```latex
\subsection{Developpemts Limités}                green

\begin{myff}{e^x = 1+ x + \frac{x^2}
{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} +
o(x^n) \\ (1+x)^{\alpha} =
\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\apha
(\apha-1)\cdots (\alpha-k+1)}{k!}
x^k + o(x^k) \\ \cos x = \sum
_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}
{2k!} + o(x^{2n+1} \\ ch \; x =
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!}
+ o(x^{2n+1}) \\ \sin x = \sum_{k=0}
^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
+ o(x^{2n+2}) \\ sh x = \sum_{k=0}
^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(
x^{2n+2})
\end{myff}

\begin{myff}{blue} \frac{1}{\sqrt{1+
x^2}} = 1+ \frac{x^2}{2} + \frac{8}{8}
```

x^4 + \cdots + o(x^n) \\ \frac{1}
{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{x}{2} +
\frac{3}{8} x^2 + \cdots + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} -
{x^2}{8} + \cdots + o(x^n)
\end{mydef}{green}

\begin{mydef}{blue}
\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 +
\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 +
\cdots + o(x^n) \\ \arcsin x = x +
\frac{x^3}{6} + \cdots + o(x^n}
\end{mydef}{blue}
\begin{mydef}{green}
\frac{1}{(1+x)^{alpha}} = 1 - x + x^2 - x^3
+ x^4 + \cdots + o(x^4) \\ \ln (1+x) = x -
\frac{1}{2} x^2 + \frac 13 x^3 - \frac 14
x^4 + \cdots + o(x^n) \\ \tan x = x
+ \frac 13 x^3 + \frac{2}{15} x^5 +
\frac{17}{215} x^7 + ... + o(x^n) \\
\arctan x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}
{3} + o(x^3)
\end{myff}{green}

\subsection{Dév limité 1} ???
~~\begin~~
\subtitle{Quotient et Intégrat DL}
\begin{theo}{Th Divisions suivts pssces croiss}
$ soit \; A, B \; \in \; \mathbb{K}[X], 2 \;
polynomes \; avec B(0) \neq 0 alors \forall n \in
\mathbb{N}, \exists 2 polynômes Q_n et R_n
unique. \\ A(X) = B(X). Q_{n}(X) +
X^{n+1} R_n(X) avec degré Q_n \leq n.
\rightarrow Q : quotient à ordre n de la division
\end{theo}
\begin{theo} si f, g admet {DL}_n(0)
forme f(x) = A(x) + o(x^n) et g(x) = B(x) +
o(x^n) où A, B polynômes degré \leq n. \\
si g(0) \neq 0 alors \frac f g admet {DL}_n(0)
de la forme \\ \frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + o(x^n)
\end{theo}

\begin{theo}{Integration 2}
soit n \in \mathbb{N}, f fonction dérivable au
voisinage de 0. si f admet un {DL}_n (0) de la forme
f^{'} (x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)
alors f admet {DL}_{n+1} (0) de la forme \\
f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac
{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1}) =

\end{theo}

\subtitle{Dev limité 2} (*)

\begin{remarque} DL permet de savoir si un
point critiq est un max local, min local, ou si
il n'en ni l'autre.
\end{remarque}

(*) \subtitle{Etude locale près points critiqs}

\begin{theo}
soit f fonction def voisinage x_0 \in \mathbb{R},
si f admet {DL}_p (x_0) de forme \\
f(x) = f(x_0) + \alpha (x-x_0)^p + o((x-x_0)
^p) avec \alpha \neq 0, p \leq 2

4

\begin{itemize}
\item si p impair, point x_0 n'est ni max,
ni min.
\item si p pair et \alpha > 0, x_0 est min local
strict
\item si p pair et \alpha < 0, x_0 est max local strict
\end{itemize}
\end{theo}.

\begin{theo} Alors le graphe de f admet la droite
\gamma : y = a_0 + a_1 (x-x_0) comme
tangente au point x_0 et:
\begin{itemize} (x_0, f(x_0))
\item si p impair, C_f traverse tangente en
\item si p pair et \alpha 0, C_f AU-DESSUS de \gamma
\item si p pair et \alpha 0, C_f EN-DESSOUS de \gamma.
\end{itemize} \end{mydef}

