Application Linéaire & Matrice

M2-1

EXOS 7

Soit 3 vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$.
note ϕ l'applica° linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$,
$(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.
Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).
Déterminer le noyau de cette applica°.
On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
uler e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.
vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de
f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ ds la base
$f_1, f_2, f_3)$ et trouver la nature de l'applica° ϕ.
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier P est inversible. Calculer P^{-1}.
uelle rela° lie A, B, P et P^{-1} ?

$=(e_1, e_2, e_3)$, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire tq $\phi(e_1) = e_3, \dots$

Matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{array}{cccc} & & & \\ \left(\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \phi(e_3) \end{matrix} & \end{array}$$

$\in \mathbb{R}^3 : v = x e_1 + y e_2 + z e_3 \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = V$

$) \in \mathbb{R}^3$

$\phi(x e_1 + y e_2 + z e_3) \quad AV = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ x+y+z \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{} A.V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= x\phi(e_1) + y\phi(e_2) + z\phi(e_3) = -y e_1 + y e_2 + (x+y+z) e_3$

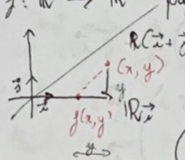
Applica° Linéaire & Matrices

(1)

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canoniq $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projec° sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
→ Â q° + $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$.
→ Â q° + $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ base canoniq de $\mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projec° sur $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$



$f(x, y) = (x - y, 0)$

$[(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)]$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

1) $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

$f(\vec{i}) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{i}$

$f(\vec{j}) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\vec{i}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\end{array} \\ \begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \end{array} & \end{array}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\underset{\text{"}\vec{u}\text{"}}{\vec{i}-\vec{j}}, \underset{\text{"}\vec{v}\text{"}}{-2\vec{i}+3\vec{j}})$

2) $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ Rq : $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$

$f(\vec{u}) = f(\vec{i}-\vec{j}) = f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\vec{i}$

$f(\vec{v}) = f(-2\vec{i}+3\vec{j}) = f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = -5\vec{i}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{i}\\ \vec{j}\end{array} \\ \begin{array}{cc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \end{array} & \end{array}$$

② ③ 3) $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$

$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{i} = 3\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{j} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$

$f(\vec{u}) = 2\vec{i} = 6\vec{u} + 2\vec{v}$, $f(\vec{v}) = -5\vec{i} = -15\vec{u} - 5\ldots$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{u}\\ \vec{v}\end{array} \\ \begin{array}{cc} f(\vec{u}) & \end{array} & \end{array}$$

Matrice d'une applica° linéaire.

- $f : E \to F$ ($f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$)
  - E de dimension p, on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots$
  - F de dimension n, on fixe une base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots$
- $f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{ij} f_i + \ldots + a_{nj} f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{a_{ij}} & \boxed{} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \in \mathcal{M}_{n,} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_p) \end{array} & \end{array}$$

1. Noyau de ϕ $\quad v \in \mathbb{R}^3 : v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ ⑤

$v \in \text{Ker}\,\phi \iff \phi(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\iff -ye_1 + ye_2 + (x+y+z)e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\iff \begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

$\text{Ker}\,\phi = \{ x e_1 + 0 \cdot e_2 + (-x)e_3 \mid x \in \mathbb{R} \}$

$\text{Ker}\,\phi = \{ x(e_1 - e_3) \mid x \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(e_1 - e_3)$

2) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

$\begin{cases} e_1 - e_3 = f_1 \\ e_1 - e_2 = f_2 \\ -e_1 + e_2 + e_3 = f_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = f_1 + e_3 \\ e_2 = e_1 - f_2 \\ -f_2 + e_3 = f_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$

- Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) de (f_1, f_2, f_3) ie (f_1, f_2, f_3) est génératrice
- (f_1, f_2, f_3) a 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ de dim 3.

c'est une base.

3. Matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$

$$\mathcal{S} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\phi = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \phi(f_1) & & \phi(f_3) \end{array} & \end{array}$$

Donc f est projection sur $\text{Vect}(f_2, f_3)$ parallèlement à $\mathbb{R}f_1$.

