M62 Ex 0 $\quad I =]x_-, x_+[$

$-\infty \leq x_- \leq x_+ \leq \infty$

a) Trouver ttes les soluΘs de classe C^1 de
$y' = 0$ sur I.

$E = \{ \underbrace{t \in I \longmapsto c : c \in \mathbb{R}}_{F} \}$

$F \subset E$ car si $f(t) = c$,
on a $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{c - c}{h} = 0$

Donc $f \in E$.

- Réciproqmt, soit $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$
soit $y \in E$

Par identité des accroissements finis,
on a $y(t_1) - y(t_2) = \underbrace{y'(s)}_{0 \text{ car } y \in E} (t_2 - t_1)$ pr $s \in]t_1, t_2[$

Donc $y(t_2) = y(t_1)$ dc $y \in F$.

On pose $B(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\, dt$ où $x_0 \in I$.

$B \in E$ car $B' = b$.

$\dfrac{B(x+h) - B(x)}{h} = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} b(t)\, dt$

$= \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} b(x)\, dt + \underbrace{\dfrac{1}{h} \int_x^{x+h} \underbrace{[b(t) - b(x)]}_{|\cdot| \leq \varepsilon |t-x|} dt}_{\leq \varepsilon(|h|) \xrightarrow[h \to 0]{} 0}$

$\varepsilon \nearrow$ & $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ (b continue)

Donc $\dfrac{B(x+h) - B(h)}{h} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} b(x)$

$\forall c \in \mathbb{R}$, $B + c \in E$

Réciprqt, soit $y \in E$: $(y - B)' = y' - B' = b - b = 0$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$, $y = c + B$.

$E = \{ B + c, c \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{C}(I,]0,\infty[)$

$\tilde{a}y' + \tilde{a}y \quad (\tilde{a}y)' = b$

Posons $z = ay$, $y \in E \Leftrightarrow z' = b \quad \forall t \in I.$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, z(t) = c + B(t)$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{1}{a(t)}(c + B(t)) \forall t \in I.$

- soit $a \in \mathcal{C}(I)$,

on note A une primitive de a.

Solu° sur I de $y' + ay = 0 \quad (*)$

Rq: $\left(e^{A(t)}\right)' = A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)}$

$(*)e^A: \quad e^A y' + (e^A)' y = 0 \quad$ car e^A jamais nul

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tq $e^A y = c$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \; y(t) = ce^{-A(t)} \quad \forall t \in I$

$= ce^{-\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$

$E = \{t \in I \mapsto ce^{-A(t)} : c \in \mathbb{R}\}$

- $a, b \in \mathcal{C}(I)$, A primitive de a

solu° de $y' + ay = b. \quad (\square)$

$\rightarrow$ On résout d'abord le pb homog° associé

$(*) \quad y' + ay = 0$

$E_h = \{y_c : t \mapsto c.e^{-A(t)}, c \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$ si on a une solu° de $(\square)$ $\hat{y}$. Pr tte autre solu°, on a par soustraction : $(y - \hat{y})$ solu° de $(*)$.

$E = \hat{y} + E_h = \{\hat{y}_c : t \mapsto \hat{y}(t) + c.e^{-A(t)} : c \in \mathbb{R}\}$

Espace affine

$\mathbb{R} \to E_h$ appli injective
$c \mapsto y_c$
droite vectorielle

$\mathbb{R} \to E$
$c \mapsto \hat{y}_c = \hat{y} + ce^{-A}$
Espace affine.

$\rightsquigarrow$ Pour trouver une solu° $\hat{y}$, on la calcule ss la forme $\hat{y}(t) = z(t)\,e^{-A(t)} \quad \forall t \in I$

$\hat{y}$ solu° de $(\square) \Leftrightarrow z'e^{-A} + z\underbrace{\left[(e^{-A})' + ae^{-A}\right]}_{\text{car solu° pb homog°}} = b(t)$

$\Leftrightarrow z'(t) = b(t)e^{A(t)} \quad \forall t \in I$.

$\Leftarrow z(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)} ds = \hat{z}(t)$

<u>Ccl</u> $\hat{y}(t) = \hat{z}(t) e^{-A(t)}$ soluθ de $(\square)$.

<u>Ex 3</u> : Trouver la soluθ à $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y' = |y| + |t| \end{cases}$

Soit y soluθ pb de Cauchy, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y' = |y| + |t| \end{cases}$ (PC)

<u>Rq</u> : $\dot{y} = |y| + |t| \geq |t|$ donc y est $S^T \nearrow$ sur son intervalle de déf°.

Comme $y(0) = 0$, on a $\begin{cases} y(t) < 0 & \text{pour } t < 0 \\ y(t) > 0 & \text{pr } t > 0. \end{cases}$

Posons $\check{y}(t) = -y(-t)$; $\check{y}$ est aussi soluθ du (PC).

- $\check{y}(0) = -y(-0) = 0$
- $\check{y}'(t) = y'(-t) = |y(-t)| + |-t| = |\check{y}(t)| + |t|$

$E_h = \{ c e^t : c \in \mathbb{R} \}$ et solθ part : $t \mapsto -t-1$

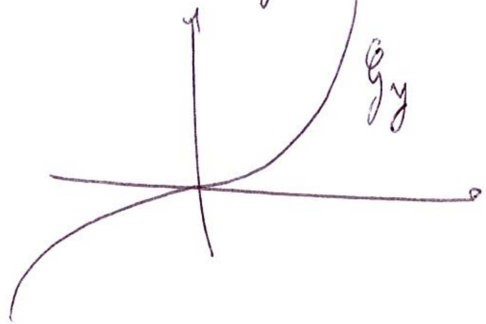
$E = \{ -t-1+ce^t, \ c \in \mathbb{R} \}$

$-0-1+ce^0 = 0$
$-1+1 = 0$.

La seule qui vérifie $y(0) = 0$

$y(t) = e^t - (1+t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ pour $t \geq 0$.

y est impaire dc $y(t) = -e^{-t} + (1-t)$ pr $t < 0$



Ex 1 PC $\begin{cases} \dot{y} = |y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\dot{y} = f(y)$ pb autonome.

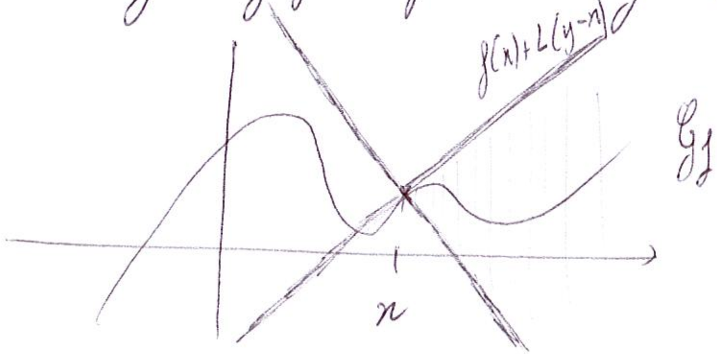
$\frac{f(y)}{y} = |y|^{-1/3} \xrightarrow[\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}]{} \infty$

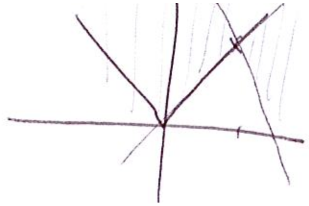
Pour $\varepsilon > 0$, $\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \varepsilon^{-1/3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$

Donc f n'est pas lipschitz.

$|f(y) - f(x)| \leq L\,|y - x|$

$f(x) - L|y-x| \leq f(y) \leq f(x) + L\,|y-x|$





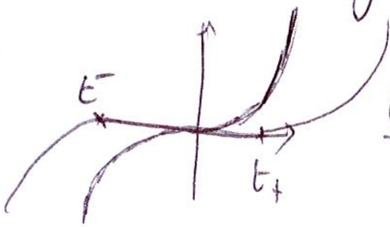
Dans l'ex 4, 2) le Th de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas.

1) Mq f $y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$ est soluθ du pb.

$y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$. On a bien $y(0) = \frac{0^3}{3} = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}\left(\frac{t}{3}\right)^2 = \left|\frac{t}{3}\right|^2 = \left|\left(\frac{t}{3}\right)^3\right|^{2/3}$

$= |y(t)|^{2/3}$.



$\frac{(t-t_+)^3}{3}$

Famille de soluθ : $\{ y_{t_-, t_+} : -\infty \leq t_- \leq 0 \leq t_+ \leq \infty \}$

$y_{t_-, t_+} = \begin{cases} \left(\frac{t - t_-}{3}\right)^3 & \text{pour } t < t_- \\ 0 & \text{si } t_- \leq t \leq t_+ \\ \left(\frac{t - t_+}{3}\right)^3 & \text{pour } t > t_+ . \end{cases}$

$y_{\infty,\infty} = 0$.

4

Ex5 (ED)$^{5.1}$ $\underbrace{(1+t+t^2)y' + (2t+1)y}_{[(1+t+t^2)y]'} = (1+t+t^2)^2$

& ci $y(0)=0$.

1) Ecrire (PC) ⟷ (ci) équa°

$$(PC)\quad \begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{array}{l} F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,y) \mapsto F(t,y) \text{ cont.} \end{array}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2t+1}{1+t+t^2}\, y + 1+t+t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2) En posant $z(t) = (1+t+t^2)y(t)$ trouver sol° particulière.

On a $z'(t) = (1+2t)y + (1+t+t^2)y'$

y solu° de 5.1 $\overset{\forall t}{\Longleftrightarrow}$ $z' = (1+t+t^2)^2 = 1+2t+3t^2+2t^3+t^4$.

$\overset{\forall t}{\Longleftrightarrow}$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $z(t) = c + t + t^2 + t^3 + \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^5}{5}$.

y sol° du (PC) $\Longleftrightarrow \begin{cases} y \text{ sol° de } (5.1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \forall t : z(t) = t + t^2 + t^3 + \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^5}{5}$

On a la solu° au pb de Cauchy.

$$y(t) = \frac{t + t^2 + t^3 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5}}{1+t+t^2}$$ définie sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\exists!\ \text{le (TH) de Cauchy-Lipschitz s'appliq : c'est la seule solu°.}}$

Ex 8 : soit $f :]a,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable tq

$f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell$.

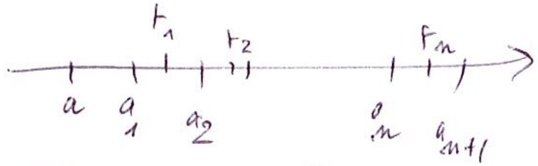
(Mq) $\exists\ (t_n) \longrightarrow \infty$ tq $f'(t_n) \longrightarrow 0$.

$a_n := a + n$ pour $n \geq 1$.

f est cont & dérivable sur $[a_n, a_{n+1}]$, $\forall n \geq 1$;

P/ I Accrs^t Finis $\exists\ t_n \in]a_n, a_{n+1}[$ tq

$$f'(t_n) = \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = f(a_{n+1}) - f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell - \ell = 0$$



(Cor) si $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ cont dériv.

$f(t) \longrightarrow \ell_0$ $t \longrightarrow \infty$
$f'(t) \longrightarrow \ell_1$ $t \to \infty$ alors $\ell_1 = 0$.

si $\ell_1 > 0 \Rightarrow \exists A, \forall t \geq A,\ f'(t) \geq \dfrac{\ell_1}{2}$.

Pour $t \geq A$, $f(t) = f(A) + \displaystyle\int_A^t \underbrace{f'(s)}_{\geq \frac{\ell_1}{2}}\, ds \geq f(A) + \frac{\ell_1}{2}(t-A)$

$= f(A) - \dfrac{\ell_1 A}{2} + \dfrac{\ell_1 t}{2} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

si y solut° de $y' = f(y)$ sur $]a,\infty[$ et $f \in C(\mathbb{R})$

alors si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell$ alors $y'(t) = f(y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} f(\ell)$

par cont de f.

Donc $y' \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $f(\ell) = 0$.

(la q° 2) est de mq $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$).

(4) $f \in C^1(\mathbb{R})$

$\lim_{t\to\infty} (f(t) + f'(t)) = 0$

$$y'(t) + y(t) = 0$$

$q(t) := f(t) + f'(t)$ $\qquad e^t q(t) = (y.e^t)'$

$(ye^t)' = e^t q(t)$; $(ye^t) = y(0)e^0 + \int_0^t q(s)\, e^s\, ds$

$$\frac{ye^t}{e^t} = \frac{y(0)}{e^t} + \int_0^t e^{(s-t)} q(s)\, ds$$

$\to q$ est bornée sur $[0,\infty[$; $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$

Notons $M := \max_{[0,\infty[} |q|$, $\omega(t) = \max_{[t,\infty[} |q| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$|y(t)| \le |y(0)|e^{-t} + \int_0^{t/2} \underbrace{e^{s-t}}_{\le e^{-\frac{t}{2}}} \underbrace{|q(s)|}_{\le M} ds + \underbrace{\int_{t/2}^{t} e^{s-t} \underbrace{|q(s)|}_{\omega(\frac{t}{2})} ds}_{\le \omega(t/2)\, e^{-t} \int_{t/2}^{t} e^s ds \;\le\; \omega(\frac{t}{2})}$$

$\le M \cdot \frac{t}{2} e^{-t/2}$

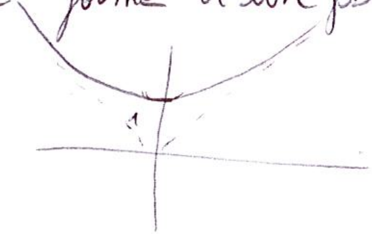
$\Rightarrow \forall t \ge 0,\ y(t) \le |y(0)|e^{-t} + M_0 \frac{t}{2} e^{-t/2} + \omega(\frac{t}{2}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$\boxed{M2}$ $|y(t)| \le |y(0)|e^{-t} + \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\, q(t-u)\, e^{-u}}_{\le M e^{-u}} du$ $\quad u = t-s$

$\longrightarrow 0$ par Th (CVD) Dominée de Lebesgue.

1) Dom ∃! sol globale (par ex (pc))

Ex 9 : Le pb s'écrit ss la forme d'un pb de Cauchy (autonome)



$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

et $f(s) = \sqrt{1+s^2} \underset{+\infty}{\sim} s(1 + \frac{1}{2s^2} + \dots) = s + \frac{1}{2s} + \dots$

paire →

soit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 < s_2$:

$\left| \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} \right| = |f'(\xi)|$ pr un $\xi \in]s_1, s_2[$

$\le \sup_{\mathbb{R}} |f'|$

Ici $f'(s) = \frac{|s|}{\sqrt{1+s^2}} \leq 1$.

Donc f est 1-lipschitzienne et le Th de Cauchy-Lipschitz global s'applique

$\Rightarrow \exists!$ solut maximale de (PC), définie sur $\mathbb{R}$.

($\approx$ globale

Résoudre $\begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\boxed{\text{autonome}}$

$y' = \sqrt{1+y^2}$ $\iff$ $\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1$

diviser intervalles $\neq 0$

si $g(s) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, G est une primitive de g.

$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \iff g(y)\cdot \dot{y} = 1$

$\iff \frac{d}{dt}\left[G(y)\right] = 1 \iff \operatorname{argsh}(y(t)) = c+t$, $c \in \mathbb{R}$.

$\iff y(t) = \operatorname{sh}(c+t)$

Primitive de $s \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$.

$$\int_0 \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\, ds \xrightarrow[ds = \cosh u\, du]{s = \sinh u} = \int_0 \underbrace{\frac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}}}_{=1}\, du$$

$= \operatorname{argsinh}(x)$

(PC) $\iff \exists\, c$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} y(t) = \operatorname{sh}(c+t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\iff y(t) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(1) + t)$

Ex6 On appelle solution du système différentiel

(6.1) $\begin{cases} x' = -4x - 2y + 2e^t \\ y' = 6x + 3y - 2e^t \end{cases}$ un couple (x,y) de fs C^1 sur $\mathbb{R}$ sol° de ce système.

1) Dmq l'ens solutions est un espace affine (quelle dimension ?)

C'est un système diff linéaire est dim 2 à coefs cte est à second membre cont. Si on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(6.1) $\iff X' + AX = B(x)$ (∗) où $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'ens des soluts de (6.1) est   & $\overline{Y}$: sol° particulière

$$E = \{ t \mapsto \overline{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 \ : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$$

$E = \overline{Y} + E_h$, $E_h = L(\mathbb{R}^2)$

où $L : Y_0 \mapsto (t \mapsto e^{-tA} Y_0)$

$L(Y_0)=0 \Rightarrow L$ injective, or L est linéaire.

