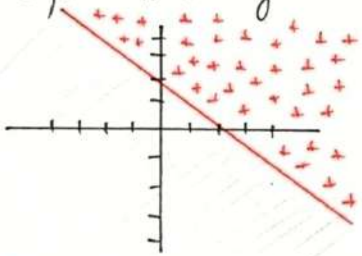
M-32
TD

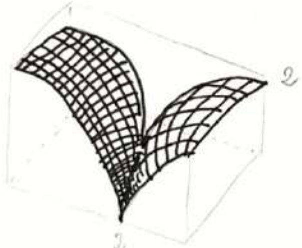
M32 - TD - Fonctions plusieurs variables.

I.19 : - Représenter graphiq^t $\mathcal{D}f$ (hachurer points)
- Barrer parties q ne st pas $\mathcal{D}f$.

$f_1(x,y)=\ln(2x+y-2)$

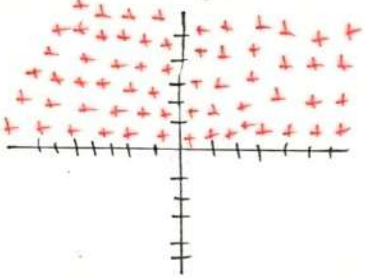
Le logarithme est défini si $2x+y-2>0$.
On a le $\frac{1}{2}$ plan supérieur délimité par la droite d'équation : $y=2-2x$.

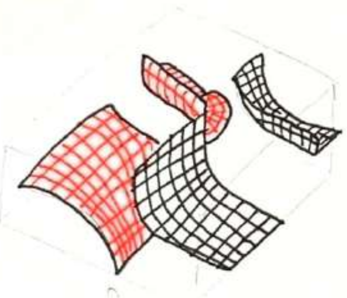




$f_2(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln y}$

$x\neq 0$ et $y>0$

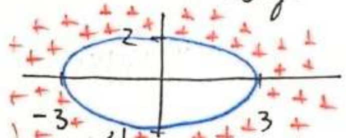


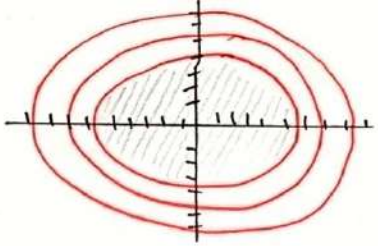


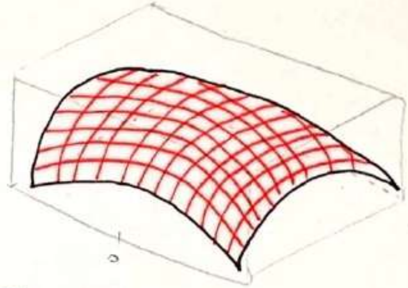
$f_9(x,y)=\ln(36-4x^2-9y^2)$

f_9 est défini quand $36-4x^2-9y^2>0$

$(2x)^2+(3y)^2>6^2 \iff 2x+3y>6$.







$f_{10}(x,y)=\frac{\ln(y-2x+3)}{\sqrt{x-y^2}}$

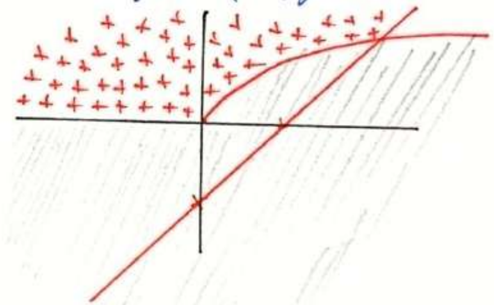
D'une part, $y-2x+3>0 \iff y>2x-3$.

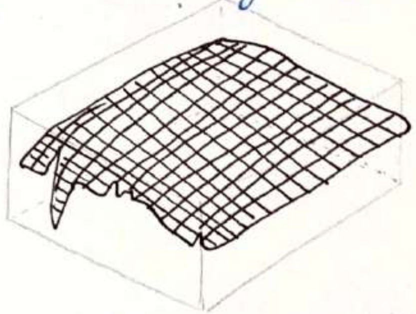
D'autre part, $\sqrt{x-y^2}>0 \iff x-y^2\geq 0$ aussi $x>0$.

$\iff x>y^2$

$\iff y>\sqrt{x}$

$\mathcal{D}f_{10}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \text{ et } 2x<y+3 \text{ et } x>y^2\}$.





$f_9(x,y)=\ln(36-4x^2-9y^2)$

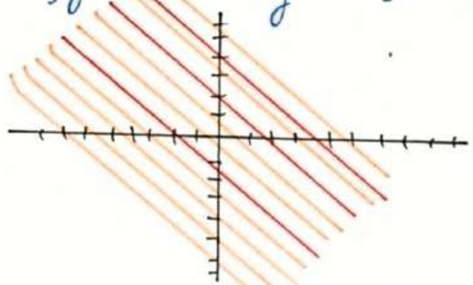
$\mathcal{D}f \iff 6-2x-3y>0$

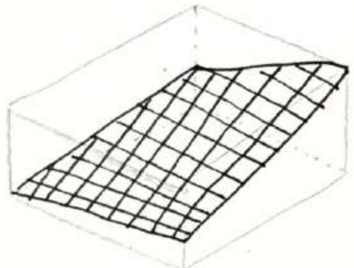
Puis $4x^2+9y^2=36 \iff \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \iff X^2+Y^2=1$

① NB : voir ci-avant $f_6(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$.

I.20. Représenter lignes de niveau k, tq $f(x,y) = k$.

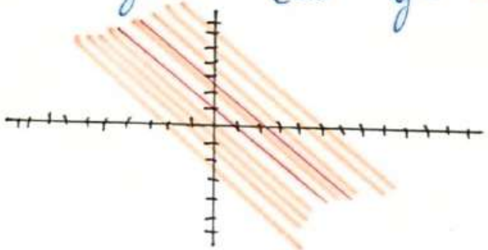
$f_1(x,y) = 2x + y$, $k = -1, 1, 2$.



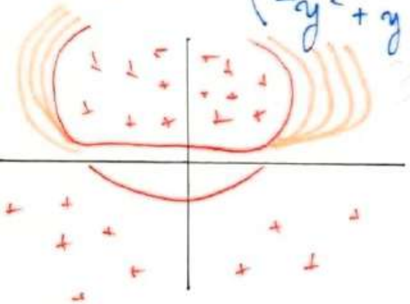


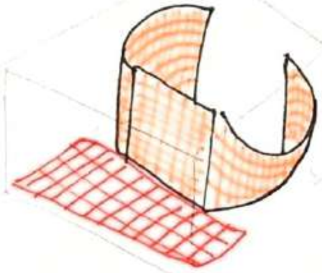
$f_3(x,y) = \ln(x+y)$, $k = 0, 1$

- $\ln(x+y) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x+y)} = e^0 \Leftrightarrow y = 1 - x$.
- $\ln(x+y) = 1 \Leftrightarrow y = -x + e$.



$f_4(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^2 - x}{-y^2 + y}\right)$, $k = e$.





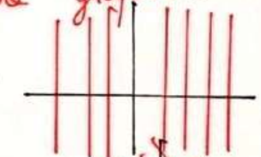
(*)(4)

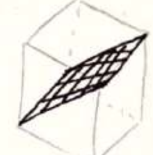
$D_{f_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0 \wedge y \neq 1 \wedge y^2 - y \neq 0$.

I.21 : Déterminer f partielles $f(x_0, y)$ et $f(x, y_0)$ pour des points (x_0,y_0) choisis ds D_f.

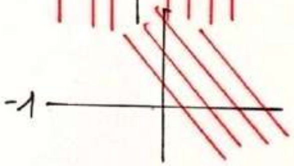
- Domaine D_f.
- Lignes de niveau $f(x,y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ choisis
- Représenter graphiqt allure graphe.

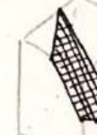
$f_1(x,y) = x$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0$



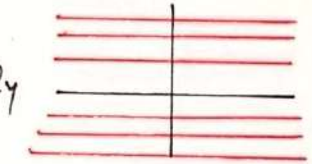


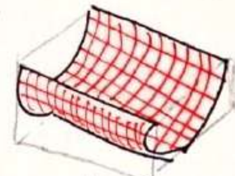
$f_2(x,y) = 1 - x - y$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = -1$



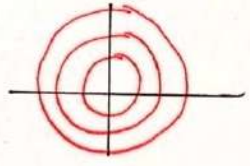


$f_3(x,y) = y^2$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} = 2y$

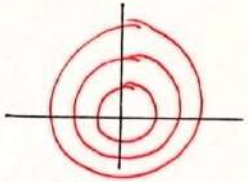




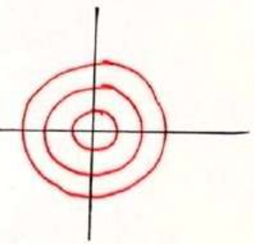
$f_4(x,y) = x^2 + y^2$, $\dfrac{\partial f_4}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f_4}{\partial y} = 2y$

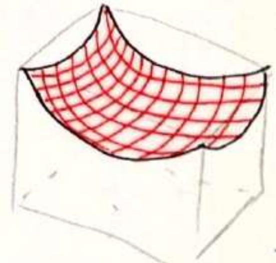


$f_5(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $\dfrac{\partial f_5}{\partial x} = -2x$, $\dfrac{\partial f_5}{\partial y} = -2y$



$f_6(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial f_6}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f_6}{\partial y} = 1$





I.25. Pr applicaΘs $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, décider si oui ou non norme.

R ⓓ (Norme)

soit E : ev, une applicaΘ N est une norme ssi : $\forall x \in E$

- $N(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

$N_1(x,y) = |4x + 3y|$

- $|4x + 3y| \geq 0, \ \forall x,y \in E.$
- $N_1(x,y) = 0 \iff |4x+3y| = 0 \iff x = y = 0.$ oui norme
- $N_1(\lambda x, \lambda y) = |4.\lambda x + 3\lambda y| = |\lambda \times (4x+3y)| = |\lambda|.|4x+3y| = |\lambda|.\ N(x,y).$
- $N_1(x+y) = |4x+3y| \leq |4x| + |3y|$
  $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$N_2(x,y) = |x+y| + |2x-y|.$ oui norme

⚠ $N_2(x,y) = 0$? $\iff \begin{cases} |x+y| = 0 \\ |2x-y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

NB : $|a+b| = 0 \iff \begin{cases} a+b = 0 \\ -a-b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ a = -b \end{cases} \iff \{ a = -b.$

puis cheminement

$N_a(x,y) = \sqrt{|x^2 + 2axy + y^2|}$

$x^2 + 2axy + y^2 = (x+ay)^2 - (ay)^2 + y^2$ carré parfait avec x.

$= y^2 [1-a^2] + (x+ay)^2.$

- si $1-a^2 \leq 0$ alors $= \left[(x+ay) + y.\sqrt{a^2-1}\right]\left[(x+ay + y\sqrt{a^2-1}\right]$

Donc pour $1-a^2 \leq 0$, la deuxième conditΘ d'une norme n'est pas vérifiée.

NB $|x_1| \leq \max(|x_1|)$ et $|x_1| \leq \sup(|x_1|)$.

I.26. ApplicaΘs $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s't-elles des normes ?

$N_3(x) = |x_1|, \ n > 1.$

Pour $n = 2$, $N(x) = |x_1|$, si on prend le vecteur $v = (|x_1|, 0)$, il ne vérifie pas la deuxième condition. car $N(x) = 0 \not\Rightarrow x = 0.$

Aparté : I. 20. f_4.

