M-52 Pr: Leonid Potyagailo

TOPOLOGIE

CALCULS INTÉGRALES

Espaces Vectoriels Normés

1. normes, normes équivalentes, exemples classiques ; ouverts, fermés, intérieur et adhérence d'une partie, parties denses, caractérisation séquentielle ; compacité (définition séquentielle).

Fonctions entre espaces vectoriels normés

1. **limite**, continuité, applications lipschitziennes; image continue d'un compact ; théorème du point fixe contractant.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. équivalence des normes et continuité des applications linéaires, les compacts sont les fermés bornés.

2. Intégrales doubles et formule de Green-Riemann : intégrale d'une fonction continue sur unpavé du plan ; sous-ensembles quarrables du plan et leurs aires, exemples des parties élémentaires $(x,y) \in R^2; a \leq x \leq b, \varphi 1(x) \leq y \leq \varpi 2(x)$ avec φ 1 , φ 2 continues ; intégrales sur un sous-ensemble quarrable duplan, théorème de Fubini (admis), formule du changement de variable (admise) ; champs de vecteurs sur un ouvert de R 2 , rotationnel, intégrale curviligne et formule de Green-Riemann (admise).

M 52 - Topologie & Calculs d'intégrales

(C0) Rappels sur Espaces Vectoriels

(D)$_1$ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v.) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opérations (addition & multiplication) entre les élts de V.

- Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \to V$, $\forall x,y \in V : (x,y) \mapsto x+y$

$\forall x,y,z \in V :$
- $x+y = y+x$
- $x+(y+z) = (x+y)+z$
- $\exists\, 0 \in V,\ 0+x = x$
- $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y = 0,\ y := -x$.

Multiplication entre les vecteurs

- $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x,y \in V :$
- $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$
- $1 \cdot x = x$
- $(\alpha + \beta) x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $\alpha (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(D)$_2$ • Un syst fini de vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ est libre si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

• Un syst qq vct^{rs} $\{e_i : i \in I\} = E$ est libre si tt "système fini de E est libre.

(D)$_3$ V est dim $n \in \mathbb{N}$ s'$\exists$ (st) n vecteurs & tt syst de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

(D)$_4$ 2 ev sur $\mathbb{K}$: V & V^* st isomorphes s'$\exists$ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte les opérations.

si $\begin{array}{l} \varphi(v) = v^* \\ \varphi(u) = u^* \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi(u+v) = u^* + v^* \\ \varphi(\lambda u) = \lambda u^* \end{array}$

(D)$_5$ Un ss-ens V_1 de l'ev V est dit ss-espace de V si V_1 est un (ev) pour mêmes opérations.

(Ppté) si $V_i \subset V$ $(i \in I)$, un sev alors $V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un ss-espace de V.

(D)$_5$ soit X un ss-ens d'1 ev V.

On note $\mathrm{Vect}(X) = \{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ x_i \in K \}$

↳ ttes CL finis de vect^{rs} de X.

Topologie et calcul intégral
M52B
Questions théoriques

(1) Définir un espace vectoriel et donner des examples. Démontrer que l'intersection quelconque des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Définir une norme sur un espace vectoriel. Démontrer le corollaire de l'inégalité triangulaire : $|||x|| - ||y||| \leq ||x-y|| \leq ||x|| + ||y||$.

(2) Donner la définition de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ Démontrer l'inégalité de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz. En déduire l'inégalité triangulaire.

(3) Démontrer que les espaces vectoriels l_2 et $C_2[a,b]$ sont normés.

(4) Définir un ensemble ouvert dans V [1]. Démontrer qu'une boule ouverte est un ensemble ouvert. Démontrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ensemble ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ensemble ouvert.

(5) Définir un ensemble fermé dans V. Démontrer que une intersection quelconque de fermés est un ensemble fermé, et qu'une réunion finie de fermés est un ensemble fermé. Démontrer que la sphère $S(a,r)$ de rayon r centrée en $a \in V$ est un ensemble fermé.

(6) Pour un ensemble $A \subset V$ définir un point adhérent de A, l'adhérence $\overline{A}$ de A, l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A, le bord de A, un point d'accumulation et l'ensemble $\Lambda(A)$ des points d'accumulation, un point isolé et l'ensemble des points isolés $\mathsf{Isol}(A)$. Indiquer tous ces ensembles si $A = \mathbb{Q}$. Démontrer $x \in \partial A$ ssi pour tout voisinage U_x on a $U_x \cap A \neq \emptyset$ et $U_x \cap A^C \neq \emptyset$.

(7) Montrer qu'un ensemble $F \subset V$ est fermé ssi $\overline{F} = F$; et que $\overline{F}$ est le plus petit sous-ensemble fermé de V contenant F. Démontrer $\partial(B(a,r)) = S(a,r)$.

(8) Définir deux normes équivalentes. Démontrer que les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Expliquer pourquoi les normes de l_1, l_2 et l_∞ ne sont pas équivalentes.

(9) Définir un ensemble dense. Donner des exemples. Montrer que les espaces l_1 et l_2 possèdent des sous-ensembles denses dénombrables et l_∞ non. Définir un sous-ensemble nulle part dense (n.p.d) et démontrer que $A \subset X$ est n.p.d ssi $\mathrm{int}\overline{A} = \emptyset$.

(10) Définir un espace métrique complet. Expliquer pourquoi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont complets sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ non. Démontrer que l_2 (et en particulier $\mathbb{R}^n$) muni de la norme euclidienne) est complet.

(11) Démontrer que tout sous-ensemble A d'un espace complet X est complet ssi $A \subset X$ est fermé. Démontrer que $C_2[a,b]$ n'est pas complet (on peut choisir $a = -1$ et $b = 1$).

(12) Démontrer qu'un espace métrique X non-vide est complet ssi toute suite de boules fermées emboîtées dont les rayons tendent vers zéro possède un point commun.