$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) \overset{\text{lin}}{=} \phi(e_1) - \phi(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$

$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = \ldots = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$

⑥ ## 1. Changement de base

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \end{array}$$

$\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ matrice de passage

"$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases dc P est inversible"

$$P^{-1} = \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) \times \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dt la matrice à la base canoniq (e_1, e_2, e_3) est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

Mq les vecteurs $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

~~Ex 5~~ 4 soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A $\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ de la base canonique.

Et $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Mq $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Calculer A^n pr $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer ens suites réelles q vérifient

$n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2} x_n - \frac{2}{3} y_n \end{cases}$

$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base canoniq de $\mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -5/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} e_1 = -2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 \\ e_2 = -2\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{-5}{4} e_1 + \frac{3}{4} e_2 \\ \varepsilon_2 = \frac{-1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \end{cases}$

$\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

elle a $2 = \dim \mathbb{R}^2$ élém^{ts}

$\Rightarrow \mathcal{B}'$ est une base.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \end{array} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{+3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$\boxed{B = P^{-1} A . P}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -5/2 & -2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canoniq ⑦

$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}$

$f(e_2) = \begin{pmatrix} -11 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix} = -11e_1 - 15e_2 - 7e_3$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 15e_1 + 20e_2 + 8e_3$, $f(e_3) = 5e_1 + 8e_2 + 6e_3$.

$$P = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \ \mathcal{B} \\ \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \mathcal{B}' \end{array}$$

P inversible $\Leftrightarrow \mathcal{B}'$ est une base

Par le calcul, P est inversible, dc $\mathcal{B}'$ est une base.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ $\boxed{B = P^{-1} A P}$

$$P^{-1} . A . P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$f(e'_1) = e'_1$
$f(e'_2) = 2e'_2$
$f(e'_3) = 3e'_3$

Formule de changement de base

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$; $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$
- $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

"Les vecteurs colonnes de P st les coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$, dans l'ancienne base $\mathcal{B}$"

$$\boxed{B = P^{-1} . A . P}$$

soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'applicat° linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p, $p \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canoniq de $\mathbb{R}^n$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicat° linéaire tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$f(e_1) = e_n$, $f(e_2) = e_{n-1}$, ..., $f(e_{n-1}) = e_2$, $f(e_n) = e_1$

ie $f(e_i) = e_{n+1-i}$

Donc $\forall i = 1, \dots, n$, $f \circ f(e_i) = f(f(e_i)) = f(e_{n+1-i})$

$= e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$

ie $\boxed{f \circ f = id_{\mathbb{R}^n}} \Rightarrow I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f)$

$I_n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f) \times (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)$

$I_n = A^2$ ie $\boxed{A^2 = I_n}$

A^p ? • si $p \geq 0$: $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = I_n$, $A^3 = A \cdot A^2 = A$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_n$

• Si p pair : $A^{2k} = (A^2)^k = A^2 \times \dots \times A^2 = I_n^k = I_n$

• Si p impair : $A^{2k+1} = (A^{2k+1}) = A \times A^{2k} = A$

• si $p < 0$: $A \times A = I_n \Rightarrow A$ est inversible, $A^{-1} = A$

$p = -|p|$ dc $A^p = A^{-|p|} = (A^{-1})^{|p|} = A^{|p|}$

• si $|p|$ est pair : I_n

• si $|p|$ est impair : A $\Rightarrow A^n = \begin{cases} I_n & \text{si } p \text{ est pair} \\ A & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$

Applicat°s linéaires | Matrices

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ où $\dim E = p$, $\dim F = n$ $\longrightarrow$ $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \\ e'_n \end{matrix} \\ f(e_1) \; \dots \; f(e_p) \end{array}$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ $\longleftarrow$ $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ où $A = (a_{ij})$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

$f(e_j) = a_{1j} e'_1 + \dots + a_{nj} e'_n$

$rg\, B = 4 - \dim(\mathrm{Ker} f_B) = 3$

$\mathrm{Im}(f_B) = \mathrm{Vect}(\underbrace{f_B(e_1), f_B(e_2), f_B(e_3)}, f_B(e_4))$

forment une famille libre à 3 élts de $\mathrm{Im}(f_B)$ qui est de dimension 3.

