Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département Mathématiques

Licence première année (SESI-PEIP Semestre 2)

M21 : Mathématiques fondamentales

Partie Analyse

Abdellah HANANI

Table des matières

Chapitre 1

Calcul intégral

1.1 Intégrale de Riemann

1.1.1 Motivation

L'une des interprétations possibles de l'intégrale est la suivante : étant donnée une fonction positive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on cherche à mesurer l'aire de l'épigraphe de f. C'est la partie H du plan se trouvant entre le graphe $\mathscr{G}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. C'est cette valeur, si elle existe, que l'on appellera l'intégrale de f sur $[a, b]$.

On n'abordera pas la définition mathématique de la notion d'aire. Signalons juste que c'est une fonction qui associe un nombre positive à une partie du plan et qu'on ne peut le faire pour toutes les parties du plan. Une partie pour laquelle ceci est possible est appelée mesurable.

L'exemple le plus simple d'une partie mesurable est un rectangle

$$R = [a, b] \times [h, k] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } h \leq y \leq k\}$$

dont l'aire est $\mathrm{Aire}(R) = (b-a) \times (k-h)$. Et plus généralement, les réunions d'un nombre fini de rectangles disjoints. Dans ce cas, on peut faire de sorte que ces rectangles soient adjacents et aient un côté porté par l'axe des abscisses. Une telle réunion est appelée domaine en escalier.

L'outil clé qui nous permettra de mesurer H, lorsque c'est possible, est l'axiome suivant.

Axiome. *Soit H un ensemble qui peut être encadrer par deux domaines en escalier R et T :*

$$(\star) \qquad R \subset H \subset T.$$

S'il existe un et un seul nombre c tel que

$$Aire(R) \leq c \leq Aire(T)$$

pour tous les domaines en escalier R et T vérifiant $(\star)$, alors H est mesurable et $Aire(H) = c$.

L'idée est donc de construire des domaines en escalier R et T qui encadrent H et de sorte que les aires $\mathrm{Aire}(R)$ et $\mathrm{Aire}(T)$ soient de plus en plus proches.

Si l'on veut s'affranchir de la positivité de la fonction, on remplacera f par $g = -f$ sur les sous-intervalles sur lesquels f est négative. Ceci revient à affecter un signe négatif aux aires des parties sous l'axe des abscisses.

1.1.2 Construction

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Le pas de la subdivision X est le réel $|X| = \sup_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$.

On dit que la subdivision X est plus fine que la subdivision Y si l'ensemble des valeurs de la suite Y est inclus dans celui des valeurs de la suite X ce qu'on notera abusivement $Y \subset X$.

Définition 1.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction <u>bornée</u> et X une subdivision de $[a,b]$. On note*

$$m_k = \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) \quad et \quad M_k = \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x), \quad 1 \le k \le n.$$

Les sommes de Darboux inférieure $s(f,X)$ et supérieure $S(f,X)$ de f relativement à la subdivision X sont définies par

$$s(f,X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k \quad et \quad S(f,X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k.$$

Interprétation géométrique. Définissons les rectangles

$$R_{X,1} = [a,x_1] \times [0,m_1], \quad R_{X,k} =]x_{k-1},x_k] \times [0,m_k] \text{ pour } k = 2, \ldots n$$

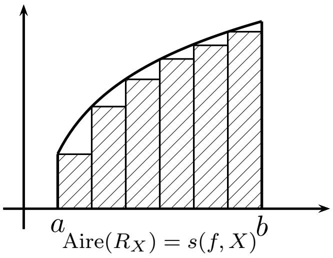
$$T_{X,1} = [a,x_1] \times [0,M_1], \quad T_{X,k} =]x_{k-1},x_k] \times [0,M_k] \text{ pour } k = 2, \ldots n$$

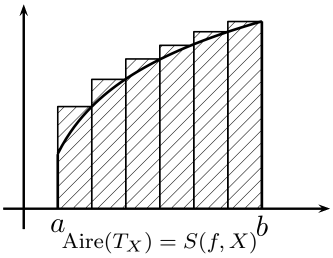
et posons $R_X = \bigcup_{k=1}^{n} R_{X,k}$ et $T_X = \bigcup_{k=1}^{n} T_{X,k}$. On obtient deux domaines en escalier qui encadrent l'épigraphe H de f : $R_X \subset H \subset T_X$ et dont les aires ne sont autre que les sommes de Darboux de f. En effet, les rectangles $R_{X,k}$ et $T_{X,k}$ étant deux à deux disjoints, donc

$$\text{Aire}(R_X) = \sum_{k=1}^{n} \text{Aire}\,(R_{X,k}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k = s(f,X)$$

et

$$\text{Aire}(T_X) = \sum_{k=1}^{n} \text{Aire}\,(T_{X,k}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k = S(f,X).$$





Proposition 1.1. *Soit X et Y deux subdivisions de $[a,b]$. Si X est plus fine que Y, alors*

$$s(f,Y) \le s(f,X) \quad et \quad S(f,X) \le S(f,Y).$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le nombre de points ajoutés à Y. On suppose que $X = Y \cup \{c\}$ avec $c \notin Y$ et que $c \in]y_{i-1}, y_i[$. Les termes $(y_k - y_{k-1})m_k$ et $(y_k - y_{k-1})M_k$ pour $k \neq i$ dans les sommes de Darboux ne changent pas. Le résultat en découle en tenant compte du fait que

$$\begin{cases} \inf\limits_{y_{i-1} \leq x \leq c} f(x) \geq \inf\limits_{y_{i-1} \leq x \leq y_i} f(x) \quad \text{et} \quad \inf\limits_{c \leq x \leq y_i} f(x) \geq \inf\limits_{y_{i-1} \leq x \leq y_i} f(x) \\ \\ \sup\limits_{y_{i-1} \leq x \leq c} f(x) \leq \sup\limits_{y_{i-1} \leq x \leq y_i} f(x) \quad \text{et} \quad \sup\limits_{c \leq x \leq y_i} f(x) \leq \sup\limits_{y_{i-1} \leq x \leq y_i} f(x). \end{cases}$$

Définition 1.2. *Les intégrales de Riemann inférieure $I_*(f)$ et supérieure $I^*(f)$ de f sur $[a, b]$ sont définies par*

$$I_*(f) = \sup_X s(f, X) \quad et \quad I^*(f) = \inf_X S(f, X),$$

où la borne supérieure et la borne inférieure sont prises sur toutes les subdivisions de $[a, b]$.

Ces nombres existent car les ensembles $\{s(f, X) \mid X \in S_{a,b}\}$ et $\{S(f, X) \mid X \in S_{a,b}\}$ sont non vides et respectivement majoré et minoré. Il suffit de considérer la subdivision $X = \{a, b\}$.

Remarque. Pour toutes subdivisions X et Y de $[a, b]$, la proposition précédente donne

$$s(f, X) \leq s(f, X \cup Y) \leq S(f, X \cup Y) \leq S(f, Y).$$

Prenons successivement le sup sur tous les X, puis l'inf sur tous les Y, on obtient

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Définition 1.3. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si $I_*(f) = I^*(f)$. Dans ce cas, l'intégrale de f de a à b, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est définie par*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_*(f) = I^*(f).$$

Remarque (Variables muettes). Dans la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la variable x est qualifiée de variable muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre (sauf ici a, b ou f) sans que cela change la valeur de l'intégrale.

Proposition 1.2 (Intégrale et aire). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable sur $[a, b]$. L'épigraphe*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ et \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

de f entre a et b est un mesurable et son aire vaut

$$Aire(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. D'abord, $R_X \subset H \subset T_X$ pour toute subdivision X. Par ailleurs, comme f est intégrable, $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'unique nombre vérifiant

$$\mathrm{Aire}(R_X) \leq I \leq \mathrm{Aire}(T_X)$$

pour toute subdivision X. C'est aussi l'unique nombre vérifiant

$$\mathrm{Aire}(R) \leq I \leq \mathrm{Aire}(T)$$

pour tous domaines en escalier R et T tels que $R \subset H \subset T$. Donc H est mesurable et

$$\mathrm{Aire}(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. L'aire étant invariant par la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$, on obtient donc une version de cette proposition pour une fonction g négative sur $[a, b]$ en remplaçant H par

$$H' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq 0\}.$$

En effet, avec $f = -g$, il vient

$$\mathrm{Aire}(H') = \mathrm{Aire}(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 1. Préciser la région dont l'aire est représentée par l'intégrale suivante et évaluer cette intégrale en utilisant une formule géométrique appropriée.

$$(a)\ \int_1^4 2\,\mathrm{d}x, \qquad (b)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(a) La région en question est un rectangle de hauteur 2 et de base $4 - 1$. Donc

$$\int_1^4 2\,\mathrm{d}x = (\text{Aire du rectangle}) = 2 \times 3 = 6.$$

(b) Le graphe de $y = \sqrt{1-x^2}$ est le demi-cercle supérieur de rayon 1, centré en l'origine, et la région H à considérer est le quart de ce cercle. Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Aire}(H) = \frac{1}{4}\pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 2 (Une fonction non intégrable). La fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas intégrable sur $[a, b]$ car $I_*(\chi_{\mathbb{Q}}) = 0$ et $I^*(\chi_{\mathbb{Q}}) = b - a$. Pour le voir, remarquer que

$$\forall X \in S_{a,b} : \ s(f, X) = 0 \text{ et } S(f, X) = b - a.$$

En effet, dans chaque $I = [x_{i-1}, x_i]$ il existe un irrationnel, donc $\inf f(I) = 0$, mais aussi un rationnel, donc $\sup f(I) = 1$. Ainsi $s(f, X) = 0$ et $S(f, X)$ est la somme des longueurs des sous-intervalles qui est donc égale à $b - a$.

