

TD - M52.

Viet-Anh NGUYEN

viet-anh.nguyen@univ-lille.fr

Exercices de remise à niveau :

Ex1: Soit  $\mathbb{K}$ , mq les ens ci-dessous et des espaces vectoriels de  $\mathbb{K}$ .

①  $E_1 := \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{K} \}$  muni de l'addit  $f+g$  des fonctions & de la multiplication par un nombre  $\lambda \in \mathbb{K}$ :  $\lambda f$ , i.e.:  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$   
 $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$ .

②  $E_2 := \{ (u_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \}$  l'ens des suites à valeurs de  $\mathbb{K}$ , muni de l'addit des suites:  $(u_m) + (v_m) := (u_m + v_m)$  & la multiplication par nmr  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
 $\lambda (u_m) := (\lambda u_m)$ .

③  $E_3 := \{ P \in \mathbb{K}[x] : \deg P \leq m \}$  où  $m \in \mathbb{N}$  est donné.  $E_3$  est muni de l'addit des polynômes  $P+Q$  et de la multpl  $\lambda P$  pr  $P, Q \in E_3$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Solut ①

Vérifions que  $(E, +)$  est un groupe abélien.

Soit  $f, g \in E_1$ , observons

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= [f + (g+h)](x) \end{aligned}$$

D'où  $(f+g)+h = f + (g+h)$ .

$\Rightarrow +$  est associative.

Neutre  $\forall x \in [0,1]$

L'élément neutre de  $E_1$  est la f zéro  $0_{E_1}(x) = 0$ ,

En effet,  $(f + 0_{E_1})(x) = f(x) + 0_{E_1}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

D'où  $f + 0_{E_1} = f$ ; de même  $0_{E_1} + f = f$ .

Considérons  $-f := (-1) \times f$

$\text{On a } [(-f)+f](x) = (-f)(x) + f(x) = (-1)f(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$  Inverse  $\forall x \in [0,1]$

D'où  $(-f)+f = 0_{E_1}$ .

De m̄  $f + (-f) = 0_{E_1}$ .

On a montré l'associativité, l'elt neutre, l'elt inverse.

Donc  $(E, +)$  est un groupe.

D'autre part, pr  $x, n \in [0,1]$ ,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{est commutatif} \\ &= g(x) + f(x) && \text{car } (K, +) \text{ pr } K \\ &= (g+f)(x) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f+g = g+f$$

Donc  $(E_1, +)$  est commutatif. (abélien).

Ensuite, vérifions que la multiplication scalaire est distributive par rapport à l'additif,

i.e. pr  $\lambda, \mu \in K$  &  $f, g \in E_1$ , on a

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$

$$(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$$

En effet pr  $x \in [0,1]$ ;

$$\begin{aligned} [\lambda(f+g)](x) &= \lambda(f+g)(x) \\ &= \lambda f(x) + \lambda g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\lambda(f+g)](x) &= \underbrace{\lambda f(x)}_{\in K} + \underbrace{\lambda g(x)}_{\in K} && \text{car } (K, +) \text{ est distributif} \\ &= (\lambda f + \lambda g)(x) = \cancel{\lambda f + \lambda g} && \text{par } K \dots \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } [\underbrace{(\lambda+\mu)f}_{\in K}] (x) &= \underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in K} \cdot f(x) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(x) \text{ car } \textcircled{*} \end{aligned}$$

Enfin, il me reste à vérifier que la multiplication associative, i.e.  $(\lambda \mu)f = \lambda \cdot (\mu f)$

En effet, pr  $n \in [0,1]$ , on a :

$$\begin{aligned} [\underbrace{[\lambda \cdot \mu] \cdot f}_{\in K}] (n) &= \underbrace{(\lambda \cdot \mu)}_{\in K} \cdot f(n) = \lambda (\mu f(n)) \text{ car } (K, \cdot) \text{ est associative.} \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot f(n)) \\ &= [\lambda \cdot (\mu \cdot f)](n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda (\mu \cdot f)$$

Etapes:

- montrons  $(E, +)$  est un groupe.  $\xrightarrow{\text{associativité}}$
- montrons  $(E, +)$  groupe abélien.  $\xrightarrow{\text{elt neutre}}$
- montrons distributivité multpl scolaire.  $\xrightarrow{\text{elt inverse}}$
- ① • montrons multpl scolaire associative.

sol 2. Il suffit de remplacer ds sol 1,  
l'intervalle  $[0,1]$  par  $\mathbb{N}$  partout.  
On prouve reste valable.

sol 3 Considérons  $I := \{0, 1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$  &  
 $F := \{f: I \rightarrow \mathbb{K}\}$  muni de l'addit &  
la multiplication scalaire  $\hat{\cdot}$  ds 1).

On a vu ds Q1 que  $F$  est un esp. Vect.

Mq  $F$  est équivalent à  $E_3$ .

Pn  $P \in E_3$ , on pt écrire :

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

pr  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$ .

Considérons  $\phi: E_3 \rightarrow F$

$$\phi(P) := f$$

$$\text{où } f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(m) = a_m.$$

$\phi$  est bijective.

D'autre part, pour  $P, Q \in E_3$  et  $\phi(P) = f$   
 $\phi(Q) = g$ .

$$\phi(P+Q) = h \text{ et } h(i) = f(i) + g(i)$$

$$\text{car } P(x) = f(m) x^m + \dots + f(1) x + f(0) \cdot x^0.$$

$$Q(x) = g(n) x^n + \dots + g(0) \cdot x^0.$$

$$(P+Q)(x) = (f(n)+g(n)) x^n + \dots + (f(0)+g(0)) x^0.$$

$$\text{D'où } \phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q).$$

On pt vérifier que  $\phi(\lambda P) = \lambda \phi(P)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\forall P \in E_3$ .

De  $(F, +, \cdot)$  et  $(E_3, +, \cdot)$  st gms.

Cr  $(F, +, \cdot)$  est un esp. vect. d'après 1),  
il en est de même pour  $(E_3, +, \cdot)$ .

(R4) 2ev si  $\mathbb{K}$ ,  $V$  &  $V^*$  st isomorphes s'il appli  
bijective  $\psi: V \rightarrow V^*$  q respecte les opérat.

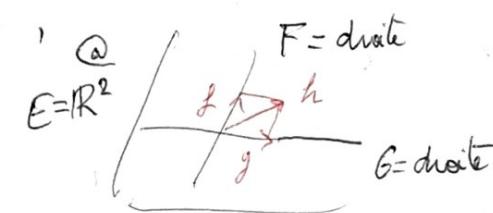
si  $\psi(v) = v^*$   $\Rightarrow \psi(u+v) = u^* + v^*$   
 $\psi(u) = u^*$   $\Rightarrow \psi(\lambda u) = \lambda u^*$ .

Bonus : Déterminer  $\dim E_3$ .

$$E_3 = \text{Vect}\{1, x, x^2, \dots, x^m\},$$

$$\text{pu } P \in E_3: P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \dim E_3 &= \text{Card}\{1, x, \dots, x^m\} \\ &= m+1. \end{aligned}$$



( $\Leftarrow$ ) si  $F \subset G$  alors  $F \cup G = G$  est un  $\textcircled{ev}$   
si  $G \subset F$  alors  $F \cup G = F$  est un  $\textcircled{ev}$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons par l'absurde  $F \cup G$  est  $\textcircled{jev}$   
mais  $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ .

$$\begin{aligned} \exists f \in F: f \in G. \\ \exists g \in G: g \in F. \end{aligned}$$

Considérons  $h := f + g$ . F \cup G par hypothèse

$h \in \text{Vect}(F, G)$  car  $f \in F, g \in G$  &  $h = f + g$ .

Or  $h \notin F$  car sinon  $g = h - f \in F$   
qui contredit  $g \notin F$

$h \notin G$  car sinon  $f = h - g \in G$

qui contredit  $f \notin G$ .

Donc  $h \in F \cup G$  mais  $h \notin F, h \notin G \Rightarrow \textcircled{?}$

Rappel: soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ - $\textcircled{ev}$ , soit  $F \subset E$ :

Par définit<sup>ion</sup>,  $F$  est  $\text{ sous-espace }$  si  
 $(F, +, \star)$  <sup>induite</sup> est un  $\textcircled{ev}$ .

On peut montrer  $F$  est  $\text{ss-esp. vect.}$  ( $F$  est stable)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall u_1, u_2 \in F: u_1 + u_2 \in F \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F: \lambda u \in F. \end{aligned}$$

④

⑤ 2)

## Normes, normes équivalentes

Ex 1

pr  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m$ ,

$$\text{on pose } \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^m |a_k|^2}$$

$$\|a\|_\infty = \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\|a\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k|$$

a) Mg pr  $p=1, 2, \infty$ ;  $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

R<sup>a</sup> soit esp. vect. normé.

On appelle **norme** sur  $E$  une application notée  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty]$  vérifiant

$$(i) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$(ii) \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(iii) \forall x, y \in E: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

a) Mg  $\|\cdot\|_1$  est une norme.

soit  $a := (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m$ , posons  $\vec{0} := (0, \dots, 0)$

$$b := (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\text{On a } \|a\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m |a_k| = 0 \Leftrightarrow |a_k| = 0 \quad \forall k$$

Donc  $\|\cdot\|_1$  vérifie (i).

$$\text{Ensuite, } \|a\|_1 = \|(a_1, \dots, a_m)\|_1 = \sum_{k=1}^m |a_k| = |a| \sum_{k=1}^m |a_k|.$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } \|a+b\|_1 &= \|(a_1+b_1, \dots, a_m+b_m)\|_1 = \sum_{k=1}^m |a_k+b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^m (|a_k| + |b_k|) \quad \text{car } |a_k+b_k| \leq |a_k| + |b_k| \\ &= \|a\|_1 + \|b\|_1 \quad \text{Dc } \|\cdot\|_1 \text{ vérifie (ii)} \end{aligned}$$

al  $\|\cdot\|_1$  est une norme.

Da m pr  $\|\cdot\|_2$  ;  $\left( \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \right)^{1/2}$ ; m raison que  $\|\cdot\|_1$  pr i), ii)

$$\begin{aligned} (iii) \|a+b\|_2 &= \|(a_1+b_1, \dots, a_m+b_m)\|_2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^m |a_k+b_k|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Observons que  $\|a+b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$

$$\Leftrightarrow \|a+b\|_2^2 \leq \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2\|a\|_2\|b\|_2$$

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 \leq \cancel{\sum |a_k|^2 + \sum |b_k|^2 + 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}}$$

en utilisant l'identité, p.e.  $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$$

Le membre de gauche de la dernière ligne est

$$\sum |a_k|^2 + \sum |b_k|^2 + \sum a_k \bar{b}_k + \sum \bar{a}_k b_k$$

Par conséq., la dernière égalité est équivalente à

$$\sum a_k \bar{b}_k + \sum \bar{a}_k b_k \leq 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$$

(R\*) Inégalité de Cauchy-Schwarz,

si  $z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$  alors

$$\left| \sum_{k=1}^m z_k w_k \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m |z_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$|\sum a_k \bar{b}_k| \leq \sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$$

Il vient donc :

$$|\sum a_k \bar{b}_k + \sum \bar{a}_k b_k| \leq |\sum a_k \bar{b}_k| + |\sum \bar{a}_k b_k|$$

$$= 2|\sum a_k \bar{b}_k| \text{ car } \sum \bar{a}_k b_k = (\sum a_k \bar{b}_k)$$

$$\leq 2\sqrt{(\sum |a_k|^2)(\sum |b_k|^2)}$$

Or la dernière inégalité est valable.

D'où iii) vérifié au II.B2.

Conditions sur la  $\|\cdot\|_\infty$ ,

(i)  $\|a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| = 0$   
 $\Leftrightarrow |a_k| = 0, \forall k \Leftrightarrow a_k = 0, \forall k \Leftrightarrow a = 0.$   
D'où  $\|\cdot\|_\infty$  vérifie (i)

Puis  $\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_m)\|_\infty$   
 $= \max_{1 \leq k \leq m} |\lambda a_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| = |\lambda| \|a\|_\infty$

D'où  $\|\cdot\|_\infty$  vérifie (ii).

Ensuite vérifions  $\triangle$ ,

$$\|a+b\|_\infty = \|(a_1+b_1, \dots, a_m+b_m)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k+b_k|$$

Observons pr  $1 \leq k \leq m$ ,

$$|a_k+b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| + \max_{1 \leq i \leq m} |b_i|$$
$$= \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$$

$$\text{de } \|a+b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Finis (iii) est vérifié.

D'où  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme.

b) Montrons que les 3 normes sont équivalentes.

(R1) Deux normes  $\|\cdot\|_I$  &  $\|\cdot\|_II$  sont équivalentes  
s'il existe 2 constantes  $c_1, c_2 > 0$  tq  $\forall n \in \mathbb{E}$ ,

$$c_1 \|x\|_I \leq \|x\|_II \leq c_2 \|x\|_I$$
$$\Leftrightarrow c_1 \leq \frac{\|x\|_II}{\|x\|_I} \leq c_2.$$

$$\text{Il suffit de montrer } \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \quad (1)$$
$$\text{et } \|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_2 \quad (2)$$

Si  $a \in \mathbb{K}^n$ , on a:  $\|a\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| = |a_{k_0}|$

$$= \sqrt{|a_{k_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m |a_k|^2} = \|a\|_2$$

Ensuite  $\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \Leftrightarrow \|a\|^2 \leq \|a\|_1^2$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k| \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^m |a_k|^{\frac{1}{2}} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} |a_i||a_j|^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} |a_i||a_j|^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et vrai.}$$

D'où  $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ .

Finis on a montré l'inégalité (1).

$Mg$  sur  $\|\cdot\|_\infty > \|\cdot\|_1$ ,

$$\text{on a } \|\alpha\|_1 = \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq \sum_{k=1}^m \|\alpha\|_\infty$$

car  $|\alpha_k| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |\alpha_i| = \|\alpha\|_\infty$

$\forall 1 \leq h \leq m$ ,

de  $\|\alpha\|_1 \leq m \|\alpha\|_\infty$  d'où 2).

en conclusion (1), (2), (3) : les 3 normes  
sont équivalentes.

c) On suppose  $K = \mathbb{R}^2, n = 2$ .

