M-31

TD

I. Espaces Vectoriels

I.1. Déterminer si ens $E_1, \dots, E_n$ st SEV de $\mathbb{R}^3$ → $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F$?

I.2. Déterminer base & dimens° EV →
- Th Rg $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
- libre : si coeff st nuls.

I.3. Déterminer F + G, dire si cette somme est DIRECTE & si les ss-espaces F & G st SUPPLÉMENTAIRES. →
- $F + G$, direct si $F \cap G = \{0\}$
- F, G supplémentaires $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = E \end{cases}$.

1 M31- TD.

Espaces Vectoriels

Ex I.1 Déterminer si ens $E_1, \dots, E_m$ st SEV de $\mathbb{R}^3$.

R : Soit E un EV sur un corps $\mathbb{K}$ alors F est SEV si $v_1, v_2 \in F$ & $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F.$$

(F est stable de combinaison linéaire & coefficient)

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y-z = x+y+z = 0\}$

On a $E_1 \subset \mathbb{R}^3$, soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\in E_1$

et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Posons $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et écrivons $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

On a $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 (x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 (x_2, y_2, z_2)$

$v = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$

D'où $\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_2 y_2 + \lambda_1 y_1 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}$

On a $x+y-z = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_2 y_2 + \lambda_1 y_1) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 (\underbrace{x_1+y_1-z_1}_{0 \text{ car } v_1 \in F}) + \lambda_2 (\underbrace{x_2+y_2-z_2}_{0 \text{ car } v_2 \in F})$

• $x+y+z = \lambda_1 (x_1+y_1+z_1) + \lambda_2 (x_2+y_2+z_2)$

Donc $v \in F = 0$ et E_1 est SEV. ① car $v_2 \in F$

Puis $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 - z^2 = 0\}$

On a $E_2 \subset \mathbb{R}^3$, soit $x^2 - z^2 \Leftrightarrow (x-z)(x+z) = 0$

$\Leftrightarrow x - z = 0$ ou $x + z = 0$

On a $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$

$v_1 \in E_2$ $\quad v_2 \in E_2$

On prend $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$.

Puis $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (2,0,0) \notin E_2$.

Donc E_2 n'est pas SEV.

Mnlt : • équa° deg 1 = SEV
• le SEV $\cup$ (ou) SEV est rarement SEV
• f transcendante n'est pas SEV.

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ e^x e^y = 0\}$

n'est pas SEV.

si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, c $\vec{0} = (0,0,0) = (x,y,z)$

$e^x e^y = e^0 . e^0 = 1 \times 1 = 1 \neq 0$.

$\vec{0} \notin E_3$. Donc E_3 n'est pas SEV.

$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ z(x^2+y^2) = 0\}$

n'est pas SEV

→ ou

→ $v_1 = (1,1,0)$ et $v_2 = (0,0,1)$; $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \notin E_4$

I.2 Déterminer base & dimension EV.

> TH (Rang) E, F : EV de dim finie,
> $E \longrightarrow F$ une application linéaire.
> $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+z=0\}$.

Considérons $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto f_1(x,y,z) = x+2y+z$

f_1 est linéaire.

- On a $(x,y,z) \in E_1 \iff f_1(x,y,z) = 0$
$\iff (x,y,z) \in \ker f$.
Donc $E_1 = \ker f$

- $\operatorname{Im} f$ est SEV de $\mathbb{R}$.
Or $0 \neq 4 = f(1,1,1) \in \operatorname{Im} f$; donc $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}$
(ne pt ê q alors car $0 \in \operatorname{Im} f$).

D'après TH Rang :
$\dim \ker f_1 = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im} f) = 3-1 = 2$.
Or $E_1 = \ker f_1$ donc $\dim E_1 = 2$.

Écrivons une base $\{v_1, v_2\}$ de E_1.

$v_1 = (1,0,-1)$
$v_2 = (0,1,-2)$ $\in E_1$.

Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$
alors $(\lambda_1, 0, -\lambda_1) + (0, \lambda_2, -2\lambda_2) = 0$
$(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0$
$= \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

libre si coeff CL st nuls.

$\{v_1, v_2\}$ est une base.

$E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 = \dots = x_n\}$

Considérons $E_2 = \{(t, \dots, t),\ t \in \mathbb{R}\}$
$= \{t(1, \dots, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$

Donc E_2 est SEV de dim 1 généré par le vect $(1, \dots, 1)$.

$E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x-y = x+z-t = 0\}$

f_3 est linéaire.

- Considérons $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

  $f_3 : (x,z) \longmapsto (x, 2x, z, x+z)$

On voit que f_3 est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur son image E_3.

Par THR $\dim E_3 = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f_3$

$= 2 - 0$ car f_3 est injective.

Exibons une base,

$\begin{cases} 2x = y \\ t = x+z \end{cases} \iff (x, 2x, z, x+z)$

$x(1,2,0,1) = v_1$ libre
$+$
$z(0,0,1,1) = v_2$

Dc $E_3 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

$\dim E_3 = 2$.

ou

Il suffit de prendre Image f_3 d'une base de $\mathbb{R}^2$.

$v_1 = (1,0) = (1,2,0,1)$

$v_2 = (0,1) = (0,0,1,1)$.

I.3 Déterminer $F+G$, dire si cette somme est directe & si les s-espaces F & G sont supplémentaires.

R : soit F et G des SEV d'un EV E

Alors $F+G$ est **DIRECT** ssi $F \cap G = \{0\}$.

Alors F, G sont supplémentaires ssi leur somme est directe et $F+G = E$.

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+z = 0\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-2y = x+3z = 0\}$

soit $v = (x,y,z) \in F \cap G$.

On a $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y=0 \\ x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \{ y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

D'où $v = 0$: Donc $F+G$ est direct car $F \cap G = \{0\}$.

- $\dim F = 2$ car $(x,y,z) \in F \iff y = x+z$.

Par conséquent, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$ est une injection qui renvoie $\mathbb{R}^2$ sur F.

$\Rightarrow \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(F)$ est bijective.

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = \dim f(\mathbb{R}^2) = \dim F. \Rightarrow \dim F = 2$.

On a $(x,y,z) \in G \iff \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = -\frac{x}{3} \end{cases}$.

D'où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ -x/3 \end{pmatrix}$ est une injecθ q renvoie $\mathbb{R}$ sur G.

$\Rightarrow \tilde{g} : \mathbb{R} \to g(\mathbb{R})$ est bijective

$\Rightarrow \dim \mathbb{R} = \dim g(\mathbb{R}) = \dim G \Rightarrow \dim G = 1$.

Comme $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ F & G st supplémentaires.

2) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-2z = x-t = 0\}$

$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x+z-t = y-3z = 0\}$

F ∩ G ?

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ x-t = 0 \\ 2x+z-t = 0 \\ y-3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ z = -x \\ y = -3x \end{cases}$$

$F \cap G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ (x,-3x,x,x)\}$

↳ puis cheminement usuel ou bien :

$\Rightarrow f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est une injec$^{\theta}$ de $\mathbb{R}$ sur $F \cap G$.

$\Rightarrow \tilde{j} : \mathbb{R} \longrightarrow j(\mathbb{R})$ est bijective.

$\Rightarrow \dim F \cap G = \dim \mathbb{R} = 1$.

III. Matrices

III.1. Calcul direct produit matriciel

III.2 Trouver matrices q commutent. (AX = XA).

soit $AX = XA$ où $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

soit $A = I + B$; $AX = XA \iff (I+B)X = X(B+I)$

↳ $B = A - I$.

$\iff X + BX = XB + X$

$\iff BX = XB$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$BX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ et $XB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ($

Puis $\begin{cases} \cdot = \cdot \\ \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

De m̂ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, on pose $A = aI + B$.

m̂ démarche :

$BX = \begin{pmatrix} b\gamma & b\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $XB = \begin{pmatrix} 0 & b\alpha \\ 0 & b\gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} b\gamma = 0 \\ b\delta = b\alpha \end{cases}$

Cas $b = 0$: Système est vérifié

Donc $AX = XA$. $\forall X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Cas $b \neq 0$: syst $\iff \begin{cases} \delta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$ Dc $\forall x \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

q vérifie $\begin{cases} \delta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$.

III.3
- Calcul A^2
- vérifier $A^2 = A + 2I_3$
- A inversible ?
- A^{-1} ?

- $A^2 - A = 2I \iff$ Donc A est inversible.

$$A\underbrace{\left[\frac{(A-I)}{2}\right]}_{A^{-1}} = I \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

III.4 Après calcul, on a $AB = AC$ or $B \neq C$.

On raisonne par l'absurde. $\boxed{c?!c}$

Si A est inversible d'inverse A^{-1} alors

$AB = AC$

$\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)B = (A^{-1}.A)C$

$\Rightarrow I.B = I.C$

$\Rightarrow B = C$ $\boxed{?!}$

Donc A n'est pas inversible.

