$D\Big(\partial_1 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_1(x,y)\Big)$$

$$= D(\partial_1 f(F(x,y))) \cdot \partial_1 F(x,y) + \partial_1 f(F(x,y)) \cdot D\partial_1 F_1(x,y))$$

$$= (D(\partial_1 f))(F(x,y)) \cdot DF(x,y) \cdot \partial_1 F_1(x,y)$$
$$+ \partial_1 f(F(x,y)) \cdot (\partial_1(\partial_1 F_1)(x,y) \;;\; \partial_2(\partial_1 F_1)(x,y))$$

$$= \Big(\partial_1(\partial_1 f)(F(x,y)) \;;\; \partial_2(\partial_1 f)(F(x,y))\Big) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1(x,y) \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{pmatrix} \cdot \partial_1 F(x,y)$$

$$+ (\partial_1 f(F(x,y)) \cdot (\partial_1 \partial_1 F_1(x,y) \;;\; \partial_2 \partial_1 F_1(x,y))$$

(24) m.b. x mat + m.b. x mat $\quad g \cdot f \quad Dg \cdot Df = g\, Df + f\, Dg$

$= (\partial_1\partial_1 f \cdot \partial_1 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_1 F_2 \; ; \; \alpha$

$\alpha = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_2 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_2 F_2 \quad) \cdot \partial_1 F_1$

$+ (\partial_1 f \cdot \partial_1\partial_1 F_1 \; ; \; \partial_1 f \cdot \partial_2\partial_1 F_1)$

= partie de $D\partial_g(x,y)$

$= \left(\partial_1\partial_1 g(x,y) \; ; \; \partial_2\partial_1 g(x,y) \right)$

- $\partial_1\partial_1 g(x,y) = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_1 F_1 \cdot \partial_1 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_1 F_2 \cdot \partial_1 F_1$
 $+ \partial_1 f \cdot \partial_1\partial_1 F_1$ + autre moitié
- $\partial_2\partial_1 g(x,y) = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_2 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_2 F_2$
 $+ \partial_1 f \cdot \partial_2\partial_1 F_1$ + autre moitié

Autre moitié

Calculons la différentielle de $\underbrace{\partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)}_{\text{produit}}$

$D\left[\underbrace{\underbrace{(\partial_2 f)(F(x,y))}_{\text{composée}} \cdot \partial_1 F_2(x,y)}_{\text{produit}} \right]$

Autre méthode :

$\partial_1\left(\partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)\right)$ et $\partial_2\left(\partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)\right)$

▶ $\partial_1\left[(\partial_2 f)(F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot (\partial_1 F_2)(x,y) \right]$ produit

$= \partial_1\left[(\partial_2 f)(F_1(x,y), F_2(x,y)) \right] \cdot (\partial_1 F_2)(x,y)$

$+ (\partial_2 f)(F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot \partial_1\left[\partial_1 F_2(x,y) \right].$

$[g \cdot Df + f \cdot Dg]$

composée

$= \Big[\big[\partial_1 (\partial_2 f)(F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot \partial_1 F_1(x,y)\big]$

$+ (\partial_2\partial_2 f)(F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y) \Big] \cdot (\partial_1 F_2)(x,y)$

$+ \partial_2 f \cdot \partial_1\partial_1 F_2$

$= \partial_1\partial_2 f \cdot \partial_1 F_1 \cdot \partial_1 F_2 + \partial_2\partial_2 f \cdot \partial_1 F_2 \cdot \partial_1 F_2 + \partial_2 f \cdot \partial_1\partial_1 F_2$

▶ $\partial_2\left(\partial_2 f(F(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)\right)$ on dérive / à y.

$\partial_2\left(\partial_2 f(F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot \partial_1 F_2(x,y)\right)$

$= \partial_2 f \cdot \partial_2\partial_1 F_2 + \partial_1\partial_2 f \cdot \partial_2 F_1 \times \partial_1 F_2 + \partial_2\partial_2 f \cdot \partial_2 F_2 \cdot \partial_1 F_2$

encore une partie de $D\, \partial_1 g(x,y)$.

On trouve au total :

$\partial_1\partial_1 g(x,y) = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_1 F_1 \cdot \partial_1 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_1 F_2 \cdot \partial_1 F_1$
$+ \partial_1 f \cdot \partial_1\partial_1 F_1$
$+ \partial_1\partial_2 f \cdot \partial_1 F_1 \cdot \partial_1 F_2 + \partial_2\partial_2 f \cdot \partial_1 F_2 \cdot \partial_1 F_2$
$+ \partial_2 f \cdot \partial_1\partial_1 F_2$.

$\partial_2\partial_1 g(x,y) = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_2 F_1 \cdot \partial_1 F_1 + \partial_2\partial_1 f \cdot \partial_2 F_2 + \partial_2 F_2$
$+ \boxed{\partial_1 f \cdot \partial_2\partial_1 F + \partial_2 f \cdot \partial_2\partial_1 F}$
$+ \partial_1\partial_2 f \cdot \partial_2 F_1 \cdot \partial_1 F_2 + \partial_2\partial_2 f \cdot \partial_2 F_2 \cdot \partial_1 F_2$.

si $g = f \circ F$
$Dg = Df(F) \cdot DF$

$g'' = (f' \circ F)' \cdot F' + f' \circ F)\, F''$
$g'' = (f'' \circ F) \cdot F' * F' + (f' \circ F) \cdot F''$

Leibniz

une variable

1 var : $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

plus var $D(f \cdot g)$ $(p \times n)$ p lignes n colonnes.

chain $f \to \mathbb{R}$, $g \to \mathbb{R}^p$ ou $f \to \mathbb{R}^p$, $g \to \mathbb{R}$

▶ $D(f \cdot g) \overset{?}{=} Df \cdot g + f \cdot Dg$ a un sens ? oui

mat p lignes n col ; $\in \mathbb{R}$; vect^{r} p lignes 1 col ; mat 1 ligne n col

en général $D(f \cdot g) = g \cdot Df + f \cdot Dg$

▶ $D(f \cdot g) \overset{?}{=} Df \cdot g + f \cdot Dg$ ici non.

$\partial_1\partial_1 g = \partial_1 F_1\ \partial_1\partial_1 f\ \partial_1 F_1 + \partial_1 F_2\ \partial_2\partial_1 f\ \partial_1 F_1$
$+ \partial_1 F_1\ \partial_1\partial_2 f\ \partial_1 F_2 + \partial_1 F_2\ \partial_2\partial_2 f\ \partial_1 F_2$
$+ \partial_1 f\ \partial_1\partial_1 F_1 + \partial_2 f\ \partial_1\partial_1 F_2$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_1 F_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f \\ \partial_1\partial_2 f & \partial_2\partial_2 f \end{pmatrix}}_{\text{mat Hessienne évaluée en } F(x,y)} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 \\ \partial_1 F_2 \end{pmatrix}$$

$F' \cdot f' \cdot F'$

$$+ \begin{pmatrix} \partial_1 f & \partial_2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 F_1 \\ \partial_1\partial_1 F_2 \end{pmatrix}$$

$f' \cdot F''$

Puis écrire en chg^t indices :

$$\partial_2\partial_1 g(x,y) = (\partial_2 F_1 \quad \partial_2 F_2)\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_1 f\\ \partial_1\partial_2 f & \partial_2\partial_2 f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_2 F_1\\ \partial_1 F_2\end{pmatrix} + \alpha$$

$$\partial_2\partial_2 g(x,y) =$$

$$\alpha = (\partial_1 f \quad \partial_2 f)\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 F_1\\ \partial_2\partial_1 F_2\end{pmatrix}$$

$$(Dh)(x,y) = D\big(f(x).\cos(g(y))\big)$$

écriture pas de sens

$$= D(f(x)).\cos(g(y)) + f(x).D(\cos(g(y)))$$

$$= (Df)(x).\cos(g(y)) + f(x).\big(D(\cos\circ g)\big)(y)$$

$$= f'(x).(1,0).\cos(g(y)) + f(x)(-\sin.g(y)).g'(y).(1$$

Ex2 (i) Exprim mat Hessienne de h en f des dérivées de f et g.

$$h(x,y) = f(x).\cos(g(y)).$$

$$(Dh)(x,y) = \big(\partial_1(f(x).\cos(g(y))) ; \partial_2(\text{———})\big)$$

$$= \big(f'(x).\cos(g(y)) ; -f(x)\sin(g(y)).g'(y)\big)$$

---

mais $f(x) = \sin(x^2)$ $\quad (\sin(x^2))' = \cos(x^2).2x$

$(f(x))'$ pas de sens. $\quad f'(x)$ oui

↑ nombre

$$f(x) = f(\pi_1(x,y)) \longrightarrow (Df\circ\pi_1)(x,y)$$

$$g(y) = g(\pi_2(x,y))$$

$$= f'(\pi_1(x,y)).D\pi_1(x,y)$$

$$= f'(x).(1;0)$$

$\pi_1(x,y) = x \quad (\partial_1\pi_1)(x,y) = 1$

et $\quad (\partial_2\pi_1)(x,y) = 0$

Ex 3 : soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y,z) = \left(x^4+y^2+z^3,\ e^x \sin(yz)\right)$$

Justif f est deux fois différentiable et

calcule $\left((D^2 f)(0,\pi,1)\right)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$,

–

Argmts $\partial_2 \partial_{..}$ st ttes cont dc f est deux fois différentiable.

