M43 TD1 Ex 1

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \frac{x^0 - x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

$\displaystyle = \frac{1-(-1)^{N+1}}{2} = 1-1+1-1+\dots+(-1)^n$

$\displaystyle = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ impair} \\ 1 & \text{si } N \text{ pair.} \end{cases}$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (p+1) = \sum_{p=1}^{n} p = 1+2+\dots+n$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} n = n \sum_{p=1}^{n} 1 = n(\overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ fois}}) = n^2.$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n} = n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

Rq : $\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} n^p = \begin{cases} n\cdot\dfrac{1-n^n}{1-n} & \text{si } n \neq 1 \\ n & \text{si } n = 1 \end{cases}$

2) $\displaystyle 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (p\times n) = \sum_{k=1}^{n} (k\times n) = n\sum_{k=1}^{n} k \neq k\cdot\sum_{k=1}^{n} n$

$\displaystyle = n\times\frac{n(n+1)}{2}$

Ex 2 Pr ens. ensemblistes : $\cup \quad \cap \quad ^c$.

$D = A \cap B \cap C$ # ts les réussiss[?] à marquer.

$E = A^c \cap B^c \cap C^c$ # aucun ne réussit à marquer.

Rq : $D^c = A^c \cup B^c \cup C^c$ et $E^c = A \cup B \cup C$.

$F = A^c \cap B \cap C^c$ # Béa mange 5 bonbons

$G = D \cup E$ # 3 enfants mangent bonbons.

$H = C \cup E$ # Céc mange au moins un bonbon.

$I = A^c \cap E^c$ # Arthur ne reçoit aucun bonbon

$= A^c \cap (A^c \cap B^c \cap C^c)^c$

$= A^c \cap (A \cup B \cup C) = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)$.

Evénements élémentaires :

Modélisat° : $\Omega = \{0,1\}^3$, $w \in \Omega$.

$w = (w_1, w_2, w_3)$

$w_1 = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } A \text{ marque} \end{cases}$

$w_2 = \begin{cases} 0 \text{ si } B \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } B \text{ marque.} \end{cases}$

$w_3 = \begin{cases} 0 \text{ si } C \text{ ne marque pas} \\ 1 \text{ si } C \text{ marque.} \end{cases}$

$A = \{w \in \Omega : w = (1, \underbrace{w_2}_{\text{2 choix possibles}}, \underbrace{w_3}_{\text{2 choix possibles}})\}$.

$A = \{w = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_1 = 1\}$

$card(A) = 4 \Rightarrow$ A n'est pas un évent élémentaire.

idem pour B et C.

$D = \{(1,1,1)\}$, $card(D) = 1 \Rightarrow$ D évent élémentai[re]

$E = \{(0,0,0)\}$, $card(E) = 1 \Rightarrow$ E évent élémntaire

$F = \{(0,1,0)\}$, $card(F) = 1 \Rightarrow$ F évent élémentaire.

$G = \{(1,1,1), (0,0,0)\}$ $\not$ ~~élémentaire~~

$H = \{(0,1,1) ; (1,0,1) ; (1,1,1) ; (0,0,1) ; (0,0,0)\} = C \cup E$ $\Rightarrow$ H n'est pas EE.

$I = \{(0,1,1) ; (0,1,0) ; (0,0,1)\}$

Rq : $P(E) = \dfrac{card(E)}{card(\Omega)}$; $card(\Omega) = card(\{0,1\}^3) = 2^3 = 8$.

Ex3 soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentat° Ω des évts élts de cette expérience

→ un élt ω doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

où $\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Pile} \\ 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\} \} \; 1 \leq i \leq n \}$

l'ens des n-uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

$n = 5$ FPFPP 01011

FFFFF 00000 ....

⋮

$(\omega_1, \dots, \omega_5)$ où ω_1 res du 1° lancer

⋮

ω_5 res du 5° lancer.

BONUS Réfléchir au cardinal de ces ensembles

2) # event F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 prmrs lancers" ĉ ss-ens de Ω.

Rappels $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$.

$F = \{F\} \times \{F\} \times \{P,F\}^{n-2}$

$F = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \;\middle|\; \begin{matrix} \omega_1 = F \\ \omega_2 = F \end{matrix} \right\}$

3) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

E_i = "résultat du i-ème lancer est pile"

$E_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_i = P\}$

Ex 3 soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentat° Ω des évts élts de cette expérience

→ un élt ω doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

où $\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le ième lancer Pile} \\ 0 & \text{si le ième lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\} \; 1 \leq i \leq n\}$

l'ens des n-uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

$\underline{n=5}$ FPFPP 01011

FFFFF 00000 ...

⋮

$(\omega_1, \dots, \omega_5)$ où ω_1 res du 1° lancer

⋮

ω_5 res du 5° lancer.

BONUS Réfléchir au cardinal de ces ensembles

3 Ex 3+4.

2) # event F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 prmrs lancers" ĉ ss-ens de Ω.

Rappels $A \times B = \{(a,b),\ a \in A,\ b \in B\}$.

$F = \{F\} \times \{F\} \times \{P,F\}^{n-2}$

$F = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \;\middle|\; \begin{matrix} \omega_1 = F \\ \omega_2 = F \end{matrix} \right\}$

3) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

E_i = "résultat du i-ème lancer est pile"

$E_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_i = P\}$

$E_i = \{0,1\}^{i-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-i}$

4) Ecrire à p. évents E_i l'évent F.

$F = E_1^c \cap E_2^c$

5) à p. E_i écrire G = "au moins une fois pile"

$G = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, n\} \;\; \omega \in E_i\}$

6) à p. E_i écrire H = "au moins deux fois sr pile"

$H = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i<k}}^{n} (E_i \cap E_k) = \{\omega \in \Omega : \exists (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid \omega \in E_i \cap E_j,\ i \neq j\}$

Rq $A \times B \subset \Omega \times \Omega = \{(a,b)\ a \in A \text{ et } b \in B\}$

$A \cap B \subset \Omega = \{w \in \Omega \mid w \in A \text{ et } w \in B\}$

$$H = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} E_i \cap E_j .$$

→ calcul les cardinaux :

- $\operatorname{card}(F) = 2^{n-2} = \operatorname{card}\{\{0\} \times \{0\} \times \{0,1\}^{n-2}\}$.
- $\operatorname{card}(E_i) = 2^{n-1}$
- $\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}(\Omega) - 1 = 2^n - 1$.

$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$

→ penser au complémentaire

$G^c =$ "aucun pile" $= \{(0, \dots, 0)\}$

$\operatorname{card}(G^c) = 1$

$\operatorname{card}(G) + \operatorname{card}(G^c) = \operatorname{card}(\Omega)$

∘

▸ $H^c =$ "au plus 1 fois pile"

$\operatorname{card}(H^c) = n + 1 = \{(1,0,\dots,0);(0,1,0,\dots 0);\dots;(0,\dots,1);(0\dots0)\}$

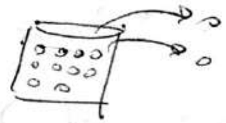
$\operatorname{card}(H) = \operatorname{card}(\Omega) - \operatorname{card}(H^c)$

$\operatorname{card}(H) = 2^n - n + 1$.

→→ si on met l'équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$

Exercice 4

$1, \dots, 10$.



1) 2 boules simult.
2) 2 boules successivement.

∘ A = "la somme est paire".

(1) $\Omega = \{w = (x,y) \mid (x,y) \in [\![1, 10]\!]^2, x \neq y\}$

$(1,2)$ et $(2,1)$ st élts $\neq$ts de Ω.

$\Omega = \{(x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 : x < y\}$.

$\Omega = \{A \subset \{1, \dots, 10\} \mid \operatorname{card} A = 2\}$.

$\operatorname{card}(\Omega_1) = 45$.

nbr de possibilité de prendre 2 élts parmi 10 $= C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{90}{2} = 45$

② bis on tire successivement sans remise

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, \ \omega_1 < \omega_2\}$

$A \subset \Omega$, A : " la somme est paire ".

$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \ \omega_1 + \omega_2 = 2k\}$.

$A = A_p \cup A_i$.

$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A_p = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in E_p^2\}$

$A_i = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in E_i^2\}$.

$A_p \cap A_i = \emptyset$, A_p et A_i st disjoints.

$\mathrm{card}(A_p \cup A_i) = \mathrm{card}(A_p) + \mathrm{card}(A_i)$.

$\mathrm{card}(A_p) = C_5^2 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.

$\mathrm{card}(A_i) = C_5^2 = 10$.

$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20$.

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$$

② on tire successivement avec remise.

$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2\}$

$\mathrm{card}(\Omega) = 10^2$

	1	…	10
1	(1,1) … (1,5)		(1,10)
⋮			
10			(10,10)

$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$

⑤ $[\![1, 10]\!] = \{1, \dots, 10\}$.

$A = A_p \cup A_i$

$A_p = \{ w = (x, y) \mid x \in E_p,\ y \in E_p \}$

$= E_p \times E_p = E_p^2$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\}^2 \subset \Omega.$

$\text{card}(A_p) = \text{car}(\{2,4,6,8,10\}^2) = 5^2 = 25$

$\text{card}(A) = \text{car}(A_p) + \text{card}(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Ω est fini.

$\mathcal{F}$ tribu $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathbb{P}$ équiprobabilité

② bis on tire successivement sans remise

$\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, \ \omega_1 < \omega_2 \}$

$A \subset \Omega$, A : « la somme est paire ».

$A = \{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \ \omega_1 + \omega_2 = 2k \}$.

$A = A_p \cup A_i$.

$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A_p = \{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in E_p^2 \}$

$A_i = \{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in E_i^2 \}$.

$A_p \cap A_1 = \emptyset$, A_p et A_i st disjoints.

$\mathrm{card}(A_p \cup A_i) = \mathrm{card}(A_p) + \mathrm{card}(A_i)$.

$\mathrm{card}(A_p) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

$\mathrm{card}(A_i) = C_5^2 = 10$.

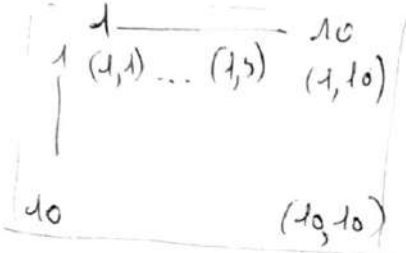
$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20$.