Donc $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathrm{Im}(f_B)$.

Rang d'une matrice & déterminants

$\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: • $rg\, A \leq \min(n, p)$

• $rg\, A \geq k$ dès $\exists$ un déterminant extrait de taille k qui est non nul.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

• $rg\, A \leq 4$

• $\det A = 0$ dc $rg\, A \leq 3$

• $rg\, A \geq 3$ car $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

dc $\boxed{rg\, A = 3}$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $rg(A) = k \iff$ • il existe un déterminant extrait & de taille $k \neq 0$. • $\forall$ déterminants extraits de taille $m > k$ sont NULS

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ • $rg\, A \leq 3$

• $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$ dc $rg\, A \geq 2$

det extts de taille 3 st nuls

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow \boxed{rg\, A = 2}$

(11) 2) Calcul de A^n

$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P \iff A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$A^n = A \times A \times \dots \times A = (PB\underbrace{P^{-1})(P}_{I_n}BP^{-1}) \dots (PBP^{-1}) = PB^n P^{-1}$

où $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -10 + \frac{6}{3^n} & -4 + \frac{4}{3^n} \\ 15 - \frac{15}{3^n} & 6 - \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2} x_n - \frac{2}{3} y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -5/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

$\iff X_{n+1} = A X_n$

Alors $X_n = A X_{n-1} = A(AX_{n-2}) = A^2 X_{n-2} = \dots = A^n X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

ie $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -10 + \frac{6}{3^n} & -4 + \frac{4}{3^n} \\ 15 - \frac{15}{3^n} & 6 - \frac{10}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $\boxed{X^n = A^n X_0}$

$\iff \boxed{\begin{cases} x_n = -\frac{1}{4}\left(-10 + \frac{6}{3^n}\right) x_0 - \frac{1}{4}\left(-4 + \frac{4}{3^n}\right) y_0 \\ y_n = -\frac{1}{4}\left(15 - \frac{15}{3^n}\right) x_0 - \frac{1}{4}\left(6 - \frac{10}{3^n}\right) y_0 \end{cases}}$

(14) Soit a & b deux réels & A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mq $rg(A) \geq 2$. Pr qles valeurs de a & b a-t-on $rg(A) = 2$?

Mq $rg(A) \geq 2$

- $rg(A) = rg f = \dim \operatorname{Im} f$
- $rg A = \dim V$ où $V = \operatorname{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_4} \right\}$
- $rg A \leq 4$; $rg A \leq 3$
- v_2 et v_3 ne st pas colinéaires dc $\dim V \geq 2$ dc $rg A \geq 2$

$$2 \leq rg A \leq 3$$

$rg A = 2 \iff \dim V = 2$

$\iff \begin{cases} v_1 \in \operatorname{Vect}(v_2, v_3) \\ v_4 \in \operatorname{Vect}(v_2, v_3) \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3 \\ \exists \lambda', \mu' \in \mathbb{R} \quad v_4 = \lambda' v_2 + \mu' v_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \begin{cases} a = 2\lambda - \mu \\ 3 = \mu \\ 5 = 4\lambda - \mu \end{cases} \\ \exists \lambda', \mu' \in \mathbb{R} \begin{cases} b = 2\lambda' - \mu' \\ -4 = \mu' \\ 2 = 4\lambda' - \mu' \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2, \mu = 3, a = 1 \\ \lambda' = -\frac{1}{2}, \mu' = -4, b = 3 \end{cases}$

Conclure

$rg(A) = 2 \iff a = 1, b = 3$

sinon $rg(A) = 3$

---

soit $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \end{array}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

calculer $rg(A)$, $rg(B)$.

Déterminer une base du noyau & une base de l'image pr chacune des (AL) associées f_A, f_B.

