4 T.D

# TD- M52. Viet-Anh NGUYEN

viet-anh.nguyen@univ-lille.fr

## Exercices de remise à niveau :

**Ex 1** : soit $\mathbb{K}$, mq les ens ci-dessous st des espaces Vectoriels sr $\mathbb{K}$.

① $E_1 := \{ f : [0,1] \to \mathbb{K} \}$ muni de l'additio $f+g$ des fonctions & de la multiplicatio par un nombre $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda f$,

ie : $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
$(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$.

② $E_2 := \{ (u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \}$ l'ens des suites à valeurs ds $\mathbb{K}$, muni de l'additio des suites : $(u_n) + (v_n) := (u_n + v_n)$

& la multiplicatio p nbr $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\lambda(u_n) := (\lambda u_n)$.

③ $E_3 := \{ P \in \mathbb{K}[x] : \deg P \leq n \}$

où $n \in \mathbb{N}$ est donné. $E_3$ est muni de l'additio des polynômes $P+Q$ et de la mltplo pr $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda . P$ pr $P, Q \in E_3$.

## Solut ①

Vérifions que $(E,+)$ est un groupe abélien.

Associativité

soit $f, g \in E_1$, observons

$$\left[(f+g)+h\right](x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= [f + (g+h)](x)$$

$\forall x \in [0,1]$ ;

D'où $(f+g)+h = f + (g+h)$.

$\Rightarrow$ ⊕ est associative.

Neutre $\forall x \in [0,1]$

L'élément neutre de $E_1$ est la f zéro $0_{E_1}(x) = 0$,

En effet, $(f + 0_{E_1})(x) = f(x) + 0_{E_1}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

D'où $f + 0_{E_1} = f$ ; de même $0_{E_1} + f = f$.

Inverse

Considérons $-f := (-1) \times f$ $\forall x \in [0,1]$

On a $[(-f)+f](x) = (-f)(x) + f(x)$
$= (-1)f(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$

D'où $(-f) + f = 0_{E_1}$.

De m̂ $f + (-f) = 0_{E_1}$.

On a mqé l'associativité, l'élt neutre, l'élt inverse.

Donc $(E,+)$ est un groupe.

D'autre part, pr $x \in [0,1]$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= g(x) + f(x) \quad \text{car } (\mathbb{K},+) \text{ est commutatif pr } \mathbb{K}.$$
$$= (g+f)(x)$$

D'où $f+g = g+f$

Donc $(E_1,+)$ est commutatif. (abélien).

Ensuite, vérifions que la multiplicat° scalaire est distributive par rapport à l'addit°,

ie pr $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ & $f, g \in E_1$, on a

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$
$$(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$$

En effet pr $x \in [0,1]$;

$$[\lambda(f+g)](x) = \lambda\big((f+g)(x)\big)$$
$$= \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$[\lambda(f+g)](x) = \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)} + \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in \mathbb{K}}{g(x)} \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est distributife pr } \mathbb{K}.$$
$$= (\lambda f + \lambda g)(x) = \cancel{\lambda f + \lambda g}$$

D'où $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

Puis $[\underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in \mathbb{K}} f](x) = \underset{\in \mathbb{K}}{(\lambda+\mu)} \cdot \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)}$

$$= \lambda f(x) + \mu f(x) \quad \text{car } *$$

Enfin, il ne reste à vérifier que la multiplicat° associative, ie $(\lambda \cdot \mu) f = \lambda \cdot (\mu f)$

En effet, pr $x \in [0,1]$, on a :

$$[[\lambda \cdot \mu] \cdot f](x) = (\underset{\in \mathbb{K}}{\lambda} \cdot \underset{\in \mathbb{K}}{\mu}) \cdot \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)} = \lambda\,(\mu f(x)) \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est associatif.}$$
$$= \lambda \cdot ((\mu \cdot f)(x))$$
$$= [\lambda \cdot (\mu \cdot f)](x)$$

$$\Rightarrow (\lambda \cdot \mu) f = \lambda(\mu f)$$

Étapes :

- mq $(E,+)$ est un groupe. → associativité, → Élt neutre, → Élt inverse
- mq $(E,+)$ groupe abélien.
- mq distributivité mltpl° scalaire.
- mq mltplc° scalaire associative.

$sol^o 2$. Il suffit de remplacer ds sol 1, l'intervalle $[0,1]$ p $\mathbb{N}$ partout. La preuve reste valable.

$sol^o 3$

Considérons $I := \{0, 1, \dots, n\}$ & $F := \{f : I \longrightarrow \mathbb{K}\}$ muni de l'additi° & la multiplicat° scalaire ĉ ds 1).

On a vu ds Q1 que F est un esp. vect.

Mq F est équivalent à $E_3$.

Pr $P \in E_3$, on pt écrire :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

pr $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$.

Considérons $\phi : E_3 \longrightarrow F$

$$\phi(P) := f$$

où $f(0) = a_0,\ f(1) = a_1, \dots, f(n) = a_n$.

$\phi$ est bijective.

D'autre part, pour $P, Q \in E_3$ et $\phi(P) = f$
$\phi(Q) = g$.



$$\phi(P+Q) = h \quad tq \quad h(i) = f(i) + g(i)$$

car $P(x) = f(n)x^n + \dots + f(1)x + f(0).x^0$.
$Q(x) = g(n)x^n + \dots + g(0).x^0$.

$$(P+Q)(x) = (f(n)+g(n))x^n + \dots + (f(0)+g(0))x^0.$$

D'où $\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$.

On pt vérifier que $\phi(\lambda P) = \lambda\phi(P)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in E_3$.

De $(F, +, *)$ et $(E_3, +, *)$ st ξ mis.

Or $(F, +, *)$ est un esp. vect. d'après 1),
il en est de même pour $(E_3, +, *)$.

R D 2 ev s $\mathbb{K}$, $V$ & $V^*$ st isomorphes s'∃ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte ξ opérat°s.

si $\varphi(v) = v^*$ $\Rightarrow$ $\varphi(u+v) = u^* + v^*$
$\varphi(u) = u^*$ $\qquad \varphi(\lambda u) = \lambda u^*$.

**Bonus** : Déterminer $\dim E_3$.

$E_3 = \text{Vect}\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$,

pr $P \in E_3$ : $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$

Donc $\dim E_3 = \text{Card}\{1, X, \dots, X^n\}$
$= n+1$.

---

**Ex2** soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev

1) soit $F$ & $G$ des sous-espaces (ev) Vect de $E$.
Mq $F \cup G$ est un ss-espace
$\iff F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) soit $H$ un troisième ss-ev de $E$.
Mq $G \subset F \Rightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H)$

---

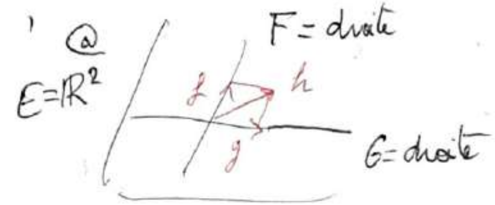
Rappel : soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev, soit $F \subset E$ :

Par défin°, $F$ est sous-espace si
$(F, \overbrace{+, *}^{\text{induite}})$ est un ev.

On pt mq $F$ est ss-esp. vect.
$\iff \forall u_1, u_2 \in F : u_1 + u_2 \in F$
& $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F : \lambda u \in F$.

(F est stable ~~p~~ à + & ×)

a)




($\Leftarrow$) si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un ev
si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un ev.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde $F \cup G$ est sev
mais $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.

$\exists f \in F : f \in G$.
$\exists g \in G : g \in F$.

Considérons $h := f + g$.
$h \in \text{Vect}(F, G) \subset F \cup G$ par hypothèse car $f \in F, g \in G$ & $h = f + g$.

Or $h \notin F$ car sinon $g = h - f \in F$
q contredit $g \notin F$

$h \notin G$ car sinon $f = h - g \in G$
q contredisant $f \notin G$.

Donc $h \in F \cup G$ mais $h \notin F, h \notin G \Rightarrow$ ?!

2)

# Normes, normes équivalentes

**Ex 1 :** pr $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

$$\|a\|_2 = \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|a\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

a) Mq pr $p = 1, 2, \infty$ ; $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel normé.

---

**Rp** soit esp. vect. normé.

On appelle **norme** sur $E$ une applicaθ notée $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ vérifiant

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

a) Mq $\|\cdot\|_1$ est une norme.

soit $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, posons $\vec{0} := (0, \dots, 0)$

$b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a $\|a\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 0 \iff |a_k| = 0 \ \forall k$

$\iff a_k = 0, \ \forall k$

$\iff a = \vec{0}$.

Donc $\|\cdot\|_1$ vérifie (i).

Ensuite, $\|\lambda a\|_1 = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Enfin, $\|a+b\|_1 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|$

$\leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)$ car $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$

$= \|a\|_1 + \|b\|_1$ Dc $\|\cdot\|_1$ vérifie (iii)

cl $\|\cdot\|_1$ est une norme.

De m̂ pr $\|\cdot\|_2$ ; $\left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$ ; m̂ raisonnt que $\|\cdot\|_1$ pr i), ii)

(iii) $\|a+b\|_2 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_2$

$= \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2}$.

Observons que $\|a+b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$

$\Leftrightarrow \|a+b\|_2^2 \leq \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2\|a\|_2 \|b\|_2$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \leq \cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + 2\boxed{\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}}$$

En utilisant l'identité, pr $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$$

Le membre de gauche de la dernière ligne est

$$\cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + \sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k$$

Par conségt, la dernière égalité est équivlte à

$$\sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k \leq 2\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

(R) Inégalité de Cauchy-Schwarz,

si $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum a_k \overline{b_k}\right| \leq \sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

Il vient de :

$$\left|\sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k\right| \leq \left|\sum a_k \overline{b_k}\right| + \left|\sum \overline{a_k} b_k\right|$$
$$= 2\left|\sum a_k \overline{b_k}\right| \quad \text{car} \quad \sum \overline{a_k} b_k = \left(\overline{\sum a_k \overline{b_k}}\right)$$
$$\leq 2\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

Donc la dernière inégalité est valable.

D'où iii) vérifiée pr $\|\cdot\|_2$.

Considérons enfin la $\|\cdot\|_\infty$,

(i) $\|a\|_\infty = 0 \iff \max\limits_{1\le k\le n} |a_k| = 0$

$\iff |a_k| = 0, \forall k \iff a_k = 0, \forall k \iff a = \vec{0}$.

Dc $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (i)

Puis $\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_\infty$

$= \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda a_k| = |\lambda| \max\limits_{1\le k\le n} |a_k| = |\lambda| \, \|a\|_\infty$

D'où $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (ii).

Ensuite vérifions $\triangle$,

$\|a+b\|_\infty = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |a_k+b_k|$

Observons pr $1 \le k \le n$,

$|a_k+b_k| \le |a_k| + |b_k| \le \max\limits_{1\le i\le n} |a_i| + \max\limits_{1\le i\le n} |b_i|$

$= \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$

dc $\|a+b\|_\infty \le \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$.

Ainsi (iii) est vérifié.

D'où $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

b) Mq ces 3 normes st équivalentes.

R.1 Deux normes $\|\cdot\|_I$ & $\|\cdot\|_{II}$ st équival^tes s'∃ 2 constantes $c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E$,

$$c_1 \|x\|_I \le \|x\|_{II} \le c_2 \|x\|_I$$

$\iff c_1 \le \dfrac{\|x\|_{II}}{\|x\|_I} \le c_2$.

---

Il suffit de mq $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$ (1)

& $n\|\cdot\|_\infty \ge \|\cdot\|_1$ (2)

---

Pr $a \in \mathbb{K}^n$ $(a_1, \dots, a_n)$, on a : $\|a\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |a_k| = |a_{k_0}|$ pr 1 certain $1 \le k_0 \le n$

$= \sqrt{|a_{k_0}|^2} \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2} = \|a\|_2$

Ensuite $\|a\|_2 \le \|a\|_1 \iff \|a\|_2^2 \le \|a\|_1^2$

$\iff \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{\cancel{1/2 \times 2}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2 = \cancel{\sum |a_k|^2} + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} |a_i||a_j|$

$\iff 2\sum |a_i||a_j| \ge 0$ est vrai.

Dc $\|a\|_2 \le \|a\|_1$.

Ainsi on a mqé inégalité (1).

Mq $n\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_1$,

on a $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \|a\|_\infty$

car $|a_k| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| = \|a\|_\infty$

$\forall\, 1 \leq k \leq n$,

dc $\|a\|_1 \leq n\|a\|_\infty$ d'où 2).

en concluant (1), (2), (3) : les 3 normes st equivalentes.

c) On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ & $n=2$.

Dessiner les boules unités pr chacune des 3 normes.

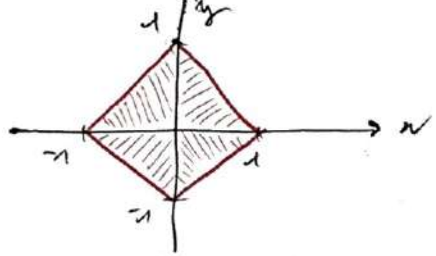
$E = \mathbb{K}^2$. $a(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{B}^1 := \{a \in E,\ \|a\|_1 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\}$

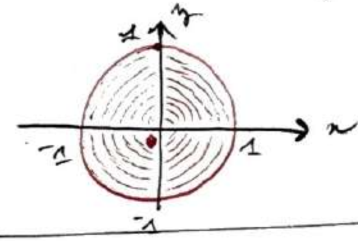
= l'intérieur des carré de sommets $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$. &

Norme 1




$\mathbb{B}^2 := \{a \in E,\ \|a\|_2 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < 1\}$ = le disque unité

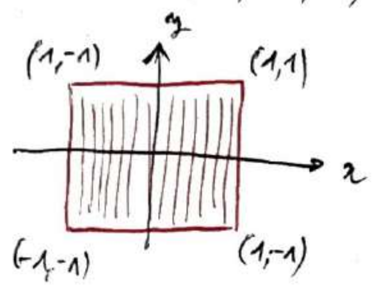



$\mathbb{B}^\infty := \{a \in E,\ \|a\|_\infty < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \ \&\ |y| < 1\}$

= l'intérieur du carré de sommets $(1,1), (-1,-1), (-1,1), (1,-1)$



**Ex2** $E$ $\mathbb{K}$-evn, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normes sur $E$.

Pour $x \in E$, $r>0$, note $B_i(x,r)$ la boule ouverte de centre $x$, de rayon $r$, pour $\|\cdot\|_i$.

a) Sppsons $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

(i) Jstf $\exists$ cte $k>0$, $\forall x \in E$

$$k^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_2.$$

Sppo $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E$, $k^{-1}\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \leq k\|x\|_2$

soit $k \geq c_2$, $k^{-1} \leq c_1$ conviennent.

$\rightarrow$ prendre $k = \max(c_2, c_1^{-1})$

(ii) cd $B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$

$B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$

- soit $x \in B_1(0,1)$ qcq, on a $\|x\|_1 < 1$ d'après a).

$k^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\| < 1$ dc $\|x\|_2 < k$.

soit $x \in B_2(0,k)$ d'où $B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$.

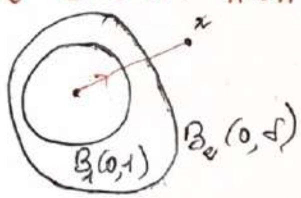
- soit $x \in B_2(0,1)$ qcq, on a $\|x\|_2 < 1$, d'après a)

$\|x\|_1 \leq k\|x\|_2 < k$ dc $\|x\|_1 < k$.

D'où $B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$.

b) on suppose mtn $\exists\, \delta > 0$ tq $B_1(0,1) \subset B_2(0,\delta)$.

Mq $\forall x \in E$, $\|x\|_2 \leq 2\delta \|x\|_1$.




dilatation de $x$

$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

soit $x \in E$ qq, considérons le vecteur

$x' := \dfrac{1}{2\|x\|_1} x$ ; on a $\|x'\|_1 = \dfrac{1}{2\|x\|_1}\|x\|_1 = \dfrac{1}{2} < 1$

dc $x' \in B_1(0,1)$. D'après l'hypothèse, on a $x' \in B_2(0,\delta)$.

Il vient que $\|x'\|_2 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{2\|x\|_1}\|x\|_2 < \delta$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 < 2\delta \|x\|_1}$$

c) cd condition NCS en termes de boules pr que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

D'après a) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Rightarrow B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$ et $B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$

D'après b), les 2 implications ci-dessus impliquent que $2\delta = k$

$\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$, ie $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

**Ex 3** [illegible]

[illegible] $\mathbb{K}$ [illegible]

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad p = 1,2$$

& $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n| < \infty$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
[illegible]

Mq a) $\ell^p(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ ev
b) $\|\cdot\|_p$ est norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$

a) On mq $\forall u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
[illegible] $(\ell^p, +)$ gpe [illegible]
[illegible] $(\ell^p\mathbb{K}, \cdot)$ gpe [illegible]
[illegible] soit [illegible]

1) mq $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$ & $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$\|u+v\| =$

$\lambda u =$

2)

3)

3) * cas $p=1$

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n|$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

dc $\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$

comme $\|u\|_1 < \infty$, $\|v\|_1 < \infty$, il vient que $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$.

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$

dc $\|\lambda u\|_1 = |\lambda| \|u\|_1$ & $\lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$

* cas $p=2$ : D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
$$= \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$ ; il vient que $\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part, $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|u\|_2$. Donc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2$ et $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$

* cas $p = \infty$ : On a $\|u+v\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|)$
$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$$
$$= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

dc $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Comme $\|u\|_\infty < \infty$, $\|v\|_\infty < \infty$, il vient que $\|u+v\|_\infty < \infty$

[illegible] $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

**Ex 3** pr $p = 1, 2, \infty$ ; on définit $\ell^p(\mathbb{K})$ l'ens suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valrs ds $\mathbb{K}$ tq

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p = 1, 2$$

& $\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n| < \infty$

$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$
$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3ts axes faciles.

Mq a) $\ell^p(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ ev.
b) $\|\cdot\|_p$ est norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$

a) On mq $\forall\, u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ :

A)
1) mq $(\ell^p(\mathbb{K}), +)$ gpe → ass. + e.n + inv
2) mq $(\ell^p(\mathbb{K}), \oplus)$ gpe abél 1
3) mq distrib & asst mltpl° scalaire

1) mq $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$ & $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$\|u+v\| =$

$\lambda u =$

2)

3)

b) * cas $p = 1$ :

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n|$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

dc $\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$

comme $\|u\|_1 < \infty$, $\|v\|_1 < \infty$, il vient que $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$.

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$

dc $\|\lambda u\|_1 = |\lambda| \|u\|_1$ & $\lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$

* cas $p = 2$ : D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
$$= \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$ ; il vient que $\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part, $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|u\|_2$. Donc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2$ et $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$

* cas $p = \infty$ : On a $\|u+v\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|)$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$$
$$= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

dc $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Comme $\|u\|_\infty < \infty$, $\|v\|_\infty < \infty$, il vient que $\|u+v\|_\infty < \infty$

$\infty$ & dc $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

D'autre part, $\|\lambda u\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\lambda u_m| = |\lambda| \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m|\right)$
$= |\lambda| \; \|u\|_\infty$

Donc $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda| \, \|u\|_\infty$ & $\lambda u \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

**Ex 4**: soit $-\infty < a < b < \infty$ & $C([a,b])$ l'espace des foncOs cont sr $[a,b]$ à valeurs ds $\mathbb{K}$. On définit pr $f \in C([a,b])$ & $p = 1, 2, \infty$,

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad p = 1, 2,$$

et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

a) Mq pr $p = 1, 2, \infty$ ; $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ est espace vectoriel normé.

Comme $\mathcal{C}[a,b]$ est un espace vectoriel, il suffit de mq pr $p = 1, 2, \infty$, on a : $\forall f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ :

(i) $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

(iii) $\|f + g\|_p \leq \|f\| + \|g\|_p$.

Vérificat° (i) :

* cas $p = 1$ : $\|f\|_1 = 0 \iff \left(\int_a^b |f(t)|^{\cancel{1}}\right)^{\frac{1}{\cancel{1}}} = 0 \iff f(t) = 0$ car $f$ est cont $\forall t$
$\iff f = 0$.

* cas $p = 2$ : $\|f\|_2 = 0 \iff \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \iff f(t) = 0, \forall t$ car $f$ cont
$\iff f = 0$

* cas $p = \infty$ : $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0 \iff f(t) = 0, \ \forall t \iff f = 0$

Vérificat° (ii) :

* cas $p = 1$ : $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| \, dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| \, dt = |\lambda| \, \|f\|_1$

* cas $p = 2$ : $\|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|f\|_2$.

* cas $p = \infty$ : $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty$

Vérificat° (iii) :

* cas $p = 1$ : $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t) + g(t)| \, dt \leq \int_a^b |f(t)| \, dt + \int_a^b |g(t)| \, dt$
$= \|f\|_1 + \|g\|_1$.

* cas $p = 2$ : D'après l'inégalité de Minkowski,
$\|f+g\|_2 = \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$
vrai pr $1 < p < \infty$ ici $p = 2$
$= \|f\|_2 + \|g\|_2$

* cas $p = \infty$ :
$\|f+g\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup \left(|f(t)| + |g(t)|\right)$
$\leq \sup |f(t)| + \sup |g(t)|$
$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

b) Mq ces 3 normes ne st pas équivalentes.

<u>indic</u> considérer $f_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ | Pr simplifier $a=0$ $b=1$

calculer $\|f_n\|_p$ pr $p = 1, 2, \infty$.

* <u>cas $p=1$</u> $\|f_n\|_1 = \int_a^b t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$

$= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

* <u>cas $p=2$</u> $\|f_n\|_2 = \left(\int_a^b |t^n|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b t^{2n} \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

* <u>cas $p=\infty$</u> : $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |t^n| = 1$.

• $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_2$ car $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$ car $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\|\cdot\|_2 \not\sim \|\cdot\|_\infty$ car $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1/\sqrt{2n+1}}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Ex 5</u> on considère $E = \mathbb{K}[X]$, le $\mathbb{K}$-ev des polyn. à coeff ds $\mathbb{K}$ & on pose pr $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ & $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$

soit la suite des polynômes $P_n(X) = 1 + X + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n} X^k$

a) Vérifier $\|\cdot\|_1$ & $\|\cdot\|_\infty$ st normes sr $E$.

Écrivons, quitte à considérer qq coeff $a_k, b_k$ comme 0,

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

Vérifions que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

(i) $\|P\|_1 = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} |a_k| = 0 \iff a_k = 0, \forall 0 \leq k \leq n$
$\iff P = 0$

(ii) $\|\lambda P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| \, \|P\|_1$



⚠ enf.

(iii) Comme $(P+Q)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k$, on a ⊛,

$$\|P+Q\|_1=\sum_{k=0}^{n}|a_k+b_k| \leq \sum_{k=0}^{n}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq \sum|a_k|+\sum|b_k| = \|P\|_1+\|Q\|_1$$

D'où $\|P+Q\|_1 \leq \|P\|_1+\|Q\|_1$

Donc $\|P\|_1$ est une norme sur $E$.

Ensuite vérifions $\|\cdot\|_\infty$ est norme sur $E$.

(i) $\|P\|_\infty = 0 \iff \max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|=0$

$\iff a_k=0,\ \forall\, 0\leq k\leq n$

$\iff P=0$

(ii) $\|\lambda P\|_\infty = \max\limits_{0\leq k\leq n}|\lambda a_k| = |\lambda|\left(\max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|\right)$

$= |\lambda|\ \|P\|_\infty$

D'où $\|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\ \|P\|_\infty$.

(iii) Comme ⊛, on a

$$\|P+Q\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n}|a_k+b_k| \leq \max_{0\leq k\leq n}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq \max_{0\leq k\leq n}|a_k| + \max_{0\leq k\leq n}|b_k| = \|P\|_\infty+\|Q\|_\infty$$

D'où $\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty+\|Q\|_\infty$.

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E$.

b) Étudier $\lim\limits_{n\to\infty}\|P_n(X)-(1+X)\|_p$ pr $p=1, \infty$.

Soit pr $n\geq 1$, $P_n(X) = 1+X+\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k$

alors $P_n(X)-(1+X) = \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k$

Donc

$$\|P_n(X)-(1+X)\|_1 = \Big\|\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k\Big\|_1 \overset{def}{=} \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}$$

$$=(n+1)\times\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\|P_n(X)-(1-X)\|_\infty = \max_{2\leq k\leq n+2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

c) Q pt-on déduire ?

Qc comme $\dfrac{\|Q_n\|_\infty}{\|Q_n\|_1} = \dfrac{1/n}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

& $Q_n(X) = P_n(X)-(1+X)$

Les 2 normes ne st pas équivalentes.



ex 6

**Ex 1** soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-ev des mat carrées $n \times n$ à coeff ds $\mathbb{K}$.

Pr $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \geq 0$$

a) Vérifier $N$ est une norme sur $E$

soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$

(i) $N(A) = 0 \iff \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0$

$\iff \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

$\iff a_{ij} = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$ ; $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

$\iff A = 0_E$ mat nulle.

