CM Intro :

suite : $u_1, u_2, u_3, \dots$ $u_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

- $u_n \longrightarrow \ell$ dans $\mathbb{R}$
- $u_n = a_n + i.b_n$ dans $\mathbb{C}$ où $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$

$u_n \to z \iff \begin{array}{l} a_n \to a \\ b_n \to b \end{array}$ et $z = a + ib$.

- $\nearrow, \searrow$, cte ? ... pr déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$? $\ell(x) \in \mathbb{R}$.

$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$

$u_n(x)$ $\quad u_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$

Suite de f

on fixe un $x \in A$,

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \in \mathbb{R}$.

Ch 1 : Suites de fonctions

(D) suite de fonctions

$A \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),

(f_n) : $a \longrightarrow f_n$

I / CV simple d'une suite de fonctions

(D) 1. soit sdf (f_n) def $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, (f_n) CV simplement (ou ponctuellement) vers la f $f : A \to \mathbb{R}$ si $\forall x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$.

On dit que f est limite simple de f_n.

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(N dépend de ε et x : $N_{\varepsilon,x}$)

(la sdf $f_n(x)$ devient une suite numérique quand x est fixé) a

1) $f_n(x) = x^n$ et $A = [0,1]$

(f_n) CV simplement vers f pa $\begin{cases} f(x)=0 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(x)=1 & \text{si } x=1. \end{cases}$

$x = 1$, $f_n(1) = 1^n = 1 \Rightarrow f_n(1) = 1.$

- si $x \in [0,1[$; $0 \leq x < 1$

$x^n \longrightarrow 0.$

$f_n(x) \longrightarrow 0 = f(x)$.

scdf : f cont

mais les f(x), limites ne st pas cont

2) $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ et $A = \mathbb{R}$.

- si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$, et $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
- si $|x| > 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty$, et $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.
- si $x = \pm 1$, $f_n(x) = 0$ donc

$$f_n(x) = \frac{\cancel{x^{2n}}\left(\frac{1}{x^{2n}} - 1\right)}{\cancel{x^{2n}}\left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)}$$

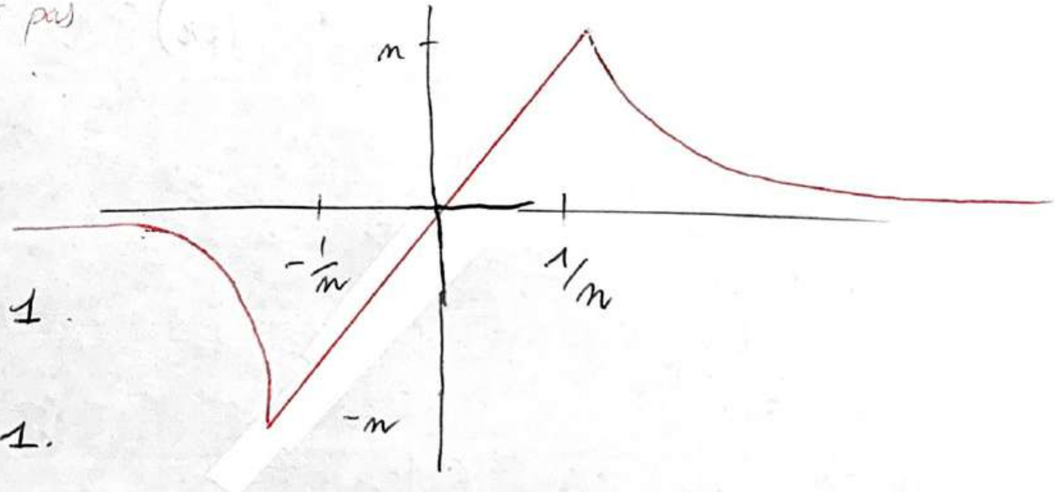
NB: $|x| > 1 \iff]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$|x| < 1 \iff]-1, 1[$

(f_n) CV simplement vers f def par

$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } |x| < 1 \\ f(x) = -1 & \text{si } |x| > 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$

3) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$, $A = \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.



(f_n) CV simplement vers f définie par

$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Rq : ⚠ f_n st cont sr A & f ne l'est pas @$_1$.

@$_3$ f_n st bornées mais f ne l'est pas

$$\forall n \geq 1,\ f_n(x) \leq n,\quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

car si $|x| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x)| = n^2|x| \leq n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$

et si $|x| > \frac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{1}{|x|} < n$.

mais f n'est pas bornée car

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \infty$$

⇝ CV uniforme va préserver continuité

II / CV Uniforme d'une suite de fs

D$_2$. sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$.

(f_n) CV uniformément vers f $f : A \to \mathbb{R}$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall n \geq N_\varepsilon,$

$\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

m̂ N pour tous les x : mais ne dépend pas de x

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0, \forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ie $$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

calcul sup ? (i) majorant $|f_n(x) - f(x)|$ en f de n

(ii) on dérive $f_n(x) - f(x)$ puis maximum ? ...

usuel $$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

(vérifier le maximum tend vers 0.)

Rq (i) si (f_n) CV $\overset{i}{S}$. vers f et (f_n) CV $\overset{nf}{U}$ vers g

alors $f = g$.

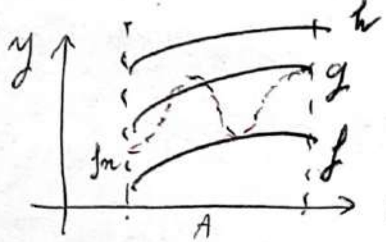
(on cherche la limite simple puis on ① ① si CV est uniforme).

(ii) ⚠ la réciproque est fausse

(iii) si (f_n) CV $\overset{nf}{U}$ vers f sur A

$\Rightarrow (f_n)$ CV $\hat{U}^f$ sr tt ens $A' \subset A$.

(iv)



on ① ① TOUT le graphe

N_ε ne dépend pas de x

le graphe de la f g va CV vers graphe de f

(a)

1/ soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$,

(f_n) CV simplement vers 0 mais

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = 1 \neq 0$$

dc ne CV pas uniformément sur $[0,1[$.

Par contre sur $[0,a]$ où $0 < a < 1$,

(f_n) CV uniformément vers f 0 car

$$\forall x \in [0,a],\ x^n \leq a^n$$

dc $\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| \leq a^n$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| \right) = 0.$$

2/ soit $f_n(x) = n.x.e^{-nx}$, $n \geq 0$ et $x \geq 0$.

(f_n) CV simplement vers 0

pr $x = 0$; $f(x) = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} (0 \times 1)^{nx} = 0$

pr $x > 0$; $f(x) = 0$. $\left(\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0\right)$

CV uniforme ?... Considérons $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$.

$$f_n'(x) = n.e^{-nx}(1 - nx).$$

qui s'annule pr $x = \frac{1}{n}$, dc $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \frac{1}{e}$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \times \frac{1}{n} \times e^{-n \times \frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

x	$1/e$	
$f(x)$	+	-
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

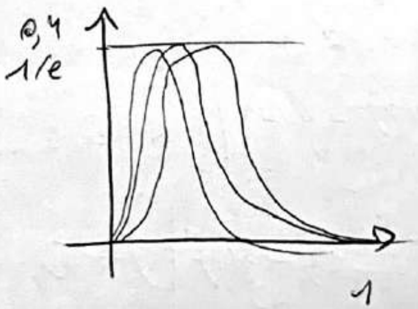
donc $\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| \right) = \frac{1}{e} \neq 0$

dc il n'y a pas de CV uniforme sur $[0, +\infty[$.

Par contre, si on déf (f_n) sur $[a, \infty[$, où $a > 0$, $\exists N \geq 0$, $\forall n \geq N$.

$$\sup_{x \in [a,\infty[} |f_n(x)| = |f_n(a)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dc $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in [a,\infty[} |f_n(x)| \right) = 0$.