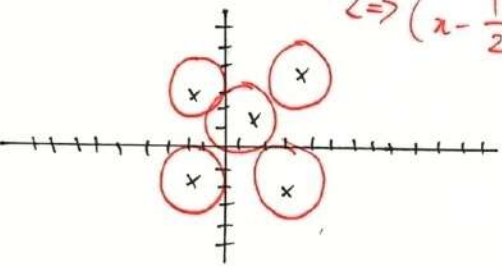
$$f_4(x,y) = \exp\left(\frac{x^2 - x}{-y^2 + y}\right), \quad k = e.$$

$$f_4(x,y) = e \iff \exp\left(\frac{x^2-x}{-y^2+y}\right) = e$$

$\ln(\cdot)$

$$\iff \frac{x^2-x}{-y^2+y} = 1 \iff x^2 - x = -y^2 + y.$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



FPV : Exercices : cpc.cx/sB1.

Ex 1° : Ensemble de défini°s

$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2)$

Le logarithme est défini si $2x+y-2>0$.
On trouve donc le $\frac{1}{2}$ plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x+y-2=0$.

$f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$

$1-xy \geqslant 0$ ssi $y \leqslant \frac{1}{x}$, si $x>0$ ds le cas où

- $x<0$, $y \leqslant \frac{1}{x}$

Df est la réunion de pie située ss hyperbole $y=\frac{1}{x}$ pour $x>0$, de pie située au-dessus de l'hyperbole pour $x<0$, de l'axe des ord.

$f_3(x,y) = \dfrac{\ln(y-x)}{x}$

Les conditions sont $x \neq 0$ et $y-x>0$. On trouve donc un $\frac{1}{2}$-plan, auquel on a retiré une por° de droite.

Ex 2° : Lignes de niveau (solu°s équa° $f(x,y)=k$)

(x,y)

$f_1(x,y) = y^2$, $k=-1$, $k=1$.

$y^2=-1$ n'a pas de solu° dc courbe de niveau vide.
$y^2=1$ admet μ solu° les droites $y=1$ et $y=-1$.

$f_2(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$, $k=2$.

$$f(x,y)=2 \iff \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} = 2 \iff \frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{8-x^2y^2} = 2$$

$$\iff (x^2+y^2)^2 - \cancel{2x^2y^2} = 2(8-\cancel{x^2y^2}) \iff (x^2+y^2)^2 = 16.$$

Compte tenu, $x^2+y^2 \geqslant 0$, donne le cercle $x^2+y^2=4$.
Centré à l'origine de rayon 2. ⚠ Il faut retirer les points à ce cercle μ les points $x^2y^2=8$ q ne sont pas définis.

Les points vérifiant $x^2y^2 = 8$, vérifient aussi

$x^2y^2 = 8 \iff x^2 = \frac{8}{y^2} \iff y^2 = \frac{8}{x^2}$.

$\Rightarrow x^2 + \frac{8}{x^2} = 4 \iff \frac{x^4+8x^2}{x^2} = 4x^2$

$\iff x^4 - 4x^2 + 8 = 0$. Equa° Bi carré.

$\Delta = 16 - 4\times 8 = -16 < 0$.

Ainsi l'équa° n'a pas de solu° dans $\mathbb{R}$.

La courbe de niveau recherché est bien le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

$A = \frac{1}{a^2}$, ($B=0$), $C = \frac{1}{b^2}$

$D = \frac{-2u}{a^2}$, $E = \frac{-2v}{b^2}$

$F = u^2/a^2 + v^2/b^2 - 1$

R : EC ellipse : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $a > b > 0$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

dist du centre ellipse à l'un des foyers.

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$f_B(x,y) = \cos(x,y)$, $k \in [-1,1]$, $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x,y) = k \iff \exists l \in \mathbb{Z}$,

$xy = a + 2l\pi$ ou $xy = -a + 2l\pi$

• $\mathcal{D}_{\tan x} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

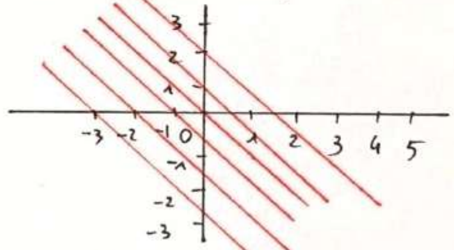
$f_C(x,y) = \tan(x,y)$ $\quad xy = a + l\pi$.

Ex 3 : Lignes de niveau.

$f_1(x,y) = x + y - 1$

soit $k \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = k \iff y = 1 - x + k$.

Les courbes de niveau sont donc les droites

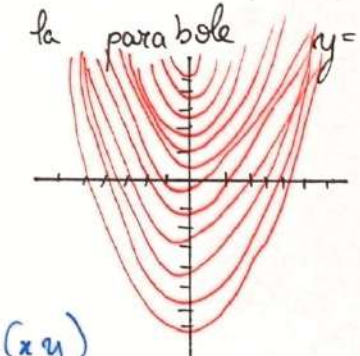


$f_2(x,y) = e^{y-x^2}$

soit $k > 0$ (f exponentielle : des valeurs $\mathcal{S}^t > 0$)

$f_2(x,y) = k \iff e^{y-x^2} = k \iff y = x^2 + \ln(k)$.

Les lignes de niveau sont donc des translatés verticales de la parabole $y = x^2$.

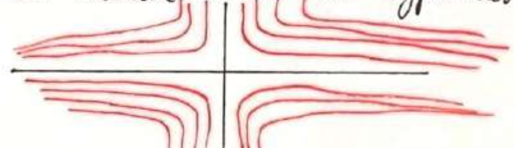


$f_3(x,y) = \sin(xy)$

soit $k \in [-1,1]$ (la f sinus est à valeurs dans $[-1,1]$, soit $a \in [0, \pi[$ tq $\sin(a) = k$; $f(x,y) = k$ ssi $\exists l \in \mathbb{Z}$

$xy = a + 2l\pi$ ou $xy = \pi - a + 2l\pi$

Les courbes de niveau st dc des hyperboles $y = \frac{\lambda}{x}$.



$\boxed{M}$ & Exercices

Montrer ens E est un espace Vectoriel

Vérifier 8 axiomes

1.∘ $f+(g+h)=(f+g)+h$

2.∘ vecteur nul 0

3.∘ opposé $(-f)(t) = -f(t)$

4.∘ $f+g = g+h$

$\Bigg\}$ $(E,+)$ est un groupe abélien.

5.∘ $1.f = f$

6.∘ $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

7.∘ $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$

8.∘ $(\lambda.\mu)f = \lambda(\mu f)$

@ $E_1 = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$

$f+g$

$\lambda \in \mathbb{R}, f \quad \lambda f.$

1. $f+(g+h) = (f+g)+h$

$f(t)+(g(t)+h(t)) = (f(t)+g(t))+h(t)$

2. vecteur nul 0

$(f+0)(t) = f(t) \qquad f+0 = f$

3. opposé $(-f)(t) = -f(t)$

$f+(-f) = 0$

4. $f+g = g+h$

5. $1.f = f$ à mq

6. $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ à mq

7. $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu g$ à mq

8. $(\lambda.\mu)f = \lambda(\mu f)$ à mq

① Méthodologie.

I.25. Pr applicaθs $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, décider si oui ou non norme.

Rq (D) (Norme) $\forall x \in E$

soit E : ev, une applicaθ N est une norme ssi :

- $N(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

$N_1(x,y) = |4x + 3y|$

- $|4x + 3y| \geq 0, \ \forall x, y \in E$.
- $N_1(x,y) = 0 \iff |4x+3y| = 0$
  $\iff x = y = 0$. oui norme
- $N_1(\lambda x, \lambda y) = |4.\lambda x + 3\lambda y| = |\lambda \times (4x+3y)|$
  $= |\lambda| . |4x + 3y| = |\lambda| . N(x,y)$.
- $N_1(x+y) = |4x+3y| \leq |4x| + |3y|$
  $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$N_2(x,y) = |x+y| + |2x - y|$. oui norme

⚠ $N_2(x,y) = 0$? $\iff \begin{cases} |x+y| = 0 \\ |2x-y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

NB : $|a+b| = 0 \iff \begin{cases} a+b=0 \\ -a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ a=-b \end{cases} \iff \{a=-b$.

puis cheminement

$N_a(x,y) = \sqrt{|x^2 + 2axy + y^2|}$

$x^2 + 2axy + y^2 = (x+ay)^2 - (ay)^2 + y^2$ carré parfait avec x.

$= y^2[1-a^2] + (x+ay)^2$.

- si $1-a^2 \leq 0$ alors $= \left[(x+ay) - y.\sqrt{a^2-1}\right]\left[(x+ay + y\sqrt{a^2-1}\right]$

Donc pour $1-a^2 \leq 0$, la deuxième condiθ d'une norme n'est pas vérifiée.

NB $|x_1| \leq \max(|x_1|)$ et $|x_1| \leq \sup(|x_1|)$.

I.26. Applicaθs $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ st-elles des normes ?

$N_3(x) = |x_1|, \ n > 1$.

Pour $n = 2$, $N(x) = |x_1|$, si on prend le vecteur $v = (|x_1|, 0)$, il ne vérifie pas la deuxième condition.

car $N(x) = 0 \not\Rightarrow x = 0$.

Dmq Lemme I.3 : soit $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une norme sur $\mathbb{R}$, alors $\exists\, r > 0, \forall x \in \mathbb{R} : N(x) = r.|x|$.

Dmq Lemme I.5 de $\|x_1, \dots, x_p\| = NE = NM = N_\infty$.

Aparté : I. 20. f_4.

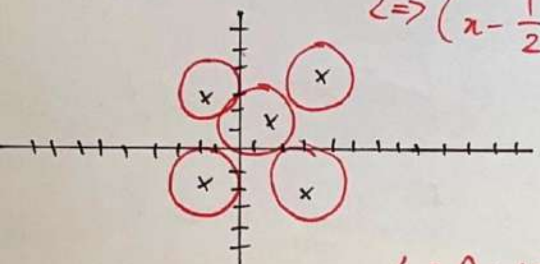
$$f_4(x,y) = \exp\left(\frac{x^2 - x}{-y^2 + y}\right), \quad k = e.$$

$$f_4(x,y) = e \iff \exp\left(\frac{x^2 - x}{-y^2 + y}\right) = e$$

$\ln(\cdot)$

$$\iff \frac{x^2 - x}{-y^2 + y} = 1 \iff x^2 - x = -y^2 + y.$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



NB : $\sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$ t, z, λ : variable muette. $+ \nexists$ $= \{x + 0y, x + 1y, x + \frac{1}{2}y, \cdots\}$

I. 23. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y^2}{4y^2 - x}}$

D_f ? Graphe ? $f(x,y) = k$ paraboles ?

$\to \sqrt{\alpha}$ déf pr $\alpha \geq 0 \iff \sqrt{\frac{y^2}{4y^2 - x}} \geq 0 \iff y \geq 0$

Puis $4y^2 - x = 0 \iff y^2 = \frac{1}{4}x$.

Ce n'est pas défini pour les paraboles des valeurs $\frac{1}{4}x$.

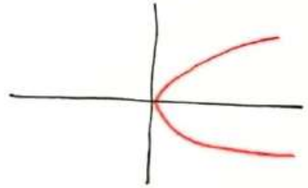
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ y^2 \neq \frac{1}{4}x$ et $xy^2 < 4y^4\}$.