(ii) $N(\lambda A) \cancel{= |\lambda| N(A)} \iff \max \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda a_{ij}| \cancel{= |\lambda| N(A)}$

$\iff \max \sum |\lambda|\, |a_{ij}| = \cancel{\max} \max |\lambda| \sum a_{ij}$

$= |\lambda|\, N(A)$

$\Rightarrow N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A)$

(iii) Prouvons que $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

Comme $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

On a $N(A+B) = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max \sum (|a_{ij}| + |b_{ij}|)$

$\exists\, j_0$ tq $1 \leq j_0 \leq n$ dépd A&B

$\leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} (|a_{ij_0}| + |b_{ij_0}|)$

$\cancel{\leq \max \sum |a_{ij_0}| + \max \sum |b_{ij_0}|}$

$\cancel{= N(A) + N(B)}$

Dc $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

Donc $N(A)$ est une norme sur $E$.

Puis $N(A+B) \leq \sum |a_{ij_0}| + |b_{ij_0}| = \sum |a_{ij_0}| + \sum |b_{ij_0}|$

or $\sum |a_{ij_0}| \leq \max \sum |a_{ij}| = N(A)$

$\sum |b_{ij_0}| \leq \max \sum |b_{ij}| = N(B)$

b) Mq $\forall (A,B) \in E\times E$ : $N(AB) \leq N(A).N(B)$
($N$ est une $\boxed{nm}$)

Posons $C = AB$, écrivons $A=(a_{ij})$ & $B=(b_{ij})$ & $C = (c_{ij})$. On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall 1 \leq i,j \leq m.$$

Il vient que $N(AB) = N(C) = \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum\limits_{i=1}^{m} |c_{ij}|$

$$= \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right|$$

soit $1 \leq j \leq m$ : on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |a_{ik}||b_{kj}|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |b_{kj}| \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}| \leq N(A).N(B)$$

car $\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ik}| \leq N(A)$

c) soit $A \in E$, on considère $u_k = \dfrac{A^k}{k!}$, $k \geq 1$.
Mq $(u_k)_{k\geq 1}$ CV vers $0$ ds $(E,N)$.

D'après b), $N(u_k) = N\left(\dfrac{A^k}{k!}\right) = \dfrac{1}{k!} N(A^k)$

$$= \frac{1}{k!} N(\underbrace{A \dots A}_{k \text{ fois}}) \leq \frac{1}{k!} \underbrace{N(A) \dots N(A)}_{k \text{ fois}}$$

$$= \frac{[N(A)]^k}{k!}$$

En posant $t = N(A) \geq 0$, on a :

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{ \& dc } \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Par consq t, $N(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ & dc $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ds $(E,N)$

# Ouverts, fermés, intérieur, adhérence

**Ex 8** Parmi les ss-ens, préciser ce q. est ouverts, fermés. Ds chq cas préciser l'intérieur, adhérence, la frontière.

a) les ss-ens de $\mathbb{R}$ :

(i) $A_1 = \mathbb{R}$

**R** $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n.

- $O \subset E$ est dit "ouvert" si $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O$.
- $F \subset E$ est dit "fermé" si $F^c := E \setminus F$ est "ouvert".
- l'intérieur d'un ens $A \subset E$, noté $\mathring{A}$ est le plus grd ouvert contenu dans $A$.

$$\mathring{A} := \{x \in A : \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A.$$

- l'adhérence d'un ens $A \subset E$, noté $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant $A$.

⚠ inverse de contenu.

$$\overline{A} := \{x \in E : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$

- la frontière de $A$, noté $\partial A$ est $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.



(i) $A_1 = \mathbb{R}$

Prenons @ $x = 1$ ; $B(1,r) \subset \mathbb{R}$.

- C'est un ouvert. C'est aussi un fermé car $A_1^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ est un ouvert.
- $\mathring{A_1} = A_1 = \mathbb{R}$ car $A_1$ est un ouvert.
- $\overline{A_1} = A_1 = \mathbb{R}$ car $A_1$ est un fermé.
- $\partial A_1 = \overline{A_1} \setminus \mathring{A_1} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$.

(ii) $A_2 = \mathbb{Q}$

- Ce n'est pas un ouvert car $0 \in \mathbb{Q}$ mais $\forall r > 0$ :

$B(0,r) := \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\} \not\subset \mathbb{Q}$

car il y a des nombres irrationnels de type : $\frac{\sqrt{2}}{n}$ & $n \in \mathbb{N}$ tq $\frac{\sqrt{2}}{n} < r$, de $\frac{\sqrt{2}}{n} \in B(0,r)$

$\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$.

- Ce n'est pas un fermé car $\mathbb{Q}^c$ n'est pas ouvert. En effet $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$ mais $\forall r > 0$ ;

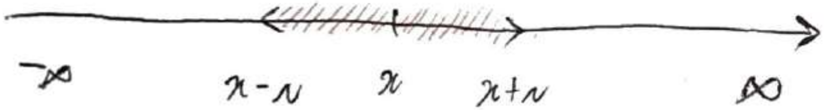
$B(\sqrt{2}, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \sqrt{2}| < r\} \not\subset \mathbb{Q}^c$

car il existe des rationnels $\frac{m}{n}$ & $m, n \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < r$, & de :

$\frac{m}{n} \in B(\sqrt{2}, r)$ mais $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Q}^c$.

- $\mathring{A}_2 = \emptyset$ car tte boule $B(x, r)$ ${}^{r>0}$ contient des irrationnels.

- $\overline{A_2} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r > 0$, $B(x,r)$ contient des rationnels.




<u>Preuve rapide</u>

$\left|\frac{m}{n} - x\right| < r \Leftrightarrow |m - nx| < nr$

Il suffit prendre $n > \frac{1}{r}$ & $m = [nx]$ alors

$|m - nx| = |[nx] - nx| < 1 < nr$

Puis pr fre intervenir irrationnels : usr $\sqrt{2}$.

- $\partial A_2 = \overline{A_2} \setminus \mathring{A}_2 = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

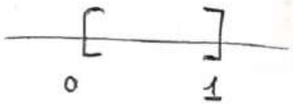
- $A_3 = [0,1]$, $A_3$ n'est pas ouvert car $0 \in A_3$ mais $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A_3$ car $-\frac{r}{2} \in B(0,r)$ mais $\frac{-r}{2} \notin A_3$.

$\rightarrow A_3$ est un fermé car $A_3^c = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$.

- $\mathring{A}_3 = ]0,1[$

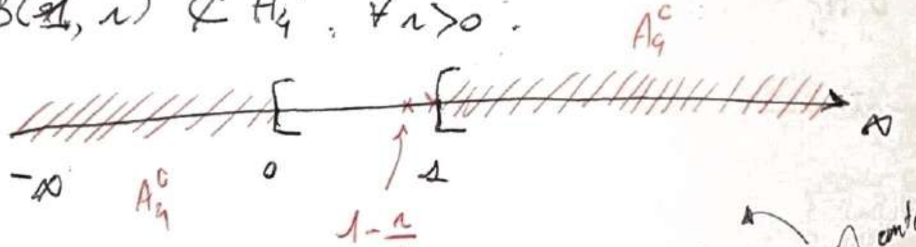
- $\overline{A_3} = A_3 = [0,1]$ car il est fermé.

- $\partial A_3 = \overline{A_3} \setminus \mathring{A}_3 = [0,1] \setminus ]0,1[ = \{0,1\}$




- $A_4 = [0,1[$, ce n'est pas ouvert car $0 \in A_4$ mais $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A_4$ car $\frac{-r}{2} \in B(0,r)$ mais $\frac{-r}{2} \notin [0,1[$.

- ce n'est pas fermé car $A_4^c = ]-\infty, 0[ \cup [1, \infty[$ n'est pas ouvert. En effet $1 \in A_4$ mais $B(1, r) \not\subset A_4^c$. $\forall r > 0$.



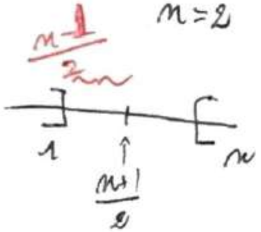

- $\mathring{A}_4 = ]0,1[$ . $\overline{A_4} = [0,1]$ ⚠ contenant A

(1f) - $\partial A_4 = \overline{A_4} \setminus \mathring{A}_4 = [0,1] \setminus ]0,1[ = \{0,1\}$.

(ii) $A_5 = ]-\infty, 1]$

• Ce n'est pas un ouvert, car $1 \in A_5$ mais $\forall r>0$, $B(1,r) \not\subset A_5$.
En effet, $1+\frac{r}{2} \in B(1,r)$ mais $1+\frac{r}{2} \notin ]-\infty,1]$

• C'est un fermé car $A_5^c = ]1,\infty[$ est un ouvert.
$]1,\infty[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} ]1,n[ = \bigcup_{n=2}^{\infty} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$




• $\mathring{A}_5 = ]-\infty,1[$

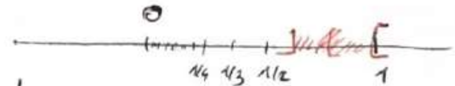
• $\overline{A_5} = A_5$ car il est fermé.

• $\partial A_5 = \overline{A_5} \setminus \mathring{A}_5 = ]-\infty,1] \setminus ]-\infty,1[$
$= \{1\}$.

$\to A_6 = [1,\infty[$ (idem que $A_5$ en chg$^t$ v[les]) $\mathring{A}_6 = ]1,\infty[$, $\overline{A_6} = A_6$, $\partial A_6 = \{1\}$,

(iii) $A_7 = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

• Ce n'est pas un ouvert car $1 \in A_7$. $\forall r>0$ $B(1,r) \not\subset A_7$.




Il suffit de prendre $1+\frac{r}{2} \in B(1,r)$ mais $1+\frac{r}{2} \notin A_7$
car $x \in A_7 \Rightarrow 0 < x \leq 1$ & $1+\frac{r}{2} > 1$.

• ⚠ Ce n'est pas fermé car $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ & $\frac{1}{n} \in A_7$
Donc on a $0 \in \overline{A_7}$. Or $0 \notin A_7$.

• $\mathring{A}_7 = \emptyset$ car si $x \in \mathring{A}_7$ alors $\exists r>0$
tq $r < x$ & $B(x,r) \subset A_7$.
Or $B(x,r)$ contient une infinité d'élts &
$B(x,r) \cap A_7 = \{\frac{1}{n}, x-r < \frac{1}{n} < x+r\}$ est un ens. fini.
$\Updownarrow$
$\{\frac{1}{n}, \frac{1}{x+r} < n < \frac{1}{x-r}\}$

• $\overline{A_7} = A_7 \cup \{0\}$ car $0 \in \overline{A_7}$ & $A_7 \cup \{0\}$ est fermé.
car $(A_7 \cup \{0\})^c = ]-\infty,0[ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[ \cup ]1,\infty[$ est ouvert.

• $\partial A_7 = \overline{A_7} \setminus \mathring{A}_7 = (A_7 \cup \{0\}) \setminus \emptyset = A_7 \cup \{0\}$.

Ex2 b) Justifier si Ouverts, fermés, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\partial A$ ?

(i) $A_9 = ]-2,1[ \times [0,3]$

- Mq $A_9$ n'est pas un ouvert. soit $x = (0,0) \in A$, le point $(0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(0,0)$ mais $\notin A$. (2° coord $\notin [0,3]$)
- Mq $A_9$ n'est pas un fermé. soit $x = (1,1) \notin A$, $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon = 6$, point $(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1) \in B_\varepsilon(1,1)$ & à A. Dc $B_\varepsilon(1,1) \cap A \neq \emptyset$. Donc cette boule n'est pas contenue ds $\mathbb{R} \setminus A = A^c$.
- $\mathring{A}_9 = ]-2,1[ \times ]0,3[$
- ~~$\overline{A_9} = \emptyset$ car ce n'est pas fermé.~~
- ~~$\partial A_9 = \overline{A_9} \setminus \mathring{A}_9 = \emptyset \setminus ]-2,1[ \times ]0,3[ =$~~
- $\overline{A_9} = [-2,1] \times [0,3]$
- $\partial A_9 = \overline{A_9} \setminus \mathring{A}_9 = [-2,1] \times [0,3] \setminus ]-2,1[ \times ]0,3[$
$= \{(-2,0), (1,3)\}$.

(ii) $A_{10} = [0,1] \times \{9\}$

- Mq $A_{10}$ n'est pas un ouvert car $(0,9) \in A_{10}$ mais $\forall r > 0$, $B_r((0,9)) \not\subset A_{10}$ car $\frac{-r}{2} \in B_r((0,9))$ mais $(-\frac{r}{2}, 9) \notin A_{10}$.
- Mq $A_{10}$ est un fermé car $A_{10}^c = \left( \begin{matrix} ]-\infty,0[ \cup ]1,\infty[ ; \\ ]-\infty,9[ \cup ]9,\infty[ \end{matrix} \right)$
Union d'ens ouvert est un ouvert. De son complémentaire est un ouvert. Donc cet ens est un fermé.
- $\mathring{A}_{10} = ]0,1[ \times \{9\}$
- $\overline{A}_{10} = [0,1] \times \{9\}$
- $\partial A_{10} = \overline{A}_{10} \setminus \mathring{A}_{10} = [0,1] \times \{9\} \setminus ]0,1[ \times \{9\}$
$= \{(0,9), (1,9)\}$.

(ii) $A_{11} = ]0,1[ \times \{0\}$. soit $(x,y) \in A_{11}$

- Mq $A_{11}$ n'est pas un ouvert. $\forall r>0$

$B\left(\left(x, y\right), \frac{r}{2}\right) \not\subset A_{11}$ car la 2° coordonnée n'appartient pas à $\{0\}$. ie $\left(0-\frac{r}{2}\right) \notin \{0\}$.

- $A_{11}^c = \left(\underbrace{]-\infty,0] \cup [1,\infty[}_{\text{pas ouvert}}, \underbrace{]-\infty,0[ \cup ]0,\infty[}_{\text{ouvert}}\right)$

- Mq $A_{11}^c$ n'est pas un fermé car $\forall r>0$

$B((1,2),r) \not\subset A_{11}^c$

en effet $(1-r,2) \in B((1,2),r)$ mais

$(1-r,2) \notin A_{11}^c$.

- $\mathring{A}_{11} = \emptyset$ • $\overline{A}_{11} = \emptyset$

- $\partial A_{11} = \overline{A}_{11} \setminus \mathring{A}_{11} = \emptyset$.

$A_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y$

- Mq $A_{12}$ est un fermé, Posons $\varphi(x,y) = x^2 - y$, cette applicat° est cont. Puis

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\} = A_{12}$$

Or le singleton $\{0\}$ est un fermé, dc $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé. (car $\varphi$ est cont)

Donc $A_{12}$ est un fermé.

- ~~$\varphi^{-1}(]-\infty,0[ \cup ]0,\infty[)$~~ ?? réunion ouvert

Mq $A_{12}$ n'est pas un ouvert : $\forall r>0$. soit $(x,y) \in A_{12}$

$B((x,y),r) \not\subset A_{12}$.

car $(x, y-r) \in B((x,y),r))$ mais

$(x, y-r) \notin A_{12}$.

- $\overline{A}_{12} = A_{12}$ car c'est un fermé.

- $\mathring{A}_{12} = \emptyset$ car si $(x,y) \in A_{12}$, $\exists (x_n, y_n)$ q n'est pas ds $A_{12}$ q cv vers $x$ @ $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = (x_n)^2 = (x+\frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$

- $\partial A_{12} = \overline{A}_{12} \setminus \mathring{A}_{12} = A_{12}$.

$y_n = (x_n^2) = (x+\frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} \to x^2$

$x, y+r$

DM 2

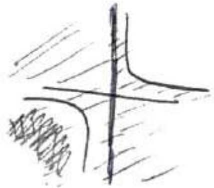
2

(iv) $A_{14} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ yx < 1\}$

Posons $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = yx.$

$\varphi$ appli cont



$\varphi^{-1}(]-\infty,1[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) < 1\}$

or $]-\infty, 1]$ : ouvert $\quad \overset{\circ}{A}_{14}$

$\varphi$ : appli cont.

$\cancel{]-\infty,0[ \cup ]-\infty,0[}$.

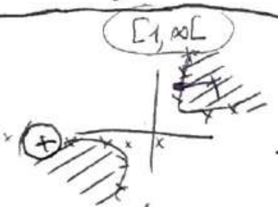
$]-\infty, 1[$.

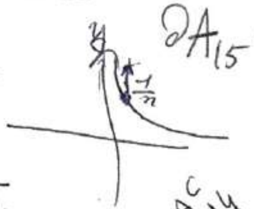
Donc $A_{14}$ est un ouvert.

$\Rightarrow \overset{\circ}{A}_{14} = A_{14}.$ $\qquad yx \geq 1$

---

$[1,\infty[$





~~Mq~~ $A_{14}$ n'est pas fermé

Mq de boule $\quad y \neq 0$

$B((0,y), r) = B_{Mq}$

$]-\infty,0] \cup [0,\infty[$

$B_{Mq} \not\subset A_{14}$

$]-\infty,0] \cup [0,\infty[$

car $(-r,y) \in B((0,y),r)$

mais $(-r,y) \notin A^c_{14}$.

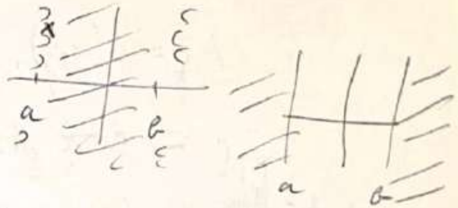
$\boxed{y_n = \frac{1}{x_n} \times \frac{1}{n} \in A^c_{14}}$

$\emptyset$

$\Rightarrow \overline{A_{14}} = \emptyset$

$\partial A_{14} = \overline{A_{14}} \setminus \overset{\circ}{A}_{14} = \emptyset \setminus A_{14} = \underline{\emptyset} !!!!$

(v) $A_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > a \text{ et } x < b\}$

~~fermé de $\varphi(x,y) = x$. cont~~ ~~$\{b\}$ : fermé~~ ~~$\{a\}$ : fermé~~.

$A_{15} = \underbrace{]a,b[}_{\text{ouvert}} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{ouvert}} = \overset{\circ}{A}_{15} \qquad \overline{A_{15}} = A_{15}$

$\leftarrow$ ouvert

~~(Mq ce n'est pas un ouvert)~~ ?

$\overline{A_{15}} = [a,b] \times \mathbb{R}$

$\partial A_{15} = \overline{A_{15}} \setminus \overset{\circ}{A}_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \text{ ou } x = b\}$

$B_r(a) \subset A$

$\|x-a\| < r$

$r>0 \quad B((0,y_n),r) \not\subset A_{14}.$

$\|(x,y)-(\ )\| < r$

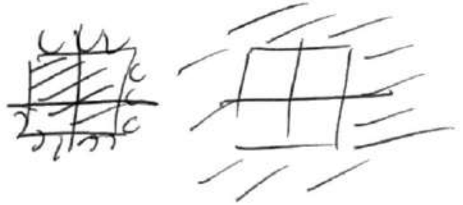
avec $(x_n, y_n$

④

(viii) $A_{18} = \{(x,y), -1<x<1, -1<y<1\}$

$= \underbrace{]-1,1[}_{\text{ouvert}} \times \underbrace{]-1,1[}_{\text{ouvert}} = \{\text{—}, |x|<1 \text{ et } |y|<1\}$

$= \{\text{—}, \max(|x|,|y|) < 1\} = \mathring{B}$.



$\mathring{A}_{18}$.

Mq c'est un ouvert (V).

$\overline{A}_{18} = [-1,1] \times [-1,1]$.

$\partial A_{18} = \{-1,1\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{-1,1\}$.

~~Mq c'est un fermé: $f(x,y) < B = 1$ = cte~~

~~$\max(|x|,|y|)$~~

~~$\mathring{A}_{18} = A_{18}$~~

~~$\overline{A}_{18} = \{\text{—}, \max(|x|,|y|) \leq 1\}$~~

~~$\partial A_{18} = \overline{A}_{18} \setminus \mathring{A}_{18} = \{\text{—}, \max(|x|,|y|) = 1\}$.~~

(ix) $A_{19} = \{(x,y), -1<x<1, -1 \leq y < 1\}$

$= \{\text{—}, |x|<1 \text{ et } y<1 \text{ et } y \geq -1\}$

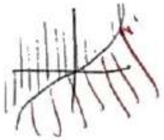
ni un ouvert ni un fermé

$\overline{A}_{19} = \overline{A}_{18}$, $\mathring{A}_{19} = \mathring{A}_{18}$, $\partial A_{19} = \partial A_{18}$.

(6)

DM6

$y \leq x^3$ (iii) $A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 > 0\}$



$A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$

Posons $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = y - x^3$.

$\varphi$ est une applicat° cont.

$\varphi^{-1}(]0,\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^3 > 0\}$

$= A_{13}$.

or $]0,\infty[$ : est ouvert & $\varphi$ : appli cont.

Donc $A_{13}$ est un ouvert.

---

$A_{13}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\}$.

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^3 - y \Leftrightarrow x^3 - y \geq 0\}$

idem $\gamma(x,y) = x^3 - y$

$[0,\infty[$

~~fermé~~ ~~ouvert~~ fermé

$A_{13}$ pas un fermé car pas $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$.

de

son complé$^t$ est ~~ouvert~~

de $A_{13}$ est fermé.

NON

(3)

DM-3

$\Rightarrow \mathring{A}_{13} = A_{13}$

(mq) $\Rightarrow \overline{A_{13}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$.

En effet si $(x_n, y_n)$ est une suite de $A_{13}$ ; (cv) vers $(x,y)$ alors PALim $y \geq x^3$, prve $\overline{A_{13}} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$

Réciproq$^t$, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3$.

◦ si $x > 0$ : $y > 0$ tq $\sqrt[3]{y} \geq x$. $\sqrt[3]{y} \geq x$

◦ si $x < 0$ : $y > 0$ pas de soucis, $y < 0$ ⤳

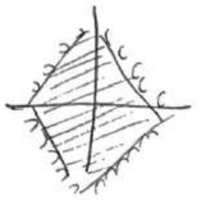
◦ $\partial A_{13} = \overline{A_{13}} \setminus \mathring{A}_{13}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$.

(vi) : $A_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x|+|y| < 1\} = \mathbb{B}^1$

où $a(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \mathbb{B}^1 = \{a \in E, \|a_1\| < 1\}$



Mq c'est un ouvert : $\forall r > 0$ :
$B((x,y), r) \subset A_{16}$.

Mq c'est un fermé : $\underset{\text{cont}}{f(x,y)} < b = cte$.
$f(x,y) = |x|+|y|$

$\mathring{A}_{16} = A_{16}$

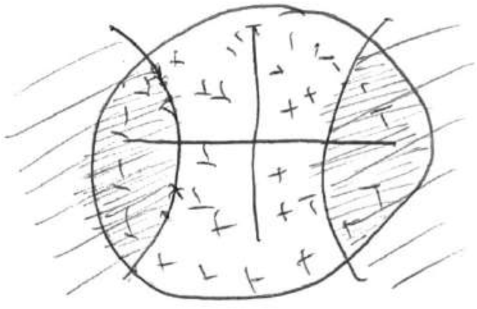
$\overline{A_{16}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x|+|y| \leq 1\}$

$\partial A_{16} = \overline{A_{16}} \setminus \mathring{A}_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$|x|+|y| = 1\}$.

(vii) $A_{17} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2-y^2 \geq 1}_{\text{fermé}} \text{ et } \underbrace{x^2+y^2 < 2}_{\text{ouvert}}\}$

ni ouvert, ni fermé

$x^2-y \geq 1$



$\overline{A_{17}} = x^2-y \geq 1 \quad x^2+y^2 \leq 2$

$\mathring{A}_{17} = x^2-y^2 > 1 \quad x^2+y^2 < 2$.

$\partial A_{17} = (x^2-y^2 = 1 \ \& \ x^2+y^2 \leq 2) \cap (x^2-y^2 \geq 1 \ ( x^2+y^2 = 2))$

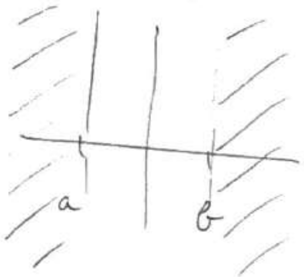
(5)

$y = \sqrt{x^2-1}$

$\boxed{\text{DM 5}}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$

$y \in \mathbb{R} \ldots$

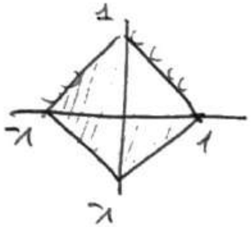


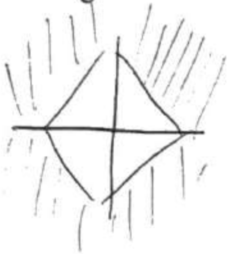
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1$ et $x^2 + y^2 < 2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1$ et $x^2 + y^2 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x^2 + y^2|$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x| + |y| < 1\} = \mathbb{B}^1$





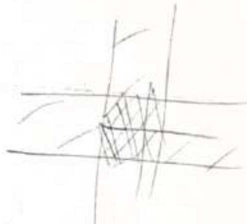
$a(x,y) \in \mathbb{R}^2$

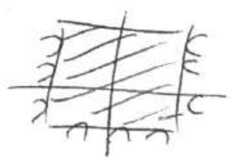
$\mathbb{B}^1 = \{a \in E, \ \|a\|_1 < 1\}$

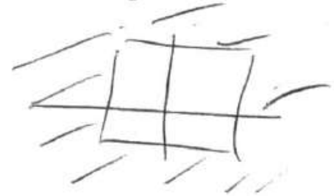
$= \{(x,y), \ -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\}$

$= \{(x,y), \ |x| < 1$ et $|y| < 1\}$

$\mathbb{B}^\infty = \{(x,y), \ \max(|x|, |y|) < 1\}$



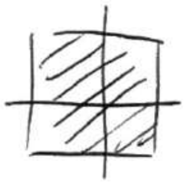




$\mathbb{B}^\infty = \{a \in E, \ \|a\|_\infty < 1\}$

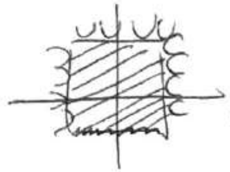
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 1\}$

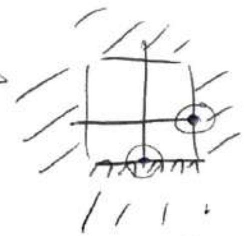
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1$ et $|y| < 1\}$



$\rightarrow \{(x,y) \mid -1 < x < 1, \ -1 \leq y < 1\}$ $A(9$

ni un ouvert
ni un fermé





D'1

Ex6 on note $E$ ev des $f_s$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$

tq $f(0) = 0$.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

$\forall f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

$$N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Mq $N_1$ & $N_2$ st 2 normes équiv s $E$.