P_3 soit sdf (f_n) déf $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$
CV simplement vers $f : A \to \mathbb{R}$
si $\exists$ une suite de nbres $(s_n)_n$ ne dépendant pas de x, CV vers 0 tq

$$\forall x \in A, \; |f_n(x) - f(x)| \leq s_n .$$

alors la CV de (f_n) vers f est uniforme.

- ⓐ $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

(f_n) CV simplement vers 0, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}$$

puisque $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ CV vers 0, (f_n) CV uniformément vers 0.

R9
- P_3 utile pr mq (f_n) ne CV pas uniformément sr A.

$\mathcal{P}_3$ soit sdf (f_n) def $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$
CV simplement vers $f : A \to \mathbb{R}$
si $\exists$ une suite de nbrs $(s_n)_n$ ne dépendant pas de x, CV vers 0 tq
$\forall x \in A, \ |f_n(x) - f(x)| \leq s_n$.
alors la CV de (f_n) vers f est uniforme.

@ $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
(f_n) CV simplement vers 0, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}$$
puisque $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ CV vers 0, (f_n) CV uniformément vers 0.

R9 $\mathcal{P}_3$ utile pr mq (f_n) ne CV pas uniformément sr A.

$\mathcal{P}_4$ soit sdf (f_n) def $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$,
CV simplement vers la f $f : A \to \mathbb{K}$,
si $\exists$ $x_n \in A$ tq
$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$$
alors (f_n) ne CV pas uniformément vers f sur A.

5

DM
$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$$
dc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup |f_n(x) - f(x)| \right) \neq 0$ $\square$

@ $f_n(x) = n \cdot x^n \cdot \sin(x\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, $A = [0, 1]$.
$\infty \times 0$ ☹ distinct° $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \to x \in]0, 1[$.
$\underline{x = 0}$: $f_n(0) = 0$. $\quad$ $\underline{x = 1}$ $f_n(1) = \sin(\pi) = 0$
$\underline{x \in]0,1[}$: $x^n = e^{\overbrace{n}^{+\infty} \overbrace{\ln x}^{<0}} \longrightarrow 0$
$x \in]0, 1[$: $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

on prend $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.
$$f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f_n(x_n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \sin\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi\right)$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
on a $n \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \pi \cdot \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \longrightarrow \pi$ $\quad$ ($\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \to 1$)

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \longrightarrow e^{-1}$$
$$\Rightarrow \left|\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)|\right| = \lim_{n\to\infty} \left|n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = \frac{\pi}{e}$$
$\neq 0$

dc (f_n) ne CV pas uniform° sr A.

P5 soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $\forall n$, f_n est bornée sur A & CV uniformément sur A vers la f f, alors f est bornée sur A.

Th1 Critère de Cauchy Uniforme

soit sdf (f_n), $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$, CV uniformément vers la f $f : A \to \mathbb{K}$ ssi

$\forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon \geq 0$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in A$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$, $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$$U_n \to \ell \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$$

Cdc

$$U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon, \forall n, m \geq N_\varepsilon : |U_n - U_m| \leq \varepsilon$$

on n'a pas besoin de calculer la limite.

1.3. Limite uniforme de sdf continues

Rq : opérat° sur CV uniforme.

(i) $f_n \to f$ uniforme.
$g_n \to g$ uniforme.

!! somme $\boxed{\checkmark}$

$\lambda f_n + g_n \to \lambda f + g$ uniformément

(ii) ⚠ le produit ne f pas $\boxed{\times}$

@ $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \longrightarrow f(x) = x$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ dc CV uniforme.

@ $f_n^2(x) = (x + \frac{1}{n})^2$

$|f_n^2(x) - x^2| = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$

soit $x_n = n$, $|f_n^2(x_n) - x_n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2 \neq 0$

d'après la propos° il n'y a pas CV uniforme.

TH$_7$ Continuité

soit sdf (f_n) cont sur $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{K}$

CV uniformément vers f $f : A \to \mathbb{K}$

$\Rightarrow f$ est cont A.

ie CV uniforme conserve la continuité contrairement à la CV simple.

Rq - CV uniformément vers f sur une partie A.

- contraposée : si (f_n) CV simplement vers f sur A et f_n cont et f n'est pas cont sur A, alors CV n'est pas uniforme.

- CV uniforme permet de commuter.

$$\forall x_0 \in A : \lim_{n\to\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

P$_8$ (Prolongement)

soit $I = [a, b[$ & sdf cont (f_n) sur $[a,b]$

CV uniformément sur I vers f $f : I \to \mathbb{K}$, alors f est prolongeable par continuité à $[a,b]$ & la suite (f_n) CV uniformément vers f (prolongée) sur $[a,b]$.

Rq $f_n(x) = x^n$ sur $]-1, 1[$.

ne CV pas uniformément car sinon elle CV uniformément sur $[-1, 1]$ vers f cont or la limite simple n'est pas cont.

polynôme cont sur $\mathbb{R}$

$|x| < 1$, dc $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$1^n \to 1$

$(-1)^n \to$ pas de limite

TH$_8$

soit sdf cont (f_n), $f_n : I = [a,b] \to \mathbb{K}$

CV uniformément vers f $f : I \to \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Rq - $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

- le signe intégrale commute.

- si $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ la CV n'est pas uniforme.

calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,dx\right)$

alors (f_n) CV simplement vers f def p
$f(x)=e^{-x}$. Mq CV uniforme sur $[0,1]$:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}\right|$$

$$= \left|\frac{x^2-xe^{-x}}{n+x}\right| \leq \frac{x^2+xe^{-x}}{n+x} \leq \frac{2}{n}$$

$\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dc CV uniforme.

ainsi $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,dx\right) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-\frac{1}{e}$

NB: $\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = \frac{n\left(e^{-x}+\frac{x^2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} \longrightarrow e^{-x}$

$\frac{x^2}{n} \to 0$, $\frac{x}{n} \to 0$

CV simple on fixe $x \in A$.

TH (Dérivaᴼ) → f dériv, f' cont

soit (f_n) sdf $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $C^1([a,b])$ tq :

condit°s
(i) (f_n) CV simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
(ii) (f_n') CV uniformément vers $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

⟹ $f \in C^1([a,b])$ et $g = f'$,
De plus (f_n) CV uniformément vers f.

ⓐ $f_n \in C^1([a,b])$

$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x \in [-1,1]$,

alors (f_n) CV uniformément def $f(x)=\sqrt{x}$.

$$|f_n(x)-f(x)| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dc CV uniforme.

mais f n'est pas dérivable en 0.

Précision $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x| \geq \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$

$$x^2+\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

dc $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x| \geq \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$

qd j'inverse on change l'inégalité

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = 1/n$$

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

culture : f gamma.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{x-1}\,dt$$

Précision $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x| \geq \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$

$$x^2+\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

dc $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x| \geq \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$

qd j'inverse on change l'inégalité

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = 1/n$$

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

culture : f gamma. (f Euler).

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$

Résumé

$f_n : A \to \mathbb{R}$

(i) CV simple sur A si $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in A$.

(ii) CV uniforme sur A

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\| f_n - f \|_\infty$$

TH1 (Continuité) $f_n : A \to \mathbb{R}$ continue

si $f_n \to f$ uniformément sur A alors f est cont.

$$x\in A \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Th2 (Intégrale) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

si $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$

alors $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

La réciproque n'est pas vraie.

Th3 (Dérivaᵒ) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C^1 \to f_n$ dér. $\to f_n'$ cont

si (i) $f_n \xrightarrow{\text{simplement}} f$ sur $[a,b]$

(ii) $f_n' \xrightarrow{\text{uniform}^t} g$ sur $[a,b]$

Alors $f \in C^1$ et $f' = g$. en plus ⓒⓥ uniforme.