Ex 7 : Permutations.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{=i}$$

Pour une permutation $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_n$, un couple $(\sigma(i), \sigma(j))$ est dite une inversion si $\boxed{i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)}$

1) Pour $i = 1$,

- $(\sigma_1(1), \sigma_1(3))$ car $1 < 3$ et $\begin{cases} \sigma(1) = 4 \\ \sigma(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_1(1) > \sigma_1(3) \\ 4 > 1 \end{matrix}$

- $(\sigma_1(1); \sigma_1(4))$ car $1 < 4$ et $\begin{cases} \sigma_1(1) = 4 \\ \sigma_1(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1(1) > \sigma_1(4) \\ 4 > 2. \end{cases}$

- $(\sigma_1(1), \sigma_1(6))$ car $1 < 6$ et $\begin{cases} \sigma_1(1) = 4 \\ \sigma_1(6) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1(1) > \sigma_1(6) \\ 4 > 3 \end{cases}$

Pour $i = 2$,

- $(\sigma_1(2), \sigma_1(3))$ car $2 < 3$ et $\begin{cases} \sigma_1(2) = 6 \\ \sigma_1(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1(2) > \sigma_1(3) \\ 6 > 1. \end{cases}$

- $(\sigma_1(2), \sigma_1(4))$

- $(\sigma_1(2); \sigma_1(5))$ car $6 > 1, 2, 5, 3$.

- $(\sigma_1(2); \sigma_1(6))$

Pour $i = 3$, il n'y a pas d'inversion car $\sigma_1(3) = 1 < 2, 5, 3$

Pour $i = 4$, ilnyapdic $\sigma_1(4) = 2 < 5, 3$

· Pour $i = 5$,

$(\sigma_1(5) ; \sigma_1(6))$ car $5 < 6$

$\sigma_1(5) = 5 > \sigma_1(6) = 3$

Ccl : On a 8 inversions.

Parité : $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^8 = 1 \Rightarrow$ Paire.

2)
$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
4 & \boxed{6} & 1 & 2 & 5 & \boxed{3} \\
\boxed{4} & 3 & 1 & \boxed{2} & 5 & 6 \\
2 & \boxed{3} & \boxed{1} & 4 & 5 & 6 \\
\boxed{2} & \boxed{1} & 3 & 4 & 5 & 6 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\sigma \\
\tau_{3,6} \\
\tau_{2,4} \\
\tau_{1,3} \\
\tau_{1,2}
\end{array}$$

on a dc $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{3,6} \circ \sigma = Id_{\{1,\dots,6\}}$

d'où $\sigma = \tau_{3,6}^{-1} \circ \tau_{2,4}^{-1} \circ \tau_{1,3}^{-1} \circ \tau_{1,2}^{-1} \circ Id_{\{1,\dots,6\}}$

$\sigma = \tau_{3,6} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$.

3) On écrit σ c pdcasd : pudt cycle disjoint.

$\sigma_1 = (1, 4, 2, 6, 3)\,(5)$

σ_1 est un cycle de longueur 5, un 5-cycle.

4) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Pour $i = 1$, $(\sigma_2(1) ; \sigma_2(3))$

$(\sigma_2(1) ; \sigma_2(4))$

$(\sigma_2(1) ; \sigma_2(5))$ car $\sigma_2(1) = 5 > 1, 2, 3, 4$

$(\sigma_2(1) ; \sigma_2(6))$

Pour $i = 2$, $(\sigma_2(2) ; \sigma_2(3))$

$(\sigma_2(2) ; \sigma_2(4))$

$(\sigma_2(2) ; \sigma_2(5))$ car $\sigma_2(2) = 6 > 1, 2, 3, 4$.

$(\sigma_2(2) ; \sigma_2(6))$

Pour $i = 3$, ilnyapdi car $\sigma_1(3) = 1 < 2, 3, 4$

Pour $i = 4$, $i = 5$, $i = 6$, $\emptyset$ inversion.

Ccl : 8 inversions.

Parité de σ_2 : $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^8 = 1 \Rightarrow$ Paire.

2)
$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
5 & \boxed{6} & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \\
\boxed{5} & 4 & 1 & 2 & \boxed{3} & 6 \\
3 & \boxed{4} & 1 & \boxed{2} & 5 & 6 \\
\boxed{3} & 2 & \boxed{1} & 4 & 5 & 6 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\sigma \\
\tau_{4,6} \\
\tau_{3,5} \\
\tau_{2,4} \\
\tau_{1,3}
\end{array}$$

on a $\tau_{1,3} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{4,6} \circ \sigma = Id_{\{1,\dots,6\}}$

D'où $\sigma = \tau_{4,6}^{-1} \circ \tau_{3,5}^{-1} \circ \tau_{2,4}^{-1} \circ \tau_{1,3}^{-1} \circ Id$

$\Leftrightarrow \sigma = \tau_{4,6} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,3}$

3) σ c pdCASD : $\sigma_2 = (1,5,3) \circ (2,6,4) = (2,6,4) \circ (1,5,3)$

On a le 3-cycle $(1,5,3)$ et le 3-cycle $(2,6,4)$

Ainsi $\varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon((1,5,3)) \times \varepsilon((2,6,4))$

$= (-1)^{3-1} \times (-1)^{3-1} = 1 =$ Paire

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On a
- $1 \to 1$
- $2 \to 4 \to \cancel{2}$
- $3 \to 6 \to 5 \to \cancel{3}$

CASD

$$\sigma_3 = (1) \circ (2,4) \circ (3,6,5)$$

On a $\begin{cases} 2\text{-cycle } (2,4) \\ 3\text{-cycle } (3,6,5) \end{cases}$

$$\cancel{\sigma(\sigma} \quad \varepsilon(\sigma_3) = \varepsilon((2,4)) \times \varepsilon((3,6,5))$$
$$= (-1)^{2-1} \times (-1)^{3-1} = -1 = \text{Impaire}.$$

Ex 8 : Etude permutat° particulière de $\{1, \dots, n\}$.

Pr $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer signature de $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$
$i \longrightarrow n+1-i$

Déterminer 2 façons $\varepsilon(\sigma)$ dp nb inver° & décompo σ en prod.

R :
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-2) & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le schéma :

$$\begin{array}{ccccccc|l}
1 & 2 & 3 & \cdots & (n-2) & (n-1) & n & \\
\boxed{n} & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & \boxed{1} & \sigma \\
1 & \boxed{(n-1)} & (n-2) & \cdots & 3 & \boxed{2} & n & \tau_{1,n} \\
1 & 2 & \boxed{(n-2)} & \cdots & \boxed{3} & n-1 & n & \tau_{2,(n-1)} \\
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n & \tau_{3,(n-2)}
\end{array}$$

On a donc :

$$\tau_{\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]} \circ \cdots \circ \tau_{3,n-2} \circ \tau_{2,n-1} \circ \tau_{1,n} \circ \sigma = id$$

où $[x]$ est le plus grd entier ne dépassant pas x.

@ $[2020,5] = 2020$, $[-8,45] = -9$.

@ $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$: $\tau_{k,k+1} \circ \cdots \circ \tau_{3,2k-2} \circ \tau_{2,k-1} \circ \tau_{1,2k} \circ \sigma$

@ $n = 2k+1$, $\tau_{k-1,k+1} \circ \cdots \circ \tau_{3,2k-3} \circ \tau_{2,2k-2} \circ \tau_{1,2k-1} \circ \sigma$.

On en déduit que :

$$\tau_{1,n}^{-1} \circ \tau_{2,n-1}^{-1} \circ \tau^{-1}_{\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]} \circ \tau_{\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]} \circ \cdots \tau_{2,n-1} \circ \tau_{1,n} \circ \sigma$$

$$\sigma = \tau_{1,n}^{-1} \circ \tau_{2,n-1} \circ \cdots \circ \tau^{-1}_{\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

$$\Rightarrow \sigma = \tau_{1,n}^{-1} \circ \tau_{2,n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \tau^{-1}_{\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#\text{transpositions}}$$
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{[n/2]}$$

$\boxed{2^\circ \text{ Méthode}}$.

$\boxed{1^\circ \text{ M}}$ $\quad \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

qd $n = 2k$: $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ d'après 2° $\boxed{M}$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k(2k-1)} = (-1)^k$ car $(-1)^{2k-1} = 1$.

qd $n = 2k-1$: $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(2k-1)(k-1)}$

Fiche n°0 : Matrices de passage & FF chgt base.

Ex 1 : soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$, la base canoniq de $\mathbb{K}^2$,
ie $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $u=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

① Vérifier $\mathcal{B}'=(u,v)$ est une base de $\mathbb{K}^2$ et écrire la matrice de passage $P=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B}'$ est libre. soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\lambda u+\mu v=\vec{0}$.

