T.D. M54.

Ex1 : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{C})$

a) Mq $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ & $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$

Mq $\ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ pdt scalaire standard.

a endomorphisme.

$a : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

soit $E \overset{= \mathbb{C}^m}{}$ un ensemble,

$\forall x \in E$, $x \in \ker A^*$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $\langle a^*(x), y \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall y \in E$, $\langle x, a(y) \rangle = 0$

$\Rightarrow x \in (\operatorname{Im} A)^\perp$

$\Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

$x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Mq $(\operatorname{Im} A)^\perp \subset \ker A^*$,

$\boxed{\operatorname{Im} A = \{\forall x \in \mathbb{C}^m, y = Ax, \forall y \in \mathbb{C}^n\}}$

$(\operatorname{Im} A)^\perp = \{y \in \mathbb{C}^m, \langle y, Ax \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n\}$

$\{y \in \mathbb{C}^m, \underbrace{\langle A^*(y), x \rangle = 0}_{A^* y = 0}, \forall x \in \mathbb{C}^n\}$

$\Leftrightarrow y \in \ker A^*$.

On a bien mqé $\ker A^* \supset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Par double inclusion, on a mqé $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Mq $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$ en utilisant l'égalité.

$\ker (A^*)^* = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

$(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$.

① $\ker A = \{x \in \mathbb{C}^n, \langle x, Ay \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{C}^m\}$

b) A, B hermitiennes $\Rightarrow A.B$ hermitiennes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(B $A = A^*$ hermitienne)

on a bien $A = A^*$, $B = B^*$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 5i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (AB)^* = B^* A^* = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AB \neq (AB)^*$

c) A, B unitaires $\Rightarrow AB$ unitaires.

$AA^* = I = A^* A$ $\quad BB^* = I = B^* B$.

$$A \cdot B (AB)^* = A\underbrace{BB^*}_{I}A^* = AA^* = I$$

d) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

. A inversible $\Rightarrow \exists A^{-1}$, $\det A \neq 0 \neq \det A^{-1}$

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$$

(2)

e) "A triangulaire $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$" de taille n mat.

Dém :

(I) $n = 1$, $\det(A_{11}) = a_{11}$ $\quad P_1$ est initialisé

(H) HDR spps $\exists k \in \mathbb{N}^*$, P_k vraie. $\leftarrow k \in [\![1, n-1]\!]$.

Mq P_{k+1}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 \cdots & & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,k+1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \\ 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

d'après HDR $\det(A) = a_{11} \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$

cl $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(Rq) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det(\mathrm{com}(A_{i,1}))$

A privé de $i°$ ligne & $1°$ col.

f) Mq $A+A^*$ est hermitienne.

soit $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})$

anti-hermi $A=-A^*$.

A pt ê décomposé en 2 matrices tq

mat carré

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^*)}_{\text{hermitienne}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^*)}_{\text{anti-hermitienne}}$$

soit $B = A+A^*$,

On a $B^* = (A+A^*)^* = A^* + A$

& $C^* = (A-A^*)^* = A^* - (A^*)^*$
$= A^* - A$
$= -(A-A^*)$

$(A.B)_{jj} = a_{jj}\, b_{jj}$
$(A.B)_{jl} = 0$ si $j=l$

idem écrire $(BA)_{jl}$.

g) $A.B = 0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dc $A.B=0 \not\Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A.B = 0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

h) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$.

i) A, B diagonales $\Rightarrow A.B = B.A$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$(A.B)_{j,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl}$$

A est diagonale si $a_{jk} = 0 \ \forall j \neq k$ / B diag si $b_{kl} = 0 \ \forall k \neq l$

$$(A.B)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kl} = \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} a_{jk}\, b_{kl}}_{0} + a_{jj}\, b_{jl}$$

$$= a_{jj}\, b_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ a_{jj}\, b_{jj} & \text{si } j = l \end{cases}$$

j) A.B triangulaire inf (resp. sup)

$\Rightarrow C = A.B$ triangulaire inf

et $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ pr $1 \leq i \leq n$

A, B triangulaire inf $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

or $a_{ik} \begin{cases} = 0 & \text{si } k < i \\ \neq 0 & \text{si } k \geq i \end{cases}$

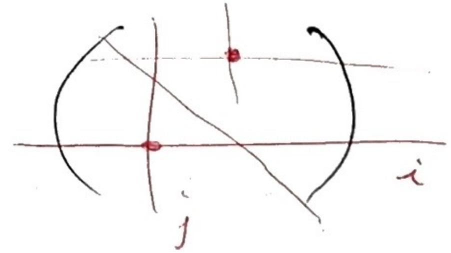
$b_{kj} \begin{cases} = 0 & \text{si } k > j \\ \neq 0 & \text{si } k \leq j \end{cases}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj}$$

* Pour $i > j \Rightarrow c_{ij} = 0$

Pour $i \leq j \Rightarrow c_{ij} \neq 0$

si $i = j$: $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.



k) A triangulaire ~~supérieure~~ inférieure

$\Longrightarrow A^{-1}$ triangul^{re} ~~supérieure~~ inférieure

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$

& $a_{ij} = 0$ si $j > i$.

(1) $$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in [\![1,\dots,n]\!]$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}, \quad x_2 = \frac{-a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j^{(1)}}{a_{kk}} \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$$

(k) $Ax = e_k$

$$\iff \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

Raisonnons par récurrence :

$j=1$: $a_{11} x_1 = 0 \iff x_1 = 0$

HDR supposons $\exists j \in [\![1, k-2]\!]$ tq $x_1, x_2, \dots, x_j = 0$

Mq $x_{j+1} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{j+1} a_{j+1,i}\, x_i = 0$$

D'après HDR, $a_{j+1,j+1} x_{j+1} = 0 \Longrightarrow x_{j+1} = 0$

cl :

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ki} x_i = 1 \Rightarrow a_{kk} x_k = 1 \Rightarrow x_k = \frac{1}{a_{kk}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & & 0 \\ \vdots & 1/a_{22} & & 0 \\ ? & \vdots & \ddots & 0 \\ & & & 1/a_{kk} \end{pmatrix}$$

l) Tte mat de rg 1 pt s'écrire comme $A = xy^*$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $rg(A) = 1$

D'où $A = [\alpha_1 U, \alpha_2 U, \dots, \alpha_i U, \alpha_n U]$

$A = U[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$

$U \in \mathbb{K}^n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $y = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$, $x = U$.

$A = xy^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⚠ $x^* y = \langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}$
$\in \mathbb{K}$.

Ex 2 a) Mq A est diagonalisable ssi elle possède n vect^Rs propres lin^t indep.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = SDS^{-1}$ et $D = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

~~(⇒)~~ et $Av_i = \lambda_i v_i$, $i \in [\![1, n]\!]$

(⇐) et $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$

On suppose $v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

alors $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ et $rg(S) = n$.

$\Rightarrow S$ inversible $\Rightarrow S^{-1}$ bien définie.

$\boxed{Av_i = \lambda_i v_i}$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in \mathbb{C}^n$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\boxed{AS = SD}$ alors $ASS^{-1} = SDS^{-1}$

$\neq DS$

$A = SDS^{-1} \Rightarrow A$ est diagonalisable.

($\Rightarrow$) On suppose $A = SDS^{-1}$

où S mat inversible (chgt de base)

D mat diagonale, $D = \text{diag}\{d_{11}, \dots, d_{nn}\}$

$$AS = SDS^{-1}S \Leftrightarrow AS = SD$$

cad $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$Av_i = d_{ii} v_i$ où v_i : la $i°$ colonne de S.

alors $d_{ii} = \lambda_i$: la $i°$ la vl^R propre $\leftrightarrow$ au vecteur colonne v_i q est le Vecteur propre associé à λ_i. $v_i \neq 0$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$rg(A) = n$ car S est inversible.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0 \in \mathbb{C}$

$v_1, \dots, v_n \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

$S = [v_1, \dots, v_n]$ de $rg(S) = n$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ st lin^t indep.

b) Mq si $\forall$ vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ st distincts $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

(H) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ les vp de A.

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_s)^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$$

$$(H) \Rightarrow \chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n).$$

On va mq A possède n vecteurs propres lin^t indep. Grâce à a) $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

?! Supposons par l'absurde que $v_1, v_2, \dots, v_k$ ($vp \leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$) st lin^t indep. (HH)

& que $\boxed{v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}$ où $\alpha_i \neq 0$ pr au moins un $i \in [\![1,k]\!]$

lui est dép^t

pr $k \in [\![1, n-1]\!]$

et ~~$\not{k}$~~ v_{k+1} vecteur propre de A et $Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A v_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i}$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i}$$

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} \underbrace{v_i}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow \underline{\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0} \Rightarrow v_{k+1}$ est lin^t ind

de $v_1, \dots, v_k$ $\boxed{c.q.f.c}$ $\not\Rightarrow$ (HH)

Vrai $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

c) Donner l'exemple d'une mat non ~~ne~~ diagonalisable.

@ bloc de Jordan $\quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$Av = \lambda v$

$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + v_2 \\ \lambda v_2 + v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_{n-1} + v_n \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \\ v_n = 0 \\ v_1 = \beta \end{matrix}$$

Donc $v = \beta e_1$ (dc et tous lin. indep)

Ex 4 Réducᵒⁿˢ mat particulières.

a) Rᵖ Th Schur. (thᵒ mat)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire $\begin{cases} UU^* = I = U^*U \\ U^* = U^{-1} \end{cases}$

& $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangl^e sup

$\Rightarrow A = UTU^*$

b) Mq A est normale ssi $\exists U$, D diagonale (vp) tq $A = UDU^*$.

A normale $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$.

$$AA^* \overset{\text{Th Schur}}{=} (UTU^*)(UTU^*)^*$$
$$= UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* = UTT^*U^*$$

$$A^*A \overset{\text{Schur}}{=} (UTU^*)^*(UTU^*)$$
$$= UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT^*TU^*$$

A normale $\Rightarrow UTT^*U^* = UT^*TU^*$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$

il faut mq TT^* est diagonale $\Rightarrow$ Par Récurrence.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj}}_{\text{élt } ij \ (TT^*)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{jk}}$$

une triangl^e supérieure.

Ex 4 Réducₒₛ mat particulières.

