Feuille 3. Exercice 5.

Soit I pavé (fermé) de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \to \mathbb{R}$ bornée.
Soit $\mathcal{P} = \{I_i\}$ une subdivision finie de I
on définit

(1) $\forall i \quad m_i := \inf_{I_i} f \quad , \quad M_i := \sup_{I_i} f$

(2) $s(f,\mathcal{P}) := \sum m_i \, |I_i| \qquad S(f,\mathcal{P}) := \sum M_i \, |I_i|$.

(3) $\underline{I} := \sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P}) \qquad \overline{I} := \inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P})$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les subdivisions possibles $\mathcal{P}$ de I

Partie 1

Soit $\xi = \{\xi_i\}$ tel que $\xi_i \in I_i$ pour tout i (de sorte que (P, ξ) est une subdivision pointée de I). On note

$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_i f(\xi_i)\,|I_i|$$

la somme de Riemann associée.

(a) Par définition, pour tout i on a

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

D'où, multipliant par $|I_i|$ et sommant sur i

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P)$$

En prenant l'inf sur tous les choix ξ' tels que $\xi'_i \in I_i$ pour tout i, on a :

$$\boxed{s(f, \underline{P}) \leq \inf_{\xi'} \sigma(f, \underline{P}, \xi') \leq \sigma(f, \underline{P}, \xi).}$$

De même, en prenant le sup, on complète la chaîne d'inégalités

$$\boxed{\sigma(f, \underline{P}, \xi) \leq \sup_{\xi'} \sigma(f, \underline{P}, \xi') \leq S(f, \underline{P}).}$$

(b) Soit $\underline{P}' = \{I'_j\}$ une subdivision plus fine que $\underline{P}$, i.e : $\forall i \ \exists J_i$ tq

$\{I'_j\}_{j \in J_i}$ est une subdivision de I_i.

En particulier $|I_i| = \sum_{j \in J_i} |I'_j|$. $(*)$

On a pour $j \in J_i$

$$m'_j := \inf_{I'_j} f \geq \inf_{I_i} f = m_i$$

car $I'_j \subset I_i$

En multipliant par $|I'_j|$ et en sommant sur $j \in J_i$, on a

$$\sum_{j \in J_i} m'_j |I'_j| \geq m_i \sum_{j \in J_i} |I'_j| \overset{(*)}{=} m_i |I_i| \quad (**)$$

Maintenant, pour tout j, il existe un seul i tq $I_j \subset I_i$, i.e $j \in J_i$

En sommant $(**)$ sur i, on a

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{i\in I} \sum_{j \in J_i}}_{\sum_j} m_j |I_j|} \geq \underbrace{\sum_{i \in I} m_i |I_i|}$$

$$\boxed{s(f, P') \geq s(f, P)}$$

De la même manière, on montre

$$\boxed{S(f,P') \leq S(f,P)}$$

(c) Soient P, P' deux subdivision de I

montrons que $s(f,P) \leq S(f,P')$ (Δ)

On note $P = \{I_i\}_i$ $P' = \{I_j'\}$

On obtient une nouvelle subdivision

$P'' = \{I''_{i,j}\}_{(i,j)\in K}$ en posant

$I''_{i,j} = I_i \cap I_j'$ et $K = \{(i,j) : |I''_{i,j}| > 0\}$

Cette nouvelle subdivision P'' est notée

$P'' = P \cap P'$.

Par construction, elle est plus fine que P et P'

D'après la question précédente, on a :

$$s(f,P) \leq s(f,P'') \leq S(f,P'') \leq S(f,P').$$

(d) Par définition de $\underline{I}$ et $\overline{I}$, on a

$$\boxed{s(f,P) \leq \underline{I}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{I} \leq S(f,P).}$$

Par (Δ) on a pour toute subdivisions P, P' $\quad s(f,P) \leq S(f,P')$

En prenant le sup sur P et l'inf sur P' il vient $\boxed{\underline{I} \leq \overline{I}}$. $\square$

Partie II

Pour $\underline{P} = \{I_i\}$ subdivision de $\underline{P}$, on note
$$\lambda(\underline{P}) := \sup_i \operatorname{diam}(I_i)$$