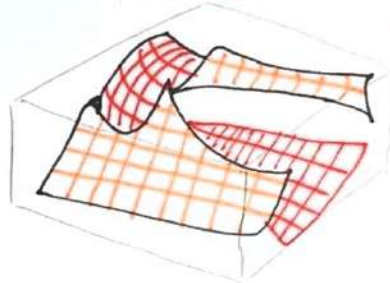
- $f(x,y) = k \iff \sqrt{\dfrac{y^2}{4y^2 - x}} = k \iff \dfrac{y^2}{4y^2 - x} = k^2$

$$\iff \frac{y^2 - k(4y^2 - x)}{4y^2 - x} = 0 \iff y^2(1 - 4k^2) + xk^2 = 0$$

$k = 0 \to y^2(1) = 0 \to y = 0$

$k \neq 0 \to x = \dfrac{4k^2 - 1}{k^2} y^2$.





Démonstrat°s M-32. - Normes

1.5. soit $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = N(x,y)$. Mq c'est une <u>norme</u>.

- x^2 et y^2 st ≥ 0, dc la racine carrée est défini et positive. On a dc bien $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, la condit° $N(x,y) \geq 0$.

- si on a $N(x,y) = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 0$, ce q équivaut à x^2+y^2. Mais x^2 et y^2 st ≥ 0, dc une somme de 2 nbres positifs ne pt ê nul q si ls deux st nuls : $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$.
Ce qui équivaut à $x = y = 0$, ie $(x,y) = (0,0)$.
On a dc mqé l'implicat° $N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

- pr $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = |\lambda| \cdot N(x,y)$$
ce q mq l'homogénéité de N.

- Pr mq $\triangle$ I, on fait un calcul q ressemblent à $\triangle$ I MS dt on ne s't pas, discuter des équivalences à la fin.

(1) $N((x,y)+(a,b)) \leq N(x,y) + N(a,b)$

(2) $(N(x+a, y+b))^2 \leq (N(x,y) + N(a,b))^2$

(3) $(x+a)^2 + (y+b)^2 \leq (N(x,y))^2 + (N((a,b))^2 + 2N(x,y)N(a,b)$

(4) $(x+a)^2 + (y+b)^2 \leq x^2+y^2+a^2+b^2 + 2N(x,y)N(a,b)$

(5) $2ax + 2by \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$

(6) $(ax+by)^2 \leq (x^2+y^2)(a^2+b^2)$

(7) $a^2x^2 + y^2b^2 + 2xyab \leq x^2a^2 + x^2b^2 + y^2a^2 + y^2b^2$

(8) $0 \leq x^2b^2 + y^2a^2 - 2xyab = (xb - ya)^2$.

(1) et (2) st $\iff$ car termes positifs.

⚠ Prendre le carré pt changer l'égalité <u>pcl</u>

(2) → (3) : développement du carré & définit° de N.
(3) → (4) : idem
(4) → (5) : soustract°s dc aussi $\iff$.
⚠ (5) → (6) : on pd un carré ⚠ <u>pcl</u> !, <u>mq</u> ≥ 0 ĉ produit de deux racines carrés MS <u>mq</u> pt ê NÉGATIF.
Dc ce n' est pas une équivalence.
Par contre $(6) \Rightarrow (5)$, $\sqrt{x}$ est ↗ et ≥ 0.
$$|ax+by| = \sqrt{(ax+by)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$
↳ $ax+by \leq |ax+by|$. Mais $(6) \Rightarrow (5)$
$(5) \not\Rightarrow (6)$.
$(6) \iff (7)$, $(7) \iff (8)$ ✓

$\triangle$ I □

Preuve 1.4

$$N_2(x,y) = \sqrt{(\|x\|_1)^2 + (\|y\|_2)^2}$$

$\triangle$ En utilisant it des 2 normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, & $x \mapsto x^2$ & $x \mapsto \sqrt{x}$ st $\nearrow$ sr $[0,+\infty[$,

$$N_2((x,y)+(a,b)) = N_2(x+a, y+b) = \sqrt{(\|x+a\|_1)^2 + (\|y+b\|_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{(\|x\|_1 + \|a\|_1)^2 + (\|y\|_2 + \|b\|_2)^2}$$

Invoquer le résultat, on pt écrire

$$\sqrt{(\|x\|_1 + \|a\|_1)^2 + (\|y\|_2 + \|b\|_2)^2} = N(\|x\|_1 + \|a\|_1, \|y\|_2 + \|b\|_2)$$

Sachant N est une norme (on l'a mq'), on pt utiliser $\triangle$ valable pr N pr avoir

$$N(\|x\|_1 + \|a\|_1, \|y\|_2 + \|b\|_2) \leq N(\|x\|_1, \|y\|_2) + N(\|a\|_1, \|b\|_2).$$

On pt revenir à notre norme N_2 car :

$$N(\|x\|_1, \|y\|_2) = \sqrt{(\|x\|_1)^2 + (\|y\|_2)^2} = N_2(x,y) \quad \text{et}$$

$$N(\|a\|_1, \|b\|_2) = N_2(a,b).$$

bout-à-bout :

$$N_2((x,y)+(a,b)) \leq \sqrt{(\|x\|_1 + \|a\|_1)^2 + (\|y\|_2 + \|b\|_2)^2}$$

$$= N(\|x\|_1 + \|a\|_1, \|y\|_2 + \|b\|_2)$$

$$\leq N(\|x\|_1, \|y\|_2) + N(\|a\|_1, \|b\|_2)$$

$$= N_2(x,y) + N_2(a,b).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$B(x,x) \cdot B(y,y) \geq B(x,y)^2.$$

(variante faible TK P_4)

E : ev, $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétriq

ie $\forall x, y \in E : B(x,y) = B(y,x)$

soit $y \in E$ tq $B(y,y) \neq 0$, on pt décomposer $\forall x \in E$ comme somme de 2 vecteurs tq

$$x = \lambda y + x_\perp \quad \text{tq } B(y, x_\perp) = 0$$

I.27

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, l'ens des applicat°s continues définies sur $[0,1]$.

(i) Mq E est un espace vectoriel.

$\boxed{M}$
- $(E,+)$: grpe abélien
- $1.x = x$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- $f+(g+h) = (f+g)+h$
- vecteur nul 0
- opposé $(-f)(t) = -f.t$
- $f+g = g+f$.

(ii) Mq $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ est une norme sur E.

(Raisonner sur la valeur Th de l'intégrale, sans utiliser a priori le TH fondamental de l'analyse).

I.31

Trouver des suites d'ouverts A_n de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ tq (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un ouvert.

(b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un fermé.

(c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est ni un ouvert ni fermé.

I.30

: $\mathbb{Q}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? oui

$\mathbb{Q}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}$? oui

$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^2$? ouvert

I.32

. Soit A et B deux parties d'un evn E.

(i) Mq $A = \overline{A}$ ssi A est fermé.

soit $\overline{A}$ un fermé, d'après le lemme si A est fermé $\Rightarrow \overline{A} \subset A$.

et $A \subset \overline{A}$ ssi $A = \overline{A}$ ssi A est fermé.

(ii) Mq $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Réciproque vraie ? non.

$A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

ca $]-1,0] \cap [0,1[\Rightarrow$ pas point adhérent.

mais $\cap = \{0\} \Rightarrow$ point adhérent.

(iv) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. oui.

Ex 36 : Déterminer les points adhérents, points d'accumulations, points isolés des sous-ens A de $\mathbb{R}$.

(i) $A = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = [0,1]$, $A = [0,1[$, $A =]-\infty, 1]$, $A = [1, +\infty[$

(ii) $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$, $A = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \} \cup \{0\}$

(iv) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \leq 0 \}$.

$\boxed{M}$: Points adhérents : $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

Points accumulations : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a \neq x$, $a \in B_\varepsilon(x)$.
$A \subset E$, $x \in E$.

Points isolés : $x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$.
$A \subset E$, $x \in A$,

I.29 Soit $(E, \|\cdot\|)$, un evn, $x \in E$, et $r \in]0, +\infty[$. Mq qu'on a l'égalité

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$$

$\boxed{M}$ Pr mq égalité de 2 ens : on mq presq tjrs une DOUBLE INCLUSION.

Mq $\overline{B_r(x)} = \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$ revient à mq les deux inclusions :

$\overline{B_r(x)} \subset \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$ et $\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\} \subset \overline{B_r(x)}$

$\boxed{M}$ Pour montrer une inclusion $A \subset B$, il faut mq l'implicaθ : $\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B$.

Pr la 1° inclusion, $\overline{B_r(x)} \subset \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$, on prd alors un élt $y \in \overline{B_r(x)}$ arbitraire, et essayer de mq que ce y appartient à $\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$. On traduit ce que veut dire y appartient à $\overline{B_r(x)}$ ET appartient à $\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$.

y adhérent à $B_r(x) \Rightarrow \|y-x\| \leq r$.

Ce que veut dire : "adhérent à" :

$$[\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) \neq \emptyset] \Rightarrow \|y-x\| \leq r.$$

Ce que veut dire que l'intersection n'est pas vide :

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E : z \in B_\varepsilon(y) \cap B_r(x)] \Rightarrow \|y-x\| \leq r.$$

Ce que veut dire l'appartenance à l'intersection :

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E : \|z-y\| < \varepsilon \text{ et } \|z-x\| < r] \Rightarrow \|y-x\| \leq r.$$

À la dernière ligne, on voit 3 distances, rien n'a été mqé, On pense $\triangle$I :

$$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \|z-x\| + \|z-y\|.$$

On sait dc que ppté $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E : \|z-y\| < \varepsilon$ et $\|z-x\| < r$ est vraie, on veut en déduire $\|y-x\| \leq r$.

Après Réflexion, RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE :

Supposons ccl souhaitée n'est pas vraie, ie $\|y-x\| > r$.

Dans ce cas, on peut poser $\varepsilon = \|y-x\| - r > 0$.

Pour ce ε en particulier, il $\exists$ dc $z \in E$ ds les pptés $\|z-x\| < r$ et $\|z-y\| < \varepsilon$. Selon $\triangle$I on aura :

$$\|y-x\| \leq \|z-x\| + \|z-y\| < r + \varepsilon = r + (\|y-x\| - r) = \|y-x\|$$

Ceci est manifestement une impossibilité. ?!

L'hypothèse qu'on a $\|y-x\| > r$ est donc intenable.

Ce qui veut dire qu'on a bien $\|y-x\| \leq r$ ĉ souhaité.

Ensuite, on vt mq l'inclusion : $\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\} \subset \overline{B_r(x)}$.

Avec m̂ traductions, on obtient :

$\|y-x\| \leq r \Rightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E : \|z-y\| < \varepsilon$ et $\|z-x\| < r]$

Pour mq cette ppté, il faut mq qq chose POUR TOUT $\varepsilon > 0$.
On doit dc prendre $\varepsilon > 0$ arbitraire, et déduire $\exists z \in E$; $\|z-y\| < \varepsilon$ et $\|z-x\| < r$.
Il faut trouver $z \in E$ avec pptés requises.

$\boxed{M}$ Pour mq $\exists$ objet
→ TH invoqué q dit objet existe
→ indiquer explicit^t objet avec pptés requises.

