TBFE

$B_m \subset B_n$

- $d(x_m, x_n) \leq r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dc $(x_n)_n$ de Cauchy
  Par complétude, $\exists x$,
- $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, idem on dc x pt adhérent
- $\overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n$, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$
  si $y \in \bigcap_{n\geq 1} B_n \Rightarrow d(x,y) \leq 2r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

TH Baire

Spp pas vrai : $\mathrm{int}(F) \neq \emptyset$

$\exists$ ble ouverte $B \subset F$, $\mathrm{int}(F_1) = \emptyset$

dc $B \not\subset F_1$ $\exists x_1 \in B \setminus F_1$

F_1 fermé dc $F_1^c = X \setminus F_1$ ouvert

$\Rightarrow B \cap F_1^c$ ouvert

$\exists B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

$\overline{B_1} \subset B \setminus F_1$. idem B_2

$r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{2}\right)$

$\overline{B_2} \subset B_1$; $d(y, x_1) \leq \ldots$

dc $\overline{B_2} \subset B_1 \subset \overline{B_1}$

PR $\overline{B_k}$ tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$

$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$, $\mathrm{int}\, F_{k+1} = \emptyset$

$\Rightarrow \exists x_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$

$r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{r_k - d(x_k, x_{k+1})}{2}\right)$

$\Rightarrow \overline{B_{k+1}} \subset B_k \subset \overline{B_k} \Rightarrow \overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$

$r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Par TH BFE, $\exists! x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

$x \in B_i \subset F_i^c \Rightarrow x \notin F_i$

EL $x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

Cor TH Baire

$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ← ens mpd

X n'est pas réunion dé ss-ens mpd

A_n mpd ssi $\mathrm{int}(\overline{A_n}) = \emptyset = \mathrm{int}(F_n)$

si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

mais $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$.

Par TH Baire, $\mathrm{int}(X) = \emptyset$ C?!

$A \subset X$ est dense si $\overline{A} = X$.

($\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$)

$\mathbb{Q}$ dense ds $\mathbb{R}$. Ds $C[a,b]$ poly à coeff ratio

ℓ_∞ ne possède pas de ss-ens dénomb (séparable)

$\ell_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ $a_n \in \{0,1\}$

$A_n = \{(a_n)_n\}$

$|A| = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1 > \aleph_0$

$\|a_n - b_n\|_\infty = 1$ si $(a_n)_n \neq (b_n)_n$

$A \cap B(a, \frac{1}{2})$, $a \in A$ disjts

si $B \subset (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est dense $\Rightarrow$ chq boule $(a, \frac{1}{2})$ contient $b \in B_a$

$\mathrm{card}(\{B(a,\frac{1}{2}), a \in A\}) = \mathrm{card}(A)$

Dc B n'est pas dénomb

$A \subset X$ ← ens mpd si $\forall B(a,r) \subseteq X$, $\exists$ ss-ble $B \subset B(a,r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.

(X,d) est complet si tte sdC cv ds (X,d)

$\mathbb{Z}$ & $\mathbb{N}$ complets ds $\mathbb{R}$.

$\forall$ ens à pts isolés : Tte SdC se stabilise à partir d'un certain rang

Mq $\forall$ ss-ens $A \subset X$, X espace complet ssi $A \subset X$ est fermé.

($\Leftarrow$) $(x_n) \subset A$ SdC psq X complet

$\exists x \in X$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $x \in \overline{A}$,

$\overline{A} = A$ (A fermé) $\Rightarrow x \in A$.

($\Rightarrow$) si $x \in \overline{A}$, $\exists (x_n) \subset A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

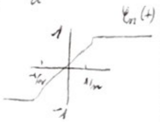
(x_n) cv $\Rightarrow (x_n)$ SdC $\Rightarrow x \in A$ car A complet

dc $\overline{A} = A$.

Mq $C_2[a,b]$ n'est pas complet

$\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2 dt$ & $\|f-g\| = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx\right)^{1/2}$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 & , 1/n \leq t \leq 1 \\ nt & , -1/n \leq t \leq 1/n \\ -1 & , -1 \leq t \leq -1/n \end{cases}$$



Mq (φ_n) est SdC ds $C_2[-1,1]$ q n'y cv pas

$\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|^2 = \int_{-1/m}^{1/m} (m-n)^2 t^2 dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^2 dt + \int_{-1/n}^{-1/m} (-1-nt)^2 dt$

$= \ldots \leq \frac{8}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\lim \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases}$

$\varphi \notin C[-1,1]$, elle est discontinue en 0.