~~\begin~~ \subtitle{Branches infinies & asymptotes}

\begin{theo}
si f admet DL en \pm \infty de la forme \\
f(x) = ax + b + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}
+ \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})
alors la droite \gamma : y = ax+b \\ est une
asymptote de C_f C au voisinage de \pm \infty

```
En notant a_k, k \leq 1, le premier terme
non nul, la posiO de \gamma par rapport à C_1
est donnée par le signe de \frac{a_k}{x-1^{k}}
\end{theo}
\subtitle{calcul de limite}
\begin{remarque}
calcul \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)},
calcul DL de f et g pour comparer comportement
en 0, sinon en + \infty prenant f(\frac{1}{x}). ⚠ deg numerateur
\end{remarque}.                \subtitle{ED 1° ordre}
\subsection{Equation Différentielle (1)}
\begin{def}
\begin{itemize}{roman letters}
\item ED d'ordre n est F(x, y, y^{'}, \cdots,
y^{(n)}) = 0 \\ (1) F: fonction de (n+2)
variables
\item Une solution de (1) à intervalle I \subset
\mathbb{R} est fonction y: I \rightarrow
\mathbb{R} n fois dérivable.
```



```
\item Résoudre (1), on intègre, cherche \forall
solutions sur + grd intervalle possible
\item ED linéaire: \\
a_0(x) y + a_1(x) y^{'} + \cdots + a_{n}
y^{(n)} = y(x)
\item ED homogène: \\
a_0(x) y + a_1(x) y^{'} + \cdots + a_{n}(x)
y^{(n)} = 0.
\item ED linéaire à coeff cte: \\
a_0 y + a_1 y^{'} + \cdots + a_n y^{n}
= g(x)
\end{def}
\begin{prop}{Ppe de linéarité}
si y_1, y_2 est soluts EDLH alors \forall
\lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lamba y_1
+ \mu y_2 est aussi solution
\end{prop}
\begin{prop}{Ppe de superposiO}
soit EDL et EH alors l'ens des soluts de (E): \\
y(x) = y_0(x) + y_h(x)
\end{prop}.
```

\begin{theo}{} soit a : I \rightarrow \mathbb{R}
une fonction continue et A : primitive de a.
Les solu°s (E) y^{'} + a(x) y = 0 \\
sont y(x) = k . e^{-A(x)} \bigskip
k : cte qq
\end{theo}
\begin{coro} (E) : y^{'} + a(x) y = b(x) et
(E_h) : y^{'} + a(x) y = 0 solu°s y(x) =
y_0 (x) + k . e^{-A(x)}
\end{coro}
\subtitle{[M] Trouver sol° part de E : vari° de cte}
\begin{theo}{Θ}
on résoud (E_h ~~A~~) : y^{'} + a(x) y = 0
d'où solu°s y(x) = k e^{-A(x)}, k \in
\mathbb{R}
• MVC chercher sol° particulière (E) ss forme \\
y_0 (x) = k(x) . e^{-A(x)} où k est f
dérivable.
• y solu° (E) \Leftrightarrow y_0^{'} (x) +
a(x) y_0 (x) = b(x) \rightarrow k(x) = \int
b(x) . e^{A(x)} dx \end{theo}.

\subsection{Équa Diff 2}
\subtitle{ED 2nd ordre à coeff cte}
\begin{def} (E) : a y^{''} + b y^{'}
+ c y = g(x) ; a, b, c \in \mathbb{R},
a \neq 0, g : I \rightarrow \mathbb{R},
(E_h) : a y^{''} + b^{'} + c y = 0,
idée résoud (E_h) puis on applique PDS
en cherchant sol part de (E).
\end{def}
\subtitle{Résolu° E_h}
\begin{prop} (E_c) : a X^{2} + b X + c = 0
\begin{itemize}{(i) (ii) ...}
\item \Delta > 0 : r_1 = \frac{-b +
\sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b -
\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow
{ y_1 = e^{r_1 x} sol° (E_h}.
{ y_2 = e^{r_2 x}
\item \Delta = 0 : r_3 = \frac{-b}{2a},
y_3 (x) = e^{r_3 x} et y_4 (x) = e^{r_4 x}
x \times

```
\item \Delta < 0 : racines conj \alpha ± i
\beta \Rightarrow
{ y_5 (x) = e^{\alpha x . \cos (\beta x)
{ y_6 (x) = e^{\alpha x . \sin (\beta x)
\end{prop}
\begin{prop}
(E_h) : a y^{''} + b^{'} + cy = 0, a, b, c \in
\mathbb{R}, a \neq 0,
(E_c) : a X^{2} + bX + c = 0 \\
\begin{itemize}[label]
\item \delta > 0 : y_h (x) = \lambda_1 .
e^{r_1 x} + \lambda_2 . e^{r_2 x}
est solu° de (E_h)
\item \delta = 0 : y_h (x) = (\lambda_1 +
\lambda_2 x) e^{r x} est sol (E_h)
\item \delta < 0 : y_h (x) = \lambda_1
e^{\alpha x}. \cos (\beta x) + \lambda_2
\sin (\beta x) est (E_h).
\end{itemize} \end{prop}
```


