$M\,31$

$CM \;\; Scribus$

$S_3(nov - dec)$

## Motivaº pr décompositº Dunford

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ f , $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mat

équaº diff $y'(x) = A(y(x))$.

1-dim : $y' = ay \Rightarrow y(x) = e^{ax} \cdot c$ , $c \in \mathbb{R}$ arbitraire

pour mat $B$ $n \times n$ :

$$\to e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = Id + B + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{6} B^3 + \dots$$

- qº CVce ?

$\Delta$ ce $\lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k}_{\text{somme finie}}$ ; oui lim $\exists$.

Pr $t \in \mathbb{R}$, on pose $e^{Bt}$ $\quad e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Bt)^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k = \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{Id} + tB + \frac{t^2}{2} B^2 + \frac{t^3}{6} B^3 +$$

$\to$ f de t.

- qº dérivaº % t ?

$\sum_{k=0}^{\infty}$ est une limite. Prendre dérivée = limite

Idée : $\left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \right)' \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (f'_{k}(t))$

↑ f de t

$$\lim_{k \to \infty} \left( \lim_{n \to \infty} \left( \frac{k}{n} \right) \right) = \lim_{k \to \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left( \lim_{k \to \infty} \left( \frac{k}{n} \right) \right) = \lim_{n \to \infty} (\infty) = \infty.$$

Ici, ça f.

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t^k}{k!} B^k \right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} B^k = B + tB^2 + \frac{t^2}{2} B^3$$

$\to$ On met $B$ en facteur & on trouve :

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right)' = B . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k = B . e^{Bt}$$

$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right) B = e^{Bt} . B$$

$$(e^{Bt})' \overset{\text{oui}}{=} B . e^{Bt} = e^{Bt} . B$$

Ccl : $y(x) = e^{Bx} . c$ , $c \in \mathbb{R}^n$ est une solut de l'ED

$y'(x) = B . y(x)$

Vérificaº : $(e^{Bx} . c)' = B . e^{Bx} . c = B y(x)$

6 mat x vect : uniq [illegible]

Donc cas facile à calculer :

① B mat diagonale $B = \begin{pmatrix} b_1 & & \emptyset \\ & b_2 & \\ \emptyset & & \ddots \\ & & & b_n \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow e^{Bx} = \begin{pmatrix} e^{b_1 x} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & e^{b_n x} \end{pmatrix}$$

au plus dim espace.

② B nilpotente : $\exists N : B^N = 0$ ← mat.

$$\Rightarrow e^{Bx} = Id + xB + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} B^{N-1}$$

somme finie.

Autre ppté $e^x$ :

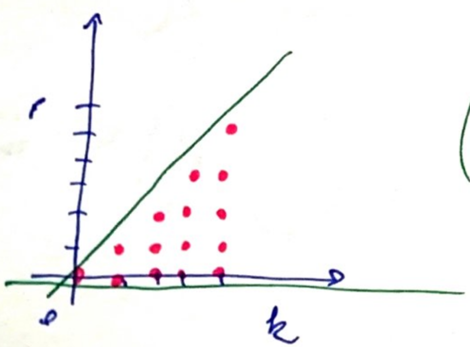
· 1-dim : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

· n-dim (mat) $e^{A+B} \overset{?}{=} e^A \cdot e^B$ $\boxed{\text{NON}}$

Démo 1-dim :

$$e^{a+b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!(k-p)!} a^p b^{k-p} \right) \text{ BDN}$$

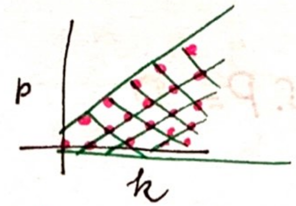


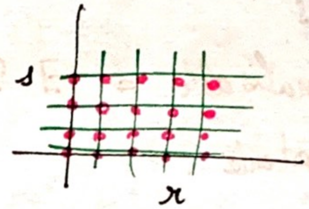

égale à ? $e^a \cdot e^b$

$$\left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \right) \left( \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^s}{s!} \right)$$

A comparer :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{a^p b^{k-p}}{p!(k-p)!} \longleftrightarrow \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^r b^s}{r!\, s!}$$




bijection entre les deux grilles.

Changement de variables : $r = k$ et $s = k-p$.

$k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, k]\!] \Rightarrow r, s \in \mathbb{N}$.

---

Dimension > 1 : Binôme de Newton ne marche plus

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= A^2 + AB + BA + B^2 \overset{?}{=} A^2 + 2AB + B^2$$

vrai si : $AB = BA$

→ si on a $AB = BA$, alors BDN marche et aussi :

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

Dunford : $A$ mat $n\times n$

$P_A$ scindé alors $\exists$ $S$ et $N$ mat $n\times n$, tq

① $A = S + N$

② $SN = NS$

③ $S$ diagonalisable $\Rightarrow \exists P,\ P^{-1}.S.P = D$

④ $N$ nilpotente.

$y'(x) = A\,y(x) \rightarrow$ solu° $y(x) = e^{Ax}.C$, $C \in \mathbb{R}$

$e^{Ax} = e^{Sx + Nx} = e^{Sx}.e^{Nx}$

on a bien $SN = NS$ ;

$P^{-1}SP = D \Rightarrow S = P.D.P^{-1}$,

on vérifie $e^{PD.P^{-1}x} = P.e^{Dx}.P^{-1}$.

$e^{PDP^{-1}} = Id + PDP^{-1} + \frac{1}{2}(PDP^{-1})^2 +$

$PDP^{-1} + PDP^{-1} + \frac{1}{2}PDP^{-1}PDP^{-1} + \dots$

$= P(Id + D + \frac{1}{2}D^2 \dots)\,P^{-1} = P.e^{D}.P^{-1}$

$e^{Ax} = e^{Sx}e^{Nx} = e^{PDP^{-1}x}.e^{Nx}$

$= P.e^{Dx}.P^{-1}.e^{Nx} = P.e^{Dx}.(Id + Nx + \frac{x^2}{2}N^2 + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1})$

Or $N^m = 0$ nilpotente.

$= P.e^{Dx}.e^{P^{-1}NxP}.P^{-1}$

$N$ nilpotente $\Rightarrow P^{-1}NxP = \hat{N}$ aussi nilpotente.

$= P.\underset{\text{facile}}{e^{Dx}}\,\underbrace{(Id + \hat{N}x + \frac{x^2}{2}\hat{N}^2 + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\hat{N}^m)}_{\text{somme finie}}\,P^{-1}$

<u>Solu° par composante :</u>

$y_i(x) = (e^{Ax}c)_i = \sum_{j=1}^{m}(e^{Ax})_{ij}\,c_j$

$y_i(x)$ de la forme : $e^{ax}$, $x\,e^{ax}$, $x^2 e^{ax}$, ....

