M-31 Pr: Anne Moreau et S. Delaunay

PERMUTATION, GROUPE SYMÉTRIQUE

DÉTERMINANT

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Permutation, groupe symétrique

1. groupe symétrique permutations (notion de groupe, groupe cyclique), trans-positions, toute permutation est produit de transpositions, signature, cycles et décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Déterminant

1. formes alternées, déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée
2. déterminant d'un endomorphisme, propriétés élémentaires
3. déterminant d'une matrice, propriétés élémentaires, développement par rapport aux lignes et aux colonnes, formule avec la comatrice
4. calculs classiques.

Réduction des endomorphismes

1. valeurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique
2. diagonalisation, premiers résultats, exemple des projections et des symétries ; polynôme annulateur, polynôme minimal, théorème de Cayley-Hamilton, caractérisation des endomorphismes (matrices) diagonalisables et trigonalisables en termes de polynôme annulateur
3. sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford ; application aux suites récurrentes.

M-31

C_1 : Groupes.

→ Ⓓ Groupe (5 pts)

→ Ⓓ $\mathfrak{S}_n$: ens ab. (4 pts)

→ Ⓓ Transposiθ (1 pt)

→ Cycle

→ Ⓟ $\mathfrak{S}_n$ → prd tsposθs (1 pt)

→ Ⓟ $\mathfrak{S}_n$ → prdt cycles à sd (1 pt)

→ Ⓟ σ & τ : csd alors $\sigma.\tau = \tau\sigma$ (1 pt)

→ Ⓓ Signature de σ : $\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ (1 pt)

(C1) Groupes

@ $GL(n, \mathbb{R})$ = matrices $n \times n$ inversibles à coeff de $\mathbb{R}$.

· Réciproque de A : A^{-1} vérifie : $A^{-1}A = AA^{-1} = Id_n$.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Preuve :

$(AB)B^{-1}.A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = AA^{-1} = Id_n$.

(D) ① Un groupe c'est un ensemble G.

② muni opérat° interne $m : G \times G \longrightarrow G$ qu'à deux éléments associe un troisième.

③ Dans G, il existe un élt e tq

$m(e, g) = m(g, e) = g$ (e élt neutre, l'identité)

④ $(g.h).k = g.(h.k)$ associativité

⑤ Pour tout $g \in G$, il existe $h \in G$,

$gh = e$

Rq : si on a $g.h = h.g$ $\forall g, h \in G$,

G est un groupe {commutatif, abélien}.

@ · $(\mathbb{Q}, +)$ est groupe abélien, tout comme $(\mathbb{Q}^*, +)$ est un GA, $(\mathbb{R}^n, +)$.

⚠ $(\mathbb{Q}, \cdot)$ n'est pas un groupe. (0 pas de réciproque)

①

· $GL(n, \mathbb{R})$: matrices $n \times n$ inversible est un groupe non-abélien pour $n \geq 2$.

(D) $\mathfrak{S}_n$: l'ensemble des applicat°s bijectives,

$f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$.

↳ Muni de la loi interne de la composit° d'applicat°s.

↳ C'est un groupe non-abélien pour $n \geq 3$.

↳ groupe de permutat°s de $\{1, \dots, n\}$.

Notation : $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijec°.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & & \sigma(3) & \sigma(4) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

@ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

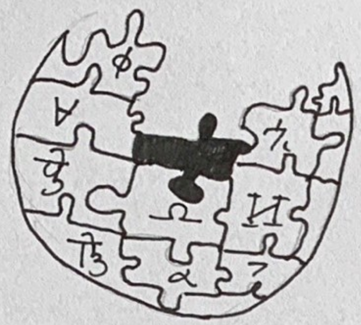
m̂ permutat°.

(D) Transposit° : permutat° seulement de 2.

Pour $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$,

pour les autres $\tau(k) = k$.

Notation : $\tau(ij)$.



Permutations.

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\\4&1&5&3&2\end{pmatrix} \rightarrow \sigma'' = \sigma \circ \sigma' = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}$

$=$

$(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

♦ Permutaϑs : $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}$

Forme Canonique : $(1\,2\,5)\ (3\,4)$

"1 donne 2" | "3 donne 4"
"2 donne 5" | "4 donne 3"
"5 donne 1"

FCϑ : décomposiϑ ss la forme d'une composiϑ de permutaϑs circulaires de supports disjoints.

♦ Composiϑ de permutaϑs :

Calcul du produit : effet de la première permutaϑ σ' puis on fait correspondre leur image par σ.

$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}$

Un cycle : @ $(3\ 2\ 7\ 1)$ veut dire

$\sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 7$, $\sigma(7) = 1$, $\sigma(1) = 3$

Rq : $f, g : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$; deux permutaOs $f \circ g$ est une permutaO.

$(f \circ g)(i) = f(g(i))$.

- Cycle : de la gauche à la droite
- Composée : de la droite à la gauche

@ $\cdot\ (1\,2) \circ (2\,3) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$

$\sigma = (2\,3) \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma(1) = 1 \\ \sigma(2) = 3 \\ \sigma(3) = 2 \end{array}$ et $\tau = (1\,2) \Rightarrow \begin{array}{l} \tau(1) = 2 \\ \tau(2) = 1 \\ \tau(3) = 3 \end{array}$

$\cdot\ (2\,3) \circ (1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2) = (3\,2\,1) = (2\,1\,3)$

↳ on commence par τ ; $2 \to 1 \to 1$

Prop : Tt élt de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit de transpositOs. @ $(1\,2) \circ (2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Prop : Tt élt de $\mathfrak{S}_n$ est le produit de cycles à support disjoint. (écriture uniq à l'ordre près)

@ Déf. support $(1\ 4\ 7\ 3\ 2)$ est l'ensemble $\{1, 4, 7, 3, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

@ $(1\ 3\ 7\ 2)$ et $(4\ 5\ 7)$ ne st pas à support disjoint.

Prop : Si σ et τ sont deux cycles à support disjoint alors $\sigma . \tau = \tau . \sigma$.

Ⓓ σ une permutaO de $1, \dots, n$.

$$\varepsilon(\sigma) = \text{signature de } \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{-1, 1\}$$

Rq : 2 parmi n : $\frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$

Dans un ordre qq pour 3 : $3!$

Prop : $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ deux permutat°s.

- $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) . \varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau \circ \sigma)$
- $\varepsilon(\underbrace{(ij)}_{\text{transposit°}}) = -1$
- $\varepsilon(\underbrace{(i, i_2, \dots, i_k)}_{\text{cycle d'ordre } k}) = (-1)^{k-1}$

(nbr transpositio : paire : 1
impaire : −1)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 4)\ \cancel{(6)}\ (7\ 9)$$

on ne l'écrit pas

* Pour chaque $z_2 \in E_2$ l'applicat°

$x \longmapsto A(x, z_2)$ est linéaire

$E_1 \longrightarrow F$

Pour chaque $z_1 \in E_1$ l'applicat°

$x \longmapsto A(z_1, x)$ est linéaire

$E_2 \longrightarrow F$

(on fixe tout sauf 1, celui pas fixé : AL)

tri-li-..

