M31 C1 Groupes

Pr. Gijs Tuynman

Clé Moodle : 68 zaep (M31)

mail EDT.

→ M de Laman ... PDG.

@ $GL(n, \mathbb{R})$ = matrices $n \times n$ à coeff dans $\mathbb{R}$. inversibles.

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad A.\,Id_n = Id_n.\,A = A.$$

Réciproque de A : A^{-1} vérifie $A^{-1}.A = A.A^{-1} = Id_n$.

A et B inversible $\Rightarrow$ AB inversible.

$A \downarrow A^{-1}$ $\quad B \downarrow B^{-1}$ $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Preuve :
$$(AB).B^{-1}.A^{-1} = A.\underbrace{BB^{-1}}_{Id_n}.A^{-1} = A.\,Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$$

$1, 2, 3, \ldots, n$

$\downarrow$

mêmes nombres → $6, 5, 3, 10, \ldots 1$

selon circonstances.

$m(g,h) = gh = g.h = g+h$

D 1) Un groupe c'est un ensemble G
2) muni d'une opérat° interne qui à deux éléments associe un troisième $m : G \times G \longrightarrow G$
3) Dans G il existe un élt e tq $m(e,g) = m(g,e) = g$
(e = élt neutre, l'identité)
4) $(g.h).k = g.(h.k)$ associativité
5) Pour tout $g \in G$, il existe $h \in G$ ... $gh = e$
(on note $h = g^{-1}$ ou $-g$)

→ si on a $g.h = h.g$ $\forall g, h \in G$, G est commutatif / abélien

1 m : multiplicat°

@ - $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe abélien.

- $(\mathbb{Q},\cdot)$ n'est pas un groupe sauf que 0 n'a pas de réciproque.

- $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ est un groupe abélien.

- $(\mathbb{R}^n,+)$ est un groupe abélien.

- $GL(n,\mathbb{R})$ = matrices $n \times n$ inversible est un groupe non-abélien pour $n \geq 2$.
 à multiplicaᶿ

⚠ $GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

$\mathfrak{S}_n$ = l'ensemble des applicaᶿs bijectives

$\mathfrak{S}_4$

$f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$

Muni de la loi interne de la compositᶿ d'applicaᶿs.

C'est un groupe, non-abélien pour $n \geq 3$.

↳ groupe de permutaᶿs de $\{1\dots,n\}$.

Notation : $\sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ bijectᶿ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

@ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$

$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

m̂ objet
m̂ permutaᶿ.

- Transpositᶿ τ : permutaᶿ particlière.

pour $i \neq j \in \{1,\dots,n\}$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k$ m̂ les autres

seulement ②

⚠

②

Notation : $\tau = (ij)$

généralisᶿ transposi

Un cycle : notaᶿ exemple :

(3271) veut dire $\sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 7$, $\sigma(7) = 1$, $\sigma(1) = 3$ et le reste ne bouge pas.

Rq : $f,g : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, deux permutaᶿs.

$f \circ g$ est une permutaᶿ

$(f \circ g)(i) = f(g(i))$

σ du premier c'est le deuxième, de la gauche à la droite, du → troi : CYCLE

de la droite à la gauche. : COMPOSÉE

@ $(12) \circ (23) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) = (231) = (312)$

$\sigma = (23) \Rightarrow \sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$

$\tau = (12) \Rightarrow \tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$

$(23) \circ (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) = (321) = (213)$

on commence par τ

$2 \to 1 \to 1$

③

Prop : Tout élt de $\mathfrak{S}_n$ (tte permutat° de n élément) s'écrit comme un produit de transposit°s.

@ $(12)\circ(23) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

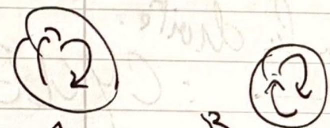
Prop Tt élt de $\mathfrak{S}_n$ est le produit de cycles à support disjoint. Ecriture uniq à l'ordre près.

@ Déf. support (14732) est l'ensemble

$$\{1,4,7,3,2\} = \{1,2,3,4,7\}$$

@ (1372) et (457) ne st pas à support disjoint.

Prop : Si σ et τ sont deux cycles à support disjoint alors $\sigma\cdot\tau = \tau\cdot\sigma$.