Théorème 1.1 (Critère de Riemann). *Une fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision X telle que $S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$.*

Démonstration. Si f est intégrable, il existe deux subdivisions X et Y de $[a,b]$ telles que

$$0 \leq S(f,X) - I^*(f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq I_*(f) - s(f,Y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Avec $Z = X \cup Y$, on obtient :

$$S(f,Z) - s(f,Z) \leq S(f,X) - s(f,Y) < \varepsilon + I^*(f) - I_*(f) = \varepsilon$$

car $I^*(f) = I_*(f)$. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$I^*(f) - I_*(f) \leq S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon \Rightarrow I^*(f) = I_*(f).$$

Sommes de Riemann. Pour une subdivision X de $[a,b]$, la quantité

$$R(f,X) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

où $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ est un point quelconque, est appelé une somme de Riemann. Le résultat suivant est une conséquence du fait que les sommes de Darboux encadrent les sommes de Riemann.

Proposition 1.3. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors, pour toute subdivision X et tous points $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, la limite*

$$\lim_{|X|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$$

existe et ne dépend ni du choix de la subdivision ni du choix des points η_k. De plus,

$$\lim_{|X|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Application. Pour étudier la limite d'une suite (u_n) faisant intervenir une somme et le groupement $\dfrac{k}{n}$, l'une des méthodes consiste à écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$ et utiliser le résultat précédent.

Exemple. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$.

Solution. On représente u_n comme une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2-k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = R(f,X)$$

avec $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $\eta_k = \dfrac{k}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

La linéarité, cf. Théorème suivant, est l'une des propriétés les plus importantes.

Théorème 1.2 (Linéarité). *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$ et*
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αf est intégrable sur $[a,b]$ et*
$$\int_a^b [\alpha f(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Le second point est immédiat, car les sommes de Darboux sont multipliées par α ; il faut juste inverser les sommes si $\alpha < 0$: $s(\alpha f, X) = \alpha S(f,X)$ et $S(\alpha f, X) = \alpha s(f,X)$. Le premier point vient du fait que, pour toute subdivision X,
$$\inf_{[x_{k-1},x_k]}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) + \inf_{[x_{k-1},x_k]} g(x)$$
et
$$\sup_{[x_{k-1},x_k]}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) + \sup_{[x_{k-1},x_k]} g(x)$$
donc $s(f+g,X) \geq s(f,X)+s(g,X)$ et $S(f+g,X) \leq S(f,X)+S(g,X)$. Or f et g sont intégrables, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une subdivision X telle que
$$S(f,X) - \varepsilon < I_f < s(f,X) + \varepsilon \text{ et } S(g,X) - \varepsilon < I_g < s(g,X) + \varepsilon.$$
Il en découle que
$$\begin{array}{rcl} S(f+g,X) - 2\varepsilon & \leq & S(f,X) + S(g,X) - 2\varepsilon < I_f + I_g \\ & < & s(f,X) + s(g,X) + 2\varepsilon \leq s(f+g,X) + 2\varepsilon. \end{array}$$
Ce qui montre que $f+g$ est intégrale et que son intégrale est égale à $I_f + I_g$.

Théorème 1.3 (Positivité, Croissance). *L'intégrale de Riemann possède les trois propriétés suivantes relatives à la relation $\leq$.*

1. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et est positive, alors son intégrale est positive*
$$(\forall x \in [a,b],\ 0 \leq f(x)) \ \Rightarrow\ 0 \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a,b]$ alors*
$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ l'est aussi et on a*
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Le premier point est évident car les sommes de Darboux sont alors positives et le second point s'en déduit car $g - f$ est intégrable positive sur $[a, b]$. Prouvons le troisième point.

Pour toute subdivision $X\ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, notons

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \qquad m'_k = \inf\nolimits_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$$

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \qquad M'_k = \inf\nolimits_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$$

Montrons que $0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$ pour tout $k = 1, \ldots n$. Si $M'_k - m'_k = 0$, c'est évident. Supposons que $0 < M'_k - m'_k$. Alors pour tout δ tel que $0 < \delta < (M'_k - m'_k)/2$, on peut trouver $x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]$, dépendants de δ, tels que :

$$m'_k \leq |f(x_1)| < m'_k + \delta < M'_k - \delta < |f(x_2)| < M'_k.$$

D'autre part, $f(x_1), f(x_2) \in [m_k, M_k]$. D'où $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M_k - m_k$ et, par inégalité triangulaire,

$$|f(x_2)| - |f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq M_k - m_k.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$,

$$(M'_k - \delta) - (m'_k + \delta) \leq |f(x_2)| - |f(x_1)| \leq M_k - m_k$$

et en faisant tendre δ vers 0, on obtient $0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$. On en déduit que

$$0 \leq S(|f|, X) - s(|f|, X) \leq S(f, X) - s(f, X).$$

Comme f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision X telle que

$$0 \leq S(|f|, X) - s(|f|, X) \leq S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon.$$

L'intégrabilité de $|f|$ en découle d'après le critère de Riemann. Enfin, comme $-|f| \leq f \leq |f|$, le second point donne

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1.4 (Additivité relative aux intervalles). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur tout sous-intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.*
2. *Soit $c \in [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, elle l'est sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Dans ce cas,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et X une subdivision de $[a, b]$ telle que
$$0 \leq S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon.$$
On note $Y \ : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ la subdivision $X \cup \{c, d\}$ (un des points ou les deux pouvant déjà être dans X). Comme elle est plus fine que X, on a $s(f, X) \leq s(f, Y)$ et $S(f, Y) \leq S(f, X)$ et donc
$$0 \leq S(f, Y) - s(f, Y) \leq S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon.$$
Ainsi, puisque les termes $(x_k - x_{k-1})(M_k - m_k)$ sont positifs,
$$0 \leq S(f, Y \cap [c, d]) - s(f, Y \cap [c, d]) \leq S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon.$$
Ceci montre que $f_{|[c,d]}$ est intégrable d'après le critère de Riemann.

2. Supposons f intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Pour toutes subdivisions X_1 de $[a, c]$ et toute subdivision X_2 de $[c, b]$, on forme la subdivision $X = X_1 \cup X_2$ de $[a, b]$. On a :
$$s(f, X_1) + s(f, X_2) = s(f, X) \Rightarrow s(f, X_1) + s(f, X_2) \leq I_*(f, [a, b]).$$
En prenant les bornes supérieures sur toutes les subdivisions X_1 et X_2, on obtient :
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq I_*(f, [a, b]).$$
En utilisant la somme de Darboux supérieure, on vérifie aussi que
$$I^*(f, [a, b]) \leq \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On en déduit, puisque $I_*(f, [a, b]) \leq I^*(f, [a, b])$, que
$$I_*(f, [a, b]) = I^*(f, [a, b]) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Inversement, supposons f intégrable sur $[a, b]$. Donc elle l'est sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Pour toute subdivision X de $[a, b]$, posons $Y = X \cup \{c\}$ et écrivons
$$Y \ : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = c < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$
On a
$$\begin{aligned} s(f, X) &\leq s(f, Y) = \sum_{k=1}^{i} (x_k - x_{k-1}) m_k + \sum_{k=i+1}^{n+1} (x_k - x_{k-1}) m_k \\ &\leq \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
D'où, en prenant la borne supérieure sur X,
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
En prenant cette fois-ci la somme de Darboux supérieure, on vérifie aussi que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 1.4. *Soit a et b deux réels dans le domaine de f.*

1. *On pose* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. *Si $b < a$, on dit que f est intégrable de a à b si elle est intégrable sur $[b,a]$ et on pose dans ce cas*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En combinant cette définition et la proposition précédente, on obtient la formule suivante.

Proposition 1.5 (relation de Chasles). *Si f est intégrable sur un intervalle I, alors, pour tout $a,b,c \in I$, on a :*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.1.4 Familles de fonctions intégrables

On donne dans cette section des exemples de familles de fonctions intégrables. Commençons par le plus simple.

Définition 1.5 (Fonctions en escalier). *On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision $X : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$, $1 \leq k \leq n$. On dira alors que X est une subdivision adaptée à f.*

Remarquer que l'épigraphe d'une telle fonction est un domaine en escalier.

Proposition 1.6. *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et si $X : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à f, la valeur constante de f sur $]x_{k-1}, x_k[$ étant notée c_k, alors*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k.$$

Démonstration. Ceci semble évident, mais il faut faire attention aux valeurs $f(x_k)$ qui sont arbitraires. Pour chaque ε vérifiant $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2} \min\limits_{1\leq k\leq n} (x_k - x_{k-1})$, on note X_ε la subdivision suivante
$$X_\varepsilon \ : \ a = x_0 < x_0 + \varepsilon < x_1 - \varepsilon < x_1 < x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 < x_2 + \varepsilon < \dots$$
$$\cdots < x_{n-1} - \varepsilon < x_{n-1} < x_{n-1} + \varepsilon < x_n - \varepsilon < x_n = b.$$

Notons aussi
$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$m'_k = \inf_{|x-x_k|\leq\varepsilon} f(x), \qquad M'_k = \sup_{|x-x_k|\leq\varepsilon} f(x).$$

Avec ces notations

$$\begin{aligned} S(f, X_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1} - 2\varepsilon)c_k + \varepsilon M'_0 + \varepsilon M'_k + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} M'_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k + 2n\varepsilon(M - m). \end{aligned}$$

De même, avec les m'_k à la place des M'_k, on obtient

$$s(f, X_\varepsilon) \geq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k - 2n\varepsilon(M - m).$$

On en déduit l'encadrement,

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k - 2n\varepsilon(M - m) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k + 2n\varepsilon(M - m).$$

D'où, en faisant tendre ε vers 0,

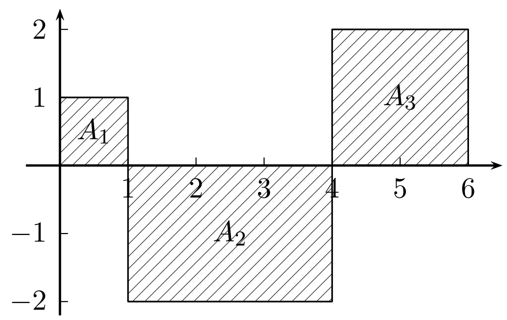
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})c_k.$$

Ceci établit l'intégrabilité de f et la valeur de l'intégrale de f.