C2 Séries de Fonc°s

<u>Intro</u> $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} U_n(x)$

$= \lim_{N\to\infty} f_N(x)$

où $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$

$(f_N(\cdot))_N$ <u>sdf</u>

$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$

$|f(x) - f_N(x)| \longrightarrow 0 \quad \forall x \in A.$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \right| = \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right|}_{\text{reste}} \quad R_N$$

D1 (u_n) sdf $u_n : A \to \mathbb{R}$

1) sér df, on note $\sum_n U_n \xrightarrow{\text{simpl}^t}$ vers $f : A \to \mathbb{R}$ si la sdf (f_N), où $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ ⓒⓥ simpl^t vers f, appelée somme de la série $\sum_n U_n$.

2) la m̂ série sera ⓒⓥ uniforme vers f si la suite (f_n) ⓒⓥ unif^t vers f.

1) $\forall x \in A$, $\lim_{N\to\infty} ((R_N(x)) = \lim \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right) = 0$

2) $\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in A} |R_N(x)| \right) = 0$

@ $u_n(x) = x^n$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}, \text{ si } x \neq 1$$

$$f_N(x) = N+1 \quad \text{si } x = 1$$

Dc si $|x|<1$ alors sdf (f_N) CV simplt f par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et DV si $|x| \geq 1$.

CV uniforme ? sur $]-1,1[$.

$$\text{sdf } f_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow{\text{simplt}} f(x) = \frac{1}{1-x}$$

cette CV ne pt pas ê uniforme car sinon $\dfrac{1}{1-x}$ serait prolongeable par cont en $x=1$ et en $x=-1$, il y aurait CV simple, ce n'est pas le cas non plus, $\sum_n (-1)^n$ ne CV pas.

Mais $\forall \alpha \in]0,1[$ il y a CV unif sur $[-1+\alpha, 1-\alpha]$

$$\left| f_N(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{N+1}}{|1-x|}$$

or $|x|^{N+1} \leq (1-\alpha)^{N+1}$, $|1-x| = 1-x$

puis $x \leq 1-\alpha \Rightarrow 1-x \geq \alpha$

$$\Rightarrow \left| f_N(x) - \frac{1}{1-x} \right| \leq \frac{(1-\alpha)^{N+1}}{\alpha}$$

$$\text{or } \lim_{N\to\infty} \frac{(1-\alpha)^{N+1}}{\alpha} = 0$$

CV unif sur $[-1+\alpha, 1-\alpha]$.

$$\frac{1}{x^2+n} = \frac{1}{n\left(\frac{x^2}{n}+1\right)} \quad \text{dc} \quad \frac{1}{n\left(\frac{x^2}{1}+1\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Th Cauchy Uniforme

Une série $\sum_n U_n$ CV unif^t sur A ssi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $\forall p \geqslant 1$, $\forall x \in A$,

$$|U_{n+1}(x) + \dots + U_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

D2 (Normalement CV)

série $\sum_n U_n$ est normalement CV sur A, s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nbre réels tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \quad |U_n(x)| \leqslant \alpha_n,$$

tq série numériq $\sum_n \alpha_n$ est CV.

TH2 si série $\sum_n U_n$ est normalement CV sur A, alors elle est uniformément CV sur A.

Th $\Leftrightarrow \sum_n \sup_{x\in A} |u_n(x)|$ CV

Réciproq TH fausse.

Ca $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$ sur $A = [0,1]$

alors $\forall x \in [0,1]$, $\sum_n u_n(x)$ est série alternée,

dc $R_N(x) \leqslant |u_{N+1}(x)| = \dfrac{x^{N+1}}{N+2} \leqslant \dfrac{1}{N+2}$

et $\lim_{N\to\infty} \left(\dfrac{1}{N+2}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |R_N(x)|\right) = 0$

dc série CV uniformément mais

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n+1}$$

est le terme général d'une série DV, la série n'est dc pas normalement CV.

@ 1) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$, $A = \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$, terme gén. série CV dc $\sum_n u_n$ CV normalement sur $\mathbb{R}$, dc uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) série déf p $u_n(x) = \frac{1}{n^2+\sin(nx)}$,

$A = \mathbb{R}$, $n \geq 2$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$n^2 + \sin(nx) \geq n^2 - 1 > 0$

dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2-1}$

- q est terme général série CV, dc série $\sum_n u_n$ CV normalement sur $\mathbb{R}$, et dc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Th 3 TH d'Abel Uniforme

soit sdf (u_n), (v_n) déf sr $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $v_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$, si

1. $\forall x \in A$, la suite $(u_n(x))_n > 0$ et $\searrow$
2. suite (u_n) CV uniformément $\longrightarrow 0$ sur A.
3. $\exists M > 0 \mid \forall x \in A, \forall n, m \in \mathbb{N}, \left|\sum_{p=n}^{m} v_p(x)\right| \leq M$

$\Rightarrow \sum_n u_n v_n$ CV unif^t sur A et

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)\right| \leq M \, |u_{N+1}(x)|$$

(13)

1 3. $\Leftarrow$ R4

$\exists \beta > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq \beta$

$\rightarrow \forall x \in A, |v_n(x) + \dots + v_{n+p}(x)|$

$= |v_0(x) + \dots + v_{n-1}(x) + v_n(x) + \dots + v_{n+p}(x)$
$- v_0(x) + \dots + v_{n-1}(x)|$

$\leq | \qquad\qquad | \leq 2\beta$

dc μ $M = 2\beta$ $\boxed{\checkmark}$ 3)

Coro sdf (v_n), $v_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$ & ste de réels $(\alpha_n)_n$

si $\forall x \in A$, $u_n(x) = \alpha_n v_n(x)$ &

1) suite $(\alpha_n)_n \geq 0$, $\searrow$, $\longrightarrow 0$.
2) $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A \mid$
$|V_0(x) + \dots + V_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV unif^t sr A.

2) série déf p $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+\sin(nx)}$,

$A = \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$n^2 + \sin(nx) \geqslant n^2 - 1 > 0$$

dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2-1}$

q est terme général série CV, dc série $\sum_n u_n$ CV normalement sur $\mathbb{R}$, et dc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Th 3 TH d'Abel Uniforme.

soit sdf (u_n), (v_n) déf sur $A \subseteq \mathbb{R}$, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $v_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$, si

1. $\forall x \in A$, la suite $(u_n(x))_n > 0$ et ↘

2. suite (u_n) CV uniformément $\longrightarrow 0$ sur A.

3. $\exists M > 0 \mid \forall x \in A, \forall n, m \in \mathbb{N}, \left|\sum_{p=n}^{m} v_p(x)\right| \leqslant M$

$\Rightarrow \sum_n u_n v_n$ CV unif^{ment} sur A et

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)\right| \leqslant M\, |u_{N+1}(x)|$$

(B)

3. $\Leftrightarrow$ R4

$\exists \beta > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leqslant \beta$

$\rightarrow \forall x \in A$, $|v_n(x) + \dots + v_{n+p}(x)|$

$= |v_0(x) + \dots + v_{n-1}(x) + v_n(x) + \dots + v_{n+p}(x)$
$- v_0(x) + \dots + v_{n-1}(x)|$

$\leqslant | \qquad\qquad | \leqslant 2\beta$

dc p $M = 2\beta$ $\boxed{\checkmark}$ 3)

Coro sdf (v_n), $v_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$ & ste de réels $(\alpha_n)_n$

si $\forall x \in A$, $u_n(x) = \alpha_n v_n(x)$ &

1) suite $(\alpha_n)_n \geqslant 0$, ↘, $\longrightarrow 0$.

2) $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A \mid$
$|V_0(x) + \dots + V_n(x)| \leqslant M$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ CV unif^{ment} sur A.

@ RSf f def $u_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n^\alpha}$

(ou $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, ou $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^\alpha}$)

↳ $\alpha > 0$ et $A_r = [r, 2\pi - r]$, si $r \in]0, 2\pi[$,

alors $\sum_n u_n$ CV U.N sur A_r. En effet

↳ corollaire, $\boxed{\alpha_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ et } v_n(x) = \sin(nx), \text{ ou } \cos(nx), \text{ ou } e^{inx}}$.