Montrons le théorème de Darboux :
$$\lim_{\lambda(\underline{P})\downarrow 0} s(f,\underline{P}) = \underline{I} \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda(\underline{P})\downarrow 0} S(f,\underline{P}) = \overline{I}.$$

Rappelons la définition
$$\underline{I} := \sup s(f,\underline{P}). \qquad (\Pi)$$

D'après le 1.(d) $\underline{I} \leq S(f,\{I\}) = (\sup f)\,|I|$
donc $\underline{I} < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, par (II) il existe $P_\varepsilon \in \mathrm{Sub}(I)$ tq

$$\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon \leq s(f, P_\varepsilon) \leq \underline{\mathcal{I}}$$

On note $P_\varepsilon = \{ I_j^\varepsilon \}$.

Soit maintenant $P = \{I_i\}$ une subdivision de I

On note $\lambda := \lambda(P) = \sup \operatorname{diam}(I_i)$.

On regroupe les $\{I_i\}$ en deux sous ensembles

$$P_1 = \{ I_i \ : \ I_i \subset I_j^\varepsilon \text{ pour un } j \}$$

$$P_2 = \{ I_i \ : \ |I_i \cap I_j^\varepsilon| > 0 \text{ pour au moins deux } I_j^\varepsilon \text{ distincts} \}$$

