M52-B Topologie & Calculs d'intégrales

Mr. Potyagailo → 1 qθ cours DS. DM.

Chapitre 0 : Rappels sur EV espaces vectoriels

Ⓓ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opéraθs suivantes définies entre les élts de V. (vecteurs)

I. Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \to V$ opéraθ de l'addition.

$\forall x,y \in V \; (x,y) \to x+y$

$+$ vérifie les axiomes.

$\forall x,y,z \in V$, on a :

a) $x+y = y+x$ (commutativité)

b) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associativité)

c) $\exists\, 0 \in V, \quad 0+x = x$ (élt neutre)

d) $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y = 0$

On note l'élt y : $-x$.

⚠ (exercice) • Mq 0 est l'élt uniq vérifiant c)

•• Mq $\forall x \; \exists! \, y \in V : x+y = 0$

II. Multiplicaθ par scalaire

Cette opéraθ $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

$\lambda \in \mathbb{K}, \; x \in V \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ou λx

L'opéraθ $\cdot$ vérifie les axiomes

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x,y \in V$

a) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

b) $1 \cdot x = x$

c) $(\alpha+\beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivité) ∅ scalaires

d) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Rq Un suppose presque toujours que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ⓓ • Un système fini de vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est dit libre si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

.. Un système quelconque de vecteurs $\{e_i : i \in I\} = E$ est dit libre si tout sous-système fini de E est libre.
(i.e. $\forall x \in E$, x n'est pas CL non-triviale des autres vecteurs).

D Soit V un e.v., on dit que V est de dimension $n \in \mathbb{N}$ s'il existe un système de n vecteurs libre et tt système de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

e.g.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
Les vecteurs $e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0\dots 0,1)$ sont libres & tt vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

.. On dit que $\dim V = \infty$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs libres.

e.g.: a) $\dim \mathbb{R}^n = n$
b) L'ens. des f continues $C[a,b] =$
$= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ est continue} \}$

$C[a,b]$ est un espace vectoriel car si $f, g \in C[a,b] \Rightarrow f+g \in C[a,b]$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in C[a,b]$.

On note que $\dim C[a,b] = \infty$ car $C[a,b]$ contient les polynômes
$1, x, x^2, \dots, x^n$
& $\forall n$, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0$ dans $C[a,b]$
si $P_n = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b], P_n(x) = O(x) = 0$
le TH Principal de l'Algèbre
$\Longrightarrow c_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
$\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ est libre.

En plus, $\mathbb{R}[X] = \{$polynômes de coeff de $\mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^*[X]$: ens des polynômes sur $[a,b]$ est aussi un espace vectoriel et $\dim(\mathbb{R}^*[X]) = \infty$.

Par contre $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq n\}$

$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

car $\forall P_n \in \mathbb{R}_n[X] : P_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{R}$

Le système $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base

- de cet espace.

c) L'ensemble $\ell_2 = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

ℓ_2 est un espace vectoriel car si

$x, y \in \ell_2 \Rightarrow x+y \in \ell_2$.

En effet, $(x_i+y_i)^2 \leq 2x_i^2 + 2y_i^2$

$\Leftrightarrow x_i^2 + y_i^2 + 2x_iy_i \leq 2x_i^2 + 2y_i^2 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 \geq 0$.

- En plus, on a égalité ssi $x_i = y_i$ $\forall i$.

Alors $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2}_{\Downarrow\ <\infty} \leq 2\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}_{\text{fini } <\infty} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}_{\text{fini } <\infty}\Big)$$

dc somme CV.

En plus $\forall x \in \ell_2$,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in \ell_2$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

$\rightarrow \dim \ell_2 = \infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{n \text{ élts libres}}$

$e_i \in \ell_2$ car $\sum (0 + 0 + \dots + 1 + 0) = 1$.

R9 • Algèbre linéaire traite le cas d'e.v. de dim. finie.

• Analyse traite le cas <u>général</u>.

Ⓓ Deux espaces vectoriels V & V^* sur $\mathbb{K}$ sont isomorphes s'$\exists$ une applicat° bijective
$$\varphi : V \longrightarrow V^*$$
q respecte les opérations.

si $\varphi(v) = v^*$, $\varphi(u) = u^*$

alors $\varphi(u+v) = u^* + v^*$

$\varphi(\lambda u) = \lambda u^*$.

φ est une applicat° linéaire bijective.

Ⓓ Un sous-ens. V_1 de l'e.v. V est dit sous-espace de V si V_1 est un e.v. aux mêmes opérat°s.

$\forall x, y \in V_1$, $x+y \in V_1$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V_1$, $\lambda x \in V_1$.

e.g.: 1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n \subset \ldots$

2) $\ell_2 \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} \subset \ell_\infty \subset \mathbb{R}^\infty$

où $\mathcal{C}_0 = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ s.ev

$\mathcal{C} = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = d \in \mathbb{R}\}$ s.ev.

l'ensemble des suites CV.

- ℓ_∞ : les suites bornées
- $\mathbb{R}^\infty$: ttes les suites

suites bornées / suites CV : $\ell^\infty \ni \mathcal{C}$.

$\ell_2 \subset \mathcal{C}_0$?

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_i = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{C}_0$.

Ⓟ Si $V_i \subset V$ $(i \in I)$ Un sous-espace vectoriel alors
$$V^* = \bigcap_{i\in I} V_i \text{ est un sous-espace de } V.$$

Preuve : Si $u, v \in V^*$ alors

$\forall i \in I : u, v \in V_i$.

$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i \cdot \forall i \in I$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow u+v \in V^*$

$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

(D) Soit X un ss-ensemble d'un e.v. V.

On note $\mathrm{Vect}(X) = \{ v \in V :$

$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i , x_i \in K \}$.

$\rightarrow$ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

EX Mq $\mathrm{Vect}(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i \text{ sev de } X, X \subset V_i \}$

$\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

Preuve : Si $u,v \in V^*$ alors

$\forall i \in I : u,v \in V_i$.

$u+v \in V_i$ & $\lambda u, \lambda v \in V_i$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall i \in I$.

$\Rightarrow u+v \in V^*$

$\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un sous-espace de V.