$a$ val^r propre de $A$.

**Dunford** : $A = S + N$ avec pptés
$S, N$ uniqs !

**Preuve** : $\triangle$

Prélude : on a mq' $\exists$ base tq

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & \cdots & ? & & \emptyset & & & \emptyset & \\ \emptyset & & \lambda_1 & & & & & & \\ \hline & \emptyset & & \lambda_2 & & ? & & \emptyset & \\ & & & \emptyset & & \lambda_2 & & & \\ \hline & \emptyset & & & \emptyset & & \lambda_p & & ? \\ & & & & & & \emptyset & \cdots & \lambda_p \end{array}\right)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp distinctes.

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & & \emptyset & & \emptyset & & & \emptyset & \\ \emptyset & & \lambda_1 & & & & & & \\ \hline & \emptyset & & \lambda_2 & & \emptyset & & \emptyset & \\ & & & \emptyset & & \lambda_2 & & & \\ \hline & \emptyset & & & \emptyset & & \lambda_p & & \emptyset \\ & & & & & & \emptyset & & \lambda_p \end{array}\right)}_{\text{diagonale}} + \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \cdots & ? & & \emptyset & & & \emptyset & \\ \emptyset & & 0 & & & & & & \\ \hline & \emptyset & & 0 & & ? & & \emptyset & \\ & & & \emptyset & & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & & & \emptyset & & 0 & & ? \\ & & & & & & \emptyset & \cdots & 0 \end{array}\right)}_{\text{nilpotente}}$$

$P^{-1}AP = D + \hat{N}$ ← nilpotente
↑ diagonale.

$\Rightarrow S = P \cdot D P^{-1}$ et $N = P \cdot \hat{N} \cdot P^{-1}$
↓ diagonalisable ↓ nilpotente

On Rq $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & ? \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_p \end{pmatrix}$

on ed $D\hat{N} = \hat{N}D$ et dc $SN = NS$.

3° besoin Lemme.

L : Si $S$ et $N$ mat diagonalisables tq
$\underline{S \cdot S = S' \cdot S}$ alors $\exists$ une base tq
$P^{-1} S P$ et $P^{-1} S P$ diagonale.

On suppose $A = S + N = S' + N'$ avec $S, S'$ diagonalisable
$N, N'$ nilpotente

$SN = NS$ et $N'S' = S'N'$

On vt déduire $S = S'$ et $N = N'$.

$S + N = S' + N' \iff S - S' = N' - N$

Q : $S - S'$ diagonalisable ? $N' - N$ nilpotente ?

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N - N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
nilp. nilp non-nilp.

On vt mq $\underline{SS' = S'S}$.

Preuve : $SA = AS$ car

hypothèse

$S(S+N) = S^2 + SN = S^2 + NS = (S+N)S$
$= (S+N)S = AS$.

$SA = S(S'+N') = (S'+N')S$
$= SS' + SN' = S'S + N'S$

$S$ et $N$ obtenu via chgt de base.

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix} & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \begin{matrix}\lambda_2 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix} & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \begin{matrix}\lambda_p & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{matrix} \end{array}\right)$$

$\ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$

$AS = SA$ ~~et~~ de $\hat{m}$ $AS' = S'A$.

$x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$

? $S'x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$.

Preuve: $(A-\lambda_1 Id)^{m_1} S'x$

$(A-\lambda_1 Id)(A-\lambda_1 Id)\dots(A-\lambda_1 Id) S'x$

$S' \underbrace{(A-\lambda_1 Id)^{m_1} x}_{=0} = 0$

$S'$ préserve $\ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$.

On prend $x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$.

$S'x$ ?

$x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1} \Rightarrow S'x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$

$\Rightarrow S'x = \lambda_1 x$

aussi $S(S'x) = \lambda_1(S'x) = S'(\lambda_1 x) = S'(Sx)$

car $S'(x) \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$

On vient de mq $\forall x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$,

$$S.S'x = S'Sx.$$

$\hat{M}$ argument pr $x \in \ker (A-\lambda_1 Id)^{m_1}$

(ième vp)

Mais $E = \mathbb{R}^n$ = somme directe des $\ker (A-\lambda_i Id)^{m_i}$

$\Rightarrow$ $SS' = S'S$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$SS' = S'S$, à déduire qu'on a aussi $NN' = N'N$.

On a bien mq' $NN' = N'N$.

$$(N-N)^k = \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!(k-p)!} N^p (-N')^{k-p}$$

BDN marche car $NN' = N'N$.

à mq $\exists\, k$ tq $(N-N')^k = 0$ :

- on sait $\exists\, M, M'$ tq $N^M = 0 = (N')^{M'}$.

si on prend $k = M + M'$

Dans la somme $\sum_{p=0}^{k}$ on sépare $p \geq M$, $p < M$.

$$(N-N')^k = \sum_{p=0}^{M-1} \frac{k!}{p!(k-p)!} N^p \cdot (-N')^{k-p}$$

$k = M + M'$

$$+ \sum_{p=M}^{M+M'} \frac{k!}{p!(k-p)!} N^p (-N')^{M+M'-p}$$

- $p \geq M \Rightarrow N^p = 0$

(M) deg où N est nilpotente.

$$0 = \begin{cases} p < M \Rightarrow M + M' - p > M' \\ \qquad k - p > M' \\ \qquad \Rightarrow (-N')^{k-p} = 0 \text{ par déf } M'. \end{cases}$$

(M')

Donc $(N-N')^k$ est bien nilpotente.

On a : $N - N'$ nilpotente, $SS' = S'S \Rightarrow S - S'$ diagonalisable

et $S - S' = N' - N$ dc de diagonalisable.

(vp) tous 0. car nilpotente.

$\Rightarrow S - S' = 0 \Rightarrow S = S'$ et $N = N'$.

$\square$

## Annonce : Forme normale de Jordan

A mat $n \times n$, $P_A$ scindé de il existe une base tq la matrice $P^{-1}AP$ ou la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_N \end{pmatrix}$$

$B_i$ mat carré de la forme $B_i = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a\ 1 \end{pmatrix}$.

