

Ex6 : E@@, $u \in \mathcal{O}(E)$ orthogonale 2) soit λ vp nulle de u & soit $x \neq 0$

1) soit $F \subseteq E$ | $u(F) \subseteq F$

soit $x \in F^\perp$, on vt que $u(x)$ soit orthogonal à y , $\forall y \in E$.

soit $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u \cdot u^{-1}(y) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$

E stable p $u \Leftrightarrow u(F) = F$

$\Leftrightarrow F = u^{-1}(F)$

Donc F est stable par u^{-1} .

Comme $u^{-1}(y) \in F$, on a

$\langle x, u^{-1}(y) \rangle = 0$.

• al $x \in F^\perp$ et $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

Un vectⁿ propre de $u \Leftrightarrow \exists$

$\langle u(n), u(n) \rangle = \langle x, x \rangle$

$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle$

" $\lambda^2 \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$

E@@ & $x \neq 0$ de $\lambda^2 = \pm 1$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.

Ex 4 • $\mathcal{O}(2)$: groupe orthogonal des isométries linéaires de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{D}_C = (\epsilon_1, \epsilon_2)$; $R^\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ $\phi \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathcal{O}(2)$, la réflexion sur la symétrie dont l'axe est la droite vectorielle v^\perp , perpendiculaire au vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^2$. La réflexion ρ_v ne dépend que de classe de proportionnalité de v .

1. soit $u \in \mathcal{O}(2)$ & $\det u = -1$.

Mq u est une réflexion.

$$u \in \mathcal{O}(2); t_u \cdot u = \text{id}; \det(t_u \cdot u) = 1 \Rightarrow (\det(u))^2 = 1, \det u = -1 \Rightarrow \text{réflexion.}$$

1. bis. $\det u = 1 \Rightarrow u$ est une rotation.

Écrire la mat de u ,

$$M = \text{Mat}_{\epsilon_1, \epsilon_2}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \frac{1}{ad+bc} = M$$

$$ad - bc = \underline{1}$$

$$t_u M = \text{Id} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Id} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

$$(a-d)^2 + (b+c)^2 =$$

$$= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(bc - ad) = 2 - 2 = 0$$

$$\text{dc } a = d \text{ et } b = -c.$$

$$ad - bc = 1 \Rightarrow a^2 + c^2 = 1.$$

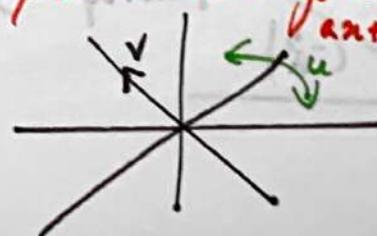
$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid a = \cos \theta \text{ et } c = \sin \theta.$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ & } u \text{ est la rotation d'angle } \theta.$$

al $u \in \mathcal{O}(2)$ $\begin{cases} \det u = 1 \Rightarrow u \text{ est rotation} \\ \det u = -1 \Rightarrow u \text{ est réflexion.} \end{cases}$

2 Sachant que u est la symétrie orthogonale ρ_v à la droite d'équation $ax + by = 0$, représenter u sous la forme ρ_v pour un vecteur v convenable.

ρ_v : la symétrie orthogonale dt l'axe est la droite $ax + by = 0$.



L'axe de α est la droite $\{ax+by=0\}$.
 Trouver un vecteur orthogonal à la droite $\{ax+by=0\}$.

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ convient } (x_0, y_0) \in \{ax+by=0\}$$

$$\text{soit } (x_0, y_0) \in \{ax+by=0\} \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = ax_0 + by_0 = 0$$

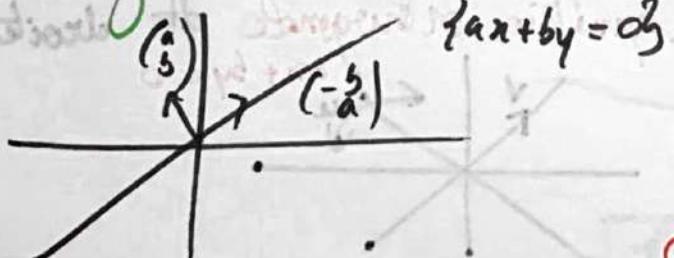
Dont $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
 & donc v est orthog. à la droite $\{ax+by=0\}$.

Or si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $v^\perp = \{ax+by=0\}$

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

3. Ecrire la mat de la réflexion α de \mathbb{R}_c .

! chgt de base.



A28

$$\text{Ds la base } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}' \times \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') \xrightarrow{D} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$$

$$\downarrow P \qquad \qquad \qquad \downarrow P$$

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) \xrightarrow{M} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c)$$

$$M = P D P^{-1}, M = \text{Mat}_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}(u)$$

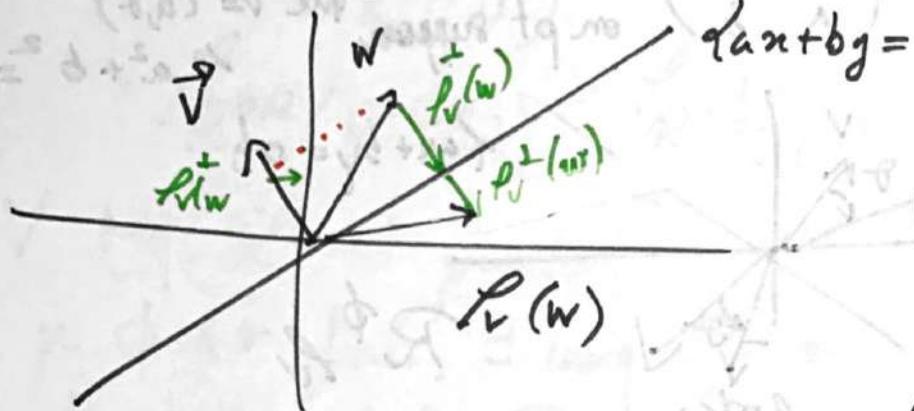
$$M = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

ASA

$$4. \text{ Mg } \rho_v(w) = w - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v \quad \forall w \in \mathbb{R}^2.$$

La projection orthogonale sur v est définie



$$\text{Par } \rho_v^\perp(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v.$$

$$\text{dc } \rho_v(w) = w - 2 \rho_v^\perp(w)$$

$$= w - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v$$

$$\text{dc } \rho_v(w) = w - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v \quad \text{dc } \rho_v R^\phi \rho_v^{-1}$$

Donc $\rho_v R^\phi \rho_v^{-1}$ est une rotation

$$\text{Tr}(R^\phi) = 2 \cos \phi.$$

$$\text{Tr}(\rho_v R^\phi \rho_v^{-1}) = \text{Tr}(\rho_v^{-1} \rho_v R^\phi) = \text{Tr}(R^\phi)$$

$$= 2 \cos \phi.$$

$\rho_v R^\phi \rho_v^{-1}$ est aussi une rotation d'angle ϕ .

6. $M_g \circ L_v g^{-1}, R^\phi L_v, L_v R^\phi$
sont des réflexions $\forall g \in O(2), \phi \in \mathbb{R}$.

Représenter chacune des 3 réflexions
sous la forme L_w par un vecteur w
convertisseur.

$$\begin{aligned} \det(g L_v g^{-1}) &= \det(g) \det(L_v) \det(g^{-1}) \\ &= \det(L_v) = -1. \end{aligned}$$

on cherche w tq $g L_v g^{-1}(w) = w$

$$w = g(v)$$

$$g L_v g^{-1}(g(v)) = g L_v(v) = g(-v) = -g(v)$$

dc $w = g(v)$ convient & $g L_v g^{-1} = P_{g(v)}$

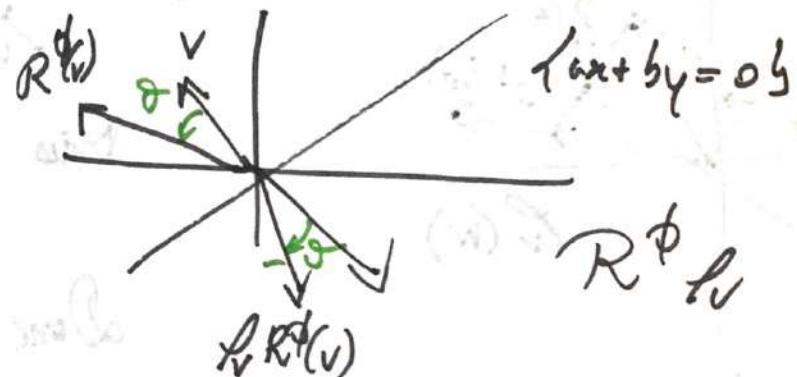
$$\det(R^\phi P_v) = \det(R^\phi) \det(P_v) = -1$$

dc $R^\phi P_v$ est une réflexion.

Trouver un vect. propre de $R^\phi L_v$ sur \mathbb{P}^1 .

$$L_v R^\phi + id \dots \quad R^\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$P_v = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{on peut supposer que } v = (a, b) \text{ et } a^2 + b^2 = 1.$$



$$R^\phi L_v$$

$$L_v R^\phi(v) = R^{-\phi} P_v(v) = R^{-\phi}(-v) = -R^{-\phi}(v)$$

$$R^\phi P_v (R^{\phi/2}(v)) = R^\phi (-R^{-\phi/2}(v)).$$

$$dc R^{\phi/2} = -R^{\phi-\phi/2} P_v(v) = -R^{\phi/2}(v)$$

dc $R^{\phi/2}$ est un vect. propre de $R^\phi L_v$ sur \mathbb{P}^1 .

$$dc R^\phi P_v = L_{R^{\phi/2}(v)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v R^\phi &= R^\phi \underbrace{\left((R^\phi)^{-1} \mathcal{L}_v R^\phi \right)}_{\text{def } g = (R^\phi)^{-1}} \\ &= R^\phi \left(\mathcal{L}_{R^{-\phi}(v)}^g \right) \\ &= \mathcal{L}_{R^{\phi/2}}^g (R^{-\phi}(v)) = \mathcal{L}_{R^{-\phi/2}}^g (v) \end{aligned}$$

- 7. Mq R^ϕ est produit de 2 réflexions:
 $\mu \phi \& v$ finés, \exists une réflexion \mathcal{L}_w
 tq $R^\phi = \mathcal{L}_v \mathcal{L}_w$. Déterminer un vecteur w définissant cette réflexion \mathcal{L}_w .

Une rotat. est produit de 2 réflexions :

ϕ & v finés.

$$\mathcal{L}_v R^\phi = \mathcal{L}_{R^{-\phi/2}(v)} \quad \text{P-6.} \quad \mathcal{L}_v^c = \text{id}$$

$$R^\phi = \mathcal{L}_v \mathcal{L}_{R^{-\phi/2}(v)} = \mathcal{L}_v \mathcal{L}_w$$

$$\Leftrightarrow w = R^{-\phi/2}(v).$$

5) Mg $u^2 = \text{id}_E$ für u est sym. orthogonal

\Leftrightarrow supposons u est sym. orthogonal.

$$\exists v, w \perp v = E \text{ tq } \underline{\text{id}_E = p_v + p_w}$$

V et w respect, $u = p_v - p_w$

$$\begin{aligned} u^2 &= (p_v - p_w) \cdot (p_v - p_w) \\ &= p_v^2 - \underbrace{p_v p_w}_{\text{pas}} - \underbrace{p_w p_v}_{\text{commutatif}} + p_w^2 \end{aligned}$$

$$= p_v^2 + p_w^2 = p_v + p_w = \text{id}_E. \quad (\text{car } p_v^2 = p_v)$$

$$\Rightarrow u^2 = \text{id}_E$$

soit λ de u , suppos qu'il y ait

$$\lambda = \pm 1,$$

$$u = -\text{id}$$

$$+ M M^* = (-1)(-1) = \text{Id}$$

$$u(n) = -n$$

$$u^2(n) = u(-n)$$

$$= -(-n) = \text{Id}.$$

$$\overbrace{\text{supp } u^2 = \emptyset, u \in \Omega_E}$$

$\Rightarrow u$ est une symmetrie orthogonale

$$u|_V = \ker(1-u) = \text{id}_V$$

$$u|_W = \ker(1-u) = -\text{id}$$

$$\text{cp } u = -\text{id}, 1-u = 2\text{id}$$

$$V = \ker(\text{id}) = \ker(\text{id}) = \text{frob}$$

$$W = \ker(2\text{id}) = \ker(\text{id}) = E$$

$$\Rightarrow E = \text{frob} \oplus V$$

$\hat{\wedge}$ V et W st orthogonx.

$\Rightarrow u$ symmetrie orthogonale.

