M42 : Formes bilinéaires, espaces euclidiens

Licence de Mathématiques L2 S4 – Université de Lille – Année 2019-2020

Liste de questions de bonus

Question 1. Exercice 1.4 de la feuille TD4 : Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 2. Exercice 1.5 de la feuille TD4 : Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 3. Exercice 1.6 de la feuille TD4 : Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 4. Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 5. Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 6. Transformer l'équation d'une conique de $\mathbb{R}^2$ à une forme normale par une isométrie affine :

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

Préciser les valeurs des paramètres métriques de la conique tels que les demi-axes (réels ou imaginaires) ou le paramètre focal, le cas échéant. Présenter la conique par un dessin en coordonnées Oxy, en indiquant la position des axes du nouveau système de coordonnées $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ dans lequel la conique se réduit à la forme normale.

Question 7. Exercice 2, questions 1-3 de la feuille TD4 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E \setminus \{0\}$ et $f_a \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(x) = a \wedge x$ pour tout $x \in E$.

1. Déterminer $\ker f_a$ et $\operatorname{im} f_a$.
2. Déterminer f_a^*.
3. Montrer que f_a^2 est diagonalisable en une base orthonormée.

Question 8. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $a \in E\setminus\{0\}$ et $f_a \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(x) = a \wedge x$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que pour tout endomorphisme anti-symétrique de E (c'est à dire, tel que $f^* = -f$) il existe $b \in E$ tel que $f = f_b$ dans la notation de la question 7 (Exercice 2 question 4 de la feuille TD4).
2. Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer l'équivalence : $f = -f^* \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in E$, $x \perp f(x)$.

Question 9. Soient E un $\mathbb{C}$-espace hermitien de dimension finie n. Démontrer : pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : a) $\dim F^\perp = n - \dim F$; b) $F^{\perp\perp} = F$; c) $F \oplus F^\perp = E$.

Question 10. Soient E un $\mathbb{C}$-espace hermitien de dimension finie n. Démontrer : Il existe des bases orthonormées dans E.

Question 11. Démontrez : toute matrice hermitienne de rang r se représente par une somme de r matrices hermitiennes de rang 1.

Question 12. Démontrer que si A est une matrice hermitienne définie positive, alors A^{-1} est aussi hermitienne définie positive.

Question 13. On définit pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$q(x) = 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 2|x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(x_1\overline{x}_2) + 2\operatorname{Re}(x_2\overline{x}_3) + ix_1\overline{x}_3 - i\overline{x}_1x_3.$$

1. Vérifier qu'il existe une forme hermitienne f sur $\mathbb{C}^3$ telle que $q(x) = f(x,x)$, et écrire la matrice H de f dans la base canonique.

2. Montrer que f est un produit scalaire hermitien.
3. Construire une base orthogonale pour ce produit scalaire hermitien.

Question 14. On définit pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$q(x) = 2|x_1|^2 + 5|x_2|^2 - 6\,\mathrm{Im}(\overline{x}_1 x_2).$$

1. Vérifier qu'il existe une forme hermitienne f sur $\mathbb{C}^2$ telle que $q(x) = f(x,x)$, et écrire la matrice H de f dans la base canonique.
2. Montrer que f est un produit scalaire hermitien.
3. Construire une base orthogonale pour ce produit scalaire hermitien.

Question 15. (Possibilité binôme.) On munit $\mathbb{C}^2$ de deux formes hermitiennes : la première, notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$, est le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^2$, et l'autre, notée h, est déterminée par :

$$\forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2, \quad h(x,x) = |x_1|^2 - |x_2|^2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left(\overline{x}_1 x_2\right).$$

1. Précisez la matrice H de la forme hermitienne h dans la base standard (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$.
2. Trouvez une base (w_1, w_2) de $\mathbb{C}^2$ qui soit à la fois orthogonale pour h et orthonormée pour le produit scalaire standard. La forme hermitienne h est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$?
3. Un vecteur $v \in \mathbb{C}^2$ est dit isotrope pour h si $h(v,v) = 0$. Déterminer tous les vecteurs isotropes pour h.
4. Existe-t-il une base orthonormée de $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ dont les deux vecteurs soient isotropes pour h ? Justifiez.

