M4L

CI / Dualité

§1: Formes linéaires & l'espace dual

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le corps de base.

soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applicaOs $E \to F$ k-linéaire.

- $\mathcal{L}(E,F)$ est un e.v :

(i) la somme :

$\varphi, \psi : E \to F$ ~~K~~-linéaire $\rightsquigarrow \varphi + \psi : E \to F$
$x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$

(ii) la multiplicaO par scalaire :

$\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi : E \to F$ K-linéaire $\rightsquigarrow \lambda\varphi : E \to F$
$x \mapsto \lambda\varphi(x)$

(D)$_1$ Lorsque $F = \mathbb{K}^1$, on appelle les élts de $\mathcal{L}(E, K^1)$ formes linéaires sur E, et on appelle $\mathcal{L}(E, K^1)$ espace dual de E.

- NotaO : $\boxed{\mathcal{L}(E, K^1) = E^*}$

→ Lorsque $\dim E = n$, $\dim F = m$, on a : $\dim \mathcal{L}(E,F) = m.n$. En choisissant des bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ dans E, F respectivement.

On pt représenter les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ par des matrices :

l'applicaO :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \cup & & \cup \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \end{array}$$

est une bijecO linéaire.

Lorsque $F = K^1$, $m = \dim F = 1$;

K^1 a la base canonique $1 \in K$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} \overset{\varphi}{\longmapsto} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{F}}$$

Donc la matrice de forme linéaire est une ligne, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\forall \varphi \in E^*$

Lors d'un changement de base

$\mathcal{E} = (e_i) \xrightarrow{T} \mathcal{E}'(e_i)$, la matrice d'une forme linéaire se transforme suivant la règle

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) . T}$$

Rq : Dans le cas général de F qq, la règle de transformat° de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$) est

$\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{E}'$, $\mathcal{F} \xrightarrow{S} \mathcal{F}'$

$\rightsquigarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = S^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)$

Les hyperplans

(R) Un hyperplan de E est un $\mathbb{K}$-e.V de E de dim $n-1$, où $n = \dim E$.

(P)$_1$ - soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul.

(i) Pour tte forme linéaire ℓ non nulle pour E, son noyau $\ker \ell$ est un hyperplan de E.

(ii) Pour tout hyperplan H de E, il existe une forme linéaire ℓ non nulle sur E, unique à un facteur non nul près, tq $\ker \ell = H$.

DM On a pour $\ell \in E^*$: Mq (i)

$\dim \ell + \dim \ker \ell = n = \dim E$

De plus, $\{0\} \subset \mathrm{Im}(\ell) \subset \mathbb{K}^1$,

d'où $\dim \mathrm{Im}\, \ell \in \{0,1\}$. Donc pour $\ell \in E^*$, on a :

$\ell \neq 0 \iff \mathrm{Im}\, \ell = \mathbb{K}^1 \iff \dim \mathrm{Im}\, \ell = 1$

$\iff \dim \ker \ell = n-1$

$\iff \ker \ell$ est un hyperplan. (i) dmq'

Mq (ii) soit H un hyperplan. Choisissons une base qq $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H et complétons la à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

Définissons $\varphi : E \to \mathbb{K}^1$ par la matrice $(0, \dots, 0, 1)$:

$\varphi : x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \mathrm{Mat}(\varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_n$.

On a bien $\ker \varphi = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$. $\exists$ mqé

soit $\psi \in E^*$ une autre forme linéaire sur E tq $\ker \psi = H$. soit A matrice,

$A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(\psi)$, $A = (a_1, \dots, a_n)$ alors

$\forall i = 1, \dots, n-1$, $\psi(e_i) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i = 0$

2

(car $e_i \in H$ et $H = \ker \psi$),

donc $A = \underbrace{(0,\dots,0,a_n)}_{Mat_{(e_i)}(\psi)} = a_n(0,\dots,0,1)$,

ie $\psi = a_n \cdot \varphi$. enfin $a_n \neq 0$

car $\psi \neq 0$ □

Base duale

(P2) soit E un $\mathbb{K}$ e-v, de dim n, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ où pour chaque $i = 1, \dots, n$

$$e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

est la forme linéaire associant à tout vecteur de E son $\boxed{i\text{-ième}}$ $\boxed{\text{coordonnée}}$ de la base $\mathcal{E}$, est une base de E^*

DM P2 : 1) les coordonnées

$(x_1, \dots, x_n) = \left([x]_1^{\mathcal{E}}, \dots, [x]_n^{\mathcal{E}}\right)$

d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{E}$ sont déterminées de façon unique, donc les applicat°s

$e_i^* : x \longmapsto [x]_i^{\mathcal{E}}$ $\quad (i = 1, \dots, n)$ sont bien définies.

2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, $i = 1, \dots, n$; on a $[\lambda x + y]_i^{\mathcal{E}} = \lambda [x]_i^{\mathcal{E}} + [y]_i^{\mathcal{E}}$ donc les e_i^* sont bien linéaires.

On a montré que $e_1^*, \dots, e_n^* \in E^*$.

Mq c'est une base.

3) $\varphi \in E^*$, $x \in E$,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_i [x]_i^{\mathcal{E}} e_i\right) = \sum [x]_i^{\mathcal{E}} \varphi(e_i) = \sum a_i [x_i]_i^{\mathcal{E}}$$

où $a_i = \varphi(e_i)$.

$[x_i]_i^{\mathcal{E}}$

Donc $\varphi(x) = \sum_i a_i e_i^*(x)$ $\quad (\forall x \in E)$

Donc $\varphi = \sum a_i e_i^*$.

On a mqé que $E^* = \mathrm{Vect}(e_1^*, \dots, e_m^*)$

4) Pour $\varphi \in E^*$, on a :

$\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Supposons $\varphi = \sum a_i e_i^* = 0$.

Alors $\varphi(e_j) = \sum_i a_i e_i^*(e_j) =$

$= \sum_i a_i \underbrace{[e_j]_i^{\mathcal{E}}}_{\delta_{ij}} = a_j = 0$

pour tout $j = 1 \longrightarrow n$.

cela mq l'indépendance linéaire des e_i^*, $i = 1, \dots, n$ $\square$

D_2. La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ introduite ds Prop 2 s'appelle base duale de $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

Cor$_1$ si $\dim E < \infty$, alors $\dim E^* < \infty$ et $\dim E = \dim E^*$.

$D_{2'}$ (Def équivalente) d'une base duale.

Une base $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ de E^* est la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ (base de E) ssi $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker ; $i,j = 1, \dots, n = \dim E$)

Base anté-duale

D_3 soit E e-v de dim finie n et $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ une base de E^*.

Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tq $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i,j = 1, \dots, n$ s'appelle base anté-duale de $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$.

(P3) Soit E ev de dim finie n. Alors toute base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* admet une unique base anté-duale.

DM Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base qq de E. Posons $\varepsilon_i(f_j) = a_{ij}$ $(i,j = 1, \dots, n)$; $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varepsilon_i) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in M_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}\left(\sum \lambda_i \varepsilon_i\right) = \sum \lambda_i (a_{i1} \dots a_{in}).$$

Pour $\varphi \in E^*$, on a :

$$\varphi = 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = 0,$$

donc :

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont linéair^t ind'pdts

$\iff$ les lignes $(a_{i1} \dots a_{in})$, $i = 1 \dots, n$ sont linéair^t indpdtes.

$\mathrm{rang}(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Donc $\forall i = 1, \dots, n$, le système linéaire

$$(*) \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \text{ sur la } i\text{-ème place}$$

admet une uniq soluθ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Or ce système exprime l'égalité

$$\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = \delta_{ij},$$

car $\varepsilon_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = \sum_{h=1}^{n} x_h \underbrace{\varepsilon_j(f_h)}_{a_{jh}}$

$= \sum a_{jk} x_k$.

Notons cette unique soluθ e_i.

On a dmqé $\forall i = 1, \dots, n$, $\exists$ un uniq $e_i \in E$ tq $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$.

Il reste à voir pk $e_1, \dots, e_n$ forment une base de E. En effet en notant la solut° uniq $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de (*) par $\begin{pmatrix} e_{1i} \\ \vdots \\ e_{ni} \end{pmatrix}$, ns obtenons la matrice $B = (b_{ji})$ tq $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j$ $(i = 1, \dots, n)$. Alors la ppté $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ se réécrit comme $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \delta_{ij}$

ou $AB = Id_n$. Donc B est inversible, et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base liée avec $(f_1, \dots, f_n)$ p la matrice de passage B.

□

(P4) soit E ev de dim finie n, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors pour <u>les matrices de passage</u> on a :

$$P_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \right)^{-1}$$

<u>DM</u> Exercice

<u>Exemples</u> : ⓐ$_1$ $E = \mathbb{K}^n$ a une base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Donc on pt aussi munir $\mathbb{K}^{n*}$ d'une base canoniq, définie comme la duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de la base canoniq de $\mathbb{K}^n$. Chaque e-v muni d'une base canoniq s'identifie naturellement à $\mathbb{K}^n$. Donc :

$\mathbb{K}^{n*}$ s'identifie naturellement à $\mathbb{K}^n$.

Cette identificat° naturelle est la bijection linéaire $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n*}$, $e_1 \mapsto e_1^*, \dots, e_n \mapsto e_n^*$.