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$(D^2 f)(x)(v_1,v_2) = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i \partial_j f)(x)\,(v_1)_i\,(v_2)_j$$

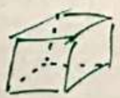
$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$x \in U$

$$(D^2 f)(x)(v,w) =$$

$$(v_1\ v_2 \dots v_n)\begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f & \partial_1\partial_n f \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1\partial_n f & \dots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

mat hessienne

Si dérivée triple  .

8.7 soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $\boxed{\text{Extrema}}$

(i) Trouver points critiqs

(ii) Décider si ce st des extrema locx ou globx

(i) Points critiqs : $\partial_1 f(x,y) = 0 \quad 3x^2 - 3y = 0 \quad x^2 = y$

$\partial_2 f(x,y) = 0 \quad 3y^2 - 3x = 0 \quad y^2 = x$

éviter introduire $\sqrt{\ }$

⚠ PDG seulmt pdt AL.

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^4 = x \end{cases} \quad \to x = 1 \text{ ou } x = 0.$$

Deux pts critiqs : $(0,0)$ et $(1,1)$.

$\partial_1 \partial_1 f(x,y) = 6x \qquad H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\partial_2 \partial_1 f(x,y) = -3$

$\partial_2 \partial_2 f(x,y) = 6y \qquad H(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

• $(0,0)$:

Calculons les $\boxed{\text{vp}}$:

• $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) \Rightarrow$ point selle car $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

on a besoin seulement des signes des vp.

$\boxed{M}$ Sylvester :

$\det(0)$, $\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ car $\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

0, -9

↳ on ne pt pas conclure av Sylvester.

$\boxed{M}$ Descartes

$\lambda^2 - 9 = 1.\lambda^2 + (-9).\lambda^0$

$\oplus \quad \ominus \quad \to$ 1 chgt de signe

$\Rightarrow$ 1 racine $S^T > 0$.

$\to$ pas 0 ĉ racine. $\overset{dc}{\Rightarrow}$ point selle.

$\Rightarrow$ 1 racine $S^T < 0$

• $(1,1)$: vp $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ si mat réelle symétriq $\Rightarrow P_c$ scindé.

$\boxed{M}$ classiq

$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda - 9)$

$\Rightarrow$ minimum local car vp positives.

$\boxed{M}$ Sylvester :

$\det(6)$, $\det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$: $6, 27$: deux fois $\oplus \Rightarrow$ 2 racines $S^T \oplus$.

$\boxed{M}$ Descartes :

$1.\lambda^2 + (-12)\lambda^2 + 27(\lambda)^0$

$+ \quad - \quad +$: 2 chgts de signe

$\Rightarrow$ 2 racines $S^T \oplus$.

→ Déterminer si c'est min/max local ou global

$f(1,1) = -1$, $f(-2,0) = -8$

Donc ce n'est pas des minima globaux.

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ pas compact.

si $x \in$ td $-\infty$

impaire.

8.9 soit $K = [0,1]^2$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

(i) Trouver points critiqs de h

(ii) Déterminer extrema locaux & globaux de h sur K.

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{(1+x^2)(1+y^2) - 2x\,(x+y)(1+y^2)}{(1+x^2)^2\,(1+y^2)^2}$$

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{1 + x^2 - 2x^2 - 2xy}{((1+x^2)^2(1+y^2)^2} = 0$$

$$\partial_2 h(x,y) = \frac{1 - y^2 - 2y^2 - 2yx}{((1+x^2)^2(1+y^2)^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 - x^2 - 2xy = 0 \\ 1 - y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

⚠ la substitution ds équat précédente

$$\begin{cases} 1 - y^2 - 2y.y = 0 \quad \to y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{ou} \\ 1 - y^2 - 2(-y)\,y = 0 \quad \to \text{pas de solut.} \end{cases}$$

On l'insère ds l'équat. $x^2 + y^2$.

→ Points critiqs : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$\partial_1\partial_1 h$?

$\partial_2\partial_1 h$?

$\partial_2\partial_2 h$?

& $\partial_1 h = \dfrac{1 - x^2 - 2xy}{(1+x^2)^2\;(1+y^2)} = \dfrac{u}{v}$

$$\cdot\ \partial_1\partial_1 h = \frac{(-2x-2y)\,D - (1 - x^2 - 2xy)\,\partial_1 D}{D^2}$$

$$\partial_1\partial_1 h = \frac{2(x^3 + 3x^2y - 3x - y)}{(x^2+1)^3\,(y^2+1)^2}$$

$$(\partial_1\partial_1 h)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$(\partial_2\partial_1 h)^{\text{pt}}_{\text{critiq}}\ \dfrac{\partial_2 u}{v} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2(1+y^2)} = \dfrac{-2/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$, autre point $\dfrac{+2/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$

$(\partial_2\partial_2 h)^{\text{pt}}_{\text{critiq}} = \dfrac{\partial_2 v}{} = \dfrac{-2y - 2x}{(1+y^2)^2(1+x^2)} = \dfrac{-4/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$, autre pt $\dfrac{+4/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$

or $u(\text{pt critiq}) = 0 \Rightarrow \partial_2\partial_1 h = \dfrac{(\partial_2 u).v - u.\partial_2 v}{v^2}$ pt critiq $= \dfrac{\partial_2 u}{v}$

$$\left(\partial_1 \partial h\right)^{pt}_{crit_4} = \frac{-4/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} \text{ , autre point } \frac{+4/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$$

$$\cdot\, H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-4/\sqrt{3}}{(4/3)^3} & \frac{-2/\sqrt{3}}{(4/3)^3} \\ \frac{-2/\sqrt{3}}{(4/3)^3} & \frac{-4/\sqrt{3}}{(4/3)^3} \end{pmatrix} = \frac{-2/\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\, H\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = + \frac{2\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vp ?

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

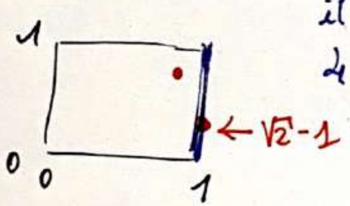
⚠ coeff global $\ominus$ $\Rightarrow$ max local $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

de m̂ $\oplus$ $\Rightarrow$ min local $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Extrema sur $[0,1]^2$? $\notin$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ max local.

global ?



il faut ① ① 4 bords.

(i) bord $x = 1$, y de 0 à 1.

$$f(1,y) = \frac{1+y}{2(1+y^2)}$$

$$\frac{1 \cdot 2(1+y^2) - (1+y) \cdot 4y}{4(1+y^2)^2} = f'(1,y)$$

$$\frac{1-2y-y^2}{2(1+y^2)^2} = f'(1,y).$$

$$y^2 + 2y - 1 = 0 \rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}-1}{2(1+(1-\sqrt{2})^2)}$$

(Rq) : Les ff des dérivées à une ou deux variables st des cas particuliers de f composée.

1 variable

@$_1$ $(f+g)' = f'+g'$; on def $\begin{cases} S(u,v) = u+v \\ F(x) = (f(x), g(x)). \end{cases}$

On a ff $f+g = S\circ F$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

• $(DS)(u,v) = ((\partial_1 S)(u,v) ; (\partial_2 S)(u,v)) = (1,1)$

• $(DF)(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 F_1)(x) \\ (\partial_1 F_2)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$.

• $(D(S\circ F))(x) = (DS)(F(x)).(DF)(x) = (1,1)\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$
$= 1.f'(x) + 1.g'(x)$.

@$_2$ $P(u,v) = uv$

• $(DP)(u,v) = ((\partial_1 P)(u,v) ; (\partial_2 P)(u,v)) = (v, u)$.

• $(D(P\circ F))(x) = (DP)(F(x)).(DF)(x)$
$= (g(x), f(x))\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$
$= g(x).f'(x) + f(x).g'(x)$.

@$_3$ $Q(u,v) = \frac{u}{v}$, $Q : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

• $(DQ)(u,v) = ((\partial_1 Q)(u,v) \quad (\partial_2 Q)(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{pmatrix}$

• $(D(Q\circ F)(x)) = (DQ)(F(x)).(DF)(x)$
$= \begin{pmatrix} \frac{1}{g(x)} & \frac{-f(x)}{g^2(x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$
$= \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$.

Plusieurs variables

@$_1$ $S_v : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$

$S(u,v) = u + v$ vecteurs

$F : U \to \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$, $F(x) = (f(x), g(x))$; $U \subset \mathbb{R}^n$

On a bien $(D(S\circ F))(x) = (Df)(x) + (Dg)(x)$.

@$_2$ $P_v : \mathbb{R}^p\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$: $P_v(u,v) = u.v$ vecteur, nombre.

ie $P_v(u_1, \dots, u_m) = (u_1.v, \dots, u_m.v)$.

$f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^{p+1}$:

$F(x) = (f(x), g(x)) \equiv (f_1(x), \dots, f_p(x), g(x))$.