Question 16. Soit $A \in \mathscr{H}_n^+$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Montrer que si pour un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $a_{ii} = 0$, alors $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pour tous $j = 1, \dots, n$.

Question 17. Démontrez :

1. Soit $A \in \mathscr{H}_n^{++}$. Alors il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^* P$.
2. Soient $A \in \mathscr{H}_n^{++}$, $B \in \mathscr{H}_n$. Alors on peut trouver $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^* A P = I_n$ et que $P^* B P$ soit diagonale. (C'est la question 1 de l'Exercice 7 de la feuille TD4.)

Question 18. Démontrer que le sous-groupe $\mathbf{U}(h_A)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ formée des matrices P préservant la forme hermitienne h_A sur $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ peut être décrite comme suit :

$$\mathbf{U}(h_A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ |a| = 1 \right\}.$$

Question 19. Démontrer que le sous-groupe $\mathbf{U}(h_A) = \mathbf{U}(1,1)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ formée des matrices P préservant la forme hermitienne h_A sur $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ se décrit par :

$$\mathbf{U}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha\overline{b} \\ b & \alpha\overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ |a|^2 - |b|^2 = |\alpha|^2 = 1 \right\}.$$

Question 20. Démontrer qu'il est impossible de diagonaliser simultanément les deux formes hermitiennes h_A, h_B sur $\mathbb{C}^2$ données par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire, il n'existe pas $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que les matrices P^*AP, P^*BP soient toutes les deux diagonales. (C'est la question 2 de l'Exercice 7 de la feuille TD4.)

Question 21. (Possibilité binôme.) Démontrer qu'il est toujours possible de diagonaliser simultanément les deux formes hermitiennes h_A, h_B sur $\mathbb{C}^2$ données par les matrices $A, B \in \mathscr{H}_2^+$, c'est à dire, il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que les matrices P^*AP, P^*BP soient toutes les deux diagonales. (C'est la question 3 de l'Exercice 7 de la feuille TD4.) *Indication.* Le cas où au moins une des deux formes est définie positive est couvert par la question 17. Si h_A, h_B sont de rang 1, on commence par réduire au cas où le seul élément non nul de A est a_{11}, alors les matrices P qui préservent cette propriété de A sont décrites par la question 18, et on peut regarder comment ces matrices opèrent sur les éléments de la matrice de h_B.

Question 22. (Possibilité binôme.) Démontrer qu'il est possible de diagonaliser simultanément les deux formes hermitiennes h_A, h_B sur $\mathbb{C}^2$ données par les matrices $A, B \in \mathscr{H}_2$ si h_A, h_B n'ont pas de vecteur isotrope commun non nul. C'est à dire, on suppose qu'il n'existe pas de vecteur $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $h_A(v,v) = h_B(v,v) = 0$, et on montre qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que les matrices P^*AP, P^*BP soient toutes les deux diagonales. *Indication.* Pour le premier vecteur d'une base (u_1, u_2), dans laquelle h_A, h_B se diagonalisent, on peut choisir une solution de $Au_1 = \lambda Bu_1$, où λ est une racine du polynôme $F(T) = \det(A - TB)$.

Question 23. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{H}_E$.

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif et montrer : $u \in \mathscr{H}_E^+ \iff \operatorname{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, où le spectre $\operatorname{Spec}(u)$ de u est l'ensemble des valeurs propres complexes de u.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme auto-adjoint positif de trace nulle ?

Question 24. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{H}_E$.