@$_2$ Forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$:

Trace : $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \longmapsto Tr(A)$

@$_3$ soit $\mathbb{K}_n[X]$ ev des polynômes de deg $\leq n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^1 \\ \cup & & \cup \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire.

@$_2$ Forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$: !

Trace : $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto Tr(A)$

@$_3$ soit $\mathbb{K}_n[X]$ ev des polynômes de deg $\leq n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^1 \\ \cup & & \cup \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Le double dual, les annulateurs et la transposée

Th^1 soit E un ev sur $\mathbb{K}$. Alors la formule

$E \longrightarrow E^{**}$, $v \mapsto [E^* \mapsto E^{**}, l \mapsto l(v)]$

définit une applicaθ linéaire $\Phi : E \rightarrow E^{**}$.

si de plus $\dim E < \infty$ alors Φ est isomorphisme.

DM 1) Pr chaque $v \in E$, la f $E^* \rightarrow K$, $l \mapsto l(v)$ est linéaire en l, donc est un élément de E^{**}. On définit $\Phi(v)$ égal à cette foncθ ; on a une applicaθ $\Phi : E \rightarrow E^{**}$ bien définie en v, dc l'applicaθ $v \mapsto E(v)$ est linéaire, ie $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.

2) soit mtnt $\dim E < \infty$. si $v \in E \setminus \{0\}$, on pt compléter v à une base $(v = e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. On pt alors construire une forme linéaire $l \in E^*$ q ne s'annule pas par v : par @ on pt choisir $l = e_1^*$, le 1° élt de la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$. Alors $l(v) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$

Mais alors $\Phi(v) \neq 0$, car $\Phi(v)$ est une forme linéaire sur E^* q prend une valeur non nulle dans $l(v)$ sur l. Donc $\ker \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

3) On a vu que si $\dim E < \infty$, alors $\dim E^* < \infty$ aussi et $\dim E = \dim E^*$ (cor. 1)

Donc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$.

Puisque E est injective, et les dimensions coïncident, Φ est bijective ∎

Rq : On appelle l'isomorphisme Φ de (Th1) isomorphisme canoniq (ou naturel) entre E et E^{**}.

Les annulateurs

(D1) soit E un e.v,

(i) pr sev F de E, on définit l'annulateur de F dans E^*, ou l'orthogonal de F par $F^\perp = \{ \ell \in E^* \mid \forall v \in F,\ \ell(v) = 0 \}$

(ii) pr sev G de E^*, on définit l'annulateur (ou l'orthogonal) de G dans E par

$$G^\perp = \{ v \in E \mid \forall \ell \in G,\ \ell(v) = 0 \}.$$

(Rq) Autrement dit, $F^\perp$ est l'ensemble des équat°s linéaires de F.

(P1) soit E un ev. et F, G des sev de E ou de E^* alors :

a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

b) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

c) $F \subset F^{\perp\perp}$

d) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

si en plus, $\dim E < \infty$, alors on a :

c') $F = F^{\perp\perp}$

d') $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

e) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

DM a, b, c, d exercice.

Mq e) pour $F \subset E$, soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Complétons la à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors on peut décomposer tout $\ell \in E^*$ ds la base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

soit $\ell = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$. Alors

$$\ell(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = \lambda_i$$

Donc $f \in F^\perp \iff f(e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
$\iff \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
$\iff f \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$

Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$
et $\dim F^\perp = n - k$.

- Mq c') par c),

$\dim F^{\perp\perp} = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F)$
$= \dim F.$

Donc $F = F^{\perp\perp}$
Puisque $F \subset F^{\perp\perp}$ par c), et que $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$, on a $F = F^{\perp\perp}$.

- Mq d') notons $f = \dim F$, $g = \dim G$, $s = \dim(F \cap G)$.

Alors $\dim (F \cap G)^\perp = n - s$.

et $\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) = (n-f) - (n-g) - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$
(par e), b)) $= (n-f) + (n-g) - (n - (f+g-s))$
$= n - s$.

Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et les dimensions coïncident $\Rightarrow$ on a l'égalité.

On pt déduire les pptés c') d') e), pour $F, G \in E^*$ de ce qu'on a dmqé pr des ss-espaces de E, en posant $E = A^\perp$, $G = B^\perp$ pr $A, B \subset E$.
(on pose $A = E^\perp$, on a $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$, ...) ■

La transposée

(D2) Soit E, F des ev. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit la transposée ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par : $\forall f \in F^*, \ {}^t\varphi(f) = f \circ \varphi$.

P2 (i) soit $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_m)$, $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ des bases de E, F. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*}({}^t\varphi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right)$$

(ii) $(\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp = \ker({}^t\varphi)$

$(\ker \varphi)^\perp = \mathrm{Im}\,{}^t\varphi$

en on conclut φ surjective $\Leftrightarrow$ ${}^t\varphi$ injective.
φ injective $\Leftrightarrow$ ${}^t\varphi$ surjective.

(iii) $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,{}^t\varphi$

(iv) si on identifie E à E^{**} et F à F^{**} alors ${}^t({}^t\varphi) = \varphi$.

(v) soit G un 3° ev et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors ${}^t(\psi\circ\varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$.

(vi) si $E=F$, et si $\varphi \in \mathcal{L}(F,E)$ est inversible, alors ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$.

Rq: Une version précise de (iv)

on note $\Phi_E : E \to E^{**}$, $\Phi_F : F \to F^{**}$ les isomorphismes can (TH)1 pour E & pour F, on a le diag de morphismes.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_E"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "\Phi_F"] \\
E^{**} \arrow[r, "{}^t({}^t\varphi)"] & F^{**}
\end{tikzcd}$$

Par (iv) le diag est commutatif :

$$\boxed{\Phi_F \circ \varphi = {}^t({}^t\varphi) \circ \Phi_E}$$

IV ev

Ch III : Formes bilinéaires

(D1) 1) Une *forme bilinéaire* sur e.v E est une applicat° $\varphi : E\times E \to K$, linéaire en chacun de ses arguments, ie:

- $\forall x \in E$, l'applicat° $\underbrace{E \to K,\ y \mapsto \varphi(x,y)}_{\text{notat° } \varphi(x,\cdot)}$ est une forme linéaire,
- pour tout $y \in E$, l'appli $\underbrace{E \to K,\ x \mapsto \varphi(x,y)}_{\varphi(\cdot,y)}$ est aussi une forme linéaire.

2) Une forme bilinéaire φ est dite *symétriq* (resp. alterné) si $\forall x,y \in E$, on a
$\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (resp $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$)

Notons pr les ensembles des formes bilinéaires, resp bilin. sym., bil. alt. soit:
$\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$. Ce sont des ev.

$\forall\ \varphi,\psi \in \mathcal{B}(E)\ \forall \lambda \in K$,
$\lambda\varphi + \psi \in \mathcal{B}(E)$, et pareil pour $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$.

Donnée dans une base

soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. alors $\forall\ X,Y \in E$, on pt écrire
$X = \sum x_i e_i$, $Y = \sum y_j e_j$,

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i y_j \varphi(e_i,e_j).$$

(D2) La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$ s'appelle matrice de la forme bilin. φ dans la base $\mathcal{E}$ et est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$

si on note $a_{ij} = \varphi(e_i,e_j)$, $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$
alors $\forall x,y \in E$ $\varphi(X,Y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j$,

où (x_i), (y_j) st coord. des vecteurs X, Y ds la base $\mathcal{E}$. On pt aussi écrire :

$$\varphi(X,Y) = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

P1 soit $E, \varphi, \mathcal{E}, A$ comme ci-dessus.

Alors :

(i) $\varphi \in \mathcal{S}(E) \iff \forall i,j = 1, \dots, n$, $a_{ij} = a_{ji}$ (on dit : la mat A est symétriq),

(ii) $\varphi \in \mathcal{A}(E) \iff \forall i,j = 1, \dots, n$, $a_{ij} = -a_{ji}$ (on dit que A est anti-symétriq) ;

(iii) $\dim \mathcal{B}(E) = n^2$, $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathcal{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$$

DM (i) $\Rightarrow$ $\varphi \in \mathcal{S}(E) \Rightarrow \forall i,j = 1, \dots, n$, $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) \Rightarrow \forall i,j = 1, \dots, n$, $a_{ij} = a_{ji}$

$\Leftarrow$ si $a_{ij} = a_{ji}$ pr tt i,j alors pour tous $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j e_j$ on a

$$\varphi(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j \underset{\uparrow}{=} \sum a_{ji} y_j x_i = \varphi(y,x)$$

commutativité de multiplicaⓞ

dc $\varphi \in \mathcal{S}(E)$

(ii) Pareil.

(iii) (1) La données des formes bilinéaires par des matrices ds une base $(e_1, \dots, e_n)$ définit des bijectⓞs linéaires.

$$\mathcal{B}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\mathbb{K})$$

$\mathcal{S}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^tA = A\}$,

$\mathcal{A}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^tA = -A\}$.

