TD. LGQ

FFiche Exos 1 :

Ex 1 Négation ; FF de logique propositionnelle

1.1. Le quadrilatère n'est ni un losange, ni un rectangle.

$$\neg x \wedge \neg y \; ; \; \neg(\neg x \wedge \neg y) = x \vee y.$$

1.2. L'entier 522 n'est pas divisible par 3, mais il est divisible par 7.

$$\neg p \wedge p \; ; \; \neg(\neg p \wedge p) = p \vee \neg q$$

1.3. S'il pleut demain ou s'il fait froid, je ne sortirai pas.

$$p \vee f \Rightarrow \neg s \; ; \; \neg(p \vee f \Rightarrow \neg s)$$
$$= (p \vee f) \wedge s.$$

Ex 3 Axiomes de ≡

3.1. Dmq distributivité de $\vee$ par rap. à $\wedge$.

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

a	b	c	$b\wedge c$	$a\vee(b\wedge c)$	$a\vee b$	$a\vee c$	$(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3.2. Lois de Morgan.

a	b	$\neg(a\wedge b)$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a\vee b)$	$\neg a \wedge \neg b$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Ex 4 : Régime Alimentaire.

Alice → viande (v), poisson (p), légumes (l), mais pas féculents (f)

4.1. Alice $= v \vee p \vee \ell \wedge \neg f = (v \vee p \vee \ell) \vee f$.

4.2. Valua° poisson à bordelaise : $(0 \vee 1 \vee 1) \wedge \neg 0$
$$= 1 \wedge 1 = 1$$

Ex 7 : Optimisat° program

```
while((!a || b) && c){...} 1
if (a || b) {2 ...}
  else{
    if (c && b) {3 ... }
      else {4 ... }
  }
```

$\varphi_1 : \neg P_1 = \neg((\neg a \vee b) \wedge c) = \overline{(\bar a \vee b)} \vee \bar c = (a \wedge \bar b) \vee \bar c$.

$P_2 = a \vee b$; $\varphi_2 = \neg P_1 \wedge P_2$ mais $\neg P_1$ n'est pas requis pr rentrer dans ②.

$\varphi_3 : \overline{(a \vee b)} \wedge (c \wedge d) = \bar a \wedge \bar b \wedge c \wedge b$?! → $\overline{a \wedge b \wedge c \wedge b} = \perp$

```
while(!a || b) && c){...}1
if (a || b){2 } else 3 } 4
```

Ex6 Pierre : sport.

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$.

$P_1 : s \vee g \vee m$; $P_2 : \neg g \vee \neg m$; $P_3 : m \Rightarrow \neg g$; $P_4 : s \Rightarrow m$.

s	g	m	$s \vee g \vee m$	$\neg g \vee \neg m$	$m \Rightarrow \neg g$	$s \Rightarrow m$
~~0~~	~~0~~	~~0~~	..	..	..	..
0	0	1	~~1~~	~~0~~	~~1~~	
0	1	0	~~1~~	~~0~~		
1	0	0	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
0	1	1	~~1~~	~~1~~	~~0~~	
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	~~1~~	~~1~~	~~1~~	
1	1	1	~~1~~	~~1~~	~~0~~	

Ex6 Pierre : sport.

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land P_4 .$$

$P_1 : s \lor g \lor m$; $P_2 : \lnot g \lor \lnot m$; $P_3 : m \Rightarrow \lnot g$; $P_4 : s \Rightarrow m$.

s	g	m	$s \lor g \lor m$	$\lnot g \lor \lnot m$	$m \Rightarrow \lnot g$	$s \Rightarrow m$
~~0~~	~~0~~	~~0~~	..	..	..	..
0	0	1	~~1~~	~~0~~	~~1~~	
0	1	0	~~1~~	~~0~~		
1	0	0	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
0	1	1	~~1~~	~~1~~	~~0~~	
1	0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1	1	0	~~1~~	~~1~~	~~1~~	
1	1	1	~~1~~	~~1~~	~~0~~	

Ex 8 gitlab-etu.fil.univ-lille1.fr/guedira/formules

$\varphi : x_1, \dots, x_n$

$\psi_1, \dots, \psi_n \quad : \quad \varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right].$

Mq $v \quad \left[\!\left[\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] \right]\!\right]_v = [\![\varphi]\!]_\mu$

$\mu(x_1) = [\![\psi_1]\!]_v .$

• si $\varphi \equiv \bot$,

$$\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] \equiv \bot \quad = 0$$

$$\varphi_\mu = 0 \Rightarrow \varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \varphi_\mu$$

• si $\varphi \equiv x_i$: $\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \psi_i$

$$\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right]_v = \psi_{i\,v} = x_{i\,v} = \varphi_\mu .$$

$$\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right]_v = \varphi_\mu$$

• si $\varphi \equiv \varphi_1 \text{ op } \varphi_2$: $\quad \text{op} \in \{\lor, \land, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}.$

1) $\varphi_1\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \varphi_{1,\mu}$

2) $\varphi_2\left[\frac{\psi_2}{x_2}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \varphi_{2,\mu}$.

