M44 Géométrie – Plan détaillé

K. Tzanev

20 janvier 2021

Ce document évoluera au cours du semestre. De ce fait il n'est pas destiné à une impression. Ce document contient :

Déf ▶ 81 définitions ;

Prop ▶ 141 propositions/propriétés ;

▶ 51 Commentaires/notes/remarques.

§1. Le plan cartésien

Déf 01 ▶ On identifie le plan avec $\mathbb{R}^2$ et on l'appelle **plan cartésien**.

Déf 02 ▶ Un élément du plan cartésien, c.-à-d. un couple de nombres réels, est appelé **un point**.

03 ▶ Quand on nomme un point (x, y), par exemple P, au lieu d'écrire $P \coloneqq (x, y)$ on écrit souvent simplement $P(x, y)$.

04 ▶ Étant donné un point $P(x, y)$ on note $\vec{P}$ le vecteur (x, y) de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$, et on l'appelle le *vecteur sous-jacent* à P.

05 ▶ À priori on ne peut pas additionner des points, ni les multiplier par des scalaires, par contre on peut effectuer ces opérations sur les vecteurs sous-jacents.

Déf 06 ▶ Un **vecteur concret** est la donnée d'un couple ordonné de points. Au lieu de noter un tel couple (A, B), par exemple, on le note $\overrightarrow{AB}$.

Déf 07 ▶ Le **vecteur (abstrait)** sous-jacent au vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\vec{B} - \vec{A}$. Et inversement, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est une **réalisation** de $\vec{u}$ si $\vec{u}$ est le vecteur abstrait sous-jacent à $\overrightarrow{AB}$, c.-à-d. si $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A}$.

08 ▶ Par abus de notation on identifie le vecteur concret $\overrightarrow{AB}$ et son vecteur abstrait sous-jacent. Ainsi quand on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ on sous entend égalité entre les vecteurs abstrait sous-jacents, c.-à-d. $\vec{B} - \vec{A} = \vec{D} - \vec{C}$. De même quand on utilise les opérations vectorielles somme est produit par un scalaire, comme $\lambda\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, on sous-entend qu'il s'agit des opérations sur les vecteurs abstraits sous-jacents.

Prop 09 ▶ (règle du parallélogramme) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et on dit que $ABCD$ est un **parallélogramme**.

Prop 10 ▶ (somme de vecteurs concrets) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, cette règle est dite *de Chasles*.

Prop 11 ▶ Soit Ω le point $(0, 0)$. Nous avons $\overrightarrow{\Omega P} = \vec{P}$ pour tout point P.

12 ▶ On rappelle que la norme d'un vecteur abstrait (x, y) est $\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y) | (x, y) \rangle} = x^2 + y^2$ où $\langle (x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$ est le produit scalaire entre vecteurs abstraits.

Déf 13 ▶ La distance AB entre deux point A est B est définit par $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Déf 14 ▶ La distance entre un point A et un ensemble de points $\mathcal{M}$ est définit par $d(A, \mathcal{M}) \coloneqq \inf_{B \in \mathcal{M}} AB$.

§2. Translations

Déf 01 ► Une **isométrie** T est une application qui préserve les distances, c.-à-d. $T(A)T(B) = AB$ pour tous deux points A, B.

Prop 02 ► Soient un point A et un vecteur $\vec{u}$. Il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On le note $A + \vec{u} := B$.

03 ► Nous avons $\overrightarrow{(A + \vec{u})} = \vec{A} + \vec{u}$.

Prop 04 ► Nous avons les équivalences $A+\vec{u} = B \iff \forall P, \overrightarrow{PA}+\vec{u} = \overrightarrow{PB} \iff \exists P, \overrightarrow{PA}+\vec{u} = \overrightarrow{PB}$.

05 ► Cette proposition nous indique que la définition de $A + \vec{u}$ est indépendante de la « position » de $\Omega(0, 0)$.

Déf 06 ► L'application $T_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$ est appelée **translation** par $\vec{u}$.

Prop 07 ► Nous avons $T_{\vec{0}} = \mathrm{Id}$. On appelle cette translation **triviale**.

Prop 08 ► $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.

Prop 09 ► Pour $\forall \vec{u}$ la translation $T_{\vec{u}}$ est une isométrie avec $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$.

Prop 10 ► Si T est une translation et $B = T(A)$, alors $T = T_{\overrightarrow{AB}}$. En particulier si $\exists A$ tel que $T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(A)$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ ($\iff T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}}$).

Prop 11 ► Si T est une application telle que $\exists A, B, \forall \vec{v}, T(A + \vec{v}) = B + \vec{v}$, alors $T = T_{\overrightarrow{AB}}$.

Prop 12 ► Les translations sont affines, c.-à-d. si T est une translation, A et B deux points, et λ un réel, alors $T(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda T(A) + (1 - \lambda)T(B)$.

§3. Repères affines

Déf 01 ► Un **repère (affine)** est la donnée d'un triplet $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est un point, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs (abstraits) indépendants, autrement dit $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Déf 02 ► Un repère (affine) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est dit **orthonormé** si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Déf 03 ► Le triplet $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ avec $\Omega(0, 0)$, $\vec{e_1}(1, 0)$ et $\vec{e_2}(0, 1)$ est appelé le **repère canonique**.

04 ► Le repère canonique est orthonormé.

Prop 05 ► Si $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère, l'application $(x, y) \mapsto O + x\vec{u} + y\vec{v}$ est une bijection (isomorphisme affine) de $\mathbb{R}^2$ dans le plan cartésien. Si de plus le repère est orthonormé c'est une isométrie (affine).

Déf 06 ► Soit un repère $\mathcal{R} := (O, \vec{u}, \vec{v})$. Étant donné un point P on note $P(x, y)_{\mathcal{R}}$ et on dit que $(x, y)_{\mathcal{R}}$ sont les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ si $P = O + x\vec{u} + y\vec{v}$.

Prop 07 ► Soit un repère $\mathcal{R} := (O, \vec{u}, \vec{v})$ et notons $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$ la base sous-jacente. Alors pour tout point $P(x_P, y_P)_{\mathcal{R}}$ et tout vecteur $\vec{w}(x_w, y_w)_{\mathcal{B}}$ nous avons la relation $P + \vec{w} = (x_P + x_w, y_P + y_w)_{\mathcal{R}}$.