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme auto-adjoint défini positif et montrer :

$$u \in \mathscr{H}_E^{++} \iff \operatorname{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

2. Enoncer et justifier l'analogue matriciel de cette équivalence.

Question 25. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n^{++}$ et $Q_A(x) = \sum_{i,j=1,\dots n} a_{ij} x_i x_j$ la forme définie positive associée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'intégrale multiple généralisée $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q_A(x)}\,\mathrm{d}x$ est convergente et sa valeur est $\left(\sqrt{\pi}\right)^n |A|^{-\frac{1}{2}}$.

Question 26. Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que $(u, v) \mapsto \operatorname{tr}(u^* \circ v)$ est un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) sur $\mathscr{L}(E)$. Exprimer ce produit scalaire en fonction des matrices de u, v dans une base orthonormée.

b) En supposant que $u \in \mathscr{S}(E)$ (resp. $u \in \mathscr{H}_E$), exprimer la norme $\|u\|$, associée au produit scalaire du point a), en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de u.

Question 27. Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension finie n et $u \mapsto \|u\|$ la norme introduite sur $\mathscr{L}(E)$ dans l'exercice précédent. Démontrer les inégalités : a) pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$; b) pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $|\operatorname{tr} u| \leq \sqrt{n}\|u\|$.

Question 28. Soient E un espace hermitien de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est anti-auto-adjoint (ou anti-hermitien) si $u^* = -u$.

1. Démontrer que tout endomorphisme anti-auto-adjoint u de E se diagonalise dans une base orthonormée de E et que les valeurs propres de u sont purement imaginaires. (*Indication* : u est anti-auto-adjoint $\iff$ iu est auto-adjoint.)
2. Démontrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$ est anti-hermitien, alors u^2 est hermitien et $u^2 \leq 0$.
3. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ non nul, antisymétrique et à trace nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que λu soit unitaire.

Question 29. Soient E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est anti-symétrique, et on écrit $u \in \mathscr{A}_E$, si $u^* = -u$.

1. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est anti-symétrique si et seulement si $\exp(tu)$ est spécial orthogonal (c'est à dire, $\exp(tu) \in \mathbf{SO}(E)$) pour tous $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer par un exemple que $\exp(u) \in \mathbf{SO}(E) \not\Longrightarrow u \in \mathscr{A}_E$.
3. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ antisymétrique non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que λu soit une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.

Question 30. Pour toute matrice $A \in M_n(R)$ telle que $|I_n + A| \neq 0$, on pose $A^\sharp = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ (la transformée de Cayley de A). Montrer :

1. Si $|I_n+A| \neq 0$, alors $|I_n+A^\sharp| \neq 0$ et $A^{\sharp\sharp} = A$. (On peut reformuler la condition $|I_n+A| \neq 0$ comme la non-existence de vecteurs propres de valeur propre -1).
2. Supposons que $|I_n + A| \neq 0$. Alors A est anti-symétrique si et seulement si $A^\sharp$ est orthogonale, et vice versa : A est orthogonale si et seulement si $A^\sharp$ est anti-symétrique.

Question 31. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{O}(n)$.

1. Notons $P(T)$ le polynôme caractéristique de A. Montrer que $P\left(\frac{1}{T}\right) = \pm\frac{P(T)}{T^n}$.
2. Supposons $n = 3$, $|A| = 1$ (c'est à dire, $A \in \mathbf{SO}(3)$). Alors :
   (a) $\left(\operatorname{tr} A\right)^2 - \operatorname{tr}(A^2) = 2\operatorname{tr} A$;
   (b) $\left(\sum_{i=1}^{3} a_{ii} - 1\right)^2 + \sum_{i<j}(a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$.

Question 32. Montrer que si $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbf{U}(n)$, alors $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} p_{ij}\right| \leq n$. Quand a-t-on l'égalité ?

Question 33. Soient E un espace euclidien ou hermitien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_n \in E$. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$. Quand a-t-on l'égalité ?

Question 34. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Quand a-t-on l'égalité ?