équiv si $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tq

$$c_1 N_1(f) \leq N_2 \leq c_2 N_1(f).$$

---

Mq $N_2(f) \leq c_2 N_1(f)$ on cherche $c_2 > 0$.

$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \overset{?}{\leq} c_2 \|f'\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \leq c_2 \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \, (c_2 - 1)$$

7

$$\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{c_1} \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq c_2 \|f'\|_\infty$$

ok.

$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_\infty + \|f'(x)\|_\infty$

pr $x = 0$ $\quad = \|f(0)\|_\infty + \|f'(0)\|_\infty \leq \overset{c_2}{\overset{\shortparallel}{2}} \|f'(0)\|_\infty$

$= 0$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0\}$

si $(x,y) \in A$ alors $B\left((x,y), \frac{x}{2}\right)$ est contenue ds $A$. Ainsi $\mathring{A} = A$.

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\}$. En effet si $(x_n, y_n)$ est une suite de $A$ q @ vers $(x,y)$ alors PALim $x \geq 0$ ; ce q prouve $\overline{A} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$

Récipqt, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0$. Alors si $x>0$, $(x,y) \in A \subset \overline{A}$ & si $x=0$ alors prenons $(x_n, y_n)$ def $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = y$. $(x_n, y_n)$ est une suite de $A$ q @ vers $(x,y)$.

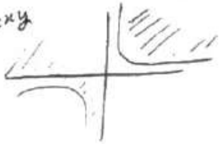
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$

i2 : Mq $B$ est fermé $\rightarrow \overline{B} = B$ puis $\mathring{B} = \emptyset$.

En effet si $(x,y) \in B$, $\exists\ (x_n, y_n)$ q n'est pas ds $B$ & q @ vers $x$ p @ $x_n = x + \frac{1}{n}$

$x_n y_n = 1 + \frac{y}{n} \neq 1$ car $y \neq 0$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1\}$ : soit $g(x,y) = xy$



$g^{-1}(]1,\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) > 1\}$

or ~~…~~ : $]1,\infty[$ : ouvert & appli $g$ est cont.

S1 $\Rightarrow \mathring{C} = C$. idem A mq $\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1\}$ ©.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 <$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$

Rq $D$ est fermé de $\overline{D} = D$.

Puis ~~interso~~ intérieur intersec et intersec intérieurs.

$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 > 1\}$

$\partial D = (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 = 1\})$

$\cup (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \geq 1\}$

Ex 24 soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

muni de la norme $\|f\|$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty , \quad f \in E.$$

Mq $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(Tte suite de Cauchy est CV ds cet espace).

---

$\boxed{M}$ ▷ considérer suite $(x_n)$ de Cauchy de $E$

▷ fabriquer limite possible de $(x_n)$ : noté $x$.

(svt usé 8ta espace est complet, @ complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pr faire $\lim x_n(t)$)

▷ dmq $x \in E$

▷ dmq $x_n$ CV vers $x$.

---

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy d'élémts de $E$.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq si $p, q \geq N_\varepsilon$

alors $\| x_p - x_q \| < \varepsilon$.

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \infty$$

(iv) $A_8 = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. intervalles entre deux $\frac{1}{n}$.

Ce n'est pas ouvert. (idem $A_7$).

C'est un fermé car $A_8^c = ]-\infty, 0[ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[ \cup ]1, \infty[$ est ouvert.

- $\mathring{A}_8 = \emptyset$ car pr $x \in \mathring{A}_8$
  - si $x \neq 0$, on raisonne ĉ pr $A_7$.
  - si $x = 0$, alors $\forall r > 0$ : $B(0,r)$ contient des nombres $\frac{2}{2n+1}$ pr $n \in \mathbb{N}^*$ mais $\frac{2}{2n+1} \notin A_8$.

Ds ts les cas, on aboutit à une contradiction. $\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \notin A_8$.

- $\overline{A_8} = \emptyset$ car $A_8$ est fermé
- $\partial A_8 = \overline{A_8} \setminus \mathring{A}_8 = A_8 \setminus \emptyset = A_8$

Ex 9 soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ déf p $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ &

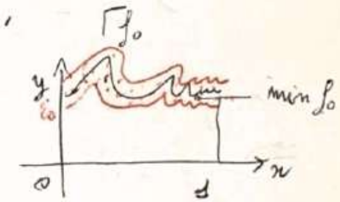
soit $A = \{f \in E, \forall t \in [0,1], f(t) > 0\}$

Mq A est ouvert ds E.

Il faut & il suffit de prouver $\forall f_0 \in A$, $\exists \ \varepsilon_0 > 0$ tq

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \varepsilon_0) \subset A.$$

Fixons $f_0 \in A$ qq,




comme $f_0 \in A$, on a $f_0(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$.

Pour $f \in E$, $\varepsilon_0 > 0$ on a :

$f \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \varepsilon_0) \iff \|f - f_0\|_\infty < \varepsilon_0$.

$\iff |f(t) - f_0(t)| < \varepsilon_0 \quad \forall t \in [0,1]$

Choisissons : $\varepsilon_0 = \inf_{[0,1]} |f_0| = \min_{[0,1]} |f_0| = \min f_0$

On a $\varepsilon_0 > 0$ car $f_0(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$. f est <u>cont</u> & $[0,1]$ est compact.

Mq $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$.

soit $f \in B(f_0, \varepsilon_0)$ qq,

On a $|f(t) - f_0(t)| < \varepsilon_0$, $\forall t \in [0,1]$.

Or $f_0(t) \geq \min_{[0,1]} f_0 = \varepsilon_0$

Donc $f(t) - f_0(t_0) \geq -|f(t) - f_0(t)|$ car $x \geq -|x|$

$\Rightarrow f(t) \geq f_0(t_0) - |f(t) - f_0(t)|$

$> \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 0$

$\Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow f \in A$.

Donc $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$. & A est ouvert.

---

Ex 10 soit $(E, \|\cdot\|)$ evn

a) Mq $\forall$ pie $A \subset E$, on a

$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}$

Comme $A \subset \bar{A}$, on a $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(\bar{A})$

RQ $\bar{A} = \{x \in E : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

Par consqt si $x \in A \Rightarrow B(x,r) \cap A \ni x$

$\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow A \subset \bar{A}$.

- Pr mq $\mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}$

Prenons $a \in \mathrm{Vect}(\bar{A})$ qq & mq $a \in \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.

Comme $a \in \mathrm{Vect}(\bar{A})$, $\exists a_1, \dots, a_n \in \bar{A}$ & $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

tq $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

Comme $a_i \in \bar{A}$, $\forall i = 1, \dots, n$,

$\exists$ suite $(a_{ij})_{j=1}^{\infty}$ tq $a_{ij} \xrightarrow[j \to \infty]{} a_i$.

RQ $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$ alors $a \in \bar{A}$

ssi $\exists (x_n) \subset E$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ (ie $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Posons pr $j \geq 1$, considérons :

$x_j = \lambda_1 a_{1j} + \dots + \lambda_n a_{nj}$

Comme $a_{ij} \in A$, on a $x_j \in \mathrm{Vect}(A)$

Lorsque $j \to \infty$, $\lambda_1 a_{1j} \to \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_{nj} \to \lambda_n a_n$

Dc $x_j \to \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = a$.

Dc $x_j \xrightarrow[j \to \infty]{} a$. Dc $a \in \overline{\mathrm{Vect}(A)}$ car $x_j \in \mathrm{Vect}(A)$

8) Mq ∀ sev $F$ de $E$, $\overline{F}$ est sev de $E$.

soit $F \subset E$ sev, il suffit de mq $\overline{F}$ est sev de $E$. soit $u, v \in \overline{F}$ qq & $\lambda \in \mathbb{K}$ qq. On doit mq

(i) $u+v \in \overline{F}$.

(ii) $\lambda u \in \overline{F}$.

Preuve (i) $u, v \in \overline{F}$, $\exists$ 2 suites $(u_n)$ & $(v_n)$ dans $F$ tq :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \quad \& \quad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$

alors $\underbrace{\|(u_n+v_n)-(u+v)\|}_{\to 0} \leq \|u_n-u\| + \|v_n - v\|$ donc, $\|u_n-u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|v_n-v\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Or $u_n+v_n \in F$ car $u_n, v_n \in F$ & $F$ est sev.

Donc $u+v \in \overline{F}$.

Preuve (ii) On a :

$$\|\lambda u_n - \lambda u\| = |\lambda|\,\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Or $\lambda u_n \in F$ car $u_n \in F$ & $F$ est sev.

Donc $\lambda u \in \overline{F}$.

Ex 11 soit $E$ ev normé & $A$ & $B \subset E$.

$$A+B = \{z \in E : \exists x \in A, \exists y \in B, z = x+y\}$$

a) Mq si $A$ ouvert $\Rightarrow A+B$ est ouvert.

Considérons cp où $B = \{y_0\}$, où $y_0 \in E$ qq.

Ds ce cas, $A+B = \{x+y_0, x \in A\}$

Observons que si $x \in A$ & $r>0$ tq $B(x,r) \subset A$.

alors $x+y_0 \in A+B$ & $y \in B(x+y_0, r)$

$\Leftrightarrow \|y-(x+y_0)\| < r$

$\Leftrightarrow \|(y-y_0)-x\| < r$ translat

$\Leftrightarrow y - y_0 \in B(x,r) \Leftrightarrow y \in B(x,r)+y_0$.

On a $B(x+y_0, r) \subset A + y_0 = A+B$.

Donc tout point $\forall (x,y_0) \in A+B$, $\exists r>0$, tq $B((x,y_0), r) \subset A+B$.

Dc $A+B$ est ouvert lorsq $B = \{y_0\}$.

Considérons le cas général où $B$ est un ss-ens qq de $E$. Pr $y \in B$ soit $B_y := \{y\}$.

Écrivons, $A+B = \{x+y, x \in A, y \in B\}$

$$= \bigcup_{y \in B} \{x+y \mid x \in A\}.$$

$$= \bigcup_{y \in B} (A + B_y)$$

D'après la discussion précédente, $A + B_y$ est ouvert car $B_y$ est un ens à un seul élt.

Dc $A+B$ est aussi un ouvert.

b) Mq les pies $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
$B = \{0\} \times \mathbb{R}$

st fermées mais que $A+B$ n'est pas fermée.

NB : $g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
$= \{0\} \times \mathbb{R}$

La f $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$ est continue.

Rq $E, F$ evn, $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in E$,
$f$ est cont en $a$ si
$\underbrace{a_n \longrightarrow a}_{\|a_n - a\|_E \longrightarrow 0} \implies \underbrace{f(a_n) \longrightarrow f(a)}_{\|f(a_n) - f(a)\|_F \longrightarrow 0}$

si $f$ est cont $\implies f^{-1}(O)$ est ouvert.
$f^{-1}(\text{fermé})$ est fermé.

---

f $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$. f cont.

Observons que $A = f^{-1}(\{1\})$, $B = g^{-1}(\{0\})$ image récipq.
Le singleton $\{1\}$ (resp. $\{0\}$) étant fermé, et $f$ (resp $g$) étant continue, $f^{-1}(\{1\})$ (resp. $g^{-1}(\{0\})$) est nécessrt fermé. ainsi $A$ & $B$ st fermés.

$\boxed{\text{Mq } A+B \text{ n'est pas fermé.}}$

soit $(x,y) \in A+B$. Dc $\exists\, (x',y') \in A$, $(x'',y'') \in B$ tq $(x,y) = (x',y') + (x'',y'')$

Comme $(x',y') \in A$ & $(x'',y'') \in B$, on a :

$x'y' = 1$ & $x'' = 0$.

et $x = x' + x''$, $y = y' + y''$.

Ainsi $\begin{cases} x' = \frac{1}{y'} \\ x = \frac{1}{y'} \\ y = y' + y''. \end{cases}$

D'où $x \neq 0$ : on a de mqé $A+B \subset C$

où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Inversemt si $(x,y) \in C$ alors $x \neq 0$ & on pt écrire :

$$(x,y) = \underbrace{\left(x, \frac{1}{x}\right)}_{\in A} + \underbrace{\left(0, y - \frac{1}{x}\right)}_{\in B}.$$

Dc $C \subset A+B$. donc $A+B = C$.


C n'est pas fermé car $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ & $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0) \notin C$.

## Compacité

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

Ex17 Déterminer si ces ssts st ou ne st pas compacts ds

R : soit X evn dim finie alors $A \subset X$ est compact $\Leftrightarrow$ A est à la fois borné & fermé.

R : A est borné s'$\exists\, a \in X, r > 0$ tq $A \subset B(a,r)$

a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}$

Consid. l'appli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf p $f(x,y) = x^2 + y^4$.

- f étant continue, le singleton $\{1\}$ étant un fermé, $f^{-1}(\{1\})$ est nécessrt fermé.

Or $f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) : f(x,y) = 1\} = A$, dc A est fermé.

soit $(x,y) \in A$ qq alors $x^2 + y^4 = 1$. comme $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$ il vient que $0 \leq x^2 \leq 1$ & $0 \leq y^4 \leq 1$.

D'où $|x| \leq 1$ & $|y| \leq 1$, soit $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) \leq 1$

Ainsi on a mqé $A \subset B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0), 2)$. Donc A est borné

(23) Comme A est fermé & borné il est compact.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \cdot x^2 + y^5 = 2\}$

Considérons l'applicat° $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf p

$g(x,y) = x^2 + y^5$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$g$ étant cont, le singleton $\{2\}$ étant fermé, $g^{-1}(\{2\})$ est nécessairement fermé.

$$g^{-1}(\{2\}) = \{(x,y) : g(x,y) = 2\} = B$$

Dc $B$ ~~n'~~est fermé.

Brouillon ⚠ Cherchons une suite $\in B$ mais $\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$(x,y) = (x,-n) \in B$.

$$x^2 + (-n)^5 = 2 \iff x^2 = n^5 + 2$$
$$\iff x = \sqrt{n^5+2}.$$

Mq $B$ n'est pas borné. Considérons la suite $(x_n, y_n) = \left(\sqrt{n^5+2}, -n\right)$

On a $x_n^2 + y_n^5 = \left(\sqrt{n^5+2}\right)^2 + (-n)^5$
$= n^5 + 2 - n^5 = 2$

Soit $(x_n, y_n) \in B$.

D'autre part, $\|(x_n, y_n)\|_\infty \geq |n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Dc n'est pas borné. Dc $B$ n'est pas compact.



Ex 18 ⚠ dim infinie. (On ne pt pas user TH compact dim finie)

Soit $E = C([0,2\pi])$ muni $\|\cdot\|_2$.

pr $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = e^{int}$.

a) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pr $p,n \in \mathbb{N}$.

Soit $p,n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f_p(t)|^2 \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (f_n(t) - f_p(t))(\overline{f_n(t)} - \overline{f_p(t)}) \, dt \quad \text{car } |z|^2 = z\bar{z}$$

pr $z \in \mathbb{C}$.

$$= \int_0^{2\pi} (e^{int} - e^{ipt})(e^{-int} - e^{-ipt}) \, dt$$

car $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

$$\overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)} = \sum^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \sum^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \dots$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t} + 1) \, dt$$

Il y a 2 cas à considérer.

cas $p = n$ alors $\|f_n - f_p\|_2^2 = \|f_n - f_p\|_2^2 = 0$

cas $p \neq n$ $\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (2 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t}) \, dt$

$$= \left[2t - \frac{e^{i(p-n)t}}{i(p-n)} - \frac{e^{i(n-p)}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[ 2t - \frac{e^{i(p-n)t}}{i(p-n)} - \frac{e^{i(n-p)t}}{i(n-p)} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi - \cancel{\frac{e^{i(p-n)2\pi}}{i(p-n)}} - \cancel{\frac{e^{i(n-p)2\pi}}{i(n-p)}} = 4\pi$$

car $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} e^{i2\pi} = e^{ix} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$
$= e^{ix}$

Ainsi on a mqé $\|f_n - f_p\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ 2\sqrt{\pi} & \text{si } n \neq p \end{cases}$

b) ed boule unité fermée $BF(0,1)$ n'est pas compacte.

Rq : soit $X$ un espace topologique & soit $A \subset X$.
$A$ est dit compact si pr tt recouvrement d'ouverts de $A$, on pt en extraire un ss-recouvrem$^t$ fini, ie si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ & $O$ ouvert,
alors $\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ tq $A \subset \bigcup_{s=1}^{n} O_{i_s}$.

~~D'après q° a), $\left\| \frac{f_n}{2\sqrt{\pi}} - \frac{f_p}{2\sqrt{\pi}} \right\|$~~

On calcule $\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$.

Donc $\left\| \frac{f_n}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2 = 1$ d'où $\frac{f_n}{\sqrt{2\pi}} \in BF(0,1)$.

Rq : soit $X$ espace vectoriel normé alors $A \subset X$ est compact
$\Leftrightarrow \forall$ suite $(a_n) \subset A$, $\exists$ une ss-suite CV.

si $BF(0,1)$ étant compact, alors il existerait une sous-suite $\left( \frac{f_{n_k}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k=1}^{\infty}$ q CV vers $f \in BF(0,1)$.

soit $\varepsilon > 0$ qq. Il existe de $k_0$ tq $\forall k \geq k_0$ :
$$\left\| \frac{f_{n_k}}{\sqrt{2\pi}} - f \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

On a de $\|f_{n_k} - \sqrt{2\pi} f\|_2 < \varepsilon$ & $\|f_{n_{k+1}} - \sqrt{2\pi} f\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \leq \|f_{n_k} - \sqrt{2\pi} f\| + \|f_{n_{k+1}} - \sqrt{2\pi} f\| \leq 2\varepsilon$

Or d'après a), $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| = \sqrt{4\pi}$

Or d'après a), $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| = \sqrt{4\pi}$ !
On obtient de $\sqrt{4\pi} \leq 2\varepsilon$
$\Rightarrow \sqrt{\pi} \leq \varepsilon$.
Il suffit de choisir : $0 < \varepsilon < \sqrt{\pi}$ & on aboutit à une contradiction.
Donc $BF(0,1)$ n'est pas compact.

# Suites de Cauchy & Complétude

**Ex 1** Déterminer si suites $(U_n)_{n>0}$ st de Cauchy.

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$ evn, on dit qu'une suite $(x_n) \in E$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q \geq N$ :
$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

(D) soit $(E, \|\cdot\|)$ evn, on dit que $E$ est complet si tte suite de Cauchy de $E$ (CV) ds $E$.

(TH) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ pr $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est un espace de Banach.

a) $U_n = (-1)^n$ ds $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Mq $(U_n)$ n'est pas de Cauchy :
$\exists\ \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists p,q \geq N \quad \|u_p - u_q\| \geq \varepsilon_0$.

Choisissons $\varepsilon_0 = 1$. $\forall N > 0$, considérons $p = N$ & $q = N+1$ alors :
$$|U_p - U_q| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N|\,|1-(-1)|$$
$$= |(-1)^N|\, 2 = 2 > 1 = \varepsilon_0$$

Donc $(U_n)$ n'est pas de Cauchy.

b) $U_n = \left(n \sin\frac{1}{n}, \cos\frac{1}{n}\right)$ ds $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

(R) → Si une suite est (CV) alors elle est de Cauchy.
→ Si une suite est de Cauchy dans un espace de Banach alors c'est une suite (CV).

On a $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

& $\lim \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim \frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1$

Dc $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,1)$.

(26) Comme $(U_n)$ est (CV), elle est de Cauchy.

c) $u_n$ dans $(C[-1,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$

$u_n(t) = n - n^2|t|$

si $\underline{n|t| \leq 1}$ & $u_n(t) = 0$ sinon.

• Calculons $\|u_n\|_1$, on a :

$$\|u_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |u_n(t)|\, dt = \int_{-1/n}^{1/n} n - n^2|t|\, dt$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} n\, dt - n^2 \int_{-1/n}^{1/n} |t|\, dt$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2n^2 \int_0^{1/n} t\, dt$$

$$= n \cdot \frac{2}{n} - 2n^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/n} = 2 - 1 = 1.$$

• Calculons $\|u_{2n} - u_n\|$, on a :

$$\int_{-1}^{1} |u_{2n}(t) - u_n(t)|\, dt \geq \int_0^{1/2n} |u_{2n}(t) - u_n(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |(2n - (2n)^2(t)) - (n - n^2(t))|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |2n - 4n^2 t - n + n^2 t|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |n - 3n^2 t|\, dt \geq \int_0^{1/3n} |n - 3n^2 t|\, dt$$

$$= \int_0^{1/3n} (n - 3n^2 t)\, dt = n \int_0^{1/3n} dt - 3n^2 \int_0^{1/3n} t\, dt = n \cdot \frac{1}{3n} - 3n^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/3n}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3n^2}{2 \times 9n^2} = \frac{1}{6}.$$

Donc $\|u_{2n} - u_n\| \geq \frac{1}{6}$, $\forall n$.

Donc ce n'est pas une suite de Cauchy

Prenons $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$ alors $\forall N$, choisissons $p = N$, $q = 2N$

on a $p, q \geq N$ &

$$\|u_p - u_q\|_1 = \|u_{2N} - u_N\| \geq \frac{1}{6} = \varepsilon_0.$$

# TD. 2 - Fonct°s entre evn

## Continuité

**Ex 1** soit $(E, \|\cdot\|)$ evn sur $\mathbb{R}$.

Mq a) Toute applicat° constante sur E est cont.

Rq soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ 2 evn.

soit $U \subset E$ & $V \subset F$ deux ouverts

& soit $f : U \to V$ une applicat°.

soit $a \in U$, on dit que $f$ est cont en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U$ :

$$\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Autrement dit $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq

$$f(B_E(a, \delta)) \subset B_F(f(a), \varepsilon).$$

a) soit $f : E \to E$, une f cte :

$f(x) = c, \forall x \in E$ où $c \in E$ fixe

soit $a \in E$ qq

soit $\varepsilon > 0$ qq ; prenons $\delta > 0$ qq,

alors pour $\|x - a\| < \delta$, on a

$$\|f(x) - f(a)\| = \|c - c\| = \|0\| = 0 < \varepsilon$$

Dc $f$ est cont.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tout $a \in E$, $f : E \to E$
$x \mapsto f(x) = \lambda x + a$
est lipschitzienne.

Rq $f$ est M-Lipschitz $\Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$

soit $x, y \in E$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| = \|(\lambda x + a) - (\lambda y + a)\| = \|\lambda (x - y)\|$$
$$= |\lambda| \, \|x - y\|$$

Dc $f$ est M-Lipschitz av $M := |\lambda|$.

c) Mq $x \mapsto \|x\|$ est continue

c) Mq $f : x \longmapsto \|x\|$ est cont

Il suffit de mq $f$ est lipschitz.

Pour $x, y \in E$, on a :

$|f(x) - f(y)| = |\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$

Donc $f$ est 1-lipschitz.
Donc $f$ est continue.

Ex 2 soit $E = C([0,1])$ muni $\|\cdot\|_1$.

Vérifier $f \longmapsto \int^1_0 |f(t)|\, dt$

est 1-lipschitzienne de $E$ ds $\mathbb{R}$.

L'ex 2 découle de la preuve de ex 1.c)
car $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitz.

Ex 3 soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ ; les appli°s

$A : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\, dt$ , $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$

sont-elles cont sur $E$ si $E$ est muni norme :

a) $\|\cdot\|_\infty$ déf p $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$

Fonc° A

Soit $f, g \in E$ qq,

on a $|A(f) - A(g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t))\, dt \right|$

$\leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_0^1 \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty$

Donc A est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

On a aussi

$|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \|f - g\|_1$.

Donc A est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à $\|\cdot\|_1$.

Enfin, on a $|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$

CS $\leq \sqrt{\left( \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right) \left( \int_0^1 1\, dt \right)}$

$= \|f - g\|_2$

Donc A est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à $\|\cdot\|_2$.

Considérons $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$

($B$ la masse de Dirac en $0$.)

soit $f \in E$ qq, soit $\varepsilon$ qq,

a) Continuité de $B$ en $f$ p/ $\|\cdot\|_\infty$.

Pr $g \in E$, on a :

$|B(g)-B(f)| = |g(0)-f(0)| \le \sup_{t\in[0,1]} \|g(t)-f(t)\| = \|g-f\|_\infty$

Choisissons $\delta := \varepsilon$, on a $\forall g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f,\delta)$

$\Rightarrow \|g-f\|_\infty < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |B(g)-B(f)| < \varepsilon$

$\Rightarrow B(g) \in \mathbb{B}(B(f),\varepsilon)$

Donc $B$ est cont en $f$.