(13) Enoncer et démontrer le théorème de Baire. En déduire qu'un espace métrique complet n'est pas une réunion dénombrables de sous-ensembles nulle part denses.

1. Dans les questions (4-7) V désigne un espace vectoriel normé.

M52 Quest°s théoriqs 1

1)a) Définir ev & donner des exemples.

b) Dmq intersect° qq sev d'un ev est sev.

c) Définir une norme sur ev.

d) Mq corollaire $\triangle$I $\left|\|x\|-\|y\|\right| \leq \|x-y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

1) a) Un ens V est espace vectoriel sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opérat°s (addit° & multiplicat°) entre les élts de V.

ex $\{0\}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\mathbb{K}[X]$.

b) si $V_i \subset V$ $(i \in I)$, un sev alors $V^* = \bigcap_{i\in I} V_i$ est un sev de V.

DM si $u, v \in V^*$ alors $\forall i \in I$, $u, v \in V_i$.

$u+v \in V_i$; $\lambda u, \lambda v \in V_i$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall i \in I$

$\Rightarrow u+v \in V^*$, $\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est ss-espace de V.

c) soit V ev sur $\mathbb{K}$, f $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite norme si $\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

** $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

*** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

d) $\left|\|x\|-\|y\|\right| \leq \|x-y\| \leq \|x\|+\|y\|$ $\triangle$I

DM ∘ $\|x-y\| = \|x+(-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

∘ $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ (idem $\|y\|-\|x\| \leq \|x-y\|$)

D'où $\left|\|x\|-\|y\|\right| \leq \|x-y\|$

2)a) Donner la déf° de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

b) Dmq l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz

c) En déduire $\triangle$I

2) a) L'espace normé $(V, \|\cdot\|_2)$ possède une distance euclidienne :

$$d(x,y) = \|x-y\|_2$$

tel que $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les 3 axiomes :

* $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

** $d(x,y) = d(y,x)$

*** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

b) DM I : CBS

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum x_i^2 . \sum y_i^2\right)^{1/2}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

ie : $|<x,y>| \leq \|x\| . \|y\|$.

Partant de $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ (*) $a \geq 0$, $b \geq 0$.

On pose $a = \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$,

$$(*) \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| . \|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right) \quad (**)$$

On somme sur $i \in \{1, \dots, n\}$ dans (**),

On a $\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{1}{2}(1+1)$ car $\frac{x_i^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum x_i^2}{\sqrt{\sum x_i^2}^2}$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$$

On $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

On a $\|x+y\|^2 = <x+y, x+y> = <x,x> + 2<x,y> + \|y\|^2$.

On obtient $<x,y> \leq \|x\| \|y\|$ CBS

c) En déduire $\boxed{I}$: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$|<x,y>| \leq \|x\| \|y\|$ par CBS

$\Leftrightarrow 2|<x,y>| \leq 2\|x\| . \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|<x,y>| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| . \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) a) Dmq les ev ℓ_2 & b) $C_2[a,b]$ sont normés.

On définit $\ell_2(\mathbb{K})$: l'ensemble des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à val^rs ds $\mathbb{K}$ tq

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(Si mq ev $(\ell^2(\mathbb{K}),+)$ ① $\begin{pmatrix}\text{ass} \\ \text{en} \\ \text{inv} \\ \text{abel}\end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix}\text{distri} \\ \text{asso}t_{,1}\end{pmatrix}$ mltpl^on scalaire)

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left(\sum |u_n+v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum |v_n|^2\right)^{1/2} = \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

Comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$; il vient que $\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell_2(\mathbb{K})$.

D'autre part, $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}$

$= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \, \|u\|_2$.

Donc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \, \|u\|_2$ & $\lambda u \in \ell_2(\mathbb{K})$.

(De même $\|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0$.

D'où $\ell_2(\mathbb{K})$ est un ev normé.

b) Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $C_2([a,b])$ l'espace des f cont sur $[a,b]$ à v^rs ds $\mathbb{K}$. On définit $f \in C_2([a,b])$,

$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$: Mq $\left|\begin{array}{l} \|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0 \\ \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \, \|f\|_2 \\ \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \end{array}\right.$: $\forall f,g \in C_2[a,b]$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\|f\|_2 = 0 \iff \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = 0 \iff f(t) = 0$, $\forall t$ car f cont $\iff f = 0$.

(ii) $\|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = |\lambda| \, \|f\|_2$

(iii) D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|f+g\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

À Retenir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2 = \sum |a_k|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} |a_i| \, |a_j|$$

4) a) Définir un ens ouvert de V.

b) Dmq boule ouverte est ens ouvert.

c) Dmq Réunion qq d'ouverts est ens ouvert.

d) Dmq Intersect° finie d'ouverts est ens ouvert.

a) soit V evn, un ss-ens $D \subset V$ est ouvert si $\forall x \in D$, la boule ouverte $B(x,\delta) = \{y \in V : \|y-x\| < \delta\}$ centrée en x de rayon δ est contenue ds D.

b) Mq la boule ouverte est ens ouvert.

$B(a,r) = \{x \in V, \|x-a\| < r\}$.

Posons $\delta = r - d(a,x) > 0$ où $x \in B(a,r)$

$$\forall y \in B(x,\delta) : d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \delta = d(a,x) + r - d(a,x)$$

$\forall y \in B(x,\delta) : y \in B(a,r)$.

c) La réunion qq de ss-ens ouverts est ouverts.

$$\forall \alpha \in A,\ D_\alpha \circledcirc V \Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha\right) = D \circledcirc V$$

d) si $D_i \circledcirc V \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^{k} D_i \circledcirc V$.

c) soit $x \in D \Rightarrow \exists \alpha \in A, x \in D_\alpha$.