A^*A

Ex 6 SVD $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A^T = A^*$

$A = U\Sigma U^*$

a) calc VS de A :

→ $\det(A^TA - \lambda I) = 0$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2×3 3×2

$\cancel{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-\sqrt{3})$

$= \cancel{-(1-\lambda)(\lambda-2) - 1 = (-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = (\lambda-1)^2}$

SV from vp of A^TA : $\sigma = \sqrt{\lambda}$ → $\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

rg A = 2 car ordre mat carrée + grde inv = 2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

c) SVD : $A = U\Sigma V^T$

$\vec{vp}$: $\ker(B - Id)$: $\left|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ → $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ "w_1" $\left|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ → $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ "w_2"

$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $V = [v_1, v_2]$.

$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/3 \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$u_3 =$

Ex 4 Réducτ° mat particulières.

a) R° (Th) Schur. (thᵒ mat)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire $\begin{cases} UU^* = I = U^*U \\ U^* = U^{-1} \end{cases}$

& $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangl^re sup

$\Rightarrow A = UTU^*$

b) Mq A est normale ssi $\exists U$, D diagonale (up) tq $A = UDU^*$.

$\Longrightarrow$

A normale $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$.

$$AA^* \overset{\text{Th Schur}}{=} (UTU^*)(UTU^*)^*$$
$$= UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* = UTT^*U^*$$

$$A^*A \overset{\text{Schur}}{=} (UTU^*)^*(UTU^*)$$
$$= UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT^*TU^*$$

A normale $\Rightarrow UTT^*U^* = UT^*TU^*$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$

il faut mq TT^* est diagonale $\Rightarrow$ Par Récurrence.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj}}_{\text{elt } i,j \ (TT^*)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{jk}}$$

car triangl^re sup(?)

$\rightarrow$ mq (PR) $\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} T^*_{ik} T_{kj}$

$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} T^*_{ki} = ..$ si $i=j$

$\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \overline{T_{ik}} = ..$

$\sum_{k=1}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |T_{ki}|^2$

On vt mq $\sum_{k=1}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |T_{ki}|^2$

T trgl sup $T_{ij} = 0$ si $i > j$:

$$\boxed{\sum_{k=i}^{n} |T_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{i} |T_{ki}|^2}$$

P_n : T est diagonale, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

si $i=1$: $\sum_{k=1}^{n} |T_{1k}|^2 = |T_{11}|^2$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} |T_{1k}|^2 = 0 \Rightarrow T_{12} = \dots = T_{1n} = 0$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \ell \\ \ell+1 \end{matrix}$$

HDR : On suppose $\exists \ell \in [\![1, n-1]\!]$ tq $T_{ij} = 0$, $i > j$, $i \in [\![1, \ell]\!]$,

on a pr $i = \ell+1$,

$\sum_{k=\ell+1}^{n} |T_{(\ell+1)k}|^2 = \sum_{k=1}^{\ell+1} |T_{k(\ell+1)}|^2 = |T_{(\ell+1)(\ell+1)}|^2$, d'après HDR

$\Rightarrow |T_{(\ell+1)(\ell+2)}|^2 + \dots + |T_{(\ell+1)n}|^2 = 0$

$\Rightarrow T_{(\ell+1)(\ell+2)} = \dots = T_{(\ell+1)n} = 0$

et ie tte ligne i, de 1 jusqu'à n,
la mat T est diagonale lorsq A est mat normale.

($\Leftarrow$) On spps $\exists\, U$ (u), D diag $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
tq $A = UDU^*$ & $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$\lambda_i \in Sp(A)\ \forall i \in [\![1,n]\!]$

Calculons $AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*$

$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$

$A^*A = AA^* \Leftrightarrow D^*D = DD^*$

et $D^*D = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$

et $DD^* = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$.

Ainsi A est normale.

(Rq) mat (h) et (u) st cas particuliers de mat normale.

c) Mq A (h) ssi est diagonalisable ds base $\vec{vp}$ orthgnx & ssi (vp) st réelles.

($\Rightarrow$) On spps A (h) alors $A^* = A \Rightarrow$ A est normale. d'après (b)

$A = UDU^*$, $A^* = (UDU^*)^* = UD^*U^*$

or A est (h) d'où $UDU^* = UD^*U^*$

$\Leftrightarrow D = D^*$

$\Leftrightarrow \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$

$\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}\ \ \forall i \in [\![1,n]\!]$

Puis $A = UDU^* \Leftrightarrow AU = UD$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(u_{jk})$ $Au_j = \lambda_j u_j$, $j \in [\![1,n]\!]$

U (u) $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$

$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \|u_i\|_2 \|u_j\|_2$ $\begin{cases} \|u_i\| \|u_j\| & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow$ les $\vec{vp}$ st $\perp$.

($\Leftarrow$) On spps A est diagonalisable tq $A = UDU^*$
où U (u) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D diag $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

et (vp) $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in [\![1,n]\!]$.

& $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \|u_i\|_2 \|u_j\|_2$.

$A u_j = \lambda_j u_j$

$AU = UD \Rightarrow (AU)^* = (UD)^*$

$U^*A^* = D^*U^*$

$A^* = UD^*U^*$

$= UDU^* = A$

$\Rightarrow$ A est (h).

NB U (u) $\Leftrightarrow U^*U = I$

$\langle u_i, u_j \rangle = (\overline{u_{i,1}} \dots \overline{u_{i,n}}) \begin{pmatrix} u_{j,1} \\ \vdots \\ u_{j,n} \end{pmatrix} = \delta_{ij}$

d) Mq A (u) ssi diagonalisable ds base $\vec{vp}$ orthonormée & si (vp) ont pr module 1.

A (u) : $A^*A = Id = AA^* \Leftrightarrow A$ normale.

$\Leftrightarrow A = UDU^* \Leftrightarrow A^*A = (UD^*U^*)UDU^*$
$= UD^*DU^*$

$AA^* = UDD^*U^*$

$\Leftrightarrow D^*D = DD^* = I$

$\Leftrightarrow \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = Id$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \ |\lambda_i| = 1$.

Ex 6 Cas concret SVD

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(rv) SVD : $A = U\Sigma V^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \emptyset \\ & \ddots \sigma_r & \\ \emptyset & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ } unitaires

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} > 0 \quad i = 1, \dots, r \leq \min(m,n)$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 3 - 1 = 0$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma_1 = 1, \ \sigma_2 = \sqrt{3}$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2 = \#(\sigma_i \neq 0)$

$\vec{vp}$ de A^*A $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \left[\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\right]$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On a $\boxed{u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}}$ $\quad \sigma_i \neq 0$

car $A = U\Sigma V^* \Leftrightarrow AV = U\Sigma \Leftrightarrow U\Sigma = AV$

$Av_i = u_i\sigma_i \Leftrightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = 1\frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$U = [u_1, u_2, u_3]$ $\quad$ & $u_3 \perp u_1, u_2$ & $\|u_3\|_2 = 1$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$; $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\{u_3\}$

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1\rangle u_1 + \langle e_i, u_2\rangle u_2 .$$

$$p_G(e_1) = \langle e_1, u_1\rangle u_1 + \langle e_1, u_2\rangle u_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\0\\0\end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} u_2$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\0\\0\end{pmatrix}}.$$

$$\cancel{p_G(e_2) = \langle e_2, u_1\rangle u_1 + \langle e_2, u_2\rangle u_2}$$

$$\cancel{= \vec{0}_3 + \begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}}$$

mat des projecθs orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$:

$$\cancel{G = \begin{pmatrix}2/3 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\cancel{p_H(e_3) = \langle e_3, u_3\rangle u_3 + \langle e_3, u_2\rangle u_2}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

$$G = \begin{pmatrix}2/3 & 0 & 0\\1/3 & 1/2 & 0\\1/3 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$p_G(e_1) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1/3\\0 & 0 & -1/3\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$p_G(e_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$p_H(e_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$\in \mathrm{Ker}(A)$

$U = [u_1, u_2, u_3]$ & $u_3 \perp u_1, u_2$

$\|u_3\|_2 = 1$

On pose $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \langle u_3, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u_3, u_2 \rangle = 0 \\ \|u_3\|_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \end{cases}$

(2) $\Rightarrow -y = z$

(1) $-2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow u_3 = \text{Vect}\left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\|u_3\|}$

$\Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $U = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

idée : chercher $P_1 = u_1 u_1^* + u_2 u_2^*$ projec° orthog sur Im(A)

$P_2 = u_3 u_3^*$

∃ mat unit^res

$P_1 x \in \text{Im}(A)$

$P_2 z \in \ker(A)$

13

d) Déterminer les mat des projec°s orthogonales sur Im(A) & Ker(A).

$$\boxed{A = U \Sigma V^* = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^*}$$

(voir ex 1)

C'est une somme de matrices de rg 1.

On ① ② $\sigma_1 u_1 v_1^*$

$\sigma_2 u_2 v_2^*$

$\text{Im}(A) = \{ y = Ax \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$

$rg(A) = 2 = \dim(\text{Im}(A))$

$\dim(\ker(A)) = 1$.

de fille 3, lin^t indep

$\text{Im} A = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$

$\ker A = \text{Vect}\{u_3\}$.

En général, $\text{Im}(A) = \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$

$\ker(A) = \text{Vect}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$

On cherche $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$P^2 = P \rightarrow$ projec°

$P^* = P \rightarrow$ orthogonale (P hermitienne)

Ex5 $m,n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $\quad B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

$BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Mq λ vp $\neq 0$ de AB ⟹ λ vp $\neq 0$ de BA.

⟹) $\lambda \neq 0$, $ABv = \lambda v$, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

$ABv = \lambda v \iff BA\underbrace{Bv}_{w} = \lambda \underbrace{Bv}_{w}$

$w = Bv \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

w $\vec{vp}$ à λ vp de BA.

~~[illegible]~~

⟸) $BAu = \lambda u$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

u $\vec{vp}$ ⟺ à $\lambda \neq 0$,

$A\underbrace{BAu}_{} = \lambda \underbrace{Au}_{z}$

$ABz = \lambda z$.

b) si AB admet 0 c vp ⟹ BA aussi

$\lambda = 0$ vp de AB, $\exists x \neq 0$ tq

$ABx = 0x = 0 \in \mathbb{R}^m$.

b.1) $Bx \neq 0$:

$BA\underbrace{Bx}_{w} = B\vec{0} \leftrightarrow BAw = \vec{0}$ où $w = Bx \neq 0$

⟹ $\lambda = 0$ est ai vp de BA..

b.2) $Bx = 0$

$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m,\ y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}$

(i) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ ou (ii) $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)^\perp$.