Comme $f$ est qq, $B$ est cont.

---

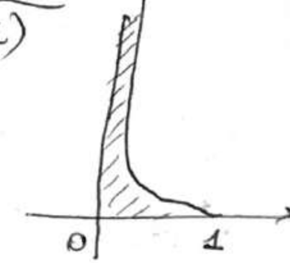
b) Continuité de $B$ en $f$ p/ $\|\cdot\|_1$.

Brouillon

intuitivement pas possible.

$\underbrace{|f(0)-g(0)|}_{h(0)} \le \int_0^1 \underbrace{|f(t)-g(t)|}_{h(t)}\, dt$

$|h(0)| \le \int_0^1 |h(t)|\, dt$




$h_n(t) = n(1-t)^n$ $\quad s = 1-t \quad ds = -dt$

$\int_0^1 h_n(t) = n\int_0^1 (1-t)^n\, dt = n\int_0^1 s^n\, ds = n\left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$

or $h_n(0) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ça marche

---

Mq $B$ n'est pas cont en $0_E$.

Considérons la suite de fs :

$h_n(t) := (1-t)^n$, $\forall t \in [0,1]$

On a $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ & $\|h_n\| = \int_0^1 (1-t)^n\, dt$

$= \int_0^1 (1-t)^n\, dt = -\int_1^0 = \int_0^1 s^n\, ds = \left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

il vient que $\|h_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

si $B$ était cont en $0_E$ alors $B(h_n)$ cvrait vers $B(0_E) = 0_E(0) = 0$

Dc $B$ n'est pas cont en $0_E$ $\longleftarrow$ 3o Or $B(h_n) = h_n(0) = (1-0)^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Mq $B$ n'est pas cont en tt pt $f \in E$.

Si ce n'était pas le cas, alors comme

$\|(f+h_n) - f\|_1 = \|h_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On devrait avoir $|B(f+h_n) - B(f)| \to 0$

Or $B(f+h_n) - B(f) = (f+h_n)(0) - f(0)$

$= f(0) + h_n(0) - f(0)$

$= 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Donc $B$ n'est cont nulle part.

---

c) $B$ n'est pas cont en aucun point $\not\!\!\nearrow \|\cdot\|_2$. $\hat{M}$ preuve que $\not\!\!\nearrow \|\cdot\|_1$ en calculant $\|h_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |h_n(t)|^2 dt}$

$= \sqrt{\int_0^1 (1-t)^{2n} dt}$

$= \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

NB : Tts les normes st équivalentes en dim finie.

Tts les normes ne st pas forcémt équivalentes en dimension infinie. (ici on avait espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$)

Ex 5 Soit $E_1, E_2$ 2 evn, $f, g$ 2 appli cont de $E_1$ ds $E_2$.

Mq $A = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé ds $E_1$.

R1 Soit $f : X \to Y$ une appli cont alors

(i) $f^{-1}(O)$ est ouvert de $X$, $\forall O$ ouvert de $Y$.

(ii) $f^{-1}(F)$ est fermé de $X$, $\forall F$ fermé de $Y$.

Mise en garde : ⚠ Les ouverts & fermés ne st pas conservés au moyen d'une image directe :

$O$ ouvert de $X \not\Rightarrow f(O)$ ouvert de $Y$.

$F$ fermé de $X \not\Rightarrow f(F)$ fermé de $Y$.

---

Mise en garde : ⚠ $f(X \setminus A) \neq f(X) \setminus f(A)$

**Ex5** Mq $A=\{x\in E_1, f(x)=g(x)\}$ est fermé ds $E_1$.

Considérons l'appli $h: E_1 \longrightarrow E_2$ donnée par $h(x)=f(x)-g(x)$, $\forall x\in E_1$.

Comme $f$ & $g$, il en est de m̂ pr $h$.

Observons que $A=\{x\in E_1, f(x)=g(x)\}$

$A=\{x\in E_1, f(x)-g(x)=0_{E_2}\}$

$A=\{x\in E_1, h(x)=0_{E_2}\}$

$=h^{-1}(\{0_{E_2}\})$

Or $h$ étant cont. & $\{0_{E_2}\}$ étant fermé de $E_2$, $h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ est nécessᵗ fermé.

Dc $A$ est fermé.

**Ex6** soit $f: E\longrightarrow F$ une appli entre 2 evn.

Mq $f$ est cont ssi si $\forall$ tte partie $A$ de $E$,

$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

**Ex7** soit $f, g$ 2 appli cont d'un evn $E_1$ ds $E_2$ (evn)

on spps $f=g$ sr une pie $A$ de $E_1$, dense ds $E_1$.

Mq $f=g$ sur $E_1$.

ef 2 appli déf & cont sr $\mathbb{R}$, q coïncident sr $\mathbb{Q}$, st égales.

Considérons l'appli $h: E_1\longrightarrow E_2$ donné par

$h(x)=f(x)-g(x)$, $\forall x\in E_1$.

Comme $f, g$ st cont ; il en est de m̂ pr $h$.

D'après l'hypo, $f(x)=g(x)$ pour $x\in A$.

Il vient que $h(x)=f(x)-g(x)=0_{E_2}$ $\forall x\in A$.

dc $A\subset h^{-1}(\{0_{E_2}\})$.

$\Rightarrow$ ef $\overline{A}\subset h^{-1}(\{0_{E_2}\})$. car $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.

$A\subset B\Rightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$

$A\subset B\Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$.

Comme $A$ est dense ds $E_1$, on a $\boxed{\overline{A}=E_1}$

Il vient de $\overline{A}=E_1 \subset \overline{h^{-1}(\{0_E\})} \subset E_1$

$A=\overline{A}$ si $A$ fermé

$$E_1 = \overline{h^{-1}(\{0_E\})}$$

Or $h$ étant cont & $\{0_{E_2}\}$ étant fermé de $E_2$, $h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ est nécess$^{re}$ fermé.

Donc $E_1 = h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ & $h = 0_{E_2}$

& $f=g$.

---

Ex 8 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ens des mat carrées de taille $n$, de la norme $N_\infty$,

$N_\infty(A) = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

a) Mq trace est une applicat° cont de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \leftrightarrow$ espace de dim finie.

ici $\|A\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$

car $a_{i,j}$ parcourent dans $\mathbb{R}$ librement.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

... est ... des ensembles denses ds les ens :

$\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$, $B=(b_{ij})$

soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A=(a_{i,j})$ qq & soit $\varepsilon>0$.

Il ns faut mq $\exists\, \delta>0$ tq $\forall\, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\|A-B\|_\infty < \delta \Rightarrow |\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| < \varepsilon$$

On a $|\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ii}-b_{ii})\right|$

$\leq \sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ii}-b_{ii}| \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\|A-B\|_\infty$ car $|a_{ii}-b_{ii}| \leq \sup\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}-b_{ij}| = \|A-B\|_\infty$

$= n\,\|A-B\|_\infty$.

Choisissons $\delta := \frac{\varepsilon}{n}$, l'inégalité précédente implique que $\mu$ $\|A-B\|_\infty < \delta = \frac{\varepsilon}{n}$,

$$|\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| \leq n\,\|A-B\|_\infty = \varepsilon$$

Donc $\mathrm{Tr}$ est cont en $A$.

## Retour sur le TD 1

**Ex 28** à propos Th de Baire.

a) Vérifier 3 affirmaᶜˢ du Th de Baire ASSE :?

Dans un espace métrique complet (mv)

(i) tte intersecᶜ dénombrable d'ouverts dense est dense.

(ii) tte réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

(iii) si l'espace entier est réunion dénomb. de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert (mv).

---

Rappelons qu'un espace métriq $(X, d)$ est dit **Complet** si tte suite de Cauchy est CV.

Rppls une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall p,q \geq N_\varepsilon$ :

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$



• Mq (i) $\Rightarrow$ (ii)

soit $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fermés d'int vide

Posons $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, on doit mq $F$ est d'intérieur vide, $\mathring{F} = \emptyset$.

Posons $O_n = X \setminus F_n$, $\forall n \geq 1$.

$O_n$ est ouvert car $F_n$ est fermé. En plus, $O_n$ est dense car sinon $\overline{O_n} \neq X$.

$\emptyset \neq X \setminus \overline{O_n} \subset X \setminus O_n = F_n$ & donc $F_n$ contient l'ouvert (mv) $X \setminus \overline{O_n}$.

Ce q contredit l'hypo $\mathring{F_n} = \emptyset$.

En appliquant (i), $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense ds $X$.

Dc $X \setminus O = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus O_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F.$$

Si $\mathring{F} \neq \emptyset$ alors $O$ n'est pas dense ds $X$, c'est la contradicᶜ cherchée. $\boxed{c?!c}$

(i) Si $\mathring{F} \neq \emptyset$ alors $O$ n'est pas dense ds $X$ car $X \setminus \bar{O}$ contient $\mathring{F} \neq \emptyset$ & de $X \setminus \bar{O} \neq \emptyset \Rightarrow O$ n'est pas dense.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(ii) Tte réunion (d) de fermés d'int vide est d'int. vide $\Rightarrow$ (iii) si l'espace entier est réunion (d) de fermés, l'1 au ms de g fermés cont-t un ouvert nv.

soit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $\forall$ $F_n$ fermé.

Supposons par l'absurde que $F_n$ est d'int vide $\forall n$. D'après (ii), leur union $X$ est aussi d'intérieur vide.

Or $\mathring{X} = X \neq \emptyset$ D'où contradicti⁰ recherchée.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

soit $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts denses.

On doit mq $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense.

(R) soit $O \subset X$ alors

(i) $O$ est dense dans $X \Leftrightarrow F = X \setminus O$ est d'int. vide.

Preuve R: $O$ est dense ds $X \Leftrightarrow \bar{O} = X$

$\Leftrightarrow X \setminus \bar{O} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \text{int}(X \setminus O) = \emptyset$ car $\text{int}(X \setminus O) = X \setminus \bar{O}$.

$\Leftrightarrow \mathring{F} = \emptyset$

D'après le fait ci-dessus, on est ramené à mq $F := X \setminus O$ est d'int. vide.

Comme $O_n$ est dense, $F_n := X \setminus O_n$ est d'int. vide, d'après le (i) ci-dessus. $F_n$ est aussi fermé car $O_n$ est ouvert.

On a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus O_n) = X \setminus \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \right) = X \setminus O = F$

alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bar{O} = F \cup \bar{O} = (X \setminus O) \cup \bar{O} \supset (X \setminus O) \cup O = X$

Dc $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bar{O} = X$.

En appliquant (iii), $\exists$ au moins un fermé parmi les $F_n$ & $\bar{O}$ q est d'int non vide.

Card indénombrable si espace est complet.

Or on sait que $F_n$ est d'int vide.
Donc $\overline{O}$ est d'int non vide.
Dc d'après le ⓛ, $X \setminus \overline{O}$ n'est pas dense.
Dc $\overline{O}$ est dense car $\overline{O} \cup (X \setminus \overline{O}) = X$
Dc $O$ est dense ds $X$.

b) Considérons l'ens des nbs entiers $\mathbb{Z}$ (voir cours de $\mathbb{Z}$) muni de la dist euclidienne venant de $\mathbb{R}$.

(i) Vérifier $\mathbb{Z}$ est complet

$(\mathbb{Z}, |\cdot|)$, pr $x, y \in \mathbb{Z} : d(x,y) = |x-y|$

soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$, une suite de Cauchy.

On doit mq 'elle CV, soit $\varepsilon > 0$ qq,
or $(x_n)$ est de Cauchy $\exists N = N(\varepsilon)$ tq
$\forall n, m \geq N_\varepsilon : d(x_n - x_m) < \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon < \frac{1}{2}$. On a dc $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}$
$\forall n, m \geq N$. Comme $x_n \in \mathbb{Z}$, on conclut $x_n = x_m$
$\forall n, m \geq N$.

Posons $a := x_N = x_{N+1} = \dots$
On a $\forall n \geq N$, $d(x_n, a) = |x - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$
Donc $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

(ii) $\mathbb{Z}$ est la réunion d'un ens D de ses ss-ens (les singletons). Est-il contradictoire au Th de Baire?

Comme $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\}$, il est la réunion des singletons.
Chaque singleton $\{n\}$ est fermé car $\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \left\{ \begin{matrix} m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq n \end{matrix} \right\}$
$\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq n}} B(m, \frac{1}{2})$ car $B(m, \frac{1}{2}) = \{k \in \mathbb{Z}, |k - m| < \frac{1}{2}\} = \{m\}$

D'après Th de Baire (v. a) iii)). Il existe au moins un fermé dont l'intérieur est nv.
C'est tout à fait normal car le fermé $\{n\}$ contient l'ouvert $B(n, \frac{1}{2}) = \{n\}$

@ espace métriq $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Pas de TD semaine pro 25/10 24/10

c) Est-ce que (Th) affirme réunion $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ des ens mpd $F_n$ est elle-m̂ mpd ds l'espace ds l'espace (voir b) Vérifier ⊄ $F = \mathbb{Q}$.

Non le (Th) affirme seulem^t que pr espace métriq complet, toute réunion (d) de fermés d'int vide est d'int vide.

@ $F = \bigcup_{n \in} F_n \subset \mathbb{R}$ tq chaque $F_n$ n'est mpd et que $F$ est dense partout.

Considérons pr $n \geqslant 1$,

$$F_n := \left\{ x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$F_n$ n'est comme $\mathbb{N}$, mpd ds $\mathbb{R}$.

Mais $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{ x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \} = \mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$.

**Ex 27** a) Donner des exemples denses ds les ens : $\to \mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \ell_2$ & $(C[a,b], d)$ où $d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

Exemples des ens $Z$ denses ds $X$.

- cas $X = \mathbb{R}$ :
  - $Z = \mathbb{R}$
  - $Z = \mathbb{Q}$
  - $Z = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{nbr irrationnels}\}$
- cas $X = \mathbb{R}^m$
  - $Z = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{Q}^n$, $Z = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^m$, $Z = (\mathbb{Q})^k \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{m-k}$
- cas $X = \ell^2(\mathbb{R})$
  - $Z = \ell^2(\mathbb{R})$
  - $Z = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap \ell^2(\mathbb{R}) = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) : x_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, \ \& \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$

↳ Un espace q̇ admet un ss-ens dénomb. dense est appelé "séparable"

- cas $X = (\mathcal{C}[a,b], d)$ ; où $d(f,g) := \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$
  - $Z = X$
  - $Z = \mathbb{R}[t]$ : anneau de polynômes

C'est le (Th) d'approximat° de Weierstrass :

$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in \mathcal{C}[a,b]$, $\exists$ un poly $P$ tq

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon, \forall t \in [a,b].$$

- $Z = \mathbb{Q}[t]$ = anneau de polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$

$= \{ P = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t^1 + c_0 : c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{Q} \}$.

Comme $\mathbb{Q}[t]$ est dense ds $\mathbb{R}[t]$, et $\mathbb{R}[t] \overline{\qquad} C[a,b]$, il s'ensuit que $\mathbb{Q}[t] \subset C[a,b]$.

En plus, $\mathbb{Q}[t]$ est dénombrable.

Donc $C[a,b]$ est séparable.

b) R ss-ens $D$ d'un espace métriq $X$ est appelé npd (ou rare) s'il n'est dense ds aucune boule ouverte de $X$, ie $\forall$ boule ouverte $B \subset X$ $\exists$ une boule ouverte $B'$ tq $B' \subset B$ & $B' \cap D = \emptyset$.
Mq cette définiθ est équivalte à ppté

$$\mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset.$$

$D$ npd $\Rightarrow \mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset$,

sppsd p l'absurde $\mathrm{int}(\overline{D}) \neq \emptyset$.

Considérons une boule $\emptyset \neq B \subset \mathrm{int}(\overline{D})$.

$\forall$ boule ouverte $B' \subset B$, on a : $B(x,r)$

$B' \cap D = \emptyset$ car $x' \in B' \subset B \subset \overline{D}$

On aboutit à une contradicθ du fait que $D$ est npd : $\forall$ boul $B$ $\exists$ une boule $B' \subset B$ tq $B' \cap D = \emptyset$. $\boxed{c.q.f.d}$

$\mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset \Rightarrow D$ npd

M1 si $\forall$ boul $B(x,r)$ contient $B' \subset B(x,r)$ tq $B' \cap D = \emptyset$

alors $\forall x \in B'$, $x \notin \overline{A}$.

$\Rightarrow B(x,x) \not\subset \overline{D} \Rightarrow \mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset$.

M2 sppsd p (?!) $D$ n'est pas npd $\Rightarrow \exists$ boule $B$, $\forall$ boul $B' \subset B$, on a $B' \cap D \neq \emptyset$. soit $x \in B$ qq alors $B' = B(x,r) \cap D \neq \emptyset$ $\forall r > 0$. Dc $x \in \overline{D}$ & de $B \subset \overline{D}$. d'où $\mathrm{int}(\overline{D}) \supset B \neq \emptyset$.

$\boxed{c.q.f.d}$

c) Vérifier que ens $\mathbb{N}$ & $\mathbb{Z}$ est mpd ds $\mathbb{R}$.

L'ens $\{(\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il rare ds $]-1,1[$ ?

Mq $\mathbb{Z}$ n'est mpd ds $\mathbb{R}$.

D'après b, il faut & il suffit de prouver

que $\text{int}(\overline{\mathbb{Z}}) = \emptyset$.

▸ Mq $\mathbb{Z}$ est fermé. soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ alors $\exists$ une suite $(x_n) \subset \mathbb{Z}$ tq $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dc $\exists N, \forall n \geq N$,

$$d(x, x_n) < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N,$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$$

Com $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$, on ad $x_n = x_m$.

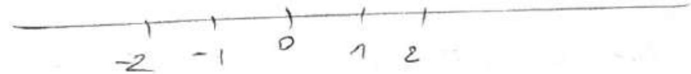
Donc $x_n = x_N$, $\forall n \geq N$ & $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow d(x, x_N) = 0 \Rightarrow x = x_N \in \mathbb{Z}$

Dc $\mathbb{Z}$ est fermé.

▸ Il reste à vérifier que $\text{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

Si ce n'était pas le cas alors $\mathbb{Z}$ contenait un intervalle $]a, b[$ où $a \neq b$. Ce n'est pas possible.




Donc $\mathbb{Z}$ n'est mpd ds $\mathbb{R}$.

d) ens de Cantor : ‖ construire ens (nd) & mpd ds $[0,1]$ ‖

On divise $I = I_0 = [0,1]$ en 3 pies égales & on enlève le milieu $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, en notant $I_1$ pie restante; les 2 ss-int st subdivisés en 3 → enlève milieu → noté $I_2$.

Sur le pas $n$, on obtient $I_n \subset I_{n-1} \subset [0,1]$ constitués de $2^{n-1}$ ss-int. disjoints de longueur $3^{-n}$.

On pose $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

(i) Mq $C$ est ens $\infty$ et fermé de $\mathbb{R}$.

est-il rare ds $]-1,1[$.

## Retour sur c)

soit $D = \{(\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\} \subset ]-1,1[$

On a $\overline{D} := D \cup \{0\}$ car $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\text{int}(\overline{D}) = \emptyset$ car si $x_0 \in \text{int}(\overline{D}) = \text{int}(D \cup \{0\})$

alors soit $x_0 = \frac{1}{n_0}$ pr un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$

soit $x_0 = 0$.

1° cas $x_0 = \frac{1}{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{n_0}$ $\frac{1}{n_0-1}$ $0$

$B(x_0, r) \cap D \cup \{0\} = \{x_0\}$ lorsque $r > 0$ assez petit.

Or $B(x_0, r) \subset D \cup \{0\}$ lorsq $r > 0$ assez petit

et cette boule a une qté d'élt. $\boxed{c\ !!\ c}$

2° cas : $x_0 = 0$

$]-1,1[$

Dc $\exists\, r > 0$ assez petit tq $B(0, r) \subset D \cup \{0\}$.

Car cette boule contient des points irrationnels tandis que $D \cup \{0\} \subset \mathbb{Q}$. $\boxed{c\,!!\,c}$

Dc $D$ est npd ds $\mathbb{R}$, ep npd ds $]-1,1[$ de $\mathbb{R}$. (ouvert)

## Retour sur d) Ens de Cantor

$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad I_1 \qquad I_0 \quad 0 \quad 1$

$0 \quad 1 \quad I_2$

(i) Mq $C$ est ens $\infty$ et fermé de $\mathbb{R}$

On a $I_0 = [0,1]$, $I_1 = I_0 \setminus ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

$= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

$I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$.

Sur le pas $n$, on obtient :

$I_n$ constitué de $2^n$ intervalles

$$\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}\right] \text{ où } m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i \quad \text{à } m_i \in \{0,2\}$$

Observons que $\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}\right]$ est fermé. Donc $I_n$ est fermé

Dc $\quad C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est aussi fermé.

Pr mq $C$ est de cardinal infini, il suffit de mq :

$$C_0 = \{x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 3^{-i-1} : m_i \in \{0,2\},\ \forall i \in \mathbb{N}\} \subset C$$

$C_0$ est l'ens ds nbrs $x \in [0,1]$ dont l'écriture trinaire (ie en base 3) est $\overline{0, m_0 m_1 \dots m_i \dots}$ à $m_i \in \{0,2\}$

$x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 10^{-i-1}$ $m_i \in \{0, \dots, 9\}$

$= \overline{0{,}m_0 m_1 m_2 \dots}$    exept $0{,}\overline{99} = 1$.

Donc $C_0$ est de cardinal $2^{\mathbb{N}} = \infty$

soit $x = \overline{0{,}m_0 m_1 m_2 \dots m_i \dots} \in C_0$

Observons que chaq $n \geq 1$,

$x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right]$ où $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$

de $x \in I_n$. Donc $x \in C$

Donc $C$ est de cardinal $\infty$.

(ii) Mq $C$ est mpd de $[0,1]$

soit $]a,b[ \subset [0,1]$ tq $]a,b[ \cap C \neq \emptyset$.

Mq $\exists$ ss-interv. $]a',b'[ \subset ]a,b[$ tq

$]a',b'[ \cap C = \emptyset$.

indic considérer ss-int $I_m$ contenant $x \in C \cap ]a,b[$

& mq interv. $]c_m - 2^{-m-1}, c_m + 2^{-m-1}[$

vérifie l'affirmaO, où $c_m$ est milieu de $I_m$.

Pr mq $C$ ~~n'~~est mpd d'après f), il faut & il suffit de mq $\forall$ $]a,b[ \subset [0,1]$, il existe un ss-intervalle $]a',b'[$ tq $]a',b'[ \cap C = \emptyset$.

Brouillon si $]a,b[ = ]0,1[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

si $]a,b[ = ]0, \frac{1}{3}[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$,

si $]a,b[ = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]a,b[$.

si $]a,b[ = ]\frac{2}{3}, 1[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ & $m \in \mathbb{N}$ : $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \subset ]a,b[$.

Écrivons $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$ & $m_i \in \{0,1,2\}$

Il y a 2 cas :

① si $m_i = 1$ pr un certain $i$

alors $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[$ $\subset$ un intervalle enlevé.

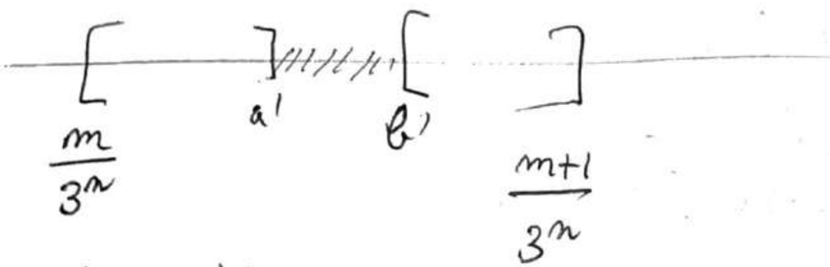
$\Rightarrow ]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \cap I_i = \emptyset$

$\Rightarrow ]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \cap C = \emptyset$ car $C \subset I_i$.

○ Il suffit de prendre $]a', b'[ = ]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}[$

⊛ si $m_i \in \{0,2\}$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$

Alors on prend $]a',b'[$ le tier-intervalle au milieu ĉ $[a',b']$




comme $]a',b'[ \cap I_n = \emptyset$, et $C \subset I_n$, on conclut que $C \cap ]a',b'[ = \emptyset$.

Donc $C$ n'est npcl

Ex 30 (Principe de la borne uniforme)

soit $X$ espace métriq complet. spps $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fs cont tq $\forall x \in X$ la f

$c(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$ est bornée

Alors $\exists\, r > 0$ & boule fermée $B = \overline{B(a,r)} \subset X$ du rayon $r > 0$ tq pr cte uniforme $D > 0$ on a $\forall x \in B$: $|f(x)| \leq D$.

a) Mq ens $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$ est égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$, et qu'il est fermé.

$X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\} = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq N\}$

$= \{x \in X : |f_n(x)| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$

ĉ $f_n$ est cont &

Comme $f_n$ est cont &

$\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\} = \{x \in X : f_n(x) \in [-N,N]\}$
$= f_n^{-1}([-N,N])$,

et $[-N,N]$ est fermé l'ens $\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$ est fermé. Donc $X_N$ est fermé.

$x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 10^{-i-1}$ $\quad m_i \in \{0,\dots,9\}$

$= \overline{0, m_0 m_1 m_2 \dots}$ $\quad$ except $0,\overline{9} = 1$.