$\Rightarrow \lambda\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2\lambda+3\mu=0\\4\lambda-\mu=0\end{cases} \Rightarrow \{\lambda=\mu=0.$

Comme dim $\mathbb{K}^2=2$ et $\mathcal{B}'$ est une famille libre à 2 élts, $\mathcal{B}'$ est une $\boxed{\text{base}}$.

$$P=P_{\mathcal{B}=(e_1,e_2)}^{\mathcal{B}'=(u,v)} \quad \begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline e_1 & & \\ e_2 & & \end{array}\!\!\!\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix} \quad ; \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}=P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

②

Puis P^{-1}, $PP^{-1}=Id_2$, $?X=Id_2$ ou

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det\begin{pmatrix}2&3\\4&-1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-1&-3\\-4&2\end{pmatrix}\frac{-1}{14}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&3\\4&-2\end{pmatrix}$$

Astuce ${}^t\left((-1)^{i+j}A_{ij}\right)$ où A_{ij} est det (effacer i ligne j colonne)

③ Que vaut la matrice du vecteur $\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ ds base $\mathcal{B}'=(u,v)$.

satisfaire $\boxed{X=PX'}$

$X'=P^{-1}.P.X=P^{-1}X$

$X'=P^{-1}X$

$$\Rightarrow X'=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&3\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{15}{7}\end{pmatrix}$$

Ex 2 : Recherche base particulière ds un espace de polynômes.

$\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de deg au plus 2 à coeff ds $\mathbb{R}$.

Mq $\exists$ uniq base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$,
$\forall P\in\mathbb{R}_2[X]$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P)=\begin{pmatrix}P(-1)\\P(0)\\P(1)\end{pmatrix}$.

Cherchons une base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

dim $\mathbb{R}_2[X]=3$ car une bs cnq de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1,X,X^2)$

$\forall P=aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P)=\begin{pmatrix}P(-1)\\P(0)\\P(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b+c\\c\\a+b+c\end{pmatrix}$$

comme $P=(a-b+c)e_1+c.e_2+(a+b+c)e_3$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow aX^2+bX+c=(a-b+c)e_1+c.e_2+(a+b+c)e_3$.

$\Leftrightarrow aX^2+bX+c=a(e_1+e_3)+b(-e_1+e_3)+c(e_1+e_2+e_3)$

$\Leftrightarrow a\left[X^2-(e_1+e_3)\right]+b\left[X-(-e_1+e_3)\right]+c\left[1-(e_1+e_2+e_3)\right]=0$

Pour $a=1$, $b=c=0$ $\Rightarrow$ $x^2-(e_1+e_3)=0$.
Pour $a=c=0$, $b=1$ $\Rightarrow$ $x-(e_1+e_3)=0$
Pour $a=b=0$, $c=1$ $\Rightarrow$ $1-(e_1+e_2+e_3)=0$.

$$\text{Dc}\begin{cases}e_1+e_3=x^2\\-e_1+e_3=x\\e_1+e_2+e_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_3=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\\e_1=x^2-e_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\\e_2=1-e_1-e_3=1-x^2.\end{cases}\in\mathbb{R}_2[X]$$

On trouve une unique solution :
$e_1(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$, $e_2(x)=1-x^2$, $e_3(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$.

VI. Déterminants, rangs

VI.3. Calculer $\forall\, t \in \mathbb{R}$, le rang des matrices.

R1 (Rang d'une matrice)

Le rang d'une applicatO linéaire $f : E \longrightarrow F$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E, F st $\mathbb{K}$(ev),

$$\text{Rang } f = \dim \operatorname{Im} f.$$

TH (Du rang) :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

→ Fixons une base $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E. (resp $\mathcal{B}_F$ de F),

soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, $\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

$\varphi \longleftrightarrow A$ est bijective. Rang $A :=$ Rang φ.

Coro Le rang d'une matrice est l'ordre maximum d'un déterminant extrait NON-NUL de cette matrice.

Coro Rang A = Rang A^t.

R4 : si une ligne/colonne est CL des autres alors le $\det(\text{matrice}) = 0$.

On a $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ → comme $L_1 = L_3$ dans M_t alors $\det(M_t) = 0$.

D'où $\text{rg } M_t < 3$. où $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$.

Observons que $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une s-matrice extraite d'ordre 2. Son det est $t-1$. Par conséquent, on considère 2 cas :

<u>Cas $t \neq 1$</u> : $\det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = t - 1 \neq 0 \Rightarrow$ d'où $\text{rg } M_t = 2$.

<u>Cas $t = 1$</u> : • $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, toute s-matrice extraite d'ordre 2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son det $= 0$. $\Rightarrow$ d'où $\text{rg } M_t < 2$.

• (1) est s-matrice extraite d'ordre 1 et son det $= 1$. Donc $\text{rg } M_t = 1$.

<u>Ccl</u> : $\text{rg } M_t = \begin{cases} 2 & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$

Coro Si toute matrice extraite d'ordre x est de det nul alors rang $< x$.

(ii) $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Pour déterminer rang N_t, on calcule son det, on développe selon sa 1° colonne,

$$\det N(t) = (-1)^{\overset{\text{ligne + colonne}}{1+1}} \times 1 \times \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(t-1) + t(1-t^2) = (t-1)\left[2 - t(t+1)\right]$$

$$= (t-1)\left[2 - t - t^2\right] = -(t-1)\left[t^2 + t - 2\right]$$

$$= -(t-1)(t+2)(t-1) = -(t-1)^2(t+2)$$

Donc $\det N_t = 0 \iff t \in \{1, -2\}$.

- Cas $t \notin \{1, -2\}$:

  Ds ce cas $\det(N_t) \neq 0$ et donc $\operatorname{rg} N_t = 3$.

- Cas $t = 1$:

  Comme $\det N_t = 0$, rang $N_t < 3$.

  Ds ce cas $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Toute ss-matrice extraite d'ordre 2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et leur det sont tous nuls. $\Rightarrow$ d'où $\operatorname{rg} N_t < 2$.

  (1) est une sous-matrice d'ordre 1 et son det $= 1 \neq 0$.

  Donc $\operatorname{rg} N_1 = 1$.

- Cas $t = -2$: comme $N_{-2} = 0$, $\operatorname{rg} N_{-2} < 3$. Dans ce cas $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est ss matrice extraite d'ordre 2 et son det $= -3 \neq 0 \Rightarrow$ d'où $\operatorname{rg} N_{-2} = 2$.

Ccl $\operatorname{rg} N_t = \begin{cases} 3 & \text{si } t \notin \{1, -2\} \\ 1 & \text{si } t = 1 \\ 2 & \text{si } t = -2. \end{cases}$

VI. 4. (i) Calcul déterminant

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ (Vandermond)

On calcule $\det(V_3)$ en dev % 1° col :

$$\det V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \times \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \cancel{+ (-1)^{1+2} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}} \cancel{+ (-1)^{1+3} \cdot x^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y-x & z-x \end{vmatrix}}$$

$$\det V_3 = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}$$

$$\det V_3 = (y-x) \begin{vmatrix} 1 & z-x \\ y+x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$\det V_3 = (y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$

$$\det V_3 = (y-x)(z-x)(z-y)$$

V_3 est inversible ssi $\det(V_3) \neq 0$ ssi $x \neq y \neq z \neq x$.

VI.5. La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?

soit $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre $\iff \dim \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$

$\iff \mathrm{rang}(v_1, v_2, v_3) = 3$.

$\iff \mathrm{rang}\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix} = 3$

$\iff \det\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix} \neq 0$. dev selon 3° l

$\det(B) = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}$

$\det(B) = -(-1) + 5 = 6 \neq 0$.

Donc la famille v_1, v_2, v_3 est libre.

VI.6 Calcul déterminant

$$C = \begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix} \overset{L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$$

$$C = (a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\c&a-c&b-c\\b&c-b&a-b\end{vmatrix}$$

$$\det(C) = (a+b+c)\,(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix}a-c&b-c\\c-b&a-b\end{vmatrix}$$

$$\det(C) = (a+b+c)\left[(a-c)(a-b) - (b-c)(c-b)\right]$$

$= (a+b+c)\left((a-c)(a-b) + (b-c)^2\right) = (a+b+c)(a^2 - ab - ac + bc + b^2 - 2bc + c^2)$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

VI.7 Calculer le det.

$$T = \begin{vmatrix}1&\sin x&\cos x\\1&\sin y&\cos y\\1&\sin z&\cos z\end{vmatrix}$$

On développe selon la 1°,

$$\det(T) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix}\sin y&\cos y\\\sin z&\cos z\end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix}\sin x&\cos x\\\sin z&\cos z\end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix}\sin x&\cos x\\\sin y&\cos y\end{vmatrix}$$

$$\det(T) = (\sin y.\cos z - \sin z.\cos y) - (\sin x.\cos z - \sin z.\cos x)$$
$$+ (\sin x.\cos y - \sin y.\cos x).$$

or $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$.

$$\det(T) = \sin(y-z) + \sin(z-x) + \sin(x-y).$$

VI. 9 Calcul déterminant

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$C_4 \leftarrow C_4 - C_1$ $\begin{vmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\det(M) = (-1)^{1+1} . m \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1 \end{vmatrix}$

$\det(M) = -m \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1 \end{vmatrix}$; $C_3 \leftarrow C_3 - mC_2$,

$\det(M) = -m \times (-1)^{1+2} \times 1 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2m+2 & 1-m^2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2m+2 & 1-m^2 \end{vmatrix}$

$= m\Big(m(1-m^2) - (-1)(2m+2)\Big) = m\left(m - m^3 + 2m + 2\right)$

$= m\left(-m^3 + 3m + 2\right) = -m\left(m^3 - 3m - 2\right) = -m\Big((m+1)(m^2-m-2)\Big)$

$= -m\ (m+1)(m+1)(m-2) = -m(m+1)^2(m-2)$. dc $\det D_m = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,-1,2\}$

Pour déterminer le rang de D_m, on considère 4 cas :

cas I : $m \notin \{0,-1,2\}$.