On a $\dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$, $\dim \mathcal{S}_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$

(on pt choisir des coord. sur $\mathcal{S}_n(K)$ des éléments matriciels)

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, $\dim \mathcal{A}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(on pt choisir ε coord de $\mathcal{A}_n(K)$ les élts matriciels

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$; on a $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$

2) soit $\mathcal{B}(E) \overset{?}{=} \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$.

soit $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. Alors $\forall x, y \in E$, on a :

$$\varphi(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x))}_{\text{forme symétrique en } x,y} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x))}_{\text{forme alternée en } x,y}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$,

et $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$.

3) soit $\varphi \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E)$. Alors $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$ ce q̇ entraîne $\varphi(x,y) = 0$. Donc $\varphi = 0$.

Donc $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$

et $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

□

P2 soit E un ev dim n, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ des bases de E, $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$

Alors $A' = {}^tP . A . P$.

DM exercice.

Rq si $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, on a ${}^tA = A$; on p^t en déduire que ${}^tA' = A'$:

$$ {}^t(A') = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP) $$
$$ = {}^tPAP = A'. $$

D'ailleurs $\varphi \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(K)$ pr toutes les bases $\mathcal{E}$.

Forme quadratiques

D3 soit E un $\mathbb{K}$-e-v. Une fonc° $Q : E \to K$ s'appelle forme quadratiq si

1) $\forall \lambda \in K, \forall v \in E, Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ et

2) $b_Q : E\times E \to K, (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big)$ est une forme linéaire.

On appelle b_Q forme bilinéaire symétriq $\leftarrow A \rightarrow$ée à Q, ou la forme polaire de Q, ou polaire de Q.

Les formes quadratiqs sur E forment un K-e-v que l'on notera $Q(E)$;

l'applica° $\mathcal{P} : Q(E) \to \mathcal{S}(E), Q \mapsto b_Q$ est linéaire et est appelée polarisa°

(morphisme de polarisa°).

L $\mathcal{P}$ est un isom. de $Q(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ d'inverse $\mathcal{D} : \mathcal{S}(E) \to Q(E) ; \varphi \mapsto q_\varphi$,

où q_φ est déf par $x \mapsto \varphi(x,$

DM 1) $\mathcal{P} \circ \mathcal{D} = id_{\mathcal{S}(E)}$, ie

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(E), b_{q_\varphi} = \varphi$, ce q' suit de la relat° :

$$ \underbrace{\varphi(x+y, x+y)}_{q_\varphi(x+y)} = \underbrace{\varphi(x,x)}_{q_\varphi(x)} + \underbrace{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}_{2\varphi(x,y) \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}_E} + \underbrace{\varphi(y,y)}_{q_\varphi(y)} $$

ie $b_{q_\varphi}(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_\varphi(x+y) - q_\varphi(x) - q_\varphi(y)\right)$,

$= \varphi(x,y)$.

2) $\mathcal{D} \circ \mathcal{P} = id_{Q(E)}$. en effet :

$\forall\, Q \in Q(E)$,

$q_{b_Q}(x) = b_Q(x,x) = \frac{1}{2}\left(Q(x+x) - Q(x) - Q(x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(Q(2x) - 2\,Q(x)\right) = \frac{1}{2}\left(4Q(x) - 2Q(x)\right)$

$= Q(x)$.

Donc $q_{b_Q} = Q$.

def

NB $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$

D4 pour $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, on appelle $q_\varphi \in Q(E)$ forme quadratiq associée à φ.

$\left(q_\varphi = \mathcal{D}(\varphi)\right)$.

D5. La matrice d'une forme quadratiq Q ds une base $\mathcal{E}$ de E est la matrice de la forme polaire de Q :

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(Q) := \mathrm{Mat}_\mathcal{E}(b_Q)$$

Écriture d'une forme quadratiq ds une base

soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base,

$\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(Q) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.

Alors $a_{ji} = a_{ij}$ $\forall\, i,j = 1, \dots, n$ on a :

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\, x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Diagonalisat° des formes quadratiqs

(TH) soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie. Alors tte forme quadratiq (ou bilinéaire symétriq) sur E est diagonalisable ie $\exists$ une base $\mathcal{E}$ de E, ds lqlle la mat de la forme est diagonale.

DM Par $\boxed{\text{M}}$ de Gauss

On choisit une base qq $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E ce q ns fournit n fonctOs coordonnées

$$x = \sum_{k=1} x_k b_k \xrightarrow{b_i^*} x_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

que l'on note (abus de notat° juste x_i), et alors tte forme ~~linéaire~~ quadratiq $Q : E \to \mathbb{K}$ s'écrit c polynôme homog de deg 2 en les x_i :

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j .$$

Une notat° + rigoureuse serait :

$$Q : \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \longmapsto \sum_{1 \leq i \leq j < n} a_{ij} x_i x_j \text{ , ou encore}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i^* b_j^*$$

On démontrera p récurrence sur $p = 1, \dots, n$:

(H_p) : soit $f_1, \dots, f_p \in E^*$ ~~lin~~ lint indépendantes, $(a_{ij}) \in \mathcal{S}_p(K)$ et $h = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} a_{ij} f_i f_j \in Q(E)$

Alors il existe $l_1, \dots, l_p \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \subset E^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ tq $e_1, \dots, e_p$ st linéairt indépendantes et $h = \lambda_1 l_1^2 + \dots + \lambda_p l_p^2$.

En appliquant (H_n) à $f_i = b_i^*$, $h = Q$ on trouve une base $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_n)$ de E^* ds laquelle $Q = \lambda_1 l_1^2 + \dots + \lambda_n l_n^2$, et la base anté-duale $\mathcal{E}$ de E est celle dt l'$\exists$ est affirmée par le théorème :

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

DM de (H_p) pour $p=1,\dots,n$

soit $p=1$, on a $h=a_{11}f_1^2$, on pose $\lambda_1=a_{11}$, $\ell_1=f_1$ et c'est terminé.

soit $p\in\{2,\dots,n\}$. On déd (H_p) des (H_q) pour $q<p$.

• 1er cas $\exists\, i\in\{1,\dots,p\}$ tq $a_{ii}\neq 0$

Quitte à permuter les f_i, on pt supposer que $i=1$, ie $a_{11}\neq 0$. Alors

$$h=a_{11}f_1^2+2a_{12}f_1f_2+\dots+2a_{1p}f_1f_p+\dots+\sum_{2\leq i\leq j\leq p}a_{ij}f_if_j=$$

$$=a_{11}\left(f_1^2+2f_i\frac{a_{12}}{a_{11}}f_2+\dots+2f_i\frac{a_{1p}}{a_{11}}f_p\right)+\sum_{2\leq i\leq j\leq p}a_{ij}f_if_j$$

On pose $\ell_1=f_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}f_2+\dots+\frac{a_{1p}}{a_{11}}f_p$

On a
$$h=a_{11}\ell_1^2-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}f_2^2-\dots-\frac{a_{1p}^2}{a_{11}}f_p^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}f_if_j+\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}f_if_j$$

$$=a_{11}\ell_1^2+\underbrace{\sum_{2\leq i,j\leq p}a'_{ij}f_i.f_j}_{h'},$$

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$$

Donc $h=a_{11}\ell_1^2+h'$, où h' est un polynôme quadratiq homog en $p-1$ formes linéaires linéairement indépendants $f_2,\dots,f_p$. Par (H_{p-1}) $\exists$ $p-1$ formes linét indep. $\ell_2,\dots,\ell_p\in \mathrm{Vect}(f_2,\dots,f_p)$ & des ctes $\lambda_2,\dots,\lambda_p\in K$ tq $h'=\lambda_2\ell_2^2+\dots+\lambda_p\ell_p^2$. Alors

$$h=\lambda_1\ell_1^2+\dots+\lambda_p\ell_p^2,\quad \text{où } \lambda_1=a_{11}$$

2° cas $\forall i = 1, \dots, p$: $a_{ii} = 0$. si tous les a_{ij} st nuls, alors $h = 0$ & on pt poser $h_i = f_i$, $\lambda_i = 0$ pr $\forall$ $i = 1, \dots, p$. Supposons $\exists$ une paire (i,j), $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq p$ tq $a_{ij} \neq 0$. Quitte à permuter les f_k, on pt supposer que $i = 1$, $j = 2$: $a_{12} \neq 0$. On pose $f_1 = f_1' - f_2'$, $f_2 = f_1' + f_2'$, $f_j = f_j'$ (pr $j \geq 3$), on obtient une forme $k' = \sum a_{ij}' f_i' f_j'$, pr laquelle $a_{11}' = a_{12}$, $a_{22}' = -a_{12} \neq 0$, $1 \leq i,j \leq p$, on pt appliq le résultat cas 1. $\square$

Bases Orthogonales

D1 Soit E un ev muni d'1 forme bilinéaire symétriq ie Pour 2 vecteurs $x, y \in E$, on écrit $x \perp_\varphi y$, on dit "x est φ-orthogonal à y" si $\varphi(x,y) = 0$.
Pr la forme quadratiq Q sur E, on écrit aussi $x \perp_Q y$ au lieu de $x \perp_{\varphi_Q} y$.