1) et 2) $\Rightarrow \varphi_1\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] \text{ op } \varphi_2\left[\frac{\psi_2}{x_2}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \varphi_{1,\mu} \text{ op } \varphi_{2,\mu}$.

$$\boxed{\varphi\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] = \varphi_\mu .}$$

Puis, $\varphi_1\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right] \equiv \varphi_2\left[\frac{\theta_1}{x_1}, \dots, \frac{\theta_n}{x_n}\right]$

• $\varphi_1\left[\frac{\psi_1}{x_1}, \dots, \frac{\psi_n}{x_n}\right]_v = \varphi_{1\,\mu_1 v}$

• $\varphi_2\left[\frac{\theta_1}{x_1}, \dots, \frac{\theta_n}{x_n}\right]_v = \varphi_{2\,\mu_2 v}$

$\mu_2(x_1) = \psi_1\, v$

$\mu_1(x_2) = \theta_1\, v$

$\forall\, i \in [1, n].$

$\forall\, i \in [1, n]$; $\theta_i \equiv \psi_i$.

$\Rightarrow \mu_1(x_i) \equiv \psi_1\, v = \theta_i\, v = \mu_2(x_i)$

$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2$; $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \Rightarrow \varphi_{1\,\mu_2} = \varphi_{2\,\mu_1} = \varphi_{1\,\mu_2}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\left[\dfrac{\psi_1}{x_1},\dots,\dfrac{\psi_n}{x_n}\right]=\varphi_{1\mu_2} \\ \varphi_2\left[\dfrac{\theta_1}{x_1},\dots,\dfrac{\theta_n}{x_n}\right]=\varphi_{2\mu_2} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\varphi_1\left[\dfrac{\psi_1}{x_1},\dots,\dfrac{\psi_n}{x_n}\right] \\ \equiv \psi_2\left[\dfrac{\theta_2}{x_2},\dots,\dfrac{\theta_n}{x_n}\right]\end{array}$$

étant donnés ces variables, prgm st équivalents.

ViM

Modes : Commande (Echap) / Inser° (entr) / Replace (2x entr)
Visuel (v depuis mde. cmd.)

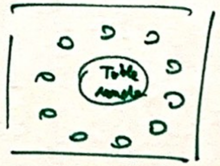
Mde cmd :

:h aide
:w enregistrer
:w nom_du_fichier enr. sous
:q quitter
:wq enregistrer et quitter
/mot clef recherche
:numéro de ligne
:%s/toto/data/g

Feuille 2 : SAT solveur.

Ex 1 : Table ronde, chevaliers

n places, n chevaliers.
P ↙ ↳ C



Autant de chevaliers que de places.

1) · valuat° $v = 1$?

· x_{ij} ; x_{ij} = vrai ssi C_i occupe P_j.
chevalier ↗ ↖ place

identificat° variables.

2) Contrainte : chaq chevalier doit occuper au moins un siège :

$$\bigwedge_{c \in C} \bigvee_{i \in [1,n]} x_{c,i}$$

" Pour tous les chevaliers, il existe une place de rang i tq la variable soit vraie "

3) ⟶⟶)(⟵⟵ : Un chevalier ne peut occuper au plus qu'un siège :

$$= \bigwedge_{c \in C} \bigwedge_{0 \leq 1 < j \leq m} \neg (x_{c_i} \wedge x_{c_j})$$

$$= \bigwedge_{c \in C} \bigwedge_{0 \leq 1 \leq j \leq m} \neg x_{c,i} \vee \neg x_{c,j}$$

4) ⟶⟶)(⟵⟵ : Chaque place est occupée par au moins un chevalier.

$$\bigwedge_{i \in [1,m]} \bigvee_{c \in C} x_{c,i}$$

5) ⟶⟶)(⟵⟵ : Deux chevaliers ne peuvent occuper la m̂ place.

$$\bigwedge_{c_i, c_j \in C [c_i, c_j]} \bigwedge_{i \in [1,m]} \neg x_{c_i,i} \vee \neg x_{c_j,i}$$

6) 5) pas nécessaire.

7) ⟶⟶)(⟵⟵ : Deux rivaux ne pvt pas ê assis côte à côte.
⚠ c_1 c_n : voisins.

$$\bigwedge_{c_i, c_j \in [c_i, c_j]} \left(\bigwedge_{j \in [1,m-1]} \neg x_{c_1,i} \vee \neg x_{c_1,1} \right) \wedge \left(\neg x_{c_1,m} \vee \neg x_{c_1,1} \right)$$

⇓

$$\bigwedge_{c_1, c_2 \in C [c_1 \neq c_2]} \left(\bigwedge_{i \in [1,m-1]} \neg x_{c_1,i} \vee \neg x_{c_2,i+1} \right) \wedge \left(\neg x_{c_1,n} \vee x_{c_2,1} \right)$$

Ex 2 : La tournée en vélo.

1) Variable : $x_{p,i}$ $\quad i \in [1,m]$, $p \in P$.

points de livraison.

2) entrepôt : point de départ circuit : $x_{e,1}$, $e \in P$.

x_{p_1,i_1} = vrai ssi je passe p point p_1 en 3°.

3) a) Expm chq pt de livron est visité au moins 1 fois.

$$\bigwedge_{p \in P \setminus \{e\}} \bigvee_{i \in [2,m]} x_{p,i}$$

Au moins 1 sle fois

car la 1° est vrai

b)

Au plus 1 sle fois

$$\left(\bigwedge_{p \in P \setminus \{e\}} \bigwedge_{p \leq i \leq j \leq m} \neg x_{p,i} \vee \neg x_{p,j}\right) = \neg(x_{p,i} \wedge x_{p,j})$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{i \in [1,m]} \neg x_{2,i}\right)$$

4) Ts pts de livn visited mmts ≠ journée.

$$\bigwedge_{i \in [2,m]} \bigvee_{p \in P} \underbrace{x_{p,i}}_{\text{vraie}}$$

$$\bigwedge_{i \in [2,m]} \bigwedge_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_1, p_2 \in P}} \neg x_{p_1,i} \vee \neg x_{p_2,i}$$

$$\neg(x_{p_1,i} \wedge x_{p_2,i})$$

5

5) Chq pt de tournée est relié au suivant p piste cyclable. (Premier & dernier pt relié à entrpôt)

$$\bigwedge_{\{p_1,p_2\} \in \overline{C}} \bigwedge_{i \in [2,m-1]} \neg x_{p_1,i} \vee \neg x_{p_2,i+1}.$$

$$\bigwedge_{\substack{p \in P \setminus \{e\} \\ \{e,p\} \in C}} \neg x_{p,m} \vee x_{p,2}.$$

Ex3 Sudoku :

3.1 : Q^lles variables ?