On a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ et $|v_0(x) + \dots + v_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{r}{2})} = M$

$\rightarrow |v_0(x) + \dots + v_n(x)| = |1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}|$

$$= \left|\sum_{k=0}^{N} (e^{ix})^k\right| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{i(\frac{n+1}{2})x}\left[e^{-i\frac{(n+1)}{2}x} - e^{i\frac{(n+1)}{2}x}\right]}{e^{i\frac{x}{2}}\left[e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right]}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{-i(n+1)\frac{x}{2}} - e^{i(n+1)\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right| \overset{(*)}{=} \left|\frac{-\sin(n+1)\frac{x}{2}}{-\sin(\frac{x}{2})}\right|$$

On divise par $2i$ (*).

$$\leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{\sin(\frac{r}{2})}$$

$x \geq r \Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \sin(\frac{x}{2}) \geq \sin(\frac{r}{2})$

Pour $v_n = \sin(nx)$ ou $v_n = \cos(nx)$.

TH (Continuité)

soit (u_n) sdf, $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

si $\sum_n u_n$ CV U.N sur A,

$\Rightarrow f$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ cont sur A.

TH (Intégration)

soit (u_n) sdf cont, $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$,

si $\sum_n u_n$ CV. U.N sur $[a,b]$

$\Rightarrow \sum_n \int_a^b u_n(x)\,dx$ CV & dc on a

$$\int_a^b \left(\sum u_n(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Rq 1/ Commutat° signes "$\int$" et "Σ".

2/ Primitives... $[x_0, x]$

$x_0 \in [a,b] \Rightarrow \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt$ de $u_n(x)$ CV mais ces primitives ne st pas qq.

Ex $u_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} \Rightarrow \frac{1}{(x+n^2)} \leq \frac{1}{n^2}$ CV normt sr $[0, +\infty[$.

$$\int_0^x u_n(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t+n}\right]_0^x = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$$

$$= \frac{x}{n(n+x)} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

Mais série primitives $\sum U_n$ def p. $U_n(x) = -\frac{1}{x+n}$, $\forall x \geq 0$ DV.

- a, b fixé
- x_0, x ok mais autres primitives dvt s'annuler.

---

on ne pt pas appliqr TH Dérivat° car CV simp. n'est pas vérifiée ms ici $\sum_{n \geq 1} U_n$ des primitives de la série $\sum U_n'$ ne CV pas. MS si on considère primt q s'annulent ttes en 1 même point ⇒ séries primit CV.

Ex $\int_0^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(0) = e^{\frac{x}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$

dc $\sum_n \int u_n'(t)\,dt$ CV $\forall x \in \mathbb{R}$.

TH Dérivat°

soit sdf (u_n), $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C^1([a,b])$ tq

(i) 1/ $\sum_n u_n \xrightarrow{CV\ S.}$ sr $[a,b]$

(ii) 2/ $\sum_n u_n' \xrightarrow{CV\ U.N}$ sr $[a,b]$.

$\Longrightarrow f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est classe $C^1([a,b])$ et

$$\left(\sum_{n \geq 0} U_n(x)\right)' = \sum_{n \geq 0} U_n'(x)$$

et d+, $\sum_n u_n$ CV U.N sr $[a,b]$.

Rq 1/ Commutat° "dérivée" & "Σ".

2/ $u_n(x) = e^{\frac{x}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} u_n(x) = 1$

dc $\sum U_n$ DV $\forall x \in \mathbb{R}$. car le terme général ne tend pas vers 0.

Considérons $\sum_{n \geq 1} U_n'$, $U_n'(x) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{x}{n^2}}$

$\Rightarrow \forall A > 0, \forall x \in [-A, A], |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} e^{\frac{A}{n^2}}$

dc $\sum U_n'$ CV Normt sr $[-A, A]$, $\forall A > 0$

(a) $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ $x \in \mathbb{R}$ $n \geq 0$ on fixe x.

Rd'A $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \overset{?}{=} \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ CV simple

$\Rightarrow$ d'A $\Rightarrow \sum u_n$ CV $\forall x \in \mathbb{R}$

CV uniforme $\Rightarrow f(x) = \sum u_n(x)$

$\forall a \subset \mathbb{R}^*$, $\forall x \in [-a, a]$, $|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n!}$

$\Rightarrow \sum \frac{a^n}{n!}$ CV ~~norm~~ $\Rightarrow \sum u_n$ CV

normalement sur $[-a,a]$. $a > 0$.

$\Rightarrow$ CV uniforme sur $[-a,a]$.

Déduire continuité $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. ?

TH $\left[\begin{array}{l} \text{si CV uniforme sur } I, \\ u_n \text{ cont} \\ \Rightarrow f(x) = \sum u_n(x) \text{ cont sur } I. \end{array}\right.$

Comme cont : ppté local ; autour de x_0,

donc f cont en x_0, $\forall x_0$; ppté locale.

x_0 qq de $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ tjrs des intervalle $[-a, a]$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \hookrightarrow a > 0$

$\left\{\begin{array}{l} \text{CV uniforme sur } I \\ u_n \text{ cont} \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = \sum u_n(x)$ cont $\forall x_0 \in I$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ (i $\Rightarrow f$ cont sur $\mathbb{R}$

x^n donc	numérateur	majoré
	dénominateur	minoré

Dérivabilité de f ?

$\left\{\begin{array}{l} u'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{si } n \geq 1. \\ u'_0(x) = 0 \end{array}\right.$

De $u'_n(x) = u_{n-1}(x)$ $n \geq 1$, $\sum u'_n$ CV U.N

sur $[-a, a]$, $\forall a > 0$ d'après TH Déri

$f'(x) = \sum u'_n(x) = \sum u_{n-1}(x) = \sum u_n(x) = f(x)$

d'où $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

$\boxed{\text{TH Dériv}}$ $\begin{array}{l} \circ \sum \text{ CV S.} \\ \circ \sum u'_n \text{ CV U.N} \end{array} \Rightarrow f$ C^1 et $f'(x) = \sum u'_n(x)$

d'où $f(x) = e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}, \dots \forall x \in \mathbb{R}$.

@$_2$ $u_n(x) = x^n$, $n \geq 0$, $x \in]-1,1[$

car (x^n) ne CV U.N sur $]-1,1[$.

$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$

$\alpha < 1$.

La série $\sum x^n$ CV normalement sur $A_\alpha = [\alpha, \alpha]$

$\forall \alpha \in]0,1[$ car $\sup_x |x^n| = \alpha^n$ est terme général série CV.

Dc on pt intégrer terme à terme $[-\alpha, \alpha]$ & si $x \in [-\alpha, \alpha]$ alors

$$\int_0^x \left(\sum t^n\right) dt = \sum \left(\int_0^x t^n dt \right)$$

& ceci vrai sur $]-1,1[= \bigcup_{0<\alpha<1} [-\alpha, \alpha]$.

on a dc $\forall x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = - \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

si $x \in]-1,1[$ alors

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

pr $x = 1$, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ CV & on a vu

$\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ CV UN sur $[0,1]$.

Or $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ cont sur $[0,1]$

dc $f(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est cont $[0,1]$ ~~cf~~ sur $[0,1]$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln(1+x) = \ln(2)$$

dc $$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

(C3) # Séries Entières.

Intro $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, $f(x)=\sum_{n\geq 0} x^n$

$\forall n\geq 0$, $U_n\in\mathbb{C}$, $U_n=a_n+ib_n$.

$|U_n|^2=a_n^2+b_n^2$

- $a_n\in\mathbb{R}$, $b_n\in\mathbb{R}$.

$|a_n|\leq|U_n|$ et $|b_n|\leq|U_n|$

$0 \Leftarrow 0 \qquad 0 \Leftarrow 0$

$U_n \to l=a+ib \iff a_n\to a \;\&\; b_n\to b$.

$\sum_{n\geq 0} U_n=\sum_{n\geq 0}(a_n+ib_n)=\sum_{n\geq 0} a_n+i\sum_{n\geq 0} b_n$.