§4. Barycentres

Déf 01 ► Les nombres positifs $\omega_1, \ldots, \omega_n$ forment un **système de poids** (ou plus simplement, sont des **poids**) si $\omega_1 + \cdots + \omega_n \neq 0$. On appelle $\omega := \omega_1 + \cdots + \omega_n$ le **le poids total**.

Déf 02 ► On dit qu'un système de poids $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est **normalisé** si le poids total est 1. Ainsi à tout système de poids $\omega_1, \ldots, \omega_n$ on peut associer les poids normalisés $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n$ avec $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega}$.

Déf 03 ▶ Soient n points $A_1, \dots, A_n$ et n poids $\omega_1, \dots, \omega_n$ de poids total ω. On appelle **barycentre** de $(A_1, \dots, A_n)$ avec les poids $(\omega_1 : \cdots : \omega_n)$ l'unique point G tel que $\vec{G} = \frac{1}{\omega} \sum \omega_i \vec{A_i}$. On note $\sum \bar{\omega}_i A_i \coloneqq G$ ce barycentre.

Prop 04 ▶ Soient n points $A_1, \dots, A_n$ et n poids $\omega_1, \dots, \omega_n$ de poids total ω, alors $G = \sum \bar{\omega}_i A_i \iff \forall P, \omega\overrightarrow{PG} = \sum \omega_i \overrightarrow{PA_i} \iff \exists P, \omega\overrightarrow{PG} = \sum \omega_i \overrightarrow{PA_i}$.

05 ▶ Cette proposition nous indique que la position du barycentre est indépendante de la position de $\Omega(0,0)$ par rapport aux points $A_1, \dots, A_n$.

Prop 06 ▶ Si $\omega_1, \dots, \omega_n$ n'est pas un système de poids, c.-à-d. $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 0$ alors $\forall P, \sum \omega_i \overrightarrow{PA_i} = \sum \omega_i \vec{A_i}$.

Déf 07 ▶ On note le vecteur la proposition précédente $\sum \omega_i A_i \coloneqq \sum \omega_i \vec{A_i}$.

08 ▶ Comme $1 + (-1) = 0$ le vecteur $B - A$ est bien défini et nous avons $B - A = \overrightarrow{AB}$.

09 ▶ L'expression $\sum \omega_i A_i$ n'a de sens que dans les deux cas particuliers :

- c'est un point (le barycentre) quand $\sum \omega_i = 1$;
- c'est un vecteur quand $\sum \omega_i = 0$.

10 ▶ Comme la notation le suggère, l'expression $\sum \omega_i A_i$ est invariable par permutation, c.-à-d. $\sum \omega_i A_i = \sum \omega_{\sigma(i)} A_{\sigma(i)}$ pour toute permutation σ.

11 ▶ La proposition suivante nous dit qu'on peut remplacer une partie des points par leur barycentre en y mettant la sommes des poids correspondants.

Prop 12 ▶ Soient n points $A_1, \dots, A_n$ et un système de poids $\omega_1, \dots, \omega_n$. Si $\omega_1, \dots, \omega_k$ est un sous-système de poids, $\omega_{1,k}$ son poids total et $G_{1,k} \coloneqq \bar{\omega}_1 A_1 + \cdots + \bar{\omega}_k A_k$ le barycentre correspondant. Alors le barycentre de $(A_1, \dots, A_n)$ avec les poids $(\omega_1 : \cdots : \omega_n)$ coïncide avec le barycentre de $(G_{1,k}, A_{k+1}, \dots, A_n)$ avec les poids $(\omega_{1,k} : \omega_{k+1} : \cdots : \omega_n)$.

Prop 13 ▶ Si $A_1 = \cdots = A_n = A$ alors $\sum \bar{\omega}_i A_i = A$ pour tout système de poids $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Prop 14 ▶ Soit A, B, C trois points *non alignés*, alors pour tout point P il existe un unique triplet de poids normalisés (α, β, γ) tel que $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$.

Déf 15 ▶ Étant donné A, B, C trois points non alignés, on dit que (A, B, C) est une **repère barycentrique** et que les poids (normalisés) (α, β, γ) de la proposition précédente sont des (les) **coordonnées barycentriques** de P dans cette base.

Déf 16 ▶ On dit qu'une application F est **affine** si elle préserve les barycentres, c.-à-d. $F(\sum \omega_i A_i) = \sum \omega_i F(A_i)$.

Prop 17 ▶ Si F est une application vectorielle l'application $F_A : A + \vec{u} \mapsto A + F(\vec{u})$ est affine. *On dit que F_A est « F de centre A ».*

Prop 18 ▶ Une application F est affine si et seulement si $F(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda F(A) + (1-\lambda)F(B)$ pour tous points A et B, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

§5. Homothéties

Déf 01 ▶ Une **similitude** H de **rapport** λ est une application qui multiplie les distances par λ, c.-à-d. $T(A)T(B) = \lambda AB$ pour tous deux points A, B. On dit aussi que c'est une *λ-similitude.*

Prop 02 ▶ Une 0-similitude est une application constante et une 1-similitude est une isométrie.

Déf 03 ▶ Soit C un point et λ un réel. L'application $H_{C,\lambda} : A \mapsto C + \lambda\overrightarrow{CA}$ est appelée **homothétie** de centre C et de rapport λ.

Prop 04 ▶ $H_{C,\lambda}(C + \vec{u}) = C + \lambda\vec{u}$

Prop 05 ► $H_{C,\lambda_1} \circ H_{C,\lambda_2} = H_{C,\lambda_2} \circ H_{C,\lambda_1} = H_{C,\lambda_1\lambda_2}$

Prop 06 ► Les homothéties de rapport non nul sont des bijections, avec $H_{C,\lambda}^{-1} = H_{C,\frac{1}{\lambda}}$.

Prop 07 ► $H_{C,\lambda} \circ T_{\vec{u}} = T_{\lambda\vec{u}} \circ H_{C,\lambda}$. Autrement dit $H_{C,\lambda}(A + \vec{u}) = H_{C,\lambda}(A) + \lambda\vec{u}$.

Prop 08 ► Nous avons $H_{C,1} = \mathrm{Id}$. On dit pour une telle homothétie qu'elle est **triviale**. Tous point est un centre pour l'homothétie triviale.

Déf 09 ► Une homothétie de rapport -1 est appelée **symétrie centrale** et elle est notée $S_C := H_{C,-1}$.