Ds ce cas $\det D_m = 0 \Rightarrow$ rang $D_m = 4$.

cas II : $m = 0$, $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, comme $\det D_0 = 0$, rang $D_0 < 4$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est une sous-matrice extraite d'ordre 3 et son det $= 2 = (-1)^{1+3} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Donc rang $D_0 = 3$.

Cas III : $m = -1$, comme $\det D_{-1} = 0$, rang $D_{-1} < 4$.

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

msе : $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est sme d'ordre 3. et son det vaut $(-1)^{3+1} (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Donc rang $D_{-1} = 3$.

cas IV : $m = 2$, $D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Comme $\det D_2 = 0$, rang $D_2 < 4$.

On va prendre sme d'ordre 3.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ et son det $= 8 \neq 0$.

Donc rang $D_2 = 3$.

Cl rang $D_m = \begin{cases} 4 & \text{si } \notin \{0,-1,2\} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ex 4 : det pour savoir si matrice inversible.

1) Calculer pour $t \in \mathbb{C}$, le det.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\det(A_t)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 1-t \\ t & 1-t & 1-t^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} t-1 & 1-t \\ 1-t & 1-t^2 \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t+2)$$

• A_t est inversible $\iff \det A_t \neq 0$
$\iff -(t-1)^2(t+2) \neq 0$
$\iff t \notin \{1, -2\}$.

• Lorsque A_t n'est pas inversible, déterminer une base de $\operatorname{Ker} A_t$.

Cas $t=1$

Th Rang : $\dim \ker f\, A_t = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang } A_t$
$= 3 - rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le rang de $A_t < 2$ car $\forall$ ssme d'ordre 2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, leur det est nul.
Le rang de $A_t = 1$ car $\det(1) = 1 \neq 0$.

Dc $\dim \operatorname{Ker} A_t = 3 - 1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A_t \iff A_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y + z = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} A_1$ admet une base.

B @ : $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$.

• Cas $t=-2$ D'après Th du rang : $\dim \ker A_{-2} = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang } A_{-2}$
$= 3 - rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On prd ssme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, son det vaut $-3 \neq 0$,
dc le rang A_{-2} est 2. (car ordre ssme est de 2).

$\dim \ker A_{-2} = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang } A_{-2} = 3 - 2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A_{-2} \iff A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ PDG. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff \{x = y = z$

Donc $\operatorname{Ker} A_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$\operatorname{Ker} A_{-2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$ est une base de $\operatorname{Ker} A_{-2} \}$.

Ex 1 : Fiche n°2 Vrai ou Faux : pptés sur déterminant.

a) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(A+B) \overset{?}{=} \det(A) + \det(B)$

Vrai pour $n = 1$ car $A, B \in \mathcal{M}_{1\times1}(\mathbb{R})$, $A = (a)$, $B = (b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $\det(A) = a$, $\det(B) = b$, $\det(A+B) = \det(a+b) = a+b$.

Pour $n > 1$, cherchons ca s/ la forme : $\boxed{\text{FAUX}}$

$A = \lambda . I$ et $B = (1-\lambda) I$.

$$\det(A) = \det(\lambda . I) = \det\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n.$$

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^n$$

$$\det(A+B) = \det(\lambda I + (1-\lambda) I = \det(I(\lambda + 1 - \lambda)) = \det(I) = 1$$

Pour trouver ca, il suffit de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^n + (1-\lambda)^n \neq 1$.

b) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}^2)$, $\det(A+B) = \det(A) . \det(B)$

Cherchons ca : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A+B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{FAUX}}$

$\Delta_A = 1$, $\Delta_B = 4$, $\Delta_{A+B} = 8$, $\Delta_A \times \Delta_B = 4 \Rightarrow \Delta_{A+B} \neq \Delta_A \times \Delta_B$.

c) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha . A) \overset{?}{=} \alpha . \det A$? $\boxed{\text{FAUX}}$

D'après le cours, $\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_k \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \alpha . \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$

et $\det(C_1 \cdots \alpha C_k \cdots C_n) = \alpha . \det(C_1 \cdots C_k \cdots C_n)$.

Le déterminant dépend de manière multilinéaire des lignes et des colonnes.

Ecrivons $A = (C_1 \cdots C_n)$.

Comme $\alpha A = (\alpha C_1 \cdots \alpha C_k \cdots \alpha C_n$; la multilinéarité du det implique que :

$$\det(\alpha A) = \alpha . \det(C_1, \alpha C_2, \dots \alpha C_n)$$
$$= \alpha \times \alpha . \det(C_1, C_2, \dots, \alpha C_n)$$
$$= \underbrace{\alpha \times \dots \times \alpha}_{n \text{ fois}} . \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$$
$$= \alpha^n . (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Donc $\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n . \det(A)}$

Par conség^t, $\det(\alpha A) = \alpha . \det(A)$ vrai que pour $n = 1$.

d) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tq A et B soient semblables, on a $\det(A) = \det(B)$ $\boxed{\text{VRAI}}$

Rq : Matrices semblables : m̂ trace, m̂ $\chi_A(x)$, m̂ det.

$A \sim B$, on a $\det(A) = \det(B)$, comme $A \sim B$, $\exists\ C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tq $A = C . B . C^{-1}$.

Donc $\det(A) = \det(C . B . C^{-1}) = \det(C) . \det(B) . \det(C^{-1})$

$\det(A) = \det(B) . \det(C . C^{-1}) = \det(B) . \det(I)$

$\det(A) = \det(B)$.

Ex 2 : Déterminant de matrices particulières

1) Que pt-on dire (det) matrice nilpotente, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tq $A^N = 0$ pr certain $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice nilpotente. Il existe dc $N \in \mathbb{N}^*$ tq $A^N = 0$. On a $0 = \det(0) = \det(A^N) = \det(\underbrace{A \times \dots \times A}_{N \text{ fois}})$

$= \det(A)^N$.

$\Rightarrow 0 = (\det A)^N \Rightarrow \det A = 0$.

Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

2) Que pt-on dire matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $A^2 = I_n$.

$1 = \det(I_n) = \det(A^2) = (\det A)^2$

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$.

3) Que pt-on dire matrice antisymétriq $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ie ${}^tA = -A$) lorsq n impair.

D'une part, $\det({}^tA) = \det(A)$ et d'autre part, en utilisant l'hypothèse ${}^tA = -A$, on a :

$\det({}^tA) = \det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \cdot \det(A)$

$= -\det(A)$ car n impair.

On obtient dc $\det(A) = \det({}^tA) = -\det(A)$.

$\Rightarrow 2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

Ex 5 : Déterminant d'une matrice circulante.

On pose $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$, on R! $\begin{cases} j^3 = 1 \\ 1 + j + j^2 = 0 \end{cases}$.

1) Mq vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une BASE de $\mathbb{C}^3$.

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Vecteurs forment une base} \iff \det(u_1, u_2, u_3) \neq 0.}$

$\det(u_1, u_2, u_3) \neq 0 \iff \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^3 \end{pmatrix} \neq 0$.

On développe selon 1° colonne pr calculer le déterminant,

$D = \det\begin{pmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & 0 \end{pmatrix} = (j-1)\begin{pmatrix} 1 & j+1 \\ j^2-1 & 0 \end{pmatrix}$ ⚠ on factorise 1° ligne.

$D = -(j-1)(j^2-1)(j+1) = -(j-1)(j-1)(j+1)(j+1)$

$D = -(j-1)^2(j+1)^2 = -(j-1)^2(j+1)^2$.

Or $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

On voit que $j \neq \pm 1$.

Par conséqt, $\det(u_1, u_2, u_3) \neq 0$ et $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base.

