M42

C1 Dualité

I / Formes linéaires & espace dual

(D1) Lorsq $F = \mathbb{K}^1$, on appelle les élts de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ formes linéaires sur E, et on appelle $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1)$ espace dual de E.

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^1) \overset{not}{=} E^*.$$

- Bijecto linéaire: $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ $\quad \varphi \longmapsto Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$

- Changement de base : $Mat_{\mathcal{E}'}(\varphi) = Mat_{\mathcal{E}}(\varphi) . T$
- Cas général: $Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1} . Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)$

II / Hyperplans

(D_1) Un hyperplan de E est un $\mathbb{K}$-e-v de E de dim $n-1$. (où $n = \dim E$).

(P_1) soit E ev $\neq 0$.

(i) pr tte forme linéaire ℓ non nulle pour E, son noyau $\ker \ell$ est un hyperplan de E.

(ii) pr tt hyperplan H de E, $\exists$ une forme linéaire ℓ non nulle sur E, uniq à un fact^{r} non nul près, tq $\ker \ell = H$.

III / Base duale

(P_2) soit E un $\mathbb{K}$-e-v, de dim n, soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ où pr chq $i = 1, \dots, n$ $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}^1$ est la forme linéaire associant à tout vecteur de E son i-ème coordonné ds la base $\mathcal{E}$, est une base de E^*.

(1)

(D2) La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ introduite ds (P_2) s'appelle base duale de $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

(Cor) si $\dim E < \infty$ alors $\dim E^* < \infty$ et $\dim E = \dim E^*$

(D_2' Def $\Longleftrightarrow$ base duale)

Une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* est la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ base de E ssi $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$: delta de Kronecker. $i,j = 1, \dots, n$; $n = \dim E$

IV / Base anté-duale

(D3) soit E ev de dim finie n et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E^*. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ pr tous $i, j = 1, \dots, n$ s'appelle base anté-duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

(P3) soit E ev, $\dim E = n$. Alors toute base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* admet une $\boxed{\text{uniq}}$ base anté-duale.

(P4) soit E ev, $\dim E = n$, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors pr les mat de passage : $P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}\right)^{-1}$

R9 Adit, $F^{\perp}$ est l'ensemble des équat°s linéaires de F.

P1 soit E un ev et F, G des sev de E ou de E^* alors :

a) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

b) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

c) $F \subset F^{\perp\perp}$

d) $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

si en plus, $\dim E < \infty$ alors on a :

c') $F = F^{\perp\perp}$

d') $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

e) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

VII / La transposée

D2 soit E, F des e.v alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on déf la transposée ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par

$$\forall \ell \in F^*, \quad {}^t\varphi(\ell) = \ell \circ \varphi .$$

P2 (i) soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases de E, F. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right)$$

(ii) $(\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp} = \ker({}^t\varphi)$

$(\ker \varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^t\varphi)$

cf φ surjective $\Leftrightarrow {}^t\varphi$ injective.

φ injective $\Leftrightarrow {}^t\varphi$ surjective.

(iii) $\mathrm{rg}\, \varphi = \mathrm{rg}\, {}^t\varphi$.

(iv) si on identifie E à E^{**} et F à F^{**} $\Rightarrow {}^t({}^t\varphi) = \varphi$.

(v) soit G un 3° ev et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$ alors ${}^t(\psi \circ \varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$

(vi) si $E = F$, si $\varphi \in \mathcal{L}(F,E)$ est inversible $\Rightarrow {}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_E"'] & F \arrow[d, "\Phi_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^t({}^t\varphi)"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

le diag est commutatif : $\Phi_F \circ \varphi = {}^t({}^t\varphi) \circ \Phi_E$.

C2 Formes bilinéaires

I / formes bilinéaires

D1 1) Une forme bilinéaire sur e.v E est une applicat° $\varphi : E \times E \to K$ linéaire en chacun de ses arguments ie :

- $\forall x \in E$, l'applicat° $E \to K$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ $\xrightarrow{\text{not}}$ $\varphi(x, \cdot)$ est une forme linéaire.
- $\forall y \in E$, l'applicat° $E \to K$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ $\xrightarrow{\text{not}}$ $\varphi(\cdot, y)$ est une forme linéaire.

2) Une forme bilinéaire φ est dite symétriq (resp. alternée) : si $\forall x, y \in E$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ resp. $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

Notat° : Pour ces formes bilinéaires : bil, bil sym, bil alt soit : $\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$. Ce sont des ev.

Pais $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{B}(E)$, $\forall \lambda \in K$: $\lambda\varphi + \psi \in \mathcal{B}(E)$, de m̂ $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$.

→ ds une base : soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{B}(E)$ alors $\forall X, Y \in E$, on pt écrire $X = \sum x_i e_i$, $Y = \sum y_j e_j$,

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i y_j \, \varphi(e_i, e_j).$$

(D2) La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i\leq j\leq n}$ s'appelle matrice de la forme bilinéaire φ ds la base $\mathcal{E}$ et est notée $Mat_{\mathcal{E}}(\varphi)$ si on note $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $A=(a_{ij})=Mat_{\mathcal{E}}(\varphi)$ alors $\forall x,y\in E$, $\varphi(X,Y)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\,x_i\,y_j$.

$$\varphi(x,y)=(x_1 \dots x_n)\,A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}.$$

(P1) soit $E,\varphi,\mathcal{E},A$ comme ci-dessus alors :

(i) $\varphi\in\mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \forall i,j=1,\dots,n\ ;\ a_{ij}=a_{ji}$
$\rightarrow$ la mat A est symétrique.

(ii) $\varphi\in\mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \forall i,j=1,\dots,n,\ a_{ij}=-a_{ji}$.
$\rightarrow$ la mat A est anti-symétriq

(iii) $\dim\mathcal{B}(E)=n^2$, $\dim\mathcal{S}(E)=\frac{n(n+1)}{2}$
$\dim\mathcal{A}(E)=\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{\mathcal{B}(E)=\mathcal{S}(E)\oplus\mathcal{A}(E)}$$

(P2) soit E ev dim n, $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ des bases de E,
$P=P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, $A=Mat_{\mathcal{E}}(\varphi) \Rightarrow A'={}^tP.A.P$

II / Formes quadratiques

(D3) soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une foncᶿ $\boxed{Q:E\to\mathbb{K}}$ s'appelle forme quadratique si

1) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall v\in E,\ Q(\lambda v)=\lambda^2.Q(v)$ et

2) $b_Q : E\times E\to\mathbb{K},\ (x,y)\mapsto\frac{1}{2}\big(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big)$ est une forme linéaire.

