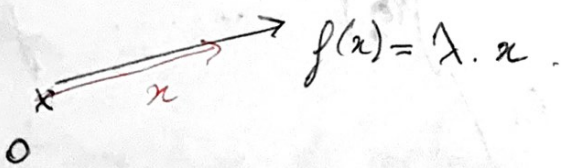
PCN soit V = espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dim finie.

→ soit $f : V \to V$ un endomorphisme cad une appli. linéaire de V dans V.

→ un vecteur propre de f est un vecteur $x \in V$, $x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda . x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



→ un sous-espace stable ?

un sous-espace $W \subset V$ est stable par f si $\forall y \in W$, on a $f(y) \in W$.

@ si x est un vecteur propre de f alors $W = Vect(x)$ = sev engendré par x.

$= \{ \alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K} \}$

est stable par f.

$y \in W \Rightarrow y = \alpha x$ et $f(y) = f(\alpha x) = \alpha . f(x)$

car f est linéaire

$\alpha f(x) = \alpha . \lambda x \in W$. de stable □

Autres @ de ss-espace stable (sec N_λ / sep E_λ)

④ λ vp de f.

$V(\lambda)$ = sous-espace propre de f

$= \{ x \in V \mid f(x) = \lambda x \}$

est stable par f.

Rq : $V(\lambda) = \ker (f - \lambda \, Id)$ sep.

sous-espace caractéristique de λ. applicat° linéaire

$$W(\lambda) = \{ x \in V \mid (f - \lambda I)^k (x) = 0 \}$$

pr un certain $k \in \mathbb{N}^*$

$$(f - \lambda I)^k \underset{def}{=} \underbrace{(f - \lambda I) \circ (f - \lambda I) \circ \dots \circ (f - \lambda I)}_{k \text{ facteurs.}}$$

puissance endomorphismes : composé f lui-m̂ est 1 s nbr fois

$W(\lambda)$ est stable par f : (le ss-espace caractéristiq)

$x \in W(\lambda)$ mq $f(x) \in W(\lambda)$.

$$(f-\lambda I)^k(f(x)) = \left[(f-\lambda I)^k \circ f\right](x)$$

$$= \left[f \circ (f-\lambda I)^k\right](x)$$ car f commute à $f-\lambda I$.

$$\left(\begin{aligned} &= (f\circ(f-\lambda I)) = f\circ f - f\circ(\lambda I) \\ &\qquad = f \circ f - \lambda f \\ &\qquad = (f-\lambda I)\circ f \end{aligned} \right)$$

si $k=2$

$f\circ(f-\lambda I)\circ(f-\lambda I) = \dots = (f\circ \lambda I)\circ f\circ(f-\lambda I)$

etc...

$\underline{\text{m } k \text{ qq.}}$

$$= f\Big(\underbrace{(f-\lambda I)^k(x)}_{=0}\Big) = f(0) = 0$$

R Matrices.

$f : V \to V$ endomorphisme.

soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V

La matrice de f ds cette base est la matrice $n\times n$ dt les colonnes st $c_1, \dots, c_n$ où c_j = coord de $f(e_j)$ ds $\{e_1, \dots, e_n\}$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots\cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = A.$$

Pour $\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

NB : $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = j$-ème colonne de A $\quad \leftarrow j = c_j$

A diagonale $\Longleftrightarrow A = \begin{array}{c|c} & f(e_1) \\ \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$

- $\Longleftrightarrow f(e_1) = \lambda_1 e_1,\ f(e_2) = \lambda e_2, \dots,$
  $f(e_n) = \lambda_n e_n$

$\Longleftrightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de vecteurs propres de f.

- $A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_k) & f(e_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_k \\ e_{k+1} \\ e_n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} ? & ? \\ \hline \emptyset & ? \end{array}\right) \end{array}$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Vec}(f(e_1), \dots, f(e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

$\Longleftrightarrow f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est <u>stable par f</u>.

- On dit que f est $\boxed{\text{trigonalisable}}$ si V possède une base ds laquelle la matrice de f est toujours triangulaire supérieure. $\begin{pmatrix} a_{11} & & ? \\ & \ddots & \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$

$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est f-stable.

Th : Sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme est trigonalisable.

ca : sur $\mathbb{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable car ses vp sont $\pm i \notin \mathbb{R}$.

Exos - Annales

→ soit (eV) sur $\mathbb{C}$.

$\mathcal{F}$ est une famille d'endomorphismes de V.
on suppose que pour tout $u, v \in \mathcal{F}$,
on a $u \circ v = v \circ u$. (chose très forte)

1) on suppose $\exists$ une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ tq les matrices de $u \in \mathcal{F}$ dans cette base soient toutes triangulaires (supérieures)

$$\begin{array}{c|c}
 & u(e_1) \quad \cdots \quad u(e_n) \\
\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ \emptyset & & * \end{pmatrix}
\end{array}$$

on a $u(e_1) = \lambda(u) . e_1$ (où $\lambda(u) \in \mathbb{C}$).
vrai pr tt $u \in \mathcal{F}$.

Q1) Mq, pr que $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(V)$ soit trigonalisable, il est nécessaire que élts de $\mathcal{F}$ aient un vecteur commun.

Donc e_1 est un vecteur propre de tous les $u \in \mathcal{F}$.

Q2) soit $u \in \mathcal{F}$, λ (vp) de u, $V_u(\lambda)$ le sep correspondant. Mq $V_u(\lambda)$ est stable par $\mathcal{F}$.

→ Mq $\forall v \in \mathcal{F}$, $V_u(\lambda)$ est stable par v.

on a $u \circ v = v \circ u$.

soit $x \in V_u(\lambda)$, mq $v(x) \in V_u(\lambda)$.

on a $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$

$\Rightarrow u(v(x)) = v(u(x))$

$\Rightarrow u(v(x)) = v(\lambda . x)$ car v est linéaire

$\Rightarrow u(v(x)) = \lambda . v(x)$.

$\Rightarrow v(x) \in V_u(\lambda)$.

Q3) Mq les élts de $\mathcal{F}$ ont un vecteur propre commun.

si dim $V = 1$

Tout endomorphisme u de V est de la forme

$u(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

dépend de u (mais pas de x)

(tout commute, tout trigonalisable)

si dim $V = 1$: n'importe quel $x \in V$, $x \neq 0$ est vp de tous les élts de F.

→ on fait une récurrence sur dim V.

on suppose si dim $V < n$ $(n \geq 1)$, la ppté suivante est vraie : pour toute famille F d'endomorphismes de V tq $u \circ v = v \circ u$ $\forall\, u, v \in \mathcal{F}$.

Il existe un vecteur propre $x \in V$ commun à ts les élts de $\mathcal{F}$.

On mq qu'elle est vraie pr V tq dim $V = n+1$

soit $\mathcal{F}$ une famille d'endo de V tq

$$u \circ v = v \circ u \quad \text{pr tt } u, v \in \mathcal{F}.$$

soit $u \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il possède une vp λ tq $V_u(\lambda)$ soit de dim $<$ dim V.

on applique HDR à $V_u(\lambda)$ et à la famille d'endo de $V_u(\lambda)$ constitué des restricOs de $v \in \mathcal{F}$ à $V_u(\lambda)$

NB : comme $V_u(\lambda)$ est stable par $v \in \mathcal{F}$, la restricO de v à $V_u(\lambda)$ est un endomorphisme de $V_u(\lambda)$.