Puisque $D_\alpha \circledcirc V \Rightarrow \exists U_x$ de x tq $U_x \subset D_\alpha \subset D$.

Donc D est ouvert.

d) si $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}, x \in D_i$

puisque $D_i \circledcirc V \Rightarrow \exists \delta_i > 0, B(x,\delta_i) \subset D_i$.

On pose $\delta = \min_{1 \le i \le k} \delta_i > 0$.

On a $B(x,\delta) \subset D_i, \forall i \in \{1, \dots, k\} \to B(x,\delta) \subset D$.

5) a) Définir un ens fermé de V.

b) Dmq intersect° qq de fermés est un ens fermé.

c) Dmq Réunion finie de fermés est ens fermé.

d) Dmq sphère $S(a,r)$ centrée en $a \in V$ est un ens fermé.

a) Un ss-ens $F \subset V$ est fermé si son complémentaire $F^c = \{x \in V, x \notin F\}$ est un ouvert.

b) soit: $\forall \alpha \in A, (D_\alpha)^c \circledcirc V \Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha\right)^c \overset{D^c}{=} \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha^c \circledcirc V$

d'où D^c est un ouvert dc D est fermé.

c) si $(D_i)^c \circledcirc V \Rightarrow D^c = \left(\bigcap_{i=1}^{k} D_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} D_i^c \circledcirc V$

d'où D^c est un ouvert dc D est fermé.

(Par les lois de Morgan & prop° ouverts dmqés précéd-t).

4 QT.

d) Mq sphère $S(a,r)$ centrée $a \in V$ est ens fermé :

$$S(a,r) = \overline{B(a,r)} - B(a,r)$$

$$= \{x \in V : \|x - a\| = r\}.$$

$$S^c(a,r) = B(a,r) \cup \left(\overline{B(a,r)}\right)^c$$

est la réunion de 2 s-ens ouverts est ouverte.

6) a) Pr $A \subset V$, définir un point adhérent de A

b) l'adhérence de A c) l'intérieur $\mathring{A}$ de A

d) le bord ∂A de A e) un point d'accumulaθ

f) l'ens $\Lambda(A)$ des pts d'accumulaθ

g) un point isolé h) l'ens pts isolés $Isol(A)$

i) Indiquer tous ces ens si $A = \mathbb{Q}$.

j) Dmq $x \in \partial A$ ssi $\forall$ voisinage U_x :

$$U_x \cap A \neq \emptyset \text{ et } U_x \cap A^c \neq \emptyset.$$

a) soit $A \subset V$, $a \in V$ est adhérent de A si $\forall U_a$ de a, $U_a \cap A \neq \emptyset$.

b) $\overline{A} = \{x \in V : x \text{ est adhérent de } A\}$

c) $b \in A$ est intérieur si $\exists U_b : U_b \subset A$.

c) $\mathring{A} = \{x \in V : x \text{ est intérieur de } A\}$.

d) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est le bord de A.

e) $a \in V$ est point d'accumulaθ si $\exists U_a$, $\text{card}(U_a \cap A) \geq 2$.

f) $\Lambda(A) = \{x \in V : x \text{ est point d'accumulaθ de } A\}$.

g) $a \in A$ est isolé si : $\exists U_a : U_a \cap A = \{a\}$.

h) $Isol(A) = \{x \in V : x \text{ est point isolé de } A\}$.

i) Pour $A = \mathbb{Q}$:

- $\overline{A} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0$, $B(x,r)$ contient rationnels.
- $\mathring{A} = \emptyset$ car tte boule $B(x,r)$ contient irrationnels.
- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.
- $\Lambda(A) = \emptyset$
- $Isol(A) = \mathbb{Q}$

j) Mq $x \in \partial A$ ssi $\forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset$ et $U_x \cap A^c \neq \emptyset$

($\Rightarrow$) soit $x \in \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ & U_x tt voisinage de x.

$U_x \not\subset A$ car $x \notin \mathring{A}$.

d'où $U_x \cap A^c \neq \emptyset$ puis $x \in \overline{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) sppo $\forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

$U_x \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow U_x \not\subset A \Rightarrow x \notin \mathring{A}$.

7) a) Mq ens $F \subset V$ est fermé ssi $\overline{F} = F$

b) Mq $\overline{F}$ est le + petit ss-ens fermé de V contenant F

c) Mq $\partial(B(a,r)) = S(a,r)$

a) $F \subset \overline{F}$ par définit° de $\overline{F}$.

($\Rightarrow$) Mq $\overline{F} \subset F$, si $x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ ouvert

$\exists U_x : U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{F}$.

($\Leftarrow$) si $x \notin F = \overline{F}$; $\exists U_x : U_x \cap F = \emptyset$ car $x \notin \overline{F}$.

$U_x \subset F^c \Rightarrow F^c \Subset V$ dc F est fermé.

b) Mq $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \subset V \\ A \subset F}} F$ est fermé, par a) il suffit de mq $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

On a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$, mq $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, soit $x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow \forall U_x : U_x \cap \overline{A} \neq \emptyset$

Dc $\exists y \in U_x \cap \overline{A}$.

U_x est un voisinage de y aussi psq $y \in \overline{A}$, on a $U_x \cap A \neq \emptyset$.

$\Rightarrow x \in \overline{A}$, dc $\overline{A}$ est fermé.

$\rightarrow$ si F est fermé q contient A : $F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$

soit $x \in F^c$ puisq F est fermé:

$\exists U_x : U_x \subset F^c$ car $F^c \Subset V \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow U_x \cap A = \emptyset$ car $A \subset F \Rightarrow x \notin \overline{A}$.

On a mqé $F^c \subset \overline{A}^c \Rightarrow \overline{A} \subset F$.

c) Par 6) j) on doit mq $\forall \delta > 0$:

$B(x,\delta) \cap B(a,r) \neq \emptyset \ \wedge \ B(x,\delta) \cap B^c(a,r) \neq \emptyset$.