On appelle b_Q : forme bilinéaire symétriq associée à Q, ou la forme polaire de Q, ou polaire de Q.

Les formes quadratiqs sur E forment un $\mathbb{K}$-ev que l'on note $Q(E)$; l'applicaᶿ $\mathcal{P}: Q(E)\to\mathcal{S}(E)$,
$Q\longmapsto b_Q$ est linéaire et est appelée polarisaᶿ (morphisme de polarisaᶿ).

(L) $\mathcal{P}$ est un isomorphisme de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ d'inverse
$\mathcal{D}:\mathcal{S}(E)\to Q(E)$, $\varphi\longmapsto q_\varphi$ où q_φ est def par $x\mapsto\varphi(x)$.

(D4) Pour $\varphi\in\mathcal{S}(E)$, on appelle $q_\varphi\in Q(E)$ forme quadratiq associée à φ. $(q_\varphi=\mathcal{D}(\varphi))$.

(D5) La matrice d'une forme quadratiq Q ds une base $\mathcal{E}$ de E est la matrice de la forme polaire de Q : $Mat_{\mathcal{E}}(Q):=Mat_{\mathcal{E}}(b_Q)$.

Écriture d'une forme quadratiq ds une base

soit $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ une base, $Mat_{\mathcal{E}}(Q)=(a_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$
Alors $a_{ji}=a_{ij}$, on a $Q(x)=\sum a_{ij}\,x_i x_j$

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,x_i^2+2\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}\,x_i x_j$$

(TH) soit E un $\mathbb{K}$ e-v de dim finie alors tte forme quadratiq (ou bil. sym) sur E est diagonalisable ie $\exists$ une base $\mathcal{E}$ de E, ds lqll la mat est diagonale.

Bases Orthogonales

D1 soit E ev muni forme lin. sym. ie 2 vct^{rs} $x, y \in E$, on écrit $x \perp_\varphi y$, on dit "x est φ-orthogonal à y" si $\varphi(x,y) = 0$. Pr tte forme quad. Q sur E, on écrit aussi $x \perp_Q y$ au lieu de $x \perp_{b_Q} y$.

Rq : $x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$.

D2 soit E ev, dim n, muni f. quad. (ou bil. sym).
Une $\boxed{\text{base}}$ $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite $\boxed{\text{orthogonal}}$ si pptés vérifiées :
(i) $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
(ii) la mat de la forme de base $\mathcal{E}$ est diagonale.

Cor 1 Toute forme quad. (ou bil. sym) sur ev dim finie admet bases orthogonales.

Formes quadratiqs positives

D3 Hyp, une forme quadra Q (resp f. bil. sym. φ) est positive si $\forall x \in E$, $Q(x) \geq 0$. (resp $\varphi(x,x) \geq 0$).

Prop 1 soit $Q \in \mathcal{Q}(E)$:
(i) Q est positive $\iff$ pr tte base Q-orthogonal $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a $Q(e_i) \geq 0$ pr tt $i = 1, \dots, n$.
(ii) Q est def positive $\iff$ positive ds base $(e_1, \dots, e_n)$, $\exists$ une base $(e_1, \dots, e_n)$ Q-orthogonal de E pr $Q(e_i) > 0$.
(iii) soit F un ss ens de E alors $Q|_F : F \to K$ est une forme quad. sur F, $Q|_F \in \mathcal{Q}(F)$, et on a :
$$Q \geq 0 \Rightarrow Q|_F \geq 0 \quad \text{et} \quad Q > 0 \Rightarrow Q|_F > 0.$$

D4 Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-ev E de dim finie muni d'une forme quad. def positive Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

D5 Ds un espace euclidien, une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale & de + $Q(e_1) = \dots = Q(e_n) = 1$.

Cor2 Un espace euclidien admet des bases orthonormées.

Classificat° des formes quadratiqs $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Notat° : E : $\mathbb{K}$ ev, $n < \infty$. Q fme quad sr E, $\varphi = b_Q \in \mathcal{S}(E)$.

D6 Le noyau de Q (ou de φ) est : $\ker Q = \ker \varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$

L1 $\ker Q$ est sev de E de dim $(n-r)$, où $r = rg\, Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ pr n'importe qu'elle base $\mathcal{E}$ de E. (rg mat ~~pr~~ forme quad. ne dpd pas base).

D7 Le rg de Q (ou de φ), $rg\, Q$ ($rg\, \varphi$) est le rg de $Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ ds n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E. $rg\, Q = rg\, \varphi = n - \dim \ker \varphi$.
$\rightarrow$ Q est une forme non-dégénérée si $rg(Q) = n$, ou si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

D8 Deux formes quad. $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $Q' \in \mathcal{Q}'(E')$ st équivalentes si :
(i) $\exists$ isomorphisme $h : E' \to E$, $Q' = Q \circ h$.
(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $Mat_{\mathcal{E}}(Q) = Mat_{\mathcal{E}'}(Q')$).
(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp $\exists\, T \in GL_n(K)$
tq $Mat_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT . Mat_{\mathcal{E}}(Q) . T$.

Classificat° sur $\mathbb{C}$

TH2 Toute forme quadratiq Q sur un $\mathbb{C}$ e-v E de dim $= n$ s'écrit ds une base convenable, p la mat $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} \end{array}$ où $r = rg\, Q$.
Deux formes quad. complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$ ev E, E' équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et $rg\, Q = rg\, Q'$.

(Cor3) Sur un $\mathbb{C}$ ev de E, dim n, $\exists\ n+1$ classes d'équivalences de form. quad. distinguées p le rg.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

(TH3) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ alors $\exists$ uniq $p \in \mathbb{N}$ tq Q s'écrit ds base convenable p mat diagonale :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $q = r - p$, $r = rg\ Q$.

(D9) Le couple $(p,q) = (p_Q, q_Q)$ est $\leftrightarrow$ à 1 forme quad. Q s $\mathbb{R}$- ev de dim finie Q sr $\mathbb{R}$-ev : Signature de Q.