(D) Soit X un ss-ensemble d'un e.v. V.

On note $Vect(X) = \{ v \in V :$
$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $x_i \in K \}$.

$\rightarrow$ ttes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de X.

Ex Mq $Vect(X) = \bigcap_{i \in I} \{ V_i : V_i$ sev de X, $X \subset V_i \}$

$Vect(X)$ est le plus petit s-espace vectoriel de V contenant X.

$A \subset F \subset V$ u

$V_0 = Vect(A) = \{ \sum \alpha_i v_i = v, \ v_i \in A \}$ u

C1 Espaces Vectoriels normés

§1. Définiо & exemples

(D) Soit V un (ev) sur $\mathbb{K}$, une fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite norme si elle vérifie
$\forall x,y,z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ - homogénéité
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(Cor 1) (Impliqué p l'Δ de norme)

L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ possède une distance (métriq) : $d(x,y) = \|x-y\|$.

On rappelle qu'une distance $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq

a. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
b. $d(x,y) = d(y,x)$
c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

$\forall x,y,z$ ev

Preuve Cor 1

a) $\|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$

b) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$
$= \|y-x\| = d(y,x)$

c) vient de 3.

Cor 2

$\forall x,y,z : \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Preuve $\|x-y\| = \|x+(-y)\| \leq \|x\| + \|-y\|$
$= \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

& idem $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$ □

Exemples :

1. $V = \mathbb{R}^n$

a) La norme $\|\cdot\|$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (1)

la norme euclidienne

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

On pose $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ distce euclidienne (2)

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est espace euclidien.

Prop $\|\cdot\|$ est une norme.

Preuve. $0 = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

.. $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \, \|x\|$

L'inégalité triangul^re s'obtient du Lemme suivant.

L (Inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz)

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}} \quad (CBS)$$

ou bien $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (CBS).

où $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est produit scal[n] euclidien.

$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(e) est une fonct° de 2 vecteurs linéaire sur les 2. (forme bilinéaire).

ex $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Preuve Lemme :

On commence de l'inégalité triviale :

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad (*), \quad a \geq 0, b \geq 0$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \right)$$

On pose $a = \frac{x_i^2}{\|x_i\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$

$$(*) \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2} \right) \quad (**)$$

On somme sur $i \in \{1, \dots, n\}$ dans $(**)$.

$f : t \to \|x + ty\|$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\frac{x_i^2}{\|x\|^2} \quad \sum x_i^2 \quad \sum$

$$\frac{\sum |x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2}(1+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$\square$

(Rq) historiq

L'inégalité (CBS) pr les sommes a été dmqé en 1821 par Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Victor Bouniakowski l'a obtenu ss la forme intégrale en 1851. Russe (1804-1889).

G. Schwarz l'a redémontré ss la forme intégrale en 1884. (1843-1921).

(Fin dm prop) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

on a $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

On obtient $\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ (CBS).

Les autres normes sur $\mathbb{R}^n$ sont :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad (2)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (3)$$

(2) & (3) st des normes.

e.g. $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i+y_i| \overset{\triangle\, I}{\leq} \max_{1\leq i\leq n}|x_i| + \max_{1\leq i\leq n}|y_i|$

idem pr $\|\cdot\|_1$.

2. Cas Complexe

$V=\mathbb{C}^n$, on rappelle que sur $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire (hermitien) est linéaire sur x & en plus il vérifie

- $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$, $\lambda\in\mathbb{C}$
- $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
- $\langle x,x\rangle \geq 0$

Le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ est

$$\boxed{\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}}$$

& $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \qquad (4)$

En remplaçant, x_i^2 par $|x_i|^2$, on obtient (CBS) Inég

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\| \text{ pr la norme (4).}$$

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ & $\|\cdot\|_1$ st les m̂s ds le cas complexe.

3. Suites

On considère 3 espaces vectoriels réels.

- $\ell_2 = \{(x_i)_n : x_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$
- $\ell_1 = \{$ " " " $, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| < \infty\}$
- $\ell_\infty = \{$ " " " $, \exists\ c>0 : |x_i| < c\}\ \forall i$

Dans ℓ_2, on pose $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$.

Tous les axiomes de la norme $\|\cdot\|$ st vérifiés, l'inégalité triangulaire, on obtient comme ceci:

Pour la partie 1), on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ dans } \ell_2.$$

Idem : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |x_i|$

st des normes.

NB: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in \ell_\infty$

car $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \infty$ & $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \infty$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \notin \ell_2$

~~4. Espaces de fonctions~~

(*) Mq $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p}$ est une norme (si $p \geq 1$)

Pr cela donner l'inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (M)$$

$1 < p < \infty$.

en utilisant la convexité (2^e dérivée $\oplus$) de la f $t \mapsto t^p$ ($p > 1$).

1. Espaces de fonctions

On considère l'ens $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont}\}$

On introduit 3 normes sur $C[a,b]$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

ce st des normes car e.g pour $\|\cdot\|$ on a

$$(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2 \quad (\dagger)$$

$\Updownarrow$

$$(f-g)^2 \geq 0$$

En intégrant $(\dagger)$ on obtient :

$$\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx \leq 2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

On a $f, g \in (C[a,b], \|\cdot\|) \Longrightarrow f+g \in C[a,b]$

~~§2. Topologie des espaces vectoriels normés~~

$f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$

$\lambda f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

On a $f+g$

1. Espaces de fonctions

On considère l'ens $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont}\}$

On introduit 3 normes sur $C[a,b]$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

ce sont des normes car e.g. pour $\|\cdot\|$ on a

$$(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2 \quad (\dagger)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f-g)^2 \geq 0$$

En intégrant $(\dagger)$ on obtient :

$$\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx \leq 2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

On a $f, g \in (C[a,b], \|\cdot\|) \Longrightarrow f+g \in C[a,b]$

~~§2. Topologie des espaces vectoriels normés~~

$f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$

$\lambda f \in (C[a,b], \|\cdot\|)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

On a ~~$f+g$~~ $(\|f\|$ ou $\|f\|_2)$

On prend l' $\triangle$:

on a $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$, $a \geq 0, b \geq 0$.