Spp ⓐ $\exists f \in C[-1,1]$ tq $\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Par ineg Mink$^{(*)}$, $\left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi(t))^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi_n(t))^2\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t)-\varphi(t))^2\right)^{1/2}$ sans ma preuve.

$\underset{\text{cont}}{f(t)} \neq \underset{\text{discont}}{\varphi(t)}$; $\psi(t) = (f(t) - \varphi(t))^2$ cont.

$\exists t_0 \in \mathbb{R}^* : \psi(t_0) = c_0 > 0$; par cont ψ en 0,

$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \psi(t) \geq 0$

(*) minoré p $e = \sqrt{2\varepsilon c_0} > 0$

dc à droite : $\|f - \varphi_n\| \not\to 0$ dc $f \notin C[a,b]$

$\exists n_0, \forall m, n \geq n_0, x_m = x_{n_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet car $\exists (q_n) \subset \mathbb{Q}$: $q_n \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(q_n) est Cauchy q ne cv ds $\mathbb{Q}$.

Mq A mpd ssi $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$

($\Leftarrow$) si $B(a,r) \subseteq X$, psq $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$,

$B(a,r) \not\subset \overline{A} \Rightarrow \exists b \in B(a,r) \cap \overline{A}$

$\overline{A}^c$ est ouvert $\exists B' = B(b,r') \subset \overline{A}^c$

Dc $B' \cap A = \emptyset$.

($\Rightarrow$) si $\forall B(a,r)$ cont^t $B' \subseteq B(a,r)$ tq $B' \cap A = \emptyset \Rightarrow \forall x \in B', x \notin \overline{A}$

$\Rightarrow B(a,r) \not\subset \overline{A} \Rightarrow \mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Mq ℓ_2 complet

Spps $(x_n) \subset \ell_2$ SdC, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$,

$\forall m, n > n_0$, $\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2$ (*)

Ds (*), $x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i^n - x_i^m| \leq \varepsilon^2$, $\forall i \in \{1, \ldots\}$ (**)

Par (**), $(x_i^n)_n$ SdC $\forall i \in \{1,\ldots\}$, $\mathbb{R}$ complet $\Rightarrow$

$\exists x_i \in \mathbb{R}$, $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. On pose $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$

en passant à la limite si $m \to \infty$ ds (*),

$\|x_n - x\|^2 \leq \varepsilon^2$, $\forall n > n_0$. Puis mq $x \in \ell_2$ ie

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ (***). Ds $\mathbb{R}^m$, on a dmqé complet

$(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2$: $x_i^2 = (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 \leq 2(x_i - x_i^n)^2 + 2(x_i^n)^2$

On a $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \infty$ p ⊛, $\sum (x_i^n)^2 < \infty$

car $x_n \in \ell_2$, p crit compar séries termes ⊕

dc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $x \in \ell_2$

$\forall$ ev, $\|\cdot\|_i : V \to \mathbb{R}_+$, 2 normes s V $(i=1,2)$

$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

si $\exists c_1, c_2 > 0$, $\forall x \in V$:

$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$.

Mq $\|\ \|_\infty \sim \|\ \|_2$

$|x_i| < \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_i |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Mq $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

$|x_i| \leq \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_i |x_i| = n \|x\|_\infty$

d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

Dc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ par transitivité

Pq $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ ne st pas équivalentes

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ne st pas équivalentes sr $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ car $\left(\frac{1}{n}\right)_n \in \ell_2 \setminus \ell_1$

car $\sum \frac{1}{n} = \infty$ & $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n \in \ell_\infty \setminus \ell_2$ car $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$

$\ell_1 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_1)$, $\ell_2 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2)$, $\ell^\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$\|(\frac{1}{\sqrt{n}})_n\| = 1$.

