M43. C1 - **Espaces probabilisées**

I / Événements observables et opérations ensemblistes

- Ω : ensemble résultats possibles de l'expérience
- Résultats : événements élémentaires si $|ens| = 1 = card(ens)$
- Événements observables : événement où l'on peut dire si produit oui ou non
- A événement obs. d'où $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$; $A \Rightarrow B$ ie $A \subset B$.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- Nombre d'ordres possibles pour n objets : $n!$
- Nombre de façon de prendre p objets parmi n : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
- Ensemble ∞ E dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers E,

$$E = \{u_1, u_2, \dots\}$$

- Formule du Binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k \cdot b^{n-k}$
- Séries géométriques :
  - si $x \neq 1$, $\sum_{k=M}^{N} x^k = \frac{x^M - x^{N+1}}{1-x}$
  - si $|x| < 1$, $\sum_{k=M}^{\infty} x^k = \frac{x^M}{1-x}$
- Série exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

III / Une probabilité est une fonction d'un ensemble

- Ω : ensemble résultats possibles de l'expérience
- $\mathcal{F}$: ensemble événements observables.

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega \qquad \underline{\text{ie}} \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$
$$A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

⚠ $\mathcal{F}$ n'est pas partie de Ω

Définition : $\mathcal{F}$ est une tribu si :

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$: on sait dire si l'évent a eu lieu

(ii) si $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$ (voir évent réalisé ou non)

(iii) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

- Un ensemble $\mathcal{F}$ avec propriétés s'appelle tribu sur Ω.
- Si Ω est fini, on choisit souvent $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition : Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application σ-additive de masse totale 1. ($P(\Omega) = 1$: masse totale)

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A)$$

- σ-additivité : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ d'éléments de $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints. (pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$).
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé. $(\Omega, \mathcal{F})$ espace probabilisable.

Propriétés probas : Toute proba P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie :

(i) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$; indépendants

si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints $\Longrightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(iii) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(v) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ [voir ff Poincaré]

(vi) Continuité séquentielle croissante et décroissante :
- pour toute suite croissante events $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$
- pour toute suite décroissante events $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(C_n)$

(vii) Pour events quelconque (même non disjoints) :
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

C2 - Probabilité conditionnelle, indépendance

$$P_H(A) = P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad tq \quad P(H) \neq 0.$$

$$P_H = P(\cdot \mid H) : \begin{array}{l} \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A \mid H) \end{array} \quad \text{est une proba sur } \Omega, \mathcal{F}.$$

Règle de conditionnement successif (ou proba composées) :
Si les Events $A_1, \dots, A_n$ sont tq $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ alors

$$P(A_n \cap \dots \cap A_1) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \times \dots \times P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_1)$$

Définition : Une partition de Ω : une famille $(H_i)_{i \in I}$ d'events non vides ($\forall i \in I$, $H_i \neq \emptyset$) 2 à 2 disjoints ($i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$) et dont l'union est Ω. ($\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$) (Un système complet d'events).

- si $P(H) \neq 0$ et $P(H^c) \neq 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = P(A \mid H).P(H) + P(A \mid H^c).P(H^c)$
- si $H_1, \dots, H_n$ est une partition de Ω constituée d'events tous de proba $\neq 0$:
$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = P(A \mid H_1).P(H_1) + \dots + P(A \mid H_n).P(H_n)$$
- si $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partition de Ω, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}$,
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid H_i).P(H_i)$$

Formule de Bayes : $$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j).P(H_j)}{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A \mid H_i).P(H_i)}$$ où H_i : partition de Ω

II / Indépendance

- Initialement si aucune information sur A : $P(A \mid B) = P(A)$.

Définition : 2 events A, B sont indépendants sous la proba P si $$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Remarque : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A).P(B)$

Proposition : si A, B indépendants sous $P \Rightarrow A, B^c$ aussi (resp. $A^c; B, A^c; B^c$)
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

III / Indépendance de plus 2 événements

Proposition : (i) A, B, C sont indépendants sous P si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
$P(A \cap C) = P(A).P(C)$
$P(B \cap C) = P(B).P(C)$
et $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$;

(ii) n évents sont indépendants si proba intersection = produit proba.