Prop 10 ► Une homothétie $H_{C,\lambda}$ est une $|\lambda|$-similitude, c.-à-d. $H_{C,\lambda}(A)H_{C,\lambda}(B) = |\lambda|AB$. En particulier une homothétie est une isométrie si et seulement si $\lambda = \pm 1$, ainsi les symétrie centrales sont les seuls homothéties non triviales qui sont des isométries.

Prop 11 ► Toute similitude est la composition d'une isométrie et d'une homothétie.

Prop 12 ► Le centre d'une homothétie non triviale est son unique point fixe, c.-à-d. si H est une homothétie non triviale et $H(C) = C$ alors C est le centre de l'homothétie.

Prop 13 ► Nous avons $H_{C_1,\lambda_1} = H_{C_2,\lambda_2}$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$, et $C_1 = C_2$, dans le cas non trivial.

Prop 14 ► Les homothéties sont affines.

§6. Droites

Déf 01 ► Soient un point A et un vecteur **non nul** $\vec{u} \neq \vec{0}$, l'ensemble $D_{A,\vec{u}} = \{A + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est appelé une **droite (affine)**. Le vecteur $\vec{u}$ est dit **directeur** de cette droite. Et on dit que cette droite **passe** par A et a pour direction $\vec{u}$.

Prop 02 ► L'application $\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} = T_{\lambda\vec{u}}(A)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $D_{A,\vec{u}}$ appelé **paramétrisation (affine)**.

Déf 03 ► Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on note $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (avec $\lambda \neq 0$). Et sous cette condition on note $\vec{u} : \vec{v} := \lambda$.

Prop 04 ► $D_{A,\vec{u}} = D_{B,\vec{v}}$ si et seulement si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ et $B \in D_{A,\vec{u}}$ (et/ou $A \in D_{B,\vec{v}}$). Ainsi si u est un vecteur directeur d'une droite, l'ensemble des vecteurs directeurs de cette même droite est $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^\star\}$.

Prop 05 ► Si une droite contient une autre, alors les deux droites coïncident.

Prop 06 ► Soient $A \neq B$ deux points distincts d'une droite D, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D.

Prop 07 ► Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D, alors pour tout point A nous avons $D = D_{A,\vec{u}}$. En particulier si $A \neq B \in D$, alors $D = D_{A,\overrightarrow{AB}}$.

Prop 08 ► Par deux point passe une unique droite, en particulier si $\#(D_1 \cap D_2) > 1$, alors $D_1 = D_2$.

Déf 09 ► L'unique droite passant par deux points distincts $A \neq B$ est noté (AB).

Prop 10 ► Soient $A \neq B$ deux points distincts d'une droite D, alors D est l'ensemble de barycentres $\{\alpha A + \beta B\}$ de A et B.

Prop 11 ► L'application $\lambda \mapsto (1 - \lambda)A + \lambda B$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans (AB) appelé **paramétrisation barycentrique**.

Prop 12 ► L'image d'une droite par une application affine est une droite.

Déf 13 ► Deux droites sont dites **parallèles** si elles possèdent un vecteur directeur en commun (et das ce tous leurs vecteurs directeurs sont communs).

14 ▶ On note $D_1 \parallel D_2$ si les droites D_1 et D_2 sont parallèles. La relation $\parallel$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont appelées **directions**. Et l'ensemble des directions est ce qu'on appelle *l'espace projectif*.

Prop 15 ▶ $T_{\vec{v}}(D_{A,\vec{u}}) = D_{T_{\vec{v}}(A),\vec{u}}$.

- En particulier, l'image par translation d'une droite est une droite parallèle.
- Une droite est invariante par une translation $T_{\vec{v}}$ si et seulement si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Prop 16 ▶ $H_{C,\lambda}(D_{A,\vec{u}}) = D_{H_{C,\lambda}(A),\vec{u}}$.

- En particulier, l'image par homothétie d'une droite est une droite parallèle.
- Une droite est invariante par une homothétie si et seulement si son centre est sur cette droite.

Prop 17 ▶ Étant donné une droite D et un point A, il existe une unique droite parallèle à D passant par A.

Prop 18 ▶ Deux droites parallèles sont disjointes ou confondus.

Déf 19 ▶ Un vecteur est dit **normal** à une droite D si et seulement s'il est orthogonal à un (à tout) vecteur directeur de cette droite. Deux droites sont dites **perpendiculaires** si un (tout) vecteur directeur de l'une est un vecteur normal pour l'autre.

Prop 20 ▶ Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Prop 21 ▶ Étant donné une droite D et un point A, il existe une unique droite perpendiculaire à D passant par A.

Prop 22 ▶ Soit $(a, b, d) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by = d\}$ est une droite de vecteur normal (a, b) et de vecteur directeur $(-b, a)$. L'équation $ax + by = d$ est dite **équation cartésien** de cette droite.

23 ▶ Par abus de notation on note $\{ax + by = d\} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = d\}$.

Prop 24 ▶ Deux droites $\{a_1x + b_1y = d_1\}$ et $\{a_2x + b_2y = d_2\}$ sont égales (resp. parallèles) si et seulement si $(a_1 : b_1 : d_1) = (a_2 : b_2 : d_2)$ (resp. $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2)$).

Déf 25 ▶ On dit que l'équation cartésienne $ax + by = d$ est **normalisée** si $\|(a, b)\| = 1$.

Prop 26 ▶ Toute droite possède une infinité d'équations cartésiennes (toutes proportionnelles) dont exactement deux sont normalisées.

Prop 27 ▶ Si $ax + by = d$ est une équation cartésienne normalisée de D alors $d(\Omega, D) = |d|$, où $\Omega(0, 0)$.

§7. Points alignés

Déf 01 ▶ On dit que des points sont **aligné** s'ils appartiennent à une même droite. On note $(ABC\ldots)$ si les points $A, B, C\ldots$ sont alignés et s'il y au moins deux points distincts.

02 ▶ Un ou deux points sont toujours alignés.

Prop 03 ▶ Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.

Prop 04 ▶ Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $(AB) = (AC)$.

Prop 05 ▶ Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $C = H_{A,\lambda}(B)$ pour un certain λ.

Prop 06 ▶ Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si l'un est un barycentre des deux autres.

07 ▶ On verra plus tard que A, B, C sont alignés si et seulement si $\measuredangle ABC = 0 \pmod{\pi}$ et si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$.

§8. Segment et demi-droites

Prop 01 ▶ Pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}$ nous avons $\{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in I\} = \{(1-\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in I\}$ et on dit que $\lambda \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AB}$ est une **paramétrisation (affine)** et que $\lambda \mapsto (1-\lambda)A + \lambda B$ est une **paramétrisation barycentrique** de cet ensemble.

