

M4B

TD1 Ex 1

- $$\sum_{m=0}^n (-1)^m = \frac{n - x^{N+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - (-1)^{N+1}}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^m$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ impair} \\ 1 & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$
- $$\sum_{p=1}^n p = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{p=0}^{m-1} (p+1) = \sum_{p=1}^m p = 1 + 2 + \dots + m$$
- $$\sum_{p=1}^m n = m \sum_{p=1}^m 1 = m \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{m \text{ fois}} = m^2$$
- $$\sum_{p=1}^n \frac{n}{p} = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Rq: $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$.

①

$\sum_{p=1}^n n^p = \begin{cases} n \cdot \frac{1 - n^n}{1 - n} & \text{si } n \neq 1 \\ n & \text{si } n = 1 \end{cases}$

2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) $\sum_{p=1}^m (p \times n) = \sum_{k=1}^n (k \times n) = n \sum_{k=1}^n k \neq k \sum_{h=1}^m$
 $= n \times \frac{n(n+1)}{2}$

- Ex 2 Par ens. ensembles : $\cup \cap ^c$.
- $D = A \cap B \cap C$ # tous les nécessitent à manger.
- $E = A^c \cap B^c \cap C^c$ # aucun ne nécessite à manger.
- Rq: $D^c = A^c \cup B^c \cup C^c$ et $E^c = A \cup B \cup C$.
- $F = A^c \cap B \cap C^c$ # Béa mange 5 bonbons
- $G = \sim D \cup E$ # 3 enfants mangent des bonbons.
- $H = C \cup E$ # Céc mange au moins un bonbon.
- $I = A^c \cap E^c$
- $= A^c \cap (A^c \cap B^c \cap C^c)^c$ # Arthur ne reçoit aucun bonbon
- $= A^c \cap (A \cup B \cup C) = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)$
- Événements élémentaires:
- Modélisation: $\Omega = \{0,1\}^3$, $w \in \Omega$.
- $w = (w_1, w_2, w_3)$
- $w_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ ne marque pas} \\ 1 & \text{si } A \text{ marque} \end{cases}$
- $w_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ ne marque pas} \\ 1 & \text{si } B \text{ marque} \end{cases}$
- $w_3 = \begin{cases} 0 & \text{si } C \text{ ne marque pas} \\ 1 & \text{si } C \text{ marque} \end{cases}$
- $A = \{w \in \Omega : w = (1, w_2, w_3)\}$.
 $A = \{w = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_1 = 1\}$
- $\text{card}(A) = 4 \Rightarrow A \text{ n'est pas un événement élémentaire.}$
- idem pour B et C.
- $D = \{(1,1,1)\}$, $\text{card}(D) = 1 \Rightarrow D \text{ événement élémentaire}$
- $E = \{(0,0,0)\}$, $\text{card}(E) = 1 \Rightarrow E \text{ événement élémentaire}$
- $F = \{(0,1,0)\}$, $\text{card}(F) = 1 \Rightarrow F \text{ événement élémentaire}$
- $G = \{(1,1,1), (0,0,0)\}$ $\not\text{élémentaire}$
- $H = \{(0,1,1); (1,0,1); (1,1,1); (0,0,1); (0,0,0)\} = C \cup E \Rightarrow H \text{ n'est pas élémentaire}$
- $I = \{(0,1,1); (0,1,0); (0,0,1)\}$
- Rq: $P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$; $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\{0,1\}^3) = 2^3 = 8$.

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentation Ω des évents éléts de cette expérience

→ un élét w doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

où $w_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème lancer Pile} \\ 0 & \text{si le } i\text{ème lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) : w_i \in \{0,1\} \}_{1 \leq i \leq n}$
l'ens des n -uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$\underline{n=5}$$

FFFPF	01011
FFFFF	00000
⋮	⋮

(w_1, \dots, w_5) où w_i res du i° lancer

w_5 res du 5° lancer.

2) # évent F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 premiers lancers" ⇔ $w \in \Omega$ tels que $w_1 = 1$ et $w_2 = 0$.

Rappels $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$.

$$F = \{F\} \times \{F\} \times \{P, F\}^{n-2}$$

$$F = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid \begin{array}{l} w_1 = P \\ w_2 = F \end{array}\}$$

3) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

E_i = "résultat du i -ème lancer est pile"

$$E_i = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid w_i = P\}$$

Bonus Réfléchir au cardinal de ces ensembles

Ex 3 soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire pile ou face n fois.

1) Donner représentation Ω des événements de cette expérience

→ un élément w doit représenter l'ens des résultats d'une expérience

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

où $w_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ème lancer Pile} \\ 0 & \text{si le } i\text{-ème lancer Face.} \end{cases}$

$\Omega = \{0,1\}^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) : w_i \in \{0,1\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
l'ens des n -uplets à valeurs dans $\{0,1\}$.

<u>$n=5$</u>	F P F P P	0 1 0 1 1
	FF F F F	0 0 0 0 0 ...

(w_1, \dots, w_5) où w_i res du 1° lancer

w_5 res du 5° lancer.

Bonus Réfléchir au cardinal de ces ensembles

③ Ex 3+4.

2) # évent F = "pile n'a pas été obtenu lors 2 premiers lancers" $\hat{=} \text{ss-ens de } \Omega$.

Rappels $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$.

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}\} \times \{\mathcal{F}\} \times \{\mathcal{F}\}^{n-2}$$

$$\mathcal{F} = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid \begin{array}{l} w_1 = F \\ w_2 = F \end{array}\}$$

3) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

$E_i = \text{"résultat du } i\text{-ème lancer est pile"}$

$$E_i = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid w_i = 1\}$$

$$E_i = \{0,1\}^{i-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-i}$$

4) Écrire les événements E_i et l'événement F .

$$F = E_1^c \cap E_2^c$$

5) à E_i écrire $G = \text{"au moins une fois pile"}$

$$G = \bigcup_{i=1}^n E_i = \{w \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad w \in E_i\}$$

6) à E_i écrire $H = \text{"au moins deux fois de pile"}$

$$H = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap E_k) = \{w \in \Omega : \exists (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid \begin{array}{l} w \in E_i \cap E_j, \\ i \neq j \end{array}\}$$

$$\underline{R9} \quad A \times B \subset \Omega \times \Omega = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$A \cap B \subset \Omega = \{w \in \Omega \mid w \in A \text{ et } w \in B\}$$

$$H = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} E_i \cap E_j$$

→ calcul les cardinaux :

- $\text{card}(F) = 2^{n-2} = \text{card}\{\{0\} \times \{0\} \times \{0, 1\}^{n-2}\}$.
- $\text{card}(E_i) = 2^{m-1}$
- $\text{card}(G) = \text{card}(\Omega) - 1 = 2^n - 1$.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

→ penser au complémentaire

$$G^c = \text{"aucun pile"} = \{(0, \dots, 0)\}$$

$$\text{card}(G^c) = 1$$

$$\text{card}(G) + \text{card}(G^c) = \text{card}(\Omega)$$

► $H^c = \text{"au plus 1 fois pile"}$

$$\text{card}(H^c) = m+1 = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1), (0, \dots, 0)\}$$

$$\text{card}(H) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(H^c)$$

$$\underline{\text{card}(H) = 2^n - m+1}$$

→ si on met l'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Exercice 4

1, ..., 10.



1) 2 boules simili.

2) 2 boules successivement.

◦ A = "la somme est paire".

① $\Omega = \{(w, y) \mid (x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2, x \neq y\}$

(1,2) et (2,1) et etc $\neq 6$ à Ω .

$$\Omega = \{(x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x < y\}.$$

$$\Omega = \{A \subset \{1, \dots, 10\} \mid \text{card } A = 2\}.$$

$$\text{card}(\Omega) = 45.$$

nbv de possibilité de prendre 2 élts parmi 10 = $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!}$

$$= \frac{90}{2} = 45$$

$\Omega = \{(w_1, w_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, w_1 < w_2\}$ ② on tire successivement sans remise

$A \subset \Omega$, A : "la somme est paire".

$$A = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, w_1 + w_2 = 2k\}.$$

$$A = A_p \cup A_i.$$

$$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ et } E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

$$A_p = \{(w_1, w_2) \in \Omega : (w_1, w_2) \in E_p^2\}$$

$$A_i = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid (w_1, w_2) \in E_i^2\}.$$

$A_p \cap A_i = \emptyset$, A_p et A_i sont disjoint.

$$\text{card}(A_p \cup A_i) = \text{card}(A_p) + \text{card}(A_i).$$

$$\text{card}(A_p) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

$$\text{card}(A_i) = C_5^2 = 10.$$

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20.$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$$

② on tire successivement à p remise.

$$\Omega = \{w = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2\}$$

$$\text{card}(\Omega) = 10^2$$

	1	1	10
1	(1,1)	...	(1,10)
			(1,10)
10			(10,10)

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

$$\text{[\![} 1, 10 \text{]}]^4 = \{1, \dots, 10\}^4.$$

$$A = A_p \cup A_i$$

$$A_p = \{(x, y) \mid x \in E_p, y \in E_p\}$$

$$= E_p \times E_p = E_p^2$$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10\}^2 \subset \Omega.$$

$$\text{card}(A_p) = \text{car}(\{2, 4, 6, 8, 10\}^2) = 5^2 = 25$$

$$\text{card}(A) = \text{car}(A_p) + \text{card}(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Ω est fini.

\mathcal{F} tribu $\mathcal{F} = P(\Omega)$.

P équiprobabilité

$\Omega = \{(w_1, w_2) \in \{1, \dots, 10\}^2, w_1 < w_2\}$ ② on the successivement sans remise

$A \subset \Omega$, A: "la somme est paire".

$A = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, w_1 + w_2 = 2k\}$.

$A = A_p \cup A_i$.

$E_p = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $E_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A_p = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid (w_1, w_2) \in E_p^2\}$

$A_i = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid (w_1, w_2) \in E_i^2\}$.

$A_p \cap A_i = \emptyset$, A_p et A_i st disjoint.

$\text{card}(A_p \cup A_i) = \text{card}(A_p) + \text{card}(A_i)$.

$$\text{card}(A_p) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

$$\text{card}(A_i) = C_5^2 = 10.$$

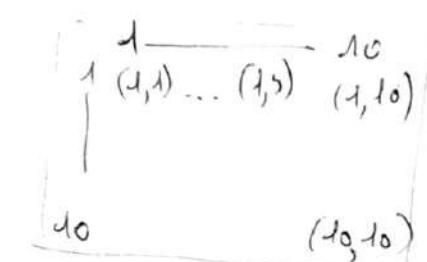
$$\text{card}(A) = \text{card}(A_p \cup A_i) = 10 + 10 = 20.$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{20}{45}$$

② on the successivement ap remise.

$\Omega = \{w = (x, y) \mid (x, y) \in [\![1, 10]\!]^2\}$

$$\text{card}(\Omega) = 10^2$$



$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

⑤ $[\![1, 10]\!]^2 = \{1, \dots, 10\}^2$.

$$A = A_p \cup A_i$$

$$\begin{aligned} A_p &= \{(x, y) \mid x \in E_p, y \in E_p\} \\ &= E_p \times E_p = E_p^2 \\ &= \{2, 4, 6, 8, 10\}^2 \subset \Omega. \end{aligned}$$

$$\text{card}(A_p) = \text{card}(\{2, 4, 6, 8, 10\}^2) = 5^2 = 25$$

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_p) + \text{card}(A_i) = 2 \times 5^2 = 50$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Ω est fini.

\mathcal{F} tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

P équiprobabilité

Ex5 (date d'anniversaire)

→ jours ~~équivalables~~ iiii.

$$\bullet \quad \Omega = \{1, \dots, 365\}^{30}; w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega.$$

w_i : m^e du jour anniv du $i^{\text{ème}}$ étudiant

• on définit la tribu

Il est fini de on può ts les ~~et~~-ens de Ω .

$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)}$: ens des événements observables.