On obtient un vp $x \in V_u(\lambda)$ commun à tous les élts de $\mathcal{F}$.

 puis Mq restricOs commutent $\Leftrightarrow$ elles !

Q3) Mq les élts de $\mathcal{F}$ ont un vecteur propre commun.

si dim $V = 1$

Tout endomorphisme u de V est de la forme $u(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$

dépend de u (mais pas de x)

(tout commute, tout trigonalisable)

si dim $V = 1$: n'importe quel $x \in V$, $x \neq 0$ est vp de tous les élts de F.

→ on fait une récurrence sur dim V.

on suppo si dim $V < n$ ($n \geq 1$),

la ppté suivante est vraie : pour toute famille F d'endomorphismes de V tq $u \circ v = v \circ u$ $\forall u, v \in \mathcal{F}$.

Il existe un vecteur propre $x \in V$ commun à ts les élts de $\mathcal{F}$.

On mq qu'elle est vraie pr V tq dim $V = n+1$

soit $\mathcal{F}$ une famille d'endo de V tq

$$u \circ v = v \circ u \quad \text{pr tt } u, v \in \mathcal{F}.$$

soit $u \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il possède une vp λ tq $V_u(\lambda)$ soit de dim < dim V.

on applique HDR à $V_u(\lambda)$ et à la famille d'endo de $V_u(\lambda)$ constitué des restricOs de $v \in \mathcal{F}$ à $V_u(\lambda)$

NB : comme $V_u(\lambda)$ est stable par $v \in \mathcal{F}$, la restricO de v à $V_u(\lambda)$ est un endomorphisme de $V_u(\lambda)$.

On obtient un vp $x \in V_u(\lambda)$ commun à tous les élts de $\mathcal{F}$.

puis Mq restricOs commutent ⇔ ellesl

On considère la ppté suivante.

$\mathcal{P}(n)$: si $\dim V = n$ et si $\mathcal{F}$ est une famille d'endo. de V tq $u \circ v = v \circ u$ $\forall\, u, v \in \mathcal{F}$, alors les événements de $\mathcal{F}$ possèdent un Vp commun.

▸ si $n = 1$: tout endo de V s'écrit $\underline{u(x) = a\,\overset{Id}{}\,x}$. où $a \in \mathbb{C}$

(matrice 1 ligne 1 colonne en dim 1)

où a dépend de u.

Tout $x \in V$ non nul est vecteur propre commun des éléments de $\mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est satisfaite.

AL obtenu après restrictio.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pr $k \leq n$, on mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

⊛ si tous les $u \in \mathcal{F}$ st de la forme $u = \lambda \cdot I$ où λ dépend de u.

$\hat{\lambda} \in \mathbb{C}$

6

Alors ts les Elts non nuls de V sont vecteurs propres communs.

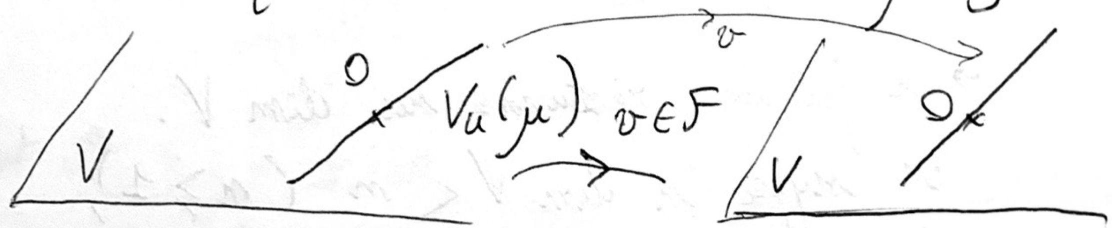
⊛ $\exists\, u \in F \mid u \neq \lambda I$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

soit μ une Vp de u et $V_u(\mu)$ le sous-espace propre associé.

Comme $u \neq \mu . I$, $V_u(\mu)$ est de dim $< \dim V = n+1$

d'après c) $V_u(\mu)$ stable par $\mathcal{F}$.

soit $\mathcal{F}' = \{\text{restrictions des } v \in \mathcal{F} \text{ à } V_u(\mu)\}$



$v : V_u(\mu) \longrightarrow V_u(\lambda)$ $\forall\, v \in \mathcal{F}$.

on appliq HDR à $V_u(\mu)$ et à $\mathcal{F}'$:

Il existe un $x \in V_u(\mu)$ q est un Vp commun à tous les $\in \mathcal{F}'$.

$x =$ vp commun à tous les $u \in \mathcal{F}$

ie $\forall u \in \mathcal{F}$ on a :

$u(x) = \lambda_u\, x$.

où $\lambda_u \in \mathbb{C}$

on a $\forall v \in \mathcal{F}$:

$v(x) = \lambda_v . x$ avec $\lambda_v \in \mathbb{C}$

dc x est un vp c à tous les $v \in \mathcal{F}$.

4) D'après 3) $\exists\, e_1 \in V$ un vp commun à tous les élts de $\mathcal{F}$.

On complète $\{e_1\}$ en une base de V $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Pour tout $u \in \mathcal{F}$, on a $u(e_1) = \lambda_u e_1$ avec $\lambda_u \in \mathbb{C}$. Donc les mat des élts de $\mathcal{F}$ dans $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ st de la forme :

TH base incomplète famille libre on pt compléter en 1 base.

$$A_u = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_u & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A'_u & \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{array}$$

mat carrée

idée : récurrence

soit W : le sev de V engendré par $e_2, \dots, e_n$. $\dim W = n-1$

on a $V = \langle e_1 \rangle \oplus W$.

sous-espace engendré par e_1

ss-espace engendré par $e_2, \dots, e_n$.

Tout élt $x \in V$ s'écrit de manière uniq

vecteur

nbr

$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \langle e_1 \rangle$ et $x_2 \in W$.

La projection de V sur W est l'application linéaire $p : V \to W$ déf par $p(x) = x_2$.

On considère $\mathcal{F}'$: la famille d'endomorphismes de W définie par :

$\mathcal{F}' = \{u'\}$ où $u' : W \longrightarrow W$

$u'(y) = p(u(y))$ $\forall y \in W$.

ie où $u \in \mathcal{F}$ qq.

ie $\mathcal{F}' = \left\{ p \circ u|_W : W \to W \mid u \in \mathcal{F} \right\}$.

La matrice de u' dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de W est la matrice A'_u. on ed $u' \circ v' = v' \circ u'$ $\forall\, u', v' \in \mathcal{F}'$.

En effet pr $u, v \in \mathcal{F}$ on a :

$u \circ v = v \circ u$: dc $A_u \times A_V = A_u \times A_V$

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} B' & C' \\ \hline 0 & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} BB' & BC' + CD' \\ \hline 0 & DD' \end{array}\right)$$

$u'_2 = p(u(e_2))$

$$A_u = \left(\begin{array}{c|cc} A & * & * \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & A'_u \\ 0 & & \end{array}\right)$$

projeté

mat 1 ligne 1 colonne

(λ) ? ...... trigonal

dim $V = 1$

n colonnes

trivial

Donc $A_u \times A_V = A_V \times A_u$, ce q' entraîne

$A'_u \cdot A'_V = A'_V \cdot A'_u$ & dc $u' \circ v' = v' \circ u'$

Par suite la famille $\mathcal{F}'$ est une famille de W dt les élts commutent 2 à 2.