- $U_n(x)=a_n(x)+ib_n(x)$

$\sum z^n$ CV $\iff |z|<1$. $\sum z^n=\frac{1}{1-z}$

Prop $U_n\in\mathbb{C}$, On dit U_n absolmt CV.

$\sum_{n\geq 0}|U_n|$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV.

I/ D SE & Rayon CV

D SE $\sum_n U_n(z)$ où $z\in\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) tq $U_n(z)=a_n z^n$ et $a_n\in\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

$\rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Rq. polynôme est SE si $a_n=0$ $\forall n>n_0$ où deg polyn

$S_n=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ polynômes

si $\sum U_n(z)$ CV approximat° polynômiale.

Th (Rayon de CV)

soit SE $\sum a_n z^n$, $\exists R\in\mathbb{R}^+$ tq

1) si $|z|<R$ (R fini ou non) alors $\sum a_n z^n$ CV absolmt. $\iff \sum|a_n||z|^n$ CV.

2) si $|z|>R$ (R fini) $\Rightarrow \sum a_n z^n$ DV.

$\iff \lim_{n\to\infty} a_n z^n\neq 0$

→ R s'appelle le rayon de CV

Rq ∘ RDC d'1 SE est UNIQ.

∘ si $z \in \mathbb{C}$, $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est disq de CV de SE ($D(0,\infty) = \mathbb{C}$)

∘ si $z \in \mathbb{R}$, $D(0,R) =]-R, R[$, ($D(0,\infty) = \mathbb{R}$)

Lemme d'Abel.

soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n |a_n z^n|$ est CV.

DM on a $|a_n \cdot z^n| = |a_n \cdot z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

& $\hat{c}$ $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée ie

$\exists M > 0, \forall n \geq n_0, |a_n z_0^n| \leq M$

$\Rightarrow \forall n \geq 0, |a_n z^n| \leq M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ or $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

Par TH de comparaison sr séries numériqs,

$\sum_n |a_n z^n|$ CV.

□

DM TH on note $I = \{x \in [0, \infty[\}$ tq $|a_n x^n|$ soit bornée. On a $0 \in I$, dc $I \neq \emptyset$

si I est majoré, on pose $R = \sup I$.

si I n'est pas majoré, on pose $R = +\infty$.

Mq R vérifie bien condiθs TH.

1/ si $|z| < R$, R fini ou non

$\Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0| < R$

& la suite $(|a_n z^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

4 $x = |z_0|$ (car R est borne sup de I).

D'après Lemme, $\sum_n |a_n z^n|$ CV.

2/ si $|z| > R$, R est fini, suite $|a_n z^n|$ n'est pas bornée (sinon R ne serait pas borne sup de I),

dc $\sum a_n \cdot z^n$ ne CV pas.

($\lim_{n \to \infty} a_n \cdot z^n \neq 0$)

Rq 1. Sur les $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R$,
on pt avoir CV ou DV.

2. si $\sum a_n \cdot z^n$ CV pr $z = z_0$
$\Rightarrow R \geq |z_0|$.

Ainsi si $\sum a_n z^n$ & $\sum b_n z^n$
tq $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|$ alors
$R_a \geq R_b$.

@$_1$ $\sum z^n$ (où $a_n = 1$) $R = 1$.
Pour $|z| < 1 = R$
$|z| \Rightarrow \sum z^n$ abs CV $\Rightarrow$ CV
Pour $|z| = R = 1$, série $\sum z^n$ DV
car $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$

@$_2$ $\sum \frac{z^n}{n!}$ $\left(a_n = \frac{1}{n!}\right)$ & $R = \infty$.

En eft $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right|$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$ dc d'après d'Alembert
$\sum \frac{z^n}{n!}$ CV abs $\forall z \in \mathbb{C}$, dc $R = \infty$.

@$_3$ La série $\sum n!\, z^n$, $(a_n = n!)$, $R = 0$
En effet $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = +\infty$$

dc série CV absolt pr $z = 0$ & dc $R = 0$
(le disq de CV est vide).

@$_4$ $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$, $\left(a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $R = 1$.

on voit q $z = 1$, série CV mais pr $z = -1$,
la série DV.

"Barba non facit philosophum"
"La barbe ne fait pas le ϕ", Platon.
" L'habit ne fait pas le moine."

"Inter canem et lupum".

"Sur les chapeaux de roues"
$\updownarrow$
enjoliveurs.

1

Déterminat° de R.

→ svt : Crit de Cauchy ou d'Alembert.

Prop soit $\sum_n a_n z^n \Rightarrow$

1. si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$.

2. si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$.

Par convent° $\left(\frac{1}{0} = \infty \;\&\; \frac{1}{\infty} = 0\right)$.

DM étude $u_n(z) = a_n z^n$.

1. $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$ dc si

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow \lim \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \ell|z|$

Par conséqt,

si $\ell|z| < 1$ $\left(|z| < \frac{1}{\ell}\right)$ la série CV abs.

si $\ell|z| > 1$ $\left(|z| > \frac{1}{\ell}\right)$ la série DV (4)

• ed $R = \frac{1}{\ell}$.

2/ si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \ell|z|$

& on conclut ĉ 1/.

Rq Le rayon de convergence $\exists$ tjrs alors q limites de Prop ne pvt pas $\exists$.

ⓐ 1/ $\sum n^2 z^n$; $R = 1$ (d'Alembert).

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right|$

$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1 = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$.

2/ $\sum \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} z^n$; $R = e^2$ (par Cauchy)

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n$

$= e^{n\ln(1 - 2/n+2)}$ d'où $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1 - 2/n+2)} = e^{-2}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{e^{-2}} = e^2$.

⚠ Conseil si $\sum \underbrace{a_n z^{2n}}_{u_n(z)}$

D d'alembert $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n}\right|$ plutôt que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

NB : R cas réel : $\forall x \in]-R,R[$, $\sum a_n . x^n$ CV abs.

P soit $\sum a_n . z^n$ SE de R_a ; $\sum b_n . z^n$ de R_b

$\Rightarrow$ (i) $\forall n \geq 0$, $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

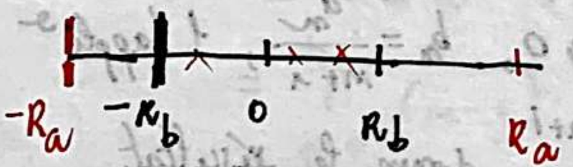
(ii) $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$

(iii) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

DM (i) $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow \forall z ; |a_n||z|^n \leq |b_n|.|z|^n$

$\Rightarrow \forall |z| < R_b \Rightarrow \sum a_n . z^n$ CV ab.

Th comparaison $\Rightarrow R_b \leq R_a$



Rq : $|a_n| = O(|b_n|) \overset{def}{\iff} \exists M > 0$ tq $|a_n| \leq M . |b_n|$

$\iff \dfrac{|a_n|}{|b_n|}$ borné

DM (ii) on appliq (i)

(iii) $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow |a_n| = O(|b_n|)$, $|b_n| = O(|a_n|)$

$\Rightarrow R_a \geq R_b$ & $R_b \geq R_a \Rightarrow R_b = R_a$.

ou $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow$ séries st de m̂ nature

$\Longrightarrow$ dc séries ont m̂ rayon de CVce.

@ $f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{\cos(n)} . x^n$

$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\cos(n)} \leq e^1$

$\Rightarrow e^{-1}|x|^n \leq e^{\cos(n)} . |x|^n \leq e^1 . |x|^n$

d'Alembert $R = 1$

$\Rightarrow$ rayon de CVce de $\sum e^{\cos(n)} . x^n$ est $R = 1$.

$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$

$R = 1$, $|x| < 1$.

P (Somme & Produit)

soit $\sum_n a_n \cdot z^n$; $\sum_n b_n z^n$ SE, R_1, R_2.

$\Rightarrow c_n \cdot z^n = (a_n + b_n) z^n$ &

$d_n \cdot z^n = (a_0 b_n + \dots + a_n \cdot b_0) z^n$ ont ces séries RdCV $\geq \min(R_1, R_2)$.