Dc E_h est un $\mathbb{R}$-ev de dim 2.

Donc E est un espace affine de dimension 2.

2) Trouver une solut° particulière à ce système différentiel.

On cherche une solut° de la forme $\overline{Y}(t)=e^t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\overline{Y}$ sol° de $(*)$ $\Leftrightarrow e^t\left[\begin{pmatrix}1+\ 4a+2b\\ 6a-2b\end{pmatrix}\right]=e^t\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ $\forall t$

$\forall t \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overline{Y}(t)=e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ solut° parti.

3) Calculer toutes les solut°s de ce système différentiel.

Calculons $t\mapsto e^{-tA}$.

Diagonalisons A :

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda Id - A)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -8\\ 6 & \lambda+3\end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$$

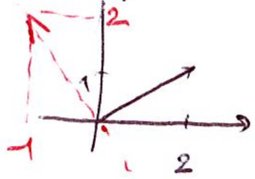
On a 2 Vp$_s$ simples 0 et 1 dc A est diagonalisable

& $A=P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ où $P=(e_0\ e_1)$

↳ $e_0, e_1\neq 0$ $\quad e_0\in Ker(A)$ $\quad e_1\in Ker(Id\ A)$

⚠ ici $\boxed{M}$ μ e_0,e_1 ds mat augmentée ne f pas ⑧ car $4x+2y$ " $-6x-3y$.

$4x+2y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$



$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\in Ker A$.

$Ker A=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; on prend $e_0=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$(A-Id)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=0\\ \cancel{-6x-4y}=0\end{cases}$

$Ker(A-Id)=\mathbb{R}e_1$ où $e_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}$

• $e^{-tA}=\sum_{n\geq0}\frac{1}{n!}(-tA)^n=\sum\frac{(-t)^n}{n!}A^n=\sum_{n\geq0}\frac{(-t)^n}{n!}PD^nP^{-1}$

$=P\left(\sum \frac{(-t)^n}{n!}D^n\right)P^{-1}$

$=P\left[Id+\sum_{n\geq1}\frac{(-t)^n}{n!}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}$

Or $E_h=\{t\mapsto e^{-tA}Y_0 : Y_0\in\mathbb{R}^2\}$

$=\{t\mapsto P\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}Y_0}_{Z_0} : Y_0\in\mathbb{R}^2\}$

$=\{t\mapsto P\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}Z_0 : Z_0\in\mathbb{R}^2\}$

ercice 2 1) Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = |t|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a $y' = f(t,y)$ with $f(t,y) = |t|^{2/3}$, or $\dfrac{f(t,y)}{y'} = |t|^{-1/3} \xrightarrow[t \neq 0]{t \to 0} \infty$ Voir corrigé

r $\varepsilon > 0$, $\dfrac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \varepsilon^{-1/3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$ Donc f n'est pas lipschitz.

(on n'a pas $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$)

Ainsi ce problème ne rentre pas dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. Si !

2) $y'(t) = |t|^{2/3} \iff \int_0^t y'(x)\,dx = \int_0^t |x|^{2/3}\,dx$

t est un réel,

$\iff y(t) - y(0) = \begin{cases} \frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$\iff \boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{3}{5}|t|^{5/3} & \text{si } t < 0. \end{cases}}$ car $y(0) = 0$ d'après l'énoncé.

Defraiteur
Maxence

M62 - Travail à la Maison

Exercice 1 :

il faut aussi montrer que il n'y a pas d'autres solutions de la forme e^{rt}.

1) Soit (E) $y''-2y'+y=0$, la solution de la forme $y(t)=e^{rt}$, r
en prenant $r=1$, cela convient car $e^t-2e^t+e^t=0$

2) Cherchons toutes les solutions de (E). Posons $y(x)=z(x)e^x$

$y'(x)=z'(x)e^x+z(x)e^x$ puis $y''=z''e^x+z'e^x+z'e^x+ze^x=e^x[z''+2z'+$

En remplaçant les expressions dans (E), on obtient :

$$y''-2y'+y=e^x[z''+2z'+z]-2[z'.e^x+ze^x]+ze^x \iff y''-2y'+y=e^xz''=$$

$$\iff z''(x)=0 \iff \int_0^x z''(t)\,dt=0 \iff z'(x)-z'(0)=0 \iff z'(x)=z'(0)$$

$$\iff \int_0^x z'(t)\,dt=xz'(0) \iff z(x)-z(0)=xz'(0) \iff z(x)=z(0)+xz'(0)$$

Ainsi comme $y(x)=z(x)e^x \iff y(x)=[z(0)+xz'(0)]e^x$

$$\iff y(x)=(k_1+xk_2)e^x \quad \text{tq } k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Defraiteur
Maxence

Ex 7

$$(7.1)\begin{cases} x' = 4x + 3y - 7 \\ y' = 3x - 4y + 1 \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(7.1) \iff X' + AX = B(t)$ $(*)$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & +4 \end{pmatrix}$

$B(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'ensemble des solutions de (7.1) est $E = \{ t \longmapsto \overline{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

$E = \overline{Y} + E_h$, $E_h = L(\mathbb{R}^2)$

Cherchons une solution particulière de la forme $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\overline{Y}$ solution de $(*) \iff e^t \begin{bmatrix} -4a - 3b \\ -3a + 4b \end{bmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t.$

$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Danger

Donc $\overline{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution particulière.

Calculons toutes les solutions de (7.1) en cherchant $t \mapsto e^{-tA}$.

Diagonalisons A : $P_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$

On a 2 valeurs propres simples 3 et -3, donc A est diagonalisable.

Et $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = (e_0 \ e_1)$ avec $e_0, e_1 \neq 0$

$e_0 \in \mathrm{Ker}(3Id - A)$

$e_1 \in \mathrm{Ker}(-3Id - A)$

On calcule e_0 et e_1 par la méthode de Laman :

$\left|\begin{matrix} -7 & -3 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \iff$ $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

$\left|\begin{matrix} -1 & -3 \\ -3 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \iff$ $\left|\begin{matrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ & $\left|\begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e^{-tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-tA)^n = \sum \frac{(-t)^n}{n!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} P D^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Gn $E_h = \{ t \mapsto e^{-tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \} = \{ t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Z_0 : Z_0 \in \mathbb{R}^2 \}.$

2

Ex 10 soit $ty' + y = 0$ $(*)$

1) Cette équatθ différentielle rentre-t-elle ds le cadre du Th de Cauchy-Lipschitz pour $t > 0$? $t \in \mathbb{R}$?

Pour $t > 0$, $(*)$ $y' = \frac{-y}{t} =: f(t,y)$.

$f \in \mathcal{C}(]0,\infty[\times \mathbb{R})$, or $|f(t,z_1) - f(t,z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{t}$

mais $\frac{|z_1 - z_2|}{t} \not\leq L |z_1 - z_2|$ $\forall t > 0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

f est L-Lipschitzienne est sa seconde variable sur $[\frac{1}{L}, \infty[\times \mathbb{R}$.

En effet pour $t \geq \frac{1}{L}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$|f(t,z_1) - f(t,z_2)| = \frac{1}{t} |z_1 - z_2| \leq L |z_1 - z_2|$.

ep $\forall$ Compact $K \subset]0,\infty[$, $f : K \times \mathbb{R}$ est Lipschitzienne en sa seconde variable de constante de Lipschitz $\frac{1}{\min K}$.

Le Th de Cauchy-Lipschitz local s'appliq :

$\forall t_0 > 0$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, $\exists !$ soluθ maximale (y, I)

où I intervalle, $t_0 \in I$, $I \subset]0,\infty[$.

tq $\begin{cases} y' = -\frac{1}{t} y & \text{sur } I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(\square)$

$I =]0,\infty[$.

soluθ maximale : ie si $(\tilde{y}, \tilde{I})$ est une autre solu de $(\square)$ alors $\tilde{I} \subset I$ et $\tilde{y} = y_{\tilde{I}}$.

Sur $\mathbb{R}$? si $t = 0$, $y = 0$ n'est pas (ED)

On n'a pas pb de Cauchy sr $\mathbb{R}$.

pas équatθ de la forme $y' = f(t,y)$.

Par contre, $t \mapsto 0$ est une soluθ sr $\mathbb{R}$.

2) Trouver toutes les soluθs déf sr un intervalle ouvert en t inclus dans $]0,\infty[$.

Rq $\forall \lambda : y_\lambda : t \mapsto \frac{\lambda}{t}$ est soluθ, c'est la seule soluθ tq $y_\lambda(1) = \lambda$.

y_λ est la soluθ du pb de Cauchy.

$\begin{cases} y' = -\frac{1}{t} y \\ y(1) = \lambda. \end{cases}$

$y'(t) + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} y(t) = 0$

A primitive de a, $\mathcal{C}$ $A(t) = \ln(t)$.

$(*)$ $e^{A(t)} y' + a(t) e^{A(t)} y = 0$

$\Leftrightarrow (e^{A(t)} y)' = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ e^{A(t)} y(t) = \lambda$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-A(t)} = \frac{\lambda}{t}$

3) Parmi ces solu°s lesquelles se prolongent à tout t ds $\mathbb{R}$?

$y_{\lambda^+}(t) = \frac{\lambda}{t}$, $y_\mu(t) = \frac{\mu}{t}$.

solu° sur $]0,\infty[$; solu° sur $]-\infty,0[$.

si $\lambda \neq 0$: $|y_{\lambda^+}| \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$

si $\mu \neq 0$ $|y^\mu(t)| \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$

si $\lambda = \mu = 0$, on a $y_\lambda = y_\mu = 0$.

0 est la solu° sur $\mathbb{R}$.

Démonstrat° Th de Cauchy-Lipschitz

soit $T_- < 0 < T_+$ et $I =]T_-, T_+[$,

soit $f \in C(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tq $\exists L \geq 0$ tq

$\forall t \in I,\ \forall y^1, y^2 \in \mathbb{R}^N : \|f(t,y^1) - f(t,y^2)\| \leq L\|y^1 - y^2\|$

Alors $\forall y_0 \in \mathbb{R}^N$, $\exists !$ solu° de

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \text{ sur } I \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ de

$\boxed{1}$

$y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ solu° (PC)

$\Leftrightarrow y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ tq $\forall t \in I$,

$$\boxed{y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds} \quad (\square)$$

Preuve $\boxed{1}$

$(\Leftarrow)$ si $y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ est solu° de $(\square)$ alors $y(0) = y_0 + \int_0^0 \ldots = y_0$.

et $y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ & $y'(t) = f(t, y(t))$

de y solu° C^1 de (PC).

$(\Rightarrow)$ Réciproq^t si $y \in C(I, \mathbb{R}^N)$ est solu° de (PC)

alors $\forall t \in I$, $y(t) = \underbrace{y(0)}_{= y_0} + \int_0^t \underbrace{y'(s)}_{= f(s, y(s))} ds$

de y solu° de $(\square)$.

On applique le Th du point fixe de Banach

soit $(B, \|\cdot\|)$ un e.v.n complet (un Banach)

soit $F : B \longrightarrow B$ une appli s^t contractante,

$\exists\, k \in [0,1[$ tq $\forall\, y_1, y_2 \in B$,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

alors $\exists !\, y \in B$ tq $F(y) = y$.

On pose $B = C(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ et $\forall y \in B$:

$$F(y) : t \longmapsto y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

y solut° de $(\square) \iff F(y) = y$.

$(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Pour $y \in B$, $\|y\|_B = \sup\{e^{-L|t|} \|y(t)\|, t \in \bar{I}\}$

soit

$$\phi : (B, \|\cdot\|_\infty) \longmapsto (B, \|\cdot\|_B)$$
$$z \longmapsto t \mapsto e^{L|t|} z$$

ϕ est linéaire et $\|\phi(z)\|_B = \sup\{e^{-L|t|} \underbrace{\|\phi(z)(t)\|}_{\|e^{L|t|} z(t)\|}, t \in \bar{I}\}$

$$\boxed{\|\phi(z)\|_B = \|z\|_\infty}$$

R

$\Rightarrow \phi$ est injective.

ϕ est une isométrie de $(B, \|\cdot\|_\infty)$ sur $(\Phi(B), \|\cdot\|_B)$.

$$\psi : (B, \|\cdot\|_B) \longrightarrow (B, \|\cdot\|_\infty)$$
$$y \longmapsto e^{-L|t|} y$$

est tq $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = Id_B$.

Donc ϕ est une isométrie bijective de $(B, \|\cdot\|_B)$ sur $(B, \|\cdot\|_\infty)$, comme $(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach, $(B, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach aussi

△ Mq $F : (B, \|\cdot\|_B) \to (B, \|\cdot\|_B)$ est strictement contractante.

$\rightarrow$ soit $y_1, y_2 \in B$ et $t \in [0, T^+]$,

$$\|F(y_1)(t) - F(y_2)(t)\|_{\mathbb{R}^N} \overset{\text{car } t \text{ fixé}}{=} \left\| \int_0^t f(s, y_1(s))\, ds - \int_0^t f(s, y_2(s))\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]\, ds \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\left\| \int_0^t \left[f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))\right] ds \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\le \int_0^t \underbrace{\| f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)) \|_{\mathbb{R}^N}}_{\le L \|y_1(s) - y_2(s)\|} ds$$

$$\| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N} \le L \int_0^t \| y_1(s) - y_2(s) \|_{\mathbb{R}^N} ds$$

Rq $\| y_1(s) - y_2(s) \| e^{-L|s|} \le \| y_1 - y_2 \|_B$.

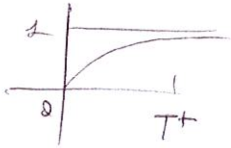
d'où $\| y_1(s) - y_2(s) \| \le \| y_1 - y_2 \|_B \, e^{L|s|}$

Donc $\| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N} \le \| y_1 - y_2 \|_B \underbrace{\int_0^t L e^{Ls} ds}_{= (e^{Lt} - 1)}$

soit $y_1, y_2 \in B$ et $t \in [0, T^+]$

$$\sup_{t \in [0,T^+]} e^{-Lt} \| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N}$$

$$\le \left[\sup_{t \in [0,T^+]} (1 - e^{-Lt}) \right] \| y_1 - y_2 \|_B$$



$$= (1 - e^{-LT^+}) \| y_1 - y_2 \|_B.$$

De même $\sup_{[T^-,0]} e^{-L|t|} \| F(y_1)(t) - F(y_2)(t) \|_{\mathbb{R}^N}$

$$\le (1 - e^{LT^-}) \| y_1 - y_2 \|_B$$

cl $\| F(y_1) - F(y_2) \|_B \le k \| y_1 - y_2 \|_B$

où $k = \max(1 - e^{-LT^+}, 1 - e^{LT^-}) \in]0,1[$

Par Th de point fixe de Banach, (E) admet une uniq solut°.

□

soit $f : \overset{\text{compact}}{I} \times \underset{\subset \text{ compact ds } \mathbb{R}^N}{K} \longrightarrow \mathbb{R}$

f bornée cont & tq

$$| f(t,y) - f(t,z) | \le L \| y - z \| \text{ où } L > 0$$

Posons pr $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^N$.

$$\tilde{f}(t,z) = \sup \{ f(t,y) - L \| y - z \| : y \in K \}.$$

• Mq $\tilde{f}(t,z) = f(t,z)$ si $y \in K$.

$\forall y \in K : f(t,y) - L\|y-z\| \leq f(t,z)$

car f L-lipschitz en y.

Donc $\tilde{f}(t,z) = \sup_{y \in K} f(t,y) - L\|y-z\| \leq f(t,z)$

$= f(t,z) - L\|z-z\|$

$\leq \tilde{f}(t,z)$.

Donc $\tilde{f}(t,z) = f(t,z)$

• $\tilde{f}$ est L-lipschitz en z, soit $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$.

soit $t \in I$, soit $y_1 \in K$ tq $f(t,y_1) - L\|y_1 - z_1\| \geq$

$\geq \tilde{f}(t,z_1) - \varepsilon$

On a $\tilde{f}(t,z_2) \geq f(t,y_1) - L\|y_1 - z_2\|$

$\geq \tilde{f}(t,z_1) + L(\|y_1 - z_1\| - \|y_1 - z_2\|) - \varepsilon$

$\rightsquigarrow \tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2) \leq L(\underbrace{\|y_1 - z_2\| - \|y_1 - z_1\|}_{\leq \|z_1 - z_2\|}) + \varepsilon$

On fait $\varepsilon \to 0$; on a $\tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2) \leq L\|z_1 - z_2\|$

En échangeant les rôles de z_1, z_2, on a

$|\tilde{f}(t,z_1) - \tilde{f}(t,z_2)| \leq L\|z_1 - z_2\|$

• $\tilde{f}$ est cont, $\tilde{f}(t,z) - \tilde{f}(s,z)$,

soit $s,t \in I$, $z \in \mathbb{R}^N$

(on prend $y \in K$ tq $\tilde{f}(s,z) \geq f(s,y) - L\|y-z\| - \varepsilon$

$\tilde{f}(t,z) \geq f(t,y) - L\|y-z\|$

$= [f(t,y) - f(s,y)] + \underbrace{f(s,y) - L\|y-z\|}_{\leq \tilde{f}(s,z) + \varepsilon}$

D'où $\tilde{f}(t,z) - \tilde{f}(s,z) \leq \sup_{y \in K} |f(t,y) - f(s,y)| + \varepsilon$

$f \in \mathcal{C}(I \times K)$

dc f est UN^t cont.