A correspond à une AL $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \longmapsto a(x) \longleftrightarrow Ax$

$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m \Rightarrow$ a est surjective ⟹ donné $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$,

$\exists w \in \mathbb{R}^n$ tq $x = Aw$

$BAw = Bx = \vec{0}$ ⟹ $\lambda = 0$ vp de BA ⟺ $\vec{vp}$ w.

(ii) $\mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Im}(A)^\perp = \mathbb{R}^m$

$\mathrm{Im}\, A \subsetneq \mathbb{R}^m \iff$ a n'est pas surjective.

Th du rg :

$n = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{<m} + \underbrace{\dim(\ker(A))}_{> n-m \geq 0}$

⟹ $\ker A \neq \{0\}$

Donc a n'est pas injective.

⟹ $\exists y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ tq $Ay = 0 \in \mathbb{R}^m$.

$\ker(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

⟹ $BAy\ B\vec{0} = \vec{0}$

⟹ $\lambda = 0$ est vp de BA ⟺ $\vec{vp}$ $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Si $m < n \Rightarrow Sp(AB) \subsetneq Sp(BA)$

c) $m = 1, n = 2$; $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$A = [a_1\ a_2]$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\quad$ car $BAx = 0$

$\begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq 0 \\ b_1 a_1 \cdot b_2 a_2 - b_1 a_2 b_2 a_1 = 0 \end{cases}$

⟹ $BA \notin GL_n(\mathbb{R})$

⟹ $\det(BA) = 0$.

$A = [1\ 0]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$ABx = 1x = \lambda x$

⟹ $\lambda = 1 \neq 0$.

d) supp $m = n$; ed ens vp AB = ens vp BA.

$m = n$, $\lambda \neq 0$ (a) vp de AB ⟹ vp BA

$\lambda = 0$ (b) vp AB ⟹ vp BA.

⟹ $\lambda \in Sp(AB) \Rightarrow \lambda \in Sp(BA)$

$Sp(AB) \subset Sp(BA)$

$\#(Sp(AB)) = m$ et $\#(Sp(BA)) = m$ car $m = n$

dc $Sp(AB) = Sp(BA)$.

$AB = U_1 \Sigma_1 V_1^* \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$BA = U_2 \Sigma_2 V_2^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$m < n$

$\left.\begin{array}{l} U_1, V_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \\ U_2, V_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right\}$ unitaires

Décomposition en valeurs singulières

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Ex 7 Pptés base SVD.

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. $\quad rg(A) = r \le \overset{\min(m,n)}{\overset{\shortparallel}{p}}$

Soit la SVD de A : $A = U \Sigma V^* \Leftrightarrow U^* A V = \Sigma = diag(\mu_1, \dots, \mu_p)$

& $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \dots \ge \mu_r > 0 = \dots = 0$, $\quad \underbrace{\mu_{r+1} = \dots = \mu_p}_{p-r}$

si $m \ge n$: $\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ \hline & & 0 & \end{pmatrix}$

a) Mq $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$ & $A^t A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$

$U = [U_1, \dots, U_m]$ & $V = [V_1, \dots, V_n]$

$rg(U_i V_i^*) = 1$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

Mq $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$

soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ " " de $\mathbb{R}^n$.

$U = [U_1, \dots, U_m] =$

$\boxed{U = \sum_{i=1}^{m} U_i e_i^*}$

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & U_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & U_{2,m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \dots$$

$V = [V_1, \dots, V_n] = \sum_{i=1}^{n} V_i \varepsilon_i^*$

$\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad \boxed{\Sigma \varepsilon_i = \mu_i e_i} \in \mathbb{R}^m$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

SVD $A = U \Sigma V^*$.

$$\Sigma V^* = \Sigma \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \varepsilon_i^* \right)^*$$
$$= \Sigma \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i^* \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\Sigma \varepsilon_i V_i^* \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i e_i V_i^*$$

$A = U \Sigma V^* \Rightarrow A = U \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i e_i V_i^* \right)$

$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \underbrace{U e_i}_{U_i : i^e \text{ col de } U} V_i^*$

b) (ii) Mq $A^* A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$

$$A^* A = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^* \right)^* \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j V_j^* \right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i V_i U_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j V_j^* \right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i \mu_j V_i \underbrace{U_i^* U_j}_{\delta_{ij}} V_j^*$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 V_i V_i^*$$

c) Mq $Im(A) = Vect\{U_1, \dots, U_r\}$ et
$Ker(A) = Ker(A^*A) = Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$.

$Im(A) = \{u = Ax \in \mathbb{R}^m, \ x \in \mathbb{R}^n\}$

$\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ car $V_1, \dots, V_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A V_i$ | $U_i = \dfrac{AV_i}{\mu_i}$

$u = Ax = \sum_{i=1}^{r} x_i \mu_i U_i$

$= \sum_{i=1}^{r} (x_i \mu_i) U_i$

$\Rightarrow Im(A) = Vect\{U_1, \dots, U_r\}$.

(R) $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$, $A = U \Sigma V^*$

$U = [U_1, \dots, U_m]$, $V = [V_1, \dots, V_n]$

$\Sigma = diag(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots 0) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

$\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r$

$\mu_i U_i = AV_i$ $\qquad U_i = \dfrac{AV_i}{\sigma_i}$ $\qquad A = U\Sigma V^*$, $AV = U\Sigma$ (R)

Mq $Ker(A) = Ker(A^*A)$

(⊂) $x \in Ker(A)$, $Ax = 0 \Leftrightarrow A^*Ax = 0$
$\Rightarrow x \in Ker(A^*A)$

(⊃) $x \in Ker(A^*A) \Rightarrow A^*A x = 0$

$x^* A^* A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0$.

$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$

Mq $Ker(A) = Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$

$x \in Ker(A) \Rightarrow Ax = 0$

$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*\right) x = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\mu_i}_{>0} U_i \underbrace{(V_i^* x)}_{\in \mathbb{R}} = 0$ lin^{r} ind^{t} (orthonormée) unitaires

$\Rightarrow V_i^* x = 0$ pr $i \in [\![1, r]\!]$. si $x \in Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$

si $x = \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k V_k$, on a bien

$V_i^* x = \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k \underbrace{V_i^* V_k}_{\delta_{ik} = 0} = 0$.

$\Rightarrow Ker A \subset Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$

$n = dim(Ker(A)) + dim(Im(A))$

$n = (n-r) + r$

Dc pas slmt $Ker(A) \subset Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$ mais on a égalité.

(R) n°1 : $Ker A^* = Im(A)^\perp$ ici $A^* = A^t$
$Im A^* = Ker(A)^\perp$ car $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

d) Mq $Im(A^t) = Vect\{V_1, \dots, V_r\}$
$Ker(A^t) = Vect\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$.

$Im(A^*) = Ker(A)^\perp = (Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\})^\perp$
$= Vect\{V_1, \dots, V_r\}$.

$Ker(A^*) = Im(A)^\perp = (Vect\{U_1, \dots, U_r\})^\perp$
$= Vect\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$

e) Déterminer les matrices des projecteurs orthogonale sur $Im(A)$, $Ker(A)$, $Im(A^t)$, $Ker(A^t)$ à l'aide des $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ & des $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On a $\mathbb{K}^n = F \oplus F^\perp$, F (sev)

$P : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$
$x \longmapsto Px$

$Px = x$ si $x \in F$
$Px = 0$ si $x \in F^\perp$

Sinon projecteur orthogonale : $P^2 = P$ et $Im(P) = F$.
$P = P^*$

$\|U_i\|_2 = 1$ et $\langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij}$

$\boxed{P_i = U_i U_i^*}$: mat de rg 1.

si $x \in Vect\{U_i\}$ pr $i \in [\![1, r]\!]$

$x = \alpha U_i$

$P_i x = U_i U_i^* (\alpha U_i) = \alpha U_i = x$

$x \in Vect\{U_i\}^\perp \Rightarrow \langle U_i, y \rangle = 0$.

aussi $P_i^* = (U_i U_i^*)^* = U_i U_i^* = P_i$

$P_i^2 = U_i \underbrace{U_i^* U_i}_{I} U_i^* = U_i U_i^* = P_i$

$x \in Vect\{U_i\}^\perp \Rightarrow \langle U_i, x \rangle = 0$

$\Rightarrow x^* U_i = 0 = U_i^* x$

$P_i x = U_i \underbrace{U_i^* x}_{0} = 0$.

$F = Vect\{U_1, \dots, U_r\} = Im(A)$

$P = \sum_{i=1}^{r} P_i = \sum_{i=1}^{r} U_i U_i^*$

$P^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} U_i U_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{r} U_j U_j^*\right)$

$= \sum_{i,j=1}^{r} U_i \underbrace{U_i^* U_j}_{\delta_{ij}} U_j^* = \sum U_i U_i^* = P$

$P^* = \left(\sum_{i=1}^{r} U_i U_i^*\right)^* = \sum_{i=1}^{r} U_i U_i^* = P$

P est l'opér. de proj. orthog sur $Im(A) = Vect\{U_1, \dots, U_r\}$

$Im(A)^\perp = Ker(A^*) = Vect\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$

$P = \sum_{i=k+1}^{m} U_i U_i^* \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

• $P : \mathbb{K}^m \longrightarrow Im A = F = Vect\{U_1, \dots, U_r\}$

•• $P' : \mathbb{K}^m \longrightarrow F' = Vect\{U_{r+1}, \dots, U_m\} = (Im A)^\perp$

$(P')^2 = P'$ oui car $\left(\sum_{i=r+1}^{m} U_i U_i^*\right)\left(\sum_{j=r+1}^{m} U_j U_j^*\right) =$

$= \sum_{i,j=r+1}^{m} U_i \underbrace{U_i^* U_j}_{\delta_{ij}} U_j^* = \sum_{i=r+1}^{m} U_i U_i^* = P'$.

••• $P'' : \mathbb{K}^n \longrightarrow F = Ker(A) = Vect\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$.