A B

(D) σ une permutat° de $1,\dots,n$.

$$\varepsilon(\sigma) = \text{signature de } \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \in \{-1,1\}$$

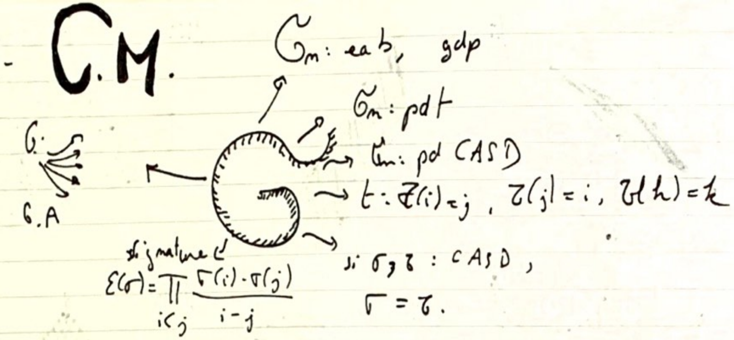
ou

$$\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$$

$n=2$: $i=1$, $j=2$

$n=3$: $i=1$, $j=2$; $i=1$, $j=3$; $i=2$, $j=3$

M31- C.M.



$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutation de n éléments.

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

le produit en prenant tous les sous-ensembles à 2 éléments de $\{1,2,\dots,n\}$

$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ on calcule $p_n=\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\times a_2\times a_3\times\dots\times a_n$

$$p_{n+1}=a_1\times a_2\times\dots\times a_n\times a_{n+1}=p_n\times a_{n+1}$$

$$p_n=\frac{p_{n+1}}{a_{n+1}}$$

$$p_2=\frac{p_3}{a_3}=\frac{a_1a_2a_3}{a_3}=a_1a_2 \quad , \quad p_0=\frac{p_1}{a_1}=\frac{a_1}{a_1}=1.$$

Si pas multiplier par le produit $\rightarrow 1$. pour $n=0$

" " " somme $\rightarrow 0$. pour $n=0$.

Pour $n=4$ permutations $\rightarrow$ écrire //

pour $n=4$ $|\dots\dots|$ regarder ce que ça donne.

$n=4$, $(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(2,3)$ $(2,4)$ $(3,4)$

2 parmi n. $\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$\boxed{C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}}$$

Dans un ordre qq pour 3 : 3!

Prop : $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ deux permutations

- $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=\varepsilon(\sigma).\varepsilon(\tau)=\varepsilon(\tau\circ\sigma)$

! d'abord sigma, après τ MS pas m signature.

- $\varepsilon(\underbrace{(ij)}_{\text{transposition}})=-1$.

- $\varepsilon(\underbrace{(i_1 i_2,\dots,i_k)}_{\text{cycle d'ordre } k})=(-1)^{k-1}$

$i_1\ i_2\ i_3\ i_k$ cycle.

|| nbre transposition : paire : 1 ; impaire : -1 ||

$\rightarrow$ nbre paire de transpositions si case vide revient au même endroit.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&5&8&1&3&6&9&4&7\end{pmatrix}$$

cycle

$\sigma=(125384)\cancel{(6)}(79)$ on ne l'écrit pas.

CASD

$\hookrightarrow$ produit de 3 cycles à support disjoint

Algèbre multi-Linéaire

Rq : • $A : E \rightarrow F$ est linéaire (1-linéaire)

si $A(\lambda x+\mu y)=\lambda A(x)+\mu A(y)$ $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $x,y\in E$.

• $A : \underbrace{E_1\times E_2}_{2ev}\rightarrow F$ est bi-linéaire (2-linéaire

$$A(\lambda x_1+\mu y_1, z_2)=\lambda.A(x_1,z_2)+\mu.A(y_1,z_2)$$

$$A(z_1,\lambda x_2+\mu y_2)=\lambda A(z_1,x_2)+\mu A(z_1,y_2)$$

→ Pour chaque $z_2 \in E_2$ d'applicat°

$x \longmapsto A(x, z_2)$ est linéaire

$E_1 \longrightarrow F$

→ Pour chaque $z_1 \in E_1$ d'applicat°

$x \longmapsto A(z_1, x)$ est linéaire.

$E_2 \longrightarrow F$.

• $A: E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow F$ est bi-linéaire (3-lin)

pour chaque $z_2 \in E_2$, $z_3 \in E_3$, $x \longmapsto A(x, z_2, z_3)$ est libre

→ $z_1 \in E_1$, $z_3 \in E_3$ $\quad x \longmapsto A(z_1, x, z_3)$ est linéaire.

$z_1 \in E_1$, $z_2 \in E_2$ $\quad x \longmapsto A(z_1, z_2, x)$ ——

on fixe tout SAUF 1, celui pas fixé : une AL.

@ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ \boxed{3y - 2} \\ 3y - 2x \end{pmatrix}$$

pas linéaire.

si les coords pt ri̇ⁿ quart d'aff, pas de cte.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{xy\,!} \\ 2x - 3y \\ 3y - 6x \end{pmatrix}$$

pas linéaire

linéaire 1 coordm ~~mult~~ 1 chiffre : le reste des plus et des moins

↳ linéaire rien d'autre

③

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{x_1 y_1 + x_2^2} \\ x_1 y_2 - 3x_2 y_1 \\ \boxed{2x_2 - 3y_2} \end{pmatrix}$$

pas bilinéaire

on fixe x, linéaire ?
on fixe y, linéaire ?