Donc $\xrightarrow[s \to t]{} 0$

Ex 4 : (EDO) $2y' = y\left(1 - \frac{3}{y^2+2}\right)$

1) Vérifiez (H) (Th) Cauchy-Lipschitz.

- $f \in C^1(\mathbb{R})$ dc f localement lipschitzienne
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2+x^2} + \frac{6x^2}{(2+x^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-6+3x^2}{(2+x^2)^2}\right)$

$f' \in C^0(\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \frac{1}{2}$ dc f' est bornée

dc f est lipschitzienne.

$f''(x) = \frac{1}{(2+x^2)^3}\left(6x(2+x^2) - 4x(-6+3x^2)\right) = \frac{1}{(2+x^2)^3}(-6x^3+36x - 6x(x^2-6))$

x		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
f''		0		0		0	
f'	$\frac{1}{2}$ ↗	$19/32$	↘	-1	↗	$\frac{19}{32}$	↘ $\frac{1}{2}$

cte de lipschitz ?
↓
chercher max $|f'|$

$f'(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{12}{8^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{16}\right) = \frac{19}{32}$

En fait f est 1 lipschitz.
Le (Th) de Cauchy-Lipschitz global s'applique.

2) Mq Ips maximal positif d'∃ des soluts $\forall t > 0$

↳ $\mathbb{R}$.

3) Mq $y(t)$ reste $\delta^T > 0$ $\forall t > 0$.

soit $y_0 > 0$ & y la solut° de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

soit $t \in \mathbb{R}$ tq $y(t) \leq 0$,

y cont & $y(0) > 0$ dc par TVI

$\exists\, t_*$ tq $y(t_*) = 0$ a ↳ $a \in \{-1, 0, 1\}$

cp y solut° de $\begin{cases} z' = f(z) \\ z(t_*) = 0 \ a \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$. (□)

Or 0 est solut° de (□) dc par unicité (donnée p (Th) (C-L)) on a $y(t) = 0$ $\forall t$.

Contra : $y(0) = y_0 > 0$!!

Conclusion $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) > 0$

Les soluts ctes sont les zéros de f. $y' = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$.
↳ $0, -1, 1$

• soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \lambda$ est solu de $y' = f(y)$

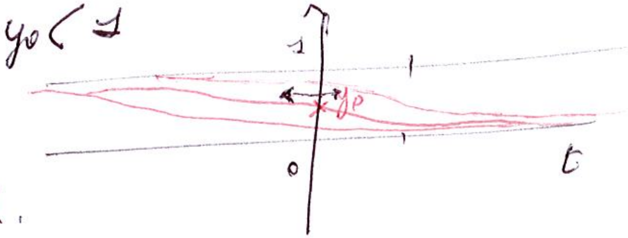
$\iff f(y) = 0$

$\iff \lambda \in \{-1, 0, 1\}$

si $0 < y_0 < 1$

$\forall t \Downarrow$

$0 < y(t) < 1$.



$\rightarrow$ si $y_0 > 1 \Rightarrow \forall t$, $y(t) > 1$.

• si $0 < y_0 < 1$ alors $\forall t \in]0, 1[$

on a $y' = f(y) < 0$ car $0 < y(t) < 1$.

y	0		1		∞
$f(y)$	0	$\ominus$	0	$\oplus$	

Donc y est décroissante S^T sur $\mathbb{R}$ et $0 < y < 1$.

(R) si $z : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante.

si z est majorée et $\exists \ell$ tq $z(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \ell$

sinon $z(t) \longrightarrow \infty$ qd $t \to \infty$.

Ici $y : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$ est $\searrow$. Dc $\exists \ell^- \in [y_0, 1]$

tq $y(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \ell^-$.

$\exists \ell^+ \in [0, y_0]$ tq $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \ell^+$.

$\rightarrow$ $\forall t$: $y'(t) = f(y(t))$ et f cont dc $y'(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} f(\ell^\pm)$

(R) si $y \longrightarrow \ell$, $y' \longrightarrow \ell_1$ en ∞ alors $\ell_1 = 0$

Donc $f(\ell^+) = f(\ell^-) = 0 \Rightarrow \ell^+, \ell^- \in \{-1, 0, 1\}$

Or $\ell^+ \in [0, y_0] \subset [0, 1[$ dc $\ell^+ = 0$

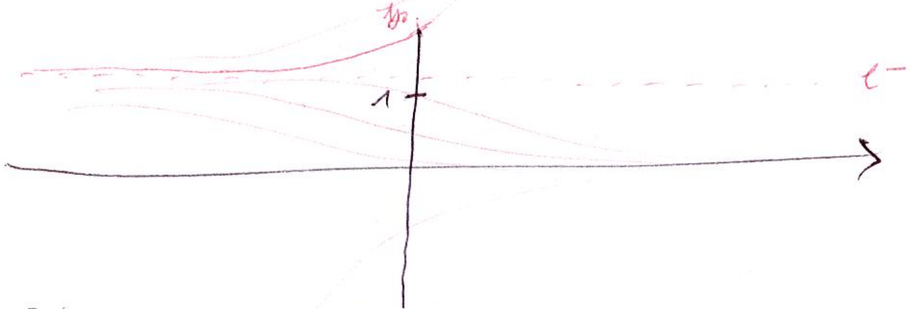
et $\ell^- \in [y_0, 1] \subset]0, 1]$ dc $\ell^- = 1$.

• Si $y_0 > 1 \Rightarrow \forall t,\ y(t) > 1$ &

dc $y'(t) = f(\underbrace{y(t)}_{>1}) > 0$

$y \nearrow$ sur $\mathbb{R}$, $y(t) > 1\ \forall t$ dc $\exists\, \ell^- \in [1, y_0]$

tq $y(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \ell^-$



D'où $y'(t) = f(y(t)) \xrightarrow[\infty]{} f(\ell^-)$ p cont de f.

Donc $f(\ell^-) = 0$ dc $\ell^- \in \{-1, 0, 1\}$. Or $\ell^- \geq 1$.

Dc $\ell^- = 1$. $\lim\limits_{-\infty} y = 1$.

• En $+\infty$, 2 possibilités (a) $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

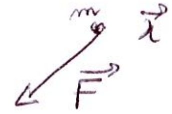
(b) $\exists\, \ell_+ \geq y_0 > 1$ tq $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \ell^+$, ds ce cas comme précédemment, on aurait $f(\ell^+) = 0$ dc $\ell^+ \in \{-1, 0, 1\}$

Impo car $\ell^+ > 1$

ccl $\lim\limits_{\infty} y(t) = \infty$.

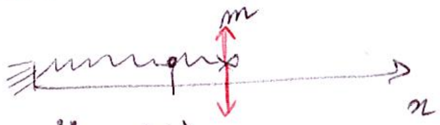
Ex 12 Contexte historiq : Newton

$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$ Relat° Fondamentale



$\vec{F_g} = -\frac{GMm}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$

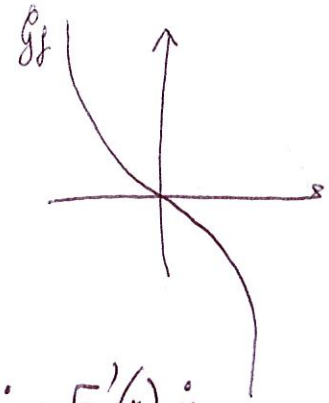
Ressort



$\underbrace{m\ddot{x}}_{} = f(x)$

force exercée p ressort

$f = F'$



$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \underbrace{F(x)}_{\text{énergie potentielle du ressort.}}}_{E(t) = E(0)}\right] = m\dot{x}\ddot{x} + F'(x)\dot{x} = \dot{x}(\underbrace{m\ddot{x} + F'(x)}_{=0})$ p RFD.

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F(x) = E(0)$

$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E(0) - F(x)\right]} = G(x)$

Dans le cas +, $\frac{\dot{x}}{G(x)} = \pm 1$.

$u = x(t)$

$du = x'(t)\,dt$

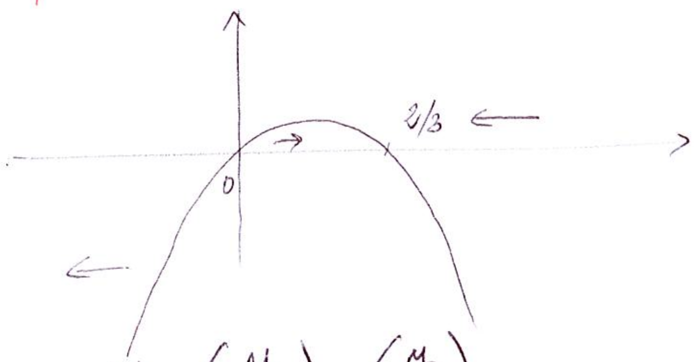
$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{G(u)} = t \Rightarrow H(x(t)) - H(x(0)) = t$$

où $H' = \frac{1}{G}$.

y de classe C^2.

$$(PC) \begin{cases} \ddot{y} = 4y - 6y^2 = 6y\left(\frac{2}{3} - y\right) \\ y(0) = 1 \text{ et } \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

4) Dmq $\exists!$ solut° à ce pb.



Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, et $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

y solut° de (PC) $\Leftrightarrow \{ Y' = F(Y)$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 4y - 6y^2 \end{pmatrix}$

$$(PC) \Leftrightarrow (PC') \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\boxed{F \text{ est } C^1} \Rightarrow$ localement lipschitzienne.

$$\|F(Y) - F(\tilde{Y})\|_2 \leq C \|Y - \tilde{Y}\|_2, \quad \forall\, Y, \tilde{Y} \in \overline{B(0,R)}$$

où $C = \max |||Df(Y)|||_2 \in \overline{B(0,R)}$.

DM $F(Y) - F(\tilde{Y}) = \phi(1) - \phi(0)$ où $\phi(t) = F((1-t)Y + t\tilde{Y})$

$= Y + t(\tilde{Y} - Y)$

$$= \int_0^1 \phi'(s)\,ds = \int_0^1 Df((1-s)Y + s\tilde{Y})(\tilde{Y} - Y)\,ds.$$

$$\|F(Y) - F(\tilde{Y})\|_2 \leq \int_0^1 \underbrace{|||Df((1-s)Y + s\tilde{Y})|||_2}_{\leq C} \|Y - \tilde{Y}\|_2\, d$$

$$= C.\|Y - \tilde{Y}\|$$

$\exists ? L$ tq $\forall y, z \in \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$$

où $f(y) = 4y - 6y^2$

Faux car f n'est pas bornée.

... maximale & $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ soluθ maxo de (PC') sur I.

si $\tilde{Y} \in C^1(\tilde{I}, \mathbb{R}^2)$ autre soluθ alors $\tilde{I} \subset I$ et $\tilde{Y} = Y_{/\tilde{I}}$.

(soluθ maximale : (y, I))

2) Mq f $t \mapsto y(t)$ est paire.

$\boxed{\text{(dérivée } f \text{ paire)} = f \text{ impaire.}}$

soluθ uniq ← a ttes sym du pb de départ.

cette soluθ hérite de ttes les symétries du pb.

Posons $\check{y}(t) := y(-t)$ pour $t \in -I$.

Mq $\check{y}$ soluθ de $(\star)$ (PC)

- Données initiales:
  - $\check{y}(0) = y(-0) = 1$ ✓
  - $\check{y}'(0) = -y'(-0) = 0$ ✓

On a $\forall t \in -I$, $\check{y}'(t) = -y'(t)$

et $\check{y}''(t) = y''(-t)$

D'où $\forall t \in -I$, $\check{y}''(t) = y''(-t) = f(y(-t)) = f(\check{y}(t))$ ✓

Donc $(\check{y}, -I)$ est soluθ de $(\star)$

Comme y est l'uniq solθ maximale de $(\star)$, on a :

$-I \subset I$, $I =]-t_-, t_+[$, $-I =]-t_+, t_-[$, $t_-, t_+ > 0$

$-I \subset I \Rightarrow -t_- \leq -t_+$ et $t_- \leq t_+$

$t_- \geq t_+$

$-I \subset I \Rightarrow -I = I$

et $\check{y}(t) = y(-t)$, $\forall t \in I$.

Donc $y(-t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

3) Dmq $y'^2 = 4y^2(1-y)$

On a $y'' = 4y - 6y^2$, multiplions par y'.

$y''y' = 4yy' - 6y^2y'$

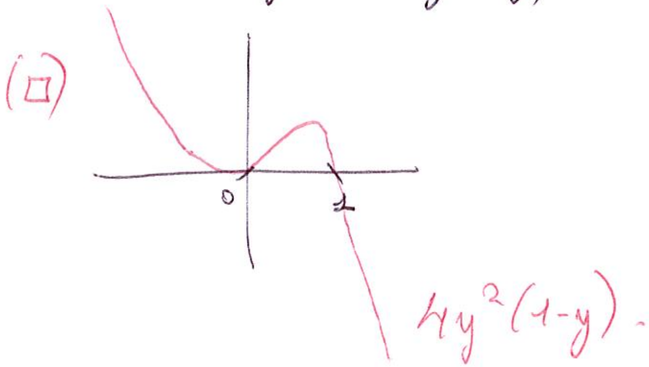
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'^2}{2}\right) = 2\frac{d}{dt}(y^2) - 2\frac{d}{dt}(y^3)$$

Donc $\forall t \in I$ $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(y'^2 - 4y^2 - 4y^3\right)}_{E(t)} = 0$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(y'^2-4y^2+4y^3\right)}_{E(t)}=0$$

$\forall t,\ E(t)=E(0)=y'^2(0)-4y^2(0)+4y^3(0)=0-4+4=0.$

Donc $\forall t\in I:\ y'^2=4(y^2-y^3)=4y^2(1-y)$



4) Dmq la solu° $\exists$ pr tout tps, qu'elle vérifie $0<y\leq 1$.

$\forall t\in I,\quad 4y^2(1-y)=y'^2\geq 0 \Rightarrow y\leq 1\quad \forall t.$

Sppos $\exists t^*\in I$ tq $y(t^*)\leq 0$,

comme $y(0)=1>0$. Par TVI, $\exists \bar{t},\ y(\bar{t})=0$.

Par $(\square)$, on a aussi $y'(\bar{t})=0$

Donc y est solu° de ...

$$(PC')\begin{cases} y''=f(y)\\ y(\bar{t})=0,\ y'(\bar{t})=0.\end{cases}$$

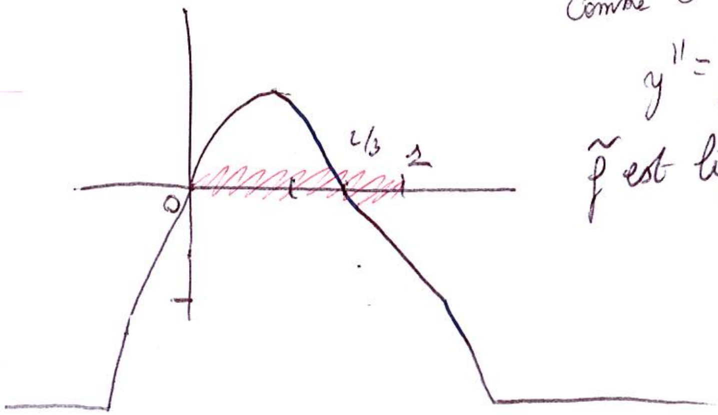
$f(0)=0.$

Or 0 est solu° de (PC').

Par unicité, on a $y\equiv 0$, ce q contredit $y(0)=1$.

Ccl : $\forall t\in I,\ 0<y(t)\leq 1$.

$$\tilde{f}(y)=\begin{cases} f(y) & \text{si } y\in[0,1]\\ & \text{si } y>2\\ -10 & \text{si } y<-1\end{cases}$$



Comme $0<y\leq 1$, on a $y''=\tilde{f}(y)$ sur I.

