1

Exercice 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 & 5 & 8 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

i) $\sigma = (17329)(4586)$

ii) $\sigma = (17)(13)(12)(19)(45)(48)(46)$

iii) $\text{Sign}(\sigma) = (-1)^{\text{nbre de transpositions}}$

$$= (-1)^7 = -1$$

(iv) $(i_1 i_2) \circ (i_2 i_3) \circ (i_3 i_4)(j) = \begin{cases} i_1 & \text{si } j = i_4 \\ i_4 & \text{si } j = i_3 \\ i_3 & \text{si } j = i_2 \\ i_2 & \text{si } j = i_1 \\ j & \text{si } j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \end{cases}$

Donc $(i_1 i_2) \circ (i_2 i_3) \circ (i_3 i_4) = (i_1 i_2 i_3 i_4)$

(v) $(i_1 i_2 \cdots i_p) = (i_1 i_2) \circ (i_2 i_3) \circ \cdots \circ (i_{p-1} i_p)$

Tout cycle de longueur p s'écrit comme produit de p transpositions. Comme toute permutation se décompose en produit de cycle à support disjoints

et que la somme des longueurs des cycles ②
est inférieure à n, on en déduit que
toute permutation x décompose en produit
d'au plus n transpositions.

Exercice 3

(i) $$|A_x| = \begin{vmatrix} x-1 & x-4 & -3 & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 4 & x+3 & 1 \\ 1 & 2x+4 & -x-1 & x+1 \end{vmatrix} \quad L_2 - L_3$$

$$= x \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -1 \\ 1 & x+3 & 1 \\ 1 & -x-1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 1 & x+3 & 1 \\ 1 & -x-1 & x+1 \end{vmatrix} \quad L_1 + L_2$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x+3 & 1 \\ 1 & -x-1 & x+1 \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=} x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & -x-2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -x-2 & x+1 \end{vmatrix} = x^2(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x+2 \end{vmatrix} \quad L_2 + L_1$$

$$= x^2(x+2)^2$$

ii) Si $x \neq 0$ et $x \neq -2$

alors A_x est inversible et $\ker(A_x) = \{0\}$.

Soit $x = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 = -L_2$ et $L_2 = L_3$ et L_1 et L_4 sont linéairement indépendantes. Donc A_0 est de rang 2

Donc par le théorème du rang $\dim \ker A_0 = 2$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A_0$

et sont libres.

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\ker(A_0)$

$x = -2$

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poson le systeme

$$\begin{cases} -3x - 6y - 3z - t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \\ x + 4y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z - t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \\ 4y + 2t = 0 \\ -6y - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z - t = 0 \\ y = t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = t = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker A_{-2} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker A_{-2}$

Exercice 4 :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -5-t & 4 & -1 \\ -12 & 9-t & -2 \\ -6 & 4 & -t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1+t \\ -12 & 9-t & -2 \\ -6 & 4 & -t \end{vmatrix} \quad L_1 - L_3$$

$$= (1-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -12 & 9-t & -2 \\ -6 & 4 & -t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 9-t & -14 \\ -6 & 4 & -t-6 \end{vmatrix} \quad C_3 + C_1$$

$$= (1-t)\begin{vmatrix} 9-t & -14 \\ 4 & -t-6 \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)\left[(9-t)(-t-6) + 56\right]$$

$$= (1-t)\left[t^2 - 3t + 2\right]$$

$$= (1-t)(t-1)(t-2)$$

$$= -(t-1)^2(t-2)$$

(ii) les valeurs propres sont 1 et 2

(i) Déterminons

dim Ker$(A - Id)$

$$(A - Id) = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -12 & 8 & -2 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x + 3y - z = 0 \\ -12x + 8y - 2z = 0 \\ -6x + 4y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6x + 3y - z = 0 \\ -y = 0 & L_2 - 2L_1 \\ y = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(A - Id) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

et $\dim \text{Ker}(A - Id) = 1$ donc

A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5

$P(A) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \underbrace{P \wedge \chi_A}_{\text{pgcd}(P, \chi_A)} = 1$

$\Leftarrow$) Par le théorème de Bezout,
$\exists B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P.B + \chi_A . C = 1$$

Evaluons cette égalité en A.

$$P(A)B(A) + \chi_A(A)C(A) = Id$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton on en déduit que $P(A)B(A) = Id$
et donc $P(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$) Supposons que $\mathrm{pgcd}(P, \chi_A) \neq 1$

Donc il existe un polynôme de degré ≥ 1 qui divise P et χ_A. Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ (par le théorème de d'Alembert) donc il existe une racine commune à P et χ_A, notons là t.

Alors $P(t) = 0$ et $\chi_A(t) = 0$ $\Rightarrow$ t est valeur propre de A.

$P(X) = (X - t)\, Q(X)$

$\Rightarrow P(A) = (A - t\,\mathrm{Id})\, Q(A)$

Donc $\mathrm{Ker}\, P(A) \neq 0$ et $P(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$.