- $\boxed{rg(A) = \text{nbr de colonnes (lignes) q st linéairement indépdtes}}$

(Rq) $c_1 = c_2 - c_3$ dc $rg A \leq 2$
c_2 & c_3 ne st pas proportionnelles $\Rightarrow rg A \geq 2$ $\Rightarrow \boxed{rg A = 2}$

$\operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$= \underbrace{\operatorname{Vect}(f(e_2), f(e_3))}_{\text{base de } \operatorname{Im} f}$

$\dim \operatorname{Ker} f + rg f = \dim E = 3 \Rightarrow \operatorname{Ker} f$ est de dimension 1

or $f(e_1) = f(e_2) - f(e_3) \iff f(\underbrace{e_1 - e_2 + e_3}_{\neq 0}) = 0$

Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(e_1 - e_2 - e_3)$

noyau :

$B \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y - z + 7t = 0 \\ 4x + 3y - z + 11t = 0 \\ -y + 2z - 4t = 0 \\ 3x + 3y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$ (PDG) $\iff \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$\iff X = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dc $\operatorname{Ker}(f_B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\dim(\operatorname{Ker} f_B) = 1$

---

i) Image & noyau de f

$E = \mathbb{R}_n[X]$, $\dim E = n+1$

$f(1) = 0$, $f(X) = 0$ st 2 élts du (N). $1, X \in \operatorname{Ker} f$

Image $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)\}$

Image de f : $f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)$

forment un système échelonné, dc st linéairement indépendant : $\dim \operatorname{Im} f = n-1$

et $(f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Noyau

dim $\operatorname{Ker} f + \underbrace{rg(f)}_{n-1} = \underbrace{\dim E}_{n+1}$ dc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

$(1, X)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Mq ∃ unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$
$f(P) = Q$, $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$

∃ : Hypo : $Q \in \operatorname{Im} f$, dc $\exists R \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $f(R) = Q$

ose $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$

- $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$
- $f(P(X)) = f(R(X) - R(0) \cdot 1 - R'(0)X)$
$= f(R(X)) - R(0) \cdot f(1) - R'(0) \cdot f(X)$
$= Q(X) - 0 - 0 = Q(X)$.

Unicité

P & P'. Mq P = P' en vérifiant 3 conditions.

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E ds lui-m̂ tq $f^2 = f$. (15)

1) Mq $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2) Si E est de dimension finie n.
Posons $r = \dim \operatorname{Im} f$. Mq ∃ une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tq $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ & $f(e_i) = 0$ si $i > r$.
Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

$f : E \to E$ tq $f \circ f = f$

1) Mq $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

(a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

$x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ dc $f(x) = 0$ et dc $\exists x' \in E$ tq $f(x') = x$

$0 = f(x) = f(f(x')) = f \circ f(x') = f(x') = x$ dc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

(b) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$

Soit $x \in E$, $x = \underbrace{x - f(x)}_{\text{Mq} \in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f(x)}_{\operatorname{Im} f}$

$f(x - f(x)) \overset{AL}{=} f(x) - f(f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$

Donc $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$.

(16) Soit f l'applicat° de $\mathbb{R}_n[X]$ ds $\mathbb{R}[X]$ définie en posant $\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$:

$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

1) Mq f est linéaire & q son image est incluse ds $\mathbb{R}_n[X]$

2) Dans le cas où $n=3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pr une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.

3) Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension.

4) Soit Q un élt de l'image de f. Mq s'il $\exists$ un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $f(P) = Q$, $P(0) = P'(0) = 0$.

$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$P(X) \longmapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

Mq

① f est linéaire

• $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda . P(X) + \mu Q(X)$

$= \lambda [P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)] + \mu [Q(X+1) + Q(X-1) - 2Q(X)]$

$= \lambda . f(P) + \mu Q(X) \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

• $f(P(X))$

• $\deg f(P(X)) \leq n$

② a) Cas $n = 3$

$\mathbb{R}_3[X]$ un EV de dimension 4 : base : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} & \end{array}$$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = $

$f(X) = (X+1) + (X-1)$

$f(X) = 0$

$f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2$

$f(X^2) = 2$

$f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X$

b) n quelconque

$\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$

$f(X^p) = (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p$

$f(X^p) = \sum_{0 \leq k \leq p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{0 \leq k \leq p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X$

