Chapitre 4

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

1 SUITES DE FONCTIONS

On appelle **suite de fonctions** définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et on note (f_n), toute application $n \to f_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'espace vectoriel des applications de $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Comme pour les suites "numériques", on s'intéresse à la convergence des suites de fonctions, mais du fait de la nécessité de tenir compte aussi de la variable "x", plusieurs "modes" de convergence devront être considérés.

1.1 CONVERGENCE SIMPLE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

DEFINITION 4.1.1.1

Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on dit que (f_n) ***converge simplement*** *(ou ponctuellement) vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si , $\forall x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit que f est* ***limite simple*** *des fonctions f_n.*

REMARQUES

1. Cette définition est équivalente à

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que}, \forall n \geq N, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

   On constate un caractère essentiel de la converge simple : N dépend non seulement, comme pour les suites numériques, de ε, mais aussi de x.

On note souvent $N(\varepsilon, x)$ pour bien marquer cette double dépendance.

2. La limite f, si elle existe, est évidemment unique.

EXEMPLES

1. Soit la suite définie par $f_n(x) = x^n$ et $A = [0,1]$, alors

$$(f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ f(x) = 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

2. Soit la suite définie par $f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ et $A = \mathbb{R}$, alors
si $|x| < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2n} = 0$,et $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$
si $|x| > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2n} = +\infty$,et $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$
si $x = \pm 1$, $f_n(x) = 0$, donc

$$(f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } |x| < 1 \\ f(x) = -1 \text{ si } |x| > 1 \\ f(x) = 0 \text{ si } x = \pm 1 \end{cases}$$

3. Soit la suite définie par $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} \text{ si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$, $A = \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

Pour $x \neq 0$, la suite $(f_n(x))$ est constante à partir d'un certain rang et a pour limite $\frac{1}{x}$, sinon $f_n(0) = 0$, donc

$$(f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

REMARQUE

Un problème important est de savoir si les fonctions f_n possédant certaines propriétés, la convergence conserve ces propriétés à la limite f.

Par exemple, si les f_n sont croissantes (respectivement décroissantes), et (f_n) converge simplement vers f, alors f est croissante (respectivement décroissante). En effet si $x \leq x'$, on a, $\forall n$, $f_n(x) \leq f_n(x')$ (respectivement $f_n(x) \geq f_n(x')$), donc $f(x) \leq f(x')$ (respectivement $f(x) \geq f(x')$).

Par contre, dans l'exemple 1., les fonctions f_n sont continues sur A et f ne l'est pas. Dans l'exemple 3. les fonctions f_n sont bornées mais f ne l'est pas. En effet

$$\forall n \geq 1, \ f_n(x) \leq n, \forall x \in \mathbb{R},$$

car, si $|x| \leq \frac{1}{n}$, alors

$$|f_n(x)| = n^2 |x| \leq n^2 \cdot \frac{1}{n} = n,$$

et si $|x| > \frac{1}{n}$, alors

$$|f_n(x)| = \frac{1}{|x|} < n,$$

mais f n'est pas bornée, car $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = +\infty$.

Ces remarques nous amènent à introduire un mode de convergence plus fort, la convergence uniforme, qui assurera le transport par passage à la limite de certaines propriétés des fonctions f_n.

1.2 CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS

DEFINITION 4.1.2.1

Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on dit que (f_n) ***converge uniformément*** *vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon\,,\ \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon\,,\ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

REMARQUES

1. Si (f_n) converge simplement vers f et (f_n) converge uniformément vers g, alors $f = g$ (souvent, dans les exercices, on cherche la limite simple et ensuite on montre que cette convergence est uniforme).

2. La converge uniforme entraine évidemment la convergence simple, mais la réciproque est fausse.

3. Si (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur A, alors (f_n) converge uniformément sur tout sous-ensemble $A' \subset A$. Une condition de non-convergence uniforme sur A est la contraposée de cette remarque.

4. Il faut préciser sur quelle partie A, la suite de fonctions converge uniformément, une même suite pouvant converger uniformément sur certains ensembles et pas sur d'autres.

5. On peut interpréter géométriquement la convergence uniforme de (f_n) vers f de la manière suivante: $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, chacun des graphes des f_n est entièrement contenu dans la "bande" du plan xOy définie par $\{x \in A \text{ et } y \in [f(x) - \varepsilon, \quad f(x) + \varepsilon]\}$.
   la figure 3 représente cette bande où $h(x) = f(x) - \varepsilon$ et
   $g(x) = f(x) + \varepsilon$.