Dessiner les boules unités par rapport  
aux 3 normes.

$$E = K^2, \quad a(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

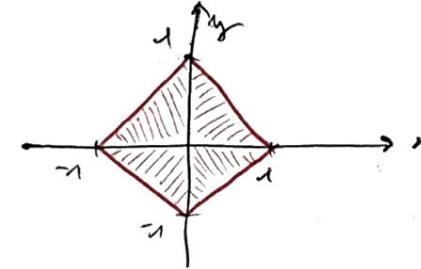
$$B^1 := \{a \in E, \|a\|_1 < 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

= l'intérieur du carré de sommets

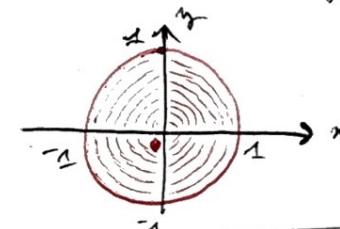
$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1). \quad \text{Q.E.D.}$$

Norme 1



$$B^2 := \{a \in E, \|a\|_2 < 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} = \text{le disque unité}$$

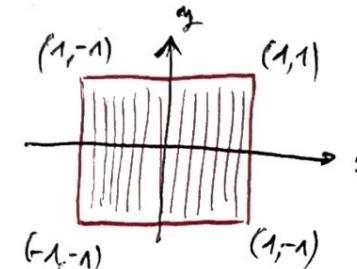


$$B^\infty := \{a \in E, \|a\|_\infty < 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$

= l'intérieur du carré de sommets  
(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)



E<sub>02</sub>  $\hat{E}$  K-norme,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  normes sur  $\hat{E}$ .  
 P<sub>a</sub> $x \in E, \epsilon > 0$ , note  $B_i(x, \epsilon)$  la boule ouverte de centre  $x$ , de rayon  $\epsilon$ , pour  $\|\cdot\|_i$ .

a) Supposons  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ .

(i) Soit  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in E$

$$k^{-1} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k \|x\|_2.$$

Supposons  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ,  $\exists c_1, c_2 > 0$  tq  
 $\forall x \in E, c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$  (par définition).

(ii) et  $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$   
 $B_2(0, 1) \subset B_1(0, k)$

soit  $x \in B_1(0, 1)$  tq, on a  $\|x\|_1 < 1$  d'après a).

$$k^{-1} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 < 1 \text{ dc } \|x\|_2 < k.$$

soit  $x \in B_2(0, k)$  d'où  $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$ .

soit  $x \in B_2(0, 1)$  tq, on a  $\|x\|_2 < 1$ , d'après a)

$$\|x\|_1 \leq k \|x\|_2 < k \text{ dc } \|x\|_1 < k.$$

d'où  $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$ .

b) n'applies pas  $\exists \delta > 0$  tq  $B_1(0, 1) \subset B_2(0, \delta)$ .

Soit  $x \in E$  tq

considérons le vecteur

$$x' := \frac{1}{2\|x\|_1} \times x \quad ; \text{ on a } \|x'\|_1 = \frac{1}{2\|x\|_1} \|x\|_1 = \frac{1}{2} < 1$$

dc  $x' \in B_1(0, 1)$ . D'après l'hypothèse, on a  $x' \in B_2(0, \delta)$ .

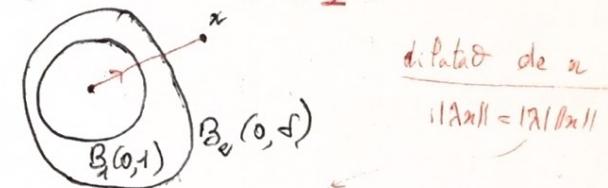
$$\text{Il vient que } \|x'\|_2 < \delta \Rightarrow \frac{1}{2\|x\|_1} \|x\|_2 < \delta$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 < 2\delta \|x\|_1$$

c) et concl<sup>o</sup> NBS en termes de boules parque  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ .

D'après a)  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Rightarrow B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$  et  $B_2(0, 1) \subset B_1(0, k)$

d'après b), les implications ci-dessus impliquent que  $2\delta = k$   
 $\|x\|_2 \leq k \|x\|_1$  et  $\|x\|_1 \leq k \|x\|_2$ , ie  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ .



d'après de a)

$$\|Ax\| = \|A/Bx\|$$

E.S.  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  et  $\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx < \infty$  si et seulement si  $p \geq 2$

$$\|u\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} < \infty \quad \Leftrightarrow p = 1, 2$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n| < \infty$$

$$\begin{aligned} \|uv\|_1 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||v_n| \\ \|u\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \end{aligned}$$

Mq a)  $\ell^p(\mathbb{K})$  est HK

b)  $\|\cdot\|_p$  est norme sur  $\ell^p(\mathbb{K})$

a) On montre que  $u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} \text{et que } (\ell^p(\mathbb{K}), +) \text{ g.p. } & \Rightarrow u + v \in \ell^p(\mathbb{K}) \\ \text{et que } (\ell^p(\mathbb{K}), \cdot) \text{ g.p. } & \Rightarrow \lambda u \in \ell^p(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

On montre que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\ell^p(\mathbb{K})$ .

1) montrer  $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$  &  $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$$\|u+v\|_p =$$

$$|u_n| =$$

a)

3)

8) cas  $p = 1$

$$\begin{aligned} \|u+v\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n+v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{de } \|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$$

comme  $\|u\|_1 < \infty$ ,  $\|v\|_1 < \infty$ , il vient que  $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc  $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$ .

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$

$$\text{de } \|\lambda u\|_1 = |\lambda| \|u\|_1 \quad \& \quad \lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$$

\* cas  $p = \infty$ : D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n+v_n|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_2 + \|v\|_2$$

$$\text{donc } \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2.$$

comme  $\|u\|_2 < \infty$ ,  $\|v\|_2 < \infty$ ; il vient que  $\|u+v\|_2 < \infty$ ,  $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part,  $\|\lambda u\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2 \right)^{1/2} = |\lambda|^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|u\|_2$ . Donc  $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2$  et  $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$

\* cas  $p = \infty$ : On a  $\|u+v\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n+v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|+|v_n|)$

$$\text{de } \|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$$

$$= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

comme  $\|u\|_\infty < \infty$ ,  $\|v\|_\infty < \infty$ , il vient que  $\|u+v\|_\infty < \infty$

C'est à dire  $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ .

E3 pour  $p=1, 2, \infty$ ; on définit  $\ell^p(\mathbb{K})$  tels que

$u = (u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  tq

$$\|u\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p=1, 2$$

$$\& \|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n| < \infty$$

$$\begin{aligned} \|u+v\|_1 &\leq \|u\|_1 + \|v\|_1 \\ \|xu\|_1 &= |\lambda| \|u\|_1 \end{aligned}$$

Mq a)  $\ell^p(\mathbb{K})$  est  $\mathbb{K}$  (E).  
b)  $\|\cdot\|_p$  est norme sur  $\ell^p(\mathbb{K})$ .

a) On montre que si  $u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$1) \text{mg } (\ell^p(\mathbb{K}), +) \text{ gpe} \rightarrow \text{ass. + clm} + \text{inv}$$

$$2) \text{mg } (\ell^p(\mathbb{K}), \otimes) \text{ gpe} \text{ abcl}$$

$$3) \text{mg dists \& ass mptpl sociale}$$

1) mg  $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$  &  $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$$\|u+v\|_2 =$$

$$\|\lambda u\|_2 =$$

2)

3)

8) cas  $p=1$

$$\begin{aligned} \|u+v\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n+v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n| \\ &= \|u\|_1 + \|v\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{de } \|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$$

comme  $\|u\|_1 < \infty$ ,  $\|v\|_1 < \infty$ , il vient que  $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc  $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$ .

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1$$

$$\text{de } \|\lambda u\|_1 = |\lambda| \|u\|_1 \quad \& \quad \lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$$

\* cas  $p=\infty$ : D'après l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned} \|u+v\|_2 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n+v_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_2 + \|v\|_2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2.$$

comme  $\|u\|_2 < \infty$ ,  $\|v\|_2 < \infty$ ; il vient que  $\|u+v\|_2 < \infty$ ,  $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part,  $\|\lambda u\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2 \right)^{1/2} = \left( |\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}$

$$= |\lambda| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|u\|_2. \quad \text{Donc } \|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2 \text{ et } \lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$$

\* cas  $p=\infty$ : On a  $\|u+v\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}^*} |u_m+v_m| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}^*} (|u_m|+|v_m|)$

$$\text{de } \|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

$$\leq \sup_{m \in \mathbb{N}^*} |u_m| + \sup_{m \in \mathbb{N}^*} |v_m|$$

$$= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

comme  $\|u\|_\infty < \infty$ ,  $\|v\|_\infty < \infty$ , il vient que  $\|u+v\|_\infty < \infty$

et de  $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ .

D'autre part,  $\|\vartheta_{\text{null}}\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} |\vartheta_{\text{null}}(m)| = |\lambda| (\sup_{m \in \mathbb{N}} |m|)$  car  $f$  est cont  
 $= |\lambda| \|\vartheta\|_\infty$

Donc  $\|\vartheta_{\text{null}}\|_\infty = |\lambda| \|\vartheta\|_\infty$  &  $\vartheta_{\text{null}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ .

Ex 9. Soit  $-\infty < a < b < \infty$  &  $C([a, b])$  l'espace des fonctions cont sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On définit pour  $f \in C([a, b])$  &  $p=1, 2, \infty$ ,

$$\|\vartheta f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p=1, 2,$$

$$\text{et } \|\vartheta f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

a) Mg pour  $p=1, 2, \infty$ :  $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$  est espace vectoriel normé.

Comme  $C([a, b])$  est un espace vectoriel, il suffit de mg

pour  $p=1, 2, \infty$ , on a:  $\forall f, g \in C([a, b])$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ :

$$(i) \quad \|\vartheta f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$(ii) \quad \|\vartheta(\lambda f)\|_p = |\lambda| \cdot \|\vartheta f\|_p$$

$$(iii) \quad \|\vartheta(f+g)\|_p \leq \|\vartheta f\|_p + \|\vartheta g\|_p.$$

Vérification (i):

$$*\text{cas } p=1: \|\vartheta f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

$$*\text{cas } p=2: \|\vartheta f\|_2 = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, \forall t \text{ car } f \text{ cont} \Leftrightarrow f = 0.$$

$$*\text{cas } p=\infty: \|\vartheta f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, \forall t \Leftrightarrow f = 0.$$

Vérification (ii):

$$*\text{cas } p=1: \|\vartheta(\lambda f)\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \|\vartheta f\|_1$$

$$*\text{cas } p=2: \|\vartheta(\lambda f)\|_2 = \left( \int_a^b |\lambda f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|\vartheta f\|_2.$$

$$*\text{cas } p=\infty: \|\vartheta(\lambda f)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = |\lambda| \|\vartheta f\|_\infty$$

Vérification (iii):

$$*\text{cas } p=1: \|\vartheta(f+g)\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|\vartheta f\|_1 + \|\vartheta g\|_1.$$

$$*\text{cas } p=2: \text{ D'après l'inégalité de Minkowski,} \\ \|\vartheta(f+g)\|_2 = \left( \int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

mais  $\forall 1 < p < \infty$  ici  $p=2$

$$= \|\vartheta f\|_2 + \|\vartheta g\|_2$$

\*cas  $p=\infty$ :

$$\begin{aligned} \|\vartheta(f+g)\|_\infty &= \sup_{t \in [a, b]} |f(t)+g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |g(t)|) \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)| \\ &= \|\vartheta f\|_\infty + \|\vartheta g\|_\infty. \end{aligned}$$

6) Montrer que les 3 normes ne sont pas équivalentes.

indic considérer  $f_m(t) = t^m$ ,  $m \geq 1$   
calculer  $\|f_m\|_p$  pour  $p = 1, 2, \infty$ .

\* cas  $p=1$ :  $\|f_m\|_1 = \int_a^b |t^m| dt = \left[ \frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}$

\* cas  $p=2$ :  $\|f_m\|_2 = \left( \int_a^b |t^m|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_a^b t^{2m} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \left[ \frac{t^{2m+1}}{2m+1} \right]_0^b \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{2m+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}$

\* cas  $p=\infty$ :  $\|f_m\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |t^m| = 1$ .

•  $\|\cdot\|_1 \neq \|\cdot\|_2$  car  $\frac{\|f_m\|_1}{\|f_m\|_2} = \frac{\frac{1}{m+1}}{\frac{1}{\sqrt{2m+1}}} = \frac{\sqrt{2m+1}}{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1$

•  $\|\cdot\|_2 \neq \|\cdot\|_\infty$  car  $\frac{\|f_m\|_1}{\|f_m\|_\infty} = \frac{\frac{1}{m+1}}{\frac{1}{m+1}} = 1 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

•  $\|\cdot\|_2 \neq \|\cdot\|_\infty$  car  $\frac{\|f_m\|_2}{\|f_m\|_\infty} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2m+1}}}{1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

Ex 5 on considère  $E = \mathbb{K}[x]$ , le

$\mathbb{K}$ -algèbre des polynoms à coeff dans  $\mathbb{K}$  & on pose pour

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \& \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

sont la suite des polynômes  $P_n(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k} x^k$

a) Vérifier que  $\|\cdot\|_1$  &  $\|\cdot\|_\infty$  sont normes sur  $E$ .

Écrivons, quitte à considérer qq coeff  $a_k, b_k$  comme 0,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Vérifions que  $\|\cdot\|_1$  est une norme.

(i)  $\|P\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n |a_k| = 0 \Leftrightarrow a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow P = 0$

(ii)  $\|\lambda P\|_1 = \sum_{k=0}^n |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^n |a_k| = |\lambda| \|P\|_1$

Ciii) Comme  $(P+Q) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$ , on a  $\textcircled{A}$ , donc  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$ .

$$\begin{aligned}\|P+Q\|_1 &= \sum_{k=0}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^n (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq \sum |a_k| + \sum |b_k| = \|P\|_1 + \|Q\|_1.\end{aligned}$$

D'où  $\|P+Q\|_1 \leq \|P\|_1 + \|Q\|_1$

Donc  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $E$ .