• $(DF)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_m f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & & \cdots & \partial_m f_2(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_p(x) & \partial_2 f_p(x) & \cdots & \partial_m f_p(x) \\ \partial_1 g(x) & \partial_2 g(x) & & \partial_m g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix}$ $(p+1)\times m$

et

• $(DP_v)(u,v) = (DP_v)(u_1, \ldots, u_p, v)$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 (P_v)_1 (u,v) ; & \partial_2 (P_v)_1 (u,v) & \cdots & \partial_m (P_v)_1 (u,v) & \partial_{p+1} (P_v)_1 (u,v) \\ \vdots & & & & \\ \partial_1 (P_v)_p (u,v) ; & \partial_2 (P_v)_p (u,v) & \cdots & \partial_m (P_v)_p (u,v) & \partial_{p+1} (P_v)_p (u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v & 0 & \cdots & 0 & u_1 \\ 0 & v & & 0 & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & v & u_p \end{pmatrix} = (v \cdot Id ; u) \quad p \times (p+1)$$

• $P_v \circ F = f \cdot g$:

$$(D(P_v \circ F))(x) = (DP_v)(F(x)) = (DP_v)(f(x), g(x)) \cdot (DF)(x)$$

$$= (g(x) \cdot Id ; f(x)) \cdot \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix}$$

$$= g(x) \cdot Id \cdot (Df)(x) + f(x) \cdot Dg(x)$$

$$= g(x) \cdot (Df)(x) + f(x) \cdot (Dg)(x)$$

26 (ii) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = f(g(x), h(x))$.
$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G(x) = (g(x), h(x))$.

• $(DF_2)(x) = (D(f \circ G))(x) = (Df)(G(x)) \cdot (DG)(x)$.

• $(DG)(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g)(x) \\ (\partial_1 h)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$.

• $(Df)(x,y) = ((\partial_1 f)(x,y) \quad (\partial_2 f)(x,y))$

• $(D(f \circ G))(x) = (Df)(G(x)) \cdot (DG)(x)$

$$= ((\partial_1 f)(g(x), h(x)) \quad (\partial_2 f)(g(x), h(x))) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$$

$$= (\partial_1 f)(g(x), h(x)) \cdot g'(x) + (\partial_2 f)(g(x), h(x)) \cdot h'(x)$$

(iii) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_3(x,y) = f(g(x), h(y))$.

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$G(x,y) = \big(g(\pi_1(x,y)), h(\pi_2(x,y))\big)$

où $\pi_1(x,y) = x$ et $\pi_2(x,y) = y$.

- $(Df)(x,y) = \big((\partial_1 f)(x,y) \,;\, (\partial_2 f)(x,y)\big)$
- $(D\pi_1)(x,y) = \big(\partial_1 \pi_1(x,y) \,;\, \partial_2 \pi_1(x,y)\big) = (1,0)$
- $(D\pi_2)(x,y) = \big(\partial_1 \pi_2(x,y) \,;\, \partial_2 \pi_2(x,y)\big) = (0,1)$.

- $(DG)(x) = \begin{pmatrix} (\partial_1 G_1)(x,y) & (\partial_2 G_1)(x,y) \\ (\partial_1 G_2)(x,y) & (\partial_2 G_2)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & h'(y) \end{pmatrix}$

ou

- $(DG)(x) = \begin{pmatrix} (DG_1)(x,y) \\ (DG_2)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D(g\circ\pi_1))(x,y) \\ (D(g\circ\pi_2))(x,y) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (Dg)(\pi_1(x,y)).(D\pi_1)(x,y) \\ (Dh)(\pi_2(x,y)).(D\pi_2)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(x).(1,0) \\ h'(y).(0,1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & h'(y) \end{pmatrix}$

- $(DF_3)(x,y) = (Df)(G(x,y)).(DG)(x,y)$

$= \big((\partial_1 f)(G(x,y)) \,;\, (\partial_2 f)(G(x,y))\big).\begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & h'(y) \end{pmatrix}$

$= \big((\partial_1 f)(g(x), h(y)).g'(x) \,;\, (\partial_2 f)(g(x), h(y)).h'(y)\big)$ $\boxed{\text{C3 M}}$

(vi) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G(x,y) = \big(k(x,y), g(\pi_1(x,y))\big)$

$F_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_6(x,y) = f\big(k(x,y), g(x)\big)$

- $(DG)(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial_1 G_1)(x,y) \,;\, (\partial_2 G_1)(x,y) \\ (\partial_1 G_2)(x,y) \,;\, (\partial_2 G_2)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & \partial_2 k(x,y) \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix}$

- $(DF_6)(x,y) = (Df)(G(x,y)).(DG)(x,y)$

$= \big((\partial_1 f)(G(x,y)) \,;\, (\partial_2 f)(G(x,y))\big).\begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & (\partial_2 k)(x,y) \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix}$

$= \big((\partial_1 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_1 k)(x,y) + (\partial_2 f)(k(x,y), g(x)).g'(x) \,;$
$(\partial_1 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_2 k)(x,y)\big)$

$\boxed{M}$ on selon l'emplacement de x.

$f(g_1(x), g_2(x), \dots g_n(x)) \leftrightarrow (\partial_1 f)(g_1(x), \dots g_n(x)).g_1'(x)$

$f(g_1(x), \dots \dots, \dots g_n(x)) \leftrightarrow (\partial_n f)(g_1(x), \dots, g_n(x)).g_n'(x)$

$\Updownarrow$

$f(g_1(x)) \xleftrightarrow{\text{dérivée}} (\partial_1 f)(g_1(x)).g_1'(x)$

$f(g_n(x)) \xleftrightarrow{\text{dérivée}} (\partial_n f)(g_n(x)).g_n'(x)$

C'est exactement la ff μ dérivée f composée.

$\boxed{M}$ ⊕ ⊕ ième coordonnées de x.

(ii) $F_2(x) = f(g(x), h(x))$: deux occurrences de x.

$\rightarrow f(g(x), h(x))$ et $f(g(x), h(x))$.

on ⊕ ⊕ dc 2 composées pr dériver :

$f(g(x))$ et $f(h(x))$

⚠ $g(x)$ c'est 1° var et $h(x)$ c'est 2° var.

$$F'(x) \cong \underbrace{f'(g(x))}_{\text{premier var}} . g'(x) + \underbrace{f'(h(x))}_{2^\circ \text{ var}} . h(x)$$

On remet variables :

$$F'(x) = (\partial_1 f)(g(x), h(x)).g'(x) + (\partial_2 f)(g(x), h(x)).h(x)$$

(iii) $F_3(x,y) = f(g(x), h(y))$.

$$(DF_3)(x,y) = ((\partial_1 F_3)(x,y) \; ; \; (\partial_2 F_3)(x,y))$$

Avec plusieurs variables, on calcule une dérivée ordinaire en mettant les autres variables c̄ paramètres :

$$(\partial_1 F_3)(x,y) = H'(x) \quad \& \quad H(x) = F_3(x,y) = f(g(x), h(y)).$$

on a : 1 occurrence de x : $f(g(x), h(y))$

On traite dc c̄ composée en ignorant tt le reste :

$$f(g(x)) \xleftrightarrow{\text{dérivé}} f'(g(x)).g'(x) \overset{\text{on remet}}{=} (\partial_1 f)(g(x), h(y)).g'(x)$$

On considère ensuite pr la 2nde coordonnée :

$$(\partial_2 F_3)(x,y) = G'(y) \quad \& \quad G(y) = F_3(x,y) = f(g(x), h(y)).$$

on a 1 occurrence de y : $f(g(x), h(y))$.

On traite dc c̄ composée en ignorant tt le reste :

$$f(h(y)) \xleftrightarrow{\text{dérivée}} f'(h(y)).h'(y) \overset{\text{on remet}}{=} (\partial_2 f)(g(x), h(y)).h'(y)$$

$$\Rightarrow (DF_3)(x,y) = ((\partial_1 f)(g(x), h(y)).g'(x) \; ; \; (\partial_2 f)(g(x), h(y)).h'(y))$$

M ① ① $F_6(x,y) = f(k(x,y), g(x))$.

Pr dérivée $\partial_1 F_6$: dériver f à x q appt 2 fois :

$f(k(x,y), g(x))$ et $f(k(x,y), g(x))$

on ↓ oublie

$\underbrace{f(k(x))}_{1^\circ \text{ var}}$ et $\underbrace{f(g(x))}_{2^\circ \text{ var}}$

on ↓ dérive & on somme

$f'(k(x)).k'(x) + f'(g(x)).g'(x)$

on ↓ remet

$(\partial_1 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_1 k)(x,y) + (\partial_2 f)(k(x,y), g(x)).g'(x)$

Pr dérivée $\partial_2 F_6$: dériver par rapport à y q appt 1 fois.

$f(k(x,y))$

on ↓ oublie

$f(k(y))$

on ↓ dérive

$\underbrace{f'(k(y))}_{1^\circ \text{ var}}.\underbrace{k'(y)}_{2^\circ \text{ var}}$

↓ remet

$(\partial_1 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_2 k)(x,y)$

Ainsi $(DF_6)(x,y) =$

$$= \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_1 k)(x,y) + (\partial_2 f)(k(x,y), g(x)).g'(x) & ; (\partial_2 f)(k(x,y), g(x)).(\partial_2 k)(x,y) \end{pmatrix}$$

Ex. Suppl. Mat - Hessienne

8/ (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

$$g(x,y) = f(x^2+y, \sin(xy)).$$

M classiq $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = (x^2+y, \sin(xy)).$$

on constate $g = f \circ F$;

$$(DF)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}.$$

$$(Dg)(x,y) = (Df)(F(x,y)).(DF)(x,y).$$

$$= ((\partial_1 f)(F(x,y)) ; (\partial_2 f)(F(x,y))).\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y.\cos(yx) & x.\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$= ((\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy) ;$$
$$(\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).1 + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).x\cos(xy))$$

M ① ①

$$g(x,y) = f(x^2+y, \sin(xy)).$$

$\partial_1 g$? on dérive $/\!\!/ x$ — 2 occurrences x.	$\partial_2 g$? on dérive $/\!\!/ y$ — 2 occurrences y
$f(\underbrace{x^2+y}_{1^\circ\text{var}})$ et $f(\underbrace{\sin(xy)}_{2^\circ\text{var}})$	$f(\underbrace{x^2+y}_{1^\circ\text{var}})$ et $f(\underbrace{\sin(xy)}_{2^\circ\text{var}})$
on $\downarrow$ dérive	on $\downarrow$ dérive
$f'(x^2+y).2x + f'(\sin(xy)).y.\cos(xy)$	$f'(x^2+y).1 + f'(\sin(xy)).x.\cos(xy)$
on $\downarrow$ remet	on $\downarrow$ remet
$(\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(x,y)).y.\cos(xy)$	$(\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).1 + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).x.\cos(xy)$

Pr calculer dérivées partielles secondes : 3 approches.