Les variables pr le pb st $x_{i,j,k}$ ∀ $i,j,k \in [1,9]$.

La variable $x_{i,j,k}$ est vraie ssi le chiffre i,j est k.

(on utilise coord ↗ en i de haut en bas, en j de gauche à droite).

3.2 Modifier le modèle pr représenter

Pr représenter grille ∀ modèle q on construit, il suffit ajouter la conjonct° $x_{i,j,k}$ tq chq case de coordonnée i,j de la grille comporte le chiffre k.

3.3

=>>X<<= chaq case contient ~~au~~ exactmt un chiffre

(i) Au moins un chiffre :

$$\bigwedge_{i,j\in[1,9]} \bigvee_{k\in[1,9]} x_{i,j,k}$$

(ii) Au plus un chiffre :

$$\bigwedge_{i,j\in[1,9]} \bigvee_{\substack{k_1,k_2\in[1,9],\\ k_1\neq k_2}} \neg x_{i,j,k_1} \vee \neg x_{i,j,k_2}$$

$$= \neg(x_{i,j,k_1} \wedge x_{i,j,k_2})$$

3.4 (i) =>>X<<= chaq colonne contient exactemt une occurrence de chq chiffre

(ii) =>>X<<= " ligne " " "

(i) $$\bigwedge_{\substack{i_1,i_2\in[1,9]\\ i_1<i_2}} \bigwedge_{k\in[1,9]} \neg x_{i_1,j,k} \vee \neg x_{i_2,j,k}$$

(ii) $$\bigwedge_{\substack{j_1,j_2\in[1,9]\\ j_1<j_2}} \bigwedge_{i,k\in[1,9]} \neg x_{i,j_1,k} \vee \neg x_{i,j_2,k}$$

3.5 =>>X<<= concerne les carrés.

=>>X<<= carrés + diff. Il faut se rendre compte (i_1,j_1) et (i_2,j_2) st ds le m̂ carré ssi $(i_1-1)\div 3=(i_2-1)\div 3$ et $(j_1-1)\div 3=(j_2-1)\div 3$. Écarter $i_1=i_2$ et $j_1=j_2$.

$$\bigwedge_{\{i_1,i_2\}\in C} \bigwedge_{\{j_1,j_2\}\in C} \bigwedge_{k\in[1,9]} \neg x_{i_1,j_1,k} \vee \neg x_{i_2,j_2,k}$$

où $C=\{\{i_1,i_2\} \mid i_1<i_2 \wedge (i_1-1)\div 3=(i_2-1)\div 3\}$

Feuille 3

Exo : Mettre ss FND (de V ou) :

$\boxed{M}$ équationnelle :

1) $\neg(p \wedge (q \Rightarrow p))$

$\neg(p \wedge (q \Rightarrow p)) \equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee p))$

$\equiv \neg p \vee \neg(\neg q \vee p)$

$\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg p) \equiv \neg p$

$\boxed{M}$ TDV :

p	q	q ⇒ p	p ∧ (q ⇒ p)	¬(p ∧ (q ⇒ p))	
0	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q$
0	1	0	0	1	$\neg p \wedge q$
1	0	1	1	0	
1	1	1	1	0	

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$.

2) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$: $\mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_2 \equiv (\neg(p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$

$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee r)$

$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)\ ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$.

on fixe la valeur de r = 1 par exemple. & on fixe r = 0 p voir si incohérence ou pas

3) $(p \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r) \equiv$

$\equiv \neg(p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(p \vee q) \vee r)$

$\equiv (\neg p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$

$\equiv (\neg p \wedge (q \wedge \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$

$\equiv (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$

ou ≡ +
et ≡ ×

Ex1 : Déterminer si ff st satisfiables à l'aide algo (DP).

1.1. $\varphi_1 = p \wedge q \wedge r$

PU sur p : $q \wedge r$.
PU sur q : r
PU sur r : $\top$

⇒ SAT

$\varphi_2 = (q \vee \neg p) \wedge \neg q \wedge p \wedge (r \vee \neg p)$.

PU sur ¬q $\neg(\neg q) = q$.

$\varphi_2 = \neg p \wedge p \wedge (r \vee \neg p)$.