Mq $F \subset V$ fermé ssi $\overline{F} = F$

(par déf° $F \subset \overline{F}$)

($\Rightarrow$) Mq $\overline{F} \subset F$, si $x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ ouvert

$\exists U_x : U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{F}$.

($\Leftarrow$) si $x \notin F = \overline{F}$, $\exists U_x, U_x \cap F = \emptyset$

car $x \notin \overline{F}$. $U_x \subset F^c \Rightarrow F^c \subseteq V$ dc F est fermé

Mq $\overline{F}$ est + petit ss fermé de V contenant F

Mq $\overline{A} = \bigcap_{F \subset V, A \subset F} F$ est fermé $\Leftrightarrow$ Mq $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

On a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$, mq $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, soit $x \in \overline{\overline{A}}$

$\Rightarrow \forall U_x, U_x \cap \overline{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in U_x \cap \overline{A}$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$, dc $\overline{A}$ est fermé.

→ si F est fermé q contient A : $F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$

soit $x \in F^c$ psq F est fermé : $\exists U_x, U_x \subset F^c$

car $F^c \subseteq V \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \cap A = \emptyset$

car $A \subset F \Rightarrow x \notin \overline{A}$. dc $F^c \subset \overline{A}^c \Rightarrow \overline{A} \subset F$

Mq $\partial(B(a,r)) = S(a,r)$ $\Leftrightarrow$ Mq $\forall \delta > 0$:

$B(x,\delta) \cap B(a,r) \neq \emptyset \wedge B(x,\delta) \cap B^c(a,r) \neq \emptyset$,

fixe $\delta > 0$, $y = a + \lambda(x-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, cherche $\lambda > 0$

tq $y \in B(x,\delta) \cap B(a,r)$. $\|y - a\| = \lambda \|x - a\| = \lambda r < r$ si $\lambda < 1$

$\|y - x\| = \|a - x\| |\lambda - 1| = r(1-\lambda)$ car $\lambda < 1$

(**) Mq $\exists z \in B(x,\delta) \cap B^c(a,r)$, pose $z = a + \mu(x-a)$

$\mu > 1 \Leftrightarrow \|z - a\| > r$.

$\|z - x\| = \|x - a\| (\mu - 1)$ car $\mu > 1$

$r(\mu - 1) < \delta$

$1 < \mu < 1 + \frac{\delta}{r} \Rightarrow$ (**)

si $A = \mathbb{Q}$,

$\overline{A} = \mathbb{R}$ $\quad \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R}$

$\mathring{A} = \emptyset$ $\quad \Lambda(A) = \emptyset$ $\quad \mathrm{Isol}(A) = \mathbb{Q}$.

$\bar{A}$: $\forall U_x$ de a, $U_x \cap A \neq \emptyset$

$\mathring{A}$: $\exists U_x$, $U_x \subset A$.

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$\Lambda(A)$: $\exists U_a$, $card(U_a \cap A) \geq 2$

$A'(A)$: $\exists U_a$, $U_a \setminus \{a\} \neq \emptyset$

$Isol(A)$: $\exists U_a$, $U_a \cap A = \{a\}$

Mq $S(a,r)$ est ens fermé

$S(a,r) = \overline{B(a,r)} - B(a,r)$

$S^c(a,r) = B(a,r) \cup (\overline{B(a,r)})^c$

est réunion 2 ss-ens ouverts est ouvert

$F \subset V$ fermé si son complément $F^c = \{x \in V, x \notin F\}$ est ouvert

Mq inters° qq fermés est ens fermé

soit $\forall \alpha \in A$, $(D_\alpha)^c \textcircled{c} V$

$\Rightarrow (\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha^c \textcircled{c} V$

Mq réunion finie de fermés est ens fermé

si $(D_i)^c \textcircled{c} V \Rightarrow D^c = (\bigcap_{i=1}^k D_i)^c = \bigcup_{i=1}^k D_i^c \textcircled{c} V$.

