TD- M52.   Viet-Anh NGUYEN

4 TD

viet-anh.nguyen@univ-lille.fr

Exercices de remise à niveau :

Ex 1 : soit $\mathbb{K}$, mq les ens ci-dessous st des espaces vectoriels sr $\mathbb{K}$.

① $E_1 := \{ f : [0,1] \to \mathbb{K} \}$ muni de l'additᵒ $f+g$ des fonctions & de la multiplicatᵒ par un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$: λf,

ie : $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$.

② $E_2 := \{ (u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \}$ l'ens des suites à valeurs ds $\mathbb{K}$, muni de l'additᵒ des suites : $(u_n)+(v_n) := (u_n + v_n)$

& la multiplicatᵒ p nbr $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda (u_n) := (\lambda u_n)$.

③ $E_3 := \{ P \in \mathbb{K}[x] : \deg P \leq n \}$

où $n \in \mathbb{N}$ est donné. E_3 est muni de l'additᵒ des polynômes $P+Q$ et de la mltplᵒ pr $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda . P$ pr $P, Q \in E_3$.

Solutᵒ ①

Vérifions que $(E, +)$ est un groupe abélien.

soit $f, g \in E_1$, observons

Associativité

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= [f + (g+h)](x)$$

$\forall x \in [0,1]$;

D'où $(f+g)+h = f + (g+h)$.

$\Rightarrow$ ⊕ est associative.

Neutre $\forall x \in [0,1]$

L'élément neutre de E_1 est la f zéro $0_{E_1}(x) = 0$,

En effet, $(f + 0_{E_1})(x) = f(x) + 0_{E_1}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

D'où $f + 0_{E_1} = f$; de même $0_{E_1} + f = f$.

Inverse $\forall x \in [0,1]$

Considérons $-f := (-1) \times f$

On a $[(-f)+f](x) = (-f)(x) + f(x)$
$$= (-1) f(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$$

D'où $(-f)+f = 0_{E_1}$.

De m̂ $f + (-f) = 0_{E_1}$.

On a mqé l'associativité, l'élt neutre, l'élt inverse.

Donc $(E,+)$ est un groupe.

D'autre part, pr $x \in [0,1]$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= g(x) + f(x) \quad \text{car } (\mathbb{K},+) \text{ est commutatif pr } \mathbb{K}.$$
$$= (g+f)(x)$$

D'où $f+g = g+f$

Donc $(E_1,+)$ est commutatif. (abélien).

Ensuite, vérifions que la multiplicat° scalaire est distributive par rapport à l'additi°, ie pr $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ & $f, g \in E_1$, on a

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$
$$(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$$

En effet pr $x \in [0,1]$;

$$[\lambda(f+g)](x) = \lambda\big((f+g)(x)\big)$$
$$= \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$[\lambda(f+g)](x) = \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)} + \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda}\, \underset{\in \mathbb{K}}{g(x)} \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est distributif pr } \mathbb{K}.$$
$$= (\lambda f + \lambda g)(x) = \cancel{\lambda f + \lambda g}$$

D'où $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

Puis $[\underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in \mathbb{K}} f](x) = \underset{\in \mathbb{K}}{(\lambda+\mu)} . \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)}$

$$= \lambda f(x) + \mu f(x) \quad \text{car } (*)$$

Enfin, il ne reste à vérifier que la multiplicat° associative, ie $(\lambda \cdot \mu) f = \lambda \cdot (\mu f)$

En effet, pr $x \in [0,1]$, on a :

$$[[\lambda \cdot \mu] \cdot f](x) = (\underset{\in \mathbb{K}}{\lambda} \cdot \underset{\in \mathbb{K}}{\mu}) \cdot \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)} = \lambda(\mu f(x)) \quad \text{car } (\mathbb{K},\cdot) \text{ est associatif.}$$
$$= \lambda \cdot ((\mu \cdot f)(x))$$
$$= [\lambda \cdot (\mu \cdot f)](x)$$

$$\Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda(\mu \cdot f)$$

Étapes :

- mq $(E,+)$ est un groupe. → associativité, → Élt neutre, → Élt inverse
- mq $(E,+)$ groupe abélien.
- mq distributivité mltpl° scalaire.
- mq mltplc° scalaire associative.

sol 2. Il suffit de remplacer ds sol 1, l'intervalle $[0,1]$ p $\mathbb{N}$ partout. La preuve reste valable.

sol 3

Considérons $I := \{0, 1, \dots, n\}$ & $F := \{f : I \longrightarrow \mathbb{K}\}$ muni de l'additio & la multiplicat scalaire ĉ ds 1).

On a vu ds Q1 que F est un esp. vect.

Mq F est équivalent à E_3.

Pr $P \in E_3$, on pt écrire :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

pr $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$.

Considérons $\phi : E_3 \longrightarrow F$

$$\phi(P) := f$$

où $f(0) = a_0,\ f(1) = a_1, \dots, f(n) = a_n$.

ϕ est bijective.

D'autre part, pour $P, Q \in E_3$ et $\phi(P) = f$, $\phi(Q) = g$.

$$\phi(P+Q) = h \quad \text{tq} \quad h(i) = f(i) + g(i)$$

car $P(x) = f(n)x^n + \dots + f(1)x + f(0).x^0$.

$Q(x) = g(n)x^n + \dots + g(0).x^0$.

$$(P+Q)(x) = (f(n)+g(n))x^n + \dots + (f(0)+g(0))x^0.$$

D'où $\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$.

On pt vérifier que $\phi(\lambda P) = \lambda\phi(P)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in E_3$.

Donc $(F, +, *)$ et $(E_3, +, *)$ st ẽ mês.

Or $(F, +, *)$ est un esp. vect. d'après 1),

il en est de même pour $(E_3, +, *)$.

R D 2 ev s $\mathbb{K}$, V & V^* st isomorphes s'$\exists$ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte ls opérations.

si $\varphi(v) = v^*$, $\varphi(u) = u^*$ $\Rightarrow$ $\varphi(u+v) = u^* + v^*$, $\varphi(\lambda u) = \lambda u^*$.

Bonus : Déterminer $\dim E_3$.

$E_3 = Vect\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$,

pr $P \in E_3$: $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$

Donc $\dim E_3 = Card\{1, X, \dots, X^n\}$
$= n+1$.

Ex2 soit E un $\mathbb{K}$-ev

1) soit F & G des sous-espaces vect de E. (ev)
Mq $F \cup G$ est un ss-espace
$\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

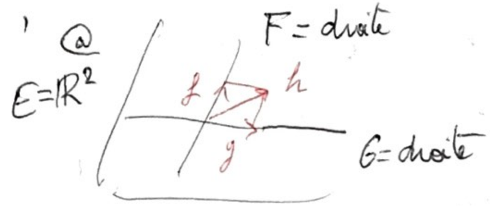
2) soit H un troisième ss-ev de E.
Mq $G \subset F \Rightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H)$

Rappel : soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $F \subset E$:

Par définition, F est sous-espace si
$(F, \underbrace{+, *}_{\text{induite}})$ est un ev.

On pt mq F est ss-esp. vect.
$\Leftrightarrow \forall u_1, u_2 \in F : u_1 + u_2 \in F$
& $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F : \lambda u \in F$.

(F est stable p/r à $+$ & $\times$)



($\Leftarrow$) si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un ev
si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un ev.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde $F \cup G$ est sev
mais $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.

$\exists f \in F : f \in G$.
$\exists g \in G : g \in F$.

Considérons $h := f + g$.
$h \in Vect(F, G)$ $\in F \cup G$ par hypothèse car $f \in F, g \in G$ & $h = f + g$.

Or $h \notin F$ car sinon $g = h - f \in F$
q contredit $g \notin F$

$h \notin G$ car sinon $f = h - g \in G$
q contredisant $f \notin G$.

Donc $h \in F \cup G$ mais $h \notin F$, $h \notin G \Rightarrow$?!

2)

Normes, normes équivalentes

Ex 1 : pr $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

on pose $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|a\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

a) Mq pr $p = 1, 2, \infty$; $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Rq soit esp. vect. normé.

On appelle **norme** sur E une applicat° notée $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ vérifiant

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

a) Mq $\|\cdot\|_1$ est une norme.

soit $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, posons $\vec{0} := (0, \dots, 0)$

$b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a $\|a\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 0 \iff |a_k| = 0 \ \forall k$

$\iff a_k = 0, \forall k$

$\iff a = \vec{0}$.

Donc $\|\cdot\|_1$ vérifie (i).

Ensuite, $\|\lambda a\|_1 = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Enfin, $\|a+b\|_1 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|$

$\leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)$ car $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$

$= \|a\|_1 + \|b\|_1$ Dc $\|\cdot\|_1$ vérifie (iii)

cl $\|\cdot\|_1$ est une norme.

De m̂ pr $\|\cdot\|_2$; $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$; m̂ raisonn^t que $\|\cdot\|_1$ pr i), ii)

(iii) $\|a+b\|_2 = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_2$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Observons que $\|a+b\|_2 \leqslant \|a\|_2 + \|b\|_2$

$\iff \|a+b\|_2^2 \leqslant \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2\|a\|_2\,\|b\|_2$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^2 \leqslant \cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + \boxed{2\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}}$$

En utilisant l'identité, pr $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$$

Le membre de gauche de la dernière ligne est

$$\cancel{\sum |a_k|^2} + \cancel{\sum |b_k|^2} + \sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k$$

Par conséqt, la dernière égalité est équivlte à

$$\sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k \leqslant 2\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

Rq Inégalité de Cauchy-Schwarz,

si $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum a_k \overline{b_k}\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

Il vient de :

$$\left|\sum a_k \overline{b_k} + \sum \overline{a_k} b_k\right| \leqslant \left|\sum a_k \overline{b_k}\right| + \left|\sum \overline{a_k} b_k\right|$$

$$= 2\left|\sum a_k \overline{b_k}\right| \quad \text{car} \quad \sum \overline{a_k} b_k = \left(\overline{\sum a_k \overline{b_k}}\right)$$

$$\leqslant 2\sqrt{\left(\sum |a_k|^2\right)\left(\sum |b_k|^2\right)}$$

Donc la dernière inégalité est valable.

D'où iii) vérifiée par $\|\cdot\|_2$.

Considérons enfin la $\|\cdot\|_\infty$,

(i) $\|a\|_\infty = 0 \iff \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = 0$

$\iff |a_k| = 0, \forall k \iff a_k = 0, \forall k \iff a = \vec{0}$.

Dc $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (i)

Puis $\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\|_\infty$

$= \max_{1\leq k\leq n} |\lambda a_k| = |\lambda| \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |\lambda| \, \|a\|_\infty$

D'où $\|\cdot\|_\infty$ vérifie (ii).

Ensuite vérifions $\boxed{I}$,

$\|a+b\|_\infty = \|(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k+b_k|$

Observons pr $1 \leq k \leq n$,

$|a_k+b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| + \max_{1\leq i\leq n} |b_i|$

$= \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$

dc $\|a+b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$.

Ainsi (iii) est vérifié.

D'où $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

b) Mq ces 3 normes st équivalentes.

R1 Deux normes $\|\cdot\|_I$ & $\|\cdot\|_{II}$ st équivalentes s'$\exists$ 2 constantes $c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E$,

$$c_1 \|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq c_2 \|x\|_I$$

$$\iff c_1 \leq \frac{\|x\|_{II}}{\|x\|_I} \leq c_2.$$

Il suffit de mq $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ (1)

& $n\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_1$ (2)

Pr $\underset{(a_1,\dots,a_n)}{a} \in \mathbb{K}^n$, on a : $\|a\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |a_{k_0}|$ pr 1 certain $1 \leq k_0 \leq n$

$= \sqrt{|a_{k_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} = \|a\|_2$

Ensuite $\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \iff \|a\|_2^2 \leq \|a\|_1^2$

$\iff \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\cancel{1/2 \times 2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right)^2 = \cancel{\sum |a_k|^2} + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |a_i||a_j|$

$\iff 2\sum |a_i||a_j| \geq 0$ est vrai.

Dc $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$.

Ainsi on a mq inégalité (1).

Mq $n\|\cdot\|_\infty \geqslant \|\cdot\|_1$,

on a $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|a\|_\infty$

car $|a_k| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| = \|a\|_\infty$

$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n$,

de $\|a\|_1 \leqslant n\|a\|_\infty$ d'où 2).

en concluant (1), (2), (3) : les 3 normes st équivalentes.

c) On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ & $n=2$.
Dessiner les boules unités pr chacune des 3 normes.

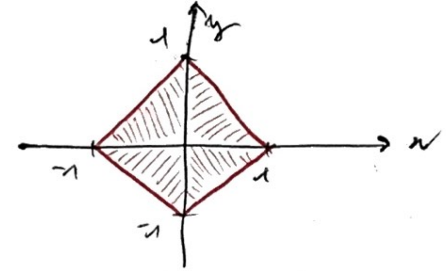
$E=\mathbb{K}^2$. $a(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{B}^1 := \{a \in E,\ \|a\|_1 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\}$

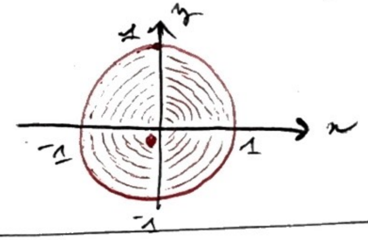
= l'intérieur des carré de sommets
$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$. &

Norme 1



$\mathbb{B}^2 := \{a \in E,\ \|a\|_2 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < 1\}$ = le disque unité

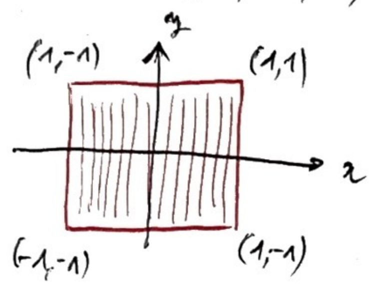


$\mathbb{B}^\infty := \{a \in E,\ \|a\|_\infty < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1$ & $|y| < 1\}$

= l'intérieur du carré de sommets
$(1,1), (-1,-1), (-1,1), (1,-1)$



Ex2 E $\mathbb{K}$-evn, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normes sur E.