Ensuite vérifions  $\|\cdot\|_\infty$  est norme sur  $E$ .

$$\begin{aligned}(i) \|P\|_\infty &= 0 \Leftrightarrow \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| = 0 \\ &\Leftrightarrow a_k = 0, \forall 0 \leq k \leq n \\ &\Leftrightarrow P = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii) \|\lambda P\|_\infty &= \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda a_k| = |\lambda| (\max_{0 \leq k \leq n} |a_k|) \\ &= |\lambda| \|P\|_\infty\end{aligned}$$

D'où  $\|(\lambda P)\|_\infty = |\lambda| \|P\|_\infty$ .

(iii) comme  $\textcircled{B}$ , on a

$$\|P+Q\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq \max_{0 \leq k \leq n} (|a_k| + |b_k|)$$

$$\leq \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{0 \leq k \leq n} |b_k| = \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

D'où  $\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ .

6) Étudier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x) - (1+x)\|_p$  pour  $p = 1, \infty$ .

soit pour  $n \geq 1$ ,  $P_n(x) = 1+x + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n} X^k$

alors  $P_n(x) - (1+x) = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n} X^k$

Donc  $\|P_n(x) - (1+x)\|_1 = \left\| \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n} X^k \right\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n}$

$$= (n+1) \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\|P_n(x) - (1+x)\|_\infty = \max_{2 \leq k \leq n+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

c) q pr-n déduire?

Qc comme  $\frac{\|Q_n\|_\infty}{\|Q_n\|_1} = \frac{1/n}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

et  $Q_n(x) = P_n(x) - (1+x)$

Les 2 normes ne sont pas équivalentes.

Ex soit  $E = \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -ev des matrées  $m \times m$  à coeff dans  $\mathbb{K}$ .

Pu A =  $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in E$ , on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \geq 0$$

a) Vérifier que  $N$  est une norme sur  $E$

soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}, B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in E$

$$(i) N(A) = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = 0, \forall 1 \leq j \leq m.$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq m; \forall 1 \leq j \leq m.$$

$$\Leftrightarrow A = 0_E \text{ mat nulle.}$$

$$(ii) N(\lambda A) = \cancel{\lambda N(A)} \Rightarrow \max_{i=1}^m |\lambda a_{ij}| = \cancel{\lambda N(A)}$$

$$\Leftrightarrow \max_{i=1}^m |\lambda| |a_{ij}| = \cancel{\lambda \max_{i=1}^m |a_{ij}|} = |\lambda| N(A)$$

$$\Rightarrow N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$$

(iii) Prouvons que  ~~$N(A+B) \leq N(A) + N(B)$~~

Comme  $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$

$$\text{on a } N(A+B) = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}+b_{ij}| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m (|a_{ij}|+|b_{ij}|)$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m (|a_{ij}| + |b_{ij}|_0)$$

$$\leq \cancel{\max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|} + \cancel{\max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |b_{ij}|_0}$$

$$= N(A) + N(B)$$

$$\text{Dc } N(A+B) \leq N(A) + N(B).$$

Donc  $N(A)$  est une norme sur  $E$ .

$$\text{Puis } N(A+B) \leq \sum |a_{ij}| + |b_{ij}|_0 = \sum |a_{ij}|_0 + \sum |b_{ij}|_0$$

$$\text{or } \sum |a_{ij}|_0 \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = N(A)$$

$$\sum |b_{ij}|_0 \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |b_{ij}| = N(B)$$

b) Mg t q  $(A, B) \in E \times E : N(AB) \leq N(A)N(B)$   
 (N est une  $\mathbb{N}^m$ ).

Prenons  $C = AB$ , écrivons  $A = (a_{ij})$  &  $B = (b_{ij})$   
 &  $C = (c_{ij})$ . On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m.$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient que } N(AB) &= N(C) = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |c_{ij}| \\ &= \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right| \end{aligned}$$

Soit  $1 \leq j \leq m$ : on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right| &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^m |b_{kj}| \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \leq N(A)N(B) \end{aligned}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \leq N(A)$$

c) Soit  $A \in E$ , on considère  $u_k = \frac{A^k}{k!}, k \geq 1$   
 Mg  $(u_k)_{k \geq 1}$  converge vers 0 ds  $(E, N)$ .

$$\begin{aligned} \text{D'après b), } N(u_k) &= N\left(\frac{A^k}{k!}\right) = \frac{1}{k!} N(A^k) \\ &= \frac{1}{k!} N(A \dots A) \leq \underbrace{\frac{1}{k!} N(A) \dots N(A)}_{k \text{ fois}} \\ &= \frac{[N(A)]^k}{k!} \end{aligned}$$

En posant  $t = N(A) \geq 0$ , on a:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad \& \text{dc } \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Par conséq,  $N(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  & dc  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  ds  $(E, N)$ .

## Ouverts, fermés, intérieur, adhérence

E.8 Parmi les ss-ens, préciser ce qui est ouverts, fermés. Ds chq cas préciser l'intérieur, adhérence, la frontière.

a) les ss-ens de  $\mathbb{R}$ :

(i)  $A_1 = \mathbb{R}$

 ( $E, II.11$ ) ev.m.

- $O \subseteq E$  est dit "ouvert" si  $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$ .
- $F \subseteq E$  est dit "fermé" si  $F^c = E \setminus F$  est "ouvert".

• l'intérieur d'un ens  $A \subseteq E$ , noté  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

$$\overset{\circ}{A} := \{x \in A : \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A\}$$

• l'adhérence d'un ens  $A \subseteq E$ , noté  $\overline{A}$ , est le plus petit fermé contenant  $A$ .  
⚠ invraisemblable

$$\overline{A} := \{x \in E : \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

• la frontière de  $A$ , noté  $\partial A$  est  $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

(i)  $A_1 = \mathbb{R}$  Prenons  $\forall x \in \mathbb{R}, B(x, r) \subset \mathbb{R}$ .

- C'est un ouvert. C'est aussi un fermé car  $A_1^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$  est un ouvert.
- $\overset{\circ}{A}_1 = A_1 = \mathbb{R}$  car  $A_1$  est un ouvert.
- $\overline{A}_1 = A_1 = \mathbb{R}$  car  $A_1$  est un fermé.
- $\partial A_1 = \overline{A}_1 \setminus \overset{\circ}{A}_1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ .

(ii)  $A_2 = \mathbb{Q}$

• Ce n'est pas un ouvert car  $0 \in \mathbb{Q}$  mais  $\forall r > 0 : B(0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\} \not\subseteq \mathbb{Q}$

car il y a des nombres irrationnels du type  $\frac{\sqrt{2}}{m}$  et  $m \in \mathbb{N}$  tq  $\frac{\sqrt{2}}{m} < r$ , de  $\frac{\sqrt{2}}{m} \in B(0, r)$

$$\frac{\sqrt{2}}{m} \notin \mathbb{Q}$$

• Ce n'est pas un fermé car  $\mathbb{Q}^c$  n'est pas ouvert.

En effet  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$  mais  $\forall r > 0 :$

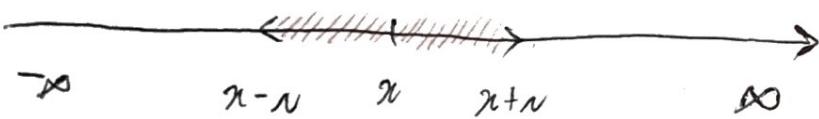
$$B(\sqrt{2}, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \sqrt{2}| < r\} \not\subseteq \mathbb{Q}^c$$

car il existe des rationnels  $\frac{m}{n}$  tq  $m, n \in \mathbb{N}$  tq

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| < r, \text{ & de :}$$

$$\frac{m}{n} \in B(\sqrt{2}, r) \text{ mais } \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q}^c$$

- $\overset{\circ}{A}_2 = \emptyset$  car le boule  $B(x, r)$  contient des irrationnels.
- $\overline{A}_2 = \mathbb{R}$  car  $\forall n \in \mathbb{R}, \forall r > 0, B(x, r)$  contient des rationnels.



Preuve rapide

$$\left| \frac{m}{n} - x \right| < r \Leftrightarrow |mn - nx| < nr$$

Il suffit prendre  $n > \frac{1}{r}$  &  $m = \lfloor nx \rfloor$  alors :

$$|mn - nx| = |\lfloor nx \rfloor - nx| < 1 < nr$$

Pas de preuve intuivis rationnels : voir  $\sqrt{2}$ .

$$\bullet \partial A_2 = \overline{A}_2 \setminus \overset{\circ}{A}_2 = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

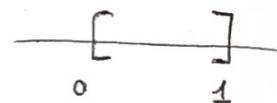
- $A_3 = [0, 1]$ ,  $A_3$  n'est pas ouvert car  $0 \in A_3$  mais  $\forall r > 0, B(0, r) \not\subset A_3$  car  $-\frac{r}{2} \in B(0, r)$  mais  $-\frac{r}{2} \notin A_3$ .

$\Rightarrow A_3$  est un fermé car  $A_3^c = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$ .

$$\bullet \overset{\circ}{A}_3 = ]0, 1[$$

- $\overline{A}_3 = A_3 = [0, 1]$  car il est fermé.

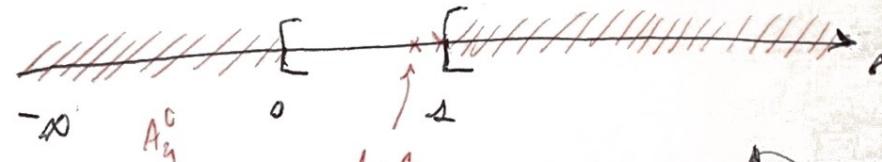
$$\bullet \partial A_3 = \overline{A}_3 \setminus \overset{\circ}{A}_3 = [0, 1] \setminus ]0, 1[ = \{0, 1\}$$



- $A_4 = [0, 1]$ , ce n'est pas ouvert car  $0 \in A_4$  mais  $\forall r > 0, B(0, r) \not\subset A_4$  car  $-\frac{r}{2} \in B(0, r)$  mais  $-\frac{r}{2} \notin [0, 1]$ .

ce n'est pas fermé car  $A_4^c = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$  n'est pas ouvert. En effet  $1 \in A_4$  mais  $B(1, r) \not\subset A_4^c$ .  $\forall r > 0$ .

$$\overset{\circ}{A}_4 = ]0, 1[$$



$$\bullet \overset{\circ}{A}_4 = ]0, 1[$$

- $\overline{A}_4 = [0, 1]$  contenant  $A_4$

$$\bullet \partial A_4 = \overline{A}_4 \setminus \overset{\circ}{A}_4 = [0, 1] \setminus ]0, 1[ = \{0, 1\}$$

(ii)  $A_5 = ]-\infty, 1]$

- C'est pas un ouvert, car  $1 \in A_5$   
mais  $\forall r > 0$ ,  $B(1, r) \not\subset A_5$ .

En effet,  $1 + \frac{r}{2} \in B(1, r)$   
mais  $1 + \frac{r}{2} \notin ]-\infty, 1]$

- C'est un fermé car  $A_5^c = ]1, \infty[$  est un ouvert.

$$]1, \infty[ = \bigcup_{m=1}^{\infty} ]1, m[ = \bigcup_{m=2}^{\infty} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}\right).$$

$\overset{\circ}{A}_5 = ]-\infty, 1[$

- $\overset{\circ}{A}_5 = A_5$  car il est fermé.

$$\begin{aligned} \partial A_5 &= \overline{A_5} \setminus \overset{\circ}{A}_5 = ]-\infty, 1] \setminus ]-\infty, 1[ \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$

$\rightarrow A_6 = [1, \infty[$  (idem que  $A_5$  en chgt vt<sup>10</sup>)  
 $A_6 = ]1, \infty[$ ,  $\overline{A_6} = A_6$ ,  $\partial A_6 = \{1\}$ ,

(iii)  $A_7 = \left\{ \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

- C'est pas un ouvert car  $1 \in A_7$ .  $\forall r > 0$   
 ~~$\exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que~~  $B(1, r) \not\subset A_7$ .

Il suffit de prendre  $1 + \frac{r}{2} \in B(1, r)$  mais  $1 + \frac{r}{2} \notin A_7$   
car  $n \in A_7 \Rightarrow 0 < n \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{r}{2} > 1$ .

Le n'est pas fermé car  $0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$  &  $\frac{1}{m} \in A_7$   
On en déduit  $0 \in \overline{A_7}$ . Or  $0 \notin A_7$ .

- $A_7 = \emptyset$  car si  $x \in A_7$  alors  $\exists r > 0$   
tel que  $x < r$  &  $B(x, r) \subset A_7$ .

Ce  $B(x, r)$  contient une astre d'êts &  
 $B(x, r) \cap A_7 = \left\{ \frac{1}{n}, n - r < \frac{1}{n} < x + r \right\}$  est  
un ens. fini.

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+r} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset ]1, \infty[$$

- $\overline{A_7} = A_7 \cup \{0\}$  car  $(A_7 \cup \{0\})^c = ]-\infty, 0[$  &  $A_7 \cup \{0\}$  est fermé.
- $\partial A_7 = \overline{A_7} \setminus \overset{\circ}{A}_7 = (A_7 \cup \{0\}) \setminus \emptyset = A_7 \cup \{0\}$ .

b) Justifier si  $A_{10}$  ouverts, fermés,  $\bar{A}$ ,  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\partial A$  ?

(i)  $A_g = [-2, 1] \times [0, 3]$

• Mq  $A_g$  n'est pas un ouvert. Soit  $x = (0, 0) \in A$ , le point  $(0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(0, 0)$  mais  $\notin A$ .

• Mq  $A_g$  n'est pas un fermé.  
Soit  $x = (1, 1) \notin A$ ,  $\varepsilon > 0$

Pour  $\varepsilon = 6$ , point  $(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1) \in B_\varepsilon(1, 1) \cap A$ .