⚠ $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 0 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

2) $A, B : E \to E$ et (AB) diagon tq $AB = BA$
alors $\exists\ e_1, \dots, e_n$ base de $B$
tq $A$ et $B$ st diagonales ds cette base

Preuve : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp de $A$.
$\mu_1 \quad \mu_p$ de $B$
$V_i$ = espace propre pr $\lambda_i(A) = \ker(A - \lambda_i Id)$
$W_j$ = espace propre pr $\mu_j(B) = \ker(B - \mu_j Id)$

$A$ diagonalisable $\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{p} V_i$

déf
$\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists\ x_i \in V_i$ : $x_i$ uniq tq $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$

Rq $V_i$ invariant sous $B \Leftrightarrow B(V_i) \subset V_i$ || stable

Preuve $x \in V_i \Leftrightarrow Ax = \lambda_i x$.
$ABx = BAx = B\lambda_i x = \lambda_i Bx \Rightarrow Bx \in V_i$

Prenons $x \in W_j \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ où $x_i \in V_i$.

On va mq : chq $x_i \in W_j$ et dc $x_i \in V_i \cap W_j$.

Rq si on applq $(A - \lambda_1 Id) \circ (\dots) \circ (A - \lambda_p Id) x = 0$

$x = \sum x_i$ et $(A - \lambda_i Id) x_i = 0$
$x_i \in V_i$

$P_i = \prod_{k=1, k\neq i}^{p} (A - \lambda_k Id) = (A - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (A - \lambda_{i-1} Id) \circ (A - \lambda_{i+1}) \circ \dots \circ (A - \lambda_p Id)$

$P_i x = P_i \left( \sum_{k=1}^{p} x_k \right) = \sum_{k=1}^{p} P_i(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \prod_{j=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_i) x_k \overset{*}{=}$

$(A - \lambda_k Id) x_i = (\lambda_i - \lambda_k) x_i$

$* = \underbrace{\left[ \prod_{j=1, j\neq i}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right]}_{\neq 0} x_i$

$P_i x = \left[ \prod_{j=1, j\neq i}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right] x_i$

manque une !

$B . P_i x = B(A - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (A - \lambda_p Id)$
$= (A - \lambda_1 Id) \circ \dots (A - \lambda_p Id) B$

$BA = AB$

$B . P_i x = P_i . Bx \underset{x \in W_j}{=} P_i . \mu_j x = \mu_j (P_i x)$

$\Rightarrow P_i x \in W_j$ $\quad \overbrace{\text{coef} . x_i}^{P_i x} \in W_j$

ccl || $x \in W_j$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ ; $x_i \in V_i \Rightarrow x_i \in W_j$.
$x_i \in V_i \cap W_j$

$x = x_1 + x_2 + x_3$ , $P_1 = \dots$, $P_2 = \dots$, $P_3 = \dots$

## Applicat° du Lemme :

Prenons des bases de chaq $V_i \cap W_j$.

$e_1^{(i,j)}, \dots, e_{d(i,j)}^{(i,j)}$ où $d(i,j) = \dim(V_i \cap W_j)$

On va mq la collect° $\left\{ e_k^{(i,j)} \;\middle|\; \begin{array}{l} i=1,\dots,p,\ k=1 \\ j=1,\dots,q \quad d(i,j) \end{array}\right.$ est une base de $E$.

Si oui, on a trouvé une base ds lq^ll A et B st diagonales.

Prenons $x \in E \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{q} y_j$ & $y_j \in W_j$.

$y_j \in W_j \Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^{p} x_i$, $x_i \in V_i \cap W_j$.

$x_i \in V_i \cap W_j \Rightarrow x_i$ comb. lin. $e_k^{(i,j)}$. (j et i variables)

chq $y_j$ CL des $e_k^{(i,j)}$ (j, i fixes) $\Rightarrow x = \sum y_j$ aussi.

Donc c'est génératrice. Indépendance ?

CL nulle $\overset{?}{\Rightarrow}$ ts les coeffs nuls ?

$$0 = \sum \lambda_k^{(i,j)} e_k^{(i,j)} = \sum_j \underbrace{\left( \sum_i \sum_k \lambda_k^{(i,j)} e_k^{(i,j)} \right)}_{\in W_j} = *$$

car $e_k^{(i,j)}$ est une base dans $V_i \cap W_j$.

$$* \Rightarrow \text{pr chq } j : \sum_i \underbrace{\left( \sum_k \lambda_k^{(i,j)} e_k^{(i,j)} \right)}_{\in V_i} = 0$$

base somme directe dc nul $\Rightarrow$

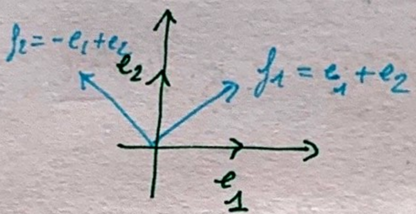
$$\Rightarrow \text{pr chq } i : \sum_k \lambda_k^{(i,j)} e_k^{\overline{(i,j)}} = 0 \quad \text{fixe}$$

base dc vct^rs ind'pdts dc coeff^s st nuls

Donc c'est une base. □

---

@ (non-commut)




$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$A e_1 = e_1$ $\qquad B f_1 = f_1$

$A e_2 = 2 e_2$ $\qquad B f_2 = f_2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ donner B ds base $(e_1, e_2)$ ; on Rq $\underline{AB \neq BA}$.

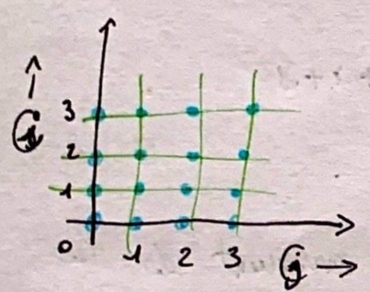
---

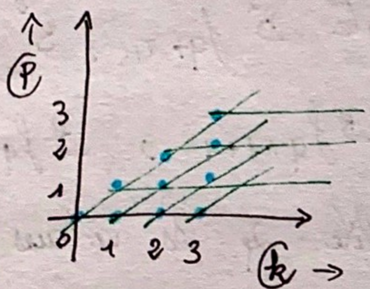
**But** : $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right).$

$$e^x \cdot e^y$$

$$\overset{?}{=} e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

- $= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{x^p y^{k-p}}{p!\,(k-p)!}$ ← ici on a simplifié au $k!$.





↑ lignes $k-p$.

$\boxed{\text{CDV}}$ :

$\begin{cases} p = i \\ k-p = j \end{cases}$ $\begin{cases} p = i \\ k = j+p = j+i \end{cases}$

- $\sum_i \sum_j \frac{x^i y^j}{i!\,j!} \overset{?}{=} \sum_k \sum_p \frac{x^p y^{k-p}}{p!\,(k-p)!}$

tous les points de la grille ts les pts de la grille

**R (Dunford)** :

- $S, S'$ diagonalisab
- $N, N'$ nilpotentes

$A = S+N = S'+N'$.