Données : $y \in E$ avec $\|y-x\| \leq r$.
On a pris $\varepsilon > 0$ arbitraire, on cherche $z \in E$, pptés $\|z-x\| < r$ et $\|z-y\| < \varepsilon$

Le dessin suggère fortement de prendre un point sur le segment de droite joignant y à x et de prendre un point proche de y (du côté de x). La droite $D \subset E$ passant par x et y est $D = \{\lambda(y-x) + x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, le point x est un point de base de la droite D, et le vecteur directeur $y-x$.
Un point proche de y du côté de x sera un point avec $0 < \lambda < 1$ et λ proche de 1.
Il faut expliciter λ par le calcul, on veut
$z = x + \lambda(y-x)$ avec les exigences $\|z-y\| < \varepsilon$, $\|z-x\| < r$.

ce q donne : $\|z-x\| = \|\lambda(y-x)\| = |\lambda| . \|y-x\| < r$
et $\|z-y\| = \|x-y+\lambda(y-x)\| = \|(\lambda-1)(y-x)\|$
$= |\lambda-1| . \|y-x\| < \varepsilon$.

On est dc amené à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant les condiθs : $|\lambda| . \|y-x\| < r$ et $|\lambda-1| . \|y-x\| < \varepsilon$.
En sachant que $\|y-x\| \leq r$.
Ces condiθs dépdt dc de $\|y-x\|$. On sépare en deux cas : $\|y-x\| < r$ et $\|y-x\| = r$.

I° cas : On voit que le choix $\lambda = 1$ convient.

II° cas : On a $\|y-x\| = r$,
$|\lambda| . r < r$ et $|\lambda-1| . r < \varepsilon$, ce q équivaut
$-1 < \lambda < 1$ et $1 - \frac{\varepsilon}{r} < \lambda < 1 + \frac{\varepsilon}{r}$.

Pour la majoraθ, cela devient facile : $\frac{\varepsilon}{r} > 0$, pr le respect des 2 majoraθs, il faut $\lambda > 1$.
Mais pour minoraθ : difficile, car BI dépd ε, int pas ↗ qd ε ↗ mais bloqué par -1.
La formule $\frac{1}{2} \cdot \max(-1, 1 - \frac{\varepsilon}{r})$ convient mais pénible à manipuler. Dc on va distinguer 2 cas :
▶ $\frac{\varepsilon}{r} \leq \frac{1}{2}$ et ▶ $\frac{\varepsilon}{r} > \frac{1}{2}$.

I° cas : $-1 < \lambda < 1$ et $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{r} < \lambda < 1 + \frac{\varepsilon}{r} \leq \frac{3}{2}$
↳ suggère choisir $\lambda = 1 - \varepsilon/(2r)$.

II° cas : $-1 < \lambda < 1$ et $1 - \frac{\varepsilon}{r} < \lambda < 1 + \frac{\varepsilon}{r}$ avec $1 - \frac{\varepsilon}{r} < \frac{1}{2}$.
↳ suggère choisir $\lambda = \frac{1}{2}$.

⚠ Travail not finished, ct raison^t pr trouver un point z vérifiant certaines pptés. Mq rais. est juste.

Début : $\|y-x\| \leq r \Rightarrow [\forall \varepsilon>0, \exists z \in E : \|z-y\|<\varepsilon$ et $\|z-x\|<r]$.

On suppose dc $\|y-x\| \leq r$, et on doit trouver, pour tout $\varepsilon>0$, un point $z \in E$ vérifiant $\|z-y\|<\varepsilon$ et $\|z-x\|<r$. En ce raist, on sépare en 2 cas : $\|y-x\|<r$ et $\|y-x\|=r$.

I° cas : m̄ tt posst $\varepsilon>0$, le point $z=y$, on vérifie on a bien $\|z-y\|=\|0\|=0<\varepsilon$ et $\|z-x\|=\|y-x\|<r$.

II° cas : on sépare en 2 cas, mtn dépendant ε, selon $\frac{\varepsilon}{r} \leq \frac{1}{2}$ ou $\frac{\varepsilon}{r}>\frac{1}{2}$.

II° (i)° cas : On choisit le point $z = x + \left(1-\frac{\varepsilon}{2r}\right)(y-x)$, ce q dépd dc de la valeur $\varepsilon>0$.
(Rq : $\frac{1}{2} \leq 1-\frac{\varepsilon}{2r} < 1$) et on vérifie remplit exigences :

$$\|z-x\| = \left\|\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)(y-x)\right\| = \left|\left(1-\frac{\varepsilon}{2r}\right)\right| \cdot \|y-x\|$$
$$= \left(1-\frac{\varepsilon}{2r}\right) \cdot r = r - \frac{1}{2}\varepsilon < r$$

et

$$\|z-y\| = \left\|x-y+\left(1-\frac{\varepsilon}{2r}\right)(y-x)\right\| = \left\|\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)\cdot(x-y)\right\|$$
$$= \frac{\varepsilon}{2r} \cdot \|x-y\| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

II° (ii)° cas : $\frac{\varepsilon}{r} > \frac{1}{2}$, on choisit le point

$z = x + \frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2}(x+y)$, on vérifie que cela satisfait exigences,

$$\|z-x\| = \left\|\frac{1}{2}(y-x)\right\| = \frac{1}{2}\|y-x\| = \frac{1}{2}r < r$$

et

$$\|z-y\| = \left\|-\frac{1}{2}(y-x)\right\| = \frac{1}{2}\|y-x\| = \frac{1}{2}r < \varepsilon \text{ car } \frac{\varepsilon}{r} > \frac{1}{2}.$$ □

On mq l'égalité par double inclusion, en commençant par $\overline{B_r(x)} \subset \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$.

- Soit $y \in \overline{B_r(x)}$ et supposons qu'on n'a pas $\|y-x\| \leq r$, (ie) $\|y-x\|>r$. Alors en prenant $\varepsilon = \|y-x\|-r>0$, on constate qu'on a $B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) = \emptyset$.
ce q dit que y n'est pas un point adhérent à $B_r(x)$.
Pour le justifier, supposons $\exists z \in B_\varepsilon(y) \cap B_r(x)$, alors $\|y-x\| = \|y-z+z-x\| \leq \|y-z\|+\|z-x\| < \varepsilon + r = \|y-x\|$
ce q est absurde. Alors on a bien mqé $\overline{B_r(x)} \subset \{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\}$
- Pour l'inclusion, $\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\} \subset \overline{B_r(x)}$, on sépare en deux.
$\{y \in E \mid \|y-x\| \leq r\} = B_r(x) \cup \{y \in E \mid \|y-x\| = r\}$,
on constate par lemme on a l'inclusion $B_r(x) \subset \overline{B_r(x)}$.
Il suffit de de mq l'inclusion $\{y \in E \mid \|y-x\| = r\} \subset \overline{B_r(x)}$ pour terminer.

Soit donc $y \in E$, $\|y-x\| = r$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.
(En regardant dessin), on distingue deux cas : $\varepsilon \leq \frac{1}{2} r$ et $\varepsilon > \frac{1}{2} r$.

<u>I° cas</u> : On considère le point $z = x + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right)(y-x)$,
on calcul $\|z-x\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right)\|y-x\| = r - \frac{1}{2}\varepsilon < r$,
en Rq on a bien $1 - \frac{\varepsilon}{2r} \geq \frac{1}{2} > 0$ et
$\|z-y\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2r} \cdot (y-x) \right\| = \frac{\varepsilon}{2r} \cdot \|y-x\| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$,
ce q mq on a $z \in B_\varepsilon(y) \cap B_r(x)$, montrant que y est un point adhérent à $B_r(x)$.

<u>II° cas</u> : $\varepsilon > \frac{1}{2} r$, on considère le point,
$z = \frac{1}{2}(x+y)$ et on calcul :
$\|z-x\| = \left\| \frac{1}{2}(y-x) \right\| = \frac{1}{2} r < r$ et $\|z-y\| = \left\| -\frac{1}{2}(y-x) \right\| = \frac{1}{2} r < \varepsilon$
ce q mq aussi $B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) \neq \emptyset$, ce q justifie y est un point adhérent à $B_r(x)$.

On aurait pu distinguer $\varepsilon \leq r$ et $\varepsilon > r$ HS I° cas, II° cas : $z = x$.

I.35 : Parmi les ens préciser ceux q sont → ouverts ! → fermés → ni ouverts ni fermés.

$$A =]-2,1[\times [0,3] \subset \mathbb{R}^2.$$

On voit que c'est intervalle ouvert ds 1° coord, int fermé ds 2° coord. On devine que ce n'est ni un ouvert, ni un fermé.

Rq : Seuls ens ouvert et fermé sont : ens vide & ens total.

Mq ce n'est pas un ouvert. Selon la défini°, un ens A est un ouvert si pour tout point x ds l'ensemble il existe une boule d'un certain rayon & de centre x q est contenue ds l'ens.

Si on vt mq a n'est pas ouvert, il faut trouver $x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ (rayon boule), on n'a pas l'inclusion $B_\varepsilon(x) \subset A$.

↳ Ce genre de point se trouve à la frontière de A.

(dessin) → suggère de prendre le point $x = (0,0)$.

Il faut mq pour aucun rayon $\varepsilon > 0$, on a l'inclusion $B_\varepsilon(0,0) \subset A$.

Soit dc $\varepsilon > 0$ arbitraire, alors le point $(0, -\frac{\varepsilon}{2})$ appartient bien à la boule $B_\varepsilon(0,0)$:

$$\left\| \left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) - (0,0) \right\| = \left\| \left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \right\| = \sqrt{0^2 + (\varepsilon/2)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Par contre, ce point n'appartient pas à l'ens A :

$(0, -\frac{\varepsilon}{2}) \notin]-2,1[\times [0,3]$ car la 2° coord ne vérifie pas la condi° d'appartenir $[0,3]$. Pour aucun ε, on ne pt dc avoir l'inclusion $B_\varepsilon(0,0) \subset A$, ce q mq A ne peut pas ê un ouvert.

(11)

Pr mq A n'est pas un fermé, il faut mq son complémentaire n'est pas un ouvert. Cela veut dire qu'il faut trouver un point x ds le complémentaire de A pr lequel il n'y a aucune boule de centre x q est contenue ds le complémentaire de A.

Rq : on un ens D est contenu ds le complémentaire de A si cet ens D est disjoint de A : $A \cap D = \emptyset$.

Il faut dc trouver un point x n'appartenant pas à A (ie $x \in \complement A$) tq pour aucun rayon $\varepsilon > 0$, la boule $B_\varepsilon(x)$ soit contenue ds le complémentaire de A, ie $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. ~~A ct~~, il faut trouver $x \notin A$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Suggestion : Prendre x, un point du bord du complém^t de A. MS intuitivement bord A = bord $\complement A$. MS cette fois-ci prend un point q $\notin$ à A.

@ $x = (1,1)$; il faut bien mq il n'y a pas de boule centré en x q est complèt^t contenu ds $\complement A$.

On pd dc $\varepsilon > 0$ arbitraire & on vt mq $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.

(dessin) → point $(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}, 1)$: ce point $\in$ à $B_\varepsilon(1,1)$

$$\left\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}, 1\right) - (1,1) \right\| = \left\| \left(-\frac{\varepsilon}{\pi}, 0\right) \right\| = \frac{\varepsilon}{\pi} < \varepsilon.$$

Ce point appartient aussi à l'ens A :

$(1 - \varepsilon, 1) \in]-2,1[\times [0,3]$ car on a bien

$1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \in]-2,1[$ et $1 \in [0,3]$.

Bien que, a-t-on vraiment $1-\varepsilon/\pi \in]-2,1[$?

Pr l'avoir, il faut avoir $-2 < 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} < 1$.

Sachant que $\varepsilon > 0$, l'inégalité $1-\frac{\varepsilon}{\pi}$ est vraie.

MS on pt transf 1° égalité en $\varepsilon < 3\pi$. Ce q' est une condit° qu'on n'a pas imposé (et qu'on ne pt pas imposer à ε).