Déf 02 ▶ Un ensemble de la forme $[AB] \coloneqq \{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0,1]\}$ est dit **segment fermé** d'**extrémités** A et B. Pour tout point $C \in [AB]$ ont dit que C est **entre** A et B.

Prop 03 ▶ $[AB] = [BA]$

Prop 04 ▶ $[AB] = [CD] \iff \{A, B\} = \{C, D\}$, c.-à-d. un segment n'a que deux extrémités.

Prop 05 ▶ $[AB] \supset [CD] \iff \{C, D\} \in [AB]$

Déf 06 ▶ Un ensemble de la forme $]AB[= \{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0,1[\}$ est dit **segment ouvert**. Pour tout point $C \in]AB[$ ont dit que C est **strictement entre** A et B.

07 ▶ Il existe aussi les versions semi-fermés/ouvertes $]AB]$ ou $[AB[$.

08 ▶ Dans les notations précédentes on peut rajouter une virgule entre les points : $[A, B]$, $]A, B[$...

Déf 09 ▶ Un ensemble de la forme $[AB) = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[\}$ est dit **demi-droite fermée** d'extrémité A et de direction $\overrightarrow{AB}$.

Déf 10 ▶ Un ensemble de la forme $]AB) = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[\}$ est dit **demi-droite ouverte**.

Déf 11 ▶ La **demi-droite opposée** à $[AB)$ est $-[AB) = \{A - \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, \infty[\}$, et celle de $]AB)$ est $-]AB) = \{A - \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in]0, \infty[\}$.

Prop 12 ▶ La demi-droite opposée à $[AB)$ est une demi-droite fermée de direction $\overrightarrow{BA}$. De plus $[AB) \cup -[AB) = (AB)$ et $[AB) \cap -[AB) = \{A\}$.

Prop 13 ▶ Le complémentaire d'une demi-droite fermé (resp. ouverte) est une demi-droite ouverte (esp. fermé) appelée la **demi-droite complémentaire**.

§9. Demi-plans

Déf 01 ▶ Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, un **demi-plan ouvert** (resp. **fermé**) est un ensemble de la forme $\{ax + by > d\}$ (resp. $\{ax + by \geq d\}$). On dit que la droite $\{ax + by = d\}$ **délimite** ces demi-plans.

02 ▶ On peut remplacer $>$ et $\geq$ par $<$ et $\leq$ dans la définition précédente sans changer son sens.

Prop 03 ▶ Une droite « coupe » un plan en deux demi-plans, autrement dit $\mathbb{R}^2 = \{ax + by > d\} \sqcup \{ax + by = d\} \sqcup \{ax + by < d\}$.

Prop 04 ▶ Soient une droite $D = \{ax + by = d\}$ et un point $A \in \{ax + by > d\}$ alors :

- ▶ $B \in \{ax + by > d\} \iff [AB] \cap D = \emptyset$.
- ▶ $B \in \{ax + by < d\} \iff]AB[\cap D \neq \emptyset$.

§10. Relations métriques

Prop 01 ▶ Soit $C \in (AB)$, alors $C \in [AB]$ (resp. $C \in]AB[$) si et seulement si $\langle\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{CA}\rangle \geq 0$ (resp. $\langle\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{CA}\rangle > 0$).

Prop 02 ▶ Soient trois points distincts A, B et C, alors $AB^2 = BC^2 + 2\langle\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{CA}\rangle + CA^2$.

Prop 03 ▶ (Théorème de Pythagore) Étant donnés trois points distincts A, B et C, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires si et seulement si $AB^2 = BC^2 + CA^2$.

Prop 04 ▶ (inégalité triangulaire) Soient trois points distincts A, B et C.

1. $AB \leq BC + CA$;
2. $AB = BC + CA$ si et seulement si $C \in [AB]$;

Prop 05 ▶ (Théorème de Thalès) Soient quatre points distincts A_1, A_2, B_1, B_2 et $O = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$. Alors on a l'équivalence $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2) \iff \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}$. Et si cette condition est vérifiée nous avons aussi l'égalité avec le troisième rapport $\overrightarrow{A_1B_1} : \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB_2}$.

§11. Médiatrices

Déf 01 ▶ Soient deux points distincts $A \neq B$. La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$.

Prop 02 ▶ Soient deux points distincts $A \neq B$. L'ensemble $\{M \mid AM = BM\}$ est la médiatrice, et les deux demi-plans délimités par la médiatrice sont $\{M \mid AM > BM\}$ et $\{M \mid AM < BM\}$.

§12. Projection orthogonale

Déf 01 ▶ Soient D une droite, A un point et D' l'unique droite perpendiculaire à D passant par A. On note $P_D(A) \coloneqq D \cap D'$. L'application P_D ainsi définit est appelé la **projection orthogonale** sur D.

Prop 02 ▶ $P_D(A) = A \iff A \in D$

Prop 03 ▶ $P_D(A) = B \iff B \in D$ et $\overrightarrow{AB}$ est nul ou est un vecteur normal à D.

Prop 04 ▶ Soient $D_{A,\overrightarrow{u}}$ une droite et $\overrightarrow{v}$ un de ses vecteurs normaux. Alors $P_D(A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = A + \lambda\overrightarrow{u}$.

Prop 05 ▶ Les projections orthogonales sont des applications affines idempotente, c.-à-d. $P_D \circ P_D = P_D$.

Prop 06 ▶ Si D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires sécantes en O alors $P_{D_1} \circ P_{D_2} = O = P_{D_2} \circ P_{D_1}$, où O désigne aussi l'application constante $A \mapsto O, \forall A$.

07 ▶ La réciproque est aussi vrai : Pour $D_1 \neq D_2$, P_{D_1} et P_{D_2} commutent si et seulement si $D_1 \perp D_2$.

§13. Symétries axiales

Déf 01 ▶ Soient D une droite et A un point. On pose $S_D(A) \coloneqq A + 2\overrightarrow{AP_D(A)}$. L'application S_D ainsi définie est appelée **symétrie (axiale)** par rapport à D.

Prop 02 ▶ $S_D(A)$ est l'unique point tel que $P_D(A)$ soit le milieu de $[AS_D(A)]$.

Prop 03 ▶ $S_D(A)$ est l'unique point tel que D soit la médiatrice de $[AS_D(A)]$.