$(i)^\circ_{\text{app.}}$ Dg est une applicat° $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$(Dg)(x,y) = ((\partial_1 g)(x,y), (\partial_2 g)(x,y)).$$

Puis de calculer sa différentielle en (x,y).

$(ii)^\circ$ app.

$$(Dg)(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g)(x,y) \\ (\partial_2 g)(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow (D(Dg))(x,y) = \begin{pmatrix} (D(\partial_1 g))(x,y) \\ (D(\partial_2 g))(x,y) \end{pmatrix}$$

où $(D(\partial_i g))(x,y) = ((\partial_1 \partial_i g)(x,y) ; (\partial_2 \partial_i g)(x,y))$.

$(iii)^\circ$ app. On pt ① ① occurrences de chq variable.
& dériver / sommer

Commençons $\partial_1 \partial_1 g$:

$$F = (\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy)$$

↳ $\partial_1 F$? on dérive $/\!\!/ x$; 6 occurrences de x.

- θ_1 $(\partial_1 f)\underbrace{(x^2+y)}_{1^\circ\text{var}} \to (\partial_1(\partial_1 f))(x^2+y, \sin(xy)).2x.2x$
- θ_2 $(\partial_1 f)\underbrace{(\sin(xy))}_{2^\circ\text{var}} \to (\partial_2 \partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy).2x$
- θ_3 $(\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x \to (\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2.2x$
- θ_4 $(\partial_2 f)\underbrace{(x^2+y)}_{1^\circ\text{var}} \to (\partial_1 \partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x.2x$
- θ_5 $(\partial_2 f)\underbrace{(\sin(xy))}_{2^\circ\text{var}} \to (\partial_2 \partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x.y.\cos(xy))$
- θ_6 $(\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy)$

  ↳ $(\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).(-y).\sin(xy).y.\cos(xy)$

$$\Rightarrow (\partial_1 \partial_1 g)(x,y) = (\partial_1 \partial_1 f)(x^2+y, \sin(x,y)).(2x)^2$$
$$+ (\partial_2 \partial_1 f)(x^2+y, \sin(x,y)).y.\cos(xy).2x$$
$$+ (\partial_1 f)(x^2+y, \sin(x,y)).4x$$
$$+ (\partial_1 \partial_2 f)(x^2+y, \sin(x,y)).(2x)^2$$
$$+ (\partial_2 \partial_2 f)(x^2+y, \sin(x,y)).2x.y.\cos(xy)$$
$$+ (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(x,y)).(+y)^2.\sin(xy).\cos(xy)$$

En outre,

$$(\partial_1\partial_1 g)(x,y) = (2x\ ;\ y\cos(xy)) \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(z) & (\partial_1\partial_2 f)(z) \\ (\partial_2\partial_1 f)(z) & (\partial_2\partial_2 f)(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y.\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$+ \big((\partial_1 f)(z)\ ;\ (\partial_2 f)(z)\big) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -y^2.\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

Continuons à $\partial_2\partial_1 g$:

- $F = (\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).2x + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy)$

↳ $\partial_2 F$? on dérive F à y ; 6 occurences de y.

- ∂_1 $(\partial_1 f)(\underbrace{x^2+y}_{1° \text{ var}}) \to (\partial_1\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).1.2x$
- ∂_2 $(\partial_1 f)(\underbrace{\sin(xy)}_{2° \text{ var}}) \to (\partial_2\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)).x.\cos(xy).2x$
- ∂_3 $(\partial_2 f)(\underbrace{x^2+y}_{1° \text{ var}}) \to (\partial_1\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).1.y.\cos(xy)$
- ∂_4 $(\partial_2 f)(\underbrace{\sin(xy)}_{2^e \text{ var}}) \to (\partial_2\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).x.\cos(xy).y.\cos(xy)$
- ∂_5 $(\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y \to (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(x,y)).\cos(xy)$
- ∂_6 $(\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y.\cos(xy) \to (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).y(-x.\sin(xy))$

Ainsi on a bien calculé : $(\partial_2\partial_1 g)(x,y)$:

$(\partial_2\partial_1 g)(x,y) =$

$= (\partial_1\partial_1 f)(z).2x$

$+ (\partial_2\partial_1 f)(z).x.\cos(xy).2x$

$+ (\partial_1\partial_2 f)(z).y.\cos(xy)$

$+ (\partial_2\partial_2 f)(z).x.\cos(xy).y.\cos(xy)$

$+ (\partial_2 f)(z).(\cos(xy) - xy\sin(xy))$.

Puis écriture matricielle :

$$(\partial_2\partial_1 g)(x,y) = (1\ ;\ \cos(xy)) \times \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(z) & (\partial_1\partial_2 f)(z) \\ (\partial_2\partial_1 f)(z) & (\partial_2\partial_2 f)(z) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x \\ y.\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$+ \big((\partial_1 f)(z)\ ;\ (\partial_2 f)(z)\big) . \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) \end{pmatrix}$$

Selon le Th de Schwartz : $\partial_1\partial_2 g = \partial_2\partial_1 g$,

dc il ns reste slmt le calcul de $\partial_2\partial_2 g$.

$F = (\partial_1 f)(x^2+y, \sin(xy)) + (\partial_2 f)(x^2+y, \sin(xy)).x.\cos(xy)$

↳ $\partial_2 F$? on dérive / à y, 5 occu. de y.

⋮

$$(\partial_2\partial_2 g)(x,y) = (1 ; x\cos(xy)).\begin{pmatrix}(\partial_1\partial_1 f)(z) & (\partial_1\partial_2 f)(z)\\(\partial_2\partial_1 f)(z) & (\partial_2\partial_2 f)(z)\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}1\\x.\cos(xy)\end{pmatrix} + ((\partial_1 f)(z) ; (\partial_2 f)(z))\begin{pmatrix}0\\-x^2.\sin(xy)\end{pmatrix}.$$

On reconnait une certaine f^{e} = à travers ces vecteurs.

- $(\partial_1 F)(x,y) = \begin{pmatrix}2x\\y.\cos(xy)\end{pmatrix}$, $(\partial_2 F)(x,y) = \begin{pmatrix}1\\x.\cos(xy)\end{pmatrix}$

- $(\partial_1\partial_1 F)(x,y) = \begin{pmatrix}2\\-y.\sin(xy)\end{pmatrix}$, $(\partial_2\partial_1 F)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\\cos(xy)-xy\sin(xy)\end{pmatrix}$

$$(\partial_2\partial_2 F)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\-x^2.\sin(xy)\end{pmatrix}.$$

Rq : $(D^2 g)(x,y) = {}^{t}(DF)(x,y).(D^2 f)(F(x,y)).(DF)(x,y)$

$+ (\partial_1 f)(F(x,y)).(D^2 F_1)(x,y) +$

$+ (\partial_2 f)(F(x,y)).(D^2 F_2)(x,y).$

$g'(x) = f'(F(x)).F'(x)$

$g''(x) = f''(F(x)).F'(x).F'(x) + f'(F(x)).F''(x)$

$= F'(x).f''(F(x)).F'(x) + f'(F(x)).F''(x)$.

C-8-M

(iii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, appli 2x diff
$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $h = g \circ f$.
Exp. der. part. secds h (ie $(\partial_i \partial_j h)(x)$
en f der. part. de f & g.

$$h(x) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)).$$

$$(Dh)(x) = ((\partial_1 h)(x) ; \dots ; (\partial_n h)(x))$$

$$= ((\partial_1 g)(f(x)) ; \dots ; (\partial_p g)(f(x))) . \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(x) & \dots & (\partial_n f_1)(x) \\ \vdots & & \\ (\partial_1 f_p)(x) & \dots & (\partial_n f_p)(x) \end{pmatrix}$$

on ed : $(\partial_i h)(x) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g)(f(x)) . (\partial_i f_j)(x)$.

ou

$$(\partial_i (g \circ f))(x) = \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f)(x) . (\partial_i f_j)(x)$$

ou

$$\partial_i (g \circ f) = \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f) . (\partial_i f_j)(x).$$

d'1 ff de Leibniz :

$$\partial_k (\partial_i (g \circ f)) = \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f) . (\partial_i f_j))$$

$$\text{Leibniz} = \sum_{j=1}^{p} \partial_k (((\partial_j g) \circ f) . (\partial_i f_j) + \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f) . (\partial_k)(\partial_i f_j)).$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{p} ((\partial_l (\partial_j g)) \circ f) . (\partial_k f_l) \right) . (\partial_i f_j) + \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f) . (\partial_k (\partial_i f_j))$$