~~\begin{theo}{Cas général} [illegible] de y_2~~

```
\subsection{Recherche sol° particulière}
\subtitle{Cas scd mb P(x). e^{\alpha x}}
\begin{theo}
TH : (E): a y^{''} + b y^{'} + cy = P(x). e^{s x}
P \in \mathbb{R}_d [X] alors (E) admet
solu° ss la forme Q(x). e^{s x} avec
\begin{itemize}
\item Q \in \mathbb_d [X] si s n'est
pas racine de (E_c)
\item Q \in \mathbb{d+1} [X] si s est racine
simple de (E_c)
\item Q \in \mathbb_{d+2} [X] si s est
racine double de (E_c)
\end{itemize} \end{prop}.
\begin{theo}{Cas scd mb : e^{\alpha x}
[P_1 (x) \cos (\gamma x) + P_2 (x) \sin
(\gamma x) ]
(E) a y^{''} + b y^{'} + cy = e^{s x}
[P_1(x) . \cos (\gamma x) + P_2 (x) \sin
(\gamma x)] \\
L'équa° (E) admet solu° ss la forme
```

y (x) = e^{sx} x^m [Q-1(x) \cos(\gamma x)
+ Q_2(x) \sin(\gamma x)] où deg Q-1 et Q_2 :
n = sup (deg P_1, deg P_2)
\rightarrow m=0 si s+ i \gamma n'est pas racine
de E_c
\rightarrow m=1 si s+i \gamma est racine E_c
\end{theo}
\begin{theo}{Cas général $\boxed{M}$ \vee \R}
f-1, f-2 : fnt base ens soluts (EH) ; on cherche
une solu° (E) ss forme : \\
y (x) = \lambda-1 (x) f-1(x) + \lambda- 2(x)
f-2(x) ; y est solu° de (E) . si
(S) { \lambda_1^{'}(x) f-1(x) + \lambda_2^{'}
(x) f-2(x) = 0
a(\lambda_1^{'} (x) f-1^{'}(x)
+ \lamba-2^{'}(x) f-2^{'}(x)) = g(x)
\exists unique couple (\gamma-1(x), \gamma-2(x)),

\gamma-1(x)
\begin{bmatrix}
f-1(x) \\ f-1^{'}(x)
\end{bmatrix}
+ \gamma-2(x) \begin{bmatrix}
f-2(x) \\ f-2^{'}(x)
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
0 \\ \frac{1}{a} g(x) \end{bmatrix}
il suffit de chercher primitive de \gamma-1
et \gamma-2
{ \lambda-1(x) = \int \gamma-1(x) dx
\lamda-2(x) = \int \gamma-2(x) dx
\end{theo}.

\subsection{Applicat° Linéaire}
\begin{mydef} \begin{itemize}
\item f isomorphisme de E ds F si f AL & bijective
de E ds F \\ \item f endomorphisme de E si
f AL de E vers E \\ \item f automorphisme de E si
f est endom bijectif de E, isom. de E ds E
\end{itemize} \end{mydef}

\begin{mydef} f est linéaire ssi \forall u,v \in E, \forall \lambda \in K, \\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v). \end{mydef}

\begin{prop} soit E,F deux \mathbb{K} ev, muni addit & multiplic par un scalaire, \mathcal{L}(E,F) est un \mathbb{K} ev. \end{prop}

\begin{prop} f \in \mathcal{L}(E,F), g \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E,G) \\ f isomorphe de E a F alors F^{-1} est isom. de F a E. \end{prop}

\subtitle{Image d'une AL}

\begin{prop} E,F, 2 \mathbb{K} ev, f \in \mathcal{L}(E,F) si E' sev de E alors f(E^{'}) est sev de F. \end{prop}

\begin{mydef} f surjective \Leftrightarrow Im f = F \end{mydef}

\subtitle{Noyau AL} \begin{theo} Ker f = f^{-1}(\{0_F\}) \end{theo}.