Remarque. Avec une preuve analogue, on montre que si l'on change un nombre fini de valeurs d'une fonction intégrable, on garde une fonction intégrable, et l'intégrale n'est pas changée.

Exemple. Sur $[a, b] = [0, 6]$, considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x \leq 6. \end{cases}$$



On a :

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x &= (1-0)\times 1 + (4-1)\times(-2) + (6-4)\times 2 = -1 \\ &= \mathrm{Aire}(A_1) - \mathrm{Aire}(A_2) + \mathrm{Aire}(A_3). \end{aligned}$$

Proposition 1.7. *Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Si f est monotone, les bornes sup et inf sont atteintes aux bords de chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ d'une subdivision X. Donc

$$S(f, X) - s(f, X) \leq |X| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |X|.|f(b) - f(a)|.$$

Il suffit de prendre une subdivision telle que $|X| \leq \dfrac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$.

Lemme 1.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que*

$$\forall k = 1, \ldots, n, \qquad \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que le résultat est faux pour un $\varepsilon > 0$. Notons $[a_0, b_0] = [a, b]$ et $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Le résultat est donc faux sur l'une des moitiés $[a_0, c_0]$ ou $[c_0, b_0]$, sinon il serait vrai sur $[a, b]$.

On note $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ si le résultat est faux sur les deux moitiés ou sur $[a_0, c_0]$ et on pose $[a_1, b_1 = [c_0, b_0]$ si le résultat est faux seulement sur $[c_0, b_0]$.

On construit ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n \leq \dfrac{b - a}{2^n}$ et sur lesquels le résultat est faux. On pose $\alpha = \sup\{a_n \mid n \geq 0\} \in [a, b]$. La continuité de f en α implique qu'il existe un $\delta > 0$ et donc un intervalle $I_\delta =]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ (avec $I_\delta = [a, a + \delta[$ si $\alpha = a$ et $I_\delta =]b - \delta, b[$ si $\alpha = b$) tel que

$$\sup_{x \in I_\delta} f(x) - \inf_{x \in I_\delta} f(x) < \varepsilon.$$

Mais $[a_n, b_n]$ est inclus dans I_δ pour n vérifiant $\dfrac{b - a}{2^n} < \delta$ et le résultat est donc vrai sur $[a_n, b_n]$ contredisant ainsi le fait qu'il ne l'est pas. D'où le résultat.

Théorème 1.4. *Toute fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$, est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme précédent, il existe une subdivision de $[a, b]$, disons $X : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, telle que

$$\forall k = 1, \ldots, n, \qquad \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Ainsi

$$S(f, X) - s(f, X) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Donc f est intégrable sur $[a, b]$, d'après le critère de Riemann.

Définition 1.6. *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $X : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que*

i. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ est continue.

ii. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ admet une limite à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i.

Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Il faut noter que la majorité des fonctions que l'on manipule en pratique sont continues par morceaux.

Proposition 1.8. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas où f présente un seul point de discontinuité $c \in]a,b[$. La restriction de f à $[a,c[$ est continue et se prolonge en une fonction f_1 continue sur $[a,c]$. Donc f_1 est intégrable sur $[a,c]$ et, par suite, f est intégrable car ces deux fonctions ne diffèrent, éventuellement, qu'en un point. On vérifie de même que f est intégrable sur $[c,b]$.

Etant à la fois intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.

1.2 Notion de primitives

1.2.1 Primitives d'une fonction réelle

Définition 1.7. *On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*

Par exemple, la fonction $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$ sur $I =]-\infty, +\infty[$ car

$$\forall x \in I,\ F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Néanmoins F n'est pas la seule primitive de f sur cet intervalle. Si on additionne n'importe quelle constante C à F, alors la fonction $G(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ est aussi une primitive de f sur I. Le théorème suivant résume cette observation.

Théorème 1.5. *Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions G de la forme $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante réelle.*

Le processus qui consiste à déterminer les primitives est appelé intégration. Ainsi, si

$$(\star) \qquad \forall x \in I,\ F'(x) = f(x),$$

l'intégration de f donne une primitive de f sur I de la forme $F(x)+C$. En utilisant le symbole d'intégration, on peut réécrire l'équation $(\star)$ sous la forme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire, appelée constante d'intégration.

Remarque. Dans le calcul de primitives, la variable d'intégration reste présente dans le résultat final. Autrement dit, le résultat final dépend de la variable. Par exemple,

$$\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{et} \quad \int t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C.$$

1.2.2 Propriétés des primitives

Toutes les propriétés énoncées ici découlent de propriétés analogues sur les dérivées. Si F est une primitive de f sur I, G est une primitive de g sur I et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$[\alpha F(x) + \beta G(x)]' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta f(x).$$

Ce qui par intégration donne le résultat suivant.

Théorème 1.6 (**Linéarité**). *Pour toutes fonctions f et g admettant des primitives sur I et tous réels α et β, on a :*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x) \,\mathrm{d}x + \beta \int g(x) \,\mathrm{d}x.$$

De même si $u : J \to I$ est une fonction dérivable sur J et F est une primitive de f sur I, on a :

$$\forall x \in J,\ [F(u(x))]' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Ce qui par intégration donne la formule de changement de variables.

Théorème 1.7 (**Changement de variables**). *Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est une fonctions dérivable sur J, alors*

$$\int f(u(x))u'(x) \,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Autrement dit, $F(u(x))$ est une primitive de $f(u(x))u'(x)$ sur J.

Commentaire. La formule de changement de variables peut servir dans les deux sens.

- On veut calculer $\displaystyle\int f(u(x))u'(x) \,\mathrm{d}x$. On pose $u = u(x)$ et donc $\mathrm{d}u = u'(x) \,\mathrm{d}x$. On substitue ensuite dans l'intégrale en question :

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=u}) \underbrace{u'(x) \,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int f(u) \,\mathrm{d}u.$$

  On détermine $\displaystyle\int f(u) \,\mathrm{d}u = F(u) + C$, puis on remplace u par $u(x)$ pour exprimer la réponse finale en terme de x.

- On veut calculer $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$. On pose $x = u(t)$ avec u bijective. Donc $\mathrm{d}x = u'(t)\,\mathrm{d}t$ et ensuite,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\underbrace{u(t)}_{=x})\,\underbrace{u'(t)\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{d}x}.$$

On détermine $\displaystyle\int f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, puis on remplace t par $u^{-1}(x)$ pour exprimer la réponse finale en terme de x.

Exemple 1. Déterminons les primitives de $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on pose $u = x^2$, donc $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. D'où

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C = \sin(x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. Calculons les primitives de $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$. Ici, on pose $x = \sin t$ avec $t \in J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc

$$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \text{ car } \cos \text{ est positive sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Le changement $u : t \mapsto \sin t$ est bijective (u est continue et strictement croissante sur J). D'où

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C. \end{aligned}$$

Enfin, la formule de dérivation d'un produit permet d'établir la formule d'intégration par parties. En effet, si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, on a :

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Ce qui, par intégration, donne le résultat suivant.

Théorème 1.8 (Intégration par parties). *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I. Alors*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples.

1. Pour calculer des primitives de type $\displaystyle\int \mathrm{e}^x P(x)\,\mathrm{d}x$, il suffit d'intégrer plusieurs fois par parties en dérivant le polynôme P. Calculons $F(x) = \displaystyle\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Une premiȅre intégration par parties donne :

$$F(x) = (x^2+x)\mathrm{e}^x - \underbrace{\int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}_{G(x)}$$

et une deuxième permet de calculer

$$G(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (2x-1)\mathrm{e}^x + C.$$

Finalement, $F(x) = (x^2 - x + 1)\mathrm{e}^x + C$.

2. Pour calculer des primitives faisant intervenir ln, arctan, arcsin, ..., on intègre par parties. Calculons $F(x) = \displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x$. Si l'on intègre par parties en dérivant arctan, on obtient :

$$F(x) = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

3. Il y a des primitives que l'on ne peut exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple, $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1.3 Théorème fondamental du calcul intégral

L'outil clé pour montrer qu'une fonction continue admet des primitives est le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales.

Théorème 1.9 (de la moyenne). *Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La fonction f étant continue, donc il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que

$$f(x_1) = \min f([a,b]) \quad \text{et} \quad f(x_2) = \max f([a,b]).$$

D'où

$$f(x_1).(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(x_2).(b-a).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 1.10 (Théorème fondamental, partie I). *Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur cet intervalle. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction F définie sur I par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Les faits que $F(a) = 0$ et, puis, l'unicité sont évidents. Pour tout $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe car f est intégrable sur I. La relation de Chasles donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après le théorème de la moyenne, $\exists \eta \in [x, x+h]$ tel que $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\eta)$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\eta\to x} f(\eta) = f(x).$$

Ainsi F est dérivable et $F' = f$ sur I. En fait, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car sa dérivée $F' = f$ est continue sur I.

A présent, on veut calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Si on note $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors $F(a) = 0$, $F'(x) = f(x)$ et $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ ce qui implique que toute primitive G de f est de la forme

$$G(x) = F(x) + C.$$

Remarquons alors que

$$G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat suivant.

Théorème 1.11 (Théorème fondamental, partie II). *Si f est continue sur $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice (Fonctions définies par une intégrale). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $u, v : J \to I$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle J. Montrer que la fonction G définie sur J par*

$$\forall x \in J, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.

Enfin, les résultats qui suivent découlent de résultats analogues pour les primitives.