$\boxed{\text{C-G-M}}$

Ecriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 h)(x) & \dots & (\partial_1 \partial_n h)(x) \\ (\partial_n \partial_1 h)(x) & \dots & (\partial_n \partial_n h)(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_1 f_p \\ \vdots & & \\ \partial_n f_1 & \dots & \partial_n f_p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 g) \circ f & \dots & (\partial_1 \partial_p g) \circ f \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_p \partial_1 g) \circ f & \dots & (\partial_p \partial_p g) \circ f \end{pmatrix}$$

$$. \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_p & \dots & \partial_n f_p \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} ((\partial_j g) \circ f) . \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 f_j)(x) & \dots & (\partial_1 \partial_n f_j)(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_n \partial_1 f_j)(x) & \dots & (\partial_n \partial_n f_j)(x) \end{pmatrix}$$

8.8 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

(i) déterminer éventuels extrema.
(ii) dét. loca ou globa

⊙ Calcul des dér. part. premières

- $(\partial_1 g)(x,y) = 4x^3 - 4y$
- $(\partial_2 g)(x,y) = 4y^3 - 4x$

⊙ Résoudre système équat°s $\begin{cases} (\partial_1 g)(x,y) = 0 \\ (\partial_2 g)(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ 4x^9 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 & (1) \\ 4x(x^8 - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$ d'où $4x = 0$ ou $x^8 - 1 = 0$

$x^8 = 1$

$x = 0$ ou $x = 1$

On insère dans (1)

$x = 0$
$x^3 = 0^3 = \underline{y = 0}$ ou $x = 1$, $x^3 = 1^3 = \underline{y = 1}$

$\Rightarrow$ deux pts critiqs $(0,0)$ et $(1,1)$

⊙ Calcul dér. part. secondes / calcul mat Hessienne

$\partial_1 \partial_1 g(x,y) = 12x^2$

$\partial_2 \partial_1 g(x,y) = -4$

$\partial_2 \partial_2 g(x,y) = 12y^2$

D'après le Th de Schwarz $\partial_2 \partial_1 = \partial_1 \partial_2$.

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

⊙ Calculons VP en différents points

point $(0,0)$

- $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 16 = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$

$\Rightarrow$ 2 VP $\lambda = 4$ et $\lambda = -4$

Dc $\exists\, \lambda > 0$ et $\lambda < 0 \Rightarrow$ point selle.

- $\boxed{M}$ Sylvester $\det(12) = 12$, $\det\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 128$

Ainsi on a $\exists$ 2 VP $\oplus$

$\Rightarrow$ minimum local.

- point $(1,1)$ est dc min local et $\underline{f(1,1)} = 1 + 1 - 4 = -2$
$= \underline{f(-1,-1)}$

on a dc trouvé valeur -2 en tant que min local à 2 reprises, il s'agit d'un <u>minimum global</u> ssi ces 2 points st uniqs solu°s $\underline{f(x,y) \leq -2}$.

$\Leftrightarrow f(x,y) \leq -2.$

$\Leftrightarrow x^4 - 4xy + y^4 \leq -2$

$\Leftrightarrow x^4 - 4xy - 2x^2y^2 \leq -2 - 2x^2y^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \leq -2 - 2x^2y^2 + 4xy$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \leq -2(1 - 2xy + x^2y^2)$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{2}.xy)^2 \leq 0.$

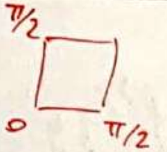
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ \sqrt{2}-\sqrt{2}.xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Les 2 points $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ st dc bien des minima globaux sur $\mathbb{R}$.

8.10 Détermine $\sup\limits_{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x).\sin(y)\sin(x+y)$ " $f(x,y)$ ".

Procédure : sup ---> max ∃-t-il



□ fermé dc compact, dc min/max atteint.

points critiqs à ext / int □ fermé ?

* Calcul dér. part. premières.

- $(\partial_1 f)(x,y) = \sin(y)\left[\cos(x).\sin(x+y) + \cos(x+y).\sin(x)\right]$
- $(\partial_2 f)(x,y) = \sin(x)\left[\cos(y).\sin(x+y) + \cos(x+y).\sin(y)\right]$

$$\begin{cases} \partial_1 f = 0 = \sin(y).\sin(2x+y) & (1) \\ \partial_2 f = 0 = \sin(x).\sin(2y+x). & (2) \end{cases}$$

(1) $\sin(y) = 0$ ou $\sin(2x+y) = 0$

$y = 0$ ou $2x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

car $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$\Rightarrow y = 0$ ou $2x+y = 0$ ou $2x+y = \pi$.

On prend chacune des possibilités & on injecte les valeurs ds 2° équat°.

(i) $\underline{y=0} \rightarrow 0 = \sin^2(x) \Rightarrow x = 0. \Rightarrow (0,0)$

(ii) $2x+y = 0 \rightarrow \sin(x).\sin(-3x) = 0 \Rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = -2x = 0$ ou $y = \frac{-2\pi}{3}$

exclu de □ $\frac{\pi}{2}$

(iii) $2x+y = \pi \rightarrow \sin(x).\sin(2\pi - 3x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{+\pi}{3}$

(ii) $\sin(x) = 0$ ou $\sin(-3x) = 0$

$x = 0$ $\qquad -3x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k\pi}{-3}, k \in \mathbb{Z}$

$0, \frac{\pi}{-3}, \frac{2\pi}{-3}, \frac{3\pi}{-3}, \ldots, \frac{-\pi}{-3}, \frac{-2\pi}{-3}, \frac{-3\pi}{-3}$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.

(i) (0,0) pt critiq $\qquad$ (ii) (0,0) pt critiq.

(iii) de m̂ où $\sin(2\pi - 3x) = 0 \iff 2\pi - 3x = k\pi$

$\iff -3x = k\pi - \cancel{2\pi}$

$\iff x = -\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

(iiii) $x = 0$ ou $x = \frac{+\pi}{3}$

$\Rightarrow y = \pi - 2x = \rightarrow \pi$ exclu

$\rightarrow \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ pt critiq.

diff / m̂ $\qquad$ m̂ (diff)

$c(a+b) = ca.cb - sa.sb$	$s(a+b) = sa.cb + ca.sb$
$c(a-b) = ca.cb + sa.sb$	$s(a-b) = sa.cb - ca.sb$

* Calcul déri. part. sec. & mat Hessienne !

- $(\partial_1 f)(x,y) = \sin(y).\,\sin(2x+y)$
- $(\partial_2 f)(x,y) = \sin(x).\,\sin(2y+x)$.

- $(\partial_1\partial_1 f)(x,y) = 2.\cos(2x+y).\,\sin(y)$.
- $(\partial_2\partial_1 f)(x,y) = \cos(y).\,\sin(2x+y) + \cos(2x+y).\,\sin(y)$
  $= \sin(2x+2y)$.
- $(\partial_2\partial_2 f)(x,y) = 2\sin(x).\,\cos(2y+x)$.

- $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

0 vp double.

↳ on ne pt pas conclure

$$H\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$H\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

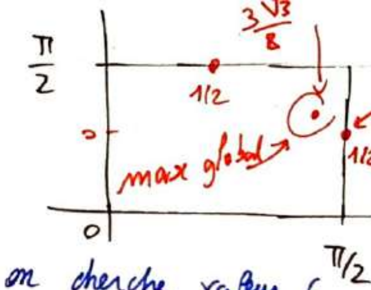
dc 2 vp < 0

$\Rightarrow$ maxima locx

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

- $f(x,y) = \sin(x).\,\sin(y).\,\sin(2x+y)$.
- $f(0,0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

* calcul valr f en pts critiqs



on cherche valeur f & aux bords

4 bords : (i) $x=0$, $y \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

max local (on ne la pas trouvée à pt critiq uniqt ds cette direc.)

- $f(0,y) = 0$.

(ii) $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in [0,\frac{\pi}{2}]$,

- $f(\frac{\pi}{2},y) = \sin(y).\,\cos(y)$
  $= \frac{1}{2}\sin(2y)$.

valr max en $y = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$?

(16 < 27 en mtt au carré...)

pt on conclue ?.... $f(x,y) = f(y,x)$.

(iii)e bord : $y=0$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

$f(x,0) = 0$

(iv)e bord : $y = \frac{\pi}{2}$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

$f(x,\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

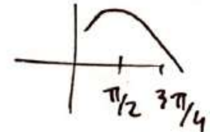
ici on avait $f(x,y) = f(y,x)$.

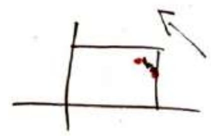
Ccl :

$$\sup_{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x).\,\sin(y).\,\sin(x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Bonus : $f(x,\frac{\pi}{4}) = \sin x .\, \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin(x+\frac{\pi}{4})$

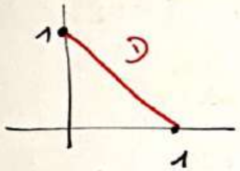
$V_{\frac{\pi}{2}}$ $\simeq 1$





8-11 soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y=1\}$.