Ex 7 $u \in O(2)$, $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$; E_A ; $E = E_A \oplus E_{-A}$

$$Q^{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, \mathcal{S} : symétrie d'axe la droite vectorielle v^\perp .

①) $u \in O(2) \mid \det u = -1$. Mg réflexion.

soit $A = \text{Mat}_{\mathbb{R}^2}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on sait ${}^t A A = \text{Id}$ car $u \in O(2)$.

Mg $u^2 = \text{Id}$ $\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(u) = \det(u - \lambda \text{Id})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{trace} + \det \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+d) + \cancel{\lambda(ad-bc)} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\lambda(u) = 0 \iff &\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= (a+d)^2 + 4 > 0 \\ &\Rightarrow 2 \text{ racines réelles.} \end{aligned}$$

$$\rightarrow u|_{E_1} = \alpha \circ E_1 \Rightarrow u(x) = 1x = x.$$

$$\rightarrow u|_{E_{-1}} = \text{Id} ; \alpha \in E_{-1}, u(\alpha) = -\alpha$$

$$u|_{E_{-1}} = -\text{Id}$$

λ_1, λ_2 & \mathcal{S} de u .

$E(\lambda_1), E(\lambda_2)$ les espaces propres consépcts

$$\begin{aligned} x_1 &\in E(\lambda_1) & (x_1, x_2) \\ x_2 &\in E(\lambda_2) \end{aligned}$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle u(x_1), u(x_2) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = -\langle x_1, x_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

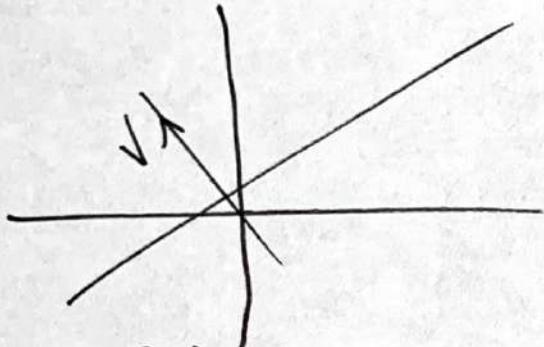
$$\mathbb{R}^2 = E_1 + E_2$$

de symétrie orthogonale.

2) sachant u est la symétrie orthogonale

$$\checkmark \text{ à } D = \{ax+by=0\} ; (a,b) \underset{\text{normal à } D}{\overset{\text{vecteur}}{\sim}}$$

Représenter u sous forme f_v .



$$D = \{ax+by=0\}$$

l avec $v = (a, b)$ convient pour u .

3) écrire $\text{Mat}_{D_C}(u)$ de la réflexion u de D_C

$$\text{Dans } \tilde{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Mat}_{\tilde{D}}(u) = \begin{pmatrix} \epsilon_{D^+} & \epsilon_D^- \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soit P matrice de passage de D_C à \tilde{D}' .

$$P = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{Mat}_{D_C}(u) = P \text{Mat}_{\tilde{D}}(u) P^{-1}$$

(35)

~~$w \in \mathbb{R}^2, w = p_D(x) + p_{D^\perp}(x)$~~

$$M = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

q)

$$x \in \mathbb{R}^2, u = p_D(x) + p_{D^\perp}(x); v = p_{D^\perp}(x)$$

$$u(x) = p_D(x) - p_{D^\perp}(x) \quad \Delta$$

$$f_v(x) = x - \underline{p_{D^\perp}(x)}$$

$$\alpha p_{D^\perp}(x) = \alpha v, v = (a, b), v^\perp = (-b, a)$$

$$\text{posons } x = \alpha v + b v'$$

calculons

$$\langle x, v \rangle = \langle \alpha v + b v', v \rangle$$

$$= \alpha \langle v, v \rangle + b \langle v', v \rangle$$

$$= \alpha \langle v, v \rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle}}$$

$v \perp v'$

Ex 13 (endomorphisme adjoint)

Soit $E \xrightarrow{\text{cc}}^{\sim} & u \in \mathcal{L}(E)$

On cherche $v \in \mathcal{L}(E)$ tq

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle \quad (*)$$

Soit B une base E .

Supposons v existe. Soit $N = \text{ofat}_\beta(v)$

soit $M = \text{ofat}_\beta(u)$ & enfin $A = \text{Mat}_\beta(\langle \cdot, \cdot \rangle)$

Si X, Y désignent les vect^{es} colonnes de x, y dans B .

(*) se traduit par:

$${}^t(MX)AY = {}^tXA(NY), \forall X, Y$$

$${}^tXA^*AY = {}^tXANY, \forall X, Y.$$

$$\Leftrightarrow {}^tMA = AN$$

A est inversible car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est forme

non-dégénérée $\Rightarrow \boxed{N = A^{-1}{}^tMA}$

Récipqut supposons v est un endomor. obtient la mat dans β est

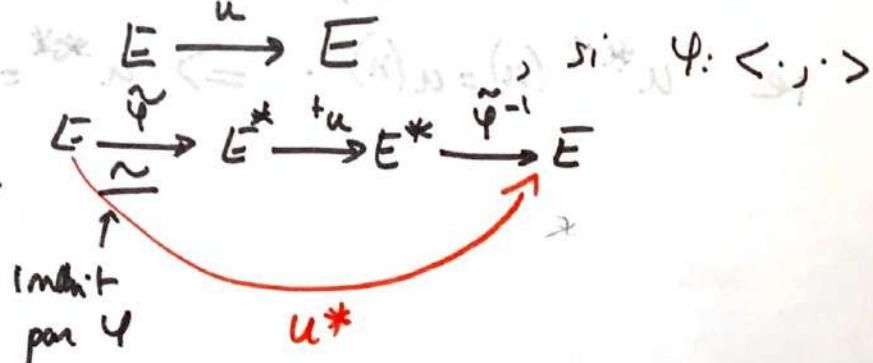
$$N = A^{-1}{}^tMA.$$

Calculons $\langle x, v(y) \rangle$ matriciellement:

$$\begin{aligned} \langle x, v(y) \rangle &= {}^tXANY \\ &= {}^tXA(A^{-1}MAY) \\ &= {}^tXMAY \\ &= {}^t(MX)AY \\ &= \langle u(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui

prouve l'existence de v .
(unicité montrée).



3) Mg $u^{**} = u$.

$\forall x, y \in E$,

$$\langle u(x), y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, u^*(y) \rangle$$

$$\text{antisymmetric} = \langle u^*(y), x \rangle$$

$$= \langle y, (u^*)^*(x) \rangle$$

$$= \langle u^{**}(x), y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u(x) - u^{**}(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ non dégénéré.

(Le seul vecteur orthogonal à tout vecteur nul.)

$$\Rightarrow u(x) - u^{**}(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

$$\text{ie } u^{**}(x) = u(x) \quad \Rightarrow \quad u^{**} = u.$$

4) soit $F \subset E$ stable par u .

Mg F^\perp stable par u^* .

s'it $x \in F^\perp$ & $y \in F$

$$\begin{aligned} \langle u^*(x), y \rangle &= \langle x, u^{**}(y) \rangle \\ &= \langle x, u(y) \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\text{dc } u^{**}(x) \in F^\perp$$

$$\text{ie } u^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$$

5) Mg $\ker u^* = (\text{Im } u)^+$ &
 $\text{Im } u^* = (\ker u)^+$

s'it $x \in E$, $u^*(x) = 0$, soit $y \in E$,

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

dc $x \perp \text{Im } u$

$$\text{ie } \ker u^* \subseteq (\text{Im } u)^+$$

mit $y \in (\text{Im } u)^\perp$,
 $\forall x \in E, \langle y, u(x) \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow \langle u^*(y), x \rangle = 0$
dc $u^*(y) \perp E$
 $\Rightarrow u^*(y) = 0$

i.e. $y \in \ker u^*$

$$\Rightarrow \ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$$

$$\underline{\text{Mq } \text{Im } u^* = (\ker u)^\perp}$$

$$\ker u = \ker u^{**} = (\text{Im } u^*)^\perp$$

$$\bullet (\ker u)^\perp = (\text{Im } u^*)^{\perp\perp} = \text{Im } u^*$$

$$\Rightarrow \boxed{(\ker u)^\perp = \text{Im } u^*}$$

6. Mq $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$ invertible &
si $u \in \mathcal{O}(E)$, $u^{-1} = u^*$.
soit ϕ l'opérateur matricielle,
 $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ isométrie
 $\langle x, u^* u(y) - y \rangle = 0$
~~salut, u(y) essaie~~ $\Rightarrow u^* u = \text{Id}$.
 $\Rightarrow u^* u = u u^* = \text{Id}$
 $\Leftrightarrow u^* = u^{-1}$.

Supposons que u inversible & $u^* = u^{-1}$.
 $\forall n, y \in E$,
 $\langle u(n), u(xy) \rangle = \langle u^* u(n), y \rangle$

$$= \langle u^{-1} u(n), y \rangle$$

$$= \langle n, y \rangle \quad \forall n, y$$

dc u isométrie de $u \in O(E)$.

d'où $n - u(n) \in \ker u$.

Ainsi $n \in \text{Im}(u) + \ker u$

Soit $x \in E$ tq $x \in (\text{Im } u) \cap \ker u$.

i.e. $u(x) = 0$ & $\exists z \in E$,
 $\text{tq } x = u(z)$.

$$\text{dc } u(x) = u(u(z)) = u^2(z)$$

On a donc $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.

$$u|_{\ker u} = 0 \quad \& \quad u|_{\text{Im } u}$$

$$u(u(y)) = u^2(y) = u(y)$$

dc. sur $\text{Im } u$, u est l'identité.

\Rightarrow not $x \in E$,

considérons $n - u(n)$.

$$\text{alors } u(n - u(n)) = u(n) - u^2(n) = 0$$

$$\text{car } u = u^2.$$

$$L_{\nu} R^{\phi} = R^{\phi} \underbrace{(R^{\phi})^{-1} L_{\nu} R^{\phi}}_{\text{et } g = (R^{\phi})^{-1}}$$

$$= R^{\phi} \left(L_{\nu} \overset{g}{\cancel{R^{-\phi}(v)}} g^{-1} \right) = L_g(v)$$

$$= L_{R^{\phi/2}}(R^{-\phi}(v)) = L_{R^{-\phi/2}}(v)$$

7. Mq R^{ϕ} est produit de 2 réflexions:

ϕ & v fines, \exists une réflexion f_w

$L_{\nu} R^{\phi} = f_w f_v$. Déterminer un vecteur w définissant cette réflexion f_w .

Une rotat. est produit de 2 réflexions:

ϕ & v fines.

$$L_{\nu} R^{\phi} = L_{R^{-\phi/2}}(v) \overset{P_1}{\underset{P_2}{\circ}} f_v^c = id$$

$$R^{\phi} = P_1 P_2 L_{R^{-\phi/2}}(v) = P_1 P_w$$

$$\Leftrightarrow w = R^{-\phi/2}(v).$$

Ex 10: Propriétés de base du produit vectoriel' 5. si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}_{0m}^+(E)$, alors soit E orienté dim 3 ; produit vectoriel $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$\forall y \in E$, $[u, v, y] = \langle x, y \rangle = \langle u \wedge v, y \rangle$ le vecteur x est noté par $u \wedge v$.

1^{er} L'appli $E \times E \rightarrow E$ est bilinéaire & ✓ $(u, v) \mapsto u \wedge v$ antisymétrique.

2. Mg $\forall u, v \in E$, $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ colinéaires.

(ie $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$)

3. $\forall u, v \in E$, $u \wedge v \perp u$ & $u \wedge v \perp v$.

4. Si u, v non colinéaires alors $(u, v, u \wedge v) \in \mathbb{B}^+(\mathcal{E})$ si $i = j$: $e_i \wedge e_j = \pm e_k$

(bases directes de E). Si $\det(u, v)$ est une famille orthonormée (ie $\|u\| = \|v\| = 1$ & $u \perp v$) alors

$(u, v, u \wedge v) \in \mathbb{B}_{0m}^+(E)$.

E orienté dc base d'orientat.

P est directe si $\det(P_{D \rightarrow D}) > 0$.

$D = \{v_1, v_2, v_3\}$. D est directe si $[v_1, v_2, v_3] > 0$

$\mathbb{B}_{0m}^+(E)$ base orthonormée directe

" $\{e_1, e_2, e_3\}$; $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$.

et $e_1 \perp e_2$, $e_2 \perp e_3$, $e_3 \perp e_1$.