Prop 04 ▶ Soient $D_{A,\overrightarrow{u}}$ une droite et $\overrightarrow{v}$ un de ses vecteurs normaux. Alors $S_D : A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \mapsto A + \lambda\overrightarrow{u} - \mu\overrightarrow{v}$.

Prop 05 ▶ Les symétries axiales sont des isométries affines qui sont leur propre inverse.

Prop 06 ▶ L'ensemble des points fixes de S_D est D, c.-à-d. $S_D(A) = A \iff A \in D$.

Prop 07 ▶ Nous avons l'équivalence $D_1 = D_2 \iff S_{D_1} = S_{D_2}$.

Prop 08 ▶ Soit $\theta \pmod{\pi}$ l'angle orienté entre deux droites D_1 et D_2 sécantes en A, alors $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{A,2\theta}$.

Prop 09 ▶ Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles avec $D_2 = D_1 + \vec{v}$, où $\vec{v}$ est un vecteur normal aux deux droites, alors $S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{2\vec{v}}$.

§14. Cercles

Déf 01 ▶ Étant donné un point O et un réel positif $R > 0$ nous considérons les ensembles suivants :

- ▶ $C(O, R) = \{A \mid OA = R\}$, le **cercle** de **centre** O et de **rayon** R.
- ▶ $D(O, R) = \{A \mid OA \leq R\}$, le **disque (fermé)** de **centre** O et de **rayon** R.
- ▶ $\{A \mid OA < R\}$, l'**intérieur du cercle** $C(O, R)$, dit aussi le **disque ouvert**.
- ▶ $\{A \mid OA > R\}$, l'**extérieur du cercle** $C(O, R)$.

Déf 02 ▶ On dit qu'un ensemble est **à l'intérieur** (resp. à **l'extérieur**) d'un cercle s'il est contenu dans son intérieur (resp. extérieur).

Prop 03 ▶ Soit A un point et M un ensemble de points, alors $d(A, M) \geq R$ si et seulement si M n'a pas de points à l'intérieur du cercle $C(A, R)$.

Prop 04 ▶ Soit C un cercle, A un point intérieure à C et B un point extérieur à C, alors $C \cap]AB[\neq \emptyset$.

05 ▶ On va voir en TD que dans ce cas $\#\big(C \cap]AB[\big) = 1$.

Prop 06 ▶ Soit C un cercle, A un point intérieure à C. Pour tout $B \neq A$ nous avons $C \cap]AB) \neq \emptyset$.

07 ▶ On va voir en TD que dans ce cas $\#\big(C \cap]AB)\big) = 1$.

Déf 08 ▶ Des points sont dit **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle.

09 ▶ Trois points, ou moins, sont toujours cocycliques. Et on verra des critères pour que quatre points le soient.

§15. Courbes paramétrées

Déf 01 ▶ On appelle **courbe (paramétrée)**, toute application $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\Gamma := \gamma(I)$ s'appelle le **support** de γ.

02 ▶ Ne pas confondre la courbe γ avec son support Γ.

03 ▶ Plus généralement on peut avoir I une réunion d'intervalles deux-à-deux disjoints et $\mathbb{R}^n$ à la place de $\mathbb{R}^2$.

04 ▶ Comme une courbe est une application on peut parler de courbes C^1, C^∞, analytiques, polynomiales.... Pour nous dans ce cours les courbes seront de régularité au moins C^1, et si nécessaire plus.

05 ▶ Quand on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ on parle de courbes complexes.

Déf 06 ▶ On dit que $\gamma_1 : J \to R^2$ est un **reparamétrage** de $\gamma_0 : I \to R^2$ s'il existe un difféomorphisme (de la même régularité que γ_0) $\phi : J \to I$ tel que $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$.

Prop 07 ▶ « est un reparamétrage de » est une relation d'équivalence, dont les classe d'équivalence sont appelés **courbes géométriques**, et le support d'une courbe géométrique est bien défini.

08 ▶ Quand on se limite aux reparamétrages croissants on parle de **courbes géométriques orientées**.

Déf 09 ▶ Une courbe $\gamma : I \to R2$ est dite **régulière** en $t \in I$ si $\gamma'(t) \neq 0$. Dans ce cas, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la **tangente** de la courbe paramétrée γ en t. Si de plus γ est injective, on parle de la tangente en $\gamma(t)$.

Déf 10 ▶ Une courbe $\gamma : I \to R2$ est dite **singulière** en $t \in I$ si elle n'y est pas régulière, c.-à-d. si $\gamma'(t) = 0$.

Déf 11 ▶ Une courbe est dite **régulière** si elle est régulière en toute valeur du paramètre.

Prop 12 ▶ Les notions précédentes de *régularité* et de *tangente* sont bien définies pour les courbes géométriques.

13 ▶ Même si la courbe n'a pas de tangente en t le support Γ peut avoir une tangente en $\gamma(t)$ dans un autre sens.

14 ▶ On ne discutera pas ici les différents types de points : *ordinaire*, *d'infléxion*, *de rebroussement*. Ni les braches infinies. Ni d'angle entre deux courbes sécantes.

§16. Longueur d'une courbe paramétrée

Déf 01 ▶ Soit $I = [a, b]$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^1. La **longueur** de γ est la nombre positif $|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Déf 02 ▶ L'**abscisse curviligne** est la fonction $s \mapsto \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt$ qui mesure la distance parcourue entre le départ a et s.

Déf 03 ▶ On dit qu'une courbe γ est **paramétrée par la longueur d'arc** (ou *par l'abscisse curviligne*) si pour tout t on a $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Prop 04 ▶ Toute courbe régulière possède un reparamétrage par longueur d'arc.

Prop 05 ▶ La longueur d'une courbe géométrique est bien définie, car la longueur d'un courbe est invariante par reparamétrage.

06 ▶ On ne discutera pas ici les notions de *géodésique*, ni de *courbure*.

§17. Arcs et leurs mesures

Déf 01 ▶ Soient deux points (distincts) $A, B \in \mathcal{C}$ d'un cercle de centre O. Le segment $[AB]$ est appelé une **corde** du cercle. Les deux morceaux de part et d'autre de la droite (AB) sont appelés des **arcs**. La **grande arc** est celle qui est du côté du centre O, et la **petite arc** est l'autre. Ces arcs sont souvent nommés $\overset{\frown}{AB}$.