De plus $\dim W = \dim V - 1$

Par l'argument de récurrence, on peut supposer que la famille $\mathcal{F}'$ est trigonalisable.

ie $\exists$ une base $e'_2, e'_3, \dots, e'_n$ de W ds laquelle les matrices de $\mathcal{F}'$ sont triangulaires dans la base $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ~~pr mq~~ de V les éléments de $\mathcal{F}$ pr mq

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e'_2) & \cdots & u(e'_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} & \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_u & * & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \varnothing & * \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{array}$$

mat de u'

Elles st triangulaires.

5) on suppose que tous les $u \in F$ sont diagonalisables, mq $\exists$ existe une base de V ds laquelle les matrices de ts les élts de $\mathcal{F}$ st diagonales.

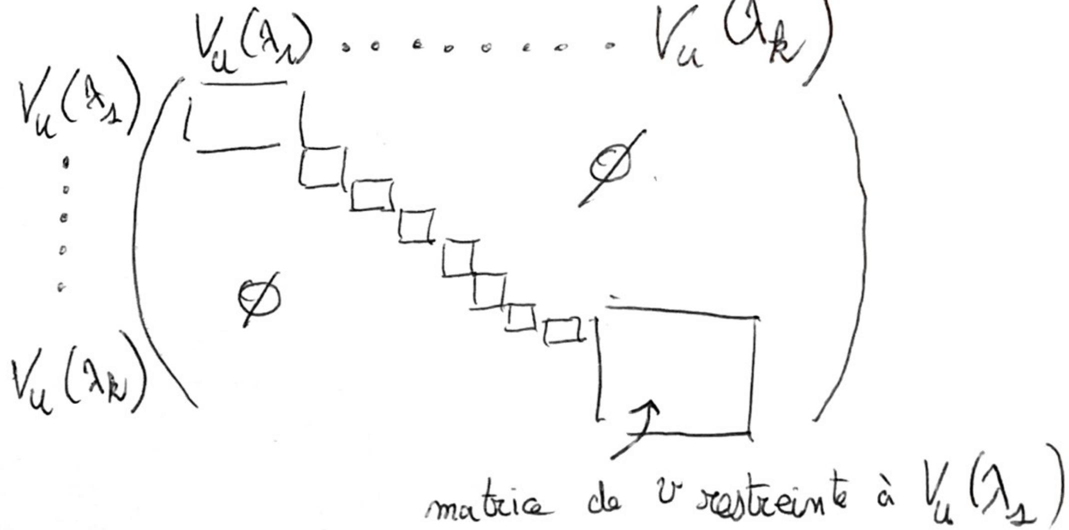
→ si tous les $u \in \mathcal{F}$ étément $u = \lambda_u \cdot I$ pr un vecteur $\lambda_u \in \mathbb{C}$ alors les matrices $u \in \mathcal{F}$ st diagonales ds n'importe quelle base

→ sinon $\exists\, u \in F$ tq $u \neq \lambda I$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
comme il est diagonalisable par hypothèse, il possède au moins 2 valeurs propres distinctes.
soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ses valeurs propres distinctes.

Alors $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_u(\lambda_i)$ car u est diagonalisable.

D'après 2) les $V_u(\lambda_i)$ sont stables par $\mathcal{F}$.

On choisit pr chaque i ~~[illegible]~~ $\in \{1, \dots, k\}$ une base de $V_u(\lambda_i)$, leur réunion est une base de V ds laquelle $v \in \mathcal{F}$ est une mat de la forme:



En considérant pour $i \in \{1, \dots, k\}$:
$V_u(\lambda_i)$ et $\mathcal{F}_i = \{$restriction à $V_u(\lambda_i)$ de $v \in \mathcal{F}\}$
$\mathcal{F}_i$ = famille d'endo. de $V_u(\lambda_i)$ q commutent et q est diagonalisable.

<u>Par récurrence</u>, on pt supposer que chaque $V_u(\lambda_i)$ possède une base ds laquelle les matrices des élts de $\mathcal{F}_i$ st diagonales.
L'union de ces bases est une base de V ds laquelle les mat des $v \in F$ sont diagonales.

Concours INP

soit E un ev dim finie sur $\mathbb{K}$.

Étant donné un endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ et $P(X)$ un polynôme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 .$$

On définit l'endomorphisme $P(u)$ $E \to E$:

$$P(u) = a_n \cdot u^n + a_{n-1} \cdot u^{n-1} + \dots + a_1 \cdot u + a_0 \cdot Id$$

$$\underbrace{u \circ u \circ u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$$

TH (Cayley-Hamilton)

soit $P_u(X)$ le polyn. caract. de u

$$P_u(X) = \det(u - XI).$$

On a $P_u(u) = 0$.

TH Il existe un uniq polynôme unitaire $Q_u(X)$, appelé polynôme minimal de u tq tout polynôme $P(X)$ q annule u.

coeff de + grd degré est 1

(ie q satisfait $P(u) = 0$) s'écrive

$$P(X) = Q_u(X) . H(X) \leftarrow \text{polyn qq.}$$

Le polyn. q annule u st précisément les multiples du polyn. minimal.

cf $P_u(X)$ s'écrit $P_u(X) = Q_u(X) . H(X)$ pr un certain polyn. $H(X)$.

TH Les racines de $Q_u(X)$ st les valeurs propres de u. De plus, u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi les racines de $Q_u(X)$ st simples. (de multiplicité 1).

Sur $\mathbb{C}$, on a

$$P_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} + \dots + (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ st vp distinctes de u.

$$Q_u(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} + \dots + (X - \lambda_r)^{k_r} \quad \text{a} \quad 1 \leq k_i \leq m_i .$$

L'endo u est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ssi $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 1$.

@ d'applicat° : Supposons $u : E \to E$ soit diagonalisable et soit $F \subset E$ sev par u.

Soit $v : F \to F$ la restrict° de u à F.
Alors v est diagonalisable.
En effet, $Q_u(X)$ annule u, ie
$\forall x \in E$, $(\underbrace{Q_u(u)}_{\text{endo de } E})(x) = \vec{0}$. $\in E$

Par suite, $\forall y \in F$,
$(Q_u(u))(y) = \vec{0}$ car $F \subset E$.
$\quad \shortparallel$
$(Q_u(v))(y)$

Donc $Q_u(X)$ annule v.
C'est dc un multiple de $Q_v(x)$
Comme u est diagonalisable, les racines de $Q_u(x)$ st simples. Donc les racines de $Q_v(x)$ aussi.
Donc v est diagonalisable.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Justifier sans calcul : A est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ c'est une mat symétriq.
d'où ${}^tA = A$.

si $A = (a_{ij})$, ${}^tA = (a_{ji})$ colonnes : j lignes : i

Th (Cours d'algèbre ce semestre).
Une mat symétriq est tjrs diagonalisable.
On cherche D et P tq $A = PD.P^{-1}$

$$P_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-x & 4-x & 4-x \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 4-x & 2-x & 1 \\ 4-x & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)(1-x)^2.$$

Il y a 2 valeurs propres : 4 et 1.