$e_i \wedge e_j = 0$ si $i = j$ (2.)

car $e_i \wedge e_j + e_i$ et $e_i \wedge e_j + e_k$ ($e_i, e_j, e_i \wedge e_j \in \mathbb{B}_{0m}^+(E)$).

$(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2) \in \mathbb{B}_{0m}^+(E)$ si $j=1$

et $(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}_{0m}^+(E)$ aussi.

dc $e_1 \wedge e_2 = e_3$.

$$i=1, j=3, (e_1, e_3, e_1 \wedge e_3) \in \mathbb{B}_{0n}^+(\mathbb{E})' + u_3 v_3 \underbrace{e_2 \wedge e_3}_{e_1} + u_3 v_1 \underbrace{e_3 \wedge e_1}_{e_2} + u_3 v_2 \underbrace{e_3 \wedge e_2}_{-e_1}$$

$$\det e_1 \wedge e_3 = -e_2 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \varepsilon = -1$$

$$(e_2, e_3, e_2 \wedge e_3) \in \mathbb{B}_{0n}^+(\mathbb{E}) \quad \det e_2 \wedge e_3 = e_1$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \det e_2 \wedge e_3 = e_1$$

$$\varepsilon_{231} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{B}_{0n}^+(\mathbb{E})$,

$$u = \sum_i u_i e_i, \quad v = \sum_i v_i e_i \quad \text{alors}$$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

$$u \wedge v = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3)$$

$$= u_1 v_2 \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{e_3} + u_1 v_3 \underbrace{e_1 \wedge e_3}_{-e_2} + u_2 v_1 \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{-e_3}$$

$$\varepsilon_{213} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3.$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

$$7. \forall (x, y) \in (\mathbb{E} \setminus \{0\})^2, \quad \beta = \widetilde{(x, y)}$$

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \beta, \quad \text{ex. g.}$$

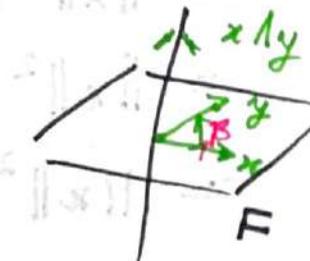
$$[x, Ax, v] = \|v\| \|p_F(x)\|^2 \sin \theta \quad \text{ou } A = R_v^\perp$$

Mq la si $\|x\| = \|y\| = 1$.

un vecteur non nul de la droite orthogonale au plan $F = \text{Vect}(x, y)$

$$\text{alors } y = R_v^\perp x.$$

(on peut choisir $v = x \wedge y$)



$$\|x \wedge y\|^2 = [x, y, x \wedge y]$$

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x \wedge y\| \cdot \|x\|^2 \sin \beta$$

$$\Rightarrow \|x \wedge y\| = \sin \beta.$$

En général:

$$\begin{aligned} \|x \wedge y\| &= \left\| \|x\| \|y\| \frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \|x\| \|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \|x\| \|y\| \sin \beta \end{aligned}$$

$$8. \forall (x, y) \in E^2,$$

idée de Lagrange

$$\|x \wedge y\|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\|x \wedge y\|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 =$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \beta + \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \beta$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2$$

A39

9. $\forall (x, y, z) \in E^3$ if double prod. vector!

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

(deeds $B_{0m}^+(E)$).

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle z, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

Si y & z st colinéaires alors $y \wedge z = 0$

$$\& \quad \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z =$$

$$= \lambda \langle x, z \rangle z - \lambda \langle x, y \rangle z = 0$$

Si $x \in \text{Vect}(y, z)^\perp$, $(y \wedge z) \in \text{Vect}(y, z)^\perp$

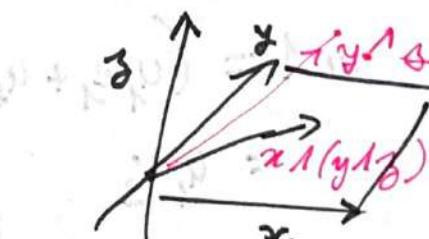
dc x & $y \wedge z$ st colinéaires.

$$\text{Dc } x \wedge (y \wedge z) = 0 \text{ & de m}\\ (x, z) = 0 \text{ & } \langle x, y \rangle = 0.$$

$$x \wedge (y \wedge z)$$

$$y \wedge z \in \text{Vect}(y, z)^\perp$$

$$x \wedge (y \wedge z) \in \text{Vect}(x, y \wedge z)^\perp$$



$$\in \text{Vect}(y, z)^\perp$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } x \wedge (y \wedge z) = \alpha y + \beta z$$

$$\langle x \wedge (y \wedge z), u \rangle = \alpha \langle u, y \rangle + \beta \langle u, z \rangle$$

def

$$[x, y \wedge z, u] = 0$$

$$\text{Dc } \alpha \langle u, y \rangle = -\beta \langle u, z \rangle$$

$$\text{dc } x \wedge (y \wedge z) = \alpha y - \frac{\alpha \langle u, y \rangle}{\langle u, z \rangle} z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = \left(\frac{\alpha}{\langle u, z \rangle} \right) (\langle u, z \rangle y - \langle u, y \rangle z)$$

$\frac{\alpha}{\langle u, z \rangle}$ ne dépend pas du vecteur x, y, z choisis.

Dc on peut évaluer pr x, y donnée : $x \wedge (y \wedge z) = y$

$$\text{dc } \frac{\alpha}{\langle u, z \rangle} = 1.$$

[ie le prod. vect n'est pas une loi associative]

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle u, z \rangle y - \langle u, y \rangle z$$

$$(x \wedge y) \wedge z = -z \wedge (x \wedge y)$$

$$= -\langle z, y \rangle x + \langle z, x \rangle y$$

$$\neq x \wedge (y \wedge z)$$

A (35)

10. $\forall (x, y, z) \in E^3$, [idé de Jacobi]

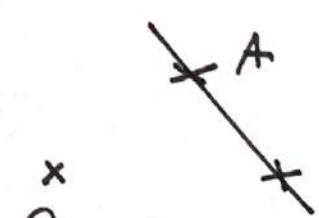
$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) =$$

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) =$$

$$= \cancel{\langle x, z \rangle y} - \cancel{\langle x, y \rangle z} + \cancel{\langle y, x \rangle z} - \cancel{\langle y, z \rangle x} + \cancel{\langle z, y \rangle x} - \cancel{\langle z, x \rangle y} = 0$$

Ex 10 Équation d'une droite affine via le produit vectoriel

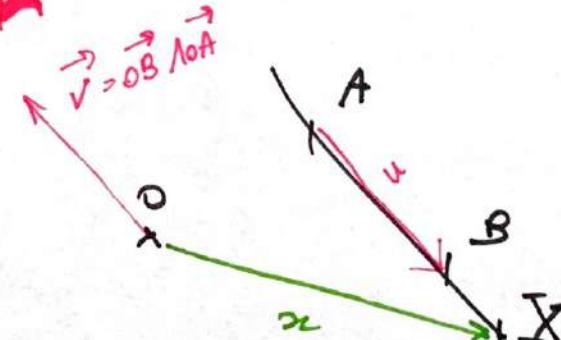
1. Mq pr q p A, B de E, la droite (AB) est l'ensemble des solv de $x \in E$ de $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ où $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} \\ \vec{v} = \vec{OB} \wedge \vec{OA} \end{cases}$



$$AB = \{x \in E, \vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}\}$$

$$x = \overrightarrow{OX}$$

$$x \in AB \text{ si } \exists \lambda,$$



$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\text{An } \exists A \text{ tq } \overrightarrow{AO} + z = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow z = \lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge z &= \overrightarrow{AB} \wedge (\lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) \\ &= \lambda \underbrace{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}}_{=0} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} = v\end{aligned}$$

Ex 14 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

de base orthonormée.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 5-t \end{vmatrix} = (5-t)(1-t)-4 = t^2 - 6t + 4.$$

$$\Delta = 36 - 4 = 32, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}.$$

Les 2 valeurs propres sont :

$$t_1 = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3-\sqrt{2}, \quad t_2 = 3+\sqrt{2}.$$

$$E_{t_1} = \ker(A - (3-\sqrt{2}) \text{ Id})$$

$$\begin{pmatrix} -2+2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{2 val distinctes}$$

$\dim E_{t_1} = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker A \text{ si } \begin{cases} (-2+2\sqrt{2})x + 2y = 0 \\ 2x + (2+2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$$x = (\sqrt{2}-1)y$$

Par ailleurs $(\sqrt{2}-1) \in E_{t_1}$.

$$E_{t_1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$$E_{t_2} = \ker\begin{pmatrix} -2-2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{t_2} \text{ si } 2x + (2+2\sqrt{2})y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = (\sqrt{2}-1)y \rightarrow E_{t_2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base}$$

formée de vecteurs propres.

On veut la transformer en une base orthonormée.

Vérifions bien base orthonormée :

$$\langle b_1, b_2 \rangle = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) - 1 = 2-1-1=0$$

$$\langle b_1, b_1 \rangle = (\sqrt{2}+1)^2 - 1 = 2\sqrt{2} + 2 + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\langle b_2, b_2 \rangle = 4 - 2\sqrt{2}$$

(i)

Dès maintenant on divise par la racine carrée de la norme de chaque vecteur.

$$\text{Dès } \tilde{b}_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{array} \right)$$

$$\text{et } \tilde{b}_2 = \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{array} \right)$$

est une base orthonormée formée de \vec{v}_P .

$$P(e_1, e_2) \rightarrow (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Comme c'est une base orthonormale.

$$P^{-1}(e_1, e_2) \rightarrow (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = P(e_1, e_2) \rightarrow (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$$

$$\mathbb{R}^2(e_1, e_2) \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2(e_1, e_2)$$

$$P \uparrow \quad \downarrow P^{-1}$$

$$\mathbb{R}^2(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \xrightarrow{D} \mathbb{R}^2(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$$

$$D = P^{-1} A \cdot P, \quad D = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3-2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = P \tilde{D} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (P \tilde{D} P^{-1})(P \tilde{D} P^{-1}) \\ &= P \tilde{D}^2 P^{-1} = P D P^{-1} = A. \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3-2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

$$d.e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}$$

NB:

$$(1+\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{9-8} = 1$$

$$\frac{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{-\sqrt{(3-2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}}{\sqrt{16-8}}$$

$$= \frac{-\sqrt{12-14\sqrt{2}+8}}{\sqrt{8}} = \frac{-\sqrt{20-14\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$$

$$= -\frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3+2\sqrt{2}})}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{12+2\sqrt{2}+8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{20+14\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$$

(iii)

$$def = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-10+7\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = B$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{(6-4\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}{\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{\sqrt{(6+4\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{4}$$

dc $\omega = \frac{\sqrt{3}}{8}$, dc \hat{m} w $\beta, \gamma, \delta \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

(iv)

$$\text{Ex 15} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Op}} -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (g-t) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ -1 & -2 & 5-t \end{vmatrix}$$

1)
↳

$$= (g-t) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ 0 & -4 & 1-t \end{vmatrix}$$

- A mat sym de l'endom. correspondant $= (g-t) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ 0 & -4 & 1-t \end{vmatrix}$
est un **autoadjoint**. De par le Th

Spectral, \exists base ortho de \mathbb{C}^3 et
endomorphisme est diagonal.

i.e. \exists mat P' orthogonal t.q.

$D = P^{-1} A P$ est diagonale et $P^{-1} = P'$.

$$= (g-t) t \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= -(g-t)^2 t$$

$$\text{Spec}_A = \left\{ \begin{matrix} 0, g \\ \uparrow \\ \text{mult 1} \end{matrix}, \begin{matrix} g \\ \uparrow \\ \text{mult 2} \end{matrix} \right\}$$

2)

Calcul du polyn. caractéristique de A :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -2 & -4 \\ -2 & 8-t & -2 \\ -4 & -2 & 5-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g-t & -2 & -4 \\ 0 & 8-t & -2 \\ -9+t & -2 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$E_0: ? \text{ bsn}(A)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -9 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E_0 = \text{Rect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_g = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_g$$

On peut choisir $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ qui est dans E_g & orthogonal à b_2 .

$$b_3 = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{5} \\ -2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$25 + 4 + 16 = 45 \\ \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

On doit maintenant orthonormaliser la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On divise $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ par sa norme $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gramm-Schmidt :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \cancel{\lambda + 4 - 4\lambda = 0}$$

(*)

$$\text{D'où } P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -1/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3) P^{-1} = HP$$

$$\lambda = \cancel{\lambda = \frac{4}{5}}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ -4/3\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(vi)

d) A mat def positive ?
 (A induit elle une FQ^+ ?
 définie positive ?)

La signature de la FQ est $(2,0)$.