⇒ NON SAT

$\varphi_3 = (q \vee p) \wedge (r \vee q) \wedge \neg r \wedge \neg q$ Ex 2

PU sur $\neg r$: $(q \vee p) \wedge q \wedge \neg q$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{non SAT}}$

$\varphi_4 = p \wedge q \wedge (q \vee \neg p) \wedge r$:

PU sur p : $q \wedge q \wedge r$
PU sur q : r $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$
PU sur r : $\top$

$\varphi_5 = (q \vee p) \wedge \neg q$:

PU sur $\neg q$: p $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$
PU sur p : $\top$

$\varphi_6 = (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$:

Résultante sur p : $(q \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$
PU sur q : $\neg r \wedge r$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON-SAT}}$

$\varphi_7 = (\neg p \vee t) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$:

élim littéral pur t : $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$
élim littéral pur s : $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$.
résultante sur r : $(p \vee q)$. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$
élim littéral pur p : q
PU sur q : $\top$

$op \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Homéomorphismes usuels :

$Var(\varphi) = \emptyset$ si $\varphi \in \{\top, \bot\}$

$Var(x) = \{x\}$

$Var(\neg \varphi) = Var(\varphi)$

$Var(\varphi \text{ op } \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$

$h(\varphi) = 0$ si $\varphi \in \{\top, \bot\}$

$h(x) = 0$

$h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$

$h(\varphi \text{ op } \psi) = 1 + \max(h(\varphi), h(\psi))$

$subst(\varphi, \sigma) = \varphi$

$subst(x, \sigma) = \sigma(x)$

$subst(\neg\varphi, \sigma) = \neg\, sub(\varphi, \sigma)$

$sub(\varphi \text{ op } \psi) = sub(\varphi, \sigma) \text{ op } sub(\psi, \sigma)$.

Ppe par induct° : traiter cas $\varphi = \bot, \top, x, \neg\psi, \psi_1 \text{ op } \psi_2$.

@ Mq ($\forall \varphi \in Prop(X)$ et $\forall \sigma$), si $\forall x \in X$, on a $h(\sigma(x)) \leq N$ alors $h(sub(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N$.

on sait… on vt…

- $\varphi = \bot$ ou $\top$: $sub(\varphi, \sigma) = \varphi$, dc $h(sub(\varphi, \sigma)) = h(\varphi) \leq h(\varphi) + N$ car $h(\top) = h(\bot) = 0$
- $\varphi = x$: $sub(\varphi, \sigma) = \sigma(x)$ et $h(sub(\varphi, \sigma)) = h(\sigma(x)) \leq N = h(\varphi) + N$ car $\varphi = x$
- $\varphi = \neg\psi$: $h(sub(\neg\psi, \sigma)) = h(\neg sub(\psi, \sigma)) = h(sub(\psi, \sigma)) + 1$ par hyp $\leq h(\psi) + 1 + N = h(\neg\psi) + N = h(\varphi) + N$
- $\varphi = \psi_1 \text{ op } \psi_2$: $h(sub(\psi_1 \text{ op } \psi_2, \sigma)) = h(sub(\psi_1, \sigma) \text{ op } sub(\psi_2, \sigma))$ $= \max(h(sub(\psi_1, \sigma)), h(sub(\psi_2, \sigma))) + 1 \leq \max(h(\psi_1) + N, h(\psi_2) + N) + 1$ par hyp $= h(\psi_1 \text{ op } \psi_2) + N = h(\varphi) + N$

$[\![\top, v]\!] = 1$

$[\![\bot, v]\!] = 1$

$[\![x, v]\!] = v(x)$

$[\![\neg\varphi, v]\!] = 1 - [\![\varphi, v]\!] = 1$

$[\![\varphi, v \wedge \psi, v]\!] = \min([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

$[\![\varphi, v \vee \psi, v]\!] = \max([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

P	Q	P∧Q	P∨Q	P⇒Q	P⇔Q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0

Déduct° naturelle : Preuve où tt est dév jsq mq $\bot$ ou $\top$.

@ $(a \wedge b) \Rightarrow (c \Rightarrow b \wedge c) \Leftrightarrow$

$= (a \wedge b) \Rightarrow (\neg c \vee (b \wedge c))$

$= \neg(a \wedge b) \vee (\neg c \vee (b \wedge c))$

$= \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee (b \wedge c)$

$= \neg a \vee \neg(b \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$= \neg a \vee \top = \top$

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$

ou : "fois" et : "plus"

- Satisfaisable : φ satisf. si $\exists$ valuat° v tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On dit que v satisfait φ.
- Tautologie : φ est tautologie si $\forall$ valuat° v, $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On le note $\models \varphi$.
- Conséq sémantiq : Γ ens de ff, alors φ est conséqce sémantiq Γ (noté $\Gamma \models \varphi$) si $\forall v$, v satisfait les ff de $\Gamma \Rightarrow v$ satsf φ.
- Equivlce sémantiq : φ sém. équ. à ψ si $\forall v$, $[\![\varphi, v]\!] = [\![\psi, v]\!]$. On le note $\varphi \equiv \psi$.
- Système complet : avec C ensemble de connecteurs logiqs. C complet si $\exists \psi$ tq : ψ n'est construite de connectrs de C et $\varphi \equiv \psi$, @ $\{\vee, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \bot\}$…

littéral : x ou $\neg x$

ff conj : $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$

ff disj : $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$

FND : $\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q_i} I_{i,j}$.

Mettre φ sous FND :

1) traduire $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
2) Pousser neg
3) user distrib de $\vee$ / à $\wedge$.

Algo Résol° SAT	Algo Davis-Putnam	Algo DDPL
• simplificat° • PU (propag° unit^x) • élimin littx purs LP	• simpli° • élim clauses unit^x PU • élim LP • élim var de résultte ↓ satisfiabilité	• élim PU • élim LP • simp résultante ↓ valuat°

Pb SAT : trouver v tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$.

Pb NP : pb résoluble en tps non-polynomial

@ mise ss FND pr SAT-Solvers de colorat° Australie :

C = couleurs, E = états, L = paires états limit,

$[e, c]$ = "e coloriable de c".