On cherche des bases des **sep** $V_4 = E_{\lambda_4}$ et $V_1 = E_{\lambda_1}$.

$$A\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}-2&1&1\\2&-4&2\\2&2&-4\end{vmatrix}$$

$$\cancel{A\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{vmatrix}}$$

$$A\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1&1&1\\-2&-4&2\\4&2&-4\end{vmatrix}$$

$$A\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1&1\\0&-4&2\\0&2&-4\end{vmatrix}$$

dc $V_4 = E_{\lambda_4} = \text{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{"}u\text{"}} \right\}$

$\dim V_4 = 1$ car 4 est racine simple de

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur engendré.

---

après calcul, une base de V_1 est

$$V_2 = \text{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\text{"}w\text{"}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\text{"}v\text{"}} \right\}.$$

La matrice de l'endomorphisme associé à A ds la base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$.

On prend,

$$\begin{array}{c|ccc} & A.u & A.v & A.w \\ u & & & \\ v & & & \\ w & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

P = la mat de passage de la base canoniq de $\mathbb{R}^3$ ds la base (u, v, w).

Les colonnes de P st les coordonnées de u, v, w ds la base canq.

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

2) Déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $B^2 = A$.

$$A = P.D.P^{-1} = B^2$$

$$B\ (P.D.P^{-1}) P = B.P$$

$$P^{-1} P D = P^{-1} B P$$

$$B(\ D) = P^{-1} B P$$

2) $D = P^{-1} . A . P$

$D^2 = P^{-1} . A . P . P^{-1} . A P = P^{-1} A^2 . P$

On voudrait poser " $B = P . \sqrt{D} . P^{-1}$ "

oui car D est diagonale à coeff > 0

On pose " $\sqrt{D}$ " $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien

$$\sqrt{D} \times \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

En posant $B = P \sqrt{D} . P^{-1}$

On a $B^2 = P \sqrt{D} . P^{-1} . P . \sqrt{D} . P^{-1}$

$B^2 = P D . P^{-1} = A$.

3) Déterminer coeff de A^n.

$A^n = (P . D . P^{-1})^n =$

$= \underbrace{(P . D . P^{-1}) \times \dots \times (P . D . P^{-1})}_{n \text{ fois}}$

$A^n = P . D^n . P^{-1}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul P^{-1} :

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix} \rightsquigarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

4) Donner poly. minimal

$Q_A(X) =$ poly. min de A

Ses racines sont des vp de A : 4 et 1.

De plus, $P_A(X)$ est un multiple de $Q_A(X)$.

Deux possibilités :

$$Q_A(X) = (4-X)(1-X)^2$$

ou $$Q_A(X) = (4-X)(1-X)$$

comme A est diagonalisable, les racines de $Q_A(X)$ sont simples et dc $Q_A(X) = (4-X)(1-X)$

On fait la DE de X^n par $Q_A(X)$:
Il existe des polynômes $U(X)$ et le reste $R(X)$ tq

$$X^n = Q_A(X) \cdot U(X) + R(X) \quad (*)$$

le degré de $R(X) < \deg(Q(X)) = 2$

ie $R(X)$ de la forme $R(X) = a_n X + b_n I_d$

$$A^n = \underbrace{Q_A(A)}_{=0} \cdot U(A) + a_n A + b_n I_d$$

Donc $A^n = R(A) = a_n A + b_n I_d$

Cherchons $R(X) = a_n X + b_n I_d$

on a $A^n = a_n A + b_n I$.

On applique cette ~~relat°~~

à $u \in V_1$ et $v \in V_2$.

$$A^n \cdot u = a A u + b \cdot u.$$

$$4^n \cdot u = a\, 4 u + b u$$

$$(4^n - 4a - b) u = 0.$$

$u \neq 0$ car Vp.

dc $\boxed{4^n = 4a + b.}$

$4v$

$$v = a v + b v$$

$$(a + b - 1) v = \vec{0}$$

$v \neq 0$

dc $\boxed{1 = a + b.}$

$$\begin{cases} 4^n = 4a + b \\ 1 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ b = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases}$$

donc $A^n = \dfrac{4^n - 1}{3} A + \dfrac{4 - 4^n}{3} I$.

$P(X) =$

$Av = \lambda v,\ v \neq 0.$ 14

Ex II $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{$ matrices $n \times n$ à coeffs réels $\}$

$\simeq \mathbb{R}^{n^2}$

on a la norme euclidienne, ev normé, ouverts, fermés, A adh cont....

ex det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

car c'est un polynôme à n^2 variables (somme & produits coeff de matrice) CL

On considère un ss-ens de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$:

$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M$ est inversible$\}$

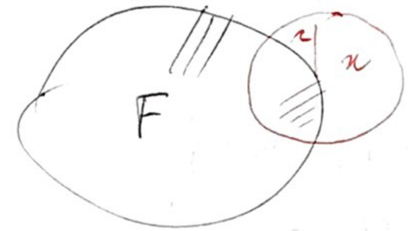
$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0 \}$.

groupe linéaire

5) $GL_n(\mathbb{R})$ est-il fermé ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

soit $F \subset \mathbb{R}^N$ alors F est fermé ssi $\overline{F} = F$.

$x \in \overline{F}$ ssi $\forall r > 0 : B(x, r) \cap F \neq \emptyset$



$\Leftrightarrow$ Il existe une suite (y_n) de points de F tq $\|y_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On considère $A_n = \frac{1}{n} I_n = \begin{pmatrix} 1/n & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1/n \end{pmatrix}$.

A_n est inversible car $A_n^{-1} = n I$ Donc $A_n \in GL_N(\mathbb{R})$

Or $\lim A_n = 0 =$ la matrice nulle et 0 n'est pas inversible.

Donc $\overline{GL_N(\mathbb{R})} \neq GL_N(\mathbb{R})$

& $GL_N(\mathbb{R})$ n'est pas fermé

6) mq $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$GL_N = \{M \in M_N(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$

$GL_N = \{ \text{\_\_\_\_\_\_} \mid \det M \in \mathbb{R}^*\}$

$GL_N = \underbrace{(\det)^{-1}(\mathbb{R}^*)}$ image inverse } image réciproque = pré-image

par l'applicat° det de $\mathbb{R}^*$

si $f : E \to F$ et si $G \subset F$
alors $f^{-1}(G) \stackrel{def}{=} \{x \in E \mid f(x) \in G\}$.

Prop Si $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est cont
et si $U \subset \mathbb{R}^m$ est ouvert ssi
$f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^k$. (resp. fermé)

Ici $\det : M_N(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$

$M_N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et
$\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.
ouvert ouvert

Prop $\Rightarrow GL_N$ est ouvert dans $M_N(\mathbb{R})$

7) soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qq. donné

$M - \lambda I \in GL_N$

ssi $\det(M - \lambda I) \neq 0$
$= P(\lambda)$ = poly caract de M.

ssi λ n'est pas racine du poly caract.

ssi λ n'est pas vp de M. et en (nb fini, il y a en a au plus N).

soit ρ la + petite vp > 0 de M.
(si il y en a pas, on prend $\rho = +\infty$)
Alors ds l'intervalle $]0, \rho[$, M n'a pas de vp. Donc $\forall \lambda \in]0, \rho[$,
on a $M - \lambda I \in GL_N$.