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appelé "suite évents indépendants" si $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ sont indépendants pour chaque choix nombre fini d'indices distincts

- Suites épreuves indép : lors suite expérience, elles sont indépendantes si toute suite évents $A_1, \dots, A_4, \dots$ où chaque A_i ne dépend que résultats des prochaines expériences, forme suite évents indépendants.
- Schéma de Bernoulli : suite expérience indép toutes même proba. (p succès, $1-p$ échec).
- $A_i = \{$succès à i^e épreuve$\}$, $\mathcal{D}_n = \{1°$ succès arrive à $n°$ épreuve$\}$

$$P(\mathcal{D}_n) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) = P(A_1^c) \times \dots \times P(A_n) = (1-p)^{n-1} \times p.$$

- $G_{n,k} = \{k$ succès & $n-k$ échecs parmi n épreuves$)$

$$P(G_{n,k}) = P\Big(\bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ card(I) = k}} \Big(\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{\substack{j \notin I \\ j \leq n}} A_j^c\big)\Big)\Big) \quad (\text{2 à 2 disjoints})$$

$$P(G_n, k) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} P\big((\cap A_i) \cap (\cap A_j^c)\big) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \prod (P(A_i)) \prod P(A_j^c) = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Loi binomiale)

- Loi de Murphy : "Tout ce q pt mal tourner finira par mal tourner".

(C3) Variable aléatoire et Lois

Définition : Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega)$$

tq $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$: ensemble fini ou dénombrable.

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ ou } X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

- $\forall x_k \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x_k\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k \in \mathcal{F}\}$

$$X^{-1}(\{x_k\}) \overset{not}{=} \{X = x_k\} \quad (\text{image réciproque})$$

Notation : $\{X \leq t\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\} = X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$

$$\{a \leq X \leq b\} = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\} = X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}.$$

Pour X variable aléatoire discrète, on note $p_k = P(X = x_k)$ pour chaque $x_k \in X(\Omega)$.

$$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_X(B) = \sum_{x_k \in B} p_k = \sum_{x_k \in B} P(X = x_k) = P(X \in B)$$

- P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée loi de X.

Définition : La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction :
$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto F_X(t).$$

$$F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t) = \sum_{x_k \in X(\Omega),\, x_k \leq t} P(X = x_k)$$

Remarque : L'indicatrice event A : $\mathbb{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$$\omega \longmapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

- Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $X \sim Ber(p)$
  si $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$
- Loi uniforme sur ens fini $\{x_1, \dots, x_n\}$: $X \sim Unif(\{x_1, \dots, x_n\})$
  si $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\forall\, 1 \leq k \leq n$ <u>ie</u> P_X Équiproba.
- Loi Binomiale de paramètre n et p $(n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1])$: $X \sim Bin(n,p)$
  si $P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$ où $\sum C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = 1$
  si events $A_1, \dots, A_n$ indépendants proba p : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \sim Bin(n,p)$
- Loi Hypergéométrique de paramètre N, M, n : $X \sim Hypergeom(N, M, n)$
  si $P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} & \text{si } 0 \leq k \leq n, 0 \leq k \leq M, 0 \leq n-k \leq N-p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Loi géométrique de paramètre p : $X \sim Geom(p)$, si $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
- Loi de Poisson paramètre λ, $\lambda \in]0, \infty[$: $X \sim Pois(\lambda)$ si $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
- Mesure de Dirac en $c \in \mathbb{R}$: $X \sim \delta_c$ si $P(X=c) = 1$.

Définition : • La loi $Bin(n,p)$ est loi nombre "succès" obtenus en n expériences aléatoires indépendantes qui ont toutes même proba p de "succès".

• La loi $Hypergeom(N, M, n)$ est loi nombre objets remarquables tirés quand on tire au hasard sans remise dans tas N objets dont M sont remarquables.

• La loi $Géom(p)$ est loi du nombre tentatives nécessaire pour obtenir 1° "succès" dans suite de tentatives indépendantes qui ont toutes même proba p de succès.