Rq Cette relation est symétriq $x \perp_\varphi y \iff y \perp_\varphi x$. On pt les définir aussi pr tte forme bilin. φ, ~~pas~~ forcément symétriq mais $x \perp_\varphi y$ ne sera + équivalent à $y \perp_\varphi x$.
Un autre cas où l'orthogonalité des vecteurs est relation symétriq est le cas où $\varphi \in \mathcal{A}(E)$. ($\varphi$ est form bil. alternée)

D2 Soit E ev dim n, muni forme quadratiq (ou bil. sym). Une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonal si une des pptés équivalentes suivantes est verifiée :
(i) $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$,
(ii) la mat de la forme ~~Q~~ ds la base $\mathcal{E}$ est diagonale

On pt reformuler le résultat du Th 1

Cor 1 Toute forme quadr. (ou bili sym) sur un ev de dim finie admet des bases orthogonales.
Convent° pr couvrir le cas $E=\{0\}$. est déclarée d'ê une base orthogonale de $\{0\}$.

Formes quadratiqs positives

soit $K=\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{R}$ ev de dim $n<\infty$.

D3 Une forme quadr. Q (resp. forme bil. symétriq φ) est dite positive si
$\forall x\in E$, $Q(x)\geq 0$.
(resp $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$)

Not°: $Q\geq 0$ et $\varphi\geq 0$, on dit que Q (resp φ) est bien définie positive, & on écrit $Q>0$ (resp $\varphi>0$) si $Q\geq 0$ et $Q(x)\Rightarrow x=0$ (resp $\varphi\geq 0$ et $\varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0$)

De façon similaire, les formes négatives ($Q\leq 0$, $\varphi\leq 0$) et définies $\ominus$ ($Q<0$, $\varphi<0$). Une forme Q est négative si $-Q$ est positive.

Prop 1 soit $Q\in\mathcal{Q}(E)$.

(i) Q est positive $\Leftrightarrow$ pr tte base Q-orthogonal $(e_1,\dots,e_n)$ de E, on a $Q(e_i)\geq 0$ pr t $i=1,\dots,n$

(ii) Q est déf positive $\Leftrightarrow$ positive ds base $(e_1,\dots,e_n)$ Q-orthogonal de E, on a $Q(e_i)>0$ $\forall i=1,\dots,n$ $\Leftrightarrow$ il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ Q-orthogonal de E, pr laquelle $Q(e_i)>0$ pr t $i=1,\dots,n$

(iii) soit F un ss-ens de E. Alors $Q|_F: F\to K$ est une forme quadratiq sur F, $Q|_F\in\mathcal{Q}(F)$, et on a impli: $Q\geq 0\Rightarrow Q|_F\geq 0$ et
$Q>0\Rightarrow Q|_F>0$.

D4 Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-e.v E de dim finie muni d'une forme quadr. déf positive Q. La forme polaire b_Q de Q est appelé produit scalaire.

D5 Ds un espace euclidien, une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale & de plus $Q(e_1) = \dots = Q(e_n) = 1$

Cor 2 Un espace euclidien admet des bases orthonormées.

DM Par Cor 1, $\exists$ une base orthogonale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Posons $\lambda_i = Q(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Alors $\lambda_i > 0$ $\forall i$ car $Q > 0$.

$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\right)$ est alors orthonormé

Classificat° des formes quadratiques $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Not° : E un $\mathbb{K}$-ev, $n = \dim E < \infty$

Q une forme quad sur E, $\varphi = b_Q \in \mathcal{S}(E)$

D6 Le noyau de Q (ou de φ) est déf :

$\ker Q = \ker \varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$

L1 $\ker Q$ est ss-espace vect (sev) de E de dim $n - r$, où $r = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_\mathcal{E}(Q)$ pr n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E.

DM Le choix d'une base de E identifie E à $\mathbb{K}^n$ et $\ker \varphi = \ker Q$ au sev des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{K}^n$ t $\mathcal{E}$.

$$(*) \quad \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} x_i y_j = 0 \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

en écrivant $(*)$ pr les n vecteurs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$$

On voit que $x \in \ker Q \iff x$ satisfait à (⊗) $\implies x$ est solu° du système linéaire (⊗⊗).

La réciproque est aussi vraie, car :

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\, x_i y_j = y_1 (a_{11}x_1+\dots+a_{n1}x_n)+ \dots + y_n(a_{1n}x_1+\dots+a_{nn}x_n).$$

Donc $\ker \varphi$ s'identifie à l'espace des solu°s du syst linéaire (⊗⊗) de matrice ${}^tA$. Donc $\dim \ker \varphi = n - \operatorname{rg} A$. $\square$

Rq Il en résulte le rg de mat d'une forme quadratiq ne dépend pas du choix d'une base

pg 20 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$

D7 Le rang de Q (ou de φ), noté $\operatorname{rg} Q$ (ou $\operatorname{rg} \varphi$) est le rg de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q)$ ds n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E. De façon équivalente.

$$\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} \varphi = n - \dim \ker \varphi.$$

On dit que Q (ou φ) est une forme non-dégénérée si $\operatorname{rg}(Q) = n$, ou de façon équivalente, si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

D8 Deux formes quadr. $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $Q' \in \mathcal{Q}'(E')$ sont dites équivalentes si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiées:

(i) $\exists$ isomorphisme linéaire $h : E' \simeq E$ tq $Q' = Q \circ h$.

(ii) $\exists$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E'.
(resp $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q')$)

(iii) $\forall$ bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' (resp

$\exists\ T \in GL_n(K)$

$\uparrow$ mat inversible taille n.

tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q') = {}^tT . \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q) . T$

Classificat° sur $\mathbb{C}$.

Th2 Ttе forme quadratiq Q sur un $\mathbb{C}$ e-v E de dim $=n$ s'écrit ds une base convenable, p la mat

$$(1) \quad \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$$

où $r = rg\, Q$

Deux formes quad. complexes Q, Q' st des $\mathbb{C}$ e.v E, E' (resp) st équivalentes ssi $\dim E = \dim E'$ et $rg\, Q = rg\, Q'$.

DM Par Cor 1 $\exists$ une base Q-orthogonale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Posons $\lambda_i = Q(e_i)$

Alors $\#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\} = rg\, Q$ $= n - \dim \ker Q$ ne dépend pas alors de base de $\mathcal{E}$, et quitte à permuter les e_i, on pt supposer que $\lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0$; $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ où $r = rg\, Q$.

Dans $\mathbb{C}$, on pt trouver des μ_i tq $\mu_i^2 = \lambda_i$ μ $i = 1, \dots, n$ Alors la mat de Q acquiert la forme (1) ds la base

$$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\mu_1} e_1, \dots, \frac{1}{\mu_r} e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\right)$$

et l'entier $r = rg\, Q$ ne dépd pas du choix de la base.

Cor 3 Sur un $\mathbb{C}$ es E de dim n $\exists$ $n+1$ classes d'équivalence de formes quad., distinguées par le rang.

Classificat° sur $\mathbb{R}$

Th 3 On suppose que $K = \mathbb{R}$, $Q \in Q(E)$
Alors il existe un unique $p \in \mathbb{N}$
tq Q s'écrit ds une base convenable
n la mat diagonale :

mat identité

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$q = r - p$, $r = rg\, Q$

Dg Le couple $(p, q) = (p_Q, q_Q)$ est $\Leftrightarrow$ à une forme quad. Q sur un $\mathbb{R}$-ev de dim finie ds énoncé Th 3 s'appelle signature de Q.

Coro Deux formes quad. Q, Q' sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dim n st équivlts ssi elles ont m̂ signature.

Thm De classificat des formes quad sur $\mathbb{R}$.

Thm On suppose $K = \mathbb{R}$, E ev dim finie sur $\mathbb{R}$, $Q \in Q(E)$. Alors $\exists$ uniq $p \in \mathbb{N}$ tq Q s'écrit ds base convenable, par la mat diagonale

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

où $q = r - p$, $r = \mathrm{rg}\, Q$.

DM Par le Thm de diagonalisat des formes quad, $\exists$ base orthogonale $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ tq $Q(e_i) = \lambda_i$, et on pt ordonner les vecteurs de la base de façon $\lambda_i > 0$ pr $i = 1 - p$, $\lambda_i < 0$ pr $i = p+1, \dots, p+q$, $\lambda_i = 0$ pour $i = p+q+1, \dots, n$. Alors la mat de Q acquiert la forme $(*)$ ds la base $\varepsilon' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n\right)$.

Le nombre $p+q$ est déterminé par Q car $p+q$ est le rang de la mat $(*)$ et est de égal à $r = \mathrm{rg}\, Q$.
Il reste à mq l'unicité resp.

soit $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$; $\varepsilon' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthogonales tq $Q(e_1) = \dots = Q(e_p) = Q(e'_1) = \dots = Q(e'_{p'}) = 1$

$Q(e_{p+1}) = \dots = Q(e_r) = Q(e'_{p'+1}) = \dots = Q(e'_r) = -1$.

$Q(e_i) = Q(e'_i) = 0$ pour $i = r+1, \dots, r$.

soit $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $W = \mathrm{Vect}(e'_{p+1}, \dots, e'_n)$

Alors $Q(x) > 0 \ \forall x \in V \setminus \{0\}$.

(Q est déf. positive sur V. Puis sur W on a : $Q(x) \leq 0 \ \forall x \in W$. Donc $V \cap W = \{0\}$.

Donc $\dim V + \dim W \leq n$, soit

$p + (n - p') \leq n$, soit $p \leq p'$. Par la symétrie des rôles de p et de p', on a aussi $p' \leq p$ dc $p = p'$. $\square$

(R1) La paire (p, q) s'appelle signature de Q, c'est l'invariant classifiant les formes quad sur (ev) réel de dim donnée n.