Algèbre Linéaire

- $A : E \longrightarrow F$ est **linéaire** (1-linéaire)

si $A(\lambda x + \mu y) = \lambda . A(x) + \mu A(y)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

- $A : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est **bi-linéaire** (2-linéaire)

$$A(\lambda x_1 + \mu y_1, z_2) = \lambda . A(x_1, z_2) + \mu . A(y_1, z_2)$$
$$A(z_1, \lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda . A(z_1, x_2) + \mu . A(z_1, y_2)$$

*

- $A : E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow F$ est **tri-linéaire** (3-linéaire)

Pour chaque $z_2 \in E_2$, $z_3 \in E_3$, $x \mapsto A(x, z_2, z_3)$ est linéaire.

$\rightarrow z_1 \in E_1$, $z_3 \in E_3$, $x \longmapsto A(z_1, x, z_3)$ est linéaire

$z_1 \in E_1$, $z_2 \in E_2$ $x \longmapsto A(z_1, z_2, x)$

@ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ \boxed{3y - 2} \\ 3y - 2x \end{pmatrix}$$ pas linéaire

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{xy} \\ 2x - 3y \\ 3y - 6x \end{pmatrix}$$ pas linéaire

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{x_1 y_1 + x_2^2} \\ x_1 y_2 - 3 x_2 y_1 \\ \boxed{2x_2 - 3y_2} \end{pmatrix}$$ pas bilinéaire

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y + z_3 \\ x_2 + z_2 + z_3 \\ 2x_1 + y + z_2^2 \end{pmatrix}$$ pas trilinéaire

• $A : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ n-linéaire anti-symétrique

$e_1, \dots, e_n$ base de E

$x_1, \dots, x_n \in E \Rightarrow$ il existe des nombres

$$x_i^j \in \mathbb{R} \text{ tq } x_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_i^j}_{\text{coord}} \underbrace{e_j}_{\text{vecteurs}}$$

$$A(x_1, \dots, x_n) = A\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n}\right)$$

linéaire de 1° variable

$$= \sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} \cdot A\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n}\right)$$

linéaire de 2° variable

$$= \sum_{j_1=1}^{n} x_1^{j_1} \sum_{j_2=1}^{n} x_2^{j_2} \cdot A\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_n^{j_n} e_{j_n}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n}}_{n^n \text{ termes}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \cdot \underbrace{A(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})}_{\text{nul si } \{j_1, \dots, j_n\} \neq \{1, \dots, n\}}$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)} X_2^{\sigma(2)} \cdots X_n^{\sigma(n)}}_{\text{DÉTERMINANT}} \cdot \underbrace{A(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{\in \mathbb{R}}$$

DÉTERMINANT

Cas particulier :

E esp vect $\dim E = n$.

$A : \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ termes}} = E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ n-linéaire

$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_1, x_{(i+1)}, \dots, x_n)$

$= \lambda . A(x_1, \dots, x_n) + \mu A(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, x_n)$

A est une applicat° n-linéaire anti-symétriq sur E. ($\dim E = n$)

si $A : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est n-linéaire.

et $\forall x_1, \dots, x_n \in E$.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutat°s. $A(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$

$A(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}. A(X_1, X_2, \dots, X_n)$

ex $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ symétriq ou anti-symétriq.

$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

Deux permutat°s possible Id et (12)

$A(X_1, X_2) = -A(X_2, X_1)$

$A\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3(y_1 x_2 - y_2 x_1)$

$= -3(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$= -A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

Prop : $A : E^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est anti-symétrique

ssi pour toute transposition (ij) on a

$A(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n)$

$X(\sigma(1))$ $X_{\sigma(i)}$ $X_{\sigma(j)}$

(idée : toute permutat° est produit de transposit°)

- si parmi $X_1, \dots, X_n$, il y a deux à deux égaux alors $A(X_1, \dots, X_n) = 0$.
- si les $X_1, \dots, X_n$ st dépendants alors $A(X_1, \dots, X_n) = 0$
- $X_1, \dots, X_n$ st indépendants si l'équat° $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n = 0$ n'a qu'une seule solution ie $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- $X_1, \dots, X_n$ st dépendants si $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non nuls tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

Déterminant

E : ev, $\dim E = n$, $A : E \times E \times \dots \times E = E^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

appli n-linéaire anti-symétrique

$e_1, \dots, e_n$ base de E ; $X_1, \dots, X_n \in E$ n vecteurs

$A(X_1, \dots, X_n)$, on exprime X_i pr la base $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_i^j e_j$

$A(X_1, \dots, X_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)} \times \dots \times X_n^{\sigma(n)}\right] A(e_1, \dots, e_n)$

4

(D) si $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice $n \times n$, on définit :

$$\mathrm{Det}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, X_{\sigma(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(n)}$$

Cas $n=2$: $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Cas $n=3$: $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{12}a_{21} \end{matrix}$

$3! \Rightarrow 6$ termes

⚠ Déterminant n'est pas définit sur des vecteurs mais un tableau de nombres. AL ne change pas $\neq$ la base.

(Rq) On pt voir le déterminant une applicaθ n-linéaire (a.s) sur $\mathbb{R}^n$.

- $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n)$

- $\mathrm{Det}(x_1 + y, x_2, \dots, x_n) = \mathrm{Det}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mathrm{Det}(y, x_2, \dots, x_n)$

↖ linéaire ds 1° variable

(Prop) $\mathrm{Det}(X_1, \dots, X_n) = 0$ ssi $X_1, \dots, X_n$ st dépendants ds $\mathbb{R}^n$.

Preuve : (!!) si $X_1, \dots, X_n$ indépendants $\Rightarrow$ c'est une base.

Pour $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} y_i^j X_j$:

$$\mathrm{Det}(y_1, \dots, y_n) = \underbrace{\left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon(\sigma)\, y_1^{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot y_n^{\sigma(n)}\right]}_{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix}} \cdot \mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n)$$

Si $x_1, \dots, x_n$ indépendants et si $\mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n) = 0$

Alors pr tt $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{Det}(y_1, \dots, y_n) = 0$

Ceci est impossible car $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = 1$

Calcul explicite (par récurrence)

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cdots & \cancel{a_{1i}} & \cdots & \cancel{a_{1n}} \\ \vdots & & & a_{2i} & & a_{2n} \\ & & & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{ni} & & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{1+i} \cdot a_{1i} \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{2i-1} & a_{2i+1} & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix} + (-1)^{2+i} \cdot a_{2i} \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1i-1} & a_{1i+1} & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+i} \cdot a_{ni} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & \cdots & & a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}(x+y, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Det}(x, x_2, \ldots, x_n) + \mathrm{Det}(y, x_2, \ldots, x_n)$

En particulier (cf coeff) : $\mathrm{Det}(x_1 + \lambda x_i, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Det}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\, \mathrm{Det}(x_i, x_2, \ldots, x_n) = 0 = \mathrm{Det}(x_1, \ldots, x_n)$

@ $$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \det\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{X_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{X_3}\Bigg) = \det(X_1 - X_2, X_2, X_3) = \det\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \end{array} = \det(Y_1, Y_2 - 3Y_3, Y_3) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -17 \\ \boxed{1} & 3 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -17 \end{pmatrix} = 9.$$

@ $$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

on va choisir de développer / 4° colonne

$$= (-1)^{1+4} \times 1 \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} \times 3 \times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+4} \times 5 \times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{4+4} \times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{5+4} \times (-2) \times \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite.