02 ▶ La notation $\overset{\frown}{AB}$ est ambiguë, car on ne sait pas si on parle de la petite ou de la grande arc. Souvent on sous-entend qu'on parle de la petite, mais si nécessaire on peut le préciser, ou utiliser un troisième point P appartenant à l'arc en question et noter l'arc $\overset{\frown}{APB}$. De plus quand $[AB]$ est diamètre il n'y a pas de grande et de petite arc, car les deux arcs sont des demi-cercles.

Déf 03 ▶ Un arc **orienté** est un arc dont l'une des extrémités est considérée comme début, l'autre comme fin. Autrement dit dont les extrémités forment un couple ordonné. Et on dit que l'arc est **positivement orienté** (resp. **négativement orienté**) si le « sens du parcours » du début vers la fin de l'arc est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. dans le sens direct des aiguilles d'une montre).

04 ▶ La longueur $\ell(\overset{\frown}{AB})$ d'un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ est la longer d'une courbe régulière qui la paramètre. C'est aussi la limite de la longueur des lignes brisées dont le pas tends vers 0.

Déf 05 ▶ La **mesure** en radian d'un arc $\widehat{AB}$ d'un cercle $\mathcal{C}(0, R)$ est la longueur de l'arc divisé par le rayon, c.-à-d. $\widehat{AB} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{R}$.

Déf 06 ▶ La **mesure algebrique** d'un arc est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'arc et le signe est positif (resp. négatif) si l'arc est positivement (resp. négativement) orienté.

07 ▶ Par abus de notation un arc, sa longueur et sa longueur algébrique sont notés de la même façon. Par exemple on note $\widehat{AB} = -\pi$, dans le cas où $\widehat{AB}$ est un demi-cercle orienté dans le sens des aiguilles d'une monter. En cas d'ambiguïté il faut préciser la notation utilisée.

08 ▶ Ce qui est pratique avec les mesures algébriques est qu'elles respectent la règle de Chasles modulo 2π, c.-à-d. $\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC} \pmod{2\pi}$.

Prop 09 ▶ La petite et la grande arc d'une même corde ont la même mesure algébrique modulo 2π.

Prop 10 ▶ Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes dans le même cercle. Alors si on note $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ les deux petites (resp. grandes) arcs, nous avons les équivalences :

- ▶ $AB = CD \iff \widehat{AB} = \widehat{CD}$;
- ▶ $AB > CD \iff \widehat{AB} > \widehat{CD}$ (resp. $AB > CD \iff \widehat{AB} < \widehat{CD}$).

§18. Angles

Soient A, B et C trois points (non alignés). Soient H_A le demi-plan délimité par (BC) qui contient A et H_B le demi-plan délimité par (BA) qui contient C. Nous appelons :

Déf 01 ▶ L'**angle (saillant)** $\measuredangle ABC \coloneqq H_A \cap H_C$ est la zone (convexe) « bordée » par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$;

02 ▶ Un angle est appelé aussi **secteur angulaire** et on le note aussi $\widehat{ABC}$.

Déf 03 ▶ Le complémentaire d'un angle saillant est dit **angle rentrant**, et il est aussi « bordé » par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ (mais il n'est pas convexe) ;

04 ▶ Les sens de « complémentaire » utilisé dans la définition précédente n'est pas celui habituellement utilisé au collège.

Déf 05 ▶ Quand $B \in [AC]$ l'angle $\measuredangle ABC$ est l'un des deux demi-plans délimités par (AC) et on dit qu'il est **plat**. Un angle plat est à la fois saillant et rentrant.

Déf 06 ▶ Le point B est le sommet de l'angle $\measuredangle ABC$; les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ qui **bordent** l'angle $\measuredangle ABC$ son ses **côtés**.

Déf 07 ▶ L'angle dont les côtés sont les demi-droites opposées $-[BA)$ et $-[BC)$ est dit l'angle **opposé** à $\measuredangle ABC$.

Déf 08 ▶ Les angles dont l'un des côtés est identique $[BA)$ (resp. $[BC)$) et l'autre est l'opposée $-[BC)$ (resp. $-[BA)$) sont dit **supplémentaires** à $\measuredangle ABC$.

Prop 09 ▶ Deux droites sécantes coupent le plan en 4 angles, deux à deux opposés et deux à deux supplémentaires.

Déf 10 ▶ Un angle dont les deux côtés sont perpendiculaires est dit **droit**.

Prop 11 ▶ Le supplémentaire et l'opposé d'un angle droit sont des angles droits.

Déf 12 ▶ Un **angle orienté** est un angle dont un des côtés est considéré comme *début* et l'autre comme *fin*.

13 ▶ La notation d'un angle orienté est identique à celle d'un angle non orienté, par exemple $\measuredangle ABC$. Et dans cette notation $[BA)$ est considéré comme début et $[BC)$ comme fin.

§19. Mesures d'angles

Déf 01 ▶ Soit O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ et $A, B \in \mathcal{C}$ deux points de ce cercle. On note $\widehat{AB}$ l'arc compris dans l'angle $\measuredangle AOB$. Et on dit que $\measuredangle AOB$ est un angle **centrale** qui **éclaire** l'arc $\widehat{AB}$. Si l'angle $\measuredangle AOB$ est orienté on oriente l'arc $\widehat{AB}$ dans le même sens.

Déf 02 ▶ La **mesure** (resp. la **mesure algébrique**) d'un angle en radians est la mesure (resp. la mesure algébrique) d'un arc qu'il éclaire du centre.

Prop 03 ▶ Cette définition ne dépend pas du cercle choisi.

04 ▶ Quand on dit que deux angles sont égaux on sous-entend que leurs mesures sont égales.

Prop 05 ▶ Un angle est égal à son opposé, c.-à-d. ont la même mesure orienté.

06 ▶ La mesure d'un angle droit est $\frac{\pi}{2}$ et d'un angle plat est π.

07 ▶ Par abus de notation, un angle, sa mesure et sa mesure algébrique sont notés de la même façon. Par exemple on note $\measuredangle ABC = -\frac{\pi}{3}$. En cas d'ambiguïté il faut préciser la notation utilisée.

08 ▶ Comme dans le cas des arcs, les mesures algébriques respectent la règle de Chasles modulo 2π, c.-à-d. $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \pmod{2\pi}$.

Prop 09 ▶ Si la mesure orientée d'un angle est $\alpha \pmod{2\pi}$ la mesure orientée de son angle supplémentaire est $\alpha - \pi \pmod{2\pi}$. Ainsi un angle est et son opposé ont la même mesure algébrique modulo π.