(Cor) Deux formes quad. Q, Q' sur des $\mathbb{R}$-ev de dim n st équivalts ssi $\hat{m}$ signature.

(D) (p,q) : signature de Q. (invariant classifiant les φ sr ev réel dim n.

Orthogonalité

soit E : $\mathbb{K}$ev, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, $Q = q_\varphi$, $q_\varphi \in \mathcal{Q}(E)$

(D) $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E,\ \varphi(x,y) = 0,\ \forall y \in A\}$

(P) (i) $A^\perp$ sev, $\ker \varphi \subset A^\perp$ $\to$ $\emptyset^\perp = \{\emptyset\}^\perp = E$; $\to$ $E^\perp = \ker \varphi$, $A \subset (A^\perp)^\perp$

(ii) si $A \subset B \subset E \Rightarrow \ker \varphi \subset B^\perp \subset A^\perp$.

(iii) si $A \subset E$, $A \neq \emptyset \Rightarrow A^\perp = Vect(A)^\perp$ si $A = \{v_1, \dots, v_k\}$, $F = Vect(v_1, \dots, v_k)$

$$\Rightarrow F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^{k} v_i^\perp$$

(TH) (sur orthogonal) F sev de E,

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F \cap \ker \varphi)$

(ii) $n \leq \dim F + \dim F^\perp \leq n + \dim \ker \varphi$

(iii) $(F^\perp)^\perp = F + \ker \varphi$, $(F^\perp)^\perp = F \Leftrightarrow \ker \varphi \subset F$

De + si φ non-dégénéré ie $\ker \varphi = \{0\} \Rightarrow$

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F$ (iii) $(F^\perp)^\perp = F$

(iv) φ_F : restric° de φ à $F \times F$; $\varphi_F : F \times F \longrightarrow K$, $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_F$ aussi fbl symétriq.

$\varphi_F \in \mathcal{S}_F$: • $\ker \varphi_F = F \cap F^\perp = \ker \varphi_F^\perp$

• $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \varphi_F$ nd $\Leftrightarrow \varphi_F^\perp$ est nd.

Projections orthogonales

(D) $E = K \oplus L$, $\forall v \in E$, $\exists!\ (x,y) \in K \times L \mid s = x + y$ & proj linéaire p_K^L (ou $p_K^{\complement L}$) de S par S sur K parallèlement à L : $\boxed{p_K^L(v) = x}$

(P) $p = p_K^L : E \to E$ satisfait :

(i) $p \in \mathcal{L}(E)$, $\ker p = L$, $\mathrm{Im}\ p = K$, $p|_K = id_K$ (restric° de p à K)

(ii) $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$)

(iii) $q = id_E - p \Rightarrow p + q = id_E$, $p^2 = p$, $q^2 = q$, $pq = qp = 0$.

Réciprqt : p endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$ $\Rightarrow p$ est projec° linéaire p_K^L où $K = \mathrm{Im}\ p$ & $L = \ker p$.

(D) Une projec° linéaire p_K^L est orthogonale $\Leftrightarrow K \perp L$. De façon équivlte, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est proj. orthogonale $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $E = \ker p \oplus^\perp \mathrm{Im}\ p$ (somme directe orthogonale)

(D) F sev de E, F non-dégénéré si $Q_F = Q|_F$ (ou $\varphi_F = \varphi|_{F \times F}$) est forme non-dégénéré.

F non-dégénéré $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow E = F \oplus F^\perp$.

(P) F sev de E, (i) si F (nd) $\Rightarrow \exists!$ projecⓞ orthogonale p d'image $p :\overset{not}{=} p_F$ ($p^{\perp}_F$).
(ii) si en + Q est forme (nd) $\Rightarrow$ récipoq vraie.

Calcul projecⓞ orthogonale

(P) F (sev) (nd) $(a_1, \dots, a_k)$ base orthogonale de F.
Alors $Q(w_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots k$ est
$\forall x \in E$,
$$p^{x}_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i .$$

Groupe Orthogonal

Notatⓞ : $\mathbb{K}$, E $\mathbb{K}$ ev, $\dim E = n$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ FQ non-deg,
$\varphi = b_Q$: forme polaire de Q.

(D1) Un endom. $f \in \mathcal{L}(E)$ est déf. orthogonal (ou Q-orthogl / ou φ-orthgl) s'il préserve Q (ou φ) :
$\forall x \in E$, $Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall x, y \in E$, $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. On note $O(E)$.
(ou $O(E, Q)$, $O(E, \varphi)$, $O(Q)$, $O(\varphi)$), l'ens des end. orthogonx de (E, Q).

(P1) (i) $f \in O(E) \Rightarrow f$ inversible.
(ii) $O(E)$ est un groupe.

(D2) st F ss-espce (nd) de $E \Longrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$ et les 2 projecⓞs orthogonales p_F, $p_F^{\perp}$ st déf, tq $p_F + p_{F^{\perp}} = id_E$. On déf. la symétrie orthogonale s_F p : $\forall v \in E$, $\exists! (x, y) \in F \times F^{\perp}$, $v = x + y$ et on pose $s_F(v) = x - y$.

De m̂ $s_F = p_F - p_{F^{\perp}} = id_E - 2p_{F^{\perp}} = 2p_F - id_E$.
Lorsq F est un hyperplan, s_F : réflexion orthogonale.
$\rightarrow$ toute symétrie orthogonale est un endom. orthogonal.
$\rightarrow$ qd $F \subsetneq E$, p_F proj orthogon. n'est pas endom. orthog.

Caractérisatⓞ de $f \in O(E)$ p matrices

$\mathcal{E}$ base, $f \in \mathcal{L}(E)$, $G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$ alors $f \in O(E) \iff {}^tAGA = G$.
$\iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

• cφ $G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, (E, Q) est espace euclidien muni base orthonormé $\mathcal{E}$,
on a $f \in O(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA$
$\iff A$ mat orthogonale.

(TH) **Cartan - Dieudonné**

Tout élt de $O(Q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonales.

Orthogonalisatⓞ de Gram - Schmidt

(TH) d'orthogⓞ de Gram-Schmidt.
$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $\forall i = 1, \dots, n-1$, $E_i = Vect(v_1, \dots, v_i)$ est non-dégénéré alors les n vectrs : $u_1 = v_1$,
$$u_2 = v_1 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1, \dots, u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i \qquad k = 1, \dots, n$$
st bien déf & fournt base orthogonale.
$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. ds cette base Q s'écrit :
$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 ,$$
où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = Mat(v_1, \dots, v_k)$ $(Q|_{F_k})$

• Il s'appelle orthogonalisée de G-S.