On fixe $\delta > 0$, pose $y = a + \lambda(x-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On cherche $\lambda > 0$ tq $y \in B(x,\delta) \cap B(a,r)$

$\|y-a\| = \lambda \|x-a\| = \lambda r < r$ si $\lambda < 1$

$\|y-x\| = \|a-x\| \, |\lambda - 1| = r(1-\lambda)$ car $\lambda < 1$

$r(1-\lambda) < \delta$

$1 - \frac{\delta}{r} < \lambda < 1$

(**) Mq $\exists z \in B(x,\delta) \cap B^c(a,r)$, pose $z = a + \mu(x-a)$; $\mu > 1 \Leftrightarrow \|z-a\| > r$

$\|z-x\| = \|x-a\| (\mu - 1)$ car $\mu > 1$

$r(\mu-1) < \delta$

$1 < \mu < 1 + \frac{\delta}{r} \Rightarrow$ (**)

mq

$\bar{A} \neq \emptyset$

$\neq \emptyset.$

8) a) Définir 2 normes équivalentes.

b) Mq 3 normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ st équiv^ltes sur $\mathbb{R}^n$.

c) Expliquer pk normes $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ ne st pas équiv^ltes.

8) a) Ⓓ V ev, $\|\cdot\|_i : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, 2 normes sur V $(i=1,2)$

$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, noté $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, si

$\exists \; C_1, C_2 > 0, \; \forall x \in V :$

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$$

ou $C = \max(C_1, C_2)$: $\frac{1}{C}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$.

b) Mq $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$

$$|x_i| \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty.$$

On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$.

Mq $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

$$|x_i| \leq \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n \cdot \|x\|_\infty$$

On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$

D'où pr $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, par transitivité, on a bien le résultat attendu. (sinon preuve p $\frac{CBS}{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$ ⑦ QT

c) Les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ne st pas équivalentes sur $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$

car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \in \ell_\infty \setminus \ell_2$ car $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$.

$\ell_1 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_1)$, $\ell_2 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2)$, $\ell_\infty (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \right\|_\infty = 1.$$

(9) a) Définir un ensemble dense.

b) Donner des exemples.

c) Mq espaces l_1, l_2 possèdent des ss-ens denses dénombrables & l_∞ non. (ss-ens denses dén = séparable)

d) Définir ss-ens nulle part dense (npd)

e) Mq $A \subset X$ est npd si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

a) (D) Un ss-ens $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

ie $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

b) $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}^n$ dense ds $\mathbb{R}^n$.

Dans $C[a,b]$, les polynômes à coeff rationnels st denses.

c) Mq $l_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable (possède ss-ens dense dénomb)

En effet, soit les suites $A = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ tq $a_n \in \{0, 1\}$.

On sait que $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0} = \text{card}(\mathbb{N})$

$\|a_n - b_n\|_\infty = 1$ si $(a_n)_n \neq (b_n)_n$.

Les ens $A \cap B(a, \frac{1}{2})$, $a \in A$ st disjoints

si $B \subset (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est dense alors chq boule $B(a, \frac{1}{2})$ contient un $b \in B$. $\text{Card}(\{B(a, \frac{1}{2}), a \in A\}) = \text{card } A$.

Dc B n'est pas dénombrable.

d) D ss-ens mpd

D Un ss-ens A d'un espace métriq X est dit nulle part dense (mpd) si $\forall\, B(a,r) \subset X$, $\exists$ ss-boule $B \subset B(a,r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.

e) Mq A est mpd $\Leftrightarrow$ $\mathrm{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

($\Leftarrow$) en effet, si $B(a,r) \subset X$ est une boule.
Puisq $\mathrm{int}(\bar{A}) = \emptyset$, $B(a,r) \not\subset \bar{A}$.
$\Rightarrow \exists\, b \in B(a,r) \cap \bar{A}$.
$\bar{A}^c$ est ouvert $\exists\, B' = B(b,r') \subset \bar{A}^c$.
Donc $B' \cap A = \emptyset$.

($\Rightarrow$) si $\forall$ boule $B(a,r)$ contient $B' \subset B(a,r)$ tq $B' \cap A = \emptyset$ alors $\forall x \in B'$, on a $x \notin \bar{A}$
$\Rightarrow B(a,r) \not\subset \bar{A} \Rightarrow \mathrm{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

R D soit (X,d) espace métriq, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon>0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

10) a) Définir espace métriq complet.
b) Expliquer pk $\mathbb{Z}$ & $\mathbb{N}$ st complets ss $\mathbb{R}$ & $\mathbb{Q}$ non.
c) Mq ℓ_2 (ou $\mathbb{R}^n$) muni $\|\cdot\|_2$ est complet.

a) D Un espace (X,d) est dit complet si tt suite de Cauchy cv ds (X,d).

b) $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ st complets ss $\mathbb{R}$. En effet $\forall$ ensemble q ne contient que des pts isolés a ppté: Tte suite de Cauchy se stabilise apcr.
$\exists\, n_0$, $\forall m,n \geq n_0$, $x_n = x_{n_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$.