Question 35. Soient E un espace hermitien de dimension finie, $u \in \mathscr{H}_E$ et $\lambda_{\max}$ la plus grande des valeurs propres de u. Démontrer le théorème de Courant–Fischer suivant :

$$\lambda_{\max} = \sup \left\{ \frac{\langle x | u(x) \rangle}{\|x\|^2} \right\}_{x \in E \setminus \{0\}}.$$

Question 36. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u est aussi stable par u^*.

Question 37. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, $F^\perp$ est stable par u.

Question 38. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de u^*.

Question 39. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si il existe $h, g \in \mathscr{H}(E)$ tels que $u = h + ig$ et $h \circ g = g \circ h$.

Question 40. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Question 41. Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle, u est normal, ce qui est noté $u \in \mathscr{N}(E)$, si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Question 42. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2 \quad \text{(inégalité de Schur)},$$

l'égalité s'étant réalisée si et seulement si $A \in \mathscr{N}_n$.

Question 43. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice $A = B + iC$, où $B, C \in \mathscr{H}_n$. Démontrer :

$$\sum_{i=1}^{n} |\operatorname{Re} \lambda_i|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{ij}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} |\operatorname{Im} \lambda_i|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |c_{ij}|^2.$$

Question 44. On considère une forme quadratique Q_A sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que les mineurs *principaux* $|A_{i_1 \ldots i_k}|$ de A de taille k sont les déterminants des sous-matrices de A de taille k, formées des éléments situés sur les intersections de k colonnes et k lignes aux mêmes numéros $i_1 \ldots i_k$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)$:

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}.$$

Les mineurs *dominants* de A sont les n mineurs

$$\Delta_1 = |A_1| = a_{11}, \ \ldots, \ \Delta_k = |A_{1 \ldots k}|, \ \ldots, \ \Delta_n = |A_{1 \ldots n}| = |A|.$$

1. Enoncer le critère pour que Q_A soit définie positive en fonction des mineurs dominants.
2. Donner un exemple montrant que la positivité des mineurs dominants de A ne suffit pas pour garantir la positivité de Q_A.
3. Démontrer que si Q_A est positive, alors tous les mineurs principaux de A sont positifs.

Question 45. On considère une forme quadratique $Q = Q_A$ sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que les mineurs *principaux* $|A_{i_1 \ldots i_k}|$ de A de taille k sont les déterminants des sous-matrices de A de taille k, formées des éléments situés sur les intersections de k colonnes et k lignes aux mêmes numéros $i_1 \ldots i_k$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)$:

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que Q_A est positive si et seulement si tous les mineurs principaux de A sont positifs.
2. Démontrer que si Q_A est positive de rang k, alors il existe un mineur principal de A de taille k strictement positif.

Indication. En supposant Q positive de rang k, on peut considérer une décomposition de $E = \mathbb{R}^n$ en somme directe $E = F \oplus N$, où $\dim F = k$, $Q|_F$ est définie positive et $N = \ker Q = \ker A$. Chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ se décompose en la somme $e_i = e'_i + e''_i$, $e'_i \in F$, $e''_i \in N$, et $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e'_i, e'_j)$ pour tous $i, j = 1, \ldots n$, où φ est la polaire de Q.

Question 46. Montrer que si $S_1, S_2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de $S_1 S_2$ sont positives.

Question 47. Trouvez un exemple d'une matrice complexe symétrique $A \in M_2(\mathbb{C})$ (c'est à dire, telle que ${}^tA = A$) non nulle possédant chacune des propriétés suivantes : 1) A hermitienne ;

2) unitaire non hermitienne ; 3) anti-hermitienne non unitaire ; 4) normale, mais ni hermitienne, ni unitaire, ni anti-hermitienne ; 5) diagonalisable mais non normale ; 6) non diagonalisable.