$f(X^p) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ p-k \text{ est paire}}} 2\binom{p}{k} X^k$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & & 2\binom{p+1}{1} \\ & & 0 & 0 & & 2\binom{p}{2} & & 0 \\ & & & 0 & \cdots & 2\binom{p}{4} & & 2\binom{p+1}{3} \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f(1) \quad f(X) \quad f(X^2) \cdots f(X^p) \qquad f(X^{p+1})$

p est pair $\qquad p+1$ est pair

Applications Linéaires & Matrices

Emmanuel Fricain

27/04

Applicat°s Linéaires & Matrices

5.4. Changements de base

$[e'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{i,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$ la matrice de passage

vecteur colonne MDP

$f(x,y) = (x+y, x-2y)$

$e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

$f(e_1) = f(1,0) = (1,1)$; $f(e_2) = f(0,1) = (1,-2)$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canoniq de $\mathbb{R}^2$.

$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

soit $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (-1,1)$

On voit u_1 & u_2 ne st pas colinéaires & de $\{u_1, u_2\}$ est libre.

Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(1)

$\mathcal{B}'$ est la matrice P donnée par

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad P = \begin{pmatrix} u_{11} \times e_1, & u_{21} \times e_1 \\ u_{12} \times e_2, & u_{22} \times e_2 \end{pmatrix}$

Rq. P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$P = \mathrm{Mat}(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

puis $P^{-1} = \mathrm{Mat}(Id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

$[u]_{\mathcal{B}} = P.[u]_{\mathcal{B}'}$ et $[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}}$

ex $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

$\Rightarrow$ justifier $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base.

$P = \mathrm{Mat}(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \;\; e'_1 \; e'_2 \; e'_3 \end{array}$

On cherche X tq $PX = Y$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ x + y + z = +c \end{cases}$

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - c \\ -b + c \\ -a + c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

soit $u = (2, 3, -1)$; calculer $[u]_{\mathcal{B}'}$.

on a $[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

D'où $u = 6e'_1 - 4e'_2 - 3e'_3$

TH Changement de base

si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

alors $\boxed{B = Q^{-1}.A.P}$

Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On cherche $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$

$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \left(\mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B})\right)^{-1}$

$\times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$

$\times \mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

(3)

$P = \mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On doit avoir P^{-1}.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ($

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ y = -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \end{cases}$

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = P^{-1} . \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \times P$

$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4)

$A = Mat(f, \mathcal{B})$, $B = Mat(f, \mathcal{B}')$ Bvecteurs ns 3.

$\boxed{B = P^{-1} . A . P}$

Applicat°s linéaires & Matrices

TD - 7 - 23/04

$A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Ex 1 f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ d^t A ds $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ f(e_1) \; f(e_2) \; f(e_3) \end{array}$$

on pose $e_1' = (1, -1, 0)$, $e_2' = (1, 0, 1)$, $e_3' = (0, 1, 2)$.

1) Mq $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{e_1', e_2', e_3'\}$ est une famille libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer $f(e_i')$, $1 \leq i \leq 3$, exprimer résultats ds la base $\mathcal{B}'$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire.

Matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \phi(e_1) \; \phi(e_2) \; \phi(e_3) & \end{array}$$

(R1) si f linéaire, $A = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, alors $\forall u \in E$, on a $[f(u)]_{\mathcal{C}} = A \times [u]_{\mathcal{B}}$

② $[f(e_1')]_{\mathcal{B}'} = A \times [e_1']_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3e_1'$$

$[f(e_2')]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2'$; $[f(e_3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2e_3'$

3) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

$B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$

La matrice B doit contenir les coordonnées de $f(e_i')$, $1 \leq i \leq 3$.