Corollaire 1.1 (Changement de variables). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $u : [\alpha, \beta] \to I$ de classe C^1 avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exemple 1. Calculons $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. On a vu que

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C = \sin(x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \big[\sin(x^2)\big]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1.$$

Exemple 2. Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. On a vu que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

Remarque (Intégrale d'une fonction paire ou impaire). Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier,
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier,
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Corollaire 1.2 (Intégration par parties). *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.4 Compléments

1.4.1 Primitives de fractions rationnelles

La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle aboutit aux termes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n},\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n},\quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Avec, pour les deux derniers termes, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (et donc $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

• Premier terme. On a :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| & \text{si} \quad n=1 \\ \\ \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si} \quad n \neq 1. \end{cases}$$

• Second terme. On transforme ax^2+bx+c en un terme de la forme $1+t^2$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right) = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+4ac-b^2\right] \\ &= \frac{4ac-b^2}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2+1\right]. \end{aligned}$$

Avec $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$, et donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{d}t$, on se ramène au calcul de

$$I_n(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

Une intégration par parties, avec

$$u = \frac{1}{(1+t^2)^n} \quad \text{et} \quad v' = 1 \Longrightarrow u' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \quad \text{et} \quad v = t,$$

donne

$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

On utilise $t^2 = (1+t^2)-1$, ce qui donne

$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nI_n(t) - 2nI_{n+1}(t).$$

D'où

$$I_{n+1}(t) = \frac{1}{2n}\frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n(t) \text{ avec } I_1(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(t).$$

• Troisième terme. On fait apparaitre la dérivée de ax^2+bx+c :

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Le premier terme est de la forme $\dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$. Une primitive est donc

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} & \text{si} \quad n \neq 1 \\ \\ \ln|ax^2+bx+c| & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$$

Exemple. Calculons les primitives de la fraction suivante :

$$f(x) = \frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} := \frac{A}{B}.$$

D'abord, on factorise B. On a : $B(1) = B'(1) = 0$. D'où $B = (x-1)^2(x^2+1)$ et, par suite,

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{b_1 x + b_2}{x^2+1}.$$

Ensuite, on calcule les coefficients. On a : $a_2 = \left[(x-1)^2 f(x)\right]_{|x=1} = 1$,

$$b_1 \mathrm{i} + b_2 = \left[(x^2+1) f(x)\right]_{|x=\mathrm{i}} = \frac{2-2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i} \Rightarrow b_1 = 1 \text{ et } b_2 = 1,$$

$$\lim_{+\infty} [x f(x)] = 2 = a_1 + b_1 \Rightarrow a_1 = 1.$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Or $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$, par linéarité. Donc

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(|x-1|\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{x-1} + \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.4.2 Fractions rationnelles en sin et cos

Pour calculer $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, on essaie l'une des techniques suivantes.

- Règle de Bioche. Si la forme $f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ est invariante par le changement

$$\begin{array}{lll} \text{de } x \text{ en } -x & \text{on pose} & t = \cos x \\ \text{de } x \text{ en } \pi - x & \text{on pose} & t = \sin x \\ \text{de } x \text{ en } \pi + x & \text{on pose} & t = \tan x. \end{array}$$

- Méthode générale. On pose $t = \tan \dfrac{x}{2}$. Ce qui donne $x = 2\arctan t$, et on utilise alors les relations

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

  On se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en t.

- Linéarisation. Dans certains cas, il faudra linéariser à l'aide des formules d'Euler :

$$\cos(ax) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(bx) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{2\mathrm{i}}.$$

1.4.3 Autres fractions rationnelles

- Pour une fraction de la forme $f(\mathrm{e}^x, \mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)$, on pose $t = \mathrm{e}^x$. On aura $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, $\mathrm{sh}x = \dfrac{t - t^{-1}}{2}$ et $\mathrm{ch}x = \dfrac{t + t^{-1}}{2}$. On retrouve une fraction rationnelle en t.

- Pour une fraction de la forme $f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ avec $ad-bc \neq 0$, on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

  On aura
$$x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{ad-bc}{(ct^n-a)^2} n t^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$
  On retrouve encore une fraction rationnelle en t.

- Pour une fraction de la forme $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, on transforme $\sqrt{ax^2+bx+c}$ en une des formes suivantes :
  . $\sqrt{t^2+1}$, on pose alors $t = \mathrm{sh}u \Rightarrow \sqrt{t^2+1} = \mathrm{ch}u$.
  . $\sqrt{t^2-1}$, on pose alors $t = \pm\mathrm{ch}u \Rightarrow \sqrt{t^2-1} = \mathrm{sh}u$.
  . $\sqrt{1-t^2}$, on pose alors $t = \sin u \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos u$.

  On retombe sur une fraction rationnelle d'un des types qui précèdent.

Exemple. Calculons $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$. On transforme $-x^2+2x+3$ comme suit :
$$-x^2+2x+3 = 4-(x-1)^2 = 4\left[1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right].$$
On pose $\dfrac{x-1}{2} = \sin u \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos u\,\mathrm{d}u$ avec $u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. D'où
$$\begin{aligned}\int \sqrt{-x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x &= 4\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int [1+\cos(2u)]\,\mathrm{d}u \\ &= 2u+\sin(2u)+C = 2u+2\sin u\cos u + C \\ &= 2\arcsin\frac{x-1}{2} + x\sqrt{-x^2+2x+3}+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Développements limités

2.1 Introduction et préliminaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'elle est continue au point $a \in I$.

1. Si on propose $f(a)$ comme approximation de $f(x)$, $x \in I$, on commet une erreur $\varepsilon(x)$:
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x).$$
Or $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ car f est continue en a, donc $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Dans la suite une telle fonction $\varepsilon(x)$ sera notée $o(1)$ et on lit : petit o de 1. On dira qu'on a fait une approximation d'ordre 0.
2. Supposons à présent que f est dérivable en a. Si on propose $f(a) + f'(a)(x-a)$ comme valeur approchée de $f(x)$, on commet une erreur $\varepsilon(x)$:
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)$$
Or $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$ car f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varepsilon(x)}{x-a} = 0$. On notera cette erreur $o(x-a)$, on lit : petit o de $x-a$ et on dira qu'on a fait une approximation d'ordre 1.

Sous certaines conditions, on peut faire des approximations d'ordre n quelconque. Dans ce cas, on notera $o\left((x-a)^n\right)$ l'erreur commise ; c'est une fonction qui vérifie
$$\lim_{x \to a} \frac{o\left((x-a)^n\right)}{(x-a)^n} = 0.$$

Le but de ce chapitre est de développer une technique qui permet de trouver une approximation polynômiale d'un ordre donné des valeurs prises par une fonction.

Proposition 2.1 (Propriétés de o). *On a :*

1. $\lim\limits_{x \to 0} o(1) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x^n)}{x^n} = 0$.
2. $o(x^n) + o(x^m) = o(x^l)$ *où* $l = \inf(n, m)$.
3. $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$ *et* $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$.

2.2 Existence des DL

2.2.1 Définition, propriétés

Définition 2.1. *Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et f une fonction définie sur I, sauf peut être en a. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, $DL_n(a)$ en abrégé, s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que*

$$\forall x \in I, \ \ f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n).$$

On appelle $P(x-a)$ la partie régulière du $DL_n(a)$ et $o((x-a)^n)$ son reste d'ordre n.

Autrement dit, $P(x-a)$ est une approximation de $f(x)$ d'ordre n. Dans la suite, si P est un polynôme, on notera P_m la somme de ses monômes de degré $\leq m$.

Proposition 2.2 (Troncature). *Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $P(x-a)$, alors, pour tout $m \leq n$, f admet un $DL_m(a)$ de partie régulière $P_m(x-a)$.*

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant :

Proposition 2.3. *Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique, c'est à dire la partie régulière et le reste sont uniques.*

Démonstration. Supposons que

$$f(x) = P_1(x-a) + o((x-a)^n) = P_2(x-a) + o((x-a)^n).$$

Donc $P_1(x-a) - P_2(x-a) = o((x-a)^n)$, et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\lim_{x \to a} \frac{P_1(x-a) - P_2(x-a)}{(x-a)^k} = 0.$$

Ce n'est possible que si $P_1 = P_2$.

Dans la pratique, on ramène le calcul d'un $DL_n(a)$ au calcul d'un $DL_n(0)$.

Proposition 2.4. *Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf peut être en a, et $g(t) = f(a+t)$. Alors f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$. Dans ce cas, si*

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Corollaire 2.1. *On suppose que f admet un $DL_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire) alors la partie régulière du $DL_n(0)$ est paire (resp. impaire).*

Démonstration. Il suffit de comparer la partie régulière du $DL_n(0)$ de $f(x)$ et $f(-x)$ et utiliser l'unicité.

Définition 2.2. *Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini ($\pm\infty$). On dit que f admet un $DL_n(\pm\infty)$ si la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un $DL_n(0)$. Si ce développement est*

$$g(t) = P(t) + o(t^n),$$

alors, au voisinage de $\pm\infty$, $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

2.2.2 Formules de Taylor

Le résultat suivant est une conséquence de la formule d'intégration par parties.

Théorème 2.1 (Taylor avec reste intégral). *Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sur un intervalle I. Alors, $\forall (a, x) \in I^2$, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

Le reste intégral est la fonction R_n définie sur I par

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La formule est vraie pour $n = 0$. En effet, elle s'écrit

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et exprime le fait que f est une primitive de f'. Supposons qu'elle l'est pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et que f est de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. On intègre par parties le terme R_n :

$$R_n(x) = \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Donnons maintenant une généralisation du théorème des accroissements finis.

Théorème 2.2 (Taylor-Lagrange). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $n+1$ fois dérivable sur I. Alors, pour tout $(a, x) \in I^2$, $\exists c$ entre a et x tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ est appelé reste de Lagrange d'ordre n.