QUESTION 48. (Possibilité binôme.) Démontrer :

1. Si $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ ont le même polynôme caractéristique : $P_A = P_B$, alors il existe une matrice $\Omega \in \mathbf{O}(n)$ telle que $A = \Omega B\, {}^t\Omega$.
2. Si $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A_1A_2 = A_2A_1$, $B_1B_2 = B_2B_1$, et si pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les matrices $xA_1 + yA_2$, $xB_1 + yB_2$ ont le même polynôme caractéristique : $P_{xA_1+yA_2} = P_{xB_1+yB_2}$, alors il existe une matrice $\Omega \in \mathbf{O}(n)$ telle que $A_1 = \Omega B_1\, {}^t\Omega$, $A_2 = \Omega B_2\, {}^t\Omega$.
3. La conclusion du point précédent n'est plus vraie, en général, si on remplace l'hypothèse $P_{xA_1+yA_2} = P_{xB_1+yB_2}$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par juste deux égalités $P_{A_i} = P_{B_i}$, $i = 1, 2$.

Indication. Les égalités $P_{A_i} = P_{B_i}$, $i = 1, 2$ entraînent que A_1, B_1 ont le même spectre, disons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ (les λ_i sont distincts), A_2, B_2 ont le même spectre, disons $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ (les μ_i sont distincts), et de plus, les dimensions des sous-espaces propres respectifs (égales aux multiplicités des racines du polynôme caractéristique) sont les mêmes : $\forall i = 1, \dots r$, $\dim V_{\lambda_i}(A_1) = \dim V_{\lambda_i}(B_1)$ et $\forall j = 1, \dots s$, $\dim V_{\mu_j}(A_2) = \dim V_{\mu_j}(B_2)$. C'est plus faible que la condition qui garantie l'existence de Ω avec les propriétés voulues : $\forall i = 1, \dots, r\ \forall j = 1, \dots, s$, $\dim(V_{\lambda_i}(A_1) \cap V_{\mu_j}(A_2)) = \dim(V_{\lambda_i}(B_1) \cap V_{\mu_j}(B_2))$.

QUESTION 49. (Possibilité binôme.) Soient $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $P_{xA_1+yA_2} = P_{xB_1+yB_2}$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la conclusion du point 2 de la question 48 n'est plus vraie, en général, si on supprime l'hypothèse de commutation de A_i, B_i. *Indication* : un contre-exemple est donné par les matrices $A_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

QUESTION 50. Soit A une matrice normale, $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice normale B telle que $A = B^k$ (sans oublier de justifier la normalité de la matrice B construite).

QUESTION 51. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes normaux d'un espace hermitien E tels que $\operatorname{im} u \perp \operatorname{im} v$. Montrer que $u + v$ est normal.

QUESTION 52. Soient u un endomorphisme normal et $u = wp$, où w est unitaire, et p est hermitien positif. Montrer que $wp = pw$.

QUESTION 53. Soient E un espace hermitien, $u, v \in \mathscr{N}(E)$. Montrer :

1. Si $u, v \in \mathscr{H}(E)$, alors $uv \in \mathscr{H}(E) \iff uv = vu$.
2. Si uv est normal, alors vu est aussi normal.
3. Si $uv = vu$, alors uv est normal.

QUESTION 54. Pour $A, B \in \mathscr{H}_n$ ou $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A > B$, $B < A$ (resp. $A \geq B$, $B \leq A$) si $A - B > 0$ (resp. $A - B \geq 0$). Montrer que si $A > B > 0$, alors $|A| > |B|$ et $A^{-1} < B^{-1}$.

Question 55. Pour $A, B \in \mathscr{H}_n$ ou $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A > B$, $B < A$ (resp. $A \geq B$, $B \leq A$) si $A - B > 0$ (resp. $A - B \geq 0$). Montrer que si $A > 0$, alors $A + A^{-1} \geq 2I_n$.

Question 56. (Possibilité binôme.) Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^* & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice hermitienne définie positive.