→ En déduire $GL_N(\mathbb{R})$ est dense ds M_N.

GL_N dense ds $M_N \Leftrightarrow \overline{GL_N} = M_N$

adhérence

Mq GL dense de $M_N \Leftrightarrow \overline{GL_N} = M_N$.

- $\overline{GL_N} \subset M_n$: évident.
- $M_N \subset \overline{GL_N}$: soit $M \in \mathcal{M}_N$ qq, mq $M \in \overline{GL_N}$. Pour cela, cherchons une suite A_n d'éléments de GL_N tq

$$\|A_n - M\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On prend $A_n = M - \frac{\rho}{N} I$

où ρ est le ρ de la mat M.

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{\rho}{n} \in]0, \rho[$

de $A_n \in GL_N$. On a

$$\|A_n - M\| = \|\frac{\rho}{n} I\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Applicat°. si A et B st 2 mat de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dmq AB et BA ont m̂ polyn. caract.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mouver res n'est pas vrai pr polyn̂ minimo.

$$\underbrace{\det(A.B)}_{\text{ds } \mathcal{M}_N} = \underbrace{\det(A).\det(B)}_{\text{ds } \mathbb{R}}.$$

$$(\det A).\underbrace{(\det(BA - \lambda I)}_{\text{polyn caract de } B\text{.t}})$$

$$= \det\left(A(BA - \lambda I)\right) = \det(ABA - \lambda A)$$

$$= \det((AB - \lambda I).A) = \det((AB - \lambda I)).(\det A)$$

si $\det A \neq 0$.

on obtient bien $\det(BA - \lambda I) = \det(AB - \lambda I)$.

si $\det A = 0$, on ne pt pas simplifier.

si $\det A \neq 0 \iff A \in GL_N$.

$\det(BA - \lambda I) = \det(AB - \lambda I)$

si $\det A = 0$,

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \notin GL_N$,

comme GL_N est dense dans $\mathcal{M}_n$,

$\exists$ une suite (A_n) d'élts GL_N tq

$A_n \longrightarrow A$ lorsq $n \longrightarrow \infty$.

Comme $A_n \in GL_N$, on a

$$\underbrace{\det(BA_n - \lambda I)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} BA - \lambda I} = \underbrace{\det(A_n B - \lambda I)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} AB - \lambda I}.$$

Comme det est cont on obtient.

$\det(BA - \lambda I) = \det(AB - \lambda I)$.

Calcul des polynômes minix.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q_{AB}(X) = X$, $Q_{BA}(X) \neq X$

car $BA \neq 0$ matrice.

le + petit polyn q annule la matrice

$P_{BA}(X) = P_{AB}(X) = X^2$

$Q_{BA}(X) \neq X$ et divise X^2.

Donc $Q_{BA}(X) = X^2$.

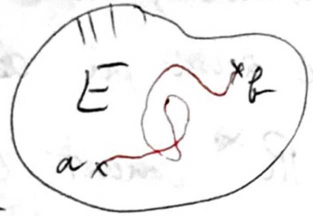
Connexe par arcs

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un s-ens qq. On dit qu'il est $\boxed{\text{connexe}}$ par arcs si $\forall a,b \in E$, $\exists$ applicat° cont

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tq

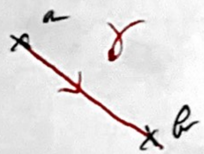
$\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$ et

$\gamma(t)$ $\forall t \in [0,1]$.



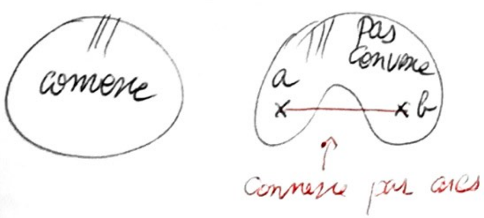
@ $E=\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs, si $a,b \in \mathbb{R}^n$, on prend $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\gamma(t) = a + t(b-a)$



Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est convexe

ie si $\forall a,b \in E$ le segment $[ab]$ est ds E



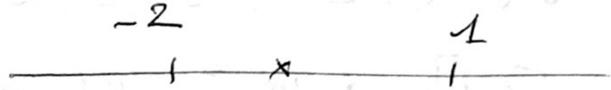
alors E est connexe par arcs.

@ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$.

$1 \in \mathbb{R}^*$, $-2 \in \mathbb{R}^*$, $\nexists$ d'applicat°s cont γ

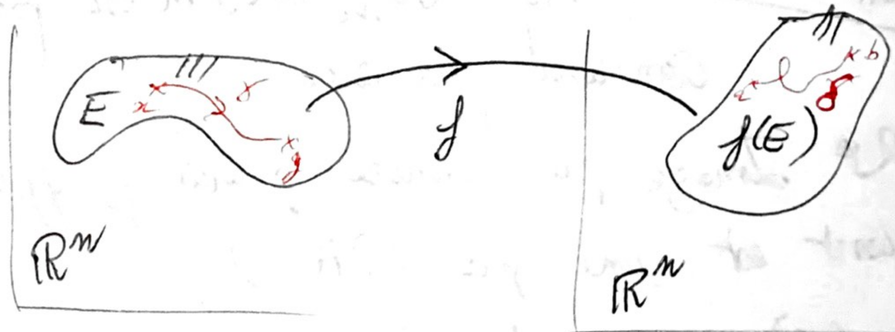
$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=-2$

et $\gamma(t) \in \mathbb{R}^*$ $\forall t \in [0,1]$.



C'est conséquence du TVI.

Prop Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs et si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est cont, alors $f(E)$ est connexe par arcs.



Ia $f(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f(x) \mid x \in E \}$

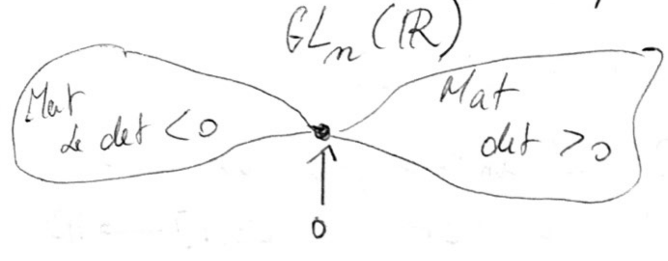
DM soit $a, b \in f(E)$, $x \in E, y \in E$,
$f(x) = a$ et $f(y) = b$.
Comme E est connexe :
$\exists\ \gamma : [0,1] \xrightarrow{cont} \mathbb{R}^n$ & $\gamma(0) = x$,
$\gamma(1) = y$ et $\gamma(t) \in E\ \forall t \in [0,1]$.

On pose $\delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ déf par
$$\delta(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)).$$
δ convient $\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = a$
$\delta(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = b$.

$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

$\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$.