Démonstration. Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis. Soit $(a, x) \in I^2$ avec $a < x$, la preuve est la même si $x < a$. Et soit $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On considère la fonction φ définie sur $[a, x]$ par

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - A\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, φ est continue sur $[a, x]$ puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$ et φ est dérivable sur $]a, x[$ puisque $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, x[$. Donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$:

$$0 = \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + A\frac{(x-c)^n}{n!} \Rightarrow A = f^{(n+1)}(c).$$

Maintenant, $\varphi(a) = 0$ implique que

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

La formule de Taylor-Young est l'aspect local de cette formule. Elle nécessite une hypothèse moins forte et apparaît comme un véritable constructeur de développements limités.

Théorème 2.3 (Taylor-Young). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée d'ordre n en $a \in I$. Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que*

$$\forall x \in I, \;\; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Procédons par récurrence. L'hypothèse "f admet une dérivée d'ordre n en a" signifie qu'il existe un voisinage de a sur lequel f est $n-1$ fois dérivable, et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

La continuité de f en a donne $f(x) - f(a) = o(1)$. Donc la formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle l'est aussi pour un $n \geq 0$. Si f est $n+1$ fois dérivable en a, alors f' est n fois dérivable en a, et l'hypothèse de récurrence donne

$$(\star) \qquad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

On définit la fonction g par $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. La relation $(\star)$ montre que $g'(x) = o((x-a)^n)$ et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \alpha > 0 \; : \; |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |g'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n.$$

Le théorème des accroissement finis appliqué à g permet d'écrire

$$|x-a| \leq \alpha \Rightarrow |g(x)-g(a)| \leq \left(\sup_{t\, entre\, a\, et\, x} |g'(t)|\right).|x-a| \leq \varepsilon |x-a|^{n+1}.$$

D'où $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, c'est-à-dire $g(x)-g(a) = o\big((x-a)^{n+1}\big)$. Le résultat en découle car $g(a) = 0$.

Remarque. Si f est n fois dérivable en 0 alors f admet un $DL_n(0)$ et les coefficients de sa partie régulière sont

$$f(0),\ f'(0),\ \frac{f^{(2)}(0)}{2!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

La réciproque est fausse si $n \geq 2$. Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + x^3 \cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

admet un $DL_2(0)$ car $x^3 \cos\dfrac{1}{x} = o(x^2)$. La fonction f' existe et elle est donnée par

$$f'(x) = 2 + 2x + 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

Mais

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(2 + 3x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas. Donc f n'admet pas de dérivée seconde en 0.

Exemples.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$. Donc e^x admet un $DL_n(0)$ et, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$,

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Donc $\sin x$ admet un $DL_n(0)$ et

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2p+1})}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Donc $\cos x$ admet un $DL_n(0)$ et

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + o(x^{2p})}$$

4. Par récurrence, on vérifie que la dérivée n-ième de $(1+x)^\alpha$, $\alpha\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, est :

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

On en déduit que $(1+x)^\alpha$ admet un $DL_n(0)$ et

$$(\star) \qquad \boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)}$$

2.3 Opérations sur les DL

La formule de Taylor-Young permet de calculer un $DL_n(0)$ d'une fonction n fois dérivable en 0. Il est déconseillé d'utiliser systématiquement cette formule, en particulier, en présence d'expressions compliquées.

2.3.1 Somme, produit et composée

Proposition 2.5 (Somme et produit). *On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de la forme*

$$f(x) = P(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Alors $f+g$ et fg admettent des $DL_n(0)$ dont les parties régulières sont respectivement

$$P(x) + Q(x) \quad et \quad [P(x)Q(x)]_n.$$

Exemple 1. Le $DL_n(0)$ de e^x donne ceux de $\mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Soit

$$\boxed{\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})}$$

Exemple 2. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$. On veut déterminer le $DL_4(0)$ de f. On a :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

On effectue le produit et on ne garde que les monômes de degré ≤ 4. On obtient :

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Proposition 2.6 (Composée). *On suppose que f et u admettent des $DL_n(0)$ de la forme*

$$f(x) = P(x) + o(x^n), \quad u(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Si $u(0) = 0$ alors $(f \circ u)$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $[P(Q(x))]_n$.

Exemple 3. Former le $DL_4(0)$ de $e^{\sin x}$. D'abord $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^4}{24} + o(u^4)$. Et donc, avec

$$u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

on a bien $u(0) = 0$, et par suite

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

2.3.2 Quotient et intégration des DL

Rappelons d'abord le théorème de division suivant les puissances croissantes.

Théorème 2.4. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes avec $B(0) \neq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q et R tels que*

$$A(X) = B(X)Q(X) + X^{n+1}R(X).$$

On appelle Q le quotient à l'ordre n de la division de A par B.

Proposition 2.7 (Quotient). *On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de la forme*

$$f(x) = A(x) + o(x^n), \quad g(x) = B(x) + o(x^n).$$

Si $g(0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le quotient de la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n.

Exemple. Former le $DL_5(0)$ de $\tan x$. Avec $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on a bien $\cos 0 = 1 \neq 0$, le $DL_5(0)$ de sin et cos sont :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

La division suivant les puissances croissantes se présente comme suit :

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72}\right) & \\ \cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{72} &
\end{array}$$

Donc $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Théorème 2.5 (Intégration des DL). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction dérivable au voisinage de 0. Si f' admet un $DL_n(0)$ de la forme $f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ de la forme*

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Posons $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et

$$Q(x) = \int_0^x P(t)dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

On a $Q'(x) = P(x)$, et $f'(x) - Q'(x) = o(x^n)$, autrement dit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |x| < \alpha \Rightarrow |f'(x) - Q'(x)| < \epsilon |x|^n.$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $f - Q$ permet d'écrire

$$|x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - Q(x) - f(0)| < \left(\sup_{t \text{ entre } 0 \text{ et } x} |f'(t) - Q'(t)| \right) .|x| < \epsilon |x|^{n+1}$$

ce qui traduit $f(x) - Q(x) - f(0) = o(x^{n+1})$.

Exemple.

1. Dans la formule $(\star)$, ci-dessus, on pose $\alpha = -1$, on aura :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

Or $(\log(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$ et $\log(1) = 0$, donc en intégrant, on obtient :

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

2. Dans la formule $(\star)$, ci-dessus, on pose $\alpha = -\dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} x^n + o(x^n)}$$

En remplaçant x par $-x^2$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Or $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc en intégrant et puisque $\arcsin 0 = 0$, on obtient :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

2.4 Applications des DL

2.4.1 Calcul de limites

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, lorsque on obtient une forme indéterminée, on remplace f et g par leur DL. Si

$$f(x) = a_k x^k + o(x^k) \quad \text{et} \quad g(x) = b_l x^l + o(x^l) \quad \text{avec} \quad a_k \neq 0 \text{ et } b_l \neq 0,$$

alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \frac{a_k}{b_l} \lim_{x\to 0} x^{k-l} \text{ (peut ne pas exister).}$$

Exemple. Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$. On a

$$x\sin x = x^2 + o(x^2), \quad e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad 2\cos x = 2 - x^2 + o(x^2).$$

Donc $e^x + e^{-x} - 2\cos x = 2x^2 + o(x^2)$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

2.4.2 Etude locale

Proposition 2.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in I$. Alors f admet un $DL_1(x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0. Dans ce cas*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Démonstration. Si f est dérivable en x_0, alors f admet un $DL_1(x_0)$ d'après Taylor-Young. Réciproquement, si f admet un $DL_1(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + o(x - x_0),$$

alors, par continuité de f en x_0, on a : $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = a_0$. Or

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} = a_1.$$

Donc f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$.

Proposition 2.9. *Si f est continue en x_0 et si elle admet un $DL_n(x_0)$, $n \geq 2$, de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors $\mathscr{C}_f$ admet la droite Γ d'équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ comme tangente au point x_0, et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Γ est déterminé par le signe du monôme non nul de plus bas degré $a_k(x - x_0)^k$ avec $\underline{k \geq 2}$.

Démonstration. La proposition précédente implique que f est dérivable en x_0, donc $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point x_0 dont l'équation est

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Maintenant, si $a_2 = a_3 = \cdots = a_{k-1} = 0$ et $a_k \neq 0$, alors $f(x) - y \simeq a_k(x - x_0)^k$:

- Si $k = 2m$, alors $(x - x_0)^k \geq 0$ et donc $a_k(x - x_0)^k$ garde le même signe. D'où
  - . Si $a_k < 0$, alors $a_k(x - x_0)^k < 0$ et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Γ.
  - . Si $a_k > 0$, alors $a_k(x - x_0)^k > 0$ et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ.
- Si $k = 2m+1$, le terme $(x - x_0)^k$ et donc $a_k(x - x_0)^k$ change de signe selon la position de x par rapport à x_0.
  - . Si $a_k < 0$, alors $a_k(x-x_0)^k < 0$ pour $x > x_0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Γ, et $a_k(x-x_0)^k > 0$ pour $x < x_0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ. La courbe $\mathscr{C}_f$ a un point d'inflexion en x_0.
  - . Si $a_k > 0$, alors $a_k(x-x_0)^k < 0$ pour $x < x_0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Γ, et $a_k(x-x_0)^k > 0$ pour $x > x_0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ. La courbe $\mathscr{C}_f$ a un point d'inflexion en x_0.

2.4.3 Branches infinies et asymptotes

Proposition 2.10. *Supposons que f admet un développement en $\pm\infty$ sous la forme :*

$$f(x) = ax + b + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Alors la droite Γ d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$. De plus, en notant a_k, $\underline{k \geq 1}$, le premier terme non nul, la position de Γ par rapport à $\mathscr{C}_f$ est donnée par le signe de $\dfrac{a_k}{x^k}$.

Démonstration. En effet, $\lim\limits_{\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. Donc la droite Γ d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote et $f(x) - y \simeq \dfrac{a_k}{x^k}$ au voisinage de $\pm\infty$. Donc, au voisinage de $+\infty$,

. si $a_k < 0$, alors $f(x) - y < 0$ et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Γ.
. si $a_k > 0$, alors $f(x) - y > 0$ et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ.