Pr $x \in E$, $r>0$, note $B_i(x,r)$ la boule ouverte de centre x, de rayon r, pr $\|\cdot\|_i$.

a) Sppos $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

(i) Jstf $\exists$ cte $k>0$, $\forall x\in E$

$$k^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_2.$$

Sppos $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tq $\forall x \in E$, $c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2$ $k^{-1}\|x\|_2$ $\leq k\|x\|_2$

soit $k \geq c_2$, $k^{-1} \leq c_1$ conviennent.

$\to$ prendre $k = \max(c_2, c_1^{-1})$

(ii) ed $B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$

$B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$

- soit $x \in B_1(0,1)$ qcq, on a $\|x\|_1 < 1$ d'après a).

$k^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\| < 1$ dc $\|x\|_2 < k$.

soit $x \in B_2(0,k)$ d'où $B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$.

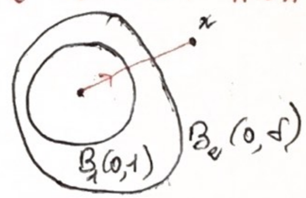
- soit $x \in B_2(0,1)$ qcq, on a $\|x\|_2 < 1$, d'après a)

$\|x\|_1 \leq k\|x\|_2 < k$ dc $\|x\|_1 < k$.

D'où $B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$.

b) on sppos mtn $\exists\, \delta > 0$ tq $B_1(0,1) \subset B_2(0,\delta)$.

Mq $\forall x \in E$, $\|x\|_2 \leq 2\delta\, \|x\|_1$.



dilatation de x

$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

soit $x \in E$ qq, considérons le vecteur

$x' := \dfrac{1}{2\|x\|_1} x$; on a $\|x'\|_1 = \dfrac{1}{2\|x\|_1}\|x\|_1 = \dfrac{1}{2} < 1$

dc $x' \in B_1(0,1)$. D'après l'hypothèse, on a $x' \in B_2(0,\delta)$.

Il vient que $\|x'\|_2 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{2\|x\|_1}\|x\|_2 < \delta$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 < 2\delta\|x\|_1}$$

c) ed cond° NeS en termes de boules pr que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

D'après a) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Rightarrow B_1(0,1) \subset B_2(0,k)$ et $B_2(0,1) \subset B_1(0,k)$

D'après b), les 2 implications ci-dessus impliquent que $2\delta = k$

$\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$, ie $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Ex 5 [illegible]

[illegible] $\mathbb{K}$ tq

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad p = 1, 2$$

& $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n| < \infty$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
[illegible]

Mq a) $\ell^p(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ ev
b) $\|\cdot\|_p$ est norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$

a) On mq $\forall u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
[illegible] $(\ell^p, +)$ gpe [illegible]
[illegible] $(\ell^p \mathbb{K}, \cdot)$ gpe [illegible]
[illegible] soit [illegible] scalaire

1) mq $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$ & $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$\|u+v\| =$

$\lambda u =$

2)

3)

$\star$ cas $p = 1$

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n|$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

de $\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$

comme $\|u\|_1 < \infty$, $\|v\|_1 < \infty$, il vient que $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$.

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda| \, \|u\|_1.$$

de $\|\lambda u\|_1 = |\lambda| \, \|u\|_1$ & $\lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$

$\star$ cas $p = 2$: D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
$$= \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$; il vient que $\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part, $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|u\|_2$. Donc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \, \|u\|_2$ et $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$

$\star$ cas $p = \infty$: On a $\|u+v\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|)$
$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$$
$$= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

de $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

comme $\|u\|_\infty < \infty$, $\|v\|_\infty < \infty$, il vient que $\|u+v\|_\infty < \infty$

[illegible] $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

Ex 3 pr $p = 1, 2, \infty$; on définit $\ell^p(\mathbb{K})$ l'ens suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à val^{rs} ds $\mathbb{K}$ tq

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p = 1, 2$$

& $\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n| < \infty$

$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$
$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3ts cas ô faciles.

Mq a) $\ell^p(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ ev.
b) $\|\cdot\|_p$ est norme sr $\ell^p(\mathbb{K})$

a) On mq $\forall\, u, v \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) mq $(\ell^p(\mathbb{K}), +)$ gpe → ass. + é.n + inv
2) mq $(\ell^p(\mathbb{K}), \oplus)$ gpe abél 1
3) mq distrib & asst mlt$^{pl°}$ scalaire

1) mq $u+v \in \ell^p(\mathbb{K})$ & $\lambda u \in \ell^p(\mathbb{K})$

$\|u+v\| =$

$\lambda u =$

2)

3)

b) * cas $p = 1$:

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + |v_n|$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

dc $\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$

comme $\|u\|_1 < \infty$, $\|v\|_1 < \infty$, il vient que $\|u+v\|_1 < \infty$

Donc $u+v \in \ell^1(\mathbb{K})$.

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |\lambda|\, \|u\|_1.$$

dc $\|\lambda u\|_1 = |\lambda|\, \|u\|_1$ & $\lambda u \in \ell^1(\mathbb{K})$

* cas $p = 2$: D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|u+v\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
$$= \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$; il vient que $\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell^2(\mathbb{K})$

D'autre part, $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, \|u\|_2$. Donc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda|\, \|u\|_2$ et $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{K})$

* cas $p = \infty$: On a $\|u+v\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|)$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

dc $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Comme $\|u\|_\infty < \infty$, $\|v\|_\infty < \infty$, il vient que $\|u+v\|_\infty < \infty$

cas & dc $u+v \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

D'autre part, $\|\lambda u\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\lambda u_m| = |\lambda| (\sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m|)$
$= |\lambda| \; \|u\|_\infty$

Donc $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda| \|u\|_\infty$ & $\lambda u \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

Ex 4

Soit $-\infty < a < b < \infty$ & $C([a,b])$ l'espace des fonctions cont sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit pour $f \in C([a,b])$ & $p = 1, 2, \infty$,

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad p = 1, 2,$$

et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

a) Mq pour $p = 1, 2, \infty$; $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ est espace vectoriel normé.

Comme $\mathcal{C}[a,b]$ est un espace vectoriel, il suffit de mq pour $p = 1, 2, \infty$, on a : $\forall f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

(iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\| + \|g\|_p$.

Vérification (i) :

* cas $p=1$: $\|f\|_1 = 0 \iff \left(\int_a^b |f(t)|\right)^{\frac{1}{1}} = 0 \iff f(t) = 0$ $\forall t$ car f est cont $\iff f = 0$.

* cas $p=2$: $\|f\|_2 = 0 \iff \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \iff f(t) = 0, \forall t$ car f cont $\iff f = 0$

* cas $p=\infty$: $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0 \iff f(t) = 0, \forall t \iff f = 0$

Vérification (ii) :

* cas $p=1$: $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \|f\|_1$

* cas $p=2$: $\|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b (|\lambda f(t)|^2) dt\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2$.

* cas $p=\infty$: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = |\lambda| \; \|f\|_\infty$

Vérification (iii) :

* cas $p=1$: $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt$
$= \|f\|_1 + \|g\|_1$.

* cas $p=2$: D'après l'inégalité de Minkowski,

$\|f+g\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

vrai pour $1 < p < \infty$ ici $p=2$

$= \|f\|_2 + \|g\|_2$

* cas $p=\infty$:

$\|f+g\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup (|f(t)| + |g(t)|)$
$\leq \sup |f(t)| + \sup |g(t)|$
$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

b) Mq ces 3 normes ne st pas équivalentes.

indic considérer $f_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ | Pr simplifier $a=0$, $b=1$

calculer $\|f_n\|_p$ pr $p = 1, 2, \infty$.

* cas $p=1$ $\|f_n\|_1 = \int_a^b t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$

$= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

* cas $p=2$ $\|f_n\|_2 = \left(\int_a^b |t^n|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b t^{2n}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

* cas $p=\infty$: $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$.

• $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_2$ car $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$ car $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\|\cdot\|_2 \not\sim \|\cdot\|_\infty$ car $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1/\sqrt{2n+1}}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ex 5 on considère $E = \mathbb{K}[X]$, le $\mathbb{K}$-ev des polyn. à coeff ds $\mathbb{K}$ & on pose pr

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ & $\|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$

soit la suite des polynômes $P_n(X) = 1 + X + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n} X^k$

a) Vérifier $\|\cdot\|_1$ & $\|\cdot\|_\infty$ st normes sur E.

Écrivons, quitte à considérer qq coeff a_k, b_k comme 0,

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

Vérifions que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

(i) $\|P\|_1 = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} |a_k| = 0 \iff a_k = 0, \forall 0\leq k\leq n$
$\iff P = 0$

(ii) $\|\lambda P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda|\, \|P\|_1$

⚠ en(.

(iii) Comme $(P+Q)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k$, on a (A),

$$\|P+Q\|_1=\sum_{k=0}^{n}|a_k+b_k|\leq\sum_{k=0}^{n}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq\sum|a_k|+\sum|b_k|=\|P\|_1+\|Q\|_1$$

D'où $\|P+Q\|_1\leq\|P\|_1+\|Q\|_1$

Donc $\|P\|_1$ est une norme sur E.

Ensuite vérifions $\|\cdot\|_\infty$ est norme sur E.

(i) $\|P\|_\infty=0 \iff \max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|=0$

$\iff a_k=0,\ \forall\ 0\leq k\leq n$

$\iff P=0$

(ii) $\|\lambda P\|_\infty=\max\limits_{0\leq k\leq n}|\lambda a_k|=|\lambda|\left(\max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|\right)$

$=|\lambda|\ \|P\|_\infty$

D'où $\|\lambda P\|_\infty=|\lambda|\ \|P\|_\infty$.

(iii) Comme (A), on a

$$\|P+Q\|_\infty=\max_{0\leq k\leq n}|a_k+b_k|\leq\max_{0\leq k\leq n}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq\max_{0\leq k\leq n}|a_k|+\max_{0\leq k\leq n}|b_k|=\|P\|_\infty+\|Q\|_\infty$$

D'où $\|P+Q\|_\infty\leq\|P\|_\infty+\|Q\|_\infty$.

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

b) Étudier $\lim\limits_{n\to\infty}\|P_n(X)-(1+X)\|_p$ pr $p=1,\infty$.

soit pr $n\geq 1$, $P_n(X)=1+X+\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k$

alors $P_n(X)-(1+X)=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k$

Donc

$$\|P_n(X)-(1+X)\|_1=\left\|\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}X^k\right\|_1\overset{\text{déf}}{=}\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n}$$

$$=(n+1)\times\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

$$\|P_n(X)-(1-X)\|_\infty=\max_{2\leq k\leq n+2}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

c) Q pt-on déduire?

Qc comme $\dfrac{\|Q_n\|_\infty}{\|Q_n\|_1}=\dfrac{1/n}{\frac{n+1}{n}}=\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

où $Q_n(X)=P_n(X)-(1+X)$

Les 2 normes ne st pas équivalentes.

ex 6

Ex 1 soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-ev des mat carrées $n \times n$ à coeff de $\mathbb{K}$.

Pr $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \geq 0$$

a) Vérifier N est une norme sur E

soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$

(i) $N(A) = 0 \iff \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0$

$\iff \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0, \ \forall \ 1 \leq j \leq n.$

$\iff a_{ij} = 0, \ \forall \ 1 \leq i \leq n \ ; \ \forall \ 1 \leq j \leq n.$

$\iff A = 0_E$ mat nulle.

(ii) $N(\lambda A) \cancel{= |\lambda| N(A)} \iff \max \sum_{i=1}^{n} |\lambda a_{ij}| \cancel{= |\lambda| N(A)}$

$\iff \max \sum |\lambda| |a_{ij}| = \cancel{|\lambda|} \max |\lambda| \sum a_{ij}$

$= |\lambda| N(A)$

$\Rightarrow N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$

(iii) Prouvons que ~~IT~~ $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

Comme $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On a $N(A+B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max \sum (|a_{ij}| + |b_{ij}|)$

$\exists j_0$ tq $1 \leq j_0 \leq n$ dépend A et B

$\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} (|a_{ij_0}| + |b_{ij_0}|)$

~~$\leq \max \sum |a_{ij_0}| + \max \sum |b_{ij_0}|$~~

~~$= N(A) + N(B)$.~~

Dc $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

Donc $N(A)$ est une norme sur E.

Puis $N(A+B) \leq \sum |a_{ij_0}| + |b_{ij_0}| = \sum |a_{ij_0}| + \sum |b_{ij_0}|$

or $\sum |a_{ij_0}| \leq \max \sum |a_{ij}| = N(A)$

$\sum |b_{ij_0}| \leq \max \sum |b_{ij}| = N(B)$

b) Mq $\forall (A,B) \in E\times E$: $N(AB) \leq N(A).N(B)$
(N est une $\boxed{nm}$)

Posons $C = AB$, écrivons $A=(a_{ij})$ & $B=(b_{ij})$ & $C=(c_{ij})$. On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall 1 \leq i,j \leq m.$$

Il vient que $N(AB) = N(C) = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}|$

$$= \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right|$$

soit $1 \leq j \leq m$: on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |b_{kj}| \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}| \leq N(A).N(B)$$

car $\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \leq N(A)$

c) soit $A \in E$, on considère $u_k = \frac{A^k}{k!}$, $k \geq 1$.
Mq $(u_k)_{k\geq 1}$ cv vers 0 ds (E,N).

