# M

# 22

M-22

# Ch 1 : Les nombres réels

## P1 Ens nbr rationnels $\mathbb{Q}$.

(P) Un nbr est rationnel ssi écriture décimale périodiq ou finie

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} , p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. DÉMO 1

## P2 Propriétés de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}1$ $(\mathbb{R}, +, \times)$ corps commutatif.

$\mathbb{R}2$ La relaᵒ $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est un relaᵒ d'ordre, et elle est TOTALE.

$\mathbb{R}3$ TH Archimède $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$.

$\mathbb{R}4$ Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide & majorée admet une borne supérieure.

(D) Une relation $\mathcal{R}$ sur $E$ est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, $x$ est en relation avec $y$ : $x \mathcal{R} y$. $(x, y \in \mathcal{R})$.

DÉMO | 2

$\tau \mathcal{E} V$ (D) $\mathcal{R}$ : Relation d'ordre si :

- réflexive : $x \mathcal{R} x$ $\quad x = x$
- antisymétriq : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ $\quad x = y$
- transitive : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ $\quad x = z$

(D) $\mathcal{R}$ <u>totale</u> si $\forall x, y \in E$, on a $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

## P3 Borne supérieure

(D) ∘ $M \in \mathbb{R}$, <u>majorant</u> de $A$ si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

∘ $m \in \mathbb{R}$, <u>minorant</u> de $A$ si $\forall x \in A,\ x \geq m$.

(D) ∘ $M$ est le maximum de $A$ ssi
- $M$ majorant de $A$.
- $M \in A$.

∘ $m$ est le minimum de $A$ ssi
- $m$ minorant de $A$
- $m \in A$.

DÉMO | 3

(R9) 3 cas $\exists$ max & min :

- $A$ est finie ($A = \{a, \dots, a_n\}$)
- $A$ est segment ($\max [a, b] = b$, $\min [a, b] = a$)
- $A = \{f(x), x \in I\}$ où $I$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $f$ est continue sur $I$.

(D) ∘ Borne supérieure : $\sup A$
- $\exists$ majorant
- $\exists$ + petit majorant

∘ Borne inférieure : $\inf A$
- $\exists$ minorant
- $\exists$ + grand minorant

(P) Caractérisa° Borne Supérieure : CBS

(i) si $x \in A$ alors $x \leq \sup A$. majorant

(ii) $\forall y < \sup A$, $\exists x \in A$, $y < x$. + petit majorants

(P) Caractérisa° Séquentielle Borne Supérieure : CSBS

(i) $\sup A$ est un majorant de $A$.

(ii) $\exists$ suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élts de $A$ q CV vers $\sup A$.

(P) Caractérisa° Borne Inférieure : CBI

(i) si $x \in A$ alors $x \geq \inf A$. minorant

(ii) $\forall y > \inf A$, $\exists x \in A$, $y > x$. + grd minorants

(P) Caractérisa° Séquentielle Borne Inférieure : DÉMO | 4

(i) $\inf A$ est un minorant de $A$

(ii) $\exists$ suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élts de $A$ q CV vers $\inf A$.

DÉMO | 5

Ⓟ $\mathbb{E}(x) \leq x < \mathbb{E}(x) + 1$

$\exists$ uniq entier ($\mathbb{Z}$) tq ↑

$\boxed{\text{DM-7}}$

Ⓟ $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

# P4 Densité de $\mathbb{Q}$ ds $\mathbb{R}$

## 4.1. Intervalle

Ⓓ Intervalle ds $\mathbb{R}$ est un sous-ens $I$ de $\mathbb{R}$ :

$\forall a, b \in I, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; (a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

(TH) Intervalles de $\mathbb{R}$ st exact$^t$ ens suiv$^{ts}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$\emptyset$ ; $[a, b]$ ; $]a, b]$ ; $[a, b[$ ; $]a, b[$ ; $]a, +\infty[$ ;
$[a, +\infty[$ ; $]-\infty, b[$ ; $]-\infty, b]$ ; $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{DM-8}}$

(en particulier $I$ est minorée ou non & est majorée ou non)

## 4.2. Densité

(TH) $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$ : tt intervalle ouvert (non-vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.

$\boxed{\text{DM-9}}$

( De même $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$ )

Rq : $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas (4) ppté de borne supérieure

# Ch 2 : Les suites

## P1 Définitions

(D) suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(D) $(u_n)$ est majorée / minorée / bornée ssi la partie $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une pie maj/min/bn de $\mathbb{R}$.

## Limites

(D) $(u_n)$ CV vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\text{précis}} \underbrace{\exists \mathcal{N} \in \mathbb{N},}_{\text{rang}} \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},}_{\text{apcr}} |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

(D) 1) Tend vers $+\infty$ :

$\forall A > 0, \exists \mathcal{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$.

2) Tend vers $-\infty$ :

$\forall A > 0, \exists \mathcal{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$.