2) Soit la matrice circulante, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$,

calculer $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}$

Comme A est la matrice de f sous la base canoniq : $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, on a :

$f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$, $f(e_3) = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que $f(u_1) = f(1\times e_1 + 1\times e_2 + 1\times e_3)$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c+a \\ c+a+b \end{pmatrix}$$

$$f(u_2) = f(1.e_1 + je_2 + j^2 e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} + j^2\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+jb+j^2c \\ b+jc+j^2a \\ c+ja+j^2b \end{pmatrix}$$

$$f(u_3) = f(1e_1 + j^2e_2 + j^3e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + j^2\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j^2b+c \\ b+j^2c+a \\ c+j^2a+b \end{pmatrix}$$

car $j^3 = 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

Ecrivons f sous la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

On a $f(u_1) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c+a \\ c+a+b \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b+c)\,u_1$

$$f(u_2) = \begin{pmatrix} a+jb+j^2c \\ b+jc+j^2a \\ c+ja+j^2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} + bj\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} + cj^2\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

car $j^4 = j$

$$= (a+bj+cj^2)\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = (a+bj+cj^2)\,u_3$$

$$f(u_3) = \begin{pmatrix} a+j^2b+c \\ b+j^2c+a \\ c+j^2a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+bj^2+cj)\,u_2$$

Donc la matrice de f sous la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ensuite, en utilisant la base canoniq, $\det f = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$,

on développe selon la 1° ligne,

$$\det f = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix}$$

$$= a(cb - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ba - c^2)$$

$$= acb - a^3 - b^3 + bac + cba - c^3$$

$$= \underline{3abc - a^3 - b^3 - c^3.} = \det f.$$

En utilisant la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, on a :

$$\det f = \det\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj^2+cj & 0 \\ 0 & 0 & a+bj+cj^2 \end{pmatrix},$$

$$\det f = (a+b+c)(a+bj^2+cj)(a+bj+cj^2)$$

Donc $a^3+b^3+c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj^2+cj)(a+bj+cj^2)$

Ex VI. 10 soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tq $a \neq b$,

$$B_m = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

Mq $\forall m \geq 4$, $B_m = (a+b) B_{m-1} - ab\, B_{m-2}$

BROUILLON

$B_1 = \det(a+b) = a+b$.

$B_2 = \det\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$

$B_3 = \det\begin{pmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix} \underset{1^\circ\text{ ligne}}{=} (a+b)\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

$= (a+b) B_2 - ab(a+b)$.

$B_4 = \det\begin{pmatrix} a+b & a & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 \\ 0 & b & a+b & a \\ 0 & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \underset{1^\circ\text{ ligne}}{=} (a+b)\det\begin{pmatrix} a+b & a & 0 \\ 0 & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix}$

$- a.\det\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix}$.

$B_4 = (a+b) B_3 - ab.\det\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = (a+b) B_3 - ab\, B_2$

Le cas général $m \geq 4$

$$B_m = \det\begin{pmatrix} a+b & a & & & & 0 \\ b & a+b & a & & & \\ 0 & b & a+b & a & & \\ & & b & a+b & a & \\ & & & b & a+b & a \\ 0 & & & & b & a+b \end{pmatrix}_{m \times m}$$, on dev selon 1° ligne

$B_m = (-1)^{1+1}.(a+b) B_{m-1} + (-1)^{1+2}. a \det\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & a & 0 & & 0 \\ \vdots & b & a+b & a & & 0 \\ \vdots & \vdots & b & a+b & & a \\ 0 & \vdots & 0 & & b & a+b \end{pmatrix}_{(m-1)(m-1)}$

Dev selon 1° colonne donne que :

$B_m = (a+b) B_{m-1} - ab.\det\begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{pmatrix}_{(m-2)(m-2)}$

$B_m = (a+b) B_{m-1} - ab.\, B_{m-2}$.

Donc $\forall m \geq 4$, $B_m = (a+b) B_{m-1} - ab\, B_{m-2}$.

Mq $\forall n \geq 2$, $B_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ $(*)$.

Pour $n=2$, $B_2 = \det\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = (a+b)^2 - ab$

$$B_2 = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a-b}.$$

$(*)$ est vraie pr $n=2$.

Supposons $(*)$ vraie pour $n \geq 3$. Mq la pour $n+1$, comme $n+1 \geq 4$, la formule de récurrence dit que

$B_{n+1} = (a+b)B_n - ab\, B_{n-1}$.

Or d'après HDR, $(*)$ pour n et $n-1$, on a :

$$B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, \quad B_{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

Il s'ensuit que $B_{n+1} = (a+b)\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - ab\dfrac{a^n - b^n}{a-b}$

$$B_{n+1} = \frac{1}{a-b}\left[(a+b)(a^{n+1} - b^{n+1}) - ab(a^n - b^n)\right]$$

$$B_{n+1} = \frac{1}{a-b}\left[a^{n+2} \cancel{- ab^{n+1}} \cancel{+ b.a^{n+1}} - b^{n+2} \cancel{- a^{n+1}b} \cancel{+ ab^{n+1}}\right]$$

$$B_{n+1} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}$$

La formule $(*)$ est vraie aussi pour $n+1$.

$(*)$ est vraie pour tt $n \geq 4$.

VII. Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisat°

VII.1 : soit E, un $\mathbb{K}$ ev de dim finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Mq si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$.

AA ① $\lambda \in \mathbb{R}$, est une valeur propre de A si $\exists$ un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$, $Av = \lambda v$ où v est vecteur propre.

Soit A (resp B), la matrice de f (resp g) par rapport à une base fixée de E. La matrice de $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) dans cette base est donc $B.A$ (resp AB).

Seulement 2 cas :

B est inversible : comme $BA = B(AB)B^{-1}$.

→ AB et BA st $\boxed{\text{semblables}}$ & dc elles ont le m̂ polyn. caractq.

→ Par conséqt, elles ont les $\boxed{\text{m̂ valeurs propres}}$

⇝ si $Q = BPB^{-1}$ ⇒ $\det(Q - \lambda I) = \det(BPB^{-1} - B(\lambda I)B^{-1})$

$$= \det(B(P - \lambda I)B^{-1})$$
$$= \det B . \det(P - \lambda I) . \det B^{-1}$$
$$= \det(P - \lambda I).$$

B n'est pas inversible :

On utilise suite $(B_N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, B_N est inversible et $B_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} B$ ds le sens où ts les coeff de B_N tendent vers ceux de B qd $N \to +\infty$.

Par exemple : $B_N = B + \frac{I}{N}$, pour $N \geqslant N_0$,

N_0 est un nombre assez grand. En effet $B_N . N = 0$

$\Leftrightarrow B v \neq \frac{v}{N} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{N}$ est une valeur propre de B.

On $\exists N_0$ assez grand tq $\forall N \geqslant N_0$,

$-\frac{1}{N}$ n'est pas une valeur propre de B.

B_N n'est pas inversible pour $N \geqslant N_0$.

$\det(A . B_N - \lambda I) = \det(B_N . A - \lambda I)$.

En faisant $N \to +\infty$: $\det(AB - \lambda I) = \det(B.A - \lambda I)$.

VII . 2

$$J = \begin{array}{c} \begin{matrix} Je_1 & Je_2 \cdots & Je_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$, trouver valeurs propres & sous-espaces propres associés.

soit λ une valeur propre de J, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canoniq de $\mathbb{R}^n$. On a $J . \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et

$$J(e_1) = J(e_2) = \dots = J(e_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \operatorname{Img} J = \operatorname{Vect}\{J(e_1), J(e_2), \dots, J(e_n)\}$

$\Rightarrow \operatorname{Img} J = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{Img} J = 1.$

D'après TH rang : $\dim \ker J = \dim$ espace source $- \dim \operatorname{Img} J$

$\dim \ker J = n - 1$

soit λ une valeur propre de J, soit v un vecteur propre associé à λ ; $Jv = \lambda v$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Comme $Jv \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, il en est de m̂ pour λv.

❖ Cas $\lambda \neq 0$: $\lambda v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow v = \frac{\mu}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv = \frac{\mu}{\lambda} J = \frac{\mu}{\lambda}\left(J(e_1) + \dots + J(e_n)\right)$$

$$= \frac{\mu}{\lambda}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{n\mu}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n . \left(\frac{\mu}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= n v.$$

D'où $\boxed{\lambda = n}$ est une valeur propre de J et l'espace propre associé est $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

❖ Cas $\lambda = 0$:

On déduit $Jv = 0v$ que $Jv = 0$.

Ecrivons $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $Jv = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ est dans le hyperplan d'équaθ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$

ccl Il n'y a que 2 valeurs propres, à savoir $\boxed{n \text{ et } 0.}$

L'espace propre pour $\begin{cases} \lambda = n \text{ est } \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 0 \text{ est hyperplan } x_1 + \dots + x_n = 0. \end{cases}$

VII . 3 : soit A, B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AB - BA = A$.

But : mq A est nilpotente, ie $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0$.