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$$

② on tire successivement avec remise.

$\Omega = \{ \omega = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2 \}$

$\mathrm{card}(\Omega) = 10^2$



$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$

⑤ $[\![1, 10]\!] = \{1, \dots, 10\}$.

$A = A_p \cup A_i$

$A_p = \{w = (x, y) \mid x \in E_p,\ y \in E_p\}$

$= E_p \times E_p = E_p^2$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\}^2 \subset \Omega.$

$card(A_p) = car(\{2,4,6,8,10\}^2) = 5^2 = 25$

$card(A) = car(A_p) + card(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Ω est fini.

$\mathcal{F}$ tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathbb{P}$ équiprobabilité

Ex 5 (date d'anniversaire).

→ jours ~~At~~ équiprobables ici.

- $\Omega = \{1, \dots, 365\}^{30}$; $w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega$.

  w_i : n° du jour annir du $i^{ème}$ étudiant

- on définit la Tribu

  Ω est fini de on prd ts les ss-ens de Ω.

  $\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)}$: ens des events observables.

- $\mathbb{P}$ équiprobabilité sur Ω.

▸ A_m : "2 pers au moins ont m̂ jour anniversaire" — def° event

→ $A_m = \{w \in \Omega : w = (w_i)_{1 \leq i \leq 30}\ \exists (i,j) \in \{1, \dots, 30\}^2$

tq $w_i = w_j$ & $i \neq j\}$

▸ A_m^c = "tous les anniversaires sont jours ≠" calcul proba

$$\mathbb{P}(A_m^c) = \frac{card(A_m^c)}{card(\Omega)} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}}$$

$-30+1$

$A_m^c = \{ w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega,\ w_i \neq w_j,\ \forall i \neq j \}.$

$$\text{card}(A_m^c) = A_{365}^{30} = \frac{365!}{(365-30)!}$$

arrangement

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

- si $w_1 < w_2 < \dots < w_{30}$.

$B = \{ w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega$
$w_1 < w_2 < \dots < w_{30} \}$

$$\text{card}(B) = C_{365}^{30} = \frac{365!}{30!\ 335!}$$

R9 exo 4 1) tirage simultané des 2 boules.

- $\Omega_1 = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x < y \}$

ex $w = (1,2)$ on tire les boules. ici $\boxed{(1,2) = (2,1)}$

$$\text{card}(\Omega_1) = \frac{10 \times 9}{2} = C_{10}^2$$

2) tirage successif et sans remise.

$\Omega_2 = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x \neq y \}.$

$\boxed{(1,2) \text{ est } \neq \text{ de } (2,1)}$

$\text{card}(\Omega_2) = 10 \times 9 = A_{10}^2$

(la proba de l'event sera m̂ ds 2 modélisaθs) ce sera 20/45.

$A =$ "somme paire" $= A_p \cup A_i$.

$A_p = \{ (x,y) \in \{1, \dots, 10\}^2 : x \neq y \mid \begin{matrix} x \text{ est pair} \\ y \text{ est pair} \end{matrix} \}$

$A_p = \{ (x,y) \in \{2, 4, 6, 8, 10\}^2 \mid x \neq y$.

$\text{card}(A_p) = 5 \times 4 = A_5^2$ et $\text{card}(A_i) = A_5^2$

dc $\text{card}(A) = \text{card}(A_p) + \text{card}(A_i)$
$= A_5^2 + A_5^2 = 40.$

$\text{card}(\Omega_2) = A_{10}^2 = 10 \times 9$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{40}{90} = \frac{20}{45}$$

tirage successif $\neq$ toutes permutaθs possibles. A_n^p
tirage simultané = p permutaθs parmi n C_n^p $\binom{n}{p}$

Retour à l'ex 5

$\mathbb{P}(A_m^c) = \dfrac{A_{365}^{30}}{365^{30}} = \dfrac{365!}{335!\,365^{30}}$

$= \prod_{i=0}^{29} \dfrac{(365-i)}{365}$

$\mathbb{P}(A_m) \simeq 70\%$.

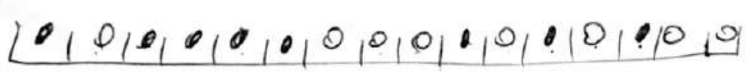
R9 ϱ de 23 étudiants, $\mathbb{P}(A_m) \geq \frac{1}{2}$.

Ex 6 : Autant de piles que de faces

1) en dénombrant façons aligner n boules blanches / noires

mq $C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$

→ nbr possibilités placer n boules blanches & n boules noires



2n cases

$C_n^k = C_{2n}^{n}$: nb de possibilités d'aligner n boules blanches & n bles noires

$\Omega = \{ w \in \{0,1\}^{2n}, w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n}$

$w \in \Omega$ si $\sum_{i=1}^{2n} w_i = n \}$

$w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n} : \exists\, i_1 < i_2 < \dots < i_n$.
$w_i = 1$, $w_k = 0$ sinon $\}$.

$\mathrm{card}(\Omega) = C_{2n}^{n}$.

→ Trouver une $\boxed{M}$ pr répartir n boules blanches parmi S cases.

indic $C_n^k = C_n^{n-k}$.

trouver $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \times C_n^{n-k}$.

charles suquet.

Mq $C_{2n}^{n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, C_n^{n-k}}$

comment répartir (n) boules noires parmi $2n$

Preuve combinatoire.

k boules noires | $n-k$ boules noires $\Rightarrow$ n boules noires

$2n$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \times C_n^{n-k} = C_{2n}^{n}.$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k \quad \text{union disjointe.}$$

$$\Omega_k = \{w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = k\}$$

$$\text{card}(\Omega_k) = C_n^k \cdot C_n^{n-k}.$$

NB: $\Omega_k = \{w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \{0,1\}^n :$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = k \text{ et } \sum_{i=i+1}^{2n} w_i = n-k\}$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k \quad \text{union disjointe.}$$

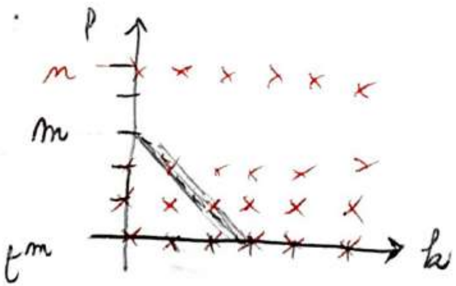
$$\text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(\Omega_k)$$

2) Retrouver (†) $(1+t)^n (1+t)^n = (1+t)^{2n}$

- $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot t^k \cdot 1^{n-k}$
- $(1+t)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \, t^k$
- $(1+t)^n \cdot (1+t)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k\right) \left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l t^l\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} C_n^k C_n^l t^k t^l$$

$$= \sum_{0 \le k,l \le n} C_n^k \cdot C_n^l \, t^k t^l = \sum_{0 \le k,l \le n} C_n^k C_n^l \, t^{k+l}$$



q t^m

$$= \sum_{0 \le k, l \le n} C_n^k C_n^l t^{k+l}$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{k,l: \\ k+l=m}} C_n^k C_n^l \right) t^m$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \overbrace{\left(\boxed{\sum_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k}} \right)} t^m$$

$$(1+t)^n \times (1+t)^n = (1+t)^{2n}$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \boxed{C_{2n}^m} t^m$$

m^{e} coeff polynôme

$$\Rightarrow \boxed{C_{2n}^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k}} . \quad \forall m \in \{0, \dots, 2n\}$$

pour $m = n$:

$$\boxed{C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}}$$

3) Deux personnes lancent chacune n fois d'une pièce de monnaie. Quelle est la proba p_n qu'elles obtiennent $m^{\text{ê}}$ nbr piles.

Expérience aléatoire

→ Décrire espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

→ calculer $p_n = \mathbb{P}(E_n)$

$$\Omega = \{0,1\}^{2n}, \quad \omega = (\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_n}_{\text{résultats lancers } 1^{\text{e}} \text{ personne}}, \underbrace{\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}}_{\text{rés lancers } 2^{\text{e}} \text{ pers.}})$$

1 pile
0 face

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, · $\mathbb{P}$ équiprobabilité sur Ω

$$\text{card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k$$

toutes les possibilités de combinaisons.

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k, \quad E_k : \text{" 2 pers obtiennent } k \text{ piles" exact-t}$$

les E_k st disjoints,

$$\text{card}(E_k) = C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\Rightarrow \text{card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

$$p_n = \mathbb{P}(E_n) = \frac{\operatorname{card}(E_n)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2}{2^{2n}}$$

$$p_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

4) Donner un équivalent de p_n, avec FF Sterling $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$p_n = \frac{1}{2^{2n}} \times C_{2n}^n = \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}\cdot\sqrt{\pi n}} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n}$$

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{2^{2n}\cdot\sqrt{\pi n}} \times \frac{n^{2n}}{n^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\boxed{p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

5) Affirmat°

$$p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

E_k : « les 2 pers obtiennent k piles »

F_k : « k piles pr 1° pers
k faces pr 2° pers » = « n piles - n faces »

$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ex 7 : Tribu, expérience, formant

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ens Ω de ts les ies possibles.

$$\Omega = [\![1,4]\!] = \{1, 2, 3, 4\}$$

2) Une p. lance le dé & annonce résultat tiré.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ => évents élémentaires.

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$$
$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$
$$= \mathcal{P}(\Omega)$$

: "on connaît tout"

3) p.s → pair $\{2,4\}$
↳ impair $\{1,3\}$

$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4\}, \{1,3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

→ $\mathcal{F}_2$ est la plus tribu q contient $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

4) on on'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Big| \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \quad \Big| \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

sans remise

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

- $$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)}{1} \times \frac{(n-k+2)}{2} \times \cdots \frac{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \text{ pr } k \text{ fixé}$$

$\alpha \in]0,1[$.

$$\binom{n}{k} \underset{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^n$$

- Pascal
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 6 + 4 = 10.$$

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}$$

$$\sum \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum C_n^k \cdot C_n^k$$

$$= \sum \left(C_n^k\right)^2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; ; \; C_{2n}^n = \frac{2n!}{n!(n!)} = 1.$$

2) $(1+t)^n (1+t)^n = (1+t)^{2n}$.