$P'' = \sum_{i=r+1}^{n} V_i V_i^*$ vérifie que $(P'')^2 = P''$ & $(P'')^* = P''$

$P'' x = x$ si $x \in F''$

$P'' x = 0$ si $x \in F''^\perp$

:: $\tilde{P} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \tilde{F} = Ker(A)^\perp = Im(A^*)$

$= Vect\{V_1, \dots, V_r\}$

$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{r} V_i V_i^*$ & vérifie $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$, $\tilde{P}^* = P$

ou $\tilde{P} x = x$ si $x \in \tilde{F}$

$\tilde{P} x = 0$ si $x \in \tilde{F}^\perp$

TD 2 Normes & Conditionnement

Ex 2 Des nouvelles normes matricielles

a) Mq $\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, compatible avec les normes vectorielles $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.

Est-elle une norme subordonnée ?

Rq $\|A\|_F^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \neq \|A\|^2$ frobenius

Vérifier que c'est une norme :

1) $\|A\| \geqslant 0$ car c'est une Σ de termes $\oplus$ $\Rightarrow \geqslant 0$

$\|A\| = 0 \Rightarrow$ tous les $|a_{ij}| = 0 \Rightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = \sum_i \sum_j |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_i \sum_j |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|$.

3) $\|A + B\| = \sum_i \sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}| + |b_{ij}|$

$= \underbrace{\sum_i \sum_j |a_{ij}|}_{\|A\|} + \underbrace{\sum_i \sum_j |b_{ij}|}_{\|B\|}$

4) Sous-multiplicativité Mq $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$

$A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

$\|AB\| = \sum_i^m \sum_j^n \left| \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right|$

$\leqslant \sum_i^m \sum_j^n \sum_k^p |a_{ik}| |b_{kj}|$

posons $x = (|a_{ik}|)_{k=1}^{p} \in \mathbb{R}^p$ i fixé

$y = (|b_{kj}|)_{k=1}^{p} \in \mathbb{R}^p$ j fixé

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{p} |a_{ik}| |b_{kj}|$

et CBS $\langle x, y \rangle \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$

$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{p} x_k^2$, $\|x\|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|\right)^2$

$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$ car $\left(\sum_k |x_k|\right)^2 \geqslant \sum_k |x_k|^2$

TP 0

→ **Numpy** & tabl.

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ v = np.array([1,2,3])

$\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ w = np.arange(4)

len(v) : ...

$M=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}$ M = np.array([[0,1], [2,3], [4,5]])

mat à coeff réels M' = np.array([[0,1], [2,3], [4,5]], dtype = "float")

→ nbr dimensions

np.ndim(M) & np.shape(M)

↳ dimension M

np.size(M)

↳ nbr élts

w[0] # 1° élt w[1] # 2° élt w[-1] # der élt

M[0,1] # élt en ligne 1, colonne 2.

$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ v1 = np.ones(3)

$\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ v2 = np.zeros(3)

$\vec{v_3}=(0\ \ 0{,}1\ \ 0{,}2\ \dots\ 0{,}9)$ v3 = np.arange(0., 1., 0.1)

inclus ↑ ↑ exclus

$\vec{v_4}=(0.\ \ 0{,}11\ \ 0{,}22\ \dots\ 0{,}88\ \ 1.)$ v4 = np.linspace(0, 1, 10)

10 pts répartis UN entre 0 & 1

A1 = np.ones([3,4]) $A_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

A2 = np.zeros([3,4])

A3 = np.eye(3) $A_3=I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

x = np.linspace(0, 1, 5) ; y = np.linspace(1, 2, 5)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

$X=\begin{pmatrix}0&0.25&0.5&0.75&1\\0&\vdots&\vdots&\vdots&1\\0&&&&1\\0&\vdots&\vdots&\vdots&1\\&&&&1\end{pmatrix}$

$Y=\begin{pmatrix}1&&1\\1{,}25&&\\1{,}5&&\\1{,}75&&\\2&\dots&2\end{pmatrix}$

→ générer des mat aléatoire

$M=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&3\\4&-5\end{pmatrix}$

np.min(M)
np.sum(M) ~~np~~ M.sum(axis=0)
np.mean(M) # moyenne

Opéra°s usuelles s/ matrices

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ M = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])

b = 3*M # multiplie chq terme.

S = M+b # somma° terme à terme.

c = np.dot(M,b) # produit matriciel

${}^tM$ = np.transpose(M), M.T # ésigne transposée

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v = np.array([1,2,3])

${}^t\vec{V} = (1\ 2\ 3)$ v[np.newaxis].T

Résoudre des systèmes linéaires

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

x = np.linalg.solve(A,b) # sol° Ax = b.

vérifica° b = Ax ? np.dot(A,x)

Extraire ss-pies tblo NumPy. inclus/exclus

t = np.array([1,2,3,4,5,6])

t_1 = t[1:3] # de t[1] à t[2]

t_4 = [:-1] # tt sauf dernier élt.

t_5 = [1:-1] # tt sauf 1° & D° élt.

N = np.array([[0,1,2],[2,3,4],[4,5,6]])

N[0:2, 2]

2 premières lignes & 3° colonne de N.

Masque & tblo booléens

a = np.arange(6)**2 ; b = a<15 ; c = a[a<15]

[0 1 4 9 16 25] [True True True True False False] [0 1 4 9]

Redimensionner les tableaux

A = np.arange(6) A = [0,1,2,3,4,5]

B = A.reshape(3,2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Concaténer tableaux

tab1 = np.array([1,2]) tab2 = np.array([3,4])

tab3 = np.concatenate((tab1, tab2))

a = np.array([[1,2],[3,4]]) ; b = np.array([[5,6]])

M1 = np.concatenate((a,b), axis=0) # b est d° ligne

=1) # d° colonne

$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

2

→ on pt facilmt copier scalaires MS pas élt tblx !

b = np.zeros([2,2])

c = b.copy()

Évaluer f en plusieurs points

def f1(var):
 return (var-2)

x = [0 1/3 2/3 1]

y = [-2 -1,66 -1,33 -1]

n = 4

x = np.linspace(0,1,n) $y_i = f1(x_i)$ $0 \leq i \leq n-1$

y = f1(x) # y vectR de composantes

Mettre en œuvre fs manière vectorielle

y1 = np.cos(x) * np.exp(-x**2) + 2*(x-1)**2

y1 = [3 1,73.. 0,72 0,135..]

Save tblo Numpy en format texte ou binaire

a = np.arange(16).reshape(4,4)

np.savetxt("tblo.txt", a) ou binaire tblo.npy

c = np.loadtxt("tblo.txt")

np.save obligatR ou tblx dim >3.

Matplotlib

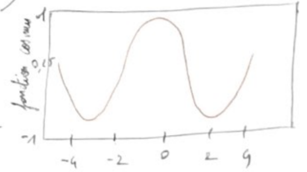
x = np.linspace(-5,5,100)

plt.plot(x, np.cos x)

plt.ylabel("f cosinus")

plt.xlabel("x")

plt.show() # ou que le plot ne se ferme pas



Options utiles :

color, line width, linestyle, label, legend, axis, yticks, xticks, title

f contour ou tracer isovaleurs f 2 variables.

def f1(x):
 return np.exp(np.sin(x))

f2 = lambda x: 1+np.cos(x)

N = 50

X = np.linspace(0,1,N+1)

f1X = f1(X)

f2X = f2(X)

plt.plot(X, f1X, 'bo', label="f1")

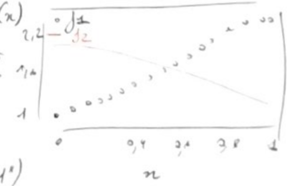
f2X 'r'

plt.grid(True, which="both")

plt.xlabel('x') ; plt.ylabel('f(x)')

3 plt.title("Les f f1 & f2") ; plt.legend() ; plt.show()

Les f f1 & f2



Matplotlib (Research)

SciPy (AL & stats)

```
M1 = np.array([[1,2], [3,4]])
sl.det(M1)      # Δ(M1)
sl.inv(M1)      # (M1)^-1

la, v = sl.eig(M1)
l1, l2 = la          # ss valeurs propres.
v1 = v[:,0]     # vp ↔ vp l1.
v2 = v[:,1]
```

$\|M_1\|_2$ sl.norm(M1) $\|M_1\|_1$ sl.norm(M1,1)

$\|M_1\|_\infty$ sl.norm(M1, np.inf)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

x = sl.solve(A, b)

y = A.dot(x) - b (teste du résultat).

Donc $\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \overset{CS}{\leq} \|x\|_2 \|y\|_2 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$

$\|x\|_1 \|y\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\right)\left(\sum_{l=1}^{p} |b_{kj}|\right)$

alors $\|AB\| \leq \sum_i^m \sum_j^n \left(\sum_k^p |a_{ik}|\,|b_{kj}|\right) \leq \sum_i \sum_j \left(\sum_k |a_{ik}|\right)\left(\sum_k |b_{kj}|\right)$

$\leq \underbrace{\left(\sum_i \sum_k |a_{ik}|\right)}_{\|A\|} \underbrace{\left(\sum_j \sum_k |b_{kj}|\right)}_{\|B\|}$

5) Compatible avec la norme vectorielle ?

On a $\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$,

$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |Ax|_i = \max \left|\sum a_{ij} x_j\right| \ldots$?

Mq $\|A\|_\infty \leq \|A\|$

$\|A\|_\infty \overset{def}{=} \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$ pr i_0 q

réalise le max sur les i $\leq \sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}| = \|A\|$ (1)

Alors puisque $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ (ok)

$\leq \|A\|\,\|x\|_\infty$

ok compatible avec norme vectorielle $\|\cdot\|_\infty$.

→ Même démarche pr $\|\cdot\|_1$.

$\|A\|_1 \leq \|A\|$ mm calculs

$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1 \leq \|A\|\,\|x\|_1$

ok compatible avec norme vectorielle $\|\cdot\|_1$.

→ Norme 2 ?

$\|Ax\|_2 \leq \|A\|\,\|x\|_2 \leq \|A\|_S \|x\|_2$

$\boxed{(\|A\|_2 \leq \|A\|_S)}$ ex 1

$\|A\|_S^2 = \sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}|^2$

et $\|A\|^2 = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|\right)^2 \geq \sum\sum |a_{ij}|^2 = \|A\|_S$

ok compatible avec norme vectorielle $\|\cdot\|_2$.