• $Q|_{F_{n-1}}$ non-dégénérée $\Rightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1$

$\Rightarrow \operatorname{rg} Q = n-1$ ou n ; on ne suppose pas $\Delta_n \neq 0$.

Cor 1 Crit de Sylvester

E $\mathbb{K}$ ev, $n := \dim E$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi = b_Q$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$,

$(v_1, \dots, v_n)$ base de E, $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pr $1 \leq i,j \leq n$.

$F_k = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$,

$A_k = \operatorname{Mat}_{(v_1, \dots, v_k)}\left(Q|_{F_k}\right)$, $\Delta_k = \det A_k$ Alors :

① φ (ou Q) est déf positive $\Longleftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

② Supps. $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$, $\Delta_0 = 1$ Alors :
l'indice négatif q de Q (c'est la 2° composante de la signature (p,q) de Q) est le nbre de chgts de signe ds la suite $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ (on dit (Δ_i) présente un chgt de signe au rang i si $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

③ φ est déf négative $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$, $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0$

$$\begin{array}{cccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & & A_n \\ A = & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \end{array}$$

les $\Delta_k = \det A_k$ s'appellent mineurs principx dominant.

C3 Espaces Euclidiens

§1. Norme, distance, angles, volumes

(D) Un $\mathbb{R}$-ev E muni $\boxed{\text{FB sym}}$ φ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ & φ déf positive. (φ : **produit scalaire**)

$$<x|y> := \varphi(x,y) \quad \forall\, x,y \in E,$$

p, déf $\forall x \in E$, $<x|x> \geq 0$ & $<x|x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On note $\sqrt{<x|x>} = \|x\|$. ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$)

(P) $\forall x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x|y> + \|y\|^2$

((ii) ep si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Th Pythagore)

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (idtité ▱)

(iv) $|<x|y>| \leq \|x\|.\|y\|$ (Inégalité Cauchy-Schwarz ssi $\exists a \in \mathbb{R}$, $x = ay$ & $y = ax$)

(v) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski $\exists a \geq 0$, $x = ay$ & $y = ax$)

(D) Norme $N : V \to \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

(D) soit X ens $\neq \emptyset$. On appelle **distance (ou métriq)** sur X tte f $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq : (i) $\forall x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un **espace métriq** est un ens muni d'une métriq.

D'après (P1), f $E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une **distance**.

(D) soit $(E, <\cdot|\cdot>)$, un espace euclidien, la f : $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$ s'appelle **norme euclidienne** sur E, la f $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ s'appelle **distce euclidienne** sur E.

Angles

$\forall x,y \in E \setminus \{0\}$, p, Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{<x|y>}{\|x\|.\|y\|} \right| \leq 1.$$

(D) • **L'angle** $(\widehat{x,y})$ entre 2 vect^{rs} $\neq 0$ de E, uniq réel $\theta \in [0,\pi]$,

$$\cos\theta = \frac{<x|y>}{\|x\|.\|y\|}$$

on pt écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \dfrac{<x|y>}{\|x\|\ \|y\|}$, $\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• L'angle $(\widehat{F_1,F_2})$ entre 2 sev $\neq 0$ de E,

$$(\widehat{F_1,F_2}) = \inf\{(\widehat{v_1,v_2}) \mid v_1 \in F_1\setminus\{0\},\ v_2 \in F_2\setminus\{0\}\}$$

• L'angle $(\widehat{v,F})$ entre un vect^{r} & sev $\neq 0$ de F :

$$(\widehat{v,F}) = \inf\{(\widehat{v,w}) \mid w \in F\setminus\{0\}\}.$$

@ angle 2 droites F_1, F_2 vct^{r} dirct^{r} v_1, v_2 ie $F_1 = \mathbb{R}v_1$, $F_2 = \mathbb{R}v_2$.

$(\widehat{F_1,F_2}) = \min\{(\widehat{v_1,v_2}), (\widehat{v_1,-v_2})\} = \min\{\theta, \pi-\theta\}$

Volumes (calcul intégral)

(D) (i) Pr famille $\mathcal{V} = (v_1,\dots,v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est : $\Pi = \Pi(\mathcal{V}) = \{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k\}$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est :

1) si $\mathcal{V}$ est **liée**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = 0$

2) si $\mathcal{V}$ est **libre**, $vol_k(\Pi(\mathcal{V})) = |\det P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{V}}|$

où $\mathcal{E}_F$ base orthonm. qq de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ & $P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{V}}$ désigne mat de passage.

1) Mq (i), on a $\ell \in E^*$: $\dim \ell + \dim \ker \ell = \dim E$

D+, $\{0\} \subset \mathrm{Im}(\ell) \subset K^1$, d'où $\mathrm{Im}(\ell) \subset \{0,1\}$

Dc pr $\ell \in E^*$, on a $\ell \neq 0 \iff \mathrm{Im}(\ell) = K^1 \iff \dim$

$\iff \dim \mathrm{Im}(\ell) = 1 \iff \dim \ker \ell = n-1$

$\iff \ker \ell$ est un hyperplan.

Mq (ii) soit H un hyperplan, on choisit 1 base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de H & complétons-la à $(e_1,\dots,e_n)$ de E.

On définit $\varphi : E \to K^1$ par mat $(0\dots 0\,1)$.

$\varphi : x_1e_1+\dots+x_ne_n \mapsto \mathrm{Mat}(\varphi)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_n$.

On a bien $\ker \varphi = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1}) = H$ △ mqé.

soit $\psi \in E^*$ une 2ème forme linéaire sr E, $\ker\psi = H$,

soit A mat, $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(\psi)$, $A = (a_1,\dots,a_n)$ alors

$\forall i = 1,\dots,n-1$; $\psi(e_i) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\1\\0\end{pmatrix} = a_i = 0$

(car $e_i \in H$ & $H = \ker\psi$) de $\underbrace{A = (0,\dots,0,a_n)}_{\mathrm{mat}_{(e_i)}(\psi)}$

$A = a_n(0,\dots,0,1)$ ie $\psi = a_n\varphi$ ■

2) soit $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_n)$ base qq de E, pose $\varepsilon_i(f_j) = a_{ij}$. $i,j = 1,\dots,n$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, on a alors:

$\mathrm{Mat}_{\mathcal F}(\varepsilon_i) = (a_{i1}\dots a_{in}) \in \mathcal M_{1,n}(K)$.