• P équiprobabilité sur Ω

→ A_m : "2 pers au moins ont m^e anniversaire" diff event

→ $A_m = \{w \in \Omega : w = (w_i)_{1 \leq i \leq 30} \exists (i, j) \in \{1, \dots, 30\}^2$

tq $w_i = w_j \& i \neq j\}$

→ A_m^c : "tous les anniversaires sont jours \neq " calcul proba

$$P(A_m^c) = \frac{\text{card}(A_m^c)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}}$$

⑥

$A_m^c = \{w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega, w_i \neq w_j, \forall i \neq j\}.$

$$\text{card}(A_m^c) = A_{365}^{30} = \frac{365!}{(365-30)!}$$

arrangement

si $w_1 < w_2 < \dots < w_{30}$.

$$B = \{w = (w_1, \dots, w_{30}) \in \Omega \\ w_1 < w_2 < \dots < w_{30}\}$$

$$\text{card}(B) = \binom{30}{365} = \frac{365!}{30! \cdot 335!}$$

RQ exot 1) tirage simultané des 2 boules.

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x < y\}$$

$$@ w = (1, 2) \text{ on tire les boules. } \cancel{(1, 2) = (2, 1)}$$

$$\text{card}(\Omega_1) = \frac{10 \times 9}{2} = \binom{2}{10}$$

2) tirage successif et dans remise.

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2 \mid x \neq y\}.$$

(1, 2) est \neq de (2, 1)

$$\text{card}(\Omega_2) = 10 \times 9 = A_{10}^2$$

(la proba de l'événement sera m̄ de 2 modélisat̄s)
à ma 20/45.

$A = "comme paire" = A_p \cup A_i$

$$A_p = \{(x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2 : x \neq y \mid x \text{ est pair}\}$$

$$A_i = \{(x, y) \in \{1, \dots, 10\}^2 : x \neq y \mid y \text{ est pair}\}$$

$$\text{card}(A_p) = 5 \times 4 = A_5^2 \text{ et } \text{card}(A_i) = A_5^2$$

$$\text{de } \text{card}(A) = \text{card}(A_p) + \text{card}(A_i) \\ = A_5^2 + A_5^2 = 40.$$

$$\text{card}(\Omega_2) = A_{10}^2 = 10 \times 9$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{40}{90} = \frac{20}{45}$$

tirage successif \neq toutes permutat̄s possibles. A_n^P

tirage simultané = P permutat̄s permis C_n^P ($\binom{n}{p}$)

Retour à l'en 5

$$P(A_m^c) = \frac{A_{365}^{30}}{365^{30}} = \frac{365!}{335! 365^{30}}$$

$$= \prod_{i=0}^{29} \frac{(365-i)}{365}$$

$$\mathbb{P}(A_m) \approx 70\%.$$

(R9) C de 23 étudiants, $P(A_m) > \frac{1}{2}$.

Ex 6 : Autant de piles que de faces

1) en dénombrant façons d'aligner n bouteilles blanches et noires

$$C_{2m}^m = \sum_{k=0}^m (C_n^k)^2$$

→ deux possibilités placer n boules blanches & n boules noires

2^n cases

2

2

$$C_n^k = \binom{n}{2n} : \text{nb de possibilités d'aligner n boules blanches & m b. noires}$$

$\Omega = \{w \in \{0,1\}^{2m}, w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2m}$ & m has noines

$$w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n} : \exists i_1 < i_2 < \dots < i_m.$$

$$\omega_i = 1, \quad \omega_h = 0 \quad \text{sinon } y.$$

$$\text{card}(\omega) = \binom{m}{2^m}$$

→ Trouver une **M** à répartir en boules blanches parmi 3 cases.

$$\underline{\text{indic}} \quad C_m^k = C_m^{n-k}$$

$$\text{trouver } \sum_{k=1}^m C_m^k \times C_m^{m-k}$$

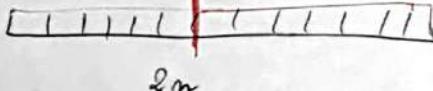
Charles
Suguet

$$\text{Mq } C_{2m}^n = \sum_{k=0}^m C_m^k C_m^{n-k}$$

Préuve
combinatoire

comment répartir n boules noires
parmi $2m$

k boules noires $m-k$ boules noires $\Rightarrow m$ boules
noires



$$\sum_{k=0}^m C_m^k \times C_m^{n-k} = C_{2m}^n.$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^m \Omega_k \quad \text{union disjointe}$$

$$\Omega_k := \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{2m}) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^m \omega_i = k \right\} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_m^k C_m^l t^k t^l$$

$$\text{card } (\Omega_k) = C_m^k \cdot C_m^{n-k}$$

NB: $\Omega_k = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{2m}) \in \{0,1\}^{2m} \mid$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = k \text{ et } \sum_{i=i+1}^{2m} \omega_i = n-k \}$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^m \Omega_k \quad \text{union disjointe}$$

$$\text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^m \text{card}(\Omega_k)$$

$$2) \text{ Retrouver } (1+t)^m (1+t)^n = (1+t)^{2m}$$

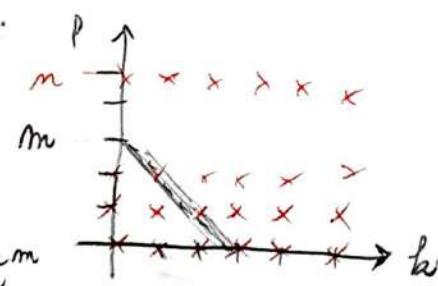
$$(1+t)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot t^k \cdot 1^{m-k}$$

$$(1+t)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k t^k$$

$$(1+t)^m \cdot (1+t)^n = \left(\sum_{k=0}^m C_m^k t^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^n C_n^l t^l \right)$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n C_m^k C_n^l t^k t^l$$

$$= \sum_{0 \leq k, l \leq m} C_m^k C_n^l t^k t^l = \sum_{0 \leq k, l \leq m} C_m^k C_n^l t^{k+l}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{0 \leq k, l \leq m} C_n^k C_n^l t^{k+l} \\
 &= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{k, l: \\ k+l=m}} C_n^k C_n^l \right) t^m \\
 &= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^m C_n^k C_n^{m-k} \right) t^m
 \end{aligned}$$

$(1+t)^m \times (1+t)^m = (1+t)^{2m}$ $\xrightarrow{\text{m comb.}}$
 $= \sum_{m=0}^{2n} [C_{2m}^m] t^m$ $\xrightarrow{\text{poly nom}}$

$\Rightarrow \boxed{C_{2m}^m = \sum_{k=0}^m C_n^k C_n^{m-k}} . \quad \forall m \in \{0, \dots, 2n\}$

pour $m=n$:

$\boxed{C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k}}$

3) Deux personnes lancent chacune n fois d'une pièce de monnaie. Quelle est la proba p_m qu'elles obtiennent m piles.

Expérience aléatoire

- Décrire espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P)
- calculer $p_m = P(E_m)$

$$\Omega = \{0, 1\}^{2n} , \omega = (\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_n}_{\text{résultats lancés}}, \underbrace{\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}}_{\text{résultats lancés 2e fois}})$$

$\xrightarrow{1 \text{ pile}}$
 $\xrightarrow{0 \text{ face}}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P équiprobabilité sur Ω

$$\text{card}(E_m) = \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^k$$

toutes les possibilités de combinaisons

$$E_m = \bigcup_{k=0}^n E_k , \quad E_k: "2^{\text{e}} person obtient k piles".$$

les E_k st disjoints,

$$\text{card}(E_k) = C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\Rightarrow \text{card}(E_m) = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$$

$$p_m = P(E_m) = \frac{\text{card}(E_m)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^m \binom{k}{m}^2}{2^{2m}}$$

$$p_m = \frac{\binom{m}{2m}}{2^{2m}}$$

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{2m}}{2^{2m} \cdot \sqrt{\pi m}} \times \frac{m^{2m}}{m^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

- 4) Donner un équivalent de p_m ,
avec FF Sterling $m! = \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$

$$p_m = \frac{1}{2^{2m}} \times \binom{m}{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \times \frac{(2m)!}{m! m!}$$

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{2m}} \times \frac{2\sqrt{\pi m} \cdot \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2}$$

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{2m}} \times \frac{2\sqrt{\pi m} \cdot \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^{2m}}$$

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{2m} \cdot \sqrt{\pi m}} \times \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m} \times \left(\frac{e}{m}\right)^{2m}$$

5) affirmer

$$p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

E_k : "les 2 pers obtiennent k piles"

F_k : "2 piles par 1^o pers
n faces par 2^o pers" = "n piles - n faces"

$$P(F_m) = \frac{\binom{m}{2m}}{2^{2m}} = p_m \underset{m \rightarrow \infty}{\underset{8}{\downarrow}} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Ex: Tribu, expérience, format

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble de tous les résultats possibles.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

2) Une p.s. lancé & annonce résultat tiré.

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \Rightarrow$ événements élémentaires.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ &\quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ &\quad \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \\ &= \mathcal{P}(\Omega)\end{aligned"> "on connaît tout"$$

3) p.s. \rightarrow pair $\{2, 4\}$
 \downarrow impair $\{1, 3\}$

$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4\}, \{1, 3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

$\rightarrow \mathcal{F}_2$ est la plus grande à contenir $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

4) on m'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} : \left| C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \right| \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

sant remise

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k \right)^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\sum_{k=1}^m C_n^k \cdot C_n^{m-k} = \sum_{k=0}^m \frac{n!}{k!(m-k)!} \times \frac{m!}{(m-k)!(m-n+k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)}{1} \times \frac{(n-k+2)}{2} \times \dots \times \frac{n}{k}$$

$$\sum \frac{n!}{k!(m-k)!} \times \frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum C_n^k \cdot C_n^k$$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \quad \text{pr } k \text{ fixé}$$

$$k \in \{0, 1\} \quad = \sum (C_n^k)^2$$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right)^n$$

$n \rightarrow \infty$
 $k \rightarrow \infty$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad C_{2n}^n = \frac{2n!}{n!(n!)^2} = 1.$$

$$2) (1+t)^n (1+t)^m = (1+t)^{2n}.$$

$$\underline{\text{FFB}} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$(1+t)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k 1^k t^{2n-k} = t^k 1^{2n-k}$$

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 6 + 4 = 10.$$

Pipe

Ex^t: Tribu, expérience, format

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble de tous les résultats possibles.

$$\Omega = \llbracket 1,4 \rrbracket = \{1, 2, 3, 4\}$$

2) Une p.s. le fait & annonce résultat tiré.

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \Rightarrow$ événements élémentaires.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ &\quad \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ &\quad \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \} \\ &= \mathcal{P}(\Omega) \end{aligned}$$

: "on connaît tout"

3) p.s. \rightarrow pair $\{2,4\}$
 \rightarrow impair $\{1,3\}$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4\}, \{1,3\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

est une tribu. (+ petite tribu)

$\rightarrow \mathcal{F}_2$ est la plus grande tribu qui contient $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

4) on m'annonce rien.

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$5) \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \{A \subset \Omega, \text{card}(A) = k\}$$

$$\mathcal{P}_1(\Omega) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

$$\text{card}(\mathcal{P}_k(A)) = C_4^k$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^4 \mathcal{P}_k(\Omega) \quad (\text{union disjointe})$$

$$\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = \sum_{k=0}^4 C_4^k = 2^4$$

$$\text{car } \text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\text{card}(\Omega)}$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^4 C_4^k = 2^4$$

$$\text{Pourquoi } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n ?$$

$$\rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\rightarrow a=b=1,$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$$\text{et } n=4$$

$$\text{mais si } \text{card}(\Omega) \text{ alors } \text{card}(P(\Omega)) = 2^n \\ = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$\tilde{\mathcal{F}}_0 \subset \tilde{\mathcal{F}}_1 \subset \tilde{\mathcal{F}}_2$: on a de + en + d'informations sur ce que l'on observe.

$$\rightarrow (\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$: ensemble des événements observables.

• Si Ω est fini & qu'on fait le résultat de l'exp: des événements élémentaires (B alors $\tilde{\mathcal{F}} = P(\Omega)$)

Si Ω n'est pas fini, on ne prend pas forcément $\tilde{\mathcal{F}} = P(\Omega)$.

$$P: \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longmapsto P(A)$$

$$\text{@ si } \Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

au autre

$$P(\{1\}) = \dots = P(\{4\}) = \frac{1}{4} \text{ choix.}$$

$$\text{DQ } P(\{1\}) = \frac{1}{6}, P(\{2\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(\{3\}) = \frac{1}{4}, P(\{4\}) = \frac{1}{2}$$

$$6) \quad \tilde{\mathcal{F}} \underset{8 \text{ jours dans}}{\subset} \tilde{\mathcal{F}} \underset{31 mars 2022}{\subset}$$

on observe le passé jusqu'à aujourd'hui.

