D'épartement de Mathématiques

M41 - Devoir Surveillé No 1

16 mars 2020 - Durée 2 heure

Documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $n \geq 0$. $x \in \mathbb{R}$.

(1) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

(2) (i) Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$.

(ii) Etudier la convergence uniforme de la la suite $(f_n)_n$ sur $]0, +\infty[$.

(On pourra considérer la suite $x_n = \frac{\pi}{2n}$ $n \geq 1$).

(3) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\, dx.$$

Exercice 2. Soit

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2x + n^3}, \; n \geq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x).$$

(1) Etudier la convergence de cette série et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

(2) (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$,

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^2(x+n)^{k+1}} \quad x \geq 0 \;\text{ et }\; n \geq 1.$$

(b) En déduire que f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 3. Soit la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^n$.

(1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier la convergence en $x = -R$ et $x = R$. En déduire que f est continue sur $[-R, R]$.

(2) (a) Calculer $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$.

(b) Montrer que pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \int_0^x -\ln(1-t)\frac{dt}{t}.$$

(3) (a) Calculer $\lim_{t\to 0^+} \ln(t)\,\ln(1-t)$.

(b) Montrer que si $0 < x < 1$, alors on a

$$f(x) + f(1-x) = f(1) - \ln(x)\,\ln(1-x).$$

(On pourra, utiliser une intégration par partie, puis un changement de variable).

(4) En déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-2^{1-n}}{n^2} = (\ln(2))^2.$$