D'après b), $N(u_k) = N\left(\frac{A^k}{k!}\right) = \frac{1}{k!} N(A^k)$

$$= \frac{1}{k!} N(\underbrace{A \dots A}_{k \text{ fois}}) \leq \frac{1}{k!} \underbrace{N(A) \dots N(A)}_{k \text{ fois}}$$

$$= \frac{[N(A)]^k}{k!}$$

En posant $t = N(A) \geq 0$, on a :

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad \& \text{ dc } \quad \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

En cons'qt, $N(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ & dc $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ds (E,N).

Ouverts, fermés, intérieur, adhérence

Ex 8 Parmi les ss-ens, préciser ce q est ouverts, fermés. Ds chq cas préciser l'intérieur, adhérence, la frontière.

a) les ss-ens de $\mathbb{R}$:

(i) $A_1 = \mathbb{R}$

R $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n.

- $O \subset E$ est dit "ouvert" si $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$.
- $F \subset E$ est dit "fermé" si $F^c := E \setminus F$ est "ouvert".
- l'intérieur d'un ens $A \subset E$, noté $\mathring{A}$ est le plus grd ouvert contenu dans A.

$$\mathring{A} := \{x \in A : \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A.$$

- l'adhérence d'un ens $A \subset E$, noté $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant A.

⚠ inverse de contenu.

$$\overline{A} := \{x \in E : \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

- la frontière de A, noté ∂A est $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

(i) $A_1 = \mathbb{R}$

Prenons @ $x = 1$; $B(1, r) \subset \mathbb{R}$.

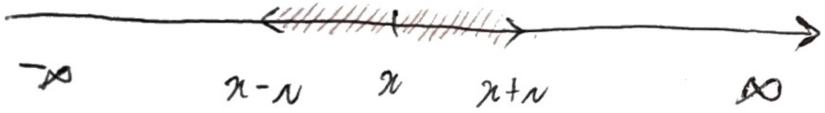
- C'est un ouvert. C'est aussi un fermé car $A_1^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ est un ouvert.
- $\mathring{A}_1 = A_1 = \mathbb{R}$ car A_1 est un ouvert.
- $\overline{A_1} = A_1 = \mathbb{R}$ car A_1 est un fermé.
- $\partial A_1 = \overline{A_1} \setminus \mathring{A}_1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$.

(ii) $A_2 = \mathbb{Q}$

- Ce n'est pas un ouvert car $0 \in \mathbb{Q}$ mais $\forall r > 0$:
$B(0, r) := \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\} \not\subset \mathbb{Q}$
car il y a des nombres irrationnels de type : $\frac{\sqrt{2}}{n}$ x $n \in \mathbb{N}$ tq $\frac{\sqrt{2}}{n} < r$, de $\frac{\sqrt{2}}{n} \in B(0, r)$
$\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$.
- Ce n'est pas un fermé car $\mathbb{Q}^c$ n'est pas ouvert.
En effet $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$ mais $\forall r > 0$;
$B(\sqrt{2}, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \sqrt{2}| < r\} \not\subset \mathbb{Q}^c$
car il existe des rationnels $\frac{m}{n}$ x $m, n \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < r$, & de :
$\frac{m}{n} \in B(\sqrt{2}, r)$ mais $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Q}^c$.

• $\mathring{A}_2 = \emptyset$ car tte boule $B(x,r)$ $^{r>0}$ contient des irrationnels.

• $\overline{A_2} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r > 0$, $B(x,r)$ contient des rationnels.



<u>Preuve rapide</u>

$\left|\frac{m}{n} - x\right| < r \iff |m - nx| < nr$

Il suffit prendre $n > \frac{1}{r}$ & $m = [nx]$ alors $|m - nx| = |[nx] - nx| < 1 < nr$

Puis pr faire intervenir irrationnels : avec $\sqrt{2}$.

• $\partial A_2 = \overline{A_2} \setminus \mathring{A}_2 = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

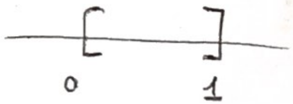
• $A_3 = [0,1]$, A_3 n'est pas ouvert car $0 \in A_3$ mais $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A_3$ car $-\frac{r}{2} \in B(0,r)$ mais $\frac{-r}{2} \notin A_3$.

→ A_3 est un fermé car $A_3^c =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.

• $\mathring{A}_3 =]0,1[$

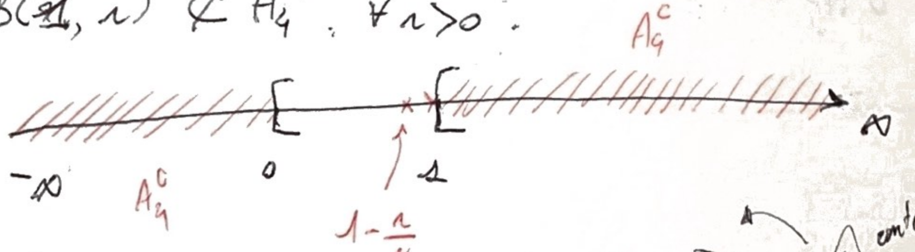
• $\overline{A_3} = A_3 = [0,1]$ car il est fermé.

• $\partial A_3 = \overline{A_3} \setminus \mathring{A}_3 = [0,1] \setminus]0,1[= \{0,1\}$



• $A_4 = [0,1[$, ce n'est pas ouvert car $0 \in A_4$ mais $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A_4$ car $\frac{-r}{2} \in B(0,r)$ mais $\frac{-r}{2} \notin [0,1[$.

• ce n'est pas fermé car $A_4^c =]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$ n'est pas ouvert. En effet $1 \in A_4$ mais $B(1,r) \not\subset A_4^c$. $\forall r > 0$.



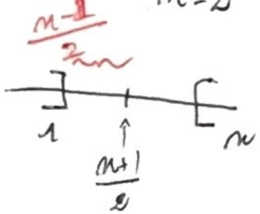
⚠ contenant A

• $\mathring{A}_4 =]0,1[$ • $\overline{A_4} = [0,1]$

• $\partial A_4 = \overline{A_4} \setminus \mathring{A}_4 = [0,1] \setminus]0,1[= \{0,1\}$.

(ii) $A_5 =]-\infty, 1]$

- Ce n'est pas un ouvert, car $1 \in A_5$ mais $\forall r>0$, $B(1,r) \not\subset A_5$.
  En effet, $1+\frac{r}{2} \in B(1,r)$ mais $1+\frac{r}{2} \notin]-\infty, 1]$
- C'est un fermé car $A_5^c =]1,\infty[$ est un ouvert.
  $]1,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]1,n[= \bigcup_{n=2}^{\infty} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$

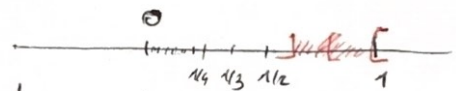


- $\mathring{A}_5 =]-\infty, 1[$
- $\overline{A_5} = A_5$ car il est fermé.
- $\partial A_5 = \overline{A_5} \setminus \mathring{A}_5 =]-\infty,1] \setminus]-\infty,1[$
  $= \{1\}$.

! $\to$ $A_6 = [1, \infty[$ (idem que A_5 en chgt rôles)
$\mathring{A}_6 =]1,\infty[$, $\overline{A_6} = A_6$, $\partial A_6 = \{1\}$,

(iii) $A_7 = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Ce n'est pas un ouvert car $1 \in A_7$. $\forall r>0$



$B(1,r) \not\subset A_7$.

Il suffit de prendre $1+\frac{r}{2} \in B(1,r)$ mais $1+\frac{r}{2} \notin A_7$
car $x \in A_7 \Rightarrow 0<x\leq 1$ & $1+\frac{r}{2} > 1$.

- ⚠ Ce n'est pas fermé car $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ & $\frac{1}{n} \in A_7$
  On en déd $0 \in \overline{A_7}$. Or $0 \notin A_7$.
- $\mathring{A}_7 = \emptyset$ car si $x \in \mathring{A}_7$ alors $\exists r>0$
  tq $r<x$ & $B(x,r) \subset A_7$.
  Or $B(x,r)$ contient une infinité d'élts &
  $B(x,r) \cap A_7 = \left\{\frac{1}{n}, x-r < \frac{1}{n} < x+r\right\}$ est un ens. fini.
  $\Updownarrow$
  $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{x+r} < n < \frac{1}{x-r}\right\}$
- $\overline{A_7} = A_7 \cup \{0\}$ car $0 \in \overline{A_7}$ & $A_7 \cup \{0\}$ est fermé.
  car $(A_7 \cup \{0\})^c =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\cup]1,\infty[$ est ouvert.
- $\partial A_7 = \overline{A_7} \setminus \mathring{A}_7 = (A_7 \cup \{0\}) \setminus \emptyset = A_7 \cup \{0\}$.

Ex2 b) Justifier si Ouverts, fermés, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, ∂A ?

(i) $A_9 =]-2,1[\times [0,3]$

- Mq A_9 n'est pas un ouvert. soit $x = (0,0) \in A$, le point $(0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(0,0)$ mais $\notin A$. (2° coord $\notin [0,3]$)
- Mq A_9 n'est pas un fermé. soit $x = (1,1) \notin A$, $\varepsilon > 0$
Pour $\varepsilon = 6$, point $(1-\frac{\varepsilon}{2}, 1) \in B_\varepsilon(1,1)$ & à A.
Dc $B_\varepsilon(1,1) \cap A \neq \emptyset$. Donc cette boule n'est pas contenue ds $\mathbb{R} \setminus A = A^c$.
- $\mathring{A}_9 =]-2,1[\times]0,3[$
- ~~$\overline{A_9} = \emptyset$ car ce n'est pas fermé.~~
- ~~$\partial A_9 = \overline{A_9} \setminus \mathring{A}_9 = \emptyset \setminus]-2,1[\times]0,3[=$~~
- $\overline{A_9} = [-2,1] \times [0,3]$
- $\partial A_9 = \overline{A_9} \setminus \mathring{A}_9 = [-2,1] \times [0,3] \setminus]-2,1[\times]0,3[$
$= \{(-2,0), (1,3)\}$.

(i) $A_{10} = [0,1] \times \{9\}$

- Mq A_{10} n'est pas un ouvert car $(0,9) \in A_{10}$ mais $\forall r > 0$, $B_r((0,9)) \not\subset A_{10}$ car $\frac{-r}{2} \in B_r((0,9))$ mais $(-\frac{r}{2}, 9) \notin A_{10}$.
- Mq A_{10} est un fermé car $A_{10}^c = \left( ]-\infty, 0[\cup]1, \infty[;]-\infty, 9[\cup]9, \infty[\right)$
Union d'ens ouvert est un ouvert.
Dc son complémentaire est un ouvert.
Donc cet ens est un fermé.
- $\mathring{A}_{10} =]0,1[\times \{9\}$
- $\overline{A}_{10} = [0,1] \times \{9\}$
- $\partial A_{10} = \overline{A}_{10} \setminus \mathring{A}_{10} = [0,1] \times \{9\} \setminus]0,1[\times \{9\}$
$= \{(0,9), (1,9)\}$.

(ii) $A_{11} =]0,1[\times \{0\}$. soit $(x,y) \in A_{11}$

- Mq A_{11} n'est pas un ouvert. $\forall r>0$

$B\left(\left(\frac{x}{2},y\right), \frac{r}{2}\right) \not\subset A_{11}$ car la 2° coordonnée n'appartient pas à $\{0\}$. ie $\left(0-\frac{r}{2}\right)$ $\notin \{0\}$.

- $A_{11}^c = \left(\underbrace{]-\infty,0] \cup [1,\infty[}_{\text{pas ouvert}}, \underbrace{]-\infty,0[\cup]0,\infty[}_{\text{ouvert}}\right)$

- Mq A_{11}^c n'est pas un fermé car $\forall r>0$

$B((1,2),r) \not\subset A_{11}^c$

en effet $(1-r,2) \in B((1,2),r)$ mais

$(1-r,2) \notin A_{11}^c$.

- $\mathring{A}_{11} = \emptyset$ - $\overline{A}_{11} = \emptyset$

- $\partial A_{11} = \overline{A}_{11} \setminus \mathring{A}_{11} = \emptyset$.

$y_n = (x_n^2) = (x+\frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} \to x^2$

$x, \quad y+r$

DM 2

2

$A_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y$

- Mq A_{12} est un fermé. Posons $\varphi(x,y) = x^2 - y$, cette applicat° est cont. Puis

$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\} = A_{12}$

Or le singleton $\{0\}$ est un fermé, dc $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé. (car φ est cont)

Donc A_{12} est un fermé.

- ~~$\varphi^{-1}(]-\infty,0[\cup]0,\infty[)$~~ ?? réunion ~~ouvert~~

Mq A_{12} n'est pas un ouvert : $\forall r>0$. soit $(x,y) \in A_{12}$

$B((x,y),r) \not\subset A_{12}$.

car $(x,y-r) \in B((x,y),r)$ mais

$(x,y-r) \notin A_{12}$.

- $\overline{A}_{12} = A_{12}$ car c'est un fermé.

- $\mathring{A}_{12} = \emptyset$ car si $(x,y) \in A_{12}$, $\exists (x_n,y_n)$ q n'est pas ds A_{12} q cv vers x @ $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = (x_n)^2 = (x+\frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$

- $\partial A_{12} = \overline{A}_{12} \setminus \mathring{A}_{12} = A_{12}$.

(iv) $A_{14} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ yx < 1\}$

Posons $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = yx.$

φ appli cont

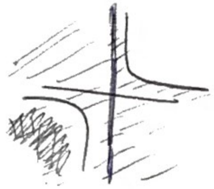
$\varphi^{-1}(]-\infty,1[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) < 1\}$

or $]-\infty, 1[$: ouvert

φ : appli cont.

Donc A_{14} est un ouvert.

$\Rightarrow \mathring{A}_{14} = A_{14}.$



~~$]-\infty,0[\cup]-\infty,0[$.~~

$]-\infty, 1[$.