$\tilde{f}$ est lipschitz

Le Th de Cauchy-Lipschitz global s'appliq à

$$(\widetilde{PC})\begin{cases} Y'=\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix}'=\tilde{F}(Y):=\begin{pmatrix} z\\ \tilde{f}(y)\end{pmatrix}\\ Y(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

… solu° maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Si on note $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ cette solu° :

$\exists\ -\infty \leq T^- < T^+ \leq +\infty$ tq $T^- = \max\{t<0,\ \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$.

$T^- = \sup\{t<0,\ \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$

$T^+ = \inf\{t>0,\ \tilde{y}(t) \notin [-1,2]\}$

Conventⁿ : $\sup\emptyset = -\infty$, $\inf\emptyset = +\infty$

$\tilde{f}(\tilde{y}(t)) \neq f(\tilde{y}(t))$.

On a $\tilde{y}$ est solu° de $(*)$ sur $]T^-, T^+[$.

Et donc on a $0 \leq \underset{= y}{\tilde{y}} \leq 1$ sur $]T^-, T^+[$.

si $T^- > -\infty$, par continuité de $\tilde{y}$, $\exists\ \varepsilon > 0$ tq $\tilde{y}(t) \in [-1,2]$ sur $]T^- - \varepsilon, T^+[$.

Cela contredit la déf de T^-.

(En effet on aurait $\tilde{f}(\tilde{y}) = f(\tilde{y})$ sur $]T^- - \varepsilon, T^+[$ ce q̃ est faux)

Ccl $T^- = -\infty$ et $T^+ = +\infty$ et $y = \tilde{y}$.

VI.2 Thᵐ d'explosion

si $F : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, U ouvert de $\mathbb{R}^N$, I intervalle ouvert, $U, I \neq \emptyset$, $F \in C(I \times U)$ & localem^t lipschitzienne p/r sa seconde variable.

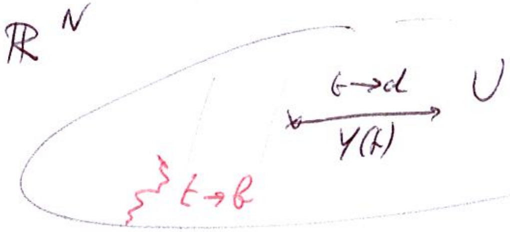
Soit $(t_0, Y_0) \in I \times U$ et (Y, J) la solu° maximale de $\begin{cases} Y' = F(t,Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$.

si $I =]a,b[$ et $J =]c,d[$

alors $d < b \Rightarrow \|Y(t)\| + \dfrac{1}{\delta(Y(t))} \longrightarrow \infty$

où $\delta(Y) = \dfrac{1}{d(Y, \partial U)}$ si $\partial U \neq \emptyset$.

si $U \neq \mathbb{R}^N$



Ici $Y(t) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ f(y) \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $\uparrow t$

on a $0 \leq y \leq 1$, ← évalué en 2/3

$z^2 = y'^2 = 4(y^2 - y^3) \in [0, \frac{16}{27}]$ sur I.

D'où $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} \leq z \leq \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{cases}$ savoir que y et z st bornés..

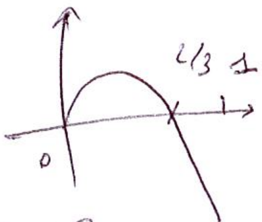
Donc $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ est borné sur I & TE d'explosion $I = \mathbb{R}$.

Résumé y définie sur $\mathbb{R}$, y paire $0 \leq y \leq 1$

et $y'^2 = 4y^2(1-y)$.

Mq $\forall t > 0$, $y'(t) < 0$, on a $y'(0) = 0$

et $y''(t) = +6y\left(\frac{2}{3} - y\right)$



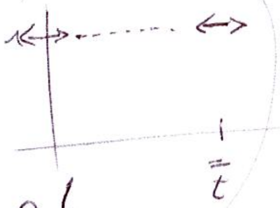
en 0 $\quad y''(0) = -2 < 0$

Donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $y' < 0$ sur $]0, \varepsilon[$.

$6y(0)\left(\frac{2}{3} - y(0)\right) = 6\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -2 < 0$

$\forall$ ... $0 = 4y^2(\bar{t})(1-y(\bar{t}))$

Par $(\square)$, $0 = 4\underbrace{y^2(\bar{t})}_{>0}(1 - y(\bar{t}))$



Donc $y(\bar{t}) = 1$.

(Par unicité : $y(t) = y(t - \bar{t})$)

Prenons $\tilde{t} = \min \underbrace{\{\bar{t} \geq \varepsilon,\ y'(\bar{t}) = 0\}}_{\text{fermé (nv)}} \subset [\varepsilon, +\infty[$.

On a $y(\tilde{t}) = y(0) + \int_0^{\tilde{t}} \underbrace{y'(s)}_{<0}\, ds$

$< y(0) = 1$

Par $(\square)$, $y'^2(\tilde{t}) = 0 = 4\underbrace{y^2(\tilde{t})}_{>0}(1 - y(\tilde{t})) \Rightarrow y(\tilde{t}) =$

$\Rightarrow$ contredit $y(\tilde{t}) < 1$.

et $y' < 0$ sur $]0, \infty[$.

... $0<y<1$.

D'où $y'(t) = -2y(t)\sqrt{1-y(t)}$

$$\frac{y'(t)}{y(t)\sqrt{1-y(t)}} = -2 \quad , \quad \int_0^t \frac{y'}{y\sqrt{1-y}}\,dy$$

$u=y(t)$
$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{du}{u\sqrt{1-u}} = -2t$$

$u \neq 0,\ u \neq 1$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-u}} = -2\int \frac{1}{1-s^2}\frac{s}{s}\,ds \qquad s=\sqrt{1-u} \iff u = 1-s^2 \qquad ds = -\frac{1}{2}\frac{du}{s}$$

$$= -2\,\mathrm{argth}(s)$$

D'où $\mathrm{argth}\left(\sqrt{1-y(t)}\right) - \underbrace{\mathrm{argth}\left(\sqrt{1-1}\right)}_{=0} = t$.

$y(t) = 1 - \mathrm{th}^2(t)$

... f^n de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ soluts de $y''+2y'+y = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

L'ensemble des soluts du pb homog est un espace vectoriel de dim 2.

Soit y_1, y_2 une base de soluO. On pt chercher une soluO du pb à second membre ss la forme $y(t) = a_1(t)\,y_1(t) + a_2(t)\,y_2(t)$, en supposant $d+$: $a_1'(t)\,y_1(t) + a_2'(t)\,y_2(t) = 0$.

Équat caractéristiq : $r^2+2r+1=0$
$(r+1)^2 = 0$.

-1 est racine double, une base de soluO est (y_1, y_2)
à $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = t e^{-t}$

On cherche une soluO particulière sur $]-\infty,0[$ et une sur $]0,\infty[$

On cherche une soluO sur $]0,\infty[$ ss la forme
$y(t) = a_1(t)\,e^{-t} + a_2(t)\,t e^{-t}$

à $a_1'(t)\,e^{-t} + a_2'(t)\,t e^{-t} = 0$

Defruiteur
Maxence

Travail à la Maison n°2 :

Bien -

Exercice 14 :

1) (SD) $\begin{cases} x' = x+y+e^t \\ y' = x+y-e^t \end{cases}$

On pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (SD) $\iff Y' + A.Y = B(t)$ avec • $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

• $B(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les solutions sont de la forme : $E = \{ t \longmapsto \overline{Y}(t) + e^{-tA} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$.

$E = \overline{Y} + E_h$, $E_h = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2) Résolvons l'équation homogène associée à (SD) : E_h : $Y' + AY = 0$.

On prend $x = ae^t$, $y = b.e^t$; $x' = ae^t$, $y' = be^t$.

On injecte ces nouvelles expressions dans (SD) :

$$\begin{cases} ae^t - ae^t - be^t = e^t \\ be^t - ae^t - be^t = -e^t \end{cases} \iff \begin{cases} e^t(-b-1) = 0 \\ e^t(a+1) = 0 \end{cases} \underset{\uparrow}{\iff} \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

car $e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

?

On a donc obtenu $\overline{Y} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, la solution particulière.

Puis on cherche la forme de $e^{-tA} Y_0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$e^{-tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \frac{(-tA)^n}{n!} = Id + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-t^n}{n!} A^n \right), \text{ cherchons } A^n :$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

On démontre facilement par récurrence que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} = (-2)^{n-1} A.$$

D'où $e^{-tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-t^n}{n!} (-2)^{n-1} A \right)$. $= e^{-2t} A$.

On a donc bien explicité tous les éléments de E.

Exercice 15 : Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

1) Calculons B^n et C^n, calculons les premières puissances de B et C.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$,

on peut le prouver facilement par récurrence.

Puis pour $C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, par Dunford et en posant $D = Id$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

on a bien les hypothèses vérifiées $DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

$D+N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N+D$

D'où $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D : \text{diagonale}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N : \text{nilpotente}}$. ~~il faut ces~~

On a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Élevons C à la puissance n,

$$C^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

car N est nilpotente pour $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$.

$$C^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N = I + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D^{n-k} vaut toujours l'identité !

On sait que de manière générale : $e^{tA} = Id + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} A^n$.

À partir de B^n et C^n, on peut en déduire les expressions de e^{tB} et e^{tC}.

• $$e^{tB} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix} + Id$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1+(-1)^n)+1 & \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1-(-1)^n) \\ \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1-(-1)^n) & \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}(1+(-1)^n)+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & a+1 \end{pmatrix}$$

Defraiteur
Lorence

Travail à la Maison n°2

Suite exercice 15 :

- $$e^{tB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!}}_{b} + 1 & \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!}}_{a+1} \end{pmatrix}$$

Or $$a = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!} = e^t - 1 - e^{-t} + 1 = e^t - e^{-t}$$

$$b = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{n!} = e^t - 1 - e^{-t} - 1 = e^t - e^{-t} - 2$$

$$\Rightarrow e^{tB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} + 1 & e^t - e^{-t} - 2 \\ e^t - e^{-t} - 2 & e^t - e^{-t} + 1 \end{pmatrix}.$$

- $$e^{tC} = Id + \begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}}_{e^t - 1} & \sum_{k=1}^{m}\frac{nt^n}{n!} \\ 0 & \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}}_{e^t - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cancel{+1} & te^t \\ 0 & e^t \cancel{+1} \end{pmatrix} \quad ?$$

car $$\sum_{n\geq 1}\frac{nt^n}{n!} = \sum_{k=1}^{m}\frac{t^m}{(m-1)!} = \sum_{k=1}^{u}\frac{t^{u+1}}{u!} = t\sum_{k=1}^{u}\frac{t^u}{u!} = te^t.$$

2) Résoudre le système différentiel

$$(SD) : \begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases},$$

revient à résoudre les deux systèmes différentiels :

$$(SD_1) : \begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (SD_2) : \begin{cases} y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases}.$$

Soit $(SD_1) : \begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$, posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on veut résoudre

$Y' + B'Y = D(t)$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions est $E_1 = \{t \mapsto \overline{Y} + e^{tB} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$.

On n'a pas $e^{-tB'}$ car $B' = -B$ de la question 1).

Cherchons une solution particulière $\overline{Y}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$e^t \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -a & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_1 = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} + 1 & e^t - e^{-t} - 2 \\ e^t - e^{-t} - 2 & e^t - e^{-t} + 1 \end{pmatrix} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Soit $(SD_2) \begin{cases} y_3' = y_3 + y_4 \\ y_4' = y_4 + e^t \end{cases}$, on peut résoudre d'abord

indépendamment $y_4' = y_4 + e^t$ car elle ne dépend que de y_4.

On trouve une solution particulière évidente $y_4(t) = te^t$.

$(te^t)' - te^t = e^t$ car $e^t + te^t - te^t = e^t \Leftrightarrow e^t = e^t$.

En remplaçant $y_4 = te^t$ dans la première équation, on trouve facilement $y_3(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$.

(car $\left(\frac{1}{2}t^2e^t\right)' - \frac{1}{2}t^2e^t = te^t$ donne $te^t + \frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{2}t^2e^t = te^t$)

Donc $E_2 = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+e^t & te^t \\ 0 & 1+e^t \end{pmatrix} Y_0 , Y_0 \in \mathbb{R} \right\}$.

On a $y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}$.

$$y'(t) = a_1(t)(e^{-t})' + a_2(t)(te^{-t})'$$

$$y''(t) = a_1'(t)(e^{-t})' + a_2'(t)(te^{-t})' + a_1(t)(e^{-t})'' + a_2(t)(te^{-t})''$$

On a $y'' + 2y' + y = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)\big[\underbrace{y_i'' + 2y_i' + y_i}_{=0}\big] + a_1'(t)(-e^{-t}) + a_2'(t)(1-t)e^{-t}$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

D'où (*) $\begin{cases} -a_1' + (1-t)a_2' = \dfrac{e^t}{\sqrt{t}} \\ a_1' + t a_2' = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} a_2' = \dfrac{e^t}{\sqrt{t}}. \\ a_1' = -\sqrt{t}\, e^t. \end{matrix}}$

On pose $a_1(t) = -\int_0^t \sqrt{s}\, e^{s}\, ds$

$$a_2(t) = \int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{s}}\, ds.$$

$\boxed{y(t) = a_1(t)e^{-t} + a_2(t)te^{-t}}$ est $C^1([0,\infty[)$.

Vérifions que $y \in C^1([0,\infty[)$,

on a $y \in C([0,\infty[)$. Et $y(0) = 0$.

Pour $t > 0$, $y'(t) = \cancel{-\sqrt{t}} + e^{-t}\int_0^t \sqrt{s}\, e^{s}\, ds \cancel{+\sqrt{t}} + (1-t)e^{-t}\int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{s}}\, ds$

$\sim \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$y'(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2\sqrt{t}.$$

Donc $y \in C^1([0,\infty[)$ et $y'(0) = 0$.

mais $\dfrac{y'(t) - y'(0)}{t - 0} \sim \dfrac{2}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \infty$

y n'est pas 2 fois dérivable en 0.

(De même en $]-\infty, 0]$).

Ex 16

$$(SD)\begin{cases}\dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t-1}\\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t-1}\end{cases}$$

1) L'ens des solu⁰s forme un espace afine de dimension 2. $E = \{t \mapsto \overline{Y}(t) + e^{tA}Y_0, Y_0 \in \mathbb{R}^2\}$

$(SD) \iff \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \dfrac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$ (*)

où $A = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$. ① $\dot{X} = AX + B(t)$

2) On résout l'E_h $\xleftrightarrow{A}$ (*), l'ens des solu⁰s de E_h est $e^{tA}Y_0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^2$. Calculons e^{tA},

$A = \begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -6 & -3\end{pmatrix} = -A$, dc pr $n \geq 0$:

on voit le polynôme caract $X^2 + X = 0$ & Cayley-Hamilton

$$A^n = -(-1)^n A$$

Puis $e^{tA} = Id + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(tA)^n}{n!} = Id + \sum_{n\geq 1} \dfrac{t^n}{n!}A^n$

$$= Id - \left[\sum_{n\geq 1} \frac{t^n(-1)^n}{n!}\right] A$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - (e^{-t}-1)\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4(1-e^{-t}) & -2(1-e^{-t})\\ -6(1-e^{-t}) & 3(1-e^{-t})\end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix}-3+4e^{-t} & -2+2e^{-t}\\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t}\end{pmatrix}$$

ainsi l'ens des solu⁰s de l'E_h $\xleftrightarrow{A}$ est

$$S_0 = \left\{\begin{pmatrix}-3+4e^{-t} & -2+2e^{-t}\\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ensuite on cherche $\overline{Y}$.

Cherchons une solu⁰ particulière $Z(t)$ de la forme $e^{tA}W(t)$.

On a : $\dot{Z}(t) = Ae^{tA}W(t) + e^{tA}\dot{W}(t)$.

Donc Z est solu⁰ de (*) ssi

$\dot{Z} = AZ + B(t) \iff \cancel{Ae^{tA}W(t)} + e^{tA}\dot{W}(t) = Ae^{tA}W(t) + B(t)$

$\iff e^{tA}\dot{W}(t) = B(t) \iff \dot{W}(t) = e^{-tA}B(t)$ (A)

On calcule $e^{-tA} = Id + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-t)^n A^n}{n!} =$

$$= Id - \left[\sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n(-1)^n}{n!}\right] A = Id - (e^t - 1)A$$

Ex 16

(SD) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

Nous considérons le (SD) de deg 1 & de dim 2.

$$\dot{Y} = AY + B$$

& $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B(t) = \dfrac{1}{e^t - 1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il s'agit d'un système à coeff. cte & second membre défini et cont sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Nous devons donc considérer les 2 pbs distincts.