$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal F}(\sum\lambda_i\varepsilon_i) = \cancel{\mathrm{Mat}} \sum \lambda_i (a_{i1}\dots a_{in})$.

Or $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal F}(\varphi) = 0$ dc $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ st linéairt indpts $\iff$ lignes $(a_{i1}\dots a_{in})$ st lin. ind, $rg(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Donc $\forall i = 1,\dots,n$ le systm linéaire $AX = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 1 à ième place admt uniq sol° $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Or ce systm exprime : $\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^n x_k f_k\right) = \delta_{ij}$

car $\varepsilon_j(\sum x_k f_k) = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{\varepsilon_j(f_k)}_{a_{jk}} = \sum a_{jk}x_k$

Nots ctt sol° e_i. On a dmq, $\forall i = 1,\dots,n$ ∃ uniq $e_i \in E$ tq $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$, voyons pq $e_1,\dots,e_n$ forment une base de E. En effet, en notant sol° uniq $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de (*) p $\begin{pmatrix}e_{1i}\\ \vdots\\ e_{ni}\end{pmatrix}$, on obt $B = (b_{ji})$,

$e_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} f_j$ $(i=1,\dots,n)$ alors qpté $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ se réécrit ĉ $\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \delta_{ij}$ où $AB = I_n$.

Donc B est invers. & $(e_1,\dots,e_n)$ est une base liée à $(f_1,\dots,f_n)$ p mat de passge B.

3) (i) pr $\forall v \in E$, ∃ $E^* \to K$, $\ell \mapsto \ell(v)$ est linéaire et dc est un élt de E^{**}. On déf $\Phi(v)$ égal à cette f, on a 1 applicat° $\Phi : E \to E^{**}$ bien déf en v, dc $v \mapsto E(v)$ est linéaire. ie $\Phi \in \mathcal L(E, E^{**})$.

(ii) soit $\dim E < \infty$, si $v \in E\setminus\{0\}$, on pt complt v à une base $(v = e_1,\dots,e_n)$ de E. On pt construire une fl $\ell \in E^*$ q ne s'annule pas p v ; p @ on pt choisir $\ell = e_1^*$, le 1° élt de base duale de $(e_1,\dots,e_n)$ alors $\ell(v) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$. Mais alors $\Phi(v) \neq 0$ car $\Phi(v)$ est fl sr E^* q prd 1 valr $\neq 0$ ds $\ell(v)$ sur ℓ. Dc $\ker\Phi = \{0\}$ & Φ injective.

(iii) on a $\dim E < \infty \Rightarrow \dim E^* < \infty$ & $\dim E = \dim E^*$. Dc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$. Psq E est injective & dim° coïncidt, Φ est isom. bijectif.

4) Par Th diagonalisat° FQ, ∃ base orthogonale $q = (e_1,\dots,e_n)$ tq $Q(e_i) = \lambda_i$ & on pt ordonner vectrs de la base ĉ : $\lambda_i > 0$ pr $i = 1-p$; $\lambda_i < 0$ pr $i = p+1,\dots,p+q$; $\lambda_i = 0$ pr $i = p+q+1,\dots,n$ alors mat de Q acquiert la forme $\begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0\\ 0 & -1_q & 0 \\ 0&0&0\end{pmatrix}$ ds base $\varepsilon' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1,\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}e_p,\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_{p+1}}}e_{p+1},\dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}}e_{p+q}, e_{p+q+1},\dots,e_n\right)$.

Le nbr $p+q$ est déterminé p Q car $p+q$ est le rang de la mat (*) & dc égal à $r = rg\, Q$.

mq 3t, soit $\mathcal E = (e_1,\dots,e_n)$; $\mathcal E' = (e_1',\dots,e_n')$ 2 bases orthogonales tq $Q(e_1) = \dots = Q(e_p) = Q(e_1') = \dots = Q(e_{p'}') = 1$

$Q(e_{p+1}) = \dots = Q(e_r) = Q(e'_{p'+1}) = \dots = Q(e_r') = -1$.

soit $V = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$; $W = \mathrm{Vect}(e'_{p'+1},\dots,e'_n)$ alors $Q(e_i) > 0$ $\forall x \in V\setminus\{0\}$. (Q est déf positive sr V puis sr W on a : $Q(x) \le 0$ $\forall x \in W$. Dc $V \cap W = \{0\}$ dc $\dim V + \dim W \le n$, soit $p + (n-p') \le n$ soit $p \le p'$. Par la symétrie des rôles de p & p', on a $p' \le p$ dc $p = p'$.

5) soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base de F, complts la à 1 base, $\mathcal E = (e_1,\dots,e_k,\dots,e_n)$ une base de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i,e_j)$. $A = (a_{ij}) \in \mathcal S_n(K)$. Pr 1 vectr $x = \sum x_i e_i$, on a $x \in F^\perp \iff \varphi(e_i,x) = 0$ pr $i = 1,\dots,k$

$\iff \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n = 0\\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n = 0\end{cases}$ (S)

Puisq $\ker\varphi = \{0\}$, rg des lignes est maxi égal à ~~k~~ dc les lignes st lin. ind.

Dc $rg(S) = k$. Dc son espace sol° dim $n-k$.

dc $\dim F^\perp = n-k \Rightarrow \dim F^\perp + \dim F = n$.

(L) (cohérence déf $v \circ l_E$)

$|\det P_{\mathcal{E}_F \to v}|$ ne dépd pas choix de $\mathcal{E}_F$.

(Cor) (de dmo (L))

La mat de passage A entre 2 bases orthon. est une mat orthogonale : A est inversible & $A^{-1} = {}^tA$. Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prdre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

● soit E (ee) dim n, on note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthognx de E.

$$O(E) = O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) = \{x \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E\times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle \}.$$

C'est un groupe. L'ens des mat orthogonales de taille n est déf p : $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$.