Définir ens ouvert de V

V evn, ss-ens $D \subset V$ est ouvert si $\forall x \in D$, boule ouverte $B(x,\delta) = \{y \in V : \|y-x\| < \delta\}$ est contenue ds D

Mq boule ouverte est ens ouvert

$B(a,r) = \{x \in V, \|x-a\| < r\}$

soit $\delta = r - d(a,x) > 0$

$\forall y \in B(x,\delta)$:

$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$

$< d(a,x) + \delta$

$= d(a,x) + r - d(a,x)$

$\forall y \in B(x,\delta)$: $y \in B(a,r)$

Mq réunion qq ouverts est ouvert

soit $x \in D \Rightarrow \exists \alpha \in A$, $x \in D_\alpha$.

pq $D_\alpha \textcircled{c} V \Rightarrow \exists U_x$ de x tq $U_x \subset D_\alpha$

$D_\alpha \subset D$ dc D est ouvert.

Mq inters. finie ouverts est ouvert

soit $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,k\}$, $x \in D_i$

pq $D_i \textcircled{c} V \Rightarrow \exists \delta_i > 0$, $B(x,\delta_i) \subset D_i$.

Soit $\delta = \min_i \delta_i > 0$.

On a $B(x,\delta) \subset D_i$, $\forall i \Rightarrow B(x,\delta) \subset D$.

ens V est ev sur corps $\mathbb{K}$ s'il y a 2 opérations (additio & multi) entre élts de V

si $V_i \subset V$ $(i \in I)$, sev $\Rightarrow V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est sev de V.

Mq inters° qq sev est sev

si $u,v \in V^* \Rightarrow \forall i \in I$, $u,v \in V_i$,

$u+v \in V_i$, $\lambda u, \lambda v \in V_i$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \in I$

$\Rightarrow u+v \in V^*$, $\lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est ss-espace de V.

soit V ev sur $\mathbb{K}$, $f : \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si $\forall x,y,z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

*** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Mq $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x-y\| = \|x+(-y)\| \overset{I}{\leq} \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

D'où $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

L'espace normé $(V, \|\cdot\|_2)$ possède distance euclid $d(x,y) = \|x-y\|_2$

tq $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ vérifie 3 axiomes :

* $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

** $d(x,y) = d(y,x)$

*** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Mq $\boxed{I}$ CBS $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2\right)^{1/2}$$

ie $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

en sach^t q $\sqrt{ab} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ (*)

soit $a = \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$, $b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$,

$* \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right)$ (**)

on somme sur $i \in [\![1,n]\!]$ de (**)

$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{1}{2}(1+1)$ car $\frac{x_i^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum x_i^2}{(\sqrt{\sum x_i^2})^2}$

$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$

$\boxed{I}$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow$

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$

$\to \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$

dc $\langle x,y \rangle \leq \|x\| \|y\|$

En déduire $\boxed{I}$

$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ e CBS

$\Leftrightarrow 2|\langle x,y \rangle| \leq 2\|x\| \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$

$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Mq $x \in \partial A$ ssi $\forall U_x$: $U_x \cap A \neq \emptyset \wedge U_x \cap A^c \neq \emptyset$

$(\Rightarrow)$ soit $x \in \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$, U_x tt vois de x

$U_x \not\subset A$ car $x \notin \mathring{A}$ d'où $U_x \cap A^c \neq \emptyset$

ps $x \in \bar{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ sppo $\forall U_x$: $U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

$U_x \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow U_x \subset A \Rightarrow x \notin \mathring{A}$.

Mq (ev) ℓ_2 est normé

$\ell_2(\mathbb{K})$: ens suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^\infty |u_n|^2\right)^{1/2} < \infty$,

d'après $\boxed{I}$ Mk : $\to \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$

$\left(\sum |u_n+v_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum |u_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum |v_n|^2\right)^{1/2}$

$\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$

ĉ $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$ il vient

$\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in \ell_2(\mathbb{K})$.

Puis $\|\lambda u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^\infty |\lambda u_n|^2\right)^{1/2}$

$= \left(|\lambda|^2 \sum_{n=0}^\infty |u_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \|u\|_2$

dc $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2$ & $\lambda u \in \ell_2(\mathbb{K})$

de m̂ $\|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0$.

D'où $\ell_2(\mathbb{K})$ est ev. normé

Mq ev $C_2[a,b]$ est normé

$C[a,b]$ espace f cont sur $[a,b]$ à v$^{\mathbb{R}}$ ds $\mathbb{K}$, on def $f \in C_2([a,b])$,

$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

Mq $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$

$\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

$\|f+g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2$

M4e

Ex 4 $-\infty < a < b < \infty$, $\mathcal{C}([a,b])$ edfc ds $\mathbb{K}$.