Dc la mat A est \oplus ($\text{rg} = 2$)
 mais non définie positive.

c) Trouve ttes les mat $B \in \mathcal{L}_3^+(\mathbb{R})$
 tq $B^2 = A$.

La slt mat $B \in \mathcal{L}_3^+(\mathbb{R})$ vérifiant
 $B^2 = A$ est

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En revanche il existe plusieurs mat ds $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ q vérifient $B^2 = A$.

6 sont :

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ex 16 et rg & signature.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\ &= t \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-t \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\ &= -t(2-t)(1-t). \end{aligned}$$

Dc la FB sym donné par A.

Je donne pas diagonalise en

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ds une base } \\ \text{unie de } \mathbb{R}^3.$$

Sa signature est (2,0) et son
rang 2.

(iii)

fin ex 13 $u \in \mathcal{O}(E)$

7. f)

f.a) u projectif linéaire $\Leftrightarrow u^2 = u$.

b) si u est orthogonal, u est une projectif linéaire
 $\Rightarrow u^2 = u$.

u orthogonal $\Rightarrow u^{-1} = u^*$.

$$\langle ux, uy \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle.$$

$$\langle x, u^*uy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

de \hat{m} , $\langle u^*g, u^*g \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\langle uu^*g, g \rangle$$

$$\Rightarrow uu^* = u^*u = \text{Id}$$

$$\Leftrightarrow u^* = u^{-1}$$

④ On suppose $u^2 = u$ & $u^* = u^{-1}$.

$$\text{Alors } uu^* = u^*u = \text{Id} \\ = uu^{-1}$$

$\Rightarrow u$ est orthogonal.

$u^2 = u \Rightarrow u$ est une projectif.

$$u^2 = u \Leftrightarrow E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

$$u|_{\text{Ker } u} = 0, \quad u|_{\text{Im } u} = ?$$

Soit $z \in \text{Im } u$, $z = u(x)$, $x \in E$

$$u(z) = u(u(x)) = u^*(x) = u(x) - z.$$

$$\Rightarrow u(z) = z.$$

$$u|_{\text{Im } u} = \text{Id}.$$

$x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$,

~~Vy $\forall E$, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), u^*(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$~~

$x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$.

$\exists y \in E \text{ tq } x = u(y)$.

$$\cancel{\langle x, x \rangle = \langle u(y), u(y) \rangle}$$

$$x \in \text{Ker } u \Rightarrow \cancel{\langle u(x), u(x) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0}$$

$y \in \text{Im}(u)$, $\langle x, y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \forall y \in \mathbb{C}$

$$\langle x, y \rangle = \langle u(x), u^*(y) \rangle$$

$$= \langle u(x), u(y) \rangle$$

$$= \langle 0, u(y) \rangle = 0$$

$\Rightarrow \text{Ker } u \perp \text{Im}(u)$

$$i) u^2 = u \text{ et } u^* = u^*$$

$$\begin{cases} u|\text{Ker } u = 0 \\ u|\text{Im } u = \text{Id} \end{cases}$$

et $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$

ad u est une projection orthogonale
sur $\text{Im } u$.

Réponse : orare humanum ut.

$$i) u^2 = u \text{ et } ii) u^* = u$$

i) $\Rightarrow E = \text{Ker } u \perp \text{Im } u$

$$\begin{cases} u|\text{Ker } u = 0 \\ u|\text{Im } u = \text{Id} \end{cases} \Rightarrow u \text{ est projecteur orthogonale.}$$

u est antisadijoint

$$u^* = u$$

$$u = u|\text{Ker } u \oplus u|\text{Im } u$$

$$x \in E, x = x_v + x_w$$

$$u(x) = u(x_v) + u(x_w) = u(x_w)$$

ii) $u^* = u \Rightarrow E = \text{Ker } u \perp \text{Im } u$

$$\begin{aligned} y &\in \text{Ker } u, & \langle x, u(y) \rangle &= \langle u^*(x), y \rangle \\ u(y) &\in \text{Im } u, & &= \langle u(x), y \rangle \text{ car } u^* = u. \end{aligned}$$

$$= \langle 0, y \rangle$$

$$= 0$$

Ex 9 $A \in SO(3)$, $\exists P$ inversible

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~mat d'une base où~~ où A' est la mat d'une rotat de \mathbb{R}^2 , $A' \in SO(2)$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

→ trace ne dépend pas de la base.

$$\text{dc } \text{tr}(A) = 1 + \text{tr}(A') = 1 + 2 \cos \theta$$

$$\boxed{\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta}$$

• Soit $v \neq 0$ tq ~~mat~~ $PR_v = E$
(axe de rotation)

$$x \in -PR_v$$

$$[x, Ax, v]$$

\rightarrow à calculer

produit mixte, det 3 vectrs.

43

soit $F^\perp = Rv$.

$$x \in \mathbb{R}^3 \setminus Rv, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

$$[x, Ax, v] = [p_F(x) + p_{F^\perp}(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$$

~~$[p_F(x), p_F(Ax), v] + [p_{F^\perp}(x), p_{F^\perp}(Ax), v]$~~

$$= [p_F(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$$

$$+ [p_{F^\perp}(x), p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax), v]$$

$$= [p_F(x), p_F(Ax), v] + \underbrace{[p_F(x), p_{F^\perp}(Ax), v]}_0$$

$$+ [p_{F^\perp}(x), p_F(Ax), v] + \underbrace{[p_{F^\perp}(x), p_{F^\perp}(Ax), v]}_0$$

car $p_{F^\perp}(Ax)$ colinéaire à v .

$$F^\perp = RV \quad \text{dc } = 0$$

$$\begin{array}{c|c} & | \\ & | \\ \text{2 colonnes} & \text{colinéaires} \\ \text{du det} & \Rightarrow \det = 0 \end{array}$$

$$[x, Ax, v] = [p_F(x), p_F(Ax), v]' \quad \text{D'où} \quad [x, Ax, v] = [p_F(x), p_F(v), v]$$

$$\& \quad p_F(Ax) = A p_F(x)$$

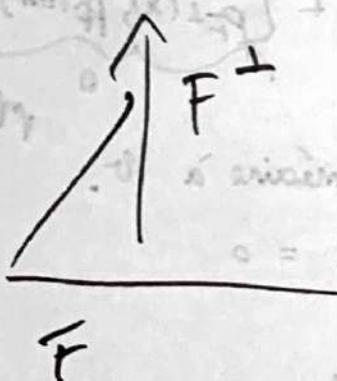
d'autre part, ~~$p_{F^\perp}(Ax)$~~

$$A(x) = p_F(Ax) + p_{F^\perp}(Ax)$$

~~$A(p_F(x)) = x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$~~

$$A(x) = A(p_F(x)) + p_{F^\perp}(x)$$

$$A(x) = \underbrace{A(p_F(x))}_{\in F} + \underbrace{A(p_{F^\perp}(x))}_{\in F^\perp}$$



$$\Rightarrow p_F(Ax) = A(p_F(x))$$

$$p_{F^\perp}(Ax) = A(p_{F^\perp}(x))$$

soit $\{w_1, w_2, w_3\}$ une base orthonormée de F ,

$$\text{de sorte que } \{w_1, w_2, v\} \text{ de t.g. } v = \frac{v}{\|v\|},$$

soit une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

$$\text{Soit } x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 v \in \mathbb{R}^3$$

$$A(p_F(x)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in F, x \neq 0,$$

$$[x, Ax, v] =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta & 0 \\ x_2 & x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \\ - x_2(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

$$= x_1^2 \sin \theta + x_2^2 \sin \theta \\ + \cancel{x_1 x_2 \cos \theta} - \cancel{x_2 x_1 \cos \theta}$$

$$\bullet = (x_1^2 + x_2^2) \sin \theta = \| \mathbf{a} \|^2 \sin \theta.$$

$$[x, Ax, v = \|v\| \tilde{v}] = \|v\| [x, Ax, \tilde{v}] \\ = \|v\| \|p_F(x)\|^2 \sin \theta.$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \\
 &\quad - x_2(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) \\
 &= x_1^2 \sin \theta + x_2^2 \sin \theta \\
 &\quad + \cancel{x_1 x_2 \cos \theta} - \cancel{x_2 x_1 \cos \theta} \\
 &= (x_1^2 + x_2^2) \sin \theta = \| \mathbf{a} \|^2 \sin \theta. \\
 &= \| p_F(\mathbf{a}) \|^2 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [x, Ax, v] = \|v\| \tilde{[x, Ax, v]} &= \|v\| [x, Ax, \tilde{v}] \\
 &= \|v\| \|p_F(\mathbf{a})\|^2 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

2) Applications.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in SO(3)$?

$$\begin{aligned}
 AA = Id \text{ oui} &\quad \text{dc } A \in O(3) \\
 \det(A) = 1 &\quad \text{dc } A \in SO(3)
 \end{aligned}$$

L'axe de rotation est l'espace purp.^{bleu}.

$$E_1 = \ker(A - Id)$$
 est l'axe de rotation.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ x = z \end{cases}$$

Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$ un $\vec{vp} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \mathbf{u}$.

$$t_{\mathbf{u}}(A) = 1 + 2 \cos \theta$$

$$t_{\mathbf{u}}(A) = 0 = 1 + 2 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}.$$

$$[x, Ax, v] = \|v\| \|p_F(\mathbf{a})\|^2 \sin \theta.$$

Prenons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ arbitraire $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$.

$$\text{calcul de } Ax: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[x, Ax, v] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BB = \dots = Id \in O(3)$$

$$\det(B) = 1 \in SO(3).$$

$$\ker(B - Id) = \text{ker} \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - Id) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 3z \quad \& \quad x = y$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un $\vec{v}_p \Leftrightarrow \cdot \vec{v}_p = 1$.

$$\pi A = 1 + 2 \cos \theta = \frac{1}{3} (-2)$$

$$2 \cos \theta = -5/3$$

$$\cos \theta = -5/6.$$

Prenons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & axe rotat. $Ax = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$\in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v$$

$$[x, Ax, v] = \begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\sin \theta > 0 \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - (-5/6)^2 = \frac{11}{36}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Ex 15. } \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ est mat sym alors $\exists P$ mat.
orthogonale q̄ la diagonalise, ie
 $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

$$Eg = \ker(A - 9 \text{Id})$$

$$Eg = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Il faut base orthonormée.

Orthogonalisation de $\{v_1, v_2, v_3\}$

b) Determiner P .

$$\Phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \{0, 9\}.$$

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)^2$$

$$\text{Pour } \lambda = 0 : \vec{v}_p \hookrightarrow$$

$$E_0 = \ker(A)$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & +5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right. \rightarrow E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{Dc } E_0 = \mathbb{R}v_1$$

$$\text{Prenons } u_2 = v_2$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$\frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Dc } u_3 = v_3 - \frac{4}{5} v_2$$

$$\Rightarrow u_3 = (0, -2, 1) - \frac{4}{5} (1, -2, 0) = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -8/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De une base orthonormée de \mathbb{R}^3 est :

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$$

$$v_1 = (2, 1, 2); v_2 = (1, 2, 0), v_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3, \|v_2\| = \sqrt{5}, \|v_3\| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Def $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & 2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ -4/3\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -3/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 5/3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d) A est \oplus car toutes les \vec{v}_p sont \oplus .

Elle n'est pas définie \oplus car l'une de ses \vec{v}_p est nulle.

c) Trouver mat B $\in \mathcal{G}_3^+(\mathbb{R})$ tq $B^2 = A$.

$$B^2 = PDP^{-1},$$

$$\text{soit } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^2 = I$$

$$B^2 = PE^2P^{-1}$$

$$(PEP^{-1})^2 = A.$$

obligé de normaliser les \vec{v}_p .

$$\begin{bmatrix} M \cdot M = Id \\ M \cdot A \cdot M = Id \\ M \text{ mat op } F_B \cdot M = 1 \\ \langle j(u(w), j(u(y)) \rangle = \langle u(w), u(y) \rangle \end{bmatrix}$$

prod + réel \mathbb{R} standard ds \mathbb{R}^n

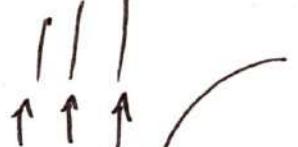
tq base canoniq soit orthonormée.

Orthonormée.

appli d'orthogonalisation canonique normée.

isométrique

images vect'ls de base canoniq fait orthonormée.



$$\text{orthonorm mat } \| \cdot \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

M Décomposition polaire.

soit mat M. $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$.