- $\mathbb{Q}$ n'est pas complet car $\exists\, (q_n) \subset \mathbb{Q} : q_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
(q_n) est Cauchy q ne $\cancel{\text{cv}}$ ds $\mathbb{Q}$.

c) Mq ℓ_2 est complet. Sppo $(x_n) \subset \ell_2$ est Cauchy, $\forall \varepsilon>0, \exists\, n_0$,
$\forall\, n,m > n_0 : \|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2$ (*)
Ds (*), $x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i^n - x_i^m|^2 \leq \varepsilon^2$ $\forall i \in \{1,\dots\}$ (**).
Par (**), $(x_i^m)_m$ est une suite de Cauchy $\forall i \in \{1,\dots\}$. $\mathbb{R}$ est complet $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_i \in \mathbb{R} : x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. On pose $x = (x_1,\dots,x_k,\dots)$; en passant à la limite si $m \to \infty$ ds (*) on a $\|x_n - x\|^2 \leq \varepsilon^2$ $\forall n > n_0$.
Il reste mq $x \in \ell_2$ ie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ (***). Pr $\mathbb{R}^n$, on l'a dmqé qu'il est complet
$(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2$: $x_i^2 = (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 \leq 2(x_i - x_i^n)^2 + 2(x_i^n)^2$
On a $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \infty$ par (*) et $\sum (x_i^n)^2 < \infty$ car $x_n \in \ell_2$
Par crit compar. séries à termes $\oplus$.
Donc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $x \in \ell_2$.

11) a) Mq ∀ ss-ens A d'un espace complet X est complet ssi $A \subset X$ est fermé.

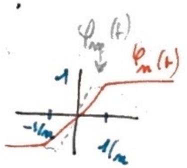
b) Mq $C_2[a,b]$ n'est pas complet.

a) (⇐) en effet si $(x_n) \subset A$ est une suite de Cauchy puisq X est complet $\exists x \in X$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$,
$x \in \bar{A}$, $\bar{A} = A$ (A est fermé) $\Rightarrow x \in A$.

(⇒) si $x \in \bar{A}$, $\exists (x_n) \subset A$: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$
(x_n) CV $\Rightarrow$ (x_n) est Cauchy $\Rightarrow x \in A$ car A est complet dc $\bar{A} = A$.

b) $C_2[a,b]$ n'est pas complet p/ $\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2\,dt$ muni distance $\|f-g\| = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx\right)^{1/2}$.

Considérons
$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1 \\ nt, & -1/n \le t \le 1/n \\ -1, & -1 \le t \le -1/n \end{cases}$$



Mq (φ_n) est Cauchy ds $C_2[-1,1]$, n'y CV pas.

∘ (φ_n) est de Cauchy, soit $m>n$, $\varphi_n = \varphi_m$ si $1 \ge t \ge \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$
ie $-1 \le t \le -\frac{1}{n} < -\frac{1}{m}$.

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\|^2 = \int_{-1/n}^{1/n} (\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt = \int_{-1/m}^{1/m} (m-n)^2 t^2\,dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^2\,dt + \int_{-1/n}^{-1/m} (-1-nt)^2\,dt$$

$$= \frac{(m-n)^2}{3}\frac{2}{m^3} + 2\int_{1/m}^{1/n} (1-2nt+n^2t^2)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(m-n)^2}{m^3} + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - 2n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) + \frac{2n^2}{3}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right)\right)$$

$$\le \frac{2}{3}\frac{4m^2}{m^3} + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{2n^2}{3}\frac{2}{n^3}\right) \le \frac{2}{3}\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{8}{3}\frac{1}{n} = \left(\frac{16}{3}+2\right)\frac{1}{n} = \frac{8}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\|\varphi_n - \varphi_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$, $\forall t \in [-1,1]$, $\lim \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$

$\varphi \notin C[-1,1]$, elle est discontinue en 0.

spps par (?!) $\exists f \in C[-1,1]$ tq $\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Par l'inégalité de Minkowski

(*) $$\left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi(t))^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t)-\varphi(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Elle est vraie de m̂ preuve m̂ si φ est discontinue en 0.
$f(t) \ne \varphi(t)$ car $f(t)$ cont, $\varphi(t)$ discont. $\psi(t) = (f(t)-\varphi(t))^2$ cont sr $\mathbb{R}^*$. $\exists t_0 \in \mathbb{R}^*$: $\psi(t_0) = c_0 > 0$.
Par la cont de ψ en 0, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$,
$\psi(t) \ge 0$.
L'int à gauche ds (*) est minorée p $c = \sqrt{2\varepsilon c_0} > 0$.
Dc à droite, on doit avoir : $\|f - \varphi_n\| \not\to 0$ dc $f \notin C[a,b]$.

12) Mq espace métriq X nv est complet ssi tte suite de boules fermées emboîtées dt les rayons tendent vers zéro possède un point commun.

Puisque $B_m \subset B_n$, le centre x_m de $B_m \in B_n$, $\forall m > n$.

Dc $d(x_m, x_n) \leq r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ alors (x_n) est de Cauchy.

Par la complétude de X : $\exists x \in X : x = \lim_{m \to \infty} x_m$.

D'autre part $\forall n$ fixé, $x_m \in B_n$ & $x = \lim_{\substack{m \to \infty \\ m > n}} x_m$.

Dc x est pt adhérent de B_n.

$\overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n \ \forall n$. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Par le m̂ argument $\Rightarrow d(x,y) \leq 2 r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

car $x, y \in B_n \ \forall n$.

Rq Th x boules emboîtées

soit (X,d) espace métriq complet $(X \neq \emptyset)$ alors $\forall$ suite de boules fermées B_n, emboîtées $B_n \subset B_{n-1}$ $(n \geq 2)$, tq r_n de $B_n \longrightarrow 0$,

$\exists!\ x \in X$ tq $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

13) a) Énoncer Th de Baire. b) Dmq Th de Baire.

c) ed espace métriq complet n'est pas une réunion dénomb de ss-ens npd.

a) soit (X,d) un espace métriq complet (nv) alors tte réunion dénombrable de ss-ens F_n fermés d'int vide est d'int vide.

$$\left.\begin{array}{l} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ int(F_n) = \emptyset \end{array}\right\} int(F) = \emptyset.$$

Sppo ce n'est pas vrai !! et $int(F) \neq \emptyset$: $\exists$ boule ouverte $B \subset F$.