- Tout état a au moins 1 couleur : $\bigwedge_{e \in E} \bigvee_{c \in C} [e, c]$
- Aucun état n'a 2 couleurs : $\bigwedge_{e \in E, (c_1, c_2) \in C^2, c_1 \neq c_2} \neg[e, c_1] \vee \neg[e, c_2]$ " $\neg([e, c_1] \wedge [e, c_2])$
- états limitrophes n'ont pas m̂ couleur : $\bigwedge_{(e_1, e_2) \in L, c \in C} \neg[e_1, c] \vee \neg[e_2, c]$

$\varphi_3 = (q \vee p) \wedge (r \vee q) \wedge \neg r \wedge \neg q$

PU sur $\neg r$: $(q \vee p) \wedge q \wedge \neg q$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{non SAT}}$

$\varphi_4 = p \wedge q \wedge (q \vee \neg p) \wedge r$:

PU sur p : $q \wedge q \wedge r$

PU sur q : r $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$

PU sur r : $\top$

$\varphi_5 = (q \vee p) \wedge \neg q$: $(\neg q \vee \bot)$

PU sur $\neg q$: p $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$

PU sur p : $\top$

$\varphi_6 = (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$:

Résultante sur p : $(q \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$

PU sur q : $\neg r \wedge r$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON-SAT}}$

$\varphi_7 = (\neg p \vee t) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$:

élim littéral pur t : $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$

élim littéral pur s : $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$.

résultante sur r : $(p \vee q)$.

élim littéral pur p : q $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SAT}}$

PU sur q : $\top$

\# résultante
↳ soit r vraie
↳ soit r faux

1° cas : p vraie

2° cas : q vraie

ou : +
et : ×

appari° + : ss forme + seulement / de m̂ p.s.

PU : si variable 1 contrainte : 1 variable.

Ex 2 Trouver valuat° q satisfait ces ff à l'aide algo $\boxed{\text{DPLL}}$.

$\varphi_1 = p \wedge q \wedge r$:

PU sur p : $\varphi_1[p/\top] = q \wedge r$

PU sur q : $\varphi_1[p/\top, q/\top] = r$

PU sur r : $\varphi_1[p/\top, q/\top, r/\top] = \top$

solu° : $[p/\top, q/\top, r/\top]$.

$\varphi_2 = p \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee \neg p) \wedge r$:

PU sur p : $\varphi_2[p/\top] = (q \vee s) \wedge q \wedge r$. # s n'influence pas résultat ici

PU sur q : $\varphi_2[p/\top, q/\top] = r$

PU sur r : $\varphi_2[p/\top, q/\top, r/\top] = \top$.

solu° $[p/\top, q/\top, r/\top]$.

$\varphi_3 = (r \vee p) \wedge (q \vee p \vee s) \wedge \neg q$.

(PU) sur $\neg q$: $\varphi_3 [q / \bot] = (r \vee p) \wedge (p \vee s)$.

(ELP) r : $\varphi_3 [q / \bot, r / \top] = p \vee s$.

(ELP) p : $\varphi_3 [q / \bot, r / \top, p / \top] = \top$

soluθ : $[q, \bot, r / \top, p / \top]$.

- $\varphi_4 = (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$.

Résultante sur q : ▸ $\varphi_4 [q / \top]$:

$= \neg r \wedge (r \vee \neg q) = \neg r \wedge r \Rightarrow \boxed{\text{non-SAT}}$.

▸ $\varphi_4 [q / \bot]$:

$= p \wedge \neg p \Rightarrow \boxed{\text{non - SAT}}$.

$\varphi_5 = (\neg p \vee t) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$

(ELP) t : $\varphi_5 [t / \top] = ((p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$.

- (ELP) s : $\varphi_5 [t / \top, s / \top] = (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$.

Résultante sur r :

▸ $\varphi_5 [t / \top, s / \top, r / \top] = p$. $p/\top$

(PU) sur p : $\varphi_5 [t / \top, s / \top, r / \top] = \top$

soluθ : $[t / \top, s / \top, r / \top] \; p / \top$

▸ $\varphi_5 [t / \top, s / \top, r / \bot]$ q

(PU) sur p : $\varphi_5 [t / \top, s / \top, r / \top, q / \top] = \top$

soluθ $[t / \top, s / \top, r / \top, q / \top]$.

op $\in \{\land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Homéomorphismes usuels :

$Var(\varphi) = \emptyset$ si $\varphi \in \{T, \perp\}$

$Var(x) = \{x\}$

$Var(\neg\varphi) = Var(\varphi)$

$Var(\varphi \text{ op } \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$

$h(\varphi) = 0$ si $\varphi \in \{T, \perp\}$

$h(x) = 0$

$h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$

$h(\varphi \text{ op } \psi) = 1 + \max(h(\varphi), h(\psi))$

$subst(\varphi, \sigma) = \varphi$

$subst(x, \sigma) = \sigma(x)$

$subst(\neg\varphi, \sigma) = \neg\, sub(\varphi, \sigma)$

$sub(\varphi \text{ op } \psi) = sub(\varphi, \sigma) \text{ op } sub(\psi, \sigma)$.

Ppe par inducᵒ : traiter cas $\varphi = \perp, T, x, \neg\psi, \psi_1 \text{ op } \psi_2$.

@ Mq ($\forall \varphi \in Prop(X)$ et $\forall \sigma$), si $\forall x \in X$, on a $h(\sigma(x)) \leq N$ alors $h(sub(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N$.

on sait... on vt...

