$\boxed{L.6}$ soit $f, g : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U \subset \mathbb{R}^m$.
si f et g st différentiables en a
alors $f+g$ est différentiable en a.
& $(D(f+g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$

(D) $U \subset \mathbb{R}^m$ (ouvert), $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$.

- f est différentiable en a si $\exists$ mat $A \in M(p \times m, \mathbb{R})$ tq :
  - $$\lim_{x \to a} \frac{\| f(x) - f(a) - A(x-a) \|}{\|x-a\|} = 0$$
  - $$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - A.h \|}{\|h\|} = 0$$
- $\to$ si f est différentiable en a, on dit que mat A est la différentielle de f en A, on note $A = (Df)(a)$
  - $$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h \|}{\|h\|} = 0$$

(D) $U \subset \mathbb{R}^m$ (ouvert), $a \in U$, $g : U \to \mathbb{R}^p$
g est différentiable en a si $\exists$ mat $A \in M(p \times m)$ tq

- $$\lim_{h \to 0} \frac{\| g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\|h\|} = 0$$

On souhaite montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| (f+g)(a+h) - (f+g)(a) - (D(f+g))(a).h \|}{\|h\|} = 0$$

• $$\lim_{h\to 0} \frac{\| (f+g)(a+h) - (f+g)(a) - (D(f+g))(a).h \|}{\| h \|} = L$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a) - (Df)(a).h - (Dg)(a).h \|}{\| h \|}$$

• $$L = \lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h + g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\| h \|}$$

$$0 \leq L = \lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h + g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\| h \|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h \|}{\| h \|} + \frac{\| g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\| h \|}$$

Or on sait par hypothèse que $\lim \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h \|}{\| h \|} = \frac{\| g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\| h \|} = 0$.

• Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h + g(a+h) - g(a) - (Dg)(a).h \|}{\| h \|} = 0$

Ainsi on a bien montré que $f+g$ est différentiable en a.