$(*_-)$ $\dot{Y} = AY + B$ sur I^-, $(*_+)$ $\dot{Y} = AY + B$ sur I^+

où $I^- =]-\infty, 0[$ et $I^+ =]0, \infty[$.

Les solutions maximales de $(*_-)$ (resp. $(*_+)$) st définies sr I_- (resp I_+) et forment un espace affine de dim 2. On a :

$$E_- = \{t \longmapsto \overline{Y}_-(t) + e^{tA} Y_{0-}, Y_{0-} \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E_+ = \{t \longmapsto \overline{Y}_+(t) + e^{tA} Y_{0+}, Y_{0+} \in \mathbb{R}^2\}$$

où $\overline{Y}_-$ (resp. $\overline{Y}_+$) est une solution particulière de $(*_-)$ (resp de $(*_+)$)

• Commençons par diagonaliser le système.

On a $\det(\lambda Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -6 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)$

A admet 2 vp distinctes 0 et -1, elle est dc diagonalisable

• $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker A \Leftrightarrow -2y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow \ker A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker(A + Id) \Leftrightarrow -3y_1 - 2y_2 = 0 \Rightarrow \ker(A + Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a dc $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

On calcule $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(\operatorname{com} P)^T} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

où $\operatorname{com} A = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Faisons le changement d'inconnue $Y = PZ$, $Z = P^{-1}Y$.

Y solution de $(*)$ sur I

$\Leftrightarrow \dot{Z} = P^{-1}\dot{Y} = P^{-1}AY + P^{-1}B$

$= P^{-1}APZ + P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}Z + \dfrac{1}{e^t - 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc Y solution de $(*)$ sur I :

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = 0 & \text{sur } I \quad (\alpha) \\ \dot{z}_2 + z_2 = \dfrac{1}{e^t - 1} & \text{sur } I \quad (\beta) \end{cases}$

Les solutions du pb homog sont

$z_1(t) = a$, $z_2(t) = be^{-t}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

On cherche une solut° particulière de (β) sur $I = I^-$ ou $I = I^+$ sous la forme

$$z_2(t) = b(t)e^{-t}.$$

On a $(\beta) \Leftrightarrow \dot{b}(t)e^{-t} \cancel{- b(t)e^{-t} + b(t)e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}$

$$\dot{b}(t) = \frac{e^t}{e^t - 1} \text{ sur } I.$$

On peut prendre $b(t) = \ln|e^t - 1|$.

En résumé les soluts de $(*-)$ sont

$$t \in I_- \longmapsto P\begin{pmatrix} a_- \\ b_- + \ln|e^t - 1| \end{pmatrix} \text{ pour } a_-, b_- \in \mathbb{R}.$$

$$= a_-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (b_- + \ln(1 - e^{-t}))\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ p } a_-, b_- \in \mathbb{R}.$$

Les soluts de $(*+)$ sont

$$t \in I_+ \longmapsto a_+\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (b_+ + \ln(e^t - 1))\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ p } a_+, b_+ \in \mathbb{R}.$$

NB R: $ch(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $sh(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ex 15 (Δ) $\dot{Z} = CZ + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$, Les soluts du pb homog associé à (Δ) st les fs $t \longmapsto c.e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + de^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Cherchons une solut° particulière de (Δ) $\boxed{MVC}$.

On cherche une solut° ss la forme $Z(t) = e^{tC}W(t)$

Z solut° de $(\Delta) \Leftrightarrow e^{tC}\dot{W}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \dot{W}(t) = e^{-tC}\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{W}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

Une primitive est $\overline{W}(t) = \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ t \end{pmatrix}$

On a sol° particulière :

$$\overline{Z}(t) = e^{tC}\,\overline{W}(t)$$

$$= -\frac{t^2}{2}e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix}$$

Dc sol° de (Δ) st

$$t \mapsto e^t\left[\begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dt + c \\ d \end{pmatrix}\right] \; c, d \in \mathbb{R}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^t - 1)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t-4 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^t-3 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+4 \end{pmatrix}$$

On a donc $(*') \Leftrightarrow \dot{W}(t) = \dfrac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix} 4e^t-3 & 2e^t-2 \\ -6e^t+6 & -3e^t+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8e^t-6-6e^t+6 \\ -12e^t+12+9e^t-12 \end{pmatrix}$

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{e^t-1}\begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2e^t}{e^t-1} \\ \dfrac{-3e^t}{e^t-1} \end{pmatrix}.$$

On a une primitive de $\dfrac{-3e^t}{e^t-1}$: $\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$

Et donc dans $e^{tA}W(t) = Z(t)$, on en déduit de $\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$

que $Z(t) = \begin{pmatrix} -3+4e^t & -2+2e^{-t} \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\ln|e^t-1| \\ -3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}.$

On ed finalement que l'ens des solutus de $(*)$ est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3+4e^{-t} & -2+2e^{-t} \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2\ln|e^t-1| \\ b\cancel{+}3\ln|e^t-1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$E \& D$ soit $f(t)$ f cont & bornée sr $\mathbb{R}$.

Soit (ED) : $\ddot{x} - x = f(t)$. $(*)$

1) Mq cette équat° admet au plus une solut° bornée sr $\mathbb{R}$.

$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(*) \Leftrightarrow \dot{Y} = \begin{pmatrix} y \\ x + f(t) \end{pmatrix} = F(t, Y)$.

$(*)$ ED à coef cte de d°2 & à 2nd mb cont.

$\Rightarrow$ Les solut°s st définies sr $\mathbb{R}$ & forment un espace affine de dim 2.

Notons E_h l'espace des solut°s au pb homog^{ue} $\ddot{x} - x = 0$.

Son équat° caractéristiq $\chi(r) = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$

χ a 2 racines distinctes -1 et 1 dc $y_-(t) = e^{-t}$, $y_+(t) = e^t$ forme une base de E_h.

• si y et $\tilde{y}$ st 2 solut°s bornées alors $z = y - \tilde{y}$ vérifie $\ddot{z} - z = (\ddot{y} - y) - (\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y}) = f - f = 0$

Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $z(t) = ae^t + be^{-t}$, or z est bornée.

Or $\lim_{t \to \infty} z(t) = \text{signe}(a) . \infty = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$

Donc $\underline{a = 0}$, de m̂ $\lim_{t \to -\infty} z(t) = \text{signe}(b) . \infty$

$\underline{\Rightarrow b = 0}$.

→ Cherchons une solut° particulière ss la forme

$y(t) = a_-(t)\, y_-(t) + a_+(t)\, y_+(t)$

& $\dot{a}_- y_- + \dot{a}_+ y_+ = 0$ $(**)$

On calcule :

$\dot{y}(t) = a_- \dot{y}_- + a_+ \dot{y}_+ + 0$

$\ddot{y}(t) = \underbrace{a_- \ddot{y}_- + a_+ \ddot{y}_+}_{\text{car } y_-,\, y_+ \text{ sol partic}} + \dot{a}_- \dot{y}_- + \dot{a}_+ \dot{y}_+$

$(*), (**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a}_- \dot{y}_- + \dot{a}_+ \dot{y}_+ = f \\ \dot{a}_- y_- + \dot{a}_+ y_+ = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -e^{-t} \dot{a}_- + e^{t} \dot{a}_+ = f \\ e^{-t} \dot{a}_- + e^{t} \dot{a}_+ = 0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a}_+ = \frac{1}{2} e^{-t} f(t) \\ \dot{a}_- = -\frac{1}{2} e^{t} f(t) \end{cases}$ $\quad (\square)$

Posons $a_+(t) = -\frac{1}{2} \int_t^{\infty} \underbrace{e^{-s} f(s)}_{|\cdot| \leq M. e^{-s}} ds$.

car $\frac{a_+(t+h) - a_+(t)}{h} =$

$= \frac{-1}{2h} \left(\int_{t+h}^{\infty} - \int_t^{\infty} e^{-s} f(s) ds \right)$

$= \frac{1}{2h} \int_t^{t+h} e^{-s} f(s) ds \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2} e^{-t} f(t)$

28

$a_-(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} e^{s} f(s) ds$

$y(t) = a_-(t) e^{-t} + a_+(t) e^{t}$ ainsi définie est solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Vérifions qu'elle est bornée.

Notons $M = \sup_{\mathbb{R}} |f| < \infty$.

$|a_+(t) e^{t}| \leq \frac{e^{t}}{2} \int_t^{\infty} M e^{-s} ds = \frac{M}{2}$.

De même $|a_-(t) e^{-t}| \leq \frac{M}{2}$. Donc $\|y\|_\infty \leq M$.

Ex 13 Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f cont, $S^T > 0$.
$y(t) \in C^2(\mathbb{R})$ et $(*)$ $\ddot{y} + q(t)y = 0$

1) Mq ens des soluθs S est ev de dim 2.

On pose $\boxed{z = \dot{y}}$, $y \in C^2$.

$\ddot{y} + q(t)y \iff Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ vérifie $\dot{Y} = F(t, Y)$

avec $F\left(t, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ -q \cdot y \end{pmatrix}$

$\boxed{\Rightarrow}$ si $z = \dot{y}$ et $y \in C^2$ soluθ de $(*)$
alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ & $\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -qy \end{pmatrix}$
et y soluθ de $(*)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ si $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C^1$ & vérifie $\dot{Y} = F(t, Y)$
alors $\dot{y} = z$ et $\dot{z} = -q(t)y$ de $y \in C^2$
et $\ddot{y} = \dot{z} = -q(t)y$ et y est soluθ de $(*)$.

On a $\dot{Y} = AY + B$. $\iff \dot{Y} = F(t, Y)$
& $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(t) & 0 \end{pmatrix}$ coef cont.

système linéaire homog de dim 2 à

Donc l'ens des soluθs est un ev de dim 2
Les soluθs maximales st définies sur $\mathbb{R}$
& forment un ev de dim 2.

$\boxed{M2}$ 1) $\boxed{\Leftarrow}$ soit $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$,
on a $(**)$ $\dot{Y} + A(t)Y = 0 \iff \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A(t)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0$
$\iff \begin{cases} \dot{y} - z = 0 \\ \dot{z} + q(t)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \dot{y} \\ \ddot{y} + q(t)y \end{cases} \iff z = \dot{y} \Rightarrow y \in C^2$ y soluθ de $(*)$

$\boxed{\Rightarrow}$ idem

$(**)$ est un (S) linéaire homog. à coeff cnts sur $\mathbb{R}$ &
de dim 2. $\Rightarrow$ les soluθs max st déf sur $\mathbb{R}$
& forment un ev de dim 2.

Pour $y \in S$, on note $Z(y) = \{t : y(t) = 0\}$

2) Mq si t pt d'accumulat° de $Z(y) \Rightarrow \dot{y}(t) = 0$.

D1 t pa si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists t_n \in Z(y) : 0 < |t - t_n| \leq \frac{1}{n}$.

D2 t pa de $Z(y)$ si $\forall \varepsilon > 0, (]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\setminus \{t\}) \cap Z(y) \neq \emptyset$.

t pa de $Z(y) \Leftrightarrow \exists (t_n)_{n \geq 1} \subset Z(y)$ tq

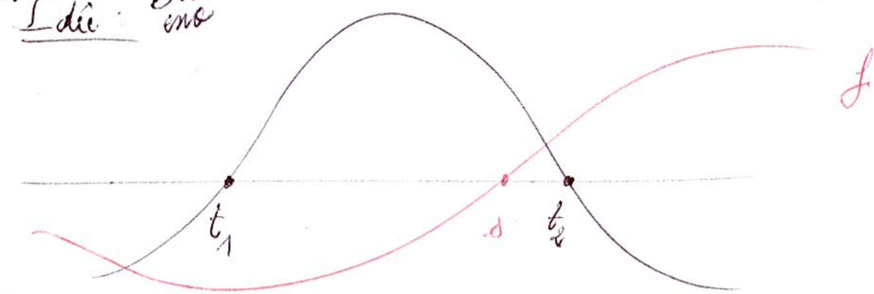
$$0 < |t - t_n| \leq \frac{1}{n},$$

$\Leftrightarrow \exists (t_n)_{n \geq 1} \subset Z(y)$ tq $(|t - t_n|)$

est S^T décroissante & $t_n \longrightarrow t$.

ef $\forall n \geq 1$, $t_{n+1} \neq t_n$.

Idée : But ino



3) Mq si $y \in S \setminus \{0\} \Rightarrow Z(y)$ n'a pas de point d'accumulat°.

2) soit $y \in S$ et t pa de $Z(y)$

▸ mq $t \in Z(y)$.

M1 $Z(y) = y^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$ fermé car y cont sr $\mathbb{R}$.

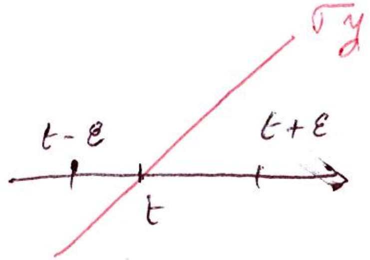
M2 soit $t_n \to t$ & $y(t_n) = 0$ par continuité de y, on a $y(t) = 0$, di $t \in Z(y)$.

▸▸ mq $\dot{y}(t) = 0$

M1 Sppt p contradic° que $\dot{y}(t) \neq 0$, par continuité de $\dot{y}$, $\exists \varepsilon > 0$ & $\sigma \in \{-1, 1\}$, $\sigma \dot{y} > 0$ sur $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$. Donc σy est $S^T \nearrow$ sr $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$

Comme $\sigma y(t) = 0$, on a : $\sigma y < 0$ pr $s \in]t-\varepsilon, t[$

$\sigma y > 0$ pr $s \in]t, t+\varepsilon[$



Contredit le fait que t pa de $Z(y)$.

M2 Par DL pr $s \neq 0$,

$$0 = y(t_m) = y(t + (t_m - t))$$
car $t_m \in Z(y)$

$$= y(t) + y'(t)(t_m - t) + o(t_m - t)$$

Donc $y'(t) = \dfrac{-o(t_m - t)}{t_m - t} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow y'(t) = 0$.

M3 soit $(t_m)_{m \geq 1} \subset Z(y)$ & $t_m \to t$

& $\forall m \geq 1$, $t_{m+1} \neq t_m$.

Dans l'intervalle $I_m =]t_m, t_{m+1}[$ ou $]t_{m+1}, t_m[$,

on a $y(t_m) = y(t_{m+1})$ $(= 0)$.

Comme $y \in C(\tilde{I}_m)$ & y est dérivable sur I_m,

B TH de Rôlle : $\exists\, s_m \in I_m$ tq $y'(s_m) = 0$.

$t_m \to t \Rightarrow s_m \to t$. Par continuité de y', on a

$y'(s_m) = 0 \Rightarrow y'(t) = 0$.

3) ed $Z(y)$ ne contient pas de pt d'accumulaO.

soit $e(t)$, $f(t)$ une base de S.

Soit $w(t) = \dot{e}(t) f(t) - \dot{f}(t) e(t)$.

soit $y \in S \setminus \{0\}$, mq les points de $Z(y)$ st isolés. (i.e. $Z(y)$ n'a pas de pt d'accumulaO)

RQ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est soluO sur $\mathbb{R}$ de (PC) $\begin{cases} \dot{Y}(t) + A(t)\, Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\leadsto$ le TH de Cauchy-Lipschitz s'appliq au (PC)

$\Leftrightarrow \dot{Y} = F(t, y)$ où $F(t, Y) = -A(t)\, Y$

mat A cont & loclt lipschitzien p/ y.

(Δ) Cel $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'uniq soluO de (PC)

soit $y \in S$, soit t_0 un pt de $Z(y)$.

Par la 2), on a $\begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D+, $Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ est soluO de $\dot{Y} + A(t)\, Y = 0$.

Donc $\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y \equiv 0$

(S1) P (Δ)

soit $e(t), f(t)$ une base de S,

volume, dét

soit $w(t) = \dot e(t) f(t) - \dot f(t) e(t)$

soit $t_1 \in Z(e)$, si $Z(e) \cap]t_1, \infty[\neq \emptyset$

& $t_2 = \min\left[Z(e) \cap]t_1, \infty[\right]$

4) Dmq $w(t) = C = cte$

$$w(t) = \dot e(t) f(t) - \dot f(t) e(t) = \det\begin{pmatrix} f(t) & e(t) \\ \dot f(t) & \dot e(t) \end{pmatrix}$$

$e, f \in S$ de e & f est de classe C^2.