On a $int(F_1) = \emptyset$ dc $B \not\subset F_1$. $\exists x_1 \in B \setminus F_1$.

On note F_1 est fermé dc $F_1^c = X \setminus F_1$ est ouvert alors $B \cap F_1^c$ est ouvert.

$\exists$ boule ouverte $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

Quitte à diminuer r_1, on pt sppo boule fermée $\overline{B_1} \subset B \setminus F_1$.

idem $int(F_2) = \emptyset$, $B_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ dc $\exists x_2 \in B_1 \setminus F_2$ car B_1 est ouvert. On pose $r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1 - d(x_1,x_2)}{2}\right)$ car B_1 est ouverte.

Alors $B_2 = B(x_2, r_2)$ vérifie $\overline{B_2} \subset B_1$.

En effet si $y \in B_2$, $d(y, x_2) < r_2$.

dc $d(y,x_1) \leq d(y,x_2) + d(x_2,x_1) \leq \frac{r_1 - d(x_1,x_2)}{2} + d(x_2,x_1) < r_1$

Donc $\overline{B_2} \subset B_1 \subset \overline{B_1}$.

(PR) $\forall k$, on a une boule $\overline{B_k}$ tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$,
$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$.

$\text{int}\, F_{k+1} = \emptyset \Rightarrow \exists\, x_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$.

On pose $r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{r_k - d(x_k, x_{k+1})}{2}\right)$

Par m̂ raison $\overline{B_{k+1}} \subset B_k \subset \overline{B_k}$ et on obtient une suite de boules fermées emboîtées $\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$ tq rayon $(B_k) = r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Par (TH) BFE, $\exists!\, x \in \bigcap^{\infty} \overline{B_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$x \in B_i \subset F_i^{\,c} \Rightarrow x \notin F_i$.

D'autre part $x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. $\boxed{c?!d}$

b) (Cor) TH de Baire: $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ où A_n est ss-ens npd.

X n'est pas réunion dénombrable de ss-ens npd.

DM. A_n est npd ssi $F_n = \overline{A_n}$ est d'int vide.

si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ mais $\text{int}(F_n) = \emptyset$.

Par (TH) de Baire, $\text{int}(X) = \emptyset$ $\boxed{c?!d}$.

car $\forall x \in X, \forall r > 0, B(x,r) \subset X$

RAPPELS 1 TOPOLOGIE

- A ouvert : $A \subset E$, si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$, $B_r(a) \subset A$.
  ie $B_r = \{x \in E, \|x-a\| < r\}$
- Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contnt x.
- N_1, N_2 équivalts si $\exists C_1, C_2 > 0$,
  $\forall x \in E$, $N_1(x) \leq C_1 N_2(x)$ & $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x)$
- Un s-ens $F \subset E$ est un fermé si son complt^r $E \setminus F$ est un ouvert.
- $B_r(x)$ est ouvert, $\forall y \in B_r(x)$, $\exists \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$.
- $A \subset E$, $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$
- $\bar{A} = \{x \in E \mid x$ point adhérent à $A\}$ (adhérence à A)

$\boxed{\text{ASSE}}$ $A \subset \bar{A}$ / $\bar{A}$ est fermé / si F fermé $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$

- $\bar{A}$ est + petit fermé q contient A.
- $A \subset E$, $x \in E$ est point d'accumulat° de A si
  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a \neq x$, $a \in B_\varepsilon(x)$.
- $A \subset E$, $x \in \bar{A}$ → x : pt accumulat°
  → $x \in A$ & $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$ (pt isolé)

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $x : \mathbb{N} \to E$, $l \in E$; x_n admt l c limite qd $n \to \infty$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| < \varepsilon$ ie $\lim_{n\to\infty} x_n = l$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - l\| = 0$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \forall O$ voisinag ouvert de $l \in N$, $\forall n \geq N : x_n \in O$.
- $\lim_{n\to\infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$
- $A \subset E$, $x \in E$,
  (i) $x \in \bar{A} \iff \exists\, a_n$ suite de A, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
  (ii) x pt d'acc de $A \iff \exists$

- x_n suite ds $\mathbb{R}^p$, $x_0 \in \mathbb{R}^p, \dots$, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$, $l \in \mathbb{R}^p$,
  $l = (l^1, \dots, l^p) \Rightarrow \lim x_n = l$ pr $1 \leq i \leq p \Rightarrow \lim x_n^i = l^i$.
- si $\lim a_n = l \Rightarrow \exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_R(0)$
- $f : A \subset E \to F$, a pt acc de A :
  $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$
- $\lim f(x) = l \iff \lim \|f(x) - l\| = 0$

$\boxed{\text{ASSE}}$ $\lim_{x\to a} f(x) = l$ / $\forall \varepsilon \exists \delta, \forall x \in B_\delta(a) \cap A \setminus \{a\} : f(x) \in B_\varepsilon(l)$
$\forall O \,\mathcal{V}$ de l, $\exists U \,\mathcal{V} a$, $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in O$
$\forall O \,\mathcal{V}$ de l, $\exists U \,\mathcal{V} a$, $U \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$

- Opérat°s de limites / additi° / prdt / composé / inverse

- $f : A \subset E \to F$, $a \in A$, f cont^A $\iff \forall \varepsilon \exists \delta, \forall x \in A, \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$
- si a pt acc de $A \Rightarrow f$ con^A $\iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\boxed{\text{ASSE}}$ f cont a / $\forall \varepsilon \exists \delta, \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$
$\forall O \,\mathcal{V} f(a)$, $\exists U \,\mathcal{V} a$, $f(U \cap A) \subset O$
$\forall O \,\mathcal{V} f(a)$, $\exists U \,\mathcal{V} a$, $U \cap A \subset f(O)$

- $f : A \to F$, f cont^A si f cont en chq pt $a \in A$.