6) $\|A\|$ subordonnée ?

$$\|A\| \overset{def}{=} \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$\|I\| = 1$ si $\|A\|$ subordonnée.

Or ici $\|I\| = \sum_i \sum_j |\delta_{ij}| = n \neq 1$. (ici $m=n$)

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv & $\|\cdot\|$ norme vectorielle.

Mq $\|x\|_M = \|Mx\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|x\|_M \overset{def}{=} \|Mx\|$

- $\|x\|_M = 0 \Rightarrow \|Mx\| = 0 \Rightarrow x = 0$ car M inv
- $\|x\|_M \geq 0 = \|Mx\| \geq 0$.
- $\|\lambda x\|_M = \|M(\lambda x)\| = |\lambda| \, \|Mx\| = |\lambda| \, \|x\|_M$
- $\|x+y\|_M = \|M(x+y)\| = \|Mx + My\| \leq \|Mx\| + \|My\|$
$= \|x\|_M + \|y\|_M$.

Déduire $\|A\|_M = \|MAM^{-1}\|$ pr les normes mati. subordonnées.

$$\|A\|_M \overset{def}{=} \max_{\|x\|_M = 1} \|Ax\|_M$$ (p déf° norme matr. subord).

$$\|A\|_M = \max_{\|x\|_M=1} \|Ax\|_M = \max_{\|Mx\|_M} \|MAx\|_M$$

$$= \max_{\|y\|=1} \|MAM^{-1}y\| = \|MAM^{-1}\|$$

on posant $y = Mx \Rightarrow M^{-1}y = x$.

c) Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ & $\mathbb{K}^m$.

Mq $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ déf. une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ & compatible av $\|\cdot\|$.

(P) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ si $x \neq 0$.

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ (★)

$\Rightarrow \|A\| > 0$ & (★) vrai pr $x = 0$. or $\|Ax\| \geq 0$ (nv)

(H) $\|\lambda A\|$ & (I) $\|A+B\|$ idem

(SM) sous-multiplicativité $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$?

$$\|AB\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}, \quad \|A\underbrace{Bx}_{y}\| \leq \|AB\| \, \|x\|$$

$$\Rightarrow \|AB\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|A\| \, \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \sup \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \, \|B\|$$

Ex1 Équivalences de normes sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

a) Mq $\|A\|_2 \leq \|A\|_S \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

$\to \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j \left(\sum_i a_{ji}^* a_{ij}\right)$

$= \sum_j (A^*A)_{jj} = \underline{\operatorname{tr}(A^*A)}$

$|a_{ij}|^2 = \overline{a_{ij}} \cdot a_{ij} = a_{ji}^* a_{ij}$.

$\Rightarrow \|A\|_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$.

$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \mu_1^2$

$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \|A\|_S \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$

$\hookrightarrow \underset{\|}{\mu_1^2} \leq \underset{\|}{\sum \mu_i^2} \leq \underset{\|}{n\mu_1^2}$

$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_S^2 \leq n\|A\|_2^2$

b) $\|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\,\max_{i,j}|a_{ij}|$?

$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j \underbrace{\max_{i,j}|a_{ij}|^2}_{\text{indep. de } i \,\&\, j} = mn \max_{i,j}|a_{ij}|^2$

$\max_{i,j}|a_{ij}| \leq \|A\|_2$?

$\exists\, i_0, j_0$ tq $\max|a_{ij}| = |a_{i_0,j_0}|$

On sait que $\|\cdot\|_2$ est compatible à norme vectorielle.

$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$ car $\underline{mm}$ compatible $\forall x \in \mathbb{K}^n$.

soit $x = e_{j_0}$ où $e_i = (0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},0,\dots,0)$ base canoniq de $\mathbb{K}^n$

$\|Ae_{j_0}\| \leq \|A\|_2 \cdot 1$

$\|Ae_{j_0}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij_0}|^2 \geq \max_i |a_{ij_0}|^2 = |a_{i_0,j_0}|^2$

$|a_{i_0,j_0}| \leq \|A\|_2$.

c) $\|A^*\|_1 = \|A\|_\infty$

On a $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i^{m} |a_{ij}|$

Or $\|A^*\|_1 = \max_j \sum_i |a^*_{ij}| = \max_j \sum_i |a_{ji}| = \|A\|_\infty$

d) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$

D'abord $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_S^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \leq m \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}|^2$$

pour i_0 q réalise le max

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 \leq m \max_i \sum_j |a_{i_0 j}|^2 \leq m\left(\max_i \sum_j |a_{i_0 j}|\right)^2 = m\,\|A\|_\infty .$$

Puis mq $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2$.

$\|\cdot\|_2$ nm compatible 4 nv : $\cancel{\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2}$ nm S

$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$: prendre x tq $\|x\|_2 = \sqrt{n}$

soit $x_j = \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}$ pr $j = 1, \dots, n$ & $x_j = 0$ si $|a_{ij}| = 0$.

i_0 tq $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|$

$$\|x\|_2^2 = \sum_j x_j^2 = \sum_j \left(\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}\right)^2 = n$$

$\sum_i \overline{y_i}\, x_i = \langle x, y \rangle$ ℂ

$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$

$$\|Ax\|_2 = \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big\|_2$$

← vecteur dt la i° composante est $\sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i$

car $\vec{z}\cdot\vec{z} = |z|^2$. si ℝ : $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$

$$= \Big\|\sum_j^{n} a_{ij} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}\Big\|_2$$

$$= \Big\|\sum_j^{n} |a_{ij}|\Big\|_2$$

$$\sum \left(\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}\right)^2 = \sum \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} \cdot \frac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|}$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_i^{m} \Big(\sum_j^{n} |a_{ij}|\Big)^2 \geq \Big(\max_i \sum_j |a_{ij}|^2\Big) = \|A\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \underbrace{\|x\|_2}_{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2$$

c) d) pour A^* & 4 c)

Mq $\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_1$.

(d) 4 $B = A^*$.

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|B\|_\infty \leq \|B\|_2 \leq \sqrt{m} \|B\|_\infty$$

$$\|A\|_1 \qquad \|A\|_2 \qquad \|A\|_1$$

car $\|A\|_2 = \rho(A^*A) = \rho(AA^*) \Rightarrow \|A\|_2 = \|A^*\|_2$

Ex 4 (Th de Eckart-Young) — SVD

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $rg(A) = r \leq p = \min(m,n)$.

$A = U \Sigma V^*$, $\begin{cases} U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{cases}$ unitaires.

$\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = diag(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$

$\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U_i \mu_i V_i^* = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^*$$

On pred $B_k = \sum_{i=1}^{k} \mu_i U_i V_i^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

$1 \leq k < r$ la meilleure approx de A tq

$\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de $rg(B) = k$.

$$\mu_{k+1} = \|A - B_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$$

a) Mq $rg(B_k) = k$ puis mq $\|A - B_k\|_2 = \mu_{k+1}$.

$rg(B_k) = \dim(\mathrm{Im}(B_k))$

$\mathrm{Im}(B_k) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid y = B_k x \in \mathbb{C}^m\}$

$B_k x = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i U_i (\underbrace{V_i^* x}_{})\right)$

$\langle x, V_i \rangle = \alpha_i \in \mathbb{C}$ à i fixé

$B_k x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \alpha_i U_i$

$B_k x$ est une CL des $U_1, \dots, U_k$.

$\Leftrightarrow B_k x \in \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_k)$ car $U_1, \dots, U_k$ orthonormées.

$\mathrm{Im}(B_k) \subset \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_k)$.

$rg(B_k) \leq k$.

$U_1 V_1^* \neq U_2 V_2^* \neq \dots \neq U_k V_k^*$.

& on n'a pas $U_i V_i^* = U_j V_j^*$ $1 \leq i, j \leq k$.

et $\mu_1 > 0$ car $k < r$,

Donc $rg(B_k) = k$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Vect}\{U_1, \dots, U_k\}$

Puis $A - B_k = \sum_{i=k+1}^{r} \mu_i U_i V_i^* \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

$D = \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-r})$

$\Rightarrow A - B_k = U D V^* \Longrightarrow$ ce n'est pas une SVD à cause du rgt des VS.

$\|A - B_k\|_2 = \|U D V^*\|_2$

$\|A - B_k\|_2 = \|D\|_2 = \mu_{k+1}$ (rayon spectral)

car $\|UC\|_2 = \|C\|_2$ unit^re ⚠

$\|CU\|_2 = \|C\|_2$.

b) soit $z \in \mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_{k+1}\}$ non nul.

Mq $\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2$.

$z = \sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i$, on calcule Az

$Az = \sum_{i=1}^{k+1} z_i A V_i$

$Az = U \Sigma V^* z$

$\|Az\|_2 = \|U \Sigma V^* z\|_2$

26

$Az = U\Sigma V^* z$

$\|Az\|_2 = \|U\Sigma V^* z\|_2 = \|\Sigma V^* z\|_2$

$$V^* z = V^*\left(\sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} z_i \underbrace{V^*}_{\text{mat}} \underbrace{V_i}_{\text{vecteur}}$$

$V = [V_1, \dots, V_n]$; $V^* = \begin{bmatrix} V_1^* \\ \vdots \\ V_n^* \end{bmatrix}$

⚠ ce n'est pas $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

$$V^* V_i = \begin{pmatrix} v_1^i \\ \vdots \\ v_n^i \end{pmatrix}$$

$v_j^i = V_j^* V_i$, $1 \leq j \leq n$
$= \delta_{ij}$

$$\underbrace{V^* z}_{\text{vecteur}} = \sum_{i=1}^{k+1} z_i e_i$$

car $z = \sum_{i=1}^{k+1} z_i V_i$

$z = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{z}_i e_i$

⚠ $V^* z \neq \sum_{i=1}^{k+1} z_i \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\|Az\|_2} = \|\Sigma V^* z\|_2$$
$$= \left\| \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i z_i e_i \right\|_2$$
$$\geq \left\| \mu_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z_i e_i \right\|_2$$
$$= \boxed{\mu_{k+1} \|z\|_2}$$

$\Rightarrow \boxed{\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2}$ (*)

$\mu_1 > \dots > \mu_{k+1} > \dots > \mu_n > 0 \dots$. $Vz \in \mathrm{Vect}\{V_1, \dots, V_k\}$

c) soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de rg k, $z \in \mathrm{Ker}(B)$.
Estimer $\|Az\|_2$ en f $\|A-B\|_2$ puis mq
p l'absurde $\|A - B_k\|_2 \leq \|A-B\|_2$ afin de conclure

$z \in \ker(B)$: $Bz = 0$.
$rg(B) = k < r$

$$\dim(\ker(B)) = \underset{\substack{\| \\ \min(m,n)}}{p} - k > p - r \geq 0$$

$\Rightarrow \dim(\ker(B)) > 0$, $z \neq 0$ tq $Bz = 0$.

$$\|Az\|_2 = \|(A-B)z\|_2 \overset{\text{compatibilité}}{\leq} \|A-B\|_2 \|z\|_2$$

nV & n compat

Mq par l'absurde $\|A - B_k\|_2 \leq \|A-B\|_2$.
On spps p (?!) $\|A - B\|_2 < \|A - B_k\|_2$ (**)

si $z \in \mathrm{Ker}(B)$ alors $\|Az\|_2 \leq \|A-B\|_2 \|z\|_2$
$\leq \|A - B_k\|_2 \|z\|_2$
$= \mu_{k+1} \|z\|_2$.