Ex & FF de Poincaré

$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$\bullet P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

$$\begin{aligned} &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P((A \cap C) \cup (B \cap C)). \end{aligned}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$$

$$- [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

FF de Poincaré

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{x=1}^m P(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_2}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots$$

$$+ (-1)^{m+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$$

Ex 9 Secrétaire $\begin{cases} \rightarrow N \text{ lettres} \\ \rightarrow N \text{ enveloppes} \end{cases}$

$\rightarrow \Omega_N = \tilde{\mathcal{G}}_N = \{ \text{ens des permutations de l'ens } \{1, \dots, N\} \}$.

Une permutation σ : appli bijective
 $\{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$.

$$\text{card}(\Omega) = N!$$

$$\mathbb{P}^0 = P(\Omega)$$

$$P_N(\{\sigma\}) = \frac{1}{N!}$$

$$\tau \in \Omega_N = \tilde{\mathcal{G}}_N$$

$\tau(i) = j$, si la $i^{\text{ème}}$ lettre va dans la $j^{\text{ème}}$ enveloppe.
 τ représente bien la répartition des lettres numérotées de $\{1, \dots, N\}$ dans les enveloppes $\{1, \dots, N\}$.

1) Pour $1 \leq j \leq N$
 $A_j = \text{"la } j^{\text{ème}} \text{ lettre se trouve dans l'enveloppe"}$

$$A_j = \{ \tau \in \Omega : \tau(j) = j \} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

$$\text{calcul de } P_N(A_j) = \frac{\text{card}(A_j)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

car A_j est en bijection avec l'ens des permutations privée à j . $\tilde{\mathcal{G}}_{\{1, \dots, N\} \setminus \{j\}}$.

$$\begin{aligned} 2) A_{i_1, \dots, i_k} &= \{ \tau \in \Omega : \tau(i_1) = i_1, \dots, \tau(i_k) = i_k \} \\ &= A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \end{aligned}$$

$$P_N(A_{i_1, \dots, i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!} = P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

3) B: "au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe"

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N = \bigcup_{i=1}^N A_i$$

$\mathcal{S} = \{ \tau \in \Omega : \exists i \in \{1, \dots, N\}, \tau(i) = i \}$ NB \int_N^2 : calcul nbre de couples (i_1, i_2)

4) A FF Poincaré, calculer $P_N(B)$
les A_i ne st pas indépcts

$$P_N(B) = P_N\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^N P_N(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= N \times \frac{1}{N} - \int_N^2 \frac{(N-2)!}{N!} + \dots + (-1)^{k+1} \int_N^k \frac{(N-k)!}{N!}$$

$$+ \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

$i_1 < i_2$ ds $\{1, \dots, N\} : \binom{N}{2}$.

\rightarrow si $i_1 \neq i_2 : A_N^2$.

$$\rightarrow C_N^k \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \cdot \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{1}{k!}$$

$$P_N(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{(N!)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(B) =$$

TD n° 2

Ex 1 1 une, 10 jetons jaunes.
5 blancs, 1 rouge.

Modélisation:

$$\Omega = \{j_1, j_{10}, b_1, b_2, r_2\}$$

$$P = P(\Omega)$$

P = équipeabilité.

$$\text{tous } \in \Omega, P(\{\text{tous}\}) = \frac{1}{16}$$

autre modélisation.

$$\Omega' = \{J, B, R\}$$

$$P' = P(\Omega')$$

$$P'(\{J\}) = \frac{10}{16}$$

$$P'(\{R\}) = \frac{1}{16}$$

$$P'(\{B\}) = \frac{5}{16}$$

On annonce qu'il n'est pas rouge
Probabilité qu'il soit jaune.

A = "le jeton tiré n'est pas rouge" / on cherche

B = "le jeton tiré est jaune"

$$\Rightarrow \{j_1, \dots, j_{10}\} = \{j_1, \dots, j_{10}\} \setminus \{R\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{10}{15}$$

Ex 2



• P/Y d'é de 1 étage.

• 1 ①. 1-p é au dessus immeuble.

$E_i = \text{"é à étage } i\text{"}, P(E_i) = \frac{p}{7}$
 $I = \text{"é du immeuble"}$

$$P(I^c) = 1 - p, E_1 \cup \dots \cup E_7 = I$$

$$\sum_{i=1}^7 P(E_i) = 7 \cdot \frac{p}{7} = p = P(I)$$

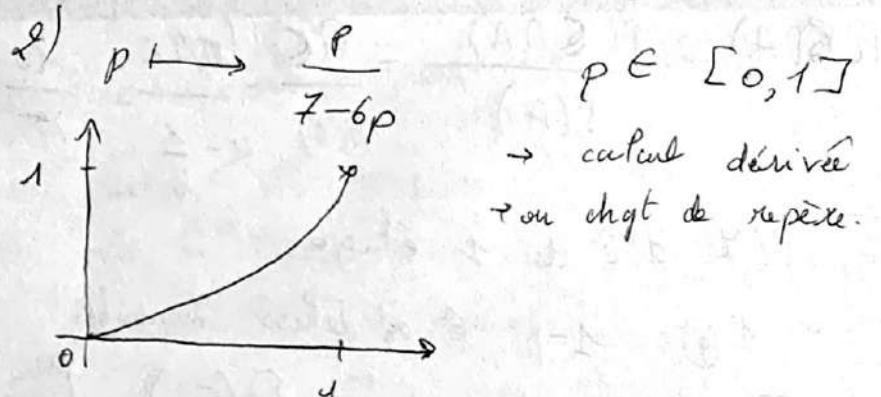
1) On sait que $E_1^c \cap \dots \cap E_6^c$ est réalisé.

$$P(E_7 | E_1^c \cap \dots \cap E_6^c) = \frac{P(E_7 \cap E_1^c \cap \dots \cap E_6^c)}{P(E_1^c \cap \dots \cap E_6^c)}$$

$$= \frac{P(E_7)}{1 - P(E_1 \cup \dots \cup E_6)} = \frac{p/7}{1 - 6p/7} = \frac{p}{7 - 6p}$$

$E_i \cap E_j \neq \emptyset$ disjoint car on ne peut pas être dans 2 étages

$$P(E_1 \cup \dots \cup E_6) = P(E_1) + \dots + P(E_6)$$



en calculant f' sur $[0, 1]$ ou en regardant
ça c'est une hyperbole.

Ex 3

$X = "X_{222}$ fait le sujet", C: "le chap
tombé"
 $Y = "Y_{ggg} —"$, Z = "Z₃₃₃ —".

Traduire l'énoncé de proba des événements.

$$P(C|X) = 0,1, P(C|Y) = 0,4, P(C|Z) = 0,8$$

$$P(Y) = \frac{1}{2}, X \cup \Sigma = Y^c$$

$$P(X|Y^c) + P(Z|Y^c) = P(Y^c|Y^c) = 1$$

$$\Rightarrow P(Z|Y^c) = 1 - P(X|Y^c)$$

objectif : $P(X|C)$, $P(Y|C)$, $P(Z|C)$

$$P(X) = P(X|Y^c)P(Y^c) + P(X|Y)P(Y)$$

$$P(X) = P(X|Y^c) \cdot P(Y^c) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0$$

- $P(X) + P(Y) + P(Z) = 1$.

$$P(Z) = 1 - P(X) - P(Y)$$

$$= 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(Z) = P(Z|Y^c) \cdot P(Y^c) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

FF proba totale / Conditionnement à nos possibles

$$P(C) = P(C|X)P(X) + P(C|Y)P(Y) + P(C|Z)P(Z)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{39}{100}$$

alors

$$P(X|C) = \frac{P(X \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|X) \cdot P(X)}{P(C)}$$

$$= \frac{3/100}{39/100} = \frac{3}{39} = \frac{1}{13} \approx 7,7\%$$

$$P(Y|C) = \frac{P(C|Y) \cdot P(Y)}{P(C)} = \frac{40/100}{39/100} = \frac{40}{39} \approx 51,3\%$$

$$P(Z|C) = \frac{P(C|Z) \cdot P(Z)}{P(C)} = \frac{10/100}{39/100} = \frac{10}{39} \approx 25,6\% \approx 26\%$$

Ex 5

Deux dés : exp. aléatoire

A: "des 1^{er} et impair"

B: "des 2^{er} et pair"

C: "des 2^{er} et m^{ême} parité"

$$\Omega = \{1, 0\}^2.$$

des 1^{er} de

$$w = (w_1, w_2) \in \Omega \text{ et } w_1 \in \{1, \dots, 6\}$$

$$P(\Omega) = 36.$$

$$w_2 \in \{1, \dots, 6\}$$

des 2^{er} de.

P: équiprobabilité

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$$

$$A = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$= \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \in \{2, 4, 6\}\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}^2$$

$C = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \text{ et } w_2 \text{ paires ou } w_1 \text{ et } w_2 \text{ impaires}\}$

$$C_p = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \in \{2, 4, 6\} \text{ et } w_2 = \{2, 4, 6\}\}$$

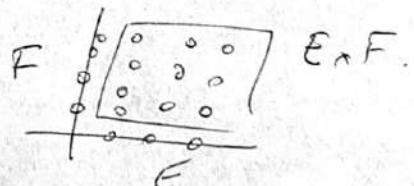
$$= \{2, 4, 6\}^2$$

$$C_i = \{1, 3, 5\}^2$$

$$P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$$

$$\bullet P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rq} \quad \text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$



$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{\text{card}(C_p) + \text{card}(C_i)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3^2 + 3^2}{36} = \frac{2 \times 9}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2)$$

(3)

Ex 5

Deux dés : exp. aléatoire

$C = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, \begin{cases} w_1 \text{ et } w_2 \text{ paires ou} \\ w_1 \text{ et } w_2 \text{ impaires} \end{cases}\}$

A: "ns 1° ☰ impair"

B: "ns 2° ☱ pair"

C: "ns ☱ ☱ m̄ parité"

$$\Omega = \{1, 0\}^2.$$

"ns 1° de"

$$w = (w_1, w_2) \in \Omega \text{ si } w_1 \in \{1, \dots, 6\}$$

$$w_2 \in \{1, \dots, 6\}$$

"ns 2° de."

$$P(\Omega) = \mathbb{F}.$$

P: équiprobabilité

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$$

$$A = \{w = \{w_1, w_2\} \in \Omega, w_1 \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$= \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \in \{2, 4, 6\}\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}^2.$$

$$C_p = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega, w_1 \in \{2, 4, 6\} \text{ et } w_2 \in \{2, 4, 6\}\}$$

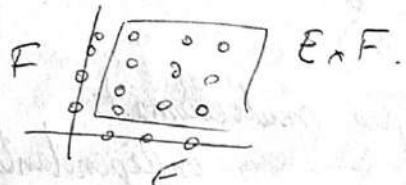
$$= \{2, 4, 6\}^2$$

$$C_i = \{1, 3, 5\}^2$$

$$P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rq} \quad \text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$



$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{\text{card}(C_p) + \text{card}(C_i)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3^2 + 3^2}{36} = \frac{2 \times 9}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{③ } A \cap B = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\} \quad \begin{cases} A \text{ et } B \text{ st indépendants} \\ \text{ou } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \end{cases}$$

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2)$$

$$A \cap C = \{1, 3, 5\}^2, \quad B \cap C = \{2, 4, 6\}^2$$

$$P(A \cap C) = \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(\Omega)} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(\Omega)} = P(B) \cdot P(C)$$

\Rightarrow indépendance des événements 2 à 2.

$$\underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{=0} = \underbrace{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}_{=\frac{1}{8}}$$

Donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

R9 ⑪

$$P(T^c | A^c) = 1 - P(T | A^c)$$

FF probas totales

Règle de conditionnement

Ex 4 Alcooltest

$$\begin{aligned} 1) \quad & A = \{ \text{"Automobiliste a trop bu"} \} \\ & T = \{ \text{"Test positif"} \} \end{aligned}$$

$$P(A) = 0,005, \quad P(T|A) = \varphi = 0,95$$

$$P(T^c | A^c) = \vartheta$$

$$2) \quad \text{On checke } P(A|T) = \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + \underline{P(T|A^c) \cdot P(A^c)}} = 8,7\% = 0,087$$

$$\vartheta = 0,95$$

(Rq) $A \cup A^c = \Omega$

3) Trouver φ tq $P(A|T) = 0,95$.

ici $\vartheta = 0,999736 \approx 99,97\%$

$$P(A|T) = \frac{\varphi \cdot P(A)}{\varphi \cdot P(A) + P(A^c) \cdot P(T|A^c)}$$

si $P(A) = 0,5$

④ on trouve

$$P(A|T) = 0,95 = 95\%$$

Ex6 On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille n enfants.

$$\Omega_n = \{(f_i, g_j) \}^n = \{ (x_1, \dots, x_n), x_i \in \{f_i, g_j\}, i = 1, \dots, n \}$$

Pr équivalente.

$$\text{card}(\Omega_n) = 2^n.$$

$$\forall w \in \Omega_n, P(\{w\}) = \frac{1}{2^n}.$$

A: "la famille a au moins 2 sexes"

B: "la famille a au plus 1 fille".

$$\text{card}(A) = 2^n - \text{card}(A^c) = 2^n - 2$$

A^c : "famille a q filles ou q garçons".

$$A^c = \{(f_1, \dots, f_m); (g_1, \dots, g_m)\}$$

$$A = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid \exists i \neq j \mid w_i \neq w_j\}$$

$$\text{card}(A^c) = 2$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2^n - 2}{2^n}$$

(5)

$$B = B_0 \cup B_1.$$

B_0 : "la famille n'a pas de fille" = $\{(g_1, \dots, g_n)\}$

B_1 : "la famille a exactement une fille"

$$B_1 = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \text{ tq } \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } w_i = g \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \quad w_j = f\}$$

$$\text{card}(B_1) = n, \text{card}(B_0) = 1.$$

$$\text{card}(B) = \text{card}(B_1) + \text{card}(B_0)$$

$$\text{card}(B) = n + 1$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n+1}{2^n}$$

2) on démontre que A et B sont indépendants
que si $n = 3$

$$\text{vérifier } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B_1) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{car } A \cap B = \underbrace{A \cap B_0}_{\emptyset} \cup \underbrace{A \cap B_1}_{B_1}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2^m} = \frac{2^m - 2}{2^m} \times \frac{m+1}{2^m}$$

$$\Leftrightarrow m2^m = (2^m - 2)(m+1)$$

$$\Leftrightarrow 2^m = 2m + 2$$

OK pour $m=3$

FAUX pour $m=2$.

Pour n'importe quel $n \geq 4$, $2^n > 2n+2$

Ex 7 Lancer 2 paires de dés, on calcule la somme. Calculer 2 façons proba E: { "dans la suite des résultats observés, la 1^e obtient d'un 9 a lieu avant la 1^e obtient d'un 7" }

$$\Omega = (\{1, \dots, 6\}^2)^{\mathbb{N}^*}$$

1) Proba d'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer.

$$\Omega_1 = (\{1, \dots, 6\}^2)$$

(V.a) $\Rightarrow \beta: \Omega_1 \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$
 $w = (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$

L'événement $\overline{\sigma_7} = \{w \in \Omega_1 \mid \beta(w) = 7\}$

$$\overline{\sigma_7} = \beta^{-1}\{7\} = \{s = 7\}$$

$$\overline{\sigma_9} = \{s = 9\}$$

$$A_1 = \text{"ni 7 ni 9"} = \{s \neq 7 \text{ et } s \neq 9\}$$

$$A_1 = \beta^{-1}\{2, \dots, 12\} \setminus \{7, 9\}$$

$$A_1^c = \{s = 7\} \cup \{s = 9\}$$

cf 17, 18, 19

$$P(\{s = 7\}) = P(s = 7) = \frac{\text{card}(\{s = 7\})}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{6}{36}$$

$$\{s = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), \\ \substack{5, 2, (6, 1)} \}_{s \in \{2, \dots, 12\}}$$

$$\{s = 9\} = \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_1 + w_2 = 9\}$$

$$= \{(w_1, w_2) \in \Omega_1 \mid w_2 = 9 - w_1\}$$

$$1 \leq w_1 \leq 6 \quad 1 \leq w_2 \leq 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ s-6 \leq w_1 \leq s-1. \end{cases}$$

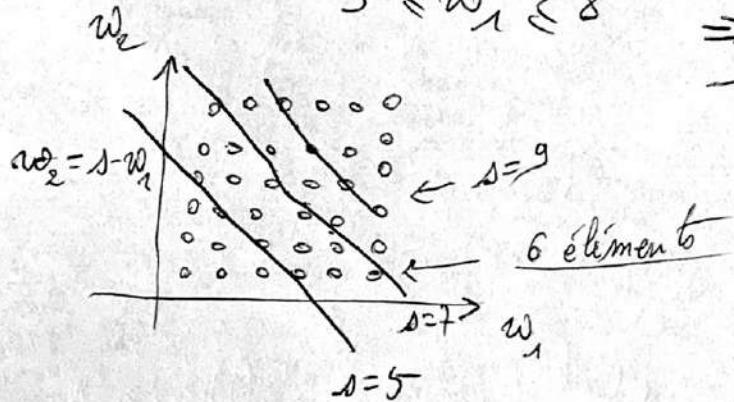
pour $s=7$

$1 \leq w_1 \leq 6$	\Rightarrow	6 choix possibles
$1 \leq w_1 \leq 6$	\in	w_1

$$s = w_2 + w_1 \Rightarrow w_2 = 7 - w_1.$$

pour $s=9$

$1 \leq w_1 \leq 6$	\Leftrightarrow	$3 \leq w_1 \leq 6$
$3 \leq w_1 \leq 8$	\Rightarrow	4 choix possibles



pour $P(\{S=9\}) = P(S=9) = \frac{\text{card}(A_1)}{\text{card}(\Omega_1)}$

$$= \frac{4}{36}$$

$$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$$

$$P(A_1) = 1 - (P(\{S=7\}) + P(\{S=9\})) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases}$$

$$S: \Omega_1 \rightarrow \{2, \dots, 12\}$$

$$(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2.$$

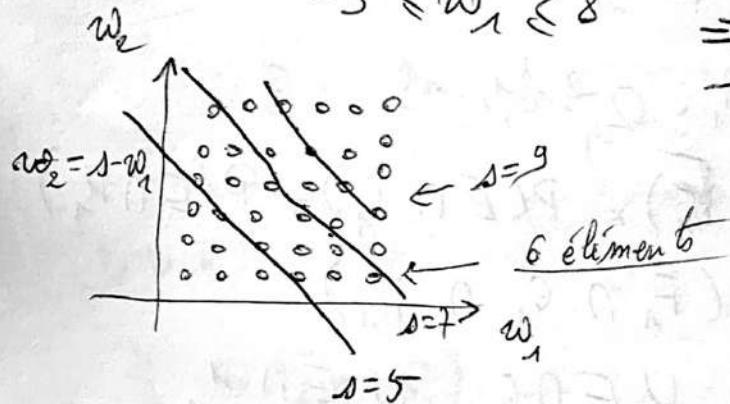
pour $s=7$

$$\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 1 \leq s - w_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 6 \text{ chaines possibles} \\ \text{pr } w_1 \end{matrix}$$

$$s = w_2 + w_1 \Rightarrow w_2 = 7 - w_1.$$

pour $s=9$

$$\begin{cases} 1 \leq w_1 \leq 6 \\ 3 \leq s - w_1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3 \leq w_1 \leq 6 \\ \Rightarrow 4 \text{ chaines possibles} \end{matrix}$$



Pour $P(\{S=7\}) = P(S=9) = \frac{\text{card}(Y=9)}{\text{card}(\Omega_1)}$

$$= \frac{4}{36}$$

$$A_1 = \{S \neq 7\} \cap \{S \neq 9\}$$

$$P(A_1) = 1 - (P(\{S=7\}) + P(\{S=9\})) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

"obtenir mi 7 mi 9 au cours d'un lancer"

$$P(A_1) = \frac{26}{36}$$

2) $E =$ "la 1^o obtient d'un 9 q' arrive avant la 1^o obtient 7"

Modélisation: $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$ (infini non-dénombrable)

$w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ représente les résultats successifs des lancers. $w_n \in \Omega_1$ représente le résultat du n ième lancer.

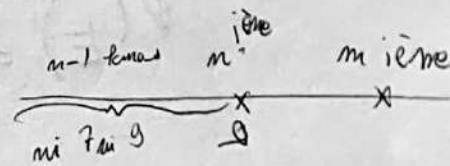
F_i : "obtenir 9 au i ème lancer", $i \in \mathbb{N}^*$

E_m : "mi 9 mi 7 au cours des $m-1$ premiers lancers & 9 au m -ième lancer".

a) $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} E_m$ car E on obtient 1^o 9 avant, c'est à dire un lancer m où obtient 9 & pas obtenu mi 7 mi 9.

$\rightarrow H_i$: mi 7 mi 9 au i ème lancer.

$$E = \bigcap_{i=1}^{m-1} H_i \cap F_m.$$



$E_m \cap F_m = \{43\}$ éléments

$$\text{f)} P(E_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap E_{n-1}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(H_i) \cdot P(E_n)$$

$$P(H_i) = \frac{4}{36}$$

$$P(H_i) = \frac{26}{36}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{c)} E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} E_m \quad \text{on } P(E_2) = P(F_2) = \frac{4}{36}$$

les E_m s/ disjoint.

$w \in E_m \cap E_n \Rightarrow$ on g au ^{infinis} au n
 premi^e lancer \Rightarrow on g au même lancer,
 au n me lancer.

$$(s_n \nearrow) P(E_m \cap E_n) = 0 \neq \%_{\text{en}} \text{ si } n \neq m$$

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \quad \text{(pas disjoint)}$$

as events
independants

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$$

$$P(E) = \frac{4}{36} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^n = \frac{4}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{1}{10}$$

MZ

3)

6). obtenir 2 au 1^o lancer "

a) q' F_1, G_1, H_1 partition de Ω

$$\text{car } H_1 \cdot (F_1 \cup G_1)^c = F_1^c \wedge G_1^c =$$

$$\Rightarrow H_1 \cup F_1 \cup G_1 = \Omega \quad \text{et st disjoint}$$

~~$$H_1 = A_1 \times \Omega_1 \quad \{1, \dots, 6\}$$~~

$$P(E) = P(E|F_1) \times P(E \cap G_1) + P(E \cap H_1)$$

$$E = E \cap (F_1 \cap G_1 \cap H_1)$$

$$= E \cap F_1 \cup E \cap G_1 \cup E \cap H_1$$

st disjoint

$$P(E) = P(E \cap F_1) + P(E \cap G_1) + P(E \cap H_1)$$

$$P(E) = P(E|F_1) \cdot P(F_1) + P(E|G_1) \cdot P(G_1)$$

$$+ P(E|H_1) \cdot P(H_1)$$

(8)

d'après de la partie :

ph que $\{F_1 \cup G_1 \cup H_1\}$ forme une partie de Ω .

@ lancer une pièce, $\Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$

A : {pile au premier lancer}

$\therefore \{w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mid w_1 = p\}$

B : {face au premier lancer}

$\therefore \{w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mid w_1 = F\} = A^c$

$\therefore A \cup B = \Omega$ partie de Ω

on conditionne selon un critère "

$$(F_1 \cup G_1)^c = H_1, H_1 \cup H_1^c = \Omega$$

$$H_1 \cup (F_1 \cup G_1) = \Omega$$

qd on a un événement, c'est tjs une partie entre cet événent & son complémentaire de Ω .

b) on calcule les probas conditionnelles

$$P(E \mid G_1) = 0 \quad (\text{g avant } \Rightarrow \text{ n j'ai pas})$$

$$P(E \mid F_1) = 1 \quad (\text{g avant } \Rightarrow \text{ av})$$

$P(E \mid H_1) = P(E)$ sachant qu'on a aucune info sur réalisat de E .