$SN = NS$ et $S'N' = N'S'$

On av+ mq $SS' = S'S$.

à déduire $\underline{NN' = N'N}$ :

On sait déjà : $AS = SA$ et $AS' = S'A$.

Donc $NN' = (A-S)(A-S') = AA - AS' - SA + SS'$

$= AA - S'A - AS + S'S$

$= (A-S')(A-S)$.

(nécess^e pr mq $N-N'$ nilpotente) cela finit démo Dunford

## Forme normale de Jordan :

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matrice, $P_A$ scindé.

Alors il existe une base tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$

chaque $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \emptyset \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & & \lambda \end{pmatrix}$ ds $\hat{m}$ bloc de Jordan $\to \hat{m}$ $\lambda$.

Comment trouver une telle base ?

Procédure : • Calculer VP distinctes.

Pr chq $\lambda_i$, on pose $B = A - \lambda_i Id$.

1° On calcule une base de $\ker(B)$.

$e_1, \dots, e_q$ si $q$ = multiplicité de $\lambda_i$ on s'arrête.

2° On calcule une base de $\ker(B^2)$. prcq $\ker(B) \subset \ker(B^2)$

On pt supposer q c'est de la forme.

$e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+r}$ si $q+r$ = multiplicité, on s'arrête.

3° On calcule base $\ker(B^3)$ prcq $\ker(B^2) \subset \ker(B^3)$.

On pt supposer q c'est de la forme

$e_1, \dots, e_{q+r}, e_{q+r+1}, \dots, e_{q+r+s}$.

Supposons $q+r+s$ = multiplicité.

jusq le nbr de vecteurs = multiplicité

on rajoute de moins en moins de 15 vecteurs

puis $\mathrm{Im}(B)$

On revient sur nos pas pr trouver la "bonne" base.

$f_{q+r+1}, \dots, f_{q+r+s} \overset{\text{les } \hat{m}s}{=} e_{q+r+1}, \dots, e_{q+r+s}$

On rajoute $Bf_{q+r+1}, \dots, Bf_{q+r+s} = f_{q+1}, \dots, f_{q+s}$

(Th $s \le r$)

On complète ces vecteurs $e_{q+s+1}, \dots, e_{q+r}$ q sont indép de $f_{q+1}, \dots, f_{q+s}$ à $f_{q+1}, \dots, f_{q+r}$.

On rajoute $B^2 f_{q+r+1}, B^2 f_{q+r+s}$

et $Bf_{q+s+1}, Bf_{q+r}$.

On complète ac les vecteurs q manquent ds la liste $e_1, \dots, e_q$.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Trouver une base de la forme normale de Jordan.

(ne marche que si $P_A$ scindé !)

Calcul $P_A$ :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ 0 & 4 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 4 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \left[ (6-\lambda)(-\lambda-1) + 12 \right] = (2-\lambda) \left[ \lambda^2 - 5\lambda + 6 \right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = (2-\lambda)^2 (3-\lambda).$$

$\Rightarrow Sp\, A = \{ 2, 3 \}$

double : $\lambda_1$ $\lambda_2$ : simple

Cas $\lambda_2 = 3$ (simple) : $B = A - 3\,Id = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Calcul ker (B) :

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas $\lambda_1 = 2$ (double) : calcul ker (B) :

$$B = A - 2\,Id = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

indépdt

ici un seul vecteur or $m_{\lambda_1} = 2$ ; on vt un 2e vecteur, dc on pousse calcul vers ker $(B^2)$.

Calcul ker $(B^2)$ :

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al base ker B : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

base ker $B^2$ : $\begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pt aussi prendre ĉ base pr ker $B^2$ : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{rajouté}}$

Base pour Jordan

$$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{e_2}{B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

☺ ker B $\subset$ ker $B^2$.

Calcul $B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Donc Base pr Jordan : $\underset{e_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{e_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}}, \underset{e_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Or $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Calcul $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= 2e_1 + e_2.$

Calcul $Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = 2e_2. = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Calcul $Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_3.$

$$\Longrightarrow A = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ⓐ $A = \begin{pmatrix} -11 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 13 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ FND ?

(c) Polyn Carac ? $P_A(A) = \det(A - X\,Id)$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -11-\lambda & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 13-\lambda & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -11-\lambda & 8 \\ -18 & 15-\lambda \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left((-11-\lambda)(15-\lambda) + 8\times 18\right) \times (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda - 143 + 144)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$$

$Sp\,A = \{1, 2\}$

vp 2 ?

$B_2 = A - 2\,Id$ :

$$B_2\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 11 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + 2C_4$

$$\Rightarrow B_2\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 0 & -5 \\ -18 & 11 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ multiplicité de 2 : 1. base $\ker(B_2) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\2 \end{pmatrix}\right\}$

vp 1 : $\lambda = 1$ multiplicité 3.

$B_1 = A - 1.Id$

$$B_1\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 12 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_1\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 3/2&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & -5 \\ 0 & 12 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + \frac{3}{2} C_4$.

$$B_1\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 3/2&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&3/2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5/2 & -5 \\ 0 & 12 & 9/2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

justifier ind'pdts.

(Augmt pr 2 vecteurs : justif indpdts : non colinéaires.)

base $\ker(A - Id)$ : $\begin{pmatrix} 1\\3/2\\0\\0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2\\3\\0\\0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \dim = 1$ $\neq 3$

étape suivte : calcul Base ker $B^2$.

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 12 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 12 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$e_1, e_2$ sont dans ker $B^2$. car non-colinéaires ; indpdts

$\Rightarrow$ base ker $B^2$ : $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \dim = 2 \neq 3$

Donc calcul base ker $B^3$.

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 10 & -5 \\ -18 & 12 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$\frac{3}{2} e_3 + e_4$ appartient à $\ker B^3$.

base $\ker B^3$ : $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{base de } \ker B^2}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ dim $3 = 3$

Procédure : on pose nouvelle base de $\mathbb{R}^4$ :

$v_1, v_2, v_3, v_4$ par :

1. $v_1$ = base $\ker(A - 2Id) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.

2. $v_2$ = $\boxed{\text{le dernier vecteur}}$ ajouté ds la suite des bases $\ker B$, $\ker B^2$, $\ker B^2$ $= \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}$.

3. $v_3 = Bv_2 = (A - 1.Id).v_2 = \begin{pmatrix}5\\9\\0\\0\end{pmatrix}$.

dans le passage $\ker B \longrightarrow \ker B^2$ : on a rajouté 1 vecteur.