Par l'absurde, si c'était connexe par arcs, l'image ~~aussi~~ par det le serait aussi.
Donc $\mathbb{R}^*$ serait connexe par arcs. Absurde



Exo II 9) Mq $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
($\mathbb{R}^*$ Image pie connexe p arcs p appli° cont est une pie CPA).
$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$
$\subset M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Ex 1

1)a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

A symétriq réelle $\Rightarrow$ diagonalisable.

1)b) Diagonaliser A.

- $P_A(X) = \det(A - XI)$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 4 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(6-X)(-4-X)$$

$\rightarrow$ 3 vp : $1, 6, -4$.

Chaq sep est de dim 1.

$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$, $E_{\lambda_{-4}} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_6} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$. $A = PDP^{-1}$

- $D = \begin{pmatrix} -4 & & \phi \\ & 1 & \\ \phi & & 6 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & \frac{1}{2} & -2/5 \\ -12/25 & 0 & -9/125 \\ 3/10 & 1/2 & 21/5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Déterminer mat A^n. $\forall n \in \mathbb{N}$.

$A^n = PDP^{-1} \times \dots \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

2) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \dots$

$= A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u_n = 21/50\,(-4)^n + 21/50\; 6^n + 8/50. \\ v_n = 7/10\,(6^n - (-4)^n) \\ w_n = 14/25\,(6^n + (-4)^n) - 3/25. \end{cases}$$

Diagonalisation

Ex 2 $E = \mathbb{R}$-ev de dim n

p = projecteur ie $p \in End(E)$

end tq $\cancel{p \circ p = p}$ ie $p^2 = p$.

si mat $\to p \times p$.

1)a) Mq $E = \ker(p) \oplus Im(p)$

Rq : soit F, G des sev de E.

On dit qu'ils st $\boxed{\text{supplémentaires}}$ et on écrit $E = F \oplus G$ si

$\forall u \in E$ s'écrit de manière uniq ss la forme $u = v + w$ & $v \in F$ et $w \in G$.

C'est équivalent à $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et

$\dim E = \dim F + \dim G$.

Th si $f \in End(E)$, alors

$\dim E = \dim \ker f + \dim Im f$

(Th noyau-image / rang)

- Il entraîne que $\dim E = \dim \ker f + \dim Im f$

∞ soit $u \in (\ker p) \cap (Im\, p)$.

mq $u = \vec{0}$, comme $u \in \ker p$, on a $p(u) = \vec{0}$.

comme $u \in Im\, p$, $\exists v \in E$ tq $p(v) = u$.

On a $u = p(v) \underset{p = p^2}{=} p^2(v) = p \circ p(v) = p(u) = \vec{0}$

Donc $u = \vec{0}$.

Rq Trace si A mat $n \times n$,

$tr(A)$ = somme coeff diagonx $= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

P $tr(A.B) = tr(B.A)$

ici $F = \ker(p)$, $G = Im\, p$ & $p^2 = p$ ep $tr(PAP^{-1}) = tr(AP^{-1}P) = tr(A)$.

si $f \in End(E)$ on définit, $tr(f)$ comme $tr(A)$ où A = mat de f ds une base qq.

on sait que $E = \ker p \oplus Im\, p$.

on choisit $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base de $Im\, p$ et $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ une base de $\ker p$.

Comme $E = \ker p \oplus Im\, p$, la famille $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ est une base de E.

La mat de p ds cette base est

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} p(e_1) & \cdots & p(e_k) & p(e_{k+1}) & \cdots & p(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \emptyset & \\ & \ddots & & \emptyset \\ \emptyset & & 1 & \\ \hline & \emptyset & & \emptyset \end{array}\right) \end{array}$$

Comme $e_1 \in Im\, p$, $\exists\, v_1 \in E$ tq $e_1 = p(v_1)$

Donc $p(e_1) = p(p(v_1)) = p^2(v_1) = p(v_1) = e_1$.

Donc $p(e_1) = e_1$. De même $p(e_2) = e_2, \dots, p(e_k) = e_k$.

Comme $e_{k+1}, \dots, e_n \in \ker p$ leurs images par p st égales à $\vec{0}$.

On a donc $tr(p) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ fois}} + \underbrace{0+\dots+0}_{n-k \text{ fois}}$

$= k = \underbrace{\dim(Im\, p)}_{rg(p)}$

Non $\quad M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ (c_1, c_2)

$tr\, M = 2$

$rg\, M = \dim(Im\, M)$
$= \dim(Vect(c_1, c_2)) = 2$.

9° Un end u de E vérifiant $tr(u) = rg(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

$M^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \neq M$.

II 2) Donner 2 mat A, B de $M_3(\mathbb{R})$ de rang 1 tq A diago—ble
B non diago—ble.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 0 & \\ \emptyset & & 0 \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \emptyset \end{pmatrix}$$

Donc le polyn. de B divise X^2 et est $\neq X$. C'est dc X^2. Les racines de X^3 ne st pas simples (c'est 0 de multiplicité 2)
Donc B n'est pas diagonalisable.

②

II 2) Donner 2 mat A, B de $M_3(\mathbb{R})$ de rang 1 tq A diago-lble, B non diago-lble.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 0 & \\ \emptyset & & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \emptyset \end{pmatrix}$$

Donc le polym. de B divise X^2 et est $\neq X$. C'est dc X^2. Les racines de X^3 ne st pas simples (c'est 0 de multiplicité 2).

Donc B n'est pas diagonalisable.

II.3. $u : E \to E$ de rg 1.

$rg(u) \overset{def}{=} \dim(\operatorname{Im} u) = \dim \operatorname{Vect}(c_1, \dots, c_n)$

où $c_1, \dots, c_n$ = vct^rs colonnes de mat de u.

TH du rg

$$\dim E = \dim(\ker u) + rg(u)$$

dc $n = \dim(\ker u) + 1 \Rightarrow \underline{\dim(\ker u) = n-1}$

On cherche une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tq la mat de u dans cette base soit

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} u(e_1) & \dots & u(e_{n-1}) & u(e_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \vdots & \\ & & 0 & a_n \end{pmatrix} \end{array} \in M_n(\mathbb{R})$$

on choisit $e_1, \dots, e_{n-1}$ q forment une base $\ker u$.

c'est possible car $\dim(\ker u) = \underline{n-1}$.

On complète par e_n en utilisant le TH de la base incomplète.

TH (base incomplète) : soit E un ev dim n

soit $(u_1, \dots, u_p)$ famille libre de E &

soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille génératrice de E.

Alors $\exists\ w_1, \dots, w_{n-p} \in \{v_1, \dots, v_q\}$ tq $(u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_{n-p})$ soit une base de E.

II b. Mq u diagonalisble $\Leftrightarrow tr(u) \neq 0$:

($\Rightarrow$) Si u est diagonalisable, ses vp sont 0 & a_n car $tr(u)$ = somme des val^rs comptées ap multiplicité. multiplicité n-1.

- on a $a_n \neq 0$ sinon vp de u seraient ttes nulles & 0 serait de multiplicité n. Impossible car $\dim(Im(\ker u)) = n-1 \neq n$.

($\Leftarrow$) $tr(u) \neq 0 \Rightarrow$ u est diag :

$$P_u = \det(M - XI) =$$

$$= \begin{vmatrix} -X & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -X & a_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-X)^{n-1}(-X+a_n)$$

- Les racines st 0 & $a_n \neq 0$

0 mult n-1 Les sommes des dim sep est n.