(P) Si une suite est CV sa lim est unique. $\boxed{\text{DM. 1}}$

(P) (i) $\lim u_n = \ell \iff \lim (u_n - \ell) = 0 \iff \lim |u_n - \ell| = 0$

(ii) $\lim u_n = \ell \Rightarrow \lim |u_n| = |\ell|$ $\boxed{\text{DM. 2}}$

(P) Gpe Limites

(i) $\lambda \ell$ ✓

(ii) $\ell . \ell'$ ✓

(iii) $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$ $\boxed{\text{DM. 3}}$

(1) $\ell \in \mathbb{R}^*$.

(P) Tte suite convergente est bornée. DM 4

(P) (i) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow \lim U_n \leq \lim V_n$

(ii) $\lim U_n = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, V_n \geq U_n \Rightarrow \lim V_n = +\infty$ DM 5

(iii) $\lim U_n = \ell = \lim W_n \Rightarrow \lim V_n = \ell$ TD6

DM 6

(TH) $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < \ell < 1$ alors $\lim U_n = 0$.

(Cor) Si $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell \Rightarrow \lim U_n = 0$ & $|\ell| < 1$.

(P) $U_n = \frac{E(a \cdot 10^n)}{10^n}$ approx n b. décimx.

(TH) Toute suite ↗ & majorée est CV.

(TH) Toute suite ↘ & minorée est CV. DM 7

(TH) Toute suite ↗ & non-majorée $\longrightarrow +\infty$.

(D) $(U_n)$ & $(V_n)$ adjacentes ssi $U_n$ ↗, $V_n$ ↘, $\lim U_n - V_n = 0$

(L) Tte suite ↘ & CV vers 0 est POSITIVE. DM 8

(TH) Si $(U_n)$ & $(V_n)$ adjacentes alors CV vers m̂ lim.

DM 9

NB : $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ : $S^T$ ↗

suite extraite $(U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$



(P) Si $\lim U_n = \ell \Rightarrow \forall (U_{\varphi(n)}) \Rightarrow \lim U_{\varphi(n)} = \ell$

DM 10

(Coroll) • Si $(U_{\varphi(n)})$ DV

• Si 2 $(U_{\varphi(n)})$ CV vers lim distinctes $\Rightarrow U_n$ DV

(P) Si $(U_n)$, suite tq $(U_{2n})$ & $(U_{2n+1})$ CV vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors on obtient $\lim U_n = \ell$.

DM 11

(TH Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite CV.

DM 12

# C3 : Arithmétique

## Divisibilité & pgcd

(D) $b \mid a$ si $\exists q \in \mathbb{Z} \mid a = b.q$.

→ $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \mid 0$ et $1 \mid a$ ‖ $a \mid b$ & $b \mid a \Rightarrow b = \pm a$

→ Si $0 \mid a$ alors $a = 0$ ‖ $a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid \lambda b + \mu c$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

→ Si $b \mid a$ & $a \neq 0$ alors $|b| \leqslant |a|$.

TH : DE $\exists q, r \in \mathbb{Z}$, $a = bq + r$ & $0 \leqslant r < b$.
$a \in \mathbb{Z}$
$b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{DM 1}}$

(D) $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 0\}$, le + grd entier q ÷ à la fois a & b : pgcd.

(D) $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow$ a & b st 1ᵉˢ ↔ x.

Lemme $a \wedge b = b \wedge r$.

$\boxed{\text{DM 2}}$

T Bézout $au + bv = a \wedge b$ (u, v ne st pas uniqs)

Coroll^R si $d \mid a$ & $d \mid b$ alors $d \mid a \wedge b$

$\boxed{\text{DM 3}}$

Coroll^R 2 $au + bv = 1$ : premiers ↔ x.

3 : Lemme Gauss si $a \mid bc$ & $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \mid c$. $\boxed{\text{DM 4}}$

$(a,b)\neq(0,0)$ $\in \mathbb{Z}$

Ⓟ $d = a\wedge b \Leftrightarrow a = da'$, $b = db'$ et $a'\wedge b' = 1$ **DM 5**

Ⓟ Homogénéité pgcd : $ka \wedge kb = |k| . a\wedge b$ **DM 6**

Ⓟ $ax+by=c$, $d = a\wedge b$ ; $a'\wedge b' = 1$ | $a = da'$ & $b = db'$

1) (E) a solu°s si $d | c$.

et $k$ parcourant $\mathbb{Z}$

2) si $d | c$, $\exists$ $\infty$té solu°s entières, $(x,y) = (x_0 - b'k, y_0 + a'k)$ **DM 7**

Ⓓ ppcm (a, b) plus petit commun multiple.
est + ptt entier divisible par a & b.

Ⓟ $(a\wedge b)(a \vee b) = |a|.|b|$ **DM 8**

Ⓟ si $a|c$ & $b|c$ alors ($\Leftrightarrow$) $a\vee b | c$. **DM 9**

Ⓓ Nbr premier p est un entier $\geq 2$ dont les sls diviseurs positifs st 1 et p. (1 n'est pas premier)

Ⓛ Tt entier $n \geq 2$ admt un ÷eur qq nbr premier **DM 10**

Ⓟ $\exists$ $\infty$té nbrs premiers. **DM 11**

L : Lemme Euclide : Soit p : nbr premier. Si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$. **DM 12**

Ⓟ Si p est nbr premier & $a \in \mathbb{Z}$, alors soit $p|a$ soit p & a st premiers entre eux. **DM 13**

Th $n = p_1^{a_1} \times \dots\dots \times p_r^{a_r}$.