Ptés déterminant

① $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = 1$

matrice diagonale

② $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

③ $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$

matrice triangulaire

prdts élts s diagonale.

④ $\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)$ lignes → colonnes.

⑤ $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & ? & ? & ? \\ 0 & \boxed{A_2} & ? & ? \\ 0 & 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A_1) \times \mathrm{Det}(A_2) \times \cdots \times \mathrm{Det}(A_n)$

ⓔ $\mathrm{Det}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \mathrm{Det}(4) = -4.$

ⓔ La réciproque : $X_1^{\overset{=\sigma(1)}{3}} X_2^{\overset{=\sigma(2)}{1}} X_3^{\overset{=\sigma(3)}{2}} = X_{\underset{=\sigma^{-1}(1)}{2}}^1 X_{\underset{=\sigma^{-1}(2)}{3}}^2 X_1^3$

$\sigma(2) = 1$

$1 = \sigma^{-1}(1)$

⑥ A, B deux matrices $n \times n$,
A.B aussi matrice $n \times n$

$\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A).\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA)$

$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

1 2 3	$\varepsilon(\sigma)$
1 2 3	+1
2 1 3	−1
1 3 2	−1
2 3 1	+1
3 1 2	+1
3 2 1	−1

6 permutaᵒˢ 3 élts

2 transposiᵒˢ de +1

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow + a_{11} a_{22} a_{33} + (-1) a_{12} a_{21} a_{33} + (-) a_{11} a_{23} a_{32}$

$+ a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \overset{(-)}{+} a_{13} a_{22} a_{31}$

Méthodologie $\boxed{M}$ Laman.

$$A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$

→ si matrice non carré
↳ le det $\nexists$.

- Rang de la matrice : dim espace Image
- Base de l'image ← $\hat{m}$
- Base du noyau
- Déterminant

} $\hat{m}$ calcul

• Rang de la matrice ?

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 \to v_2 - 1$

$v_3 \to v_3 - 3v_1$.

Opéra°s élémentaires :

① $v_i \to v_i \lambda \quad (\lambda \neq c)$

② $v_i \to v_i + \lambda v_j, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ j \neq i$

(crées colonnes 0)

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

oui vecteurs indépdts : CL = 0 alors coeff st nuls

⑦

Indépendance ?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ? \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$$

• Base de l'image

à faire
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

dim espace engendré = 3 car 3 vct$^{\text{rs}}$ indpdts

dim Im f = 3.

• Base du noyau !

$$A(e_i + \lambda e_j) = Ae_i + \lambda Ae_j = v_i + \lambda v_j$$

$$A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4$; $v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4$

$A.e_1 = v_1$
$Ae_2 = v_2$
$Ae_3 = v_3$
$Ae_4 = v_4$.

$$\Rightarrow A \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 \to v_2 - v_1$ $\quad$ $v_3 \to v_3 - 3v_1$

$e_2 \to e_2 - e_1$ $\quad$ $e_3 \to e_3 - 3e_1$

$$\Rightarrow A \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$v_3 \to v_3 - 2v_2$ $\quad$ $v_4 \to v_4 + v_2$

$e_3 \to e_3 - 2e_2$ $\quad$ $e_4 \to e_4 + e_2$

Base du noyau

(Tous les vecteurs non nul q renvoie vers un vecteur nul)

($\boxed{M}$ s'applique pr ∀ matrices MS det seult pr $m \times m$).

• det(A) = ?

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

si vecteurs st dépendts alors det est nul.

@ Autre exemple de calcul de det.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} -19 & 10 & 7 & -8 \\ -8 & 4 & 3 & -3 \\ -12 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$v_1 \to v_1 - 3v_3$; $v_2 \to v_2 + v_3$; $v_4 \to v_4 - v_3$.

On développe selon la 4° ligne

$$\det(B) = (-1)^{4+1} \times 0 \times |\,\cdots\,| + (-1)^{4+2} \times 0 \times |\,\cdots\,| + (-1)^{4+4} \times 0 \times |\,\cdots\,|$$

$$+ (-1)^{4+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -19 & 10 & -8 \\ -8 & 4 & -3 \\ -12 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -\det \begin{vmatrix} 29 & -14 & -8 \\ 10 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) \times \begin{vmatrix} 29 & -14 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \times \det \begin{vmatrix} 1 & -14 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10.$$

R : ① $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

② A inversible $\iff \det(A) \neq 0$

$\varphi : E \to E$ applicaO linéaire ($\dim E = n$) ; $e_1, \dots, e_n$ base.

A matrice de φ p/ à base $(e_1, \dots, e_n)$; $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} e_j$.

Autre base ? $f_1, \dots, f_n$; $\varphi(f_i) = \sum_{j=1}^{n} B_{ji} f_j$.

Autre matrice : B ;

$f_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ji} e_i \implies B = P^{-1}.A.P$.

$\det(B) = \det(P^{-1}.A.P) = \det(P^{-1}).\det(A).\det(P) = \det(A)$.

$\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$ car $1 = \det(I) = \det(P^{-1}.P) = \det(P^{-1}).\det(P)$

MotivaO : $y' = 3y$; sol : $y(x) = k.e^{3x}$.

$$\begin{cases} y_1'(x) = 3y_1(x) & \to \quad y_1(x) = k_1 . e^{3x} \\ y_2'(x) = -2y_2(x) & \to \quad y_2(x) = k_2 . e^{-2x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = -7y_1 + 12y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 7y_2 \end{cases}$$; on pose $u(x) = 2y_1 - 3y_2$

$u'(x) = 2y_1' - 3y_2'$

$u'(x) = 2(y_1') - 3y_2' = 2(-7y_1 + 12y_2) - 3(-4y_1 + 7y_2)$

$u'(x) = -2y_1 + 3y_2 = -u(x)$.

on pose $v(x) = -y_1 + 2y_2$ et $v'(x) = -y_1' + 2y_2'$

$v'(x) = -y_1' + 2y_2' = -(-7y_1 + 12y_2) + 2(-4y_1 + 7y_2)$

$v'(x) = (-1)y_1 + 2y_2 = v(x)$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

$A : E \to E$, $\dim E = n$; on cherche une base tq $e_1, \dots, e_n$; matrice A soit diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

ie $A e_i = \lambda_i \cdot e_i$.