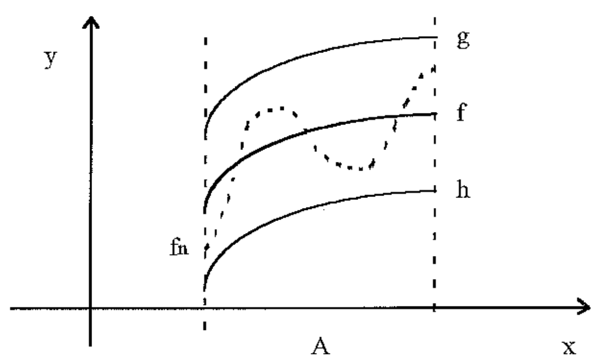

Figure 3

EXEMPLES

1. Soit la suite définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1[$, (f_n) converge simplement vers 0, mais $\sup\limits_{x\in[0,1[} |f_n(x) - 0| = 1$, donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$. Par contre sur $[0, a]$, avec $0 < a < 1$, (f_n) converge uniformément vers la fonction 0 car,
$$\forall x \in [0, a], x^n \leq a^n,$$
donc
$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq a^n,$$
et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)|\right) = 0.$

2. Soit la suite définie par $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $n \geq 0$ et $x \geq 0$ (voir figure 4). La suite (f_n) converge simplement vers 0, étudions alors la convergence

uniforme en considérant $\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|$. On a

$$f_n'(x) = ne^{-nx}(1-nx),$$

qui s'annule pour $x=\frac{1}{n}$, donc $\sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \frac{1}{e}$ et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|\right)\neq 0,$$

donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,+\infty[$. Par contre si on définit (f_n) sur $[a,+\infty[$, où $a>0$, alors, $\exists N\geq 0$ tel que $\forall n>N$,

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)| = |f_n(a)|,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)|\right) = 0,$$

et par conséquent (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$.

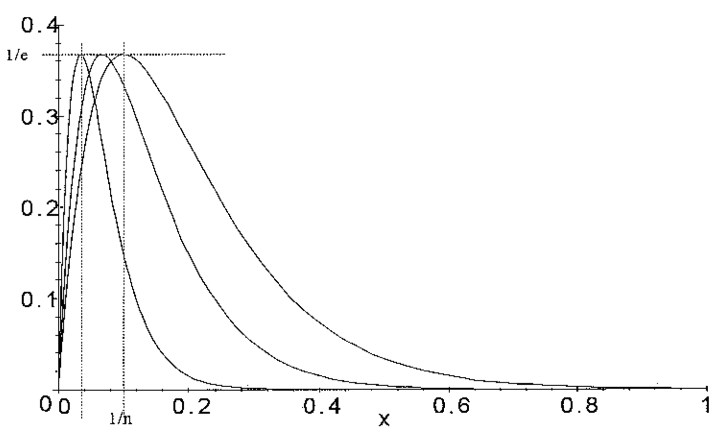

Figure 4

On est amené, quand on a trouvé la limite simple f d'une suite de fonctions (f_n), à montrer, pour prouver la convergence uniforme, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\right) = 0.$$

Il n'est pas indispensable pour cela de calculer la valeur exacte de $\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|$, en effet :

PROPOSITION 4.1.2.2

Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), convergeant simplement vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), s'il existe une suite de nombres $(s_n)_n$ ne dépendant pas de x, convergeant vers 0, telle que

$$\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq s_n,$$

alors la convergence de (f_n) vers f est uniforme.

EXEMPLE

Soit la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

(f_n) converge simplement vers 0, et de plus,$\forall\ x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n}|\sin(nx)| \leq \frac{1}{n},$$

alors, puisque $(\frac{1}{n})_n$ converge vers 0, (f_n) converge uniformément vers 0.

Le résultat suivant permettra de prouver qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur A, sans faire le calcul explicite de $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$.

PROPOSITION 4.1.2.3

Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), convergeant simplement vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), s'il existe $x_n \in A$, tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$$

alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A.

Démonstration :

En effet

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) \neq 0$$

EXEMPLE

Soit la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(x) = nx^n \sin(x\pi), n \in \mathbb{N} \text{ et } A = [0,1].$$

Alors (f_n) converge simplement vers $f \equiv 0$ sur A, mais

$$f_n(1-\frac{1}{n}) = n(1-\frac{1}{n})^n \sin(\frac{\pi}{n})$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to+\infty} \left| n(1-\frac{1}{n})^n \sin(\frac{\pi}{n}) \right| = \frac{\pi}{e}$$

par conséquent (f_n) ne converge pas uniformément sur A.

EXERCICE

1. Soit la suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. Supposons que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f continue. Montrer que si (t_n) est une suite numérique définie dans $[a,b]$ et convergeant vers $t \in [a,b]$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t_n) = f(t).$$
2. Application : Soit la la suite de fonctions (f_n) définies par
$$f_n(t) = \tan(nte^{-t^2}), \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \in [-1,1].$$
   (a) Etudier la convergente simple.
   (b) Calculer $f_n(\frac{1}{n^2})$ et $f_n(\frac{1}{n})$ et en déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[-1,1]$.

PROPOSITION 4.1.2.4

Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, telle que, $\forall n$, f_n est bornée sur A et convergeant uniformément sur A vers une la fonction f, alors f est bornée sur A.