Orthogonalité

On fixe notations E un $\mathbb{K}$ e-v dim finie n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, $Q = q_\varphi$, $q_\varphi \in Q(E)$. On écrit $\perp$ au lieu de $\perp_\varphi$ ou $\perp_Q$.

(D1) Pour une partie A de E, on définit son orthogonal par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \varphi(x, y) = 0 \quad \forall y \in A\}.$$

(P1) (i) $A^\perp$ est un ss-ev et $\ker \varphi \subset A^\perp$.

On a $\emptyset^\perp = \{\emptyset\}^\perp = E$

$E^\perp = \ker \varphi$, $\quad A \subset (A^\perp)^\perp$

(ii) $A \subset B \subset E \Rightarrow \ker \varphi \subset B^\perp \subset A^\perp$.

(iii) si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ alors $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Si $A = \{v_1, \dots, v_k\}$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, alors $F^\perp = A^\perp = \bigcap_{i=1}^{k} v_i^{\perp}$.

(TH) (Sur l'orthogonal) soit F un ss ev de $E \Rightarrow$

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F + \dim(F \cap \ker \varphi)$

(ii) $n \leqslant \dim F + \dim F^\perp \leqslant n + \dim \ker \varphi$.

(iii) $(F^\perp)^\perp = F + \ker \varphi$, on a :

$(F^\perp)^\perp = F \iff \ker \varphi \subset F$.

De plus si φ est non dégénérée (ie $\ker \varphi = \{0\}$), alors

(i)' $\dim F^\perp = n - \dim F$

(iii)' $(F^\perp)^\perp = F$

(iv) on note φ_F la restrictⁿ de φ à $F \times F$;

$$\varphi_F : F \times F \to K, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

alors φ_F est aussi une (fb) sym, $\varphi_F \in \mathcal{S}_F$ et on a :

- $\ker \varphi_F = F \cap F^\perp = \ker \varphi_F^\perp$
- $E = F \oplus F^\perp \iff F \cap F^\perp = \{0\}$

$\iff \varphi_F$ est non-dég.

$\iff \varphi_F^\perp$ est non-dégénérée.

$\underline{\text{Dm}}$ (i) Ds cas général est admis, on le dmq ds le $\underline{\text{cp}}$ où $\ker\varphi = \{0\}$, ie on démq (i)'.

soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F, complétons la à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ une base de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i, e_j)$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Pour un vecteur $x = \sum x_i e_i$, on a :

$x \in F^\perp \iff \varphi(e_i, x) = 0$ pr $i = 1, \dots, k$

$$\iff \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \dots \qquad \dots \\ a_{k1} x_1 + \dots a_{kn} x_n = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Puisq $\ker\varphi = \{0\}$, le rang des lignes est max égal à n, dc les lignes est linéairement indépendantes. Donc le rang de (S) est k. Dc son espace de solØ est de dim $n-k$. Donc $\dim F^\perp = n-k$.

(ii) conséqce immédiate de (i), vu que
$$0 \leq \dim(F \cap \ker\varphi) \leq \dim \ker \varphi$$

(iii) Il est facile ⓓ $F^\perp = (F + \ker\varphi)^\perp$

Dc il suffit de mq égalité $(F^\perp)^\perp = F + \ker\varphi$ ss l'hypothèse que $F = F + \ker\varphi$, $\underline{ie}$ $\ker\varphi \subset F$. Ds ce cas on a

a) $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x \perp y \Rightarrow F \subset (F^\perp)^\perp$

(R4) $A, B \subset E$ $\forall x \in A, \forall y \in B, x \perp y \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$

b) $\dim F^\perp \underset{\uparrow}{=} n - \dim F + \dim \ker\varphi$

par (i) et $\ker\varphi \subset F$.

$\dim (F^\perp)^\perp \underset{\uparrow}{=} n - \dim F^\perp + \dim \ker\varphi$

par (i) et $\ker\varphi \subset F \subset (F^\perp)^\perp$

$n - (n - \dim F + \dim\ker\varphi) + \dim\ker\varphi = \dim F$

ⓐ & ⓑ $\Rightarrow (F^\perp)^\perp = F = F + \ker\varphi$

Projecto orthogonales

R1 : Projecto linéaire

D2 soit $E = K \oplus L$, somme d'ordre de 2 sev. Pr $\forall v \in E$, il existe une uniq paire $(x, y) \in K \times L$ tq $v = x + y$ & la proj. linéaire p_K^L (ou pr_K^L) de v par v sur K parallèlement à L est définie par $p_K^L(v) = x$.

P2 L'applicaO $p = p_K^L : E \to E$ satisfait les pptés suivantes :

(i) $p \in \mathcal{L}(E)$, $\ker p = L$, $\operatorname{im} p\, K$, $\underbrace{p/_K}_{\text{restricO de } p \text{ à } K} = id_K$

(ii) $p^2 = p$ (ou $p^2 = p \circ p$)

(iii) soit $q = id_E - p$ alors on a :

$p + q = id_E$, $p^2 = p$, $q^2 = q$, $pq = qp = 0$

Récipoquement : soit p un endomorphisme linéaire : $p \in \mathcal{L}(E)$, tq $p^2 = p$. Alors p est la projecO linéaire p_K^L, où $K = \operatorname{im} p$ et $L = \ker p$.

D3 Une projecO linéaire p_K^L est dite orthogonale ssi $K \perp L$. De façon équivalente, un endomorphisme linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est une proj. orthogonale ssi $p^2 = p$ et $E = \ker p \oplus^{\perp} \operatorname{im} p$ (somme directe orthogonale)

D4 On dit sev F de E est non-dégénéré si $Q_F = Q|_F$ (ou $\varphi_F = \varphi|_{F \times F}$) est une forme non dégénérée.

Des caractérisaOs équivalentes :

F non dégénéré $\Leftrightarrow F \cap F^{\perp} = \{0\}$

$\Leftrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$.

P3 soit F un sev de E.

(i) si F est non dégénéré alors $\exists$ uniq projecO orthogonale p d'image F, que l'on notera p_F (ou pr_F)

(ii) si en plus Q est une forme non dégénérée, alors la réciproque est vraie.

p d'image F entraîne la non dégé-
-nérescence de F ($\Leftrightarrow F \cap F^{\perp} = \{0\}$
$\Leftrightarrow F \oplus F^{\perp} = E$)

@ si $Q = 0$, toute project° linéaire p_F^Q est proj. orthogonale d'image F.

- Rq si $\dim F = 1$, $F = \mathbb{K}v$
$v \in E \setminus \{0\}$ (F une droite vectorielle alors F non-dégénérée $\Leftrightarrow Q(v) \neq 0$. On dit qu'un vecteur non nul v de E est isotrope si $Q(v) = 0$ & non isotrope si $Q(v) \neq 0$. Dc on pt dire qu'une droite vectorielle est non dégénérée
- ssi elle est engendrée p un vecteur non isotrope.

Calcul de la project° orthogonale

P4 soit F un sev non-deg & $(u_1, \dots, u_k)$ une base orthogonale de F. Alors $Q(u_i) = \varphi(u_i, u_i) \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, k$ et

$$\forall x \in E, \; p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

DM: on vérifie aisément que

$$\varphi\Big(x - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i , u_j\Big) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Donc $\displaystyle x - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i \in F^{\perp}$

dc $\displaystyle p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$

Groupe Orthogonal

Notat°s : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ e v de dim n, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ une forme quadratiq non dégénérée, $\varphi = b_Q$, forme polaire de Q.

(D1) Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal (ou Q-orthogonal, ou φ-orthog) s'il préserve Q (ou φ) :
$\forall x \in E, \quad Q(f(x)) = Q(x)$ (ou $\forall x,y \in E$ $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$). On note $O(E)$ (ou $O(E,Q)$, $O(E,\varphi)$, $O(Q)$, $O(\varphi)$) l'ensemble des endomorphismes orthogonx de (E,Q).

(P1) (i) $f \in O(E) \Rightarrow f$ inversible ;
(ii) $O(E)$ est un groupe.

DM env

ⓐ Symétries orthogonales

(D2) soit F un ss-espace non-dg de E
$\Rightarrow E = F \oplus F^\perp$ et les 2 projec°s orthogonals p_F, $p_{F^\perp}$ st def, tq $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. On définit la symétrie orth. s_F p.r. à f par :
$\forall v \in E, \exists!(x,y) \in F \times F^\perp ; \; v = x + y$, et alors on pose $s_F(v) = x - y$
De façon équivalente, on pt définir s_F par une des relat°s $s_F = p_F - p_{F^\perp}$
$s_F = id_E - 2p_{F^\perp} = 2p_F - id_E$.
Lorsq F est un hyperplan, s_F s'appelle réflexion orthogonale.

Fait : Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

[Rq] Lorsq $F \subsetneq E$, p_F, la proj. orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal (car $\ker p_F = F^\perp \neq \{0\}$ donc p_F n'est pas inversible).

Caractérisat° de $f \in O(E)$ p matrices

Soit $\mathcal{E}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $G = Mat_{\mathcal{E}}(Q)$. Alors

$f \in O(E) \iff {}^tAGA = G$.