On pose $a = \dfrac{f^2}{\|f\|^2}$, $b = \dfrac{g^2}{\|g\|^2}$

D'où $$\frac{|f \cdot g|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{f^2}{\|f\|^2} + \frac{g^2}{\|g\|^2}\right) \quad (*)$$

On intègre $(*)$ sur $[a,b]$ & prend $\sqrt{\ }$.

$$\frac{\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx}{\|f\| \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\int_a^b f^2\,dx}}{\|f\|} + \frac{\sqrt{\int g^2\,dx}}{\|g\|}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

--ade

Inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

DM $\quad \|f\|_p = \int_0^1 |f|^p$.

si $f=0$ ou $g=0$ (clair) sppo $f\neq 0, g\neq 0$,

On pose $\|f\|_p = \alpha$ & $\|g\|_p = \beta$ & $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

dc $1-\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

ĉ $\|f\|_p = \alpha$, $\|g\|_p = \beta$, $\exists$ 2 fs f_0, g_0 tq

$|f| = \alpha f_0$, $|g| = \beta g_0$ & $\|f_0\| = \|g_0\| = 1$.

Puis $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = (\alpha f_0 + \beta g_0)^p$

$$= \left[(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} f_0 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} g_0\right)\right]^p$$

$$= (\alpha+\beta)^p (\lambda f_0 + (1-\lambda) g_0)^p$$

Puisque $f(t) = t^p$ est convexe $\forall p \geq 1$

$(f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$.

Dc $|f+g|^p \leq (\alpha+\beta)^p$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^p = \int_0^1 |f+g|^p dx \leq (\alpha+\beta)^p \int_0^1 dx = (\alpha+\beta)^p = \underbrace{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p}_{1}$ $\square$.

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|.\|g\|$$

Inégalité (CBS) : $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|.\|g\|$

On a $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$ ⇙ m̂ argument qu'avant

Cours 3 §2. Topologie ~~d'~~ sur un espace vectoriel normé

D • soit V un e.v.n, un ss-ens $D\subset V$ est dit ouvert si $\forall x\in D$ la boule ouverte :
$B(x,\delta)=\{y\in V : \|y-x\|<\delta\}$ centrée en x de rayon δ est contenue dans D.
$B(x,\delta)$ est appelée voisinage de x noté U_x (si $\delta>0$ n'est pas important)

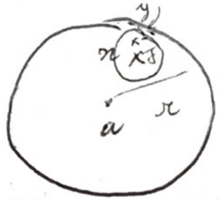
•• Un ss-ens $F\subset V$ est dit fermé si son complémentaire : $F^c=\{x\in V, x\notin F\}$ est ouvert.

Notat° - si $D\subset V$ est ouvert. On le note $D \Subset V$

@ • Les ensembles $\emptyset$ et V sont des ouverts & fermés.
($\emptyset$ est ouvert & $\emptyset^c = V$ est fermé
$\emptyset$ est fermé & V est ouvert).

•• La boule ouverte $B(a,r)=\{x\in V \mid \|x-a\|<r\}$ est un ss-ens. ouvert.

En effet,



Posons $\delta = r - d(a,x) > 0$ où $x\in B(a,x)$

$\forall y\in \overbrace{B(x,\delta)}^{\|y-x\|<\delta}$, on a $d(a,y)\leq d(a,x)+d(x,y)$
$< d(a,x)+\delta$
$r = d(a,x)+r-d(a,x)$

$\forall y\in B(x,\delta) : y\in B(a,r)$

••• La boule fermée $\overline{B(a,x)}=\{x\in V, d(a,x)\leq r\}$ est un ss-ens fermé de V.

En effet, mq son complémentaire est ouvert.

$(\overline{B(a,r)})^c=\{x\in V, d(a,x)>r\}$

on pose $\delta = d(a,x)-r>0$ pr $x\notin \overline{B(a,r)}$.

Mq $B(x, \delta) \subset (\overline{B(a,x)})^c$,

$\forall y \in B(x,\delta)$, on a $d(y,a) \geq d(a,x) - d(x,y)$
$> d(a,x) - \delta$
$= d(a,x) - d(a,x) + r = r$

•••• La sphère $S(a,r) = \overline{B(a,r)} - B(a,r)$
est fermé. $= \{x : \|x-a\| = r\}$

En effet $S^c(a,r) = B(a,r) \cup (\overline{B(a,r)})^c$
est la réunion de 2 ss-ens ouverts (voir ci-dessus)
est ouverte p Prop suivante.

Prop 1: 1. La réunion quelconque de ss-ens ouverts est ouvert.
$\forall$ ens d'indices A, on a:
$$\forall \alpha \in A, D_\alpha \in V \Rightarrow \overbrace{\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha}^{D} \in V.$$

NB : Aucune Restrict° sur la cardinalité de A
(e.g. $A = \mathbb{R}$ est possible)

2. si $D_i \in V$ $(i = 1, \dots, k)$
$$\Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^{k} D_i \in V.$$

Rq: 2) n'est pas vraie en général pr intersec° d'un nombre infini d'ens

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

n'est pas ouvert.

Preuve : 1. soit $x \in D \Rightarrow \exists \alpha \in A, x \in D_\alpha$.
Puisque $D_\alpha \in V$ alors $\exists$ voisinage U_x de x tq $U_x \subset D_\alpha \subset D$.
Donc D est ouvert.

2. si $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}$, $x \in D_i$
Puisque $D_i \in V$ alors $\exists \delta_i > 0$,
$B(x, \delta_i) \subset D_i$.
On pose $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i > 0$
on a $B(x, \delta) \subset D_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
$B(x, \delta) \subset D$, cqfd

Prop 1'. • soit $F_\alpha \subset V$ un ens V fermé $\forall \alpha \in A$
alors $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé dans V.

•• si $F_i \subset V$ est fermé $(i = 1, \dots, k)$
alors $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ est fermé dans V.

Preuve $(\cup)^c = \cap$

indic ff de Morgan

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

D Une famille ss-ens ouverts
$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V est appelée topologie
si V si les axiomes suivts st vrais :

1. $\emptyset, V \in \mathcal{U}$
2. Une réunion qq d'ouverts est un ouvert.
3. Une intersect° fini d'ens ouverts est un ouvert.