4. $v_4 = Bv_3 = \begin{pmatrix}12\\18\\0\\0\end{pmatrix}$

R9 $\begin{pmatrix}5\\9\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\18\\0\\0\end{pmatrix}$ base $\ker B^2 \subset \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$v_1, v_2, v_3, v_4$ base de $\mathbb{R}^4$. (pas besoin de vérifier).

Matrice de A ds cette base ?

$A v_1 = 2 v_1$

$A v_2 = (A - Id) v_2 + Id(v_2) = Bv_2 + v_2 = v_3 + v_2$

$A v_3 = (A - Id) v_3 + Id(v_3) = Bv_3 + v_3 = v_4 + v_3$

$A v_4 = 1.\, v_4$ car $v_4 \in \ker B$

$$P^{-1}AP = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\quad Av_1 \quad Av_2 \quad Av_3 \quad Av_4$$

R4 Si $\lambda$ valeur propre :

$Av = (A - \lambda Id)v + \lambda Id(v)$

$Av = 1.\, v_{suivant} + \lambda v$.

$$P = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

Supposons qu'on a trouvé une base ds laquelle la mat prd la forme de Jordan.

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ 1 & \lambda_1 & \\ & 1 & \lambda_1\end{matrix} & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \begin{matrix}\lambda_2 & & \\ 1 & \lambda_2 & \\ & 1 & \lambda_2\end{matrix} & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \begin{matrix}\lambda_1 & \\ 1 & \lambda_1\end{matrix} \end{array}\right) = \hat{A}.$$

$\lambda_1$ : multiplicité 5

$\lambda_2$ : 3.

$$(\hat{A} - \lambda_1 Id) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{smallmatrix} & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \begin{smallmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & & \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \\ & & \lambda_2-\lambda_1 \end{smallmatrix} & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

base de ker$(\hat{A} - \lambda_1 Id)$ : $e_3, e_8$.

$1 \leq 2 \leq 5$ mais $2 \neq 5$.

$\Rightarrow$ on calcule $(\hat{A} - \lambda_1 Id)^2$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ \hline & \begin{smallmatrix} (\lambda_2-\lambda_1)^2 & 0 & 0 \\ ? & (\lambda_2-\lambda_1)^2 & 0 \\ ? & ? & (\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{smallmatrix} & \\ \hline & & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

base ker$(\hat{A} - \lambda Id)^2$ : $e_3, e_8, e_2, e_7$.

$4 < 5$.

$\Rightarrow$ on calcule $(\hat{A} - \lambda_1 Id)^2$.

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & \text{inversible} & \emptyset \\ & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ base ker$(\hat{A} - \lambda_1 Id)^3$ :

$\underbrace{e_3, e_8}_{1°}, \underbrace{e_2, e_7}_{2°}, \underbrace{e_1}_{3°}$

$\hat{A} - \lambda_1 Id$

⇝ Modificat° vecteur de base

$$B = \hat{A} - \lambda_1 Id = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ \hline & J & \\ \hline & & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

base ker $B$ : $e_3, e_8$

base ker $B^2$ : $e_3, e_8, e_3, e_7$

base ker $B^3$ : $e_3, e_8, e_2, e_7, e_1 \longleftrightarrow e_3, e_8, e_3, e_2, e_7\ e_1 + e_3$.

On appliq la procédure.

$v_1 = e_1 + e_3$.

$v_2 = B v_1 = e_2$

$v_3 = B v_2 = e_3$

manque $e_7 \Rightarrow v_4 = e_7$

$v_5 = B v_4 = e_8$

---

Autre choix : base ker $B^2$ : $e_3, e_8, e_2 + e_7, e_2 - e_7$.

Dans la procédure ?

$v_1 = e_1 + e_3$

$v_2 = e_2$

$v_3 = e_3$.

Pour ker $B^2$, on a rajouté $e_2 + e_7$ et $e_2 - e_7$.

**Procédure :** Dernier vecteur rajouté devient $v_4$ dans la base de $\ker B^3$.

→ $Bv_4$ appartient à $\ker B^2$. mais n'appartient pas à $\ker B$.

→ on choisit un vecteur parmi ceux rajouté à $\ker B^2$ qui est indépendant de $v_2 = B v_1$.

→ On peut choisir $v_4$.

$v_1$ dernier rajouté en $\ker B^3$.

$\left.\begin{array}{l} v_2 = B v_1 \\ v_4 \text{ rajouté de } v_2 \end{array}\right\}$ "rajouté" en $\ker B^2$

$\left.\begin{array}{l} v_3 = B v_2 \\ v_5 = B v_4 \end{array}\right\}$ 2 dans $\ker B$.

---

$A$ matrice, $\lambda$ vp multiplicité $m$.

$B = A - \lambda Id$

$u_1, \dots, u_p$ base de $\ker B$.

$u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ base de $\ker B^2$.

$u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_s$ base de $\ker B^3$.

On suppose $p + q + s = m$.

On sait $1 \leq p \leq m$.

**Th** ① $p = m \Rightarrow q = s = 0$. ①

on ne peut pas rajouter plus de vecteurs que l'étape précédente.

② $p < m \Rightarrow 1 \leq q \leq p$

$p + q = m \Rightarrow s = 0$.

③ $q < m \Rightarrow 1 \leq s \leq q$.

---

**Procédure pr la base de Jordan :**

① $e_1, \dots, e_s$ : on prend les derniers vecteurs rajoutés

$e_1 = w_1, \dots, e_s = w_s$

② on pose $e_{s+1} = B e_1$, $e_{s+2} = B e_2$, $e_{2s} = B e_3$

garantie parmi les $v_1, \dots v_q$ ; il y a $q-s$ indép de $e_{s+q}, \dots, e_{2s}$

③ On choisit $q-s$ ds la liste $v_1, \dots, v_q$ indép des

$e_{s+1} = B w_1, \dots, e_{2s} = B w_1$.

On les appelle : $e_{2s+1}, \dots, e_{s+q}$

④ $e_{s+q+1} = B e_{s+1}$, $e_{s+q+2} = B e_{s+2}, \dots, e_{s+2q} = B e_{s+q}$

⑤ On complète ac des vecteurs indépdts ds la liste $u_1, \dots, u_p$.

## Preuve TH :

$u_1, \dots, u_p$ base $\ker B$

$u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ base $\ker B^2$

Supposons $q > p$.

On a $Bv_1, \dots, Bv_q \in \ker B$.