$\Rightarrow \hat{c}$ si on décalait exp. au 2^e lancer.

$$P(E) = P(F_1) + P(E) \times P(H_1)$$

$$P(E) = \frac{P(F_1)}{1 - P(H_1)} = \frac{4}{10}$$

Ex 8 Les Mentueurs.

→ n personnes, proba p mensur

1^o pers ^{oui} au _{non} → 2^o pers → ... → n personnes

$1 \leq k \leq n$, V_k : "info que k ème pers non."
 $P_k = P(V_k)$

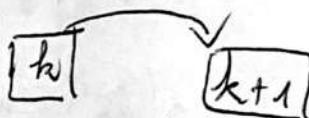
p_1 ? p_2 ?

$p_1 = P(V_1) = 1$ (l'informa transmire
 à 1^o pers est vraie)

$p_2 = P(V_2) = 1 - p$



la 2^o pers. reçoit info vraie.
 & la 1^o pers. ne ment pas



$$P_{k+1} = P(V_{k+1})$$

info est fausse
 de k ème pers.

$$V_{k+1} = (V_k \cap V_{k+1}) \cup (V_k^c \cap V_{k+1})$$

✓ union disjointe F

Δ Il n'y a pas indépendance de Bernoulli.

$$P(V_{k+1}) = P(V_k \cap V_{k+1}) + P(V_k^c \cap V_{k+1})$$

Qd ce n'est pas indépendant \Rightarrow proba condit u

$$P(V_{k+1}) = P(V_{k+1}|V_k) \cdot P(V_k) + P(V_{k+1}|V_k^c) \cdot P(V_k^c)$$

$$p_{k+1} = (1-p)p_k + p(1-p_k)$$

$$\text{car } P(V_{k+1} | V_k) = 1-p$$

(pas de mensonge).

$$P(V_{k+1} | V_k^c) = p \quad (\text{mensonge})$$

$$p_{k+1} = (1-p)p_k + p(1-p_k)$$

$$p_{k+1} = p + (1-2p)p_k, \quad k \geq 1.$$

$$p_2 = p + (1-2p)p_1 = 1-p$$

$$d) u_k = p_k - c, \quad k \geq 1.$$

Trouver c tq u_k soit une suite géométrique.

$$p_{k+1} = p + (1-2p)p_k$$

relativ affine

$$\Leftrightarrow u_{k+1} + C = p + (1-2p)(u_k + C)$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} = (1-2p)u_k + \underbrace{c(1-2p)}_{=0} + p - C$$

$$\Leftrightarrow \text{on choisit } C \text{ tq:} \quad = 0$$

$$(C(1-2p) + p - c = 0)$$

$$-2pc + p = 0$$

\rightarrow on suppose $p \neq 0$ sinon l'info trouvée $p = 1$ $\rightarrow p = 1, p_2 = 0, p_3 = 1, \dots, p_{2k} = 0, p_{2k+1} = 1$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{on a } u_{k+1} = (1-2p)u_k.$$

$$P(V_{m+1}) = p_{m+1}$$

$$u_{m+1} = (1-2p)^m u_1$$

$$\Leftrightarrow \left(p_{m+1} - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^m \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow p_{m+1} = \frac{1}{2} (1-2p)^m + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow p \in [0,1], \quad p=0 \quad \text{ou} \quad p=1.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{m+1} = \frac{1}{2}$$

$|1-2p| < 1$ sauf pour $p=1$ et $p=2$

$$\xrightarrow{p=0} P(V_k) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

~~TD~~ 3

Ex 1 Décrivez mon pipe.

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$$

$$\beta = \rho(\varrho).$$

P équipes ba

$$x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i,j) \longmapsto i+j$$

o fair de X:

$$X(\Omega) = \{2, \dots, 12\}.$$

$$\forall \lambda \in X(\Omega), P(X=\lambda)$$

j^i 1 2 3 4 5 6

1	23
2	3 4 6 5 5 6 7
3	4 5 5 6 6 7
4	5 6 6 7 7 0
5	6 6 7 7 0 0
6	4 7 0 5 5 4 3 2
7	0 0 5 4 4 3 2

Quelle est la
tai de X ? \in domme

m^1 qd pr^ova y
 = un plus petit
 pt obtenu.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$
	11	12							
	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$							

one die has 12 faces?
in faces?

$$\frac{1}{12^2} \longrightarrow \frac{12}{12^2} \quad \& \quad \frac{1}{m^2} \longrightarrow \frac{m}{m^2} \longrightarrow \frac{1}{m^2}$$

$y = +$ petit point obtenu.

$y \in \mathbb{Q} \longrightarrow R$

$$(i,j) \mapsto \min\{i,j\}$$

$$\gamma(i,j) = \min(i,j)$$

i	j	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	4	4	4	4
5	1	3	3	4	5	5	5
6	1	2	3	9	5	6	

ξ	1	2	3	4	5	6
$P(\xi = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

3

Ex 2

4) loi de X :

* valeurs prises par la variable aléatoire $X(\Omega)$

* $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$

$$X(\Omega) = \{0, \dots, 20\} \quad \text{cravate à rayure}$$

La proba de choisir une cravate à rayure
chaque matin est $\frac{1}{50}$.

$$P(X = k) = \binom{k}{20} \left(\frac{1}{50}\right)^k \left(\frac{49}{50}\right)^{20-k}$$

.....

20 jours

$$X \sim \text{Bin}(20, \frac{1}{50})$$

Loi du nbre de succès "avoir une
cravate à rayures" dans une suite de 20 épreuves
indépendantes à une proba $\frac{1}{50}$ de succès.

Autre rédac^o :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si H. 222 porte la cravate} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$P(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{50}$$

les $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 20}$ st indépendants.

$$X = \sum_{i=1}^{20} \varepsilon_i = \text{card}(\{i \in \{1, \dots, 20\} \mid \varepsilon_i = 1\})$$

pour $k=1$,

$$P(X=1) = 20 \times \frac{1}{50} \left(\frac{49}{50}\right)^{19} \approx 0,27.$$

2) Mr. Zzz part en voyage \rightarrow 120 min

1 \sim 50 la v min ds valise

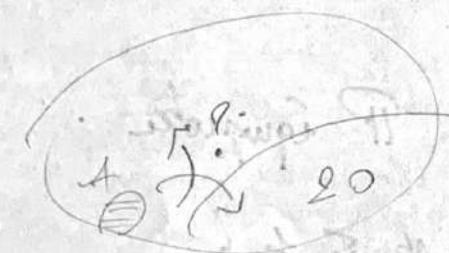
$$20 \rightarrow \frac{1}{50} \quad \text{peut faire} \quad 20 \quad 50$$

loi de V

* valeurs possibles $V(\Omega) = 0, 1, 2$

* $P(V=1)$ ou $P(V=0)$

a sa loi
de Bernoulli



$$P(V=0) = \frac{6^0 \times 6^{20}}{6^{50}}$$

$$= \frac{49!}{20!} \times \frac{20! \cdot 36!}{50!}$$

$$= \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

3) 10 chemises ont 3 bleus.
si on choisit 5. Y mtn CB do valide.



$$\bullet Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$$

$$\bullet V.k \in Y(\Omega), P(Y=k) = \frac{\binom{k}{3} \cdot \binom{7}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

$$P(Y=0) = \frac{\binom{1}{3} \cdot \binom{4}{7}}{\binom{10}{5}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10!} = \\ = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{12}$$

Ex3

Une à N jetons $\{1, \dots, N\}$

on en tire $m \leq N$ au hasard

& sans remise. soit $w \in \{1, \dots, N\}^m$

1) Décrire l'espace de proba $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

\Leftrightarrow à espace aléatoire.

• tirage successif un élement w

$w = (w_1, \dots, w_m)$ représente les
 m nombres tirés $\xrightarrow{\text{mi}}$ 1 à la suite
des autres.

tirage sans remise $w_i \neq w_j$

$\Omega = \{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, \dots, N\}^m$

$\text{tq } w_i \neq w_j \text{ mi } i \neq j\}$.

$$\text{card}(\Omega) = A_N^m$$

$$= N(N-1)(N-2)\dots(N-m+1)$$

$$= \frac{N!}{(N-m)!}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega)$$

\mathbb{P} équiprob.

⑫

• Autre modélisation:

Un événement élémentaire est un sous-ensemble
de m éléments parmi $\{1, \dots, N\}$

$$\Omega = \{A \subset \{1, \dots, N\}, \text{card}(A) = m\}$$

$$= \{(w_1, \dots, w_m) \subset \{1, \dots, N\} \mid w_i \neq w_j \text{ mi } i \neq j\}$$

$$= \{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, \dots, N\}^m \mid w_1 < \dots < w_m\}$$

$$\text{card}(\Omega) = \binom{N}{m}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}$$
 équiproba.

$$2) A_k = \{\text{"Pm"} \text{ tirés st } \leq k\}$$

$$A_k = \{(w_1, \dots, w_m) \in \Omega \mid w_m \leq k\}$$

$$= \{A \subset \{1, \dots, k\}, \text{card}(A) = m\}$$

$$\text{card}(A_k) = \binom{k}{m}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{N}{m}} = \frac{k!}{m!(N-m)!} \times \frac{m!(N-m)!}{N!} = \frac{k!(N-m)!}{(k-m)! N!}$$

$$= \frac{A_k^m}{A_N^m}$$

→ suite en 3 tirage & remise des urne.

$$2) P(A_k) = \frac{C_k^m}{C_N^m} = \frac{A_k^m}{A_N^m} = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}$$

$\rightarrow X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$$w \mapsto X(w)$$

- (2) $\Omega = \{A \subset \{1, \dots, N\} \mid \text{card}(A) = m\}$

Si $w \in \Omega$ (w est un m -ens de $\{1, \dots, N\}$) $X(w) = \max(w)$

- (3) $\Omega = \{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, \dots, N\}^m \mid w_1 < \dots < w_m\}$

$\forall w_1 < \dots < w_m \text{ si } (w_1, \dots, w_m) \in \Omega$

Loi de X

X est à valeurs de $\{m, \dots, N\}$

$\forall k \in \{m, \dots, N\}$

$$\boxed{P(X=k) = P(A_k) = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{N(N-1)\dots(N-m+1)}}$$

$N=10, m=3, X$ est à valeurs de $\{3, 10\}$

Rq: $\sum_{k=m}^N P(X=k) = 1 \Leftrightarrow$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ = \frac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m}$$

$$\sum_{k=m}^N \frac{C_k^m - C_{k-1}^m}{C_N^m} = 1$$

1) Tirage de remise.

$$\Omega = \{w = (w_1, \dots, w_m) \mid w_i \in \{1, \dots, N\}\}$$

$$\Omega = \{1, \dots, N\}^m, \quad \text{card}(\Omega) = N^m.$$

$$P(A_k) = \frac{k^m}{N^m}$$

$$A_k = \{1, \dots, k\}^m \subset \{1, \dots, N\}^m$$

• X est à valeurs de $\{1, \dots, N\}$ $\forall t \in \{1, \dots, N\}$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$$

$$= P(A_k) - P(A_{k-1})$$

$$= \frac{k^m - (k-1)^m}{N^m}$$

Ex4 $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

- X prend ses valeurs dans \mathbb{N}
- si $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

on déf va Y :

- si $X=0$ ou $2k+1 \Rightarrow Y=0$, $k \in \mathbb{N}$.
- si $X=2k \Rightarrow Y=X/2$.

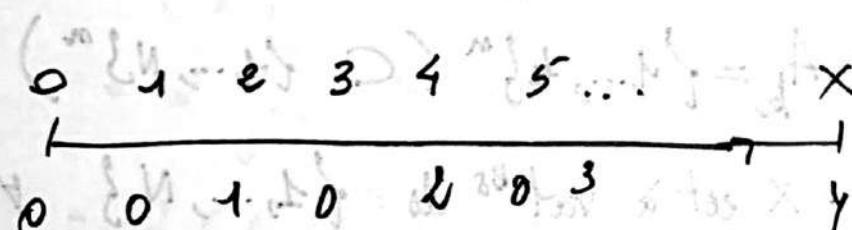
Trouver loi de Y .

→ valeurs prises par Y ?