Donc $C_0$ est de cardinal $2^{\mathbb{N}} = \infty$

soit $x = \overline{0, m_0 m_1 m_2 \dots m_i \dots} \in C_0$

Observons que chaque $n \geq 1$,

$x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right]$ où $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$

de $x \in I_n$. Donc $x \in C$

Donc $C$ est de cardinal $\infty$.

(ii) Mq $C$ est mpd ds $[0,1]$

soit $]a,b[ \subset [0,1]$ tq $]a,b[ \cap C \neq \emptyset$.

Mq $\exists$ ss-interv. $]a',b'[ \subset ]a,b[$ tq

$]a',b'[ \cap C = \emptyset$.

indic considérer ss-int $I_m$ contenant $x \in C \cap ]a,b[$ & mq interv. $]c_m - 2^{-m-1}, c_m + 2^{-m-1}[$ vérifie l'affirmation, où $c_m$ est milieu de $I_m$.

Pr mq $C$ ~~est~~ est mpd d'après f), il faut & il suffit de mq $\forall\ ]a,b[ \subset [0,1]$, il existe un ss-intervalle $]a',b'[$ tq $]a',b'[ \cap C = \emptyset$.

Brouillon si $]a,b[ = ]0,1[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

si $]a,b[ = ]0,\frac{1}{3}[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$,

si $]a,b[ = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]a,b[$.

si $]a,b[ = ]\frac{2}{3}, 1[ \Rightarrow ]a',b'[ = ]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ & $m \in \mathbb{N}$ : $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \subset ]a,b[$.

Écrivons $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$ où $m_i \in \{0,1,2\}$

Il y a 2 cas :

(*) si $m_i = 1$ pr un certain $i$

alors $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \subset$ un intervalle enlevé.

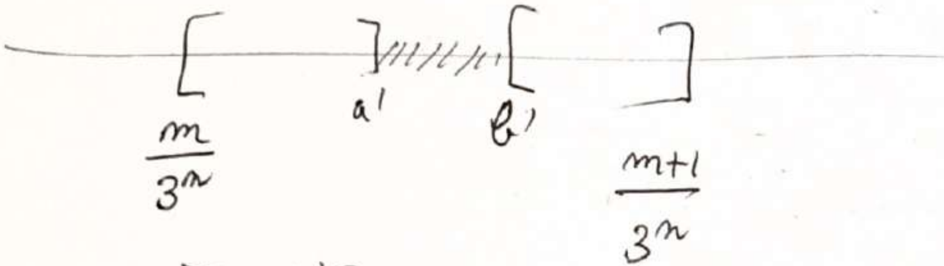
$\Rightarrow ]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \cap I_i = \emptyset$

$\Rightarrow ]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[ \cap C = \emptyset$ car $C \subset I_i$.

(⇐) Il suffit de prendre $]a',b'[ = ]\frac{m}{3^m}, \frac{m+1}{3^{m+1}}[$

⊛ si $m_i \in \{0,2\}$, $\forall\, 0 \le i \le n-1$

Alors on prend $]a',b'[$ le tier-intervalle au milieu ĉ $[a',b']$




comme $]a',b'[ \cap I_n = \emptyset$, et $C \subset I_n$, on conclut que $C \cap ]a',b'[ = \emptyset$.

Donc $C$ n'est npd

**Ex30** (Principe de la borne uniforme)

soit $X$ espace métriq complet. spps $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fs cont tq $\forall x \in X$ la f $c(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ est bornée

Alors $\exists r>0$ & boule fermée $B = \overline{B(a,r)} \subset X$ du rayon $r > 0$ tq pr cte uniforme $D > 0$ on a $\forall x \in B$ : $|f(x)| \le D$.

a) Mq ens $X_N = \{x \in X : c(x) \le N\}$ est égal à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \le N\}$, et qu'il est fermé.

$X_N = \{x \in X : c(x) \le N\} = \{x \in X : \sup_{n\in N} |f_n(x)| \le N\}$

$= \{x \in X : |f_n(x)| \le N, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \le N\}$

ĉ $f_n$ est cont &

Comme $f_n$ est cont &

$\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\} = \{x \in X : f_n(x) \in [-N,N]\}$
$= f_n^{-1}([-N,N])$,

et $[-N,N]$ est fermé l'ens $\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$ est fermé. Donc $X_N$ est fermé.

b) Mq $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n = X$

Comme $\forall N \in \mathbb{N}$, $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\} \subset X$ il vient que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n \subset X$.

Pr mq l'égalité, suffit mq $X \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n$.

Soit $x_0 \in X$ pt qq. Prenons $N \in \mathbb{N}$ tq $N \geq c(x_0)$ alors $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$ contient $x_0$.

c) en usant le Th de Baire, mq $\exists\ r > 0$ & $N \in \mathbb{N}$ tq $X_N$ contient une boule fermée $B = \overline{B(a,r)}$.

→ On mq par l'(?!) $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tq $\mathring{X}_N \neq \emptyset$

Supps le contraire $\mathring{X}_N = \emptyset$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

D'après a) $X_N$ est fermé. Or $X$ est complet, par conséquent d'après le Th de Baire que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$ est d'intérieur vide.

Or d'après b, $X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$. Donc $X$ est d'intérieur vide, ce q est faux car $\mathring{X} = X \neq \emptyset$. On a mqé $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\mathring{X}_N \neq \emptyset$.

Donc $\exists\ a \in X$ & $s > 0$ tq $B(a,s) \subset X_N$.

Choisissons $r > 0$ tq $0 < r < s$ Alors $\overline{B(a,r)} \subset B(a,s) \subset X_N$.

(d) Dc $\forall x \in B = \overline{B(a,r)}$,

$c(x) \leq N$, ie $|f_n(x)| \leq N$, $\forall n \in \mathbb{N}$

## Ex26 TH sur boules emboîtées.

a) Énoncer TH TBFE.

Soit $(X,d)$ un espace métriq complet alors tte suite de boules fermées emboîtées $B_1 \supset B_2 \supset \dots B_i \supset B_{i+1} \supset \dots$ tq $\text{rayon}(B_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ possède un uniq point d'intersect° :

$$\exists !\, x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

~~b) Donner @ mq sans supposer que les boules soient fermées l'affirmat°~~

b) Donner @ mq sans suppos X soit complet l'affirmat° est fausse.

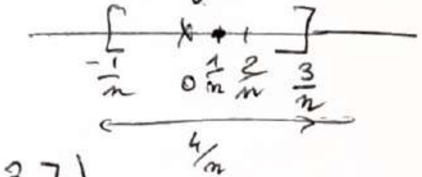
$$X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$d(x,y) = |x-y|, \quad \forall x,y \in X.$$

Pr $n \geq 1$ ; posons $B_n := \left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right] \setminus \{0\}$

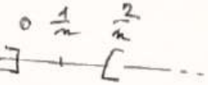
$$B_n = \overline{B_X\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)} = \left\{x \in X, \left|x - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{2}{n}\right\}.$$

$B_n$ est une suite de boules fermées de rayon $\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.




$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]\right) \setminus \{0\} = \{0\} \setminus \{0\}.$$

c) Donner @ mq sans supposer que les boules soient fermées l'affirmat° n'est pas vraie.




soit $X = \mathbb{R}$ : complet, pr $n \geq 1$ ; posons

$$B_n = B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}\right\} = \left]0, \frac{2}{n}\right[$$

$B_n$ est une suite de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{2}{n}\right[ = \emptyset$$

complet $\Leftrightarrow$ pas de trou.

d) Donner un ex. Mq sans supposer que les rayons des boules tendent vers 0 l'affirmation n'est pas vraie.

<u>indic</u>: Étape 1) sur $\mathbb{N}^*$, $d(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ (distance) si $m \neq n$ & 0 sinon.

Mq c'est une distance & que ens $\mathbb{N}^*$ muni de cette distance est complet.

<u>Étape 2</u>: Mq BB fermée $B(n, 1+\frac{1}{2n})$ est égal $\{n, n+1, n+2, \dots\}$ & son intersection vide.

$X = \mathbb{R}$ complet, pr $n \geq 1$, posons

$$B_n = \overline{B}(1, 1+\frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 1+\frac{1}{n}\}$$
$$= [-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}].$$

$B_n$ est une suite décroissante de boules fermées de rayon $1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}] = [0,2]$$

Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ n'est pas singleton.



# Retour TD.2

<u>Ex 8</u> On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ taille $n$, $N_\infty$ où $N_\infty(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$.
$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

a) Mq trace est appli <u>cont</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. ✓

b) Mq det est appli cont de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

<u>ed</u> $GL_n(\mathbb{R})$, l'ens mat de taille $n$ <u>inv</u> est ouvert.

b) Pour $A = (a_{ij})$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

où $\mathfrak{S}_n$ est ens permutations $\{1,\dots,n\}$ :

$\mathfrak{S}_n = \{ \sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijective $\}$.

$\varepsilon(\sigma)$ est le signe de $\sigma$ : $\varepsilon(\sigma) \in \{-1,1\}$

$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{N(\sigma)}$ où $N(\sigma) = \#\{(i,j) : i<j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)\}$
$= \{$nbre inversions de $\sigma\}$

Mq det est continue en un point qq $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$|\det(X^{(N)}) - \det(A)| \longrightarrow 0$ lorsque $\|X^{(N)} - A\|_\infty \to 0$.

Écrivons $X^{(N)} = (x_{ij})$ alors $\|X^{(N)} - A\| = \sup_{i,j} |x_{i,j} - a_{i,j}| \to 0$

implique $|x_{i,j}^{(N)} - a_{i,j}| \longrightarrow 0$, $\forall 1 \leq i,j \leq n$

$\Rightarrow x_{i,j}^{(N)} \longrightarrow a_{i,j}$, $\forall$ $1 \leq i,j \leq n$.

$\Rightarrow x^{(N)}_{1,\sigma(1)} \cdots x^{(N)}_{n,\sigma(n)} \longrightarrow a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$

$\Rightarrow \det X^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \det A$ $\quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

$\Rightarrow |\det(X^{(N)}) - \det(A)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ d'après FP.

Observons que $A$ est <u>inv</u> $\iff \det A \neq 0$

$\iff \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\iff A \in \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

Donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

Comme $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est <u>cont</u> & $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est ouvert ds $\mathbb{R}$. Dc $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

46

# Continuité & Compacité

**Ex13** soit $A$ pie compacte d'un espace vn
$f: A \longrightarrow A$ vérifiant $\forall (x,y) \in E^2, x \neq y$
$\Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$, $f$ cont
Mq $f$ admet uniq point fixe.
indic considérer $\phi(x) = \|f(x) - x\|$ &
justifier $\phi$ possède un minimum en $\alpha \in A$.
Mq alors $f(\alpha) = \alpha$.

---

**R** soit $E, F$ evn & $\Omega \subset E$ ouvert.
**HS** soit $f: \Omega \longrightarrow F$ une applicat° alors
$f$ est cont $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(O)$ ouvert, $\forall O$ ouvert de $F$.

---

soit $\varphi: A \longrightarrow [0, \infty[$ déf $\varphi(x) := \|f(x)-x\|$,
$x \in A$, comme $f$ est cont. & $x \mapsto \|x\|$ est cont,
$\varphi$ est aussi cont. $\varphi$ étant cont sur le compact $A$,
elle admet un min & max global.

1 **R** Soit $A$ compact, soit $\varphi: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $f$ cont
alors $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tq
$$m = \min_{x \in A} \varphi(x) = \inf_{x \in A} \varphi(x)$$
$$M = \max_{x \in A} \varphi(x) = \sup_{x \in A} \varphi(x).$$

- $m \leq \varphi(x)$, $\forall x \in A$ & $\exists\, x_m \in A$, $m = \varphi(x_m)$
- $M \geq \varphi(x)$, $\forall x \in A$ & $\exists\, x_M \in A$ tq $M = \varphi(x_M)$.

ⓔ $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0,1[$ n'admet pas max & min global.

---

Dc $\varphi$ possède un min global en $\alpha \in A$ (*) $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$, $\forall x \in A$.

Puis Mq $f(\alpha) = \alpha$. Sppo par (?!) que $f(\alpha) \neq \alpha$,
$x = f(\alpha)$ & $y = \alpha$
d'après l'hypo : $\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\|$
$$\varphi(f(\alpha)) < \varphi(\alpha).$$
Ce q contredit le fait que $\varphi(\alpha)$ est le minimum de $\varphi$.
(voir (*))

Donc $f(\alpha) = \alpha$ & $\exists!$ point fixe pour $f$

Pr mq l'unicité du pt fixe, sppo que $f$ admt 2 points fixes $\alpha$ & $\beta$. tq $\alpha \neq \beta$.
D'après l'hypo,

$$\| f(\alpha) - f(\beta) \| < \| \alpha - \beta \|$$

$$\| \alpha \overset{"}{-} \beta \| < \| \alpha - \beta \| \quad \underline{\text{impossible}}.$$

Ex 14

Soit $A, B$ 2 pro evn $E$, $A$ fermé de $E$.
$f : A \to B$ On note $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ le graphe de $f$. Pour $(x,y) \in E \times E$, on pose

$$\|(x,y)\|_\infty = \max(\|x\|, \|y\|).$$

a) Vérifier $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E \times E$.

(i) si $\|(x,y)\|_\infty = 0 \Rightarrow \|x\| = \|y\| = 0$
& de $x = 0$, $y = 0$ d'où $(x,y) = (0,0)$.

(ii) Pr $(x,y) \in E^2$ & $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda(x,y)\|_\infty = \|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty = \max(\|\lambda x\|, \|\lambda y\|)$$
$$= |\lambda| \max(\|x\|, \|y\|) = |\lambda| \, \|(x,y)\|_\infty.$$

(iii) soit $(x,y)$ & $(u,v) \in E^2$.
On a $\|(x,y) + (u,v)\|_\infty = \|(x+u, y+v)\|_\infty$
$= \max(\|x+u\|, \|y+v\|)$

D'autre part, ~~$\max(\|x+u\|, \|y+v\|) \leq$~~.
$\boxed{I}$ ~~$\leq \max(\|x\| + \|u\|, \|y\| + \|v\|)$~~

$$\|x+u\| \leq \|x\| + \|u\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) + \max(\|u\|, \|v\|)$$
$$\|y+v\| \leq \|y\| + \|v\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) + \max(\|u\|, \|v\|)$$

Il vient $\|(x,y) + (u,v)\|_\infty \leq \max(\|x\|, \|y\|) + \max(\|u\|, \|v\|)$
$$\|(x,y)\|_\infty + \|(u,v)\|_\infty$$

cl $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

b) Sppo $f$ est cont. Mq $G_f$ est fermé de $E \times E$.

soit $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$. R

$\boxed{M1}$ $G_f = \{x = f(x), x \in A\} = \{f(x) - x = 0, x \in A\}$ $\quad$ $f$ cont $\Downarrow$ $G_f$ cont

?? $G_f^{-1} = \{0\}$ d'où $\{0\}$ est fermé, de $G_f^{-1}$ est fermé de $G_f$ fermé

$\boxed{M2}$ Mq $\overline{G_f} = G_f$, soit de $(a,b) \in \overline{G_f}$, on doit mq $(a,b) \in G_f$. Comme $(a,b) \in \overline{G_f}$, $\exists$ suite $(x_n, y_n) \in G_f \longrightarrow (a,b)$.

$$\Rightarrow y_n = f(x_n) \quad \& \quad \|(x_n, f(x_n)) - (a,b)\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \|(x_n - a, f(x_n) - b)\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|x_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \&$$
$$\|f(x_n) - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Comme $x_n \in A$, $A$ est fermé, on cl

$\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ que $a \in A$.

Comme $f$ est cont en $a$, $\|f(x_n) - f(a)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

& de $b = f(a)$

Dc $(a,b) = (a, f(a)) \in G_f$.

ii) supp q° $B$ est compacte et $G_f$ fermé.

Mq $f$ est cont ($f : \underset{\text{fermé}}{A} \longrightarrow \underset{\text{compact}}{B}$)

Soit $a \in A$, on mq $f$ est cont en $a$,

Soit $a_n \in A$ tq $a_n \longrightarrow a$, on a $f(a_n) \in B$.

Comme $B$ est compact, on pt en extraire une

ss-suite CV : $f(a_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} b \in B$.

On a dc $a_{k_n} \longrightarrow a$, car $(a_{k_n})$ est une ss-suite de $(a_n)$

$f(a_{k_n}) \longrightarrow b$

$\Rightarrow \underbrace{(a_{k_n}, f(a_{k_n}))}_{\in G_f} \longrightarrow (a,b)$

Comme $G_f$ est fermé, on a $(a,b) \in G_f$

$\Longrightarrow b = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(a)$.

On cl, tt point d'adhérence de $f((a_n))_{n=1}^{\infty}$ est $f(a)$,

ce q mq $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

# Topologie et calcul intégral

Licence L3
le 12 novembre 2021
2 heures

**Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.**

**Question théorique.** Enoncer et démontrer le théorème de Baire. En déduire qu'un espace métrique complet n'est pas une réunion dénombrables de sous-ensembles nulle part denses.

**Exercice 1.** 1. En suivant les étapes suivantes montrer que toute suite des intervalles fermés emboîtés $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $I_{n+1} \subset I_n$ $(a_n < b_n)$ t.q. $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ possède un point commun unique $c$.

(a) Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_m$.

(b) On pose $c = \inf_n b_n$ [1]. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c \leq b_n$ et qu'un tel point $c$ est unique.

2. En utilisant un théorème du cours en déduire que $\mathbb{R}$ est complet.

3. En utilisant le théorème de Baire montrer que $\mathbb{R}$ est non-dénombrable.

4. Le but est de démontrer que l'intérieur de tout sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$ est non-vide si et seulement si $k = n$.

(a) En utilisant qu'un sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}^n$ reste invariant par les opérations

$$x \to x + a,\ x \to \lambda x\ (x, a \in E, \lambda \in \mathbb{R}),$$

montrer que si l'intérieur $\overset{\circ}{E}$ de $E$ est non-vide alors $E$ contient la boule unité $B(0,1) = \{x \in E : ||x|| < 1\}$.

(b) En déduire que $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$ implique que $E = \mathbb{R}^n$.

5. En utilisant le théorème de Baire et que $\mathbb{R}^n$ est complet [2], démontrer que $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être représenté en tant qu'une réunion dénombrable de ses sous-espaces propres, i.e. si $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_l$ où $E_l$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ alors $\exists\, l \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n = E_l$.

6. *(bonus) Démontrer qu'un espace de dimension infinie complet (e.g. $l_2$) ne peut pas avoir une base dénombrable. [3]

$\mathbb{N}^*$

**Exercice 2.** 1. Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, indiquer s'il est ouvert ou fermé, donner son intérieur, l'adhérence, ainsi que l'ensemble des points isolés et d'accumulation et son bord. Indiquer s'ils sont complets par rapport à la distance euclidienne de $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de justifications ici) :
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}_*\}$.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

2. Sur l'ensemble $\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_*$ (où $\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, ...\}$) on considère la fonction $d(n,m) = |1/m - 1/n|$.

(a) Montrer que $d$ est une distance.

(b) Montrer que l'espace $(\mathbb{N}_*, d)$ n'est pas complet. [4]

$d(n,n) = 0$

$d(n,m) = d(m,n)$

$d(m,k) \leq d(m,n) + d(n,k)$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_*$

---

1) On rappelle que par la définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré possède une borne supérieure sup, et tout sous-ensemble minoré possède une borne inférieure inf.

2) On l'a obtenu en cours à partir de la complétude de $\mathbb{R}$.

3) Indication. Si $E = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n, ...)$ on pose $E_n = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ et on applique l'argument précédent.

4) Tourner la page svp.

0 1

$1/3$ $\sqrt{2}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

ouvert ?
fermé ?
$\overset{\circ}{A}$
$\overline{A}$
Isol(A)
$\Lambda(A)$
$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$
Complet ?
$d_2(x,y)$


**Exercice 3.** Soient $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite *k-lipschitzienne* s'il existe une constante $k > 0$ t.q. $\forall x_1, x_2 \in X \ : \ d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2)$.

1. Montrer que pour tout $k > 0$ toute application $k$-lipschitzienne est continue.
2. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble quelconque non-vide. La fonction $g_A(x) = d_X(x, A) = \inf_{y \in A} d_X(x, y)$ est appelée *distance du point* $x \in X$ *à* $A$.
   (a) Montrer que $g_A$ est 1-lipschitzienne. En déduire que $g_A$ est continue sur $X$.
   (b) Montrer que l'ensemble des zéros de $g_A$ est $\overline{A}$, i.e. $g_A(x) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$.

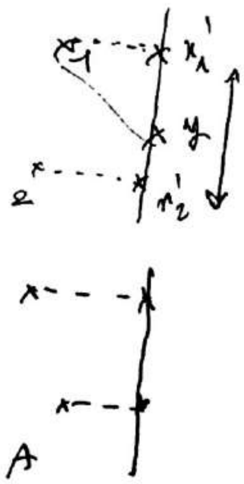
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(f(x)-f(y)) \leq \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda}\, d(x-y)$. $\quad \delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

Mq $d_X(g_A(x_1), g_A(x_2)) \leq \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{k}\, d_Y(x_1, x_2)$

$d_Y(d_X(x_1, A), d_X(x_2, A))$

$d_Y(\underbrace{\inf_{y \in A} d_X(x_1, y)}_{= x_1'}, \underbrace{\inf_{y \in A} d_X(x_2, y)}_{x_2'}) \leq d_Y(x_1', x_2')$





$\forall U_x,\ U_x \cap A \neq \emptyset$.

Comme $x_n \in A$, A est fermé, on a $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ que $a \in A$.

Comme $f$ est cont en $a$, $\|f(x_n) - f(a)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

& de $b = f(a)$.

Dc $(a,b) = (a, f(a)) \in G_f$.

c) Spps qᵒ B est compacte et $G_f$ fermé.

Mq $f$ est cont ($f : \underset{\text{fermé}}{A} \to \underset{\text{compact}}{B}$)

Soit $a \in A$, on mq $f$ est cont en $a$,

Soit $a_n \in A$ tq $a_n \to a$, on a $f(a_n) \in B$.

Comme B est compact, on pt en extraire une ss-suite CV : $f(a_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} b \in B$.

On a dc $a_{k_n} \to a$, car $(a_{k_n})$ est une ss-suite de $(a_n)$

$f(a_{k_n}) \to b$

$\Rightarrow \underbrace{(a_{k_n}, f(a_{k_n}))}_{\in G_f} \to (a,b)$

Comme $G_f$ est fermé, on a $(a,b) \in G_f$

$\Rightarrow b = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(a)$.

en ccl, tt point d'adhérence de $f((a_n))_{n=1}^{\infty}$ est $f(a)$, ce q mq $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

## Compacité & Connexité ds $\mathbb{R}^n$

Ex 17 : ss-ens $C \subset \mathbb{R}^n$ dit compact si tt recouvrement de C par des ouverts $U_i$ possède un ss-recouvrmt fini.

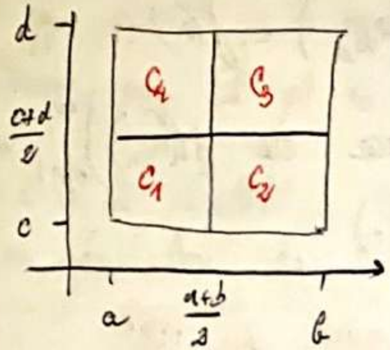
ie $C \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow C \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} U_{i_k}$, où $U_i \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, I un ens qq d'indices, $\{i_1, \dots, i_\ell\} \subset I$ est ss-ens fini.

On vt mq n-cube $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ($a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$) fermé est un compact ds $\mathbb{R}^n$. Spps C est un carré.

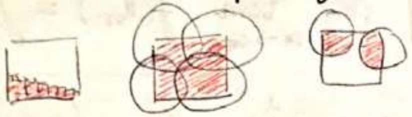
$C = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\} \subset \mathbb{R}^2$.

Spps p ?! que C n'est pas compact & q'$\exists$ recouvrement p ds ouverts $\{U_i : i \in I\}$ q ne possède aucun ss-recouvrmt fini.

a) en faisant subdivision successive de C en 4 pces égales, puis de l'un de ces 4 carrés etc, obtenir une suite ↓ de carrés $C_n$ fermés emboîtés dt diamètre $\longrightarrow 0$ tq chq $C_n$ n'est pas couvert p un nbre fini de ens. $U_i$ ($i \in I$).



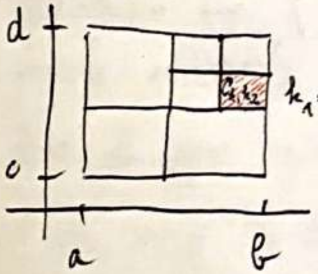

Pr chq carré $C$, soit $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ les quatre sous-carrés fermés qui sont obtenus de $C$ en faisant une subdivision de $C$ en 4 pies égales.



Observons $F=\{U_i, i\in I\}$ est un recouvrement de $C_k$ $\forall\, 1\leq k\leq 4$. Si chaq $C_k$ admt un recouvrement fini $\forall\, 1\leq k\leq 4$ alors l'union de ces 4 recouvrements serait un recouvrem$^t$ fini de $\bigcup_{k=1}^{4} C_k = C$ ce qui contredirait le fait que $C$ ne possède aucun recouvrem$^t$ fini.

Par conséquent, $\exists\, 1\leq k_1\leq 4$ tq $C_{k_1}$ ne possède aucun recouvrement fini de $F$.

On continue ce procédé en remplaçant $C$ par $C_{k_1}$. On obtient de la même manière $k_2$ : $1\leq k_2\leq 4$ tq $C_{k_1k_2}=(C_{k_1})_{k_2}$ tq $C_{k_1k_2}$ ne possède aucun recouvrement fini de $F$.