On note E, l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'applicaθ :

$$\Psi : E \longrightarrow E$$
$$M \longrightarrow MB - BM.$$

1) Mq Ψ est linéaire de E dans E.

soit $M_1, M_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$\Psi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) B - B(\lambda_2 M_2 + \lambda_1 M_1)$

$= (\lambda_1 M_1) B - B(\lambda_1 M_1) + (\lambda_2 M_2) B - B(\lambda_2 M_2)$

$= \Psi(\lambda_1 M_1) + \Psi(\lambda_2 M_2)$.

Donc Ψ est linéaire de E dans E.

2) Mq par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \Psi(A^k) = k.A^k$ ⊛

⊛ $k=0$: $\Psi(A^0) = \Psi(I) = IB - BI = B - B = 0 = 0.A^0$.

⊛ Supposons ⊛ vraie pour k, on veut la prouver pour $k+1$.

Écrivons $\Psi(A^{k+1}) = A^{k+1}.B - BA^{k+1}$

$= A.A^k.B - A.B.A^k + A.B.A^k - B.A^{k+1}$.

$= A(A^k B - BA^k) + ABA^k - B.A.A^k$

$= A.\Psi(A^k) + (AB - BA) A^k$

$= A.\Psi(A^k) + A.A^k$ d'après hypo

$= A.k.A^k + A.A^k$ d'après HDR

$= (k+1) A^{k+1}$

3) Valeur propre de A ? Ⓓ $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après 2), $\Psi(A^k) = k.A^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

comme $A^k \neq 0$ et 0 est le vecteur 0 de E.

k est une valeur propre de Ψ, $\forall k \in \mathbb{N}$,

Ψ admet dc une ∞té de valeur propre.

4) Conclure ; Supposons par l'absurde que A n'est pas nilpotente : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$.

D'après 3), Ψ admet ∞té de valeur propres.

Or λ est une valeur propre de Ψ :

$\Leftrightarrow \det(C - \lambda I) = 0$ où C est la matrice de Ψ sur la base de E.

$\chi(\lambda) = \det(C - \lambda I)$ où $\deg(\chi(\lambda)) = \dim E = n^2$.

$\deg(\chi) = \dim$ base de E).

$\dim E = n^2$ car $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vert & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de E.

En effet $E_{ij} = (C_{kl})$ avec $C_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i, l=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc elle admet au plus n^2 racines

mais un polynôme de taille n admet au plus n racines.

Ce q est contradictoire.

Ex VII.4 : $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$; trouver valeurs propres de A et $\boxed{\text{SeP}}$ correspdt. et matrice inversible P tq $P^{-1}.A.P$ soit diagonale.

$\chi_\lambda(A)=\det(A-\lambda Id)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&4\\2&3-\lambda\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{C_1\leftarrow C_1+C_2}\begin{pmatrix}5-\lambda&4\\5-\lambda&3-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)\begin{pmatrix}1&4\\1&3-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)\begin{pmatrix}1&4\\0&-1-\lambda\end{pmatrix}$

$=(5-\lambda)(-1-\lambda)$.

⇒ Les valeurs propres de A sont $\lambda_1=5$ et $\lambda_2=-1$.

∴ Sep $\lambda_1=5$? ker λ_1 ? $\det(A-5Id)$ où $A-5Id=\begin{pmatrix}-4&4\\2&-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\2&0\end{pmatrix}$

⇒ Donc le vecteur propre de λ_1 est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

∴ Sep $\lambda_2=-1$? ker λ_2 ? $\det(A+1Id)$ où $A+1Id=\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\4&0\end{pmatrix}$

⇒ Donc le vecteur propre de λ_2 est $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

On a la matrice de passage $P=\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\end{array}\begin{array}{c}v_1\quad v_2\\ \begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\end{array}$. Matrice passage de $\{v_1,v_2\}$ à $\{e_1,e_2\}$

On cherche la matrice inverse de P.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\-2/3&2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1/3&2/3\\-2/3&2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1/3&4/3\\1/3&-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Donc $P^{-1}=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\end{array}\begin{array}{c}e_1\quad e_2\\ \begin{pmatrix}1/3&2/3\\1/3&-1/3\end{pmatrix}\end{array}$. matrice passage de $\{e_1,e_2\}$ à $\{v_1,v_2\}$

Puis dans la base $\{v_1,v_2\}$, la matrice s'écrit :

$Av_1=\lambda_1v_1=-1v_1$ et $Av_2=\lambda_2v_2=5v_2$

$\Rightarrow B=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\end{array}\begin{array}{c}Av_1\quad Av_2\\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}\end{array}$

Ex VII.5 : Les matrices sont-elles diagonalisables ?

$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ @ du cours.

$B=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{pmatrix}$; $\chi_\lambda(B)=\det(B-\lambda Id)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&2&2\\1&2-\lambda&-1\\-1&1&4-\lambda\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2-2\lambda&2&2\\2&2-\lambda&-1\\-2&1&4-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2\lambda&2&2\\3-\lambda&2-\lambda&-1\\3-\lambda&1&4-\lambda\end{pmatrix}=\dots$

$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\1&2-\lambda&-1\\-1&1&4-\lambda\end{vmatrix}$ $L_1\leftarrow L_1-(1-\lambda)L_2$, L_2 pivot, $L_3\leftarrow L_3+L_2$ $=\begin{vmatrix}0&2-(1-\lambda)&3-\lambda\\1&2-\lambda&-1\\0&3-\lambda&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=(-1)^{2+1}\times1\times\begin{vmatrix}3\lambda-\lambda^2&3-\lambda\\3-\lambda&3-\lambda\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}$

$=-(3-\lambda)^2(\lambda-1)=-(\lambda-1)(3-\lambda)^2$.

→ B admet $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=3$ double.

↳ Les racines ne st pas toutes distinctes dc on ne peut pas conclure sur la diagonalisat° de la matrice

$Sep\ E_1$ associé à $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ -x+y+3z=0. \end{cases}$$

Donc $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

VII. 6 : E est $\mathbb{K}$ (ev) dim finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est base fixée et f un endomorphisme de E.

1) Q[b] st valeurs propres de endomorphisme nul de E ?

Applicat° nul de $E : O_E$.

La matrice de O_E est $(0)_{n\times n}$.

λ est une valeur propre de E.

$\boxed{1^\circ M}$ $\boxed{\text{Poly carac}}$

λ est une racine de $P_{O_E}(\lambda)$ où

$P_{O_E}(\lambda) = \det(O_E - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda \end{pmatrix}$

$P_{O_E} = (-\lambda)^n\ (0)_{n\times n} = (-1)^n . \lambda^n$

$\Leftrightarrow \lambda = 0.$

Rq) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres, $E_1, \dots, E_\lambda$ espaces propres.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \dim E_i = n$

$\boxed{2^\circ M}$ (Def).

$\Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\} : O_E . u = \lambda u.$

Or $O_E . u = 0$ car O_E est l'appli nul.

On est ramené à $\begin{cases} \lambda u = 0 \\ u \in E\setminus\{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0.$

Donc $\lambda = 0$ est seule <u>v.p</u> de O_E.

2) $\dim E = 3$.

2) a) 2 est une (vp) de $f \Leftrightarrow$

2 est une racine de $P_f(\lambda)$, or

$$P_f(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P.D.2} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{car } L_2 = L_3.$$

Donc $P_f(2) = 0$ car 2 est une racine de $P_f(\lambda)$, et $\lambda = 2$ est (vp) de f.

2) b) Le (vp) $2e_1 + e_2 + e_3$ est-il (vp) de f ?

soit $u = 2e_1 + e_2 + e_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

u est (vp) de $f \Leftrightarrow u \neq 0$ et $fu = \lambda u$ μ $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observons u est visiblement non nul et

$$fu = Mu = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}. \Leftrightarrow fu = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 2\lambda \\ 0 = \lambda \\ -8 = \lambda \end{cases}$$

impossible

Donc u n'est pas (vp).

3) Pk un vecteur de E peut-il être vp relativement à 2 vp distinctes ?

Supposons par l'absurde (?!) qu'un vecteur $u \in E$ est un vp relativement aux 2 vp distinctes.

λ_1, λ_2 : $fu = \lambda_1 u$ et $fu = \lambda_2 u$, $u \in E \setminus \{0\}_E$

on ad $\lambda_1 u = \lambda_2 u \quad (= fu)$.

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) u = 0 \Rightarrow u = 0$ car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

Or $u \neq 0$: c'est (?!).

4) a) Est-il vrai que si λ est vp de f et si P polynôme annulateur de f alors λ est racine de P.

λ est vp de $f \Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}$, $fu = \lambda u$.

P est poly. annulateur $\Leftrightarrow P$: poly et $P(f) = 0$.

λ est racine de $P \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$.

Écrivons $f(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + a_{m-1} t + a_m \in \mathbb{K}[t]$

D'une part on a $f(u) = \lambda u$.