Rq Prop 1 ns dit les boules ouvertes
$\{B(a,r), a \in V, r \in \mathbb{R}_+\}$
engendrent (à l'opérat°s $\cup$ qq & $\cap$ fini).
Une famille d'ouverts sur ens. V.

D • soit $A \subset V$, un point $a \in V$ est dit
adhérent de A si
$\forall$ voisinage U_a de a, on a $U_a \cap A \neq \emptyset$.

•• Un point $a \in V$ est dit point d'accumulat°
de $A \subset V$ si $\exists$ voisinage U_a de a :
$\mathrm{card}(U_a \cap A) \geq 2$

••• Un point $a \in A$ est dit isolé si
$\exists\ U_a : U_a \cap A = \{a\}$.

•••• Un point $b \in A$ est dit intérieur si
$\exists\ U_b : U_b \subset A$.

L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ (ou bien $\mathrm{int}(A)$)
est le ss-ens de pts intérieurs de A.

e.g. $A \overset{\circ}{\subset} V$ ssi $\mathring{A} = A$.

∴ L'ens $\overline{A} = \{x \in V : x$ est adhérent de $A\}$ est appelé adhérence de A.

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé bord de A.

(ou frontière de A, notée $Fr(A)$).

Ex: $[0,1[\cup \{2\} := A$

Donner ts les objts de (D) pr A.

Adhérent / pt isolé / pt d'accum / pt intérieur / bord

B_0. $\forall x \in A$, $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}, \|y-x\| < \delta\}$.

A. $\in A$, adhérent ?

$\forall U_a$ de A, $U_a \cap A \neq \emptyset$

→ 1 est pt adhérent de A.

$\forall U_1$ de A, $\forall x \in A$, NON

$B(1,\delta) = \{y \in \mathbb{R}, \|y-1\| < \delta\}$

→ 2 pt isolé de A. $\exists U_2 : U_2 \cap A = \{2\}$

→ 0 pt int de $\mathring{A}$ $\exists U_0 : U_0 \subset A$

→ 1 pt int de A

→ PA C $Card(U_a \cap A) \geq 3$ avec pt 1 ?

→ bord $\partial A = \overline{A} / \mathring{A}$

(P2) soit V un evn alors $\forall A, F \subset V$, on a

1) $x \in \partial A$ ssi $\forall$ voisinage U_x on a
$U_x \cap A \neq \emptyset \wedge U_x \cap A^c \neq \emptyset$.

2) F est fermé ssi $\overline{F} = F$.

3) $\overline{A}$ est le plus petit ss-ens fermé contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \subset V \text{ est fermé} \\ A \subset F}} F$$

Preuve 1. $(\Rightarrow)$ soit $x \in \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ et U_x tt voisinage de x.

$U_x \not\subset A$ car $x \notin \mathring{A}$

d'où $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.

Puis $x \in \overline{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset$

$(\Leftarrow)$ On suppose $\forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

$(\Rightarrow)$ $U_x \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow U_x \not\subset A \Rightarrow x \notin \mathring{A}$. ///

2) $F \subset \overline{F}$ par définition de $\overline{F}$

Mq $\overline{F} \subset F$, si $x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ - ouvert

$\exists U_x : U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{F}$.

$(\Leftarrow)$ si $x \notin F = \overline{F}$; $\exists U_x : U_x \cap F = \emptyset$ car $x \notin \overline{F}$.

$U_x \subset F^c \Rightarrow F^c \text{ⓞ} V$

dc F est fermé.

///

Preuve 3) Mq $\overline{A}$ est fermé, dc par ∂):
il suffit de dmq que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

On a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$.

Mq $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, soit $x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow \forall U_x$
$U_x \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

Donc $\exists y \in U_x \cap \overline{A}$.

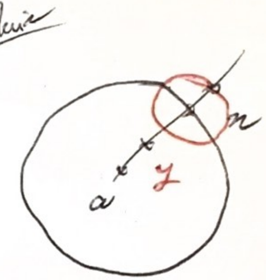
U_x est un voisinage de y aussi
puisque $y \in \overline{A}$, on a $U_x \cap A \neq \emptyset$.
$\Rightarrow x \in \overline{A}$, dc $\overline{A}$ est fermé.

→ Si F est un fermé q contient (Contenant) A.
$F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$.
Soit $x \in F^c$ puisq F est fermé.
$\exists U_x : U_x \subset F^c$ car $F^c \overset{\circ}{\subset} V$
$\Rightarrow U_x \cap F = \emptyset$.
$\Rightarrow U_x \cap A = \emptyset$ car $A \subset F$.
$\Rightarrow x \notin \overline{A}$
On a dmqé $F^c \subset \overline{A}^c \Rightarrow \overline{A} \subset F$. □

Exemple - Prop

• $\overline{B(a,r)} = B(a,r) \cup S(a,r)$ clair

• $\partial B(a,r) = S(a,r)$ à mq



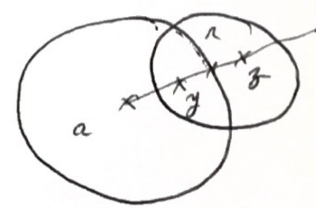
$S(a,r) = \{x \in V : \|x-a\| = r\}$.

Par Prop 2, on doit mq $\forall \delta > 0$, $B(x,\delta) \cap B(a,r) \neq \emptyset$
$\wedge$ $B(x,\delta) \cap B^c(a,r) \neq \emptyset$

On fixe $\delta > 0$ & on pose:
$y = a + \lambda(x-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
$y-a$ est colinéaire de $x-a$.

On cherche $\lambda > 0$ tq $y \in B(x,\delta) \cap B(a,r)$. (*)
$\|y-a\| = \lambda \|x-a\| = \lambda r < r$ si $\lambda < 1$
$\|y-x\| = \|a-x\| \, |\lambda - 1| = r(1-\lambda)$ car $\lambda < 1$.
$r(1-\lambda) < \delta$
$r - r\lambda < \delta$ → $1 - \frac{\delta}{r} < \lambda < 1$. (*)

(2) Mq $\exists z \in B(x,\delta) \cap B^c(a,r)$
on pose $z = a + \mu(x-a)$
$\mu > 1 \Leftrightarrow \|z-a\| > r$.