\begin{prop} Ker f est SEV de E \end{prop} \begin{mydef} f injective \Leftrightarrow = \{0_E\} \end{mydef}

\begin{theo}{AL en dim finie} soit E,F 2 \mathbb{K} ev si E dim finie et que \{e_1, \cdots, e_n\} est une base de E. soit \{v_1, \cdots, v_n\} n vecteurs de F alors il existe 1 ! 1 seul AL f : E \rightarrow F, \forall i \in \{1, \cdots, n\}, f(e_i) = v_i. \end{theo}

\begin{prop} soit E,F 2 \mathbb{K} ev, si n = dim E < +\infty et f \in \mathcal{L}(E,F) \\ \bullet Im f est un \mathbb{K} ev de dim finie. \\ \bullet si \{e_1, \cdots, e_n\} est une base de E alors Im f = Vect\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\} \end{prop}

\subtitle{Rang AL}

\begin{theo} soit E,F 2 \mathbb{K} ev, si il \exists isomo f : E \rightarrow F alors E est de dimension ssi F: dim finie, ds ce cas dim E = dim F. \end{theo}.

\begin{theo} rg f = dim(Im f) \end{theo}

\begin{theo}{Th du Rang} dim E = dim Ker f + dim Im f \end{theo}

\subsection{Calcul Matriciel}

\begin{theo} L'ensemble (M_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot) est \mathbb{K} ev \end{theo}

\begin{prop} Le système \{E_{ij} 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m\} constitue une base de M_{m,n}(\mathbb{K}) et M_{m,n}(\mathbb{K}) est un \mathbb{K} ev de dimension finie \end{prop}

\begin{mprop}{F Binôme de Newton pr Matrices} soit AB=BA, A,B \in M_n(\mathbb{K}) (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} A^k B^{n-k} \end{prop}

\subtitle{Inversion des Matrices}

\begin{prop} soit A \in M_n(\mathbb{K}), si A inversible alors \bullet son inverse est unique \\ \bullet A^{-1} est aussi inversible & (A^{-1})^{-1} = A \\ \bullet si B \in M_n(\mathbb{K}) est aussi inversible alors AB est inversible et (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}. \end{prop}

\begin{mydef} Une matrice A \in M_n(\mathbb{K}) est inversible s'il existe une matrice B \in M_n(\mathbb{K}) tq AB = BA = I_n \end{mydef}

\begin{prop} soit A,B,C \in M_n(\mathbb{K}), si C inversible alors si AC = BC \Leftrightarrow A = B \end{prop}

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, LASSE
- (i) A est inversible
- (ii) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$
- (iii) $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $CA = I_n$
- (iv) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AX = Y$, $A^{-1} = B = C$.

Calcul A^{-1}, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

On cherche X tq $AX = Y$.

Matrices Particulières

Prop. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- A diagonale si tous coeffs en dehors diagonale sont nuls
- A triangulaire supérieure si coeffs sous diagonale sont nuls
- Transposée de A : ${}^tA$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. A est symétrique si ${}^tA = A$.

Prop. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$,
$D' = \mathrm{diag}(\mu_i) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_n \end{bmatrix}$ alors $DD' = D'D = \mathrm{diag}(\lambda_i \mu_i)$
- $D^n = \mathrm{diag}(\lambda_i^{n})$
- si pour $i = 1, \cdots, n$, $\lambda_i \neq 0$ alors D est inversible et $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_i}\right)$

AL & Matrices (2)

Représentation Matricielle des vecteurs

Déf. Base canonique $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déf. Base canonique $\mathbb{K}^n$ = vecteurs
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$

Déf. Identification entre $\mathbb{K}^n$ & $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:
$\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Déf. ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Déf. $\phi_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \rightarrow [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$
$[x_1, \cdots, x_p]_{\mathcal{B}} = ([x_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [x_p]_{\mathcal{B}})$
$[x_1, \cdots, x_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix}$

Matrice AL

Soit E, F $\mathbb{K}$-ev, dim n et m, $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base de E, $\mathcal{C} = \{f_1, \cdots, f_m\}$ base de F
$f \in \mathcal{L}(E, F)$, la matrice de f avec bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = [f(e_1), \cdots, f(e_n)] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Mat(f, B, C) = (a_{1,1} ... a_{1,n} ; ... ; a_{m,1} ... a_{m,n}) \\ si E = F et B = C

\Rightarrow Mat(f, B) = Mat(f, B, B) \end{mydef}

\begin{prop} soit f : E \rightarrow F une applicat° quelconque, si f est linéaire & A = Mat(f, B, D) alors \forall u \in E [f(u)]_C = A × [u]_B la récip vraie \end{prop}

\subtitle{Lien ap calcul matriciel}

\begin{prop} Mat(g \circ f, B, D) = Mat(g, C, D). Mat(f, B, C) \end{prop} \begin{prop} Mat(\lambda f + \mu g, B, C) = \lambda Mat(f, B, C) + \mu. Mat(g, B, C) \end{prop} \begin{prop} si dim E = dim F f \in L(E,F) alors f est bijective \\ Mat(f^{-1}, C, B) = (Mat(f, B, C))^{-1} \end{prop}