Pr $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $p = 1, 2, \infty$.

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

a) Mq pr $p = 1, 2, \infty$, $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$ est evn.

C'est un ev - (Mq groupe abélien + distribut/associ. [scal?? mult?])

Mq ev est normé.

$\|f\|_2 = 0 : \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow f = 0$

$\|\alpha f\|_2 = \left(\int_a^b |\alpha f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\alpha| \left(\int_a^b |f(t)|^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \|f\|_2$

$\|f+g\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \underset{\text{IM}}{\leq} \int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt$

$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Ex 10 $\forall$ sev F de E, $\overline{F}$ aussi sev de E, soit $F \subset E$ sev

Soit $F \subset E$, mq $\overline{F}$ sev de E $\Leftrightarrow$ $u, v \in \overline{F}$ qq, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\to u+v \in \overline{F}$, $\lambda u \in \overline{F}$.

1) $u, v \in \overline{F}$, $\exists$ 2 suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ ds F tq :

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v \Rightarrow \|(u_n+v_n) - (u+v)\| \leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\|$, chacun $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

or $u_n + v_n \in F$ car $u_n, v_n \in F$, F sev dc $u+v \in \overline{F}$.

2) $\|\lambda u_n - \lambda u\| = |\lambda| \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ or $\lambda u_n \in F$ car $u_n \in F$, F sev. Dc $\lambda u \in \overline{F}$

Ex 11

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\}$

Soit appli $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^5$, g étant cont ; $g^{-1}(\{2\}) = B$ est fermé car $\{2\}$ fermé dc B est fermé

Pas borné

$x_n^2 + y_n^5 = 2 \to x_n = \sqrt{2 - y_n^5}$ $\qquad (x,y) = (x, -n)$

$x^2 + (-n^5) = 2 \to x = \sqrt{2 + n^5}$ $\qquad (\sqrt{2+n^5}, -n)$

$\sqrt{2+n^5}^2 + (-n)^5 = 2 + n^5 - n^5 = 2(1+n^5)$ ~~$\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$~~ 2

a $\|(x_n, y_n)\|_\infty \geq |n| \longrightarrow \infty$ dc pas borné.

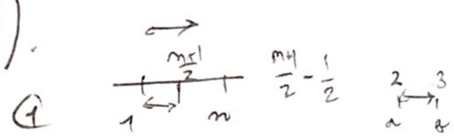
$A_5 =]-\infty, 1]$, ce n'est pas ouvert car $1 \in A_5$ mais $\forall r > 0$, $B(1, r) \not\subset A_5$. En effet $1 + \frac{r}{2} \in B(1,r)$ mais $1 + \frac{r}{2} \notin]-\infty, 1]$.

C'est un fermé car $A_5^c =]1, \infty[$ ← ouvert

$]1, \infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]1, n[$
$= \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$.

$\sum |x_i y_i| = \sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$



$\frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\left|\frac{n+1}{2} - \frac{2}{2}\right| = \frac{n-1}{2}$.

compact : dim finie borné + fermé

$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_1$

Ex 18 : $E = (C_{[0,2\pi]}, \|\cdot\|_2)$; $f_n(t) = e^{int}$.

$\|f_n - f_p\|_2^2$ ← besoin ajout

$= \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f_p(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |e^{int} - e^{ipt}|^2 \, dt$

$= \int_0^{2\pi} (e^{int} - e^{ipt})(e^{-int} - e^{-ipt}) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 - e^{it(n-p)} - e^{it(p-n)} + 1 \, dt$

$= \int_0^{2\pi} 2 - e^{i(p-n)t} - e^{i(n-p)t} \, dt$ considérer 2 cas

$\underline{p=n}$ $\|f_n - f_p\|_2^2 = 0$.