<u>Démonstration :</u>
En effet, la convergence uniforme s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\forall x \in A \text{ et } \forall n \geq N_\varepsilon, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

donc

$$\forall x \in A \text{ et } \forall n \geq N_\varepsilon, |f(x)| \leq \varepsilon + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x \in A} |f_n(x)|,$$

et puisque, $\forall n$, f_n est bornée sur A, $\exists M_n < +\infty$ tel que

$$\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq M_n,$$

d'où

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq \varepsilon + M_n,$$

donc

$$\sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty,$$

et par conséquent f est bornée sur A.

THEOREME 4.1.2.5 (CRITERE DE CAUCHY UNIFORME)

Une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), converge uniformément vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \ \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Démonstration :

* Supposons que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f. c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

alors $\forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in A$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq 2\varepsilon,$$

d'où le critère de Cauchy.

* Supposons maintenant que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy.
La suite (f_n) admet une limite simple, $f : A \to \mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$).
Alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$\exists N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \ \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$

n étant fixé, la convergence simple donne

$$\lim_{m \to +\infty} f_m(x) = f(x),$$

et on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, c'est à dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ et $\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$

d'où la convergence uniforme.

1.3 LIMITE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES

THEOREME 4.1.3.1 (CONTINUITE)

Soit une suite (f_n) de fonctions continues sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), convergeant uniformément vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors f est continue sur A.

(On énonce aussi ce théorème en disant que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue).

Démonstration :
La suite (f_n) converge uniformément, donc pour $\varepsilon > 0$ donné,

$$\exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x_0 \in A$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x_0) - f_n(x)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}},$$

Soit $n \geq N_\varepsilon$ fixé, f_n étant continue en x_0, on a

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

et par conséquent f est continue sur A.

REMARQUES

1. Le théorème précédent dit que si la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f et si les fonctions f_n sont continues, alors
$$\forall x_0 \in A, \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$
2. Souvent on utilisera la contraposée du théorème précédent : Si la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur A et si les fonctions f_n sont continues et f n'est pas continue sur A, alors la convergence n'est pas uniforme.

PROPOSITION 4.1.3.2 (PROLONGEMENT)

Soient $I = [a.b[$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$, convergeant uniformément sur I vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors f est prolongeable par continuité à $[a,b]$ et la suite (f_n) converge uniformément vers f (prolongée) sur $[a,b]$.

Démonstration :

Utilisons Cauchy pour montrer que f est prolongeable par continuité, c'est à dire que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ existe, ou
$$\forall\varepsilon>0, \exists X \text{ tel que } \forall x, \forall x' \in [X,b[\ , \ \left|f(x)-f(x')\right| \le \varepsilon.$$
On a
$$\forall n\in\mathbb{N}, \left|f(x)-f(x')\right| \le |f(x)-f_n(x|+\left|f_n(x)-f_n(x')\right|+\left|f_n(x')-f(x')\right|$$
or, la convergence de (f_n) nous assure que
$$\exists N>0 \text{ tel que} \forall n\ge N,\ \forall x,\forall x' \in [a,b[, |f(x)-f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \left|f(x')-f_n(x')\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$
fixons un tel n, alors, f_n étant uniformément continue sur $[a,b]$,
$$\exists\delta>0 \text{ tel que } \left|x-x'\right| < \delta \Rightarrow \left|f_n(x)-f_n(x')\right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$
Choisissons alors $X = b-\delta$ et donc $\left|f(x)-f(x')\right| \le \varepsilon$. On a donc prolongé f à $[a,b]$.

De plus, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, car
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a.b[}|f_n(x)-f(x)|\right) = 0.$$

REMARQUE

Cette proposition sert à montrer qu'une convergences n'est pas uniforme, par exemple : la suite définie par $f_n(x) = x^n$ sur $]-1.1[$ ne converge pas uniformément car sinon elle convergerait uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction continue, or la limite simple n'est pas continue.

THEOREME 4.1.3.3 (INTEGRATION)

Soit une suite (f_n) de fonctions continues, $f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), convergeant uniformément vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration :

D'aprés le théorème 4.1.3.1, on sait que f est continue sur I, donc que $\int_a^b f(x)dx$ existe.On veut montrer que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que} \forall n \geq N, \ on\ a \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

La convergence uniforme de (f_n) nous donne, pour $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$,

$$\exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \boxed{*}$$

mais

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)dx - f(x))\, dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|\, dx,$$

et la relation $\boxed{*}$ donne

$$\int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon,$$

d'où le résultat.

REMARQUES

1. Sous les conditions du théorème 4.1.3.3

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

2. On peut utiliser le théorème précédent de la manière suivante : Si la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[a, b]$ et si

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx,$$

alors la convergence n'est pas uniforme.

EXEMPLE

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx\right)$.

On pose

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x},$$

alors la suite (f_n) converge simplement vers f définie par $f(x) = e^{-x}$. Montrons la convergence uniforme sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}\right| \\ &= \left|\frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}\right| \leq \frac{x^2+xe^{-x}}{n+x} \leq \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme, d'après la proposition 4.1.2.2.