Il ft dc modifier choix pr point q appartiendra à $B_\varepsilon(1,1) \cap A$. Pour tout $\varepsilon > 0$ q vérifie $\varepsilon < 3\pi$, on pt tjrs prdre notre point $(1-\frac{\varepsilon}{\pi})$ mais pr $\varepsilon \geq 3\pi$ il faut changer. Mais pour $\varepsilon \geq 3\pi$, il suffit de prendre le point $(0,1)$ q appartiendra à A et à la boule $B_\varepsilon(1,1)$:

$$\|(0,1)-(1,1)\| = \|(-1,0)\| = 1 < 3\pi \leq \varepsilon$$

Avec cela, on a bien mqé pour tout $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(1,1) \cap A \neq \emptyset$. Ce q mq le complémentaire de A n'est pas un ouvert, dc A n'est pas un fermé.

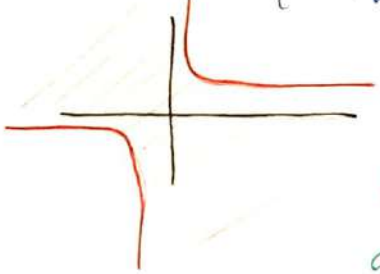
Pour $A =]-2,1[\times [0,3]$.

- Soit $x = (0,0) \in A$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Alors le point $(0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in$ à la boule $B_\varepsilon(0,0)$ mais il n'appartient pas à A car 2° coord. n'est pas dans $[0,3]$. Donc A ne pt pas ê un ouvert.
- Soit $x = (1,1) \notin A$ (un point C_A) et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Alors ds le cas $\varepsilon < 6$, le point $(1-\frac{\varepsilon}{2}, 1)$ appartient à la boule $B_\varepsilon(1,1)$ et à l'ens A, car avec cette contrainte sur ε, on aura $1-\frac{\varepsilon}{2} \in]-2,1[$ et $1 \in [0,3]$. Dans le cas $\varepsilon \geq 6$, il est évident que le point $(0,1)$ appartient à A et à la boule $B_\varepsilon(1,1)$. Dans ts les cas on aura de trouvé un point ds $B_\varepsilon(1,1) \cap A$: ce q mq qu'on n'a pas l'inclusion $B_\varepsilon(1,1) \subset \mathbb{R} \setminus A$.

Et dc le C_A n'est non plus un ouvert, ce q veut dire A n'est pas un fermé.

(iii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$

$y < \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et $y > \frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$.



Ce A est la région entre les 2 branches de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, avec les 2 b. exclues.

On devine que ce A est un ouvert.
Pr le mq, prenons $(x,y) \in A$ arbitraire.
Alors il ft mq $\exists$ rayon $\varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon(x,y)$ soit incluse dans A.
On sait dc qu'on a $xy < 1$ et il faut trouver $\varepsilon > 0$ tq inclusion $B_\varepsilon(x,y) \subset A$, ie :

$$(a,b) \in B_\varepsilon(x,y) \Rightarrow (a,b) \in A$$

ie $\|(a,b) - (x,y)\| < \varepsilon \Rightarrow ab < 1$.

→ faire calculs q indiq valeur q marche (ou ε ce $\exists$)
~ un peu au hasard.

On sait $\|(a,b) - (x,y)\|$ est "petite", dc on suppose les coord st petits.
On calcule :

$$ab = (a-x+x)(b-y+y) = (a-x)(b-y) + x(b-y) + y(a-x) + xy$$

Sachant qu'on sait $xy < 1$ et que $a-x$, $b-y$ st petits ; espérer q somme $(a-x)(b-y) + x(b-y) + y(a-x) + xy$ reste petite, p que qd on rajoute xy ne dépasse pas 1.
Notons $\delta = 1 - xy > 0$, si on a trouvé $\varepsilon > 0$ ds $(a,b) \in B_\varepsilon(x,y)$ on aura $\|(a,b) - (x,y)\| < \varepsilon$ et $\underline{ep}$:

$$|a-x| = \sqrt{(a-x)^2} \leqslant \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \|(a,b) - (x,y)\| < \varepsilon$$

et de m̂ pour $|b-y|$; on aura dc :

$$|(a-x)(b-y) + x(b-y) + y(a-x)| \leqslant |a-x|\cdot|b-y| + |x|\cdot|b-y| + |y|\cdot|a-x| < \varepsilon\cdot(\varepsilon + |x| + |y|).$$

On pt faire le calcul :

$$\begin{aligned} ab - 1 &= xy - 1 + (a-x)(b-y) + x(b-y) + y(a-x) \\ &\leqslant xy - 1 + |(a-x)(b-y) + x(b-y) + y(a-x)| \\ &\leqslant -\delta + \varepsilon(\varepsilon + |x| + |y|). \end{aligned}$$

On souhaite que cela soit $S^T < 0$; donnant dc inégalité souhaitée MS pas encore mqé car ε inconnue.

$$\varepsilon\cdot(\varepsilon + |x| + |y|) < \delta.$$

Le point (x,y) est donné, dc δ connue et il faut trouver $\varepsilon > 0$ tq inégalité soit vraie. (Valeur explicite ε ???)

$2\boxed{M}$ → (i) résoudre $\varepsilon\cdot(\varepsilon + |a| + |y|) = \delta \rightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon\cdot(|x| + |y|) - \delta = 0$
↳ (ii) on veut ε petit pour que cela marche, "dc" certainement plus petit que 1.

Si $\varepsilon \leq 1$ alors $\varepsilon.(\varepsilon+|x|+|y|) \leq \varepsilon.(1+|x|+|y|) < \delta$

$$\iff \varepsilon < \frac{\delta}{1+|x|+|y|}.$$

Ce calcul suggère de prendre $\varepsilon = \min\left(1, \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{1+|x|+|y|}\right)$

Mq on ne s'est pas trompé, en reprenant calcul:

$$\begin{aligned}
ab-1 &= xy-1+(a-x)(b-y)+x(b-y)+y(a-x)\\
&\leq xy-1+|(a-x)(b-y)+x(b-y)+y(a-x)|\\
&\leq -\delta+\varepsilon\cdot(\varepsilon+|x|+|y|)\\
&\leq -\delta+\varepsilon\cdot(1+|x|+|y|) \quad \text{car } 0<\varepsilon\leq 1\\
&\leq -\delta+\frac{\delta/2}{1+|x|+|y|}\cdot(1+|x|+|y|) \quad \text{car } \varepsilon \leq \frac{\delta/2}{1+|x|+|y|}\\
&= -\delta+\delta/2 = -\delta/2 < 0
\end{aligned}$$

Les arguments l'un après l'autre, on a bien mqé que A est un ouvert.

Pour $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$.
On devine que c'est un ouvert & pr le mq $(x,y) \in A$ et on cherche $\varepsilon > 0$, tq $B_\varepsilon(x,y) \subset A$ ie

$$\|(a,b)-(x,y)\| < \varepsilon \implies ab < 1.$$

Pr trouver ce $\varepsilon > 0$, 2 calculs préliminaires:

$$|a-x| = \sqrt{(a-x)^2} \leq \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} = \|(a,b)-(x,y)\| < \varepsilon$$

et de m̂ pour $|b-y|$, puis:

$$\begin{aligned}
ab-1 &= (a-x+x)(b-y+y)-1\\
&= xy-1+(a-x)(b-y)+x(b-y)+y(a-x)\\
&\leq xy-1+|(a-x)(b-y)+x(b-y)+y(a-x)|\\
&\leq xy-1+|a-x|\cdot|b-y|+|x|\cdot|b-y|+|y|\cdot|a-x|\\
&\leq xy-1+\varepsilon(\varepsilon+|x|+|y|).
\end{aligned}$$

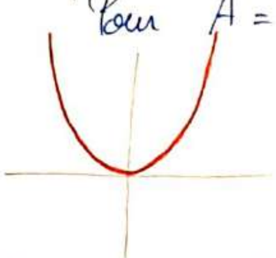
Pr que ce dernier soit <0, on prend $(1-xy>0,)$:

$$\varepsilon = \min\left(1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1-xy}{1+|x|+|y|}\right),$$

finir le calcul:

$$\begin{aligned}
xy-1+\varepsilon\cdot(|x|+\varepsilon+|y|) &\leq xy-1+\varepsilon(1+|x|+|y|) \quad \text{car } 0<\varepsilon\leq 1\\
&\leq xy-1+\frac{(1-xy)/2}{1+|x|+|y|}\cdot(1+|x|+|y|) \quad \text{car } \varepsilon \leq \frac{(1-xy)/2}{1+|x|+|y|}\\
&= xy-1+(1-xy)/2 = (xy-1)/2 < 0
\end{aligned}$$

On a bien mqé le choix ε, on a l'inclusion $B_\varepsilon(x,y) \subset A$.



Pour $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

L'ens A est une parabole, on a l'impression que le complémentaire est un ouvert, dc A est fermé.

Pr le mq, il faut $(x,y) \notin A$, on pt trouver $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B_\varepsilon(x,y)$ est contenue ds le $\complement A$.

ie $(x,y) \notin A \Longrightarrow B_\varepsilon(x,y) \cap A = \emptyset$.

on traduit, $y \neq x^2 \Rightarrow \left[\|(a,b) - (x,y) < \varepsilon \Rightarrow b \neq a^2 \right]$

Calcul préliminaire pr deviner ε q pourrait marcher.

On ①①, $|a-x| \leq \|(a,b)-(x,y)\| < \varepsilon$ et $|b-y| \leq \|(a,b)-(x,y)\| < \varepsilon$.

Et on calcule : $b^2 - a = (b-y+y)^2 - (a-x+x)$

$$= (b-y)^2 + 2y(b-y) - (a-x) + y^2 - x.$$

On sait que $y^2 - x$ est différent de 0. Dc si le début est suffisamment petit, la somme restera différente de 0.

Le sp ^{s} veut dire plus petit en valeur abs. que $y^2 - x$.

$$|(b-y)^2 + 2y(b-y) - (a-x)| \leq |b-y|^2 + 2|y|\cdot|b-y| + |a-x|$$
$$< \varepsilon.(\varepsilon + 2|y| + 1)$$

On pose donc $\varepsilon = \min\left(1, \frac{1}{2}\cdot\frac{|y^2-x|}{1+2\cdot|y|+1}\right)$

Avec cette valeur de ε, on pt continuer calcul précédent :

$$\varepsilon.(\varepsilon + 2|y| + 1) \leq \varepsilon.(1 + 2|y| + 1) \quad \text{car } \varepsilon \leq 1.$$
$$\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{|y^2-x|}{1+2\cdot|y|+1}\cdot(1+2|y|+1) \quad \text{car } \varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{|y^2-x|}{1+1+2\cdot|y|}$$
$$= \frac{1}{2}|y^2 - x|$$

Avec notre choix pour $\varepsilon > 0$, on a dc l'implicat° :

$\|(a,b) - (x,y)\| < \varepsilon \Rightarrow |(b-y)^2 + 2y(b-y) - (a-x)| < \frac{1}{2}|y^2-x|$

D'autre part,

$$b^2 - a \Leftrightarrow (b-y)^2 + 2y(b-y) - (a-x) = x - y^2.$$

Ms alors on pt faire le calcul,

$$|y^2 - x| = |(b-y)^2 + 2y(b-y) - (a-x) = x - y^2|$$
$$< \frac{1}{2}|y^2 - x|.$$

Ce q n'est pas possible.