Résoudre $S^2 = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ (Δ déf-positive)

$\bullet Q = M S^{-1}$.

c, d st clés ; $c = \|\vec{v}_{p_1}\|$, $d = \|\vec{v}_{p_2}\|$

$$P = \begin{pmatrix} c & d & d \cdot \beta \\ c & \gamma & d \cdot \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = c\alpha x' + d\beta y' \\ y = c\gamma x' + d\delta y' \end{cases}$$

$$f = \sqrt{p_1} x'^2 + \sqrt{p_2} y'^2 + b'_1 x + b'_2 y + \text{cte}$$

$$(b'_1 \ b'_2) = (b_1 \ b_2) P$$

• Réduct de Gauß de f. (éliminer les termes en x, y)

Expression de \tilde{x} en f de x' .

Trouver expression de x, y f \tilde{x}, \tilde{y} .

$$\frac{1}{2} \text{ axes : } (a, b) = (\sqrt{\sqrt{p_1}}, \sqrt{\sqrt{p_2}})$$

$$\begin{cases} x = \dots \tilde{x}^* + \dots \tilde{y} + \eta \\ y = \dots \tilde{x} + \dots \tilde{y} + \xi \end{cases}$$

centre $(x, y) = (\eta, \xi)$.

M Réduire à forme normale P une isométrie affine, en corrig

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ où } a_{12} = a_{21}.$$

$$P_A(\lambda) = ? \quad \textcircled{v_p} ? \quad \overrightarrow{\textcircled{v_p}} ?$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_{p_1} & \vec{v}_{p_2} \end{pmatrix} \text{ orthonormalité } P \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \vec{v}_{p_1} & \vec{v}_{p_2} \\ \|\vec{v}_{p_1}\| & \|\vec{v}_{p_2}\| \end{pmatrix}$$

(c1)

Ex 1 Réduct de conics

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

(i) $q = 5x^2 + 4xy + 8y^2$.

Diagonaliser dans $B_{0,m}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \chi_A(t) = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

$$E_{\lambda_4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 \quad E_{\lambda_9} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2$$

$\{v_1, v_2\}$ forme base orthonormée

(FQ) q est diagonale de mat $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = P(v_1, v_2) \rightarrow (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x' + y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}$$

(ii) RDG: $f = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

$$f = \frac{5}{5} (8x' + y')^2 + \frac{4}{5} (2x' + y')(-x' + 2y')$$

$$+ \frac{8}{5} (-x' + 2y')^2 - \frac{32}{\sqrt{5}} (2x' + y')$$

$$- \frac{56}{\sqrt{5}} (-x' + 2y') + 80$$

$f = \textcircled{v p_1} x'^2 + \textcircled{v p_2} y'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + 80$

+ simple

$$(b'_1 \ b'_2) = (b_1 \ b_2) P = \begin{pmatrix} -8 & -144 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(iii) Éliminer termes en x, y

$$f = 4 \left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 9 \left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}} \right)^2 = 36$$

$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tilde{y} = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}$$

f des coordonnées \tilde{x}, \tilde{y} est

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$$

ellipse.

\mathcal{L}' est du noyau axe de coord.
est $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$.

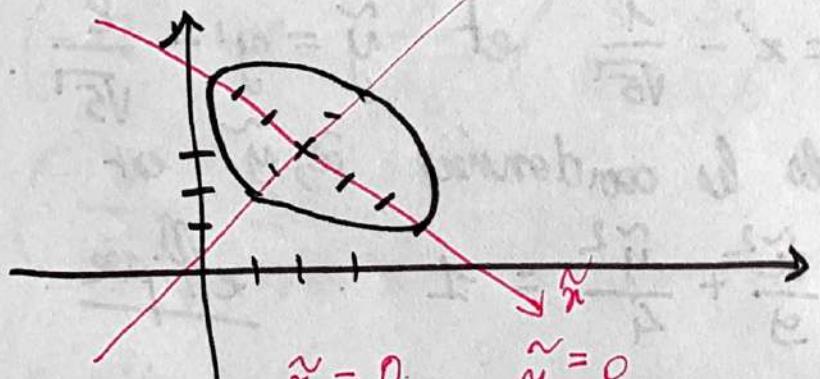
$$x' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \quad y' - \frac{8}{\sqrt{5}} = 0.$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{16}{\sqrt{5}}\right) = 3.$$

Le centre de l'ellipse est

$$(2, 3) = (x, y).$$



$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$3) f = 12xy + 5y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 \quad \text{RDG}$$

$$f = -4x'^2 + 9y'^2 + \frac{8}{\sqrt{13}}x' + \frac{-90}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \lambda_A = (9+4)(1-9)$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3y') \end{cases}$$

$$(b'_1 \ b'_2) = (b_1 \ b_2) P$$

$$= (-12 \ -22) \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{8}{\sqrt{13}} \quad \frac{-90}{\sqrt{13}} \right)$$

$$f = -4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{13}}x' + \frac{-90}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$$

(a)

$$f = -4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{4}{13} + 9\left(y' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{25}{13} - 19$$

$$f = -4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 36$$

$$f = -4\hat{x}^2 + 9\hat{y}^2 - 36 = 0$$

de la coniq do mallas and (\hat{x}, \hat{y}) a
 pt equao $-4\hat{x}^2 + 9\hat{y}^2 = 36$.

$$\Leftrightarrow -\frac{\hat{x}^2}{9} + \frac{\hat{y}^2}{4} = 1 \quad \text{hyperbole}$$

$$-\frac{\hat{x}^2}{3^2} + \frac{\hat{y}^2}{2^2} = 1 \rightarrow \frac{\hat{y}^2}{2^2} - \frac{\hat{x}^2}{3^2} = 1$$

$$\Rightarrow (a, b) = (2, 3).$$

$$2). \quad x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0. \quad f = 2y'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P_A(A) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad f = 2\left(y' - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' = 0$$

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$$

forme parabolique

$$\text{Spec}(A) = \{0, 2\}$$

• $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

$$(b'_1 \ b'_2) = (b_1 \ b_2) P$$

$$= (-8 \ 0) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-8 \ -8) = \frac{-8}{\sqrt{2}} (1 \ 1)$$

$$\Rightarrow f = 2x'^2 + 2y'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

(c2)

$$\begin{aligned} 2\tilde{y}^2 &= \frac{8}{\sqrt{2}}x' \Leftrightarrow \tilde{y}^2 = \frac{4}{\sqrt{2}}x' \\ \tilde{y}^2 &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}x' \quad \text{ou} \quad \tilde{y} = y' - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \tilde{x} &= 0 \\ y' &= \tilde{y} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ x' &= \frac{2}{\sqrt{2}} \tilde{y} = \tilde{e}^{-\frac{3}{4}} \tilde{y} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{e}^{-\frac{3}{4}} \tilde{y} + \tilde{y} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \dots + 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\tilde{e}^{-\frac{3}{4}} \tilde{y} + \tilde{y} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \dots + 1$$

TD 4 ex 2 $E \text{ et } \dim(E) = n, u \in L(E)$. $\langle (\lambda f + \mu g)^*(x), y \rangle =$

$u: E \rightarrow E$ linéaire, u^* est linéaire.

($\langle \cdot, \cdot \rangle = f$). u^* est l'adjoint de E .

$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

soit β base canonique de E .

$$A = \text{Mat}(f), M = \text{Mat}_{\beta}(u),$$

$$N = \text{Mat}_{\beta}(u^*)$$

Cela s'écrira :

$${}^t(MX)AY = {}^tXANY, \quad \forall X, Y \text{ ad.}$$

on va montrer $\forall x \in E,$

$$\underline{(\lambda f + \mu g)^*(x) = (\lambda f^* + \mu g^*)(x)}$$

soit $x \in E, y \in E$

$$= \langle x, (\lambda f + \mu g)(y) \rangle$$

$$= \langle x, \lambda f(y) + \mu g(y) \rangle$$

$$= \lambda \langle x, f(y) \rangle + \mu \langle x, g(y) \rangle$$

$$= \lambda \langle f^*(x), y \rangle + \mu \langle g^*(x), y \rangle$$

$$= \langle \lambda f^*(x), y \rangle + \langle \mu g^*(x), y \rangle$$

$$= \langle \lambda f^*(x) + \mu g^*(x), y \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{\langle (\lambda f + \mu g)^*(x), y \rangle}$$

$$= \langle \lambda f^*(x) + \mu g^*(x), y \rangle$$

$$= \langle (\lambda f - \mu g)^*(x) - (\lambda f^*(x) + \mu g^*(x)), y \rangle = 0$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non nul $\forall y \in E,$

$$\Rightarrow \underline{(\lambda f + \mu g)^*(x) = \lambda f^*(x) - \mu g^*(x)} \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \underline{(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*}$$

en vert autre chose à copier & modifier, vcteur nul.

49

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

soit $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} & \langle (g \circ f)^*(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle \Rightarrow \text{soit } f \in \mathcal{L}(E) \text{ & } u \text{ inversible} \\ & = \langle x, g(f(y)) \rangle \\ & = \langle g^*(x), f(y) \rangle \\ & = \langle f^*(g^*(x)), y \rangle \quad \text{et } y \\ \Rightarrow \quad & (g \circ f)^*(x) = f^* \circ g^*(x) \quad \forall x \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

3) Mg $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible
si f^* l'est & $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

soit $f \in \mathcal{L}(E)$ & u inversible
 f est inversible, $\exists g \in \mathcal{L}(E)$ tq
 $f \circ g = \text{id}_E = g \circ f$

si on prend l'adjoint de l'égalité

$$g^* \circ f^* = (\text{id})^* = f^* \circ g^*.$$

alors f^* est inversible.

$$g = f^{-1}$$

$$\text{Mq } (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

$$(f^*) \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* \\ = (\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E.$$

$$(f^{-1})^* \circ (f^*) = (f \circ f^{-1})^* \\ = (\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E.$$

La réciproq est uniq.

$$\Rightarrow (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

Ex 4. Soit E \mathbb{C} dim finie n , $u \in L(E)$

a) $\text{Mq } \ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ et
 $\text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im}(u)$

$$\text{Mq } \ker(u^* \circ u) \subseteq \ker u$$

Soit $x \in \ker(u^* \circ u) \rightarrow u^* \circ u = 0$

$$\forall y \in E, \langle u^* \circ u(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

$$\langle u(x), u(y) \rangle =$$

$$\text{on a dc si } y = x, \langle u(x), u(x) \rangle = 0 = \|u(x)\|^2$$

$$\Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u$$

$$\Rightarrow \ker(u^* \circ u) \subseteq \ker u.$$

Inversement $x \in E$ & tq

$x \in \ker u \Leftrightarrow u(x) = 0$.

$$u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(u^* \circ u)$$

$$\& \ker(u) \subseteq \ker(u^* \circ u)$$

$$\text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im } u ?$$

ppr^e $\ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$

$$\begin{aligned} \ker u &= \ker u^{**} \\ &= (\text{Im } u^*)^\perp \end{aligned}$$

$$(\ker u)^\perp = \text{Im } u^*$$

$$\ker(u^* \circ u)^\perp$$

$$\text{Im}(u^* \circ u)^\perp = \text{Im}(u^* \circ u)$$

M2 $\text{Im}(u \circ u^*) \subseteq \text{Im } u$.

$$\text{Im}(u \circ u^*) = u(u^*(E))$$

$$\text{or } u^*(E) \subseteq E \text{ dc}$$

$$u(u^*(E)) \subseteq u(E) = \text{Im } u.$$

$$\text{Il faut montrer } \text{Im } u \subseteq \text{Im}(u \circ u^*).$$

TH Pg $\dim E = \dim \ker u + \text{rg}(u)$

$$\Rightarrow \text{rg}(u^* \circ u) = \text{rg}(u)$$

Si on met u^* au lieu de u

$$\text{rg}(u \circ u^*) = \text{rg}(u^*)$$

Important $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$

$$\text{On a } \operatorname{rg}(u^* \circ u) = \operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u)$$

$$\operatorname{Im}(u^* \circ u) \subseteq \operatorname{Im} u$$

de ces deux sont imbâties & ont

la même dimension

- De plus on a

$$\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im} u.$$

Rappel Preuve $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*)$ par

(Théorème) $\dim \operatorname{Im} u^* = \dim E - \dim \ker u^*$

$$= \dim E - \dim (\operatorname{Im} u)^\perp$$

$$= \dim E - (\dim E - \dim \operatorname{Im} u)$$

$$= \dim \operatorname{Im} u.$$

ie $\boxed{\operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u)}$

b) Mg $u^* \circ u$ & $u \circ u^*$ st auto-adjoints \oplus

Mg auto-adjoints : $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^*$
 $= u^* \circ u$

idem pour $u \circ u^*$.