Donc w est dérivable.

$$\dot w(t) = \dot e(t) \dot f(t) - \dot e(t) \dot f(t) + \underbrace{\ddot e(t)}_{= -q(t) e(t)} f(t) - e(t) \overbrace{\ddot f(t)}^{= -q(t) f(t)}$$

D'où $\dot w(t) = -q(t) \left(e(t) f(t) - e(t) f(t) \right) = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $w(t) = w(0)$

5) Dmq cette cte ne pt pas ê nulle.

Soit $t_1 < t_2$ 2 élts consécutifs ds $Z(e)$

ie $Z(e) \cap]t_1, t_2[= \emptyset$

Mq $w(0) \neq 0$, si $w(0) = 0$ alors

$\det\begin{pmatrix} f(0) & e(0) \\ \dot f(0) & \dot e(0) \end{pmatrix} = 0$, dc $\exists\ \lambda, \mu$ ¢ $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

tq $\lambda \begin{pmatrix} e(0) \\ \dot e(0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\square)$

Posons $Y(t) = \lambda \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot e(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} f(t) \\ \dot f(t) \end{pmatrix}$

Y est solu° de $(**)$ & F $(\square)$, on a

$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par (Δ), on a $Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall t$.

cp $\lambda e + \mu f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, cela contredit

le fait que (e, f) est une base de S.

Ccl : $w(0) \neq 0$.

6) Dmq $w(t_1) w(t_2) > 0$

$$\underbrace{w(t_1) w(t_2)}_{= w(0)^2} > 0 \text{ car } w \text{ constant.}$$

7) cd qu'entre t_1 & t_2, $\exists$ un & un seul zéro de f.

car $]s_1, s_2[\cap Z(e) \subset]t_1, t_2[\cap Z(e) = \emptyset$.

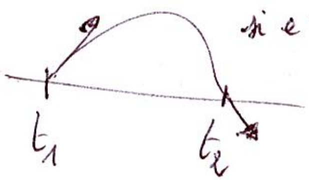
$0 < w(t_1)w(t_2) = \dot{e}(t_1)\dot{e}(t_2) f(t_1) f(t_2)$ ($\Diamond$)

Première cd$^\circ$: $t_1, t_2 \notin Z(f)$

2nde conséquence : $\dot{e}(t_1) \neq 0$ et $\dot{e}(t_2) \neq 0$.

Or e est de signe constant sur $]t_1, t_2[$,

si $e > 0$ sur $]t_1, t_2[$ alors $\dot{e}(t_1) > 0$, $\dot{e}(t_2) < 0$



si $e < 0$ sur $]t_1, t_2[\Rightarrow \dot{e}(t_1) < 0$, $\dot{e}(t_2) > 0$

Ds les 2 cas $\dot{e}(t_1)\dot{e}(t_2) < 0$.

Par ($\Diamond$), on a alors $f(t_1)f(t_2) < 0$; par Th des TVI (f est cont), $\exists s \in]t_1, t_2[\cap Z(f)$

Pour finir, supps par contradic$^\circ$ qu' $\exists s_1, s_2 \in Z(f)$ tq $t_1 < s_1 < s_2 < t_2$.

→ en échangeant les rôles de e & f, on voit qu' $\exists$ $t \in]s_1, s_2[\cap Z(e)$ mais c'est faux

Fiche 8

Ex 1

S I R

seins — infectés — removed

(1) $\frac{dS}{dt} = -r\, I S$, (2) $\frac{dI}{dt} = r I S - a I = a\left(\frac{r}{a} S - 1\right) I = (rS - a) I$

$\underbrace{\frac{r}{a}}_{r_0}$

(3) $\frac{dR}{dt} = a\, I$

si on améliore : $I(t) \longrightarrow I(t,s)$

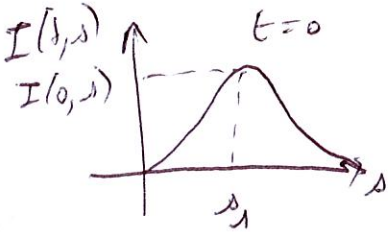
tps depuis l'infect°.

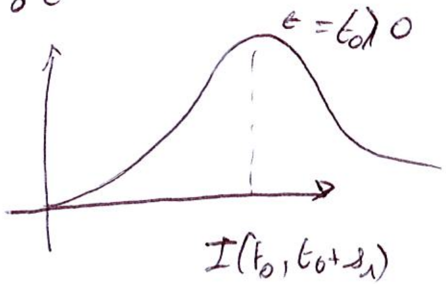
$\frac{dS(t)}{dt} = -\left[\int r(s)\, I(t,s)\, ds\right] S(t)$

$\frac{\partial I}{\partial t}(t,s) = -\frac{\partial I}{\partial s} + \delta_{t=0} - a(s) I(t,s)$, $S(t)$

$I(t, t+s) = cte$ & $\frac{dR}{dt}(t) = \int a(s)\, I(t,s)\, dt$

$0 = \frac{d}{dt}\left[I(t, t+s)\right] = \frac{\partial I}{\partial t}(t, t+s) + \frac{\partial I}{\partial s}(t, t+s)$





P1 1) Établir que l'on est bien ds le cadre du (Th) de (CL).

On pose $Y = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}$. Le système se réécrit ss la forme

$\dot{Y} = F(Y)$ & $F(Y) = \begin{pmatrix} -r Y_2 Y_1 \\ (r Y_1 - a) Y_2 \\ a Y_2 \end{pmatrix} = Y_2 \begin{pmatrix} -r Y_1 \\ r Y_1 - a \\ a \end{pmatrix}$

$F \in C^\infty$ ← car polynôme

de local^t lipschizienne mais

$\frac{\partial F}{\partial Y_2} = \begin{pmatrix} -r Y_1 \\ r Y_1 - a \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas borné. (!)

Donc F n'est pas global^t lipschit.

& (Th) de Cauchy Lipschitz local s'appliq.

On va considérer une sol° max déf sur $]T^-, T^+[$

& $-\infty \leq T^- < 0 < T^+ \leq \infty$.

2) Dmq $S + I + R = cte = N$

On a $\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$ dc $S + I + R = cte = N$

3) Dmq si $I(0) > 0$, $R(0) \geq 0$ & $S(0) > 0$!
alors les 3 qtés restent positives $\forall t \in]0, T^+[$
$S(t), I(t), R(t)$

si $\exists\ t \in]0, T^+[$ tq $I(t) \leq 0$
alors $\exists\ t^* \in]0, T^+[$ tq $I(t^*)$.

$Y = (S, I, R)$ est solut° du (PC) :

$$(PC)_1 \begin{cases} \dot{Y} = F(Y) \\ Y(t^*) = \begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Or $\tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*) \end{pmatrix}$ est solut° de (PC_1) sur $\mathbb{R}$.

$\left(\text{car } F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

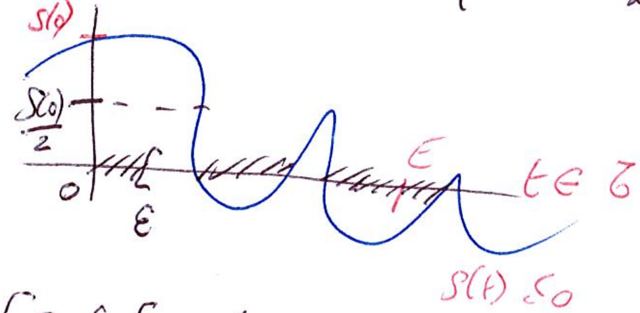
Par unicité, on a $Y = \tilde{Y}$. Ep $\tilde{Y}(0) = \begin{pmatrix} S(t^*) \\ 0 \\ R(t^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(0) \\ I(0) \\ R(0) \end{pmatrix} = Y(0)$

Contredit $I(0) > 0$. Donc $\forall t \in [0, T^+[$, $I(t) > 0$.

Par (3), on déduit $R(t) > 0$ sur $]0, T^+[$

~~Soit $J \subset [0, T^*[$ l'intervalle maximal contenant 0 tq $S \geq 0$ sur J~~

Suppos p contradict°, qu'$\exists\ t \in]0, T^+[$ tq $S(t) \leq 0$. Posons $E = \{t \in]0, T^*[: S(t) \leq 0\}$ et $t^* = \inf E$. Donc $E \neq \emptyset$ par hypo, et ĉ $\boxed{S(0) > 0}$ & S est cont. $\exists\ \varepsilon > 0$ tq $S \geq \frac{S(0)}{2} > 0$ sur $[0, \varepsilon[$.



D'où $E \cap [0, \varepsilon[= \emptyset$ & $t^* \geq \varepsilon > 0$.

Sur $[0, t^*[$, $S(t) > 0$ car $E \cap [0, t^*[= \emptyset$

$\forall \eta > 0$, $\exists\ s \in E \cap [t^*, t^* + \eta[$.

Donc $S(s) \leq 0$.

En faisant $\eta \longrightarrow 0$, on a $S(t^*) \leq 0$.

Par continuité de S :

$S(t^*) \leq 0$ et $S > 0$ sur $[0, t^*[\Rightarrow S(t^*) = 0$

Sur $[0,t^*[$; on a $S, I, R \geq 0$

et $S+I+R=N$

Donc $0 \leq I \leq N$ sur $[0,t^*[$

Pour $t \in [0,t^*[$,

$$\dot S = -rIS \Rightarrow \dot S \geq -rNS.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{rNt}S(t)\right] = e^{rNt}\left[rNS+\dot S\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } t\in[0,t^*] \\ e^{rNt}S(t) \geq S(0) \end{cases} \Rightarrow S(t) \geq e^{-rNt}S(0)$$

$\Rightarrow S(t^*)>0$ $\boxed{c?!c}$

Rq importe Ppe d'explo° $\Rightarrow$ sol° globale

par (3) si $R(0)\geq 0$, $S(0)>0$, $I(0)>0$ alors

$R, S, I > 0$ sur $]0,T^+[$ (tps max d'$\exists$)

par (2) $S+I+R=N$

dc $S = N - \underbrace{(I+R)}_{\geq 0} \leq N$

De m̂ $I\leq N$, $R \leq N$ sur $]0,T^+[$

Donc sur $[0,T_+[$, $0 \leq S, I, R \leq N$.

Par principe d'explosion : $T_+ = +\infty$.

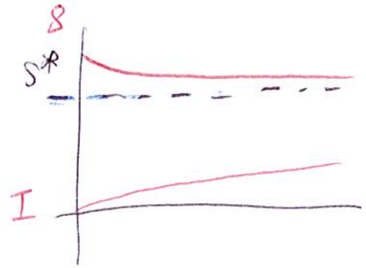
4) $$\begin{cases} \dot S = -rSI = (-rI)S \\ \dot I = rSI - aI = (rS-a)I \\ \dot R = aI \end{cases} \qquad a, r>0$$

On suppose $S(0)>0$; $R(0)=0$, $I(0)>0$.

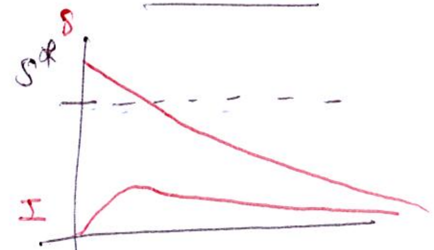
$rS(0)-a>0 \iff S(0) > \frac{a}{r} = S^*$

4) Dmq nbr de malades ↗ puis décroit après un pic.

Scénario 1



Scénario 2



⊙ Spps $\forall t\geq 0$ $S(t)\geq S^* \Rightarrow \forall t \geq 0$, $rS(t)-a\geq 0$ dc $\dot I \geq 0$ dc $\forall t$ $I(t)\geq I(0)>0$.

Revenons à $\dot S = -(rI)S$, on a $\forall t\geq 0$;

$\dot S \leq -[rI(0)]S \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\exp(rI(0)t)S\right] = e^{rI(0)t}\left[\dot S + rI(0)S\right] \leq 0$

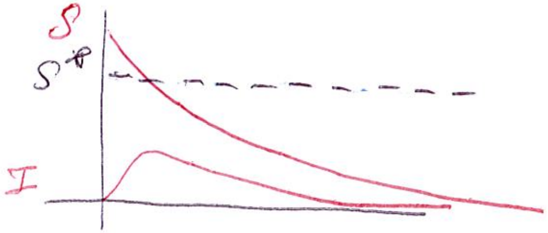
$\to \exists \quad \exp(r I(0) t)\, S \leq S(0)$

$\to \exists \quad S(t) \leq S(0)\, e^{-r I(0) t}$

Pour t assez grand, on a $S(t) < S^*$.

$\boxed{c?!c}$

D'où $\exists\, t_* \text{ tq } S^*(t) = S^*$ et $S(t) > S^*$ pr $t < t^*$.



Or $S \; S^T \searrow$

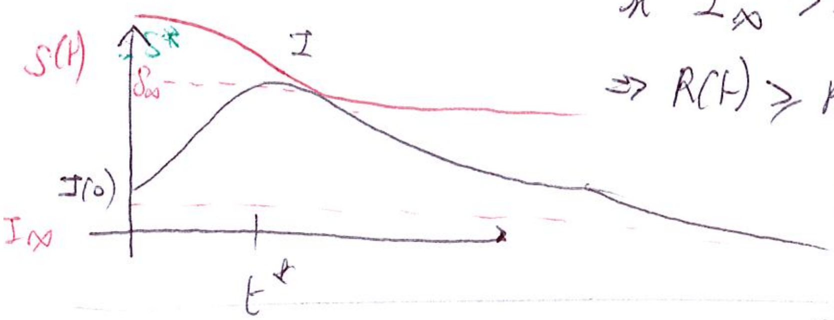
dc $S(t) < S^* \quad \forall t > t^*$.

On a $\dot{I} = r(S - S^*) I$ dc $I \nearrow$ sur $[0, t^*]$

et $I \searrow$ sur $[t^*, \infty[$.

RQ Immunité collective $= \dfrac{S^*}{N}$

taux



si $I_\infty > 0$, $\dot{R} = a I$

$\Rightarrow R(t) \geq R(t_*) + a I_\infty (t - t^*) \quad \forall t \geq t^* \longrightarrow \infty$

$\dot{Y} = F(Y) = \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}$ ici $F_1(S, I) = -r S I$, $F_2(S, I) = (rS - a) I$

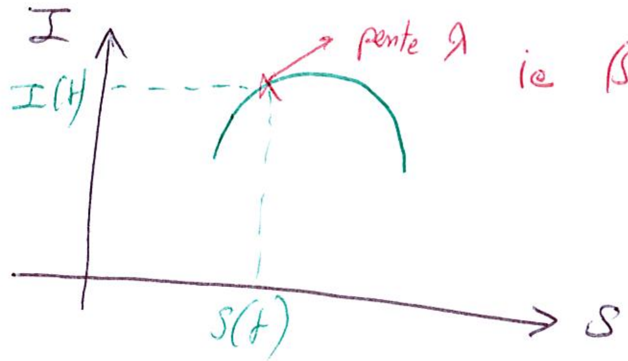
trajectoire

Seconde Partie

Dans $\mathbb{R}^2$, $I(0) > 0$, $S(0) > 0$,

$\dot{S} = -r S I, \quad \dot{I} = r S I - a I$

5) Déterminer les isoclines du système.



ie $(S(t), I(t)) \in \mathcal{J}_\lambda$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{J}_\lambda = \left\{ (S, I) : F_1(S, I) \neq 0, \dfrac{F_2(S, I)}{F_1(S, I)} = \lambda \right\} \\ \mathcal{J}_\infty = \left\{ (S, I) : F_1(S, I) = 0 \right\} \end{array}}$$

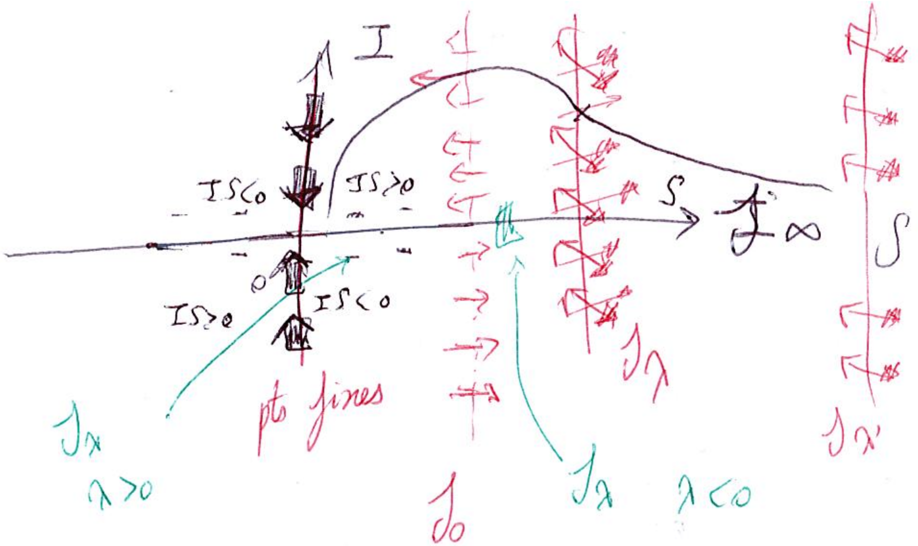
$\mathcal{J}_\infty = \{ (S, I) : S = 0 \text{ ou } I = 0 \}$

$\mathcal{J}_\lambda = \left\{ (S, I) : S \neq 0, I \neq 0, \dfrac{rS - a}{rS} = -\lambda \right\}$

$1 - \dfrac{a}{rS} = -\lambda \iff 1 + \lambda = \dfrac{a}{rS}$

$\iff rS = \dfrac{a}{1+\lambda} \iff S = \dfrac{a}{r(1+\lambda)}$

$\to \mathcal{J}_{-1} = \emptyset$



6) Tous les pts fixes du type $\begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = Y_0$.