Qc  $B_\varepsilon(1, 1) \cap A \neq \emptyset$ . Donc cette boule n'est pas contenue dans  $\mathbb{R} \setminus A = A^c$ .

•  $\overset{\circ}{A}_g = [-2, 1] \times [0, 3]$

•  $\overline{A}_g = \emptyset$  car ce n'est pas fermé.

•  ~~$\partial A_g = \overline{A}_g \setminus \overset{\circ}{A}_g = \emptyset \times [-2, 1] \times [0, 3]$~~

•  $\overline{A}_g = [-2, 1] \times [0, 3]$

•  $\partial A_g = \overline{A}_g \setminus \overset{\circ}{A}_g = [-2, 1] \times [0, 3] \setminus [-2, 1] \times [0, 3]$   
 $= \{(-2, 0), (1, 3)\}$ .

(ii)  $A_{10} = [0, 1] \times \{9\}$

• Mq  $A_{10}$  n'est pas un ouvert car  $(0, 9) \in A_{10}$  mais  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(0, 9) \not\subset A_{10}$  car  $\frac{-\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(0, 9)$  mais  $(-\frac{\varepsilon}{2}, 9) \notin A_{10}$ .

• Mq  $A_{10}$  est un fermé car  $A_{10}^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$   
Union d'ens ouvert est un ouvert.  $[-\infty, 9] \cup [9, \infty)$   
De son complémentaire est un ouvert.  
Donc cet ens est un fermé.

•  $\overset{\circ}{A}_{10} = [0, 1] \times \{9\}$

•  $\overline{A}_{10} = [0, 1] \times \{9\}$

•  $\partial A_{10} = \overline{A}_{10} \setminus \overset{\circ}{A}_{10} = [0, 1] \times \{9\} \setminus [0, 1] \times \{9\}$   
 $= \{(0, 9), (1, 9)\}$ .

$$(ii) A_{11} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \text{ et } (n, y) \in A_{11} \quad A_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y$$

• Mq  $A_{11}$  n'est pas un ouvert.  $\forall r > 0$

$B((\frac{n}{m}, 0), r) \not\subset A_{11}$  car la 2<sup>e</sup> coordonnée n'appartient pas à l'ob.  $\notin$  l'ob.

• Mq  $A_{11}^c = (\underbrace{[-\infty, 0]}_{\text{pas ouvert}} \cup \underbrace{[1, \infty)}_{\text{ouvert}}, \underbrace{(-\infty, 0] \cup [0, \infty)}_{\text{ouvert}})$

• Mq  $A_{11}^c$  n'est pas un fermé car  $\forall r > 0$

$B((1, 2), r) \not\subset A_{11}^c$   
en effet  $(1+r, 2) \in B((1, 2), r)$  mais

$(1+r, 2) \notin A_{11}^c$ .

•  $\overset{\circ}{A}_{11} = \emptyset$    •  $\overline{A}_{11} = \emptyset$

•  $\partial A_{11} = \overline{A}_{11} \setminus \overset{\circ}{A}_{11} = \emptyset$ .



[DM 2]

$$y_m = \left(\frac{x_m^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = x^2 + \frac{1}{m^2} + \frac{2x}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^2$$

②

• Mq  $A_{12}$  est un fermé. Posons  $\Psi(n, y) = n - y$ , cette application est cont. Puis

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(\{0\}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(n, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\} = A_{12} \end{aligned}$$

Or le singleton  $\{0\}$  est un fermé, dc  $\Psi^{-1}(\{0\})$  est un fermé. (car  $\Psi$  est cont)

Donc  $A_{12}$  est un fermé.

•  ~~$\{(-\infty, 0] \cup [0, \infty)\}$~~  n'est pas un ouvert

Mq  $A_{12}$  n'est pas un ouvert :  $\forall r > 0$ .  $\exists (n, y) \in A_{12}$

$B((n, y), r) \not\subset A_{12}$ .

au  $(n, y-r) \in B((n, y), r)$  mais  $(n, y-r) \notin A_{12}$ .

•  $\overline{A}_{12} = A_{12}$  car c'est un fermé.

•  $\overset{\circ}{A}_{12} = \emptyset$  car si  $(x, y) \in A_{12}$ ,  $\exists (x_m, y_m)$  q n'est pas de  $A_{12}$  q

$$\text{or vero } x_m = x + \frac{1}{m}, y_m = (x_m)^2 = (x + \frac{1}{m})^2 = x^2 + \frac{1}{m^2} + \frac{2x}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} x^2$$

•  $\partial A_{12} = \overline{A}_{12} \setminus \overset{\circ}{A}_{12} = A_{12}$ .

$$(iv) A_{14} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, yx < 1\}$$

Posons  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = yx.$$

$$\varphi([-\infty, 1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) < 1\}$$

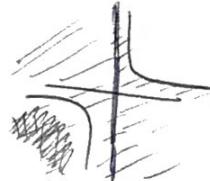
or  $]-\infty, 1]$  : ouvert

$\varphi$ : appli cont.

Donc  $A_{14}$  est un ouvert.

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A}_{14} = A_{14}.$$

appli cont



$$]-\infty, 0] \cup ]x_0, \infty[$$

$$]-\infty, 1[$$

$$yx \geq 1$$

~~$A_{14}$  n'est pas fermé~~

~~Mg de boule~~

$$B((0,y), r) = B_{y,r}$$

$$B_{y,r} \not\subset A_{14}$$

car  $(-r, y) \in B((0,y), r)$

mais  $(-r, y) \notin A_{14}^c$ .

$$\Rightarrow \overline{A}_{14} = \emptyset$$

$$\partial A_{14} = \overline{A}_{14} \setminus \overset{\circ}{A}_{14} = \emptyset \setminus \emptyset = \underline{\emptyset}$$

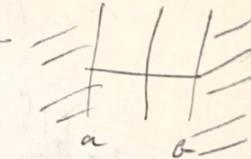
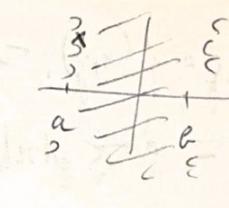
$$(v) A_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a > x \text{ et } x < b\}$$

ferm à  $\varphi(x,y) = x$ . cont

$$A_{15} = \underbrace{[a,b]}_{\text{ouvert}} \times \mathbb{R} = \overset{\circ}{A}_{15}$$

ouvert ouvert



$$\overline{A}_{15} = A_{15}$$

ouvert

~~(Mg de boule n'est pas un ouvert)~~

$$\overline{A}_{15} = [a,b] \times \mathbb{R}$$

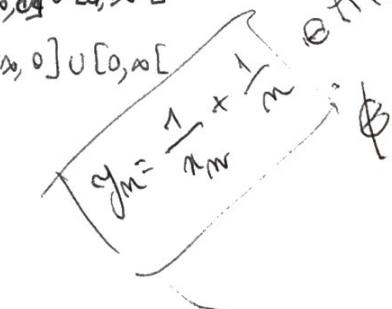
$$\partial A_{15} = \overline{A}_{15} \setminus \overset{\circ}{A}_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \text{ ou } x = b\}$$

$$B_n^{(a)} \subset A$$

$$\|x - a\| < r$$

$B((0,y_m), r) \not\subset A_{15}$

$$\text{car } (0, y_m)$$



$$\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| < r$$

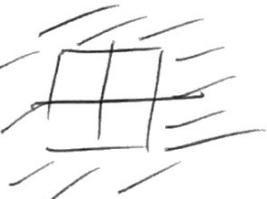
④

(DM 4)

$$(iii) A_{18} = \{(x, y), -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

$$= \{ (x, y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \}$$

$= \{ (x, y) \mid \max(|x|, |y|) < 1 \} = B^{\circ}$



$\overset{\circ}{A}_{18}$ .

Mg c'est un ouvert  $\checkmark$ .

$$\bar{A}_{18} = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

$$\partial A_{18} = \{-1, 1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{-1, 1\}.$$

~~Mg~~ c'est un fermé:  $f(x, y) \leq 0 = 1 \geq 0$

$$\max(|x|, |y|)$$

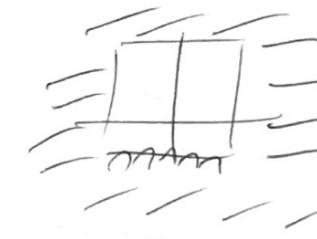
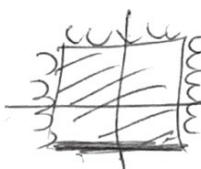
$$\overset{\circ}{A}_{18} = A_{18}$$

$$\bar{A}_{18} = \{ (x, y) \mid \max(|x|, |y|) \leq 1 \}$$

$$\partial A_{18} = \bar{A}_{18} \setminus \overset{\circ}{A}_{18} = \{ (x, y) \mid \max(|x|, |y|) = 1 \}$$

$$(iv) A_{19} = \{(x, y), -1 < x < 1, -1 \leq y < 1\}$$

$$= \{ (x, y) \mid |x| < 1 \text{ et } y < 1 \text{ et } y \geq -1 \}$$



mi un ouvert

mi un fermé

$$\bar{A}_{19} = \bar{A}_{18}, \quad \overset{\circ}{A}_{19} = A_{18} \rightarrow \partial A_{19} = \partial A_{18}.$$

⑥

(DM 6)

$$y \leq x^3 \text{ (ii) } A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 > 0\}$$

$$A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$$

Pourons  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = y - x^3.$$

$\varphi$  est une application cont.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}([0, \infty[) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^3 > 0\} \\ &= A_{13}. \end{aligned}$$

or  $[0, \infty[$ : en ouvert &  $\varphi$ : appli cont.

Donc  $A_{13}$  est un ouvert.

$$A_{13}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\}.$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^3 - y \Leftrightarrow x^3 - y > 0\}$$

$$\text{idem } \delta(x,y) = x^3 - y$$

$A_{13}^C$  pas un ferme car pas  $\emptyset, \mathbb{R}^2$  de

don complet est ~~non~~  
ch  $A_{13}$  est ferme.

$$\Rightarrow \overset{\text{mq}}{\circ} \hat{A}_{13} = A_{13}$$

$$\Rightarrow \overset{\text{mq}}{\circ} \bar{A}_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}.$$

• En effet si  $(x_n, y_n)$  est une suite de  $A_{13}$  i)  $\lim (x_n, y_n)$  alors  $\underset{\text{PA Lim}}{\circ} y \geq x^3$ , parce que  $\bar{A}_{13} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$ . Réciproq., soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3$ .

$$\bullet \text{ si } x > 0 : y > 0 \text{ tq } \sqrt[3]{y} \geq x.$$

$$\bullet \text{ si } x < 0 : y > 0 \text{ pas de racine}, y < 0 \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{y} \geq x$$

$$\partial A_{13} = \bar{A}_{13} \setminus \overset{\circ}{A}_{13}$$

$$\begin{aligned} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}. \end{aligned}$$

~~ferme~~  $[0, \infty[$   
~~ouvert~~ ferme

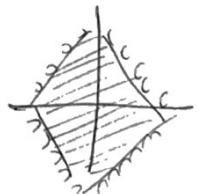
NON

DM-3

③

$$(vi) : A_{16} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\} = B^1$$

où  $x(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $B^1 = \{a \in E, \|a\| < 1\}$



Mq c'est un ouvert :  
 $B(x_0, r) \subset A_{16} \quad \forall r > 0$

$$(vii) A_{17} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 - y^2 \geq 1}_{\text{fermé}} \text{ et } \underbrace{x^2 + y^2 \leq 2}_{\text{ouvert}}$$

en ouvert, en fermé



$$A_{17} = x^2 - y^2 \geq 1 \quad x^2 + y^2 \leq 2$$

$$A^{\circ}_{17} = x^2 - y^2 > 1 \quad x^2 + y^2 < 2$$

$$\partial A_{17} = (x^2 - y^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 = 2) \cap (x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2)$$

Mq c'est un fermé :  $f(x, y) \leq b = \text{cte.}$   
cont  $|x| + |y|$

$$\overset{\circ}{A}_{16} = A_{16}$$

$$\overline{A}_{16} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq 1\}$$

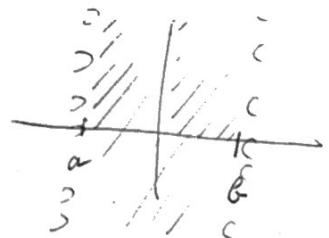
$$\partial A_{16} = \overline{A}_{16} \setminus \overset{\circ}{A}_{16} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}.$$

$$xy = \sqrt{x^2 - 1}$$

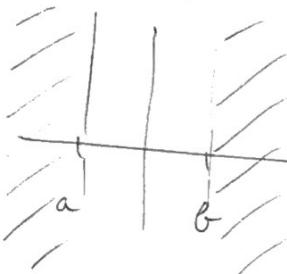
$$|\overline{\text{DM5}}|$$

⑤

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$$

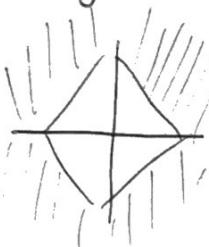
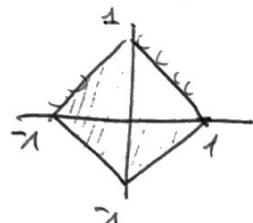


$$y \in \mathbb{R} \dots$$



$$\begin{aligned}
 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\} \\
 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\} \\
 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 - y^2| \leq 1 \text{ et } |x^2 + y^2| \leq 2\}
 \end{aligned}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\} = B^1$$



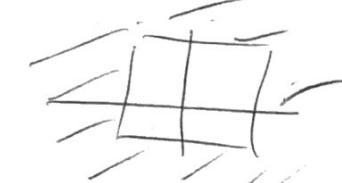
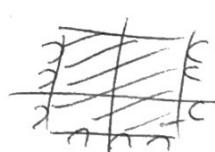
$$a(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$B^1 = \{a \in E, \|a\|_1 < 1\}$$

$$= \{(x,y), -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

$$= \{(x,y), |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$

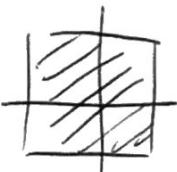
$$B^\infty = \{(x,y), \max(|x|, |y|) < 1\}$$



$$B^\infty = \{a \in E, \|a\|_\infty < 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) < 1\}$$

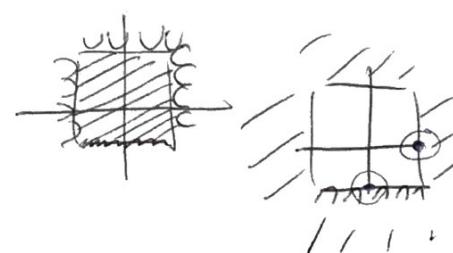
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$



$$\Rightarrow \{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 1\} \quad A(g)$$

mit un. eingesch.  
mit un. freier

①



Ex on note  $E$  le  $\mathcal{C}^1$  des  $f$ 's  
 $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$

$$\text{tq } f(0) = 0.$$

$$\begin{array}{c} f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

$$C_1 \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq C_2 \|f'\|_\infty$$

ok

$\forall f \in E$ , on pose :

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad & \|f(x)\|_\infty + \|f'(x)\|_\infty \\ & \text{pu } x=0 \quad = \|f(0)\|_\infty + \|f'(0)\|_\infty \leq C_2 \|f'(0)\|_\infty \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Mq  $N_1$  &  $N_2$  soient normes équiv à  $E$ .