\subtitle{AL & Matrices 2}

\subtitle{Changements de base}

\begin{mydef} B = \{e_1, \cdots, e_n\}, B^{'} = \{e_{1}^{'}, \cdots, e_{n}^{'}\} soit [e_{j}^{'}]_B = (p_{1,j} ... p_{n,j}) le vecteur colonne formé coord. e_{j}^{'} ds base B \end{mydef}

\begin{mydef} la matrice de passage de la base B à base B^{'} est P = (P_{i,j}) = [e_{1}^{'}, \cdots, e_{n}^{'}]_B = ([e_{1}^{'}]_B, \cdots, [e_{n}^{'}]_B) \end{mydef}

\begin{prop} P = Mat(Id_E, B^{'}, B) \\ P^{-1} = Mat(Id_E, B, B^{'}) \end{prop}

\begin{prop} [u]_B = P. [u]_{B^{'}} \\ [u]_{B^{'}} = P^{-1} [u]_B \end{prop}

\begin{theo}{Chgt de base} P : matrice de passage de B à B^{'} \\ Q ——— C à C^{'} \\ si f \in L(E,F), A = Mat(f, B, C), B = Mat(f, B', C') alors B = Q^{-1}. A.P \end{prop}

\begin{prop} soit A, B \in M_n(\mathbb{K}), A et B sont SEMBLABLES si \exists une matrice P \in M_n(\mathbb{K}) inversible tq B = P^{-1}. A.P \end{prop}.

\begin{prop} soit f \in L(E), B et B' 2 bases de E.
1) si A = Mat(f, B), B = Mat(f, B^{'}), P la matrice de passage de B à B', on a B = P^{-1} A.P \\
2) Récip vrai <=> B = Mat(f, B^{'}) \end{prop}.

\section{M22}

\section{Groupes}

\subsection{Groupe}

\begin{mydef} Un Groupe (G, \star), est un ensemble G auquel est associé opération

```
opérat° \star, (la loi de composi°):
\begin{enumerate}
\item \forall x, y \in G, x \star y \in G
(loi de composi° interne) \item \forall x, y \in G
(x \star y) \star z = x \star (y \star z)
\item \exists e \in G, \forall x \in G, (loi
associative) x \in e = x, e \star x = x (élt neutre)
\item \forall x \in G, \exists x^{'} \in G, x \star
x^{'} = x^{'} = x^{'} \star x = e (inverse)
\end{enumerate} \end{mydef}
\begin{prop} Si \forall x, y \in G, x \star y
= y \star x. \\ G est un groupe commutatif
(abélien). \end{prop}
\begin{mydef} e et x^{-1} sont uniques \end{mydef}
\begin{prop} Ensemble matrices 2 \times 2
ayant un déterminant non nul, muni de \times,
forme un groupe non-abélien \end{prop}
\begin{prop} det(M \times M^{'}) =
det(M) . det(M^{'}) \end{prop}
```



```
\subsection{Sous-Groupe}
Une partie H \subset G est un sous groupe de G,
\begin{itemize} \item e \in H \item
\forall x, y \in H, x \star y \in H \item
\forall x \in H, x^{-1} \in H. \end{itemize}
\end{mydef}
\begin{mydef} \begin{itemize} \item H contient
au moins un élt \item \forall x, y \in H,
x \star y^{-1} \in H \end{itemize} \end{mydef}
\begin{mydef} Les sous-groupes de (\mathbb{Z},
+) sont les n \mathbb{Z}, pour n \in \mathbb{Z}
\end{mydef}
\subsection{Sous-groupe engendré} \begin{mydef}
E \subset G un sous-ensemble de G, le SGE
par E est le plus petit sous groupe contenant E
\end{mydef}
\subsection{Morphisme de groupes}
\begin{mydef} soit (G, \star), (G, \ex),
2 groupes. Une applica° f: G \rightarrow G
```

```
est un morphisme de groupes si \forall x, x^{'}
\in G, \\ f( x \star x^{'}) = f(x)
\circ f(x^{'}) \end{mydef}
\subsubsection{Pptés}
\begin{prop} soit f: G \rightarrow G un
morphisme de groupes. \begin{itemize} \item
f(e_G) = e_G \item \forall x \in G,
f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \end{itemize}
\end{prop}
\subsection{Morphismes de groupes & Morphisme
bijectif}
\begin{prop} \begin{itemize} \item soit
deux morphismes de groupes f: G \rightarrow G^{'}
et g: G^{'} \rightarrow G^{''}, alors
g \circ f: G \rightarrow G^{''} est un
morphisme de groupes \item si f G \rightarrow
G^{'} est un morphisme bijectif alors f^{-1}:
G^{'} \rightarrow G est aussi un morphisme
de groupes \end{itemize} \end{prop}
```

```
                                    Morphisme de
\subsection{Groupes (2)} \subsubsection{groupes}
\begin{mydef} Un morphisme bijectif est un
ISOMORPHISME. Deux groupes G, G^{'} sont isomorphes
si ∃ un morphisme bijectif f: G \rightarrow
G^{'} \end{mydef}
\begin{mydef} Noyau = Ker f = \{ x \in G,
f(x) = e_{G^{'}} \} \end{mydef}
\begin{mydef}{Image : Im f = \{ f(x), x \in G
\} \end{mydef}
\begin{prop} soit f: G \rightarrow G^{'} est un
morphisme de groupes \begin{enumerate} \item
Ker f est un sous-groupe de G \item Im f est
un sous-groupe de G^{'} \item f est injectif
ssi Ker f = \{ e_{G} \} \item f est surjectif
ssi Im f = G^{'} \end{enumerate}
\subsubsection{Groupe \mathbb{Z} / n
\mathbb{Z}}
\souspartie{L'ensemble et le groupe \mathbb{Z}
/ n \mathbb{Z}}
```