Nature des pts fixes ?

$$Y = Y_0 + Z$$

$$\dot{Y} = \dot{Z} = F(Y_0 + Z) = F(Y_0) + DF(Y_0)\, Z + O(\|Z\|^2)$$

$$\Rightarrow \dot{Z} \simeq DF(Y_0)\, Z \qquad (SL).$$

La nature du PF est la nature du (SL) linéarisé.

→ Regarder $S_\lambda = \frac{a}{r(1+\lambda)}$, $\dot{Y} = \begin{pmatrix} F_1(S,I) \\ F_2(S,I) \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} -rS \\ rS - a \end{pmatrix}$

où est $\mathcal{J}_\lambda$ en f λ.

s(0)

sx ?

$Z = \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix}$

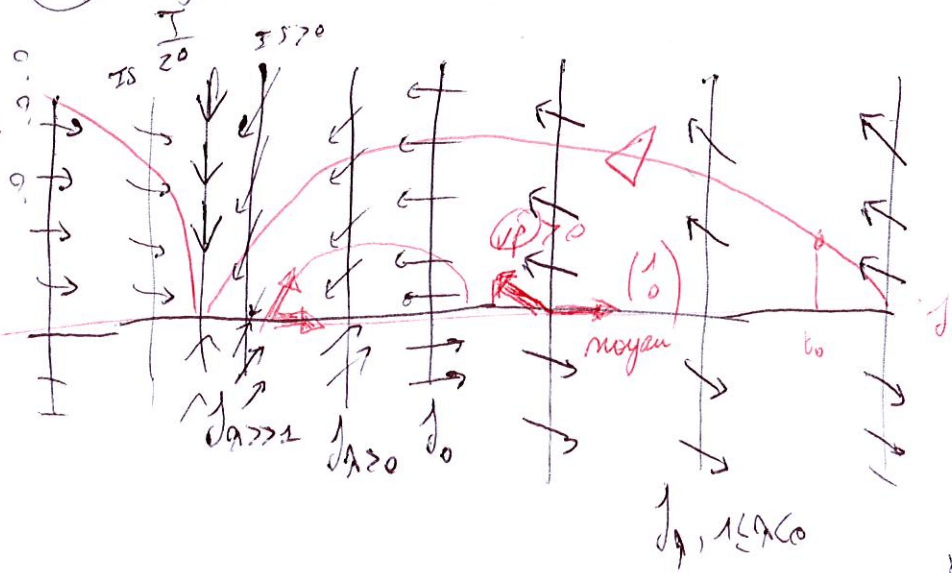
$$F(Y_0 + Z) = F\begin{pmatrix} S + s \\ 0 + i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -rS - rs \\ rS - a + rs \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -rS \\ rS - a \end{pmatrix} + O(si)$$

q.d. $\lambda \to \infty$?

$\lambda \to -1$?

$\lambda \to 0$?

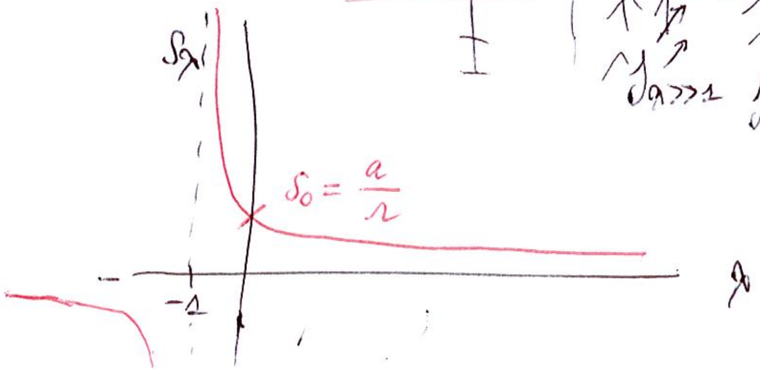
$$S_\lambda = \frac{a}{r} \times \frac{1}{1+\lambda}$$



À l'ordre 1,

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -rS \\ rS - a \end{pmatrix}$$

$$DF(Y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -rS \\ 0 & rS - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \end{pmatrix}$$



38

à l'∞, la pente vaut -1

$DF(Y_0)$ admet pr noyau $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix}0 & & -\alpha S = (\alpha S - a) \times \dfrac{(-\alpha S)}{(\alpha S - a)} \\ 1 & \longrightarrow & (\alpha S - a) \times 1\end{matrix}$$

Un $\vec{vp}$ $\begin{pmatrix}\frac{-\alpha S}{\alpha S - a}\\ 1\end{pmatrix}$ $\vec{\pi}$ à (vp) $(\alpha S - a)$.

$DF(Y_0)$ est diagonalisable de (vp) 0, $\vec{vp}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$(\alpha S - a)$, $\vec{vp}\begin{pmatrix}\frac{-\alpha S}{\alpha S - a}\\ 1\end{pmatrix}$

accélérat° Force

$$\ddot{y} + \sin y = 0 \qquad (*)$$

1) (CL) est-il applicable ?

2) Determiner f F tq si y solut° de $(*)$ alors

$$F(y) + \frac{\dot{y}^2}{2} = cte$$

Ep Ec

1) On pose $Y = \begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\ \dot{y}\end{pmatrix}$ où $F(Y) = \begin{pmatrix}z\\ -\sin y\end{pmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow \dot{Y} = F(Y) \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\dot{y} = z\\ \dot{z} = -\sin y.\end{cases}$

$(**)$ $(\overset{E}{SDO}_I)$ de dim 2. (n'est pas linéaire $\underset{\sin y}{\Delta}$)

Autonome. De plus F est C^1 et

$$DF(Y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos(y) & 0\end{pmatrix}$$

tous les coeffs st bornés.

DF est borné sr $\mathbb{R}^2$ de F et globalement lipschitzienne

ie $\forall\ Y_0 \left(= \begin{pmatrix}y_0\\ z_0\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\exists!\ Y \in C^1(\mathbb{R})$ solut° du pb de Cauchy

$\Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{y} + \sin(y) = 0\\ y(0) = y_0 \text{ et } \dot{y}(0) = z_0.\end{cases}$

De plus, si $\tilde{Y}$ autre solut° déf sr un intervalle $I \ni 0$

$\dot{\tilde{Y}} = F(\tilde{Y})$ sur I

$\tilde{Y}(0) = Y_0$ alors $\tilde{Y} = Y|_I$

si local $\tilde{Y} \subset Y$.

2) $\ddot{y} + \sin(y) = 0$ (*)

soit y une solu° de (*) sur $\mathbb{R}$,
on multiplie (**) par $\dot{y}$, on a

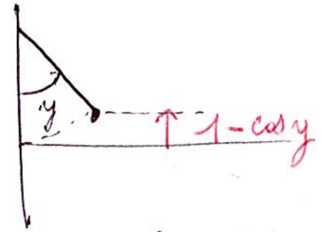
$$\ddot{y}\dot{y} + \underbrace{(\sin y)}_{f(y) = F'(y)}\dot{y} = 0$$

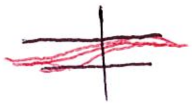
On pt prendre $F(y) = 1 - \cos y$.

ça fait 0 au pt équilibre stable.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left[F(y)\right] = 0$$

d'où $\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}^2}{2} + F(y)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} + F(y) = cte$





NB TRAJECT^{rs} Syst Autonome ne se croisent pas

Soit $g \in C(\mathbb{R})$, y

(*) $\dot{y} = g(y)$. $\sin(y) = f(y)$ $y(0) = y_0$.

1) CL ?

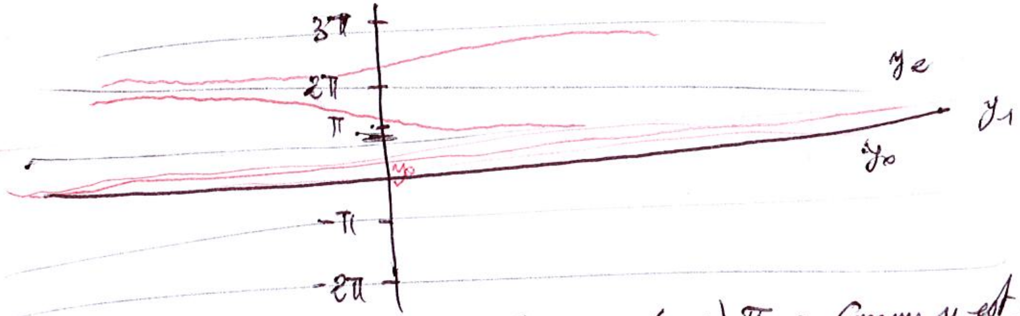
2) Solu°s stationn^{Rs}

3) Monotonie, $\underbrace{\text{tps d'}\Delta}_{\text{Mq } \exists \text{ sur } \mathbb{R}}$, limites en $\pm y_0$?

solu°s ↗,↘ ?

1) Th CL local s'applique
$\exists!\ y \in [-T_{min}, T_{max}]$

2) $\dot{y} = 0 \iff y(t) = c \quad \forall t$ & $f(c) = 0$
$\iff y(t) = c$ & $\sin c = 0$
$c = \pi\mathbb{Z}$



- si $y_0 \in \pi\mathbb{Z}$, $y_0 = n\pi$, la solu° de (PC) est y_n.
$\{y_n(t) = n\pi, \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$
- si $y_0 \notin \pi\mathbb{Z}$; (y, I) la sol° max de (PC) alors $\forall t \in I$, $y(t) \notin \pi\mathbb{Z}$ sinon y est cte & $y(0) = y_0 \in \pi\mathbb{Z}$ ce qui est faux

En prenant $n \in \mathbb{Z}$ tq $n\pi < y_0 < (n+1)\pi$. Comme y est cont sur I, on a $n\pi < y(t) < (n+1)\pi \quad \forall t \in I$.
Dc y est borné sr I, par ppe d'explo°, on a $I = \mathbb{R}$.

Supposons $0 < y_0 < \pi$, on a $\forall t$:

$0 < y(t) < \pi$ donc $\sin(y(t)) > 0$,

d'où par $(*)$, $\dot{y} > 0$ $\forall t$

De plus $n\pi < y < (n+1)\pi$.

Donc $\exists$ $0 \leq \ell^- < y_0 < \ell^+ \leq \pi$:

où $\ell^{\pm} = \lim_{t \to \pm\infty} y(t)$

Donc $\dot{y}(t) = f(y(t)) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} f(\ell^{\pm})$

par continuité de f.

Donc $f(\ell^-) = f(\ell^+) = 0$.

$\Rightarrow \ell^-, \ell^+ \in \pi\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \ell^- = 0$ et $\ell^+ = \pi$

Supposons $g(y) = 1$, Supposons $0 < y_0 < \pi \Rightarrow 0 < y(t) < \pi$

$\dot{y} = \sin y \Leftrightarrow \dfrac{\dot{y}}{\sin y} = 1$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{\sin y(s)}\, ds = t \qquad \left(\begin{array}{l} x = y(s) \\ dx = \dot{y}(s)\, ds \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{\sin x} = t$

Posons $\boxed{\tau = \tan\frac{x}{2}}$

$d\tau = \frac{1}{2}(1 + \tau^2)\, dx$

$\Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+\tau^2}\, d\tau$

$\sin x = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2}$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{d\tau}{\tau} = t$

$\Rightarrow \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)}\right) = t$.

$y(t) = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^t\right)$

NB Solutions autonomes et MONOTONES.

Énoncé bonus : $a = (a_{n-1} \dots a_0) \in \mathbb{R}^n$.

E_a espace des soluOs de

$P_a(D)(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

$P_a(r) = 0$, si r réel racine d'ordre k

$e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{k-1} e^{rt}$ famille libre de sol°

si $r = a + ib$, $b \neq 0$ racine d'ordre k

alors $\bar{r}$ est aussi racine d'ordre k.

$e^{at}\cos(bt), e^{at}\sin(bt), te^{at}\cos(bt), te^{at}\sin(bt), \dots, t^{k-1}e^{at}\cos(bt), t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$.

base de E_a, $\dim E_a = n$.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y(t) = P_a(r) e^{rt}$$

$= t P_a(r) e^{rt}$
$+ t P'_a(r) e^{rt}$

E_a est invariant par translat° :

si $y \in E_a$ & $t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \tau_{t_0} y(t) \mapsto y(t+t_0) \in E_a$

$$(\tau_{t_0} y)'(t) = (\tau_{t_0} y')(t)$$

$P_a(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

$$P_a(D)(\tau_{t_0} y) = \tau_{t_0} [\underbrace{P_a(D) y}_{=0}] = 0$$

Mq si $E \subset C^1(\mathbb{R})$ tq $\forall f \in E, f' \in E$, & de dim finie n alors $\exists a \in \mathbb{R}^n$ tq $E = E_a$.

Par récurrence $\forall f \in E$, $f^{(k)} \in E$, $\forall k \geq 0$ dc $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

Dt, $D : E \to E$, $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E $\in$ Endom(E).

Par Th Cayley-Hamilton,

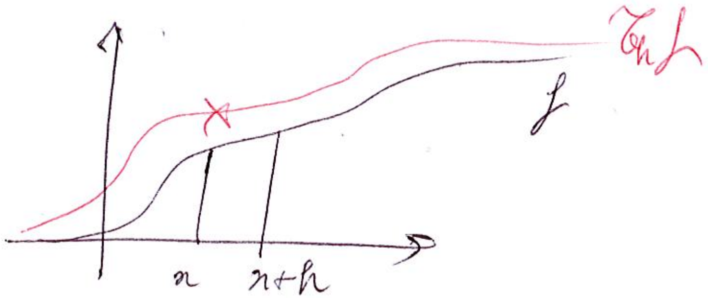
$\chi_D(D) = 0$ où $\chi_D(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + \dots$

$\Rightarrow \chi_D(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 Id = 0$

$\Rightarrow \forall f \in E$, $f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = 0$

42 $\Rightarrow f \in E_a$ dc $E \subset E_a$. or $\dim E = \dim E_a = n$ dc $E = E_a$

Puis $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\tau_h f - f\right](x)$



si $f \in C^1$ et $h \geq 0$, $\dfrac{1}{h}\left[\tau_h f - f\right] \longrightarrow f'$

$$\frac{1}{h}\left(e^{h+t} - e^t\right) = \frac{e^h - 1}{h} \times e^t \longrightarrow e^t.$$

$G \subset C(\mathbb{R})$ de dim finie, $\|\cdot\|_G$ norme sur G.

$\forall k : R_k : G \longrightarrow C([-2^k, 2^k])$

$g \longmapsto g|_{[-2^k,2^k]}$

R_k linéaire & dim $G < \infty$, $\exists\, C_k > 0$ tq

$\max\limits_{[-2^k,2^k]} |g| = \|R_k g\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}$

$C_k = \max(1, |||R_k|||)$

$C_k > 0$, $C_k \nearrow$ de k.

Pour $g \in G$,

$$\|g\|_* := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k C_{k+1}} \underbrace{\|g\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}}_{\|R_k f\|_\infty}$$

- $\forall g \in G$, $\|g\|_* \leq \sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{1}{2^k} \dfrac{1}{C_{k+1}} \times C_k \|f\|_G$

$$\leq \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}\right) \|g\|_G$$

- $\forall g, h \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda g\|_* = |\lambda|\, \|g\|_*$

$\|g + h\|_* \leq \|g\|_* + \|h\|_*$

si $\|g\|_* = 0$ alors $\forall k$:

$\|g\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])} = 0$

$\Rightarrow g = 0$ sur $[-2^k, 2^k]$ $\forall k$

$\Rightarrow g \equiv 0$.