A positive \Leftrightarrow (UP) de A st ≥ 0 .

A def-positive \Leftrightarrow (RP) st > 0 .

$$A \rightarrow (x, y) \mapsto {}^t x A y$$

soit $\Delta = u^* \circ u$ & A (RP) de A

soit $x \sqrt{p} \Leftrightarrow \lambda$.

$$\langle \Delta x, x \rangle = \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle$$

$$= \langle u(x), u(x) \rangle$$

$$= \boxed{\langle \lambda x, x \rangle} = \lambda \langle x, x \rangle.$$

Ex 2. $E \oplus$ dim finie m . ${}^t X {}^t M A Y = {}^t X A N Y \Leftrightarrow {}^t M A = A N$.

1) R \uparrow D endom. adjoint & $\rightarrow A$ est inversible car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est finie (nd)
caractérisat mat d'un end. adj. $\Rightarrow N = A^{-1} {}^t M A$

D Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E \oplus dim n , 2) M \oplus m 2 endom $f, g \in \mathcal{L}(E)$; on a:
 $\exists! v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

nota \oplus : $v := u^*$.

$$\boxed{\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle}.$$

$$\underline{\text{Mat}_E(u^*) = {}^t \text{Mat}_E(u) \text{ si } E \text{ base.}}$$

soit B une base de E , supposons

v existe, soit $N = \text{Mat}_B(v)$, soit $M = \text{Mat}_B(u)$,

$A = \text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, si x, y désignant

les vecteurs colonnes de x, y ds B .

$$({}^t M) A Y = {}^t X A N Y, \forall x, y.$$

$$N = \text{Mat}_B(g), M = \text{Mat}_B(f)$$

$$N' = \text{Mat}_B(g^*), M' = \text{Mat}_B(f^*)$$

$$\begin{cases} N' = A^{-1} + N A \\ M' = A^{-1} {}^t M A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \quad \left\| \begin{array}{l} \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle \\ \langle \mu g(x), y \rangle = \langle x, \mu g^*(y) \rangle \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} \langle x, y^*(y) \rangle + \langle x, \mu g^*(y) \rangle = \lambda f^* + \mu g^* \\ = \langle \lambda f(x), y \rangle + \langle \mu g(x), y \rangle \\ = \langle (A f(x) + \mu g(x)), y \rangle \end{array} \right. \end{aligned}$$

Mq $(fg)^* = g^* f^*$
 Dc N' est inversible que l'on a
 note $N' := \text{Mat}_\beta(f^*)$.

$$\begin{aligned} N'M' &= (A^{-1} {}^{t_N} A)(A^{-1} {}^{t_M} A) \\ &= (A^{-1} {}^{t_N} {}^{t_M} A) \\ &= A^{-1} (MN)^t A. \end{aligned}$$

D'où $g^* f^* = (fg)^*$

3) Mq $f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible
 si f^* l'est et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}(E)$ inversible,

$N = \text{Mat}_\beta(f)$ inversible.

$$\text{et } N' = A^{-1} {}^{t_N} A$$

où A est inversible car f l'est
 et N est inversible par hypothèse
 A inv car f l'est

$\Leftarrow f^* \Rightarrow N' = \text{Mat}_\beta(f^*)$ est
 inversible par hypothèse.

$$N' \rightarrow \text{d'où } (A^{-1} {}^{t_N} A)$$

en arguments que t'a 1'heure.

$$\rightarrow \text{Mq aussi } (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

$$= \langle f f^{-1}(x), f^*(y) \rangle$$

$$(f^*)^{-1} = (N')^{-1} = (A^{-1} {}^{t_N} A)^{-1} = A ({}^{t_N})^{-1} A^{-1}$$

$$= A (N^{-1}) A^{-1} = (f^{-1})^*$$

TRIG

$$\cancel{\langle u(x), v(y) \rangle} = \cancel{\langle x, a^* u(y) \rangle}$$

Ex 3 Endom. Auto-adjoint (i) $u \in \mathcal{Y}_E \mapsto \mathcal{D}(u) = Y \in \mathcal{Y}(E)$,
 Es, dim finie n , $u \in \mathcal{Y}(E)$ $\forall (x, y) \in E^2$, $U(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$.
 $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq (ii) $U(y, x) = \langle y, u(x) \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$
 $u \in \mathcal{Y}(E)$ $= U(x, y)$.

$$\langle u(n), y \rangle = \langle n, u^*(y) \rangle$$

④ $u \in \mathcal{Y}_E$ est \oplus ie $u \in \mathcal{Y}_E^+$ si
la FBS $\Leftrightarrow \oplus(u)$ est $\oplus : \oplus(u) \geq 0$.

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

i.e. $u \in \mathcal{Y}_E^+ \Leftrightarrow u \in \mathcal{Y}_E, \forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$.

$$M = \text{Mat}_\beta(u), A = \text{Mat}_\beta(\langle \cdot, \cdot \rangle,$$

β base omé de E .

def: $M \times A^Y = X^A \times Y$

$$MXA = XAM \leftrightarrow \cancel{XA} = \cancel{AX}.$$

$$A^{-1}X^{-1}MXA = M.$$

$$\mathcal{Y}_E = \left\{ \begin{array}{l} \text{random sym} \\ \text{de } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\textcircled{1}} \mathcal{Y}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{FBS} \\ \text{de } E \end{array} \right\}$$

d'après (TH) diagonalisabilité dans un espace vectoriel, $a \in \mathcal{Y}_E \Rightarrow$ les racines complexes de a sont réelles : $\text{Spec}(a) \subset \mathbb{R}$

suite q) i) \Leftarrow si $\text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$. 3) (i) $u \in \mathcal{Y}^+(E)$ $\Leftrightarrow \text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$.

\rightarrow les val^{es} complexes de u st réelles, ie: XAX^* mat def-positive

E \oplus dim & par hypothèse $u \in \mathcal{Y}(E)$ $\Leftrightarrow \text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$.
(FBS de E).

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}. \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \text{ réelles} \\ \text{de } u \in \mathcal{Y}(E) \end{matrix}$$

E base orné

$$X = \text{Mat}_{\beta}(x), A = \text{Mat}_{\beta}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$$

$$M = \text{Mat}_{\beta}(u), \beta \text{ base orné.}$$

(ii) idem

$$ST > 0$$

$$\langle \lambda_i, u(\lambda_i) \rangle = \langle u(\lambda_i), \lambda_i \rangle$$

$$\lambda_i \langle 1, u(\lambda_i) \rangle$$

q) À propos endomorphismes auto-adjoint \oplus de trace nulle?

$$\langle x, u(n) \rangle = \langle u(n), x \rangle$$

$$\rightarrow \text{et } \forall x \in E, \langle x, u(n) \rangle \geq 0 \quad \textcircled{1} \text{ trace 0}$$

$$\langle u(n), x \rangle$$

$$\text{trace} = \sum \textcircled{1}$$

et les $\textcircled{1}$ st nulles.

$\exists x \in E$, $u(x) = 0$.

$$\text{a)} \quad \ker(u^* \circ u) = \ker u \cdot \text{ i.e. } u(x) = 0.$$

$$\text{et b)} \quad \text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im } u.$$

Idempotent inclusion.

$$(\text{i}) \quad C : \ker(u^* \circ u) \subset \ker u.$$

$$\text{Seit } x \in \ker(u^* \circ u).$$

$$\text{i.e. } \forall y \in E, (u^* \circ u)(y) = 0$$

$$u^*(u(y)) = 0$$

$$\langle u(x), y \rangle$$

~~$$\langle u^*(u(x)), y \rangle$$~~

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle x, u^*(y) \rangle \\ &= \langle u^*(u(x)), u^*(y) \rangle \\ &= \langle 0, u^*(y) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\langle (x, u(x)) \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

$$u \circ u^* = u.$$

R(?)

' My ker $u \subset \ker(u^* \circ u)$.

$$\text{a)} \quad \ker(u^* \circ u) = \ker u \cdot \text{ i.e. } u(x) = 0.$$

$$\text{et b)} \quad \text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im } u.$$

d' où $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$.

• $C : \ker(u^* \circ u) \subset \ker u$. b) $\ker(u^* \circ u)$ & $\ker u$ adjoints points & def. \oplus mi u est inversible.
 $(u^* \circ u)^* = u \circ u^*$

$$\langle u(x), y \rangle$$

~~$$\langle u^*(u(x)), y \rangle$$~~

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle x, u^*(y) \rangle \\ &= \langle u^*(u(x)), u^*(y) \rangle \\ &= \langle 0, u^*(y) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) $M_Q(u, v) \mapsto \text{tr}(u^* \circ v)$ est
produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Exprimer a ps f mat

$\text{Mat}_{\beta}(u) = M$ & $\text{Mat}_{\beta}(v) = N$
où β base orthonormée standard de \mathbb{R}^n .

PS forme polaire $b_Q: E \times E \rightarrow K$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

est forme linéaire ?

(P5) : do (2) R dim finie munie Fq

def $\oplus Q$. La forme polaire de Q
est appelée produit scalaire.

~~d)~~ d) $u \in \mathcal{Y}(E)$, $\exp \|u\|$
 \Leftrightarrow au PS c) $f \in \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de u .

- Égal à cône isotrope / mat de Gram / diste vecteurs, (a), mat sym, antisym, orthogles
- $\textcircled{D} \text{ O}(2), \text{SO}(2) / \textcircled{TU}$ Réduct endom. orthogre à fm normale / M_q si et iff $O(2)$ est réflexm orthogre ; $O^-(2) = \{A \in O(2), \det A = -1\}$ /
- M_q endo $u = R^\theta \circ S_v \circ (R^\theta)^{-1}$ est réflexm
- Réflexm, sym orthogles, projcs orthogles classes équivalents $\textcircled{FQ} \text{ md} / \textcircled{D}$ endo adjoint /
- $M_q u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint si : $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \in \mathbb{R}$.
- \textcircled{D} calcul, justif \textcircled{FB} si réduis à fm diagonale de base convenable.
- F^L, \textcircled{FQ} équivalents.

Cône isotrope

soit $Q \textcircled{FQ}$ sur $E, x \in E$. x est isotrope si $Q(x) = 0$. L'ens des vectrs isotropes pr Q s'appelle le cône isotrope.

\textcircled{FQ} def si son cône isot. réduit les $\textcircled{R1}$

$\textcircled{FB} S$ positive, définie, (md)

$E \mathbb{R}$ -ev dim finie, Q forme bil. sym sur E . On dit Q est :

- positive si $\forall x \in E, Q(x, x) \geq 0$.
- définie si $\forall x \in E, Q(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- définie-positive si définie & positive.
- md si vecteur x tq $f(x, y) = 0 \forall y \in E$ est le vecteur nul.

i.e. seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

déterminant de la mat de la $\textcircled{FB} S$

@ $\Delta = 12 \Rightarrow$ dc $\textcircled{FB} S$ md \Rightarrow mat inversible $\Rightarrow \text{rg}(A) = \{0\}$

Mat de Gram

La mat de Gram \Leftrightarrow est la mat sym. de terme général $\langle x_i, x_j \rangle$.

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_m \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \langle x_m, x_2 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} = G(x_1, \dots, x_m)$$

Relatifs à normes

$$\|2x\| = |2| \|x\|, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\text{si } x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{I.C.S.}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{I.M.}$$

$$d(x, F) = ?$$

Distance vecteur / espace vectoriel

calcul $p_F(x)$.

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

$$@ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad p_F(x) = \dots = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(x, F) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\|$$

$$\|x + p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|p_F(x)\|^2 + 2\langle x, p_F(x) \rangle$$

Angles

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \overbrace{\langle x, y \rangle}^{\text{arccos}} = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$$

Noyaux & Orthogonix

$$\ker \varphi = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}.$$

$$\square \text{ A}^\perp = \{x \in E, \varphi(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

$$\rightarrow A \in O(2) \iff \{^t A A = \text{Id}\}$$

$$\rightarrow A \in SO(2) \iff \{u \in O(2), \det u = 1\}$$

$$\rightarrow O^-(E) = O(E) \setminus SO(E) = \{u \in O(E), \det u = -1\}$$

$$O(E) = SO(E) \sqcup O^-(E)$$

$$d(x, F) =$$

(R2)

$u \in \text{SO}(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Cor

Sur un \mathbb{C} -ev de E , dim n , $\exists n+1$ classes d'équivalences de (F) distinguées p 1g.

$u \in O^+(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

réflexions.