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx\right) = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

REMARQUE

Sans l'hypothèse "convergence uniforme", la conclusion du théorème précédent peut être fausse. En effet, soit, par exemple, la suite définie par, pour $n \geq 0$ et $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx},$$

alors (f_n) converge simplement vers $f \equiv 0$, par contre

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{n+1}{e^n}\right) = 1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

(On remarquera que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{n}) = +\infty$ et donc que la convergence n'est pas uniforme.)

THEOREME 4.1.3.4 (DERIVATION)

Soit une suite (f_n) de fonctions, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), de classe $C^1([a,b])$, telle que :

1. *(f_n) converge simplement vers la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,*
2. *$(f_n^{'})$ converge uniformément vers la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Alors :

$f \in C^1([a,b])$ et $g = f^{'}$, de plus (f_n) converge uniformément vers f

Démonstration :
* Montrons que $g(x) = f^{'}(x)$.
On a

$$\forall x \in [a,b]\,, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n^{'}(t)dt, \qquad \boxed{*}.$$

La convergence simple de (f_n) vers f entraine

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

La convergence uniforme de $(f_n^{'})$ vers g donne, d'aprés le théorème 4.1.3.3,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^x f_n^{'}(t)dt\right) = \int_a^x g(t)dt,$$

donc la relation $\boxed{*}$ s'écrit, en passant à la limite,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, \qquad \boxed{**}$$

en dérivant cette relation, on obtient

$$f^{'}(x) = g(x),$$

or, g est continue comme limite uniforme de fonctions continues, donc $f \in C^1([a,b])$.
* Montrons la convergence uniforme de (f_n) vers f. Les relations $\boxed{*}$ et $\boxed{**}$ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(a) - f(a) + \int_a^x f_n^{'}(t)dt - \int_a^x g(t)dt \right| \\ &\le \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\le\frac{\varepsilon}{2}\text{ par 1.)}} + \int_a^x \underbrace{\left|f_n^{'}(t)dt - g(t)\right|}_{\le\frac{\varepsilon}{2}\text{ par 2.)}} dt \le \varepsilon, \end{aligned}$$

dès que $n \ge N$,d'où la convergence uniforme de (f_n) vers f.

REMARQUE

1. La condition 1. du théorème précédent peut être remplacée par la condition suivante, plus faible,

$$\exists x_0 \in [a,b] \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

sans changer la conclusion du théorème.

2. La condition 2. (convergence uniforme de la suite des dérivées vers g) est trés importante, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE

Une suite (f_n) peut converger uniformément vers f et $f_n \in C^1([a,b])$, mais f n'est pas nécessairement dérivable. Considérons la suite définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, x \in [-1,1],$$

alors (f_n) converge uniformément vers f, définie par $f(x) = |x|$, en effet

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1}{n},$$

d'où la convergence uniforme, par la proposition 4.1.2.2, mais f n'est évidemment pas dérivable en zéro.

1.4 COMPLEMENTS SUR LA FONCTION GAMMA

La fonction gamma est la fonction définie, pour $x > 0$, par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On démontrera, à titre d'exercice, que la suite de fonctions définie par

$$\begin{cases} f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \text{ si } t \in [0,n] \\ f_n(t) = 0, \text{ si } t > n \end{cases},$$

converge uniformémenr sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par $f(t) = e^{-t}$.

On définit la suite de fonctions (I_n), pour $x > 0$, par

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt,$$

On a, en appliquant le résultat précédent, convergence uniforme de la suite $(I_n(x))$ vers la fonction $\Gamma(x)$, pour $x > 0$.

D'autre part, en posant $t = nu$, nous obtenons

$$I_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n^0(x),$$

et, en intégrant $(n-1)$ fois par parties

$$I_n^0(x) = \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du = \frac{n}{x} I_n^1(x),$$

$$I_n^1(x) = \frac{n-1}{x+1} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{x+1} du = \frac{n}{x} I_n^2(x),$$

$$\vdots$$

$$I_n^{n-1}(x) = \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)},$$

d'où

$$I_n(x) = n^x \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

et donc

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(n^x \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^x}{x} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{x} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{(x+k)} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} n^x \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)},\end{aligned}$$

ce qui permet de prolonger la fonction gamma à $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-$.

2 SERIES DE FONCTIONS

Etant donné une suite de fonctions (u_n) définies sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$), on s'intéresse, pour chaque $x \in A$, à la série numérique $\sum_n u_n(x)$. Pour l'ensemble des x tels que cette série converge, on note $f(x)$ la somme et on s'intéresse aux propriétés de la fonction f. L'étude des séries numériques nous a montré que si $f(x)$ existe, alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_N(x)$, avec $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$. La fonction f étant la limite de la suite de fonctions (f_N) , les propriétés des séries de fonctions découlent des propriétés des suites de fonctions.