($\iff \varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) \ \forall i,j = 1,\dots,n$

où $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$).

Dans le cas particulier où $G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, et (E, Q) est dc un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{E}$, on a :

$f \in O(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_n \iff A^{-1} = {}^tA$.

$\iff A$ est une matrice orthogonale.

Ⓐ Le plan hyperboliq standard H est l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratiq Q de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $Q(x,y) = 2xy$

On a $O(H) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*} \cup \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$

(ces mat st ttes les solut° de l'équat°
${}^tA \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Exercice : 1) Dénombrer cet énoncé

2) identifier les réflexions orthogonales dans $O(H)$

Indic : Les valeurs propres des réflexions orthogonales en dim 2 sont 1 et -1 ; la trace est nulle.

Th Cartan - Dieudonné

Tout élément de $O(Q)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonales.

Orthogonalisat° de Gram - Schmidt

Notat° : K, E, n, $Q \in \mathcal{Q}(E)$, $\varphi = b_Q$ mais on ne suppose plus que Q est non-dégénérée.

(Th) (d'orthogonalisaᵒ de Gram-Schmidt)

soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E tq $\forall i = 1, \dots, n-1$; $E_i = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$ est non-dégénérée. Alors les n vecteurs

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\varphi(u_1, u_1)} u_1 ,$$

$$\dots$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i .$$

$(k = 1, \dots, n)$ st bien définis et forment une base orthogonale $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. Dans cette base, Q s'écrit par

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 ,$$

où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = \text{Mat}_{(v_1, \dots, v_k)}\left(Q|_{F_k}\right)$

$$\left(\varphi(v_i, v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

(Rq) • $\mathcal{U}$ s'appelle orthogonalisée de G-S

• $Q|_{F_{n-1}}$ non-dégénérée $\Rightarrow$ le rang de Q est au moins $n-1 \Rightarrow \text{rg}\, Q = n-1$ ou n ; on ne suppose pas que $\Delta_n \neq 0$

DM Par récurrence sur $k = 1, \dots, n$ on mq :

(H_k) $\begin{cases} 1) \ (u_1, \dots, u_k) \text{ est une base orthogonale de } F_k . \\ 2) \text{ la mat de passage } P_k = P_{(v_1, \dots, v_k) \to (u_1, \dots, u_k)} \text{ est de la forme } \\ \quad P_k = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

▸ (H_1) : $u_1 = v_1$, $P_1 = 1$, évidentes assez os

▸ $(H_{k-1}) \Rightarrow (H_k)$ pr $k > 1$: on suppose (H_{k-1}) vérifie alors

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

a) cette somme est bien déf car $(u_1, \dots, u_{k-1})$ est une base orthogonale de F_{k-1}, ss-espace non dégénéré, et de la mat de $Q|_{F_{k-1}}$,

$$\begin{pmatrix} \varphi(u_1,u_1) & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \varphi(u_{k-1},u_{k-1}) \end{pmatrix}$$

- les élts diagonx st non nuls,

b) cette somme donne le vecteur $pr_{F_{k-1}}(v_k)$ (par $\boxed{M}$ des calcul des projOs orthogonales).

on a de $u_k = v_k - pr_{F_{k-1}}(v_k) = pr_{F_{k-1}^\perp}(v_k)$

car $pr_{F_k} + pr_{F_k^\perp} = id_E$.

- Donc $u_k \perp F_{k-1}$, d'où $u_k \perp u_i$ $\forall i = 1, \dots, k-1$

De plus, $Vect(u_1, \dots, u_k) = Vect(u_1, \dots, u_{k-1}, v_k)$

$= \underbrace{Vect(u_1, \dots, u_{k-1})}_{F_{k-1}} + K v_k = F_{k-1} + K v_k = F_k$

Donc $(u_1, \dots, u_k)$ est une base orthogonale de F_k.

De plus, $\exists\, p_{ik} \in K$ tq

$$u_k = v_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_{ik} v_i \;; \quad \text{car}$$

$$u_k - v_k = - pr_{F_{k-1}}(v_k) \in F_{k-1}$$
$$= Vect(v_1, \dots, v_{k-1})$$

Donc

$$P_k = \left(\begin{array}{ccc|c} & P_{k-1} & & \begin{matrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{k-1,k} \end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

→ on a déduit (H_k) de (H_{k-1}). Par le principe de récurrence, (H_k) est vérifié $\forall\ k = 1, \dots, n$.

---

soit $Mat_{(u_1, \dots, u_k)}(Q|_{F_k}) = B_k$.

Alors

$$B_k = \begin{pmatrix} \varphi(u_1,u_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(u_k,u_k) \end{pmatrix} = {}^t P_k A_k P_k$$

det $P_k = 1$, donc

det $B_k = \varphi(u_1,u_1)\dots\varphi(u_k,u_k) = \det A_k = \Delta_k$;

$\Delta_k \neq 0 \quad \forall\, k = 1,\dots,n-1$.

D'où ff :

$\varphi(u_1,u_1) = \Delta_1$; $\varphi(u_2,u_2) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ...

$$\varphi(u_n,u_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

4

Cor 1 Critère de Sylvestre.

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim n, $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ($\varphi = b_Q$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$), $(v_1,\dots,v_n)$ une base de E, $a_{ij} = \varphi(v_i,v_j)$ pr $1 \leq i,j \leq n$,

$F_k = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$

$A_k = \mathrm{Mat}_{(v_1,\dots,v_k)}(Q|_{F_k})$, $\Delta_k = \det A_k$

Alors : (1) φ (ou Q) est déf positive
$\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

(2) Supposons $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ et notons $\Delta_0 = 1$. Alors l'indice négatif q de Q (c'est la deuxième composante de la signature (p,q) de Q) est le nbr de changements de signe de la suite $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ (on dit que la suit (Δ_i) présente un chgt de signe au rang i si $\Delta_i \Delta_{i-1} < 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$)

où $\mathrm{rg}\, Q = n$

3. φ est déf négative $\Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,n$, $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les $\Delta_k = \det A_k$ s'appellent mineurs principaux dominant.

(3) Espaces Euclidiens.

§ 1. Norme, dist^{ce}, angles, volumes

Un $\mathbb{R}$-eV E muni FB sym φ est appelé **espace euclidien** si $\dim E < \infty$ & φ déf positive.

- φ est alors appelé **produit scalaire**.

$$\langle x|y\rangle := \varphi(x,y) \quad \forall x,y \in E$$

φ déf, $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$ & $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$.

On note $\sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$.

On a $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

- **Prop 1** $\forall x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$

cp si $x \perp y$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Th Pyth)

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (id^{té} $\square$) (1)

(iv) $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

l'égalité étant réalisée ssi x, y st colinéaires ($\iff \exists a \in \mathbb{R}$, $x = ay$ ou $y = ax$)

(v) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski)

l'égalité étant réalisée ssi $\exists a \geqslant 0$ tq $x = ay$ ou $y = ax$

DM (i), (iii) immédiat.

Mq (iv)

Si $y = 0$, les 2 mbres de inégalité st nuls, l'inégalité (non stricte) est dc vérifiée. Supposons dc $y \neq 0$ & considérons f $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|x+ty\|^2$

On a : $h(t) = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x|y\rangle t + \|x\|^2$, $\|y\|^2 > 0$

Puisq $h(t) \geqslant 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, le discriminant de ce polyn. quadratiq ne pt pas ê $\oplus$:

$$\Delta = 4(\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2) \leq 0.$$

cela donne $\langle x|y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

soit $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

$\to$ inégalité de Cauchy Schwartz dmqé

Si on suppose l'égalité réalisée alors $h(t)$ a pr racine double

$$t_0 = -\frac{\langle x|y\rangle}{\|y\|^2}, \text{ dc } h(t_0) = \|x+t_0y\|^2 = 0$$

et $x+t_0y=0$. On a mqé le cas de l'égalité, lorsq $y \neq 0$, ne se réalise que si $\exists\, t_0 \in \mathbb{R} \mid x = -t_0 y$

et si $y=0$, y est colinéaire à ts les vecteurs de E car $\forall x \in E$, $y = 0.x$.

(iv □)

Mq (v)

On déduit l'inégalité de Minkowski de celle de Cauchy Schwarz. $\forall x,y \in E$,

on a $|\langle x|y\rangle| \underset{=}{\leq} \|x\|\,\|y\|$

$\Rightarrow \langle x|y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$

$\Longleftrightarrow 2\langle x|y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 2\|x\|\,\|y\| + \|x\|^2 + \|y\|^2$

(*) $\Longleftrightarrow \|x+y\|^2 \underset{=}{\leq} (\|x\|+\|y\|)^2$

$\Longleftrightarrow \|x+y\| \underset{=}{\leq} \|x\|+\|y\|$

Mtn on suppose que l'égalité est vérifiée : $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. Si $x=0$ ou $y=0$, on a bien une des relat°s $x=ay$ ou $y=ax$ & $a=0$. Supposons que $x\neq 0$ & $y \neq 0$.

Alors la chaîne d'équivalces (*) & les signes "$\leq$" remplacés p "=", mq $\langle x|y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, dc p (iv)

$\exists\, a \in \mathbb{R}^*$, $y = ax$. De plus,

$0 < \|x\|\,\|y\| = \langle x|ax\rangle = a\|x\|^2$,

d'où $a = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} > 0$.

