Séries numériques et intégrales généralisées

—

FICHE 1 : SUITES

Exercice 1. Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

1. $[0,3[$,
2. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$,
3. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$,
4. $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 2.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{mn}{n^2+m^2} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $A = \left\{\frac{mn}{n^2+m^2} \;/\; n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
3. Les déterminer.

Exercice 3. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'ils admettent une borne inférieure, une borne supérieure et les déterminer le cas échéant.
1. $A = \left\{\frac{2^n}{2^n-1},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
2. $B = \left\{\frac{x^3}{|x^3-1|},\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right\}$,
3. $C = \left\{\frac{x^n}{|x^n-1|},\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 4. Soit $X = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. En déduire que X a une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $E_n = \{k + \frac{n}{k} : k \in \mathbb{N}^*\}$.
a. Montrer que E_n a une borne inférieure et que $\inf E_n = \inf\{k + \frac{n}{k} : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.
b. Montrer que l'on a toujours $\inf E_n \geqslant 2\sqrt{n}$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 6. On définit une suite $(u_n)_n$ en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1. Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 2.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergeante et déterminer sa limite.

Exercice 7. Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ d'une suite $(u_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ converge elle-même vers ℓ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8.
1. Soit $(u_n)_n$ une suite non majorée. Montrer que $(u_n)_n$ possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.
2. Montrer que de toute suite réelle, on peut extraire une suite qui tend soit vers une limite réelle, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.

3. Est-il possible qu'une suite possède une suite extraite qui tend vers une limite finie, une qui tend vers $+\infty$ et une qui tend vers $-\infty$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer que toute suite possède une suite extraite monotone. Soit $(u_n)_n$ une suite quelconque. On défnit

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n, u_p < u_n\}.$$

1. On suppose que E est infini. En utilisant les éléments de E, construire une suite extraite de $(u_n)_n$ qui est strictement décroissante.
2. On suppose maintenant que E est fini. Soit $N = \max(E)$. Montrer que si $n > N$, alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geqslant u_n$. Construire ainsi une suite extraite de $(u_n)_n$ qui est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_n$ possède toujours une suite extraite monotone.
4. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 10. Montrer de deux manières différentes que la suite $((-1)^n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 11. Soit a_0 et a_1 deux nombres réels. On définit la suite $(a_n)_n$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| = \frac{|a_1 - a_0|}{2^n}$.
2. Montrer que pour tout n et p entiers, si $p \geqslant n+2$, a_p est compris entre a_n et a_{n+1}.
3. En déduire que la suite $(a_n)_n$ est de Cauchy et qu'elle converge.
4. Calculer la limite de $(a_n)_n$ en fonction de a_0 et a_1 (on pourra calculer $a_{k+1} - a_k$ en fonction de $a_1 - a_0$ et ajouter ces égalités pour k allant de 0 à n).

Exercice 12. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy.
4. En déduire que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 13.

1. Soit $0 < a < 1$, $c > 0$ deux réels et $(u_n)_n$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < c \cdot a^n$. Montrer que $(u_n)_n$ est de Cauchy.
2. La suite $(u_n)_n$ est-elle encore de Cauchy si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{n}$?

Exercice 14. Soit $(u_n)_n$ une suite positive, décroissante et tendant vers 0. On pose

$$v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n.$$

1. Soient p et k des entiers. Montrer que

$$0 \leqslant u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - + \ldots + (-1)^k u_{p+k} \leqslant u_p.$$

2. En déduire que la suite $(v_n)_n$ est de Cauchy et conclure sur la convergence de $(v_n)_n$.

Exercice 15. On considère la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Démontrer que l'équation $\sin x = x$ admet une unique solution dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 16. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \geqslant u_n \geqslant 1$ et u_n appartient à $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

On considère $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \geqslant 2\}$.

3. Montrer que A, vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, a une borne inférieure que l'on déterminera.
4. Montrer que A, vu comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, n'a pas de borne inférieure.