$k_1=3$, $k_2=2$

Ainsi de suite, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, on obtient

$$C_{k_1k_2\dots k_n} = (C_{k_1\dots k_{n-1}})_{k_n}$$ ne possède pas de recouvrem$^t$ fini de $F$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $C_{[n]} := C_{k_1k_2\dots k_n}$

b) Rappeler le ppe des intervalles fermés emboîtés sur $\mathbb{R}$ ayant un p$^t$ commun uniq. En déduisant le ppe simil$^{re}$ pr la suite des carrés emboîtés obtenus, mq $\exists!$ p$^t$ $x_0$ tq $\{x_0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$

Observons que $\text{diam}(C) = \max(b-a,\, c-d)$

$$\text{diam}(C_k) = \frac{1}{2}\,\text{diam}(C)$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow \text{diam}(C_{[n]}) = \frac{1}{2^n}\,\text{diam}(C) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

& $C_{[n]} \subset C_{[n-1]}$, $\forall\, n\geq 1$.

Ppe intervalles fermés emboîtés sur $\mathbb{R}$ ayant un p$^t$ commun uniq.

Soit $(\Delta_n = [a_n, b_n])_{n=0}^{\infty}$ une suite d'intervalles fermés sur $\mathbb{R}$ tq : (i) $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$, $\forall\, n\geq 1$ (emboîtée)

(ii) $\text{diam}(\Delta_n) = b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alors $\exists!\, x\in\mathbb{R}$ tq $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$.

et ppe simil^re pr la suite des carrés emboîtés obtenus, mq $\exists!$ pt $x_0$ tq $\{x_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

On a le m̂ résultat si $\Delta_n$ est un tube ds $\mathbb{R}^2$ : (ou généralem$^t$ ds $\mathbb{R}^N$).

En effet, en écrivant $\Delta_n = \Delta_n^1 \times \Delta_n^2$ ; les intervalles $\Delta_n^i$ satisfont

- $\Delta_n^i \subset \Delta_{n-1}^i$ car $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ;

$\mathrm{diam}(\Delta_n^i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\mathrm{diam}(\Delta_n) = \max(\mathrm{diam}\, \Delta_n^1, \mathrm{diam}\, \Delta_n^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En appliquant le principe précdt,

$\exists!\ x_i \in \mathbb{R}$ tq $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n^i = \{x_i\}$

Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n^1 \times \Delta_n^2)$

$= (\bigcap \Delta_n^1) \times (\bigcap \Delta_n^2) = \{x_1\} \times \{x_2\}$
$= \{(x_1, x_2)\}$.

- Le principe pr dim 2.

Observons que $(C_{[n]})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de carrés fermés emboîtés dont les diamètres tendent vers 0.
Par le ppe ci-dessus q̂ vient d'ê dmq ☺,
$\exists$ pt uniq $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tq $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{[n]}$.

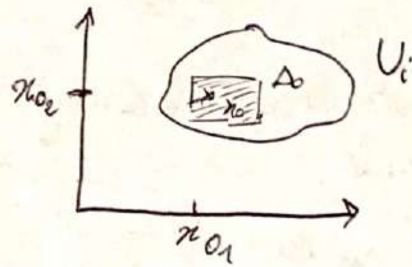
c) Ds le point $x_0$ obtenir une contradic° de l'hypo initiale!

Comme $C_{[n]} \subset C$, $\forall n$, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{[n]} \subset C$ & dc d'après b) $x_0 \in C$. Or $\mathcal{F}$ est un recouvrem$^t$ de $C$, $\exists$ de $i_0 \in I$ tq $x_0 \in U_{x_0}$.

Prenons $\delta_0 > 0$ tq $[x_{01}-\delta, x_{01}+\delta] \times [x_{02}-\delta, x_{02}+\delta] \subset U_{i_0}$

Comme $\mathrm{diam}(C_{[n]}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ & $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{[n]} = x_0$

$\exists\ n_0$ tq $C_{[n_0]} \subset \Delta_0$




même à l'élt

Donc $U_{i_0}$ est un recouvrement fini de $C_{[n_0]}$ car $C_{[n_0]} \subset \Delta_0 \subset U_{i_0}$.

Cela contredit le fait que $C_{[n_0]}$ n'admet aucun recouvrement fini de $\mathcal{F}$. On obtient la contradic° cherchée. Donc $C$ est bien compact.

## Ex 18 Conditions

(A) Un ss-ens $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact.

(B) L'ens $K$ est borné & fermé ds $\mathbb{R}^n$.

(C) Chq suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ contient une ss-suite $(x_{m_k})$ $(k \in \mathbb{N})$ q CV ds $K$ : i.e $\exists x \in K$ :
$x = \lim_{k \to \infty} x_{m_k}$. (la ss-suite CV ds $K$)

### Etape 1: $A \Leftrightarrow B$

a) Mq $A \Rightarrow B$ :

(i) Mq si $K$ n'est pas borné alors il ne pt ê couvert p un nbr fini de boules.

Spps p l'(?!) que $K^{\subset \mathbb{R}^n}$ n'est pas borné et qu'il est couvert p nbr fini de boule.

soit $B_1(x_1, r_1), \dots, B_m(x_m, r_m)$ ces boules.

Notons que $y \in B(x, r) \Rightarrow \|y - x\| < r$

$\Rightarrow \|y\| \le \|x\| + \|y - x\| < \|x\| + r$

d'où $B(x, r) \subset B(0, \|x\| + r)$.

On a $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(0, \|x_i\| + r_i) = B(0, r)$

où $r = \max_i (\|x_i\| + r_i)$

$\Rightarrow$ $K$ est borné ce q contredit le fait que $K$ n'est pas borné. Donc $K$ n'est pas couvert p nbr fini de boules.

(ii) Mq $K$ est fermé. ($\overline{K} = K$).

• soit $x \in \overline{K} \setminus K$, mq $\forall y \in K$ $\exists$ 2 ouverts $U_x, U_y$ contenant $x$ & $y$ (resp) tq $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Supps p l'(?!) que $K$ n'est pas fermé. soit $x \in \overline{K} \setminus K$.

$\forall y \in K$, on a $x \neq y$ do $r_y = |x - y| > 0$ :

Posons $U_x^y := B(x, r_y)$ $\quad U_y := B(y, \frac{r_y}{2})$.

alors $U_x^y \cap U_y = \emptyset$ car si $z \in U_x^y \cap U_y$

alors $\|z - x\| < \frac{r_y}{2}$ et $\|z - y\| < \frac{r_y}{2}$

$\Rightarrow \|x - y\| < \frac{r_y}{2} + \frac{r_y}{2} = r_y = \|x - y\| \Rightarrow \boxed{c?!c}$

a) (ii) soit $K$ un compact, Mq $K$ est fermé.

Spps (?!) $\overline{K} \neq K$,

(RA) soit $x \in \overline{K} \setminus K$ ; on a mqé $\forall y \in K$, $\exists$ deux ouverts $U_x^y$ de $x$ & $U_y$ de $y$ tq

$$U_x^y \cap U_y = \emptyset$$

Comme $\bigcup_{y \in K} U_y \supset \bigcup_{y \in K} \{y\} = K$,

$\{U_y\}_{y \in K}$ est un recouvrement de $K$ par des ouverts. Comme $K$ est compact, on pt en extraire un recouvrement fini, ie $\exists\ y_1, \dots, y_m \in K$ tq $K \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_m}$. ★

Posons $V := \bigcap_{k=1}^{m} U_x^{y_k}$, comme chq $U_x^{y_k}$ est un voisinage ouvert de $x$, il en est de m̂ p. $V$.

On vérifie que $V \cap K = \emptyset$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $y \in V \cap K$, & dc il existerait $1 \leq k \leq m$ tq $y \in K \cap U_{y_k}$ d'après l'inclusion ★ & on aurait :

$y \in V \subset U_x^{y_k}$ et $y \in U_y$ or $U_x^{y_k} \cap U_{y_k} = \emptyset$,

ce q est impossible dc $K$ est fermé. CQFD

b) Mq (B) $\Rightarrow$ (A)

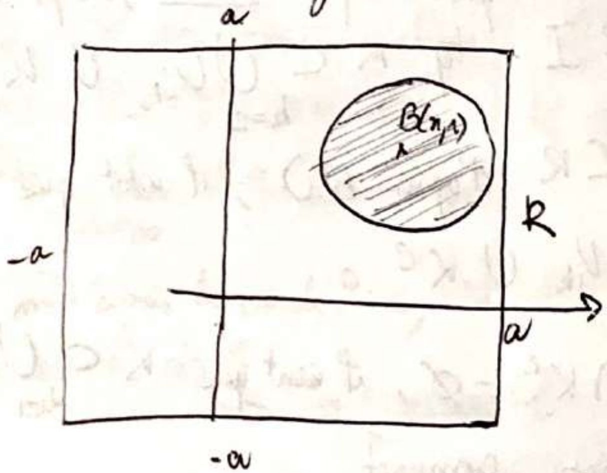
(i) Puisq $K$ est borné, Mq $\exists$ cube fermé $R \subset \mathbb{R}^n$ tq $K \subset R$.

Comme $K$ est fermé, $\exists\ x \in \mathbb{R}^n$ & $r > 0$ tq $K \subset B(x, r)$. Prenons $a > 0$ assez grand tq

$$B(x, R) \subset \underbrace{[-a, a] \times \dots \times [-a, a]}_{n \text{ fois}} = R$$

On a alors $K \subset B(x, R) \subset R$.

$R$ est dc le cube fermé cherché




Pba [illegible]

(ii) soit $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ un recouvrement de $R$ par des ouverts. Obtenir un recouvrement de $R$ par des ouverts.

Comme $K$ est fermé, $K^c = \mathbb{R}^n \setminus K$ est ouvert.

Par conséqt $K^c \cup \bigcup_{i\in I} U_i \supset K^c \cup K = \mathbb{R}^n \supset R$, & $\{U_i : i\in I\} \cup \{K^c\}$ est un recouvrement de $R$ par des ouverts.

(iii) en ext compacité de R, mq K est compact

Comme $R$ est compact d'après exo A, on pt trouver $i_1, \dots, i_m \in I$ tq $R \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup K^c$.

Comme $K \subset R$ d'après b)i) ; il vient que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup K^c$.

Comme $K \cap K^c = \emptyset$, il vient que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}$

De K est compact.

(Cor) Tt ss-ens fermé d'un compact est aussi un compact.

Étape 2 $B \Leftrightarrow C$

a) Mq $B \Rightarrow C$

(preuve analogue (Th) Bolzano-Weierstrass : tte suite bornée ds $\mathbb{R}$ (cv))

(i) soit $R$ un cube fermé contenant $K$ & $(x_m) \subset K$ une suite. en usant la subdivision de l'é ds exo 1, obtenir une suite de ss-cubes emboîtés $R_{k+1} \subset R_k$ de diamètre q td vers 0 tq chq $R_k$ contient une infté de pts $x_m$.

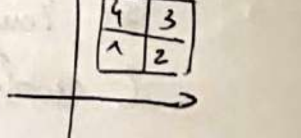
soit $C$ un cube fermé contenant $K$, $(x_m) \subset K$ une suite. On dmq (PR) sur $n \in \mathbb{N}$, le fait suivant : $\exists\, k_1, \dots, k_n \in \{1,2,3,4\}$ tq $C_{k_1 \dots k_n}$ contient une infinité de pts $x_m$ :

Pr $n=0$ : le fait est vrai car $(x_m)_{m=0}^{\infty} \subset C$

Sppo le fait pr $n$. On doit le dmq pr $n+1$.

P HDR, $C_{k_1 \dots k_n}$ contient $\infty$té de pts $x_m$.

Or $C_{k_1 \dots k_n} = \bigcup_{i=1}^{4} C_{k_1 \dots k_n i}$.




Par conséqt, $\exists\, 1 \leq i \leq 4$ tq $C_{k_1 \dots k_n i}$ contient une $\infty$té de pts $x_m$. Le fait reste vrai pr $n+1$ & $k_{n+1} := i$.

Q) a) (ii) posons $R_n := C_{k_1 \dots k_n}$

et $\exists$ ss-suite $(x_{m_n})$ de $(x_m)$ q CV vers pt $x_0$ tq $\{x_0\} = \bigcap_i R_i$.

On a $R_{n+1} \subset R_n$ et $\mathrm{diam}(R_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

soit $\ell$ le point d'intersect° de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Pour $n = 0$, choisissons $m_0 := 0$.

Spps qu'on aura déterminé $m_0, \dots, m_{n-1}$.

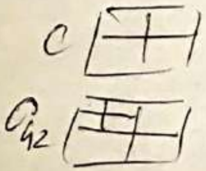
Comme d'après Q a) i), $R_n = C_{k_1 \dots k_n}$ contient $\infty$té de pts $x_m$, $\exists$ point $x_{m_n}$ tq $m_n > m_{n-1}$ & $x_{m_n} \in R_n$.

On a ainsi construit une ss-suite $(x_{m_n})$ de $(x_m)$ tq $x_{m_n} \in R_n$.

Comme $\{\ell\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ & $\mathrm{diam}(R_n) \searrow 0$

il vient que $\|\ell - x_{m_n}\| \leq \underset{\downarrow\, 0}{\mathrm{diam}(R_n)}$, car $\ell, x_{m_n} \in R_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{m_n} = \ell$




(iii) Expliquer $x_0 \in K$.

Comme $x_{m_n} \in K$ car $(x_m) \subset K$,

$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{m_n} \in \overline{K}$

or $K$ est fermé donc $\ell \in K$.

b) Mq (C) $\Rightarrow$ (B)

(i) Mq $K$ est borné car sinon $\exists$ une suite $(x_n) \subset K$ tq $\|x_n\| \to \infty$. Expliquer pk c'est impossible p condit° C.

Spps K est borné. Spps p (A) que K n'est pas borné. Dc $\forall n > 0$, $\exists x_n \in K$ tq $\|x_n\| \geq n$.

Dc $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \to \infty$.

D'après la condit° c, $\exists$ ss-suite $(x_{n_m})$ CV vers $\ell$ de $K$.

$\Rightarrow x_{n_m} \xrightarrow{m\to\infty} \ell$

$\Rightarrow \|x_{n_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} \|\ell\|$

or $\downarrow \infty \neq$ $\Rightarrow$ Contradict°.

Dc K est borné.

b) (ii) si $x \in \overline{K}\setminus K \Rightarrow \exists\, x_n \in K$ : $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

et $x \in K$, contradic°.

Spps q l'(!!) K n'est pas fermé.

Prenons $x \in \overline{K}\setminus K$,

$\exists$ suite $(x_n) \subset K$ : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

D'après la condit° (C), $x \in K$.

□

**Ex 19** Les ens suivants st-ils compacts ds $\mathbb{R}^2$ ?

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

(b) $B = \{(0, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}^*\}$

$C = B \cup \{(0,0)\}$

graphe de $D = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^*\}$ de $f$ $y = \sin\frac{1}{x}$.

a) Considérons la norme euclidienne ds $\mathbb{R}^2$ :

$\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$ alors $A = BF(0,1)$

A étant à la fois fermé & borné, il est nécess^t compact.

b) Observons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$ de $B \subset \{0\}\times[0,1] \subset [0,1]\times[0,1]$ ; d'où $C = B \cup \{(0,0)\} \subset \{0\}\times[0,1] \subset [0,1]\times[0,1]$,

d'où B et C sont bornés.

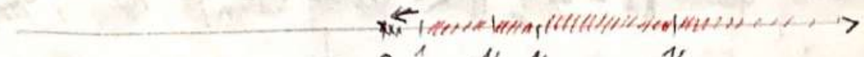
• B n'est pas fermé car $(0,\frac{1}{n}) \in B$ et $(0,\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \notin B$

$\Rightarrow \overline{B} \not\subset B$.

Par conséquent B n'est pas compact.

• On pt écrire $C = \{0\}\times E$, où $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$

On mq E est fermé (dans $\mathbb{R}$)



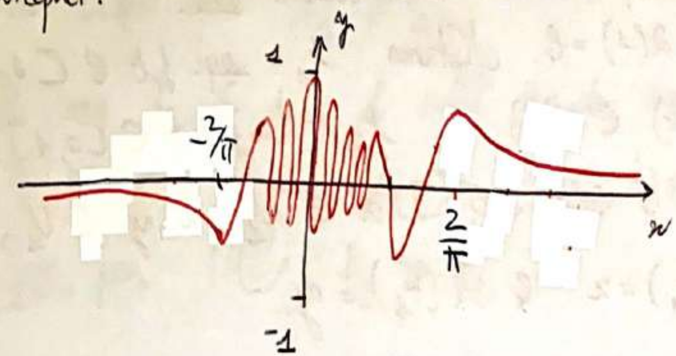

En effet, $\mathbb{R}\setminus E = ]-\infty, 0[ \,\cup\, \bigcup_{n=1}^{\infty} ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[ \,\cup\, ]1,\infty[$ est ouvert ds $\mathbb{R}$, E est fermé ds $\mathbb{R}$.

$\{0\}$ étant fermé ds $\mathbb{R}$, E étant fermé ds $\mathbb{R}$,

$C = \{0\}\times E$ étant fermé ds $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Comme $E$ est à la fois fermé et borné, il est compact.

c)




$E = \{(x, \sin\frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}_*\}$ de $f$ $y = \sin\frac{1}{x}$. cf de topologie induite sur ss-ens de $\mathbb{R}^n$.

soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

On a $\|(n, \sin\frac{1}{n})\| = \sqrt{n^2 + \sin^2\frac{1}{n}} \geq \sqrt{n^2} = n$

or $n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et $(n, \sin\frac{1}{n}) \in E$.

Dc $E$ n'est pas borné & il n'est pas nécessairt compact.

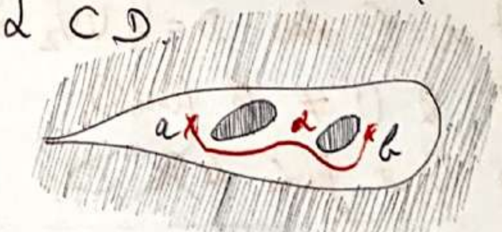
## Connexité :

(R1) $D \subset \mathbb{R}^n$.

- $D$ est **connexe** si $D$ n'est pas la réunion disjointe de 2 ss-ens ouverts (NV) de $D$. Un ens $U$ est ouvert de $D$ si $U = \tilde{U} \cap D$, où $\tilde{U}$ est ouvert de $\mathbb{R}^n$.

NB : $U$ n'est pas nécessairement ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est simplement la trace d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur $D$.

- $D$ est **connexe par arc** si $\forall a, b \in D$, $\exists$ une courbe continue $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tq $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ & $\mathrm{Im}\,\alpha \subset D$.



Exo But : Mq ss-ens $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs est connexe.

a) (?!), spps $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ens CPA & q n'est pas C alors $D = U_1 \cup U_2$ où $U_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ & $U_i \neq \emptyset$ $(i=1,2)$.

md 2 ens $U_i$ st fermés ds ~~$\mathbb{R}^n$~~ $D$.

b) soit $a \in U_1$, $b \in U_2$ deux points, $\alpha : [0,1] \to D$ une courbe cont tq $\alpha(0) = a$ et $\alpha(1) = b$. Notons $t_1 = \sup\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in U_1\}$ & $t_2 = \inf\{t \in [0,1], \alpha(t) \in U_2\}$

Mq $t_1 < t_2$ & $\exists\, x \in U_1$ & $y \in U_2$ tq $\alpha(t_1) = x$ & $\alpha(t_2) = y$.

---

Spps p (?!) $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert est connexe par arcs et qu'il n'est pas connexe.

Alors $\exists$ $U_1, U_2$ ouverts (NV) de $D$ tq $D = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Comme il existe $\tilde{U}_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $U_i = \tilde{U}_i \cap D$ & $D$ est ouvert de $\mathbb{R}^n$, $U_i$ est aussi ouvert de $\mathbb{R}^n$ pr $i \in \{1,2\}$.

On déduit de $D = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ que $U_1$ est fermé de $D$, de même, $U_2$ est fermé de $D$.

Rq $F \subset D$ est fermé de $D$ s'$\exists$ $\tilde{F} \subset \mathbb{R}^n$ fermé de $\mathbb{R}^n$ tq $F = \tilde{F} \cap D$.

Soit $a \in U_1$, $b \in U_2$ 2 pts, comme $D$ est connexe par arcs, $\exists$ $\alpha : [0,1] \to D$ une courbe continue tq $\alpha(0) = a$ & $\alpha(1) = b$.

Notons $t_1 = \sup\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in U_1\}$,
$t_2 = \inf\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in U_2\}$,

comme $\alpha(0) = a \in U_1$ & $\alpha(1) = b \in U_2$, on a $t_1, t_2 \in [0,1]$.

Posons pr $i \in \{1,2\}$; $A_i := \{t \in [0,1], \alpha(t) \in U_i\} = \alpha^{-1}(U_i)$

Comme $U_i$ est à la fois ouvert & fermé de $D$ et $\alpha$ est cont, $A_i$ est à la fois ouvert & fermé ds $[0,1]$

$0 \in A_1$, $1 \in A_2$, $t_1 = \sup A_1$ & $t_2 = \inf A_2$

Comme $A_1, A_2$ st fermés, $t_1 \in A$ & $t_2 \in A$.

Dc $\exists\, x \in U_1$ & $y \in U_2$ tq $\alpha(t_1) = x$ & $\alpha(t_2) = y$.

Comme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $t_1 \in A_1$, $t_2 \in A_2$ . .
Il vient que $t_1 \neq t_2$.

Pr mq $t_1 < t_2$ ; il suffit de de mq qu'on ne pt avoir $t_1 > t_2$ car $t_1 \neq t_2$.

~~Supp par l'(?!) $t_1 > t_2$~~

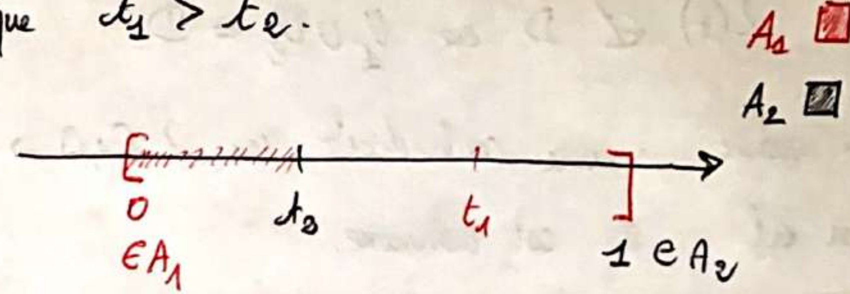
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$A_1 \cup A_2 = [0,1]$.

Rappelons $t_1 = \sup(A_1)$ & $t_2 = \inf(A_2)$.
Comme $A_1$ & $A_2$ st fermés, $t_1 \in A_1$ & $t_2 \in A_2$.
En effet, $t_1 \in A_1 \Rightarrow \exists (s_n)_n \in A_1$ tq
$t_1 \geq s_n > t_1 - \frac{1}{n}$ (*) & dc on a
$|s_n - t_1| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = t_1 \Rightarrow t_1 \in \overline{A_1}$
$\Rightarrow t_1 \in A_1$ car $A_1$ est fermé.

(*) Rq $t = \sup A \iff \begin{cases} t \geq a, \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, t < a + \varepsilon. \end{cases}$

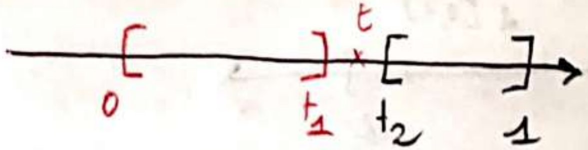
Comme $t_1 \in A_1$, $t_2 \in A_2$ & $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, on a $t_1 \neq t_2$.

Pr mq $t_1 < t_2$, on suppose par l'(?!) que $t_1 > t_2$.




On a $t_2 > 0$ car $0 \in A_1$.
D'autre part, $\forall t \in ]0,t_2]$, $t \in A_2$ car sinon $t \in A_2$ & $t < t_2 = \inf A_2$ q serait impossible. $t < t_2 = \inf(A_2)$
Dc $\forall t \in [0,t_2]$, $t \in A_1$ car $A_1 \cup A_2 = [0,1]$.
Dc $[0,t_2[ \subset A_1$. Or $A_1$ est fermé.
Il s'ensuit que $\overline{[0,t_2[} \subset A_1 \Rightarrow [0,t_2] \subset A_1$
$\Rightarrow t_2 \in A_1$ ce q contredit $t_2 \in A_2$.
On vient de prouver que $t_1 < t_2$.

c) <u>ed</u>. $\forall t \in ]t_1, t_2[$, $\alpha(t) \notin U_1 \cup U_2$. Conclure.




Soit $t \in ]t_1, t_2[$ qq
Comme $t > t_1 = \sup A_1$, $t \notin A_1 \Rightarrow \alpha(t) \notin U_1$
comme $t < t_2 = \inf A_2$, $t \notin A_2 \Rightarrow \alpha(t) \notin U_2$

Donc $\alpha(t) \notin U_1 \cup U_2$.

Donc $\alpha(t) \notin D$ car $U_1 \cup U_2 = D$.

On arrive à une contradic° car $\alpha : [0,1] \to D$ en cl $D$ est connexe.

C:

CPA

CPA ⇒ C.

Ex 22 Est-ce que t.t ens suivant est 1) connexe, 2) connexe par arcs 3) un domaine (ouvert & connexe)

a) les intervalles $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ ds $\mathbb{R}$.

