Solutions du devoir surveillé

20 mars 2021

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (exercice fait en TD)

Soit un triangle $\triangle ABC$. La bissectrice intérieure de $\measuredangle A$ et la bissectrice extérieure de $\measuredangle B$ se coupent en D. La droite parallèle à (AB) passant par D coupe les droites (AC) et (BC) en L et M respectivement.

a) En sachant que les côtés LA et MB du trapèze $ABML$ sont respectivement de 5 et 7, trouver la mesure de la petite base LM.

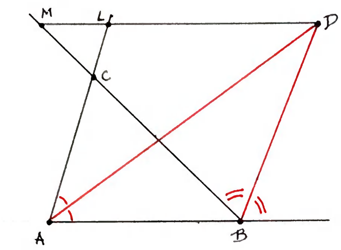
b) En sachant que le triangle $\triangle ABC$ est isocèle en C, trouver la mesure de LM.

Solution :

Il s'agit de l'exercice 3 de la feuille de TD n°3, déjà fait en TD, dont la solution qui suit a été postée sur Moodle par le chargé du groupe 3.

Propriété (III) : Lorsque la droite d coupe les deux parallèles δ et δ' (ce qui donne une figure semblable au symbole « $\neq$ »), l'angle « en bas à gauche » et l'angle « en haut à droite » ont même mesure. Il s'agit d'égalité des angles alternes internes.

Avant de traiter les questions posées, commençons par analyser la situation générale. Par construction, les droites (AB) et (DLM) sont parallèles, donc la propriété (III) s'applique et l'on a la première des deux égalités suivantes ; la seconde vient de ce que par construction, (AD) bissecte l'angle en A de (ABC) :



$$\widehat{BAD} = \widehat{LDA}, \qquad \widehat{BAD} = \widehat{DAL}.$$

De ces deux propriétés il découle que le triangle $\triangle ADL$ est isocèle en L, donc on a $AL = LD$. Par un raisonnement semblable on montre que le triangle $\triangle BDM$ est isocèle en M, d'où $BM = MD$. De plus, le point D, qui est le centre du cercle exinscrit face à A, ne peut pas être sur le segment $[LM]$ car il est sur la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$: par conséquent, $LM = |LD - MD|$ et non pas $LM = LD + MD$ *(ce fait saute aux yeux sur la figure, mais il est quand même réconfortant de savoir le justifier par un argument rigoureux)*. Répondons maintenant aux questions.

a) Avec les données de l'exercice, l'application numérique donne $LM = |LD - MD| = |LA - MB| = 2$.

On observera que dans ces conditions, les droites (LM) et (AB) sont de part et d'autre de C, donc les points L et M ne sont pas sur les segments $[AC]$ et $[BC]$ mais seulement sur les droites (AC) et (BC), comme représenté sur la figure.

b) Si (ABC) est isocèle en C, alors $CA = CB$. En appliquant Thalès au triangle $\triangle ABC$ et à la droite $(DLM) \parallel (AB)$ nous trouvons $CL = CM$ et par conséquent $MB = LA$. Donc $LM = |LD - MD| = |LA - MB| = 0$: autrement dit, les points L, M et C sont confondus.

Une autre méthode consiste à voir que dans le triangle isocèle $\triangle ABC$, la bissectrice extérieure DC est parallèle à la base (AB), et par conséquent L, M et C sont confondus.

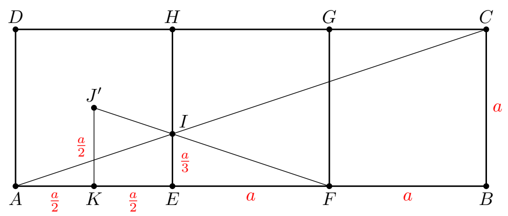
Exercice 2 (exercice des feuilles de TD, non fait en TD)

Soient $ABCD$ un rectangle avec $E, F \in [AB]$ et $G, H \in [CD]$ avec $AEHD$, $EFGH$ et $FBCG$ des carrés. Soit $I = (AC) \cap (EH)$. Montrer que F, I et le centre J du carré $AEHD$ sont alignés.

Solution :

Il s'agit de l'exercice 13 de la feuille de TD n°2.

