Théorie des Ensembles

C1 5 premiers axiomes

Z1 Axiome extensionabilité

$\forall A, B : [\forall C, C \in B \Leftrightarrow C \in A]$
$\Rightarrow A = B.$

D.1.1 $A \subset B$ un sous-ensemble donné par :
$\forall C, C \in B \Rightarrow C \in A.$

L.2 si $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$

Preuve : on sait $A \subset B$, ie
$\forall C.\ C \in B \Rightarrow C \in A.$
on sait $B \subset A$, ie
$\forall D.\ D \in A \Rightarrow D \in B$
ovmq $A = B.$
Prenons $C = D.$
$\forall C, C \in B \Rightarrow C \in A$
$\forall C, C \in A \Rightarrow C \in B$
Donc $\forall A, B$:
$[\forall C, C \in B \Leftrightarrow C \in A]$
D'après le lemme Z1, Axiome d'extensionalité
$A = B$ □

L.3 si $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Preuve : on sait $A \subset B$ ie
$\forall D.\ D \in B \Rightarrow D \in A.$
on sait $B \subset C$ ie
$\forall E.\ E \in C \Rightarrow E \in B.$
ovmq $A \subset C$ ie
$\forall D, D \in C \Rightarrow D \in A.$
on suppose que $D = E.$
$\forall D, D \in B \Rightarrow D \in A$
$\forall D, D \in C \Rightarrow D \in B.$
$\rightarrow \forall D, D \in C \Rightarrow D \in B \Rightarrow D \in A$ □

(L_3 : transcript° transitivité implicat° logique)

$\neg(a \in A) \Leftrightarrow a \notin A \mid \neg(a \subset A) \Leftrightarrow a \not\subset A$

Z2 Axiome d'ens vide
$\exists B, \forall A : B \notin A.$

L4 Il n'existe qu'un seul ensemble vide.

Preuve : Si 2 ens vides A, B,
$\forall C : C \notin A$ et $\forall C : C \notin B.$
on a : $C \in A \Leftrightarrow C \in B.$
D'après Z1 AEX : $A = B.$ □

Z1 & Z2 $\Rightarrow$ construct° & unicité

Z3 Axiome de la Paire.
$\forall A, B, \exists C \forall D$:
$D \in C \Leftrightarrow [D = A$ ou $D = B]$
C est unique, par Z1 EX,
C est déterminé par A et B.
$C = \{A, B\}$

Z4 Axiome de Réunion
$\forall A\ \exists B\ \forall C,$
$C \in B \Leftrightarrow [\exists D : D \in A$ et $C \in D]$

Notat° : $B = \bigcup_{D \in A} D$
ou $B = \bigcup A.$

▶ $\bigcup \emptyset = \emptyset$

D (Réunion) $X \cup Y \stackrel{def}{=} \bigcup\{X, Y\}$

L.9 $\forall A, X : X \in A \Rightarrow X = \bigcup A = \bigcup_{D \in A} D$

Preuve : Use° Z4 Réunion de choix $C = X.$

Z5 Axiome de Séparat°
$\forall A\ \exists B\ \forall C : C \in B \Leftrightarrow [C \in A$ et $p(C)]$

Notat° : $B \stackrel{not}{=} \{C \in A \mid p(C)\}$

Notat° séparat° : $C \cap A = \bigcap_{D \in A} D$

$\Longleftrightarrow \forall D \in A : C \in D.$

(L.12) Existence & Unicité de l'intersect°.

$\forall A.\ A \neq \emptyset \Rightarrow [\exists B\ \forall C : C \in B \Leftrightarrow \forall D : D \in A \Rightarrow C \in D]$

Preuve : (24) Réunion, déf : $X = \bigcup A = \bigcup_{D \in A} D.$

puis (25) S. ϕ X et p(x) :

$B = \{C \in X \mid \forall D : D \in A \Rightarrow C \in D\}$

Par défi° B : $C \in B \Leftrightarrow [C \in X \text{ et } (\forall D : D \in A \Rightarrow C \in D)$

d'où $C \in B \Rightarrow (\forall D : D \in A \Rightarrow C \in D)$

2k sens, $A \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists Y : Y \in A$ et hypo $\forall D : D \in A \Rightarrow C \in D.$

on prend $D = Y$: conclu $C \in Y.$

$X \cap Y \overset{not}{=} \cap \{X, Y\}$