$\dim \ker B = p < q \Rightarrow$ vect$^{rs}$ st d'pdts.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_q$ st ts nuls tq $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i B v_i = 0$

$\Leftrightarrow B\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i \in \ker B \Rightarrow$ déf$^{\circ}$ d'1 base.

$\exists \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j u_j$

$\Rightarrow \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_q u_p + (-\lambda_1) v_1 + \dots + (-\lambda_q) v_q = 0$.

Par définit° d'une base (de $\ker B^2$) ts les coeff st nuls.

Contradict° $\nleftarrow$ non ts les $\lambda_i$ nuls $\Rightarrow q \leq p$.

Mq $s \leq q$

Preuve TH :

$u_1, \dots, u_p$ base ker $B$

$u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ base ker $B^2$

Supposons $q > p$.

On a $Bv_1, \dots, Bv_q \in \ker B$.

dim $\ker B = p < q \Rightarrow$ vect$^{rs}$ st d'pdts.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_q$ st ts nuls tq $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i B v_i = 0$

$\Leftrightarrow B\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i \in \ker B \Rightarrow$ déf$^\circ$ d'1 base.

$\exists \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j u_j$

$\Rightarrow \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_q u_p + (-\lambda_1) v_1 + \dots + (-\lambda_q) v_q = 0$.

Par définit$^\circ$ d'une base (de ker $B^2$) ts les coeff st nuls.

Contradict$^\circ$ ā non ts les $\lambda_i$ nuls $\Rightarrow q \leq p$.

Mq $s \leq q$

## R. Jordan :

$A$ $(n \times n)$, $P_A(X)$ : $P_C$ supposé scindé !

(TH) $\exists$ une base ds lq$^{lle}$ la nv$^{ll}$ mat $A$ prd la forme.

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & J_4 & \\ & & & & J_5 \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1 & & \phi \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \phi & & & \lambda^1 \end{pmatrix}$$

On peut avoir :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(A - 2Id)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

carré $= 0$.

$$\text{si } \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(A - 2Id)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

carré $\neq 0$
puissance $4 = 0$.

selon dispos$^\circ$ 1 au-dessus change le comportement

soit $\lambda$ vp de $A$, $P_A$ supposé scindé.

$B = A - \lambda Id$.

On regarde la suite des sous-espaces vectoriels

$\ker(B), \ker(B^2), \ker(B^3), \dots$

(i) $\ker B \subset \ker B^2 \subset \ker B^3 \subset \dots$

$x \in \ker B \Leftrightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^2 x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker B^2$

(ii) Par le Th de la base incomplète

$e_1, \dots, e_p$ base $\ker B$ => système de vecteurs indépendants ds $\ker B^2$ => on peut élargir en une base $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots e_{p+q}$ de $\ker B^2$.

---

suite de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker = \{0\}$, $\ker = \mathrm{Vect}\{e_4\}$, $\ker = \mathrm{Vect}\{e_4\}$ $\ker = \mathrm{Vect}\{e_3, e_4\}$.

$\ker = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

---

? pour $k > 2$ ($m \geq 2$)

$e_1, \dots, e_p$ : base $\ker(B^{k-2})$

$e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q$ base $\ker(B^{k-1})$

$e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_s$ base $\ker(B^k)$.

Alors $s \leq q$.

23

Preuve par l'absurde :

?! On suppose $s > q$.

1° étape : on ① $Bg_1$, on appliq $B^{k-1}(Bg_1)$

$= B^k g_1 = 0$ car $g_1 \in \ker(B^k)$

$Bg_1 \in \ker(B^{k-1})$

$$\Rightarrow Bg_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} c_i e_i}_{E_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q} d_j f_j}_{F_1}$$

De m̂ pour $Bg_2 = E_2 + F_2$.

$E_2$ CL des $e_1, \dots, e_p$.

$F_2$ CL des $f_1, \dots, f_q$.

Plus général : $Bg_i = E_i + F_i$

$\underbrace{F_1, \dots, F_s}_{s>q} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_q)$ dim $q$ car systm indépdts.

=> $F_1, \dots, F_s$ st dépendants

Donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_s$ pas tous nuls tq $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i F_i = 0$

$F_i = Bg_i - E_i \Rightarrow B\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i\right) - \sum_{i=1}^{s} E_i = 0$

$B\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{s} E_i$

$E_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker(B^{k-2})$.

$\Rightarrow B^{k-2}\left(B \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i\right) = 0.$

$\Rightarrow B^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i \in \ker(B^{k-1}) = \mathrm{Vect}(e, f)$

Donc $\exists$ coefficients : $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i + \sum_{j=1}^{s} b_j f_j$

$g, e, f$ st nuls or $\lambda_i$ ne st pas tous nuls $\boxed{\text{c.q.f.d}}$ / □

"Exemple"

$e_1, e_2, e_3 \rightarrow \ker B$

$f_1, f_2, f_3 \rightarrow \ker B^2$

$g_1, g_2 \rightarrow \ker B^3$

$h_1 \rightarrow \ker B^4 = \ker B^5$

La base adaptée :

$h_1, Bh_1, B^2h_1, B^3h_1$

dans $\ker B^4$ pas ds $\ker B^3$ — $\ker B^3$ pas ds $\ker B^2$ — $\ker B^2$ pas ds $\ker B$ — $\ker B$

On choisit parmi $g_1, g_2$, un indépendant de $Bh_1$, notons le $h_2$.

On applique $B$. $h_2, Bh_2, B^2h_2$

$\ker B^3$ pas ds $\ker B^2$ — $\ker B^2$ pas ds $\ker B$ — $\ker B$

On choisit $h_3$ parmi $f_1, f_2, f_3$ tq $B^2h_1$ et $Bh_2$ et $h_3$ indépendants.

$h_3, Bh_3$

pas dans $\ker B$ → $\ker B^2$ — $\ker B$

Écrivons
$B^3h_1, B^2h_2, Bh_3$ } base $\ker B$
$B^2h_1, Bh_2, h_3$ } base $\ker B^2$
$Bh_1, h_2$ } base $\ker B^3$
$h_1$ } base $\ker B^4$

→ Ordre de ces 9 vecteurs de bases

$h_1, Bh_1, B^2h_1, B^3h_1, h_2, Bh_2, B^2h_2, h_3, Bh_3$

"=" $m_1, m_2, \dots, m_9$.

$Bm_1 = m_2$

$Bm_2 = m_3$

$Bm_3 = m_4$

$Bm_4 = 0$ car $B^3h_1 \in \ker B$.

$Bm_5 = m_6$

$Bm_6 = m_7$

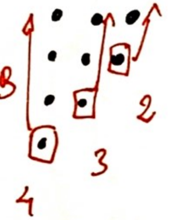
$Bm_7 = 0$

$Bm_8 = m_9$

$Bm_9 = 0$.