équiv si  $\exists C_1, C_2 > 0$  tq

$$C_1 N_1(f) \leq N_2 \leq C_2 N_1(f).$$

Mq  $N_2(f) \leq C_2 N_1(f)$  on cherche  $C_2 > 0$ .

$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq C_2 \|f'\|_\infty$$

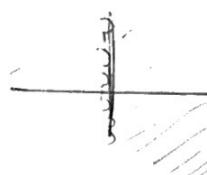
$$\|f\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \leq C_2 \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| (C_2 - 1)$$

(7)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$$

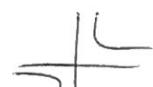
Si  $(x,y) \in A$  alors  $B((x,y), \frac{x}{2})$   
est contenue de  $A$ . Ainsi  $\bar{A} = A$ .



$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ . En effet si  $(x_n, y_n)$  est une suite de  $A$  q  $\textcircled{a}$  vers  $(x,y)$  alors PALim  $x_n \geq 0$ ; a q prouve  $\bar{A} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$

Récipqnt, soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0$ . Alors si  $x > 0$ ,  $(x,y) \in A \subset \bar{A}$  & si  $x=0$  alors prenons  $(x_n, y_n)$  def  $x_n = x + \frac{1}{n}$ ,  $y_n = y$ .  $(x_n, y_n)$  est une suite de  $A$  q  $\textcircled{a}$  vers  $(x,y)$ .

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$$



i2 : Mq  $B$  est fermé  $\rightarrow \bar{B} = B$  puis  $\bar{B} = \emptyset$ .  
En effet si  $(x,y) \in B$ ,  $\exists (x_m, y_m)$  q  $m$  est pas  
de  $B$  & q  $\textcircled{a}$  vers  $x$  &  $\textcircled{a}$   $x_m = x + \frac{1}{m}$

$$x_m y_m = 1 + \frac{y}{m} \neq 1 \text{ car } y \neq 0$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy > 1\} : \text{int}(g(x,y)) = xy$$



$$g^{-1}(\mathbb{R}^1_{+}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) > 1\}$$

or ~~l'application~~:  $\mathbb{R}^1_{+}$ : ouvert & appli  $g$  est cont.

$$\textcircled{S}_1 \Rightarrow \bar{C} = C. \quad \text{idem A mq } \bar{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1\} \quad \textcircled{C},$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 > 1\}$$

Rq  $D$  est fermé de  $\bar{D} = D$ .

Puis ~~intérieur~~ intérieur intérieur et intérieur intérieur.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 > 1\}$$

$$\partial D = (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1\})$$

$$\cup (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1\})$$

Ex 24 Soit  $E = C([0,1], \mathbb{R})$   
muni de la norme  $\|f\|$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, f \in E.$$

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Mg  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

Cette suite de Cauchy est @ un espace).

- $\Rightarrow$  considérer suite  $(x_m)$  de Cauchy de  $E$   
 $\Rightarrow$  fabriquer limite possible de  $(x_m)$  : note  $x$ .  
(car l'espace est complet, @ complétude de  $\mathbb{R} \& \mathbb{C}$ )  
 $\Rightarrow$   $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x \in E$   
 $\Rightarrow$   $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m \rightarrow x$  vers  $x$ .

$(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  suite de Cauchy d'éléments de  $E$ .

soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tq si  $p, q \geq N$

alors  $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ .

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \infty$$

⑤<sub>2</sub>

⑥

(iv)  $A_\delta = \left\{ \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$ . intervalles entre  $\frac{1}{m}$  et  $\frac{1}{m+1}$ .

( $\epsilon$  n'est pas ouvert. (idem  $A_\delta$ ).

C'est un fermé car  $A_\delta^c = ]-\infty, 0] \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$

est ouvert.

$$\cup ]1, \infty[$$

- $\overset{\circ}{A}_\delta = \emptyset$  car  $\forall x \in \overset{\circ}{A}_\delta$
  - $\Rightarrow x \neq 0$ , on raisonne à  $\forall x \in A_\delta$ .
  - $\Rightarrow x = 0$ , alors  $\forall r > 0$ :  $B(0, r)$  contient des nombres  $\frac{2}{m+1}$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$  mais  $\frac{2}{m+1} \notin A_\delta$ .
- Do à ces cas, on aboutit à une contradiction.  $\frac{1}{m+2} \notin A_\delta$ .

$\overline{A}_\delta = \emptyset$  car  $A_\delta$  est fermé

$$\partial A_\delta = \overline{A}_\delta \setminus \overset{\circ}{A}_\delta = A_\delta \setminus \emptyset = A_\delta$$

Existe  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  munie de  $\|\cdot\|_\infty$  déf par  $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$  & soit  $A = \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) > 0\}$

Mq  $A$  est ouvert de  $E$ .

Il faut & il suffit de prouver  $\forall f_0 \in A$ ,

$\exists \epsilon_0 > 0$  tq

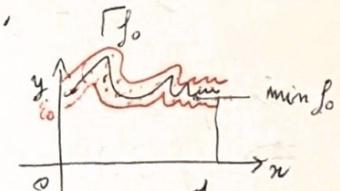
$$B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \epsilon_0) \subset A.$$

Fixons  $f_0 \in A$  qq,

comme  $f_0 \in A$ , on a  $f_0(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$ .

Pour  $f \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} f \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \epsilon_0) &\Leftrightarrow \|f - f_0\|_\infty < \epsilon_0 \\ &\Leftrightarrow |f(t) - f_0(t)| < \epsilon_0 \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$



Choisissons:  $\epsilon_0 = \inf_{[0,1]} |f_0| = \min_{[0,1]} |f_0| = \min f_0$

On a  $\epsilon_0 > 0$  car  $f_0(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$ .  
 $f$  est cont &  $[0, 1]$  est compact.

Mq  $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$ .

soit  $f \in B(f_0, \varepsilon_0)$  qq,

on a  $|f(t) - f_0(t)| < \varepsilon_0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

Or  $f_0(t) \geq \min_{[0,1]} f_0 = \varepsilon_0$

Donc  $f(t) - f_0(t) \geq -|f(t) - f_0(t)|$  (car  $x \geq -|x|$ )

$$\Rightarrow f(t) \geq f_0(t) - |f(t) - f_0(t)|$$

$$> \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 0$$

$$\Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

$\Rightarrow f \in A$ .

Donc  $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$ . & A est ouvert.

Ex 10 soit  $(E, \|\cdot\|)$  un

a) Mq  $\forall$  pie  $A \subset E$ , on a

$$\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$$

comme  $A \subset \bar{A}$ , on a  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\bar{A})$

(R)  $\bar{A} = \{n \in \mathbb{N} : \forall n > 0 : B(a, n) \cap A \neq \emptyset\}$

Pas const si  $x \in A \Rightarrow B(a, n) \cap A \ni x$   
 $\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow A \subset \bar{A}$ .

• Preuve  $\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$

Prenons  $a \in \text{Vect}(\bar{A})$  qq & mq  $a \in \overline{\text{Vect}(A)}$

comme  $a \in \text{Vect}(\bar{A})$ ,  $\exists a_1, \dots, a_m \in \bar{A}$  &  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$   
tq  $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$

comme  $a_i \in \bar{A}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,

$\exists$  suite  $(a_{ij})_{j=1}^{\infty}$  tq  $a_{ij} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a_i$ .

(R)  $(E, \|\cdot\|)$  un,  $A \subset E$  alors  $a \in \bar{A}$

si  $\exists (x_n) \subset E$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  (ie  $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ )

Prenons pr  $j \geq 1$ , considérons :

$$x_j = \lambda_1 a_{1j} + \dots + \lambda_m a_{mj}$$

comme  $a_{ij} \in A$ , on a  $x_j \in \text{Vect}(A)$

lorsque  $j \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 a_{1j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_m a_{mj} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda_m a_m$

dc  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = a$ .

dc  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ . dc  $a \in \overline{\text{Vect}(A)}$  car  $x_j \in \text{Vect}(A)$

b) Négligons  $F$  de  $E$ ,  $\overline{F}$  est un sous-espace de  $E$ .

Soit  $F \subset E$  un sous-espace, il suffit de montrer que  $\overline{F}$  est un sous-espace de  $E$ . Soit  $u, v \in \overline{F}$  que  $\alpha \in \mathbb{K}$  que. On doit montrer

- (i)  $u+v \in \overline{F}$ .
- (ii)  $\alpha u \in \overline{F}$ .

Preuve (i) Soit  $u, v \in \overline{F}$ , il existe deux suites  $(u_m)$

et  $(v_m)$  dans  $F$  tq :

$$u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} u \quad \text{et} \quad v_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} v$$

$$\text{alors } \|(u_m + v_m) - (u + v)\| \leq \|u_m - u\| + \|v_m - v\|$$

$\downarrow \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \quad \text{donc} \quad \downarrow \xrightarrow{\delta} \quad \downarrow \xrightarrow[r]{\infty}$

On a  $u_m + v_m \in F$  car  $u_m, v_m \in F$  et  $F$  est un sous-espace.

Donc  $u+v \in \overline{F}$ .

Preuve (ii) On a :

$$\|\alpha u_m - \alpha u\| = |\alpha| \|u_m - u\| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

Or  $\alpha u_m \in F$  car  $u_m \in F$  &  $F$  est un sous-espace.  
Donc  $\alpha u \in \overline{F}$ .

Ex 11 Soit  $E$  un espace normé &  $A, B \subset E$ .

$$A+B = \{z \in E : \exists x \in A, \exists y \in B, z = x+y\}$$

a) Montrons si  $A$  ouvert  $\Rightarrow A+B$  est ouvert.

Considérons op au  $B = \{y_0\}$ , où  $y_0 \in E$  que.

$$\text{Soit } x \in A, A+B = \{x+y_0, y \in A\}$$

Observons que si  $x \in A$  &  $r > 0$  tq  $B(x, r) \subset A$ .

alors  $x+y_0 \in A+B$  &  $y \in B(x+y_0, r)$

$$\Leftrightarrow \|y - (x+y_0)\| < r$$

$$\Leftrightarrow \|(y-y_0) - x\| < r$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 \in B(x, r) \Leftrightarrow y \in B(x, r) + y_0.$$

On a  $B(x+y_0, r) \subset A+B = A+y_0$ .

Donc tout point  $\forall (x, y_0) \in A+y_0$ ,  $\exists r > 0$ ,

$$\text{tq } B((x, y_0), r) \subset A+y_0.$$

Donc  $A+y_0$  est ouvert lorsq  $B = \{y_0\}$ .

Considérons le cas général où  $B$  est un sous-ens gg de  $E$ . Pq  $y \in B$  soit  $B_y := \{y\}$ .

$$\begin{aligned} \text{Écrivons, } A+B &= \{x+y, x \in A, y \in B\} \\ &= \bigcup_{y \in B} \{x+y \mid x \in A\} \\ &= \bigcup_{y \in B} (A + B_y) \end{aligned}$$

D'après la discussion précédente,  $A + B_y$  est ouvert car  $B_y$  est un ens à un seul él.

Sc  $A + B$  est ainsi un ouvert.

b) Mq les ples  $A = f(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$   
 $B = \{0\} \times \mathbb{R}$

sont fermées mais que  $A + B$  n'est pas fermée.

$$\begin{aligned} \underline{\text{NB}} : g^{-1}(\{0\}) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \\ &= \{0\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

La f  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x,y) \mapsto xy$  est continue.

(R)  $E, F$  ens,  $f : A \subset E \rightarrow F$ ,  $a \in E$ ,  
 f est cont en  $a$  si  
 $\underbrace{a_n \rightarrow a}_{\|a_n - a\|_E \rightarrow 0} \Rightarrow \underbrace{f(a_n) \rightarrow f(a)}_{\|f(a_n) - f(a)\|_F \rightarrow 0}$

si f est cont  $\Rightarrow f^{-1}(O)$  est ouvert.  
 $f^{-1}(ferm)$  est fermé.

f, g :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x,y) \mapsto x$ . f cont.

Observons que  $A = f^{-1}(\{1\})$ ,  $B = f^{-1}(\{0\})$   
 Le singleton  $\{1\}$  (resp.  $\{0\}$ ) étant <sup>image réciproque</sup> fermé,  
 en f (resp g) étant continue,  $f^{-1}(\{1\})$  (resp.  $g^{-1}(\{0\})$ )  
 est nécessairement fermé. et ainsi A & B sont fermés.

Mq  $A+B$  n'est pas fermé.

soit  $(x,y) \in A+B$ . Dc  $\exists (x',y') \in A$ ,

$(x'',y'') \in B$  tq  $(x,y) = (x',y') + (x'',y'')$

Comme  $(x',y') \in A$  &  $(x'',y'') \in B$ , on a:

$$x'y' = 1 \quad \& \quad x'' = 0.$$

$$\text{et } x = x' + x'', \quad y = y' + y''.$$

Ainsi  $\begin{cases} x' = \frac{1}{y'} \\ x'' = \frac{1}{y''} \end{cases}$  ←  
 $y = y' + y''$ .