Théorème : Convergence des binomiales vers les Poisson

si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dans $[0,1]$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lambda > 0$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} C_n^k \, p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(Y=k)$ si $X_n \sim Bin(n, p_n)$ et $Y \sim Pois(\lambda)$

Théorème : Convergence des Hypergéométriques vers les binomiales

si $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = p \in [0,1] \Rightarrow \forall k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{C_{M(N)}^k \cdot C_{N-M(N)}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

ie $\lim\limits_{N\to\infty} P(X_n = k) = P(Y=k)$ si $\begin{cases} X_n \sim Hypergeom(N, M(N), n) \\ Y \sim Bin(n,p) \end{cases}$

(si taille N objets très grand $\Rightarrow$ tirer n objets avec ou sans remise ne change pas grand chose).

IV / Vecteurs aléatoires discrets

Définition : soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur même $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ l'application :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)). \end{aligned}$$

Sa loi est la proba $P_{X_1,\dots,X_m}$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ par :
$\forall B \in \mathbb{R}^m$, $P_{X_1,\dots,X_m}(B) = P(\{\omega \in \Omega, (X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)) \in B\})$

Elle est caractérisée par $P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_i = x_i\})$ pour toutes valeurs x_1 de $X_1(\Omega)$, ...

si $m = 2$: couple aléatoire, la variable aléatoire X_i est $i^{ème}$ marginale du vecteur aléatoire, sa loi P_{X_i} est $i^{è}$ loi marginale.

Remarque : loi $\longrightarrow$ loi marginale mais loi marginale $\not\longrightarrow$ l.

Astuce : si (X, Y) couple aléatoire $\forall x \in X(\Omega)$,
$$P(X = x) = P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y) \quad \text{car } \{X = x\} = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X = x \text{ et } Y = y\}$$

Définition : • 2 variables aléatoires X et Y définies sur un même $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendantes si $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) . P(Y \in B)$.

• les 2 variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendantes si les events $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ sont indépendantes pour toutes parties de $A_1, \dots, A_m$ dans $\mathbb{R}$.

• suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variable aléatoire définie indépendante si toute sous-suite est indépendante.

Proposition : $X_1, \dots, X_m$ vad indépendantes si $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_m \in X_m(\Omega)$
$$P(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_i = x_i\}) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i = x_i)$$

Proposition : si $X_1, \dots, X_m$ sont vad indépendantes et si $f_1, \dots, f_m$ sont des applications définies, resp. sur $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ sont indépendants.

On note $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée $\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$

Loi multinomiale de param $n, p_1, p_2, \dots, p_n$

- $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r \in [0,1]$ tq $p_1 + \dots + p_r = 1$.
- n expériences indép ont chacune r résultats possibles de proba resp $p_1, \dots, p_r$

On note X_1 le nombre fois où on a resp type $1, \dots, X_r$, nbr ... type r.

$(X_1, \dots, X_r) \sim \mathcal{M}ult(n, p_1, \dots, p_r)$; $\forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{k_i}) \, \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{r} k_i = n}$$

Remarque : $\binom{k_1}{n} \binom{k_2}{n-k_1} \binom{k_3}{n-k_1-k_2} \cdots \binom{k_r}{k_r} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)}$

(C4) Espérance, Variance, Inégalités de Markov et Tchebitchev

1) Définition

- Une variable aléatoire discrète X est intégrable si $\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < \infty$
- Une espérance alors $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$
- si $X(\Omega)$ finie ou bornée : $|x_k| \leq M \Rightarrow X$ est intégrable.
- 2 variables aléatoires qui ont même loi $\Rightarrow$ ont même espérance.
- L'espérance n'est pas une valeur très probable.
- X peut ne pas avoir d'espérance.

2) Propriétés

soit X, Y 2 variables aléatoires définies intégrables.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$, si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$, si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.
- si X intégrable et $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intégrable.

Espérance lois classiques

- $X \sim \delta_c : E(X) = c$; $X \sim Unif(\{x_1, \dots, x_n\}) : E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- $X \sim Ber(p) : E(X) = p$; $X \sim Bin(n,p) : E(X) = np$
- $X \sim Hyperg(N,M,n) : E(X) = M.\frac{n}{N}$; $X \sim Geom(p) : E(X) = \frac{1}{p}$.

Lemme : $\sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P(X=k) = \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} P(X=k) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} P(X=k)}_{P(X \geq i)}$

- Pour X va, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$ si cette série converge.