Déf 10 ▶ La mesure d'angle orienté entre deux droites est défini modulo π comme suit $\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle AOB \pmod{\pi}$ si $D_1 = (OA)$ et $D_2 = (OB)$.

11 ▶ Ce-ci est bien une définition, autrement dit elle ne dépend pas du choix des points $A \in D_1$ et $B \in D_2$ d'après les propositions §19.05 et §19.09.

Prop 12 ▶ Si $D_1 \parallel D_1'$ et $D_2 \parallel D_2'$ alors $\measuredangle(D_1, D_2) = \measuredangle(D_1', D_2')$.

Prop 13 ▶ Les points distincts A,B et C sont alignés si et seulement si $\measuredangle ABC = 0 \pmod{\pi}$.

Déf 14 ▶ Soit A, B, C trois points d'un cercle $\mathcal{C}$. On dit que l'angle (orienté) $\measuredangle ABC$ est **inscrit** dans le $\mathcal{C}$ et qu'il **éclaire** l'arc (orienté) $\widehat{AC}$.

Prop 15 ▶ Soit un angle (orienté) inscrit $\measuredangle ABC$ qui éclaire l'arc (orienté) $\widehat{AC}$, alors $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$.

Prop 16 ▶ La somme des angles dans un triangle est π.

17 ▶ Soit X un point d'un cercle $\mathcal{C}$. Dans la proposition suivante (XX) désigne la tangente à $\mathcal{C}$ au point X.

Prop 18 ▶ Soit 4 points A, B, C et D d'un cercle $\mathcal{C}$. Nous avons l'égalité entre mesures **orientés** $\measuredangle\big((AB),(CD)\big) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$.

Prop 19 ▶ Quatre points distincts A, B, C et D sont cocycles si et seulement si on a l'égalité entre angles orientés $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \pmod{\pi}$.

Déf 20 ▶ *(fait sur dessins)* Deux droites parallèles et une droite sécante forment 8 angles. Il y a 4 paires d'angles **correspondant**, 2 paires d'angles **alternes-internes** et 2 paires d'angles **alternes-externes**.

Prop 21 ▶ Deux angles correspondants ont la même mesure. La somme de deux angles alternes est π.

Déf 22 ▶ La **bissectrice (intérieure)** d'un angle $\measuredangle AOB$ est la (demi-)droite $[BC)$ telle qu'on ait l'égalité des angles orientés $\measuredangle AOC = \measuredangle COB$.

Déf 23 ▶ La **bissectrice extérieure** d'un angle est la droite perpendiculaire à la bissectrice et qui passe par le sommet de l'angle.

Prop 24 ▶ La bissectrice extérieure est la bissectrice intérieure de l'angle supplémentaire.

Prop 25 ▶ Un point à l'intérieur d'un angle est sur la bissectrice si et seulement s'il est à distances égales des deux côtés de l'angle.

Prop 26 ▶ Le bissectrice est l'ensemble des centres des cercles tangents aux deux côtés de l'angle.

§20. Rotations

Déf 01 ▶ L'application linéaire dont la matrice est $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ est appelé la **rotation (linéaire)** d'angle $\theta \pmod{2\pi}$.

Prop 02 ▶ $R_0 = \mathrm{Id}$ et on l'appelle la rotation (linéaire) **triviale**.

Prop 03 ▶ $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$

Prop 04 ▶ $R_\theta^t = R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$ et donc les rotations sont des isométries linéaires.

Prop 05 ▶ $R_\theta(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\theta = 0$. Autrement dit l'unique vecteur fixe d'une rotation non triviale est $\vec{0}$.

Déf 06 ▶ L'application $R_{A,\theta} : B \mapsto A + R_\theta(\overrightarrow{AB})$ est appelé la **rotation (affine)** de centre A et d'angle $\theta \pmod{2\pi}$.

Prop 07 ▶ $R_{A,\theta}(A + \vec{u}) = A + R_\theta(\vec{u})$

Prop 08 ▶ Les rotations affines sont des applications affines.

Prop 09 ▶ $R_{A,0} = \mathrm{Id}$, et on l'appelle la rotation (affine) **triviale**. Tout point est un centre de la rotation triviale.

Prop 10 ▶ $R_{A,\pi} = S_A$ est la symétrie centrale de centre A.

Prop 11 ▶ $R_{A,\theta}(B) = B \iff A = B$ ou $\theta = 0$. Autrement dit l'unique point fixe d'une rotation non triviale est son centre.

Prop 12 ▶ Un cercle est invariant par les rotations du même centre que ce cercle.

Prop 13 ▶ $R_{A,\theta} \circ H_{A,\lambda} = H_{A,\lambda} \circ R_{A,\theta}$

Prop 14 ▶ $R_{A,\theta}(B + \vec{u}) = R_{A,\theta}(B) + R_\theta(\vec{u})$, et donc $R_{A,\theta} \circ T_{\vec{u}} = T_{R_\theta(\vec{u})} \circ R_{A,\theta}$.

Prop 15 ▶ $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_1+\theta_2}$

Prop 16 ▶ $R_{A_1,\theta} \circ R_{A_2,-\theta}$ est une translation.

Prop 17 ▶ Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$, alors $R_{A_1,\theta_1} \circ R_{A_2,\theta_2} = R_{A_3,\theta_1+\theta_2}$, mais l'expression de A_3 en fonction de A_1,A_2,θ_1 et θ_2 n'est pas simple.

Prop 18 ▶ Nous avons la caractérisation de la mesure algébrique modulo 2π suivante $\measuredangle ABC = \theta \pmod{2\pi} \iff R_\theta(\overrightarrow{BA}) \parallel \overrightarrow{BC} \iff R_{B,\theta}(A) \in [BC)$.

§21. Triangles

Déf 01 ▶ Un **triangle** (non dégénéré) est la donnée d'un triplet de points (non alignés) appelés les **sommets** du triangle. On note $\triangle ABC$ le triangle dont les sommets sont (A, B, C). Les **côtés** de ce triangle sont les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$, et ses *droites des côtés* sont (AB), (BC) et (CA).

Déf 02 ▶ Deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont dit **égaux**, et on note $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, si et seulement si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.

03 ▶ Attention, dans la définition précédente l'ordre des sommets compte.

04 ▶ On note égalité aussi avec les symboles $\cong$, $\simeq$ ou $\triangleq$.

Prop 05 ▶ Si $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ alors on a les égalités des angles non orientés $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ et $\measuredangle C = \measuredangle C'$.