FFB $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$

$$(1+t)^{2n} = \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k \, 1^k \times t^{2n-k} = t^k \, 1^{2n-k}$$

Prépa

Ex 7 : Tribu, expérience, format

1) On lance un dé à quatre faces. Écrire l'ens Ω de to les res possibles.

$$\Omega = [\![1,4]\!] = \{1,2,3,4\}$$

2) Une ps. lance le dé & annonce résultat tiré.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ => events élémentaires.

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\},\{2\},\{3\},\{4\}, \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}, \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$$
$$= \mathcal{P}(\Omega)$$

: "on connaît tout"

3) ps → pair $\{2,4\}$
→ impair $\{1,3\}$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4\}, \{1,3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

→ $\mathcal{F}_2$ est la plus tribu q contient $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$

4) on n'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

5) $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \{A \subset \Omega,\ \text{card}(A) = k\}$$

@ $\mathcal{P}_1(\Omega) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

$$\text{card}(\mathcal{P}_k(A)) = C_4^k.$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{4} \mathcal{P}(\Omega) \quad (\text{union disjointe})$$

$$\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = \sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4$$

car $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\text{card}(\Omega)}$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4.$$

Pourquoi $\sum_{k=0}^{4} C_4^k = 2^4$?

$\rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

$\rightarrow a=b=1,$

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k}$$ & $n=4$

mais si card(Ω) alors card($\mathcal{P}(\Omega)$) $= 2^n$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

$\widetilde{\mathcal{F}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{F}}_1 \subset \widetilde{\mathcal{F}}_2$: on a de + en + d'informaOs sr ce que l'on observe.

$\rightarrow (\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$

$\rightarrow\rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$: ens des evts observables.

- si Ω est fini & qu'on fournit le résultat de l'exp: les évents élémentaires (13) alors $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$

Si Ω n'est pas fini, on ne prend pas forcément $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\mathbb{P} : \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \mathbb{P}(A).$$

ⓐ si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ou autre choix.

$\mathbb{P}(\{1\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}$.

Dⓐ $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{8}$.

$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{2}$

---

6) $\widetilde{\mathcal{F}}_{2 \text{ jours } 2020} \subset \widetilde{\mathcal{F}}_{31 \text{ mars } 2022}$,

on observe le passé jusqu'à aujourd'hui.

Ex & FF de Poincaré

- $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$.

- $\mathbb{P}(\underbrace{A\cup B}_{=A}\cup \underbrace{C}_{=B}) = \mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A\cup B)\cap C)$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A\cap C) \cup \mathbb{P}(B\cap C)).$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap B) - \left[\mathbb{P}(A\cap C) + \mathbb{P}(B\cap C) - \mathbb{P}(A\cap C)\cap(B\cap C)\right]$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

FF de Poincaré

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots$$

$$+ (-1)^{n+1}\, \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Ex 9 Secrétaire $\begin{cases} \to N \text{ lettres} \\ \to N \text{ enveloppes.} \end{cases}$

→ $\Omega_N = \mathfrak{S}_N$ = {ens des permutaOs de l'ens {1, …, N}}.

Une permutaO : appli bijective

- $\{1, \dots, N\} \longrightarrow \{1, \dots, N\}$.

card$(\Omega) = N!$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}_N(\{\sigma\}) = \dfrac{1}{N!}$

$\sigma \in \Omega_N = \mathfrak{S}_N$

- $\sigma(i) = j$, si la $i^{ème}$ lettre va ds $j^{ème}$ enveloppe.

σ représente bien la répartiO des lettres numérotées de {1, …, N} ds les enveloppes {1, …, N}.

1) Pour $1 \leq j \leq N$

A_j = "la $j^{ème}$ lettre se trouve ds bonne enveloppe"

$A_j = \{\sigma \in \Omega : \sigma(j) = j\}$ $\forall j \in \{1, \dots, N\}$

calcul de $P_N(A_j) = \dfrac{\text{card}(A_j)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$

car A_j est en bijectO ds l'ens des permutaOs privé de j. $\mathfrak{S}_{\{1, \dots, N\} \setminus \{j\}}$.

2) $A_{i_1, \dots, i_k} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(i_1) = i_1 \dots \sigma(i_k) = i_k\}$
$= A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$

$P_N(A_{i_1, \dots, i_k}) = \dfrac{(N-k)!}{N!} = P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

3) B : "au moins une des lettres est ds la bonne enveloppe"

$B = A_1 \cup A_2 \dots \cup \dots \cup A_N = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$

$B = \{ \sigma \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, N\}, \sigma(i) = i \}$

4) à FF Poincaré, calculer $P_N(B)$

les A_i ne st pas indépdts

$$P_N(B) = P_N\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P_N(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= N \times \frac{1}{N} - C_N^2 \frac{(N-2)!}{N!} + \dots + (-1)^{k+1} C_N^k \frac{(N-k)!}{N!}$$

$$+ \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

NB C_N^2 : calcul nbr de couples (i_1, i_2)

$i_1 < i_2$ ds $\{1, \dots, N\}$: C_N^2.

→ si $i_1 \neq i_2$: A_N^2.

$$\to C_N^k \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{1}{k!}$$

$$P_N(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{(N!)}$$

$$\lim_{N \to \infty} P_N(B) =$$

TD n° 2

Ex1 1 urne, 10 jetons jaunes,
5 blans, 1 rouge.

Modélisaⁿ :

$\Omega = \{ j_1 , j_{10} , b_1 , b_2 , r_2 \}$.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

P = équiprobabilité

$\forall \omega \in \Omega, \; P(\{\omega\}) = \frac{1}{16}$.

Autre modélisaⁿ.

$\Omega' = \{J, B, R\}$.

$\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$

$P'(\{J\}) = \frac{10}{16}$ $\quad P'(\{R\}) = \frac{1}{10}$

$P'(\{B\}) = \frac{5}{16}$

→ On annonce qu'il n'est pas rouge $= \Omega \setminus \{r_2\}$ 1° mod
$= \{R\}^c$ 2° mod

Probabilité qu'il soit jaune.

A = "le jeton tiré n'est pas rouge" } on cherche $P(B|A)$.

B = "le jeton tiré est jaune"

→ $\{j_1, \dots, j_{10}\} = \{\omega\}$ (1)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{10/16}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{10}{15}$$

Ex2

- $p/7$ d'ê ds 1 étage.
- 1 (1) $1-p$ ê en dehors immeuble.

E_i = "ê à étage i", $P(E_i) = \frac{p}{7}$

I = "ê ds immeuble"

$P(I^c) = 1 - p, \quad E_1 \cup \dots \cup E_7 = I$.

$$\sum_{i=1}^{7} P(E_i) = 7 \times \frac{p}{7} = p = P(I)$$

1) On sait que $E_1^c \cap \dots \cap E_6^c$ est réalisé.

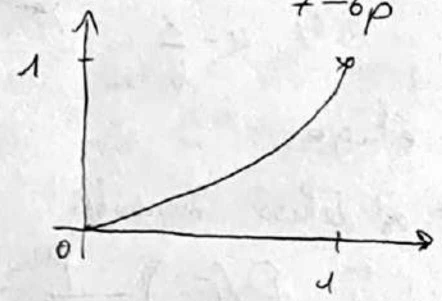
$$P(E_7 | E_1^c \cap \dots \cap E_6^c) = \frac{P(E_7 \cap E_1^c \cap \dots \cap E_1^6)}{P(E_1^c \cap \dots E_6^c)}$$

$$= \frac{P(E_7)}{1 - P(E_1 \cup \dots \cup E_6)} = \frac{p/7}{1 - 6p/7} = \frac{p}{7 - 6p}$$

$E_i \cap E_j \neq \emptyset$ disjoint car on ne pt pas ê ds 2 étages ≠

$$P(E_1 \cup \dots \cup E_6) = P(E_1) + \dots + P(E_6)$$

2) $p \longmapsto \dfrac{p}{7-6p}$ $\quad p \in [0,1]$



→ calcul dérivée

→ ou chgt de repère.

en calculant f' sur $[0,1]$ ou en regardant ça c une hyperbole.

Ex3

$X =$ "X_{xxx} fait le sujet", C "le chap tombe"

$Y =$ "Y_{yyy} ——", $Z =$ "Z_{zzz} ——".

Traduire l'énoncé de proba de ces events.

$P(C \mid X) = 0,1$, $P(C \mid Y) = 0,4)$, $P(C \mid Z) = 0,8)$

$\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{2}$, $X \cup Z = Y^c$

$P(X \mid Y^c) + P(Z \mid Y^c) = P(Y^c \mid Y^c) = 1$

$\Rightarrow P(Z \mid Y^c) = 1 - P(X \mid Y^c)$

objectif : $\mathbb{P}(X \mid C)$, $\mathbb{P}(Y \mid C)$, $\mathbb{P}(Z \mid C)$

$P(X) = \mathbb{P}(X \mid Y^c)\,\mathbb{P}(Y^c) + \underbrace{P(X \mid Y)}_{=0}\,P(x)$

$P(X) = \mathbb{P}(X \mid Y^c).\mathbb{P}(Y^c) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$\circ\ P(X) + P(Y) + P(Z) = 1.$

$$P(Z) = 1 - P(X) - P(Y) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

$P(Z) = \mathbb{P}(Z \mid Y^c)\ \mathbb{P}(Y^c) = \frac{2}{5}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

FF proba totale / Conditionnemt & cas possibles

$$P(C) = P(C \mid X)\,\mathbb{P}(x) + P(C \mid Y)\,P(Y) + P(C \mid Z)\,P(Z) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{39}{100}.$$

ccl $P(X \mid C) = \dfrac{P(X \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C \mid X).P(X)}{P(C)} = \dfrac{3/100}{39/100} = \dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{13} \approx 77\ \%$

$P(Y \mid C) = \dfrac{P(C \mid Y).\mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{20/100}{39/100} = \dfrac{20}{39} \approx 51,3\ \%$

$P(Z \mid C) = \dfrac{P(C \mid Z).\mathbb{P}(Z)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{16/100}{39/100} = \dfrac{16}{39} \approx 41\ \%$

Ex5 Deux dés : exp. aléatoire !