Pour tout $q>0$ fixé, trouver le min sur D de $x^q + y^q$.



$$D = \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\}.$$

$$f(x, 1-x) = x^q + (1-x)^q$$

Trouver le min ?

$$g(x) = x^q + (1-x)^q$$

$$g'(x) = q \cdot x^{q-1} - q(1-x)^{q-1}.$$

$$g'(x) = 0 \iff q \cdot x^{q-1} - q(1-x)^{q-1} = 0$$

$$\iff x^{q-1} = (1-x)^{q-1}$$

pour $q \neq 1 \Rightarrow x=0$ n'est pas solut°

$$\Rightarrow 1 = \Big(\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\geq 0}\Big)^{q-1}$$

$$\Rightarrow 1^{\frac{1}{q-1}} = \frac{1}{x} - 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$g(0) = g(1) = 1$

$g(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^q = 2^{1-q}$

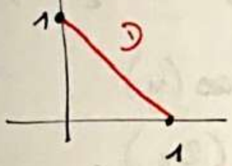
pour $0<q\leq 1$: 2^{1-q} min

$q=1$: f cte $= 1$

$q \geq 1$. 2^{1-q} max

8-11 soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y=1\}$.

Pour tout $q>0$ fixé, trouver le min sur D de x^q+y^q.



$$D=\{(x,1-x)\mid x\in[0,1]\}.$$

$$f(x,1-x)=x^q+(1-x)^q$$

Trouver le min ?

$$g(x)=x^q+(1-x)^q$$

$$g'(x)=q.x^{q-1}-q(1-x)^{q-1}$$

$$g'(x)=0 \iff q.x^{q-1}-q(1-x)^{q-1}=0$$

$$\iff x^{q-1}=(1-x)^{q-1}$$

pour $q\neq 1 \Rightarrow x=0$ n'est pas solut°

$$\Rightarrow 1=\Big(\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\geq 0}\Big)^{q-1}$$

$$\Rightarrow 1^{\frac{1}{q-1}}=\frac{1}{x}-1$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{x}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$g(0)=g(1)=1$

$g(\frac{1}{2})=2.(\frac{1}{2})^q=2^{1-q}$

pour $0<q<1$: 2^{1-q} min

$q=1$: f cte $=1$

$q>1$. 2^{1-q} max

8-12 (i) soit $z=x+iy$, Mq $|\sin(z)|^2=\frac{1}{2}(\cosh(2y)-\cos(2x))$

$z=x+iy$, $\sin(z)=\sin(x+iy)$

$$\sin(z)=\sin(x).\cos(iy)+\cos(x).\sin(iy)$$

$$\sin(z)=\sin(x).\cosh(y)+\cos(x).\frac{\sinh(y)}{i}$$

$$|\sin(x).ch(y)-i.\cos(x).sh(y)|^2=\sin^2(x).ch^2(y)+\cos^2(y).sh^2(x)$$

$$=\sin^2(x)\left(\frac{1+ch(2y)}{2}\right)+\cos^2(x).\left(\frac{ch(2y)-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(ch(2y)\sin^2(x)+ch(2y)\cos^2(x)+\sin^2(x)-\cos^2(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(ch(2y)-\cos(2x)\right).$$

(ii) Mq $\max_{|z|\leq 1}|\sin(z)|$ est atteint si disq fermé. $R=0$, $R=1$.

L'endroit où se trouve $\max_{|z|\leq 1}|\sin(z)|$ est m̂ endroit pour $\max_{|z|\leq 1}|\sin(z)|^2$.

Points critiqs ?

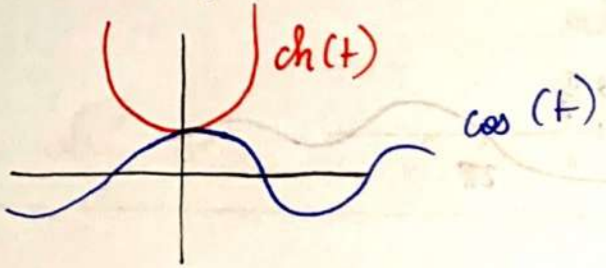
$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ch(2y)-\cos(2x)}$$

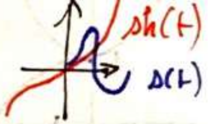
$$(\partial_1 f)(x,y)=\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{ch(2y)-\cos(2x)}}\overset{?}{=}0$$

• $(\partial_2 f)(x,y) = \dfrac{sh(2y)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{ch(2y) - \cos(2x)}} \overset{?}{=} 0$

→ on ne divise pas par 0.

$ch(2y) - \cos(2x) > 0$





$\forall x,y : ch(2y) - \cos(2x) \geq 0$

Égalité si $ch(2y) = 1 = \cos(2x)$

$y = 0 \qquad 2x = 0 \ [2\pi]$.

Dans $|z| \leq 1$, $(x=0, y=0)$ à éviter

$\left.\begin{array}{l}(\partial_1 f)(x,y)\\(\partial_2 f)(x,y)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\sin(2x) = 0 & \Leftrightarrow 2x = 0\ [\pi]\\ sh(2y) = 0 & \Leftrightarrow 2y = 0\\ (x,y) \neq (0,0) & (x,y) \neq (0,0)\end{array}\right.$

• $(0,0)$: $|\sin(0+i0)| = 0$ est valeur minimale

BONUS $g(x,y) = |\sin(z)|^2 = \frac{1}{2}(ch(2y) - \cos(2x))$

• $(\partial_1 g)(x,y) = \sin 2x = 0$

• $(\partial_2 g)(x,y) = sh(2y) = 0$

$\left| \begin{array}{l} x = 0 \ [\frac{\pi}{2}] \\ y = 0 \end{array}\right.$

mat Hessienne $H(x,y)$.

$(\partial_1\partial_1 g)(x,y) = 2.\cos 2x$

$(\partial_1\partial_2 g)(x,y) = 0$

$(\partial_2\partial_2 g)(x,y) = 2.ch(2y)$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x & 0 \\ 0 & 2.ch(2y)\end{pmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} x = 0 \ [\pi] \\ y = 0 \end{array}\right.$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ⇒ min local global car $|\cdot|^2$

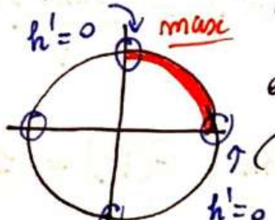
$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ y = 0 \end{array}\right.$: $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ⇒ point selle

$\boxed{M}$ Sylvester $-2, -4$ ⇒ pas Hess S_p^{+} ou S_p^{-} dc p.s.

• f sur le cercle $(\cos(t), \sin(t))$

$t \in [0, 2\pi]$.

Rq : $g(x,y) = \cosh(2y) - \cos(2x)$ $\qquad$ f paire $\begin{array}{l} y = -y \\ x = -x\end{array}$



on se restreint à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(à cause cosh & cos : f paires).

$$h^2(t) = g(\cos(t), \sin(t))$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cosh(2\sin t) - \cos(2\cos t)\right).$$

$$h'(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}(2\sin t).\cos t.(+2) - (-)\sin(2\cos t).(-2\sin t)\right]$$
$$= \cos(t).\mathrm{sh}(2\sin t) - \sin(t).\sin(2\cos t)$$
$$\overset{?}{=} 0$$

$\underset{+}{A^1} \quad \underset{0}{\nearrow} - \mid A^2$ série $\mid$

À résoudre $\quad \cos(t).\mathrm{sh}(2\sin t) = \sin(t).\sin(2.\cos t)$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{sh}(2\sin t)}{2\sin t} = \frac{\sin(2\cos t)}{2\cos t}$$

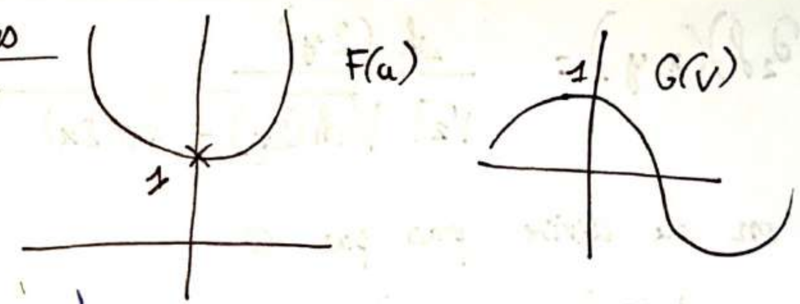
à éviter $\quad \sin t = 0$ et $\cos t = 0$

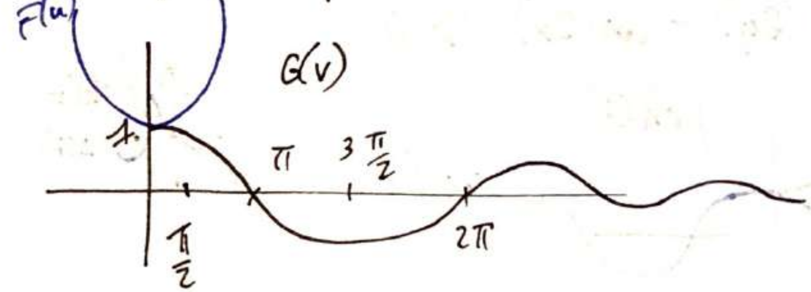
$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

$$F(u) = \frac{\mathrm{sh}(u)}{u} \qquad G(v) = \frac{\sin(v)}{v}$$

$$\lim_{u\to 0} F(u) = 1 \qquad \lim_{v\to 0} G(v) = 1.$$

Graphes





À résoudre :

$$F(2\sin t) = G(2.\cos t)$$

possible seulement si

$2.\sin t = 0$ et $2\cos t = 0$ impossible

Donc pas de soluOs pr $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$t = 0$? $\quad \cos(t).\mathrm{sh}(2.\sin t) = \sin(t).\sin(2\cos t)$

0 est soluθ.

$t = \frac{\pi}{2}$?

oui $\frac{\pi}{2}$ est soluθ.