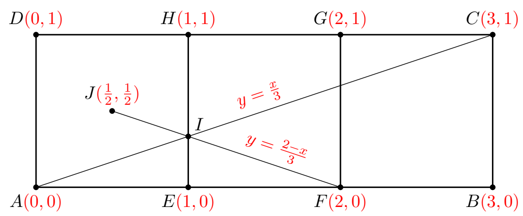
Méthode 1 (Thalès) :



On note a la longueur des côtés des carrés. Soit K le milieu de $[AE]$ et $J' = (KJ) \cap (FI)$. Pour montrer que (FI) passe par (J) il suffit de démontrer que $J = J' \iff KJ' = KJ = \frac{a}{2}$.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle $\triangle ABC$ nous avons $EI : BC = AE : AB \implies EI = a\frac{a}{3a} = \frac{a}{3}$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle $\triangle FKJ'$ nous avons $KJ' : EI = FK : FE \implies KJ' = \frac{a}{3}\frac{\frac{3}{2}a}{a} = \frac{a}{2}$.

Méthode 2 (analytique) :

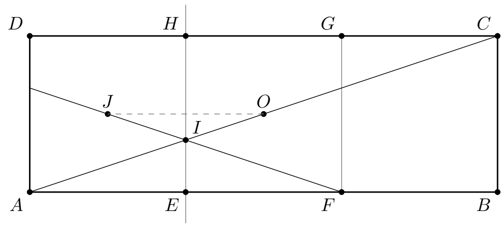


On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$. Dans ce repère, l'équation de la droite (AC) qui passe par les points $A(0,0)$ et $C(3,1)$ est $y = \frac{x}{3}$. Donc les coordonnées du point I sont $(1, \frac{1}{3})$.

Ainsi l'équation de la droite (FI) qui passe par les points $F(2,0)$ et $I(1, \frac{1}{3})$ est $y = \frac{2-x}{3}$. Pour finir, le centre $J(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du carré $AEHD$ est sur la droite (FI) car il vérifie l'équation $\frac{2-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$.

Méthode 3 (symétrie) :

La diagonale (AC) passe par le centre O du rectangle $ABCD$ qui est aussi le centre du carré $EFGH$. Par symétrie d'axe (EH), l'image de la droite (AI), qui est la droite (IF), passe par l'image de O, qui est J.

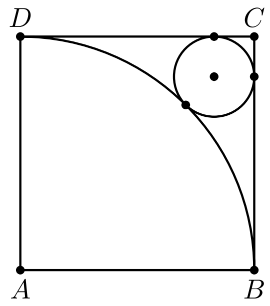


Exercice 3 (exercice de construction)

Les points A et B sont donnés. On souhaite réaliser la figure ci-contre à la règle et au compas. Ainsi il faut construire :

a) le carré $ABCD$;

b) le petit cercle, et donc en particulier son centre, tangent au cercle $\mathcal{C}(A, B)$ et aux deux côtés CB et CD du carré.



Donnez le programme de construction, sans justification, mais en expliquant, au préalable, votre démarche pour la construction du petit cercle. Les programmes des constructions classiques utilisées doivent être détaillés à part.

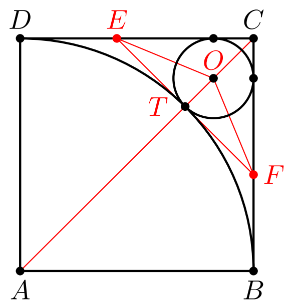
Solution :

Cet exercice de construction est basé sur l'exercice 12 de la feuille de TD n°1. La deuxième méthode utilise le calcul du rayon du petit cercle, comme demandé dans cet exercice.

Méthode 1 :

Analyse :

Comme ces deux cercles sont tangents aux côtés de l'angle $\measuredangle BCD$, alors les deux centres A et O et le point de contact T sont sur la bissectrice $[CA)$. On note $E \in [CD]$ et $F \in [CB]$ les intersections de ces segments avec la tangente commune aux deux cercles. Ainsi le petit cercle est le cercle inscrit dans le triangle $\triangle EFC$ et son centre O est l'intersection de la bissectrice de $\measuredangle TEC$ avec (AC).

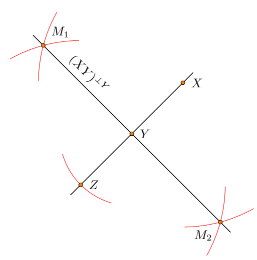


Constructions classiques :

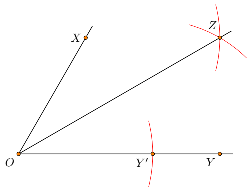
(P) La construction de la droite $(XY)^{\perp Y}$ **perpendiculaire** à (XY) passant par Y peut se faire ainsi :

1) $Z := \mathcal{C}(Y, X) \cap (XY)$, le point symétrique à X par rapport à Y ;

2) $\{M_1, M_2\} := \mathcal{C}(Z, X) \cap \mathcal{C}(X, Z)$ sont deux points distincts de la médiatrice de $[XZ]$ qui passe par Y. Ainsi $(XY)^{\perp Y} = (M_1M_2)$ est la droite recherchée.