$\boxed{\text{ASSE}}$ f cont^A / $\forall O$ ouvrt de F, $\exists U$ ouvrt de E, $f^{-1}(O) = A \cap U$ ie $f(U \cap A) \subset O$
$\forall W$ fermé de F, $\exists V$ fermé de E, $f^{-1}(W) = A \cap V$

- $f : A \to \mathbb{R}$ cont, $b \in \mathbb{R}$,
  - $\{x \in A \mid f(x) < b\} = A \cap U$ pr ouvert $U \subset E$
  - $\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = A \cap V$ pr fermé $V \subset E$

de m̂ se $f(x) = b$.

RAPPELS ② TOPOLOGIE

- $(E, \|\cdot\|)$ evn $A \subset E$, x_n ds ss-ens X, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \in X$. y_n ste extr^{te} x_n si $\exists A$ $s^T \nearrow$: $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $y_n = x_{k(n)} = x_{kn}$
- A borné $\not\!\!/ \|\cdot\|$ si $\exists R \in \mathbb{R}$, $A \subset B_R(0) \Leftrightarrow \overset{\forall x \in A}{\|x\| < R}$
- suite x_n ds E est bornée ($\not\!\!/ \|\cdot\|$) ie $\exists R \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| < R$
  - si X ens, $f : X \to E$, f borné si $\{f(x) \mid x \in X\}$ est borné, $\|f(x)\| < R$. A est compact si tte suite ds A admt ss-suite ⓒⓥ ds A.
- $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s^T \nearrow \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $k(n) \geq n$.
- E ⓔⓥ, $A \subset E$ ss-ens, $N_1, N_2 : E \to \mathbb{R}$. Si $N_1 \sim N_2$ alors A borné $\not\!\!/ N_1$ ssi A borné $\not\!\!/ N_2$.
- $A \subset \mathbb{R}^p$ est COMPACT ssi A fermé et borné.
- $f : A \subset E \to F$ cont & A compact $\Rightarrow f(A)$ compact.
- $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow \exists x_m, x_M \in A, \forall y \in A$:
$$f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$$
- soit N norme s/ $\mathbb{R}^p \Rightarrow N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est cont $\not\!\!/ \|\cdot\|_\infty$.
- si N norme s/ $\mathbb{R}^p \Rightarrow N \sim \|\cdot\|_\infty$.
- $N_1, N_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \Rightarrow N_1 \sim N_2$.

M52 - Topologie & Calculs d'intégrales

(C0) Rappels sur Espaces Vectoriels

(D)$_1$ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v.) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opérations (addition & multiplication) entre les élts de V.

Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \longrightarrow V$, $\forall x,y \in V : (x,y) \longmapsto x+y$

$\forall x,y,z \in V :$
- $x+y = y+x$
- $x+(y+z) = (x+y)+z$
- $\exists\, 0 \in V,\ 0+x = x$
- $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y = 0,\ y := -x$.

Multiplication entre les vecteurs

$\bullet : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in V$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x,y \in V$:
- $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$
- $1 \cdot x = x$
- $(\alpha+\beta) x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $\alpha (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(D)$_2$ • Un syst fini de vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est libre si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

• Un syst qq vecteurs $\{e_i : i \in I\} = E$ est libre si tt système fini de E est libre.

(D)$_3$ V est dim $n \in \mathbb{N}$ s'$\exists$ (st) n vecteurs & tt syst de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

(D)$_4$ 2 ev sur $\mathbb{K}$: V & V^* st isomorphes s'$\exists$ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte les opérations.

si $\begin{array}{l} \varphi(v) = v^* \\ \varphi(u) = u^* \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi(u+v) = u^* + v^* \\ \varphi(\lambda u) = \lambda u^* \end{array}$

(D)$_5$ Un ss-ens V_1 de l'ev V est dit ss-espace de V si V_1 est un (ev) pour m opérations.

(Ppté) si $V_i \subset V$ $(i \in I)$, un sev alors $V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un ss-espace de V.

(D)$_5$ soit X un ss-ens d'1 ev V.

On note $\mathrm{Vect}(X) = \{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i ,\ x_i \in K \}$

↳ ttes CL finies de vecteurs de X.

C1 Espaces Vectoriels normés

§1. Déf & Ex

D soit V ev $\mathbb{K}$, f $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si
$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ 2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ homogénéité
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cor L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ pssd distce (métriq) :
$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

R Une distce $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tq
a. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ b. $d(x,y) = d(y,x)$
c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Cor
$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L (Inégalité de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz)
$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \sum |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} \quad \text{CBS}$$

D Produit Scalaire Euclidien

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i}.$$ est une f de 2 vecteurs linéaire sur les 2. (forme bilinéaire)

$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ep. $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}}$

2

P Produit scalaire hermitien (cas complexe)

$V = \mathbb{C}^m$, le $\boxed{\text{psh}}$ est linéaire sur x & en + il vérifie

1) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$\longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum |x_i|^2}$

- $\ell_2 = \{ (x_i)_m, \ x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$
- $\ell_1 = \{ \cdots, \ \sum |x_i| < \infty \}$ suites
- $\ell_\infty = \{ \cdots, \ \exists \, c > 0 : |x_i| < c \}$ espaces vectoriels réels

- $\mathcal{C}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont} \}$

$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$, $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

§2. Topologie n espace vectoriel normé

D V evn, ss-ens $D \subset V$ est ouvert si $\forall x \in D$ la boule ouverte : $B(x, \delta) = \{ y \in V : \|y - x\| < \delta \}$ centrée en x de rayon δ est contenue dans D.

$\rightarrow B(x, \delta)$ est appelée voisinage de x noté $\mathcal{U}_x$.

D Un ss-ens $F \subset V$ est fermé si son complémentaire $F^c = \{ x \in V, x \notin F \}$ est ouvert.