(~~***~~) $\|Az\|_2 \leq \mu_{k+1} \|z\|_2$

27

On a si $z \in Ker(B)$ alors
$\|Az\|_2 \leq \mu_{k+1} \|z\|_2$.

soit $z \in ker(B) \cap \underbrace{Vect\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}\}}_{rg = k+1}$

$z \neq 0$?

soit $ker(B) = \{W_1, \dots, W_\ell\}$, $\ell = p - k > 0$.

z est une CL de $W_1, \dots, W_\ell, V_1, \dots, V_{k+1}$.
(⊕ au rg).

Or $\underbrace{\ell}_{p-k} + k + 1 > p \Rightarrow$ C'est une famille non-libre.

$$z = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i W_i = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j V_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i W_i - \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j V_j = 0$$

Donc au moins 1 des β_i ou des α_j est non nul. $\Rightarrow z \neq 0$.

Mais $\|Az\|_2 < \mu_{k+1} \|z\|_2$.
est en contradict° de (★)
$\|Az\|_2 \geq \mu_{k+1} \|z\|_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{C!!C}$ engendré par (★★)

Ex 3 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inv, $B \approx A^{-1}$, $X = I - AB$,
sppo $\|X\| < 1$.

Mq $\|A^{-1} - B\| \leq \dfrac{\|BX\|}{1 - \|X\|}$

CV Von Neumann $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ CV ssi $\rho(A) < 1$
$(\|A\| < 1)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = (I - X)^{-1} \quad \text{car } \|X\| < 1$$

$I - X = AB \iff A^{-1}(I - X) = B$ car A inv.

$$A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right) = B(I + X^2 + \dots + X^n + \dots)$$

$$A^{-1} - B.I = B \sum_{k=1}^{\infty} X^k = B(X + \dots + X^k + \dots)$$
$$= BX(I + X \dots + X^{k-1} + \dots)$$
$$= BX\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)$$

$$\|A^{-1} - B\| \underset{\text{ss-multip}}{\overset{\triangle\text{I}}{\leq}} \|BX\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|X^k\|\right) \leq \|BX\| \sum_{k=0}^{\infty} \|X\|^k$$

$$\leq \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}$$

car $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in]0,1[$, $x = \|X\|$

Ex6 Conditionnem^t de la mat laplacien'

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{intro} \quad \begin{cases} -\partial_{xx} u(x) = f(x) & , x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$L = -\partial_{xx}$ opérat^{r} lin'r dit de Laplace de dim ∞.

Approx^{o} de L : opérat^{r} linéaire de dim finie

matrice $\leftarrow A$.

a) Calculer $\det(A_n) = n+1$ PR.

b) $V_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ & $v_i = \sin\left(\dfrac{k\pi i}{n+1}\right)$

$$\lambda_k = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right).$$

Vérifier $\underset{\text{Écrire ligne p ligne}}{A v_k = \lambda_k v_k}$, $\forall k, 1 \le k \le n$.

ff trigo ⚠ 1° & D° ligne.

c) cal rayon spectral A , puis son condit. en $\|\cdot\|_2$.

$$\rho(A) = \max_{1\le k\le n} |\lambda_k| = \|A\|_2 .$$

$\to$ les vp de st réelles car $A^T = A$.

A est déf $\oplus$ $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\langle Ax, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$.

ici $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$

$\Rightarrow 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

car $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \lambda_k = 2\underbrace{\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}_{>0} < 1$$

$$\max \lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$$

29 $\quad \text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

a) $\det(A_{n+1}) = 2\det(A_n) + 1 \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \\ & & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2\det(A_n) - \det(A_{n-1})$

$= 2(n+1) - n = n+2$ (PR).

b) $AV_k = \lambda_k V_k$; $V_k = \left(\sin \frac{k\pi i}{n+1}\right)_{i=1,\dots,n}$

$2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$

$i \in [\![2, n-1]\!]$:

$(AV_k - \lambda_k V_k)_i =$

$= -\sin(\underbrace{(i-1)kh}_{\alpha-\beta}) + 2\sin(ikh) - \sin(\underbrace{(i+1)kh}_{\alpha+\beta})$

$- 2(1-\cos(kh))\sin(ikh)$

$\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2} = \sin\alpha \cdot \cos\beta$

$\alpha = ikh$, $\beta = kh$.

$= -2\sin(ikh)\cos(kh) + 2\sin(ikh) - 2\sin(ikh)$
$+ 2\cos kh \sin ikh$

$= 0$

Donc $AV_k = \lambda_k V_k$ $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$

$\underline{i=1}$: $(AV_k - \lambda_k V_k)_1 = 2\sin kh - \sin(2kh)$
$- 2\sin kh + 2\cos kh \sin kh$:

$\underline{i=n}$ $(AV_k - \lambda_k V_k)_n = -\sin(n-1)kh + 2\sin nkh$
$- 2\sin nkh + 2\cos kh \sin(nkh)$

$\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ où $\alpha = nkh$, $\beta = kh$.

c) $\rho(A) = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k| = 2\max\left(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$

$= 2\left(1-\cos\underbrace{\frac{n\pi}{n+1}}_{\text{proche}\ -1}\right)$

$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}\ \|A^{-1}\|_2 = \lambda_n$

$\lambda_n = \lambda_{max}(A)$

$\frac{1}{\lambda_1} = \lambda_{max}(A^{-1}$

$A = SDS^{-1}$ car A est $\underline{\text{sym}}$.

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

S $\underline{\text{inv}}$

$A^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$

$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_n}, \dots, \frac{1}{\lambda_1}\right)$

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$$
$$= \sqrt{\rho(A^*A)}\, \|A^{-1}\|_2$$
$$= \sqrt{\rho(A)^2}\, \sqrt{\rho(A^{-1})^2}$$
$$= \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$$

A est déf ⊕ , $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
> 0 si $x \neq 0$.

$\Rightarrow \lambda_k$ st réelles & positives.

$h = \frac{\pi}{n+1}$

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{\cancel{2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right)}{\cancel{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\right)} = \frac{1-\cos nh}{1-\cos h}$$

or $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$$\frac{1-\cos nh}{1-\cos h} \simeq \frac{(nh)^2}{h^2} = O(n^2)$$

Ex 7 Déterminant & conditionnement

soit $n \geq 2$

$A = \mathrm{diag}(1, 10, \dots, 10)$

a) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq A). Calculer en f de n le dét & le cond en norme $\|\cdot\|_\infty$ de A.

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = 10.$$

$$\mathrm{cond}_\infty = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty = 10 \times 1 = 10$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 10$$

$A^{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 1.$

$\Rightarrow \mathrm{cond}_\infty(A) = 10$ et $\det(A) = 10^{n-1}$

b) idem à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ déf par :

$$\begin{cases} b_{i,i} = 1 & 1 \leq i \leq n \\ b_{i,i+1} = 2 & 1 \leq i \leq n-1 \\ b_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

~~$\det(B_1) = \det([1]) = 1$~~

~~$\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$~~

~~$\det(B_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

B_n ◸ $\Rightarrow \det(B_n) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = 1$

$\| B_n \|_\infty = 3$

$\| B_n^{-1} \|_\infty$

$\underline{n=2}$

$$\underline{B_2^{-1} B_2 = I_2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B_3^{-1} B_3 = I_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $a_{ii} \Rightarrow \frac{1}{a_{ii}}$ ds ◸ $(◸)^{-1}$

$$\Rightarrow B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{i \geq 1}$

$\underline{i^{e} \text{ diag}} = (-1)^i \times 2^i$

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-1)^{n-1} 2^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 4 \\ & & & \ddots & -2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-1)^{m-1}2^{m-1} \\ \hline & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 4 \\ \emptyset & & & & -2 \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & c^T \\ \hline 0 & B_{m-1}^{-1} \end{array}\right)$$

PR vrai au rg $m-1$.

$$B_m = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_{m-1} \\ 0 & \end{array}\right), \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1}$$

$$I = B_m B_m^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^T \\ \hline \emptyset & B_{m-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & c^T \\ \hline \emptyset & B_{m-1}^{-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_{m-1} \end{array}\right)$$

$c = ?$ $\begin{cases} 1 = 1 \\ c^T + b^T B_{m-1}^{-1} = 0 \end{cases}$

$$c^T = -b^T B_{m-1}^{-1} = [-2, 0 \ldots 0] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{m-2} \\ & \ddots & \ddots & & 4 \\ & & & & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T = [-2, 4, -8, \ldots, (-2)^{m-1}] \Rightarrow (P_m).$$

ok : vrai $\forall\, m \geq 2$.

$$\|B_m\|_\infty = 3$$

$$\|B_m^{-1}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}^{-1}| = \sum_{j=0}^{m-1} 2^j = \frac{1-2^m}{1-2} = 2^m - 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{cond}_\infty(B) = 3(2^m - 1).$$

Ex 8 idée

$$Ax = b$$
$$Ay = b + \delta b$$

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

33 $\det(A) = 10^{-6}$, $\operatorname{cond}_\infty(A) = \operatorname{cond}_2(A) = 10^6$.