- $\varphi = \perp$ ou T : $sub(\varphi, \sigma) = \varphi$, dc $h(sub(\varphi, \sigma)) = h(\varphi) \leq h(\varphi) + N$ car $h(T) = h(\perp) = 0$
- $\varphi = x$: $sub(\varphi, \sigma) = \sigma(x)$ et $h(sub(\varphi, \sigma)) = h(\sigma(x)) \leq N = h(\varphi) + N$ car $\varphi = x$
- $\varphi = \neg\psi$: $h(sub(\neg\psi, \sigma)) = h(\neg sub(\psi, \sigma)) = h(sub(\psi, \sigma)) + 1$ par hypo $\leq h(\psi) + 1 + N = h(\neg\psi) + N = h(\varphi) + N$
- $\varphi = \psi_1 \text{ op } \psi_2$: $h(sub(\psi_1 \text{ op } \psi_2, \sigma)) = h(sub(\psi_1, \sigma) \text{ op } sub(\psi_2, \sigma))$ $= \max(h(sub(\psi_1, \sigma)), h(sub(\psi_2, \sigma))) + 1 \leq \max(h(\psi_1) + N, h(\psi_2) + N) + 1$ par hypo $= h(\psi_1 \text{ op } \psi_2) + N = h(\varphi) + N$

$[\![T, v]\!] = 1$

$[\![\perp, v]\!] = 1$

$[\![x, v]\!] = v(x)$

$[\![\neg\varphi, v]\!] = 1 - [\![\varphi, v]\!] = 1$

$[\![\varphi, v \land \psi, v]\!] = \min([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

$[\![\varphi, v \lor \psi, v]\!] = \max([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

P	Q	P∧Q	P∨Q	P⇒Q	P⇔Q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0

Déducᵒ naturelle : Preuve où tt est dév jsq mq $\perp$ ou T.

@ $(a \land b) \Rightarrow (c \Rightarrow b \land c) \Leftrightarrow$

$= (a \land b) \Rightarrow (\neg c \lor (b \land c))$

$= \neg(a \land b) \lor (\neg c \lor (b \land c))$

$= \neg a \lor \neg b \lor \neg c \lor (b \land c)$

$= \neg a \lor \neg(b \land c) \lor (b \land c)$

$= \neg a \lor T = T$

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q$

$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$

$(\varphi \land \psi) \lor \theta \equiv (\varphi \land \theta) \lor (\psi \land \theta)$

ou : "fois" et : "plus"

- Satisfaisable : φ satisfa. si $\exists$ valuaᵒ v tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On dit que v satisfait φ.
- Tautologie : φ est tautologie si $\forall$ valuaᵒ v, $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On le note $\models \varphi$.
- Conséq sémantiq : Γ ens de ff, alors φ est conséqce sémantiq Γ (noté $\Gamma \models \varphi$) si $\forall v$, v satisfait les ff de $\Gamma \Rightarrow v$ satisf φ.
- Equivlce sémantiq : φ sém. équ. à ψ si $\forall v$, $[\![\varphi, v]\!] = [\![\psi, v]\!]$. On le note $\varphi \equiv \psi$.
- Système complet : avec C ensemble de connecteurs logiqs. C complet si $\exists\, \psi$ tq : ψ n'est construite de connectrs de C et $\varphi \equiv \psi$, @ $\{\lor, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \perp\}$...

littéral : x ou $\neg x$

ff conj : $\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n$

ff disj : $\varphi_1 \lor \ldots \lor \varphi_n$

FND : $\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q_i} I_{i,j}$.

Mettre φ sous FND :

1) traduire $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
2) Pousser neg
3) user distrib de $\land$ p/ à $\lor$.

Algo Résolᵒ SAT	Algo Davis-Potman	Algo DDPL
• simplificaᵒ • PU (propaᵒ unitᵉ) • élima litᵗᵃˣ purs LP	• simpliᵒ • élim clauses unitᵉ PU • élim LP • élim var de résultᵗᵉ ↓ satisfiabilité	• élim PU • élim LP • simp résultante ↓ valuaᵒ

Pb SAT : trouver v tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$. (Pb SAT = résoudre FNC)

Pb NP : pb résoluble en tps non-polynomial

@ mise ss FND p SAT-Solvers de coloraᵒ Australie :

C = couleurs, E = états, L = paires états limi,

$[e, c]$ = "e coloriable de c".

- Tout état a au moins 1 coulem : $\bigwedge_{e \in E} \bigvee_{c \in C} [e, c]$
- Aucun état n'a 2 couleurs : $\bigwedge_{e \in E, (c_1, c_2) \in C^2, c_1 \neq c_2} \neg[e, c_1] \lor \neg[e, c_2]$ $\neg([e, c_1] \land [e, c_2])$
- états limitrophes n'ont pas mê couleur : $\bigwedge_{(e_1, e_2) \in L,\, c \in C} \neg[e_1, c] \lor \neg[e_2, c]$

```
While ((!a || b) && c) {...} 1
  if (a || b) {2 ...}
  else {
    if {c && b} {3}
    else {4 ...}
  }
```

$\neg P_1 = \neg((\neg a \lor b) \land c)$: φ_1

$= (a \land \neg b) \lor \neg c$

$P_2 : a \lor b$, $\varphi_2 = \neg P_1 \land P_2$

mais $\neg P_1$ pas regis p alle ds P_2

$\varphi_3 : \overline{(a \lor b)} \land (c \land d) = \bar{a} \land \bar{b} \land c \land b = \perp$

dc supp φ_3 p optimisaᵒ

Déterminer si ff satisfiable de algo DP.