Th endom. orthognx ds \mathbb{C} de dim q .

soit E \mathbb{C} dim $n \geq 1$ alors \exists base ornée de E ds \mathbb{C} u s'écrit p la mat:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & R^{g_1} & \\ & & & & & R^{g_n} \end{pmatrix}, R^{g_k} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}, \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Classification sur \mathbb{R}

Th on suppose $K = \mathbb{R}$, $q \in Q(E)$ alors \exists uniq $p \in \mathbb{N}$ tq q s'écrit ds base convenable p mat diagonale:

$$\begin{pmatrix} 1_p & & & \\ & 0 & & \\ & & -1_q & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ où } q = x - p, x = 1g(q).$$

signature de (p, q) .

Cor \Leftrightarrow F q, q' sur des \mathbb{R} ev dim n st équivlts si \hat{m} signature.

Équivalences

D \mathbb{C} $q \in Q(E), q' \in Q'(E)$ st équivalent si:

(i) \exists isomorphisme $h: E' = E, Q' = Q \circ h$.

(ii) \exists bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' ($\text{Mat}_E Q = \text{Mat}_{E'} Q'$)

(iii) \forall bases $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de E, E' tq $\text{Mat}_{E'} Q' = {}^T \cdot \text{Mat}_E Q \cdot T$.

Endom. ctéjoint

D E \mathbb{C} , $u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \exists ! v \in \mathcal{L}(E)$ tq

$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

$\hookrightarrow v$: adjoint de u : $v := u^*$.

\Rightarrow si E base ornée de E ,

$$\text{Mat}_E(u^*) = {}^t \text{Mat}_E(u)$$

Th \mathbb{C} Q sur un \mathbb{C} -ev E de dim n s'écrit ds 1 base convenable p mat $\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n-x}^x$ où $x = 1g Q$.

Th complexes Q, Q' st des \mathbb{C} -ev E, E' équivalentes

si $\dim E = \dim E'$ & $1g Q = 1g Q'$.

R3

⑤ endom. adjoint $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$
 $= \langle x, u^*(y) \rangle$
et $v := u^*$.

⑥ endom.
auto-adjoint
adjoint
en symétrique

$\forall x, y \in E$ et $u = u^*$
 $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

- une mat A est symétrique si ${}^t A = A$.
- une projection orthogonale est sym.
- le sym orthog. est sym.

Cor $u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow u \in O(E)$

$\Leftrightarrow u$ inversible et $u^* = u^{-1}$.

$\Leftrightarrow u^*u = uu^* = \text{id}_E$.

(a) si $u \in \mathcal{L}_E$, $\text{Spec}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 2p
si distinctes alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$

(a) soit $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists P \in O(n)$

tq $D = P^{-1}A.P$ et $P^{-1} = {}^t P$ soit diagonale.

$$\mathcal{L}_E = \left\{ \begin{array}{l} \text{endom. sym} \\ \text{de } E \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{Op}} \mathcal{L}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Op. } \\ \text{de } E \end{array} \right\}$$

(R4)

⑦ Tte **FBS** $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de diagonalise
ds base o.m de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

⑧ Un endom. sym $u \in \mathcal{L}_E$ est \oplus : $u \in \mathcal{L}_E^+$
si **FBS** $\Leftrightarrow \oplus(u) \oplus: \oplus(u) \geq 0$.
ie: $u \in \mathcal{L}_E^+ \Leftrightarrow u \in \mathcal{L}_E, \forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$.

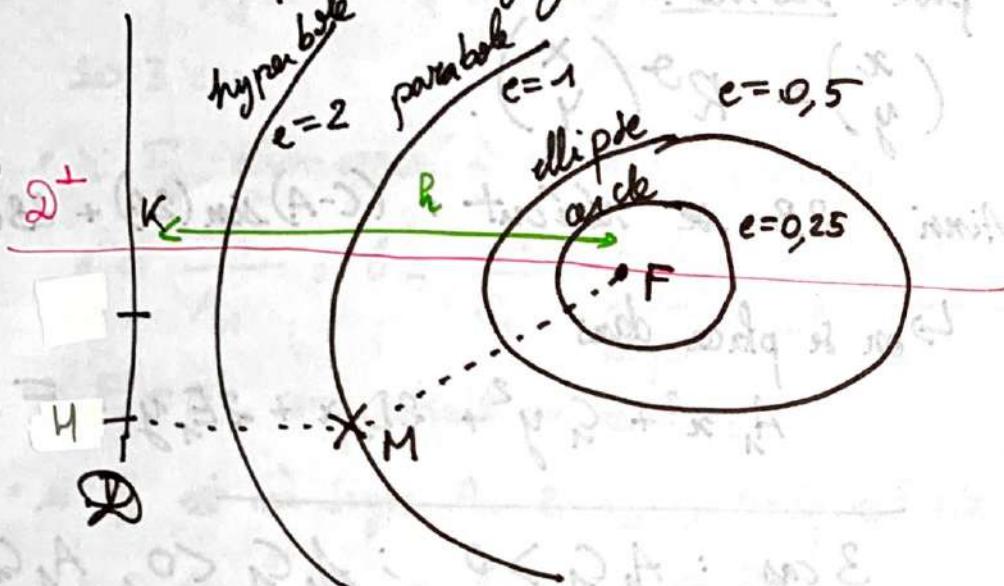
$u \in \mathcal{L}_E^{++} \Leftrightarrow u \in \mathcal{L}_E^+, \forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle > 0$.

⑨ | $u \in \mathcal{L}_E^+ \Leftrightarrow \text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^+$.
 $u \in \mathcal{L}_E^{++} \Leftrightarrow \text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^{>0}$.

(Th) soit $u \in \mathcal{L}_E^+ \Rightarrow \exists! v \in \mathcal{L}_E^+$ tq $v^2 = u$.

TD-4 : Réduct des coniqs & endomorphismes symétriques.

① Coniqs à 1 foyer, 1 directrice



$K :=$ projeté de M sur D .

Coniq de directrice D , de foyer F , d'eccentricité e l'ens des pts M du plan p vérifiant :

$$d(M, F) = e \cdot d(M, D) \quad (*)$$

QRP
R5

- » si $e < 1$: courbe fermée & bornée: ellipse
- » si $e = 1$: courbe ouverte & ss: parabole
- » si $e > 1$: courbe de 2 branches symétriques au point intér de lk asymptotes communes: hyperbole.

→ Ttes ces courbes possèdent l'axe de symétrie la droite D^\perp passant par F appelé axe principal de la coniq D_F^\perp

• Paramètre de la coniq : $p = e \cdot h$.

ds (O, \vec{u}, \vec{v}) où $\vec{a} = \frac{1}{h} \vec{KF}$.

Abscisse de F : α .

$$d(M, F) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-0)^2}; d(M, D) = \sqrt{(x-\alpha+h)^2}$$

(*) $\rightarrow (x-\alpha)^2 + y^2 = e^2(x-\alpha+h)^2$

$$\rightarrow x^2(1-e^2) + y^2 = 2x\alpha + C$$

ou $\begin{cases} B = (1-e^2)\alpha + ep \\ C = (p-ed)^2 - \alpha^2 \end{cases}$

• cas $e < 1$: ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \left| \frac{p^2}{1-e^2} \right|, e \neq 1. \end{array} \right.$$

• cas $e > 1$: hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

• cas $e=0, p=1$: foyer au centre cercle,
la directrice est envoyée à $+\infty$.

④ Algébriq, coniq et ens de pts

$M(x, y)$ vérifiant :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

A, B, C, D, E, F cte tq $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

→ une coniq étant donné qm équat d'un repère quelconque, on cherche un repère orthonormal ds qt l'équat de la coniq sera la + simple possible.

→ on se place ds repère orthonormal sinon chgt de base μ y \hat{e} .

→ Élimin. terme $2xy$ en changeant de base par rotat.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \vartheta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Ainsi 23 se réécrit : $(C-A)\sin(2\vartheta) + 2B\cos(2\vartheta)$

↳ on se place dans

$$A_1 x^2 + G_1 y^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F = 0$$

3 cas : $A_1 G_1 > 0$; $A_1 G_1 < 0$, $A_1 G_1 = 0$

→ si $A_1 G_1 > 0$ alors

si $A_1 G_1 < 0$ alors

si $A_1 G_1 = 0$ alors

→ si $A_1 G_1 > 0$ alors

→ si $A_1 G_1 < 0$ alors

→ si $A_1 G_1 = 0$ alors

→ si $A_1 G_1 > 0$ alors

Si $A_1 C_1 > 0$: chgt d' \leftrightarrow O_1 : si $F_1 = 0$, $a^2 = \left| \frac{1}{A_1} \right|$, $b^2 = \left| \frac{1}{C_1} \right|$, la coniq est réunion de 2 droites sécantes $bx \pm ay = 0$.

$$O_1 \left(-\frac{D_1}{A_1}, -\frac{E_1}{C_1} \right) \rightarrow \text{élim termes en } x \text{ et en } y.$$

$$\hookrightarrow A_1 x^2 + C_1 y^2 + F_1 = 0.$$

\hookrightarrow 3 cas:

- si F_1 signe opposé à A_1 & C_1 , on pose

$$a^2 = \frac{-F_1}{A_1}, b^2 = \frac{-F_1}{C_1} : \text{équt} \quad \text{réduite: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ellipse

- Si $F_1 = 0$, coniq réduite au point O_1 .

- Si F_1 est m̄ signe A_1 & C_1 , coniq est vide

Si $A_1 C_1 < 0$: chgt $Q \left(-\frac{D_1}{A_1}, -\frac{E_1}{C_1} \right)$.

$$\hookrightarrow A_1 x^2 + C_1 y^2 + F_1 = 0.$$

éventuell̄ permuat vect̄ base, suppose $C_1 F_1 \geq 0$:

2 cas:

$$\bullet \text{ si } F_1 \neq 0, a^2 = \frac{-F_1}{A_1}, b^2 = \frac{-F_1}{C_1} :$$

$$\text{équat réduite hyperbole: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

si $A_1 C_1 = 0$ si besoin permuat vect̄ de la base, supposer $A_1 = 0, C_1 \neq 0$, chgt $\leftrightarrow O_1$

$$Q \left(0, -\frac{E_1}{C_1} \right) \Rightarrow C_1 y^2 + 2 D_1 x + F_1 = 0$$

2 cas:

$$\bullet \text{ si } D_1 \neq 0, \text{ chgt } \leftrightarrow O_2 \left(-\frac{F_1}{2D_1}, 0 \right)$$

\hookrightarrow élimine terme cté, pose $p = -\frac{D_1}{C_1}$, équat réduite parabole: $y^2 = 2px$.

$$\bullet \text{ si } D_1 = 0, C_1 y^2 + F_1 = 0. \rightarrow 3 \text{ cas}$$

► si F_1 est signe opposé C_1 , $p^2 = \frac{-F_1}{C_1}$, la coniq est réunion de 2 droites // d'equd $y = \pm p$

► si F_1 est nul, coniq \neq réduit à droite $y = 0$.

► si F_1 m̄ signe C_1 , coniq est vide.

\Rightarrow NEE orbites des coniqs pr isométries

Classification affine

Ds plan affine réel munie repère ; f def

$$\forall M(x,y) : f(M)$$

$$f(M) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

\rightarrow si la coniq d'équat $f=0$.

\rightarrow arbit $\mu \mapsto$ affines ?

Pour f_1 et f_2 : $\exists \mapsto$ affine ϕ

$$\text{réel } \lambda \neq 0, f_1 \circ \phi = \lambda f_2 \Rightarrow \psi(f_2) = f_1$$

f_1 & f_2 st affinement équivalentes.

$$Q_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, L_f = (2D \quad 2E)$$

$$M_f = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(M) = {}^t \tilde{X} Q_f X + L_f X + F$$

$$= {}^t \tilde{X} M_f \tilde{X}$$

f_1 & f_2 équiv ltes si m signature.

\rightarrow signature de Q_f caractérise le signe de son déterminant ΔQ_f .

signature Q_f	signe ΔQ_f	sig M_f	ΔM_f	équa	Plane
(2,0)	+	(3,0)	$\neq 0$ $x^2+y^2+1=0$	vide	
(2,1)	$\neq 0$	(2,1)	$x^2+y^2-1=0$	ellipse	
(2,0)	$= 0$	(2,0)	$x^2+y^2=0$	point	
(1,2)	$\neq 0$	(1,2)	$x^2-y^2-1=0$	hyperbole	
(1,1)	$= 0$	(1,1)	$x^2-y^2=0$	2 droites	
(1,0)	$\neq 0$	(2,1)	$x^2-y=0$	parabole	
	mul	(2,0)	$x^2+y^2+1=0$	vide	
		(1,1)	$x^2-y-1=0$	2 droites	
		(1,0)	$x^2=0$	1 droite	

si $\Delta M_f = 0 \Rightarrow$ coniq dégénérée.