Théorème de Fubini : $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}$ → si u_{ik} tous ≥ 0
ou
→ si $\sum_i \sum_k |u_{ik}| < \infty$

Espérance fonction variable aléatoire :

$$E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) . P(X = x_k)$$

Proposition : si X variable aléatoire $|E(X)| \leq E(|X|)$

Remarque : On peut avoir $f(X)$ intégrable et X non intégrable.

II / Moments de variable aléatoire et inégalité de Markov

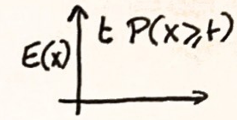
Définition : $r \in \mathbb{N}^*$, le moment d'ordre r de va X est $E(X^r)$.

- X a un moment d'ordre r ssi $E(|X|^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|^r P(X = x_k)$.

Remarque : ◦ Espérance : moment d'ordre 1.
◦ 1 va bornée a des moments de tout ordre.

Proposition : Une va qui a un moment d'ordre r a des moments de tous les ordres inférieurs.

Inégalité de Markov



- si $X \geqslant 0$ et intégrable : $\forall t > 0 : P(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}$.
- si X a un moment d'ordre r : $\forall t > 0 : P(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{E(|X|^r)}{t^r}$
- $F_X(t) = P(X \leqslant t) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leqslant t}} P(X = x_k)$

III / Variance et inégalité de Tchebitchev

Définition : soit X va ayant un moment d'ordre 2 :

sa variance est $Var(X) = E((X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Propriétés de la variance : si X a un moment d'ordre 2 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$
2) $\forall b \in \mathbb{R}$, $Var(X + b) = Var(X)$
3) $Var(X) = 0 \iff X \sim \delta$ où $c = E(X) \iff P(X = c) = 1$.

Variances des lois classiques :

$X \sim Ber(p)$, $Var(X) = p(1-p)$; $X \sim Bin(np)$, $Var(X) = np(1-p)$

$X \sim Pois(\lambda)$, $Var(X) = \lambda$; $X \sim Geom(p)$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Inégalités de Tchebitchev : si X a mmo 2, $\forall t > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{Var(X)}{t^2}$$

Covariance :

Proposition : si X, Y va indépendantes avec espérance $\Rightarrow XY$ a espérance

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X a mmo 2 -

$$E(|XY|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}.\sqrt{E(Y^2)}$$

Définition : • si (X,Y) couple avec va de mmo 2, la covariance est :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

• si de plus non-nulles, coefficient de corrélation est :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$$

Proposition : ∘ $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$; si X,Y,Z mmo 2.

∘ $\mathrm{cov}(X+Y,Z) = \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Z)$

∘ $\mathrm{cov}(aX+b, cY+d) = ac\ \mathrm{cov}(X,Y)$

∘ $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}$ ie $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

Corrélation : ∘ si $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$: X,Y décorrélées (sont indep)

∘ si $\mathrm{cov}(X,Y) > 0$: X,Y positiv. corrélés (Y tendance ↗ qd X ↗)

∘ si $\mathrm{cov}(X,Y) < 0$: X,Y négativ. corrélés (Y tendance ↘ qd X ↗)

Proposition : si X et Y sont indépendants $\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$

Variance d'une somme de variable aléatoire

• $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$

• $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

C5 : Convergence et Lois grands nombres

• Répétition n fois indep même loi $\Rightarrow$ valeurs $X_1, \dots, X_n$ sont vai et même loi.

• Moyenne empirique : $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Définition : sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la suite de va $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers les va W si $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|V_n - W| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{ie} \quad V_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{proba}} W$$

Théorème: Loi faible des grands nombres

si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de va indep ayant toutes même loi qui a un mmo 2 $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|\overline{X}_n - E(X_1)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

et donc $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{proba} E(X_1)$ va constante loi de Dirac.

II / Convergence presque sûre

Définition: $A \in \mathcal{F}$ est event négligeable si $P(A)=0$.

Définition: sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suite va $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers variable aléatoire W si

$$P(\{w \in \Omega, \lim_{n\to\infty} V_n(w) = W(w)\}) = 1$$

ie si event $\{V_n$ ne converge pas vers $W\}$ est négligeable.

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.s} W.$$