□

(D1) Soit V un $\mathbb{K}$ ev. On appelle norme sur V tte applicat° $N : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V$, $N(\lambda x) = |\lambda|\,N(x)$ homogénéité

(ii) $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ séparant

(iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ ss-additivité.

D'après (P1), $x \mapsto \|x\|$ est norme sur E.

2

D2 Soit X ens $\neq \emptyset$. On appelle **distance (ou métriq)** sur X tte f $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq :

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (séparation)

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^3$,
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\triangle$

Un **espace métriq** est un ens muni d'une métriq. D'après P1, la f $E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une **distance**.

D3 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace euclidien.
la f $E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \|x\|$
s'appelle **norme euclidienne** sur E & la f
$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$
s'appelle **distce euclidienne** sr E.

$\boxed{\text{Rq}}$ **Tt espace euclidien** possède une **base orthonormée** & est dc isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard :

- $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Les inégalités :

$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$
(Cauchy - Schwarz),

$\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + \dots + y_n^2}$
(Minkowski).

Angles

$\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, l' Cauchy-Schwarz.

$$\left| \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \right| \leq 1 .$$

(Déf) L'angle $(\widehat{x,y})$ entre 2 vect^rs non nuls de E est déf ē uniq réel $\theta \in [0, \pi]$ tq

$$\cos \theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

on pt écrire $(\widehat{x,y}) = \arccos \dfrac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$

(arccos désigne la val^r principale de arccos, comprise entre 0 & π).

$\arccos t = \pm \arccos t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

on déf ainsi les angles entre 2 ss-espaces vectoriels $F_1, F_2 \neq 0$ de E:

$$(\widehat{F_1, F_2}) = \inf \left\{ (\widehat{v_1, v_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1 \in F_1 \setminus \{0\}, \\ v_2 \in F_2 \setminus \{0\} \end{array} \right\}$$

(4)

et l'angle entre un vecteur non nul v & ss-ev $\neq 0$ de F:

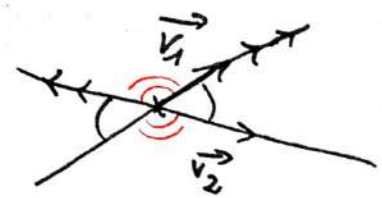
$$(\widehat{v, F}) = \inf \{ (\widehat{v, w}) \mid w \in F \setminus \{0\} \}.$$

Par Exemple, l'angle entre 2 droites F_1, F_2, de vect^rs direct^rs v_1, v_2

(ie $F_1 = \mathbb{R} v_1$, $F = \mathbb{R} v_2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$),

$$(\widehat{F_1, F_2}) = \min \{ (\widehat{v_1, v_2}), (\widehat{v_1, -v_2}) \}$$

$$= \min \{ \theta, \pi - \theta \} \quad \text{si } \theta = (\widehat{v_1, v_2})$$



Volumes

Ds ce cours, ns donnons la déf$^{\circ}$ du volume parallélépipède & la déf$^{\circ}$ de parties + complexes de E est lâche calcul intégral.

D5 (i) Pr une famille $V=(v_1,\dots,v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par V est déf p :

$$\Pi = \Pi(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \;\middle|\; (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k \right\}$$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(V))$ est déf p :

1) si V est lié, $vol_k(\Pi(V))=0$

2) si V est libre, $vol_k(\Pi(V)) = |\det P_{\mathcal{E}_F \to V}|$

où $\mathcal{E}_F$ est une base orthonormée qq de F, $F = Vect(V)$ et $P_{\mathcal{E}_F \to V}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à V.

$P_{\mathcal{E}_F \to V} = (p_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ $\quad \forall j = 1,\dots,k,$ $\quad v_j = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} e_i$

L (cohérence déf vol_k)

$|\det P_{\mathcal{E}_F \to V}|$ ne dépd pas chx de $\mathcal{E}_F$.

DM soit $\mathcal{E}_F' = (e_1',\dots,e_k')$ une autre base orthonorm. de F, $\mathcal{E}_F = (e_1,\dots,e_k)$.

Notons $P = P_{\mathcal{E}_F \to V}$, $P' = P_{\mathcal{E}_F' \to V}$, $A = P_{\mathcal{E}_F \to \mathcal{E}_F'}$ alors $P = AP'$.

On a à mq $|\det P| = |\det P'|$. Puisq les 2 déterminants st non nuls, cette égalité est équivalente à $|\det A| = 1$.

A est la mat de passage entre 2 bases orthon., dc pr la mat du produit scalaire on a :

$$\mathbb{1}_k = Mat_{\mathcal{E}_F'}(\langle \cdot | \cdot \rangle_F) = {}^tA \, Mat_{\mathcal{E}_F}(\langle \cdot | \cdot \rangle_F) A = {}^tA \, \mathbb{1}_k \, A = {}^tA A$$

dc $1 = \det \mathbb{1}_k = \det({}^tA A) = (\det A)^2$

& det $A = \pm 1$. Dc $|\det A| = 1$,

& le lemme est démqé $\square$.

Cor de la dém (L).

La mat de passage A entre 2 bases ortho. est une mat orthogonale :
A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prendre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

soit E un ee dim n. on note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthogx de E.

$O(E) = O(E, <\cdot|\cdot>) =$

$$= \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, <u(x)|u(y)> = <x|y>\}.$$

C'est un groupe. L'ens. des mat orthogonales de taille n est déf p :

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\}$$
$$\subset GL(n, \mathbb{R}),$$ un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille n.

Volumes

Ds ce cours, ns donnons la déf$^{\circ}$ du volume parallélépipède & la déf$^{\circ}$ de parties + complexes de E est tâche calcul intégral.

D5 (i) Pr une famille $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_k)$ de vect^{rs} de E, le parallélépipède engendré par $\mathcal{V}$ est déf p :

$$\Pi=\Pi(\mathcal{V})=\left\{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \;\middle|\; (t_1,\dots,t_k)\in[0,1]^k\right\}$$

(ii) Le k-volume $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))$ est déf p :

1) si $\mathcal{V}$ est liée, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=0$

2) si $\mathcal{V}$ est libre, $vol_k(\Pi(\mathcal{V}))=|\det P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}|$

où $\mathcal{E}_F$ est une base orthonormée qq de F, $F=Vect(\mathcal{V})$ et $P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}$ désigne la mat de passage de $\mathcal{E}_F$ à $\mathcal{V}$.

$P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}=(p_{ij})_{1\le i,j\le k}$ $\quad\forall j=1,\dots,k,\; v_j=\sum_{i=1}^{k}p_{ij}e_i$

L (cohérence déf vol_k)

$|\det P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}|$ ne dépd pas chx de $\mathcal{E}_F$.

DM soit $\mathcal{E}_F'=(e_1',\dots,e_k')$ une autre base orthonorm. de F, $\mathcal{E}_F=(e_1,\dots,e_k)$.

Notons $P=P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{V}}$, $P'=P_{\mathcal{E}_F'\to\mathcal{V}}$, $A=P_{\mathcal{E}_F\to\mathcal{E}_F'}$ alors $P=AP'$.

On a à mq $|\det P|=|\det P'|$. Puisq les 2 déterminants st non nuls, cette égalité est équivalente à $|\det A|=1$.

A est la mat de passage entre 2 bases orthon., dc par la mat du produit scalaire on a :

$$\mathbb{1}_k=Mat_{\mathcal{E}_F'}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F)={}^tA\,Mat_{\mathcal{E}_F}(\langle\cdot|\cdot\rangle_F)A$$
$$={}^tA\,\mathbb{1}_k\,A$$
$$={}^tA\,A$$

dc $1=\det\mathbb{1}_k=\det({}^tAA)=(\det A)^2$

& $\det A = \pm 1$. Dc $|\det A| = 1$,

& le lemme est démqé □.

Cor de la dém (L).

La mat de passage A entre 2 bases ortho. est une mat orthogonale :
A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
Le déterminant d'une mat orthogonale ne pt prendre que 2 valeurs, 1 et -1.

Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Soit E un ee dim n. on note $O(E)$ l'ens des endomorphismes orthogx de E.

$O(E) = O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) =$

$= \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}$.

C'est un groupe. L'ens. des mat orthogonales de taille n est déf p :

$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathbb{1}_n\}$

$\subset GL(n, \mathbb{R})$, un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des mat inversibles de taille n.

→ E ee dim $n \geq 1$, soit $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_n)$ base on.
alors

$$\begin{array}{ccc} O(E) & \longrightarrow & O(n) \\ \cup & & \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \end{array}$$

est un isom. de groupes. Dc pr chq $n \geq 1$, on a un seul groupe orth. euclidien, à isomop. près. On identifie $O(n)$ & $O(\mathbb{R}^n, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, le groupe orthogonal de l'ee $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

On introduit les groupes spéciaux orthogonaux :

$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$
$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.

On a vu que $A \in O(n)$, det $= \pm 1$.