Notat° si $D \subset V$ est ouvert. On le note $D \Subset V$.

(P1) 1) La réunion qq de ss-ens ouvert est ouvert.
$\forall$ ens d'indices A, on a :
$\forall \alpha \in A$, $D_\alpha \subset\!\!\!\circ\, V \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \subset\!\!\!\circ\, V$.

2) si $D_i \subset\!\!\!\circ\, V \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^{k} D_i \subset\!\!\!\circ\, V$.
$(i=1,\dots,k)$

(⚠ 2) pas vraie en général) μ intᵒ nbr ∞ ens.

(P1') • soit $F_\alpha \subset V$ ens V fermé $\forall \alpha \in A$
alors $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé ds V.

•• soit $F_i \subset V$ est fermé $(i=1,\dots,k)$
alors $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ est fermé ds V.

(D) Une famille ss-ens ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V est topologie ⊂ V si axiomes vrais :
1) $\emptyset, V \in \mathcal{U}$
2) une réunion qq d'ouverts est un ouvert.
3) une intersectᵒ fini d'ens ouverts est un ouvert.

(D) • soit $A \subset V$, $a \in V$ est adhérent de A si
$\forall$ voisinage U_a de a, $U_a \cap A \neq \emptyset$.

•• $a \in V$ est point d'accumulatᵒ de $A \subset V$ si
$\exists$ voisinage U_a de a, $\text{card}(U_a \cap A) \geq 2$.

••• $a \in A$ est isolé si : $\exists U_a : U_a \cap A = \{a\}$.

•••• $b \in A$ est intérieur si : $\exists U_b : U_b \subset A$.

→ L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ (ou $\text{int}(A)$) est ss-ens de pts intérieurs de A. e.g. $A \subset\!\!\!\circ\, V$ ssi $\mathring{A} = A$.

••••• L'ens $\overline{A} = \{x \in V : x \text{ est adhérent de } A\}$ est l'adhérence de A.

→ $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est le bord de A. (frontière de A, $Fr(A)$)

(P) V evn alors $\forall A, F \subset V$, on a :
1) $x \in \partial A$ ssi $\forall$ voisinage U_x : $U_x \cap A \neq \emptyset \wedge U_x \cap A^c \neq \emptyset$.
2) F est fermé ssi $\overline{F} = F$
3) $\overline{A}$ est le + petit ss-ens fermé contenant A : $\overline{A} = \bigcap_{F \subset V \text{ est fermé},\ A \subset F} F$

(D) V ev & $\|\cdot\|_i : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, 2 normes ⊂ V $(i=1,2)$
$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, noté $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, si $\exists c_1, c_2 > 0, \forall x \in V$:
$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$$
ou bien $C = \max(c_1, c_2)$:
$$\frac{1}{C} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2.$$

(3) NB : si V est dim finie $\Rightarrow$ 3 normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ $(\|\cdot\|)$ et équivalᵗᵉˢ.

§3. Sous-ensembles denses & nulle part denses

soit X un evn ou ${}^{+}$gmlt espace métriq muni distce $d(\cdot,\cdot)$

(D) Un ss-ens $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

ie $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \; B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(P) Un espace X est séparable s'$\exists$ ss-ens dense dénomb.

(ce) NB : $A = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}, \; a_n \in \{0,1\}$

$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1 > \aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$

(D) Un ss-ens A d'un espace métriq (ou evn), X est dit nulle part dense (n.p.d.)

si $\forall \; B(a,r) \subset X, \forall a \in X, \forall r > 0$,

$\exists$ sous-boule $B \subset B(a,r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.

NB : Tt ss-ens ne contenant que pts isolés est m.p.d.

(P) A est mpd ssi $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$

Chap II : Espace de Banach

Leçon 1 : Espaces Métriqs complets

§1 : Déf & (ex)

(D) soit (X,d) espace métriq (e.g. evn), une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pts $x_n \in X$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$,
$\forall n, m \in \mathbb{N}, \; n > n_0, \; m > n_0$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(P) Tte suite (CV) est de Cauchy. (réciproq vraie pr espace complet).

(D) Un espace (X,d) est dit complet si tte suite de Cauchy (CV) ds (X,d).

(P) soit (X,d) est complet, un ss-ens $A \subset X$ est complet ssi A est fermé ds X.

§2. (Th) sur les boules emboîtées, (Th) de Baire

(Th) sur les boules emboîtées

soit (X,d) espace métriq complet nv alors $\forall$ suite de boules fermées B_n emboîtées $B_n \subset B_{n-1}$ $(n \geq 1)$ tq rayon r_n de $B_n \longrightarrow 0$,
$\exists!$ point $x \in X$ tq $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

↳ Réciproque vraie.

(Th) de Baire

soit (X,d) espace métriq complet nv alors $\forall$ réunion dénombrable F de ss-ens F_n fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

$$\left.\begin{array}{l} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ \mathrm{int}(F_n) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{int}(F) = \emptyset.$$

(4)

Coro : $X \neq \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} A_n$ où A_n est ss-ens mpd.

X n'est pas une réunion dé de ss-ens mpd.

§3. Fonctions cont entre les espaces métriqs

$f : X \to Y$ f entre 2 espaces métriqs X, Y ; muni d_X, d_Y.

D1 $\lim_{\substack{x \in A \\ a \in X}} f(x) = A \in Y \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X,$

$0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), A) < \varepsilon.$

D2 $f : X \to Y$ est cont en $x_0 \in X$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

D3 $f : X \to Y$ est cont sur X si $\forall x_0 \in X$,

f cont en x_0.

Prop $f : X \to Y$ cont sur X ssi $\forall$ ouvert $V \subset Y$

$f(X)$'' l'ens $f^{-1}(V) \subset X$.