A : "res 1° dé impair"
B : "res 2° dé pair"
C : "res dé dé m̂ parité"

$\Omega = \{1, 6\}^2$. res 1° dé

$w = (w_1, w_2) \in \Omega$ & $w_1 \in \{1, \dots 6\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{F}$. $w_2 \in \{1, \dots 6\}$ res 2° dé.

$\mathbb{P}$: équiprobabilité

$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{36}$

$A = \{w = \{w_1, w_2\} \in \Omega,\ w_1 \in \{1, 3, 5\}\}$
$= \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ w_1 \in \{2, 4, 6\}\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 4, 6\}$

$C = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}^2$.

$C = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ $ w_1 et w_2 paires ou w_1 et w_2 impaires $\}$

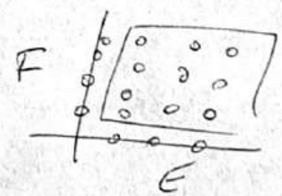
$C_p = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ w_1 \in \{2, 4, 6\}$ et $w_2 = \{2, 4, 6\}\}$
$= \{2, 4, 6\}^2$

$C_i = \{1, 3, 5\}^2$

$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$

- $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

Rq $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$



$E \times F$.

$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{\text{card}(C_p) + \text{card}(C_i)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3^2 + 3^2}{36} = \frac{2 \times 9}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\text{card}(A) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2)$

Ex5 Deux dés : exp. aléatoire !

A : " res 1° impair "

B : " res 2° pair "

C : " res même parité "

$\Omega = \{1,6\}^2$.

- $w = (w_1, w_2) \in \Omega$ $w_1 \in \{1 \ldots 6\}$ res 1° dé, $w_2 \in \{1 \ldots 6\}$ res 2° dé.

$\mathcal{P}(\Omega) = F$.

$\mathbb{P}$: Equiprobabilité

$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{36}$

$A = \{w = \{w_1, w_2\} \in \Omega,\ w_1 \in \{1,3,5\}\}$
$= \{1,3,5\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

- $B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ w_1 \in \{2,4,6\}\}$
$= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}^2$.

$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_1) \times \mathrm{card}(A_2)$

$C = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ \left.\begin{array}{l} w_1 \text{ et } w_2 \text{ paires ou} \\ w_1 \text{ et } w_2 \text{ impaires} \end{array}\right\}$

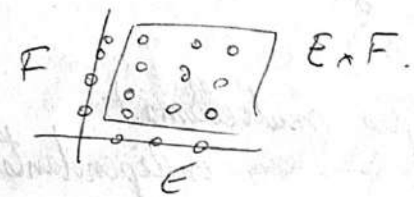
$C_p = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega,\ w_1 \in \{2,4,6\} \text{ et } w_2 = \{2,4,6\}\}$
$= \{2,4,6\}^2$

$C_i = \{1,3,5\}^2$

$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$

- $P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

Rq $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$



$P(B) = \frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{\mathrm{card}(C_p) + \mathrm{card}(C_i)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3^2 + 3^2}{36} = \frac{2 \times 9}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{1,3,5\} \times \{2,4,6\}$ | A et B st indépendts car $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

$A \cap C = \{1,3,5\}^2$, $B \cap C = \{2,4,6\}^2$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(\Omega)} = P(A).P(C)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(\Omega)} = P(B).P(C).$$

$\Rightarrow$ indépendance des évents 2 à 2.

$$\underbrace{\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}_{\emptyset}}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{P(A).P(B).P(C)}_{\frac{1}{8}}$$

Donc A, B et C ne st pas mutuellement indépendants.

Rq

$$P(T^c | A^c) = 1 - P(T|A^c)$$

FF probas totales

Règle de conditionnement

Ex 4 Alcootest

1) $A := \{$"Automobiliste a trop bu"$\}$
$T = \{$"Test positif"$\}$

$P(A) = 0{,}005$, $P(T|A) = f = 0{,}95$

$P(T^c | A^c) = f$

2) On cherche $P(A|T) = \dfrac{P(T|A).P(A)}{P(T)}$

$$= \frac{P(T|A).P(A)}{P(T|A).P(A) + P(T|A^c).P(A^c)} = 8{,}7\,\% = 0{,}087$$

à $f = 0{,}95$.

Rq $A \cup A^c = \Omega$

3) Trouver f tq $P(A|T) = 0{,}95$.

ici $f = 0{,}999736 \approx 99{,}97\,\%$

$$P(A|T) = \frac{f.P(A)}{f.P(A) + P(A^c).P(T|A^c)}$$

si $P(A) = 0{,}5$

on trouve $P(A|T) = 0{,}95 = 95\,\%$

4

Ex6 On s'intéresse à répartition sexes des enfants famille n enfants.

$$\Omega_n = \{f, g\}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \{f, g\},\ i = 1, \dots, n\}$$

$\mathbb{P}$ équiprobabilité.

$\text{card}(\Omega_n) = 2^n$.

- $\forall \omega \in \Omega_n,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

A : { la famille a enfants des 2 sexes "

B : { la famille a au plus 1 fille ". $\text{card}(A) \cup \text{card}(A^c) = \text{card}(\Omega)$.

$\text{card}(A) = 2^n - \text{card}(A^c) = 2^n - 2$

A^c : { famille a q filles ou q garçons }

- $A^c = \{(f, \dots f) ; (g, \dots, g)\}$.

$A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega\ \exists i \neq j \mid \omega_i \neq \omega_j\}$

$\text{card}(A^c) = 2$

Donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$.

$B = B_0 \cup B_1$.

B_0 : { " la famille n'a pas de fille " $= \{(g, \dots g)\}$

B_1 : { " la famille a exactement une fille "

$B_1 = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ tq $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ \omega_i = f$ et $\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\ \omega_j = g\}$

$\text{card}(B_1) = n$, $\text{card}(B_0) = 1$.

$\text{card}(B) = \text{card}(B_1) + \text{card}(B_0)$

$\text{card}(B) = n + 1$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n+1}{2^n}$$

2) on déduit que A et B sont indépendants que si $n = 3$

vérifier $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B)$

car $A \cap B = \underbrace{A \cap B_0}_{\emptyset} \cup \underbrace{A \cap B_1}_{B_1}$.

$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{2^n-2}{2^n} \times \frac{n+1}{2^n}$

$\Leftrightarrow n 2^n = (2^n - 2)(n+1)$

$\Leftrightarrow 2^n = 2n + 2$

OK pour $n = 3$

FAUX pour $n = 2$.

Par récurrence $\forall n \geq 4,\ 2^n > 2n+2$

Ex 7 Lancers 4 paires de dés, on calcule la somme. Calculer 2 façons proba E : { " dans la suite des res observés, la 1° obtenu d'un 9 a lieu avant la 1° obtenu d'un 7 " }

$\Omega = (\{1, \dots, 6\}^2)^{\mathbb{N}^*}$

1) Proba n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer.

$\Omega_1 = (\{1, \dots, 6\}^2)$

Va $S : \Omega_1 \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$

$w = (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$

L'évent $\sigma_7 = \{ w \in \Omega_1 \mid S(w) = 7 \}$

$\sigma_7 = S^{-1}(\{7\}) = \{S = 7\}$

$\sigma_9 = \{S = 9\}$

$A_1 =$ " ni 7 ni 9 " $= \{S \neq 7 \text{ et } S \neq 9\}$

$A_1 = S^{-1}\{2, \dots, 12\} \setminus \{7, 9\}$

$A_1^c = \{S = 7\} \cup \{S = 9\}$

cf 17, 18, 19.

$P(\{S = 7\}) = \mathbb{P}(S = 7) = \frac{\text{card}(\{S = 7\})}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{6}{36}$

$\{S = 7\} = \{(1, 6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

$s \in \{2, \dots, 12\}$

$\{S = s\} = \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_1 + w_2 = s\}$

$= \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_2 = s - w_1\}$.

$1 \leq w_1 \leq 6 \qquad 1 \leq w_2 \leq 6$

6

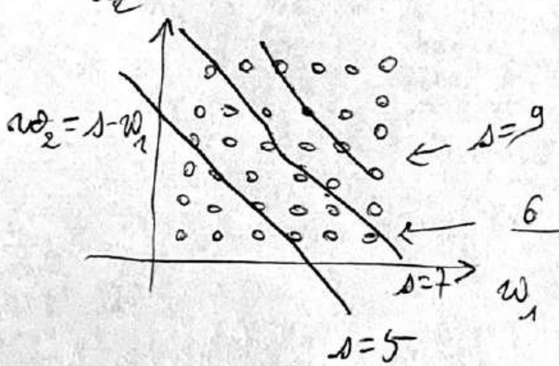
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ s-6 \leq w_1 \leq s-1. \end{cases}$$

pour $s = 7$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq w_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 6$ choix possibles pour w_1.

- $s = w_2 + w_1 \Rightarrow w_2 = 7 - w_1$.

pour $s = 9$ $\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 3 \leq w_1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq w_1 \leq 6$

$\Rightarrow$ 4 choix possibles



- Pour $P(\{S=9\}) = P(S=9) = \dfrac{card(\{S=9\})}{card(\Omega_1)}$

$$= \frac{4}{36}$$

$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$

$P(A_1) = 1 - (P(\{S=7\}) + P(\{S=9\})) = 1 - \dfrac{10}{36} = \dfrac{26}{36}$

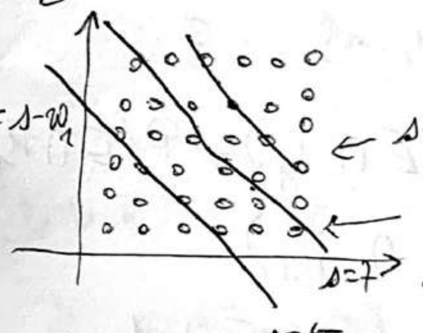
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \le \omega_1 \le 6 \\ 1 \le s-\omega_1 \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le \omega_1 \le 6 \\ s-6 \le \omega_1 \le s-1. \end{cases}$$

pour $s = 7$ $\begin{cases} 1 \le \omega_1 \le 6 \\ 1 \le \omega_1 \le 6 \end{cases} \Rightarrow 6$ choix possibles pr ω_1

$$s = \omega_2 + \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = 7 - \omega_1.$$

pour $s = 9$ $\begin{cases} 1 \le \omega_1 \le 6 \\ 3 \le \omega_1 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le \omega_1 \le 6$

$\Rightarrow$ 4 choix possibles



Pour $P(\{S=9\}) = \mathbb{P}(S=9) = \dfrac{\mathrm{card}(\{S=9\})}{\mathrm{card}(\Omega_1)} = \dfrac{4}{36}$

$$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \left(\mathbb{P}(\{S=7\}) + \mathbb{P}(\{S=9\})\right) \underset{P}{=} 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

$6/36 + 4/36$

$$S : \Omega_1 \to \{2, \dots, 12\}$$
$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2.$$

"obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer"

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{26}{36}$$

2) $E =$ "la 1° obtention d'un 9 qui arrive avant la 1° obtention 7"

<u>Modélisation</u> : $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$ (infini non-dénombrable)

$\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ représente les résultats successifs des lancers. $\omega_n \in \Omega_1$ représente le résultat du n ième lancer.