D) $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$, $Av = \lambda v$.
Dans ce cas, v s'appelle un vecteur propre.

- $A . v = \lambda . v = \lambda . \mathrm{Id}(v) \iff \underbrace{(A - \lambda \mathrm{Id})(v)}_{Bv = 0} = 0$

$v \in \ker(B)$ et $v \neq 0 \Rightarrow B$ n'est pas inversible
$\Rightarrow \det(B) = 0$.

- Il existe un vecteur propre pour la valeur $\lambda \in \mathbb{R}$
$\iff \det(A - \lambda . \mathrm{Id}) = 0$. (ici on parle vecteur propre et parle valeur propre)

$$\det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & \lambda_n \end{pmatrix} \right]$$

$\det(A - \lambda . \mathrm{Id}) = (-\lambda)^n + \mathrm{trace}(A)(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det(A)$

Polynôme caractéristiq de l'applicat° A.

Somme des élts sur diagonale A

Racines du polynôme st valeurs propres.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\det \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (2-\lambda)(1-\lambda) - 15$

$= \lambda^2 - \underset{\text{trace}}{3}\lambda \underset{\det A}{- 13}$.

COMATRICE

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et comatrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

$\boxed{m_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(\text{matrice } A \text{ sauf } i\text{-ème ligne, } j\text{-ème colonne})}$

taille $(n-1)(n-1)$.

FF : $\det(A) = a_{1j} m_{1j} + a_{2j} m_{2j} + \dots + a_{nj} m_{nj}$

$\boxed{{}^tM . A = \underbrace{\det(A) . \mathrm{Id}}_{\text{matrice diagonale}} = A . {}^tM}$

FF Cramer : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det} \times {}^tM$

$(A^{-1})_{ij} = \left(\dfrac{1}{\det A} {}^tM \right)_{ij} = \dfrac{1}{\det(A)} m_{ji}$

Rq : $\lambda \in \mathbb{R}$: valeur propre
$v \in E$: vecteur propre pour λ. $\boxed{Av = \lambda v}$
$A : E \to E$ apli. linéaire $v \neq 0$

(P) λ vecteur propre de $A \iff \underbrace{\det(A - \lambda \, Id)}_{P_A(\lambda)} = 0$

$P_A(\lambda)$: Polynôme caractéristiq

$\deg(P_E) = \dim E$.

↳ les zéros de ce polynôme st valeurs propres.

(D) λ valeur propre de $A : E \longrightarrow E$,

$E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\}$: sous-espace propre pr λ.

→ $x \in E_\lambda \iff \begin{cases} x \text{ vecteur propre de } A \text{ pr valeur propre } \lambda \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{cases}$

(L) E_λ est SEV de E,

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des vecteurs propres distinctes.

$E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_\lambda$ sous-esp. propres.

—

$F = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = \{x \in E \mid \exists\, x_1 \in \lambda_i,\ x_p \in E_\lambda$ tq $x = x_1 + \dots + x_p\}$

somme élts de cet espace.

$E_1, \dots, E_p$ en somme directe si $x = x_1 + \dots + x_p$ & $x_i \in E_i$
$= y_1 + \dots + y_p$ & $y_i \in E_i$.

alors $\forall i$ $x_i = y_i$.

(P) $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ st sev somme-directe.

Coro : $\dim(E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i})$.

Preuve : $x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p$ & $x_i\, y_i \in E_{\lambda_i}$.

$\underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in E_{\lambda_1}} + \underbrace{(y_2 + x_2)}_{\in E_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(x_p + y_p)}_{\in E_{\lambda_p}} = 0$

$z_1 + z_2 + \dots + z_p = 0 \to A(z_1 + \dots + z_p) = 0$

$\to (Az_1) + (Az_2) + \dots + (Az_p) = 0$

$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_p z_p = 0$.

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)}_{\neq 0} z_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_p)}_{\neq 0} z_p + \dots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)}_{\neq 0} z_{p-1} = 0$.

$A\big((\lambda_1 - \lambda_p) z_1 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p) z_{p-1}\big) = 0$.

$(\lambda_1 - \lambda_p)\lambda_1 z_1 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)\lambda_{p-1} z_{p-1} = 0$. $\times \lambda_{p-1}$.

$(\lambda_1 - \lambda_p)(\lambda_1 - \lambda_{p-1}) z_1 + (\lambda_{p-2} - \lambda_p)(\lambda_{p-2} - \lambda_{p-1}) z_{p-1} = 0$

Par récurrence on arrive à :

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_4)}_{\neq 0} \dots \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)}_{\neq 0} z_1 = 0$

$\Rightarrow z_1 = 0$

Donc c'est une somme directe.

□

$A : E \to E$ appli linéaire.

$e_1, \dots, e_n$ base,

$$\text{matrice } A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \emptyset \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_2 & \\ \emptyset & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} Ae_1 = \lambda_1 e_1 \\ Ae_2 = \lambda_1 e_2 \\ Ae_3 = \lambda_2 e_3 \\ Ae_4 = \lambda_2 e_4 \\ Ae_5 = \lambda_2 e_5 \\ Ae_6 = \lambda_3 e_6. \end{cases}$$

- $E\lambda_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \to \dim = 2$
- $E\lambda_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5) \to \dim = 3$, $E\lambda_3 = \mathrm{Vect}(e_6) \to \dim = 1$

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E\lambda_i) = \dim E.$$

$$P_A(A) = \det(A - \lambda \, Id).$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \emptyset \\ & \lambda_1 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} (\lambda_1-\lambda).(\lambda_1-\lambda).(\lambda_2-\lambda)^3.(\lambda_3-\lambda) \\ = (\lambda_1-\lambda)^{2}(\lambda_2-\lambda)^{3}(\lambda_3-\lambda)^{1} \end{array}$$

multiplicité des racines.

$\dim E_{\lambda_1}$, $\dim E_{\lambda_2}$, $\dim E_{\lambda_3}$.

→ on ⓓⓓ si ∃ base ds lq^lle matrice est diagonale alors $P_A(A)$ s'écrit ε de deg $= 1$.

Prop : $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$: racines distinctes de P_A.

$m_i \in \mathbb{N}^*$, la multiplicité de la racine λ_i,

alors $1 \leqslant \dim(E\lambda_i) \leqslant m_i$: $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.

somme multiplicités = dim espace

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $P_A(X) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \right)$

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ 1 & 1 & 3-X \end{pmatrix} \underset{C_1 - C_3}{=} \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 0 & 4-X & 2 \\ X-2 & 1 & 3-X \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = (2-X).\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-X & 2 \\ -1 & 1 & 3-X \end{pmatrix}$$

ĝ multilinéarité du det, sortir facteur de matrice.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

$$P_A(X) = (2-X).\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-X & 2 \\ 0 & 2 & 4-X \end{pmatrix} = (2-X) \begin{pmatrix} 4-X & 2 \\ 2 & 4-X \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = (2-X).\det \begin{pmatrix} 6-X & 2 \\ 6-X & 4-X \end{pmatrix} = (2-X)(6-X).\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4-X \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$.

$$P_A(X) = (2-X)(6-X).\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)(6-X)(2-X) = (2-X)^2(6-X)$$

↳ 2 : valeur propre de multiplicité 2.