$f(e_1') = 3e_1' + 0e_2' + 0e_3'$

$f(e_2') = 0e_1' + e_2' + 0e_3'$

$f(e_3') = 0e_1' + 0e_2' + 2e_3'$

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ f(e_1') \; f(e_2') \; f(e_3') \end{array}$$

$$\hookrightarrow P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ e_1' \; e_2' \; e_3' \end{array} \quad \rightsquigarrow \underline{B = A . P}$$

Ex : $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x-2y+2z,\ 2x-2y+z,\ 2x-y)$

1) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On pose $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (0,1,1)$, $e'_3 = (1,0,-1)$

a) Mq $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donner P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad P = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

On a $e'_1\ e'_2\ e'_3$ famille de 3 vecteurs, dans une dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer P^{-1}, exprimer e_1, e_2, e_3 en f e'_1, e'_2, e'_3.

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + z = a \\ x + y = b \\ x + y - z = c \end{cases} \iff P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 - e'_2 + 0.e'_3 \\ e_2 = -e'_1 + 2e'_2 + e'_3 \\ e_3 = e'_1 - e'_2 - e'_3 \end{cases}$$

c) Calculer $f(e'_1), \ldots$ Exprimer résultats ds base $\mathcal{B}'$.

$$\left| \begin{array}{l} [u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}'} \times P \\ [u]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}} \times P^{-1} \end{array} \right.$$

Soit $B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$

$\cancel{B} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

$$\cancel{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*

$[e_1]_{\mathcal{B}'}\ [e_2]_{\mathcal{B}'}\ [e_3]_{\mathcal{B}'}$

$f(e'_1) = e'_1$

$f(e'_2) = -e'_2$

$f(e'_3) = e'_2 - e'_3$

$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{matrix} \end{array}$$

* $[e_1]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [e_1]_{\mathcal{B}}$

Ex : Dans $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$; $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$f(1) = 1 + X$, $f(X) = 1 + X^2$, $f(X^2) = X + X^2$

1) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f[e_1] & f[e_2] & f[e_3] \end{matrix} \end{array}$$

2) On pose $P_1 = 1 - X^2$, $P_2 = X - X^2$, $P_3 = 1 + X$.

a) Mq $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ & donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On a une famille de 3 vecteurs, dans une dimension 3, pr mq c'est une base, il suffit de mq la famille est libre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \end{array}$$

(b) Calculer P^{-1}, exprimer les vecteurs $1, X, X^2$ en fonction de P_1, P_2, P_3

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b \\ -x - y = c \end{cases} \iff P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer $f(P_i)$, $1 \leq i \leq 3$, exprimer résultats dans $\mathcal{B}'$.

$[P_1]_{\mathcal{B}'} = P.[P_1]_{\mathcal{B}}$?

$$A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(P_1) = P_1$

$f(P_2) = P_1 - P_2$

$f(P_3) = -P_2 + 2P_3$.

d) $$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(P_1) & f(P_2) & f(P_3) \end{matrix} \end{array}$$

e) $\boxed{B = P^{-1}.A.P}$

1 Ex 4 soit f l'applicat sur $\mathbb{R}_3[x]$ ①

$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$, $f(P) = XP' - 3P$.

1) Mq f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

Pour $\mathbb{R}_3[X]$, le degré du polynôme P est inférieure ou égale à 3. Or l'applicat $f(P)$ est caractérisée par la dérivée du polynôme P, multiplié par un monôme x. Autrement dit, $\deg P' = 2$ au plus, $\deg(X) = 1$, d'où $\deg P' + \deg(X) = 3$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_3[X]$.
Donc f est bien un endomorphisme de la forme $f: \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$.

2) Donner la matrice de f dans la base canoniq de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

$P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$.

$P' = 3a_3 X^2 + 2a_2 X + a_1$.

$f(P) = XP' - 3P = -a_2 X^2 - 2a_1 X - 3a_0$.

$f(P) = -3a_0 - 2a_1 X - a_2 X^2$

② $f(1,0,0,0) = (-3,0,0,0)$
$f(0,1,0,0) = (0,-2,0,0)$
$f(0,0,1,0) = (0,0,-1,0)$
$f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer $\operatorname{Im} f$, on montrera que $\{f(1), f(X), f(X^2)\}$ en est une base.

Si f $\mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ alors $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par la famille:
$f(1), f(x), f(X^2), f(X^3)$.