On a dc mqé l'implicat°

$$\|(a,b) - (x,y)\| < \varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon \cap A = \emptyset.$$

(P) Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$ alors l'applicaᶿ $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Les ptés de séparaᶿ & homogénéité st faciles....

Pr mq $\triangle$ I, on considère deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Si $x + y = 0$, résultat clair. Sinon on a a inégalité Cauchy-Schwarz:

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j (x_j + y_j) + \sum_{j=1}^{n} y_j (x_j + y_j)$$

$$\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2}$$

$$\leq (\|x\|_2 + \|y\|_2) \|x+y\|_2 .$$

On obtient $\triangle$ I en divisant par $\|x+y\|_2 \neq 0$.

(P) Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

on note $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Mq $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ st des normes.

Ⓓ soit $a \in \mathcal{D}$, $l \in \mathbb{R}^p$, f tend vers l en a :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Ⓓ soit $a \in \mathcal{D}$,

(i) f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ qd $x \to a$.

(ii) f est cont sur $\mathcal{D}$ si elle est cont en tt point de $\mathcal{D}$.

Ⓟ soit f une f de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. soit $a \in \mathcal{D}$.
alors f est <u>cont</u> en a <u>ssi</u> $\forall$ suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ q tend vers a la suite $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Ⓡq Utile p mq f n'est pas continue.

Ⓔ Sur $\mathbb{R}^2$, l'applicaθ f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fracθ rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
D'autre part,

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,y) = 0 \xrightarrow[y \to 0]{} 0 = f(0,0)$$

et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$.

En effet, si on note $U_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ alors U_m tend vers $(0,0)$ mais $f(U_m)$ ne tend pas vers $f(0,0)$ quand $m \to +\infty$. (ie td vers $\frac{1}{2}$).

<u>Autre meilleure méthode</u> : use compositθ fs.

L'applicaθ $\varphi : t \in \mathbb{R} \to (t,t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en 0, dc si f est cont en $(0,0) = \varphi(0)$, l'applicaθ $f \circ \varphi$ est cont en 0.

Or $f(\varphi(0)) = 0$ et $f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$ p $\forall t \neq 0$, ce q donne contradicθ & prouve par l'absurde que f n'est pas cont en $(0,0)$.

Exemples

$A_1 = \{(x,y) \,/\, x^2+y^2 < 1\}$ est ouvert.

$A_2 = \{(x,y) \,/\, x^2+y^2 \leq 1\}$ est fermé.

$A_3 = A_1 \cup \{(1,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

$]0,1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

$]0,1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.

$[0,1[\subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

$[0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

(L) $\forall z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,.\,\|x\|_\infty \leq \sqrt{n}\,.\,\|x\|_2 \quad \text{ie},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n}\,.\,\max_i |z_i| \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

31 (i)

(ii) Mq applicat°s polynômiales st continues.

→ $aP^n(x) + bP^{n-1}(x) + \dots + c$ → somme termes q st x-mês produits f polynômiales : f coord.

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \sum_{|\alpha_1|+\dots+|\alpha_n| \leq N} C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, les project°s st continues (1- lipschitzienne)
on a dc juste une CL de f cont.

(iii) Mq déterminant matrice carré est continue $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ alors si $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe des permutat°s de l'ens $\{1,\dots,n\}$:

on a $\Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a^k_{\sigma(k)}$, $\varepsilon(\sigma) = -1$ ou 1,

or $\prod_{k=1}^{n} a^k_{\sigma(k)}$ est un monôme de le déterminant est une fonc° polynôme des coeff de la matrice.

On sait que tte f polynôme à p variables définie sur $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ est cont.

32 Les sous-ens de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ st-ils ouverts ? fermés ?

(i) $GL_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles ?

soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, trouvons $r > 0$, $\forall A \in B(m, r)$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$: $M + A = M(I + M^{-1}A)$. On sait que M est inversible, il ne reste à mq $I + M^{-1}A$ est inversible or on sait d'après cours que si $|M^{-1}A| < 1$ est si $M^{-1}A$ linéaire alors c'est inversible.

$$\|A\| < \frac{1}{\|M^{-1}\|}, \quad \|(M+A)^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}A\|}$$

Donc c'est un ouvert.

(ii) Matrices non inversibles.

Matrices non-inversibles $\Leftrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est un fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.

R/ si $\frac{\text{deg deno}}{\text{deg numé}}$,

si deg num > deg deno ⇒ pas lim (voir prob 5c, 3b).
si deg = ⇒ peu probable
si deg num < deg deno ⇒ ∃ lim

33 Écrire définis limites.

L.2.7 : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux evn,
$A \subset E$, $f : A \subset E \to F$ une applicaθ, $\ell \in F$ et
a : PAC de A alors on sait que f tend vers ℓ qd x tend vers a : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < \|x-a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$

• $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y) = 5$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in A$:
$0 < \|(x,y) - (-1,2)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - 5\| < \varepsilon.$

$\rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,2^-)} f(x,y) = -\infty$

On sait $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in A$,
$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$

On vt mq $\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \hat{\delta} > 0, \forall (x,y) \in A$,

Par définiθ : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y) - \ell| = 0$

$||x| - |y|| \leq |x-y|.$

D'où $||f(x,y)| - |\ell|| \leq |f(x,y) - \ell| < \hat{\varepsilon}$

$\forall \hat{\varepsilon} > 0$, ep pour $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$,

$||f(x,y)| - |\ell|| \leq |f(x,y) - \ell| < \hat{\varepsilon} = \varepsilon$

---

34 soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ens, $f : D \to \mathbb{R}$ une foncθ & (x_0, y_0) PAC de D.

(i) Mq on a l'implicaθ :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|$$

f cont,
$f(x) \leq b$: ouvert
$f(x) < b$: fermé
$f(x) = b$: fermé.

$f(x,y) = y - \frac{1}{x} \Rightarrow y - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ fermé

$f(x,y) = 0$

III. 10 : Décider si les ens st compacts ou NON.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 1\}$

On sait $x^2 + y^4 \leq 1$, on peut écrire

$y^4 \leq 1$ & $x^2 \leq 1$ puis les variables sont élevées

$\sqrt[4]{y^4} \leq 1$ $\sqrt{x^2} \leq 1$ à la puissance de parité

$|y| \leq 1$ $|x| \leq 1$, paire dc on peut écrire :

$0 \leq x^2 + y^4 \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit, le sous-ensemble A est borné.

Par ailleurs on sait que si un $(E, \|\cdot\|)$, $A \subset E$,

si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq b\}$ alors A

est un fermé. Dans ce cas présent,

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 1\}$ est dc un fermé.

In fine, le sous-ensemble A est un compact car

d'après le théorème si A est fermé et borné

alors c'est un compact.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 \leq 1\}$.

Certes l'ens est un fermé mais nous allons mq

qu'il n'est pas borné.

Quand n tend vers $+\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, s'il on prend

ep le couple des suites $(x_n, y_n) = (0, -n)$,

la limite de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^2 + y_n^5 = -\infty$, donc

le sous-ensemble B n'est pas borné car

nous avons trouvé un couple de suite incluse

de l'ensemble qui divergeait.

Donc B n'est pas un compact.

Solu°s préliminaires à 2.31 :

Pr répondre aux questions de continuité, il faut mq f coordonnées st continues. On doit mq les applica°s $\pi_1, \dots, \pi_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ def par $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$ st applica°s cont.

Il faut dc mq (pr indice i fixé entre 1 & m) :

$\forall a \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$:
$\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| \pi_i(x) - \pi_i(a) \| < \varepsilon$.

Pr mq on prd un $a \in \mathbb{R}^n$ arbitraire et un $\varepsilon > 0$ arbitraire et on cherche $\delta > 0$ de sort q :

$$\| x - a \| < \delta \Rightarrow | x_i - a_i | < \varepsilon.$$

(on a substitué π_i, utilisé cette appli prd valeurs ds $\mathbb{R}$).
Pr connaître δ, il faut choisir $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$?
On choisit $\|\cdot\|_2$; on cherche $\delta > 0$ en f de $a \in \mathbb{R}^m$ et $\varepsilon > 0$: l'implica°.

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \delta \Rightarrow |x_i - a_i| < \varepsilon.$$

Or : $|x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2}$

ceci suggère qu'on pt prendre $\delta = \sqrt{0,7} \cdot \varepsilon$, puis

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \delta = \sqrt{0,7} \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_i - a_i| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \delta = \sqrt{0,7} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

Ceci est bien l'implica° recherchée.

→ on sait qu'on ~~pt~~ prendre une composante d'un vecteur est une applica° cont dans le vecteur, (TH) 2.25 2.26 2.27 ; pr ed ∞ ôtés x pred°s st cont.

@ $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = \left((y+1) \ln(x), \ \sin(x^2 + y) - \frac{e^{-3y}}{x} \right)$$

Par (2.25), il suffit de mq les deux fs :

$g(x,y) = (y+1) \ln(x)$ et $h(x,y) = \sin(x^2 + y) - \dfrac{e^{-3y}}{x}$

sont continues.

Pour g, on peut écrire : $g(x,y) = (\pi_2(x,y) + 1) \cdot (\ln \circ \pi_1)(x,y)$
selon (2.27), $\ln \circ \pi_1$ est cont et selon (2.26 i) $\pi_2 + 1$ est cont. Selon (2.26 ii), le produit de ces deux fonct°s est cont.
Pour h, argument similaire & (2.26 iii) : ne pas oublier de vérifier que l'applica° ds le dénominateur prend bien ses valeurs ds $\mathbb{R}^*$.

Ex 2.35 (i) On constate f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On constate :

- $\sin y \underset{y\to 0}{\sim} y$
- $\frac{\deg = 3}{\deg = 2}$ $\exists$ limite : argument heuristiq. où $3 > 2$.

Qd on ⊕⊕ ce q se passe on s'approche de $(0,0)$ par l'axe verticale $x=0$, on calcule :

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot \sin y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

On ed ∞ si limite $\exists$, on doit avoir

↳ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

On se sert (2.13) en prenant la suite $a_m = \left(0, \frac{1}{m}\right)$; où plutôt $a_m = \left(0, \frac{1}{m+1}\right)$,

on a selon (2.13) :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \text{ et } \lim_{m\to\infty} a_m = (0,0) \Rightarrow \lim_{m\to\infty} f(a_m) = \ell}$$

Si on calcule cette limite pr notre suite,

$$\lim_{m\to\infty} f(a_m) = \lim f\left(0, \frac{1}{m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0$$

La ccl, si la lim $\exists$ alors elle doit ê égale à 0.

(M2)

Il faut mq :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

On prd $\varepsilon > 0$ arbitraire, on cherche $\delta > 0$.

Calculs :

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 \cdot \sin y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 \cdot |\sin y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\cdot|\sin y|}{x^2+y^2} = |\sin y|$$

M1° Vous renoncez à utiliser définiθ ε-δ, on

(Rq) $\lim_{y\to 0} \sin y = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

Dc par composée de limites $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin y = 0$.

TD6 $0 \leq |f(x,y) - 0| \leq |\sin y|$; on ed ∞ que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

M2° Rq $|\sin y| \leq |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 \cdot \sin y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 \cdot |\sin y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\cdot|\sin y|}{x^2+y^2}$$

$$= |\sin y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|.$$

On décide de prendre $\delta = \varepsilon > 0$: justif choix

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq |\sin y| \leq \|(x,y)\| < \delta = \varepsilon$.

On a bien justifié son choix, on a bien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Cas (ii) : idem, déf sur $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$,

on ⊕ ⊕ $\frac{\deg = 4}{\deg = 3} \to \nexists$.