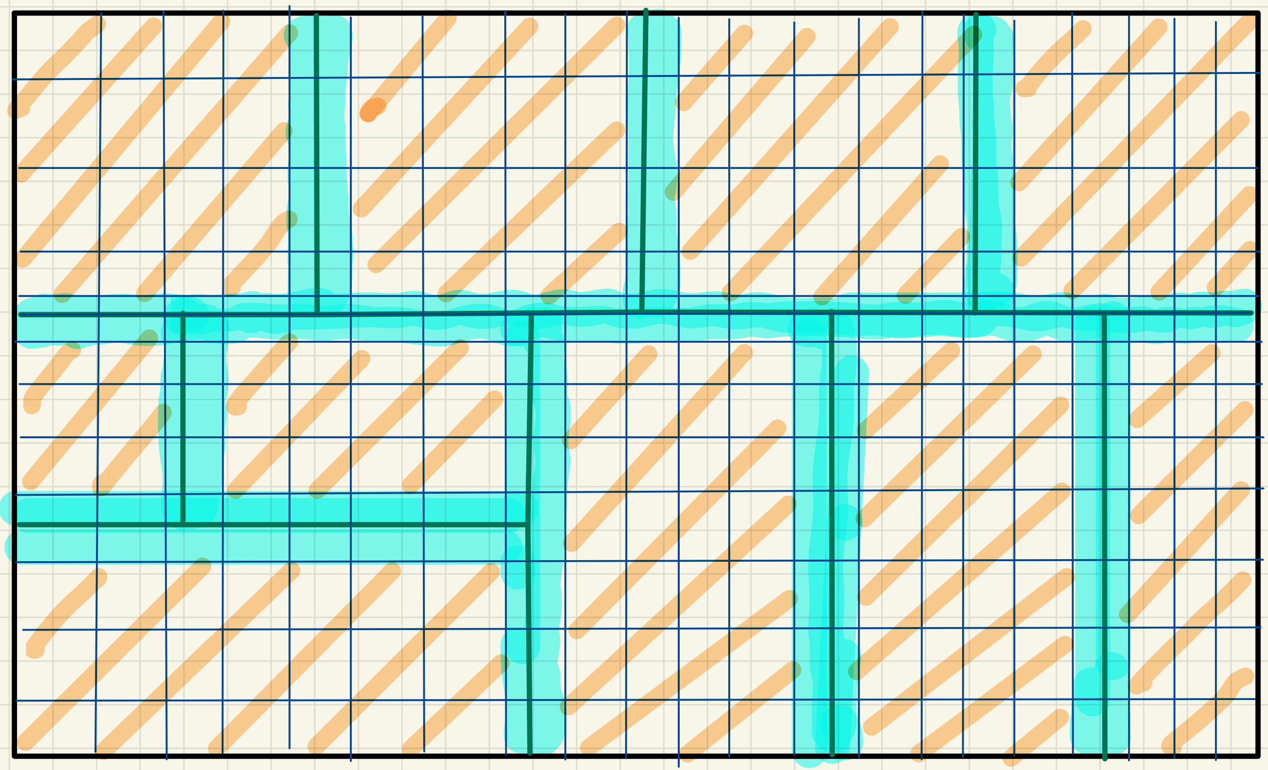
I

P_ε

P

P_2

P_1



On a $P = P_1 \cup P_2$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Pour j, on note $J_j := \{ I_i \in P_1 : I_i \subset I_j^\varepsilon \}$

De la sorte, $P_1 = \bigcup_j J_j$, l'union étant disjointe.

En notant $m_i := \inf_{I_i} f$ $m_j^\varepsilon := \inf_{I_j^\varepsilon} f$

On a :

$$\sum_{i \in J_j} m_i |I_i| \geq \sum_{i \in J_j} m_j^\varepsilon |I_i|$$

$$\geq m_j^\varepsilon \left(\sum_{i \in J_j} |I_i| \right)$$

$$= m_j^\varepsilon |I_j^\varepsilon| - m_j^\varepsilon \left(|I_j^\varepsilon| - \sum_{i \in J_j} |I_i| \right)$$

En sommant sur j on obtient

$$\sum_{I_i \in P_1} m_1 \, |I_i| \geq s(f, P_\varepsilon) - \sum_j m_j^\varepsilon \Big(|I_j^\varepsilon| - \sum_{i \in J_j} |I_i| \Big).$$

On a $|m_j^\varepsilon| \leq \|f\|_\infty$

et on remarque que

$$\sum_j \Big(|I_j^\varepsilon| - \sum_{i \in J_j} |I_i| \Big) = \sum_{I_i \in P_2} |I_i|$$

d'où

$$\sum_{I_i \in P_1} m_1 \, |I_1| \geq s(f, P_\varepsilon) - \|f\|_\infty \sum_{I_i \in P_2} |I_i|$$

On a aussi $\displaystyle\sum_{I_i \in P_2} m_i \, |I_i| \geq - \|f\|_\infty \sum_{I_i \in P_2} |I_i|$

D'où $\quad s(f,P) \geq s(f,P_\varepsilon) - 2\|f\|_\infty \sum_{I_i \in P_2} |I_i|$

$$= s(f,P_\varepsilon) - 2\|f\|_\infty \, |V| \quad (*)$$

où $V := \bigcup_{I_i \in P_2} I_i$.

Maintenant en notant $S := \bigcup_j (\partial I_j^\varepsilon)$,

S se décompose en $(n-1)$ pavés de la forme

$K_{a,b,r_0} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

avec $a_r < b_r$ pour $r \neq r_0$ et $a_{r_0} = b_{r_0}$

Par définition de P_2

$V \subset \bigcup K'_{a,b,r_0,\lambda(P)}$ où

$K'_{a,b,r_0,\lambda(P)}$

$$= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{r_0-1}, b_{r_0-1}] \times [a_{r_0} - \lambda, a_{r_0} + \lambda] \times [a_{r_0+1}, b_{r_0+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

On en déduit

$|V| \leq C\,\lambda(P)$ où $C \geq 0$ ne dépend que de P_ε.

En utilisant cette inégalité dans $(*)$ on a

$$s(f, P) \geq s(f, P_\varepsilon) - 2\|f\|_\infty C\,\lambda(P)$$

$$\geq \underline{I} - \varepsilon - 2\|f\|_\infty C\,\lambda(P)$$

$$\geq \underline{I} - 2\varepsilon$$

pour $\lambda(P)$ assez petit.

En conclusion

$\underline{I} \geq s(f,P) \geq \underline{I} - 2\varepsilon$ pour $\lambda(P)$ assez petit.

Cela montre que

$$\boxed{\lim_{\lambda(P)\downarrow 0} s(f,P) = \underline{I}.}$$

Le cas de $S(f,P)$ se traite de manière identique. $\square$