$f(X^3)$ est à négliger car c'est le polynôme nul.
Puis $f(1) = -3$, $f(X) = -2$ et $f(X^2) = -1$, ils sont tous de degrés distincts deux à deux, donc il s'agit d'une famille libre.
Donc $\{f(1), f(x), f(x^2)\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

|

4) Déterminer $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ et que $\{X^3\}$ est une base de $\ker f$.

TH du rang $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$

$\Leftrightarrow \dim \ker f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \mathrm{Im} f = 4-3 = 1$.

S'il on a $\dim \ker f = 1$, TOUT vecteur NON NUL de l'espace est une base.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$ non nul $\Leftrightarrow f(P) = 0$, on peut prendre $P = X^3$. D'où $\{X^3\}$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

5) Mq $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$

et que $\mathcal{B}' = \{f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\left|\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im} f = 3 \\ \dim \mathrm{Ker} f = 1. \end{array}\right.$

Mq $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$

$\mathrm{Im} f$ est engendré par trois polynômes de deg ≤ 2, dc tt polynôme de $\mathrm{Im} f$ est de deg ≤ 2.

Puis $\mathrm{Ker} f$ est engendré par X^3, dc le seul polynôme $\mathrm{Ker} f$ ayant deg $\leq$ est le polynôme nul.

$(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f) = 0$

En utilisant la formule des 3 dimensions on obtient.

$\dim(\mathcal{J} + K) = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f - \dim(\mathrm{Im} f \cap \dots)$

$\dim(\mathcal{J} + K) = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.

Pour conclure,

$$\begin{cases} \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \\ \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_3[X] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_3[X]$$

$\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires.

6) Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}'$

$f(f(1)) = f(-3) = -3 \times f(1)$

$f(f(X)) = f(-2X) = -2 f(X)$

$f(f(X^2)) = f(-X^2) = -f(X^2)$

$f(X^3) = 0$

$$\Rightarrow B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_3 \end{cases}$$

1) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \end{array}$$

2) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$?

Pour $\mathrm{Im} f$, on sait que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est une famille génératrice.

Or $f(e_1) = f(e_3)$, donc on peut enlever $f(e_3)$ par exemple.

$\mathcal{B}_1 = \{e_3, -e_1 + e_2 + e_3\}$ est une FG de $\mathrm{Im} f$. D'où $\mathrm{rg}(f) = 2$.

$\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{rg}(f) + \dim \mathrm{Ker} f$

$\Leftrightarrow \dim \ker f = 3 - 2 = 1$.

Pour exiber $\mathrm{Ker} f$, il suffit d'exiber un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$.

Or $f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = e_3 - e_3 = 0$

Donc $e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker} f$

D'où $\mathcal{B}_2 = \{e_1 - e_3\}$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

On cherche à savoir si $\mathrm{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}_3[X]$

Mq $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_3[X]$. $\Rightarrow e_3 \in F$ et $e_1 - e_3 \in F$

On a $e_3 \in \mathrm{Im} f$ et $e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker} f$

Alors $e_1 = e_3 + (e_1 - e_3) \in F$

Puis $-e_1 + e_2 + e_3 \in \mathrm{Im} f \Rightarrow -e_1 + e_2 + e_3 \in F$.

alors $e_2 = e_1 + (-e_1 + e_2 + e_3) - e_3 \in F$.

D'où F contient $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ mais $\dim F \geq 3$,

mais $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, d'où $F = \mathbb{R}^3$.

En utilisant le théorème des 3 dimensions,

$\dim F + \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 1 + 2 = 3$.

Mais $\dim F = 3$ Donc $\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.

3) On pose $e'_1 = e_1 - e_3$ ⑦ ⑧

$e'_2 = e_1 - e_2$

$e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

a) Mq $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice P de passage de B à B'.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une famille libre et est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) exprimer e_1, e_2, e_3 en fonc° e'_1, e'_2, e'_3 ; en déduire P^{-1}

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e_3 \\ e_2 = e_1 - e'_2 \\ e_3 = e'_3 + e_1 - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_1 + e'_3 \\ e_3 = e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = P^{-1} . A . P}$$