D+, si $|z| < \min(R_1, R_2)$:

$\sum c_n \cdot z^n = \sum a_n \cdot z^n + \sum b_n \cdot z^n$

$\sum d_n \cdot z^n = \left(\sum a_n \cdot z^n\right)\left(\sum b_n \cdot z^n\right)$

Rq : si $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min(R_1, R_2)$

si $R_1 = R_1 \Rightarrow R > \min(R_1, R_2)$

@ $\sum 2^n \cdot z^n$ & $\sum (1-2^n) z^n$

$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2}$; $R_2 = \frac{1}{2}$ or $R = 1$.

(d'Alembert). $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$.

Nop (Dériva° & Int° SE).

soit $\sum a_n \cdot z^n$ SE, R.

$\Rightarrow \sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ & $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont m̂ R.

(dérive terme à terme) (intègre terme à terme)

DM : $|z| < R$, $x \in \mathbb{R}$; $|z| < x < R$.

pr n assez gd, $n \leq \left(\frac{x}{|z|}\right)^n$ car $\frac{x}{|z|} > 1$

$n \leq \left(\frac{x}{|z|}\right)^n \Rightarrow n|z|^n < x^n \Rightarrow n|a_n||z^n| \leq |a_n| x^n$

ĉ $x < R$, $\sum |a_n| x^n$ CV $\xRightarrow{\text{Th Comp}}$ CV de $\sum n a_n z^n$.

Ainsi $\sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ CV. Dc si on note R' le RDC de $\sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$, on a $R' \geq R$.

Puis $n \geq 1$, $|a_n z^n| \leq n|a_n||z|^n = |z|(n|a_n||z|^{n-1})$

d'où $R \geq R'$ & ainsi $R = R'$.

Pr primitive, on pose pr $n \geq 0$, $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, + l'appli° de ce q précède à $\sum b_n \cdot z^{n+1}$, donne le résultat.

Propriétés somme SE de var. Réelle

TH soit $\sum a_n . x^n$ SE, $a_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $x \in \mathbb{R}$, RDV R. soit $f(x)$ sa somme, def pr $x \in]-R, R[$.

$\Rightarrow f$ de classe C^∞ sr $]-R, R[$ & ses dérivées s'obtienn^t en dérivant terme à terme SE successives.

D+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, on a :

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n \geqslant 0} a_n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Adit $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n . x^n \Rightarrow f \in C^\infty(]-R, R[)$

& $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \, (x^n)^{(k)}$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)\, x^{n-k}$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)\, x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geqslant 0} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)\, a_n \, x^{n-k}$$

Propriétés somme SE de var. Réelle

TH soit $\sum a_n . x^n$ SE, $a_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $x \in \mathbb{R}$, RDV R. soit $f(x)$ sa somme, def pr $x \in]-R, R[$.

$\Rightarrow f$ de classe C^∞ sur $]-R, R[$ & ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme SE successives.

D+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Adit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n \Rightarrow f \in C^\infty(]-R, R[)$

& $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x^n)^{(k)}$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)\, x^{n-k}$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)\, x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)\, a_n\, x^{n-k}$$

IV / Dev en SE

soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $\exists$?

$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ CV si $\mathcal{V}_{x_0}$ & tq sum $f(x)$.

$I =]-R, R[$.

D $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en SE au $\mathcal{V}_{x_0} \in I$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ & une $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ | $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\sum a_n (x - x_0)^n$ CV & a pr somme $f(x)$.

Prop (condi nécess^a)

Pr que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dév. en SE au $\mathcal{V}_{x_0}$, il faut que :

1. $f \in C^\infty(\mathcal{V}_{x_0})$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

RY si $f(x) = \sum a_n x^n$, $\forall x \in]-R, R[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{0 \leq j \leq k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{1 \leq j \leq k} (n+j) \right) a_{n+k} x^n .$$

---

ep pr $x = x_0 \Rightarrow \forall k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x_0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (j) a_k = k! \, a_k$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$$

⚠ condiЭs nécessaires, ce ne st pas condiЭs suffisantes.

- DL, qd $\exists$ est uniq ($a_n = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$)
- ⚠ DSE ? :

soit $f \in C^\infty(V_{x_0})$,

$\rightarrow \sum \frac{f^{(k)}x_0}{n!}(x - x_0)^n$ CV ?

$\rightarrow$ CV - t - il vers $f(x)$?

↳ qθ pas tjrs ⊕

@ Cauchy (1822)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

PR $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

$\deg\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3n \Rightarrow$ série Taylor nulle car

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ dc $\sum_{n \geq 0} a_n (x)^n = 0$ or $f \neq 0$

(D) Une f d^e en (SE) au V_{x_0} : analytiq en x_0.

(P) Une condi° suffis p^r $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty(I)$ soit analytiq V_{x_0} est $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{|x-x_0|^n}{n!} M_n \right) = 0 \quad \text{où}$$

$$M_n = \sup_{x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Pratiq du D^e en (SE) :

1. La ff de Taylor peut :
   - → avoir terme général de la série $\xrightarrow{} 0$
   - → mq reste de Lagrange $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
2. P dev connus, opéra°s connus. $+ \times \div \int, (\ )'$, CDV

(a) 1 : P FF Taylor :

$$\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$$

$$\sin(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n, \quad R = 1$$

2. Par intégra° de $\frac{1}{1+x}$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad R = 1$$

3. P CDV $x \to x^2$ ds 1.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad R = 1.$$

4. $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1$$ P intégr° 3.

5. $$e^x = 1 + x + x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!}, \dots, \quad R = \infty$$ P FF Taylor

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$$

6. $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty.$$

7. $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n = \sum (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum (-1)^n x^{2n} \quad R = 1 \ ; \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum x^{2n}, \quad R = 1$$

(9)

8. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1[$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

si $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

 $\longleftrightarrow \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 2:2 ☺

@ $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n)} x^n$$

$R = 1$

5. Applicat° des SE

5.1 Exponentielle complexe

① Exponent. compl. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Sur $\mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $R = \infty$

$\longrightarrow f(x) = a^x$, $a > 0$ fixé

$$= e^{x \ln(a)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(x . \ln(a))^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{\ln(a)^n}{n!} x^n$$

$$\boxed{e^{z+z'} = e^z . e^{z'}} \quad \forall z \, \forall z' \in \mathbb{C}.$$

DM $e^{z+z'} = e^{z} \cdot e^{z'}$.

$e^{z} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n$; $e^{z'} = \sum_{n\geq 0} \frac{z'^n}{n!} = \sum b_n$.

→ ces séries CV abs, on pt dc faire le produit de e^{z} par $e^{z'}$; la série produit aura pr terme général $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

$$= \sum_{\substack{p+q=n \\ 0\leq p,q\leq n}} a_p b_q = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{z'^q}{q!}$$

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{z^p \cdot z'^q}{p!\, q!}$$

Puis d'ap Binôme Newton : on a :

$$e^{z+z'} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{z^p (z')^{n-p}}{n!}$$

on pose $q = n-p$,

$$e^{z+z'} = \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!\,q!} z^p \cdot z'^q = \sum_{n\geq 0} c_n = e^{z} \cdot e^{z'}$$

DL avt SE.

NB. SE $\boxed{}$; Séries puissces $\boxed{}$.

Prémice expo complexe.

Th Abel :

soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $R > 0$,

supposons $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ CV Alors

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n$$

Rq si $x = -R$, $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (-R^n) =$

$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n R^n$ CV $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -R^+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n.$$

Applicat°s : $x \in]-1,1[$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$x = -1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CV p séries alternées

Th Abel

$$\Rightarrow -\ln(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

(!!) $x \to R^-$

$x \to R$ & $x < R$.

(ii) $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x = 1$

$x = 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\xRightarrow{Abel}$

$\arctan(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$\frac{\pi}{4}$

Rq : La récipro du Th d'Abel est fausse en Général.