Decomposi° fact^rs premiers ⊕ ,

@ $504 = 2^3\times3^2\times7^1$ & $504 = 2^3 \times 3^2 \times 5^0\times 7^1$

$300 = 2^2\times3^1\times5^2\times7^0$

plus petits exposants : $504\wedge 300 = 2^2\times3^1\times5^0\times7^0 = 12$

plus grds exposants : $504\vee 300 = 2^3\times3^2\times5^2\times7^1 = 12\,600$.

Ⓟ $\begin{cases} a = p_1^{\alpha_1}\times\dots\times p_k^{\alpha_k} \\ b = p_1^{\beta_1}\times\dots\times p_k^{\beta_k}\end{cases}$

1) $a|b \Leftrightarrow \forall\, 1\leq i\leq k$ ; $\alpha_i \leq \beta_i$

$\Rightarrow$ 2) $a\wedge b = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\times\dots\times p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$

3) $a\vee b = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\times\dots\times p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$

## Congruences

Ⓓ $m\geq 2$, $a\equiv b\,[m] \Leftrightarrow m | b-a$
ou $\exists k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$, $a = b + km$.

Ⓟ Rela° "congru modulo m" : rela° équivalence.

- Réflexivité : $a\equiv a\,[m]$
- Symétrie : si $a\equiv b\,[m] \Rightarrow b\equiv a\,[m]$
- Transitive : si $a\equiv b\,[m]$ & $b\equiv c\,[m] \Rightarrow a\equiv c\,[m]$.

⇝ on pt additionner / multiplier M à M si m̂ modulo.

⇝ si $a\equiv b\,[m]$ alors $\forall k\geq 0$, $a^k \equiv b^k\,[m]$ **DM 14**

**Equa° Congruence** : soit $a\in\mathbb{Z}^*$, $b\in\mathbb{Z}$, $m\geq 2$ fixés.
on note $d = a\wedge m$ ; $m = dm'$, $a = da' \Rightarrow m'\wedge a' = 1$

(EC) $ax\equiv b\,[m]$ d'inconnue $x\in\mathbb{Z}$.

1) $\exists$ solu°s ssi $d|b$.

2) Dans ce cas, solu°s forme : $x = x_0 + km' \Leftrightarrow x \equiv x_0\,[m']$ **DM 15**

Coro tq $a \wedge m = 1$ alors $\exists$ uniq $a' \in \mathbb{Z}$ modulo $n$ tq

- $aa' \equiv 1 \ [m]$ Inverse de a mod m.

- Si $b \in \mathbb{Z}$, $ax \equiv b [m] \iff x \equiv a'b \ [m]$

## Petit Th Fermat

TH Si p nbr premier, $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \ [p]$

Cor Si $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

Lemme p divise $\binom{p}{k}$, $1 \leq k \leq p-1$ ie $\binom{p}{k} \equiv 0 \ [p]$

DM 16



4.4. Construction $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

D $E$ : ens NV & $\mathcal{R}$ rela° de $E$, $\mathcal{R}$ : rela° équivalence ssi

(i) Réflexive, $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$

(ii) Symétrique, $\forall x, y \in E$, $x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R} x$.

(iii) Transitive, $\forall x, y, z \in E$, $x \mathcal{R} y$ & $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

D Pr chq $x$ de $E$, on appelle classe équivalence de $x$ pr $\mathcal{R}$, on la note $\overline{x}$, l'ens des élts qui st en rela° avec $x$ par $\mathcal{R}$.

ie $\overline{x} = \{ y \in E, \ y \mathcal{R} x \}$.

D $E$ : ens NV, $E_1, \dots, E_m$ sous-ens NV de $E$. $\{E_1, \dots, E_m\}$ est partition de $E$ ssi

(i) $E_1, \dots, E_m$ st 2 à 2 disjoints : $\forall i, j \in [\![1, m]\!]$, $i \neq j$, $E_i \cap E_j \neq \emptyset$

(ii) $E = E_1 \cup E_2 \dots \cup E_m$.

@1

D On appelle l'ens des classes d'équivalence pr la rela° $\mathcal{R}$, l'ensemble quotient de $E$ par $\mathcal{R}$. On le note $E/\mathcal{R}$.

ie $E/\mathcal{R} = \{ \overline{x}, \ x \in E \}$.

TH Si $\mathcal{R}$ est rela° équivalence sur $E$, alors $E/\mathcal{R}$ est partition de $E$.

DM 17

D Soit $n \geq 2$, la congruence mod $n$ est RE sur $\mathbb{Z}$.

On appelle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son ensemble quotient.

TH $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1} \}$ ; ep Card$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

DM 19

ep1

P Tt entier $a \in \mathbb{Z}$ est congru mod $n$ à 1 & 1 seul élt de $[\![0, n-1]\!]$, à savoir le reste de DE de $a$ par $n$.

DM 18