← séries mbrs ⊕ ⊖ ⊕

$$h(0) = g(1,0) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2)) \approx 0{,}71$$
$$h(\tfrac{\pi}{2}) = g(0,1) = \frac{1}{2}(\cosh(2) - 1) \approx 1{,}38$$

↑ séries mbrs ⊕

$$H(t) = \sqrt{h(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh(2\sin t) - \cos(2\cos t)}$$

$$H'(t) = \frac{1}{2\sqrt{h(t)}} \cdot h'(t) = 0 \iff h'(t) = 0$$

(et $h(t) > 0$)

n'arrive jamais car pour $f(x,y) = 0$, on a trouvé $y=0$ et $x = 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$

- calcul extrema si $\sqrt{\cdot}$, $|\cdot|$, $\cdot^2$: m̂ enchaînts.

$H(t) = \sqrt{h(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh(2\sin t) - \cos(2\cos t)}$

$H'(t) = \frac{1}{2\sqrt{h(t)}} \cdot h'(t) = 0 \iff h'(t) = 0$

(et $h(t) > 0$)

n'arrive jamais car pour $f(x,y) = 0$, on a trouvé $y=0$ et $x = 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$

calcul extrema si $\sqrt{\cdot}$, $|\cdot|$, $\cdot^2$: m̂ endroits.

9.18 TFI ... $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f C^1.

exprimer $(\partial_1 z)(x,y)$ & $(\partial_2 z)(x,y)$ en f de x, y et $z(x,y)$ qd z est solu$^{\circ}$ équa.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x - yz + z\cos(y)$.

Résoudre z en f de x & y de l'équa$^{\circ}$ $f(x,y,z) = 0$.

On rajoute (x_0, y_0, z_0) est solu$^{\circ}$.
Pour qu'$\exists$ solu$^{\circ}$ ds $\mathcal{V}$ de ce point, il faut $(\partial_3 f)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

mat 1×1, det(mbr)

Calculons $(\partial_3 f)(x,y,z) = -y + \cos(y)$.

On a besoin $-y_0 + \cos(y_0) \neq 0$: on suppose que c'est vrai.

Alors $\exists\ U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$,

$g : U \to V$ tq $U \times V \subset \operatorname{dom}(f)$

$\forall (x,y,z) \in U \times V : f(x,y,z) = 0 \iff z = g(x,y)$

. on dit $z = z(x,y)$.

$\Rightarrow f(x,y,g(x,y)) = 0$ partout

$f(x,y,z(x,y)) = 0$ partout.

$\hookrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y,z(x,y)) \right]$

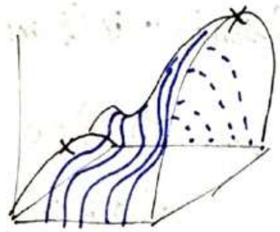
$= (\partial_1 f)(x,y,z(x,y)) \times 1 + (\partial_3 f)(x,y,z(x,y)) . (\partial_1 z)(x,y)$

$\Rightarrow (\partial_1 z)(x,y) = - \frac{(\partial_1 f)(x,y,z(x,y))}{(\partial_3 f)(x,y,z(x,y))}$

$= - \frac{1}{-y + \cos y}$

de m̂ : $(\partial_2 z)(x,y) = -\dfrac{(\partial_2 f)(x,y,z(x,y))}{(\partial_3 f)(x,y,z(x,y))}$

$= -\dfrac{-z(x,y) - z(x,y).\sin(y)}{-y + \cos(y)}$



9.12 $f(x,y) = \dfrac{y-4}{y+2x} - x + 3.$

Résoudre équat° $f(x,y)=0$ — x en f de y : $(\partial_1 f)(x,y) \neq 0$
— y —— x : $(\partial_2 f)(x,y) \neq 0$.

- $(\partial_1 f)(x,y) = \dfrac{-2(y-4)}{(y+2x)^2} - 1 \neq 0$

@ points évidents $(3,4)$.

Dans voisinage de $(3,4)$, on pt exprimer x en f de y.

De m̂ pour —— y en f de x.

$\boxed{9.15}$ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$g(x,y) = x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18$

$\phi : I \to J$, $2 \in I$, $1 \in J$

$y = \phi(x) \iff g(x,y) = 0.$

$\boxed{\text{TFI}}$ soit (a,b) tq $g(a,b) = 0$
si $(\partial_2 g)(a,b) \neq$ alors $\exists$
U voisinage de a, V voisinage de b
et $\phi : U \to V$ tq $\forall (x,y) \in U \times V$:
$g(x,y) = 0 \iff y = \phi(x)$

$a \in U$, $b \in V$, $(a,b) = (2,1)$

$g(2,1) = 16 - 3\times 8 + 6 + 18 = 0.$

Calculons $(\partial_2 g)(x,y) = -10x^3 y + 18y^2$

$(\partial_2 g)(2,1) \neq 0$?

$(\partial_2 g)(2,1) = -80 + 18 = -62 \neq 0.$

alors $\exists$ I_a, J_b et $\phi : I \to J$

tq $\forall (x,y) \in I \times J$: $y = \phi(x) \Longleftrightarrow g(x,y) = 0.$

$g(x,\phi(x)) = 0 \Longleftrightarrow 0 = (\partial_1 g)(x,\phi(x)) + (\partial_2 g)(x,\phi(x))\,\phi'(x)$

$$\Rightarrow \phi'(x) = -\frac{(\partial_1 g)(x,\phi(x))}{(\partial_2 g)(x,\phi(x))}$$

!! après si on souhaite calculer $\phi''(x)$

$$\Rightarrow \phi'(2) = -\frac{(\partial_1 g)(2,1)}{(\partial_2 g)(2,1)} \quad ; \quad \phi(2) = 1.$$

$$= \frac{2}{62} = \frac{1}{31}.$$

Appendice R

Sylvester : A mat symétriq $(A = {}^{tr}(A))$.

$$Q(x) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$M_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{pmatrix}$$ matrices mineures

Critère de Sylvester :

si $\forall i = 1,\dots,n$: $M_i > 0$:

alors $\forall x \neq 0$, $Q(x) > 0$.

- Si $\forall i = 1,\dots,n$, $(-1)^i M_i > 0$.

  alors $\forall x \neq 0$, $Q(x) < 0$.

  @ $-x^2$.

on sait $M_n = \det(A)$: produit val$^{\text{res}}$ $\in$.

- si $M_n \neq 0$ et on n'est pas ds un des 2.

Cas de Sylvester ($\forall i : M_i > 0$ ou $\forall i : (-1)^i M_i > 0$)

alors il y a vp ≥ 0.

vp < 0.

Critère de Descartes

A mat symétriq $\Rightarrow P_A(X)$ est scindé.

$P_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{d_i}$ $\quad a_i \neq 0$

$0 \leq d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n$

polynôme de degré d_n

@ $P(X) = -X^7 + X^5 - 18X^4 - 7X + 12$.

(−1) (+1) (−1) (−1) (+1)

$\Rightarrow$ 3 changements de signes

$\Rightarrow$ (si on sait P scindé)

$\rightarrow$ 3 racines $S^T > 0$.

multiplicité 0 de racine 0.

$\rightarrow$ 4 racines $S^T < 0$. càd au moins $2 < 0$.

$P(-X) = X^7 - X^5 - 18X^4 + 7X + 12$.

(+1) (−1) (−1) (+1) (+1)

$\Rightarrow$ 2 changements $\Rightarrow$ au plus 2 racines $S^T > 0$.

Poly scindé
(TU) pr mat symétriq

?!
car le polynôme n'est pas scindé

(40)

@$_2$ $P_2(X) = X^7 - 6X^6 - 17X^5 + 114X^4 - 20X^3 - 360X^2 + 288X$.

(+1) (−1) (−1) (+1) (−1) (−1) (+1) $\Rightarrow$ 4 changts de signes

de 4 racines $S^T > 0$.

$\Rightarrow$ Complémentaire : 2 racines $S^T < 0$.

car 0 racine multiplicité 1.

8.15 (i) trouver pts critiqs de $3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$ & mq qu'ils constituent tous un min global.

- Calculons les dérivées partielles.

$$(\partial_1 f)(x,y,z) = 6x - 2(x+y+z) = 0$$
$$(\partial_2 f)(x,y,z) = 6y - 2(x+y+z) = 0$$
$$(\partial_3 f)(x,y,z) = 6z - 2(x+y+z) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre :

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pts critiqs} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

- Matrice Hessienne :

- $(\partial_1 \partial_1 f)(x,y,z) = 4$ ....

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 4-X & -2 & -2 \\ -2 & 4-X & -2 \\ -2 & -2 & 4-X \end{pmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2+C_3}{=} \det\begin{pmatrix} -X & -2 & -2 \\ -X & 4-X & -2 \\ -X & -2 & 4-X \end{pmatrix}$$

$$= (-X).\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6-X & 0 \\ 1 & 0 & 6-X \end{pmatrix} = (-X)(6-X)^2$$

$\begin{cases} X = 0 & \text{racine simple} \\ X = 6 & \text{racine double} \end{cases}$

→ on calcule $f(x,x,x) = 9x^2 - (3x)^2 = 0.$

on écrit $f(x,y,z) = x^2\left[3(1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{z}{x})^2) - (1+(\frac{y}{x})+(\frac{z}{x}))^2\right]$

$$= x^2 . g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

où $g(u,v) = 3(1+u^2+v^2) - (1+u+v)^2$

On vt mq $g(u,v) \geq 0$.

$$g(u,v) = 3+3u^2+3v^2 - (1+u^2+v^2+2uv+2u+2v)$$
$$= 2+2u^2+2v^2-2uv-2u-2v$$
$$= .$$

forme quadratiq....