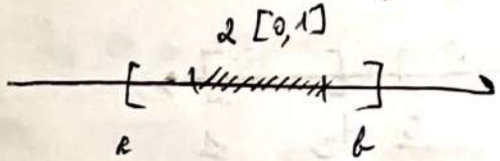
soit $I$ un intervalle parmi $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b] \subset \mathbb{R}$. $I$ est connexe par arc.

En effet, $\forall x,y \in I$,

considère $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto (1-t)x + ty$.

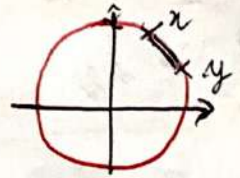
alors $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ & $\alpha[0,1] \in I$.




- D'après ex 20, $I$ est connexe car $I \subset \mathbb{R}$ & $I$ est connexe par arc.

- $I = ]a,b[$ est un domaine car il est ouvert et connexe. Tous les autres $I$ ne st pas domaines, car ils ne st pas ouverts.

b) Le cercle unité $\mathbb{S}^1 = S(0,1) = \{(\cos t, \sin t) \subset \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$




Mq $\mathbb{S}^1$ est connexe par arc.

soit $x, y \in \mathbb{S}^1$ & pbs qq. Écrivons

$x = (\cos t_1, \sin t_1)$

$y = (\cos t_2, \sin t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Considérons $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ déf. p

$\alpha(t) = \left(\cos((1-t)t_1 + t t_2), \sin((1-t)t_1 + t_2)\right)$

alors $\alpha(0) = (\cos t_1, \sin t_1) = x$

$\alpha(1) = (\cos t_2, \sin t_2) = y$.

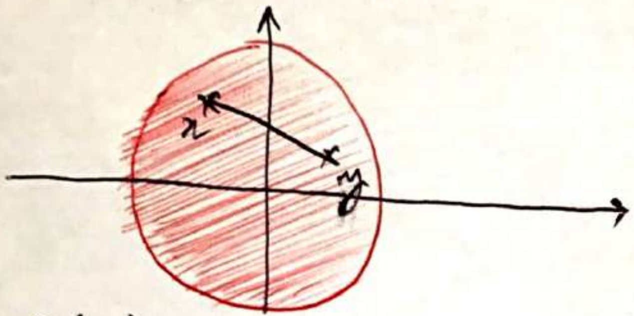
- Comme $\mathbb{S}^1$ est CPA & il est ds $\mathbb{R}^2$, il est ani connexe d'après ex20.

$]-\infty, 2] \not\subset \mathbb{R}$

$]-1,2]$ $[2,\infty[$

- $\mathbb{S}^1$ n'est pas ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $(0,1) \in \mathbb{S}^1$ mais $\mathbb{B}((0,1), \varepsilon) \not\subset \mathbb{S}^1, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (0,1) \notin \text{int } \mathbb{S}^1$, Donc $\mathbb{S}^1$ n'est pas un domaine.

c) la boule ouverte $B(a,r)$ ds $\mathbb{R}^n$



Mq $B(a,r)$ est connexe par arc.
soit $x, y \in B(a,r)$ qq. Considérons
$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par
$\alpha(t) := (1-t)x + ty, \forall t \in [0,1]$
On a $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.
$\text{Im } \alpha = \text{segment } [x,y] \subset B(a,r)$.
Comme $B(a,r)$ est connexe par arc & elle est ds $\mathbb{R}^n$, elle est aussi connexe d'après l'exo 20.
$B(a,r)$ est un domaine car ouverte + connexe.

# TH du pt fixe

Ex26 : soit $E$ un espace de Banach, $f$ une appli de $E$ ds $E$. On suppose q' $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $n$-ième itérée : $f^n = f \circ \dots \circ f$ soit $S^T$ contractante.
Mq $f$ a un uniq point fixe ds $E$.

---

soit $E$ un espace de Banach, $f : E \to E$
$\exists n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ \dots \circ f$ soit $S^T$ contractante
ie $\forall x,y \in E$ : $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha . d(x,y)$ tq $\alpha \in [0,1[$

Prenons $x_0 \in E$ qq, on vt mq la suite
$x_k := f^k(x_0)$ est de Cauchy. Comme $E$ est de Banach, $(x_k)$ est Ⓒ vers $x_\infty$. On montrera ensuite que $f(x_\infty) = x_\infty$ et que c'est le pt fixe uniq. soit $\varepsilon > 0$ qq, on doit mq $\exists N_\varepsilon > 0$ tq
$\forall p,q \geqslant N_\varepsilon$, on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

CT $\underset{\forall}{d}(f(x) - f(y)) \leq \overset{\in [0,1[}{k}\, d(x-y)$ $f(x) = x$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$,

écrivons $p = np_0 + r_0$ où $p_0, q_0 \in \mathbb{N}$

$q = nq_0 + s_0$ & $0 \leq r < n$.

On a $\triangle$ I, $0 \leq s < n$.

On a $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{np_0}) + d(x_{np_0}, x_{nq_0}) + d(x_{nq_0}, x_q)$.

---

Mq d'abord qu'$\exists$ au moins un point fixe de $f$.

D'après l'hypo, on a pr $p \geq 1$,

$$d(f^{np}(x), f^{np}(y)) = d\left(f^n(f^{n(p-1)}(x)), f^n(f^{n(p-1)}(y))\right)$$

$$\leq \underline{k}.d\left(f^{n(p-1)}(x), f^{n(p-1)}(y)\right),$$

car $d(f^n(X), f^n(Y)) \leq k.d(X,Y)$

où $X = f^{n(p-1)}(x)$ et $Y = f^{n(p-1)}(y)$.

& $f^n(f^{n(p-1)}(x)) = f^{n+n(p-1)}(x) = f^{np}(x)$

& $f^n(f^{n(p-1)}(y)) = f^{n+n(p-1)}(y) = f^{np}(y)$

En appliquant successivement l'inégalité de $k$-lipschitzienne, il vient que

$$\leq k.k\,d(f^{n(p-2)}(x), f^{n(p-2)}(y))$$

car $d(f^{n(p-1)}(x), f^{n(p-1)}(y))$

$$= d(f^n(f^{n(p-2)}(x)), f^n(f^{n(p-2)}(y)))$$

$$\leq k \times d(f^{n(p-2)}(x), f^{n(p-2)}(y))$$

$\vdots$

$$\leq \underbrace{k \times \dots \times k}_{p \text{ fois}} \times d(f^{n\times 0}(x), f^{n\times 0}(y))$$

$$= k^p\, d(x,y). \quad (\star)$$

Donc $d(f^{np}(x), f^{np}(y)) \leq k^p d(x,y)$, $\forall x, y \in E$.

Fixons $x_0 \in E$, $\forall N \geq 1$, écrivons $N = np + r$

où $p \in \mathbb{N}$ & $r \in [0, n-1]$.

En utilisant $(\star)$, il vient que

$$d(f^{N+1}(x_0), f^N(x_0)) = d(f^{np+r+1}(x_0), f^{np+r}(x_0))$$

$$= d(f^{np}(\underbrace{f^{r+1}(x_0)}_{X}), f^{np}(\underbrace{f^r(x_0)}_{Y}))$$

$$\leq k^p\, d(\underbrace{f^{r+1}(x_0)}_{X}, \underbrace{f^r(x_0)}_{Y})$$

On a $p = \left[\frac{N}{n}\right]$

En sommant ces inégalités $\forall N \geq N_0$, $N_0$ étant donné, on obtient :

$$\sum_{N \geq N_0} d(f^{N+1}(x_0), f^N(x_0)) \leq \left(\sum_{N=N_0}^{\infty} k^{\frac{N}{n}-1}\right)\left(\sum_{r=0}^{n-1} d(f^{r+1}(x_0), f^r(x_0))\right)$$

car $k^{\left[\frac{N}{n}\right]} \leq k^{\frac{N}{n}-1}$ puisque $\left[\frac{N}{n}\right] \geq \frac{N}{n} - 1$ & $0 \leq k < 1$.

$$\leq C.M.\, k^{\frac{N_0}{n}},$$

où $M := \sum_{x=0}^{n-1} d(f^{x+1}(x_0), f^x(x_0))$ & $C$ est une cte qui ne dépend que de $n$ & $k$.

D'où $\forall P \geq Q \geq N_0$,

$$d(f^P(x_0), f^Q(x_0)) \leq \sum_{N=Q}^{P-1} d(f^{N+1}(x_0), f^N(x_0))$$

$$\leq \sum_{N \geq N_0}^{\infty} d(f^{N+1}(x_0), f^N(x_0)) \leq CM\, k^{\frac{N_0}{n}}$$

soit $d(f^P(x_0), f^Q(x_0)) \leq CM.\, k^{\frac{N_0}{n}}$, $\forall P, Q \geq N_0$;

lorsque $N_0 \to \infty$ ; $CM\, k^{\frac{N_0}{n}} \longrightarrow 0$ car $k \in [0,1[$ & $C$ est indépendante de $N_0$.

---

NB $\sum_{N=N_0}^{\infty} k^{\frac{N}{n}-1} = k^{\frac{N_0}{n}-1} \sum_{m=0}^{\infty} k^{\frac{m}{n}} = k^{\frac{N_0}{n}-1} \times \sum_{m=0}^{\infty} (k^{\frac{1}{n}})^m = k^{\frac{N_0}{n}-1} \frac{1}{1-k^{1/n}}$.

La suite $(f^N(x_0))$ est de Cauchy car $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$ tq $CMk^{\frac{N_0}{n}} < \varepsilon$ & $\forall P, Q \geq N_0$ ; $d(f^P(x_0), f^Q(x_0)) < \varepsilon$.

Comme $E$ est de Banach, cette suite est CV. soit $c = \lim_{N\to\infty} f^N(x_0)$

On a $f(c) = f(\lim_{N\to\infty} f^N(x_0))$

$= \lim_{N\to\infty} f(f^N(x_0))$ car $f$ est cont puisq $f$ est lipschitz.

$= \lim_{N\to\infty} f^{N+1}(x_0)$

$= c$

Donc $c$ est un point fixe de $f$.

Puis mq son unicité. soit $c'$ un autre point fixe de $f$. Dc $f^n(c) = c$ & $f^n(c') = c'$ &

$d(c,c') = d(f^n(c), f^n(c')) \leq k\, d(c,c')$

$\Rightarrow 0 \leq d(c,c') \leq k\, d(c,c') \Rightarrow 1 \leq k$ si $d(c,c') > 0$

Or $k \in [0,1[$. Donc $d(c,c') = 0$

$\Rightarrow c = c'$.



$a = b q + r \quad q \leq r < b$

# TD3 : Ens de mesure nulle. TH de Lebesgue & Darboux. Intégrales Multiples.

## §1 : Ens de mesure nulle & TH de Lebesgue

(R) Un pavé $I$ de dim $n$ est l'ens :

$$I = \{x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i \in [\![1, n]\!]\}$$

où $a, b$ vecteurs fixés.

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Un ens $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit de mesure nulle (au sens de Lebesgue) si $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ recouvrement de $E$ p ens dénomb de pavés dont la mesure totale est au plus $\varepsilon$ :

$$\exists \text{ pavés } I_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

**Ex 1** Mq ens suivants st de mesure nulle :

1) un point
2) ens dénombrable d'ens de mesure nulle
3) tout ss-ens d'un ens de mesure nulle.

1) soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Mq $E := \{a\}$ est de mesure nulle.

Considérons le pavé :

$$I = [a_1, a_1] \times \dots \times [a_n, a_n] = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}$$

$$|I| = (a_1 - a_1) \times \dots \times (a_n - a_n) = 0 \times \dots \times 0 = 0$$

et $E \subset I$, en fait $E = I$.

Donc $E$ est de mesure $0$.

2) soit $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'ens de mesure $0$.

Mq $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$ est aussi de mesure $0$.

soit $\varepsilon > 0$ qq ; comme $E_m$ est de mesure $0$, $\exists$ pavés $I_{m_i}$ tq $E_m \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{m_i}$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_{m_i}| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Donc

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \subset \bigcup_{m,i=0}^{\infty} I_{m_i} \ \& \ \sum_{m,i} |I_{m_i}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} |I_{m_i}|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$$\leq 2\varepsilon$$

Donc $E$ est de mesure $0$.

3) Tt ss-ens d'un ens de mesure null.

soit $E$ un ens de mesure $0$. soit $F \subset E$.
Mq $F$ est aussi de mesure $0$.
soit $\varepsilon > 0$ qq. Comme $E$ est de mesure $0$,
$\exists$ pavés $I_i$ tq

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow F \subset E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \ \& \ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

Donc $F$ est de mesure $0$.

---

DM 2 : (par binômes (semaine pro)

ex 5 - TD 3 (sommes & int de Darboux).

---

Ex 5 : (Sommes & intégrales de Darboux)
soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une f réelle sur le pavé $I \subset \mathbb{R}^n$.
Fixons une subdivis° $P = \{I_i\} \in \mathcal{P}(I)$ dénomb de $I$. On déf les Q^tés suivantes :

~~(1) $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$, $M$~~

Ex 2 : Ens de mesure nulle

1) Donner un exemple d'un ensemble de mesure nulle ds $\mathbb{R}^n$ dont l'adhérence est $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Prenons $A = \mathbb{Q}^n$, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il en est de même de $A = \mathbb{Q}^n$. Comme $A$ est dénombrable, d'après l'exo 1, 2) ; $A$ est de mesure $0$.
D'autre part, $\overline{A} = \overline{\mathbb{Q}^n} = (\overline{\mathbb{Q}})^n = \mathbb{R}^n$.
$A$ est dc l'ens cherché.

~~2) Mq ss-espace linéaire de dimension k est de mesure~~

2) Mq qu'un ens de mesure nulle est d'intérieur vide
Sppo p l'① qu'$\exists$ un ens $A \subset \mathbb{R}^n$ de mesure $0$ tq $\mathring{A} \neq \emptyset$. $\exists$ de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ & $r_0 > 0$ tq $\mathbb{B}(x_0, r_0) \subset A$. Comme $A$ est de mesure $0$,
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un recouvrement de $A$ des pavés $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$
tq $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ & $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \mathbb{B}(x_0, r_0) \subset A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

$\Rightarrow B(x_0, r_0) \subset A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$

$\Rightarrow B(x_0, r_0) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$

$\Rightarrow Vol(B(x_0, r_0)) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i| < \varepsilon$

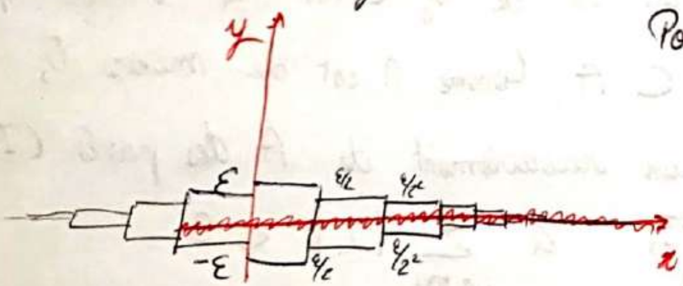
Donc $\forall \varepsilon > 0$, $Vol(B(x_0, r_0)) < \varepsilon$, ce q est impossible si on choisit $\varepsilon > 0$ tq $0 < \varepsilon < Vol(B(x_0, r_0)) = c_n \cdot r_0^n$ ; $c_n$ est une constante universel q dépend de $n$.

Donc il n'existe pas d'ens de mesure $0$ & d'intérieur non-vide.

3) Mq qu'un sous-espace linéaire de dimension $k$ est de mesure nulle ds $\mathbb{R}^n$ ssi $k < n$.

Pr $n=2$, $k=1$, il suffit de mq ds le plan de coordonnées $(O_x, O_y)$ ; la droite $\{y=0\}$ est de mesure $0$.

Posons $E = \{y=0\}$
$= \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$




Mq $E$ est de mesure $0$.

soit $\varepsilon > 0$ qq, on considère la famille dénombrable de pavés :

$I_i = [i, i+1] \times \left[\frac{-\varepsilon}{2^{|i|}}, \frac{\varepsilon}{2^{|i|}}\right]$, $\forall i \in \mathbb{Z}$,

observons que $I_i \supset [i, i+1] \times \{0\} = \{(x,0), x \in [i, i+1]\}$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i \supset \{(x,0), \exists i \in \mathbb{Z}, i \leq x \leq i+1\}$
$= \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = E$

D'autre part, $|I_i| = [(i+1) - i] \times \left[\frac{\varepsilon}{2^{|i|}} - \left(\frac{-\varepsilon}{2^{|i|}}\right)\right]$
$= 1 \times \frac{2\varepsilon}{2^{|i|}} = \frac{\varepsilon}{2^{|i|-1}}$

Donc $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |I_i| = \varepsilon \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|-1}} \leq 2\varepsilon \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{|i|-1}}$

$= \varepsilon \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon$.

soit $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |I_i| \leq 2\varepsilon$

Donc $E$ est de mesure $0$.

## §2: Calcul d'intégrales multiples avec le Th de Fubini

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans cas :

1) $f(x,y) = xy^2$, $D = [0,1]\times[-1,2]$

$$I_1 = \iint_{[0,1]\times[1,2]} xy^2\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^1 xy^2\,dx\right)dy$$

$$= \int_1^2\left(y^2\int_0^1 x\,dx\right)dy = \int_1^2 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_1^2 = \frac{8-1}{6} = \frac{7}{6}$$

Donc $I_1 = \frac{7}{6}$.

2) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, $D = [-1,1]\times[1,2]$.

soit $\tilde{f} : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } y \leq x \\ 0 & \text{si } y > x. \end{cases}$$

Donc $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin D. \end{cases}$

Donc $\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1\left(\int_0^1 \tilde{f}(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_y^1 xy^3\,dx\right)dy$$ car $\tilde{f}(x,y)=0$ pour $x\in[0,y]$.

$$= \int_0^1\left(y^3\int_y^1 x^2\,dx\right)dy = \int_0^1\left(y^3\left[\frac{x^3}{3}\right]_y^1\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3[1-y^3]\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^3\,dy - \frac{1}{3}\int_0^1 y^6\,dy = \left[\frac{y^4}{12}\right]_0^1 - \left[\frac{y^7}{21}\right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{21}$$

$$= \frac{7-4}{84} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$$ Donc $I_2 = \frac{1}{28}$.

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1] \times [1,2]$.

$$I_3 = \iint_{[-1,1]\times[1,2]} \frac{x^2}{y}\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \left( \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{y}\, dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y} \left( \int_{-1}^{1} x^2\, dx \right) dy = \int_1^2 \frac{1}{y} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y} \cdot \frac{2}{3}\, dy = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{2}{3} \left[ \ln y \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{2 \ln 2}{3}.$$

Donc $I_3 = \dfrac{2 \ln 2}{3}$.

$x>y$ ∄

4) $f(x,y) = \sin(x+y)$ & $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$I_4 = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\, dx \right) dy$$

Newton Leibnitz

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ -\cos(x+y) \right]_0^{\pi/2} dy = \left[ \sin y - \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= (1-0) - (0-1) = 2$$

Donc $I_4 = 2$.

5) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ & $D = [3,7] \times [-2,2]$

$$I_5 = \iint_{[3,7]\times[-2,2]} \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}\, dx\, dy = \int_3^7 \left( \int_{-2}^{2} \frac{x\, dy}{\sqrt{1+xy+x^2}} \right) dx$$

=> calculons l'int intérieur

Faisons CDV $t = (1+x^2) + xy$

Alors $x = -2 \iff t = 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2$

$y = 2 \iff t = 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2$

et $dt = d(xy) = x\, dy \iff dy = \dfrac{dt}{x}$.

Il vient que $I_x = \int_{(x-1)^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{t} \cdot x}$

$= \frac{1}{x} \int_{(x-1)^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{x} \int_{(x-1)^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{t^{1/2}}$

$= \frac{1}{x} \left[ \frac{2t^{1/2}}{\cancel{3}} \right]_{(x-1)^2}^{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x} \left( \frac{2(x+1)^{\cancel{3}}}{\cancel{3}} - \frac{2(x-1)^{\cancel{3}}}{\cancel{3}} \right)$ car $[(x\pm1)^2]^{\frac{1}{2}} = x \pm 1$

puisque $x \pm 1 \geq 0$, p $x \in [3,7]$

$= \frac{4}{x}$, en apportant l'égalité $I_x = \frac{4}{x}$,

ds la dernière exprat° de $I_5$, il vient

que $I_5 = \int_3^7 x \, I_x \, dx = \int_3^7 x \frac{4}{x} dx = \int_3^7 4 \, dx = 16.$

Donc $\underline{I_5 = 16}$.

**Ex 8** En usant int $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} 1 \cdot dy$,

expliquer que n'est pas toute intégrale "successive" pt s'écrire ĉ une intégrale double en utilisant le Th de Fubini.

---

**Ex 9** (Intégrales triples)

Calculer l'int triple $\iiint_V f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$ ds cas :

1) $f(x,y,z) = x y^2 z^3$ où $V \subset \mathbb{R}^3$ est délimité p les surfaces : $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Rappelons que le domaine d'intégrat° $V \subset \mathbb{R}^{+3}$ est délimité p les surfaces $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ & $z = 0$.

Observons que $(x,y,z) \in V \iff x \in [0,1]$,
$y \in [0,x]$,
$z \in [0, xy]$.

Donc $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3}, x \in [0,1], y \in I_x = [0,x], z \in I_{x,y} = [0,xy]\}$

Par conséquent, p (Th) de Fubini, on a

$$I_1 = \iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz\right)dy\right)dx$$

Calculons la première intégrale intérieure :

$$\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz = xy^2\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{xy} = xy^2\,\frac{x^4y^4}{4} = \frac{x^5y^6}{4}.$$

Puis la deuxième intégrale intérieure :

$$\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\,dy = \frac{x^5}{4}\int_0^x y^6\,dy = \frac{x^5}{4}\left[\frac{y^7}{7}\right]_0^x = \frac{x^{12}}{28}.$$

Puis la troisième intégrale intérieure :

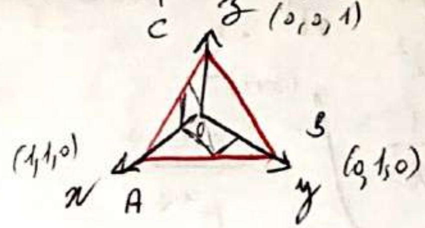
$$\int_0^1 \frac{x^{12}}{28}\,dx = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{28}\left[\frac{x^{13}}{13}\right]_0^1 = \frac{1}{364}.$$

2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}$ & V est délimité par

$x+y+z=1$ et $x=y=z=0$

Rappelons que le domaine d'intégrat° $V \subset \mathbb{R}^{+3}$ est délimité par $x+y+z=1$ et $x=y=z=0$.

Observons que $(x,y,z) \in V \iff$




V est le tétraèdre de sommets $A=(1,0,0)$ ; $B=(0,1,0)$ ; $C=(0,0,1)$.

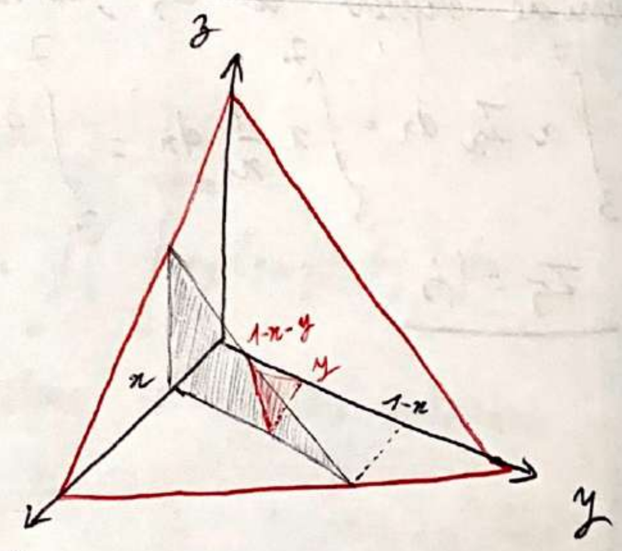
$O=(0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,1-x] \\ z \in [0,1-x-y] \end{cases}$$

En effet, $x,y,z \geq 0$ et $x+y+z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

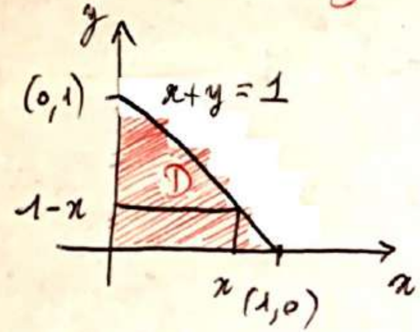
$\Rightarrow x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1-x \Rightarrow 0 \leq y \leq 1-x$

$\Rightarrow z \leq 1-x-y \Rightarrow 0 \leq z \leq 1-x-y.$



Ex 8 On note $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$

Calculer 1) $I_1=\iint_D dx\,dy$




On re-paramètre D comme suit :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ y\in[0,1-x]\}$$

Donc $I_1 = \iint_D dx\,dy \overset{(*)}{=} \int_0^1\left(\int_0^{1-x} 1.dy\right)dx$ Par Fubini (*)

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) $I_2 = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \overset{(*)}{=} \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx$

Calculons l'int. intérieure,

$$\int_0^{1-x} x^2+y^2\,dy = x^2\int_0^{1-x}dy + \int_0^{1-x}y^2\,dy = x^2(1-x)+\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}$$

$$= x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}$$

En reportant cette égalité dans la dernière expression de $I_2$, il vient que :

$$I_2=\int_0^1\left[x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right]dx$$

$$I_2=\int_0^1\left(x^2-x^3+\frac{1}{3}-x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$I_2=\int_0^1\left(-\frac{4}{3}x^3+2x^2-x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$I_2=\left[-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^2}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3) $I_3=\iint_D xy(x+y)\,dx\,dy$, par Fubini, on a :

$$I_3=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} xy(x+y)\,dy\right)dx$$

Calculons l'intégrale intérieure

$$\int_0^{1-x} \to x\int_0^{1-x} y(x+y)\,dy = x\int_0^{1-x} xy+y^2\,dy = x\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}$$

$$= \frac{x(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^3}{3}$$

Suite de calcul de l'intégrale intérieure,

$$= \frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3} = \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}.$$

En reportant cette égalité ds la dernière expression de $I_3$, il vient que :

$$I_3 = \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5\times 6} - \frac{x^3}{2\times 3} + \frac{x^2}{2\times 3}\right]_0^1 = \frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

## Suite en 8, tétraèdre

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}, \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y=z=0 \end{cases}$$

Reparamétrisons de V

$x \in [0,1]$

$y \in [0, 1-x]$

$z \in [0, 1-x-y]$.

