Pré-chapitre

Convergence simple

- On dit que f_n converge simplement / ponctuellement vers f si $\forall x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. On dit que f en est limite simple si :
$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$
ON FIXE x, ON FAIT TENDRE N VERS L'INFINI (disjonction de cas sur x).
- $\not\Longrightarrow$ conv. unif.

Convergence uniforme

- On dit que f_n converge uniformément vers la fonction f si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in A, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$
Autrement dit :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = 0$$
- Si f_n converge simplement vers f et il existe $(x_n)_n \subset A$ tq : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| f_n(x_n) - f(x_n) \right| \neq 0$, alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément.
- $\Longrightarrow$ conv. simple
- **SI DÉJÀ CONV SIMPLE** ET $\exists (s_n)_n : \forall x \in A, \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq s_n$**, avec** $s_n \to 0$ **(pas f() de x) alors CONV UNI.**
- Conv uniforme vers f **ET** $\forall n : f_n$ bornée, alors f bornée.

Critère de Cauchy uniforme

f_n converge uniformément vers f SSI :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, \sup_{x \in A} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

Théorème de la continuité

Si (f_n) continues et f_n converge unif. vers f, alors f continue.

- $\Longrightarrow$ les limites commutent (avec $x_0 \in A$ fixé avant)
- CONTRAPOSÉE IMPORTANTE : si f_n conv. simple vers f ET f_n toutes continues ET f pas continue alors PAS DE CONV. UNI.

Théorème de prolongement par continuité

flemme

Théorème d'intégration

$(f_n)_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ convergeant uniformément (ET CONTINUITÉ) vers f, alors
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

- $\Longrightarrow$ limite et intégrale commutent

Théorème de dérivation

Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $C^1([a,b])$ tq (***l'une ou l'autre des cond. suivantes***) :

1) (f_n) converge simplement vers f 2) (f'_n) converge uniformément vers g	$\exists x_0 \in [a,b] : \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

ALORS

$f \in C^1$ et $g = f'$, de plus $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

Séries

Rappel Série alternée :

Si $\sum u_n$ est alternée tq $|u_n|$ décroit et converge vers 0, alors le reste d'ordre N est tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leq |u_{N+1}|$$

(et est du signe de u_{N+1})

Convergence simple ssi

$$\forall x \in A, \lim_{N \to +\infty} (R_N(x))_N = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right)_N = 0$$

Convergence uniforme ssi

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} | R_N(x) | \right) = 0$$

- Critère de Cauchy (si vrai alors con. uni.) :

Uniforme ? On utilise le Critère de Cauchy unif.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 0 \; \forall m \geq N \; \forall n \geq m,$

$$\underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \left| \sum_{k=m}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon}$$

- Théorème d'Abel :

  On a $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, alors si

  - $\forall x \in A$, $(u_n(x))_n$ positive décroissante

- $(u_n)_n$ converge uniformément vers 0
- $\forall x, \forall n, m$: $\left| \sum_{p=n}^{m} v_p(x) \right|$ est majoré

ALORS : la série $\sum v_n u_n$ converge uniformément.

ET : $| \; R_N(x) \; | = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n u_n \right| \leq M | \; u_{N+1}(x) \; |$

- Corollaire Abel :

  Si $u_n(x) = \alpha_n v_n(x)$ et :
  - $(\alpha_n)_n$ positive décroissante convergente vers 0
  - $\forall n, x$: $| \; v_0(x) + \; \cdots \; + v_n(x) \; | \leq M$:

  ALORS : la série $\sum u_n$ converge.

<u>**Convergence normale**</u> ssi

il existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\sum s_n$ convergente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : \; | \; u_n(x) \; | \leq s_n$$

- $\Rightarrow$ Convergence uniforme
- <=> $\sum_n \sup_{x \in A} |u_n(x)|$ converge (simplement)

<u>**Continuité série uniformément convergente**</u>

Si $(u_n(x))_n$ continues tq $\sum u_n$ converge uniformément alors $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est continue.

<u>**Théorème d'intégration (permutation série / intégrale)**</u>

Si $(u_n(x))_n$ continues et $\sum u_n$ converge uniformément, alors la série des intégrales converge et :

$$\int_a^b \left(\sum_{n \geq 0} u_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 0} \int_a^b u_n(x) dx$$

<u>**Théorème de dérivation**</u>

Si $(u_n)_n \in C^1$ tq :

- $\sum u_n$ converge simplement
- $\sum u_n{}'$ converge uniformément

ALORS

$$\sum u_n(x) \text{ est } C^1 \text{ et } \left(\sum u_n(x)\right)' = \sum {u_n}'(x)$$