M52-B Topologie & Calculs d'intégrales

Mr. Potyagailo → 1 qθ cours DS. DM.

Chapitre 0 : Rappels sur EV espaces vectoriels

Ⓓ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opéraθs suivantes définies entre les élts de V. (vecteurs)

I. Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \longrightarrow V$ opéraθ de l'addition.

$\forall x,y \in V \; (x,y) \longrightarrow x+y$

+ vérifie les axiomes.

$\forall x,y,z \in V$, on a :

a) $x+y = y+x$ (commutativité)

b) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associativité)

c) $\exists\, 0 \in V,\; 0+x = x$ (élt neutre)

d) $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y = 0$

On note l'élt y : $-x$.

⚠ (exercice) • Mq 0 est l'élt uniq vérifiant c)

•• Mq $\forall x \; \exists!\, y \in V : x+y=0$

II. Multiplicaθ par scalaire

Cette opéraθ $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

$\lambda \in \mathbb{K},\; x \in V \;\; (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ ou λx

L'opéraθ $\cdot$ vérifie les axiomes

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \;\; \forall x,y \in V$

a) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

b) $1 \cdot x = x$

c) $(\alpha+\beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivité) ∅ scalaires

d) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Rq On suppose presque toujours que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ⓓ • Un système fini de vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est dit libre si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

•• Un système quelconque de vecteurs $\{e_i : i \in I\} = E$ est dit libre si tout sous-système fini de E est libre.

(i.e. $\forall x \in E$, x n'est pas CL non-triviale des autres vecteurs).

D Soit V un e.v., on dit que V est de dimension $n \in \mathbb{N}$ s'il existe un système de n vecteurs libre et tt système de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

e.g. : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots, e_n = (0, 0 \dots 0, 1)$ sont libres & tt vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$. s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

•• On dit que $\dim V = \infty$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs libres.

e.g. :
a) $\dim \mathbb{R}^n = n$
b) L'ens. des f continues $C[a, b] =$
$= \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ est continue} \}$

$C[a, b]$ est un espace vectoriel car si $f, g \in C[a, b] \Rightarrow f + g \in C[a, b]$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in C[a, b]$.

On note que $\dim C[a, b] = \infty$ car $C[a, b]$ contient les polynômes $1, x, x^2, \dots, x^n$

& $\forall n$, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0$ dans $C[a, b]$

si $P_n = 0 \iff \forall x \in [a, b]$, $P_n(x) = 0(x) = 0$

le TH Principal de l'Algèbre

$\Longrightarrow c_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

$\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ est libre.

En plus, $\mathbb{R}[X] = \{$polynômes de coeff de $\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^*[X]$: ens des polynômes sur $[a, b]$ est aussi un espace vectoriel et $\dim(\mathbb{R}^*[X]) = \infty$.

Par contre $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq n\}$

$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

car $\forall P_n \in \mathbb{R}_n[X] : P_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{R}$

Le système $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base de cet espace.

c) L'ensemble $\ell_2 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\right\}$

ℓ_2 est un espace vectoriel car si

$x, y \in \ell_2 \Rightarrow x+y \in \ell_2$.

En effet, $(x_i+y_i)^2 \leq 2x_i^2 + 2y_i^2$

$\Leftrightarrow x_i^2 + y_i^2 + 2x_iy_i \leq 2x_i^2 + 2y_i^2 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 \geq 0$.

En plus, on a égalité ssi $x_i = y_i \ \forall i$.

Alors $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2 \leq 2\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}_{\text{fini } <\infty} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}_{\text{fini } <\infty}\Big)$$

$\Downarrow$ $<\infty$

dc somme CV.

En plus $\forall x \in \ell_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in \ell_2$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

$\to \dim \ell_2 = \infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}}_{n \text{ élts libres}}$

$e_i \in \ell_2$ car $\sum(0+0+\dots+1+0) = 1$.

R9 • Algèbre linéaire traite le cas d'e.v. de dim. finie.

• Analyse traite le <u>cas général</u>.

(D) Deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$: V & V^* sont isomorphes s'$\exists$ une applicat° bijective
$$\varphi : V \longrightarrow V^*$$
q respecte les opérations.

si $\varphi(v) = v^*$, $\varphi(u) = u^*$
alors $\varphi(u+v) = u^* + v^*$
$$\varphi(\lambda u) = \lambda u^*$$

φ est une applicat° linéaire bijective.

(D) Un sous-ens. V_1 de l'e.v. V est dit sous-espace de V si V_1 est un e.v. aux mêmes opérat°s.

$\forall\, x, y \in V_1$, $x+y \in V_1$
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V_1$, $\lambda x \in V_1$.

e.g. : 1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \dots$
2) $\ell_2 \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} \subset \ell_\infty \subset \mathbb{R}^\infty$

où $\mathcal{C}_0 = \{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ s.ev
$\mathcal{C} = \{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = d \in \mathbb{R}\}$ s.ev.
l'ensemble des suites CV.

- ℓ_∞ : les suites bornées
- $\mathbb{R}^\infty$: ttes les suites

$\overset{\text{suites bornées}}{\ell^\infty} \in \overset{\text{suites CV}}{\mathcal{C}}$.

$\ell_2 \subset \mathcal{C}_0$?

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{C}_0$.

(P) Si $V_i \subset V$ $(i \in I)$
Un sous-espace vectoriel alors
$$V^* = \bigcap_{i\in I} V_i \text{ est un sous-espace de } V.$$

Preuve : Si $u, v \in V^*$ alors

$\forall i \in I : u, v \in V_i$.

$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall i \in I$.

$\Rightarrow u+v \in V^*$

$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

- D) Soit X un ss-ensemble d'un e.v. V.