◦ E (ee) dim $n \geq 1$, $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base o.n. $\Rightarrow$ $O(E) \longrightarrow O(n)$, $f \longmapsto \mathrm{Mat}_\mathcal{E}(f)$ est isom. de groupes. Dc pr chq $n \geq 1$, on a 1 seul groupe orth. euclidien à isom. près.

◦ $O(n)$ identifié à $O(\mathbb{R}^n, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

● Groupes spéciaux orthognx : $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$
$SO(A) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.

• pr $A \in O(n)$, $\det = \pm 1$. Dc $\| O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E)$, $O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n)$

où $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = -1\}$

$O^-(n) = \{u \in O(n) \mid \det u = -1\}$

Rq: → $SO(E) \subset O(E)$ est un ss-grpe (mais pas $O^-(E)$).

→ $\forall \tau \in O^-(E)$, $O^-(E) = \tau\, SO(E) = SO(E) \cdot \tau$.

• Le groupe quotient $O(E)/SO(E)$ est isom. à groupe d'ordre 2 :
$\mu_2 = \{\pm 1\}$; $O(E)/SO(E) \simeq \{\pm 1\}$. cela suit du (Th) d'isomorph. pr grpe quotient : on considère morphisme du det,

det : $O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $u \longmapsto \det u$, son image est $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

Donc $O(E)/\ker(\det) \simeq \mu_2$ or $\ker(\det) = SO(E)$

▸ cas $n = 1$: $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) \simeq O(1) = \{\lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mu_2$

$SO(1) = \{1\}$ grpe trivial 4 élt neutre. mat taille 1, $A(\lambda)$ tq ${}^tAA = \mathbb{1}_n$

▸ cas $n = 2$: E plan eucl, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base o.n. de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A = \mathrm{Mat}_\mathcal{E}(u) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ 1) $u \in SO(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) $u \in O^-(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

◦ Notation : $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de rotation d'angle θ ds plan eucl. $\mathbb{R}^2$.

(P) soit E un plan eucl., un élt $u \in SO(u)$ donné p m̂ matrice R^θ ds 2 bases o.n. liées p mat de psge o.n. tq $\det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = -1$ et si $\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(u) = R^\theta$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = R^{\theta'} \Rightarrow \theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $R^{\theta'} = (R^\theta)^{-1} = R^{-\theta}$.

Orientation :

soit V ev dim finie, on pt ÷ l'ens $\mathbb{B}(V)$ de ttes les bases de V en 2 parties disjointes, classe d'équivalence pr relation d'équivalence suivante :

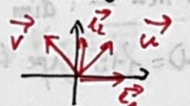
pr $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathbb{B}(V)$, $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \iff \det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} > 0$

(D) Munir V d'une orientation : c'est choisir laquelle de 2 classes, on appelle **classe des bases directes**, l'autre étant la classe des **bases indirectes**.

↪ on pt donner une orientation, en précisant une base directe.

(Cor) soit E plan eucl. orienté. On a alors un isomorph. canoniq $\pi : SO(E) \longrightarrow SO(2)$ q ↔ à chq élt $u \in SO(E)$ sa matrice R^θ ds n'importe q^lle base o^n. directe, l'angle de rotat° θ $[2\pi]$ ne dpd pas ch·x base o^n directe.

Rq : L'orientat° standard du plan eucl. standard $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ pt ê décrit ê : une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ est directe si v s'obtient p la rotat° de u d'angle 90° ds sens contr.



Sens géométriqs des élts de $O^-(E)$: dim 2

(L1) Tt élt u de $O^-(E)$ a $\{1, -1\}$ pr spectre, dc s'écrit p $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

(L2) Les vect^rs propres unitaires (= de norme 1) de la mat $A = R^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ de (P1) st : $v_1 = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ de vp 1.

$v_2 = \pm\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ de vp -1.

(P3) soit E un plan eucl., les élts de $O^-(E)$ st les réflexions orthog. $\forall u \in O^-(E)$, il y a exactem^t 4 bases o^n. de E ds lsqls u s'écrit p la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si E est orienté, deux de ces bases st directes, 2 autres indirectes.

Espaces euclidiens de (dim = 3)

Produit Vectoriel

soit E un esp. ee de dim 3 muni d'une orientat°.

Not° : $\mathbb{B}(E) \supset \mathbb{B}_{o_n}(E) = \mathbb{B}^+_{o_n}(E) \sqcup \mathbb{B}^-_{o_n}(E)$

∀ bases " $\mathbb{B}^+(E) \sqcup \mathbb{B}^-(E)$; bases o^n. ; b. o^n directes ; b. o^n. indirectes.

(D) soit $U = (u, v, w)$ une famille de 3 fct^rs de E. Le réel $\det_{\mathcal{E}}(U)$, ds une base $\mathcal{E} \in \mathbb{B}^+_{o_n}(E)$, ne dpd pas $\mathcal{E}$ & est appelé produit mixte de U. $[U] = [u, v, w]$.

(P) (pptés prdt mixte)

Le produit mixte $P : E^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v, w) \mapsto [u, v, w]$ est trilinéaire & antisymétriq. Pr $U \in E^3$, on a

(i) $P(U) = 0 \iff U$ est lié.

(ii) $P(\sigma(U)) = \varepsilon(\sigma).P(U)$ ∀ permutat° $\sigma \in S_3$, où $\varepsilon(\sigma)$ signature permuta°.

eg $P(u, v, w) = -P(v, u, w) = -P(w, v, u)$.

(iii) $U \in \mathbb{B}^+_{o_n}(E) \Rightarrow P(U) = \pm 1$.

(L1) soit V un ee $\Rightarrow$ $\Psi : V \to V^*$, $x \mapsto \langle x|\cdot\rangle$ est isom canoniq de V sur V^*.

(D1) soit E ee orté dim 3. Le produit vectoriel de 2 vecteurs $u, v \in E$ est l'uniq vect^r de E, noté $u \wedge v$ tq $\forall w \in E$, $[u, v, w] = \langle u \wedge v | w \rangle$.

En usant l'isom. canoniq $\Psi : E \xrightarrow{\sim} E^*$ de (L1), on a :

$$u \wedge v = \Psi^{-1}([u, v, \cdot])$$

où $[u, v, \cdot] \in E^*$ est la (fl) $E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto [u, v, w]$

(P1) (ppties prdt vectoriel)

soit E ⓔⓔ orienté dim 3.