$a_n \longrightarrow \geq 1$. Dc u est diagonalisable.

II. 3 c n° def ℓ mat M^2 on suppose $tr(u) = rg(u) = 1$. mq u projecteur

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n a_n \end{pmatrix} = M \text{ car } a_n = tr(u) = 1$$

Dc $u^2 = u$ dc u est projecteur.

II. 3. d. $tr(A) = 1+1-1 = 1$

$rg(A) = \dim(Vect(c_1, c_2, c_3))$ où c_1, c_2, c_3 = vct^r colonnes de A

$$rg(A) = \dim\left(Vect\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 1$$

$Im\, A = Vect\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ker A ?

on résoud $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+y-z=0$

$\operatorname{Ker} A = \{(x,y,z) \mid x+y-z = 0\}$

$= \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

III. u endo symétriq de E.

(TH) u est diagble ds base orthonormée de E si S la mat de u dans base orthonormée qq. Elle est symétriq (${}^tS = S$) & $\exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq

${}^tP = P^{-1}$

ie P orthogonale

tq $P^{-1} S P = D$ diagonale.

(TH) Réduc° endomorphismes sym. de espace euclidien E & mat.

III. 1.

$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P_S = \det(S - XI) = \begin{vmatrix} i-X & 1 \\ 1 & -i-X \end{vmatrix}$

$= (i-X)(-i-X) - 1 = X^2 - i^2 - 1 = X^2$

Racine de $P_S = 0$.

Si S était diagonalisable elle serait nulle. Absurde de S n'est pas diagonalisable

III. 2. a) $x \in E$,

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$ & $x_i \in \mathbb{R}$.

on a $s(x) = \sum_{i=1}^{n} s(\underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\varepsilon_i}_{\in E})$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, s(\varepsilon_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i$.

$R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle$

$= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \rangle$

bilinéarité de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$

$= \sum_{i,j}^{n} x_i \lambda_j x_j \underbrace{\langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \rangle}_{= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

- Rq $R_s(x) = {}^t(SX).X$

$= {}^tXS.X$ car ${}^tS = S$

Dc $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

2.b. soit $x \in S(0,1)$ cad $\|x\| = 1$

ie $\langle x \mid x \rangle = 1$.

ie $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

on a $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ & $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$

& $x_i^2 \geq 0$

Dc $\lambda_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=1} \leq R_s(x) \leq \lambda_n . \underbrace{\sum x_i^2}_{=1}$ & dc

dc $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ g

$R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$

$\iff R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n] \ \forall x \in S(0,1)$

III.3. suppose s sym. positif.

vp de s ttes $\oplus$? ...

$0 \leq \langle s(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i \rangle = \langle \lambda_i \varepsilon_i \mid \varepsilon_i \rangle$

$= \lambda_i$ car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

S = matrice de s ds $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base canoniq de $E = \mathbb{R}^n$.

$S = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\quad \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} \cdots & S_{ij} & \cdots \end{pmatrix} \end{array} = S$

S_{ij} = ième coord ds B du vecteur $s(e_j)$

j-ème vct colonne de S

$= \langle s(e_j) \mid e_i \rangle$

on a $S_{ii} = \langle s(e_i) \mid e_i \rangle$

$= R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ car $\|e_i\| = 1$

2b

§ 7 : Dedekind, Peano, Landau !

- chaîne : ss-ens K de $\mathbb{N}$ q vérifie conditions que si $n \in K \Rightarrow S(n) \in K$.
- Ds l'axiome de l'∞, on a $S'(a) = a \cup \{a\}$, on pourrait aussi prendre $S(a) = \{a\}$

1887 — 1, 2, 3, ... commence à 1.

20 ans + tard — 0, 1, 2, ... commence à 0

→ successeur : $+1$ opérat°.

→ 2 entiers qq = $p+q$?

déf p récurrence.

$p+1 \to S(\ )$

$p+2 \leftarrow 1+1$

chaîne $\neq$ successeur.

Dedekind — Peano

Addit° ds $\mathbb{N}$ (+ petit ens q vérifie $\emptyset \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N}$).

$n+1 = S(n)$

Par récurrence $n+(p+1) = (n+p)+1$

$= S(n+p)$

$n + S(p) = S(n+p)$.

De cette façon on connaît $n+p$ $\forall p \in \mathbb{N}$

$n+0 = n$, $n+1 = S(n)$, si on connaît $n+p$, on connaît $n+(p+1)$.

Dc par récurrence, on connaît $n+p$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

Piège : Définir suite p récurrence : applicat° $f : \mathbb{N} \to A$ (A un ens, pr addit° $A = \mathbb{N}$).

On donne $f(0) = a_0$ donné & une opérat° g

$g : A \to A$ & $f(n+1) = g(f(n))$.

Autre écriture $a_n = f(n)$

$a_{n+1} = g(a_n)$.

Pb : Qd on prononce la phrase :

"Je connais $f(n)$".

→ cela suppose que l'objet f $\exists$!

Donc on ne pt pas user cet argument pr l'$\exists$ de f.

→ solution de Dedekind.

on mq p récurrence l'$\exists$ pr $\forall n \in \mathbb{N}$ d'une application $f_n : \{0, \dots, n\} \to A$ vérifiant $f(0) = a_0$ & $\forall p < n$:

$$f(p+1) = g(f(p)).$$

on commence av $f_0 : \{0\} \to A$ déf p

$f_0(0) = a_0$. si on a $f_n : \{0, \dots, n\} \to A$

on définit $f_{n+1} : \{0, \dots, n, n+1\} \to A$

pr $f_{n+1}(p) = f_n(p)$ pr $p \leq n$

$$f_{n+1}(n+1) = g(f_n(n))$$

On mq que $n < m$ & $p \leq n$

on a $f_n(p) = f_m(p)$.

Ensuite on pt définir

$$f : \mathbb{N} \to A \text{ pr } f(n) = f_n(n)$$

Addition ds $\mathbb{N}$, notons $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Comment définir ?

on fixe n et on définit p récurrence une suite a_k p $a_0 = n$.

$$a_{k+1} \, (= a_k + 1) = S(a_k).$$

$a_0 = n$, $a_1 = n + 1$, $a_2 = (n+1) + 1) = n + 2$

etc

On va dire $P(n, k) = a_k$

$1 + 1 = 2$ c'est la définition de 2.

$= S(1)$

$0 + 1 = 1$ est la définition de $1 = S(0)$

$2+1 = S(2) = 3$ définition de 3.

Mais $1+2=3$ est un Théorème.

sans commutativité de addition

Addition : qq chose + 1.

$2+1 = S(2) = S(S(1)) = S(S(S(0)))$.

la définition ne donne q formule

- $1+2 = S(0) + S(1)$

$n + S(p) \overset{def}{=} S(n+p)$

& $n+0=n$.

Pr $1+2 = 1 + S(1) = S(1+1)$

$= S(1+S(0))$

$= S(S(1+0)) = S(S(1))$

$= S(S(S(0)))$

- Pr $2+1 = 2 + S(0) = S(2+0) = S(2)$

Autre façon de mq suite déf. p récurrence est bien déf !