$yx \geq 1$

$[1,\infty[$

~~Mq~~ A_{14} n'est pas fermé

Mq de boule $y \neq 0$

$B((0,y), r) = B$

$B \not\subset A_{14}$

car $(-r,y) \in B((0,y),r)$

mais $(-r,y) \notin A^c_{14}.$

$\Rightarrow \overline{A_{14}} = \emptyset$

$\partial A_{14} = \overline{A_{14}} \setminus \mathring{A}_{14} = \emptyset \setminus A_{14} = \emptyset$!!!!

$]-\infty,0] \cup [0,\infty[$

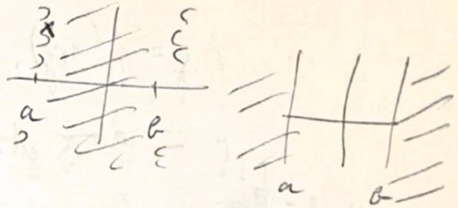
$\times\ ]-\infty,0] \cup [0,\infty[$

$y_n = \frac{1}{x_n} \times \frac{1}{n}$ $\in A^c_{14}$

$\emptyset$

(v) $A_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > a \text{ et } x < b\}$



~~fermé de $\varphi(x,y) = x$. cont~~ ~~$\{b\}$: fermé~~ ~~$\{a\}$: fermé.~~

$A_{15} = \underbrace{]a,b[}_{\text{ouvert}} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{ouvert}} = \mathring{A}_{15}$ ← ouvert

$\overline{A_{15}} = A_{15}$

~~(Mq ce n'est pas un ouvert)~~ ?

$\overline{A_{15}} = [a,b] \times \mathbb{R}$

$\partial A_{15} = \overline{A_{15}} \setminus \mathring{A}_{15} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \text{ ou } x = b\}$

$B_r(a) \subset A$ $\quad \|x-a\| < r$

$B((0,y_n), r) \not\subset A_{14}.$

avec (x_n, y_n)

$\|(x,y) - (\ )\| < r$

④

(viii) $A_{18} = \{(x,y),\ -1<x<1,\ -1<y<1\}$

$= \{\text{—},\ |x|<1 \text{ et } |y|<1\}$

$= \underbrace{]-1,1[}_{\text{ouvert}} \times \underbrace{]-1,1[}_{\text{ouvert}} = \{\text{—},\ \max(|x|,|y|) < 1\} = \mathring{B}.$

$\mathring{A}_{18}$.

Mq c'est un ouvert ✓.

$\bar{A}_{18} = [-1,1]\times[-1,1]$.

$\partial A_{18} = \{-1,1\}\times[-1,1] \cup [-1,1]\times\{-1,1\}$.

~~Mq c'est un fermé~~: $\cancel{f(x,y) < B = 1 = \text{cte}}$

$\cancel{\max(|x|,|y|)}$

$\cancel{\mathring{A}_{18} = A_{18}}$

$\cancel{\bar{A}_{18} = \{\text{—},\ \max(|x|,|y|) \le 1\}}$

$\cancel{\partial A_{18} = \bar{A}_{18} \setminus \mathring{A}_{18} = \{\text{—},\ \max(|x|,|y|) = 1\}}$.

(ix) $A_{19} = \{(x,y),\ -1<x<1,\ -1\le y<1\}$

$= \{\text{—},\ |x|<1 \text{ et } y<1 \text{ et } y\ge -1\}$

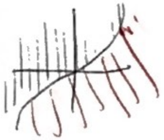
ni un ouvert ni un fermé

$\bar{A}_{19} = \bar{A}_{18}$, $\mathring{A}_{19} = A_{18}$, $\partial A_{19} = \partial A_{18}$.

DM 6

$y \leq x^3$ (iii) $A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 > 0\}$

$A_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$



Posons $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = y - x^3$.

φ est une applicat° cont.

$\varphi^{-1}(]0,\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^3 > 0\}$

$= A_{13}$.

or $]0,\infty[$: ens ouvert & φ : appli cont.

Donc A_{13} est un ouvert.

$A_{13}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\}$.

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^3 - y \Leftrightarrow x^3 - y \geq 0\}$

idem $\gamma(x,y) = x^3 - y$

$[0,\infty[$

~~fermé~~ ~~ouvert~~

fermé

A_{13} pas un fermé car pas $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$.

de

son complt est ~~ouvert~~

ch A_{13} est fermé.

NON

(3)

DM-3

$\Rightarrow$ $\mathring{A}_{13} = A_{13}$

mq $\Rightarrow$ $\overline{A_{13}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$.

→ En effet si (x_n, y_n) est une suite de A_{13} qui cv vers (x,y) alors PALim $y \geq x^3$, prve $\overline{A_{13}} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$

Réciproqt, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3$.

- si $x > 0$: $y > 0$ tq $\sqrt[3]{y} \geq x$.
- si $x < 0$: $y > 0$ pas de soucis, $y < 0$ ⟶

$\sqrt[3]{y} \geq x$

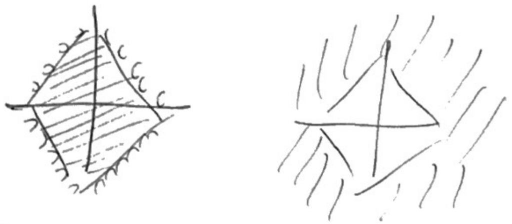
- $\partial A_{13} = \overline{A_{13}} \setminus \mathring{A}_{13}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$.

(vi) : $A_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x|+|y| < 1\} = \mathcal{B}^1$

où $a(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}^1 = \{a \in E, \|a_1\| < 1\}$



Mq c'est un ouvert : $\forall r > 0$;
$B((x,y), r) \subset A_{16}$.

Mq c'est un fermé : $f(x,y) < b = cte$.
cont $\quad \| \quad |x|+|y|$

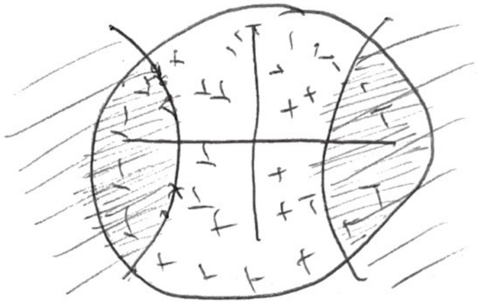
$\mathring{A}_{16} = A_{16}$

$\overline{A}_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x|+|y| \leq 1\}$

$\partial A_{16} = \overline{A}_{16} \setminus \mathring{A}_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$|x|+|y| = 1\}$.

(vii) $A_{17} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 - y^2 \geq 1}_{\text{fermé}} \text{ et } \underbrace{x^2 + y^2 < 2}_{\text{ouvert}}\}$

ni ouvert, ni fermé



$\overline{A}_{17} = x^2 - y^2 \geq 1 \quad x^2 + y^2 \leq 2$

$\mathring{A}_{17} = x^2 - y^2 > 1 \quad x^2 + y^2 < 2$.

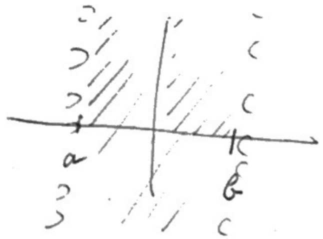
$\partial A_{17} = (x^2 - y^2 = 1 \ \& \ x^2 + y^2 \leq 2) \cap (x^2 - y^2 \geq 1 \ \& \ x^2 + y^2 = 2)$

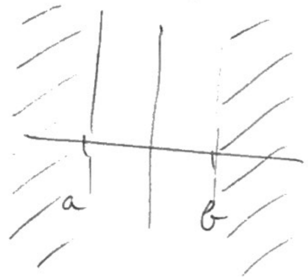
$y = \sqrt{x^2 - 1}$

DM 5

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$

$y \in \mathbb{R} \ldots$





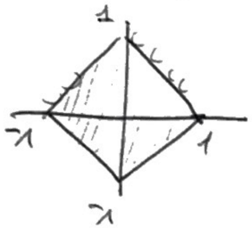
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 + y^2|$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x| + |y| < 1\} = \mathbb{B}^1$

$a(x,y) \in \mathbb{R}^2$

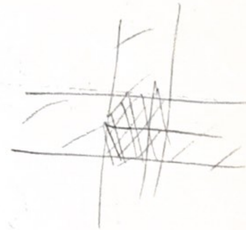


$\mathbb{B}^1 = \{a \in E, \ \|a\|_1 < 1\}$

$= \{(x,y), \ -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\}$

$= \{(x,y), \ |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$

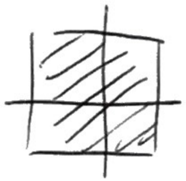
$\mathbb{B}^\infty = \{(x,y), \ \max(|x|, |y|) < 1\}$

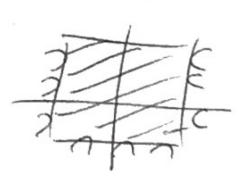


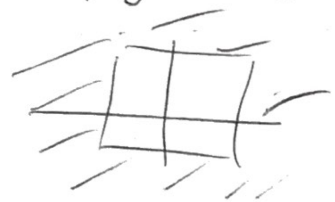
$\mathbb{B}^\infty = \{a \in E, \ \|a\|_\infty < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$

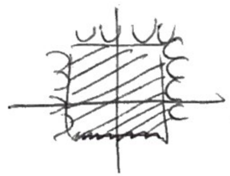


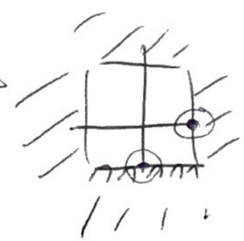




$\rightarrow \{(x,y) \mid -1 < x < 1, \ -1 \leq y < 1\}$ A(9

ni un ouvert
ni un fermé





D'1

Ex6 on note E ev des f_s

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

tq $f(0) = 0$.

$\forall f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

Mq N_1 & N_2 st 2 normes équiv s E.

équiv si $\exists\ c_1, c_2 > 0$ tq

$$c_1 N_1(f) \leq N_2 \leq c_2 N_1(f).$$

Mq $N_2(f) \leq c_2 N_1(f)$ on cherche $c_2 > 0$.

$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \overset{?}{\leq} c_2 \|f'\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \leq c_2 \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \ (c_2 - 1)$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{c_1} \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq c_2 \|f'\|_\infty$$

ok.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

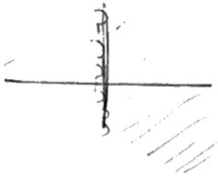
$x \mapsto f(x)$

$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_\infty + \|f'(x)\|_\infty$

pr $x = 0$ $= \|f(0)\|_\infty + \|f'(0)\|_\infty \leq \overset{\overset{c_2}{\shortparallel}}{2} \|f'(0)\|_\infty$

$= 0$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x>0\}$

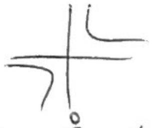


si $(x,y) \in A$ alors $B\left((x,y), \frac{x}{2}\right)$ est contenue ds A. Ainsi $\mathring{A} = A$.

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \geq 0\}$. En effet si (x_n, y_n) est une suite de A q cv vers (x,y) alors PALim $x \geq 0$; ce q prouve $\overline{A} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$

Récipqt, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0$. Alors si $x>0$, $(x,y) \in A \subset \overline{A}$ & si $x=0$ alors prenons (x_n, y_n) def $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = y$. (x_n, y_n) est une suite de A q cv vers (x,y).

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ xy = 1\}$



i2 : Mq B est fermé $\rightarrow \overline{B} = B$ puis $\mathring{B} = \emptyset$.

En effet si $(x,y) \in B$, $\exists \ (x_n, y_n)$ q n'est pas ds B & q cv vers x p @ $x_n = x + \frac{1}{n}$

$x_n y_n = 1 + \frac{y}{n} \neq 1$ car $y \neq 0$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ xy > 1\}$: soit $g(x,y) = xy$

$g^{-1}(]1,\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ g(x,y) > 1\}$

or ~~...~~ : $]1,\infty[$: ouvert & appli g est cont.

S_1 $\Rightarrow \mathring{C} = C$. idem A mq $\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ xy \geq 1\}$ ©.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 <$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$

Rq D est fermé de $\overline{D} = D$.

Puis ~~interso~~ intérieur intrs ce et interso intérieurs.

$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 > 1\}$

$\partial D = (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\})$

$\cup (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2+y^2 = 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \geq 1\})$

Ex 24 soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

muni de la norme $\|f\|$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ , \ f \in E.$$

Mq $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(Tte suite de Cauchy est cv ds cet espace).

[M] ▷ considérer suite (x_n) de Cauchy de E

▷ fabriquer limite possible de (x_n) : noté x.

(svt usé 8tr espace est complet, @ complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pr faire $\lim x_n(t)$)

▷ dmq $x \in E$

▷ dmq x_n cv vers x.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy d'élémts de E.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq si $p, q \geq N_\varepsilon$

alors $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \infty$$

(iv) $A_8 = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. intervalles entre dq $\frac{1}{n}$

Ce n'est pas ouvert. (idem A_7).

C'est un fermé car $A_8^c =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ $\cup]1, \infty[$ est ouvert.

- $\mathring{A}_8 = \emptyset$ car pr $x \in \mathring{A}_8$
  - si $x \neq 0$, on raisonne ĉ pr A_7.
  - si $x = 0$, alors $\forall r > 0$: $B(0, r)$ contient des nombres $\frac{2}{2n+1}$ pr $n \in \mathbb{N}^*$ mais $\frac{2}{2n+1} \notin A_8$.

Ds ts les cas, on aboutit à une contradicо. $\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \notin A_8$.