↳ 6 : valeur propre de multiplicité 1.

$$\begin{cases} \sum \lambda_{ip} = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n} \\ \prod \lambda_i = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{-b}{a} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

$$\sum \lambda_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$\boxed{M}$

- $P_A(X)$
- valeur propre
- Ss-espace-propre

$E_2 = \ker(A - 2\,Id)$

$$B = A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul base $\ker(B)$: $B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ base $\ker(B)$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_6 = \ker(A - 6\,Id)$; $B = A - 6\,Id = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Calcul base $\ker(B)$: $B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$c_3 \leftarrow c_1 + c_3$

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_3 \leftarrow c_3 + 2c_2$

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ argument colinéarité slmt pr 2 vecteurs.

$\Rightarrow$ base $\ker B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prétend $P^{-1}.A.P =$ diagonale $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$.

↳ pas obligatoire.

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car } P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow P\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -2 \\ -1/4 & 1/4 & 3 \\ -1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times -1 \quad \times -1 \quad \times 1/4$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } P^{-1}.A.P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

@2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_A(X) = \det(A - X\,Id) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$

$P_A(X) = (1-X)^3$ → 1 valeur propre, multiplicité 3.

Ss-espace Propre ?

$\ker(A - Id) \rightarrow B = A - 1 \times Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ base $\ker B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim \ker(A - 1 \times Id) = 2 < 3$ multiplicité.

$\Rightarrow \nexists$ base pr laquelle la matrice sera diagonale.

Exemple utilisation $\boxed{M}$ Cramer :

$$\begin{cases} x + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{cases}.$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \det A = 44$, $\det A_1 = -40$, $\det A_2 = 72$, $\det A_3 = 152$.

On a alors les solutions :

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11} \; ;$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \; ;$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

TH **Base incomplète**

E ev ; $e_1, \dots, e_p$ une famille libre (indpts)

$f_1, \dots, f_q$ une famille génératrice (tt vecteur s'écrit ê CL de f)

Alors on pt choisir parmi les f_i des élts $f_{i_1}, \dots, f_{i_s}$ tq $\underline{e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_s}}$ est une base de E.

R

$$\text{Rang (matrice)} = \dim(\text{Image})$$

$$\text{Rang}(A) = \dim(\text{Img } A).$$

$A : E \to F$ AL

= dim espace engendré par les vecteurs de A.

TH $\text{rang}(A)$ = la plus gde taille d'une <u>sm</u> ss-matrice carrée q a un dét non nul.

TH A matrice, λ valeurs propres, m la multiplicité de λ. E_λ sous-espace propre.

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leqslant m$$

évident car $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

<u>Preuve</u> : $f_1, \dots, f_p$ base de E_λ.

On complète en une base de $\mathbb{R}^n$.

Ds cette base on calcule la matrice de A.

$$P^{-1}.A.P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} Af_1 & Af_2 \cdots & Af_p & Af_{p+1} & \cdots & Af_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & \vdots & & ? & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \lambda & & & \\ 0 & 0 & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \text{ligne } p. \\ \\ f_n \end{array} \end{array}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \lambda\, Id & ? \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right) & \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$$

$\underline{P^{-1}.Id = P.Id}$

$$\det(P^{-1}.A.P - X\,Id) = \det(P^{-1}(A - X\,Id)\,P)$$

$$= \det(P^{-1}).\det(A - X\,Id).\det(P) = \det(A - X\,Id)$$

D'autre part : $\det(P^{-1}.A.P - X\,Id)$

$$= \underbrace{\det((\lambda - X)Id)}_{(\lambda - X)^p}.\det(B - X\,Id)$$

$$\det(A - X\,Id) = (\lambda - X)^p.\underbrace{\det(B - X\,Id)}_{\text{polynôme}}$$

$$\overset{\shortparallel}{(\lambda - X)^m\,Q(X)}$$

$\nwarrow$ $Q(\lambda) \neq 0$.

Dc $m \geqslant p$ par unicité de la factorisation.

$\Rightarrow \dim$ Sep $\leqslant$ multiplicité racines P_c.

$\square$

(D) A est diagonalisable si $\exists$ une base ds laquelle la matrice de A est diagonale.

(TH) A est diagonale ssi :

① le polynôme caractéristiq est scindé.
($P_A(X)$ = est produit de facteurs de deg = 1)

② $\forall$ tte racine λ de $P_A(X)$,
on a $\dim(E_\lambda) = m$ = multiplicité.

(Rq) • X^2+1 n'est pas scindé ds $\mathbb{R}$. X^2-2 : pas scindé ds $\mathbb{Q}$.
• si ttes racines st distinctes de multiplicité 1,
$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq 1 \Rightarrow$ matrice diagonalisable.
• polynô complexe : scindé.

(Coro) A matrice $n \times n$, n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diag.

(D) A est trigonalisable (matrice $n \times n$) si $\exists$ base ds laquelle la matrice de A. $(P^{-1}A.P)$ est triangulaire supérieur.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ \emptyset & & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

(Rq) : $\begin{pmatrix} \emptyset & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ a_{12} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A trigonalisable $\Rightarrow$ les élts sr diagonale, de $P^{-1}.A.P$ st valeurs propres.

$\det(P^{-1}.A.P - X\,Id) = \det(A - X\,Id) = (b_{11}-X)(b_{22}-X)\ldots(b_{nn}-X)$
Donc $P_A(X)$ est scindé.

(TH) Si $P_A(X)$ est scindé, alors A est trigonalisable.

Preuve : Par récurrence sur la dimension.
Supposons vrai en dim n.
A matrice $(n+1)\times(n+1)$.
$P_A(X)$ est scindé.
Prenons une racine λ (valeur propre).
$\dim E_\lambda \geq 1$, e_1 vecteur propre.
On complète vers une base pour $e_2, \ldots, e_{n+1}$.
Ds cette nouvelle base,

$$P^{-1}.A.P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ae_1 & Ae_2 \cdots & Ae_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ? \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{array}$$

vecteur propre

B : matrice $n \times n$.

$\det(A - X\,Id) = \underbrace{\det((\lambda - X)\,Id)}_{} . \det(B - X\,Id)$

polynôme scindé par hypothèse.