$p \neq n$ $= \left[2t - \frac{1}{i(p-n)} e^{i(p-n)t} - \frac{1}{i(n-p)} e^{i(n-p)t}\right]_0^{2\pi}$

$= 4\pi -$

on $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} e^{i2\pi} = e^{ix}$

$\|f_n - f_p\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p = n \\ 2\sqrt{\pi} & \text{si } p \neq n. \end{cases}$

(x_n) SdC si $\forall \varepsilon \, \exists N \, \forall p,q \geq N : \|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

$|x-y| = (x-y)(\bar{x} - \bar{y})$ $|z|^2 = z\bar{z}$

1 **Ex 1** Mq $x \mapsto \|x\|$ est cont.

Mq f est lipschitz $\forall x,y \in C$: 1 lipschi ⇒ cont.

$|f(x) - f(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

Ex 3 soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ $A : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t) \, dt$ est-elle cont sur E si muni $\|\cdot\|_\infty$

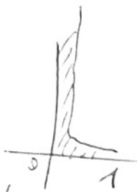
$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$

f, g qq $\in E$

$|A(f) - A(g)| = \left| \int_0^1 f(t) - g(t) \, dt \right| \leq \int_0^1 \max_{[0,1]} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty$.

dc A est 1-lipschitz, elle est cont p/ $\|\cdot\|_\infty$.

$B : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ cont p/ $\|\cdot\|_\infty$ <u>MS</u> pas p/ $\|\cdot\|_1$.



$|f(0) - g(0)| = |h(0)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt = \int_0^1 |h(t)| \, dt$

$\|h_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (calcul) $h(t) = (1-t)^n$

MS $B(h_n) = h_n(0) = (1-0)^n = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Mq B n'est pas cont en tt pt $f \in E$,

$B(f + h_n) - B(f) = (f + h_n)(0) - f(0) = f(0) + h_n(0) - f(0) = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ex 5 Mq $A = \{x \in E_1, f(x) = g(x)\}$ est fermé ds E_1.

$h(x) = f(x) - g(x) = \{0_E\}$ fermé → $h^{-1}(x) = \{0_E\}$ fermé

$\{x \in E, h(x) = 0_E\}$ fermé

Ex8 soit $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_\infty(A))$

$N_\infty(A) = \sup_{i,j} |a_{ij}|$, $A = (a_{ij})_{i,j}$

a) Mq trace est appli cont de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon\ \exists \delta$,

$N_\infty(X-A) < \delta \Rightarrow N_\infty(Tr(X) - Tr(A)) < \varepsilon$.

$N_\infty(X-A) = \sup |x_{ij} - a_{ij}|$

$N_\infty |Tr(X) - Tr(A)| = |\sum_i x_{ii} - \sum_i a_{ii}| = \sum_i |x_{ii} - a_{ii}|$

car $|x_{ij} - a_{ii}| < \sup |x_{ii} - a_{ii}|$ $\leq \sum \|X-A\|_\infty$ $= n \|X-A\|_\infty$.

de n $\|A-B\|_\infty = \delta = \frac{\varepsilon}{n}$

$|Tr(X) - Tr(A)| \leq n \|A-B\|_\infty = \varepsilon$

x Tr est cont.

O est dense ds $X \Leftrightarrow \bar{O} = X$

$\Leftrightarrow X \setminus \bar{O} = \emptyset \Leftrightarrow int(X \setminus \bar{O}) = \emptyset$

$\Leftrightarrow \mathring{F} = \emptyset$.

$A^{\subset X}_{mpd}$ ds X ssi $\forall B(a,r) \subseteq X, \exists$ so-bf $B \subset B(a,r)$

tq $B \cap A = \emptyset$.

TBFE en (X,d) mv complet, $\forall$ suites de BF$_{\text{fermées}}$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$B_{n+1} \subset B_n$, rayon $(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors $\exists!\, x \in X$ tq

$x \in X$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$.

$B_m \subset B_n$, $d(x_m, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par complétude de X,

$(x_n)_n$ est SdC q cv, de ~~m~~ où $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, de m p m,

$\bar{B}_n = B_n \Rightarrow x \in B_n$, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$\Rightarrow d(x,y) \leq 2r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

A mpd ssi $int(\bar{A}) = \emptyset$: $\forall B(a,r) \subseteq X, \exists B \subset B(a,r)$ tq $B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow int(\bar{A}) = \emptyset$

$(\Leftarrow)$ soit $x \in int(\bar{A}) = \emptyset \Leftrightarrow B(a,r) \not\subset \bar{A} \Rightarrow$

$\exists y \in B(a,r) \cap \bar{A}$ or $\bar{A}^c$ ouvert $\exists B'$, $B'(y,r') \subset \bar{A}^c$

$\Rightarrow B' \cap A = \emptyset$.