Les données A : ens $a_0 \in A$ & $g : A \to A$

On vt mq $\exists!$ applicat° de $f : \mathbb{N} \to A$

tq $f(0) = a_0$, $f(n+1) = g(f(n))$.

$\boxed{M}$ f application (si ça existe) vt dire $f \subset \mathbb{N} \times A$ de ptés (q ça représente un graphe) on va ① ① des ss-ens F de $\mathbb{N} \times A$ tq la ppté

$(0, a_0) \in F$ & $(n, x) \in F \Rightarrow (n+1, g(x)) \in F$.

$\mathcal{F} = \{ F \subset \mathbb{N} \times A \mid F$ a ttes ces ptés $\}$.

$\mathcal{F}$ n'est pas vide car $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{F}$.

On mq + pt élt ds $\mathcal{F}$ est le graphe d'1 f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a_0, $a_{n+1} = f(a_n)$.

si f est $\nearrow$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ $\exists$.

⚠ Ne pas confondre le graphe de f (dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et le graphe de la suite a_n (dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$).

$$R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \Big\rangle$$

bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$

$$= \sum_{i,j} x_i \lambda_j x_j \underbrace{\langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle}_{= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Rq $R_s(x) = {}^t(SX) \cdot X$

$$= {}^tX S \cdot X \quad \text{car } {}^tS = S$$

Dc $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

2.b. soit $x \in S(0,1)$ cad $\|x\| = 1$

i.e. $\langle x | x \rangle = 1$.

i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

on a $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ & $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ & $x_i^2 \geq 0$

Dc $\lambda_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=1} \leq R_s(x) \leq \lambda_n \cdot \underbrace{\sum x_i^2}_{=1}$ & dc

dc $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

$R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$

$\iff R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad \forall x \in S(0,1)$

III.3. suppose s sym. positif.

vp de s ctes $\oplus$? ...

$0 \leq \langle s(\varepsilon_i) | \varepsilon_i \rangle = \langle \lambda_i \varepsilon_i / \varepsilon_i \rangle$

$= \lambda_i$ car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

S = matrice de s ds $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base canoniq de $E = \mathbb{R}^n$.

$$S = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & & \\ & & S_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = S$$

S_{ij} = ième coord ds B du vecteur $\underbrace{s(e_j)}_{j\text{-ème vect}^{\text{re}} \text{ colonne de } S}$

$= \langle s(e_j) | e_i \rangle$

on a $S_{ii} = \langle s(e_i) | e_i \rangle$

$= R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ car $\|e_i\| = 1$

2b

III.4

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto {}^tM.M - Id$$

→ mq l'applicat° est cont.

Il suffit de mq $M \to {}^tM.M$ est cont.

Elle s'écrit c la composée $B \circ$ L

↳ $M \xrightarrow{L} ({}^tM, M)$

$(R,S) \xrightarrow{B} (R,S)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{L} & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & \downarrow B \\ & & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} M \mapsto ({}^tM, M) \\ \downarrow \\ {}^tM.M \end{array}$$

→ L est linéaire.

→ B est bilinéaire.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (1 o)

II.5.

Mq $A=(a_{ij})$ orthogonales $\Rightarrow |a_{ij}| \leq 1 \quad \forall i,j$.

Comme A est orthogonale, les vecteurs colonne de A forment une base orthonormée.

Les vcs st $c_i = Ae_i$ – e_i base canoniq de $\mathbb{R}^n$,

on a $\langle c_i, c_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle$
$= \langle \underbrace{{}^tAA}_{Id}(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

base orthonormée

S est symétriq ds base orth. Dc $\exists P \in G_n(\mathbb{R})$ tq $S = P\Delta P^{-1}$

P suite $T(A) = tr(AS) = tr(A.P\Delta P^{-1})$

$= P^{-1}AP$ orthogonale car $P.A.P^{-1}$ le sont & l'inverse de mat orthogonales est orthogonale tq

$G_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$; notons où $S \in S_n(\mathbb{R})$ est fixée :

$A \mapsto tr(AS)$, λ_i = vp de S.

Or T est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dc cont sr $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

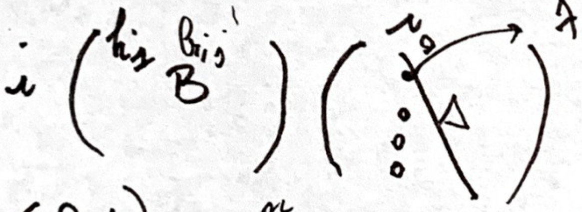
Sa restrict° à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est cont sur le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et dc elle admet une borne, $\exists A_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq

$$T(A_0) = \sup T(A)$$

c. $T(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ d'après a)

$B = (b_{ij})$, $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (B\Delta)_{ii}$$



on a $\mathrm{tr}(B\Delta) \le \sum_{i=1}^{n} |b_{ii}\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|b_{ii}|}_{\le 1} \lambda_i$

$\le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'après III.5

$= \mathrm{Tr}(S) = T(I) = \epsilon.$

Inégalité d'Hadamard

Inégalité arithmético-géométriq S

$a_1, \dots, a_n > 0$.

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

En prenant le log des 2 côtés:

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i}_{\text{moyenne arithmétiq des } \log a_i} \le \log\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\text{moyenne arithmq des } a_i}\Big)$$

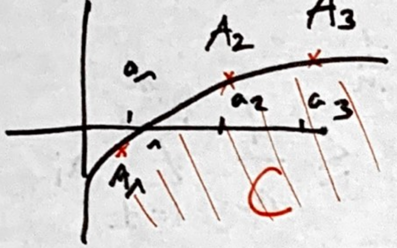
La partie $y \le \ln x$ est un ss-ens convexe

(D) Un ss-ens $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est convexe si $\forall A, B \in \mathcal{C}$, le segment est contenu ds $\mathcal{C}$

(Rq) soit $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^2$. On appelle isobarycentres de $A_1, \dots, A_n$ le point $G \in \mathbb{R}^2$ déf p

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}$$

(P) Si C est convexe & si les A_i appartiennent à $C \Rightarrow G \in C$.



Ici, on prend $A_1 = (a_1, \log(a_1)), \ldots$ $A_n = (a_n, \log(a_n))$

soit G l'isobarycentre de $A_1, \ldots, A_n$.

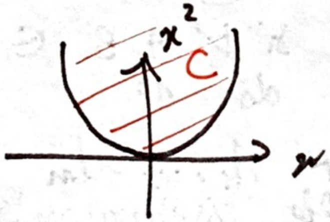
on a $G = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log a_i \right)$

comme les $A_i \in C$, G aussi.

Ici $C = \{(x,y) \mid y \leq \log x, \ x > 0\}$

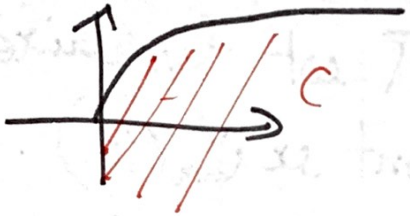
$G \in C \Rightarrow y_G \leq \log x_G \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(a_i) \leq \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

@ $f(x) = x^2$



Pr $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$

$f(x) = \sqrt{x}$



Pr $a_1, \ldots, a_n \geq 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Inégalités de Convexités