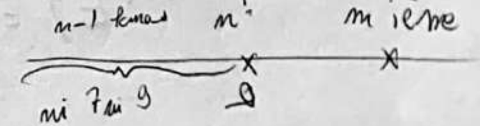
F_i : "obtenir 9 au $i$ème lancer", $i \in \mathbb{N}^*$

E_n : "ni 9 ni 7 au cours des $n-1$ premiers lancers & 9 au n-ième lancer".

a) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ car E on obtient 1° 9 avant 7, c'est $\exists$ un lancer n où obtient 9 & pas obtenu ni 7 ni 9.

$\rightarrow$ H_i : ni 7 ni 9 au $i$ème lancer.

$$E = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap F_n.$$



$E_n \cap E_m = \{\emptyset\}$ disjoints

b) $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap E_{n-1}\right)$

$= \prod_{i=1}^{n-1} P(H_i)\ \mathbb{P}(E_n)$ les évents st indépendants

$\mathbb{P}(F_n) = 4/36$

$\mathbb{P}(H_1) = 26/36$ $\qquad \mathbb{P}(E_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on rq $P(E_2) = \mathbb{P}(F_2) = \frac{4}{36}$

c) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$, les E_n st disjoints. $\Downarrow$ indépdts

si $w \in E_n \cap E_m \Rightarrow$ on a 9 au n premier lancers $\Rightarrow$ on 9 au n-ième lancer, 9 au m-ième lancer.

$E_n \cap E_m = \emptyset$

$P(E_n \cap E_p) = 0 \neq P(E_n)\,P(E_p)$

(sr pas disjoint)

$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$

$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{36} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^n = \frac{4}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{4}{10}$

$\boxed{M2}$ 3)

G_1 "obtenir 7 au 1° lancer"

a) $\{F_1, G_1, H_1\}$ partition de Ω

car $H_1 = (F_1 \cup G_1)^c = F_1^c \cap G_1^c$

$\Rightarrow H_1 \cup F_1 \cup G_1 = \Omega$ et st disjoints

$H_1 = A_1 \times \Omega_1^{\{1,..n\}}$

$P(E) = P(E \mid F_1) \times P(E \cap G_1) + P(E \cap H_1)$

$E = E \cap (F_1 \cap G_1 \cap H_1)$

$= E \cap F_1 \cup E \cap G_1 \cup E \cap H_1$

st disjoints

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F_1) + \mathbb{P}(E \cap G_1) + \mathbb{P}(E \cap H_1)$

$\mathbb{P}(E) = P(E \mid F_1).P(F_1) + \mathbb{P}(E \mid G_1).P(G_1)$
$+ \mathbb{P}(E \mid H_1).P(H_1)$

À propos de la partiO :

pk $\{F_1 \cap G_1 \cap H_1\}$ form$^+$ partiO de Ω.

@ lancer ∞ pièce , $\Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$

A : {pile au premier lancer}

$= \{ w = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mid \omega_1 = P \}$

- B : {face au premier lancer}

$= \{ w = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega \mid \omega_1 = F \} = A^c$

" $A \cup B = \Omega$ partiO de Ω

on conditionne selon un critère"

$(F_1 \cup G_1)^C = H_1$, $H_1 \cup H_1^c = \Omega$

$H_1 \cup (F_1 \cup G_1) = \Omega$

- qd on a un événement, c'est tjs une partiO entre cet évent & son complément^R ds Ω.

b) on calcule les probas conditionnelles

$P(E \mid G_1) = 0$ (9 avant 7 si j'ai 7 nul)

$P(E \mid F_1) = 1$ (9 avant 7 atteint

$P(E \mid H_1) = P(E)$ sachant H_1, on a aucune info sur réalisaO de E.

$\Rightarrow$ ĉ si on décalait exp. au 2^e lancer.

$P(E) = P(F_1) + P(E) \times P(H_1)$

$$P(E) = \frac{P(F_1)}{1 - P(H_1)} = \frac{4}{10}$$

1

Ex 8 Les Menteurs.

→ n personnes, proba p mentir

1° pers $\begin{matrix}\text{oui}\\\text{ou}\\\text{non}\end{matrix}$ → 2° per → … → n personnes

$1 \leq k \leq n$, V_k : "info q reçt k ième pers n." est vraie

$p_k = \mathbb{P}(V_k)$

p_1 ? p_2 ?

- $p_1 = \mathbb{P}(V_1) = 1$ (l'informat° transmise à 1° pers est vraie)

$p_2 = \mathbb{P}(V_2) = 1 - p$

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{oui}}$ → $\boxed{2}$ $\boxed{\text{oui}}$

la 2° pers. reçoit info vraie si la 1° pers. ne ment pas

$\boxed{k}$ → $\boxed{k+1}$

- $p_{k+1} = \mathbb{P}(V_{k+1})$

info est fausse de k ième pers.

$V_{k+1} = (V_k \cap V_{k+1}) \cup (\overset{\text{ou}}{V_k^C} \cap V_{k+1})$

V union disjointe F

⚠ Il n'y a pas indépendance donc on n'a pas Bernoulli.

$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_k \cap V_{k+1}) + \mathbb{P}(V_k^C \cap V_{k+1})$

Qd ce n'est pas indépendant ⇒ proba condit°elle

$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_{k+1} | V_k)\, \mathbb{P}(V_k) + \mathbb{P}(V_{k+1} | V_k^C) \cdot \mathbb{P}(V_k^C)$

$p_{k+1} = (1-p) p_k + p(1 - p_k)$

car $\mathbb{P}(V_{k+1} | V_k) = 1 - p$

(pas de mensonge.

$\mathbb{P}(V_{k+1} | V_k^C) = p$ (mensonge)

$p_{k+1} = (1-p) p_k + p(1 - p_k)$

$p_{k+1} = p + (1-2p) p_k$, $k \geq 1$.

$p_2 = p + (1-2p) p_1 = 1 - p$

2) $u_k = p_k - C$, $k \geq 1$.

Trouver C tq u_k soit une suite géométriq.

relat° affine

$p_{k+1} = p + (1-2p)\, p_k$

$\Leftrightarrow u_{k+1} + C = p + (1-2p)(u_k + C)$

$\Leftrightarrow \boxed{u_{k+1} = (1-2p)\, u_k} + \underbrace{C(1-2p) + p - C}_{=0}$

$\Leftrightarrow$ on choisit C tq :

$C(1-2p) + p - C = 0$

$-2pC + p = 0$

→ on suppose $p \neq 0$ sinon l'info tjs vraie

$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$

on a $u_{k+1} = (1-2p)\, u_k$.

$\mathbb{P}(V_{n+1}) = p_{n+1}$

$u_{n+1} = (1-2p)^n\, u_1$

$\Leftrightarrow \left(p_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^n \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{p_{n+1} = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}}$

→ $p \in [0,1]$, $p=0$ ou $p=1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1} = \frac{1}{2}$

si $|1-2p| < 1$ sauf pour $p=1$ et $p=0$

$\underline{p=0}$ $\mathbb{P}(V_k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$\underline{p=1}$ $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 1, \dots p_{2k} = 0, p_{2k+1} = 1$

TD 3

Ex 1 Dés non pipés.

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

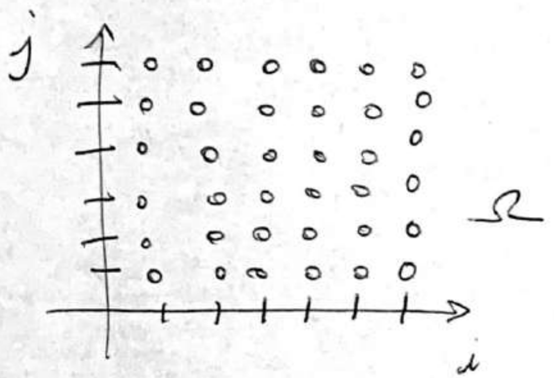
$\mathbb{P}$ équiproba

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(i,j) \longmapsto i+j$.

Quelle est la loi de X ? ← donne

m̂ q° pr (va) Y = au plus petit pts obtenus.



∘ loi de X :

* $X(\Omega) = \{2, \dots, 12\}$.

$\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k)$,

j \ i	1	2	3	4	5	6
1	2	3				
2	3	4	4	5	6	7
3	4	5	5	6	7	
4	5	6	6	7		
5	6	6	7			
6	7	7	6	5	4	3 2

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$

11	12
$2/36$	$1/36$

loi donné

une dé à 12 faces ?
n faces ?

$\frac{1}{12^2} \longrightarrow \frac{12}{12^2}$ & $\frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{n}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{n^2}$

Y = + petit points obtenus.