2.1 DEFINITIONS ET EXEMPLES

DEFINITION 4.2.1.1

Soit une suite de fonctions (u_n) définies sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),

1. *on dira que la série de fonctions, et on note $\sum_n u_n$,* ***converge simplement*** *vers la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si la suite de fonctions (f_N) , où $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$, converge simplement vers f,appelée* ***somme*** *de la série $\sum_n u_n$.*

2. *La même série sera* ***convergente uniformément*** *vers f si la suite (f_N) converge uniformément vers f.*

REMARQUES

1. La convergence simple signifie que

$$\forall x \in A, \lim_{N\to+\infty} (R_N(x)) = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right) = 0.$$

2. La convergence uniforme signifie que

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} |R_N(x)| \right) = 0.$$

EXEMPLE

Soit la série de fonctions définies par : $u_n(x) = x^n$, $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

On a
$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}, \text{ si } x \neq 1,$$
et
$$f_N(x) = N + 1, \text{ si } x = 1.$$
Donc, si $|x| < 1$, alors la suite de fonctions (f_N) converge simplement vers f définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et diverge si $|x| \geq 1$.

La convergence est-elle uniforme?

On peut appliquer les résultats sur les suites de fonctions. La suite définie par $f_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ converge simplement vers $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$. Cette convergence ne peut pas être uniforme car sinon $\frac{1}{1-x}$ serait prolongeable par continuité en $x = 1$ (voir proposition 4.1.3.2), et, en $x = -1$, il y aurait alors convergence simple, et ce n'est pas le cas non plus, car $\sum_n (-1)^n$ ne converge pas.

Par contre, $\forall \alpha \in]0, 1[$, il y a convergence uniforme sur $[-1 + \alpha, 1 - \alpha]$. En effet
$$\left| f_N(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{N+1}}{|1-x|},$$
or
$$|x|^{N+1} \leq (1 - \alpha)^{N+1} \text{ et } |1 - x| = 1 - x,$$
d'autre part
$$x \leq 1 - \alpha \Rightarrow 1 - x \geq \alpha.$$
D'où
$$\left| f_N(x) - \frac{1}{1-x} \right| \leq \frac{(1-\alpha)^{N+1}}{\alpha}$$
et puisque
$$\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{(1-\alpha)^{N+1}}{\alpha} \right) = 0$$
la convergence est uniforme sur $[-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ (d'après la proposition 4.1.2.2).

EXERCICE

1. Montrer que si la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (u_n) converge uniformément vers zéro sur A.
2. Montrer par un exemple que la réciproque du 1. n'est pas vraie.

2.2 CONDITIONS DE CONVERGENCE UNIFORME

THEOREME 4.2.2.1. (CAUCHY UNIFORME)

La série $\sum_n u_n$ *converge uniformément sur* A *si et seulement si*

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \forall p \geq 1, \forall x \in A, |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$

Démonstration :

Appliquer le théorème de Cauchy sur les suites de fonctions à $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$.

DEFINITION 4.2.2.2

La série $\sum_n u_n$ *est dite* ***normalement convergente*** *sur* A*, s'il existe une suite* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |u_n(x)| \leq s_n,$$

et telle que la série numérique $\sum_n s_n$ *est convergente.*

THEOREME 4.2.2.3

Si la série $\sum_n u_n$ *est normalement convergente sur* A*, alors elle est uniformément convergente sur* A.

Démonstration :

On veut montrer que la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$ est uniformément convergente. Appliquons le critère de Cauchy uniforme (Théorème 4.1.2.5). Calculons

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} u_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |u_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} s_i.$$

Mais Cauchy, appliqué à $\left(\sum_n s_n\right)$ qui converge, nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, \forall m \geq N, \ , \sum_{i=n+1}^{m} s_i \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme.

REMARQUES

1. Ce théorème est fondamental dans la pratique. On l'utilise souvent pour démontrer la convergence uniforme.

2. La convergence normale est équivalente à : $\left(\sum_n \sup_{x\in A} |u_n(x)|\right)$ converge.

3. La réciproque du théorème précédent est fausse en général.

En effet, soit par exemple la série définie par

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \text{ sur } A = [0,1]\,,$$

alors $\forall x \in [0,1]\,,\ \sum_n u_n(x)$ est une série alternée et donc

$$R_N(x) \leq |u_{N+1}(x)| = \frac{x^{N+1}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2},$$

et, puisque

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N+2}\right) = 0,$$

alors

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |R_N(x)|\right) = 0,$$

donc la série converge uniformément, par contre

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n+1},$$

est le terme général d'une série divergente, la série n'est donc pas normalement convergente.