1. Montrer que $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ et $\det A = \det A_1 \cdot \det(A_2 - B^* A_1^{-1} B)$ *Indication.* $\det A = \det(\Lambda A)$, où on cherchera une matrice Λ triangulaire par blocs, de la forme $\Lambda = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_l \end{pmatrix}$, telle que $\Lambda A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (méthode du pivot de Gauss par blocs).
2. Montrer que $0 < A_2 - B^* A_1^{-1} B < A_2$. En conclure que $\det A \leq \det A_1 \det A_2$ et que l'égalité est atteinte si et seulement si $B = 0$
3. En déduire l'inégalité d'Hadamard :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \forall A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{H}_n^{++}, \quad \det A \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$
l'égalité étant atteinte si et seulement si A est diagonale.

Question 57. En utilisant la question 56, démontrer : pour toute matrice carrée X,
$$|\det X|^2 \leq \left(\sum_i |x_{1i}|^2 \right) \dots \left(\sum_i |x_{ni}|^2 \right).$$

Question 58. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^* & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice hermitienne définie positive, comme dans la question 56, mais supposons en plus que B est une matrice carrée. Démontrer :
$$|\det B|^2 < \det A_1 \det A_2.$$

Question 59. (Possibilité binôme.) Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, notons $M_{\hat{1}}$ la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue par la suppression de la première colonne et de la première ligne de M. Pour deux matrices $A, B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, démontrer l'inégalité
$$\frac{|A+B|}{|A_{\hat{1}} + B_{\hat{1}}|} \geq \frac{|A|}{|A_{\hat{1}}|} + \frac{|B|}{|B_{\hat{1}}|},$$
en suivant le plan que voici.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|Ax \rangle \langle y|A^{-1}y \rangle$. Ici on représente tous les vecteurs par les colonnes de leurs coordonnées. (*Indication.* On pourra exprimer tous les vecteurs x, y en fonction de leurs coordonnées dans une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise.)
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\langle y|A^{-1}y \rangle \neq 0$ et
$$\frac{1}{\langle y|A^{-1}y \rangle} = \min_{\langle x|y \rangle \neq 0} \frac{\langle x|Ax \rangle}{\langle x|y \rangle^2}.$$
Sur quel vecteur x le minimum est-il atteint ?

3. Montrer que pour $y = e_1$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, le minimum du point précédent est égal à $\frac{|A|}{|A_{\hat{1}}|}$.
4. Montrer que $\min_x f(x) + \min_x g(x) \leq \min_x(f(x) + g(x))$, quelles que soient deux fonctions f, g pour lesquelles les deux membres de l'inégalité ont un sens, et conclure par l'application de cette inégalité aux fonctions $f(x) = \frac{\langle x|Ax\rangle}{\langle x|e_1\rangle^2}$, $g(x) = \frac{\langle x|Bx\rangle}{\langle x|e_1\rangle^2}$.

Question 60. Soient $A \in \mathscr{H}_n^{++}$, $B \in \mathscr{H}_n^{+}$. Démontrer que $|A + B| \geq |A| + |B|$, l'égalité étant atteinte si et seulement si $B = 0$.

Question 61. Soient $A \in \mathscr{H}_n^{++}$, $B \in \mathscr{H}_n$. Démontrer que $|A + iB| \geq |A|$, l'égalité étant atteinte si et seulement si $B = 0$.

Question 62. Soient $A \in \mathscr{H}_n^{+}$, $B \in \mathscr{H}_n$. Démontrer que si $|A + iB| = 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = Bx = 0$.

Question 63. Soit $A \in \mathscr{H}_n^{++}$. Montrer que $|A|^{1/n} = \min\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AB)\right)$, où B parcourt toutes les matrices de $\mathscr{H}_n^{++}$ de déterminant 1. *Indication.* Réduire le problème au cas où A est diagonale et utiliser l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique de n réels positifs.