La situation est analogue en $-\infty$:

. Si ($a_k < 0$ et k impair) ou ($a_k > 0$ et k pair), alors $f(x) - y > 0$ et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ.
. Si ($a_k > 0$ et k impair) ou ($a_k < 0$ et k pair), alors $f(x) - y < 0$ et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Γ.

Exercice. Soit $f(x) = x \arctan x$. Déterminer le $DL_3(+\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathscr{C}_f$ possède une symptote oblique Γ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Γ.

<u>*Solution*</u>. On pose $t = \dfrac{1}{x}$. Donc $g(t) = \dfrac{f(x)}{x} = \arctan x = \arctan \dfrac{1}{t}$. Or

$$\forall t > 0, \quad \arctan \frac{1}{t} + \arctan t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

Donc $g(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$. D'autre part, $(\arctan)'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$. Donc par intégration, et puisque $\arctan 0 = 0$, on aura

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \Rightarrow g(t) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

On en déduit que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}x - 1 + \dfrac{1}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Donc la droite $\Gamma : y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$, et comme $\dfrac{1}{3x^2} > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Γ.

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Introduction et préliminaires

3.1.1 Primitives et équations différentielles

Reprenons d'abord la notion de recherche de primitives. On se donne une fonction $f(x)$ et on veut trouver une fonction $F(x)$ telle que $y = F(x)$ vérifie l'équation

$$y' = f(x). \tag{1}$$

Les solutions de cette équation sont les primitives de $f(x)$, et on sait qu'on peut obtenir celles ci en intégrant $f(x)$. L'équation (1) est appelée une équation différentielle car l'inconnue est une fonction y et l'équation fait intervenir une dérivée de l'inconnue.

Exemples.

1. Les solutions de l'équation $y' = 0$ sont les fonctions $y = \displaystyle\int 0 \,\mathrm{d}x = C$.
2. Les solutions de l'équation $y' = x^2$ sont les fonctions $y = \displaystyle\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$.
3. Les solutions de l'équation $y' = \mathrm{e}^x$ sont les fonctions $y = \displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Pour une fonction y de x, on note y au lieu de $y(x)$, y' ou $y^{(1)}$ au lieu de $y'(x)$ ou $y^{(1)}(x)$ et $y^{(k)}$ au lieu de $y^{(k)}(x)$. Ainsi lorsqu'on écrit, par exemple, $y' = \mathrm{e}^x$ cela signifie $y'(x) = \mathrm{e}^x$.

L'équation différentielle (1) ci-dessus est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée d'ordre 1. D'une manière plus générale, on a la définition suivante.

Définition 3.1. *Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme*

$$G\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{E}$$

où G est une fonction de $n+2$ variables. Une solution d'une telle équation sur un intervalle I est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur le cas des équations linéaires du premier et du second ordre et l'on verra surtout comment ramener la résolution de ce type d'équations à celle d'une équation du type (1).

3.1.2 Equations différentielles linéaires

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 3.2. *Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$(E) \qquad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x),$$

où les a_k et b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- *Résoudre, ou intégrer, l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E).*
- *Si la fonction b est identiquement nulle, l'équation différentielle (E) est dite homogène ou sans second membre. On la note (E_0).*
- *L'équation (E) est dite à coefficients constants si les a_k sont des constantes et b une fonction continue.*
- *Si a_n est la fonction constante de valeur 1 sur I, (E) est dite normalisée.*

Exemples.

1. $y' - xy = \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2. $y' - xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3. $2y'' - 3y' + 4y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.

Le résultat suivant précise, en d'autres termes, que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.

Proposition 3.1. *Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation linéaire homogène*

$$(E_0) \qquad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0,$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solution de cette équation.

C'est une simple vérification. Généralement, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, on opère en deux étapes :

- trouver les solutions de l'équation homogène associée,
- trouver une solution particulière de l'équation (E).

Ceci permet de trouver toutes les solutions de (E) comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Principe de superposition). *Soit y_0 une solution particulière de (E). Alors les solutions de (E) sont les fonctions y de la forme $y = y_0 + Y$, où Y est une solution de l'équation différentielle homogène associée à (E).*

Démonstration. Toute fonction de la forme $y = y_0 + Y$, où Y est une solution de l'équation (E_0), est une solution de (E). Réciproquement, si y est une solution de (E), alors

$$L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = b(x) - b(x) = 0$$

où l'on a posé $L(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y$. Donc $y - y_0 = Y$ est une solution de (E_0).

3.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

3.2.1 Résolution de l'équation normalisée

Définition 3.3. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée est une équation du type*

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On note A une primitive de a sur I, donc $A'(x) = a(x)$, et on introduit la fonction $z = \mathrm{e}^{A(x)}y$. Remarquer que, y est une solution de l'équation homogène associée à (E) si, et seulement si,

$$\mathrm{e}^{A(x)}y' + a(x)\mathrm{e}^{A(x)}y = 0 \Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{A(x)}y\right]' = 0 \Leftrightarrow z' = 0 \Leftrightarrow z = k \in \mathbb{R}.$$

D'où le résultat suivant.

Théorème 3.2 (Fondamental). *Soit a une fonction réelle continue sur I et A une primitive de a sur I. Les solutions de l'équation homogène*

$$(E_0) \qquad y' + a(x)y = 0$$

sont les fonctions Y définies sur I par $Y(x) = ke^{-A(x)}$, où k est une constante réelle.

En vertu du principe de superposition, la résolution de (E) se réduit à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente. Supposons, par exemple, que la fonction a soit constante.

- Si $b(x) = P(x)$ est un polynôme de degré n, l'équation (E) admet comme solution particulière un polynôme de degré n si $a \neq 0$.
- Si $b(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet comme solution particulière une fonction de la forme $y_0(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où
  - . Q est un polynôme de degré n si $a + \alpha \neq 0$.
  - . Q est un polynôme de degré $n + 1$ si $a + \alpha = 0$.
- Si $b(x) = \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)$, où α_1, α_2 et $\omega \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet comme solution particulière une fonction de la forme $y_0(x) = \beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)$ où β_1 et $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y' - 2ty = 4t$.

Ici $a(t) = -2t$ dont une primitive est donnée par $A(t) = -t^2$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = ke^{-A(t)} = k\mathrm{e}^{t^2}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, la fonction $y_0 = -2$ est une solution particulière évidente, donc les solutions de (E) sont les fonctions

$$y = k\mathrm{e}^{t^2} - 2, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Méthode de variation de la constante

La méthode consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme $y = z\mathrm{e}^{-A(x)}$. Ce qui revient à considérer la fonction $z = y\mathrm{e}^{A(x)}$. Voici les étapes :

1. On détermine une primitive A de a. Les solutions de (E_0) sont les $Y = k\mathrm{e}^{-A(x)}$.
2. On multiplie (E) par $\mathrm{e}^{A(x)}$. L'équation ainsi obtenue s'écrit $z' = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
3. On détermine une primitive $B(x)$ de $b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$. D'où $z = B(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si,

$$y = B(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + k\mathrm{e}^{-A(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ici $I = \mathbb{R}$.

1. Une primitive de $a(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ est $A(x) = -\ln\sqrt{1+x^2}$. Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions

$$y = k\mathrm{e}^{-A(x)} = k\sqrt{1+x^2}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons les solutions de (E) sous la forme :

$$y = z(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = z(x)\sqrt{1+x^2}.$$

On aura $y' = z'(x)\sqrt{1+x^2} + z(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et on reporte dans (E). Ce qui donne

$$z'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow z(x) = \arctan x + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi les solutions de (E) (sur $\mathbb{R}$) sont les fonctions

$$y = (k + \arctan x)\sqrt{1+x^2}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 3.1 (Problème de Cauchy). *Soit $(x_0, \alpha) \in I \times \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = \alpha$.*

Démonstration. Les solutions de (E) sont de la forme $y = Y + y_0$ où

. y_0 est une solution particulière de (E). Celle-ci existe en vertu de la méthode de variation de la constante.

. Y est une solution partout non nulle de l'équation homogène (E_0). Elle est onnée par $Y = k\mathrm{e}^{-A(x)}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Donc y vérifie la condition initiale si, et seulement si,

$$y(x_0) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = k\mathrm{e}^{-A(x_0)} + y_0(x_0) \Leftrightarrow k = \mathrm{e}^{A(x_0)}\left[\alpha - y_0(x_0)\right]$$

ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy.

3.2.3 Résolution de l'équation non normalisée

Soit α, β et γ trois fonctions continues sur I. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$(E) \qquad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x).$$

Soit $J \subset I$ un intervalle tel que $\underline{\alpha(x) \neq 0}$ pour tout $x \in J$. Sur J, on peut diviser par a ce qui permet de normaliser (E) en l'équation

$$(E_n) \qquad y' + a(x)y = b(x),$$

où $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. La résolution de (E) sur I se fait comme suit.

1. On résout l'équation homogène associée à (E_n) sur les sous-intervalles J de I sur lesquels a ne s'annule pas.

2. On cherche une solution particulière de (E_n). Ceci résout complètement (E_n) sur ces sous-intervalles.

3. Toute solution de (E) sur un de ces sous-intervalles J est solution de (E_n) sur ce même sous intervalle. On étudie alors le raccord de ces solutions en un point x_0 où a s'annule : si ψ_1 est une solution de (E) sur $J_1 =]c_1, x_0[$ et si ψ_2 est une solution de (E) sur $J_2 =]x_0, c_2[$, pour que ψ_1 et ψ_2 se raccordent en x_0, il est nécessaire que :
   - Les fonctions ψ_1 et ψ_2 aient une même limite ℓ en x_0.
   - La fonction ψ définie sur $]c_1, c_2[$ par $\psi_{|J_1} = \psi_1$, $\psi_{|J_2} = \psi_2$ et $\psi(x_0) = \ell$ soit dérivable en x_0.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = x$.