\begin{mydef} \begin{itemize} \item \mathbb{Z}/n \mathbb{Z} = \{ \hat{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1} \} \item $\bar{p} = \bar{q}$ \Leftrightarrow mod n \item sur \mathbb{Z}/n \mathbb{Z} $\bar{p} + \bar{q} = \overline{p+q}$ \item \mathbb{Z}/n \mathbb{Z} : groupe abélien

% créer une nouvelle commande pr $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ \pt

\end{mydef}

\souspartie{Groupe cyclique de card fini}

\begin{mydef} Est un groupe cyclique s'l ∃ elt a \in G tq " x = a^k, \forall x \in G, \exists k \in \mathbb{Z} \end{mydef}

\begin{mydef} \pt est groupe cyclique \end{mydef}

\begin{theo} Si groupe cyclique de cardinal n, alors (G, \star) est isomorphe à (\pt, +)

\subsubsection{Groupe des Permutat° S_n}

\begin{prop} ~~L'ensemble~~ \begin{itemize}

\item L'ensemble des bijections de \{1, 2, \cdots, n \} dans lui-même, muni de la

composit° des fonctions est un groupe noté (S_n, \circ)

\item Une bijection de \{1,2, \cdots, n \} s'appelle permutat°. \item (S_n, \circ) : groupe des permutat° (g. symétriqs) \item card(S_n) = n! \item Pour n \geq 3, le groupe S_n n'est pas commutatif

\end{itemize} \end{prop}

\souspartie{Groupe isométries triangles}

\begin{prop} L'ensemble des isométries d'un △ muni de la composit°, forme un Groupe. Ce groupe est isomorphe à (S_3, \circ)

\end{prop}

\souspartie{Décomposition en cycles}

\begin{theo} Toute permutat° de S_n se décompose en composit° de cycles à supports disjoints. De plus, cette déc. est UNIQUE

\end{theo}

\section{Anneaux (1)}

\begin{mydef} Un anneau (A, +, \times) est un ensemble non-vide, A, muni de 2 opérations (ou LCI), addition \& multiplication.

\begin{enumerate} \item L'ens (A, +) est groupe abélien \item \times possède un élt neutre 1_A \item \times est associative (a.b).c = a.(b.c) \item est distributive sur l'addition \end{enumerate} Un anneau A est abélien qd multiplication est commutative.

\end{mydef}

\begin{mydef} Un anneau A est dit intègre s'il est commutatif \emph{et} si \forall a,b \in A, \\ ab = 0 \Leftrightarrow a=0 ou b=0 si l'A n'est pas intègre, elts a et b non nuls vérifiant ab=0, st diviseurs de zéro \end{mydef}

\begin{exmple} Aci : (\mathbb{Z}, +, .) (\mathbb{Q}, +, .), (\mathbb{R}, +, .) \\ mais (\mathbb{N}, +, .) n'est pas (A) car (\mathbb{N}, +) n'est pas groupe. \\ Ae : \mathbb{Z} / \div n \mathbb{Z} (n'est pas intègre si n : pas nbr premier) \\