Cherchons les pts critiqs :

- $(\partial_1 g)(u,v) = 4u-2v-2 = 0$
- $(\partial_2 g)(u,v) = 4v-2u-2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul mat Hessienne.

$$H(u,v) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul des vp.

$$\begin{pmatrix} 4-X & -2 \\ -2 & 4-X \end{pmatrix} = (4-X)^2-4$$
$$= (4-X-2)(4-X+2)$$
$$= (X-2)(X-6)$$

Donc $X=2$ ou $X=6$.

$\to$ minimum $\underline{\text{local}} \to$ global $\to$ à mq.

$$g(u,v) = 2+2u^2+2v^2-2uv-2u-2v$$
$$= (u-v)^2+(u-1)^2+(v-1)^2 \geq 0$$

somme de 3 carrés dc toujours

$$f(x,y,z) = x^2\left[\left(\frac{y}{x}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}-1\right)^2+\left(\frac{z}{x}-1\right)^2\right]$$
$$= (y-z)^2+(y-x)^2+(z-x)^2$$

Rq (i) $\forall$ vp > 0 : min local

(ii) $\forall$ vp < 0 : max local

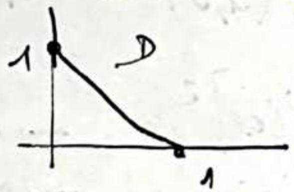
(iii) $\exists$ au moins $\begin{cases} 1 \text{ vp} > 0 \\ 1 \text{ vp} < 0 \end{cases}$: point selle

(iv) vp > 0, vp $= 0$ aucun < 0 : pas conclure.

ici ds cet ex, on aurait dû dire on ne pt pas conclure.

8.11 Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y=1\}$.

$\forall q > 0$ fixé, trouver minimum sur $\mathcal{D}$ de $x^q + y^q$.



← les points $(x, 1-x)$ où $x \in [0,1]$.

- $f(x,y) = x^q + y^q$

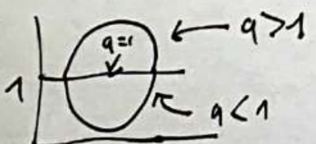
Sur $\mathcal{D}$, $g(x) = f(x, 1-x) = x^q + (1-x)^q$

$$g'(x) = q \cdot x^{q-1} - q(1-x)^{q-1} = 0$$

$(\cdot)^{1/q-1}$ $\quad x^{q-1} = (1-x)^{q-1}$

$\Downarrow \quad x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

	0	1/2	1
g			
g'		0	



⚠ ici on ne calcule pas mat Hessienne car segment de 1 variable.

9.13 (i) Mq $\forall |t| < 1/\sqrt{2}$, l'équaθ :

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) = x$$

admet une uniq soluθ $x = \phi(t)$. (On pourra mq $x \mapsto \sqrt{2} \cdot \cos\left(tx - \frac{\pi}{4}\right)$ est contractante & appliquer 3.15).

(ii) Dmq alors que ϕ est ∞^t diffé & calculer $\phi(0)$, $\phi'(0)$, $\phi''(0)$

On pose $f(x,t) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) - x$.

On suppose qu'on a trouvé (x_0, t_0) tq $f(x_0, t_0) = 0$.

On veut résoudre x en f de t au voisinage de (x_0, t_0).

f est de classe C^∞.

On veut résoudre x en f de t : de il faut $(\partial_1 f)(x,t) \neq 0$ alors le TH des f implicites s'applique.

$\Rightarrow \exists\, U$ voisinage de t_0, V voisinage de x_0, $g : U \to V$ de classe C^∞ tq $\forall (x,t) \in V \times U$:

$$f(x,t) = 0 \iff \begin{matrix} x = g(t) \\ x = \phi(t) \end{matrix}$$

$\cdot\ f(x,t) = \sqrt{2}\cos\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) - x.$

Calculons $(\partial_1 f)(x,t) = -t\sqrt{2}\sin\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$(\partial_1 f) \overset{?}{\neq} 0$. on suppose non nul.

$g(t)$ solut° de $f(x,t) = 0$.

$f(g(t), t) = 0 \quad \forall\ t \in U.$

$h(t) = f(g(t), t)$ identiqt nul la dérivée.

$h'(t) = (\partial_1 f)(g(t),t)).\ g'(t) + (\partial_2 f)(g(t),t)) = 0 \quad \forall t.$

$$g'(t) = -\frac{(\partial_2 f)(g(t),t)}{(\partial_1 f)(g(t),t)}$$ ← on ne divise pas par 0.

$h''(t) = ?$ où $h'(t) = (\partial_1 f)(g(t),t)).\ g'(t) + (\partial_2 f)(g(t),t)$.

$$\begin{aligned} h''(t) = &(\partial_1\partial_1 f)(g(t),t).\ g'(t).\ g'(t) \\ &+ (\partial_2\partial_1 f)(g(t),t).\ 1.\ g'(t) \\ &+ (\partial_1 f)(g(t),t).\ g''(t) \\ &+ (\partial_1\partial_2 f)(g(t),t).\ g'(t).\ \cancel{g'(t)} \\ &+ (\partial_2\partial_2 f)(g(t),t).1. = 0\ \forall t \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, $f(1,0) = 0$

$g(0) = 1$

$$g'(0) = -\frac{(\partial_2 f)(1,0)}{(\partial_1 f)(1,0)} = \frac{-}{-1}$$

$$\begin{aligned} h''(0) = 0 = &(\partial_1\partial_1 f)(1,0).\left[g'(0)\right]^2 \quad \leftarrow \text{connu} \\ &+ 2(\partial_1\partial_2 f)(1,0).\ g'(0) \quad \text{TH Schwartz.} \\ &+ (\partial_2\partial_2 f)(1,0) \\ &+ (\partial_1 f)(1,0).\underbrace{g''(0)}_{\text{inconnue}} \Rightarrow \text{on pt résoudre.} \end{aligned}$$

$$g''(0) = \frac{(\partial_1\partial_1 f)(1,0).\ g^{2\prime}(0) + 2(\partial_1\partial_2 f)(1,0).\ g'(0) + (\partial_2\partial_2 f)(1,0)}{(\partial_1 f)(1,0)}$$

M32 (Fonctions de plusieurs variables) DS2

12 janvier 2021 8h00 - 11h00

Nota Bene : les justifications de vos réponses sont aussi (voire **PLUS**) importantes que les réponses en soi !

1. Questions de cours — Définitions. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E$ un sous-ensemble, $\ell \in F$ et soit $f : A \to F$ une application. Soient aussi $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $x \in U$ et $g : U \to \mathbf{R}^p$ une application.

i) Donner la définition d'un ensemble ouvert dans E.
ii) Donner la définition d'un point d'accumulation de A.
iii) Donner la définition d'un ensemble compact dans E.
iv) Donner la définition de " $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ " et préciser sous quelles hypothèses on peut dire cela.
v) C'est quoi la différentielle de g en x et à quelle condition existe-t-elle ?
vi) Donner la définition d'une dérivée directionnelle de g dans la direction $v \in \mathbf{R}^n$.

2. Question de cours. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E$ un sous-ensemble, soit $f : A \to F$ une application, soit $\ell \in F$ et soit $a \in E$ un point d'accumulation de A. Montrer que les deux propriétés (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes.

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$;
(ii) $\forall O$ voisinage ouvert de ℓ dans F $\exists U$ voisinage ouvert de a dans E: $U \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$.

3. Question de cours. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application. Montrer que si f est différentiable en a, alors f est continue en a. Donner un exemple où la réciproque n'est pas vrai. $f(x) - f(a)$

4. Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0) : f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \ .$$

45'

a) Calculer les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ en chaque point de $\mathbf{R}^2$.
b) Montrer que $\partial_1 f$ est continue en chaque point de $\mathbf{R}^2$. On admet que $\partial_2 f$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. 1h
c) Est ce que f est différentiable en $(0,0)$?
d) Calculer explicitement $(\partial_1\partial_2 f)(0,0)$ et $(\partial_2\partial_1 f)(0,0)$.
e) Est ce que f est deux fois différentiable en $(0,0)$?

X **5. Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction (au moins) deux fois différentiable et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y) = f(x+y^2, x^3+y) \ .$$

Exprimer les dérivées partielles $(\partial_1 g)(x,y)$, $(\partial_2 g)(x,y)$, $(\partial_1\partial_1 g)(x,y)$ et $(\partial_1\partial_2 g)(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de f. 1h30

X **6. Exercice.** Soit $a \in \mathbf{R}$ un paramètre et soit $f_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f_a(x,y,z) = ay(y+2) - x^2 - z^2 - xz + 3x + 3z \ .$$

Pour chaque valeur du paramètre $a \in \mathbf{R}$, déterminer les points critiques de f et (autant que possible avec les outils du cours) leurs nature (locale).

Question bonus: déterminer le cas échéant si un extremum local est global.

X **7. Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x - 1$.

a) Énoncer le théorème des fonctions implicites et l'appliquer à la fonction f au voisinage du point $(0,1)$ pour montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = g(x)$ de classe C^1 (au moins).
b) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

Barème indicatif : Q1 : 3 pts ; Q2 : 4 pts ; Q3 : 2,5 pts ; Q4 : 4 pts ; Q5 : 3 pts ; Q6 : 2,5 pts ; Q7 : 2,5 pts. *sur 21,5*