Univ. de Lille   Département de Mathématiques   M.Fradon, G.Castellan, M-F.Barme
L2 Maths S4   **Probabilités Discrètes**   2020-2021

Fiche 2

Ex 1. Une urne contient 10 jetons jaunes, 5 blancs et 1 rouge. J'ai tiré un jeton de cette urne et je vous annonce qu'il n'est pas rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

Ex 2. On cherche une girafe qui, avec une probabilité $p/7$, se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble, et avec probabilité $1-p$ hors de l'immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages.

1) Quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ? On note $f(p)$ cette probabilité.

2) Représenter la fonction $p \longmapsto f(p)$

Ex 3. Des étudiants se préparent à un examen. Le sujet sera fabriqué par l'un de leurs trois professeurs : Xxxx, Yyyy ou Zzzz.
Or, les étudiants redoutent qu'un certain chapitre soit posé à l'examen et ils évaluent à 10% la probabilité pour que le chapitre en question sorte si c'est Xxxx qui fait le sujet, 40% si c'est Yyyy qui le fait, et 80% si c'est Zzzz (Inutile de dire à quel prof vont les sympathies des étudiants...).
Yyyy leur a dit : Il y a une chance sur deux pour que ce soit moi qui fasse le sujet, et si je ne le fais pas il y a trois chances sur cinq pour que ce soit Xxxx.
Le jour J arrive, et le chapitre fatidique est posé à l'examen ! Sachant cela, calculer les probabilités pour que l'examen ait été posé par Xxxx, Yyyy ou Zzzz.

Ex 4. Alcootest

On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que $0,5\%$ d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée.
Aucun test n'est fiable à 100%. Pour celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée est $\rho = 0,95$. La probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, vaut aussi $\rho = 0,95$.

1) On note A l'événement « l'automobiliste testé a réellement dépassé la dose d'alcool autorisée »et T l'événement « le test est positif ». Donner sans calcul la valeur des probabilités suivantes : $P(A)$, $P(T|A)$ et $P(T^c|A^c)$.

2) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ? Quelle devrait être la sensibilité/sélectivité ρ du test pour que cette probabilité soit de 95% ?

3) Un policier affirme : *Ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit !* La proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 50% : déterminer s'il a raison.

Ex 5. On lance deux dés et on considère les événements :

A : “le résultat du premier dé est impair"
B : “le résultat du second dé est pair"
C : “les résultats des deux dés sont de même parité"

Etudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C, puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille) A, B, C.

Ex 6. On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}^n = \{\,(x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}, i = 1, \dots, n\},$$

muni de l'équiprobabilité. On considère les évènements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

1) Montrer que pour $n \geq 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n+1)/2^n$.

2) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Ex 7. On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

1) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?

2) *Première méthode :* On note $F_i = \{$*obtention d'un 9 au i-ème lancer*$\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{$ *ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des $n-1$ premiers lancers et le n-ième lancer donne* 9$\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

a) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n ($n \geq 1$). Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{$ *ni 7 ni 9 au i-ème lancer*$\}$.

b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.

c) Calculer $P(E)$.

3) *Deuxième méthode :* On note $G_1 = \{$ *obtention d'un 7 au premier lancer*$\}$.

a) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.

b) Donner sans calcul les valeurs de $P(E \mid F_1)$, $P(E \mid G_1)$ et expliquer pourquoi $P(E \mid H_1) = P(E)$.

c) En déduire la valeur de $P(E)$.

Ex 8. Les menteurs

On considère n personnes. Chacune a probabilité p de mentir. On donne à la première personne une information sous la forme "*oui* ou *non*". La première personne transmet l'information à la seconde, qui la transmet à la troisième, etc, jusqu'à la n-ième qui l'annonce au monde.

1) Pour $1 \leq k \leq n$, on note V_k l'évènement "l'information que reçoit la k-ième personne est vraie", et on pose $p_k = P(V_k)$. Calculer p_1, p_2, et montrer que pour $k \geq 1$

$$p_{k+1} = p + p_k(1 - 2p).$$

2) Calculer la probabilité pour que l'information annoncée au monde soit vraie. (Indication : trouver une constante C telle que les $u_k = p_k - C$ forment une suite géométrique).

3) Quelle est la limite de cette probabilité lorsque le nombre n de personnes tend vers l'infini ? (Étudier en fonction de p)

Exercices de révision et d'entrainement à faire seul

Ex 9.

1) A_1, A_2, $A_3 \ldots$ est une partition de Ω telle que $P(A_i) = \frac{1}{2^i}$ pour chaque i de $\mathbb{N}^*$. Ecrire la formule de conditionnement par tous les cas possibles pour cette partition. L'événement B est tel que $P(B|A_i) = \frac{1}{5^i}$ pour chaque i. Calculer la probabilité de B.

2) On a deux dés ordinaires (à 6 faces, équilibrés) : un dé rouge et un dé vert. On les lance ensemble, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à la première fois où le dé rouge donne un six. On arrête alors les lancers. Quelle est la probabilité qu'au cours de cette expérience le dé vert n'affiche jamais de six ?

Ex 10. Le petit chaperon rouge [1]

Le petit chaperon rouge se promène dans la forêt. Chaque fois qu'il rencontre un loup, il a une chance sur cinq d'être mangé (les loups sont indépendants).

1) Quelle est la probabilité qu'après trois rencontres, le petit chaperon rouge ne soit toujours pas dévoré ?

2) Le petit chaperon rouge va rendre visite à sa grand-mère. Pour s'y rendre, il a le choix entre trois sentiers : le chemin de la fontaine, le chemin des jonquilles et le chemin des champignons. Il choisit au hasard (une chance sur trois de choisir chacun des chemins).

Le petit chaperon rouge ne le sait pas mais ce jour-là, il y a deux loups sur le chemin de la fontaine et un loup sur le chemin des jonquilles. Il n'y en a pas sur le chemin des champignons. Calculer la probabilité qu'il arrive sain et sauf chez sa grand-mère.

3) On ne sait pas quel chemin le petit chaperon rouge a choisi, mais on constate qu'il est arrivé sain et sauf. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le chemin des champignons ?

4) Cinq loups (toujours indépendants) rencontrent chacun un lapin dans la forêt. Chaque loup a une chance sur dix de manger sa proie (où l'on voit que les lapins courent plus vite que les petits chaperons rouges...). Donner le nom (complet !) de la loi du nombre L de lapins mangés. Quelle est la probabilité qu'exactement trois lapins soient mangés ? (donner l'expression de cette probabilité, et aussi sa valeur numérique).

Ex 11. 1) Quatre personnes lancent dix fois chacune une pièce équilibrée. Le but est d'obtenir pile 7 fois ou plus. Quelle est la probabilité que l'une au moins réussisse ?

2) Dans une revue médicale, on lit :
Avec le traitement actuel, le taux de guérison de cette maladie n'est encore que de 50%. Mais les laboratoires X viennent d'annoncer la mise au point de quatre nouvelles molécules dont l'une au moins semble prometteuse : Testée sur 10 patients, elle en a guéri 7...
Au vu du résultat de la question 1), qu'en pensez-vous ?

1. Comme dans le conte, le petit chaperon rouge est ici une petite fille vêtue de rouge.