$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(i,j) \longmapsto \min\{i,j\}$

$Y(i,j) = \min(i,j)$

j \ i	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ex2

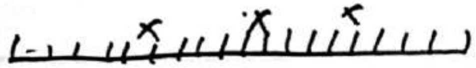
1) loi de X :

* valeurs prises p variable aléatoire $X(\Omega)$
* $\forall x_k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k)$

$X(\Omega) = \{0, \dots, 20\}$

La proba de choisir une cravate à rayure chaq matin est $\frac{1}{50}$.

$$\mathbb{P}(X=k) = C_{20}^{k}\left(\frac{1}{50}\right)^{k}\left(\frac{49}{50}\right)^{20-k}$$



20 jours

$$X \sim \mathcal{B}in\left(20, \frac{1}{50}\right).$$

loi du nbr de succès "avoir une cravate à rayures ds une suite de 20 épreuves indépendantes de une proba $\frac{1}{50}$ de succès.

Autre rédaction :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si M. 222 porte \# le } i\text{ème jour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\varepsilon_i \sim \mathcal{B}ern\left(\frac{1}{50}\right)$

$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{50}$.

Les $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq 20}$ st indépendants.

$$X = \sum_{i=1}^{20} \varepsilon_i = \operatorname{card}(\{i \in \{1, \dots, n\} \ \varepsilon_i = 1\})$$

pour $k = 1$,

$$\mathbb{P}(X=1) = 20 \times \frac{1}{50}\left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 0{,}27.$$

2) Mr. Zzz part en voyage 20

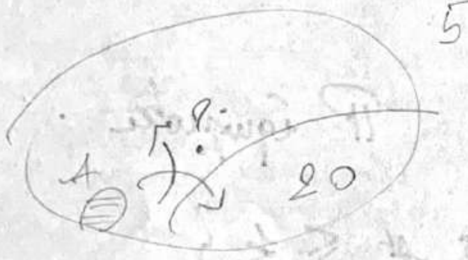
1 → 50 loi V nbr de valise

20 → $\frac{1}{50}$ ... C_{50}^{20}

a sera loi de Bernoulli

<u>loi de V</u>

* valeurs prises $V(\Omega) = \{0,1\}$
* $\mathbb{P}(V=1)$ ou $\mathbb{P}(V=0)$



$$\mathbb{P}(V=0) = \frac{C_1^0 \times C_{49}^{20}}{C_{50}^{20}}$$

$$= \frac{49!}{20!\,29!} \times \frac{20!\,.\,30!}{50!}$$

$$= \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

3) 10 chemises dt 3 bleues.
il en choisit 5. Y nbr <u>CB</u> de valise.

- $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$
- $\forall k \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{C_3^k \cdot C_7^{5-k}}{C_{10}^5}$.

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^4}{C_{10}^5} = \frac{3 \times \frac{7.6.5.4}{4!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} =$$

$$= \frac{3.7.5.5!}{10.9.8.7.6} = \frac{5}{12}.$$

Ex3 Urne de N jetons $\{1, \dots, N\}$
on en tire $n \leq N$ au hasard
& sans remise. soit $k \in \{1, \dots, N\}$

1) Décrire espace de proba $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$
$\leftrightarrow$ à expé. aléatoire.

- tirage successif un évent élément^{re}
$w = (w_1, \dots, w_n)$ représente les
n numéros tirés 1 à la suite
des autres.
tirage sans remise $w_i \neq w_j$ pr $i \neq j$

$$\Omega = \{(w_1, \dots, w_n) \in \{1, \dots, N\}^n \text{ tq } w_i \neq w_j \text{ pr } i \neq j\}.$$

$$\mathrm{card}(\Omega) = A_N^n = N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ équiproba

(12)

- Autre modélisation :

Un évent élément^{re} est un ss-ens
de n éléments parmi $\{1, \dots, N\}$

- $\Omega = \{A \subset \{1, \dots, N\},\ \mathrm{card}(A) = n\}$
$= \{\{w_1, \dots, w_n\} \subset \{1, \dots, N\} \ w_i \neq w_j \text{ pr } i \neq j\}$
$= \{(w_1, \dots, w_n) \in \{1, \dots, N\}^n \ w_1 < \dots < w_n\}$

- $\mathrm{card}(\Omega) = C_N^n$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathbb{P}$ équiproba.

2) $A_k =$ "les n° tirés st $\leq k\}$

$$A_k = \{(w_1, \dots, w_n) \in \Omega \text{ tq } w_n \leq k\} = \{A \subset \{1, \dots, k\},\ \mathrm{card}(A) = n\}$$

$$\mathrm{card}(A_k) = C_k^n$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{C_k^n}{C_N^n} = \frac{k!}{n!(n-k)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{k!(N-n)!}{(k-N)!\,N!} = \frac{A_k^n}{A_N^n}$$

→ suite en 3 tirage ~~+~~ remise ds urne. !

2) $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{C_k^m}{C_N^m} = \dfrac{A_k^m}{A_N^m} = \dfrac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}$

$\Rightarrow X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$

$\quad w \longmapsto X(w)$

- (1) $\Omega : \{A \subset \{1,\dots,N\}\ \text{card}(A) = m\}$

si $w \in \Omega$ (w est un ss-ens de $\{1,\dots,N\}$ $X(w) = \max(w)$

(3) $\Omega = \{(w_1,\dots,w_m) \in \{1,\dots,N\}^m$

+ $w_1 < \dots < w_m$ si $(w_1,\dots,w_m) \in \Omega$ $\}$

loi de X

X est à valeurs ds $\{m,\dots,N\}$

- $\forall k \in \{m,\dots,N\}$

$\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(A_k)} = \dfrac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}$

$N = 10$, $m = 3$, X est à v$^{\text{le}}$ ds $\{3, 10\}$

Rq : $\boxed{\sum_{k=m}^{N} \mathbb{P}(X=k) = 1 \Leftarrow\Rightarrow}$

13

$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$

$= \dfrac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m}$

$\sum_{k=m}^{N} \dfrac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m} = 1$

) Tirage ~~+~~ remise.

$\Omega = \{w = (w_1,\dots,w_m)\ \ w_i \in \{1,\dots,N\}\ \ 1 \leq i \leq m\}$

$\Omega = \{1,\dots,N\}^m$, $\text{card}(\Omega) = N^m$.

$\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k^m}{N^m}$

$A_k = \{1,\dots,k\}^m \ (\subset \{1,\dots,N\}^m)$

- X est à val$^{\text{es}}$ ds $\{1,\dots,N\}$ $\forall k \in \{1,\dots,N\}$

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$

$= P(A_k) - P(A_{k-1})$

$= \dfrac{k^m - (k-1)^m}{N^m}$

Ex4 $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

- X prend ses val^{rs} ds $\mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

on def (va) Y :

- si $X = 0$ ou $2k+1 \Rightarrow Y = 0$, $k \in \mathbb{N}$.
- si $X = 2l \Rightarrow Y = X/2$.

Trouver loi de Y.

→ val^{rs} prises par Y ?

→

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=n)$

0	1	2	3	4	5	...		X
0	0	1	0	2	0	3		Y

- $n = 0$:

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\{X=0, X=2k+1, k\in\mathbb{N}\})$$
$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X=2k+1\}\Big)$$
$$= \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=2k+1)$$
$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $n \geq 1$: $\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(X=2n) = \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!} e^{-\lambda}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$e^x - e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$= e^{-\lambda}(1 + \sinh(\lambda))$$

Ex 5 Une loi de minimum

X & Y va indp.

$X \sim \mathcal{G}eom(\alpha)$ $\quad$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Y \sim \mathcal{G}eom(\beta)$ $\quad$ $\in]0,1[$.

Z va $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i)$$

$$\{X>k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X=i\}$$

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{P(X=i)}$$

$$= \alpha \sum_{j=k}^{\infty} (1-\alpha)^{j}$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{k} \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^{k}$$

le premier succès arrive après k $\Leftrightarrow$ on a eu que des échecs avant k.

Ex 5 Une loi de minimum

X & Y va indp. $\qquad A\cap B=\emptyset$

$X \sim \text{Geom}(\alpha)$

$Y \sim \text{Geom}(\beta)$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\in \,]0,1[$.

Z va $\quad \forall \omega \in \Omega, \ Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

1) $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X>k)$.

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i)$$

$$\{X>k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X=i\}$$

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{\to P(X=i)}$$

$$= \alpha \sum_{j=k}^{\infty} (1-\alpha)^{j}$$

$$= \alpha(1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k$$

le premier succès arrive après k $\iff$ on a eu que des échecs avant k.

2) $\{Z=k\} = (\{X=k\} \cap \{Y>k\}) \cup (\{Y=k\} \cap \{X>k\}) \cup (\{X=k\} \cap \{Y=k\})$

⚠ on ne pt remplacer $>$ par $\geq$ car sinon l'union ne serait pas disjointe.

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y>k\}) + \mathbb{P}(\{Y=k\} \cap \{X>k\}) + \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=k\})$$

$$= \mathbb{P}(X=k).P(Y>k) + P(Y=k).\mathbb{P}(X>k) + \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}(Y=k)$$

$$= (1-\alpha)^{k-1}\alpha(1-\beta)^k + (1-\beta)^{k-1}.\beta.(1-\alpha)^k + (1-\beta)^{k-1}.\beta.(1-\alpha)^{k-1}.\alpha$$

$$= (1-\beta)^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}\left[(1-\beta)\alpha + \beta(1-\alpha) + \beta\alpha\right]$$

$$= \left[(1-\beta)(1-\alpha)\right]^{k-1}\left[\alpha - \alpha\beta + \beta - \alpha\beta + \alpha\beta\right]$$

$$= \left[1-(\alpha+\beta-\alpha\beta)\right]^{k-1}(\alpha+\beta-\alpha\beta)$$

$$= \sim \text{Geo}(\alpha+\beta-\alpha\beta)$$

X premier succès S_α de proba α

Y premier succès S_β de proba β.

Z premier instant où on a S_α ou S_β.

$$\mathbb{P}(S_\alpha \cup S_\beta) = \mathbb{P}(S_\alpha) + \mathbb{P}(S_\beta) - \mathbb{P}(S_\alpha \cap S_\beta)$$
$$= \alpha + \beta - \alpha\beta$$

car S_α & S_β st dépdts.

$$\mathbb{P}(S_\alpha \cap S_\beta) = \mathbb{P}(S_\alpha) + \mathbb{P}(S_\beta) = \alpha\beta$$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{G}eo(\alpha + \beta - \alpha\beta)$

Exo Galette des rois

1) • N galettes $\Rightarrow$ $8N$ parts dt N fèves.