→

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, P(Y=m)$$



$$= P(X=0) + P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X=2k+1\})$$

$$= P(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1)$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

• $m > 1$: $P(Y=m) = P(X=2m) = \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)$$

$$= e^{-\lambda} (1 + \sinh(\lambda))$$

(14)

Ex 5 Une loi de minimum

$X \text{ et } Y$ (va) indp.

$X \sim \text{Geom}(\alpha)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Y \sim \text{Geom}(\beta)$ et $\beta \in [0, 1]$.

Z (va) $\forall w \in \mathbb{R}$, $Z(w) = \min(X(w), Y(w))$.

- 1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.

$$P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i)$$

$$\{X > k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X = i\}$$

$$\begin{aligned} P(X > k) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{P(X=i)} \\ &= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j \\ &= \alpha (1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k \end{aligned}$$

le premier succès arrive après k \Leftrightarrow on a eu que des échecs avant k .

Ex 5 Une loi de minimum

$X \sim \text{Geo}(\alpha)$ indp.

$X \sim \text{Geom}(\alpha)$

$Y \sim \text{Geom}(\beta)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\in [0, 1]$.

$Z \sim \text{Va} \quad \forall w \in \mathbb{R}, Z(w) = \min(X(w), Y(w)). \quad P(Z=k) = P(\{X=k\} \cap \{Y>k\})$

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X>k)$.

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i)$$

$$\{X>k\} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \{X=i\}$$

$$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{i-1}}_{P(X=i)} \rightarrow P(X=i)$$

$$= \alpha \sum_{j=k}^{\infty} (1-\alpha)^j$$

$$= \alpha (1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k$$

le premier succès

arrive après $k \Leftrightarrow$ on a eu que des échecs
avant k .

$\text{tag}=\emptyset$

$$2) \{Z=k\} = (\{X=k\} \cap \{Y>k\}) \cup$$

$$(\{Y=k\} \cap \{X>k\}) \cup (\{X=k\} \cap \{Y=k\})$$

⚠ on ne peut remplacer $P \geq 0$ car sinon l'union ne serait pas disjointe.

$$+ P(\{Y=k\} \cap \{X>k\}) + P(\{X=k\} \cap \{Y=k\})$$

$$= P(X=k) \cdot P(Y>k) + P(Y=k) \cdot P(X>k)$$

$$+ P(X=k) \cdot P(Y=k)$$

$$= (1-\alpha)^{k-1} \alpha (1-\beta)^k + (1-\beta)^{k-1} \beta (1-\alpha)^k$$

$$+ (1-\beta)^k \cdot \beta \cdot (1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha$$

$$= (1-\beta)^{k-1} (1-\alpha)^{k-1} [(1-\beta)\alpha + \beta(1-\alpha) + \beta\alpha]$$

$$= [(1-\beta)(1-\alpha)]^{k-1} [\alpha - \alpha\beta + \beta - \alpha\beta + \alpha\beta]$$

$$= [1 - (\alpha + \beta - \alpha\beta)]^{k-1} (\alpha + \beta - \alpha\beta)$$

$$= \text{Geo}(\alpha + \beta - \alpha\beta)$$

X premier succès S_d & proba α
 Y nbre étud groupe de 24 q ont fève

2 premiers instant où on a S_d ou S_p .

$$P(S_d \cup S_p) = P(S_d) + P(S_p) - P(S_d \cap S_p)$$

$$= \alpha + \beta - \alpha\beta$$

car S_d & S_p st dépcts.

$$P(S_d \cap S_p) = P(S_d) + P(S_p) = \alpha\beta$$

$$\Rightarrow Z \sim Geo(\alpha + \beta - \alpha\beta)$$

Exo galette des rois

1) • N galettes $\Rightarrow 8N$ parts
 dt N fèves.

$$\text{Proba avoir 1 fève} : \frac{N}{8N} = \frac{1}{8}$$

• 24 étud.

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i^{\text{ème}} \text{ étud a fève} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

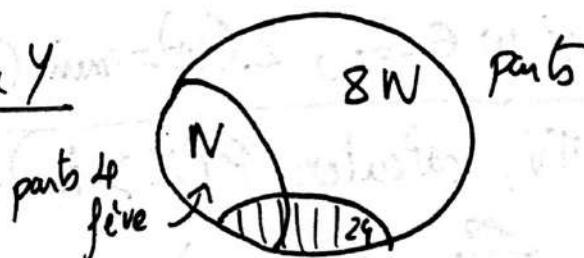
$$X_i \sim Ber\left(\frac{1}{8}\right)$$

• \triangle X ne st pas ind'pcts.

① ① Y : nbre étud groupe de 24 q ont fève

$$Y = \sum_{i=1}^{24} X_i = \text{card}\{i \in \{1, \dots, 24\}, X_i = 1\}$$

Loi de Y



• Y est à valrs ds $\{0, \dots, 24\}$

$$\bullet P(Y=k) = \frac{\binom{k}{N} \times \binom{24-k}{24-N}}{\binom{24}{8N}} \quad \forall k \in \{0, \dots, 24\}$$

$Y \sim \text{Hypergeom}(8N, N, 24)$

(Rq) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne st pas indépendantes.

→ la loi de Y pt être approchée par loi Binomiale $(24, \frac{1}{8})$

⑯ MiBou Plume: Hyperg → Binom → Poisson.

2) Soit 3 gâteaux, 3 fourches, suspendons
que les fourches et les parts $\{1, 2, 3\}$.

• Numérotions les étudiants de $\{1, \dots, 24\}$

alors $\Omega = \{\sigma \in S_{24} \mid \text{Pens } \{1, \dots, 24\} \rightarrow \{1, \dots, 3\}\}$

$\sigma \in \Omega$ signifie $\sigma(i) = j$ signifie

que l'étudiant n° i prend la part n° j .

$$\text{card}(\Omega) = 24!$$

$A_i = \{ \sigma \mid \text{l'étudiant } i \text{ a une fourchette}\}, \text{ l'ensemble des permutations}$

$$= \{ \sigma \in \Omega, \sigma(i) \in \{1, 2, 3\} \}$$

$$\text{card}(A_i) = \frac{3 \cdot 23!}{24!}$$

$A_1 = \{ \text{l'étudiant 1 a une fourchette}\}$

$$= \{ \sigma \in \Omega \mid \sigma(1) \in \{1, 2, 3\} \}$$

$$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$$

$$A_1^{(i)} = \{ \sigma \in A_1 \mid \sigma(1) = i \}$$

$$\text{card}(A_1^{(i)}) = 23!$$

$$\text{card}(A_1) = 3 \cdot 23!$$

$$P(A_i) = \frac{3 \cdot 23!}{24!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = P(A_i)$$

$$23!, 23!, 23!$$

van cke
14 3x100.

2) fait 3 gâteaux, 3 fèves, suspensions,

que les fèves soient les parts 2,3,3.

- Numérotions les étudiants de $\{1, \dots, 24\}$

alors $\Omega = \mathfrak{S}_{24} = \text{Pens } 24, \dots, 24 \rightarrow \{1, \dots, 24\}$

$\tau \in \Omega$ signifie $\tau(i) = j$ signifie

- que l'étudiant n° i prend la part n° j.

$$\text{card}(\Omega) = 24!$$

$A_i = \{ \text{l'étudiant } i \text{ a une fève } j, \text{ pens des permutations} \}$

$$= \{ \tau \in \Omega, \tau(i) \in \{1, 2, 3\} \}$$

$$\text{card}(A_i) = \frac{3 \cdot 23!}{\cancel{24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 2}} \quad \text{[crossed out]}$$

- $A_1 = \{ \text{le premier étudiant à 1 fève} \}$

$$= \{ \tau \in \Omega \mid \tau(1) \in \{1, 2, 3\} \}$$

$$= A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)} \cup A_1^{(3)}$$

$$23! \times 23! \times 23!$$

$$A_1^{(i)} = \{ \tau \in A_1 \mid \tau(1) = i \}$$

$$\text{card}(A_1^{(i)}) = 23!$$

$$\text{card}(A_1) = 3 \cdot 23!$$

$$P(A_1) = \frac{3 \cdot 23!}{24!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = P(A_i)$$

$$V_i \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{8}\right) \quad (\text{mais les } V_i \text{ ne sont pas indépendantes})$$

$$W = \sum_{i=1}^{24} V_i = 3 \quad \Rightarrow W \text{ est cté}$$

De sa loi est Dirac δ_3 masse de Dirac
est 3. $P(W=3) = 1$.

• $P(V_1=1 | V_2=1) = \frac{1}{23} \neq P(V_1=1)$

$$P(V_1=1, V_2=1, V_3=1, V_4=1) = 0 \neq \prod_{i=1}^4 P(V_i=1)$$

$$P(V_2=1) = \frac{1}{8}$$

3) $X_1, \dots, X_m \sim \text{Bern}(p)$

loi de $X = \sum_{i=1}^m X_i \sim \text{Bin}(m, p)$
si les $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ indépendts.

Si non on ne sait pas:

* pt è cte

* si $X_1 = X_2 = \dots = X_m$

$$\sum_{i=1}^m X_i = m X_1 = \begin{cases} m \text{ à proba } p \\ 0 \text{ à proba } 1-p \end{cases}$$

Ex 4:

Gardien 10 clés indisc. 1st \square Maths

1) Soit :  essay à clés en écartant dés déjà testées

X : nbre essais nécessaires pour bonne clé

$X=1$ si clé 1^{er} coup.

2) Y: nomb de bc ds circonsas @ 0 ou 1: ✓

$$\begin{matrix} \text{0 ou 1} \\ \text{0 ou 2} \\ \text{0 ou 3} \\ \text{0 ou 4} \\ \text{0 ou 5} \end{matrix} \Rightarrow Y=1$$

1) loi de X : Valeurs?

$$X(\Omega) = \{1, \dots, 10\}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, 10\}; P(X=k) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=k) =$$

$$P(X=2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9}$$

A_i = "la bonne clé est trouvée au i -ème coup"

$$\{X=2\} = A_2 \cap A_1^c$$

$$P(X=2) = P(A_2 \cap A_1^c)$$

$$= P(A_2 | A_1^c) \times P(A_1^c)$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\{X=3\} = A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c$$

$$P(X=3) = P(A_3 | A_2^c \cap A_1^c) \times P(A_2^c | A_1^c) \times P(A_1^c)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=k) = \frac{1}{10} : \text{X a l'inf} (\{1, \dots, 10\})$$

c) loi de Y

- Val^{ns} possibles $Y(\omega) = \text{IN}^*$
- $P(Y=k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépds en gaud iine

$$P(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(A_i^c) P(A_k) \\ = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{10}\right)$$

3) On note W la \textcircled{v} o représentant le nbr emp. tlcé. $(I: \text{ivue})$

Sachant I, W a m loi Y
I^c, W — X.

$$\text{On cherche } P(I|W>8) = \frac{P(I \cap W>8)}{P(W>8)} \\ = \frac{P(W>8|I) P(I)}{P(W>8)}$$

(1g)

$$P(W>8|I) = P(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} P(Y=k) \\ = \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10} \sum_{n=9}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \\ = \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \\ = \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \frac{1}{1-9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^8$$

on a que échec aux 4 premiers essais.

$$P(W>8|I^c) = P(X>8) \\ = P(X \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10}$$

$$P(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}$$

$$P(I|W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}} \approx 51,8\%$$

$$P(W>8) = P(W>8|I^c) \cdot P(I^c) + P(W>8|I) \cdot P(I)$$

1) loi de Y

• Val n° possible $Y(\omega) = \text{INV}^*$

• $P(X=k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \cap A_k\right)$

ici les A_i st indépds au sens large

$$P(Y=k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(A_i^c) P(A_k)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{10}\right)$$

3) On note W la variable représentant le nombre d'essais. (I: issue)

Sachant I, W a la loi Y

$I^c, W \xrightarrow{\quad} X$

On cherche $P(I|W>8) = \frac{P(I \cap W>8)}{P(W>8)}$

$$= \frac{P(W>8|I) P(I)}{P(W>8)}$$

(1g)

$$P(W>8|I) = P(Y>8) = \sum_{k=9}^{\infty} P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10} \sum_{n=9}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \frac{1}{1 - 9/10} = \left(\frac{9}{10}\right)^8$$

on a que l'échec aux 1 premiers essais.

$$P(W>8|I^c) = P(Y>8) \\ = P(Y \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10}$$

$$P(W>8) = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}$$

$$P(I|W>8) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}} \approx 51,8\%$$

$$P(W>8) = P(W>8|I^c) \cdot P(I^c) + \cancel{P(W>8|I) \cdot P(I)}$$

1/3

$$\text{Ex} \quad X \sim \text{Pois}(\lambda) \quad P(Z=k) = \sum_{n=0}^k P(X=k-n) \cdot P(Y=n)$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

$Y \sim \text{Pois}(\beta)$.