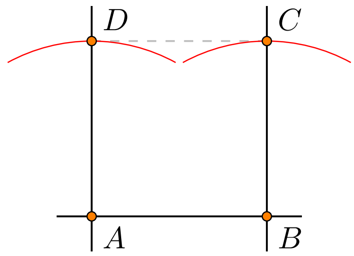


(B) La construction de la **bissectrice** d'un angle $\measuredangle XOY$ peut se faire ainsi :

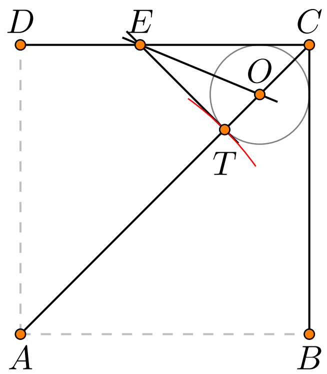


1) $Y' \coloneqq \mathcal{C}(O,X) \cap (OY)$, ainsi $OX = OY'$;
2) $Z \coloneqq \mathcal{C}(X,O) \cap \mathcal{C}(Y',O)$. Ainsi $XOY'Z$ est un losange et donc OZ est la bissectrice recherchée.

Programme de construction :



a) Pour construire le rectangle $ABCD$ à partir de A et B on peut utiliser la construction classique **(P)** ainsi :
   1) $C \coloneqq (AB)^{\perp B} \cap \mathcal{C}(B,A)$;
   2) $D \coloneqq (BA)^{\perp A} \cap \mathcal{C}(A,B)$.

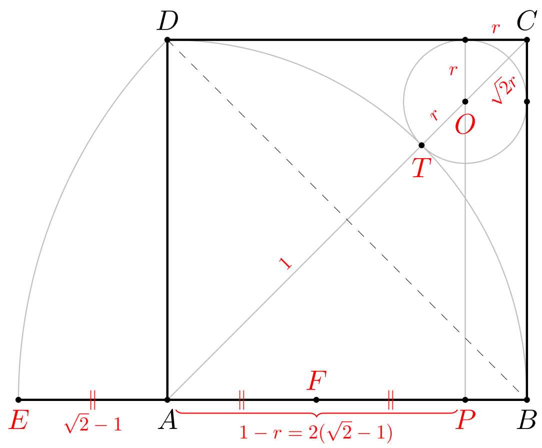


b) Maintenant pour construire le cercle $\mathcal{C}(O,T)$ il suffit de construire les points T et O comme suit :
   1) $T \coloneqq (AC) \cap \mathcal{C}(A,B)$;
   2) $E \coloneqq (AT)^{\perp T} \cap (DC)$ en utilisant **(P)** ;
   3) $\mathcal{B}$ la bissectrice de $\measuredangle TEC$ en utilisant **(B)** ;
   4) $O \coloneqq \mathcal{B} \cap (AC)$.
   5) $\mathcal{C}(O,T)$ est le cercle recherché.

Méthode 2 :

Analyse :

On fixe l'unité de longueur au rayon du grand cercle $AB = 1$. Il n'est pas difficile de voir que $\sqrt{2} = AC = AT + TO + OC = 1 + r + \sqrt{2}r$ et donc que $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$. Ainsi la projection P du centre du petit cercle O sur (AB) est à distance $AP = 1 - r = 2(\sqrt{2}-1)$ de A. Autrement dit $AP = 2(BD - AB)$. Ainsi la construction de P et par conséquent de O est aisée.



Programme de construction :

La construction du carré $ABCD$ est identique à la méthode I, ainsi que la construction classique **(P)**.

Maintenant pour construire le cercle $\mathcal{C}(O,T)$ il suffit de construire les points T, puis P et finalement O comme suit :

1) $T \coloneqq \mathcal{C}(A,B) \cap (AC)$;

2) $E \coloneqq \mathcal{C}(B,D) \cap (AB)$;

3) $F \coloneqq \mathcal{C}^*(A,E) \cap (AB)$;

4) $P \coloneqq \mathcal{C}^*(F,A) \cap (AB)$;

5) $\mathcal{D} \coloneqq (AP)^{\perp P}$ en utilisant **(P)** ;

6) $O \coloneqq \mathcal{D} \cap (AC)$;

7) $\mathcal{C}(O,T)$ est le cercle recherché.