Exo 9 Conditionnement du pb de l'inversion d'une matrice

$\underline{A \text{ inv}}$, $B = A + \delta A$.

a) Mq $\dfrac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq \text{Cond}(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$B^{-1} - A^{-1} = (A^{-1}A)(B^{-1} - A^{-1})(BB^{-1})$$
$$= A^{-1}(AB^{-1} - I)(BB^{-1})$$
$$= A^{-1}(A - B)B^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|A^{-1}(A-B)B^{-1}\|$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| \, \|A - B\|$$

or $A - B = -\delta A$

$$\Rightarrow \frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \text{con}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

b) si $\|\delta A\| \leq \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|} \Rightarrow A + \delta A$ inv & ($\|A^{-1}\delta A\| \leq \frac{1}{2}$, $2\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$)

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + 2\,\text{cond}^2(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)^2$$

$$A + \delta A \overset{\text{inv}}{=} A(I + \underbrace{A^{-1}\delta A}_{-X}) = A(I - X).$$

$\xrightarrow{\text{Th de Nm et hyp vérif}}$ $\|(I-X)^{-1} - I\| \leq \dfrac{\|+X\|}{1 - \|+X\|} = \dfrac{\|-A^{-1}\delta A\|}{1 - \|-A^{-1}\delta A\|} \leq \dfrac{\|A\| \, \|A^{-1}\| \, \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$

$$= \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} - \frac{1}{\|A^{-1}\delta A\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} - \frac{\|A\| \, \|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\| \, \|\delta A\|}$$

b) A inv, mq $A+\delta A$ inv.

si $\|\delta A\| \leq \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|}$, $A+\delta A = A(I\overset{-X}{+A^{-1}\delta A})$

$$\|X\| = \|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| \leq \cancel{\|A^{-1}\|}\frac{1}{2\cancel{\|A^{-1}\|}} = \frac{1}{2}$$

Th Von Neumann

si $\|X\| < 1 \Rightarrow \sum X^k = (I-X)^{-1} \Rightarrow I-X$ inv

$\Rightarrow A+\delta A$ inv car A & $I-X$ st inv.

$$(A+\delta A)^{-1} - A^{-1} \ldots\ldots$$

$$= (A+\delta A)^{-1}\left[I - (A+\delta A)A^{-1}\right]$$

$$= (A+\delta A)^{-1}\left[\cancel{I} - \cancel{I} - \delta A.A^{-1}\right]$$

$$= -(A+\delta A)^{-1}\delta A.A^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|(A+\delta A)^{-1}\|\,\|\delta A\|$$

$$= \|(A(I-X))^{-1}\|\,\|\delta A\|$$

$$= \|(I-X)^{-1}A^{-1}\|\,\|\delta A\|$$

$$\leq \|(I-X)^{-1}\|\,\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| * \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\leq \|(I-X)^{-1}\|\,\mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Or $\|X\| \leq \frac{1}{2}$ par Von Neumann.

$$\|(I-X)^{-1}\| \overset{V.N}{=} \Big\|\sum_{k\geq 0} X^k\Big\| \leq \sum_{k\geq 0}\|X^k\|$$

$$\leq \sum_{k\geq 0}\|X\|^k \leq \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\alpha \leq \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big(\sum_{k\geq 0}\|X\|^k\Big)$$

$$= \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big(1 + \sum_{k\geq 1}\|X\|^k\Big) = \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big(1 + \|X\|\sum_{k\geq 0}\|X\|^k\Big)$$

$$\leq \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\Big(1 + 2.\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\frac{\|A\|}{\|A\|}\Big)$$

$$= \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + 2\,\mathrm{cond}^2(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)^2$$

TD-3 - $\boxed{M}$ Directes de Résolution de systèmes linéaires

Ex 1

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$A^{(1)}$ (b^{1})

2) Résoudre p. $\boxed{M}$ EG (S) $Ax = b$ en $k \in \{1,2,3\}$

→ préciser $A^{(k+1)}$ & $b^{(k+1)}$ tq $A^{(k+1)} X = b^{(k+1)}$

→ donner $L^{(k)}$ tq $A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$

Algo Gauss

Pour $k = 1$ à $n-1$

$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}$

$b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}$

soustraire à la (i° équation) la k° équation × l_{ik} ($i = k+1, \dots, n$).

$l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & \\ & -l_{ik} & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=1}$

$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -2 & 1 & & \\ +2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$, $b^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=2}$

$l_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \boxed{-1}$

$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, $b^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=3}$

$l_{i3} = \dfrac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = 3$, $L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= U$

36

$(-1)(-2) - 1 = 1$

$A^{(4)}X = A^{(4)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b^{(4)}$

$\underline{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

$AX = b \quad . \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

Pour $i = n-1$ à 1 de pas -1

$x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right)$

$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$

$t = -2$

$z = (-5-t)/3 = 1$

$y =$

$x =$

$A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)}$

$A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)} = L^{(2)}L^{(1)}A^{(1)}$

$A^{(4)} = L^{(3)}A^{(3)} = L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A^{(1)}$

$U = \underbrace{L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}}_{L^{-1}} A \qquad A = LU \Leftrightarrow U = L^{-1}A.$

$\Rightarrow L = \left(L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}\right)^{-1} = \left(L^{(3)}\right)^{-1}\left(L^{(2)}\right)^{-1}\left(L^{(1)}\right)^{-1}$

$\left(L^{(i)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & l_{ki} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 0 & 1 & \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(L^{(i)}\right)^{-1}\left(L^{(j)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & l_{ki} \quad l_{kj} & \\ & & \end{pmatrix}$

$A = LU$

$\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{1} \cdot \underbrace{\det(U)}_{\prod_{i=1}^{n} u_{ii}} = -6.$

Ex 3 Complexité calcul déterminant

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\qquad c(n)$ = coût calcul de $\det(A)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \, \underbrace{cof(i_0, j)}_{(-1)^{i_0+j}}$$

mat à lig^ne^ on enlève ligne i_0 & colonne j de A.

a) Mq $C(n) \geqslant n!$ $\forall n \geqslant 2$.

$\underline{n=2}$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - b \cdot c \Rightarrow 2 \times$ & $1 +$

$$c(2) = 3 \geqslant 2!$$

spps vrai $c(n) \geqslant n!$ pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_{i_0 j} \, \underbrace{cof(i_0, j)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

$$c(n+1) \geqslant (n+1)\, c(n) \geqslant (n+1)\, n! = (n+1)!$$

Donc $\forall n \geqslant 2$, $c(n) \geqslant 2$.

b) on suppose ordi effectue 10^9 opé / s ; déterminer minorant tps calcul nécess^re^ pr calcul det de $n = 20$.

$n = 20$, $c(20) \geqslant 20!$

$$t_p \geqslant 20! \, 10^{9} \simeq 2{,}43 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-9} \simeq 77 \text{ années}$$

$$\det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$A = LU \simeq \mathcal{O}(n^3)$ opérations élmtres

$\frac{2}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ $\qquad \underline{op\ él.}$

$$c(n) = \frac{2}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2) + n + 1.$$

$$c(20) = \frac{2}{3}(20^3) \cdot 10^{-9} s = \frac{2}{3} 8 \cdot 10^3 10^{-9} s \simeq 5{,}2 \cdot 10^{-6} s.$$

Cramer

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{b_1 | a_{1i}} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n | a_{ni} & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad i \in [\![1, n]\!]$$

$(n+1)$ $\underline{\det \text{ à calculer}} \geqslant (n+1)!$

$$c(n) \geqslant n!$$

Ex4 Étude de complexité algorithmique

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inv. $\qquad A = LU$

$A^{-1} = [x_1, \dots, x_n]$ où $x_i \in \mathbb{R}^n$.

$AA^{-1} = I \iff \underbrace{Ax_i = e_i}_{\text{base canoniq.}} \quad i \in [\![1, n]\!]$

1) Résoudre successivt n systèmes p $\boxed{M}$ PDG

n fois $Ax_i = e_i$.

Gauss $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ pr $Ax = b$.

coût : $n \times \left(\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)\right) = \frac{2}{3}n^4 + O(n^3)$

$n = 1000$ coût : $0{,}66 \cdot 10^{12}$ opé. élémt.

2) Établir décomp LU de A puis s'en servir pr résoudre successivt les n systèmes linéaires.

$A = LU$: coût $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

$L\underbrace{Ux_i}_{y_i} = e_i$ → 1) $Ly_i = e_i$, 2) $Ux_i = y_i$ $\Big\}$ $i \in [\![1, n]\!]$

1) $Ly = b$ $\boxed{M}$ de descente $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$y_1 = b_1$

pr $i = 2$ à n.

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j$$

→ i fixé : i opérat° $\left(\begin{matrix} i-1 & \times \\ i & + \end{matrix}\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = O(n^2)$$

or $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $Ux = y$

$\begin{pmatrix} \ddots & u_{ij} \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$

pour $i = n-1$ à 1 de pas -1.

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=1+i}^{n} u_{ij}\, x_j\right) u_{ii}$$

coût pr i fixé

$n - i + 1$ $\ast$ | i fixé de n à 1.

$n - i$ $+$

$$\sum_{i=1}^{n} 2n-2i+1 = 2n^2 - \frac{2n(n+1)}{2} + n = n^2$$

$A = LU$: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ opé

$A x_i = e_i$ n résol de $n^2 + n^2$ opé.

$\frac{2}{3}n^3 + 2n^3 + \mathcal{O}(n^2) = \frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ opés

$n = 1000$ $\quad 2{,}33.10^9$.

Ex 5 Stratégie Résolu° $A^2X = b$.

1) calculer $A^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}$

$a_{ij} = 0$

boucle sur $k = 1$ à n :

$a_{ij} = a_{ij} + a_{ik}\, a_{kj}$.

n produits n sommes.

$\underbrace{n^2}_{\text{nbr coeff}} \underbrace{(2n - \cancel{1})}_{\text{opé pr 1 coeff}} = 2n^3$

2) $A^2 = LU$ coût $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

3) résol° $Ly = b$ + $Ux = y$

coût $2n^2$ opé.

Total $\boxed{\frac{8}{3}n^3} + \mathcal{O}(n^2)$ opér.

$\Rightarrow A^{-1}$ on ne la calcule pas.