X & Y st indép des.

nbz total de pannes : $z = X + Y$.

loi de Z ?

• Val pris $\sum (\Omega) = \mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}, P(Z=k)$

chercher $P(Z=0), P(Z=1), \dots, P(Z=m)$

$$\begin{aligned} \{Z=k\} &= \{X+Y=k\} \\ &= \bigcup_{m=0}^k \{X+Y=k\} \cap \{Y=m\} \end{aligned}$$

union disjointe

$$P(Z=k) = \sum_{m=0}^k P(\{X+Y=k\} \cap \{Y=m\})$$

$$= \sum_{m=0}^k P(\{X=k-m\} \cap \{Y=m\})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-m}}{(k-m)!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^m}{m!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\beta)}}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \lambda^{k-m} \beta^m \\ &= \frac{e^{-\lambda-\beta}}{k!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \beta^m \lambda^{k-m} \end{aligned}$$

FF Bim Newton

$$= \frac{e^{-\lambda-\beta}}{k!} (\lambda+\beta)^k$$

$Z \sim \text{Pois}(\lambda+\beta)$

$$\frac{(8 < W \cap I)}{(8 < W)}$$

$$(8 < W | I) P$$

$$(I) P(I | 8 < W) P$$

$$(8 < W) P$$

2) Sachant qu'il y a eu n pannes
ce mois-ci, proba que l^e resp.
soit , de n d'entre elles.

$$P(X=r | Z=m) = \frac{P(\{X=r\} \cap \{Z=m\})}{P(Z=m)}$$

• $\triangleright X+Y$ n'est pas indpds.

$$= \frac{P(\{X=r\} \cap \{X+Y=m\})}{P(Z=m)}$$

$$= \frac{P(\{X=r\} \cap \{Y=m-r\})}{P(Z=m)} \quad \text{va indp}$$

$$= \frac{P(X=r) \times P(Y=m-r)}{P(Z=m)}$$

$$= e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^r}{r!} \times e^{-\beta} \times \frac{\beta^{m-r}}{(m-r)!}$$

$$\frac{e^{-\alpha-\beta} \frac{(\alpha+\beta)^m}{m!}}{e^{-\alpha-\beta} \frac{(\alpha+\beta)^m}{m!}}$$

$$= \frac{m!}{r!(m-r)!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^{m-r}$$

$$= \binom{m}{r} \cdot \frac{\alpha^r}{r!} \cdot \frac{\beta^{m-r}}{(m-r)!} \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Ex⁹ Chaises à Roulettes.

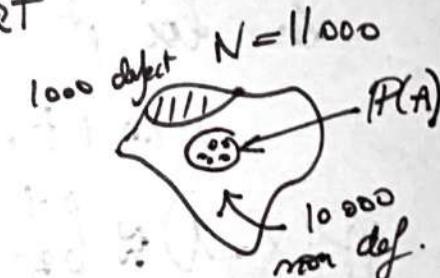
$N = 11000$ roulettes $\Rightarrow 2200$ chaises

Tirer 1 chaise au hasard devient à prendre 5 roulettes au hasard parmi les 11000.

A: "les 5 roul. st en bon état"

$$\text{on a } P(A) = \frac{\binom{5}{10000}}{\binom{5}{10000}}$$

$$= \frac{10000!}{5!(10000-5)!} \times \frac{5! \times (10000-5)!}{10000!} = \frac{10000!}{10000!} \frac{(9995)!}{9995!}$$



2) Loi nbre roulettes défectueuses de la chaise.

$$X \sim \text{Binomial}(10000, 1/11)$$
$$P(X=k) = \frac{\binom{10000}{k} \left(\frac{1}{11}\right)^k \left(\frac{10}{11}\right)^{10000-k}}{10000!}$$

$$X \sim \text{Hypergeometric}(10000, 1000, 5)$$

$$A = \{X = 0\}$$

La loi pt s'approcher par

$$\text{Binomial}(5, \frac{1}{11})$$

$$P(X=0) \approx \binom{5}{0} \left(\frac{1}{11}\right)^0 \left(\frac{10}{11}\right)^5 = 5 \times \frac{10^5}{11^5}$$

$$P(X=3) \approx \binom{5}{3} \left(\frac{1}{11}\right)^3 \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0,006$$

$$3) P(X=0) = \frac{10^5}{11^5} \approx 0,6$$

2) Loi nbi roulettes défectueuses de la chaise.

$$X(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{k}{10000} \times \binom{5-k}{10000}}{\binom{5}{11000}}$$

$$X \sim \text{Hypergeom}(11000, 1000, 5)$$

$$A = \{X=0\}$$

La loi pt s'approcher par

$$\text{Bin}(5, \frac{1}{11})$$

$$P(X=1) \approx \binom{1}{5} \left(\frac{1}{11}\right)^1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^4 = 5 \times \frac{10^4}{11^5}$$

$$P(X=3) \approx \binom{3}{5} \left(\frac{1}{11}\right)^3 \times \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0,006$$

$$3) P(X=0) = \frac{10^5}{11^5} \approx 0,6$$

Ex 10

500 maries.

$$1) X \sim \text{Bin}(500, 10^{-3})$$

$$2) P(X=10)?$$

Approximer loi de X par loi de Pois(500, 10^{-3}). \leftarrow nb succés

$n=500$ grand devient $m_p = 500 \times 10^{-3} = \frac{1}{2}$.

si $X_m \sim \text{Bin}(n, p_m)$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(X_m=k) = P(Y=k) \text{ où } Y \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$P(X=10) \approx P(Y=10)$$

$$\text{si } Y \sim \text{Pois}\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10!} = \frac{1}{2^{10} 10!} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1,63 \cdot 10^{-10}$$

$$P(X=10) = \int_{0}^{10} (10^{-3})^k (60,999)^{500-k} \approx 1,51 \cdot 10^{-10}$$

3) 1: réserves financières

$$r = m \cdot 10^6 \quad , m : \text{nbr manifages ann.}$$

$$P(X \leq m) \geq 99,9\%$$

$$P(X \leq m) = \sum_{h=0}^m \int_{500}^h (10^{-3})^h (0,999)^{500-h}$$

$$\approx P(Y \leq m) = \sum_{k=0}^m e^{-1/2} \frac{1}{2^m \cdot k!}$$

$$= e^{-1/2} \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^m \cdot k!}$$

m	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=m)$	0,606	0,303	0,076	0,0103	0,0015		
$P(Y \leq m)$	0,606	0,909	0,985	0,992	0,9998		

$$P(Y \leq 3) \leq 0,999$$

$$P(Y \leq 4) > 0,999$$

$$\{X \leq k\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X=k\}$$

La société d'assur. doit avoir au moins $4 \cdot 10^6$ de réserves par année.

Elle doit demander une cotisation annuelle de $\frac{4 \cdot 10^6}{500} = 8000 \text{ € / an}$.

1) Fusion de 2 compagnies. (500 nav +)

1000 navires ; $X \sim \text{Bin}(1000, 10^{-3})$

$n=5$; $Y \sim \text{Pois}(1)$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot 10^6}{1000} = 5000 \text{ €.}$$

$$\begin{matrix} L \\ \sqcap \\ I = i \end{matrix}$$

(23)

Fiche 4

$$P(X=i, Y=j)$$

Ex 1

$i \backslash j$	0	1	$P(Y=j)$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
$P(X=i)$		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

1) loi de X

- Valeurs prises par la v.a X :

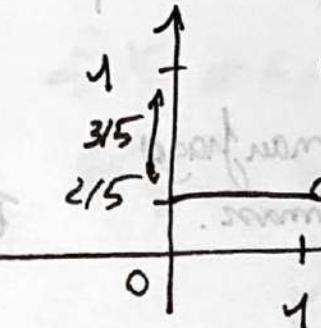
$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$\bullet P(X=0) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{j=0}^2 P(X=1, Y=j) \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

f de répartit:

$$\begin{aligned} F_X: \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$



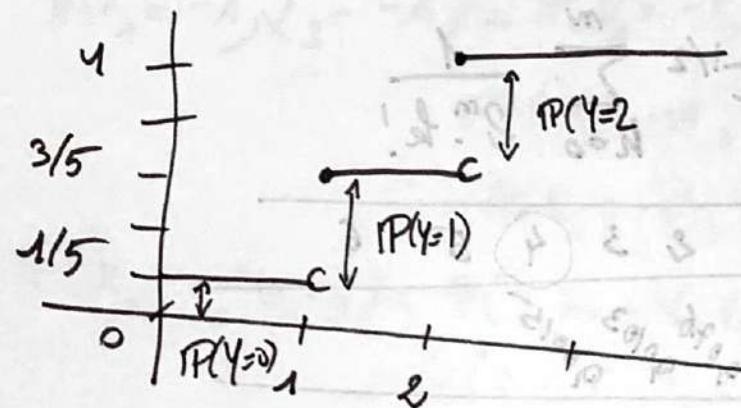
2) loi de Y

$$\bullet P(Y=0) = \frac{1}{5}$$

$$\bullet Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$\bullet P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{2}{5}$$

f de répartit de Y :



3) si X & Y indéples $\Rightarrow \forall i \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{0, 1, 2\}$

$$P(X=i \cap \{Y=j\}) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

$$i=1 \quad j=1$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{5}$$

24

$$P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Ex 2 X_1, X_2 2 ind tq

$$\mu_i \in \{1, -1\}, P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

on pose $X_3 = X_1 X_2$.

1) loi de X_3 ?

$$X_3(\omega) = \{-1, 1\}$$

$$P(X_3 = 1) = P(X_1 X_2 = 1)$$

$$= P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

$$+ P(X_1 = -1, X_2 = -1)$$

on vaut X_1, X_2
indépdt.

$$= P(X_1 = 1) P(X_2 = 1)$$

$$+ P(X_1 = -1) P(X_2 = -1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow P(X_3 = -1) = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow X_3$ n'est pas que X_1 & X_2 .

2) X_1 et X_2 st indépdtos

$$P(X_1 = i, X_3 = j) = P(X_1 = i) P(X_3 = j)$$

$$\forall (i, j) \in \{-1, 1\}^2$$

j \backslash i	-1	1
	-1	$1/4$
1	$1/4$	$1/4$

$$P(X_1 = -1, X_3 = -1) = P(X_1 = -1, X_2 X_1 = -1)$$

$$= P(X_1 = -1, X_2 = 1)$$

$$= P(X_1 = -1) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X_1 = i, X_3 = j) = P(X_2 = i, X_1 X_2 = j)$$

$$= P(X_1 = i, X_2 = j/i)$$

$$= P(X_1 = i) P(X_2 = j/i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$3) P(X_1=i, X_2=j, X_3=k)$$

$$= P(X_1=i) \cdot P(X_2=j) \cdot P(X_3=k)$$

$$i=j=k=1 \quad \checkmark \quad \text{ca}$$

$$\begin{aligned} & i=j=k=1, h=-1 \\ & P(\dots) = \frac{1}{9} \\ & \prod P(\dots) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

	1	1	$\frac{1}{9}$

$$\therefore P(\dots) > 0$$

$(X_i)_{1 \leq i \leq 3}$ st indp 2 à 2 mais

ne forment pas 1 famille de
v.a indp.

$$(i_1 \in \mathbb{R}, i_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$(i_1 \in \mathbb{R}, i_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (i_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow (i_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} = (i_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow (i_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow (i_n \in \mathbb{R}) \Rightarrow \dots$$

$$\therefore \text{ex ob int (a)}$$

$$\{1, 2\} = \{0\} \times$$

$$(i_1 \in \mathbb{R}, i_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

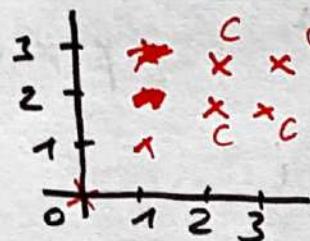
$$1 - (i_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2} = (i_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow \dots$$