Matrice de B ds la base $m_1, \dots, m_9$

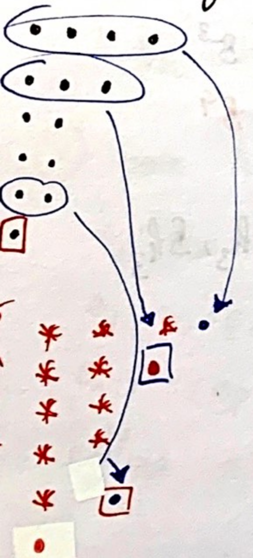
$$\begin{array}{c} 4 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|ccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}$$




$e_1 \quad e_2 \quad e_3$
$f_1 \quad f_2 \quad f_3$
$g_1 \quad g_2$
$h_1$

---

Cadre général :



$\dim \ker B = 4$
$\dim \ker B^2 = 4 + 3$
$\dim \ker B^3 = 4+3+2$
$\dim \ker B^4 = 4+3+2+2$
$\dim \ker B^5 = 4+3+2+2+2$
$\dim \ker B^6 = 4+3+2+2+2+1$
parmi les 4 indep
parmi les 3 indep

parmi les 2 indep

$J_1$ taille 6, $J_2$ taille 5, $J_3$ taille 2, $J_4$ taille 1.
↖ blocs de Jordan

ERREUR à ne pas faire pr calcul déterminant

ligne $i \to 3 *$ ligne $i$ + ligne $j$

Toujours : ligne $i \to \underline{\underline{1}}*$ ligne $i$ + multiple autre

---

## Exemples abstraits

---

- $\lambda$ vp de multiplicité $m$.
- $B = A - \lambda\, Id$

Possibilités pr la procédure selon $m$ :

$m = 1$ : •

$m = 2$ : •• $\dim \ker B = 2 = m$ ou : $\dim \ker B = 1$ (B)

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$m = 3$

(i) ••• $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(ii) •• / • $\quad$ B $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(iii) $\quad B^2$, $B$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$\underline{m=4}$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda &&& \\ & \lambda && \\ && \lambda & \\ &&& \lambda \end{pmatrix}$$

(i) $B$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{array}\right)$$

(ii) $B$ $B$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & \\ & & 1 & \lambda \end{array}\right).$$

(iii) $B^2$, $B$

$$\begin{pmatrix} \lambda &&& \\ 1 & \lambda && \\ & 1 & \lambda & \\ &&& \lambda \end{pmatrix}.$$

(iv) $B^3$, $B^2$, $B$

$$\begin{pmatrix} \lambda &&& \\ 1 & \lambda && \\ & 1 & \lambda & \\ && 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$\underline{m=5}$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda &&&& \\ & \lambda &&& \\ && \lambda && \\ &&& \lambda & \\ &&&& \lambda \end{pmatrix}$$

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

ⓐ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver la base ds lqll on trouve la forme normale de Jordan)

- $P_A(X) = \det\begin{pmatrix} -1-X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1-X & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$ $\quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1-X & 1 \\ 0 & X & 0 & -X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$$= X \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ -X & 2 & 1-X & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -X^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1-X & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= -X^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -X & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -X^2 \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -X & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X^3 \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = X^3 \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = X^4.$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ vp de multiplicité 4.

- ker A :

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{matrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_4 \leftarrow C_4 + C_2$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base ker } A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vecteurs indépdts

- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ il faut rajouter 2 vecteurs aux $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

on choisit : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

mat $\nabla$
$\Rightarrow \Delta = 1$
$\Delta \neq 0$
dc base

indépdts

multiplicité 4 :

B. B.

$e_4 = Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

base pour Jordan : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = Ae_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

les deux rajoutés.

$$P^{-1} A . P = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$e_2$ et $e_4 \in \ker(A)$ ; $\quad A e_1 = e_2$ ; $A e_3 = e_4$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

les deux rajoutés.

$$P^{-1} A . P = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$e_2$ et $e_4 \in \ker(A)$ ; $Ae_1 = e_2$ ; $Ae_3 = e_4$.

---

# En Résumé

① Notion de groupe

→ groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$ d'un ens à $n$ élts.
(= l'ens de ttes les bijections
$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$

→ signature d'une permutation
$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$.

Ppté : ① $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) . \varepsilon(\sigma_2)$.

② $\varepsilon((ij)) = -1$.

③ $\varepsilon((i_1 i_2 \dots i_k)) = (-1)^k$

→ Tte permutation s. | cp. CASD. (uniq)
| p. transp. (pas uniq)

② Notion d'application multilinéaire

$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_j \longrightarrow F$.

$E_i, F$ (ev) → $f$ est ê p-linéaire.
(en chq variable séparémt, c$^t$ linéaire).

cp $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = \dim E$

$f$ : $n$-linéaire.

2 cas encore cp :

1) $f$ symétriq

2) $f$ anti-symétriq

$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) . f(e_1, \dots, e_n)$

③ Notion déterminant

$\mathrm{Det} : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} . a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Pptés du déterminant

→ dev ligne, colonne, blocs, ∅, ← produit det

→ vecteurs indpdts ssi $\det \neq 0$.

→ $\det(A . B) = \det(A) . \det(B)$

④ **Applicat° rang d'une matrice**

→ peu utile p. exos.

· rang $(A)$ = la plus grde taille d'une smc à det non nul.

@ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}} \end{pmatrix}$

2° applicat° : on pt déf le det d'un endomorphisme : AL $f: E \to E$ $\widehat{m}$

$\det(f) = \det$ (mat de $f$ dans une base).

$A$ et $B$ les mat de $f$ dans 2 bases.

→ $B = P^{-1} A . P$ pour $P$ mat changement de base.

$\det(B) = \det(A)$

⑤ **Not° valeurs propres : $\lambda$ & vecteurs propres.**

→ sous-espace propre $E_\lambda = \ker(A - \lambda\, Id)$

→ polynôme caractéristiq $P_A(X)$
$= \det(A - X . Id)$

· $\lambda$ vp $\Leftrightarrow$ $\lambda$ racine de $P_A(X)$

→ multiplicité de $\lambda$ ĉ racine de $P_A(X)$

→ sous-espace caractéristique $N_\lambda$

$N_\lambda = \ker\left[(A - \lambda Id)^m\right]$ $m$ = multiplicité.

Conséquences : · $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$

· $\dim N_\lambda = m$.