On devine limite en $(0,0)$ est 0.

- $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2+y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$

pr confirmer que la limite vaut bien 0, user ASTUCE CLASSIQUE de majorat° pour p et q des réels $S^T > 0$:

$|x| = \sqrt[p]{|x|^p} \leqslant \sqrt[p]{|x|^p + |y|^q}$ et

$|y| = \sqrt[q]{|y|^q} \leqslant \sqrt[q]{|x|^p + |y|^q}$.

On appliq cela à $p = q = 2$:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} \right| \leqslant \frac{|x|^4 + |y|^3}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\left(\sqrt[2]{x^2+y^2}\right)^4 + \left(\sqrt[2]{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2}$$

$$= (x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\|.$$

Idée : faire apparaître normes.

$\boxed{M1}$ On constate $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0$.

Par produit, par somme : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\| = 0$.

À partir des inégalités : $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\|$.

$\boxed{TD6}$ on est ∞ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$\boxed{M2}$ On use déf° de lim, $\varepsilon > 0$ arbitraire, on cherche $\delta > 0$,
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Si on avait trouvé ce δ, on aurait la majorat° :

$$|f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\| < \delta(\delta+1) \leqslant 2\delta.$$

On voudrait majoré par ε, cela marchera si on a $2\delta < \varepsilon$; on choisit $\delta > 0$ comme
$\delta = \min\left(1, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$.

D'où, $|f(x,y)| \leqslant \delta(\delta+1) \leqslant 2\delta \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$.

2.38 : Le graphe d'une appli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est le ss-ens $G \subset \mathbb{R}^2$ déf p

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

On voit que G est déf p égalité (suggère (2.22)).
Il ns faut appli déf sur $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}$.
Définissons $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F(x,y) = y - f(x)$.

"vite" : les foncOs x et y st cont (ds le couple (x,y)) et que donc F est cont c̄ somme/produit/composée de f cont.

"lent" : $F(x,y) = \pi_2(x,y) - f(\pi_1(x,y))$

$$= (\pi_2 - f \circ \pi_1)(x,y).$$

où π_i désigne la fonction cont q ns donne la i-ème coordonnée. On invoque (2.27) q que la composée $f \circ \pi_1$ est cont, puis (2.26 iii), le produit de f cont $f \circ \pi_1$ et la f cont cte -1 est cont, puis (2.26.i) q dit que sommes de f cont π_2 et $-f \circ \pi_1$ est cont. Ce q implique que F est cont.

Avec cette foncO, on pt réécrire défin° du graphe G :

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}. \quad \text{M4}$$

On a $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, la foncO f ds 2.22 s'appelle F, son domaine $A = \mathbb{R}^2$ et $b = 0$.
Sachant qu'on a bien vérifié F est cont, on pt appliquer 2.22 et conclure $\exists$ un fermé $V \subset \mathbb{R}^2$ tq : $G = F^{-1}(\{0\}) = V \cap \mathbb{R}^2 = V$.

Aut dit, G est bien un fermé (de $\mathbb{R}^2$)

Pr mq la réciproque n'est vraie en général, considérons la f $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ \sqrt{\pi} & x = 0. \end{cases}$$

Son graphe est donné par :

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(0, \sqrt{\pi})\}$$

rq f n'est pas cont en 0 car la limite à gauche en $x = 0$ de $f(x)$ vaut $-\infty$ et limite à droite $+\infty$.
Dans aucun des cas c'est la valeur $f(0) = \sqrt{\pi}$.

Pr mq son graphe est qd m̂ fermé.
On réécrit :

$$\{(x, \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

ce q suggère $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $F(x,y) = xy$.

Cette fonc° F est cont ĉ produit de 2 f°s coord x et y :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 1\}$$
$$= F^{-1}(\{1\}).$$

Comme q° pdte, invoquer 2.22 & conclure que c'est un fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Il suffit de Rq que la réunion de deux fermés est un fermé.

2.39 (i). f déf sur $\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\\ \downarrow \\ (0,0)}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+1} = \frac{\lim(x^2-y^2)}{\lim(x^2+y^2+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

Rq : quotient de 2 f°s cont dt démo ne s'annule jamais, de cont sur $\mathbb{R}^2$, ce q implique

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \frac{0}{1} = 0$$

(ii) Devine $\frac{x}{x^2+y^2}$ (∄). On le montre on utilise deux façons ≠tes d'approcher $(0,0)$ pr calculer soi-disant la limite, si elle ∃, on doit trouver la m̂ chose.

- $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0^2+y^2} = 0$

- $\lim_{y\to 0} f(y,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2y}$ ∄.

ccl La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ∄.

Justificat° explicite par définit° :

(2.13), si la limite ∃ (ℓ) alors pr n'importe qu'elle suite a_n q (cv) vers $(0,0)$, on doit avoir $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. On appliq cela à deux suites,

$a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ q donne $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

$b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\lim_{n\to\infty} f(b_n)$ ∄.

?! $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0$, (pd) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |f(b_n) - 0| < \varepsilon$

ex pour $\varepsilon = 1$, il dit exister $N \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N = |f(b_n)| < 1$ mais

$f(b_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2}$, dc ppté $N : \forall n \geq N : \frac{n}{2} < 1$.

$\boxed{c?!c}$.

1 • Cas (iii) $\frac{(y+1)\sin x}{x}$

Rq $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Argmt rapide $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y^2+1)\frac{\sin x}{x}$

$= \left(\lim_{y\to 0} (y^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = 1.1 = 1$

CE N'EST PAS CORRET car limite $(x,y)\to(0,0)$ ne se décompose pas en deux limites $x\to 0$ et $y\to 0$.

MS calcul valable.

soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$f(x,y) = y$ et $g(z) = z^2+1$.

Points $a=(0,0)$, $b=0$. f est cont en a, si cont partout : f coord. π_2 et g est cont en b.

Dc $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def

$h = g\circ f$, $h(x,y) = y^2+1$.

est cont au point a, d'où

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2+1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0) = 1$

Ensuite (2.14) aux foncts $f : A\to\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}\setminus\{0\}$ données par :

$f(x,y) = x$ et $g(z) = \frac{\sin z}{z}$

où $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}$: D_f de f et points $a=(0,0)$ et $b=0$.

On a $\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = b$ et $\lim_{z\to b} g(z) = 1$

MS on a inclusion $f(A\setminus\{a\}) = f(A) = \mathbb{R}\setminus\{b\}$.

Dc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{x} = \lim_{(x,y)\to a} g(f(x,y)) = 1$

cl :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (y^2+1)\cdot\frac{\sin x}{x} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}(y^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{x}\right) = 1.1 = 1$

2.42 (i)

$\boxed{M}$ Déterminaθ $\mathcal{D}f$:

Conditis:

- ne pas diviser par 0.
- → ne pas prendre $\sqrt{\text{nombre négatif}}$.
- → ne pas prendre $\ln$(nbr négatif ou nul).

ici $\sqrt{x^2+w^2+y^2+z^2} = 0$ à exclure quand

ou $(|w|+|x|+|y|+|z|)^8 = 0$; cela revient aux points q vérifie $|w|+|x|+|y|+|z| = 0$.

On se ramène $w+x+y+z=0$.

Seul le point dans $\mathbb{R}^4$ où f n'est pas défini est $(0,0,0,0)$. Donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$.

(ii) sur $\mathcal{D}f$, les composantes de f sont somme / produit / composée / quotients de f cont, dont le dénominateur ne s'annule jamais. Donc f est cont.

(iii) Question reformulée : on demande si on peut donner des valeurs pour $f(w,x,y,z)$ dont les points q ne sont pas dans $\mathcal{D}f$ de sorte que la nouvelle fonct° déf sur $\mathbb{R}^4$ sera cont sur tout $\mathbb{R}^4$.

M7

On cherche donc une valeur pour $f(0,0,0,0)$ de sorte que f devient cont sur tout $\mathbb{R}^4$.

Sachant que f est déjà cont en chaq point (sauf en $a = (0,0,0,0)$. Pour que f soit continue sur tout $\mathbb{R}^4$, il suffit de de mq qu'elle sera cont en $(0,0,0,0)$, ce q vt dire $\lim\limits_{(w,y,x,z)\to(0,0,0,0)} f(w,x,y,z) = (0,0,0,0)$.

→ Une conditθ nécessaire est de que cette limite existe. Et si cette limite existe, il suffit d'attribuer cette valeur à $f(0,0,0,0)$ pr que f devienne cont en $(0,0,0,0)$.

Il faut deviner si cette lim $\exists$. (2.24) Composante par composante. ∀ chq composante : appliquer intuiθ.

1° compo : $\frac{\deg 2}{\deg 2} = 1$ on suppose lim $\exists$ en 0.

2° compo : Rq $\sin x$ est bornée (par 1), multipliée par f cond. on supp $\exists$.

1° compo : Astuce classiq : $0 \leq |w|, |x|, |y|, |z| \leq \sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}$

ce q ns donne la majoraθ :

$$0 \leq \left| \frac{wz + xy}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \frac{|w|.|z| + |x|.|y|}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}}$$

$$\leq \frac{2\left(\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}\right)^2}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}} = 2\,\|(w,x,y,z)\|_2$$

Puis $\boxed{TD6}$, on a bien

$$\lim_{(w,x,y,z)\to(0,0,0,0)} \frac{wz+xy}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

Pour 2° compo, encore $\|\cdot\|_2$:

$$0 \leq |w|, |x|, |y|, |z| \leq \sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2} = \|(w,x,y,z)\|_2$$

d'où $0 \leq \left| wxyz \cdot \sin\left(\frac{1}{(|w|+|x|+|y|+|z|)^8}\right)\right| \leq |w|.|x|.|y|.|z|$

$$\leq (\|(w,x,y,z)\|)^4.$$

Encore $\boxed{TD6}$ nous permet de conclure qu'on a bien :

$$\lim_{(w,x,y,z)\to(0,0,0,0)} wxyz \cdot \sin\left(\frac{1}{|w|+|x|+|y|+|z|}\right) = 0.$$

__ccl__ On peut prolonger f en une applicat° __cont__ sur $\mathbb{R}^4$ en posant $f(0,0,0,0)=(0,0)$

43. (i) R^q si f une f de 2 var. x et y alors les applicat°s partielles st les applicat°s

$x \mapsto f(x,y)$ pour y fixé

$y \mapsto f(x,y)$ pour x fixé.

Soit d'abord y fixé, si $y \neq 0$ alors $\sqrt{x^2+y^2}$ ne s'annule pas. On sait $\sqrt{\cdot}$ est __cont__ sur $[0,+\infty[$.

Donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est __cont__ comme 1 sur une f q ne s'annule pas.

Il est aussi admis $\forall$ réel $r>0$, la fonc° $p_r : [0,\infty[\to [0,\infty[$, (la puissance r) :

$$p_r(x) = x^r \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{r.\ln(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est une f __cont__ & m̂ dérivable sur $]0,\infty[$ de dérivée $p_r'(x) = r.x^{r-1}$.

Pour $r<0$, m̂ ff mais stt sur $]0,\infty[$.

Pour $r=0$; puissance zéro ĉ fonc° cte :

$$\forall x \geq 0 = p_0(x) \overset{\text{def}}{=} x^0 = 1,$$

y compris pour __$x=0$__.

⚠ 0^0 n'est pas définie.

Sachant que $z \to |z|$ est cont, il s'ensuit pour $r>0$, la composée $z \mapsto |z|^r$ est cont sur $\mathbb{R}$ entier. En composant de les f $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$, on en déduit que la f $(x,y) \mapsto |x|^a |y|^b$ est cont.

