M-52 Pr: Leonid Potyagailo

TOPOLOGIE

CALCULS INTÉGRALES

Espaces Vectoriels Normés

1. normes, normes équivalentes, exemples classiques ; ouverts, fermés, intérieur et adhérence d'une partie, parties denses, caractérisation séquentielle ; compacité (définition séquentielle).

Fonctions entre espaces vectoriels normés

1. **limite**, continuité, applications lipschitziennes; image continue d'un compact ; théorème du point fixe contractant.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. équivalence des normes et continuité des applications linéaires, les compacts sont les fermés bornés.

2. Intégrales doubles et formule de Green-Riemann : intégrale d'une fonction continue sur unpavé du plan ; sous-ensembles quarrables du plan et leurs aires, exemples des parties élémentaires $(x, y) \in R^2; a \leq x \leq b, \varphi 1(x) \leq y \leq \varpi 2(x)$ avec φ 1 , φ 2 continues ; intégrales sur un sous-ensemble quarrable duplan, théorème de Fubini (admis), formule du changement de variable (admise) ; champs de vecteurs sur un ouvert de R 2 , rotationnel, intégrale curviligne et formule de Green-Riemann (admise).

M 52 - Topologie & Calculs d'intégrales

(C0) Rappels sur Espaces Vectoriels

(D)₁ Un ens V est appelé espace vectoriel (e.v.) sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opérations (addition & multiplication) entre les élts de V.

- Addition entre les vecteurs

$+ : V \times V \to V$, $\forall x,y \in V : (x,y) \mapsto x+y$

$\forall x,y,z \in V$:
- $x+y = y+x$
- $x+(y+z) = (x+y)+z$
- $\exists\, 0 \in V,\ 0+x = x$
- $\forall x \in V, \exists y \in V : x+y=0,\ y := -x$.

Multiplication entre les vecteurs

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in V$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x,y \in V$:
  - $\alpha\cdot(\beta x) = (\alpha\cdot\beta)x$
  - $1 \cdot x = x$
  - $(\alpha+\beta)x = \alpha\cdot x + \beta \cdot x$
  - $\alpha(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha \cdot y$

(D)₂ • Un syst fini de vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est libre si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

• Un syst qq vct^{rs} $\{e_i : i \in I\} = E$ est libre si tt "système fini de E est libre.

(D)₃ V est dim $n \in \mathbb{N}$ s'$\exists$ (st) n vecteurs & tt syst de $n+1$ vecteurs n'est pas libre.

(D)₄ 2 ev sur $\mathbb{K}$: V & V^* st isomorphes s'$\exists$ appli bijective $\varphi : V \to V^*$ q respecte les opérations.

si $\begin{array}{l}\varphi(v) = v^* \\ \varphi(u) = u^*\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\varphi(u+v) = u^* + v^* \\ \varphi(\lambda u) = \lambda u^*\end{array}$

(D)₅ Un ss-ens V_1 de l'ev V est dit ss-espace de V si V_1 est un (ev) pour mêmes opérations.

(Ppté) si $V_i \subset V$ $(i \in I)$, un sev alors $V^* = \bigcap_{i\in I} V_i$ est un ss-espace de V.

(D)₅ soit X un ss-ens d'1 ev V.

On note $\mathrm{Vect}(X) = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ x_i \in K\}$

↳ ttes CL finies de vect^{rs} de X.