- $\overline{A_8} = \emptyset$ car A_8 est fermé
- $\partial A_8 = \overline{A_8} \setminus \mathring{A}_8 = A_8 \setminus \emptyset = A_8$

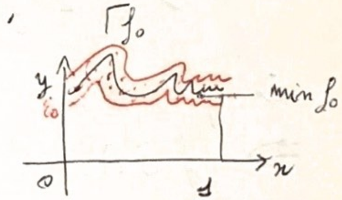
Ex 9 soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ déf p $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ &

soit $A = \{f \in E, \forall t \in [0,1], f(t) > 0\}$

Mq A est ouvert ds E.

Il faut & il suffit de prouver $\forall f_0 \in A$, $\exists \; \varepsilon_0 > 0$ tq

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \varepsilon_0) \subset A.$$



Fixons $f_0 \in A$ qq,

comme $f_0 \in A$, on a $f_0(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$.

Pour $f \in E$, $\varepsilon_0 > 0$ on a :

$f \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f_0, \varepsilon_0) \iff \|f - f_0\|_\infty < \varepsilon_0$.

$\iff |f(t) - f_0(t)| < \varepsilon_0 \quad \forall t \in [0,1]$

Choisissons : $\varepsilon_0 = \inf_{[0,1]} |f_0| = \min_{[0,1]} |f_0| = \min f_0$

On a $\varepsilon_0 > 0$ car $f_0(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$.

f est cont & $[0,1]$ est compact.

Mq $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$.

soit $f \in B(f_0, \varepsilon_0)$ qq,

On a $|f(t) - f_0(t)| < \varepsilon_0$, $\forall t \in [0,1]$.

Or $f_0(t) \geq \min_{[0,1]} f_0 = \varepsilon_0$

Donc $f(t) - f_0(t_0) \geq -|f(t) - f_0(t)|$ car $x \geq -|x|$

$\Rightarrow f(t) \geq f_0(t_0) - |f(t) - f_0(t)|$

$> \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 0$

$\Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow f \in A$.

Donc $B(f_0, \varepsilon_0) \subset A$. & A est ouvert.

Ex 10 soit $(E, \|\cdot\|)$ evn

a) Mq $\forall$ pie $A \subset E$, on a

$\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$

comme $A \subset \bar{A}$, on a $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\bar{A})$

RQ $\bar{A} = \{x \in E : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

Par consqt si $x \in A \Rightarrow B(x,r) \cap A \ni x$

$\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow A \subset \bar{A}$.

- Pr mq $\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$

Prenons $a \in \text{Vect}(\bar{A})$ qq & mq $a \in \overline{\text{Vect}(A)}$

Comme $a \in \text{Vect}(\bar{A})$, $\exists a_1, \dots, a_n \in \bar{A}$ & $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

tq $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

Comme $a_i \in \bar{A}$, $\forall i = 1, \dots, n$,

$\exists$ suite $(a_{ij})_{j=1}^{\infty}$ tq $a_{ij} \xrightarrow[j \to \infty]{} a_i$.

RQ $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$ alors $a \in \bar{A}$

ssi $\exists (x_n) \subset E$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ (ie $\|x_n - a\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

Posons pr $j \geq 1$, considérons :

$x_j = \lambda_1 a_{1j} + \dots + \lambda_n a_{nj}$

comme $a_{ij} \in A$, on a $x_j \in \text{Vect}(A)$

Lorsque $j \to \infty$, $\lambda_1 a_{1j} \to \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_{nj} \to \lambda_n a_n$

Dc $x_j \to \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = a$.

Dc $x_j \xrightarrow[j \to \infty]{} a$. Dc $a \in \overline{\text{Vect}(A)}$ car $x_j \in \text{Vect}(A)$

8) Mq $\forall$ sev F de E, $\overline{F}$ est sev de E.

soit $F \subset E$ sev, il suffit de mq $\overline{F}$ est sev de E. soit $u, v \in \overline{F}$ qq & $\lambda \in \mathbb{K}$ qq. On doit mq

(i) $u+v \in \overline{F}$.

(ii) $\lambda u \in \overline{F}$.

Preuve (i) $u, v \in \overline{F}$, $\exists$ 2 suites (u_n) & (v_n) dans F tq :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \quad \& \quad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$

alors $\underbrace{\|(u_n+v_n)-(u+v)\|}_{\to 0 \ (n\to\infty)} \leq \underbrace{\|u_n-u\|}_{\to 0} + \underbrace{\|v_n-v\|}_{\to 0}$ donc

Or $u_n+v_n \in F$ car $u_n, v_n \in F$ & F est sev.

Donc $u+v \in \overline{F}$.

Preuve (ii) On a :

$$\|\lambda u_n - \lambda u\| = |\lambda| \, \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Or $\lambda u_n \in F$ car $u_n \in F$ & F est sev.

Donc $\lambda u \in \overline{F}$.

Ex 11 soit E ev normé & A & $B \subset E$.

$A+B = \{ z \in E : \exists x \in A, \exists y \in B, z = x+y \}$

a) Mq si A ouvert $\Rightarrow A+B$ est ouvert.

Considérons cp où $B = \{y_0\}$, où $y_0 \in E$ qq.

Ds ce cas, $A+B = \{x+y_0, x \in A\}$

Observons que si $x \in A$ & $r > 0$ tq $B(x,r) \subset A$.

alors $x+y_0 \in A+B$ & $y \in B(x+y_0, r)$

$\Leftrightarrow \|y-(x+y_0)\| < r$

$\Leftrightarrow \|(y-y_0)-x\| < r$ translat

$\Leftrightarrow y-y_0 \in B(x,r) \Leftrightarrow y \in B(x,r)+y_0$.

On a $B(x+y_0, r) \subset A+y_0 = A+B$.

Donc tout point $\forall (x, y_0) \in A+B$, $\exists r>0$, tq $B((x,y_0), r) \subset A+B$.

Dc $A+B$ est ouvert lorsq $B = \{y_0\}$.

Considérons le cas général où B est un ss-ens qq de E. Si $y \in B$ soit $B_y := \{y\}$.

Écrivons, $A + B = \{x+y,\ x \in A, y \in B\}$

$= \bigcup_{y \in B} \{x+y \mid x \in A\}$.

$= \bigcup_{y \in B} (A + B_y)$

D'après la discussion précédente, $A + B_y$ est ouvert car B_y est un ens à un seul élt.

Dc $A + B$ est aussi un ouvert.

---

b) Mq les pties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
$B = \{0\} \times \mathbb{R}$

st fermées mais que $A + B$ n'est pas fermée.

NB : $g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
$= \{0\} \times \mathbb{R}$

La f $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$ est continue.

Rq E, F evn, $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in E$, f est cont en a si

$\underbrace{a_n \to a}_{\|a_n - a\|_E \to 0} \implies \underbrace{f(a_n) \to f(a)}_{\|f(a_n) - f(a)\|_F \to 0}$

si f est cont $\Rightarrow$ $f^{-1}(O)$ est ouvert.
f^{-1}(fermé) est fermé.

---

f $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$. f cont.

Observons que $A = f^{-1}(\{1\})$, $B = f^{-1}(\{0\})$ ↖ image récipq.

Le singleton $\{1\}$ (resp. $\{0\}$) étant fermé, en f (resp g) étant continue, $f^{-1}(\{1\})$ (resp. $g^{-1}(\{0\})$) est nécessrt fermé. et ainsi A & B st fermés.

$\boxed{\text{Mq } A+B \text{ n'est pas fermé.}}$

soit $(x,y) \in A+B$. Dc $\exists\, (x',y') \in A$, $(x'',y'') \in B$ tq $(x,y) = (x',y') + (x'',y'')$

Comme $(x',y') \in A$ & $(x'',y'') \in B$, on a :

$x'y' = 1$ & $x'' = 0$.

et $x = x' + x''$, $y = y' + y''$.

Ainsi $\begin{cases} x' = \frac{1}{y'} \\ x = \frac{1}{y'} \longleftarrow \\ y = y' + y''. \end{cases}$

D'où $x \neq 0$: on a de mqé $A+B \subset C$

où $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Inversemt si $(x,y) \in C$ alors $x \neq 0$ & on pt écrire :

$$(x,y) = \underbrace{\left(x, \frac{1}{x}\right)}_{\in A} + \underbrace{\left(0, y - \frac{1}{x}\right)}_{\in B}.$$

Dc $C \subset A+B$. donc $A+B = C$.

C n'est pas fermé car $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ & $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0) \notin C$.

Compacité

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

Ex17 Déterminer si ces ssts sont ou ne sont pas compacts ds

R : soit X evn dim finie alors $A \subset X$ est $\boxed{\text{compact}}$ $\Leftrightarrow$ A est à la fois borné & fermé.

R : A est borné s' $\exists\, a \in X, r > 0$ tq $A \subset B(a,r)$

a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}$

Considᵉ l'appli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf p $f(x,y) = x^2 + y^4$.

- f étant continue, le singleton $\{1\}$ étant un fermé, $f^{-1}(\{1\})$ est nécessairement fermé.

Or $f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) : f(x,y) = 1\} = A$, dc A est fermé.

soit $(x,y) \in A$ qq alors $x^2 + y^4 = 1$. comme $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$ il vient que $0 \leq x^2 \leq 1$ & $0 \leq y^4 \leq 1$.

D'où $|x| \leq 1$ & $|y| \leq 1$, soit $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq 1$

Ainsi on a mqé $A \subset B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0), 1)$. Donc A est borné.

Comme A est fermé & borné il est compact.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^5 = 2\}$

Considérons l'applicat° $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf p.
$g(x,y) = x^2 + y^5$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

g étant cont, le singleton $\{2\}$ étant fermé, $g^{-1}(\{2\})$ est nécessairt fermé.

$$g^{-1}(\{2\}) = \{(x,y) : g(x,y) = 2\} = B$$

Dc B ~~n'~~est fermé.

Brouillon ⚠ Cherchons une suite $\in B$ mais $\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$(x,y) = (x,-n) \in B$.

$x^2 + (-n)^5 = 2 \Leftrightarrow x^2 = n^5 + 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{n^5 + 2}$.

Mq B n'est pas borné. Considérons la suite
$(x_n, y_n) = \left(\sqrt{n^5+2}, -n\right)$

On a $x_n^2 + y_n^5 = \left(\sqrt{n^5+2}\right)^2 + (-n)^5$
$= n^5 + 2 - n^5 = 2$

Soit $(x_n, y_n) \in B$.
D'autre part, $\|(x_n, y_n)\|_\infty \geq |n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
Dc n'est pas borné. Dc B n'est pas compact.

Ex 18

⚠ dim infinie. (On ne pt pas user Th compact dim finie)

Soit $E = C([0,2\pi])$ muni $\|\cdot\|_2$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = e^{int}$.

a) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ $\forall p,n \in \mathbb{N}$.

Soit $p,n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f_p(t)|^2\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (f_n(t) - f_p(t))(\overline{f_n(t)} - \overline{f_p(t)})\, dt$$ car $|z|^2 = z\bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$= \int_0^{2\pi} (e^{int} - e^{ipt})(e^{-int} - e^{-ipt})\, dt$$ car $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

$$\overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)} = \sum^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \sum^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \bar{z}$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t} + 1)\, dt$$

Il y a 2 cas à considérer.

cas $p = n$ alors $\|f_n - f_p\|_2^2 = \|f_n - f_p\|_2^2 = 0$

cas $p \neq n$ $\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (2 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t})\, dt$

$$= \left[2t - \frac{e^{i(p-n)t}}{i(p-n)} - \frac{e^{i(n-p)}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[2t - \frac{e^{i(p-n)t}}{i(p-n)} - \frac{e^{i(n-p)t}}{i(n-p)} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi - \cancel{\frac{e^{i(p-n)2\pi}}{i(p-n)}} - \cancel{\frac{e^{i(n-p)2\pi}}{i(n-p)}} = 4\pi$$

car $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} e^{i2\pi} = e^{ix}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$
$= e^{ix}$

Ainsi on a mqe $\|f_n - f_p\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ 2\sqrt{\pi} & \text{si } n \neq p \end{cases}$

b) ed boule unité fermée $BF(0,1)$ n'est pas compacte.

(R^t) soit X un espace topologique & soit $A \subset X$.
A est dit compact si pr tt recouvrement d'ouverts de A, on pt en extraire un ss-recouvrem^t fini,
ie si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ & O ouvert,
alors $\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ tq $A \subset \bigcup_{s=1}^{n} O_{i_s}$.

~~D'après q° a), $\left\| \frac{f_n}{2\sqrt{\pi}} - \frac{f_p}{2\sqrt{\pi}} \right\|$~~

On calcule $\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$.

Donc $\left\| \frac{f_n}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2 = 1$ d'où $\frac{f_n}{\sqrt{2\pi}} \in BF(0,1)$.

(R^t) soit X espace vectoriel normé alors $A \subset X$ est compact
$\iff \forall$ suite $(a_n) \subset A$, $\exists$ une ss-suite CV.

si $BF(0,1)$ étant compact, alors il existerait une sous-suite $\left(\frac{f_{n_k}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k=1}^{\infty}$ q CV vers $f \in BF(0,1)$.

soit $\varepsilon > 0$ qq. Il existe de k_0 tq $\forall k \geq k_0$:
$$\left\| \frac{f_{n_k}}{\sqrt{2\pi}} - f \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

On a de $\|f_{n_k} - \sqrt{2\pi} f\|_2 < \varepsilon$ & $\|f_{n_{k+1}} - \sqrt{2\pi} f\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \leq \|f_{n_k} - \sqrt{2\pi} f\| + \|f_{n_{k+1}} - \sqrt{2\pi} f\| \leq 2\varepsilon$

Or d'après a), $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| = \sqrt{4\pi}$

Or d'après a), $\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| = \sqrt{4\pi}$!

On obtient de $\sqrt{4\pi} \leq 2\varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{\pi} \leq \varepsilon$.

Il suffit de choisir : $0 < \varepsilon < \sqrt{\pi}$ & on aboutit à une contradiction.

Donc $BF(0,1)$ n'est pas compact.