Solution. On voit que $\alpha(x) = x$ ne s'annule qu'en 0. Donc on résout sur $J_1 =]-\infty, 0[$ et sur $J_2 =]0, +\infty[$.

1. Sur J_1, l'équation normalisée est : $y' - \dfrac{2}{x}y = 1$. On pose

   $$a(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = -\ln x^2.$$

   Donc les solutions de l'équation homogène sur J_1 sont les fonctions définies par

   $$\varphi_1(x) = k\mathrm{e}^{\ln x^2} = kx^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

   On remarque que $\varphi_0(x) = -x$ est une solution particulière de (E) sur J_1. Donc les solutions de (E) sur J_1 sont les fonctions y_1 définies par

   $$y_1(x) = kx^2 - x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Sur J_2 les calculs sont les mêmes que sur J_1, donc les solutions de (E) sur J_2 sont données par

   $$y_2(x) = kx^2 - x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. D'abord $\lim_{x\to 0^+} y_1(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} y_2(x)$. Donc, si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors

$$(\star) \qquad y(x) = \begin{cases} k_1x^2 - x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ k_2x^2 - x & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Enfin, cette fonction est bien dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $(\star)$.

3.3 Equations différentielles linéaires du second ordre

3.3.1 Résolution de l'équation homogène

Définition 3.4. *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation du type*

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle I. L'équation

$$(E_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

est appelée l'équation homogène associée à (E) et l'équation complexe, d'inconnue r,

$$ar^2 + br + c = 0$$

est appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_0). On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

Définition 3.5. *Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On dit que la solution y de (E) vérifie la condition initiale (x_0, y_0, y_1) si $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.*

Le résultat suivant est fondamental. Il donne la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène et la forme des solutions de cette équation.

Théorème 3.3. *L'ensemble $S(E_0)$ des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. De plus,*

1. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$y = (k_1 + k_2x)e^{r_0x}, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$y = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$y = e^{\alpha x}\left[k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\right], \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit r une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique. Cherchons les solutions de (E_0) sous la forme $y = z(x)\mathrm{e}^{rx}$, où $z : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivables. On a :

$$y' = z(x)r\mathrm{e}^{rx} + z'\mathrm{e}^{rx} \quad \text{et} \quad y'' = zr^2\mathrm{e}^{rx} + 2r\mathrm{e}^{rx}z' + z''\mathrm{e}^{rx}.$$

Donc, puisque $ar^2 + br + c = 0$,

$$ay'' + by' + cy = a\mathrm{e}^{rx}z'' + (2ar + b)\mathrm{e}^{rx}z'.$$

Par conséquent, y est une solution de (E_0) si, et seulement si,

$$a\mathrm{e}^{rx}z'' + (2ar + b)\mathrm{e}^{rx}z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'' + \left(2r + \tfrac{b}{a}\right) z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z' + \left(2r + \frac{b}{a}\right) z = k_1 \in \mathbb{K}.$$

Ainsi z est solution d'une équation linéaire du premier ordre. La théorie des équations différentielles linéaires du premier degré donne la forme des solutions de cette équation :

$$\exists k_1 \in \mathbb{K}, \ \ z'(x) = k_1\mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int \left(2r + \frac{b}{a}\right) \mathrm{d}x.$$

Donc

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \ \ z(x) = k_1 \int \mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x + k_2.$$

Ainsi y est solution de (E_0) si et seulement si

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \ \ y = k_1\mathrm{e}^{rx} \int \mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x + k_2\mathrm{e}^{rx}.$$

On en déduit que $S_{\mathbb{K}}(E_0) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ avec $y_1(x) = \mathrm{e}^{rx}$ et $y_2 = \varphi_1 \displaystyle\int \mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x$. De plus

$$\left(\int \mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\right)' = \mathrm{e}^{-A(x)} \neq 0 \Rightarrow \int \mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \neq Cste.$$

Donc $\{y_1, y_2\}$ est libre ; c'est une base de $S_{\mathbb{K}}(E_0)$ et $\dim S_{\mathbb{K}}(E_0) = 2$.

Théorème 3.4 (Résolution dans $\mathbb{R}$). *On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$\varphi(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}, \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$\varphi(x) = (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}, \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}\omega$ et les solutions de (E_0) sont les fonctions*

$$\varphi(x) = e^{rx}\left[\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\right], \quad \textit{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe. Supposons $\Delta < 0$ et notons $r \pm \mathrm{i}\omega$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. Si φ est une fonction réelle solution de (E_0), alors

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \ \ \varphi(x) = k_1 e^{(r+\mathrm{i}\omega)x} + k_2 e^{(r-\mathrm{i}\omega)x}.$$

Comme φ est réelle, elle est égale à sa partie réelle, $\varphi = \dfrac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}$, et il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{2}\left[\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}\omega)x} + \left(\overline{k_1} + k_2\right)\mathrm{e}^{(r-\mathrm{i}\omega)x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}\omega)x} + \overline{\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}\omega)x}}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}\omega)x}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x) + \mathrm{Im}\left(k_1 + \overline{k_2}\right)\mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x).
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\alpha = \mathrm{Re}\left(k_1 + \overline{k_2}\right)$ et $\beta = \mathrm{Im}\left(k_1 + \overline{k_2}\right)$. Réciproquement, on vérifie que toutes fonctions de cette forme est solution de (E_0).

Exemple. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$(E_1)\ :\ y'' - \omega^2 y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' + \omega^2 y = 0.$$

1. Les racines de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont $\pm\omega$. Donc les solutions réelles de (E_1) sont les fonctions définies par

$$\varphi(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}, \ \ \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Les racines de l'équation caractéristique associée à (E_2) sont $\pm\mathrm{i}\omega$. Donc les solutions réelles de (E_2) sont les fonctions définies par

$$\varphi(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x), \ \ \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Résolution de l'équation avec second membre

La résolution de l'équation avec second membre est donc réduite à la recherche d'une solution particulière. A cet effet,

- toute astuce est bonne pour trouver une solution particulière ;
- on peut décomposer le second membre en morceaux plus simples, et utiliser le principe de superposition.

Par ailleurs, voici deux cas particuliers importants où l'on connait a priori la forme d'une solution particulière.

- Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution de la forme $\varphi_0(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$ où Q est un polynôme de même degré que P et
  . $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
  . $m = 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique.
  . $m = 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

- Si $f(x) = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)]$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution de la forme :

$$\varphi_0(x) = e^{\alpha x}x^m[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)],$$

  où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de même degré $n = \sup(\deg P_1, \deg P_2)$ et
  . $m = 0$ si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
  . $m = 1$ si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Exemple 1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - y' - 2y = (6x - 5)\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet deux racines distinctes 2 et -1. Donc les solutions de (E_0) sont de la forme

$$\varphi_0(x) = k_1\mathrm{e}^{2x} + k_2\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

2. -1 est racine simple de l'équation carctéristique, recherchons une solution particulière sous la forme

$$\varphi(x) = x(ax + b)\mathrm{e}^{-x} = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^{-x}.$$

   On dérive deux fois et on injecte dans (E), on aura :

$$-6ax + 2a - 3b = 6x - 5 \Leftrightarrow a = -1 \text{ et } b = 1.$$

   Donc $\varphi(x) = (-x^2 + x)\mathrm{e}^{-x}$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\psi(x) = k_1\mathrm{e}^{2x} + (-x^2 + x + k_2)\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - 2y' + 2y = 5\cos$. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $1 \pm \mathrm{i}$. Donc les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\varphi_0(x) = \mathrm{e}^x(k_1\cos x + k_2\sin x), \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$\varphi(x) = a\cos x + b\sin x.$$

On dérive deux fois et on injecte dans (E), on aura :

$$(a - 2b)\cos x + (2a + b)\sin x = \cos x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2b = 5 \\ 2a + b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array} \right.$$

Donc $\varphi(x) = \cos x - 2\sin x$ est une solution particulière de (E). Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{x}(k_1 \cos x + k_2 \sin x) + \cos x - 2\sin x, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante. Cette méthode s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ une base de $S_{\mathbb{K}}(E_0)$. Alors pour toute fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ il existe un unique couple (h_1, h_2) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que*

$$\varphi = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 \quad \textit{avec} \quad h_1'\varphi_1 + h_2'\varphi_2 = 0.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2$ où h_1 et h_2 sont deux fonctions dérivables vérifiant $h_1'\varphi_1 + h_2'\varphi_2 = 0$. Ainsi

$$\varphi' = h_1\varphi_1' + h_2\varphi_2' \quad \text{et} \quad \varphi'' = h_1'\varphi_1' + h_2'\varphi_2' + h_1\varphi_1'' + h_2\varphi_2''.$$

En injectant dans (E), on obtient : $a(h_1'\varphi_1' + h_2'\varphi_2') = f(x)$ car $a\varphi_i'' + b\varphi_i' + c\varphi_i = 0$ pour $i = 1, 2$.

Donc, h_1' et h_2' sont solutions du système

$$\begin{cases} h_1'\varphi_1 + h_2'\varphi_2 &= 0 \\ h_1'\varphi_1' + h_2'\varphi_2' &= \dfrac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

Ce système se résout facilement, ce qui donne h_1' et h_2', puis h_1 et h_2 par intégration.

Corollaire 3.2. *Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution ψ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.*

Démonstration. Les solutions de (E) sont de la forme $\psi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \varphi_0$ où

- . φ_0 est une solution particulière de (E). Celle-ci existe en vertu de la méthode de variation de la constante.
- . $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0).
- . $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sont des scalaires.