Aci : (\mathbb{Z}[x], +, .), (\mathbb{Q}[x], +, .), (\mathbb{R}[x], +, .) \\ Anc : M_n(\mathbb{R}) qd n \geq 2 \end{exmple}

\subsection{Règles calcul ds Anneaux}

\begin{prop} \begin{itemize} \item elt neutre 0_A est absorbant pr multiplication \item \forall a, b \in A, -(ab) = (-a) b = a (-b) ; (-a)(-b) = ab \\ \item \forall n \in \mathbb{Z}, a, b \in A, n(ab) = (na) b = a(nb) \\ \item (a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{prop}

\begin{mydef} Un elt a d'un anneau est dit inversible si \exists b \in A tq ab = ba = 1_A. On appelle b l'inverse de a : a^{-1}. On note U(A) ou A^{\times}, l'ens des elts inversibles, dits aussi unités, de l'anneau A. \\ Un anneau A ds lequel tt élt non nul est inversible est un corps. (U(A) = A^{\times})

\begin{prop} soit (A, +, ·) un anneau, alors (U(A), \times) est un groupe
\end{prop}
\begin{prop} Tout corps commutatif est un anneau intègre. \end{prop}

\section{Dérivée d'une fonction}
\subsection{Dérivée}
\begin{def} Tangente y = (x - x_0) f^{'}(x_0) + f(x_0) \end{def}
\begin{prop} f est dérivable sur I si f est dérivable en tt point x_0 \in I \end{prop}
\begin{def} f est dérivable en x_0 si le tx d'acct \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} a une lim finie lorsq x \rightarrow x_0. La limite s'appelle le nbr dérivé de f en x_0. \\
f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{mydef}

\begin{theo}{TAF} [a, b] ;]a, b[
soit f: [a, b], fonction continue, fonction dérivable sur \exists c \in]a, b[tq \\
f^{'}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}
\end{theo}
\begin{theo}{TH Rolle} soit f: [a, b] tq \\
\rightarrow f est continue sur [a, b] \\
\rightarrow f est dérivable sur]a, b[\\
\rightarrow f(a) = f(b) \\
\exists c \in]a, b[, f^{'}(c) = 0
\end{theo}
\begin{theo}{Règle de l'Hospital} f, g deux fonctions dérivables, si f(x_0) = g(x_0) = 0, \forall x \in I \ \{x_0\}, g^{'}(x) \neq 0, si \lim_{x \to x_0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}
\end{theo}
\begin{theo}{Inegalite Accroissements finis}
f: I \rightarrow, f d sur I, si \exists cte M, \forall x \in I,

| f^{'}(x) | \leq M \Rightarrow \forall x, y \in I \\ | f(x) - f(y) | \leq M |x-y| \end{theo}

\subsection{Extremum local}

\begin{theo} soit I_{int}^{ouvert}, f : I \rightarrow \mathbb{R}, si f admet un max local (ou min) en x_0 alors f^{'}(x_0) = 0
\end{theo}

\begin{mydef} x_0 est un point critiq de f si f^{'}(x_0) = 0, \\
\rightarrow f admet max local en x_0 si \exists J ouvert contenant x_0 tq \forall x \in I \wedge J, f(x) \geq f(x_0) \rightarrow f admet extremum local si admet max/min local.
\end{mydef}

\begin{prop} f est dérivable en x_0 ssi \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} existe et est finie. \\

f est dérivable en x_0 ssi l \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + (x - x_0) \epsilon(x). \end{prop}

\begin{prop} soit I ouvert, x_0 \in I, soit f : I \rightarrow \mathbb{R}, une fonction : \\ \bullet si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 . \\ \bullet si f est dérivable sur I alors f est continue sur I \end{prop}

\subsection{Composition}

\begin{prop} Si f est dérivable en x & g est dérivable en f(x) alors g o f est dérivable en x de dérivée : (g \circ f)^{'}(x) = g^{'}(f(x)) . f^{'}(x)
\end{prop}

\begin{prop} (f^{-1})^{'}(x) = \dfrac{1}{f^{'}(f^{-1}(x))}
\end{prop}

\begin{theo} (f.g)^{(n)} = f^{(n)} . g
+ (n 1) f^{(n-1)} . g^{(1)} + ... + (n k)
f^{(n-k)} . g^{(k)} + ... + f . g^{(n)} \\
\sum_{k=0}^{n} (n k) f^{n-k} g^{k}
\end{theo}