D'où  $x \neq 0$ : on a démontré  $A+B \subset C$

où  $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ .

Inversément si  $(x,y) \in C$  alors  $x \neq 0$  &  
on peut écrire :

$$(x,y) = \underbrace{\left(x, \frac{1}{x}\right)}_{\in A} + \underbrace{\left(0, y - \frac{1}{x}\right)}_{\in B}.$$

Dc  $C \subset A+B$ . donc  $A+B=C$ .



$C$  n'est pas fermé car  $(\frac{1}{n}, 0) \in C$ ,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  &  $(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (0, 0) \notin C$ .

### Compacité

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

Expt Déterminer si ces svts st ou ne st pas compacts de

**R1** soit  $X$  un dim finie alors  $A \subset X$  est compact  
 $\Leftrightarrow A$  est à la fois borné & fermé.

**R2**  $A$  est borné s'  $\exists a \in X, r > 0$  tq  $A \subset B(a,r)$

a)  $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}$

Constr. l'appli  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  déf p  $f(x,y) = x^2 + y^4$ .  
 $\Rightarrow f$  étant continue, le singleton  $\{1\}$  étant un fermé,  
 $f^{-1}(\{1\})$  est nécessairement fermé.

Or  $f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) : f(x,y) = 1\} = A$ , dc  $A$  est fermé.

**R** soit  $(x,y) \in A$  qq alors  $x^2 + y^4 = 1$ . comme  $x^2 \geq 0$  et  $y^4 \geq 0$   
il vient que  $0 \leq x^2 \leq 1$  &  $0 \leq y^4 \leq 1$ .

D'où  $|x| \leq 1$  &  $|y| \leq 1$ , soit  $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq 1$

Ainsi on a démontré  $A \subset B((0,0), 1)$ . donc  $A$  est borné.

**L** Comme  $A$  est fermé & borné, il est compact.

$$b) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^5 = 2\}$$

Considérons l'application  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x, y) = x^2 + y^5$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$g$  étant continu, le singleton  $\{2\}$  étant fermé,  $g^{-1}(\{2\})$  est nécessairement fermé.

$$g^{-1}(\{2\}) = \{(x, y) : g(x, y) = 2\} = B$$

De  $B$  n'est pas fermé.

Ensuite  $\exists$  Cherchons une suite  $\in B$  mais  $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

$$(x, y) = (n, -n) \in B.$$

$$\begin{aligned} x^2 + (-n)^5 &= 2 \Leftrightarrow x^2 = n^5 + 2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{n^5 + 2}. \end{aligned}$$

Ma  $B$  n'est pas borné. Considérons la suite

$$(x_m, y_m) = (\sqrt{m^5 + 2}, -m)$$

$$\begin{aligned} \text{On a } x_m^2 + y_m^5 &= (\sqrt{m^5 + 2})^2 + (-m)^5 \\ &= m^5 + 2 - m^5 = 2 \end{aligned}$$

Soit  $(x_m, y_m) \in B$ .

D'autre part,  $\|(x_m, y_m)\|_\infty \geq |m| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \infty$

De  $m$  n'est pas borné. De  $B$  n'est pas compact. (84)

Ex 18  $\Delta$  dim infinie. (On ne peut pas user du théorème compact finie)

Soit  $E = C([0, 2\pi])$  muni  $\|\cdot\|_2$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(t) = e^{int}$ .

a) Calculer  $\|f_n - f_p\|_2$  pour  $p, n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $p, n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f_p(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (f_n(t) - f_p(t)) (\overline{f_n(t)} - \overline{f_p(t)}) dt \quad \text{car } \|z\|^2 = z\bar{z}$$

$$= \int_0^{2\pi} (e^{int} - e^{ipt}) (e^{-int} - e^{-ipt}) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t} + 1) dt$$

Il y a 2 cas à considérer:

$$\text{cas } p=n \text{ alors } \|f_n - f_p\|_2^2 = \|f_n - f_p\|_2^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{cas } p \neq n \quad &\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (2 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t}) dt \\ &= \left[ 2t - \frac{e^{i(p-n)t}}{i(p-n)} - \frac{e^{i(n-p)t}}{i(n-p)} \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^m}{m!} = \bar{z}^m \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ e^{it} - \frac{e^{i(p-m)t}}{i(p-m)} - \frac{e^{i(m-p)t}}{i(m-p)} \right] dt$$

$$= 4\pi - \frac{e^{i(p-m)2\pi}}{i(p-m)} - \frac{e^{i(m-p)2\pi}}{i(m-p)} = 4\pi$$

car  $e^{i(n+p)t} = e^{in} e^{ip\pi} = e^{in} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^{in}$

Chinsi on a mpe  $\|f_m - f_p\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n=p \\ 2\sqrt{\pi} & \text{si } n \neq p \end{cases}$

b) et boule unité fermé  $BF(0,1)$  n'est pas compact.

(R) Soit  $X$  un espace topologique & soit  $A \subset X$ .

$A$  est dit compact si pour tout recouvrement d'ouverts de  $A$ , on peut en extraire un  $\alpha$ -recouvrement fini,

i.e. si  $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$  &  $O$  ouvert,

alors  $\exists i_1, \dots, i_n \in I$  tq  $A \subset \bigcup_{s=1}^n O_{i_s}$ .

D'après q<sup>a</sup>)  $\left\| \frac{f_m}{\sqrt{2\pi}} - \frac{f_p}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2$

On calcule  $\|f_m\|_2^2 = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$ .

Donc  $\left\| \frac{f_m}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2 = 1$  d'où  $\frac{f_m}{\sqrt{2\pi}} \in BF(0,1)$ .

(R) Soit  $X$  espace normé alors  $A \subset X$  est compact  
 $\Leftrightarrow \forall$  suite  $(a_n) \subset A$ ,  $\exists$  une ss-suite (a).

or  $BF(0,1)$  étant compact, alors il existerait une sous-suite  $\left( \frac{f_{m_k}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k=1}^\infty$  q<sup>a</sup> vers  $f \in BF(0,1)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe de  $k_0$  tq  $\forall k > k_0$ :

$$\left\| \frac{f_{m_k}}{\sqrt{2\pi}} - f \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

On a dc  $\left\| f_{m_k} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} f \right\|_2 < \varepsilon$  &  $\left\| f_{m_{k+1}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} f \right\|_2 < \varepsilon$ .

$$\Rightarrow \|f_{m_k} - f_{m_{k+1}}\| \leq \|f_{m_k} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} f\| + \|f_{m_{k+1}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} f\| \leq 2\varepsilon$$

Or d'après a),  $\|f_{m_k} - f_{m_{k+1}}\| = \sqrt{2\pi}$

$$\text{Or d'après a), } \|f_{mk} - f_{mk+1}\| = \sqrt{4\pi},$$

$$\text{On obtient de } \sqrt{4\pi} \leq 2\varepsilon \\ \Rightarrow \sqrt{\pi} \leq \varepsilon.$$

Il suffit de choisir :  $0 < \varepsilon < \sqrt{\pi}$  & on aboutit à une contradic.

Donc  $\mathbb{B}F(0,1)$  n'est pas compact.

## Suites de Cauchy & Complétude

Ex 1 Déterminer si suites  $(u_n)_{n>0}$  st de Cauchy.

⑤ soit  $(E, \|\cdot\|)$ , on dit qu'une suite  $(x_n) \in E$  est de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N: \|x_p - x_q\| < \varepsilon$ .

⑥ soit  $(E, \|\cdot\|)$  compl, on dit que  $E$  est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  est de  $E$ .

Th  $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$  pr  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

est un espace de Banach.

a)  $u_n = (-1)^n$  ds  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ .

Mq  $(u_n)$  n'est pas de Cauchy :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists p, q \geq N: \|u_p - u_q\| \geq \varepsilon_0.$$

Choisissons  $\varepsilon_0 = 1$ .  $\forall N > 0$ , considérons  $p = N$  &  $q = N + 1$  alors :

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N| / |1 - (-1)| \\ &= |(-1)^N| \cdot 2 = 2 > 1 = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)$  n'est pas de Cauchy.

b)  $u_n = (n \cdot \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n})$  ds  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

④  $\rightarrow$  Si une suite est ④ alors elle est de Cauchy.

$\rightarrow$  Si une suite est de Cauchy dans un espace de Banach alors c'est une suite ④.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 1$$

$$\& \lim \cos \frac{1}{n} = \cos(\lim \frac{1}{n}) = \cos 0 = 1$$

De  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1, 1)$ .

Comme  $(u_n)$  est ④, elle est de Cauchy.

c)  $U_m$  dans  $(C[-1,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1$

$$\Delta U_n(t) = m - m^2 |t|$$

$$\text{si } |t| \leq 1 \quad \& \quad U_m(t) = 0 \text{ sinon.}$$

• Calculons  $\| U_m \|_1$ , on a:

$$\| U_m \|_1 = \int_{-1}^1 |U_m(t)| dt = \int_{-1/m}^{1/m} m - m^2 t dt$$

$$= \int_{-1/m}^{1/m} m dt - m^2 \int_{-1/m}^{1/m} |t| dt$$

$$= m \left( \frac{1}{m} - \left( -\frac{1}{m} \right) \right) - 2m^2 \int_0^{1/m} t dt$$

$$= m \cdot \frac{2}{m} - 2m^2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{1/m} = 2 - 1 = 1.$$

• Calculons  $\| U_{2n} - U_m \|_1$  on a:

$$= \int_{-1}^1 |U_{2n}(t) - U_m(t)| dt \geq \int_0^{1/m} |U_{2n}(t) - U_m(t)| dt$$

$$= \int_0^{1/m} (2n - (2n)^2(t)) - (m - m^2(t)) |dt|$$

$$= \int_0^{1/m} [2n - 4n^2 t - m + m^2 t] |dt|$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/m} (m - 3m^2 t) |dt| \geq \int_0^{1/m} |m - 3m^2 t| dt \\ &= \int_0^{1/m} (m - 3m^2 t) dt = m \int_0^{1/m} dt - 3m^2 \int_0^{1/m} t dt = m \cdot \frac{1}{3m} - 3m^2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{1/m} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{3m^2}{2 \times 3m^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \| U_{2m} - U_m \|_1 \geq \frac{1}{6}, \forall m.$$

• Donc ce n'est pas une suite de Cauchy

Prenons  $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$  alors  $\forall N$ , choisissons  $p=N, q=2N$   
on a  $p, q \geq N$  &

$$\| U_p - U_q \|_1 = \| U_{2N} - U_N \|_1 \geq \frac{1}{6} = \varepsilon_0.$$

# T.D. 2 - Foncts entre evn

## Continuité

Ex 1 Soit  $(E, \|\cdot\|)$  evn de  $\mathbb{R}$ .

Mq a) Toute applicat constante si  $E$  est cont.

(R) Soit  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  2 evn.

Soit  $U \subset E$  &  $V \subset F$  deux ouverts

& Soit  $f: U \rightarrow V$  une applicat.

Soit  $a \in U$ , on dit que  $f$  est cont en  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall x \in U$ :

$$\|x-a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Autrement dit  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tq

$$f(B_\varepsilon(a, \delta)) \subset B_F(f(a), \varepsilon).$$

a) Soit  $f: E \rightarrow E$ , une f cte :  
 $f(x)=c$ ,  $\forall x \in E$  où  $c \in E$  fixé  
 soit  $a \in E$  qq

soit  $\varepsilon > 0$  qq ; prenons  $\delta > 0$  qq ,

alors pour  $\|x-a\| < \delta$ , on a

$$\|f(x)-f(a)\| = \|c-c\| = \|0\| = 0 < \varepsilon$$

Soit  $f$  est cont.

b)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , tout  $a \in E$ ,  $f: E \rightarrow E$   
 $x \mapsto f(x) = \lambda x + a$   
 est lipschitzienne.

$\forall x, y \in E$

(R)  $f$  est M-Lipschitz  $\Leftrightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq M \|x-y\|$

Soit  $x, y \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(x)-f(y)\| &= \|\lambda x + a - (\lambda y + a)\| = \|\lambda(x-y)\| \\ &= |\lambda| \|x-y\| \end{aligned}$$

Soit  $f$  est M-Lipschitz  $\Leftrightarrow M := |\lambda|$ .

c) Mq  $x \mapsto \|x\|$  est continue

c) Mg  $f: x \mapsto \|x\|$  est cont.

Il suffit de mg  $f$  est lipschitz.

Pour  $x, y \in E$ , on a:

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

|| Donc  $f$  est 1-lipschitz. ||  
|| Donc  $f$  est continue. || ←

Ex 2 soit  $E = C([0,1])$  muni  $\|\cdot\|_1$ .

Vérifier  $f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$

est 1-lipschitzienne de  $E$  ds  $\mathbb{R}$ .

L'envoie décompte de la preuve du ms.c)  
car  $x \mapsto \|x\|$  est 1-lipschitz.

Ex 3 soit  $E = C([0,1], \mathbb{R})$ ; bs appli

$$A: E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

$$B: E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0)$$

st-elles cont si  $E$  sc est muni mome?

a)  $\|\cdot\|_\infty$  déf  $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$

Fonc A  
soit  $f, g \in E$  qq,

$$|A(f) - A(g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \sqrt{\max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|} = \|f - g\|_\infty$$

Donc  $A$  est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à  $\|\cdot\|_\infty$ .

On a aussi

$$|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\|_1.$$

Donc  $A$  est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à  $\|\cdot\|_1$ .

Enfin, on a  $|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$   
es  $\leq \sqrt{\left( \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right) \left( \int_0^1 dt \right)}$   
 $= \|f - g\|_2$

(29)

Donc  $A$  est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à  $\|\cdot\|_2$ .

considérons  $f$   $B: E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f \mapsto f(0)$

( $B$  la masse de Dirac en 0.)

soit  $f \in E$  qq, soit  $E$  qq,

a) Continuité de  $B$  en  $f$   $\mathcal{D} \parallel \|\cdot\|_\infty$ .