Suites de Cauchy & Complétude

Ex 1 Déterminer si suites $(U_n)_{n>0}$ st de Cauchy.

Ⓓ soit $(E^{\|\cdot\|})$ evn, on dit qu'une suite $(x_n) \in E$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q \geq N$:

$$\| x_p - x_q \| < \varepsilon.$$

Ⓓ soit $(E, \|\cdot\|)$ evn, on dit que E est complet si tte suite de Cauchy de E Ⓒⓥ ds E.

Ⓣⓗ $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ pr $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est un espace de Banach.

a) $U_n = (-1)^n$ ds $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Mq (U_n) n'est pas de Cauchy :

$\exists\ \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists p,q \geq N \quad \|u_p - u_q\| \geq \varepsilon_0$.

Choisissons $\varepsilon_0 = 1$. $\forall N > 0$, considérons $p = N$ & $q = N+1$ alors :

$$|U_p - U_q| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N| \, |1 - (-1)|$$

$$= |(-1)^N| \, 2 = 2 > 1 = \varepsilon_0$$

Donc (U_n) n'est pas de Cauchy.

b) $U_n = (n \cdot \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n})$ ds $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

Ⓡⓠ → Si une suite est Ⓒⓥ alors elle est de Cauchy.

→ Si une suite est de Cauchy dans un espace de Banach alors c'est une suite Ⓒⓥ.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

& $\lim \cos \frac{1}{n} = \cos(\lim \frac{1}{n}) = \cos 0 = 1$

Dc $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,1)$.

Comme (U_n) est Ⓒⓥ, elle est de Cauchy.

c) u_n dans $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$

tq $u_n(t) = n - n^2|t|$

si $n|t| \leq 1$ & $u_n(t) = 0$ sinon.

• Calculons $\|u_n\|_1$, on a :

$$\|u_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |u_n(t)|\, dt = \int_{-1/n}^{1/n} n - n^2|t|\, dt$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} n\, dt - n^2 \int_{-1/n}^{1/n} |t|\, dt$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2n^2 \int_0^{1/n} t\, dt$$

$$= n \cdot \frac{2}{n} - 2n^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/n} = 2 - 1 = 1.$$

• Calculons $\|u_{2n} - u_n\|$, on a :

$$= \int_{-1}^{1} |u_{2n}(t) - u_n(t)|\, dt \geq \int_0^{1/2n} |u_{2n}(t) - u_n(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |(2n - (2n)^2(t)) - (n - n^2|t|)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |2n - 4n^2 t - n + n^2 t|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2n} |n - 3n^2 t|\, dt \geq \int_0^{1/3n} |n - 3n^2 t|\, dt$$

$$= \int_0^{1/3n} (n - 3n^2 t)\, dt = n\int_0^{1/3n} dt - 3n^2 \int_0^{1/3n} t\, dt = n \cdot \frac{1}{3n} - 3n^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/3n}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3n^2}{2 \times 9n^2} = \frac{1}{6}.$$

Donc $\|u_{2n} - u_n\| \geq \frac{1}{6}$, $\forall n$.

Donc ce n'est pas une suite de Cauchy

Prenons $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$ alors $\forall N$, choisissons $p = N$, $q = 2N$

on a $p, q \geq N$ &

$$\|u_p - u_q\|_1 = \|u_{2N} - u_N\| \geq \frac{1}{6} = \varepsilon_0.$$

TD. 2 - Foncts entre evn

Continuité

Ex 1 soit $(E, \|\cdot\|)$ evn sur $\mathbb{R}$.

Mq a) Toute applicaŧ constante sur E est cont.

Rp soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ 2 evn.

soit $U \subset E$ & $V \subset F$ deux ouverts

& soit $f : U \to V$ une applicaŧ.

soit $a \in U$, on dit que f est cont

en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U$:

$\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$.

Autrement dit $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq

$f(B_E(a, \delta)) \subset B_F(f(a), \varepsilon)$.

a) soit $f : E \to E$, une f cte :

$f(x) = c, \forall x \in E$ où $c \in E$ fixé

soit $\varepsilon > 0$ qq ; prenons $\delta > 0$ qq, soit $a \in E$ qq

alors pour $\|x - a\| < \delta$, on a

$\|f(x) - f(a)\| = \|c - c\| = \|0\| = 0 < \varepsilon$

Dc f est cont.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tout $a \in E$, $f : E \to E$, $x \mapsto f(x) = \lambda x + a$ est lipschitzienne.

Rp f est M- Lipschitz $\Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$

soit $x, y \in E$, on a :

$\|f(x) - f(y)\| = \|(\lambda x + a) - (\lambda y + a)\| = \|\lambda (x - y)\|$

$= |\lambda| \, \|x - y\|$

Dc f est M- Lipschitz av $M := |\lambda|$.

c) Mq $x \mapsto \|x\|$ est continue

c) Mq $f : x \longmapsto \|x\|$ est <u>cont</u>.

Il suffit de mq f est lipschitz.

Pour $x, y \in E$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$

Donc f est 1-lipschitz.
Donc f est <u>continue</u>.

<u>Ex 2</u> soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni $\|\cdot\|_1$.

Vérifier $f \longmapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$

est 1-lipschitzienne de E ds $\mathbb{R}$.

L'ens 2 découle de la preuve de ex 1.c) car $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitz.

<u>Ex 3</u> soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$; les appli°s

$$A : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 f(t)\, dt \qquad , \qquad B : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)$$

sont-elles <u>cont</u> sur E si E est muni norme :

a) $\|\cdot\|_\infty$ déf p $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$

<u>Fonc° A</u>

soit $f, g \in E$ qq,

on a $|A(f) - A(g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t))\, dt \right|$

$$\leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_0^1 \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty$$

Donc A est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

On a aussi

$$|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \|f - g\|_1.$$

Donc A est 1-lipschitz, elle est <u>cont</u> par rapport à $\|\cdot\|_1$.

Enfin, on a $|A(f) - A(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$

CS $\leq \sqrt{\left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right) \left(\int_0^1 1\, dt \right)}$

$= \|f - g\|_2$

Donc A est 1-lipschitz, elle est cont par rapport à $\|\cdot\|_2$.

Considérons $\mathcal{B}: E \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto f(0)$

($\mathcal{B}$ la masse de Dirac en 0.)

soit $f \in E$ qq, soit ε qq,

a) Continuité de $\mathcal{B}$ en f p/ $\|\cdot\|_\infty$.

Pr $g \in E$, on a :

$|\mathcal{B}(g)-\mathcal{B}(f)| = |g(0) - f(0)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g(t) - f(t)\| = \|g-f\|_\infty$

Choisissons $\delta := \varepsilon$, on cd $\forall g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f, \delta)$

$\Rightarrow \|g-f\|_\infty < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |\mathcal{B}(g) - \mathcal{B}(f)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \mathcal{B}(g) \in \mathbb{B}(\mathcal{B}(f), \varepsilon)$

Donc $\mathcal{B}$ est cont en f.

Comme f est qq, $\mathcal{B}$ est cont.

---

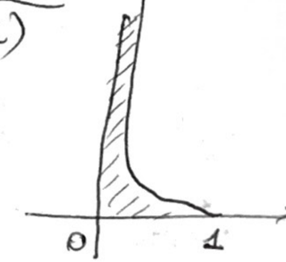
b) Continuité de $\mathcal{B}$ en f p/ $\|\cdot\|_1$.

Brouillon

intuitivement pas possible.

$\underbrace{|f(0) - g(0)|}_{h(0)} \lesssim \int_0^1 \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{h(t)} \, dt$

$|h(0)| \leq \int_0^1 |h(t)| \, dt$



$h_n(t) = n(1-t)^n$ $\quad s = 1-t \quad ds = -dt$

$\int_0^1 h_n(t) = n \int_0^1 (1-t)^n \, dt = n \int_0^1 s^n \, ds = n \left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$

or $h_n(0) = n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ ça marche

---

Mq $\mathcal{B}$ n'est pas cont en 0_E.

Considérons la suite de fs :

$h_n(t) := (1-t)^n$, $\forall t \in [0,1]$

On a $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ & $\|h_n\| = \int_0^1 (1-t)^n \, dt$

$= \int_0^1 (1-t)^n \, dt = -\int_1^0 = \int_0^1 s^n \, ds = \left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

il vient que $\|h_n\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

si $\mathcal{B}$ était cont en 0_E alors $\mathcal{B}(h_n)$ cvrait vers $\mathcal{B}(0_E) = 0_E(0) = 0$

3o Or $\mathcal{B}(h_n) = h_n(0) = (1-0)^n = 1 \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Dc $\mathcal{B}$ n'est pas cont en 0_E

Mq B n'est pas cont en tt pt $f \in E$.
Si ce n'était pas le cas, alors comme

$$\|(f+h_n) - f\|_1 = \|h_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On devrait avoir $|B(f+h_n) - B(f)| \to 0$

Or $B(f+h_n) - B(f) = (f+h_n)(0) - f(0)$

$= f(0) + h_n(0) - f(0)$

$= 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Donc B n'est cont nulle part.

---

c) B n'est pas cont en aucun point $\nearrow \|\cdot\|_2$. Même preuve que pr $\|\cdot\|_1$ en calculant

$$\|h_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |h_n(t)|^2 dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (1-t)^{2n} dt}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

NB : Ttes les normes st équivalentes en dim finie.
Ttes les normes ne st pas forcémt équivalentes en dimension infinie. (ici on avait espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$)

Ex 5 soit E_1, E_2 2 evn, f, g 2 appli cont de E_1 ds E_2.
Mq $A = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé ds E_1.

R1 soit $f : X \longrightarrow Y$ une appli cont alors

(i) $f^{-1}(O)$ est ouvert de X, $\forall O$ ouvert de Y.

(ii) $f^{-1}(F)$ est fermé de X, $\forall F$ fermé de Y.

Mise en garde : ⚠ Les ouverts & fermés ne st pas conservés au moyen d'une image directe :

O ouvert de X $\not\Rightarrow$ $f(O)$ ouvert de Y.
F fermé de X $\not\Rightarrow$ $f(F)$ fermé de Y.

Mise en garde : ⚠ $f(X \setminus A) \neq f(X) \setminus f(A)$

Ex5 Mq $A = \{x \in E_1, f(x) = g(x)\}$ est fermé ds E_1.

Considérons l'appli $h : E_1 \longrightarrow E_2$ donnée par
$h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in E_1$.

Comme f & g, il en est de m̂ pr h.

Observons que $A = \{x \in E_1, f(x) = g(x)\}$
$A = \{x \in E_1, f(x) - g(x) = 0_{E_2}\}$
$A = \{x \in E_1, h(x) = 0_{E_2}\}$
$= h^{-1}(\{0_{E_2}\})$

Or h étant cont. & $\{0_{E_2}\}$ étant fermé de E_2, $h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ est nécessᵉᵗ fermé.

Dc A est fermé.

Ex6 soit $f : E \longrightarrow F$ une appli entre 2 evn.
Mq f est cont ssi si μ tte partie A de E,
$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Ex7 soit f, g 2 appli cont d'un evn E_1 ds E_2 (evn)
on spps $f = g$ sr une pie A de E_1, dense ds E_1.
Mq $f = g$ sur E_1.

ep 2 appli déf & cont sr $\mathbb{R}$, q coïncident sr $\mathbb{Q}$, st égales.

Considérons l'appli $h : E_1 \longrightarrow E_2$ donné par
$h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in E_1$.

Comme f, g st cont ; il en est de m̂ pr h.

D'après l'hypo, $f(x) = g(x)$ pour $x \in A$.
Il vient que $h(x) = f(x) - g(x) = 0_{E_2}$ $\forall x \in A$.
dc $A \subset h^{-1}(\{0_{E_2}\})$.

$\Rightarrow$ ep $\overline{A} \subset h^{-1}(\{0_{E_2}\})$. car $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Comme A est dense ds E_1, on a $\boxed{\overline{A}=E_1}$

Il vient de $\overline{A}=E_1 \subset \overline{h^{-1}(\{0_E\})} \subset E_1$

$A=\overline{A}$ si A fermé

$$E_1 = \overline{h^{-1}(\{0_E\})}.$$

Or h étant cont & $\{0_{E_2}\}$ étant fermé de E_2, $h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ est nécessairement fermé.

Donc $E_1 = h^{-1}(\{0_{E_2}\})$ & $h = 0_{E_2}$ & $f=g$.

Ex 8 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ens des mat carrées de taille n, de la norme N_∞, $N_\infty(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

a) Mq trace est une applicat° cont de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \leftrightarrow$ espace de dim finie.

ici $\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

car $a_{i,j}$ parcourt dans $\mathbb{R}$ librement.

... est ... des ensembles denses ds les ens :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad B=(b_{ij})$$

soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A=(a_{i,j})$ qq & soit $\varepsilon>0$.

Il ns faut mq $\exists\, \delta>0$ tq $\forall\, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A-B\|_\infty < \delta \Rightarrow |\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| < \varepsilon$$

On a $|\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| = \left|\sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i=1}^n b_{ii}\right| = \left|\sum_{i=1}^n (a_{ii}-b_{ii})\right|$

$\leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}-b_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n \|A-B\|_\infty$ car $|a_{ii}-b_{ii}| \leq \underbrace{\sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}-b_{ij}|}_{\|A-B\|_\infty}$

$= n\|A-B\|_\infty$.

Choisissons $\delta := \frac{\varepsilon}{n}$, l'inégalité précédente implique que μ $\|A-B\|_\infty < \delta = \frac{\varepsilon}{n}$,

$$|\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)| \leq n\|A-B\|_\infty = \varepsilon$$

Donc Tr est cont en A.

Retour sur le TD 1

Ex 28 à propos Th de Baire.

a) Vérifier 3 affirmaᵒˢ du Th de Baire ASSE ?

Dans un espace métrique complet (mv)

(i) tte intersecᵒ dénombrable d'ouverts dense est dense.