Dc $O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E)$
$O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n)$

où $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = -1$
$O^-(n) = \{u \in O(n) \mid \det u = -1\}$

Rq : $SO(E) \subset O(E)$ est un ss-groupe, $O^-(E)$ n'est pas ss-groupe, mais une classe à gauche (ou à droite) de $O(E)$ modulo $SO(E)$: $\forall \tau \in O^-(E)$,
$O^-(E) = \tau\, SO(E) = SO(E)\, \tau$

Le groupe quotient $O(E)/SO(E)$ est isomorphe au groupe d'ordre 2

$\mu_2 = \{\pm 1\}$; $O(E)/SO(E) \simeq \{\pm 1\}$

Cela suit du (TH) d'isomorphisme pr le groupe quotient : on considère le morphisme du déterminant,

$$\det : O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$u \longmapsto \det u$$

Son image est $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

Donc $O(E) / \ker(\det) \simeq \mu_2$.

Or $\ker(\det) = SO(E)$

∴ Le cas $n=1$: $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) \simeq O(1) = \{\lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mu_2$;

mat taille 1
$A(\lambda)$ tq ${}^tAA = 1_n$

$SO(1) = \{1\}$, le groupe trivial q se réduit à l'Elt neutre.

Cas $n=2$:

P1) Soit E plan eucl., $\mathcal{E}=(e_1,e_2)$ une base o.n de E, $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{E}}(u) \in M_2(\mathbb{R}) \text{ alors:}$$

(1) $u \in SO(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $u \in O^-(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

DM

$u \in O(E) \iff {}^tAA = \mathbb{1}_2 \iff$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a^2+b^2=1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ (a,b)=(\cos\theta, \sin\theta)$
- Puisq $a^2+b^2=c^2+d^2=1\neq 0$, les 2 vecteurs (a,b), (c,d) st non nuls.

$$ac+bd=0 \iff \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (a,b),\ (d,-c)$ st colinéaires.

Dc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (d,-c)+\alpha(a,b)=0$,

ie $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\alpha\sin\theta \\ \sin\theta & \alpha\cos\theta \end{pmatrix}$

De plus $\det A = \pm 1$,

$\det A = \alpha(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \alpha$

dc $\alpha = \pm 1$ & on a :

$\alpha = 1 \iff u \in SO(E)$,

$\alpha = -1 \iff u \in O^-(E)$.

Nº: $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ mat de la rotaº d'angle θ ds plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Q° La représentaº d'un élt $u \in SO(E)$ p une mat R^θ est-elle uniq, si on prend θ mod 2π ?

Rép : La matrice de passage entre 2 bases o.n $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ est orthogonale :

$$P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \in O(2) \Rightarrow$$

$\exists\, \varphi \in \mathbb{R} \mid \underbrace{P = R^{\varphi}}_{1^{\circ}\text{cas}}$ ou $R^{\varphi}T$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = R^{\vartheta}$, alors

$$Mat_{\mathcal{E}'}(u) = P^{-1} R^{\vartheta} P = \begin{cases} (R^{\varphi})^{-1} R^{\vartheta} R^{\varphi} & \text{ds } 1^{\circ}\text{cas} \\ T^{-1}(R^{\varphi})^{-1} R^{\vartheta} R^{\varphi} T & \text{ds } 2^{\circ}\text{cas} \end{cases}$$

P calcul direct on mq :

$\forall\, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $R^{\varphi} . R^{\psi} = R^{\varphi+\psi}$, $(R^{\varphi})^{-1} = R^{-\varphi}$,

$T^{-1} = T$, $T^2 = \mathbb{1}_2$; $T^{-1} R^{\vartheta} T = T R^{\vartheta} T = R^{-\vartheta}$.

on a $Mat_{\mathcal{E}'}(u) = \begin{cases} R^{-\varphi+\vartheta+\varphi} = R^{\vartheta} & \text{ds } 1^{\circ}\text{cas} \\ R^{-(\varphi+\vartheta+\varphi)} = R^{-\vartheta} \end{cases}$

On a dmé :

P2 soit E un plan euclidien, un élt $u \in SO(E)$ est donné p la m̂ matrice R^{ϑ} ds 2 bases o.n. liées p une mat de passage o.n tq $\det P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = 1$

& si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = R^{\vartheta}$, $Mat_{\mathcal{E}'}(u) = R^{\theta'}$, alors $\vartheta + \vartheta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ & $R^{\theta'} = (R^{\theta})^{-1} = R^{-\vartheta}$.

Orientaθ

soit V un e.v de dim finie.

On pt diviser l'ens $\mathcal{B}(V)$ de toutes les bases de V en 2 parties disjointes, classe d'équivalence p la relaθ d'équivalce suivante :

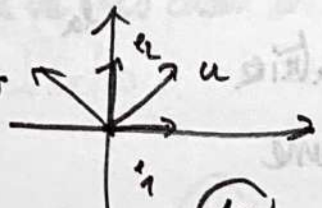
$$\text{p } \mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathcal{B}(V),\ \mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \Leftrightarrow \det P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} > 0.$$

Df Munir V d'une orientaθ c'est choisir laqlle de 2 classes on appelle classe des **bases directes**, l'autre étant la classe des bases indirectes.

On pt donner une orientaθ en précisant une base directe.

Cor (Prop 2) soit E plan euclidien orienté. On a alors un isomorphisme canoniq $\chi : SO(E) \longrightarrow SO(2)$ q associe à chq élt $u \in SO(E)$ sa matrice R^θ ds n'importe q^lle base o.n directe; l'angle de rotaθ θ (mod 2π) ne dépend pas choix base o.n directe.

Rq : L'orientaθ standard du plan euclidien standard $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ pt ê décrit ê soit : une base (u,v) de $\mathbb{R}^2$ est directe si v s'obtient p la rotaθ de u d'angle $90°$ ds le sens contraires des aiguilles d'une montre.



Sens géométriq ds élts de $O^-(E)$ (cas dim 2)

L1 Tt élt u de $O^-(E)$ a $\{1,-1\}$ pr spectre, dc s'écrit p $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ds base convenable.

DM Le polynôm car $u \in \mathcal{L}(E)$ est

$P_u(\lambda) = \lambda^2 - tr(u)\lambda + det(u) = 0.$

Sa trace et det de u pvt ê calculés s la matrice de u dans n'importe q^lle base de E. De plus on a :

$u \in O^-(E) \Rightarrow tr(u) = 0,\ det(u) = -1$

dc $P_u(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

Dc u est diagonalisable de spectre $\{1,-1\}$.

On pt mq facilmt sep E_1 & E_{-1} de u st perpendicul^r ss calculs (cms)

(L2) Les vct^rs propres unit^rs (= de norme 1) de la mat $A = R^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ de prop 1 (2) st :

• $v_1 = \pm \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ de (vp 1) &
$v_2 = + \left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ de (vp −1) .

DM en

Prop 3 soit E un plan euclidien. Les élts de $O^-(E)$ st ~~et~~ les réflexions orthogonales.
Pr ∀ $u \in O^-(E)$, il y a exactmt
• 4 bases o.n. de E ds lq^lb u s'écrit p la mat $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Si E est orienté, 2 de ces bases st directes, 2 autres indirectes

Espaces euclidiens de dim 3

Produit Vectoriel

Soit E un espace euclidien de dim 3 muni d'une orientaθ.

Notaθ :

$$\underset{\forall \text{ bases}}{\mathbb{B}(E)} \supset \underset{\text{bases o.n}}{\mathbb{B}_{on}(E)} = \underset{\text{b.o.n directes}}{\mathbb{B}^+_{on}(E)} \sqcup \underset{\text{b.o.n indirectes}}{\mathbb{B}^-_{on}(E)}$$

$$\mathbb{B}(E) = \mathbb{B}^+(E) \sqcup \mathbb{B}^-(E)$$

(D1) soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de 3 fact^rs de E. Le réel $\det_\varepsilon(\mathcal{U})$, le det de la mat formée des colonnes ds coord. des vect^rs de $\mathcal{U}$ ds une base $\varepsilon \in \mathbb{B}^+_{on}(E)$, ne dépd pas de ε & est appelé produit mixte de $\mathcal{U}$.

Notaθ : $[\mathcal{U}] = [u, v, w]$

Ex Démq l'indépdce de $\det_\varepsilon \mathcal{U}$ du choix de $\varepsilon \in \mathcal{B}_{om}^+(E)$.

Prop 4 (Ppté pdt mixte)

Le produit mixte $\mathcal{P} : E^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v,w) \mapsto [u,v,w]$ est trilinéaire & antisymétriq. Pr $\mathcal{U} \in E^3$, on a :

a) $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 0 \iff \mathcal{U}$ est lié.

b) $\mathcal{P}(\sigma(\mathcal{U})) = \varepsilon(\sigma)\,\mathcal{P}(\mathcal{U})$ pr tte permutaθ $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature d'une permutaθ.

ex $\mathcal{P}(u,v,w) = -\mathcal{P}(v,u,w) = -\mathcal{P}(w,v,u)$

c) $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_{om}^+(E) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \pm 1$.

DM (a) (b) st conséqces immédiates pptés du det. Pr c), on rq que transfoθ $(u,v,w) \to (u,v,-w)$ pmt de passer d'une base directe o.n à une base directe o.n & det

$$\det P_{(u,v,w)\to(u,v,-w)} = -1.$$

Dc si $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_{om}^+(E)$, on a par défθ.

$$[\mathcal{U}] = \det(\mathcal{U}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□