Ex $f(x) = \sum (-1)^n x^n$ $\forall x \in]-1, 1[$

$= \frac{1}{1+x}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

Mais $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ DV

R

DM $e^{z+z'} = e^{z}.e^{z'}$

$e^{z} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n$; $e^{z'} = \sum_{n\geq 0} \frac{z'^n}{n!} = \sum b_n$.

→ ces séries CV abs, on pt de faire le produit de e^{z} par $e^{z'}$; la série produit aura pr terme général $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

$$= \sum_{\substack{p+q=n \\ 0\leq p,q\leq n}} a_p b_q = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{z^q}{q!}$$

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{z^p . z^q}{p! \; q!}$$

Puis ff Binôme Newton : on a :

$$e^{z+z'} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{z^p (z')^{n-p}}{n!}$$

on pose $q = n-p$,

$$e^{z+z'} = \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!\,q!} z^p . z'^q = \sum_{n\geq 0} c_n = e^{z}.e^{z'}$$

DL avt SE.

NB SE ; Séries puissles.

Prémice expo complexe.

Th Abel :

soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $R > 0$,

supposons $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ CV Alors

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n$$

Rq si $x = -R$, $\sum_{n\geq 0} a_n.(-R^n) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n R^n$ CV ⇒

$$\lim_{x\to -R^+} f(x) = \sum (-1)^n a_n R^n.$$

Applicat°s : $x \in]-1,1[$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$x = -1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CV p séries alternées

Th Abel

$$\Rightarrow -\ln(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$x \to R^-$

11 $x \to R$ & $x < R$.

(ii) $\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$

$x=1$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV $\xRightarrow{\text{Abel}}$

$\underset{\frac{\pi}{4}}{\overset{\shortparallel}{\arctan(1)}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

<u>Rq</u> : La récipoq du TH d'Abel est fausse en Général.

ⓔ $f(x) = \sum (-1)^n x^n$ $\forall x \in]-1,1[$

$= \frac{1}{1+x}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

Mais $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ DV

DM on a $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$

puisq $|x| < R \iff \left|\frac{x}{R}\right| < 1$, dc on pt supposer $R=1$.

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; par convenð $s_{-1} = 0$.

<u>Alors</u> $\sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{a_n} x^n$

$= (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m$.

Pour $|x| < 1$, qd $m \to \infty$, $s_m x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Dc $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$

Posons $s = \sum_{n\geq 0} a_n$ & $\varepsilon > 0 \implies \exists N \in \mathbb{N}$,

$\forall n \geq N$, $\underbrace{|s - s_n|}_{\text{reste d'une série CV dc} \to 0} < \frac{\varepsilon}{2}$

Ⓡ

D'autre part, $1 = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$\Rightarrow s = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s\, x^n$

$\Rightarrow |f(x)-s| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (s_n-s)x^n\right|$

$\leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s_n-s|\,|x|^n$

$+ (1-x)\sum_{n\geq NM} |s_n-s|\,|x|^n$

D'où $|f(x)-s| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s_n-s|\,|x|^n + \frac{\varepsilon}{2}$

Finalem^t qd $x \to 1$.

$(1-x)\sum_{n=0}^{N} |s_n-s|\,|x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc $|f(x)-s| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} |f(x)-s| = 0$ ie $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Applicat°s

pour $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ $\quad |x|<1$, $R=1$

cette série CV pr $x=-1=-R$.

TH d'Abel $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} -\ln(1-x) = -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

dc $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

@ $\arctan(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad |x|<1$, $R=1$

pr $x=1$, $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ CV dc

TH d'Abel

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

R1 : $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\quad |x|<1$, $R=1$.

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-x)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$

CV SA $\Rightarrow$ TH Abel

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$; $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

B

⚠ Récipq Th d'Abel est fausse !

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n .$$

$$\sum a_n R^n \text{ CV} \Rightarrow \lim_{x \to R^-} f(x) = \sum a_n R^n .$$

$$\rightarrow \lim_{x \to R} f(x) = \ell \quad \exists \quad \cancel{\overset{?}{\Rightarrow}} \sum a_n R^n \text{ CV}$$

$|x|<1$ Ca $f(x) = \sum (-x)^n = \frac{1}{1+x}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{e} \ \exists \text{ mais } \sum (-1)^n \text{ DV}$$

si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors Récipoq Vraie.
$n \to \infty$

$\Rightarrow a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Th si $a_n \geq 0$ alors Récipoq d'Abel est vraie.

$a_n = O(b_n) \Leftrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M \quad \forall n.$

$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \frac{a_n}{1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$n a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$a_n = o(b_n) \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Exponentielle Complexe

D $\forall z \in \mathbb{C}, \ e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $R = \infty$.

P $\forall z, \forall z' \in \mathbb{C}, \ e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$ voir DM.

NB : $c_n = \underbrace{a_0 b_n}_{n} + \underbrace{a_1 b_{n-1}}_{n} + \dots + \underbrace{a_n b_0}_{n}$ produit polynômes indices tjrs égx n.

$$\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum \frac{z^p}{p!} \frac{z'^q}{q!}$$

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{z^p z'^q}{p! \cdot q!}$$

P si $z = iy, \ y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ |e^{iy}| = 1 . \end{cases}$

DM $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!}$$
$$+ iy - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots + (-1)^p i \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

14 $e^{iy} = \cos y + i \sin y .$

Ainsi $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$.

aussi $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cosh(iy)$

$\sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \dfrac{1}{i} \sinh(iy)$

- $e^z = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

- $\begin{cases} |e^z| = e^x \\ y = \operatorname{Arg}(e^z) \end{cases}$

$e^z = e^{z'} \iff z' = z + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$

-

(SE) $u_n(x) = a_n x^n$

(SF) $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Th de Liouville (applicat° Th Cauchy)

Autre applicat°:

Th soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $R = +\infty$.

Supposons que $\exists\ P \in \mathbb{C}[X]$ un polyn $\deg P < d$ tq $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|f(z)| \leq |P(z)|$$

$\Rightarrow f$ est un polynôme de m deg P.

DM Supposons $P(z) = \sum_{j=0}^{d} b_j z^n$ et $\deg P = d$.

alors $\exists A > 0$, $|z| \geq A$, $|P(z)| \leq 2|b_d|\,|z|^d$

En effet, $P(z) = b_d z^d \left[1 + \sum_{j=0}^{d-1} \frac{b_j}{b_d \cdot z^{d-j}}\right.$

d'où $|P(z)| \leq |b_d| . |z|^d \left[1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{d-1} \frac{|b_j|}{|b_d|\,|z|^{d-j}}}_{}\right.$

$0 \longleftarrow$ qd $|z| \to \infty$

$(d = \deg(P))$.

dc $\exists A > 0$, $\forall |z| \geq A$,

$$\sum_{j=0}^{d-1} \frac{|b_j|}{|b_d|\,|z|^{d-j}} \leq 1$$

dc $\exists A > 0$, $\forall z \geq A$,

$$|P(z)| \leq 2\,|b_d| . |z|^d$$

mtm p la ff de Cauchy + hypothèse.

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} 2|b_d|\, r^d \, d\theta = \frac{2|b_d|}{r^{n-d}}$$

d'où $\forall n > d$, $\frac{1}{r^{n-d}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

dc $a_n = 0 \quad \forall n > d$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ de un polynôme.