Question 64. (Possibilité binôme.) Soient $u, v \in \mathscr{H}(E)$ deux projecteurs dans une espace hermitien E (un endomorphisme hermitien u est appelé projecteur si $u^2 = u$). Montrer que $\operatorname{Spec}(uv) \subset [0, 1]$. On pourra suivre le plan que voici :

1. Montrer que uv et $(uv)^*(uv)$ ont le même polynôme caractéristique.
2. En déduire que le valeurs propres de uv sont des réels positifs.
3. Si $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de uv, alors $uv = 0$.
4. Montrer que si $\lambda > 0$ est une valeur propre de uv et x est un vecteur propre de uv de valeur propre λ, alors $u(x) = x$ et $\lambda = \frac{\langle x|v(x)\rangle}{\|x\|^2}$.
5. Dans la notation du point précédent, se servir de la décomposition de x dans une base orthonormée, dans laquelle v se diagonalise, pour montrer que $\lambda \leq 1$.

Question 65. Soient E un espace hermitien, $u \in \mathbf{U}(E)$, $p \in \mathscr{H}^+(E)$. Montrer que $|\operatorname{tr}(up)| \leq \operatorname{tr} p$. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

Question 66. Soient E un espace hermitien et $u, v \in \mathscr{H}^+(E)$. Montrer que $|\operatorname{tr}(uv)| \leq \operatorname{tr} u \cdot \operatorname{tr} v$.

Question 67. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $H \in \mathscr{H}_n^{++}$ telles que $H - A^*HA > 0$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

Question 68. Trouver l'unique $B \in \mathscr{S}_2^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Question 69. Trouver l'unique $B \in \mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Question 70. Trouver l'unique $B \in \mathscr{S}_4^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 71. Trouver l'unique $B \in \mathscr{H}_2^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3\,i \\ -3\,i & 5 \end{pmatrix}.$$

Question 72. Soit E un espace hermitien, $u \in \mathscr{H}(E)$. Montrer que $u > 0$ si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\langle \_ | \_ \rangle) = I_n.$$

Question 73. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^2$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

Question 74. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^2$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4+3\,i \\ 4-3\,i & 5 \end{pmatrix}$$

Question 75. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Question 76. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Question 77. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 78. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 79. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^3$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 80. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme anti-hermitien de $\mathbb{C}^2$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ est un paramètre constant})$$

Question 81. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme anti-hermitien de $\mathbb{C}^2$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2\,i & 2+i \\ -2+i & -2\,i \end{pmatrix} .$$

Question 82. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme anti-hermitien de $\mathbb{C}^3$ donné par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Question 83. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme unitaire de $\mathbb{C}^2$ donné par la matrice :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} .$$

Question 84. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme unitaire de $\mathbb{C}^3$ donné par la matrice :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix} .$$

Question 85. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme unitaire de $\mathbb{C}^3$ donné par la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Question 86. La matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & i & -1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle unitaire ? anti-hermtienne ? hermitienne ? Diagonalisez-la en base orthonormée.

Question 87. La matrice
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & i & 1 \\ -1 & -i & -1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}$$
est-elle unitaire ? anti-hermtienne ? hermitienne ? Diagonalisez-la en base orthonormée.

Question 88. Est-ce qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, pas forcément orthonormée, telle que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathscr{B}$ soit symétrique ? Si c'est oui, trouvez une telle base $\mathscr{B}$ est donnez la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Question 89. Est-ce qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, pas forcément orthonormée, telle que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathscr{B}$ soit symétrique ? Si c'est oui, trouvez une telle base $\mathscr{B}$ est donnez la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Question 90. Est-ce qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, pas forcément orthonormée, telle que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathscr{B}$ soit symétrique ? Si c'est oui, trouvez un exemple d'une telle base $\mathscr{B}$.

Question 91. Est-ce qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, pas forcément orthonormée, telle que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathscr{B}$ soit symétrique ? Si c'est oui, donnez la matrice de Gram $G = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\langle \_ | \_ \rangle)$ du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ dans une telle base $\mathscr{B}$ convenable.