D'autre part, $P(f) = 0 \Rightarrow a_0 f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_{m-1} f + a_m = 0_E$

On trouve donc $fu = \lambda u$ tq :

$f^2 u = f(f(u)) = f(\lambda u) = \lambda . f(u) = \lambda . (\lambda u) = \lambda^2 u$

$f^3 u = f(f^2(u)) = f(\lambda^2 u) = \lambda^2 f(u) = \lambda^2 . \lambda u = \lambda^3 u$ (23)

$f^m u = f(f^{m-1} u) = f(\lambda^{m-1} u) = \lambda^{m-1} f(u)$

$= \lambda^{m-1} \lambda u = \lambda^m u$.

En reportant les égalités à l'identité (*).

Il vient que : $(a_0 f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m I) u = 0_E$.

$= a_0 f^m u + a_1 f^{m-1} u + \dots + a_m u = 0_E$

$= a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} u + \dots + a_m u = 0_E$

$\Rightarrow \underbrace{(a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m)}_{\text{scalaire}} \underbrace{u}_{\text{vecteur}} = 0_E$.

$\Rightarrow \underline{P(\lambda) = 0}$ car $u \neq 0_E$

b) Est-il vrai λ est une racine de f ? du PAnnulateur de f alors λ est vp.

NON ex $f = 0_E$ appli nul.

$P(t) = t(t-1) = t^2 - t$. alors $P(f) = 0_E^2 - 0_E$

$= 0_E^1 - 0_E = 0_E$

$\Rightarrow P$ est un $\underline{\text{PAnnul}^r}$ de f.

$\rightarrow \lambda = 1$ est une racine de P mais $\lambda = 1$ n'est pas vp de 0_E.

5) Mq si $f^2 - 2f + Id_E = 0$ alors 1 est vp de f.

soit Q : le polyn. minimal de f.

cf (1) Q est unitaire et $Q(f) = 0_E$.

(2) si $P \in \mathbb{K}[t]$ tq $P(f) = 0$ alors $Q \mid P$.

$Q(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$.

unitaire $\Leftrightarrow a_0 = 1$.

L'hyp dit que $P(t) = t^2 - 2t + 1$ est PAnul de f.

D'après 2 : Q divise P.

Or P admet la sle racine $t = 1$, Q admt une unique racine $t = 1$.

D'autre part Th Hamilton-Cayley, $\det(f - tI)$ est un PAnul de f.

$\Rightarrow Q$ divise $\det(f - tI)$

$\Rightarrow \det(f - tI)$ admet $t = 1$ comme 1 racine.

Donc $t = 1$ est une vp.

6) Mq $\exists$ tjrs au moins un scalaire α tel que $f - \alpha Id_E$ est bijectif.

soit $P(\lambda)$ le poly carac de f.

$P(\lambda) = \det(f - \lambda Id_E)$: poly de deg $n = \dim E$

Il admet au plus n racines.

Or $\mathbb{K}$ est ∞, $\exists$ dc $\alpha \in \mathbb{K}$ q n'est pas racine P. ie $P(\alpha) \neq 0$.

$\Rightarrow \det(f - \alpha Id) \neq 0$

$\Rightarrow f - \alpha Id$ est inversible

$\Rightarrow f - \alpha Id$ est bijective.

7) Donner exemple endomorphisme f de E dp $n = 2$ tq somme 2 vecteurs propres de f n'est pas un vecteur propre de f.

soit f : l'AL q a pr matrice n base $\{e_1, e_2\}$

$$\begin{array}{c|cc} & f(e_1) & f(e_2) \\ \hline e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & -1 \end{array}$$

, on a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -e_2$.

e_1 : vp à 1. e_2 : vp à -1.

La somme $e = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vp,

car $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(1.e_1 + 1e_2) = e_1 - e_2$.

$e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Donc $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vp.

b) a) On suppose $E = E_1 \oplus E_2$ et $x \in E$. s'écrit $x_1 + x_2$ & $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ alors $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.

a) Q^{el} résultat assure $\exists$ tel endomorphisme ?

f est bien défini car $\forall x \in E = E_1 \oplus E_2$, il existe une unique paire $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tq $x = x_1 + x_2$.

f) Mq f est diagonalisable.

Observons que :

- pour $x \in E_1$: $x_1 = x$ et $x_2 = 0_{E_2}$

et $f(x) = 2x_1 - 3.0 = 2x_1 = 2x$.

$\Rightarrow$ $f(x) = 2x$ pour $x \in E_1$ $\Rightarrow$ E_1 est l'espace propre associé à vp 2.

- pour $x \in E_2$: $x_1 = 0_{E_1}$ et $x_2 = x$.

$\Rightarrow f(x) = 2.0 - 3x = -3x$ pr $x \in E_2$

$\Rightarrow E_2$ est inclus ds ep $\leftrightarrow$ vp 3.

comme $E = E_1 \oplus E_2$, f est diagonalisable.

9) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-M diagble ?

$$P_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

mat triangulaire supérieure

$P_M(\lambda) = (1-\lambda)^3$.

$\lambda = 1$ est vp de M.

M est diagble $\Leftrightarrow E_1 = \mathbb{R}^3$ où E_1 est l'ep $\leftrightarrow$' à $\lambda = 1$.

10) Si l'endomorphisme, f admet 0 pour vp et diagonble, q pt-on dire de dim du noyau de f ?

Comme f est diagon., $\exists$ une base de vp $\{u_1, \dots, u_n\}$ tq la mat de f ds cette base est comme f admet 0 pour vp. On suppose prendre en généralité $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f = \{u : f(u) = 0\}$

$= \{u : f(u) = 0 \times u\} = E_0$.

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E_0 = \text{cardinalité } \{i : \lambda_i = 0\}$

≥ 1 car $\lambda_1 = 0$.

VII. 7. soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, A mat $n \times n$

tq $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tq $A^{n-1} x_0 \neq 0$.

Mq $(x_0, Ax_0, A^2 x_0, \dots, A^{n-1} x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment A s'écrit ds cette base ?

Pr mq $\{x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1} x_0\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit de mq cette famille est libre

car sa cardinalité $= \dim \mathbb{R}^n$.

soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq

$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 A x_1 + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} x_0 = 0$.

soit $0 \leq s \leq n-s$, le plus grd indice tq $A^s x_0 \neq 0$

VII. 7. soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, A mat $n \times n$ tq $A^n = 0$. et $A^{n-1} \neq 0$. soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tq $A^{n-1} x_0 \neq 0$.

Mq $(x_0, Ax_0, A^2 x_0, \dots, A^{n-1} x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment A s'écrit ds cette base ?

Pr mq $\{x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1} x_0\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit de mq cette famille est libre car sa cardinalité = dim $\mathbb{R}^n$.

soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 A x_0 + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} x_0 = 0$

soit $0 \leq s \leq n-1$, le plus grd indice tq $A^s x_0 \neq 0$.

?! Supposons par l'absurde $\{x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1} x_0\}$ n'est pas libre, $\exists$ dc $1 \leq m \leq n-s$ tq :

$$A^m x_0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 A x_0 + \dots + \lambda_{m-1} A^{m-1} x_0 \quad \lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}.$$

En agissant A^{n-1-m} sur 2 membres, on a :

$$A^{n-1} x_0 = \lambda_0 A^{n-1-m} x_0 + \lambda_1 A^{n-m} x_0 + \dots + \lambda_{m-1} A^{n-2} x_0.$$

Supposons sans prendre en généralité que $\lambda_0 \neq 0$ et posons :

$$u = A^{n-1-m} x_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} A^{n-m} x_0 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_0} A^{n-2} x_0 = \frac{1}{\lambda_0} A^{n-1} x_0 \neq 0$$

On a
$$A^m u = A^m \left(A^{n-1-m} x_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} A^{n-m} x_0 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_0} A^{m-2} x_0 \right)$$
$$= A^{n-1} x_0 + \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} A^n}_{0} + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_0} \underbrace{A^{n+m-2}}_{0} x_0$$

car $A^n = 0$

$A^n = 0$, $A^{n+1} = 0$, $A^{n+2} = 0$, $A^{n+m} = 0$.

car $A^n = 0$

$$A^m u = A^{n-1} x_0 = \lambda_0 u$$

D'autre part, $A^m u = A^m \left(\frac{1}{\lambda_0} A^{n-1} x_0 \right) = \underbrace{\frac{1}{\lambda_0} A^{n+m-1} x_0}_{0}$

Par conséquent $\lambda_0 u = A^m u = 0$ d'où $u = 0$.

Ce q contredit $u = \frac{1}{\lambda_0} A^{n-1} x_0 \neq 0$ $\boxed{c ?! c}$

Donc $\{x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1} x_0\}$ est une famille libre.

Posons $f_i = A^i x_0$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$.