$\|z-x\| = \|x-a\| (\mu-1)$, car $\mu > 1$

$x(\mu-1) < \delta$

$1 < \mu < 1+ \frac{\delta}{x} \Rightarrow$ (**). ///

Normes équivalentes

(D) soit V un ev & $\|\cdot\|_i : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 2 normes sur V $(i=1,2)$

$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, noté $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, si $\exists\ C_1, C_2 > 0$ tq $\forall x \in V$, on a :

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \quad (1)$$

ou bien $C = \max(C_1, C_2)$.

$$\frac{1}{C} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \quad (1')$$

⚠ M.q $\sim$ est une relat° d'équivalence.

Affirmat° : si V est de dimension finie alors les 3 normes introduites $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\| (= \|\cdot\|_2)$, $\|\cdot\|_\infty$ st équivalentes.

Rq 1. On pt démq une affirmat° + générale que toutes 2 normes sr V st équivalentes.

2. Une boule de x pr la norme $\|\cdot\|_1$ se trouve ds une boule de rayon $c.x$ pr $\|\cdot\|_2$ si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

ex $\|x_n - x\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \|x_n - x\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve de l'affirmat°

$$|x_i| \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i \leq n} |x_i|$$

On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$. $= \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$

$$|x_i| \leq \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$$

Par la transitivité, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

(voici une preuve directe p ineg CBS

$|\langle x,y\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$

On pose $y = (1,1,\dots,1)$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sqrt{n}\, \|x\|_2$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = \|x\|_\infty \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|$).

NB Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ & $\|\cdot\|_\infty$ ne st pas équivalentes ds $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$.

car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$. car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = \infty$ & $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} < \infty$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1} \in \ell_\infty \setminus \ell_2$. $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$

$\ell_1 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_1)$, $\ell_2 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2)$

$\ell_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}\right\|_\infty = 1$

§ 3 → Ss-ensembles denses & nulle part denses

Soit X un espace vectoriel normé ou plus généralement espace métriq muni de la distce $d(\,,\,)$

(D) Un ss-ens $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

ie $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

(e) 1) $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{Q}^n$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$.

3) Dans $C[a,b]$ & la norme $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-g(x)| = \|f-g\|_\infty$

$\forall f \in C[a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists$ polynôme $P_n : \|P_n - f\|_\infty < \varepsilon$. (Weierstrass)

L'ensemble des polynômes est dense dans $C[a,b]$,

$\forall P_n, \forall \varepsilon, \exists P_n'$ à coeff rationnels tq

$\|P_n - P_n'\| < \varepsilon$.

Dans $C[a,b]$, les polynômes à coeff rationnels st denses

(P) Un espace X est $\boxed{\text{séparable}}$ s'$\exists$ un ss-ens dense dénombrable.

Les exemples 1), 3) st séparables.

Par contre, $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable

En effet, on considère les suites

$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ tq $a_n \in \{0,1\}$

On sait que card(A) = card$(\mathbb{R}) = \aleph_1 > \aleph_0$ (aleph) ($\aleph_0$ = card$(\mathbb{N})$)

$(a_n)_n, (b_n)_n \in A$

$\|a_n - b_n\|_\infty = 1$ si $(a_n)_n \neq (b_n)_n$.

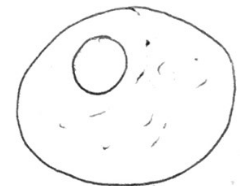
Les ens $A \cap B(a, \frac{1}{2})$, $a \in A$ st disjoints

si $B \subset (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est dense alors chaque boule $B(a, \frac{1}{2})$ contient un $b \in B$.

Card$(\{B(a,\frac{1}{2}), a \in A\})$ = card A.

Dc B n'est pas dénombrable.

(D) Un ss-ens A d'un espace métriq (ou evn) X est dit nulle part dense (n.p.d.) si $\forall$ boule $B(a,r) \subset X$, $\forall a \in X, \forall r > 0$, $\exists$ sous-boule $B \subset B(a,r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.



$B(a,r)$.

A

Rq 1) Cette ppté est opposée à la densité.

eg $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en étant dense ds $\mathbb{R}$ ne st pas npd.

2) $\mathbb{N}$ & $\mathbb{Z}$ st n.p.d ds $\mathbb{R}$.

Tout ss-ens ne contenant que des points isolés est n.p.d.

(ds chq pt $\exists$ un voisinage :)

$B(z, 1/2)$

$z \in \mathbb{Z}$, $\cancel{\#z}$

card$(\mathbb{Z} \cap B(z, \frac{1}{2})) = 1$

$z-\frac{1}{2}$ z $z+\frac{1}{2}$

$]z_0 - 10^{-2021}, z_0 + 10^{-2021}[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$

$z_0 \in]z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}[$

$z_0 \neq z$.

En TD on verra @ appelé ens de Cantor :

$\mathcal{C} \subset [0,1]$ m.p.d.

$\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable ($\mathrm{card}\, \mathcal{C} = \mathrm{card}\, \mathcal{C}[0,1] = \mathrm{card}\, \mathbb{R} = \aleph_1$)

Longueur totale des intervalles disjoint de $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ est 1.

3) ⚠ La définiƟ de mpd est équivalente à d'un ens

A est mpd ssi $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

($\Leftarrow$) En effet si $B(a,r) \in X$ est une boule.

Puisque $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$, $B(a,r) \not\subset \overline{A}$.

$\Rightarrow \exists\, b \in B(a,r) \cap \overline{A}$

$\overline{A}^C$ est ouvert $\exists\, B' = B(b,r') \subset \overline{A}^C$.

Donc $B' \cap A = \emptyset$.

($\Rightarrow$) si $\forall$ boule $B(a,r)$ contient $B' \in B(a,r)$ tq $B' \cap A = \emptyset$ alors $\forall x \in B'$ on a $x \notin \overline{A}$.