$(\lambda - X)\,\underbrace{\det(B - X\,Id)}_{\text{polynôme scindé } P_B(X)}.$

$\Rightarrow$ HDR $\exists\, Q$ chgt de base $m \times m$.

$$Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & c_{mm} \end{pmatrix}$$

suite

suite

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ? \\ \hline \vdots & \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$Q^{-1} B . Q = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & c_{mm} \end{pmatrix} \; ; \; \hat{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & Q \end{array}\right)$$

$$\hat{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & Q^{-1} \end{array}\right)$$

$$\hat{Q}^{-1}.\,P^{-1}.\,A.\,P.\,\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ? \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ?? \\ \hline \emptyset & Q^{-1} B Q \end{array}\right)$$

matrice triangulaire $(n+1)(n+1)$

$P.\hat{Q}$ chgt de base

$\square$

- $\boxed{M}$ Multiplicat° de 2 matrices (taille qq)

ici carré : $A . B =$

$$\begin{array}{c} \\ p \\ \\ m-p \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} p & m-p \\ \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & & & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} p \\ \\ m-p \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{array}\right)$$

- A_1, B_1 : taille $p \times p$.
- A_4, B_4 : taille $(m-p)(m-p)$
- A_2, B_2 : p lignes $(m-p)$ col.
- A_3, B_3 : $(m-p)$ lignes p col.

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \det(A - X\,Id) = \det\begin{pmatrix}1-X & 4 & -2\\ 0 & 6-X & -3\\ -1 & 4 & -X\end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad = \det\begin{pmatrix}2-X & 0 & -2+X\\ 0 & 6-X & -3\\ -1 & 4 & -X\end{pmatrix} = (2-X).\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 6-X & -3\\ -1 & 4 & -X\end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad = (2-X).\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 6-X & -3\\ 0 & 4 & -1-X\end{pmatrix} = (2-X).\det\begin{pmatrix}3-X & -3\\ 3-X & -X-1\end{pmatrix}$

$= (2-X)(3-X).\det\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -X-1\end{pmatrix} = (2-X)(3-X)\left((-1-X)+3\right)$

$= (2-X)(3-X)(2-X)$

$= (2-X)^2(3-X).$

2	val^e p	m lp	2
3	—	—	1

Vecteur propre 3 ; $B = A - 3\,Id =$

TH Base incomplète : **Matrice**

E : ev $e_1, \dots, e_p$ une famille libre (indpdts),
$f_1, \dots, f_q$ une famille génératrice (vct^e s'écrit c CL de f)
alors on pt choisir parmi les f_i des élts $f_{i_1}, \dots, f_{i_s}$
tq $e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_s}$ est une base de E.

- Rang (matrice) = dim (Image)

TH rang A = la + gde taille sm carrée q a un dét non nul.

TH A matrice, λ valeurs propres, m la multiplicité de λ.
E_λ sous-espace propre : $1 \leq \dim (E_\lambda) \leq m$

Diagonalisable, Trigonalisable, Polynôme scindé

D A est diagonalisable si $\exists$ une base ds laq^lle la matrice de A est diagonale.

TH A est diagonale ssi :

1. le polynôme caractéristique est scindé.
   ($P_A(X)$ est produit de facteurs de deg = 1)
2. $\forall$ tte racine λ de $P_A(X)$,
   on a $\dim (E_\lambda) = m$ = multiplicité.

(X^2+1 pas scindé ds $\mathbb{R}$.
X^2+2 pas scindé ds $\mathbb{Q}$. $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq 1 \Rightarrow$ mat. diagonalisab) 3

Coro A matrice $n \times n$, n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diag.
(si ttes racines st distinctes de multiplicité 1,
$1 \leq \dim (E_\lambda) \leq 1 \Rightarrow$ matrice diag).

D A est trigonalisable (matrice $n \times n$ si $\exists$ base ds laq^lle la matrice de A : $(P^{-1} A . P)$ est triangul^re supérieur.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

TH Si $P_A(X)$ est scindé alors A est trigonalisable.

Trigonalisat°

① A est trigonalisable ($\triangledown$) ssi $\exists$ mat invers. P & mat $\triangledown$ T tq : $\underline{A = P.T.P^{-1}}$

Th Est trig. ssi son P_c est $\underline{\text{scindé}}$ sur $\mathbb{K}$.

@ $M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$P(\lambda) = \det(M - \lambda \, Id) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & -4 \\ -6 & -2-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$\Leftrightarrow +(7-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$+(-4)\begin{vmatrix} -6 & -2-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

$\Leftrightarrow (7-\lambda)\big((2+\lambda)(1+\lambda)-10\big) - 3\big(6(1+\lambda)-20\big)$

$-4\big(-12+4(2+\lambda)\big) = 0$.

$\Leftrightarrow (7-\lambda)(2+3\lambda+\lambda^2-10) - 3(-14+6\lambda) - 4(-4+4\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (7-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-8) - 6(3\lambda-\lambda) - 16(\lambda-1) = 0$.

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$. produit de fact^{es} simples.

$P(\lambda)$ est scindé.

$\lambda_1 = 1$ est vp, $m(\lambda_1) = 2$. ← ordre multiplicité

$\lambda_2 = 2$ est vp, $m(\lambda_2) = 1$

→ M est trigonalisable.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow M.X = 1 \times X \Leftrightarrow (MX - x.Id) = 0$

$\Leftrightarrow (M - Id)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 7-1 & 3 & -4 \\ -6 & -2-1 & 5 \\ 4 & 2 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y-4z = 0. \\ -6x-3y+5z = 0. \\ 4x+2y-2z = 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -x\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$E_1 = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\underline{\dim E_1 = 1 < m(\lambda_1) = 2}$

Donc M n'est pas diagonalisable.

• $X \in E_2 \Leftrightarrow \ldots\ldots$ $E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

▸ $\lambda_1 = 1 \rightarrow E_1 = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\lambda_2 = 2 \rightarrow E_2 = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$3 = \dim M \neq \dim E_1 + \dim E_2$.

On recherche 3ᵉ vecteur.
On calcule produit vectoriel.

$$v_3 = v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}.$$

Donc $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$

$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 2 & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ vp double dc $\gamma = 1$.

valeur propre $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 2 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$M.v_1 = 1.v_1.$

$M.v_2 = 2.v_2.$

$$M.v_3 = \begin{pmatrix}7 & 3 & -4\\ -6 & -2 & 5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}46\\-43\\23\end{pmatrix}.$$

$v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = -e_1 + 2e_2.$

$v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = e_1 + e_2 + 2e_3.$

$v_3 = \begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix} = 4e_1 + 2e_2 - 3e_3$

$M.v_3 = \alpha.v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$M.v_3 = 46.e_1 - 43e_2 + 23e_3.$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(-e_1 + 2e_2)\\ +\beta(e_1 + e_2 + 2e_3)\\ +\gamma(4e_1 + 2e_2 - 3e_3)\end{array}\right| = 46e_1 - 43e_2 + 23e_3.$$

$$\begin{cases}-\alpha + \beta + 4\gamma = 46\\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = -43\\ 2\beta - 3\gamma = 23\end{cases}$$

$\gamma = 1$

$\lambda = 1$, vp, $m(\lambda) = 2.$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta = 13\\ \alpha = -29\\ \gamma = 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix}1 & 0 & -29\\ 0 & 2 & 13\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On prend $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$: $A^2 - 5A + 6\,Id = 0$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & 9 & \\ & & & & 9 \end{pmatrix}$; $5A = \ldots$; on constate $A^2 - 5A + 6\,Id = 0$.