EXEMPLES

1. Soit la série définie par : $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$, $A = \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+1},$$

qui est le terme général d'une série convergente, donc la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la série définie par : $u_n(x) = \frac{1}{n^2+\sin(nx)}$, $A = \mathbb{R}$ et $n \geq 2$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, n^2 + \sin(nx) \geq n^2 - 1 > 0,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente, donc la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

THEOREME 4.2.2.4 (THEOREME D'ABEL UNIFORME)

Soient deux suites de fonctions (u_n) et (v_n) définies sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$, et $v_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), si :

1. *$\forall x \in A$, la suite $(u_n(x))_n$ est positive et décroissante,*
2. *la suite (u_n) converge uniformément vers zéro sur A,*
3. *$\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A, \forall n, \forall m \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{p=n}^{m} v_p(x)\right| \leq M$,*

alors la série $\sum_n u_n v_n$ converge uniformément sur A et

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)\right| \leq M\,|u_{N+1}(x)|\,.$$

Démonstration :

D'après le théorème d'Abel (pour les séries numériques), $\forall x \in A, \sum_n u_n(x)v_n(x)$ converge et $|R_N(x)| \leq M\,|u_{N+1}(x)|$, et puisque la suite (u_n) converge uniformément vers zéro, $|R_N(x)|$ converge uniformément vers zéro et donc $\sum_n u_n(x)v_n(x)$ converge uniformément sur A.

REMARQUE

La condition 3. est équivalente à la condition 3'. suivante :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, |v_0(x) + ... + v_n(x)| \leq \beta.$$

En effet, 3. $\Rightarrow 3'$. est clair, et pour 3'.$\Rightarrow$ 3., il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\forall x &\in A, |v_n(x) + ... + v_{n+p}(x)| \\ &= |v_0(x) + ... + v_{n-1}(x) + v_n(x) + ...v_{n+p}(x) - (v_0(x) + ... + v_{n-1}(x))| \\ &\leq |v_0(x) + ... + v_{n-1}(x) + v_n(x) + ...v_{n+p}(x)| + |v_0(x) + ... + v_{n-1}(x)| \\ &\leq 2\beta,\end{aligned}$$

donc, pour $M = 2\beta$, on a la condition 3.

COROLLAIRE 4.2.2.5

Soient une suite de fonctions (v_n) définies sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $v_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et une suite de nombres réels $(\alpha_n)_n$, si

$$\forall x \in A,\ u_n(x) = \alpha_n v_n(x),$$

avec :

1. *la suite $(\alpha_n)_n$ est positive, décroissante et converge vers zéro,*
2. *$\exists M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, |v_0(x) + ... + v_n(x)| \leq M,$$

alors la série $\sum\limits_n u_n$ converge uniformément sur A.

EXEMPLE

Considérons la série de fonctions définie par : $u_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ (ou $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, ou $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$), avec $\alpha > 0$ et $A_r = [r, 2\pi - r]$, si $r \in]0, 2\pi[$, alors $\sum\limits_n u_n$ converge uniformément sur A_r. En effet, appliquons le corollaire précédent avec $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n(x) = \sin(nx)$, ou $\cos(nx)$, ou e^{inx}. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ et $|v_0(x) + ... + v_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{r}{2})} = M$.

2.3 SOMME D'UNE SERIE UNIFORMEMENT CONVERGENTE

THEOREME 4.2.3.1 (CONTINUITE)

Soit une suite (u_n) de fonctions continues définies sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), si la série $\sum\limits_n u_n$ converge uniformément sur A, alors la fonction f définie par $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ est continue sur A.

Démonstration :

Appliquer le théorème 4.1.3.1 sur les suites de fonctions.

REMARQUE

Sous les hypothèses du théorème, on a

$$\forall x_0 \in A, \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n \geq 0} u_n(x) \right) = \sum_{n \geq 0} \lim_{x \to x_0} (u_n(x)) = \sum_{n \geq 0} u_n(x_0),$$

c'est à dire que l'on peut commuter les signes "lim" et "$\sum$".

On dit aussi qu'on peut "passer à la limite en x terme à terme".

THEOREME 4.2.3.2 (INTEGRATION)

Soit une suite (u_n) de fonctions continues , $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, si la série $\sum\limits_n u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum\limits_n \int_a^b u_n(x)dx$ converge et de plus on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n \geq 0} u_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

Démonstration :

par hypothèse $f_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)$ converge uniformément vers $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} u_n(x)$ sur $[a, b]$. Donc

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\int_a^b f_N(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx,$$

mais

$$\int_a^b f_N(x)dx = \sum_{n=0}^{N} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right),$$

d'où la convergence de $\sum\limits_n \int_a^b u_n(x)dx$ et

$$\int_a^b \left(\sum_{n \geq 0} u_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

REMARQUES

1. Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut commuter les signes "$\int$" et "$\sum$". (On dit aussi qu'on peut "intégrer terme à terme".)

2. Si on applique le théorème "intégration" à l'intervalle $[x_0, x]$ avec $x_0 \in [a, b]$ alors on a l'affirmation que la série des primites $\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ de $u_n(x)$ converge. mais ces primitives ne sont pas quelconques : ce sont des primitives qui s'annulent toutes en un même point $x_0 \in [a, b]$. En général la série des primitives quelconques ne converge pas. Par exemple, soit la série de terme général défini par
$$u_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2}, \ \forall x \geq 0,$$
alors
$$\frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \geq 0,$$
donc la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, et donc uniformément sur $[0, +\infty[$. La série des primitives qui s'annulent toutes en un même point, par exemple la série $\sum\limits_{n \geq 1} \int_0^x u_n(t)dt$, converge car
$$\int_0^x u_n(t)dt = \left[-\frac{1}{t+n} \right]_0^x = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$
Par contre la série des primitives quelconques $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$, définie par
$$U_n(x) = -\frac{1}{x+n}, \ \forall x \geq 0,$$
diverge.