$\Rightarrow B(a,r) \not\subset \overline{A} \Rightarrow \mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$

□

$\overline{A}^C$ est un ouvert.

4) Cette ppté sera usée ds Th de Baire.

Chapitre II : Espace de Banach

Leçon 1 : Espaces Métriques Complets

§1 : DéfiniƟs & exemples

En 1° année, on a vu tte suite de Cauchy ds $\mathbb{R}$ CV.

d distance de X

(fondamental)

D1 soit (X,d) un espace métriq (e.g. evn), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pts $x_n \in X$ est dite de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n > n_0,\ m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

@ Tte suite CV $x_n \longrightarrow a \in X$ est de Cauchy.

Car l'a par l'⚠ I, en effet soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, m > n_0$:

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \ \&\ d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

□

→ La réciproque provoque la suivante def :

D2 Un espace (X,d) est dit complet si tte suite de Cauchy CV dans (X,d).

@ Principal (vu en 1ère année)

$\mathbb{R}$ est complet

@ Triviaux

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\not\!\!\not{}$ distce $|\cdot|$.

En effet $\forall$ ensemble q ne contient que des pts isolés a la ppté :

Tte suite de Cauchy se stabilise apcr.

$\exists n_0, \forall m, n \geq n_0 \quad , \quad x_n = x_{n_0}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}.$$

Notons que $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne st pas complets car $\exists\ (q_n) \subset \mathbb{Q}$:

$$q_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

(q_n) est Cauchy q ne $\not{\text{CV}}$ ds $\mathbb{Q}$.

Rq / Prop : Un ss-ens $A \subset X$ est complet ((X,d) est complet) ssi A est fermé ds X.

($\Leftarrow$) En effet, si $(x_n) \subset A$ est une suite de Cauchy puisque X est complet $\exists\, x \in X$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $x \in \overline{A}$; $\overline{A} = A$ (A est fermé) $\Rightarrow x \in A$.

($\Rightarrow$) si $x \in \overline{A}$, $\exists\ (x_n) \subset A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

(x_n) CV $\Rightarrow (x_n)$ est Cauchy $\Rightarrow x \in A$ car A est complet dc $\overline{A} = A$.

→ $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est complet.

→ $]0,1]$ n'est pas complet.

Encore un "non-exemple"

On considère l'ensemble des polynômes

$$\mathbb{P}[\mathbb{K}] = \{ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K} \}.$$

le sous-ensemble des fs sur $\mathbb{K}$.

On munit $\mathbb{P}[\mathbb{K}]$ de la norme :

$$\|P\| = \max_{0\leq i\leq n} |a_i| .$$

→ $\mathbb{P}[\mathbb{K}]$ n'est pas complet. ←

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

On pose $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ est une suite de Cauchy.

En effet, $\|P_n - P_m\|_{m>n} = \left\| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{x^m}{m!} \right\|$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

D'autre part $\|e^x - P_m\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

& $e^x \notin \mathbb{P}[\mathbb{K}]$.

(Non)- Exemples plus conceptuels

1. $\mathbb{R}^n$ est complet pr chaque norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$
2. ℓ_2 est complet. (suites ∞).

Rq Puisq les 3 normes st équivalentes ds $\mathbb{R}^n$, (x_n) est de Cauchy ~~p~~ à $\|\cdot\|_1$ ssi ~~p~~ $\|\cdot\|$ ssi p $\|\cdot\|_\infty$

Car eg $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ ssi $\|x_n - x_m\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

On va obtenir la complétude de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ de 2.

Mq ℓ_2 est complet.

On spps $(x_n) \subset \ell_2$ est Cauchy,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m > n_0$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2 \quad (*)$$

NB : $x_n = (x_1^n, \dots, x_k^n, \dots)$.

Les indices inférieurs st les coordonnées de x_n pr le vecteur x_n d'indice n est mis en bas.

Dans $(*)$, $x_i \in \mathbb{R}$, on a

$$(**) \quad |x_i^n - x_i^m|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, \}$$

Par (**), $(x_i^n)_n$ est une suite de Cauchy $\forall i \in \{1, \dots, \}$

$\mathbb{R}$ est complet $\Rightarrow \exists\, x_i \in \mathbb{R} : x_i = \lim_{n \to \infty} x_i^n$

On pose $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$

En passant à la limite si $m \to \infty$ dans (*) on a $\|x_n - x\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall n > n_0$.

Il reste à dmq $x \in \ell_2$ ie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ (***)

Pour $\mathbb{R}^n$, on l'a dmqé qu'il est complet.

(***) vient $(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2$

$$\underbrace{x_i^2}_{a+b} = (\underbrace{x_i - x_i^n}_{a} + \underbrace{x_i^n}_{b})^2 \leq 2(x_i - x_i^n)^2 + 2(x_i^n)^2$$

→ On a $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \infty$ par (*)

& $\sum (x_i^n)^2 < \infty$ car $x_n \in \ell_2$.

Par le critère de comparaison de séries à termes positifs.

(si $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$)

Donc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $x \in \ell_2$.

Non-exemple : ici espace de fs cont

$C[a,b]$ n'est pas complet p/r à $\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt$.

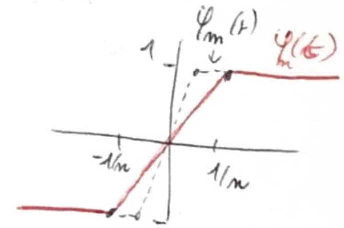
muni de la distance :

$$\|f - g\| = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(on le note $C_2[a,b]$) n'est pas complet.

On considère la suite :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$



On va mq (φ_n) est de Cauchy ds $C_2[-1,1]$ q n'y CV pas.