Proba avoir 1 fève : $\dfrac{N}{8N} = \dfrac{1}{8}$

• 24 étud.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i\text{ème étud a fève} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

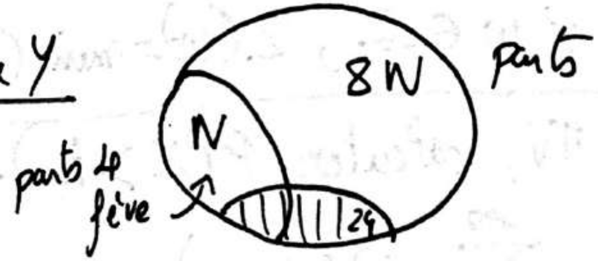
$X_i \sim \mathcal{B}er\left(\dfrac{1}{8}\right)$

⚠ Ils ne st pas indépdts.

① Y_{24} : nbr étud groupe de 24 q ont fève

$$Y = \sum_{i=1}^{24} X_i = \text{card}\{i \in \{1, \dots, 24\},\ X_i = 1\}$$

loi de Y



• Y est à valeurs ds $\{0, \dots, 24\}$

• $$P(Y = k) = \frac{\binom{N}{k} \times \binom{7N}{24-k}}{\binom{8N}{24}} \quad \forall k \in \{0, \dots, 24\}$$

$Y \sim \mathcal{H}ypergeom(8N, N, 24)$

Rq les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne st pas indépendantes.

$\rightarrow$ la loi de Y pt ê approchée p loi Binomiale $(24, \frac{1}{8})$

⑯ HiBou Plumé : Hyperg $\rightarrow$ Binom $\rightarrow$ Poisson.

2) Soit 3 galettes, 3 fèves, supposons
que les fèves st ds les parts $\{1,2,3\}$.

- Numérotons les étud de $\{1,\dots,24\}$

alors $\Omega = \mathfrak{S}_{24}$ = l'ens $\{1,\dots 24\} \to \{1,\dots,24\}$

$\sigma \in \Omega$ signifie $\sigma(i) = j$ signifie

- qu l'étudiant n° i prd la part n° j.

$\mathrm{card}(\Omega) = 24!$

$A_i = \{$le $i^{\text{ème}}$ étud a une fève$\}$, l'ens des permutations

$= \{\sigma \in \Omega, \sigma(i) \in \{1,2,3\}\}$

$\mathrm{card}(A_i) = 3.23!$

- $A_1 = \{$le premier étud a 1 fève$\}$

$= \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(1) \in \{1,2,3\}\}$

$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$

$23!. + 23!. + 23!$

$A_1^{(i)} = \{\sigma \in A_1, \sigma(1) = j\}$

$\mathrm{card}(A_1^{(1)}) = 23!$

$\mathrm{card}(A_1) = 3.23!$

$P(A_1) = \dfrac{3.23!}{24!} = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8} = P(A_i)$

voir cte (17) 3 fèves.

2) Soit 3 galettes, 3 fèves, supposons que les fèves st ds les parts $\{1,2,3\}$.

∘ Numérotons les étud de $\{1,\dots,24\}$

alors $\Omega = \mathfrak{S}_{24}$ = l'ens $\{1,\dots 24\} \to \{1,\dots,24\}$

$\sigma \in \Omega$ signifie $\sigma(i) = j$ signifie qu l'étudiant n° i prd la part n° j.

$\mathrm{card}(\Omega) = 24!$

$A_i = \{$le $i$ème étud a une fève$\}$, l'ens des permutations

$= \{\sigma \in \Omega, \sigma(i) \in \{1,2,3\}\}$

$\mathrm{card}(A_i) = \frac{3.23!}{\quad}$

$A_1 = \{$le premier étud a 1 fève$\}$

$= \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(1) \in \{1,2,3\}\}$

$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$

$23!. + 23!. + 23!.$

va cte

17 3 fèves.

$A_1^{(j)} = \{\sigma \in A_1, \sigma(1) = j\}$

$\mathrm{card}(A_1^{(1)}) = 23!$

$\mathrm{card}(A_1) = 3.23!$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{3.23!}{24!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_i)$

$V_i \sim \mathrm{Bern}(\frac{1}{8})$ (mais les V_i ne st pas indépendantes *)

$W = \sum_{i=1}^{24} V_i = 3$ ⇒ W est cte

Dc sa loi est Dirac δ_3 masse de Dirac est 3. $\mathbb{P}(W=3) = 1$

* $\mathbb{P}(V_2 = 1 \mid V_1 = 1) = \frac{2}{23} \neq \mathbb{P}(V_2 = 1)$

$\mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1, V_4 = 1) = 0 \neq \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(V_i = 1)$

$\mathbb{P}(V_2 = 1) = \frac{1}{8}$

3) $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Bern}(p)$

loi de $X = \sum_{n=1}^{m} X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendts.

Sinon on ne sait pas :

* pt ê cte
* si $X_1 = X_2 = \dots = X_n$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n X_1 = \begin{cases} n & \text{à proba } p \\ 0 & \text{—— } 1-p \end{cases}$$

Ex 7 :

gardien 10 clés indisc. 1 sle $\boxed{}$ Maths

1) sobre :  essaye $\forall$ clés en écartant clés déjà testées

X : nbre essais nécess^re pr trouver bonne clé

X = 1 si clé 1° coup.

2) Y : mem p^r tbc ds circonstas

@ ○┬┬ 1 : ✓
○┬┬ 3
○┬┬ 4 ⇒ Y = 4
○┬┬ 3
○┬┬ 1

1) $\underline{\text{loi de } X}$: Valeurs ?

$X(\Omega) = \{1, \dots, 10\}$

$\forall k \in \{1, \dots, 10\}$; $\quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{10}$)

$\mathbb{P}(X = k) =$

$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9}$

A_i = "la bonne clé est trouvée au i-ème coup"

$\{X = 2\} = A_2 \cap A_1^c$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c)$$

$$= \mathbb{P}(A_2 | A_1^c) \times \mathbb{P}(A_1^c)$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$\{X = 3\} = A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(A_3 | A_2^c \cap A_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) \times \mathbb{P}(A_1^c)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{10}$: $X \sim \mathrm{Unif}(\{1, \dots, 10\})$

2) loi de Y

- Val^ns possibles $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépdts en gnd ivre

$$\mathbb{P}(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_i^c)\,\mathbb{P}(A_k)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{G}eo\left(\frac{1}{10}\right)$

3) On note W la va représentant le nbr em ptlclé. (I: ivre)

Sachant I, W a m̂ loi Y

—— I^c, W —— X.

On cherche $P(I / W > 8) = \dfrac{\mathbb{P}(I \cap W > 8)}{\mathbb{P}(W>8)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(W>8 \mid I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(W>8)}$$

$$\mathbb{P}(W>8 \mid I) = \mathbb{P}(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10} \sum_{k=9}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \frac{1}{1-9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^8$$

on a que échecs aux 8 premiers essais.

$$\mathbb{P}(W>8 \mid I^c) = P(X>8)$$
$$= P(X \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10}$$

$$\mathbb{P}(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(I \mid W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot 1/3}{(9/10)^8 \cdot 1/3 + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}} \approx 51{,}8\ \%$$

$$P(W>8) = \mathbb{P}(W>8 \mid I^c) \cdot \underbrace{P(I^c)}_{=2/3} + \mathbb{P}(W>8 \mid I) \cdot \underbrace{P(I)}_{1/3}$$

2) Loi de Y

• Val^ns possibles $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• $P(\cancel{X}Y=k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépdts au gard ivre

$$P(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(A_i^c)\, P(A_k)$$
$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{G}eo\left(\frac{1}{10}\right)$

3) On note W la va représentant le nbr en ptlclé. (I : ivre)

Sachant I, W a m̂ loi Y

——— I^c, W ——— X.

On cherche $P(I \mid W>8) = \dfrac{P(I \cap W>8)}{P(W>8)}$

$$= \frac{P(W>8 \mid I)\, P(I)}{P(W>8)}$$

$$P(W>8 \mid I) = P(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} P(\cancel{X}Y=k)$$
$$= \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10}\sum_{k=9}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{8} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}$$
$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{8} \frac{1}{1-9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{8}$$

on a que échecs aux 8 premiers essais.

$$P(W>8 \mid I^c) = P(X>8)$$
$$= P(X \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10}$$

$$P(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}$$

$$P(I \mid W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}} \approx 51,8\ \%$$

$$P(W>8) = P(W>8 \mid I^c).\underbrace{P(I^c)}_{=2/3} + P(W>8 \mid I).\underbrace{P(I)}_{1/3}$$

Ex 6 $X \sim \text{Pois}(\alpha)$

$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\alpha} \dfrac{\alpha^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}$

$Y \sim \text{Pois}(\beta)$.

X & Y st indépdtes.

nbr total de pannes : $Z = X+Y$.

Loi de Z ?

- Val^{rs} prises $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z=k)$

chercher $\mathbb{P}(Z=0)$, $\mathbb{P}(Z=1)$, $\mathbb{P}(Z=n)$

$\{Z=k\} = \{X+Y=k\}$

$= \bigcup_{n=0}^{k} \left(\{X+Y=k\} \cap \{Y=n\}\right)$

union disjointe

$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(\{X+Y=k\} \cap \{Y=n\})$

$= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(\{X=k-n\} \cap \{Y=n\})$

$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-n) \times \mathbb{P}(Y=n)$

$= \sum_{n=0}^{k} e^{-\alpha} \dfrac{\alpha^{k-n}}{(k-n)!} \cdot e^{-\beta} \dfrac{\beta^n}{n!}$

$= \dfrac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \dfrac{k!}{n!(k-n)!} \alpha^{k-n} \cdot \beta^n$

$= \dfrac{e^{-\alpha-\beta}}{k!} \sum_{n=0}^{k} C_n^k \beta^n \cdot \alpha^{k-n}$ FF Bin Newton

$= \dfrac{e^{-\alpha-\beta}}{k!} (\alpha+\beta)^k$

$Z \sim \text{Pois}(\alpha+\beta)$

2) Sachant qu'il y a eu n pannes ce mois-ci, proba^m que l° resp. se fait, de r d'entre elles.

$$\mathbb{P}(X=x \mid Z=n) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Z=n\})}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

- ⚠ X & Z ne st pas indpdts.