$\varphi_7 = (\neg p \lor t) \land (p \lor \neg x) \land (q \lor x) \land (\neg q \lor s)$.

ELP t : $(p \land \neg x) \land (q \lor x) \land (\neg q \lor s)$

ELP s : $(p \land \neg x) \land (q \lor x)$

Résl x : $p \lor q$ (résultᵗᵉ : soit vraie / soit fausse)

ELP p : q

PU q : T

Trouver valuaᵒ q satisfait ff de algo DPLL.

$\varphi_2 = p \land (q \lor s) \land (q \lor \neg p) \land x$

PU sur p : $\varphi_2[p/T] = (q \lor s) \land q \land x$

PU sur q : $\varphi_2[q/T] = x$

PU sur x : $\varphi_2[x/T] = T$

Soluᵒ : $[p/T, q/T, x/T]$

$\varphi_4 = (q \lor p) \land (q \lor \neg p) \land (\neg x \lor \neg q) \land (x \lor \neg q)$

Résultante q : suppose $\varphi_4[q/T]$:

$\rightarrow \neg x \land x \Rightarrow$ non-SAT

backtracking $\varphi_4[q/\perp]$:

$\rightarrow \neg p \land p \Rightarrow$ non-SAT

dc $\perp$.

Logiq 1° ordre ~ **Feuille - 4-** ~ syllogismes aristotéliciens

Ex 1

Traduire asserts ds ff du calcul des prédicats, en introduisant $P(x)$ & $Q(x)$.

1. Tous les P sont des Q.

$\forall x.\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

2. Certains P sont des Q.

$\exists x.\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

3. Aucun P n'est un Q.

$\forall x\ (P(x)) \Rightarrow \neg Q(x) \equiv \neg \exists x.\ (P(x) \land Q(x))$.

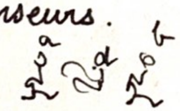
4. Certains P ne sont pas des Q.

$\exists x.\ (P(x)\ \land\ \neg\ Q(x))$

Ex 2

soit D = ens danseurs.

on note $d(a, b)$:



donner une ff de la logiq des prédicats exprimant qu'aucun danseur ne danse ds lui-m̂ & qu'aucun danseur ne danse ds 2 danseurs à la fois, en n'utilisant que le prédicat d et le prédicat d'égalité sur D.

• $\neg \exists x (x \in D \land d(x,x)) \equiv \forall x (x \in D \Rightarrow \neg d(x,x))$

• $\forall x \forall y \forall z\ ((x \in D \land y \in D \land d(x,y) \land d(x,z)) \Rightarrow (y=z)$

$\equiv \neg \exists x\ \exists y \exists z (x \in D \land y \in D \land z \in D \land d(x,y) \land d(x,z) \land y \neq z$

Ex 3

Prédicats :

- préd. unaires : film, artiste, acteur, réalisateur
- préd. binaires : joue(x,y) ; acteur joue ds un film

réalise(x, y) ; réalisat^{r} réalise un film

eq (x,y) : $x = y$; indvdus identiqs

1) Tout artiste est soit acteur, soit réalisat^{r} & inverst.

$\forall_x$ artiste$(x) \Leftrightarrow$ (acteur(x) $\lor$ réalisateur(x))

2) Tout acteur joue dans au moins un film.

$\forall_x$ acteur(x) $\Rightarrow$ joue(x,y) $\land$ $\exists y.$ film(y)

3) ff similaire pr les réalisateurs.

$\forall x.$ realisateur(x) $\Rightarrow$ réalise (x,y) $\land \exists y.$ film(y)

4) ff artistePolyvalent(x) vraie ssi
x joue dans un film tout en le réalisant

$\text{artistePolyvalent}(x) = \exists y.\ \text{film}(y) \land \text{joue}(x,y) \land \text{realise}(x,y)$

...

5) ff unFilm(x) vrai ssi, x a réalisé exactement un film.

$\text{unFilm}(x) = \exists y. \text{film}(y) \land \text{realise}(x,y) \land \forall z.\ \text{film}(z)$
$\Rightarrow \text{realise}(x,z) \Rightarrow x = z$

6) ff q signifie qu'aucun acteur n'a joué ds tous les films.

$\forall x.\ \text{acteur}(x) \Rightarrow \exists y.\ \text{film}(y) \land \neg\ \text{joue}(x,y)$

7) ff acteurFavori(x,y) vrai ssi x est un acteur, y est un réalisateur, x joue ds tous les films réalisés par y et ne joue ds aucun autre film.

$\text{acteurFavori}(x,y) = \text{acteur}(x) \land \text{realisateur}(y)$
$\land \forall z.\ \text{film}(z) \Rightarrow \text{realise}(y,z) \Leftrightarrow \text{joue}(x,z)$

8) ff q signifie qu'un film a tjrs au moins 2 acteurs.

$\forall x.\ \text{film}(x) \Rightarrow \exists a_1.\ \exists a_2.\ \text{acteur}(a_1) \land \text{acteur}(a_2)$
$\land \text{joue}(a_1, x) \land \text{joue}(a_2, x) \land \neg a_1 = a_2$

9) ff q signifie pr tte paire d'acteurs, ceux-ci ont joué pr un m̂ réalisat^R (pas forcmt ds m̂ film).