1. L'appli $E\times E \to E$, $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire & antisymétriq

$(\forall u,v\in E,\ u\wedge v=-v\wedge u)$

2. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v=0 \iff u,v$ st colinéaires.

3. $\forall u,v\in E$, $u\wedge v\perp u$, $u\wedge v\perp v$.

4. si u,v ne st pas colinᴿ $\Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in \mathbb{B}^+(E)$

si d+ $\|u\|=\|v\|=1$, $u\perp v \Rightarrow (u,v,u\wedge v)\in \mathbb{B}^+_{om}(E)$.

5. si $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)\in \mathbb{B}^+_{om}(E)$ alors $\forall i,j\in\{1,2,3\}$:

$$e_i\wedge e_j=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ \varepsilon_{ijk} & \text{où } \{i,j,k\}=\{1,2,3\},\end{cases}$$

$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ est la signature d'une permutaθ.

6. si $\mathcal{E}=\mathbb{B}^+_{om}(E)$, $[u]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.

puis $$[u\wedge v]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_3&v_3\\u_1&v_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

Endomorphismes orthognx ds ⓔⓔ E de dim 3

(L2) Un endomorphisme orthogonal d'un ⓔⓔ E de dim 3 a tjrs (vp) rélle ± 1 = son déterminant.

((vp) complexes vl abs 1).

(P2) soit E ⓔⓔ ort. dim 3, $u\in O(E)$, $\lambda=\det(u)=\{\pm 1\}$.

Alors $\exists$ base $\mathcal{E}\in \mathbb{B}^+_{om}(E)$ & $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)=\left(\begin{array}{c|cc}\lambda&0&0\\ \hline 0& \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R^θ}}\\ 0&&\end{array}\right),\quad R^\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

(D2) (i) Un axe de E est une droite vectorielle orientée ds E.

Tt axe est dirigé par un uniq vecteur unitaire.

(ii) L'élt $u\in SO(E)$ de matrice $\left(\begin{array}{c|c}1&0\ 0\\ \hline \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}&R^\theta\end{array}\right)$ ds une base o.n directe $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ de E s'appelle rotaθ d'angle θ autour de l'axe dirigé par e_1.

Notᶿ: $u=R_v^\theta$, $\forall v$ dirigeant l'axe $(v=\alpha.e,\ \alpha>0)$.

(Co1) soit $u\in SO(E)$, $u\neq id_E$ alors u possède 2 axes de rotaθ, ayant pr support la m̂ droite vectorielle $\mathbb{R}v\subset E$, où $v\neq 0$, l'un est dirigé par v, l'autre par $-v$.

L'axe & l'angle $[2\pi]$ st les élts caract. d'une rotaθ de E.

Déterminat° pratiq des élts caract qs d'une rotat° ds un ee orienté E :

soit $u \in SO(E)$, $u \neq id_E$

① On trouve vct^r prop. v de u de vp $1 = \det u$, sol° de $u(v) = v$.

② Déterminer $\cos\theta$ p $tr(u) = 1 + 2\cos\theta$.

③ Dét. le signe de $\sin\theta$ q coïncide ā signe $[x, u(x), v]$ $\forall x \in E \setminus \mathbb{R}v$, ç R^θ : $[x, u(x), v] = \|v\|(\beta^2+\gamma^2)\sin\theta$, où $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base o.n. directe de E tq $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$, & ce choix $u = R_v^\theta$.

Endomorphismes orthogonx ds ee de dim qq

TH1 soit E un ee de dim $n \geq 1$ alors $\exists$ une base o.n de E ds lqlle u s'écrit p la mat

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \emptyset & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & \emptyset & & & & & R^{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R^{\theta_r} \end{pmatrix}$$

$\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R}$, $R^{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$.

Cor3 Ttes les vp de $u \in O(E)$ ds $\mathbb{C}$ st de vp^r absl. 1.

L1 soit E un ee de dim $n \geq 1$, $u \in O(E)$, $F \subset E$ un ss ev $\boxed{\text{stable}}$ par $u(F) \subset F \Rightarrow u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$.

L2 soit V un $\mathbb{R}$-ev de dim $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(V)$ alors u a un ss-ev de dim 1 ou 2.

L3 soit E un ee, $u \in O(E)$ alors E est une somme directe orthogonale de sev stables par u de dim 1 ou 2.

Endomorphismes adjoints & symétriqs

P/D soit E ee & $u \in \mathcal{L}(E)$ alors :

1) Il existe un uniq $v \in \mathcal{L}(E)$ tq

(*) $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\boxed{\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle}$

L'endom v ainsi défini s'appelle adjoint de u & est noté u^*.

2) si $\mathcal{E}$ est une base o.n.ée de $E \Rightarrow Mat_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^t Mat_{\mathcal{E}}(u)$

P1 soit E ee & $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors on a :

1) $(f^*)^* = f$ 2) $(f+g)^* = f^* + g^*$ 3) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$

4) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

D1 soit E ee $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est symétriq, ou auto-adjoint, si $u = u^*$. De façon équivalt, u est symétriq $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\langle u(x) | y\rangle = \langle x | u(y)\rangle$

Cor (prop1) soit E un ee, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est symétriq ssi une des 2 pptés équivalts est vrai :

1) $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ est sym $\forall$ base o.n $\mathcal{E}$ de E.

2) $\exists$ une base o.n $\mathcal{E}$ de E tq $Mat_{\mathcal{E}}(u)$ soit sym.

Rq Une mat A est dite symétriq si ${}^tA = A$.

@1 Une project° orthogonale est symétriq.

@2 Tte symétrie orthogonale est symétriq.

Corℓ soit E ee, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in O(E)$

$\iff$ u est inversible & $u^* = u^{-1}$

$\iff u^* u = u^* u = id_E$.

Not° : $\mathcal{S}_E = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u = u^*\}$, $\mathcal{S}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = A\}$.

→ on a si $\mathcal{E}$ est une base o.n de E alors $u \in \mathcal{S}_E$

$\iff Mat_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Propℓ soit E ee & $u \in \mathcal{S}_E$. Si F est sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Cor 2 soit E ee, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in O(E)$

$\iff u$ est <u>inversible</u> & $u^* = u^{-1}$

$\iff u^* u = u^* u = id_E$.

Notaᵒ : $S_E = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u = u^*\}$, $S_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = A\}$.