Pratique de la réduction d'une équation de conique à centre en repère orthonormé

$$\chi_M = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = (\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda + 2 - \sqrt{2}) \\ = (\lambda - \alpha)(\lambda + \beta).$$

@ Réduire l'équation d'un conique représenté dans repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$g(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 1.$$

4 Maple

Diagonalisation de l'endo aux directions asymptotiques

endo sym A de E_2 tq $\vec{u} \cdot A(\vec{u}) = 3x^2 - 2xy + y^2$

et $\vec{u} = xi + yj$ de E_2 apr mat de base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

on cherche (V_P) & (V_P)
de M qui fournissent

les directions principales (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

with (linalg):

$M := \text{matrix}(2, 2, [3, -1, -1, 1])$:

eigenvals;

Puis la mat orthogonale P de passage de la base (\vec{i}, \vec{j}) à base de (\vec{e}_1, \vec{e}_2) en munissant ces 2 vecteurs:

$$\begin{pmatrix} \frac{-\alpha+1}{\sqrt{2}\alpha} & \frac{-\beta+1}{\sqrt{2}\beta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} & \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \end{pmatrix}$$

Recherche du centre

$$\text{Résousme } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} > \text{eq} := \{ \text{diff}(g(x, y), x) = 0, \text{diff}(g(x, y), y) = 0 \}; \\ > \text{vcs} = \{x, y\}; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6x - 2y + 1 = 0 \text{ et } -2x + 2y - 1 = 0$$

> solve(eq, vcs);

$$\Rightarrow \text{centre } w = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$\omega := (0, \frac{1}{2}) ; g(\omega)$

$$g(w) = -\frac{5}{4}$$

D'où équation réduite du repère

$$R' = (w, \vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \frac{5}{4}$$

R9 calcul angle de 2 droites

⑨ Soit θ mesure angle (D_1, D_2) (mod π).

- si $\text{tr}(A) = 0 \Rightarrow D_1 \& D_2$ orthogonales
- si $\text{tr}(A) \neq 0 \Rightarrow D_1 \& D_2$ pas orthog

$$\text{et } \tan \theta = \pm 2 \frac{\sqrt{-\det A}}{\text{tr}(A)}$$

NB. f est équation de conique à centre si elle admet un centre unique

⑩ Centre E de f , tt pt $\underline{\omega} \in E_2$ t

$\forall M \in E_2, f(s_{\underline{\omega}}(M)) = f(M)$.

où $s_{\underline{\omega}}$: symétrie centrale de centre $\underline{\omega}$.

$$(x, y, z) = S$$

$$S = p - x + p + pxz - xz = (px) p$$

soit $x = \text{tr}(A)$

$\text{tr}(A) = 0$

$\text{tr}(A) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = M$$

(x, y, z) diagonale de S

Ex 1 1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$. Recherche du centre:

Diagonalisons l'endo. aux directs asymptotiques.

Tout $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de E_2 a pour mat de base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{cherchons } \vec{v}_p \text{ et } \vec{v}_{p'}$$

$$\chi_M = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

$$E_{\lambda=4} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ (\vec{e}_1) \right\}.$$

$$E_{\lambda=9} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ (\vec{e}_2) \right\}.$$

Puis on normalise ces 2 vect's pour obtenir la mat orthogonale P de de passage de la base (\vec{i}, \vec{j}) à la base de \vec{v}_p :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Résonde $(\partial_1 g)(x, y) = (\partial_2 g)(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} 10x + 4y - 32 = 0 \\ 16y + 4x - 56 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 3)$$

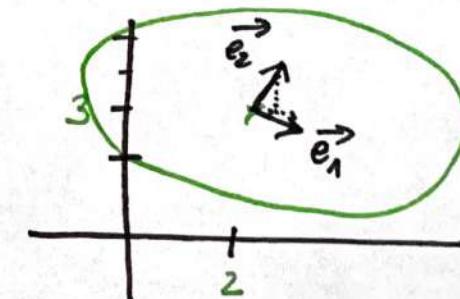
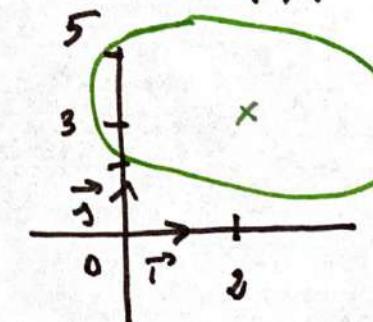
$$\Rightarrow w = (2, 3) \quad \text{condamné du autre.}$$

$$g(2, 3) = -176.$$

D'où équat réduite du repère

$$R' = (w, \vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

$$4X^2 + 9Y^2 - 176.$$



$$6m \text{ a } \operatorname{rg}(u \circ u^*) = \operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u)$$

b) Mg $u^* \circ u$ & $u \circ u^*$ st auto-adjoints \oplus

$$\operatorname{Im}(u \circ u^*) \subseteq \operatorname{Im} u$$

$$\text{Mg auto-adjoints: } (u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^*$$

dc ces 2 scs st umbâtés & ont

la m^e dimension

• Dc si $\operatorname{rg}(u \circ u^*) = \operatorname{rg}(u)$

$$\operatorname{Im}(u \circ u^*) = \operatorname{Im} u.$$

R^p Preuve $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*)$ $\mathcal{C}_{\operatorname{rg}}$

(M rg) $\dim \operatorname{Im} u^* = \dim E - \dim \ker u^*$

$$= \dim E - \dim (\operatorname{Im} u)^\perp$$

$$= \dim E - (\dim E - \dim \operatorname{Im} u)$$

$$= \dim \operatorname{Im} u.$$

$$\text{Mg auto-adjoints: } (u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* \\ = u^* \circ u$$

idem p $u \circ u^*$.

A positive \Leftrightarrow (up) de A st ≥ 0 .

A def-positive \Leftrightarrow (rp) st > 0 .

$$A \rightarrow (x, y) \mapsto {}^t X A Y$$

soit $\Delta = u^* \circ u$ & A (rp) st Δ

soit $x \sqrt{\rho} \Leftrightarrow \lambda$.

$$\langle \Delta x, x \rangle = \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle$$

$$= \langle u(x), u(x) \rangle$$

$$= \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle.$$

i.e $\boxed{\operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u)}$

~~Si~~ $\lambda \in \text{Vp}$ de $u^* \circ u$ & $\lambda \neq 0$ ($v = u_1 + \dots + u_n$, $v_g \in v_g = E(A_g)$)
 sur $\overrightarrow{\text{Vp}}$. $\Leftrightarrow \lambda$.

$$\langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\langle u(x), u(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\text{alors } 0 = \lambda \langle x, x \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

$$\text{si } \langle u(x), u(x) \rangle > 0$$

$$\text{la m\^eme \'egalit\'e} \Rightarrow \lambda > 0.$$

$$A = \text{Mat}_{v_n}^{(u^* \circ u, v)}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\langle v, v \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \langle v_n, v_n \rangle$$

$$v_i \in V_i, B_i = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base canonique de } V_i$$

$$v_i = \sum a_{ij} e_j$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = \sum a_{ij}^2 \langle e_i, e_j \rangle$$

Supposons u inversible alors $\ker u = \{0\}$
 d'apr\`es 1) $\ker u = \ker u^*$

$\Leftrightarrow u^* \circ u$ est inversible

$\Rightarrow u^* \circ u$ n'a pas de Vp \'egale \`a 0

$\Rightarrow \forall \lambda \text{ Vp de } u^* \circ u ; \lambda \text{ est } > 0.$

si $u^* \circ u$ est d\'efinie > 0 , si $\langle u(x), u(x) \rangle > 0$
 \& x , $\|u^* \circ u(x)\|^2 = 0 \Rightarrow u^* \circ u(x) = 0$

$\Leftrightarrow u(x) = 0$.

& u est dc injectif \Leftrightarrow bijedif' $\phi(A_u, v) = 2\phi(u, v)$
(en dim finie).

(si $\langle u(n), u(n) \rangle > 0$ la m^{me} gale)
 $\lambda > 0$

c) $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{L}(E)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (u, v) &\longmapsto \text{tr}(u^* \circ v)\end{aligned}$$

$$\phi(u, v) = \text{tr}(u^* \circ v)$$

$$\phi(u_1 + u_2, v) = \text{tr}((u_1 + u_2)^* \circ v)$$

$$= \text{tr}((u_1^* + u_2^*) \circ v)$$

$$= \text{tr}(u_1^* \circ v + u_2^* \circ v)$$

$$= \text{tr}(u_1^* \circ v) + \text{tr}(u_2^* \circ v)$$

$$= \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$$

$$\lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{signature } \phi(u, o) = \phi(v, u)$$

$$\begin{aligned}\text{tr}(u^* \circ v) &= \text{tr}(v \circ u^*) \\ &= \text{tr}(v \circ u^{**})\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{de base orée} \\ \text{en termes matrice} = \text{tr}(u \circ v^*) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d'adjoint wt la} \\ \text{transposée} \end{array} = \text{tr}(v^* \circ u)$$

Comme $M = \text{Mat}(u)$, $N = \text{Mat}(v)$

soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\phi(u, u) = \text{tr}(u^* \circ u)$

$u^* \circ u$ est symétrique diagonalisable.

soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\text{nb}^{2 \times 2}$ distincts.

$E(\lambda_j)$ Espace associé à λ_j v_j .

$\forall v \in E, v$ s'écrit $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$v_j \in E(\lambda_j)$, on sait q $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_i)$

et $i \neq j$.

$$\phi(u, u) = \text{Tr}(u^* \circ u)$$

$$\text{Tr}(u^* \circ u) = \text{Tr}(\mathbf{1}_M \circ M)$$

$$\text{DC } M = (M_{ij})_{ij}, \quad ({}^t MM)_{ij} =$$

$$= \sum_{k=1}^n M_{ki},$$

$$\text{Tr}({}^t MM) = \sum_{i=1}^n$$

$$\phi(u, u) = \sum_{ij} |u_{ij}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow M_{ij} = 0 \quad \forall i, j. \quad \underline{i.e.} u = 0.$$

$$\phi(u, u) = \text{Tr}(u^* \circ u).$$

$$\text{Tr}(u^* \circ u) = \text{Tr}({}^t M \cdot M)$$

$$d) \|u\|^2 = \phi(u, u) = \text{Tr}(u^* \circ u)$$

u est diagonal bte P $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
ss qd 2 à 2 distincts.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists P \text{ inversible tq } D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{dc bas } \mathcal{D} \text{ de } E \text{ tq bas } \underline{\text{unif}}. \end{array} \right.$$

$\text{Mat}_{\beta}(u) = A$ est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Mat}_{\beta}(u^*) = {}^t A}$$

$$\text{dc } \text{Tr}(u^* \circ u) = \text{Tr}({}^t A A) = \text{Tr}(A^2)$$

$$= \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

Trace : $\sum \alpha_i$

Review ex 5. fiche 3

$$\exists P \text{ tq } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On cherche B Sym \oplus tq

$$B^2 = A$$

soit λ une valeur de B ,

$$\exists v \neq 0, Bv = \lambda v$$

$$\beta^2 v = \gamma^2 v = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 \text{ est vp de } A.$$

$B \oplus \Rightarrow$ vp de B et racines carrees

\oplus de vp de A $\text{Spec}(B) \subseteq \{0, 3\}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \exists Q \text{ tq } E = Q^{-1}BQ.$$

$$(P^{-1}EP^{-1})^2 = P'E^2P^{-1}$$

$$\text{et } P'E^2P^{-1} = A$$

β_0

$$\text{et } \beta_0^2 = A$$

$$\text{Spec}(B) = \{0, 3\}, \exists Q \text{ tq } Q^{-1}BQ = E$$

$$B^2 = QE^2Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$$

$$PDP^{-1}$$

$$QDQ^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow P^{-1}QD = DP^{-1}Q$$

$\Leftrightarrow P^{-1}Q$ commutent $\Leftrightarrow PDP^{-1}$

soit $C(D)$ ss-type de mat ...

Comment $\nmid D$.

$$\text{dc } P^{-1}Q \in C(D), Q = PK$$

où $K \in C(D)$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} M$$

$$B = QEQ^{-1} = PKE(PK)^{-1}$$

$$B^2 = PKE^2(PK)^{-1}$$

$$= PKDK^{-1}P^{-1}$$

$$= PDKK^{-1}P^{-1}$$

$$= A.$$