

# Feuille 1 : Logique propositionnelle

### Exercice 1 : Négation

Exprimez les négations des propositions suivantes sans les faire précéder de : il est faux que. Pour ce faire, on traduira ces propositions, exprimées en langage naturel, en formules de la logique propositionnelle, après avoir déterminé les variables propositionnelles nécessaires.

- Q 1.1 Ce quadrilatère n'est ni un losange, ni un rectangle.
- Q 1.2 Lentier 522 n'est pas divisible par 3, mais il est divisible par 7.
- Q 1.3 S'il pleut demain ou s'il fait froid, je ne sortirai pas.

#### Exercice 2 : Associativité

Montrer que le connecteur d'implication  $\Rightarrow$  n'est pas associatif.

#### Exercice 3: Axiomes de $\equiv$

**Q 3.1** Démontrer la distributivité de  $\vee$  par rapport à  $\wedge$ , i.e. :

$$a \lor (b \land c) \equiv (a \lor b) \land (a \lor c)$$

Q 3.2 Démontrer les lois de de Morgan

$$\neg(a \land b) \equiv \neg a \lor \neg b \text{ et } \neg(a \lor b) \equiv \neg a \land \neg b$$

### Exercice 4 : Régime alimentaire

Alice mange la viande, le poisson et les légumes, mais pas les féculents.

Nous modélisons les plats à l'aide des quatre variables propositionnelles suivantes :

- v le plat contient de la viande,
- p le plat contient du poisson,
- l le plat contient des légumes,
- f le plat contient des féculents.
- Q 4.1 Donner une formule utilisant ces variables qui permette de représenter les plats qu'Alice peut manger.
- **Q 4.2** Donner une valuation qui représente le poisson à la bordelaise qui contient est plat contenant du poisson et de légumes.
- Q 4.3 Vérifier si Alice peut manger ce plat.

# Exercice 5: Tombola

Vous décidez dacheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :

- (a) Si 5 est perdant, 1 est gagnant;
- (b) Si 4 est perdant, 2 est gagnant;
- (c) Si 3 est perdant, 5 aussi;
- (d) Si 1 est gagnant, 2 aussi;
- (e) Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Traduisez ces informations en formules de la logique propositionnelle. Peut-on en déduire le billet gagnant?

### Exercice 6: Déduction

On sait que:

- 1. Pierre joue au golf ou fait de l'alpinisme ou pratique la plongée.
- 2. Si Pierre ne joue pas au golf ou ne fait pas de plongée, il fait de l'alpinisme.
- 3. Si Pierre fait de la plongée, il ne joue pas au golf.
- 4. Si Pierre fait de l'alpinisme, alors il fait aussi de la plongée.

Quel(s) sport(s) pratique Pierre?

### Exercice 7 : Logique propositionnelle : simplification de programme

Le programme C suivant a été allégé en en éliminant le code. On cherche ici à savoir quelles propriétés sont vraies à un certain point du programme.

```
while ((!a || b) && c){
    ...
}
(1)
if(a || b){
    (2) ...
}
else{
    if(c && b){
        (3)...
}
    else{
        (4)...
}
```

Les nombres entre parenthèse – (1), (2), (3), et (4) – servent à désigner des points du code. Les variables a, b, et c sont des variables à valeurs booléennes.

- **Q 7.1** Donner pour chaque point du code (i) une formule de la logique propositionnelle  $\varphi_i$  utilisant les variables a, b et c qui exprime la condition qui doit être vérifiée à ce point du code.
- Q 7.2 Comment déterminer si une partie de code ne peut pas être exécutée?
- Q 7.3 Déterminer quelles parties de code ne peuvent pas être exécutées.
- Q 7.4 Simplifier le programme en un programme équivalent.

#### Exercice 8: Principe d'induction

Dans cet exercice, nous considérons une formule  $\varphi$  construite à partir des variables  $x_1, \ldots, x_n$ . Étant données des formules  $\psi_1, \ldots, \psi_n$  nous notons  $\varphi[\psi_1/x_1, \ldots, \psi_n/x_n]$  la formule obtenue à partir de  $\varphi$  en remplaçant les occurrences de  $x_i$  par  $\psi_i$  pour tout i dans [1, n].

- **Q 8.1** Étant donnée une valuation  $\nu$ , démontrer, en utilisant le principe d'induction, que  $[\![\varphi[\psi_1/x_1,\ldots,\psi_n/x_n]]\!]_{\nu} = [\![\varphi]\!]_{\mu}$  où  $\mu$  est la valuation telle que  $\mu(x_i) = [\![\psi_i]\!]_{\nu}$  pour tout i dans [1,n].
- **Q 8.2** Supposons maintenant que nous disposons de formules  $\theta_1, \ldots, \theta_n$  telles que pour tout i dans  $[1, n], \psi_i \equiv \theta_i$ . Déduire de la question précédente que pour toutes formules  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  construites à partir de variables propositionnelles  $x_1, \ldots, x_n$  si  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  alors,  $\varphi_1[\psi_1/x_1, \ldots, \psi_n/x_n] \equiv \varphi_2[\theta_1/x_1, \ldots, \theta_n/x_n]$ .

```
NB:
```

- pour rappel,  $\varphi \equiv \psi$  signifie que pour toute valuation  $\nu \llbracket \varphi \rrbracket_{\nu} = \llbracket \psi \rrbracket_{\nu}$ ,
- cet exercice démontre que  $\equiv$  est une congruence sur les formules.