$\forall a_1, \forall a_2,\ \text{acteur}(a_1) \Rightarrow \text{acteur}(a_2)$
$\Rightarrow \exists x.\ \text{realisateur}(x) \land \exists f_1.\ \text{film}(f_1)$
$\land \exists f_2.\ \text{film}(f_2) \land \text{realise}(x, f_1)$
$\land \text{realise}(x, f_2) \land \text{joue}(a_1, f_1) \land \text{joue}(a_2, f_2)$

Feuille 5 : Logique du premier ordre

Ex 1 : Vérificat° de ff sr un modèle

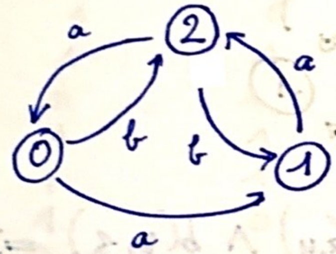
Vocabulaire :
- prédicats binaires : a et b.

Domaine $\{0,1,2\}$ & interprétat°s de a & b.

$[\![a]\!] = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$

$[\![b]\!] = \{(0,2), (2,1)\}$.

Représentat° modèle graphiqt en reliant élts (i,j) des relat°s p une flèche allant de i à j & étiquetée par le nom de la relat°.



1.1 Vérifier ff $\forall x.\ \neg a(x,x)$ est vraie ds modèle
Donner un modèle ds lequel cette ff est fausse

1.2 Vérif ff $\forall x. \forall y.\ b(x,y) \Rightarrow a(y,x)$ est vraie ds m
Donner mod. ds leql cette ff est fausse.

1.3 Donner une ff q n'est vraie q ds modèle proposé (modulo isomorphisme). On pourra utiliser l'égalité

1.4 Comment modifier le modèle p que la ff $\forall x. \forall y. \forall z.\ b(x,y) \wedge b(y,z) \Rightarrow b(x,z)$?

1.5 Donner une ff $\varphi(x)$ q n'est vraie ds le modèle q pr valuat°s $x=0$ et $x=1$.

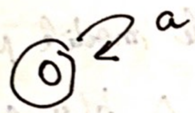
1.6 Donner ff $\varphi(x,y)$ q n'est vraie ds le modèle q pr valuat°s $x=0$, $y=1$ et $x=0$ et $y=2$

1.1 Ns allons évaluer ff $\neg a(x,x)$ en f val^{rs} x :

x	$a(x,x)$	$\neg a(x,x)$
0	0	1
1	0	1
2	0	1

Ainsi $\forall x.\ \neg a(x,x)$ est vraie ds le modèle.

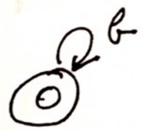
ca $[\![a]\!] = \{(0,0)\}$ et $[\![b]\!] = \emptyset$



1.2

x	y	$b(x,y)$	$a(y,x)$	$b(x,y) \Rightarrow a(y,x)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	2	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1
1	2	0	0	1
2	0	0	1	1
2	1	1	1	1
2	2	0	0	1

ca $[\![a]\!] = \emptyset$ et $[\![b]\!] = \{(0,0)\}$



1.3 $\Rightarrow X <= 1.$ 3 élts distincts

$\exists x_0.\ \exists x_1.\ \exists x_2.\ x_0 \neq x_1 \land x_0 \neq x_2 \land x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow X <= 2.$ si 4° élt, il ne pt ê = à ts élt

$\forall y.\ y = x_0 \lor y = x_1 \lor y = x_2$

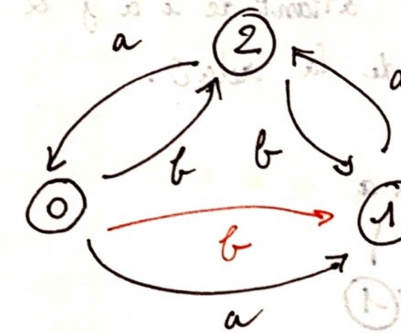
$\Rightarrow X <= 3$

$\forall x. \forall y.\ a(x,y) \Leftrightarrow x = x_0 \land y = x_1 \lor x = x_1 \land y = x_2 \lor x = x_2 \land y = x$

$\Rightarrow X <= 4$

$\forall x. \forall y.\ b(x,y) \Leftrightarrow x = x_0 \land y = x_1 \lor x = x_1 \land y = x_2 \lor x = x_2 \land y = x_0$

1.4



ff énoncé $\forall x. \forall y. \forall z.\ b(x,y) \land b(y,z) \Rightarrow b(x,z)$

1.5 Donner ff $\varphi(x)$ q n'est vraie q ds modèle ! q n valuats $x=0$ et $x=1$.

1.6 Donner ff $\varphi(x,y)$ q nvq dl m n l v. $x=0,\ y=1$ et $x=0,\ y=2$

1.5 $\varphi(x) = \exists y.\ \neg x = y \wedge \neg b(x,y) \wedge \neg b(y,x)$

x	y	$\neg x = y$	$\neg b(x,y)$	$\neg b(y,x)$	$\neg b(x,y) \wedge \neg a(y,x)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	2	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	2	1	1	0	0
2	0	1	1	0	0
2	1	1	0	1	0
2	2	0	1	1	0

La ff ne peut pas valoir 1 que pour $x=0$ ou $x=1$

1.6 $\varphi(x,y) = a(x,y) \wedge \neg b(y,x) \vee b(x,y) \wedge a(y,x) \wedge \forall z.\ \neg b(z,x)$

x	y	$a(x,y)$	$a(y,x)$	$b(x,y)$	$b(y,x)$	$\forall z.\ \neg b(z,x)$	α	β	$\varphi(x,y)$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	2	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	2	0	1 0	1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0

$\alpha = a(x,y) \wedge \neg b(y,x)$

$\beta = b(x,y) \wedge a(x,y) \wedge \forall z.\ \neg b(z,x)$

10