• (φ_n) est de Cauchy, soit $m > n$,

$\varphi_n = \varphi_m$ si $1 \geq t \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$

$-1 \leq t \leq -\frac{1}{n} < -\frac{1}{m}$

$$\| \varphi_n(t) - \varphi_m(t) \|^2 = \int_{-1/m}^{1/m} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 \, dt$$

$$= \int_{-1/m}^{1/m} (m-n)^2 t^2 \, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2 \, dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (-1-nt)^2 \, dt$$

$$= \frac{(m-n)^2}{3} \frac{2}{m^3} + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{1/n} (1 - 2nt + n^2 t^2) \, dt \qquad \underline{\text{CDV}}\ \ \underline{t := -t}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(m-n)^2}{m^3} + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - 2n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) + \frac{2n^2}{3} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3} \right) \right)$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{4m^2}{m^3} + 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2n^2}{3} \frac{2}{n^3} \right)$$

$$\leq \frac{8}{3} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{8}{3} \frac{1}{n} = \left(\frac{16}{3} + 2 \right) \frac{1}{n} = \frac{8}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\| \varphi_n - \varphi_m \| \xrightarrow{n, m \to \infty} 0$$

$\forall\, t \in [-1,1]$, $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

$\varphi \notin C[-1,1]$, elle est discontinue en 0.

Sppps par contradicO (!!) $\exists f \in C[-1,1]$ tq $\| f - \varphi_n \| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Par l'inégalité de Minkowski (CBS)

$$(*) \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 \, dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 \right)^{1/2}$$

elle est vraie & la m̂ preuve m̂ si φ est discontinue en 0.

or $\left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 \, dt \right)^{1/2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\rightsquigarrow f(t) \neq \varphi(t)$ car $f(t)$: continue & $\varphi(t)$: discontinue.

$\psi(t) = \underbrace{(f(t) - \varphi(t))^2}_{\geq 0}$ est $\underline{\text{cont}}$ sr $\mathbb{R}^*$

$\exists\, t_0 \in \mathbb{R}^* : \psi(t_0) \overset{\text{"}C_0\text{"}}{>} 0$

Par la continuité de ψ en 0, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$
$\psi(t) \geq 0$.

L'intégrale à gauche ds $(*)$ est minorée par

$$C = \sqrt{2 \varepsilon C_0} > 0$$

Donc à droite, on doit avoir :

(23) $\| f - \varphi_n \| \not\to 0$ & $f \notin C[a,b]$

Rq 1) L'ens $C_2[a,b]$ a été remplacé par l'espace $L^2[a,b]$ de foncθ Lebesgue par Henri Lebesgue intég au début du XX^e s.

2) $C_1[a,b] = \left(C[a,b], \int_a^b |f(t)|\,dt = \|f\|\right)$ n'est pas complet non plus (vu @ livre DW)

⚠ $C_\infty[a,b] = \left(C[a,b], \max_{a\le t\le b} |f(t)|\right)$ est complet.

§ 2 : Th sur les boules embôitées
Th de Baire

Th (sur les boules embôitées)
soit (X,d) espace métriq complet ($X \neq \emptyset$)
alors $\forall$ suite de boules fermées B_n, embôitées $B_n \subset B_{n-1}$ ($n \geq 1$)
tq le rayon r_n de $B_n \longrightarrow 0$,
$\exists!$ point $x \in X$ tq
$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Preuve Puisque $B_m \subset B_n$ le centre x_m de B_m appartient à B_n, $\forall m > n$

Donc $d(x_n, x_m) \leq r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Alors (x_n) est de Cauchy.

Par la complétude de X :
$$\exists x \in X : x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

D'autre part $\forall n$ fixé, $x_m \in B_n$ & $x = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}} x_m$

Dc x est un pt adhérent de B_n.
$$\overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n \quad \forall n$$
$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ car $x,y \in B_n$ $\forall n$.

Par le m̂ argument alors $d(x,y) \leq 2 r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

cqfd

Rq ① 1° année, on mq m̂ Th pr interv fermés embôités dt longueur $\longrightarrow 0$ affirmant qu'il $\exists$ pt commun pr ts les intervalles
C'est le principe de Cauchy - Cantor qi impliq la construcθ de $\mathbb{R}$.

(24) (George Cantor (1845-1918 : allmd), fondt^eur de la Th des ens)

VB.

2) La réciproq du Th est aussi vraie :

si tte suite de boules fermées emboîtées, de rayon $\longrightarrow 0$ possède un pt commun alors l'espace (X,d) est complet.

↳ Idée preuve : soit (x_n) une suite de Cauchy

On pt construire une suite de boules fermées

$$B_n = B_n\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \text{ \& mq } \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

où $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

Th de Baire

1874-1932

voir aussi preuve Th de Baire.

ss analyse & topologie.

soit (X,d) un espace métrique complet (mc) alors toute réunion dénombrable F de ss-ensembles F_n fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

$$\left.\begin{array}{l} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ \\ \operatorname{int}(F_n) = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{int}(F) = \emptyset$$

Corollaire

$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ où A_n est un ss-ens n.p.d

X n'est pas une réunion dénombrable de sous-ensembles n.p.d.

Preuve corollaire.

A_n est npd ssi $F_n = \overline{A_n}$ est d'int vide.

si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ mais $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$

Par le Th de Baire : $\operatorname{int}(X) = \emptyset$ $\boxed{c?!c}$

car $\forall x \in X, \forall r > 0, \ B(x,r) \subset X$. ◻

Rq si $X = \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$ réunion dénombrable.

En plus, $\mathbb{Z}$ est complet car chq suite de Cauchy se stabilise $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n,m > n_0 \ ; x_n = x_m$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0+1}$

$\overline{B_{\mathbb{Z}}(n, \frac{1}{2})} = \{m \in \mathbb{Z} : \|m-n\| \leq \frac{1}{2}\} = \{n\}$

$B(n, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{Z}$ (si on considère $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, int $\mathbb{Z} = \emptyset$ ds $\mathbb{R}$).

(ds l'échelle de $\mathbb{Z}$, int $\mathbb{Z} \neq \emptyset$).

Preuve Th de Baire

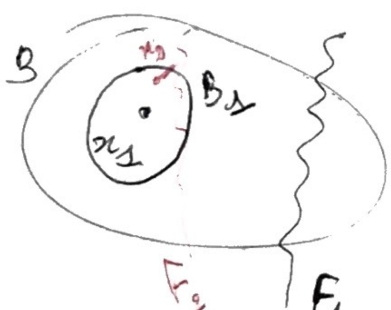
Rq Th de Baire : X est espace métriq complet, mv,

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad F_i \subset X \text{ fermé}, \quad \text{int } F_i = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{int } F = \emptyset$$

Spps que ce n'est pas vrai & int $F \neq \emptyset$

$\exists$ boule ouverte $B \subset F$



On a int$(F_1) = \emptyset$

dc $B \not\subset F_1$.