$\to$ on a si ε est une base o.n de E alors $u \in S_E$

$\iff Mat_\varepsilon(u) \in S_n(\mathbb{R})$.

Prop soit E ee & $u \in S_E$. Si F est sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Rq si $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$ sev stable par u, on note u_F la restrictᵒ de u à F vue c un automorphisme de F,

$u_F \in \mathcal{L}(F)$, $\forall x \in F$, $u_F(x) = u(x)$, $u \in S(E) \Rightarrow u_F \in S(F)$.

$u \in S(E) \iff \forall x,y \in E$, $\langle x | uy \rangle = \langle ux | y \rangle$.

$\forall x,y \in F$, $\langle x | u_F y \rangle = \langle u_F x | y \rangle$.

P2 E ee, $u \in S(E)$. λ_1, λ_2 2 vp réelles distinctes de u. soit $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ les <u>sep</u> de u alors $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.

Th Diagonalisaᵒ ds endom. sym en base orné

soit E un ee & $u \in S_E$ alors:

1) Tts vp complexes de u st réelles : $Spec(u) \subset \mathbb{R}$.
2) $\exists$ base orné ε de E, mat $M_\varepsilon(u)$ soit <u>diagonale</u>.

Cor si $u \in S_E$, $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ & λ_i distinctes alors $E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_n}$.

Cor 2 soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in O(n)$ tq la mat $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ soit diagonale.

<u>Endomorphismes sym & formes bil. sym</u>

Notaᵒ : E un ee dim n. On a une correspondance bijective naturelle :

$$S_E = \left\{ \begin{matrix} \text{endom. sym} \\ \text{de } E \end{matrix} \right\} \underset{\mathcal{H}^{-1}}{\overset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} S(E) = \left\{ \begin{matrix} \text{formes bil} \\ \text{sym de } E \end{matrix} \right\}.$$

<u>Constructᵒ de $\mathcal{H}$</u> :

(i) $u \in S_E \mapsto \mathcal{H}(u) = \varphi \in S(E)$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \langle x, u(y) \rangle$

(ii) $\varphi(y,x) = \langle y, u(x) \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \varphi(x,y)$

(i) $\Rightarrow$ bilinéarité de φ (ii) $\Rightarrow$ sym.

(iii) $\mathcal{H}$ est bijective.

P3 Tte forme bilinéaire sym $\varphi \in S(E)$ se diagonalise ds base o.n de $(E, \langle | \rangle)$

D2 Un endom. sym $u \in S_E$ est dit $\oplus$. (notaᵒ : $u \in S_E^+$) si la FB $\varphi \leftrightarrow \mathcal{H}(u)$ est $\oplus$: $\mathcal{H}(u) \geq 0$.

De façon équiv : $u \in S_E^+ \iff u \in S_E$, $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$.

De façon similᵉ, on déf. S_E^{++} les endom sym déf. $\oplus$:

$u \in S_E^{++} \iff \mathcal{H}(u) > 0 \iff \dots \langle x, u(x) \rangle > 0$.

P4 soit $u \in S_E$ alors on a :

1) $u \in S_E^+ \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^+$
2) $u \in S_E^{++} \iff Spec(u) \subset \mathbb{R}^{>0}$

Cor 3 soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ base o.née, $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \Rightarrow$

- $u \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^+ \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^{++} \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Thm soit $u \in \mathcal{S}_E^+ \Rightarrow \exists!\ v \in \mathcal{S}_E^+$ tq $v^2 = u$.

Notat° : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \text{spec}(A) \subset \mathbb{R}^+\}$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \text{spec}(A) \subset \mathbb{R}^{>0}\}$.

Cor 3 soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ base o.née, $A = Mat_{\mathcal{E}}(u) \Rightarrow$

- $u \in \mathcal{S}_E \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^{+} \iff A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{S}_E^{++} \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Th2 soit $u \in \mathcal{S}_E^{+} \Rightarrow \exists!\, v \in \mathcal{S}_E^{+}$ tq $v^2 = u$.

Notat° : $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ spec(A) \subset \mathbb{R}^{+}\}$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ spec(A) \subset \mathbb{R}^{>0}\}$.

L1 soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $fg = gf$ alors :

1) Tout sep de f est **stable** par g.
2) si les polyn. caractqs de f, g st ttlmt scindés sur $\mathbb{R}$ alors ils ont un vp **commun**.

L2 soit $f, g \in \mathcal{S}(E)$, $fg = gf$ alors f, g admettent une diagonalisat° simultanée ds base o.n :

$\exists\, \mathcal{E} \in \mathcal{B}o.n(E)$, $Mat_{\mathcal{E}}(f), Mat_{\mathcal{E}}(g)$ soient **diagonales**.

TH2 (**Décomposit° polaire**)

soit E ⓔ, $u \in GL(E)$ alors $\exists$ uniq paire $(w, p) \in O(E) \times \mathcal{S}_E^{++}$ tq $u = wp$.

Cor (**vers° matricielle**)

1) $\forall A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ $\exists!\, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $A = B^2$.
2) $\forall M \in GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\})$ $\exists$ uniq paire $(\Omega, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = \Omega S$.

(resp $GL^{+}(n, \mathbb{R})$.... resp $(\Omega, S) \in SO(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Applicat° de la décomposit° polaire

P $GL^{+}(n, \mathbb{R})$ est $\boxed{\text{connexe par arcs}}$, ie $\forall A, B \in GL^{+}(n, \mathbb{R})$, $\exists\, \varphi : [a, b] \to GL^{+}(n, \mathbb{R})$ cont tq $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$.

P $O(n)$ est un ss-groupe $\boxed{\text{compact}}$ maximal de $GL(n, \mathbb{R})$.

Compact : on a une norme ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ et pr cette norme $O(n)$ est un fermé-borné de $\mathbb{R}^{n^2}$, ie un compact.

Puis la **maximalité** signifie : si K est un ss-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ contenant $O(n)$ & si K est compact $\Rightarrow K = O(n)$

Autres décomposit°

TH3 (**Décomposit° d'Iwasawa**)

soit $K = SO(n)$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \\ \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = 1 \end{cases} \right\}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}),\ \det M = 1\}$

alors $\forall$ matrice $M \in SL(n, \mathbb{R})$; $\exists!$ triplet $(k, t, n) \in K \times T \times N$ tq $M = ktn$.