Donc ψ vérifie la condition initiale si, et seulement si,

$$\begin{cases} \psi(x_0) = y_0 \\ \psi'(x_0) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\varphi_1(x_0) + \beta\varphi_2(x_0) = y_0 - \varphi_0(x_0) \\ \alpha\varphi_1'(x_0) + \beta\varphi_2'(x_0) = y_1 - \varphi_0'(x_0) \end{cases}$$

Ce système possède bien une et une seule solution car, dans les trois cas, son déterminant est non nul. Ce qui prouve le résultat.

Chapitre 4

Courbes paramétrées

4.1 Définitions générales

Dans toute la suite, le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, et tout point du plan sera représenté par ses coordonnées (x, y) dans ce repère.

Définition 4.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^2$ une application. On note $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ les fonctions composantes de f.*

. *Le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ décrit une courbe Γ du plan appelée courbe paramétrée (de paramètre t).*

. *L'application f est un paramétrage de Γ et le système d'équations*

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$$

définit une paramétrisation de Γ. On note souvent $\Gamma = (I, f)$.

Remarque.

1. On peut parfois éliminer la variable t entre les deux équations pour obtenir y en fonction x et se ramener à une équation cartésienne. Souvent la fonction obtenue est compliquée.
2. Réciproquement, toute courbe définie par $y = g(x)$ peut être paramétrée par

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= g(t). \end{cases}$$

Exemples.

1. **Droites.** Soient $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ et la droite (AB) a pour paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) &= a_2 + t(b_2 - a_2), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. **Cercles.** Le cercle de centre $A = (a, b)$ et de rayon $R > 0$ a pour paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) &= a + R\cos t \\ y(t) &= b + R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

3. **Ellipses.** L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$, a pour paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t, \quad t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Définition 4.2. *Soit $\Gamma=(I,f)$ une courbe paramétrée. Le domaine de définition du paramétrage f est l'intersection des domaines de définition des fonctions x et y.*

Exemple. Soit Γ la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \sqrt{t-a} \\ y(t) &= \sqrt{b-t}. \end{cases}$$

1. Quel est le domaine de définition du paramétrage ?
2. Quelle est l'allure de la courbe Γ (calculer x^2+y^2) ?

4.2 Etude des branches infinies

Définition 4.3. *La courbe paramétrée Γ présente une branche infinie si au moins une des coordonnées tend vers l'infini quand t tend vers une valeur finie t_0 ou l'infini.*

Détermination pratique des branches infinies.

1. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\pm\infty$, alors Γ admet la droite d'équation $x=a$ comme asymptote verticale. Si $x(t)-a$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche. La courbe coupe l'asymptote lorsque $x(t)=a$.

2. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=a\in\mathbb{R}$, alors Γ admet la droite d'équation $y=a$ comme asymptote horizontale. Si $y(t)-a$ est positif, la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous. La courbe coupe l'asymptote lorsque $y(t)=a$.

3. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\pm\infty$, on étudie $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}$.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$, alors Γ admet une BPDA l'axe des x.
   (b) Si $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\pm\infty$, alors Γ admet une BPDA l'axe des y.
   (c) Si $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=a\in\mathbb{R}^*$, on étudie $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t)-ax(t)]$.
      - Si $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t)-ax(t)]=\pm\infty$, alors Γ admet une BPDA la droite d'équation $y=ax$.
      - Si $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t)-ax(t)]=b\in\mathbb{R}$, alors Γ admet la droite Δ d'équation $y=ax+b$ comme asymptote oblique. La position de la courbe par rapport à Δ est donnée par le signe de $y(t)-ax(t)-b$. Si cette expression est positive, la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon, elle est en dessous.

4.3 Etude des points particuliers

Définition 4.4. *On suppose que $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont dérivables en t_0. Le vecteur $\overrightarrow{f'}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé le vecteur dérivée de f en t_0.*

. *Si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq (0,0)$, le point $M(t_0)$ est dit point ordinaire. La droite T passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{f'}(t_0)$ est appelée tangente à Γ en $M(t_0)$. Une représentation paramétrique de T est donc*

$$T \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y & = & y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0). \end{array} \right.$$

. *Si $\overrightarrow{f'}(t_0) = (0,0)$, le point $M(t_0)$ est dit stationnaire ou singulier.*

Remarque.

1. Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet une tangente horizontale en $M(t_0)$.
2. Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la courbe admet une tangente verticale en $M(t_0)$.

Tangente en un point stationnaire. On suppose que les fonctions x et y sont plusieurs fois dérivables.

1. Si $\overrightarrow{f'}(t_0) = (0,0)$ et $\overrightarrow{f''}(t_0) \neq (0,0)$, la tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite T passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{f''}(t_0)$.
2. Si $\overrightarrow{f'}(t_0) = \cdots = \overrightarrow{f^{(p-1)}}(t_0) = (0,0)$ et $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) \neq (0,0)$, la tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite T passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$.

Etude locale. On désigne par p le premier entier non nul tel que $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) \neq (0,0)$:

$$p = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) \neq (0,0) \right\}$$

et par q le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)$ ne soient pas colinéaires :

$$q = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) \neq \lambda \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) \right\}.$$

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre q, c'est-à-dire le $DL_q(t_0)$:

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=p}^{q} \overrightarrow{f^{(k)}}(t_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!} + o\left((t - t_0)^q\right).$$

Or pour $p + 1 \leq k \leq q - 1$, $\overrightarrow{f^{(k)}}(t_0) = \lambda_k \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$. Donc

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & f(t_0) + \left[\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1]!} \cdots + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} \right] \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) \\ & & + \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0) \dfrac{(t - t_0)^q}{q!} + o\left((t - t_0)^q\right). \end{array}$$

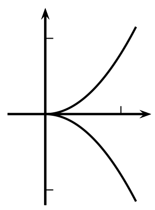
Si $x_1(t)$ et $y_1(t)$ désignent les composantes de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ dans la base $\left(\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)\right)$, on a les équivalences

$$x_1(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad y_1(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}.$$

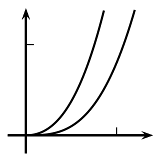
Selon la parité de p et de q, on a les résultats suivants :

Proposition 4.1 (Définition).

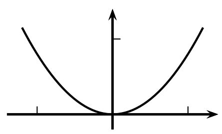
1. *Si p pair et q impair, au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t)$ a le signe de $(t - t_0)$: Γ traverse la tangente en $M(t_0)$, qui est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce.*
2. *Si p pair et q pair, au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$: Γ ne traverse pas la tangente et $M(t_0)$ est un point de rebroussement de 2^{nde} espèce.*
3. *Si p impair et q pair, au voisinage de t_0, $x_1(t)$ change de signe et $y_1(t) \geq 0$: Γ touche la tangente T et $M(t_0)$ est appelé "méplat".*
4. *Si p impair et q impair, au voisinage de t_0, $x_1(t)$ et $y_1(t)$ changent de signe : Γ traverse la tangente et $M(t_0)$ est un point d'inflexion.*



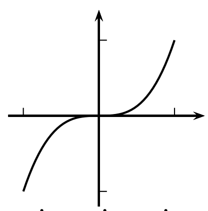
p pair, q impair



p pair, q pair



p impair, q pair



p impair, q impair

Définition 4.5. *On dit que le point $M \in \Gamma = (I, f)$ est un point double (ou multiple) s'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $M = f(t_1) = f(t_2)$.*

Remarque. Pour trouver les points doubles, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) &= x(t_2) \\ y(t_1) &= y(t_2) \end{cases}$$

avec $t_1 \neq t_2$. C'est en général un calcul assez lourd.

4.4 Plan d'étude, exemple

L'étude d'une courbe paramétrée comprend six étapes.

1. Domaine de définition. Déterminer le domaine D où la courbe est définie.

2. Recherche de périodes et symétries.

1. Si $\exists T > 0$ tel que $\forall t \in D$, $x(t) = x(t+T)$ et $y(t+T) = y(t)$, la fonction est T-périodique : on peut alors restreindre l'étude à l'intersection de D avec un intervalle de longueur T et on obtient ainsi toute la courbe.
2. Si D est symétrique, on restreint l'étude à $t \in D \cap \mathbb{R}^+$ si on a une des symétries suivantes :
   (a) $\forall t \in D$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. La courbe est parcourue 2 fois.
   (b) $\forall t \in D$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. On complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
   (c) $\forall t \in D$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On complète par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
   (d) $\forall t \in D$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On complète par symétrie par rapport à l'origine.

3. Etudier les branches infinies. Déterminer, s'il y en a, les asymptotes verticales, horizontales et obliques.

4. Dérivées et tableau de variation. Etudier les variations de x et y en étudiant les signes de x' et y' et représenter leurs variations dans un tableau.

5. Etudier les points particuliers. Déterminer, s'il y en a, les points stationnaires, points doubles et points d'intersection avec les axes.

6. Représentation graphique. Dessiner la courbe en utilisant les renseignements des étapes précédentes.

Remarque. Dans le tracé, le paramètre t n'apparaît pas. C'est $x(t)$ et $y(t)$ qui se lisent sur la courbe. Le paramètre t s'interprète comme le temps et le point $M(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t.

. Γ désigne alors la trajectoire du mobile,
. $\overrightarrow{f'}(t)$ est la vitesse du mobile et
. $\overrightarrow{f''}(t)$ est son accélération.

Quand t augmente, le tracé évolue comme suit :

1. Si $x \nearrow$ et $y \nearrow$, on se déplace vers la droite et vers le haut.
2. Si $x \nearrow$ et $y \searrow$, on se déplace vers la droite et vers le bas.
3. Si $x \searrow$ et $y \nearrow$, on se déplace vers la gauche et vers le haut.
4. Si $x \searrow$ et $y \searrow$, on se déplace vers la gauche et vers le bas.

Exemple. Etudier et tracer la courbe définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 + \dfrac{2}{t} \\ \\ y(t) & = & t^2 + \dfrac{1}{t^2} \, . \end{array} \right.$$