\section{Limites & f continues}
\subsection{f majorées, minorées, bornées}
\begin{mydef} ~~\be~~ \begin{enumerate}
\item f est ↗ si \forall x, y \in U x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \item f est
majorée si \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M \item f est minorée
si \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq m \item f est bornée
si \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, |f(x)| \leq M \end{def}
\end{enumerate}

\begin{mydef} \begin{enumerate} \item
f \geq g si \forall x \in U, f(x) \geq 0
\item f ~~cste~~ cte si U si \exists a \in
\mathbb{R} \forall x \in U, f(x) = a
\item f est nulle si \forall x \in U,
f(x) = 0 \end{mydef} \end{enumerate}

\subsection{Parité & Périodicité}
\begin{mydef} f \begin{enumerate} \item
f est paire si \forall x \in I, f(-x) =
f(x) \item f est impaire si \forall x \in I,
f(-x) = -f(x) \item f T réel > 0
périodique si \forall x \in \mathbb{R},
f(x+T) = f(x) \end{enumerate} \end{mydef}

\subsection{Limites}
\begin{mydef} \begin{enumerate} \item f a
pour lim \bf{l} en \bf{x-0} si
\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0,
\forall x \in I, |x - x_0| < \delta

```
\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \item
f a pour lim \bf{+ \infty} en \bf{x_0}
si \\ \forall A > 0, \exists \delta > 0,
\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow
f(x) \geq A \item f a pour lim \bf{- \infty
} en \bf{x_0} si \\ \forall A > 0 \exists
\delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| <
\delta \Rightarrow f(x) < -A. \item
f a pour lim \bf{l} en \bf{+ \infty} si
\\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0
\forall x \in I, x > B \Rightarrow |f(x)
- l| < \epsilon \item f a pour lim
\bf{+ \infty} en \bf{+ \infty} si \\
\forall > 0 \exists B > 0 \forall x \in I
x > B \Rightarrow f(x) > A \end{enumerate}
\end{mydef}
\begin{prop} Si une f admet une limite
alors cette lim est uniq \end{prop}
```



```
\subsection{Continuité en un point}
\subsubsection{limites & continuités}
\begin{prop} f est continue en x_0
pour tte suite (U_n) q CV vers x_0,
la suite f(U_n) CV vers f(x_0)
\end{prop}
\subsubsection{Prolongemt par continuité}
\begin{mydef} f est prolongeable par continuité
en x_0 si f admet une lim finie en x_0
\tilde{f}(x) = { f(x) si x \neq x_0
               { l    si x = x_0
\end{mydef}
\begin{prop} Soit f & g deux fonctions f(I)
\subset J. Si f est continue en x_0 \in I
et si g est continue en f(x_0) alors g
\circ f est continue en x_0
\end{prop}
\begin{mydef} f est continue en x_0 \in I
si \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0
\forall x \in I, |x - x_0| < \delta
```

\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon
\end{mydef}

\begin{prop} f: I \Rightarrow \mathbb{R}, f def, x_0 \in I. Si f est continue en x_0 et si f(x_0) \neq 0 alors \exists \delta > 0 tq \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \neq 0 \end{mydef}

\section{Limites & fonctions continues (2)}

\begin{prop} soit f: I \Rightarrow \mathbb{R}, si f est st monoton sur I alors f est injective sur I \end{prop}

\subsubsection{Continuité sur un intervalle}

\begin{theo}{TVI} soit f: [a,b] \to \mathbb{R}, fonction continue sur 1 segment. Pr tt réel y compris entre f(a) et f(b), \exists c \in [a,b] | f(c) = y \end{theo}

\begin{theo} soit f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R} une f continue sur 1 segment, si f(a).f(b) < 0 alors \exists c \in]a,b[| f(c) = 0 \end{theo}

\begin{theo} soit f: I \to \mathbb{R} une fonction continue sur un intervalle I Alors f(I) est un intervalle \end{theo}

\begin{theo} soit f: [a,b] \to \mathbb{R}, f cs alors \exists m, M \in \mathbb{R} tq f([a,b]) = [m,M] \end{theo}

\begin{theo} si f est continue sur [a,b] alors f est bornée sur [a,b] et elle atteint ses bornes \end{theo}

\subsubsection{Fonctions monotones & bijections}

\begin{prop} f est injective si ∀ x, x' ∈ E f(x) = f(x') ⇒ x = x'
f est surjective: si ∀ y ∈ F, ∃ x ∈ E | y = f(x) \ f est bijective si ∀ y ∈ F ∃! x ∈ E, y = f(x) \end{prop}

[illegible]

\begin{prop} si $f : E \to F$ est f bijective alors $\exists$ uniq applica° $g : F \to E$ tq $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est sa bijection réciproq notée f^{-1}. \end{prop}.

Démo $\leftrightarrow$ YT