Revenons aux applications partielles. Pour y fixé et $y \neq 0$, la fonction $h_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf par :

$$h_y(x) = g_{a,b}(x,y) = \frac{|x|^a \, |y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ est le

quotient de 2 f cont en x dont le dénominateur ne s'annule pas, donc le quotient est cont.

Pour $y=0$, h_0 est :

$$h_0(x) = g_{a,b}(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{|x|^a \, |0|^b}{\sqrt{x^2+0^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{array} \right\} = 0$$

c'est bien f cont.

Mêmes arguments pour $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf par $h_x(y) = f(x,y)$, x fixé.

(ii) Une droite de $\mathbb{R}^2$ est le graphe d'une f affine $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x) = mx + b$.

Son graphe est donc l'ensemble :

$$D = \{ (x, mx+b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

⚠ on rate les droites verticales de cte des θ. Considérer aussi $x = c$. Si on restreint $g_{a,b}$ à une droite donnée, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} g_{a,b}(x, mx+b) & \text{cas droite non-verticale} \\ g_{a,b}(c,y) & \text{cas droite verticale.} \end{cases}$$

Qd la droite ne passe pas par l'origine, le dénominateur ne s'annule jamais et "donc" h sera cont car quotient de fs cont dont le dénominateur ne s'annule pas.

Étudier mtn où droite passe par θ.

ie $b=0$ et $c=0$.

• $b=0$:

$$h(x) = g_{a,b}(x, mx) = \begin{cases} \frac{|m|^b \cdot |x|^{a+b}}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \frac{|m|^b}{\sqrt{1+m^2}} \cdot |x|^{a+b-1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\underline{c=0}$: $h(y) = g_{a,b}(0,y) = \dfrac{0 \cdot |y|^b}{\sqrt{0^2+y^2}} = 0.$

La dim. sera tjs $\underline{\text{cont}}$.

La restric° de $g_{a,b}$ à toute droite soit $\underline{\text{cont}}$, il faut et suffit de que f soit $\underline{\text{cont}}$ sur $\mathbb{R}$.

Selon défini° pr, l'expre° pour h ds cas $x \neq 0$ $\exists$ et est $\underline{\text{cont}}$ sur $\mathbb{R}$ $\forall\ a+b-1 \geq 0$.

(valable aussi pr $x=0$ qd $a+b-1 \geq 0$ mais pas valable pr $x=0$ au moins).

La prescrip° donne $h(0)=0$, ds cas $a+b-1=0$, la P^{θ} pr h ds $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}$. Cela ne sera pas nul pr toute droite (slt droite horiz)

Pour $a+b-1>0$, on a bien $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$

Pr finir on suit $a+b-1 = \lambda < 0$ (admis λ_1),

$\lim\limits_{x \downarrow 0} p_\lambda(x)\ \nexists$. Ds ce cas on n'a dc pas $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$

Dc h ne sera pas $\underline{\text{cont}}$ en 0.

$\underline{\text{Ccl}}$ la restric° de $g_{a,b}$ à toute droite est $\underline{\text{cont}}$

$\underline{\text{ssi}}$ $a+b-1>0$.

(R4) : desc° toutes droites du plan par vecteur directeur $(v,w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et un point $(p,q) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_{v,x_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = (p,q) + \lambda(v,w)\}$$
$$= \{(p+\lambda v, q+\lambda w) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

(iii) continuité, limite, norme, TDG.... $\exists$ intui°.

2.44 (i) Pr équivalence :

$\boxed{\Rightarrow}$ f cont $\Rightarrow$ f cont en 0.

f cont ie f cont en chq point de cont en 0.

$\boxed{\Leftarrow}$ f cont en $0 \Rightarrow f$ cont.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0, \forall x\in E$:

$\|x-0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(0)\|<\varepsilon$.

Mais f est linéaire, cf $f(0)=0$, dc

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in E : \|x\|<\delta \Rightarrow \|f(x)\|<\varepsilon$.

De cela on ns demande de déduire :

$\forall a\in E, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in E$:

$\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$.

De nouveau on pt simplifier, f linéaire, en particulier $f(x)-f(a)=f(x-a)$

ce q donne ppté à dmq :

$\forall a\in E, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in E$:

$\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x-a)\|<\varepsilon$.

On sait $\forall \varepsilon_1>0, \exists \delta_1>0, \forall y\in E : \|y\|<\delta_1 \Rightarrow \|f(y)\|<\varepsilon_1$.

On veut $\forall a\in E, \forall \varepsilon_2>0, \exists \delta_2>0, \forall x\in E : \|x-a\|<\delta_2 \Rightarrow \|f(x-a)\|<\varepsilon_2$.

Pour cela on prend $\varepsilon_2>0$ et $a\in E$ arbitraire, on cherche $\delta_2>0$ q convient. Cela se ressemble $y ::= x-a$ pr avoir m̂ implicaᵒs. $\forall\ \varepsilon_1>0$, pr $\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

Cela ns donne $\delta_1>0$ q vérifie :

$\forall y\in E : \|y\|<\delta_1 \Rightarrow \|f(y)<\varepsilon_1=\varepsilon_2$

cf pour $y=x-a$:

$\|x-a\|<\delta_1 \Rightarrow \|f(x-a)\|<\varepsilon_2$.

Il suffit de prendre $\delta_2=\delta_2$ pr avoir m̂ valeur.

$\|x-a\|<\delta_2=\delta_1 \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|=\|f(x-a)\|<\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

(ii) soit $f:\mathbb{R}\to E$ (AL). Pr mq cont, il suffit d'après qᵒ précédente de mq qu'elle est cont en 0.

On veut :

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in\mathbb{R} : |x|<\delta \Rightarrow \|f(x)\|<\varepsilon$.

Mais f est linéaire & x : nbre réel, par définiᵒ d'une norme sur E :

$\|f(x)\|=\|x.f(1)\|=|x|.\|f(1)\|$.

Pr mq conti en O, on prend $\varepsilon > 0$ arbitraire, on cherche $\delta > 0$ q convient.

Si δ convient : on a ep :

$|x| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| = |x| . \|f(1)\| < \|f(1)\| . \delta$.

On souhaite avoir $\|f(x)\| < \varepsilon$, il suffit de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f(1)\|}$. MS on ne pt pas diviser par 0. Donc il ft distinguer $f(1) = 0$ et $f(1) \neq 0$. Ds 2° cas : δ convient.

1° cas : Rq : $f(x) = x . f(1) = 0$ ie f est cte nulle, de applicat cont. On choisit $\delta = \sqrt{\pi}$.

$|x| < \sqrt{\pi} \Rightarrow \|f(x)\| = |x| . \|f(1)\| = |x| . 0 = 0 < \varepsilon$.

(iii) soit $f : \mathbb{R}^n \to E$ (AL) ; q° m'c dt : f cont en $0 \in \mathbb{R}^n$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$.

On nous impose $\|\cdot\|_1$:

$\|x_1, \dots, x_n\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

On doit trouver un lien entre $|x_i|$ et $\|f(x)\|$ pr trouver $\delta > 0$ q convient pr $\varepsilon > 0$ arbitraire.

On sait m'ns x_i st coeff du vecteur x p/ base canoniq $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$.

On pt de calcler en usant linéarité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

D'où la majorat :

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i f(e_i)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|f(e_i)\|$$

On cherche à mq :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$$

Il faut relier $\|f(x)\| < \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|f(e_i)\|$ &
$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \delta$.

Calcul :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\|$$

$$= \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\| . \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Rédac° courte :

Pr mq f cont en 0, prenons $\varepsilon > 0$ arbitraire

et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + \max(\|f(e_1)\|, \dots, \|f(e_n)\|}$

pr mq ce $\delta > 0$ convient, on prd $x \in \mathbb{R}^n$ arbitraire

MQ vérifiant $\|x\|_1 < \delta$;

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \, f(e_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|f(e_i)\|$$

$$\leqslant \max \|f(e_j)\| . \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$= \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\| . \|x\|_1 < \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\| . \delta$$

$$= \frac{\varepsilon . \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\|}{1 + \max_{j=1,\dots,n} \|f(e_j)\|} < \varepsilon .$$

Ainsi f est est cont en 0 ¢ voulu.

M32 (Fonctions de plusieurs variables) DS1

7 novembre 2020   9h00 - 11h00

Nota Bene : les justifications de vos réponses sont aussi (voire **PLUS**) importantes que les réponses en soi !

1. Questions de cours — Définitions. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E$ un sous-ensemble, $\ell \in F$ et soit $f : A \to F$ une application.

i) Donner la définition d'une norme sur E.

ii) Donner la définition de deux normes équivalentes sur E.

iii) Donner la définition d'un ensemble ouvert dans E.

iv) Donner la définition d'un ensemble fermé dans E.

v) Donner la définition d'un voisinage (ouvert) d'un point $a \in E$. $B_\varepsilon(x) \wedge A \neq \emptyset$.

vi) Donner la définition d'un point d'adhérence de A.

vii) Donner la définition d'un point d'accumulation de A. $\exists a$, $a \neq x$, $a \in B_\varepsilon(x)$.

viii) Donner la définition de " $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ " et préciser sous quelles hypothèses on peut dire cela.

ix) Pour $a \in A$, donner la définition de " f est continue en a ".

x) Donner la définition de " f est continue sur A ". $g^x 20$ $80'$

2. Question de cours. Soient E un espace vectoriel, soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit $A \subset E$ un sous-ensemble. Montrer que A est borné par rapport à la norme N_1 si et seulement si A est borné par rapport à la norme N_2. $g^x 40$

3. Question de cours. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E$ un sous-ensemble, soit $f : A \to F$ une application, soit $\ell \in F$ et soit $a \in E$ un point d'accumulation de A. Montrer que les deux propriétés (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes.

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$;

(ii) $\forall O$ voisinage ouvert de ℓ $\exists U$ voisinage ouvert de a: $U \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$.

compact?

4. Exercice. Pour les fonctions $f : A \to \mathbf{R}$ suivantes dire si oui ou non (avec justification !) il existe $x_m, x_M \in A$ tels qu'on a la propriété

$$\forall x \in A : f(x) \le f(x_M) \qquad \text{et/ou} \qquad \forall x \in A : f(x_m) \le f(x) \ .$$

a) $A = \,]-1,1[\, \subset \mathbf{R}$ et $f : A \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

b) $A = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4 \text{ et } |y| \le 1 \} \subset \mathbf{R}^2$ et $f : A \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x+y} \cdot \sin(y - x)$.

c) $A = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 + y^2 \le 4 \text{ et } |y| \le 1 \} \subset \mathbf{R}^2$ et $f : A \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^2$.

5. Exercice. Soit $f, g, h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 1$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = (1-x)\cdot\frac{|y|^3(x+1) - x^3}{x^4 + |y|^3} \ , \ g(x,y) = (1-x)\cdot\frac{|y|^3(x+1) + x^4}{x^4 + |y|^3} \ , \ h(x,y) = \frac{x^8 + x^4\,|y|^3 + |y|^6}{\left(x^4 + |y|^3\right)^2} \ .$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

b) Montrer que g est continue sur $\mathbf{R}^2$.

c) Est ce que h est continue en $(0,0)$? (N'oubliez pas de justifier !)

Attention: lisez bien l'énoncé et n'agissez pas par réflexe pavlovien!

Barème indicatif : Q1 : 5 points ; Q2 : 2,5 points ; Q3 : 4 points ; Q4 : 4,5 points ; Q5 : 4 points.