· $E_\lambda \subset N_\lambda$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ker\left((A - \lambda\, Id)^{m+k}\right) = \ker\left[(A - \lambda Id)^m\right]$

Suite d'inclusion

$\ker(A - \lambda Id) \subset \ker(A - \lambda Id)^2 \subset \dots \subset \ker(A - \lambda Id)^m$
$= \ker(A - \lambda Id)^{m+1} = \ker(A - \lambda Id)^{m+2} = \dots$

⑥ Résultats p. les sous-espaces $E_{\lambda_i}$, $N_{\lambda_i}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp distinctes).

$E$ : ev

$e_1, \dots, e_p$ : vect^rs libres / indépendants

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i, \ \lambda_i = 0$$

ou autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i e_i) = 0 \Rightarrow \forall_i : \lambda_i e_i = 0$$

$F_1, \dots, F_p$ : sev

$F_1, \dots, F_p$ st en somme directe

(D) (somme directe) $F_1, \dots, F_p$ st en somme directe si :

$$\sum_{i=0}^{p} f_i = 0 \Rightarrow \forall i \quad f_i = 0,$$

$f_i \in F_i$

("voir vecteur ĉ espace en dim = 1")

("indépdce vect$^{rs}$ ⟺ somme directe")

(TH) $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (Vp) distinctes.

① les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ st en somme directe.

② les sous-espaces $N_{\lambda_1}, \dots, N_{\lambda_p}$ st en somme directe.

La preuve utilise les polynômes en A.

① Sous-esp. propres : $\prod_{i=1, i\neq k}^{p} (A - \lambda_i Id)$ $\mu$ $k = 1, \dots p$.

② sous-esp. caract : $\prod_{i=1, i\neq k}^{p} (A - \lambda_i Id)^{m_i}$

si diagonalisable → FNDJ sinon décomp Dunford.

⚠ (TH) Dunford : conditiθ polynôme scindé !

# ⑦ Diagonalisaθ / Trigonalisaθ

(TH) A trigonalisable ⟺ $P_A(X)$ scindé.

(TH) A diagonalisable ⟺ $P_A(X)$ scindé et $\forall \lambda$ Vp de multiplicité $m$, $\dim E_\lambda = m$.

(TH) (Décompositiθ de Dunford, Jordan, semi-simple nilpotent)

A tq $P_A(X)$ scindé alors $\exists$ D, N endom tq

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonale}}}{D} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{nilpotentes}}}{N}$, ⚠ $DN = ND$ : commutaθ

@ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diagonale (sable)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente.}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Rq) : Dans la preuve, on utilise le résultat A, B diagonalisables, $AB = BA \Rightarrow \exists$ base (Vp) communs.

## ⑧ Jordan (Forme normale)

(plus explicite que Dunford)

→ bloc de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda \end{pmatrix}$

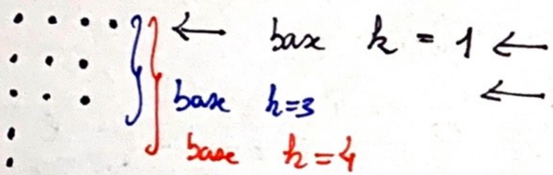
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{diagonale}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotent.}}$$

décomp. de Dunford

## ⑨ Algorithme pr FNJ (ou pr Dunford).

On calcule $\ker(A-\lambda_i \, Id)^k$, $k=1,\dots,m_i$

des bases successives de $\ker(A-\lambda_i \, Id)^k$.

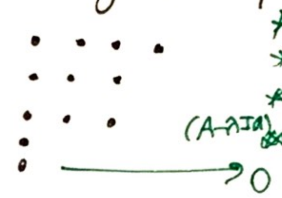



Le nb total qu'on trouve $= m$ la multiplicité de $\lambda_i$

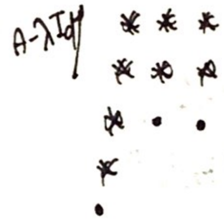
Pour Dunford, on prd ces vecteurs, on trouve bloc

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Peaufiner pr Jordan :




manque 2 on choisit 2 indep. parmi 3




manque 1 → on choisit parmi 4 indep.

base bloc Jordan

---

### Exemple d'applicat° aux équa. diff

$A$ mat $5\times 5$, $P_A$ scindé.

$P$ chgt de base tq

$$P^{-1}A.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \emptyset \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ \emptyset & & & & 3 \end{pmatrix} = D+N.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = 0.$$

Décomp de Dunford :

$$A = \underbrace{P.D.P^{-1}}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{(P.N.P^{-1})}_{\text{nilpotent}}$$

Sol$^{u°}$ : $y(t) = e^{At}\cdot c$ , $c \in \mathbb{R}^5$

$$A = P\,(D+N)\cdot P^{-1} \Rightarrow e^{At} = e^{t(P(D+N)P^{-1})}$$

$$= * = P\cdot e^{tD}\cdot e^{tN}\cdot P^{-1}$$

mq $ND = DN$

- (attention pour des matrices on n'a pas $e^A\cdot e^B = e^{A+B}$
  cela devient $e^A\cdot e^B = \exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]]\ldots\ldots\right)$
  $[A,B] = AB - BA$

$$y = e^{At}\cdot c = P\cdot e^{tD}\cdot e^{tN}\cdot P^{-1}\cdot c$$

- $$e^{tD} = \exp\begin{pmatrix} 2t & & & & \emptyset \\ & 2t & & & \\ & & 2t & & \\ & & & 3t & \\ \emptyset & & & & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & & & & \emptyset \\ & e^{2t} & & & \\ & & e^{2t} & & \\ & & & e^{3t} & \\ \emptyset & & & & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tN} = Id + tN + \frac{1}{2}t^2 \underbrace{N^2}_{0} + \frac{1}{3!}t^3N^3 + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & & & \emptyset \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & t \\ \emptyset & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}\cdot e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}\cdot c}_{\hat{c}}$$

$\hat{c}$ vecteur de 5 ctes.

$$P^{-1}\cdot y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t\cdot e^{2t} & & & \\ & e^{2t} & & & \\ & & e^{2t} & & \\ & & & e^{3t} & te^{3t} \\ & & & & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ \hat{c}_4 \\ \hat{c}_5 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 e^{2t} + \hat{c}_3\, te^{2t} \\ \hat{c}_2 e^{2t} \\ \hat{c}_3 e^{2t} \\ \hat{c}_4 e^{2t} + \hat{c}_5\, t\cdot e^{3t} \\ \hat{c}_5 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$D+N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \emptyset \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ \emptyset & & & & 3 \end{pmatrix}$$



# démo sep somme en directe