(ii) tte réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

(iii) si l'espace entier est réunion dénomb. de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert (mv).

Rappelons qu'un espace métriq (X,d) est dit complet si tte suite de Cauchy est CV.

Rppls une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall p,q \geqslant N_\varepsilon$:

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Mq (i) $\Longrightarrow$ (ii)

soit $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fermés d'int. vide

Posons $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, on doit mq F est d'intérieur vide, $\mathring{F} = \emptyset$.

Posons $O_n = X \setminus F_n$, $\forall n \geqslant 1$.

O_n est ouvert car F_n est fermé. En plus, O_n est dense car sinon $\overline{O}_n \neq X$.

$\emptyset \neq X \setminus \overline{O}_n \subset X \setminus O_n = F_n$ & donc F_n contient l'ouvert (nv) $X \setminus \overline{O}_n$.

Ce q contredit l'hypo $\mathring{F}_n = \emptyset$.

En appliquant (i), $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense ds X.

Dc $X \setminus O = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus O_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F.$$

Si $\mathring{F} \neq \emptyset$ alors O n'est pas dense ds X, c'est la contradicᵒ cherchée. $\boxed{c?!c}$

(L) Si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ alors O n'est pas dense ds X car $X \setminus \overline{O}$ contient $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ & dc $X \setminus \overline{O} \neq \emptyset \Rightarrow O$ n'est pas dense.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(ii) Tte réunion (d) de fermés d'int vide est d'int. vide $\Rightarrow$ (iii) si l'espace entier est réunion (d) de fermés, l'1 au ms de ces fermés cont-t un ouvert nv.

soit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, ds F_n fermé.

Supposons par l'absurde que F_n est d'int vide $\forall n$. D'après (ii), leur union X est aussi d'intérieur vide.

Or $\overset{\circ}{X} = X \neq \emptyset$ D'où contradict° recherchée.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

soit $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts denses.

On doit mq $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense.

(R) soit $O \subset X$ alors

(L) O est dense dans $X \Leftrightarrow F = X \setminus O$ est d'int. vide.

Preuve R

O est dense ds $X \Leftrightarrow \overline{O} = X$

$\Leftrightarrow X \setminus \overline{O} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \text{int}(X \setminus O) = \emptyset$ car $\text{int}(X \setminus O) = X \setminus \overline{O}$.

$\Leftrightarrow \overset{\circ}{F} = \emptyset$

D'après le fait ci-dessus, on est ramené à mq $F := X \setminus O$ est d'int. vide.

Comme O_n est dense, $F_n := X \setminus O_n$ est d'int. vide, d'après le (L) ci-dessus. F_n est aussi fermé car O_n est ouvert.

On a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus O_n) = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \right) = X \setminus O = F$

alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \overline{O} = F \cup \overline{O} = (X \setminus O) \cup \overline{O} \supset (X \setminus O) \cup O = X$

Dc $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \overline{O} = X$.

En appliquant (iii), $\exists$ au moins un fermé parmi les F_n & $\overline{O}$ q est d'int non vide.

Card indénombrable si espace est complet.

Or on sait que F_n est d'int vide.

Donc $\bar{O}$ est d'int non vide.

Dc d'après le (L), $X \setminus \bar{O}$ n'est pas dense.

Dc $\bar{O}$ est dense car $\bar{O} \cup (X \setminus \bar{O}) = X$

Dc O est dense ds X.

b) Considérons l'ens des nbr entiers $\mathbb{Z}$ (voir cours de $\mathbb{Z}$) muni de la dist euclidienne venant de $\mathbb{R}$.

(i) Vérifier $\mathbb{Z}$ est complet

$(\mathbb{Z}, |\cdot|)$, pr $x, y \in \mathbb{Z}$: $d(x,y) = |x-y|$

soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$, une suite de Cauchy.

On doit mq 'elle (CV), soit $\varepsilon > 0$ qq,

τ (x_n) est de Cauchy $\exists N = N(\varepsilon)$ tq

$\forall n, m \geq N_\varepsilon$: $d(x_n - x_m) < \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon < \frac{1}{2}$. On a dc $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}$

$\forall n, m \geq N$. Comme $x_n \in \mathbb{Z}$, on conclut $x_n = x_m$

$\forall n, m \geq N$.

Posons $a := x_N = x_{N+1} = \dots$

On a $\forall n \geq N$, $d(x_n, a) = |x - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

Donc $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

(ii) $\mathbb{Z}$ est la réunion d'un ens (d) de ses ss-ens (les singletons). Est-il contradictoire au (Th) de Baire ?

Comme $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\}$, il est la réunion des singletons.

Chaque singleton $\{n\}$ est fermé car $\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \left\{ \begin{matrix} m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq n \end{matrix} \right\}$

$\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq n}} B(m, \frac{1}{2})$ car $B(m, \frac{1}{2}) = \{k \in \mathbb{Z}, |k - m| < \frac{1}{2}\}$
$= \{m\}$

D'après (Th) de Baire (v. a) iii)). Il existe au moins un fermé dont l'intérieur est nv.

C'est tout à fait normal car le fermé $\{n\}$ contient l'ouvert $B(n, \frac{1}{2}) = \{n\}$

@ espace métriq $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Pas de (TD) semaine 36 pro 25/10 24/10

c) Est-ce que (Th) affirme réunion $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ des ens $\overline{\text{npd}}$ F_n est elle-même npd ds l'espace ds l'espace (voir b) Vérifier de $F = \mathbb{Q}$.

Non le (Th) affirme seulement que pr espace métriq complet, toute réunion (d) de fermés d'int vide est d'int vide.

(a) $F = \bigcup_{n\in} F_n \subset \mathbb{R}$ tq chaque F_n n'est npd et que F est dense partout.

Considérons pr $n \geq 1$,

$$F_n := \left\{ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

F_n n'est comme $\mathbb{N}$, npd ds $\mathbb{R}$.

Mais $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left\{ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$.

$\underline{\text{Ex 27}}$ a) Donner des exemples denses ds les ens :

$\to \mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \ell_2$ & $(C[a,b], d)$ où $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

Exemples des ens Z denses ds X.

- $\underline{\text{cas } X = \mathbb{R}}$:
  - $Z = \mathbb{R}$
  - $Z = \mathbb{Q}$
  - $Z = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \{\text{nbr irrationnels}\}$
- $\underline{\text{cas } X = \mathbb{R}^m}$
  - $Z = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{Q}^n$, $Z = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^m$, $Z = (\mathbb{Q})^k \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{m-k}$
- $\underline{\text{cas } X = \ell^2(\mathbb{R})}$
  - $Z = \ell^2(\mathbb{R})$
  - $Z = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap \ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) : x_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N} \ \& \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$

$\leadsto$ Un espace q admet un ss-ens $\underline{\text{dénomb.}}$ dense est appelé "séparable"

- $\underline{\text{cas } X = (\mathcal{C}[a,b], d)}$; où $d(f,g) := \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$
  - $Z = X$
  - $Z = \mathbb{R}[t]$: anneau de polynômes

C'est le (Th) d'approximat° de Weierstrass :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in \mathcal{C}[a,b]$, $\exists$ un poly P tq

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon,\ \forall t \in [a,b].$$

- $Z = \mathbb{Q}[t]$ = anneau de polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$
  $= \{ P = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t^1 + c_0 : c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{Q} \}$.

Comme $\mathbb{Q}[t]$ est dense ds $\mathbb{R}[t]$, et $\mathbb{R}[t] \overline{} C[a,b]$, il s'ensuit que $\mathbb{Q}[t] \overline{} C[a,b]$.

En plus, $\mathbb{Q}[t]$ est dénombrable.

Donc $C[a,b]$ est séparable.

b) R : ss-ens D d'un espace métriq X est appelé npd (ou rare) s'il n'est dense ds aucune boule ouverte de X, ie $\forall$ boule ouverte $B \subset X$ $\exists$ une boule ouverte B' tq $B' \subset B$ & $B' \cap D = \emptyset$.

Mq cette définiθ est équivalte à ppté

$$\mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset.$$

D npd $\Rightarrow \mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset$,

sppsé p l'absurde $\mathrm{int}(\overline{D}) \neq \emptyset$.

Considérons une boule $\emptyset \neq B \subset \mathrm{int}(\overline{D})$.

$\forall$ boule ouverte $\underset{B(x,r)}{B'} \subset B$, on a :

$B' \cap D = \emptyset$ car $x' \in B' \subset B \subset \overline{D}$

On aboutit à une contradicθ du fait que D est npd : $\forall$ boule B $\exists$ une boule $B' \subset B$ tq $B' \cap D = \emptyset$. $\boxed{c?!c}$

$\mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset \Rightarrow D$ npd

M1 si $\forall$ boule $B(x,r)$ contient $B' \subset B(x,r)$ tq $B' \cap D = \emptyset$

alors $\forall x \in B'$, $x \notin \overline{A}$.

$\Rightarrow B(x,r) \not\subset \overline{D} \Rightarrow \mathrm{int}(\overline{D}) = \emptyset$.

M2 sppsé p ?! D n'est pas npd $\Rightarrow \exists$ boule B, $\forall$ boule $B' \subset B$, on a $B' \cap D \neq \emptyset$. soit $x \in B$ qq alors $B' = B(x,r) \cap D \neq \emptyset$ $\forall r > 0$. Dc $x \in \overline{D}$ & de $B \subset \overline{D}$. d'où $\mathrm{int}(\overline{D}) \supset B \neq \emptyset$.

$\boxed{c?!c}$

c) Vérifier que ens $\mathbb{N}$ & $\mathbb{Z}$ st npd ds $\mathbb{R}$.

L'ens $\{(\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il rare ds $]-1,1[$?

Mq $\mathbb{Z}$ n'est npd ds $\mathbb{R}$.

D'après b, il faut & il suffit de prouver que $\mathrm{int}(\overline{\mathbb{Z}}) = \emptyset$.

▸ Mq $\mathbb{Z}$ est fermé. soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ alors $\exists$ une suite $(x_n) \subset \mathbb{Z}$ tq $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dc $\exists N, \forall n \geq N$,

$$d(x, x_n) < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N,$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$$

Com $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$, on a $x_n = x_m$.

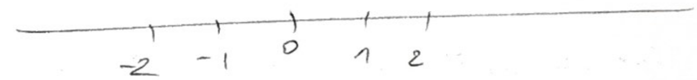
Donc $x_n = x_N$, $\forall n \geq N$ & $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow d(x, x_N) = 0 \Rightarrow x = x_N \in \mathbb{Z}$

Dc $\mathbb{Z}$ est fermé.

▸ Il reste à vérifier que $\mathrm{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

Si ce n'était pas le cas alors $\mathbb{Z}$ contenait un intervalle $]a, b[$ tq $a \neq b$. Ce n'est pas possible.



Donc $\mathbb{Z}$ n'est npd ds $\mathbb{R}$.

d) ens de Cantor : ‖ construire ens nd & npd ds $[0,1]$ ‖

On divise $I = I_0 = [0,1]$ en 3 pies égales & on enlève le milieu $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, en notant I_1 pie restante; les 2 ss-int st subdivisés en 3 → enlève milieu → noté I_2.

Sur le pas n, on obtient $I_n \subset I_{n-1} \subset [0,1]$ constitués de 2^{n-1} ss-int. disjoints de longueur 3^{-n}.

On pose $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

(i) Mq C est ens ∞ et fermé de $\mathbb{R}$.

est-il rare ds $]-1,1[$.

Retour sur c)

soit $D = \{(\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\} \subset]-1,1[$

On a $\bar{D} := D \cup \{0\}$ car $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$int(\bar{D}) = \emptyset$ car si $x_0 \in int(\bar{D}) = int(D \cup \{0\})$

alors soit $x_0 = \frac{1}{n_0}$ pr un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$

soit $x_0 = 0$.

1° cas $x_0 = \frac{1}{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n_0}$ $\frac{1}{n_0 - 1}$ 0

$B(x_0, r) \cap D \cup \{0\} = \{x_0\}$ lorsque $r > 0$ assez petit.

Or $B(x_0, r) \subset D \cup \{0\}$ lorsq $r > 0$ assez petit et cette boule a une qté d'élt. $\boxed{c.q.f.c}$

2° cas : $x_0 = 0$

Dc $\exists r > 0$ assez petit tq $B(0, r) \subset D \cup \{0\}$. ($]-r,r[$)

Or cette boule contient des points irrationnels tandis que $D \cup \{0\} \subset \mathbb{Q}$. $\boxed{c?! c}$

Dc D est npd ds $\mathbb{R}$, ep npd ds $]-1,1[$ de $\mathbb{R}$. d'ouvert (40)

Retour sur d)

Ens de Cantor

(i) Mq C est ens ∞ et fermé de $\mathbb{R}$

On a $I_0 = [0,1]$, $I_1 = I_0 \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.
$= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

$I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$.

Sur le pas n, on obtient :

I_n constitué de 2^n intervalles

$$\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}\right] \text{ où } m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i \quad \text{&} \quad m_i \in \{0,2\}$$

Observons que $\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n+1}}\right]$ est fermé. Donc I_n est fermé

Dc $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est aussi fermé.

Pr mq C est de cardinal infini, il suffit de mq :

$C_0 = \{x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 3^{-i-1} : m_i \in \{0,2\}, \forall i \in \mathbb{N}\} \subset C$

C_0 est l'ens ds nbrs $x \in [0,1]$ dont l'écriture trinaire (ie en base 3) est $0, \overline{m_0 m_1 \dots m_i \dots}$ & $m_i \in \{0,2\}$

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \, 10^{-i-1} \quad m_i \in \{0, \dots, 9\}$$

$= \overline{0{,}\, m_0 m_1 m_2 \dots}$ except $0{,}\overline{99} = 1$.