$A^2 - 5A + 6 = (A-3)(A-2) = (A - 3\,Id)(A - 2\,Id)$.

$A - 3\,Id = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

→ il existe un polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 6$, tq $P(A) = 0$

→ En général : P un polynôme, A une matrice $\}$ $P(A)$ matrice.

$$P = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

$$P(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0\, Id.$$

On peut trouver un polynôme q admet une racine nulle pr n'importe qu'elle matrice.

Déterminant de Vandermonde :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_m \\ a_1^2 & \ddots & a_m^2 \\ \vdots & & \\ a_1^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \emptyset & \vdots \\ \vdots & & \emptyset & & \ddots & 0 \\ & & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & & -a_{m-1} \end{pmatrix} = A.$$

$$\boxed{P_A(X) = (-1)^m \left[X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \right]}$$

↳ tout polyn. s'obtient ss cette forme.

- A mat, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ vp distincts, E_{λ_i} epropre.

↳ les $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ st en somme directe, $x_i \in E_{\lambda_i}$,

$x_1 + \ldots + x_p = 0$ (*) $\Rightarrow \forall i,\ x_i = 0$.

"Preuve" R. $A x_1 + \ldots + A x_p = 0$.

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$ (**)

(**) $- \lambda_p$ (*) : $(\lambda_1 - \lambda_p) x_1 + \ldots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1} = 0$.

$y = x_1 + \ldots + x_p$ $(=0)$ et $Ay = A(x_1 + \ldots + x_p)$

$\lambda_p y = \lambda_p (x_1 + \ldots + x_p)$.

(**) $- \lambda_p$ (*) : $(A - \lambda_p Id)(y)$

$x_1 + \ldots + x_p = 0 \Rightarrow (A - \lambda_p Id)(x_1 + \ldots + x_p) = 0$.

$\underbrace{(A - \lambda_p Id)(x_1)}_{(\lambda_1 - \lambda_p) x_1} + \ldots + (A - \lambda_p Id)\, x_p = 0$

$\Rightarrow (\lambda_{p-1} - \lambda_p)\, \lambda_{p-1} + \ldots + (\lambda_p - \lambda_1)\, x_p = 0$.

On applique successivement :

$(A - \lambda_2 Id)(A - \lambda_3 Id) \ldots (A - \lambda_m\, Id)$

Il reste $\overbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \ldots (\lambda_1 - \lambda_p)}^{\text{sur } \stackrel{\neq 0}{(x_1 + \ldots + x_p)} = 0} x_1 = 0$ → donc $x_1 = 0$

(Rq) $(A-\lambda_1 Id)(A-\lambda_{i-1} Id)(A-\lambda_{i+1})\dots$
$\dots(A-\lambda_p Id) = B.$

Si x v_p pour $\lambda_j \Rightarrow \begin{cases} Bx = 0 & \text{si } j \neq i \\ Bx = \bullet \end{cases}$

$\bullet = \underbrace{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\dots(\lambda_i-\lambda_{i-1})\dots(\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_p)}_{\neq 0}x$

$(A-\lambda_{p-1} Id)(A-\lambda_p Id) = (A-\lambda_p Id)(A-\lambda_{p-1} Id)$

deux matrices q commutent

$\square$

Preuve (m̂ ϕ mat Vandermonde, p col, n lignes)

· $x_i \in E_{\lambda_i}$ vecteur

· mat $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_p) \neq \begin{pmatrix} (x_1)_1 & \cdots & (x_p)_1 \\ (x_1)_2 & \cdots & \vdots \\ (x_1)_m & \cdots & (x_p)_m \end{pmatrix}$

$X\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1)_1 + (x_2)_1 + \dots + (x_p)_1 \\ \vdots \\ (x_1)_m + (x_2)_m + \dots + (x_p)_m \end{pmatrix}$

$A(x_1+x_2+\dots+x_p) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$

$\underbrace{(x_1 \dots x_p)}_{\text{matrice } n\times p}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$

$A^2(x_1+\dots+x_p) = \lambda_1^2 x_1 + \dots + \lambda_p^2 x_p = (x_1 \dots x_p)\begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_p^2 \end{pmatrix}$

$x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$

(on applique A) $\Rightarrow \lambda_1^2 x_1 + \dots + \lambda_p^2 x_p = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow \lambda_p^{p-1} x_1 + \dots + \lambda_p^{p-1} x_p = 0.$

$M = (x_1 \dots x_p)$ mat $m \times p$.

$M\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{0}$ jusqu'à $M\begin{pmatrix} \lambda_1^{p-1} \\ \vdots \\ \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = 0.$

$M\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \bar{0}$

$M\begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_p^2 \end{pmatrix} = \bar{0}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{p-1} \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = 0$ mat $(m\times p)$

$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$ a un det $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$

Donc inversible.

soit P sa matrice inverse.

$V.P = Id$ (taille $p\times p$).

$M.V = 0$ $(m\times p)$

$\Rightarrow M.\underbrace{V.P}_{Id} = 0$ $(m\times p)$ $\Rightarrow M = 0 \Rightarrow M = (x_1 \dots x_p)$

chaque $x_i = 0$

$\square$

But : ∘ Sep sont en somme directe.

∘ Ds chaque Sep, on prend une base, on les réunit $\Rightarrow$ vecteurs, ds chq ss-espace indépendants, si suffisament alors forme une base sinon compléter de vecteurs pr former base.

E_{λ_i} ss-espace propre pr $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ dist^{ts},

$e_1^i, \dots e_p^i$ base de E_{λ_i} de dim p.

$$\underbrace{e_1^1, e_{p_1}^1}_{\text{indep}}, \underbrace{e_1^2, e_{p_2}^2}_{\text{indep}}, \dots, e_1^q, e_{p_q}^q \in E\ (= \mathbb{R}^n)$$

(Prop) Ce sont des vecteurs indépendants.

$$\underbrace{\lambda_1^1 e_1^1 + \lambda_2^1 e_2^1 + \dots + \lambda_{p_1}^1 e_{p_1}^1}_{x_1} + \lambda_1^2 e_1^2 + \dots + \lambda_{p_2}^2 e_{p_2}^2 + \dots + \underbrace{\lambda_1^q e_1^q + \dots + \lambda_{p_q}^q e_{p_q}^q}_{x_q} = 0$$

à déduire tous les $\lambda_j^p = 0$.

$x_1 + x_2 + \dots + x_q = 0$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ par le résultat précédent $\forall i\ x_i = 0$.

$x_1 = \lambda_1^1 e_1^1 + \lambda_2^1 e_2^1 + \dots \lambda_{p_1}^1 e_{p_1}^1 = 0$.