Pu  $g \in E$ , on a:

$$\|B(g) - B(f)\| = |g(0) - f(0)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g(t) - f(t)\| = \|g - f\|_\infty$$

Choisissons  $f := \varepsilon$ , on ad  $\forall g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\varepsilon, \delta)$

$$\Rightarrow \|g - f\|_\infty < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |B(g) - B(f)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow B(g) \in B(B(f), \varepsilon)$$

Donc  $B$  est cont en  $f$ .

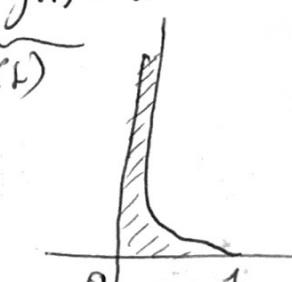
Comme  $f$  est qq,  $B$  est cont.

b) Continuité de  $B$  en  $f$   $\mathcal{D} \parallel \|\cdot\|_1$ .

grouillon intuitivement pas possible.

$$|f(0) - g(0)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

$$|h(0)| \leq \int_0^1 |h(t)| dt$$



$$h_m(t) = m (1-t)^m \quad s=1-t \quad ds=-dt$$

$$\int_0^1 h_m(t) dt = m \int_0^1 (1-t)^m dt = m \int_0^1 s^m ds = m \left[ \frac{s^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{m}{m+1}$$

$$\text{or } h_0(0) = m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{ga made}$$

Mq  $B$  n'est pas cont en  $0_E$ .

Considérons la suite de fs:

$$h_m(t) := (1-t)^m, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\text{On a } (h_m)_{m=1}^\infty \subset E \quad \& \quad \|h_m\| = \int_0^1 (1-t)^m dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^m dt = - \int_1^0 s^m ds = \left[ \frac{s^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

il vient que  $\|h_m\|_1 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

si  $B$  était cont en  $0_E$  alors  $B(h_m)$  converge vers  $B(0_E) = 0_E$

Dc  $B$  n'est pas cont en  $0_E$

Bo Gr  $B(h_m) = h_m(0) = (1-0)^m = 1 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$ .

Mq  $B$  n'est pas cont en tt pt  $f \in E$ .

Si ce n'était pas le cas, alors comme

$$\|f + h_m - f\|_1 = \|h_m\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On devrait avoir  $|B(f+h_m) - B(f)| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} B(f+h_m) - B(f) &= (f+h_m)(0) - f(0) \\ &= f(0) + h_m(0) - f(0) \\ &= \underset{n \rightarrow \infty}{\cancel{1}} \end{aligned}$$

Donc  $B$  n'est cont nulle part.

c)  $B$  n'est pas cont en aucun point

$$\begin{aligned} &\nexists \|\cdot\|_2. \text{ M prouve que } \|\cdot\|_2 \\ \text{en calculant } \|h_m\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 |h_m(t)|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (1-t)^{2m} dt} \\ &= \frac{1}{2m+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

NB: Tts les normes st équivalentes en dim finie.

Tts les normes ne st pas forcément équivalentes en dimension infinie. (ici on avait espace  $E = C([0,1], \mathbb{R})$ )

Ex5 Soit  $E_1, E_2$  2 evn,  $f, g$  2 appli cont de  $E_1$  ds  $E_2$ .  
Mq  $A = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$  ut fermé ds  $E_1$ .

(R1) Soit  $f: X \rightarrow Y$  une appli cont alors

- (i)  $f^{-1}(O)$  est ouvert de  $X$ ,  $\forall O$  ouvert de  $Y$ .
- (ii)  $f^{-1}(F)$  est fermé de  $X$ ,  $\forall F$  fermé de  $Y$ .

Mise en garde: ! Les ouverts & fermés ne st pas conservés au moyen d'une image directe:

O ouvert de  $X \not\Rightarrow f(O)$  ouvert de  $Y$ .

F fermé de  $X \not\Rightarrow f(F)$  fermé de  $Y$ .

Mise en garde:  $\triangleleft f(X \setminus A) \neq f(X) \setminus f(A)$

EoS Mg A = { $n \in E_1, f(n) = g(n)$ } est fermé de  $E_1$ .

Conditions l'appli  $h: E_1 \rightarrow E_2$  donnée par  
 $h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in E_1$ .

Comme  $f$  &  $g$ , il en est de m<sup>e</sup> pr  $h$ .

Observons que  $A = \{n \in E_1, f(n) = g(n)\}$

$$A = \{x \in E_1, f(x) - g(x) = 0_{E_2}\}$$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E_1, h(x) = 0_{E_2}\} \\ &= h^{-1}(\{0_{E_2}\}) \end{aligned}$$

Si  $h$  étant cont. &  $\{0_{E_2}\}$  étant fermé de  $E_2$ ,  $h^{-1}(\{0_{E_2}\})$  est nécessairement fermé.  
 Dc  $A$  est fermé.

Ex6 soit  $f: E \rightarrow F$  une appli entre 2 un.  
 Mg  $f$  est cont si et seulement si la partie  $A$  de  $E$ ,  
 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Ex7 soit  $f, g$  2 appli cont d'un un  $E_1$  de  $E_2$  (un)  
 on appelle  $f = g$  sur une pie  $A$  de  $E_1$ , dense de  $E_1$ .

Mg  $f = g$  sur  $E_1$ .

ef 2 appli dif & cont sur  $\mathbb{R}$ , q coïncident sur  $\mathbb{Q}$ ,  
 st égales.

Conditions l'appli  $h: E_1 \rightarrow E_2$  donné par  
 $h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in E_1$ .

Comme  $f, g$  st cont; il en est de m<sup>e</sup> pr  $h$ .

D'après l'hypo,  $f(x) = g(x)$  pour  $x \in A$ .  
 Il vient que  $h(x) = f(x) - g(x) = 0_{E_2}, \forall x \in A$ .

dc  $A \subset h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ .

$\Rightarrow$  ef  $\bar{A} \subset \overline{h^{-1}(\{0_{E_2}\})}$ .

car  $A \subset \bar{A}$ .

$$\begin{array}{l} ACB \Rightarrow \bar{ACB} \\ ACB \Rightarrow \bar{ACB} \end{array}$$

Comme  $A$  est dense dans  $E_1$ , on a  $\overline{A} = E_1$

Il vient de  $\overline{A} = E_1 \subset \overline{h^{-1}(\{0_{E_2}\})} \subset E_1$

$$E_1 = \overline{h^{-1}(\{0_{E_2}\})}$$

Or  $h$  étant continu et  $\{0_{E_2}\}$  étant fermé de  $E_2$ ,  $\overline{h^{-1}(\{0_{E_2}\})}$  est nécessairement fermé.

Donc  $E_1 = h^{-1}(\{0_{E_2}\})$  &  $h = 0_{E_2}$   
et  $f = g$ .

Ex 8 On munir  $M_n(\mathbb{R})$ , l'ens des mat carrées de taille  $n$ , de la norme  $N_\infty$ ,  
 $N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

a) Mg trace est une application continue de  $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$(M_n(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$   $\hookrightarrow$  espace de dim finie.

ici  $\| A \|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$  /  
les  $a_{ij}$  peuvent dans  $\mathbb{R}$

$$M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

/  
les  $a_{ij}$  peuvent dans  $\mathbb{R}$

et  $\text{Tr}$  ... des ensembles denses de los ens:  
 $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ,  $B = (b_{ij})$

sait  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{ij})$  qq & soit  $\varepsilon > 0$ .

Il ns faut mq  $\exists \delta > 0$  tq  $\forall B \in M_n(\mathbb{R})$ :

$$\| A - B \|_\infty < \delta \Rightarrow |\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)| < \varepsilon$$

On a  $|\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i=1}^n b_{ii} \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ii} - b_{ii}|$   
 $\leq \sum_{i=1}^n |a_{ii} - b_{ii}| < \sum_{i=1}^n \| A - B \|_\infty$  car  $|a_{ii} - b_{ii}| \leq \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} - b_{ij}|$   
 $\| A - B \|_\infty$

$$= n \| A - B \|_\infty.$$

Choisissons  $\delta := \frac{\varepsilon}{n}$ , l'inégalité précédente implique que  $\forall \| A - B \|_\infty < \delta = \frac{\varepsilon}{n}$ ,

$$|\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)| \leq n \| A - B \|_\infty = \varepsilon$$

Donc  $\text{Tr}$  est continu en  $A$ .

## Réponse au TD 1

Ex 28 à propos (Th) de Baire.

a) Vérifier 3 affirmations du (Th) de Baire ASSE?

Dans un espace métrique complet (m.v.)

(i) l'intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.

(ii) la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

(iii) si l'espace entier est réunion dénombrée de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert (m.v.).

Rappelons qu'un espace métrique  $(X, d)$  est dit complet si la suite de Cauchy est (CV).

Rappels une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_0 :$

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

(34)

i)  $Mg (i) \Rightarrow (ii)$

soit  $(F_m)_{m=1}^{\infty}$  une suite de fermés d'intérieur vide

Pour  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , on doit mg  $F$  est d'intérieur vide,  $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ .

Prenons  $O_m = X \setminus F_m, \forall m \geq 1$ .

$O_m$  est ouvert car  $F_m$  est fermé. En plus,

$O_m$  est dense car sinon  $\overline{O_m} \neq X$ .

$\emptyset \neq X \setminus \overline{O_m} \subset X \setminus O_m = F_m$  & donc  $F_m$  contient l'ouvert  $(m.v.) X \setminus \overline{O_m}$ .

Ce qui contredit l'hypothèse  $\overset{\circ}{F_m} = \emptyset$ .

En appliquant (i),  $O := \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$  est dense de  $X$ .

$$\text{De } X \setminus O = X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus O_m) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = F.$$

Si  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  alors  $O$  n'est pas dense de  $X$ , c'est la contradiction cherchée. [c.Q/c]

① Si  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  alors  $O_m$  n'est pas dense ds  $X$  car  $X \setminus \bar{O}$  contient  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  & de  $X \setminus \bar{O} \neq \emptyset \Rightarrow O_m$  n'est pas dense.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

(ii) Tte réunion  $\mathcal{F}$  de fermés d'int. vide est d'int. vide  $\Rightarrow$  (iii) si l'espace entier est réunion  $\mathcal{F}$  de fermés, pt au moins un fermé contient un ouvert non.

soit  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ,  $\forall F_n$  fermé.

Supposons par l'absurde que  $F_n$  est d'int. vide  $\forall n$ . D'après (ii), leur union  $X$  est aussi d'intérieur vide.

Or  $\overset{\circ}{X} = X \neq \emptyset$  d'où contradiction recherchée.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

soit  $(O_n)_{n=1}^{\infty}$  une suite d'ouverts denses.

On doit montrer  $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$  est dense.

Card inénumérable si l'espace est complet.

②  $\text{R}^{\heartsuit}$  soit  $O \subset X$  alors

③  $O$  est dense dans  $X \Leftrightarrow F = X \setminus O$  est d'int. vide.

Preuve R<sup>3</sup>

$O$  est dense ds  $X \Leftrightarrow \bar{O} = X$

$$\Leftrightarrow X \setminus \bar{O} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{int}(X \setminus \bar{O}) = \emptyset \text{ car } \text{int}(X \setminus \bar{O}) = X \setminus \bar{O}.$$

$$\Leftrightarrow \overset{\circ}{F} = \emptyset$$

D'après le fait ci-dessus, on est ramené à montrer  $F := X \setminus O$  est d'int. vide.

Comme  $O_m$  est dense,  $F_m := X \setminus O_m$  est d'int. vide, d'après le ③ ci-dessus.  $F_m$  est aussi fermé car  $O_m$  est ouvert.

$$\text{On a } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus O_n) = X \setminus \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \right) = X \setminus O = F$$

$$\text{alors } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bar{O} = F \cup \bar{O} = (X \setminus O) \cup \bar{O} \supseteq (X \setminus O) \cup O$$

$$\text{D'où } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bar{O} = X.$$

En appliquant (iii),  $\exists$  au moins un fermé parmi les  $F_n$  &  $\bar{O}$  qui est d'int. non vide.

Si on sait que  $F_\alpha$  est d'int vide.

Donc  $\bar{O}$  est d'int non vide.

De d'après le  $\textcircled{L}$ ,  $X \setminus \bar{O}$  n'est pas dense.

De  $\bar{O}$  est dense car  $\bar{O} \cup (X \setminus \bar{O}) = X$

De  $O$  est dense de  $X$ .

b) Considérons l'ens des nbr entiers  $\mathbb{Z}$

(voir cours de  $\mathbb{Z}$ ) muni de la disto euclidienne venant de  $\mathbb{R}$ .

i) Vérifions  $\mathbb{Z}$  est complet

$$(\mathbb{Z}, \|\cdot\|), \text{ pr } x, y \in \mathbb{Z} : d(x, y) = |x - y|$$

soit  $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ , une suite de Cauchy.

On doit montrer  $\textcircled{a}$ , soit  $\varepsilon > 0$  qd

si  $(x_n)$  est de Cauchy  $\exists N = N(\varepsilon)$  tq

$$\forall n, m \geq N : d(x_n - x_m) < \varepsilon.$$

Choisissons  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . On a dc  $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}$

$\forall n, m \geq N$ . Comme  $x_n \in \mathbb{Z}$ , on conclut  $x_n = x_m$   
 $\forall n, m \geq N$ .

@ espace métriq  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$

Possons  $a := x_N = x_{N+1} = \dots$

On a  $\forall n \geq N$ ,  $d(x_n, a) = |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(ii)  $\mathbb{Z}$  est la réunion d'un ens  $\textcircled{d}$  de ses 1-ens (les singltons). Est-il contradictoire au  $\textcircled{W}$  de Baire?

Comme  $\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{m\}$ , il est la réunion des singltons.

Chaque singleton  $\{m\}$  est fermé car  $\mathbb{Z} \setminus \{m\} = \{m \in \mathbb{Z} : m \neq n\}$

$$\mathbb{Z} \setminus \{m\} = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq n}} B(m, \frac{1}{2}) \text{ car } B(m, \frac{1}{2}) = \{k \in \mathbb{Z} : |k - m| < \frac{1}{2}\} = \{m\}$$

D'après  $\textcircled{W}$  de Baire (v.a.iii)). Il existe au moins un fermé dont l'intérieur est nv.