Donc C_0 est de cardinal $2^{\mathbb{N}} = \infty$

soit $x = \overline{0{,}\, m_0 m_1 m_2 \dots m_i \dots} \in C_0$

Observons que chaque $n \geq 1$,

$$x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right] \text{ où } m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$$

de $x \in I_n$. Donc $x \in C$.

Donc C est de cardinal ∞.

(ii) Mq C est mpd de $[0,1]$

soit $]a,b[\subset [0,1]$ tq $]a,b[\cap C \neq \emptyset$.

Mq $\exists$ ss-interv. $]a',b'[\subset]a,b[$ tq

$]a',b'[\cap C = \emptyset$.

indic : Considérer ss-int I_m contenant $x \in C \cap]a,b[$ & mq interv. $]c_m - 2^{-m-1}, c_m + 2^{-m-1}[$ vérifie l'affirmation, où c_m est milieu de I_m.

Pr mq C ~~...~~ est mpd d'après f), il faut & il suffit de mq $\forall$ $]a,b[\subset [0,1]$, il existe un ss-intervalle $]a',b'[$ tq $]a',b'[\cap C = \emptyset$.

Brouillon

si $]a,b[=]0,1[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

si $]a,b[=]0,\frac{1}{3}[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$,

si $]a,b[=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\Rightarrow]a',b'[=]a,b[$.

si $]a,b[=]\frac{2}{3}, 1[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ & $m \in \mathbb{N}$: $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[\subset]a,b[$.

Écrivons $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, 3^i$ & $m_i \in \{0,1,2\}$

Il y a 2 cas :

(a) si $m_i = 1$ pr un certain i

alors $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[\subset$ un intervalle enlevé.

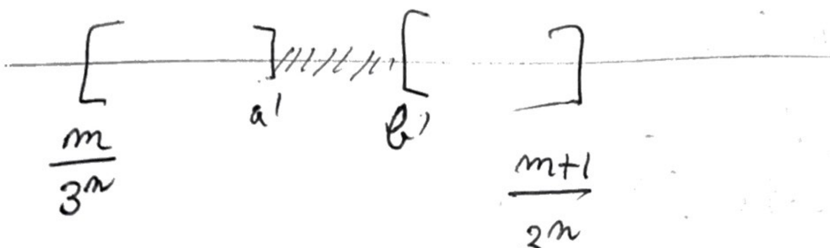
$\Rightarrow]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[\cap I_i = \emptyset$

$\Rightarrow]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[\cap C = \emptyset$ car $C \subset I_i$.

⊖ Il suffit de prendre $]a',b'[=]\frac{m}{3^m}, \frac{m+1}{3^{m+1}}[$

⊛ si $m_i \in \{0,2\}$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$

Alors on prend $]a',b'[$ le tier-intervalle au milieu ĉ $[a',b']$



comme $]a',b'[\cap I_n = \emptyset$, et $C \subset I_n$, on conclut que $C \cap]a',b'[= \emptyset$.

Donc C n'est npd

Ex 30 (Principe de la borne uniforme)

soit X espace métriq complet. spps $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fs cont tq $\forall x \in X$ la f

$$c(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \text{ est bornée}$$

Alors $\exists\, r > 0$ & boule fermée $B = \overline{B(a,r)} \subset X$ du rayon $r > 0$ tq pr cte uniforme $D > 0$ on a $\forall x \in B$: $|f(x)| \leq D$.

a) Mq ens $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$ est égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$, et qu'il est fermé.

$$X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\} = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq N\}$$
$$= \{x \in X : |f_n(x)| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$$

ĉ f_n est cont &

Comme f_n est cont &

$\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\} = \{x \in X : f_n(x) \in [-N,N]\}$
$= f_n^{-1}([-N,N])$,

et $[-N,N]$ est fermé l'ens $\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$ est fermé. Donc X_N est fermé.

$x = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 10^{-i-1}$ $m_i \in \{0, \dots, 9\}$

$= \overline{0{,}m_0 m_1 m_2 \dots}$ except $0{,}\overline{99} = 1$.

Donc C_0 est de cardinal $2^{\mathbb{N}} = \infty$

soit $x = \overline{0{,}m_0 m_1 m_2 \dots m_i \dots} \in C_0$

Observons que chaq $n \geq 1$,

$x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right]$ où $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$

de $x \in I_n$. Donc $x \in C$

Donc C est de cardinal ∞.

(ii) Mq C est mpd ds $[0,1]$

soit $]a,b[\subset [0,1]$ tq $]a,b[\cap C \neq \emptyset$.

Mq $\exists$ ss-interv. $]a',b'[\subset]a,b[$ tq

$]a',b'[\cap C = \emptyset$.

indic Considérer ss-int I_m contenant $x \in C \cap]a,b[$

& mq interv. $]c_m - 2^{-m-1}, c_m + 2^{-m-1}[$

vérifie l'affirmaO, où c_m est milieu de I_m.

Pr mq C ~~est~~ est mpd d'après f), il faut & il suffit de mq $\forall$ $]a,b[\subset [0,1]$, il existe un ss-intervalle $]a',b'[$ tq $]a',b'[\cap C = \emptyset$.

Brouillon si $]a,b[=]0,1[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

si $]a,b[=]0,\frac{1}{3}[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$.

si $]a,b[=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\Rightarrow]a',b'[=]a,b[$.

si $]a,b[=]\frac{2}{3}, 1[\Rightarrow]a',b'[=]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ & $m \in \mathbb{N}$: $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[\subset]a,b[$.

Écrivons $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 3^i$ & $m_i \in \{0,1,2\}$

Il y a 2 cas :

(*) si $m_i = 1$ pr un certain i

alors $]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}[$ $\subset$ un intervalle enlevé.

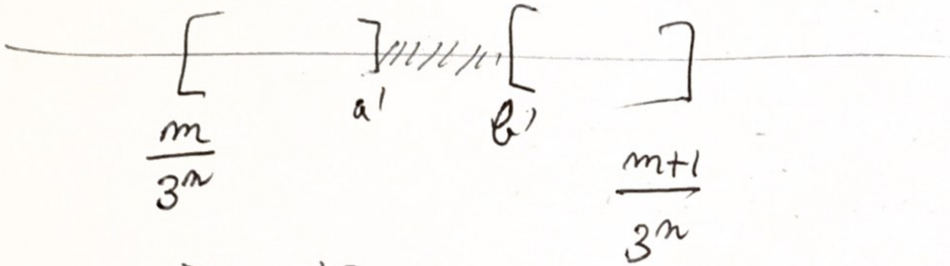
$\Rightarrow]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n}}[\cap I_i = \emptyset$

$\Rightarrow]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^{n}}[\cap C = \emptyset$ car $C \subset I_i$.

(⊃) Il suffit de prendre $]a', b'[=]\frac{m}{3^m}, \frac{m+1}{3^{m+1}}[$

⊛ si $m_i \in \{0,2\}$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$

Alors on prend $]a',b'[$ le tier-intervalle au milieu ĉ $[a',b']$



comme $]a',b'[\cap I_n = \emptyset$, et $C \subset I_n$, on conclut que $C \cap]a',b'[= \emptyset$.

Donc C n'est npd

Ex 30 (Principe de la borne uniforme)

soit X espace métriq complet. spps $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fs cont tq $\forall x \in X$ la f $c(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$ est bornée

Alors $\exists\, r > 0$ & boule fermée $B = \overline{B(a,r)} \subset X$ du rayon $r > 0$ tq pr cte uniforme $D > 0$ on a $\forall x \in B$: $|f(x)| \leq D$.

a) Mq ens $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$ est égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$, et qu'il est fermé.

$X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\} = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq N\}$

$= \{x \in X : |f_n(x)| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$

ĉ f_n est cont &

Comme f_n est cont &

$\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\} = \{x \in X : f_n(x) \in [-N,N]\}$
$= f_n^{-1}([-N,N])$,

et $[-N,N]$ est fermé l'ens $\{x \in X : |f_n(x)| \leq N\}$ est fermé. Donc X_N est fermé.

b) Mq $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n = X$

Comme $\forall N \in \mathbb{N}$, $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\} \subset X$

il vient que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n \subset X$.

Pr mq l'égalité, suffit mq $X \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_n$.

Soit $x_0 \in X$ p^t qq. Prenons $N \in \mathbb{N}$ tq $N \geq c(x_0)$ alors $X_N = \{x \in X : c(x) \leq N\}$ contient x_0.

ccl Dc $\forall x \in B = \overline{B(a,r)}$,
$c(x) \leq N$, ie $|f_n(x)| \leq N$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) en usant le Th de Baire, mq $\exists r > 0$ & $N \in \mathbb{N}$ tq X_N contient une boule fermée $B = \overline{B(a,r)}$.

→ On mq par l'?! $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\mathring{X}_N \neq \emptyset$

Supps le contraire $\mathring{X}_N = \emptyset$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

D'après a) X_N est fermé. Or X est complet, par conséquent d'après le Th de Baire que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$ est d'intérieur vide.

Or d'après b, $X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$. Donc X est d'intérieur vide, ce q est faux car $\mathring{X} = X \neq \emptyset$. On a mqé $\exists N \in \mathbb{N}$, $\mathring{X}_N \neq \emptyset$.

Donc $\exists a \in X$ & $s > 0$ tq $B(a,s) \subset X_N$.

Choisissons $r > 0$ tq $0 < r < s$ Alors

$\overline{B(a,r)} \subset B(a,s) \subset X_N$.

Ex26 TH sur boules emboîtées.

a) Énoncer TH TBFE.

Soit (X,d) un espace métriq complet alors ttte suite de boules fermées emboîtées $B_1 \supset B_2 \supset \dots \; B_i \supset B_{i+1} \supset \dots$ tq rayon$(B_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ possède un uniq point d'intersect° :

$$\exists!\, x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

~~b) Donner @ mq sans supposer que les boules soient fermées l'affirmat°~~

b) Donner @ mq sans supposer X soit complet l'affirmat° est fausse.

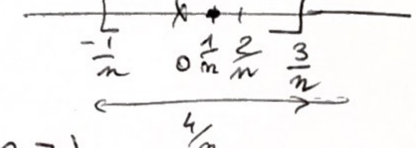
$X := \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$d(x,y) = |x-y|, \ \forall\, x,y \in X.$

Pr $n \geq 1$; posons $B_n := \left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right] \setminus \{0\}$

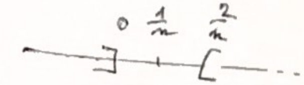
$$B_n = \overline{B_X\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)} = \left\{x \in X,\ \left|x - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{2}{n}\right\}.$$

B_n est une suite de boules fermées de rayon $\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.



$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]\right) \setminus \{0\} = \{0\}\setminus\{0\}.$$

c) Donner @ mq sans supposer que les boules soient fermées l'affirmat° n'est pas vraie.



soit $X = \mathbb{R}$: complet, pr $n \geq 1$; posons

$$B_n = B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}\right\} = \left]0, \frac{2}{n}\right[$$

B_n est une suite de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{2}{n}\right[= \emptyset$$

complet ⟺ pas de trou.

d) Donner @ Mq sans supposer que les rayons des boules tendent vers l'affirm° n'est pas vraie.

<u>indic</u> : Étape 1) sur $\mathbb{N}^*$, $d(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ (distance) si $m \neq n$ & 0 sinon.

Mq c'est une distance & que ens $\mathbb{N}^*$ muni de cette distance est complet.

<u>Étape 2</u> Mq BB fermées $B(n, 1+\frac{1}{2n})$ est égal $\{n, n+1, n+2, \dots\}$ & son intersec° vide.

$X = \mathbb{R}$ complet, pr $n \geq 1$, posons

$$B_n = \overline{B}(1, 1+\frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq 1 + \frac{1}{n}\}$$
$$= [-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}].$$

B_n est une suite décroissante de boules fermées de rayon $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}] = [0, 2]$$

Dc $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ n'est pas singleton.

45

Retour TD.2

<u>Ex 8</u> On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ taille n, N_∞ où $N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i \leq j \leq n} |a_{i,j}|$.

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

a) Mq trace est appli <u>cont</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. ✓

b) Mq det est appli cont de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

<u>cd</u> $GL_n(\mathbb{R})$, l'ens mat de taille n <u>inv</u> est ouvert.

b) Pour $A = (a_{ij})$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

où $\mathfrak{S}_n$ est ens permutat° $\{1, \dots, n\}$:

$\mathfrak{S}_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective $\}$.

$\varepsilon(\sigma)$ est le signe de σ : $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$

$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{N(\sigma)}$ où $N(\sigma) = \#\{(i,j) : i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)\}$

$= \#\{$nbre invers° de $\sigma\}$

Mq det est continue en un point qq $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$|\det(X^{(N)}) - \det(A)| \longrightarrow 0$ lorsque $\|X^{(N)} - A\|_\infty \longrightarrow 0$

Écrivons $X^{(N)} = (x_{ij})$ alors $\|X^{(N)} - A\| = \sup_{i,j} |x_{i,j} - a_{i,j}| \longrightarrow 0$

implique $|x^{(N)}_{i,j} - a_{i,j}| \longrightarrow 0 \quad , \forall 1 \leq i,j \leq n$

$\Rightarrow x^{(N)}_{i,j} \longrightarrow a_{i,j} \quad , \forall \quad 1 \leq i,j \leq n$.

$\Rightarrow x^{(N)}_{1,\sigma(1)} \cdots x^{(N)}_{n,\sigma(n)} \longrightarrow a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$\Rightarrow \det X^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \det A \qquad \forall \sigma \in \mathcal{T}_n$.

$\Rightarrow |\det(X^{(N)}) - \det(A)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ d'après FP.

Observons que A est <u>inv</u> $\iff \det A \neq 0$

$\iff \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\iff A \in \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Donc $GL_n(\mathbb{R}) = \cancel{\{A} \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Comme $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est <u>cont</u> & $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert ds $\mathbb{R}$. Dc $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.