$e_1^1, \dots, e_{p_1}^1$ base de E_{λ_1}. $\Rightarrow \lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \dots = \lambda_{p_1}^1 = 0$

A matrice, P_A scindé alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ ds $\mathbb{R}^n$ ds tq^{le} matrice (A).

$$A = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} a_{11} & & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Preuve par récurrence :

λ vp, v : vecteur propre pr λ, on complète en 1 base. $v_1 e_1, \dots e_n$ de $\mathbb{R}^n$.

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & ? \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right), \quad Q^{-1} B Q = \left(\begin{array}{c|c} \mu & ? \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right).$$

. λ : vp de A, de multiplicité m.

. λ —— B —— m-1.

$P_A(X) = (\lambda - X)\, P_B(X)$ puis $(\lambda - X)^m Q(X) = (\lambda - X)$

$Q(\lambda) \neq 0$.

$\Rightarrow$ on trouve P chg^t de base tq

$$\begin{array}{c} \quad\quad Ae_1\ Ae_2 \dots \\ P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \dots \lambda_1 & & ? \\ \hline & \lambda_2 \dots \lambda_2 & \\ \hline \emptyset & & \dots \lambda_q \end{array}\right) \end{array}$$

m_1 : multiplicité de λ_1.

$Ae_1 = \lambda_1 e_1$

$Ae_2 = ?\, e_1 + \lambda_1 e_2$

On constate que ss-espace engendré par $e_1, \dots, e_m$ est stable par A. La mat de A restreint a un sev.

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & ? \\ \emptyset & \lambda_1\end{pmatrix}$; on a $(A - \lambda_1 Id) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ \emptyset & 0\end{pmatrix}$

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}^n = 0 \leftarrow \text{matrice}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{n-2,n} \\ \emptyset & & & 0 \\ & & & 0\end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & & \\ \emptyset & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

On constate

Cor $\underbrace{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_m)}_{\text{de dim } m_1} = \ker\left[(A-\lambda Id)^{m_1}\right]$

$$P^{-1}(A-\lambda_1 Id)\,P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & ? \\ \emptyset & 0 \end{matrix} & ? \\ \hline \emptyset & \begin{matrix} \lambda_2-\lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_q-\lambda_1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

mat ∇ à valeurs non nulles sur la diag.

$$P^{-1}(A-\lambda_1 Id)\,P = \left(\begin{array}{c|c} N & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ mat inversible.

et $N^{m_1} = 0$.

$$P^{-1}(A-\lambda_1 Id)^{m_1} P = \left(\begin{array}{c|c} N & ? \\ \hline & B \end{array}\right)^{m_1} = \left(\begin{array}{c|c} N^{m_1} & ? \\ \hline 0 & B^{m_1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \\ \hline 0 & B^{m_1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ B^{m_1} est inversible.

D A $(n\times n)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ vp distincts, on suppose P_A est scindé (dc mat trigonalisable), m_i multiplicité de λ_i ds P_A.

N_{λ_i} = ss-espace caractéristiq $= \ker\left[(A-\lambda_i Id)^{m_i}\right]$

E_{λ_i} = ss-espace propre $= \ker(A-\lambda_i Id)$.

On sait $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq m_i$ et $\dim N_{\lambda_i} = m_i$.

P si on a $x_i \in N_{\lambda_i}$ tq $x_1+\dots+x_p = 0$ alors $\forall i$, $x_i = 0$.

Preuve : On calcule :

$$(A-\lambda_1 Id)^{m_1}\dots(A-\lambda_{p-1} Id)^{m_{p-1}}(x_1+\dots+x_p) = 0$$

↳ ces mat commutent.

$\Rightarrow$ sur $x_1,\dots,x_{p-1}$: on obtient 0 car $x_i \in \ker\left((A-\lambda_i Id)^{m_i}\right)$

$$\Rightarrow (A-\lambda_1 Id)^{m_1}\dots(A-\lambda_{p-1} Id)^{m_{p-1}}\, x_p = 0.$$

A restreint à N_{λ_p} a la forme $\begin{pmatrix} \lambda_p & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_p \end{pmatrix}$

$x_p \in N_{\lambda_p}$.

$(A-\lambda_1 Id)$ restreint à N_{λ_p} a la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_p-\lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_p-\lambda_1 \end{pmatrix} \to \lambda_p - \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \text{mat inversible}$$

De même pr $A-\lambda_2 Id$: la restriction à N_{λ_p} est une mat inversible.

$$\underbrace{(A-\lambda_1 Id)^{m_1}}_{\text{mat inv}}\dots\underbrace{(A-\lambda_{p-1} Id)^{m_{p-1}}}_{\text{mat inv}}\, x_p = 0 \quad \Rightarrow x_p = 0$$

Cor1 $\exists$ une base de $\mathbb{R}^n$ tq matrice $P^{-1}.A.P$:

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & ? \\ \emptyset & \lambda_1 \end{matrix} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \begin{matrix} \lambda_2 & ? \\ \emptyset & \lambda_2 \end{matrix} & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \lambda_3 & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & \begin{matrix} \lambda_p & ? \\ \emptyset & \lambda_p \end{matrix} \end{array}\right)$$

Cor ① $P_A(A) = 0$ Cayley - Hamilton.

② Décomposit° de Dunford.

⇝ CLÔTURE ALGÉBRIQ du CORPS.

⇝ ↳ TOUT polynôm pt ê scindé.

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$, ...

(Cor) 1) $P_A(A) = 0$ Cayley-Hamilton

2) Décomposit° de Dunford

⇝ clôture algébriq du corps (tt polyn. pt ê scindé).

(TH) (Cayley-Hamilton) :

Une mat A, P_A : polyn caractéristiq,

$P_A(X) = (-1)^n . X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

alors $(-1)^n . A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 . Id_n = \underset{\text{matrice}}{0}$.

(D) A mat $n \times n$, le polyn minimale de A : P_{min} est un polyn. unitaire :

$P_{min}(X) = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

② $P_{min}(A) = 0$ ← matrice.

③ Si Q polyn. tq $Q(A) = 0$

alors $\deg(Q) \geq \deg(P_{min})$.

(P) Si Q polyn tq $Q(A) = 0^{\text{(matrice)}}$ alors

$\exists$ polyn R tq : $\boxed{Q = R . P_{min}}$.

(TH) Décomposit° de Dunford

A mat $(n \times n)$ (A (AC)).

$P_A(X)$ scindé

Alors il existe 2 matrices D et N uniq, $A = D + N$

① $A = D + N$

② D est diagonalisable

③ N est nilpotente ($\exists k \in \mathbb{N}, N^k = 0^{\text{(matrice)}}$ @ (mat ∇) puisque toute mat = mat nilpot)

④ $ND = D.N$

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \emptyset \\ & \lambda_2^k & \\ \emptyset & & \ddots \; \lambda_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 x} & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

Cas mat n'est pas diagonale MS diagonalisable ; $D = P^{-1} . A . P$