$\exists x_1 \in B \setminus F_1$.

On note F_1 est fermé dc $F_1^c = X \setminus F_1$ est ouvert

alors $B \cap F_1^c$ est ouvert.

(intersecO de 2 ouverts).

$\exists$ boule ouverte $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

Quitte à diminuer r_1, ops (on pt suppser) la boule fermée

$\overline{B_1} = \overline{B}(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

Idem int $F_2 = \emptyset$, $B_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ dc $\exists x_2 \in B_1 \setminus F_2$.

On pose $r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \underbrace{d(x_2, \partial B_1)}_{\frac{r_1 - d(x_1,x_2)}{2}}\right) > 0$ car B_1 est ouverte.

Alors $B_2 = B(x_2, r_2)$ vérifie $\overline{B_2} \subset B_1$.

En effet, si $y \in B_2$, $d(y, x_2) < r_2$.

dc $d(y, x_1) \overset{IT}{\leq} d(y, x_2) + d(x_2, x_1)$

$\leq \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{2} + d(x_2, x_1) < r_1$

Donc $\overline{B_2} \subset B_1 \subset \overline{B_1}$.

(PR sur k (le numéro de F_k))

On a une boule $\overline{B_k} = \overline{B}(x_k, r_k)$

tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$.

$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$

(PR) sur k (pour F_k), on a une boule
$\overline{B_k} = \overline{B}(x_k, r_k)$ tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$.
$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$

int $F_{k+1} = \emptyset \Rightarrow \exists x_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$.
On pose $r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{r_k - d(x_k, x_{k+1})}{2}\right)$
Par la m̂ raison $\overline{B}_{k+1} \subset B_k \subset \overline{B_k}$
& on obtient une suite de boules fermées emboîtées
$\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$ tq rayon$(B_k) = r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Par le (Th) $\boxed{BFE}$ boules fermées emboîtées

$\exists_1 (\exists!)\ x \in \bigcap^{\infty} \overline{B_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $x \in B_i \subset F_i^c$ (*)

$\Rightarrow x \notin F_i$

D'autre part $x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ (**)

Contradiction (* & **).

$\square$

Annexe (Th) BFE affirme que X est complet
nv $\Rightarrow \forall$ suite de boules fermées emboîtées,
tq leur rayon td vers 0 a une intersection nv.

↳ La réciproque est vraie.

Preuve soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy.
Mq (x_n) (CV), (But) construire une suite de boules fermées emboîtées centrées en $(x_{n_k}) \subset (x_n)$
de rayons $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Soit $B_1 = \overline{B(x_1, 1)}$
$\exists n_1\ \forall n > n_1,\ d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2^2}$.
$B_2 = B(x_{n_1}, \frac{1}{2})$
$B_2 \subset B_1$ car $d(y, x_1) \leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_1) \leq$
$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1$.
$B_2 \subset \text{int}(B_1)$
(PR) ...

$B_2 \subset \mathrm{int}(B_1)$

(PR) si $B_k = B\left(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ est choisie

$\exists n_k, \forall n > n_k, d(x_n, x_k) < \frac{1}{2^{k+1}}$

et $B_{k+1} \subset \mathrm{int}\, B_k \subset B_k$

rayon $(B_k) \longrightarrow 0$ par l'hypothèse.

$\exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$,

on a $d(x - x_k) \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

or $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Fait : une suite de Cauchy q ss-CV (ie une sous-suite CV) CV.

En effet $\forall \varepsilon > 0$ fixé, on a $\exists k_0$

$\forall k > k_0$; $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\exists n_e, \forall m > m_0$; $d(x_m, x_e) < \frac{\varepsilon}{2}$

$e > m_0$.

On pose $n_0 = \max(m_0, k_0)$ $n_k > n_0$.

$\forall m > n_0$; on a

$$d(x_m, x) \leq \underbrace{d(x_m, x_{n_k})}_{\substack{\text{Cauchy} \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{\substack{\text{Cauchy} \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} < \varepsilon.$$

§3. Fonctions cont entre les espaces métriques

soit $f : X \longrightarrow Y$, une f entre 2 espaces métriqs X, Y munis de distances d_X & d_Y

(Rq) on dit que :

(D1) $\lim_{\substack{x\to a \\ a \in X}} f(x) = A \in Y \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X$
$0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), A) < \varepsilon$

(Rq) S'il est clair ds quel espace on est, on note d la distance d_X (ou d_Y)

(D2) $f : X \to Y$ est cont en $x_0 \in X$ si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Donc f est <u>cont</u> en x_0 si la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $\exists$ & est égale à $f(x_0)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$ f n'est pas cont en 0.

D3 $f : X \to Y$ est <u>cont</u> sur X si $\forall x_0 \in X$ f est <u>cont</u> en x_0.

Prop $f : X \to Y$ est <u>cont</u> sur X ssi $\forall$ ouvert $V \subseteq Y$ $f(X)$ l'ens $f^{-1}(V) \subseteq X$.

<u>ed</u> f cont ssi $\forall$ fermé $F \subset f(X) = Y$, $f^{-1}(F)$ est fermé ds X.

<u>Preuve</u> : $(\Rightarrow)$ $y_0 \in V \subseteq f(X)$

$\exists\, \varepsilon > 0,\ B(y_0, \varepsilon) \subset V$ car $V \subseteq Y$, soit $x_0 \in X \cap f^{-1}(V)$, $f(x_0) = y_0$.

Par continuité de f sur X pr ce $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

<u>ie</u> $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset V$

Donc $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$. ///

$(\Leftarrow)$ soit $x_0 \in X$ & $y_0 = f(x_0)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ alors $\exists\, \delta > 0$ tq $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$

car par hypothèse $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ est ouvert.

Donc $\exists\, \delta > 0,\ B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$

On a obtenu pr $\varepsilon > 0$ qq un $\delta > 0$ tq $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ///

$\square$