Th (Identité de Parseval)

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$, SE, $R>0$ & soit $0<r<R$ alors

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

DM Par If Cauchy, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} \, d\theta \quad \forall n\geq 0 \ \& \ r\in]0,R[.$$

D'autre part,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) . \overline{f(re^{i\theta})} \, d\theta$$

mais $\overline{f(re^{i\theta})} = \sum \overline{a_n} r^n e^{-in\theta} d\theta$

Donc $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \left(\sum \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right) d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum \overline{a_n} r^n f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\right) d\theta$$

ĉ la cvce de la série est normale / à θ. On a :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum \overline{a_n} r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta}_{2\pi r^n a_n}$$

$$= 2\pi \sum \overline{a_n} a_n r^{2n}$$

$$= 2\pi \sum |a_n|^2 r^{n}$$

dc $\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta.$

ⓐ $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, $R = 1$

$a_n = 1$

$0 < r < 1$

Id de Parseval :

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

$$\sum r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta}) \cdot \overline{f(re^{i\theta})}$$

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} \cdot \frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum r^{2n} = \frac{1}{1-r^2}$$

$\hat{\imath}$ $a_n \in \mathbb{Z}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $a_n = 0$

dc f est un polynôme.

2V

Applicaᵒ de l'idd té de Parseval.

Th soit $f(z) = \sum a_n z^n$ & $R \geq 1$.

Supposons μ $a_n \in \mathbb{Z}$ & f bornée par le disq unité (ie $\exists M > 0$ tq $\forall z$, $|z| \leq 1$, $|f(z)| \leq M$)

alors f est un polynôme

DM f bornée sr $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in]0,1[$, par Parseval

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 d\theta = M^2$$ où $M = \sup |f(z)|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$ d'où qd $r \to 1^-$

on a $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leq M^2 \Rightarrow \sum |a_n|^2 \leq M^2$

$\Rightarrow \sum |a_n|^2$ CV dc $|a_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{}$

HS **Th** (Principe du zéro isolé)

soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une SE de $R > 0$, supposons $\exists\, z_n \in \mathbb{D}(0, R)$ tq $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ & $f(z_n) = 0 \quad \forall n \geq 0$

$\Longrightarrow f = 0 \quad$ (ie $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$)

HS **Th** (Principe du maximum)

soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une SE de $R > 0$. Notons $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

Supposons f est cont sur $\overline{\mathbb{D}_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$

Alors : si $\exists\, z_0 \in \mathbb{D}_R$ (ie $|z_0| < R$) tq

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}_R}} |f(z)|$$

Alors f est cte.

Cor $f(z) = \sum a_n z^n$ de $R > 0$, cont sur $\overline{\mathbb{D}_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$

$\Longrightarrow$ si f n'est pas cte alors $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$ tq

$$\max_{z \in \overline{\mathbb{D}_R}} |f(z)| = |f(z_0)|$$

DS-1 - M41

a) $\forall u \geq 0, \ \ln(1+u) \leq u$.

$\boxed{M1}$ $f(u) = \ln(1+u) - u$.

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{-u}{1+u} \leq 0$$

- $\Rightarrow f \searrow$. dc $\forall u \geq 0$,

$f(u) \leq f(0) = 0$

$\Rightarrow \ln(1+u) - u \leq 0$

$\Rightarrow \ln(1+u) \leq u$. $\forall u \geq 0$.

(b) mq $\forall t \geq 0, \ t e^{-t} \leq e^{-1}$.

soit $g(t) = t e^{-t} - e^{-1}$.

- $g'(t) = e^{-t}(1-t)$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

t	0		1		∞
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$

$\forall t \geq 0, \ g(t) \leq g(1) = 0$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, \ t e^{-t} - e^{-1} \leq 0$

$\Rightarrow t e^{-t} \leq e^{-1} \ \forall t \geq 0$.

2) soit $f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}^+ = A$.

→ si $x = 0$, $f_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

→ si $x > 0$, $\frac{x}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

La continuité de $t \mapsto \ln(t)$ sur $t > 0$.

$$\Rightarrow \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln(e^x) = x$$

dc $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) = x$, $\forall x \in A$.

Dc cv simple de f_n vers $f(x) = x$ sur A.

$\Leftarrow$ $f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}^+ = A$

$f(x) = x$, $x \in A$.

C-1

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) - x\right|$$

$$= \left|\ln\left(e^x\left(1 + \frac{xe^{-x}}{n}\right)\right) - x\right|$$

$$= \left|\underbrace{\cancel{\ln(e^x)}}_{=x} + \ln\left(1 + \frac{xe^{-x}}{n}\right) - \cancel{x}\right|$$

$$= \left|\ln\left(1 + \frac{xe^{-x}}{n}\right)\right| \underset{a)}{\leq} \frac{xe^{-x}}{n} \underset{b)}{\leq} \frac{e^{-1}}{n}$$

(ii) $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dc $f_n \longrightarrow f$ <u>UN.</u> sur A.

4) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

<u>Ex2.</u> $u_n(x) = \dfrac{n^\alpha x e^{-nx}}{1+n^2}$, $n \geq 1$.

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$$

(i) $x = 0$, $u_n(0) = 0$, $f(0) = 0$

si $x > 0$, $n^2 u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, n^2 |u_n(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \forall n \geq N, |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$

Th de comparaison $\Rightarrow \sum u_n(x)$ CV

$0 < a < b$, $x \in [a,b]$, <u>$x \leq b$</u>

$$|u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b\, e^{-nx}}{1+n^2}$$

$x \geq a \Rightarrow nx \geq na \Rightarrow -nx \leq -na$

$\Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-na}$

$\Rightarrow |u_n(x)| \leq \dfrac{n^\alpha b e^{-na}}{1+n^2}$ $\forall x \in [a,b]$.

b) f est cont $\forall x>0$, car $\forall x>0$, $\exists a,b>0$ tq $x\in[a,b]$ or la CV de la série sur $[a,b]$ est normale dc U.N & $U_n(x)$ st cont, f est cont. sur $]0,\infty[$.

$3°$ → on a $u_n(x) = \dfrac{n^\alpha x\, e^{-nx}}{1+n^2}$

$$u_n'(x) = \frac{n^\alpha}{1+n^2}(x e^{-nx})' = \frac{n^\alpha}{1+n^2}\left(e^{-nx} - nx e^{-nx}\right)$$

$$= \frac{n^\alpha e^{-nx}}{1+n^2}(1-nx)$$

$$u_n'(x) = 0 \iff 1-nx=0 \iff x=\frac{1}{n}.$$

	0	$1/n$	∞
$u_n'(x)$	+	0	−
$u_n(x)$	0 ↗	$u_n(\frac{1}{n})$	↘ 0

$$\sup_{x\geq 0}|U_n(x)| = u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}e^{-1}}{n^2+1}$$

$$\frac{n^{\alpha-1}e^{-1}}{n^2+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}e^{-1}}{n^2} = \frac{e^{-1}}{n^{3-\alpha}}$$

$\sum \sup_{x\geq 0}|U_n(x)|$ CV $\iff \sum \dfrac{e^{-1}}{n^{3-\alpha}}$ CV

$\iff 3-\alpha > 1 \iff \alpha<2.$

3) b) Puisq $\alpha<2$, la CV est normale sur $\mathbb{R}^+$ & $U_n(x)$ cont sr $\mathbb{R}^+$.
f est cont sr $\mathbb{R}^+$.

4) $\alpha \geq 2$, f n'est pas cont en 0.

$f(0)=0$

4) $\alpha \geq 2$, f n'est past cont en 0.

$f(0) = 0$. Ⓓ sdnf

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(x)$$

$$\frac{1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$ si il y a cont de f en 0.

$$f_N\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha} \frac{1}{N} e^{-\frac{n}{N}}}{n^2+1} \geq ?$$

$$\alpha \geq 2 \Rightarrow n^{\alpha} \geq n^2 \Rightarrow \frac{n^{\alpha}}{n^2+1} \geq \frac{n^2}{n^2+1} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2+1$$

$$n \leq N \Rightarrow \frac{n}{N} \leq 1 \Rightarrow \frac{-n}{N} \geq -1$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n}{N}} \geq e^{-1}$$

$$f_N\left(\frac{1}{N}\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} e^{-1} \frac{1}{N} = \frac{e^{-1}}{2N} \sum_{n=1}^{N} 1 = \frac{e^{-1}}{2\cancel{N}} \cancel{N} \to \frac{e^{-1}}{2} \not\to 0$$

C4