$(\Rightarrow)$ $\forall B(a,r) \subseteq X, \exists B' \subset B(a,r)$ tq $B' \cap A = \emptyset$.

$\Rightarrow \forall x \in B', x \notin \bar{A} \Rightarrow B(a,r) \not\subset \bar{A} \Rightarrow int(\bar{A}) = \emptyset$.

$A \subset X$, X complet ssi A fermé pq X complet $\exists x$

$(\Leftarrow)$ $A = \bar{A}$, ~~soit~~ $(x_n)_n \subset A$ SdC, ~~cv~~ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in \bar{A}$

$\Rightarrow x \in A$.

$(\Rightarrow)$ X complet, si $x \in \bar{A}$, $\exists (x_n)_n \subset A$ tq $(x_n)_n$ cv de SdC

de $\lim x_n = x \Rightarrow x \in A$ car A complet de $A = \bar{A}$.

Mq $F \subset V$ est fermé ssi $\overline{F} = F$.

$F \subset \overline{F}$

Mq $\overline{F} \subset F$.

($\Longrightarrow$) F^c est ouvert, $B(a,r) \subset V$

Soit $x \notin \overline{F} \Rightarrow x \in F^c$: $\exists U_x$,

$U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin F$.

($\Longleftarrow$) si $\notin \overline{F} = F \Rightarrow \exists U_x, U_x \subset F^c$

$\Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow F^c \in V$ de F fermé.

Mq $\overline{F}$ est + ptt ss-ens fermé contnt F.

$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \subset V \\ A \subset F}} F$, Mq $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Mq $\mathbb{Z}$ n'est pas npd ds $\mathbb{R}$.

Suffit mq $\mathrm{int}(\overline{\mathbb{Z}}) = \emptyset$.

$\rightarrow$ Mq $\mathbb{Z}$ est fermé, soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ alors

$\exists$ suite $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ tq $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dc $\exists N, \forall n \geq N$, $d(x, x_n) < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N$:

$d(x, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$

ĉ $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$, on ed $x_n = x_m$.

Dc $x_n = x_N$, $\forall n \geq N$ & $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow d(x, x_N) = 0 \Rightarrow x = x_N \in \mathbb{Z}$ dc $\mathbb{Z}$ est fermé

$\rightarrow$ Mq $\mathrm{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

si ce n'était pas le cas alors $\mathbb{Z}$ contenant $]a, b[$ dq $a \neq b$.

Ce n'est pas possible.

TBFE si $\not\exists$ complet @ : $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

si $\not\exists$ $\overline{BF}$ @ : $X := \mathbb{R}$

si $r_n \not\to 0$ @ $X = \mathbb{R}$, $B_n = (1, 1 + \frac{1}{n}) = [-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}] = [0, 2]$

Ineg de Minkowski $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

DM $\|f\|_p = \int_0^1 |f|_p$

si $f=0$ ou $g=0$: clair. Supp $f\neq 0, g\neq 0$,

pose $\|f\|_p = \alpha$, $\|g\|_p = \beta$, $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow 1-\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

@ $\|f\|_p = \alpha$, $\|g\|_p = \beta$, $\exists$ 2 fs f_0, g_0 tq

$|f| = \alpha f_0$, $|g| = \beta g_0$ & $\|f_0\| = \|g_0\| = 1$.

Puis $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = (\alpha f_0 + \beta g_0)^p$

$= \left[(\alpha+\beta)\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} f_0 + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} g_0\right)\right]^p$

$= (\alpha+\beta)^p (\lambda f_0 + (1-\lambda) g_0)^p$

puis $f(t) = t^p$ est convexe pr $p \geq 1$.

$(f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0.$

dc $|f+g|^p \leq (\alpha+\beta)^p$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^p = \int_0^1 |f+g|^p dx \leq (\alpha+\beta)^p = (\|f\|_p + \|g\|_p)^p$