THEOREME 4.2.3.3 (DERIVATION)

Soit une suite (u_n) de fonctions , $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $C^1([a, b])$, telle que :

1. *la série $\sum\limits_{n} u_n$ converge simplement sur $[a, b]$,*

2. *la série $\sum\limits_{n} u_n'$ <u>converge uniformément</u> sur $[a, b]$,*

alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ *est de classe* $C^1([a,b])$ *et*

$$\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} u_n'(x).$$

De plus $\sum_n u_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Démonstration :
Appliquer le théorème 4.1.3.4 (dérivation) sur les suites de fonctions.

REMARQUES

1. Comme dans le théorème 4.1.3.4 (dérivation) sur les suites de fonctions, on peut remplacer l'hypothèse 1. par : "$\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum_n u_n(x_0)$ converge" sans changer la conclusion du théorème.

2. Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut commuter les signes "dérivée" et "$\sum$". (On dit aussi qu'on peut "dériver terme à terme".)

3. Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général défini par

$$u_n(x) = e^{\frac{x}{n^2}},\ x \in \mathbb{R},$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 1,$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\forall x \in \mathbb{R}$. Considérons alors la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ définie par

$$u_n'(x) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{x}{n^2}},$$

alors

$$\forall A > 0, \forall x \in [-A,A], |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} e^{\frac{A}{n^2}},$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[-A,A], \forall A > 0$. Cet exemple montre qu'on ne peut pas appliquer le théorème de dérivation à cette série car la condition de convergence simple n'est pas vérifiée, mais aussi que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ des primitives de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u'_n$ ne converge pas. Par contre si on considère des primitives qui s'annulent toutes en un même point, alors la série de ces primitives converge. Par exemple

$$\int_0^x u'_n(t)dt = u_n(x) - u_n(0) = e^{\frac{x}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2},$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \int_0^x u'_n(t)dt$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLES

1. Soit la série définie par : $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, avec $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrons la convergence simple :
   on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x|}{n+1},$$
   d'où
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|\right) = 0,$$
   et donc, d'après d'Alembert, la série $\sum\limits_{n} u_n(x)$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n} u_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, si on note $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$, alors $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) Montrons la convergence uniforme :
   on a
   $$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in [-a, a]\,, |u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n!},$$
   or $\left(\sum\limits_{n} \frac{a^n}{n!}\right)$ converge, donc $\sum\limits_{n} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ et donc uniformément sur $[-a, a]$.

   (c) Etudions la continuité de la somme f :
   $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists a > 0$ tel que $x_0 \in [-a, a]$. Comme les $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ sont continues sur $[-a, a]$, la convergence uniforme implique que f est continue sur $[-a, a]$ et donc continue en x_0 et ceci pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Etudions enfin la dérivabilité de f :
on a

$$\begin{cases} u_n^{'}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ si } n \geq 1, \\ u_0^{'}(x) = 0. \end{cases}$$

Donc $u_n^{'}(x) = u_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$ et la série $\sum\limits_n u_n^{'}$ converge uniformément sur $[-a, a]$, $\forall a > 0$, d'après le théorème 4.2.2.3, on a alors

$$f^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} u_n^{'}(x) = \sum_{n\geq 1} u_{n-1}^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) = f(x)$$

d'où $f^{'}(x) = f(x)$. Par ailleurs $f(0) = 1$, d'où

$$f(x) = e^x = 1 + x + x^2 + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Soit la série définie par : $u_n(x) = x^n$, avec $n \geq 0$ et $x \in]-1, 1[$.
on a

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ car la suite (x^n) ne converge uniformément sur $]-1, 1[$ (voir l'exercice qui suit la définition 4.2.1.1.) La série $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ converge normalement sur $A_\alpha = [-\alpha, \alpha]$, $\forall \alpha \in]0, 1[$, car $\sup\limits_{x\in A\alpha} |x^n| = \alpha^n$ est le terme général d'une série convergente. Donc on peut intégrer terme à terme sur $[-\alpha, \alpha]$ et si $x \in [-\alpha, \alpha]$, alors

$$\int_0^x \left(\sum_{n\geq 0} t^n \right) dt = \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^x t^n dt \right),$$

et ceci est en fait vrai sur $]-1, 1[= \bigcup\limits_{0<\alpha<1} [-\alpha, \alpha]$. On a donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

donc

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Si $x \in]-1,1[$, alors $-x \in]-1,1[$ et on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Pour $x = 1$, la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$converge et on a vu que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Or $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc $f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est aussi continue sur $[0,1]$, et en particulier