La matrice de A ds la base $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$

est
$$\begin{array}{c|c} & A(f_0)\ A(f_1) \cdots A(f_{n-1}) \\ \hline \begin{matrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{matrix} & \left(\begin{matrix} \ \ \ \\ \ \ \ \\ \ \ \ \\ \ \ \ \end{matrix} \right) \end{array} = \begin{array}{c|c} & Ax_0 \quad A^2 x_0 \cdots A^n x_0 = 0 \\ \hline \begin{matrix} x_0 \\ Ax_0 \\ \vdots \\ A^{n-1} x_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

M31

Calcul direct $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par ce q précède,

pour $e_1 = (1, 0, 0)$; Ae_1 : 1° colonne de A, ie $Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$A^2 e_1$ est 1° colonne de A^2, ie $A^2 e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice de A ds la base $\{e_1, Ae_1, A^2 e_1\}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex VII. 8

soit T, ac $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par A " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $Te_1 \; Te_2 \; Te_3$ (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$;

1) Ker T ? $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 2y = 0 \\ x + 3y - 1z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -2y + 3y - z = 0 \\ -2y - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Donc $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et une base de Ker T est le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1$.

Comme T définie sur $\mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Ker} T = 1$.

TH RG : $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} T = 3 - 1 = 2$.

Donc Im T est hyperplan d'équa° $ax + by + cz = 0$. (a, b, c : constantes)

Une base de Im T consiste à 2 vecteurs.

D'autre part, $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ vect^R colonne de A.

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres car la sm c d'ordre 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ est dét non nul. Par conséquent,

ces 2 vecteurs forment une base de Im T.

2) a) Calcul P_A et vp.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

En dév, son det selon 3° colonne,

$$P_A(\lambda) = (-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= ((\lambda-1)-2) + (3-\lambda)((\lambda-1)(\lambda-3)-2)$$

$$= (\lambda-3) - (\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+1).$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$$

Donc $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$

et A admet 3 valeurs propres.

→ pas racines de multiplicité ≥ 2.

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 4$.

2) b) Justif sj calcul, T soit diagonalisable & Écrire mat diag semblable à A.

Comme $P_A(\lambda)$ est scindé et toutes les vp st distinctes : A est diagonalisable.

La matrice A est semblable à la diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) c) Calculer une base de $\mathbb{R}^3$ formés vecteurs propres de T.

soit E_i l'espace propre associé à la valeur propre λ_i, $1 \leq i \leq 3$.

$E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i Id)$.

* $E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 Id) = \ker(A - 0 \times Id) = \ker(A)$

déjà calculé : $E_{\lambda_1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. $\rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* $E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 Id)$

3) a) soit $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$;

Justif (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire mat P de passage de base (e_1, e_2, e_3) à base (f_1, f_2, f_3).

Dans 2c, on a mq $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice P est :

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{array}{c} f_1 \; f_2 \; f_3 \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer P^{-1} :

cours p 18.

Comatrice de P est $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $\det P = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 12$

Donc $P^{-1} = \dfrac{{}^t\tilde{P}}{\det P} = \dfrac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

c) écrire D de T dans la base (f_1, f_2, f_3)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) On a $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

Dc $D^3 = (P^{-1}AP)^3 = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\,P = P^{-1} \cdot A^3 \cdot P$

Donc $P \cdot D^3 \cdot P^{-1} = A^3$ D'où $A^3 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix}P^{-1}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

Ex VII. 9 soit u l'applicat° :

$$u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

Mq u définie & linéaire.
Déterminer Vp de u, si possible diagonaliser u

* Mq u est définie, prouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Expre° explicite de u.
soit $P(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[X]$ alors

$$u(P) = (2x+1)\,P(x) - (x^2-1)\,P'(x)$$
$$= (2x+1)(ax^2+bx+c) - (x^2-1)(2ax+b)$$
$$= (a+b)x^2 + (2a+b+2c)x + (b+c)$$

Donc $\boxed{u(P) = (a+b)x^2 + (2a+b+2c)x + (b+c)} \in \mathbb{R}_2[X]$.

* Mq u est linéaire, soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ~~x~~ et $P_2(x) =$

Alors $(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(x) = (\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2)x^2 + (\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2)x + (\lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)$

D'après expression explicite de u.

On a $u(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = (\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2)x^2 + (2\lambda_1a_1 + 2\lambda_2a_2 + \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 + 2\lambda_1c_1 + 2\lambda_2c_2)x + (\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 + \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)$.

$= \lambda_1[\ldots] + \lambda_2[\ldots] = \lambda_1u(P_1) + \lambda_2u(P_2)$

Donc u est linéaire.

* soit λ Vp de u, et $P \in \mathbb{R}_2[X]\setminus\{0\}$, vp correspondt. $u(P) = \lambda P$.

$$\begin{cases} a+b = \lambda a \\ 2a+b+2c = \lambda b \\ b+c = \lambda c \end{cases} \iff \begin{cases} b = (\lambda-1)a \\ b = (\lambda-1)c \\ 2(a+c) = (\lambda-1)b. \end{cases}$$

Il y a 2 cas :

• Cas $\lambda \neq 1$: on obtient $a = c = \dfrac{b}{\lambda-1}$ et $\dfrac{2b}{\lambda-1} = (\lambda-1)b$

si $b=0$ alors $a=c=0$ et $P=0$ q est exclu par $\boxed{P\neq 0}$ vp.

si $b\neq 0$ alors $2 = (\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \lambda = 1\pm\sqrt{2}$.

Donc il y a deux valeurs propres :

$\lambda_1 = 1-\sqrt{2}$ de vect^{r} propre. $P_1(x) = x^2 + (\lambda_1-1)x + 1$

$\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$ de vect^{r} propre $P_2(x) = x^2 + (\lambda_2-1)x + 1$

• Cas $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} b=0 \\ b=0 \\ 2(a+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-c \end{cases}$$

Donc $\lambda_3 = 1$ est Vp de v^r propre $P_3(x) = x^2-1$.

* comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ (une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, x, x^2\}$) et u admt 3 Vp distinctes. u est diagonalisable et sa matrice ds la base de vecteurs p. $\{P_1, P_2, P_3\}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VIII. 1. soit Réduct Endomorphismes.

soit endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le plan P d'équat $y+z=0$ est-il stable par f ? La droite vect$(1,1,1)$ est-elle stable par f ?

- soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. écrivons $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = f(u)$

On a $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = x + y + 0z \\ Y = -x + 2y + z \\ Z = x + 0y + z. \end{cases}$

Comme $Y+Z = (-x+2y+z) + (x + 0.y + z) = 2(y+z)$, on voit que $y+z=0 \Leftrightarrow Y+Z=0$. Donc le plan P d'équat $y+z=0$ est stable par f.

- La droite vect$(1,1,1)$ est stable par f.
$\Leftrightarrow f(1,1,1) = t(1,1,1)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.

On $f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifier scalaire

Cette droite est donc stable par f.

(P est stable par $f \Leftrightarrow f(P) \subset P$)

VIII. 2 Triangulaliser : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

* Calcul Poly Caract $P_A(\lambda)$ de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2-3(4-\lambda) & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3\lambda - & -\lambda^2+5\lambda-6 \\ 2-\lambda & -2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -(\lambda-2)(\lambda-3) \\ -(\lambda-2) & (\lambda-2) \end{vmatrix}$$

$$= \quad | \quad) | =$$

Donc A admet $\lambda_1 =$ ( )
$\lambda_2 =$ ( ).

Soit E_λ l'espace propre associé à la vp λ.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$

(Th Mat diagonalisable ssi P_c est scindé.)

Puis $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

* Calcul $P_B(\lambda)$ de B :

$$P_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \boxed{\frac{1}{2^3}(2B-2\lambda I)}$$

$$= \frac{1}{8}\det(2B-2\lambda I)$$

$$= \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix}-2\lambda & 2 & 2\\ 1 & 3-2\lambda & -1\\ -1 & 3 & 3-2\lambda\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix}0 & 2+2\lambda(3-2\lambda) & 2-2\lambda\\ 1 & 3-2\lambda & -1\\ 0 & 6-2\lambda & 2-2\lambda\end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2+6\lambda-4\lambda^2 & 2-2\lambda\\ 6-2\lambda & 2-2\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(2-2\lambda)}{8}\begin{vmatrix}-4\lambda^2+6\lambda+2 & 1\\ -2\lambda+6 & 1\end{vmatrix} = -\frac{(2-2\lambda)(-4\lambda^2+8\lambda-4)}{8}$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda-1)^3.$$

Donc $P_B(\lambda) = -(\lambda-1)^3$. Par le Th Hamilton Cayley : $(B-I)^3=0$.

D'autre part, $(B-I)^2 \neq 0$. En effet, il suffit de vérifier que $(2B-2I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq 0$.

vecteur quelconque

ce polyn carac est aussi polyn annulateur.

$$(2B-2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (2B-2I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (2B-2I)\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Une base de $\mathbb{R}^3$ est de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $(2B-2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $(2B-2I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

d'après Ex VII.7, la matrice de $2B-2I$ est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

La matrice de B dans cette base est

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$