Donc $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ est evn.

soit $E \subset C^1(\mathbb{R})$ de dim finie convient par translatO f dans $\forall f \in E, f^a \in E$ $(\Rightarrow E = E_a)$.

Posons $F = \{f' : f \in E\}$, $\dim F \leq \dim E$

et $G = E + F$, $\dim G \leq 2 \dim E$.

Sur G, on considère $\|\cdot\|_*$

soit $f \in E$, $\in C^1$, soit $k \geq 0$ et $h > 0$, $|h| \leq 1$.

$$D_h f(x) = \frac{\tau_h f - f}{h}(x) = \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] = \frac{1}{h}\int_0^{+h} f'(x+s)\,ds$$

$$= \int_0^1 f'(x+sh)\,ds \quad (*)$$

$D_h f \in E$ car e.v. $\not\!\!\!\!\;$ translatO.

$\|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}$

$$\forall x, \ D_h f(x) - f'(x) = \int_0^1 \underbrace{\left[f'(x+sh) - f'(x)\right]}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} ds$$

Par continuité de f', tend U.N sur $[-2^k, 2^k]$.

Par ailleurs $\|D_h f(x) - f'(x)\|_{L^\infty[-2^k, 2^k]}$

$$\leq 2 \|f'\|_{L^\infty([-2^{k+1}, 2^{k+1}])}$$

$$\|D_h f - f'\|_* = \underbrace{\sum_{k \leq k_0} \frac{1}{2^k} C_{k+1} \|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}}_{k_0 \text{ fixé } \to 0 \text{ par } (*)}$$

$$+ \sum_{k > k_0} \frac{1}{2^k} C_{k+1} \|D_h f - f'\|_{L^\infty([-2^k, 2^k])}$$

$$\leq 2\|R_{k+1} f'\| \leq 2C_{k+1}\|f'\|$$

$$\leq \frac{2}{2^{k_0}} \|f'\|_G < \varepsilon \text{ pr } k_0 \text{ assez gd}$$

Donc $\|D_h f - f'\|_* < 2\varepsilon$ pr $h > 0$ assez petit.

On a $D_h f \in E \longrightarrow f'$ ds G mais de dim finie dc fermé de $f' \in E$.

---

si $\in C^0(\mathbb{R})$, $\tilde{E} := \{$primitive d'élt de $E\} = \{x \mapsto \int_0^x f(s)\,ds, f \in E\}$

$\lambda, f \longmapsto F_\lambda f$

$\tilde{E}$ est dim finie invariant p translatO | $E = \tilde{E}' \subset \tilde{E} \subset C^1$

44

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin t$

$z = \dot{x}$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alg

$\exists'$ sol°

$I = \mathbb{R}$

$\ddot{x} = -4\dot{x} - 4x$

$\dot{x} = \dot{x}$

$a\cos t + b\sin t$?

$\dot{X} = AF(X) + B(t)$

$e^{tA} Y_0 = \cancel{e^{\lambda t}}$ $e^{tA}\begin{pmatrix} z_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$\forall\ X_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \exists!\ X \in C^1(\mathbb{R}$ solu° (PC)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin x \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = z_0 \end{cases}$

$Y' = AY + B(t)$

$\frac{d}{dt}(e^{tA} Z(t)) = A e^{tA} Z(t) + B(t)$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$: $(\lambda + 2)^2$ $\to -2$

$\{ e^{-2t}, t e^{-2t} \}$

ok : $\boxed{e^{tA} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{pmatrix}}$

$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} l \Rightarrow l = 0$

$\dot{y}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} L$

$\dot{y} = f(y) \to f(l)$

$(A + 2Id)^2 = 0 \Rightarrow D = -2Id$

$N = A + 2Id$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} Z(t)) = A e^{tA} Z(t) + e^{tA} \dot{Z}(t)$$

$e^{tA} \dot{Z}(t) = B(t)$

$\dot{Z}(t) = e^{-tA} B(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+2t) & 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ -t\sin t\, e^{2t} \end{pmatrix}$$

$a(t) = -\operatorname{Im} \int_0^t e^{2s + is} ds = e^{2t}\left(\left(\frac{3}{25} - t\right)\sin t - \frac{4}{25}\cos t\right) + C$

$b(t) = e^{2t}\left(\left(\frac{19}{25} + 2t\right)\sin t + \frac{8}{25}\cos t\right) + c.$

$\mathcal{E} = x(t) = \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \frac{3}{25}\sin t - \frac{4}{25}\cos t$

$\dot{Z}(t) = e^{-tA} B(t)$

$-\operatorname{Im} \int_0^t e^{s(2+i)} ds = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2+i} e^{s(2+i)}\right]_0^t$

$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \ldots$

$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

AVC $x(t) = x(0)e^{-2t} + (\dot{x}(0) + 2x(0))te^{-2t}$

$= (1+2t)e^{-2t}x(0) + \dot{x}(0)te^{-2t}$

$\dot{x}(t) = -4te^{-2t}x(0) + (1-2t)e^{-2t}\dot{x}(0).$

Semaine vol

Demande vélo angell. bike.

Reglage

Aide

$\to$ Support

$e^{tA} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{\dot y}{\sin(y)} = 1 \iff \int_0^t \frac{\dot y(s)}{\sin(y(s))}\,ds = t \qquad x = y(s)$$

$$\dot y(s) = \frac{dx}{ds}$$

$$dx = \dot y(s)\,ds$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dx}{\sin(x)} = t \qquad \tau = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$d\tau = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+\tau^2)\,dx$$

$$dx = \frac{2}{1+\tau^2}\,d\tau$$

$$\sin(x) = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$$

$$\int_{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{2d\tau}{1+\tau^2} \times \frac{1+\tau^2}{2\tau} = \int_{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)}\right| = t.$$

$$\frac{\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y(0)}{2}\right)} = e^t.$$

$$y(t) = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)e^t\right)$$

$u = v$ $\qquad \frac{\dot y(s)}{dx} = d\cancel{s}$ $\qquad \tan(u) = 1+\tan^2(u)$

$$\frac{d}{ds}y(s) = \frac{d}{ds}x = \frac{dx}{ds}$$

, 10

$$(PC)\begin{cases} t\dot y + y = 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(EDO_I) polynôme 1° deg

cont

TU CL

~~glob~~ glob $\to$ à t fixé

$$\begin{cases} \dot y + \frac{1}{t}y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad t > 0$$

$\neq 0.$

I^* I^+

$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$ $t \in \mathbb{R}$ non

$\forall y_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \exists!\, y \in J,\ y$ solu° (PC).

unicité

$$\dot y = -\frac{1}{t}y \qquad \to \frac{c^{te}}{t}.$$

$\frac{c}{t}$.

① si $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y$ alors y PP.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 7 \\ \dot{y} = 3x - 4y + 1 \end{cases}$$

(m) (L) g

I?

$\exists !$ sol^n Θ

$$\dot{Y} = AY + B(t) \longrightarrow \quad E_h = \{ k . e^{tA}, k \in \mathbb{R} \}$$

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = E_0 + E_h .$$

$A = PD'$

$A = PDP^{-1}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$$

$$Sp(A) = \{-5, 5\} \qquad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = Id + \sum_{k \geq 1} \frac{(tA)^k}{k!} = Id + \sum_{k \geq 1} \frac{(tPD^kP^{-1})}{k!}$$

$$e^{tA} = e^{tD} \sum_{n \geq 0}^{q-1} \frac{t^k N^k}{k!} \text{ tq } N^q = 0.$$

(5) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \ker(A - 5Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(-5) $\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad \ker(A + 5Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

entraîne ∞ pas ~~d~~ de mf ~~43~~ pas précédence 3 ~~44~~ pas

-1 $\quad$ A

$-1-2$ $\quad$ $A-2$ $\quad$ $\lambda(\lambda-2)+1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$-x + 3y = 0$

$3x - 4y = 5y$

$3y = x$

$3x = y$

$\begin{pmatrix} \cancel{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5^n & 5^n \\ -5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = Id + P \left[\sum_{n \geq 0} \frac{t^n D^n}{n!} \right] P^{-1}$$

$$= \cancel{I} + P \begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & 0 \\ 0 & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & 0 \\ 0 & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} e^{-5t} \cancel{-1} & -3(e^{5t} \cancel{-1}) \\ 3(e^{-5t} \cancel{-1}) & e^{5t} \cancel{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$E_h = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-5t} & -3e^{5t} \\ 3e^{-5t} & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1} Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} Z_0 \mid Z_0 \in \mathbb{R}^2 . \right.$$

par inversibilité de P^{-1} (CDV $Z_0 = P^{-1}Y_0$ bijectif))

$$\begin{cases} x(t) = 1 + c_1 -3e^{5t} + c_2 e^{-5t} \\ y(t) = 1 + c_1 3e^{-5t} + c_2 e^{5t} . \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2$$

vp -1.

$$\left|\begin{matrix} +1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\ker((A-\lambda Id)^2) = \ker((A+Id)^2) = N_{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

si e_2 vecteur de $N_2 \setminus E_2$ ds base (e_1, e_2) de la forme $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On choisit $e_2 \in N_2 \setminus E_2$:

$$(A+Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = 0$, $y = 0$

de $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$e^{tD} = \sum \frac{(tD)^n}{n!} = \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

On a $e_2 \in N_2 \setminus E_2$, calcule Ae_2 :

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2.$$

$$Ae_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 \cancel{+} e_2.$$

$$\Rightarrow \underline{a = 1}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad DN = ND$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = 0.$$

tq $N^q = 0$

$$e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}\sum_{n \geq 0}^{q-1} \frac{t^k N^k}{k!}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\left[I + tN\right] = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x+y = 0 \\ -x-y = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = -y \\ -x = y \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$x = 1$, $y = -1$.

12 $y \in C^2$

$$\begin{cases} \ddot{y} = 4y - 6y^2 = f(y) \\ \ddot{y} = y(4 - 6y) \end{cases}$$

cont !

(H) loc lip.

$\exists!$ sol$^\circ$ max.

$$F(Y) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = ($$

I interv^{lle} solu.

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$0 \in I \to \mathbb{R}^2 y$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{Y} = F(Y)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix}$$

on C^2 $\forall t \in I$,

$$\begin{cases} \ddot{y} = 4y - 6y^2 \\ \dot{y} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$\cancel{Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}; \dot{Y} = \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ z \end{pmatrix}}$$

$$(yy)' = y\dot{y} + \dot{y}y$$

$$(y^2)' = 2\dot{y}y$$

2) Mq $t \mapsto y(t)$ est paire

$$\ddot{y}(-t) = 4y(-t) - 6y(-t)^2$$

$(f \text{ paire})' = f$ impaire.

3)
$$\ddot{y} = 4y - 6y^2$$

$$\ddot{y}\dot{y} = \dot{y}(4y - 6y^2) = 4y\dot{y} - 6y^2\dot{y}$$

$$= 4y\dot{y} - 6\dot{y}y\,y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) = \cancel{\frac{d}{dt}(2y\dot{y})}\ 2\frac{d}{dt}(y^2) - 3\frac{d}{dt}(y^3)$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{y'^2 - 4y^2 - 4y^3}_{E(t)}) = 0$$

$\forall t$

$$E(t) - E(0) = y'^2(0) - 4y^2(0) + 4y^3(0) = 0 - 4 + 4 = 0$$

$$\forall t \in I, \quad y'^2 = 4y^2(1 - y).$$

$$\frac{1}{2}(\dot{y})^2 = 2\dot{y} - 2y^3$$

$$\boxed{\text{Pas de Matrices au LINÉAIRE}}.$$

3) Mq $\dot{y}^2 = 4y^2(1-y)$

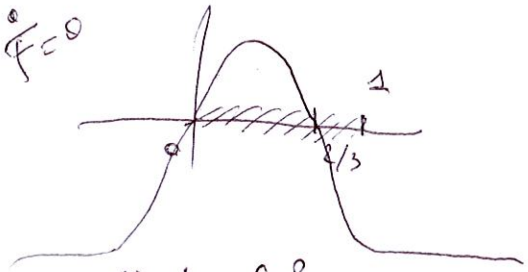
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{2}\right) - 2\frac{d}{dt}(y^2) - 3\frac{d}{dt}(y^3)$$

4) Dmq solu° $\exists\ \forall t$, q'elle vérifie , $y''=\tilde{f}(y)$, $\tilde{f}$ est lipschitz.

sol°s stat°s $\dot{F}=0$ $0\leq y(t)\leq 1$ TVI $\boxed{0 \text{ pt fixe}}$

Th C L g s'appliq à

$(\tilde{PC})\ \begin{cases} Y'=\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}'=\tilde{F}(Y):=\begin{pmatrix} z \\ \tilde{f}(y)\end{pmatrix} \\ Y(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{cases}$



$4y-6y^2=y(4-6y)$

$-6y^2+4y$

$4-6y=0$
$4=6y$
$\frac{2}{3}=y$

$y=\frac{1}{x}$, $y'=\frac{-x}{x^2}$, $y''=-\frac{[\dot{x}x^2+2x^3]}{x^4}$

$\begin{cases}\ddot{y}=4y-6y^2\\ y(0)=1\\ \dot{y}(0)=0.\end{cases}$

$\dot{y}^2=4y^2(1-y)$

$\Leftrightarrow 1-y\geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y\leq 1}$.

$\dot{y}^2=4y^2(1-y) \Leftrightarrow |\dot{y}|=\sqrt{4y^2(1-y)}$

$\dot{y}=2y\sqrt{1-y}$.

$\int_0^t \dot{y}(s)\,ds=2\int_0^t y(s)\sqrt{1-y(s)}\,ds$

$\boxed{\text{Mq } 0\leq y}$

Spps par l'absurde $\exists t^*\in I$, $y\leq 0$, comme $y(0)=1>0$

$\Rightarrow$ (TVI) $\exists \bar{t}$, $y(\bar{t})=0$, par (I), on a aussi $y'(\bar{t})=0$.

Or y solu° I (PC) $\begin{cases} y''=f(y)\\ y(\bar{t})=0,\ y'(\bar{t})=0\end{cases}$

Or 0 solu° (PC)

Par unicité, on a $y\equiv 0$ ce q contredit $y(0)=1$

$\Rightarrow \forall t\in I,\ 0\leq y(t)\leq 1$

$\tilde{f}(y)=\begin{cases} f(y) & \text{si } y\in[0,1]\\ & \text{si } y>2\\ & \text{si } y<-1\end{cases}$

$0\leq y\leq 1$. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$$\dot{y} = 2y\sqrt{1-y}$$

$$\frac{\dot{y}}{y\sqrt{1-y}} = 2 \quad , \quad \int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y(s)\sqrt{1-y(s)}}\, ds = 2$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{du}{u\sqrt{1-u}}$$

$s = \sqrt{1-u}$

$\Leftrightarrow u = 1 - s^2$

$u = y(s)$

$du = \dot{y}(s)\, ds$

$\cancel{\dot{y}(s) = \frac{du}{ds}}$

$$-2\int \frac{1}{1-s^2}\,\frac{s}{s}\, ds = \cancel{\frac{1}{2}} \quad = -2\,\mathrm{arcth}(s)$$

$$\left[\mathrm{arcth}(s)\right]_{y(0)}^{y(t)} \quad \mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(t)}\right) - \mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(0)}\right) = \cancel{2}t$$

$$y(t) = 1 - th^2(t)$$

$$\frac{d}{ds}1-s^2 = \frac{du}{ds}$$

$du = -2s\, ds$

$$\frac{d}{du}\sqrt{1-u}\,\frac{ds}{du}$$

$$\left(\sqrt{v}\right)' = \frac{v'}{2\sqrt{v}} \quad : \sqrt{1-u} = \frac{-1}{2\sqrt{1-u}},$$

$u = y(t)$

$$\frac{d\dot{y}(s)}{ds} = \frac{du}{ds} \Leftrightarrow \dot{y}\, du = \dot{y}(s)\, ds$$

$x = y(s)$

$$\mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(t)}\right) - \cancel{\mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-y(0)}\right)} = t$$

$$\sqrt{1-y(t)} = \tanh^2(t)$$

$$y(t) = -th^2(t) + 1$$

$$\arccos = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan = \int \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{arcsinh} = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathrm{arctanh} = \int \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int_0^{\mathrm{arcsinh}(x)} \frac{ch\, u}{\sqrt{1+sh^2(u)}}\, du$$

$$\dot{y}(s) = \frac{d}{ds}y(s) = \frac{d}{ds}x$$

$$1 + sh^2(t) = ch^2(t)$$