C'est tout à fait normal car le fermé  $\{m\}$  contient l'ouvert  $B(m, \frac{1}{2}) = \{m\}$

c) Est-ce que ⑦ affirme réunion  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_n}$  des ens mpd  $\overline{F_n}$  est elle-même mpd de l'espace de l'espace (voir D) Vérifier si  $F = \mathbb{Q}$ .

Non le ⑦ affirme seulement que par espace métrique complet, toute réunion  $\mathcal{A}$  de fermés d'int vide et d'int non vide.

⑧  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset \mathbb{R}$  tq chaque  $\overline{F_n}$  n'est mpd et que  $F$  est dense partout.

Considérons pr  $n \geq 1$ ,

$$F_n := \left\{ x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\overline{F_n}$  n'est comme  $\mathbb{N}$ , mpd de  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Mais } \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \left\{ x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{Q}$$

est dense de  $\mathbb{R}$ .

Ex 87 a) Donner des exemples clairs de les ens :

$$\rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{P}_2 \& (C[a,b], d) \text{ où } d(f,g)$$

Exemples des ens Z. denses de X.

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

cas  $X = \mathbb{R}$ :

- $Z = \mathbb{R}$
- $Z = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ \text{nbr irrationnels} \}$
- $Z = \mathbb{Q}$

cas  $X = \mathbb{R}^m$ :

- $Z = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{Q}^m, Z = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^m, Z = (\mathbb{Q})^m \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{m-k}$

cas  $X = \ell^e(\mathbb{R})$

- $Z = \ell^e(\mathbb{R})$

- $Z = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap \ell^e(\mathbb{R}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) : x_n \in \mathbb{Q}, \sum_{m=0}^{\infty} |x_m|^2 < \infty\}$

&  $\sum_{m=0}^{\infty} |x_m|^2 < \infty$  "séparable"

Un espace qui admet un ss-ens dénom. dense est appelé

cas  $X = (C[a,b], d)$ ; où  $d(f,g) := \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

◦  $Z = \mathbb{R}[t]$  = anneau de polynômes

C'est le ⑨ d'approximation de Weierstrass :

$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in C[a,b], \exists \text{ un poly } P \text{ tq}$

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon, \forall t \in [a,b].$$

•  $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}[t] =$  anneau de polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}$

$$= \{ P = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t^1 + c_0 : \\ c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{Q} \}.$$

Comme  $\mathbb{Q}[t]$  est dense dans  $\mathbb{R}[t]$ , et  $\mathbb{R}[t] \subsetneq C[a,b]$ , il s'ensuit que  $\mathbb{Q}[t] \subsetneq C[a,b]$ .

En plus,  $\mathbb{Q}[t]$  est dénombrable.

Donc  $C[a,b]$  est séparable.

b)  $\mathbb{R}$  ss-ons  $D$  d'un espace métrique  $X$  est appellé npd (ou rare) si l'il n'est dense dans aucune boule ouverte de  $X$ , i.e.  $\forall$  boule ouverte  $B \subset X \exists$  une boule ouverte  $B'$  tq  $B' \subset B$  &  $B' \cap D = \emptyset$ .

Mg cette définition est équivalente à pp't'  
 $\text{int}(\bar{D}) = \emptyset$ .

$D$  npd  $\Rightarrow \text{int}(\bar{D}) = \emptyset$ ,

spqs p l'absurde  $\text{int}(\bar{D}) \neq \emptyset$ .

Considérons une boule  $\emptyset \neq B \subset \text{int}(\bar{D})$ .

$\forall$  boule ouverte  $B' \subset B$ , on a :

$$B' \cap D = \emptyset \quad \text{car } x' \in B' \subset B \subset \bar{D}.$$

On aboutit à une contradiction du fait que

$D$  est npd :  $\forall$  boule  $B \exists$  une boule  $B' \subset B$  tq  $B' \cap D = \emptyset$ . clic

$\text{int}(\bar{D}) = \emptyset \Rightarrow D$  npd

M si t boule  $B(x,r)$  contient  $B' \subset B(x,r)$  tq  $B' \cap D = \emptyset$   
 alors  $\forall x \in B'$ ,  $x \notin \bar{D}$ .

M  $\Rightarrow B(x,x) \not\subset \bar{D} \Rightarrow \text{int}(\bar{D}) = \emptyset$ .

M spqs p ②  $D$  n'est pas npd  $\Rightarrow \exists$  boule  $B$ ,  $\forall$  boule  $B' \subset B$ ,  
 on a  $B' \cap D \neq \emptyset$ . soit  $x \in B$  qq alors  $B' = B(x,r) \cap D \neq \emptyset$ ,  
 $\forall r > 0$ . De  $x \in \bar{D}$  & de  $B \subset \bar{D}$ . d'où  $\text{int}(\bar{D}) \supset B \neq \emptyset$ .

clic

c) Vérifier que ens  $\mathbb{N}$  &  $\mathbb{Z}$  st mpd ds  $\mathbb{R}$ .  
 L'ens  $\left\{ \left( \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \times \right\}$  est-il rare ds  $\mathbb{R}$ ?

Mq  $\mathbb{Z}$  n'est mpd ds  $\mathbb{R}$ .

D'après b, il faut & il suffit de prouver que  $\text{int}(\overline{\mathbb{Z}}) = \emptyset$ .

Mq  $\mathbb{Z}$  est fermé. soit  $x \in \mathbb{R}$  tq.  
 $x \in \overline{\mathbb{Z}}$  alors  $\exists$  une suite  $(x_n) \subset \mathbb{Z}$   
 tq  $d(x, x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Qc  $\exists N, \forall n \geq N$ ,  
 $d(x, x_n) < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N$ ,  
 $d(x, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x_n)$   
 $< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$

Comme  $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$ , on ad  $x_n = x_m$ .

Done  $x_n = x_N, \forall n \geq N$  &  $d(x, x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$\Rightarrow d(x, x_N) = 0 \Rightarrow x = x_N \in \mathbb{Z}$

Qc  $\mathbb{Z}$  est fermé.

$\Rightarrow$  Il reste à vérifier que  $\text{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$ .  
 Si ce n'était pas le cas alors  $\mathbb{Z}$  contenait un intervalle  $[a, b]$  &  $a \neq b$ . Ce n'est pas possible ~



Done  $\mathbb{Z}$  n'est mpd ds  $\mathbb{R}$ .

d) ens de Cantor : || construire ens (1) & mpd ds  $[0, 1]$  ||  
 On divise  $I = I_0 = [0, 1]$  en 3 p'ts égaux & on enlève le milieu  $\left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$ , en notant  $I_1$  p'ts restants ; les 2 ss-int sont subdivisés en 3  $\Rightarrow$  entre milieu  $\rightarrow$  noté  $I_2$ .  
 Sur le pas  $n$ , on obtient  $I_0 \subset I_{n-1} \subset [0, 1]$  constitués de  $2^{n-1}$  ss-int. disjoint de longueur  $3^{-n}$ .  
 On pose  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

(i) Mq  $C$  est ens  $\infty$  et fermé de  $\mathbb{R}$ .

Retour sur c)

est-il rare ab I, IC.

soit  $D = \{(\frac{1}{m}) : m \in \text{PN}^*\} \subset ]-1, 1[$

$$\text{lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n} = 0$$

$\text{int}(\bar{D}) = \emptyset$  car si  $x_0 \in \text{int}(\bar{D}) = \text{int}(D \cup \{0\})$

alors soit  $x_0 = \frac{1}{m_0}$  pour certain  $m_0 \in \text{PN}^*$

soit  $x_0 = 0$ .

cas 1<sup>er</sup>  $x_0 = \frac{1}{m_0}, m_0 \in \text{PN}^* :$

$B(x_0, r) \cap D \cup \{0\} = \{x_0\}$  lorsque  $r > 0$   
assez petit.

Ex  $B(x_0, r) \subset D \cup \{0\}$  lorsque  $r > 0$  assez petit  
et cette boule a une autre d'elt. (cqd)

cas 2<sup>me</sup> :  $x_0 = 0$

$]x_1, x_2[$

Dc  $\exists r > 0$  assez petit tq  $B(0, r) \subset D \cup \{0\}$ .

La cette boule contient des points rationnels  
tandis que  $D \cup \{0\} \subset \mathbb{Q}$ . (cqd)

Dc  $D$  est npd de  $\mathbb{R}$ , ep npd de  $] -1, 1 [$  de  $\mathbb{R}$ .  
d'où

Retour sur d)

Ens de Cantor

(i) Mg C'est ens  $\infty$  et fermé de  $\mathbb{R}$

On a  $I_0 = [0, 1]$ ,  $I_1 = I_0 \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,

$= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$

Sur le pas  $n$ , on obtient :

$I_n$  constitué de  $2^n$  intervalles

$[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}]$  où  $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$  et  $m_i \in \{0, 2\}$

Observons que  $[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}]$  est fermé. Donc  $I_n$  est fermé

Dc  $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  est aussi fermé.

Pq mg.  $C$  est de cardinal infini, il

suffit de mg :

$C = \{x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 3^{-i-1} : m_i \in \{0, 2\}, k \in \text{PN}\} \subset C$

$C$  est l'ens des nrs  $x \in [0, 1]$  dont l'écarture  
binnaire  $C$  (ie en base 3) est  $m_0, m_1, \dots, m_i, \dots$  tels que  $m_i \in \{0, 2\}$

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \cdot 10^{-i-1} \quad m_i \in \{0, \dots, 9\}$$

except  $9^{gg}=1$ .

Donc  $C_0$  est de cardinal  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$\text{sat } x = \overline{0, m_0, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots} \in C_0$$

Observons que pour tout  $m \geq 1$ ,

$$x \in \left[ \frac{m}{3^m}, \frac{m+1}{3^m} \right] \text{ où } m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$$

de sorte que  $x \in I_m$ . Donc  $x \in C$ .

Donc  $C$  est de cardinal  $\infty$ .

(ii) Montrons que  $C$  est mpd de  $[0,1]$

soit  $I_a, b \subset [0,1]$  tq  $I_a, b \cap C \neq \emptyset$ .

Montrons qu'il existe un  $n$ -intervalle  $I_a', b' \subset I_a, b$  tq

$$I_a', b' \cap C = \emptyset.$$

indic Considérons un  $n$ -intervalle  $I_m$  contenant  $x \in C \cap I_a, b$

$$\text{et montrons que } I_{m-1} \subset I_m \subset I_{m+1}$$

Répétons l'affirmation, où  $c_m$  est milieu de  $I_m$ .

Pour montrer que  $C$  est mpd d'après f), il faut & il suffit de montrer que si  $a, b \in C \subset [0,1]$ , il existe un  $n$ -intervalle  $I_a', b' \subset I_a, b$  tq  $I_a', b' \cap C = \emptyset$ .

Branchez

$$\text{si } I_a, b = [0, 1] \Rightarrow I_a', b' = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right].$$

$$\text{si } I_a, b \subset [0, \frac{1}{3}] \Rightarrow I_a', b' = \left[ \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right],$$

$$\text{si } I_a, b = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \Rightarrow I_a', b' = I_a, b.$$

$$\text{si } I_a, b = \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \Rightarrow I_a', b' = \left[ \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right].$$

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}: \left[ \frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n} \right] \subset C \cap I_a, b.$$

$$\text{Écrivons } m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i \text{ où } m_i \in \{0, 1, 2\}$$

Il y a 2 cas :

① Si  $m_i = 1$  pour un certain  $i$ :

alors  $\left[ \frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n} \right] \subset$  un intervalle enlevé.

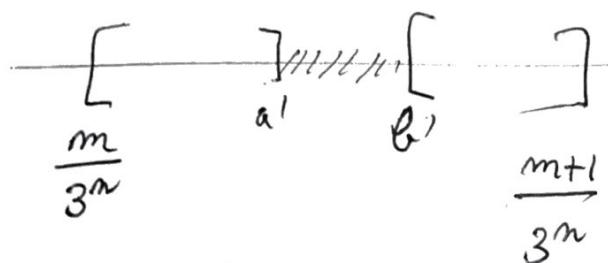
$$\Rightarrow \left[ \frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n} \right] \cap I_i = \emptyset$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n} \right] \cap C = \emptyset \text{ car } C \subset I_i.$$

○ Il suffit de prendre  $[a', b'] = \left[ \frac{m}{3^m}, \frac{m+1}{3^{m+1}} \right]$  Ex 30 (Principe de la borne uniforme)

○ si  $m_i \in \{0, 1\}$ ,  $\forall 0 \leq i \leq m-1$

alors on prend  $[a', b']$  le tiers-intervalle  
au milieu  $\hat{c} \in [a', b']$



comme  $[a', b'] \cap I_m = \emptyset$ , et  $c \in I_m$ ,  
on conduit que  $c \in [a', b'] = \emptyset$ .

Donc  $c$  est isolé.

soit  $X$  espace métrique complet. sous  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$   
une suite de fonctions continues tq  $K_n \in X$  tel que  
 $c(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$  est bornée

alors  $\exists r > 0$  & boule fermée  $B = \overline{B(a, r)} \subset X$   
du rayon  $r > 0$  tq pour uniforme  $D > 0$   
on a  $\forall n \in B$ :  $|f_n(x)| \leq D$

a)  $M_N$  ens  $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$  est  
égal à  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$ , et qu'il  
est fermé.

$$\begin{aligned} X_N &= \{x \in X : c(x) \leq N\} = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq N\} \\ &= \{x \in X : |f_n(x)| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\} \end{aligned}$$

○  $f_n$  est continu &

Comme  $f_m$  est cont &

$$\{x \in X : |f_m(x)| \leq N\} = \{x \in X : f_m(x) \in [-N, N]\}$$
$$= f_m^{-1}([-N, N])$$

et  $[-N, N]$  est fermé l'ens  $\{x \in X : |f_m(x)| \leq N\}$

est fermé. Donc  $X_N$  est fermé.