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 y_2 + 7x_2 y_2 \\ -3x_2 y_1 + 2x_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilinéaire

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 y z_3 \\ x_2 z_2 z_3 \\ 2x_1 y z_2^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{oui} \\ \text{non} \\ \text{non} \end{matrix}$$

pas bi linéaire

Cas particulier :

E esp vect $\quad \dim E = n$.

$A: \underbrace{E^n}_{\substack{E \times E \times \dots \times E \\ n \text{ termes}}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ n-linéaire

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{(i+1)}, \dots, x_n)$$

$$= \lambda . A(x_1, \dots, x_n) + \mu A(x_1 x_2 . \; x_{i-1} y_i, \dots, x_n)$$

A est une application n-linéaire anti-symétriq sur E ($\dim E = n$).

si $A: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est n-linéaire.

et $\forall x_1, \dots, x_n \in E$ $\qquad$ $\underbrace{A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots x_{\sigma(n)})}_{\text{ordre différ}^t} =$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutatiOns

④

$$A(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(m)}) = \varepsilon(\sigma) . A(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

si rien → symétrig
antysymétrig

@ $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

deux permutaθs possible

Id et (12)

$$A(\cancel{X_1}, \cancel{X_2}) = -A(\cancel{X_2}, \cancel{X_1})$$

$$A\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3(y_1 x_2 - y_2 x_1)$$

$$= -3(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$= -A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

i.e. réduit vérificat°

autre **Prop** : $A : E^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est anti-sym (m-linéaire).

ssi pour toute transposition (ij)

on a $A(X_1, X_2, \dots X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_m)$

$X_{\sigma(1)}$ $\quad X_{\sigma(i)}$ $\quad X_{\sigma(j)}$

$= -A(x_1, \dots, x_m)$

Idée : Tte permutaᵗ° est produit de transposiθ.
c'est pr cela q ça fonctn.

- Si parmi $x_1, \dots, x_m$, il y a deux à deux égaux à
.... $A(x_1, \dots, x_m) = 0$.

- si les $x_1, \dots, x_m$ st dépendants alors $A(x_1, \dots, x_m) = 0$

- $x_1, \dots, x_m$ st $\boxed{\text{indépendants}}$ si l'équat° $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ n'a qu'une seule solution à savoir
vecteurs $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ libres.

- $x_1, \dots, x_m$ st $\boxed{\text{dépendants}}$ si $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$
non tous nuls tq $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0$.

→ si $\lambda_1 \neq 0$.

$$\lambda_1 x_1 = -\sum_{i=2}^{m} \lambda_i x_i$$

$$x_1 = \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{-\lambda_i}{\lambda_1}\right) x_i \quad \to x_1 \text{ est combinaison lin. des autres.}$$

" est dépdt si 1 des vectˢ s'écrit ε CL des autres.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m) = A\left(\sum_{i=2}^{m} \mu_i x_i, x_2, x_3, \dots, x_m\right).$$

$$= \sum_{i=2}^{m} \mu_i . \underbrace{A(x_i, x_2, \dots, x_m)}_{0 \text{ car deux vecteurs identigs}}$$

linéaire de la première variable

AM TFF CL.

$A : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ n-linéaire anti-symétriq.

$e_1, \dots, e_n$ base de E

$x_1, \dots, x_n \in E \Rightarrow$ il existe des nombres

$x_i^j \in \mathbb{R}$ tq $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j e_j$. $\quad$ ← coordonnées ← vecteurs.

Base : chaq vecteur s'écrit ĉ CL [illegible] vecteurs

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} e_{j_1} , \sum_{j_2=1}^{n} x_2^{j_2} e_{j_2} , \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n} \right)$$

linéaire ds 1° variable

$$= \sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} A\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n} \right)$$

linéaire ds 2° varia

$$= \sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} \sum_{j_2=2}^{n} x_2^{j_2} A\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=2}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n}}_{n^n \text{ termes}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \underbrace{A\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}\right)}_{\text{nul si } \{j_1, \dots, j_n\} \neq \{1, \dots, n\}}$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)} X_2^{\sigma(2)} \cdots X_n^{\sigma(n)}}_{\text{le déterminant}} \underbrace{\boxed{A(e_1, e_2, \dots, e_n)}}_{\in \mathbb{R}}$$

2 sommes 2 indices ≠. $\quad$ 7 | 2 $\quad$ [illegible] c'est nul.