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{X+Y=n\})}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=n-x\})}{\mathbb{P}(Z=n)} \quad \text{par indép}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=n-x)}{\mathbb{P}(Z=n)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}\cdot\frac{\alpha^x}{x!}\times e^{-\beta}\times\frac{\beta^{n-x}}{(n-x)!}}{e^{-\alpha-\beta}\,\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^x \times \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-x}$$

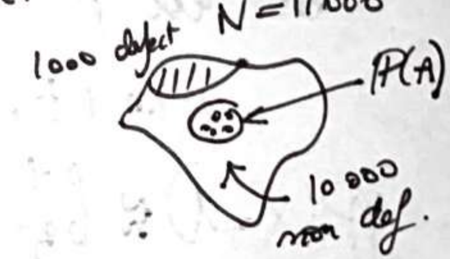
$$= C_n^x \cdot p^x\,(1-p)^{n-x} \qquad p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Ex9 Chaises à Roulettes.

$N = 11\,000$ roulettes $\Rightarrow$ 2200 chaises

Tirer 1 chaise au hasard revient à prendre 5 roulettes au hasard parmi les 11 000.

A : "les 5 roul. st en bon état"



on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{C^5_{10\,000}}{C^5_{11\,000}}$

$$= \frac{10\,000!}{5!\,(10000-5)!} \times \frac{5!\times(11000-5)!}{11\,000!} = \frac{10\,000!}{11\,000!}\,\frac{(10995)!}{9995!}$$

2) Loi nbr roulettes défectueuses de la chaise.

$X(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$

$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{C_{1000}^{k} \times C_{10\,000}^{5-k}}{C_{11\,000}^{5}}$ $\forall k \in \{0, \dots, 5\}$

$X \sim$ Hypergeom$(11\,000, 1000, 5)$

$A = \{X = 0\}$.

La loi pt s'approcher p/

- Bin $\left(5, \frac{1}{11}\right)$

$\mathbb{P}(X = 1) \approx C_5^1 \left(\frac{1}{11}\right)^1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^4 = 5 \times \frac{10^4}{11^5}$

$\mathbb{P}(X = 3) \approx C_5^3 \left(\frac{1}{11}\right)^3 \times \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0{,}006$

3) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{10^5}{11^5} \approx 0{,}6$

2) Loi nbr roulettes défectueuses de la chaise.

$X(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$ $\quad \forall k \in \{0, \dots, 5\}$

$$P(X=k) = \frac{C_{1000}^{k} \times C_{10\,000}^{5-k}}{C_{11\,000}^{5}}$$

$X \sim \mathcal{H}ypergeom(11\,000, 1000, 5)$

$A = \{X = 0\}$.

La loi pt s'approcher p/

$Bin\left(5, \frac{1}{11}\right)$

$$P(X=1) \approx C_5^1 \left(\frac{1}{11}\right)^1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^4 = 5 \times \frac{10^4}{11^5}$$

$$P(X=3) \approx C_5^3 \left(\frac{1}{11}\right)^3 \times \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0{,}006.$$

3) $P(X=0) = \frac{10^5}{11^5} \approx 0{,}6$

Ex 10 $\quad$ 500 navires.

nbr succès

Géom → 1° succès

1) $X \sim Bin(500, 10^{-3})$.

2) $P(X=10)$?

Approximer loi de X p/ loi de $Pois(500, 10^{-3})$.

<10

$\to$ $n = 500$ grand devient $np = 500 \times 10^{-3} = \frac{1}{2}$.

si $X_n \sim Bin(n, p_n)$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(Y = k) \quad \text{où } Y \sim Pois(\lambda)$$

$P(X=10) \approx P(Y=10)$

si $Y \sim Pois\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10!} = \frac{1}{2^{10}\, 10!} e^{-1/2}$

$\approx 1{,}63 \cdot 10^{-10}$

$$P(X=10) = C_{500}^{10} (10^{-3})^{10} (0{,}999)^{490} \approx 1{,}51 \cdot 10^{-10}.$$

3) r : réserves financières.

$r = n.10^6$, n : nbr naufrages max.

$\mathbb{P}(X \leq n) \geq 99,9\,\%$

$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} C_{500}^{k} (10^{-3})^k (0,999)^{500-k}$

$\simeq \mathbb{P}(Y \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-1/2} \frac{1}{2^n . k!}$

$= e^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n . k!}$

n	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = n)$	0,606	0,303	0,076	0,0103	0,0015		
$\mathbb{P}(Y \leq n)$	0,606	0,909	0,985	0,998	0,9998		

$\mathbb{P}(Y \leq 3) \leq 0,999$

$\mathbb{P}(Y \leq 4) \geq 0,999$

$\{X \leq k\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X = k\}$

La société d'assur. doit avoir au moins 4.10^6 de réserves par année.

Elle doit demander une cotisat° annuelle de $\frac{4.10^6}{500} = 8000$ € /an.

4) Fusion de 2 compagnie. (500 nav+)

1000 navires ; $X \sim \mathcal{B}in(1000, 10^{-3})$

$n = 5$; $Y \sim \mathcal{P}ois(1)$

$\Rightarrow \frac{5.10^6}{1000} = 5000$ €.

Fiche 4

Ex 1

$\mathbb{P}(X=i \quad Y=j)$

$j \backslash i$	0	1	$\mathbb{P}(Y=j)$
0	0	1/5	1/5
1	1/5	1/5	
2	1/5	1/5	
$\mathbb{P}(X=i)$	2/5	3/5	

1) loi de X

- Valeurs prises p la v.a X :

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

- $\mathbb{P}(X=0) = 2/5$.

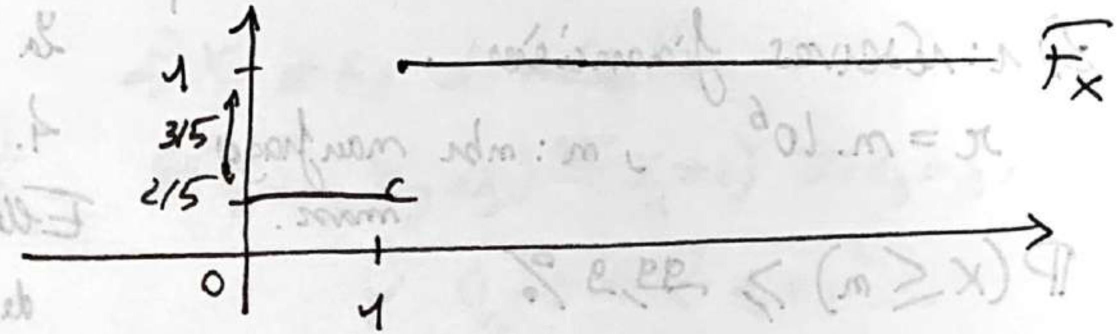
$\mathbb{P}(X=1) = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(X=1, Y=j)$

$= \frac{3}{5}$.

f de répartit° :

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$

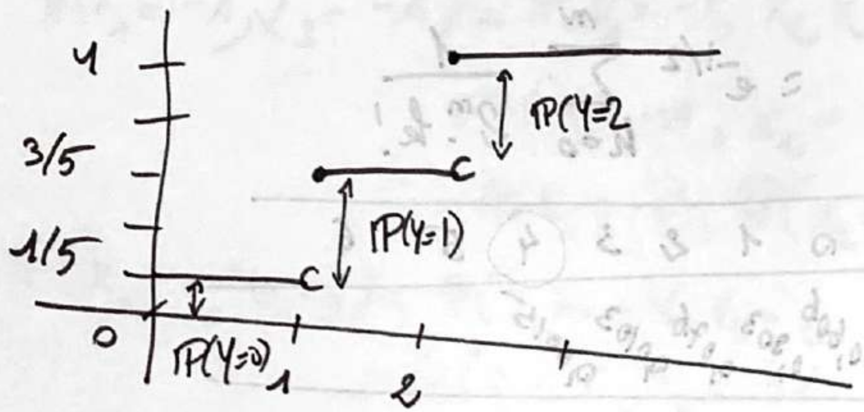


2) loi de Y

- $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- $\mathbb{P}(Y=0) = 1/5$
- $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=2) = \frac{2}{5}$

f de répartit° de Y :

$\mathbb{P}(Y \leq 1)$
$= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)$



3) si X & Y indépdtes $\Rightarrow \forall i \in \{0,1\} \; \forall j \in \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \mathbb{P}(X=i) \cdot \mathbb{P}(Y=j)$

$i=1 \quad j=1$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{5}$

$\neq$ $\mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

Ex 2 X_1, X_2 2 va ind tq

pr $i \in \{1,2\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

on pose $X_3 = X_1 X_2$.

1) loi de X_3 ?

$X_3(\Omega) = \{1, -1\}$

- $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1)$

car X_1, X_2 indpdtes.

$= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = -1). \mathbb{P}(X_2 = -1$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

- $\Rightarrow P(X_3 = -1) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow X_3$ a m̂ vdk que X_1 & X_2.

2) X_1 et X_2 st indépdtes

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_3 = j)\ \mathbb{P}(X_1 = i)\ \mathbb{P}(X_3 = j)$

$\forall (i,j) \in \{-1,1\}^2$.

j \ i	-1	1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 X_1 = -1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = -1). \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_2 = i, X_1 X_2 = j)$

$= \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j/i)$

$= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j/i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3) $\mathbb{P}(X_1=i, X_2=j, X_3=k)$

$= \mathbb{P}(X_1=i) \cdot \mathbb{P}(X_2=j)\, \mathbb{P}(X_3=k)$

$i=j=k=1$ ✓ cw

$i=j=1,\ k=-1$

$P(\cap \dots) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(\cap \dots) = 0$

$\prod P(\ \ ) = \frac{1}{8}$ $\quad$ $\prod P(\dots) > 0.$

$(X_i)_{1 \leq i \leq 3}$ st indp 2 à 2 mais ne forment pas 1 famille de v.a indp.