Par conséquent, d'après le Th de Fubini, on a :

$$\iiint f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, dz \right) dy \right) dx$$

Calculons $\displaystyle\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \left[(1+x+y+z)^{-2} \times \frac{1}{-2}\right]_0^{1-x-y}$

car $\displaystyle\int (a+z)^{-m} dz = \frac{(a+z)^{-m+1}}{-m+1}$ pr $a \in \mathbb{R}$.

$$= -\frac{1}{2}\left( (1+x+y+1-x-y)^{-2} - (1+x+y)^{-2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left( 2^{-2} - (1+x+y)^{-2} \right) = \frac{(1+x+y)^{-2}}{2} - \frac{1}{8}.$$

Il vient que :

$$\int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy = \int_0^{1-x} \frac{(1+x+y)^{-2}}{2} - \frac{1}{8}\, dy$$

$$= \left[ \frac{(1+x+y)^{-1}}{-2} - \frac{y}{8} \right]_0^{1-x} = \frac{2^{-1}}{-2} - \frac{(1-x)}{8} - \frac{(1+x)^{-1}}{-2}$$

$$= \frac{-3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{(1+x)^{-1}}{2}$$

Au final, $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy \right) dx =$

$$= \int_0^1 \frac{-3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{(1+x)^{-1}}{2}\, dx = \left[ \frac{-3x}{8} + \frac{x^2}{16} + \frac{\ln(1+x)}{2} \right]_0^1$$

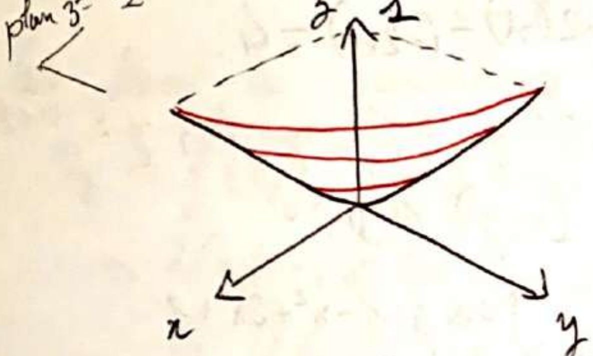
$$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{2} = -\frac{5}{16} + \frac{\ln 2}{2}.$$

3) Calculer l'integ $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

pr $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ & $V$ est délimité

par $x^2+y^2 = z^2$ & $z = 1$.

$V \subset \mathbb{R}^{+3}$ est délimité par $\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$.




Paramétrisons $V$ :

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3}\ z \in [0,1] : x^2+y^2 \leq z^2\}$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3} : z \in [0,1] : 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq \sqrt{z^2-x^2}\}$

$V = \{(x,y,z) : z \in [0,1] : (x,y) \in D_z\}$

où $D_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2} : x^2+y^2 \leq z^2\}$

D'après Th de Fubini, on a :

$$I_3 = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left( \iint_{(x,y)\in D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Calculons pr chaque $z \in [0,1]$, l'intégrale intérieure.

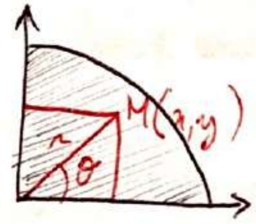
$$I_z := \iint_{(x,y)\in D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{(x,y)\in D_z} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

$r = |\overrightarrow{OM}|$

$M = (x,y)$

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$




Passons aux coordonnées polaires $(r,\theta)$ :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$dx\,dy = \left|J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)\right| dr\,d\theta$

$$J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$D_z = \{(r,\theta) : r \in [0,z], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

D'après $\iint$ CDV :

$$I_z = \iint_{r\in[0,z],\ \theta\in[0,\pi/2]} \sqrt{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^z r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^z d\theta = \frac{z^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{6} z^3.$$

Donc $I_z = \frac{\pi z^3}{6}$. En reportant cette égalité dans la dernière expression de $I_3$, il vient que $I_3 = \int_0^1 \frac{\pi}{6} z^3 dz = \frac{\pi}{6}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{24}$.

Donc $I_3 = \frac{\pi}{24}$

---

Exo Calculer les aires des domaines suivants :

1) $D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 4 - x^3 \end{cases} \right\}$

D'après le Th de Fubini,

$$\text{Aire}(D_1) = \iint_{D_1} dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{4-x^3} dy\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[4 - x^3 - x^2\right] dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

Donc $\text{Aire}(D_1) = \frac{22}{3}$.

2) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq \pi,\ |y| \leq \sin(x)\}$

D'après le Th Fubini,

$$\text{Aire}(D_2) = \iint_{D_2} dx\,dy = \int_0^{\pi}\left(\int_{-\sin x}^{\sin x} dy\right) dx = \int_0^{\pi} [\sin x + \sin x]\, dx$$

$$= 2\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -2(-1) - (-2 \times 1) = 4.$$

3) $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y,\ 0 \leq x - y + 1,\ y \leq -x^2 + 2x + 1\}$

Paramétrisons $D_3$, on a $(x,y) \in D$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 1 \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq -x^2 + 2x + 1 \\ y \leq 1 + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq \min(x+1, -x^2 + 2x + 1)$$

D'autre part, $x + 1 \geq -x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ ou $x \leq 0$

D'où $\min(x+1, -x^2 + 2x + 1) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, \text{ si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq 0. \\ x + 1, \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$

En plus, on doit avoir $\min(x+1, -x^2+2x+1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ -x^2+2x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2-2x-1\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1\\ x\in[x_1,x_2]\end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2^2-4(-1)}}{2} = 1\pm\sqrt{2}.$$

- Dc on est ramené à $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\in[1-\sqrt2, 1+\sqrt2]\end{cases} \Leftrightarrow x\in[1-\sqrt2,1+\sqrt2]$

On obtient la paramétrisation suivante :

$$D_3 = \{(x,y): x\in[1-\sqrt2,1+\sqrt2], y\in[0,\min(x+1,-x^2+2x+1)]\}$$
$$= \{(x,y): x\in[1-\sqrt2,0], y\in[0,-x^2+2x+1]\} \leftarrow D_{31}$$
$$\cup \{(x,y): x\in[1,1+\sqrt2], y\in[0,-x^2+2x+1]\} \leftarrow D_{32}$$
$$\cup \{(x,y): x\in[0,1], y\in[0,x+1]\} \leftarrow D_{33}$$

- $D_3 = D_{31}\cup D_{32}\cup D_{33}$

Donc $\text{Aire}(D_3) = \sum_{i=1}^{3} \text{Aire}(D_{3i})$

On applique le Th de Fubini pr calculer Aire$(D_{3i})$.

$$\text{Aire}(D_{31}) = \int_{1-\sqrt2}^{0} \left(\int_0^{-x^2+2x+1} dy\right)dx$$
$$= \int_{1-\sqrt2}^{0} (-x^2+2x+1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{1-\sqrt2}^{0}$$
$$= -\left(-\frac{(1-\sqrt2)^3}{3} + (1-\sqrt2)^2 + (1-\sqrt2)\right)$$
$$= -\left(-\frac13+\sqrt2-2+\frac{2\sqrt2}{3}+1-2\sqrt2+2+1-\sqrt2\right)$$
$$= -\frac53+\frac43\sqrt3$$

$$\text{Aire}(D_{32}) = \int_1^{1+\sqrt2}\left(\int_0^{-x^2+2x+1}dy\right)dx = -\frac16+\frac43\sqrt2$$

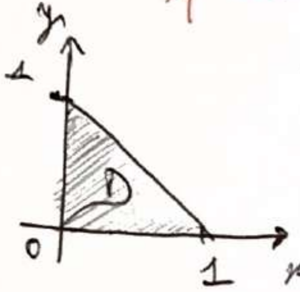
$$\text{Aire}(D_{33}) = \int_0^1\left(\int_0^{x+1}dy\right)dx = \int_0^1[x+1]\,dx = \left[\frac12x^2+x\right]_0^1 = \frac32$$

$$\text{Aire}(D_3) = \sum_{i=1}^{3} A(D_i) = -\frac53+\frac43\sqrt3-\frac16+\frac43\sqrt2+\frac32$$
$$= 3+\frac23\sqrt2.$$

## Calcul d'intégrales & CDV

**Ex 12** En usant CDV, $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,$ tq $0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1\}$.



Faisons le CDV $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

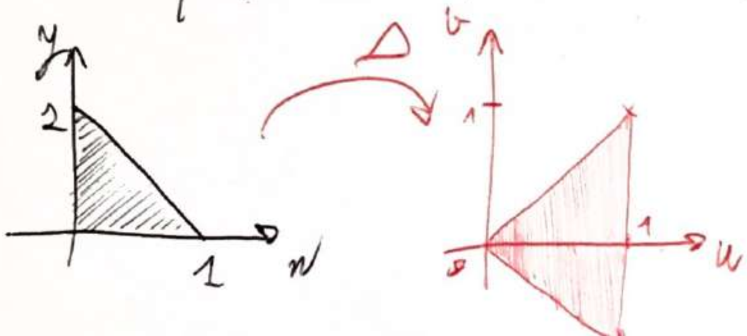
Comme $0 \le x$, $x+y \le 1$ ; il vient que $0 \le u = x+y \le 1$.

& puisq $v = x-y = (x+y) - 2y = u - 2y$ et $0 \le y \le u$

On ad $u - 2u \le v \le u$, d'où $-u \le v \le u$

Par conséquent, l'applicat° $(x,y) \longmapsto (u,v)$ envoie $D$ sur $\Delta$ q est donné par

$$\Delta := \{(u,v) : u \in [0,1],\ v \in [-u,u]\}.$$



$\Delta$ est le triangle de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets st $(0,0)$, $(1,1)$, et $(1,-1)$. Soit $\varphi$ l'applicat° inverse de $\Delta$ ds $D$ donné p $(u,v) \longmapsto (x,y)$.

On ad de $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ que $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$.

D'où $\varphi(u,v) = (x,y) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$

La mat jacobienne de $\varphi$ est $(\mathrm{Jac}\,\varphi)(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial u} & \dfrac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\partial u} & \dfrac{\partial\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

P FF du CDV, en posant $f(x,y) = (x+y)^2 e^{x^2-y^2}$, on a :

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_\Delta f(\varphi(u,v))\,\left|\det \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\right|\,du\,dv$$

D'autre part, $f(\varphi(u,v)) = (x+y)^2 e^{x^2-y^2}$

$= (x+y)^2 e^{(x+y)(x-y)} = \left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right)^2 e^{\left(\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\right)\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right)}$

$= u^2 e^{vu}$

& $\left|\det \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Il vient que $I_1 = \int_\Delta u^2 e^{vu}\frac{1}{2}\,du\,dv$,

Par Fubini, $I_1 = \int_0^1\left(\int_{-u}^{u}\frac{1}{2} u^2 e^{uv}\,dv\right)du$

$= \int_0^1 \frac{1}{2} u^2\left(\int_{-u}^{u} e^{uv}\,dv\right)du$

$= \int_0^1 \frac{1}{2} u^2\left[\frac{e^{uv}}{u}\right] du$

$= \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 \left[\frac{e^{u^2}-e^{-u^2}}{u}\right]du$

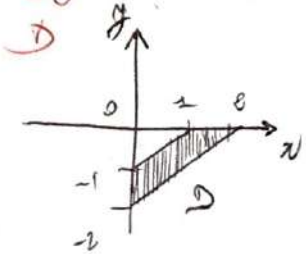
$= \frac{1}{2}\int_0^1 u e^{u^2}\,du - \frac{1}{2}\int_0^1 u e^{-u^2}\,du$

$= \frac{1}{4}\left[e^{u^2}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{4}e^{-u^2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}\left(\left[e^{u^2}\right]_0^1 - \left[e^{-u^2}\right]_0^1\right) = \frac{1}{4}\left(e^1-1+e^{-1}-1\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^1+e^{-1}-2\right)$

2) $\iint e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dx\,dy$ où D trapèze de sommets (1,0) (2,0) (0,-2) (0,-1)



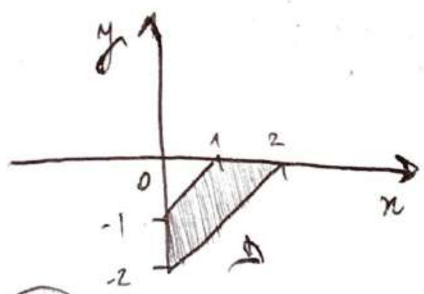

D est l'intersect° de 4 ½ plans : $\{x \geq 0\}$, $\{y \leq 0\}$, $\{x-y \leq 2\}$ & $\{x-y \geq 1\}$.

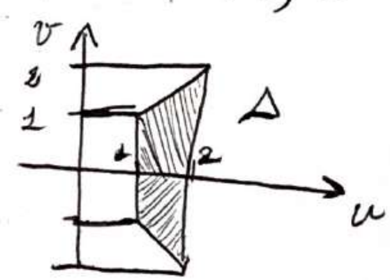
Comme $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ on a $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ & 4 ½ plans $\Rightarrow$ $\{\frac{u+v}{2} \geq 0\}$, $\{\frac{u-v}{2} \leq 0\}$, $\{v \leq 2\}$ & $\{v \geq 1\}$

$\Leftrightarrow v \in [1,2]$ & $u+v \geq 0$ & $u-v \leq 0$.

$\Leftrightarrow v \in [1,2]$ & $u \geq -v$ & $u \leq v$.

$\Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$, où $\Delta = \{(x,y) : v \in [1,2]\ u \in [-v,v]\}$.



$\Delta$ est le trapèze de sommets $(2,-2)$, $(2,2)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.

soit $\varphi$ l'appli inverse de $\Delta$ ds $D$ donnée par $(u,v)\longmapsto(x,y)$. On est de $\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$ D'où $\varphi(u,v)=(x,y)$

La mat jacobienne de $\varphi$ est $(\mathrm{Jac}\,\varphi)(u,v)=$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\mathrm{Jac}(\varphi)(u,v)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Considérons l'applicat° $g : D \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y)=e^{\frac{x+y}{x-y}}$, par le CDV,

on a $I_2 = \iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dx\,dy = \int_{\varphi(\Delta)} g(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_\Delta g(\varphi(u,v))\,|\det(\varphi)(u,v)|\,du\,dv.$$

D'autre part $g(\varphi(u,v)) = e^{\frac{u}{v}} = e^{\frac{x+y}{x-y}}$

et $|\det\varphi(u,v)| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Il vient que $I_2 = \int_\Delta e^{u/v}\frac{1}{2}\,du\,dv$,

Par Fubini, $I_2 = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\right)dv$

Newton-Leibniz

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[v\,e^{u/v}\right]_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\int_1^2\left[v e^{\frac{v}{v}} - v e^{-\frac{v}{v}}\right] dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[ve - ve^{-1}\right] dv = \frac{1}{2}(e-e^{-1})\int_1^2 v\,dv$$

$$= \frac{1}{2}(e-e^{-1})\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{4}(e-e^{-1})$$

Dc $I_2 = \frac{3}{4}(e-e^{-1})$

## Partie II - TD 3 : Champs de Vecteurs.
## Intégrales Curvilignes - FF de Green-Riemann

**Ex 1** : Mq chacun des champs de vecteurs est un champ de gradient & déterminer son potentiel.

(1) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)\vec{e_1} + (x^3+3xy^2-2y)\vec{e_2}$.

$\vec{V}(x,y) = P(x,y)\vec{e_1} + Q(x,y)\vec{e_2}$

$= P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$.

où $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2+3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\vec{V}$ est un champ de gradient.

Pr trouver un potentiel $f$ de $\vec{V}$, on pose

$\boxed{f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + c(y)}$ pr un $y$ fixé.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y}dx + c'(y) = \int (3x^2+3y^2)dx + c'(y)$$

$= Q(x,y)$

$\Rightarrow c'(y) = Q(x,y) - \int (3x^2 + 3y^2)\,dx$

$= x^3 + 3xy^2 - 2y - [x^3 + 3y^2x]$

$= x^3 + 3xy^2 - 2y - x^3 - 3y^2x = -2y$.

Donc $c'(y) = -2y$. D'où $c(y) = -y^2 + cte$.

$\Rightarrow f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + c(y)$

$= \int (3x^2y + 2x + y^3)\,dx + (-y^2) + cte$

$= yx^3 + x^2 + y^3x - y^2 + cte$.

Dc $f(x,y) = yx^3 + y^3x + x^2 - y^2 + cte$ est potentiel de $\vec{V}$.

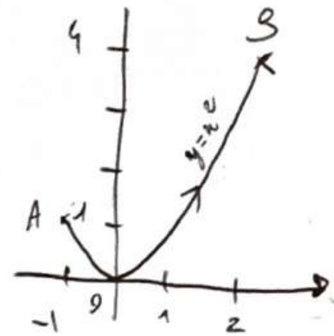
# § Intégrales Curvilignes

**Ex 3** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle$

Pour 1) $\vec{V}(x,y) = xy\,\vec{e_1} + (x+y)\,\vec{e_2}$

& $\Gamma$ est la courbe $\begin{cases} y = x^2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ parcouru ds sens $>0$ (sens inverse ⟲)

$$\vec{V}(x,y) = xy\,\vec{e_1} + (x+y)\,\vec{e_2} = xy\,\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\,\frac{\partial}{\partial y}$$




$\Gamma$ est le segment AB de la courbe $y = x^2$, allant de A à B, où $A = (-1,1)$ & $B = (2,4)$.

$d\vec{\gamma} = (dx, dy)$

On a $\int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_{(x,y)\in\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

où $P(x,y) = xy$, $Q(x,y) = x+y$.

$$\int_{(x,y)\in\Gamma} xy\,dx + (x+y)\,dy$$

$$= \int_{x\in[-1,2]} x(x^2)\,dx + x + x^2\, d(x^2)$$

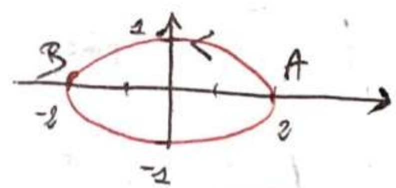
car $y = x^2$ pr $(x,y) \in \Gamma$

$$= \int_{-1}^{2} x^3\,dx + (x+x^2)\,2x\,dx \quad \text{car } d(x^2) = 2x\,dx.$$

$$= \int_{-1}^{2} (3x^3 + 2x^2)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{3 \cdot 2^4}{4} + \frac{2}{3}2^3\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{15}{4} + 6 = \frac{39}{4}$$

2) $\vec{V}(x,y) = y^2\,\vec{e_1} + x^2\,\vec{e_2}$ & $\Gamma$ est la courbe $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ parcouru ds sens positif.




$\frac{1}{2}$ ellipse allant de $A = (2,0)$, $B = (-2,0)$

$\Gamma$ pt ê paramétré par $x$ allant de 2 à $-2$.

& $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$. On a donc

$$I_2 = \int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_{(x,y)\in\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$\int \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \langle (P,Q), (dx,dy) \rangle$

$$I_2 = \int_\Gamma y^2\,dx + x^2\,dy$$

$$= \int_{x=+2}^{x=-2} \frac{4-x^2}{4}\,dx + x^2\, d\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) \quad \text{car } y^2 = \frac{4-x^2}{4} \;\&\; y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

$$= \int_{+2}^{-2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx + \int_{+2}^{-2} \frac{x^2}{4}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx$$

car $d\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) = \left[\left(4-x^2\right)^{+1/2}\right]' dx$

$$= \frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4-x^2\right)' dx$$

$$= -x\left(4-x^2\right)^{-1/2} dx$$

$$= -\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{-1/2} x^3\,dx$$

$$= -\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx}_{0}, \quad \text{où } f(x) = \left(4-x^2\right)^{-1/2} x^3$$

est une f impaire sur $[-2,2]$, $f(x) = -f(-x)$

$$= -\left[\left(2-\frac{8}{12}\right) - \left(-2+\frac{8}{12}\right)\right]$$

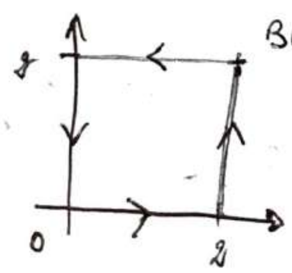
$$= -4 + \frac{16}{12} = \frac{-32}{12} = -\frac{8}{3}. \quad \text{Donc } I_2 = -\frac{8}{3}.$$

81

**Ex 8 :** Calculer l'intég curviligne $\int \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle$ ds les cas suivants, tt d'abord $I^+$ directement & puis en utilisant le Th de Green-Riemann.

(1) $\vec{V} = y^2 \vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2$ & $\Gamma$ est le carré de sommets $(0,0)$; $(2,0)$, $(2,2)$; $(0,2)$.

$\boxed{M}$ directe



B(2,2) $\Gamma$ est composé de 4 segments OA, AB, BC, CO où $O=(0,0)$, $A=(2,0)$, $B=(2,2)$, $C=(0,2)$.

On a $I_1 = \int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$

$$= \left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CO}\right)\left(y^2\,dx + x\,dy\right)$$

$$= I_O + I_A + I_B + I_C$$

Calculons $I_0 = \int_{OA} y^2 dx + x dy =$ $(x \in [0,2]$ & $y = 0)$

$= \int 0^2 dx + x d0 = 0$

$I_A = \int_{AB} y^2 dx + x dy = \int_0^2 y^2 \underset{0}{\underbrace{d2}} + 2 dy$

car pour $(x,y) \in AB$, on a $x = 2$, en $y \in [0,2]$,

$= \int_0^2 2 dy = [2y]_0^2 = 4$

$I_B = \int_{BC} y^2 dx + x dy = \int_2^0 2^2 dx + x \underset{0}{\underbrace{d2}}$

car pour $(x,y) \in BC$, $x$ va de 2 à 0, $y = 2$.

$= 4 \int_2^0 dx = -4 \int_0^2 dx = -8$

$I_C = \int_{CO} y^2 dx + x dy$ car pour $(x,y) \in CO$, $x = 0$ & $y$ va de 2 à 0.

$= \int_2^0 y^2 \underset{0}{\underbrace{d0}} + \underset{0}{\underbrace{0}} dy$

cd $I_1 = I_0 + I_A + I_B + I_C$

$= 0 + 4 + (-8) + 0 = -4$

$\fbox{M}^{2m}$ Green-Riemann

Soit $D$ le carré ouvert bordé par $\Gamma$.

Par le Th de Green-Riemann, on a

$I_1 = \int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$

Comme $P(x,y) = y^2$ & $Q(x,y) = x$ ; il vient que

$I_1 = \iint_D \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y} \right) dx dx = \iint_D (1 - 2y) dx dy$

$= \int_0^2 \left( \int_0^2 (1-2y) dx \right) dy$ car $D = \{x \in [0,2], y \in [0,2]\}$

$= \int_0^2 (1 - 2y) \left( \int_0^2 dx \right) dy$

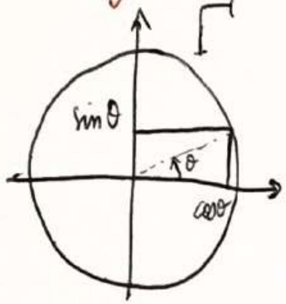
$= \int_0^2 2(1-2y) dy$ car $\int_0^2 dx = 2$

$= \left[ 2y - \frac{2y^2}{1} \right]_0^2 = \left( 2 \times 2 - \frac{2 \times 2^2}{1} \right) - \left( 2 \times 0 - \frac{2 \times 0}{} \right)$ 3

$= -4$.

82

2) $\vec{V} = y\vec{e_1} + x\vec{e_2}$ & $\Gamma$ est le cercle unité.




On paramètre le cercle unité $\Gamma$ par $(\cos\theta, \sin\theta)$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$I_2 = \int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_\Gamma y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d(\cos\theta) + \cos\theta\, d(\sin\theta)$$

car $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\forall (x,y) \in \Gamma$.

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta(-\sin\theta)\,d\theta + \cos\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\,d\theta + \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta - \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{M}$ Green-Riemann

Soit $D$ le disque ouvert bordé par $\Gamma$.

Par le Th de Green-Riemann, ⚠

$$I_2 = \int_\Gamma \langle \vec{V}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Comme $P(x,y) = y$ & $Q(x,y) = x$ ; il vient que

$$I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (1-1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D 0\,dx\,dy = 0$$

donc $\underline{I_2 = 0}$.