→ 1 factorisa° $A = LU$: coût $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

$A^2 = LULU$

$A^2 x = b \iff \underbrace{L\underbrace{U\underbrace{L\underbrace{Ux}_{y}}_{z}}_{t}} = b$

1) $Lt = b$

2) $Uz = t$

3) $Ly = z$

4) $Ux = y$.

coût : $4n^2$ opérations

Total : $\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 + \mathcal{O}(n^2) = \boxed{\frac{2}{3}n^3} + \mathcal{O}(n^2)$

↳ coût divisé par 4.

Ex 6 Matrice de permutat°

σ une permutat° de $\{1,\dots,n\}$;

$P = P_\sigma$ la mat de permutat° ass°é.

σ bijecţ°, c'est une applicat°

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$e_i \longmapsto g(e_i) = e_j \text{ où } j = \sigma(i)$$

P_σ : la matrice de permutat° ass°é à σ.

$$P_\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$e_i \longmapsto e_{\sigma(i)} \quad (= e_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\{1,2,3\} \xrightarrow{\sigma} \{2,3,1\}$$
$$\xleftarrow[\sigma^{-1}]{}$$

$\sigma(\{1,2,3\}) = \{2,3,1\}$; $\sigma^{-1}(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_\sigma^T$$

$$P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1}$$

$$AP_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

on permute les colonnes de A selon σ.

$$P_{\sigma^{-1}} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

on permute les lignes de A selon σ^{-1}

---

a) Mq P est orthogonale. ed $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$, $\det P \in \{\pm 1\}$

P_σ orthogonal ? $P_\sigma P_\sigma^T = I = P_\sigma^T P_\sigma$

$$(P_\sigma^T)_{ij} = (P_\sigma)_{ji} = \delta_{j,\sigma(i)} \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall i,j \in [\![1,n]\!]$

$$(P_\sigma P_\sigma^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{ik} (P_\sigma^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{i,\sigma(k)}}_{=1 \text{ si } i=\sigma(k)} \underbrace{\delta_{j,\sigma(k)}}_{=1 \text{ si } j=\sigma(k)}$$

$$\Rightarrow i = j = \sigma(k).$$

Donc $P_\sigma P_\sigma^T = I$.

De m̂ pr $P_\sigma^T P_\sigma = I$.

Donc P_σ est orthogonale.

P_σ inversible ? <u>oui</u>

$$1 = \det(I) = \det(P_\sigma P_\sigma^T) = \det(P_\sigma)\det(P_\sigma^T)$$

car $\det(A) = \det(A^T)$

$$= \det(P_\sigma)^2$$

$\Rightarrow \det P_\sigma \neq 0 \Rightarrow \det(P_\sigma) = \{1, -1\}$.

Mq $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

On a vu que $(P_\sigma)^{-1} = P_\sigma^T$ car P_σ orthogonale.

$$(P_\sigma^T)_{ij} = (P_\sigma)_{ji} = (e_{\sigma(i)})_j = \delta_{j,\sigma(i)}$$

$$(P_\sigma^{-1})_{ij} = (P_\sigma^T)_{ij}$$

$P_{\sigma^{-1}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$e_i \longmapsto e_{\sigma^{-1}(i)}$

$$(P_{\sigma^{-1}})_{ij} = (e_{\sigma^{-1}(j)})_i = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(P_\sigma^{-1}) = \delta \qquad = \delta_{\sigma^{-1}(j), i} = (P_{\sigma^{-1}}).$$

Donc $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

$j = \sigma(i)$

$\sigma^{-1}(j) = i$.

b) pr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner les élts $P^T A$ & AP.

$$(AP_\sigma)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \underbrace{\delta_{k,\sigma(j)}}_{=1 \text{ si } k = \sigma(j)}$$

$= a_{i,\sigma(j)}$ car k est uniq, on n'a plus la $\sum_k$.

On a permuté les colonnes de A selon σ.

$$(P_\sigma^T A)_{ij} = (P_{\sigma^{-1}} A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (P_{\sigma^{-1}})_{ik} A_{kj}$$

$$\cancel{= \sum_{k=1}^n \underbrace{\delta_{i,\sigma^{-1}(k)}}_{=1 \text{ si } i = \sigma^{-1}(k)} a_{kj} =}$$

$\sigma(i) = k$

$$\cancel{= a_{\sigma^{-1}(i) j}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(k), i} A_{kj} \qquad \sigma^{-1}(k) = i \Leftrightarrow k = \sigma(i)$$

$$= A_{\sigma(i), j}$$

Ex 7 Inverse mat triangulaires

a) soit $A = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$

& $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

1) Mq $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$.

$\boxed{M1}$ Raisont PR 1° colonne de B.

$\boxed{M2}$ LU, LDR.

$$\begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)}_{\text{diagonale p bloc}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & I \end{array}\right)}_{\triangle \text{ p bloc}}.$$

$\det\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)$ (réc. triviale sr lignes de I)

$\det\begin{pmatrix} B & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(B)$ (réc triviale sr D° ligne de I).

à écrire

$n-1$

2) cd A est inv ssi B & C st inv ds ce cas

Mq $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1}XC^{-1} \\ \hline & C^{-1} \end{array}\right)$

$\det(A) \neq 0$ ssi $\det(B) \cdot \det(C) \neq 0$ ssi $\begin{cases} \det(B) \neq 0 \\ \det(C) \neq 0 \end{cases}$

$A^{-1}A = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1}XC^{-1} \\ \hline & C^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \underbrace{B^{-1}X - B^{-1}XC^{-1}C}_{=0} \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$

$AA^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

c) Mq inverse mat $\triangle$ est aussi mat $\triangle$.

dévelppt en isolant 1 colonne de la mat. récurr pr $n = 1$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} a & x^T \\ \hline 0 & A_{m+n-1} \end{array}\right)$ $\quad a \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $A_{m+n-1} \in \mathcal{M}_{m+n-1}(\mathbb{R})$

$A^{-1}_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} & -a^{-1}x^T A^{-1}_{m+n-1} \\ \hline 0 & A^{-1}_{m+n-1} \end{array}\right)$

(HR) p formule a.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 26 & 41 & 49 \\ 5 & 40 & 107 & 135 \end{pmatrix}. \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A = LU$

$b = Ax$

$b = Ay$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$i=2$, $j=1$ $\quad i > j \qquad j \qquad \underline{i \leq j}$

→ sélectionner lignes / colonnes matrice

$A[k:, k:]$

1 seule boucle → np.outer

$A = LU$

$Ax = b$
$LUx = b$ $\Rightarrow$ 1) $Ly = b$
2) $Ux = y$.

pr $i,j \in [\![k+1, n]\!]$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik}\, a_{kj}^{(k)}$$

$A = $ np.zer

$A[k,k]$

(1) $$l_{ik} = \frac{A[k+1:, k]}{A[k,k]} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$ ← pivot

$$\begin{pmatrix} \boxed{\times} & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{?} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$A[k+1:, k]$

i: équat + l_{ik}

~~for i in range (k~~

```
for k in range(n-1):
    for i in range(k+1, n):
```

(2) $A[i, k+1:] += \underbrace{-A[i,k]}_{\text{multiplicateur}} * A[k, k+1:]$

a vecteurs lignes

Descente & Remontée

1) $y_1 = b_1$

for $i = 2$ à n

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j \rightarrow A[i, :i] @ y[:i]$$

2) $x_n = y_n / u_{nn}$

for $i = n-1$ à 1 de pas -1.

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j\right) / u_{ii} \rightarrow A[i, i+1:] @ x[i+1:]$$

$A[i,i]$

$\rightarrow$

(ii) $$A[k+1:, k] = \frac{A[k+1:, k]}{A[k,k]}$$

vect

$n \times 1 \times 1 \times n$ $\quad (\quad) \, (\quad)$

Par réc. TD1 : A_{n-1} ◸ $\Longrightarrow A_{n-1}^{-1}$ ◸ ← oui

~~⟹ A^{-1} ◸~~

~~A_{m+n-1} ◸ par bloc HR sur taille $n+m-1$ ⟹ A^{-1}_{n+m-1} est ◸ par bloc.~~

~~⟹ A_{n+m} est ◸ par bloc.~~

2b) Mq ◢

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline X & C \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline X & C \end{array}\right)$$

$$I = A^{-1}A = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline M & C^{-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} B & 0 \\ X & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$M = -C^{-1}XB^{-1}$

$$MB + C^{-1}X = 0$$

$$MB = -C^{-1}X$$

$$\Rightarrow M = -C^{-1}XB^{-1}$$

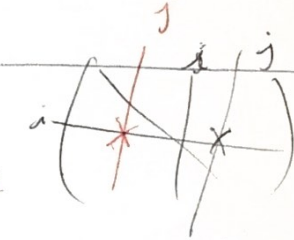
Ex 8 Décomposition LU d'1 mat particulière.

a) soit $A = LU$ la décomposition LU d'une mat $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $|l_{i,j}| \le 1$. soit a_i^T & u_i^T les lignes i de A & U respectivement.

Mq $u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$

& que $\|U\|_\infty \le 2^{n-1} \|A\|_\infty$.

$A = LU$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{\text{ligne k de U}}$



$a_i^T = (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})^T$, $u_i^T = (\underbrace{0 \dots 0}_{i-1}\ u_{ii} \dots u_{in})^T$

$j \ge i$ fixé $\underbrace{a_{ij}}_{\text{ligne i de A}} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} = 1 \times \underbrace{u_{ij}}_{\text{ligne i de U}}$ $\quad j \in [\![i, n]\!]$

Rq $\|U\|_\infty = \max_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|}_{\|u_i^T\|_1}$ $\quad \left\{ a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_k^T = u_i^T \right.$

$$\|A\|_\infty = \max_i \|a_i^T\|_1 \quad \& \quad \|U\|_\infty = \max_i \|u_i^T\|_1$$

Par récurrence sur les lignes $i \in [\![1, n]\!]$

$i=1$.
$$\|u_1^T\|_1 = \|a_1^T\|_1 \overset{(*)}{\leq} \|A\|_\infty$$

$i=2$
$$\|u_2^T\|_1 = \|a_2^T - \ell_{21} u_1^T\|_1$$
$$\leq \|a_2^T\| + \underbrace{|\ell_{21}|}_{\leq 1} \|u_1^T\|_1$$
$$\leq \|A\|_\infty + \|A\|_\infty = 2\|A\|_\infty.$$

étape k (H.R)
$$\|u_k^T\|_1 \leq 2^{k-1} \|A\|_\infty$$