LICENCE 2E ANNÉE, MENTION MATHÉMATIQUES 2019-2020
M43, PROBABILITÉS DISCRÈTES

DEVOIR POUR SE RÉCONFORTER

19 mars 2020

[durée : 2 heures]

Tous les documents sont autorisés. Le sujet comporte 3 pages et 4 exercices.

Exercice 1 Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

1. Expérience aléatoire 1 : on tire au hasard, successivement et sans remise, trois boules dans l'urne (on tient compte de l'ordre).

(i) Donner un espace de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ décrivant cette expérience aléatoire.

(ii) Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?

(iii) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de numéros pairs parmi les trois boules tirées. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

2. Expérience aléatoire 2 : une boîte comporte six compartiments numérotés de 1 à 6. On place les six boules, au hasard, une par com- partiment.

(i) Donner un espace de probabilité $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ décrivant cette expérience aléatoire.

(ii) Quelle est la probabilité pour que, pour chaque boule, le numéro de la boule et celui du compartiment qui la contient soit le même ?

(iii) On note Y le nombre de boules pour lesquelles le numéro de la boule et celui du compartiment qui la contient est le même. Quelle est la loi de Y ?

3. Expérience aléatoire 3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs au hasard d'une boule avec remise.

(i) Donner un espace de probabilité $(\Omega_3, \mathcal{P}(\Omega_3), P_3)$ décrivant cette expérience aléatoire.

(ii) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la boule numéro 1 au cours des k tirages ?

(iii) On note Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier 1 si le numéro 1 apparaît dans les n premiers tirages ou égale à $n + 1$ sinon. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 2 Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Paul pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors qu'Alex, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Alex est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Paul. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Alex qui l'ait pêché.

Exercice 3 Dans chacune des questions **1.** à **3.** ci-dessous : déterminer la loi de la variable aléatoire proposée. *On donnera une expression complète de sa loi (même s'il s'agit d'une loi usuelle).*

1. On lance deux dés à 6 faces non pipés, un bleu et un rouge, et on appelle X le plus grand des deux numéros obtenus.
2. Un sac contient 26 jetons indistinguables au toucher. Sur chaque jeton se trouve l'une des 26 lettres de l'alphabet (6 voyelles et 20 consonnes). Chaque lettre est représentée une et une seule fois. En effectuant 5 tirages sans remise dans ce sac, on forme un "mot" de 5 lettres (c'est-à-dire une suite de 5 lettres placées dans l'ordre où elles ont été tirées). On note Y le nombre de voyelles dans ce "mot".
3. Soit R une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si R est pair et 1 si R est impair. *On essaiera de simplifier au maximum les expressions obtenues.*

Exercice 4 Pour rester en forme, une personne décide de faire une séance de jogging tous les jours. On admet que si elle court un jour, alors la probabilité qu'elle coure le lendemain vaut $0,6$, tandis que si elle ne court pas un jour, la probabilité qu'elle ne coure pas le lendemain vaut $0,2$. On note p_1 la probabilité qu'elle coure le premier jour suivant cette bonne résolution. On cherche à calculer en fonction de p_1 et de n la probabilité p_n de l'événement

$$A_n = \{\text{La personne court le jour } n\}.$$

1. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles $P_{A_{n-1}}(A_n)$ et $P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)$.
2. En appliquant la formule des probabilités totales, en déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence :
$$p_n = -0,2p_{n-1} + 0,8 \qquad (n \geqslant 2). \tag{1}$$
3. Pour résoudre la relation de récurrence (1), on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $q_n = p_n + a$ soit une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors q_n en fonction de q_1 et de n.
4. En déduire la valeur de p_n en fonction de p_1 et de n. Montrer que p_n converge quand n tend vers l'infini vers une limite p qui ne dépend pas de p_1.