Ex 3 Couple de variables et quadrillage



S: rapport de loi (x, y)

$$F(c_{ij}) \in \{2, 3\}^2$$

$$P((x,y) = (i,j)) = c$$

$$1) \quad S_3 = \{2,3\}^2 \text{ ont te mitschrijven.}$$

- $X \sim \text{Unif}(10, 1, 35)$ $\neq (X, Y) \sim \text{Unif}(10, 1, 35)^2$

$$P((x,y) \neq (1,2)) = 0$$

$$P(X=1) \neq 0, P(Y=?) \neq 0$$

$$\bullet P(X=0) = P((X,Y)=(0,0))$$

$$\circ P(X=2) = P(X=2, Y \in \{2, 3\})$$

$$= P((X,Y) = (2,2)) + P((X,Y) = (2,3))$$

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{1}{4} = P(X=0, Y=0)$$

$$\rightarrow P(X=1) = \frac{1}{4} = P(X=1, Y=1)$$

$$\sum_{(x,y) \in S} P((X,Y) = (x,y)) = 1$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 4c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{8}$$

2) Pas indépde à " \oplus, \ominus ".

$$P((X,Y) = (1,2)) = 0 \neq P(X=1) \cdot P(Y=2)$$

3) Ng $\exists \infty$ tuis (x, y) tq

$$X \sim \text{Unif}(\{0, 1, 2, 3\}) \quad \& \quad Y \sim \text{Unif}(\{0, 1, 2\})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \\
 \begin{array}{c}
 \text{+} \quad \begin{array}{c} p_4 \\ \times \\ p_1 \\ \times \\ p_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ p_2 \\ \times \\ p_1 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_4 = \frac{1}{4} \\ p_3 + p_2 = \frac{1}{4} \\ p_4 + p_3 = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad p_1 + p_2 = \frac{1}{4}$$

$$8 \quad p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \det = 0 \Rightarrow$ mat m'est pas inversible.

Ex 4 Si T & U sont indép. de loi géométriques.

1) loi de $Z = T + U \in \mathbb{N}^*$

α, β quelconque puis $\alpha = \beta$.

$\triangle Z$ prend rl^{ns} entières $\geq k$.

$P(Z=k) = P(T+U=k)$

$\star \bigcup_{i=1}^{k-1} \{T+U=k\} \cap \{T=i\}$

$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(T+U=k, T=i)$

$\Rightarrow k-1$ cas $\{T+U=k, T=i\} = \emptyset$

$\forall i \notin \{1, \dots, k-1\}$

$U = k-T, T \geq 1 \Rightarrow U \leq k-1$.

$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(U=k-i, T=i)$

$= \sum_{i=1}^{k-1} P(U=k-i) \cdot P(T=i)$ car T & U st indép.

$= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha(1-\alpha)^{i-1} \cdot \beta(1-\beta)^{k-i-1}$

$$\begin{aligned} &= \alpha \beta \sum_{i=1}^{k-1} (1-\alpha)^{i-1} (1-\beta)^{k-i-1} \\ &= \alpha \beta \cancel{(1-\beta)} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{i-1} \quad (\beta \neq 1) \\ &= \alpha \beta (1-\beta)^{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^i \\ &= \alpha \beta (1-\beta)^{k-2} \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{k-1}}{1 - \frac{1-\alpha}{1-\beta}} \\ &= \alpha \beta \frac{(1-\beta)^{k-1} - (1-\alpha)^{k-1}}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

NB $\frac{(1-\beta)^{k-1} - (1-\alpha)^{k-1}}{\alpha - \beta} = \frac{(1-\beta)^{k-2}}{(1-\beta)^{i-1}}, k > \ell$.

Si $\alpha = \beta : \frac{1-\alpha}{1-\beta} = 1$

$= \beta^2 (k-1) (1-\beta)^{k-1}$ \leftarrow significatif?

P) si X (va) d. intégrable $|E(X)| \leq E(|X|)$.

RQ: On peut avoir $f(x)$ intégrable & X non intégrable.

II / Moments de (va) & inégalité' Markov

D) $x \in \mathbb{N}^*$
finie, le moment d'ordre x de (va) X est $E(X^x)$.

→ X a un moment d'ordre x si $E(|X|^x) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|^x P(X=x_k)$

RQ: • espérance: moment d'ordre 1

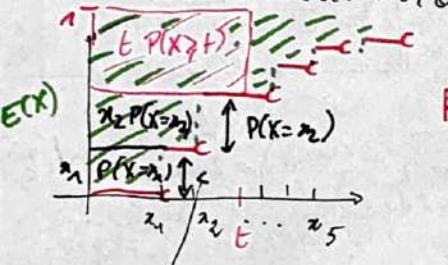
• 1 (va) bornée ($\exists M \in \mathbb{R}, \forall x_n \in X(\Omega), |x_n| \leq M$) a des moments de tous les ordres.

D) Une va qui a un moment d'ordre x a des moments de tous les ordres inférieurs:
 $E(X^x) \exists \Rightarrow \forall m \in \{1, \dots, x\} E(X^m) \exists$

Inégalité' de Markov rad,

• si $X \oplus$ & int: $\forall t > 0: P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$

• si X a moment d'ordre n : $\forall t > 0: P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^n)}{t^n}$



$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq t}} P(X=x_k)$$

III / Variance & inégalité' de Chebychev

D) si X une (va) ayant un moment d'ordre 2:

sa variance est $\text{Var}(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Pptés de la variance

si X a un moment d'ordre 2:

- 1) $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$
- 2) $\forall b \in \mathbb{R}, \text{Var}(X+b) = \text{Var}(X)$
- 3) $\text{Var}(X)=0 \Leftrightarrow X \sim f$ où $c = E(X) \Leftrightarrow P(X=c) = 1$

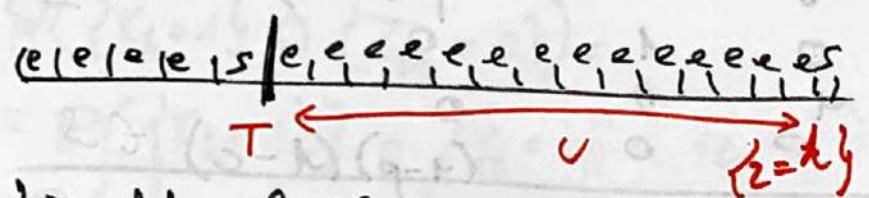
Variances des lois classiques

$$1) \alpha \neq \beta \quad Z = T + U.$$

$$2) \alpha = \beta \quad Z \text{ est } \sim N^+ \text{ p.t. } k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

$$P(Z=k) = (m-1) \alpha^k (1-\alpha)^{k-2}$$

T : n° du 1^e succès ; U : n° 2^e succès après T



$\{Z=k\}$: les k^{e} succès se produisent à l'au $k^{\text{ème}}$ épreuve.

$$P(Z=k) = \underbrace{(k-1)}_{\text{nb de possibilités}} \alpha^k (1-\alpha)^{k-2}$$

nb de possibilités
en 1^e succès, succès $\leq k-1$

$$P(T=U) = \sum_{h=1}^{\infty} P(\{T=h\} \cap \{U=h\})$$

$$\text{car } \{T=U\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \{T=U=h\}$$

$$P(T=U) = \sum_{h=1}^{\infty} (\alpha(1-\alpha)^{h-1})^2$$

$$P(T=U) = \alpha^2 \sum_{h=1}^{\infty} (1-\alpha)^{2(h-1)}$$

$$= \alpha^2 \sum_{h=1}^{\infty} [(1-\alpha)^2]^{h-1} \quad \text{car } 1-\alpha \in [0, 1[.$$

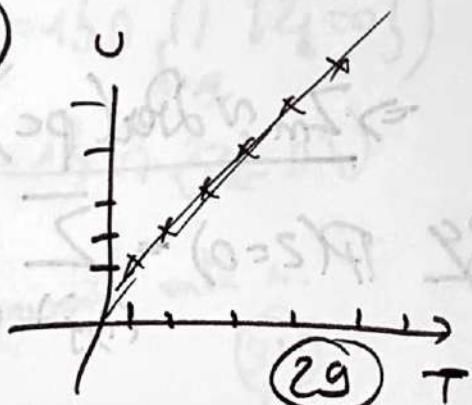
$$= \alpha^2 \frac{1}{1 - (1-\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{2\alpha - \alpha^2} = \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

$$3) \alpha = \beta, \text{ calcul } P(T \neq U)$$

$$P(T \neq U) = 1 - P(T=U)$$

$$P(T \neq U) = 1 - P(T=U) = 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{2-2\alpha}{2-\alpha}$$

$$\text{et } P(T=U) =$$



$X_m = i$	$Y_m = j$	$Z_m = h$	$P(X_m=i, Y_m=j, Z_m=h)$
1	1	1	p.c. $\in S$
1	1	0	0 $\in S$
0	1	1	$c(1-p)$ $\in S$
1	0	1	0 $\in S$
1	0	0	$p(1-c)$ $\in S$
0	0	1	0
0	1	0	$(1-p)(1-c)$ $\notin S$
0	0	0	0

Support de la loi: entiers non nuls

2) loi de Z_m ?

comme $Z_m = X_m Y_m$ et Z_m est à valeurs dans $\{0, 1\}$

$\Rightarrow Z_m \sim$ loi Bernoulli $P(X_m=1, Y_m=1)$

$$P(Z_m=1) = P(X_m Y_m=1) = P(X_m=1) \cdot P(Y_m=1)$$

= p.c.

$\Rightarrow Z_m \sim$ Bern(p.c.)

$$\text{Rq } P(Z=0) = \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} P(X_m=i, Y_m=j)$$

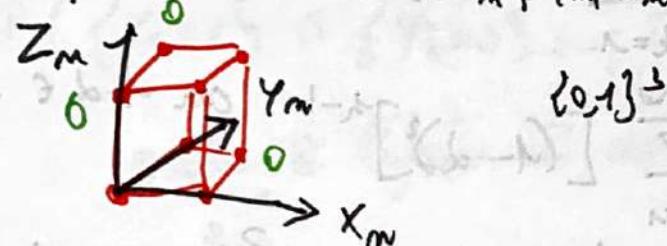
30

25

$$1) (i, j, k) \in \{0, 1\}^3$$

$$P(X_m=i, Y_m=j, Z_m=k) \quad \text{triplet?}$$

Si on a la loi de X_m, Y_m, Z_m ; on n'a pas la loi de (X_m, Y_m, Z_m) .



$$\text{Si } k \neq ij \Rightarrow P(X_m=i, Y_m=j, Z_m=k)=0$$

$$\text{Si } k=ij \Rightarrow P(X_m=i, Y_m=j, Z_m=k) =$$

$$= P(X_m=i, Y_m=j)$$

$$= P(X_m=i) P(Y_m=j)$$

$$X_m \sim \text{Bern}(p)$$

$$Y_m \sim \text{Bern}(c)$$

3) soit $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

on note B_k l'événement $\{Z_k = 0\}$

→ Déterminer $P(\{X_k=1\} \cap B_k)$

puis $P(\{X_k=1\} \cap A_k)$.

• $P(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}) =$

$$= P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k=0\} \cap \{Z_k=0\})$$

$$= P(\{K_k=1\} \cap \{Y_k=0\}) = p(1-p)$$

proba d'un défaut & non continué.

$k=0$

$\bigcap_{k=0}^{m-1}$

• $A_m = \{Z_m=1\} \cap \bigcap_{k=0}^{m-1} \{Z_k=0\}$.

• $P(\{X_k=1\} \cap A_m) =$

$$= P(\{X_k=1\} \cap \{Z_m=1\} \cap \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} \{Z_i=0\})$$

$$= P(\{Z_m=1\} \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-1} \{X_i=1\} \cap \{Z_i=0\})$$

Par l'indép des composants entre eux.

$$= \underbrace{P(Z_m=1)}_{\text{indép de } m} \cdot \underbrace{P\left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-1} \{X_i=1\} \cap \{Z_i=0\}\right)}_{\text{indép de } m-1} \times P(\{X_k=1\} \cap \{Z_k=0\}).$$

indép
comp entre
eux.