$$f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1+x) = \ln(2).$$

On trouve donc que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

3 EXERCICES

1. Etudier la convergence des suites de fonctions définies par

$$
\begin{aligned}
&(a) : f_n(x) = \tfrac{x}{x+n}, \quad x \in [0,1],\\
&(b) : f_n(x) = \tfrac{1}{1+nx}, \quad x \in [0,+\infty[,\\
&(c) : f_n(x) = \tfrac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(d) : f_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}, \quad x \in [-1,1],\\
&(e) : f_n(x) = x^n(1-x), \quad x \in [0,1],\\
&(f) : f_n(x) = 1-(\cos(x))^{2n}, \quad x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right],\\
&(g) : f_n(x) = n^2x(1-nx), x \in \left[0, \tfrac{1}{n}\right], = 0, x \in \left[\tfrac{1}{n}, 1\right],\\
&(h) : f_n(x) = xe^{-nx}, \quad x \in [0,+\infty[,\\
&(i) : f_n(x) = \max(1-\tfrac{1}{n}, \sin(\tfrac{1}{x})), \quad x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}
$$

1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables dans $[a,b]$, vérifiant

   $\exists M > 0$, indépendant de x, tel que $|f_n'(x)| \leq M, \forall \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une limite f dans $[a,b]$, alors elle converge uniformement.

2. Soit $\rho_n(x)$ une suite définie par

$$\rho_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Pour une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x-y)f(y)dy.$$

   (a) Montrer que cette intégrale définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et que si f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

   (b) Donner une condition suffisante, sur f, pour la convergence uniforme.

3. Démonstration et application du théorème de Dini.

   (a) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant simplement vers une fonction continue f ; montrer que la convergence est uniforme.

(b) Montrer que la suite définie, pour n entier ≥ 1 et pour $x \in [0,1]$, par

$$\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{2}(x - u_n^2(x)) \end{array},$$

est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \to \sqrt{x}$. (On étudiera d'abord la convergence simple et on utilisera ensuite le résultat de la première question).

4. Etudier la convergence des suites dérivées des suites (c) et (f) du premier exercice.

5. Peut-on faire commuter les opérateurs $\int_0^1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}$ pour les suites

$$s_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

et

$$t_n(x) = x s_n(x)?$$

6. Soit la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \quad , \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(a) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
(b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ pour $0 < \varepsilon < 1$.
(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 (f_n(x) - f(x))\, dx$, où f est la limite simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

7. On définit la suite $(f_n)_n$ par

$$\begin{array}{l} f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \quad , \quad 0 \leq x \leq n \\ f_n(x) = 0 \quad , \quad x \geq n \end{array}$$

(a) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
(b) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

8. Etudier la convergence des séries de fonctions dont le terme général est donné par

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{a}): & f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2(1+x^n)}, \\ (\mathrm{b}): & f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}, \\ (\mathrm{c}): & f_n(x) = \dfrac{1}{n^2-x^2}. \end{array}$$

9. Etudier la convergence uniforme et la convergence absolue de la série de terme général

$$u_n(x) = x^n + \frac{(-1)^n}{n} \quad , 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

10. Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la limite de sa somme en l'infini de la série de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\,(1+x^2)}\right).$$

11. Soit la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2(n+1)} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Etudier la convergence de cette série.

   (b) Déterminer le domaine de définition de sa somme $S(x)$, en étudier la continuité, la dérivabilité et montrer que $|S'(x)| \leq 1$.

12. Soit φ une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   (a) Montrer que la série de terme général $\varphi(nx)$ converge et que l'on a, pour $x > 0$ fixé,

$$\int_1^{+\infty} \varphi(tx)dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(nx) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(tx)dt.$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{x \to 0^+} x \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(nx) = \int_0^{+\infty} \varphi(u)du.$$

   (c) Montrer que la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

   converge normalement sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}^*$; en déduire que sa somme $U(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(d) Calculer, à l'aide de la première question, la limite en 0^+ de $U(x)$ et étudier sa continuité.

13. Soit la série de terme général

$$f_n(x) = \frac{(x\ln(x))^n}{n!}, n \geq 0.$$

(a) Montrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que, pour $n \geq p \geq 0$ entiers,

$$\int_0^1 x^n(-\ln(x))^p dx = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

(Indication: On pourra procéder par récurrence sur p, en intégrant par parties; pour la convergence de l'intégrale on pourra se rapporter au TD AN3)

(c) En déduire

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

14. Montrer que la relation $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^4x^2}$ définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Calculer les dérivées à gauche et à droite de f en 0 et dessiner le graphe de f.

15. Soit la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2+x^2} \quad , n \geq 1.$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, b]$. On notera S la somme de cette série.

(b) Etablir la convergence uniforme, sur tout intervalle de la forme $[a, b]$, des séries définies par leurs termes généraux

$$v_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n^2}) \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$$

En déduire que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $[-1, 1]$.Exprimer la somme de la série $\sum v_n(x)$ en fonction de S.