Prop 06 ▶ Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$
- $AB = A'B'$ ainsi que (deux des égalités) $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ et $\measuredangle C = \measuredangle C'$.
- $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\measuredangle A = \measuredangle A'$.
- $\triangle A'B'C'$ est l'image par une isométrie de $\triangle ABC$.

Déf 07 ▶ Deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont dit **similaire**, et on note $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, si et seulement si nous avons les égalités des angles non orientés $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ et $\measuredangle C = \measuredangle C'$.

08 ▶ On note la similitude entre triangles aussi avec le symbole $\approx$.

09 ▶ Il suffit de vérifier l'égalité de deux des angles, la troisième s'en déduit.

Prop 10 ▶ Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
- $(AB : BC) = (A'B' : B'C')$ et $\measuredangle B = \measuredangle B'$.
- $(AB : BC : CA) = (A'B' : B'C' : C'A')$.
- $\triangle A'B'C'$ est l'image par une similitude de $\triangle ABC$.

Déf 11 ▶ Le triangle $\triangle ABC$ est dit **équilatérale** si $AB = BC = CA$.

Déf 12 ▶ Le triangle $\triangle ABC$ est dit **isocèle** de base AB si $BC = CA$.

Déf 13 ▶ Le triangle $\triangle ABC$ est dit **rectangle** en C si $\measuredangle C = \frac{\pi}{2}$. Et dans ce cas on appelle le côté opposé à l'angle droit $[AB]$ l'**hypoténuse**, et les deux côtés adjacents à l'angle droit $[CA]$ et $[CB]$ les **cathètes**.

Déf 14 ▶ Le triangle $\triangle ABC$ est dit **acutangle** si les trois angles sont aigus.

Déf 15 ▶ Le triangle $\triangle ABC$ est dit **obtusangle** si l'un des angles est obtus.

Déf 16 ▶ Une **médiane** dans un triangle est une droite qui passe par l'un des sommets et par le milieu du côté opposé.

Déf 17 ▶ Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point, appelé **barycentre** du triangle.

Prop 18 ▶ Les trois médiatrices des côtés se coupent dans le **centre du cercle circonscrit** du triangle.

Prop 19 ▶ Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Déf 20 ▶ Une **hauteur** dans un triangle est une droite qui passe par un des sommets et qui est perpendiculaire au côté opposé. La projection orthogonale d'un sommet sur le côté opposé est appelé **pied de la hauteur**.

Prop 21 ▶ Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Prop 22 ▶ Les trois hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre** du triangle.

Prop 23 ▶ Dans un triangle rectangle l'orthocentre coïncide avec le sommet de l'angle droit.

Prop 24 ▶ L'orthocentre est à l'intérieur du triangle si et seulement si le triangle est acutangle.

Prop 25 ▶ (droite d'Euler) Soient O, G et H le centre du cercle circonscrit, le barycentre et l'orthocentre respectivement d'un triangle. Alors les trois points sont alignés dans cet ordre O, G, H avec le rapport des longueurs $(OG : GH) = (1 : 2)$, c.-à-d. $G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H$.

Prop 26 ▶ Il existe un unique cercle intérieur au triangle et qui touche les trois côtés. Il est appelé **cercle inscrit** et son centre est l'intersection des trois bissectrices intérieures.

Prop 27 ▶ Il existe trois cercle extérieurs au triangle et qui touche les trois côtés. Ils sont appelés les **cercle exinscrits** et leur centres sont les intersections d'une bissectrice intérieure avec deux bissectrices extérieures.

§22. Nombres complexes

Déf 01 ▶ Étant donné un point $P(x, y)$ (resp. un vecteur $\vec{u}(x, y)$) on appelle le nombre complexe $z := x + iy$ l'**affixe** de P (resp. de $\vec{u}$) et on note $P(z)$ (resp. $\vec{u}(z)$).

02 ▶ Souvent on note z_P l'affixe d'un point P et z_u l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$.

Prop 03 ▶ Soient z_A, z_u et z_B les affixes respectifs d'un point A d'un vecteur $\vec{u}$ et du point $B := A + \vec{u}$. Alors nous avons $z_B = z_A + z_u$.

Prop 04 ▶ Soient z_u et z_v les affixes respectifs de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous avons l'égalité $\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle = \mathrm{Re}(z_u \bar{z_v}) = \frac{1}{2}(z_u \bar{z_v} + \bar{z_u} z_v)$.

Prop 05 ▶ Soient z_u et z_v les affixes respectifs de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous avons $\vec{u} \perp \vec{v} \iff z_u \bar{z_v} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_u}{z_v} \in i\mathbb{R}$.

Prop 06 ▶ Soient $D_{O,\vec{u}}$ une droite et ξ l'affixe du vecteur directeur $\vec{u}$. Soit la projection orthogonale $B := P_D(A)$ d'un point A sur D. Alors les affixes z et z' des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ respectivement, vérifient $z' = \frac{z\bar{\xi} + \bar{z}\xi}{2\bar{\xi}}$.

Prop 07 ▶ Soient $D_{O,\vec{u}}$ une droite et ξ l'affixe du vecteur directeur $\vec{u}$. Soit le point symétrique $B := S_D(A)$ d'un point A par rapport D. Alors les affixes z et z' des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ respectivement, vérifient $z'\bar{\xi} = \bar{z}\xi$.

Prop 08 ▶ Soient z_O, z_A et z_B les affixes respectifs des points O, A, B où $B = H_{O,\lambda}(A)$ est l'image de A par l'homothétie $H_{O,\lambda}$. Alors nous avons $z_B = z_O + \lambda(z_A - z_O)$.

Prop 09 ▶ Soient z_O, z_A et z_B les affixes respectifs des points O, A, B où $B = R_{O,\theta}(A)$ est l'image de A par la rotation $R_{O,\theta}$. Alors nous avons $z_B = z_O + e^{i\theta}(z_A - z_O)$.

10 ▶ D'après ce qui précède $z_{\overrightarrow{OB}} = \xi z_{\overrightarrow{OA}}$ si et seulement si B est l'image de A par la similitude $H_{O,\rho} \circ R_{O,\theta}$ où $\rho := |\xi|$ est le module de ξ, et θ est son argument, c.-à-d. si $\xi = \rho e^{i\theta}$.

Prop 11 ▶ Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si leurs affixes vérifient $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$. De plus C in $[AB]$ si et seulement si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}_-$.

§23. Formes quadratiques

Quelques rappels à mettre ici.

§24. Coniques

Partie à compléter.