On note $Vect(X) = \{ v \in V :$

$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i , \ x_i \in K \}$.

→ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

- Ex Mq $Vect(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i$ sev de X, $X \subset V_i \}$

$Vect(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

Preuve : Si $u, v \in V^*$ alors

$\forall i \in I : u, v \in V_i$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i \cdot \forall i \in I$.

$\Rightarrow u+v \in V^*$

$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

(D) Soit X un ss-ensemble d'un e.v. V.

On note $Vect(X) = \{ v \in V :$

$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ x_i \in K \}$.

$\rightarrow$ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

Ex M_q $Vect(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i$ sev de X, $X \subset V_i \}$

$Vect(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

u

$A \subset F \subset V$

$V_0 = Vect(A) = \{ \sum \alpha_i v_i = v, \ v_i \in A \}$ u

$\forall x, y, z$ ev

C1 Espaces Vectoriels normés

§1. Définitions & exemples

(D) Soit V un (ev) sur $\mathbb{K}$, une fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite norme si elle vérifie

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ - homogénéité
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(Cor 1) (Impliqué p l'Δ de norme)

L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ possède une distance (métriq) : $d(x,y) = \|x-y\|$.

On rappelle qu'une distance $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq

a. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
b. $d(x,y) = d(y,x)$
c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Preuve Cor 1

1)

a) $\|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$

b) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$
$= \|y-x\| = d(y,x)$

c) vient de 3.

Cor 2

$\forall x,y,z : \ \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Preuve $\|x-y\| = \|x+(-y)\| \leq \|x\| + \|-y\|$
$\triangle$ $= \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

& idem $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

$\square$

Exemples :

1. $V = \mathbb{R}^n$

a) La norme $\|\cdot\|$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

la norme euclidienne (1)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

On pose $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ distce euclidienne (2)

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est espace euclidien.

Prop $\|\cdot\|$ est une norme.

Preuve. $0 = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

.. $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \, \|x\|$

L'inégalité triangulaire s'obtient du Lemme suivant.

L (Inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz)

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n,$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}} \quad (CBS)$$

ou bien $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (CBS).
6

où $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est produit scalaire euclidien.

$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(e) est une fonction de 2 vecteurs linéaire sur les 2. (forme bilinéaire).

ex $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Preuve Lemme :

On commence de l'inégalité triviale :

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \ (*), \quad a \geq 0, b \geq 0$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \right)$$

On pose $a = \frac{x_i^2}{\|x_i\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$

$$(*) \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2} \right) \ (**)$$

On somme sur $i \in \{1, \dots, n\}$ dans $(**)$.

$f : t \to \|x+ty\|$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\frac{x_i^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\sum x_i^2}{\sum}$

$$\frac{\sum |x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2}(1+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \square$$

(Rq) historique

L'inégalité (CBS) pour les sommes a été donnée en 1821 par Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Victor Bouniakowski l'a obtenue sous la forme intégrale en 1851. → Russe (1804-1889).

G. Schwarz l'a redémontrée sous la forme intégrale en 1884. → (1843-1921).

Fin dém prop

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

on a $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

On obtient $\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ (CBS).

Les autres normes sur $\mathbb{R}^n$ sont :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad (2)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (3)$$

(2) & (3) st des normes.

$\triangle$ I

e.g. $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i+y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}|x_i| + \max_{1\leq i\leq n}|y_i|$

idem pr $\|\cdot\|_1$.

2. Cas Complexe

$V = \mathbb{C}^n$, on rappelle que sur $\mathbb{C}^n$,
le produit scalaire (hermitien) est
linéaire sur x & en plus il vérifie

- $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$, $\lambda\in\mathbb{C}$
- •• $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
- ••• $\langle x,x\rangle \geq 0$

Le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ est

$$\boxed{\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}}$$

& $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \qquad (4)$

En remplaçant x_i^2 par $|x_i|^2$, on obtient (CBS) Inég.

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\| \text{ pr la norme (4).}$$

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ & $\|\cdot\|_1$ st les mêmes ds le cas complexe.

3. Suites

On considère 3 espaces vectoriels réels.

- $\ell_2 = \{(x_i)_n : x_i \in\mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$
- $\ell_1 = \{$ " " " $, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| < \infty\}$
- $\ell_\infty = \{$ " " " $, \exists\, c>0 : |x_i| < c\}\ \forall i$

Dans ℓ_2, on pose $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$.

Tous les axiomes de la norme $\|\cdot\|$ st vérifiés, l'inégalité triangulaire, on obtient comme ceci :

Pour la partie 1), on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ dans } \ell_2.$$

Idem : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |x_i|$

st des normes.

NB : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$

car $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \infty$ & $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \infty$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \notin \ell_2$

~~2. Espaces de fonctions~~

(*) Mq $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p}$ est une norme. ($\underline{\text{si } p \geq 1}$)

Pr cela démontrer l'inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (M)$$

$1 < p < \infty$.

en utilisant la convexité (2^e dérivée $\oplus$) de la f $t \longmapsto t^p$ $(p > 1)$.

4. Espaces de fonctions

On considère l'ens $\mathcal{C}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont} \}$

On introduit 3 normes sur $\mathcal{C}[a,b]$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

ce st des normes car e.g pour $\|\cdot\|$ on a

$$(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2 \quad (\dagger)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f-g)^2 \geq 0$$

En intégrant $(\dagger)$ on obtient :

$$\int_a^b (f+g)^2(x)\, dx \leq 2\int_a^b f^2(x)\, dx + 2\int_a^b g^2(x)\, dx$$

On a $f, g \in (\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|) \Longrightarrow f+g \in C[a,b]$

~~§2. Topologie des espaces vectoriels normés~~

$f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$

$\lambda f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

On a $f+g$

-ade