$op \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Homéomorphismes usuels:

$Var(\varphi) = \emptyset$ si $\varphi \in \{T, \bot\}$

$Var(x) = \{x\}$

$Var(\neg\varphi) = Var(\varphi)$

$Var(\varphi \; op \; \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$

$h(\varphi) = 0$ si $\varphi \in \{T, \bot\}$

$h(x) = 0$

$h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$

$h(\varphi \; op \; \psi) = 1 + \max(h(\varphi), h(\psi))$

$subst(\varphi, \sigma) = \varphi$

$subst(x, \sigma) = \sigma(x)$

$subst(\neg\varphi, \sigma) = \neg sub(\varphi, \sigma)$

$sub(\varphi \; op \; \psi) = sub(\varphi, \sigma) \; op \; sub(\psi, \sigma)$.

Ppe par inducθ : traiter cas $\varphi = \bot, T, x, \neg\psi, \psi_1 \; op \; \psi_2$.

@ Mq ($\forall \varphi \in Prop(X)$ et $\forall \sigma$), si $\forall x \in X$, on a $h(\sigma(x)) \leq N$ alors $h(sub(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N$.

on sait... on vt...

- $\varphi = \bot$ ou $T$ : $sub(\varphi, \sigma) = \varphi$, dc $h(sub(\varphi,\sigma)) = h(\varphi) \leq h(\varphi) + N$ car $h(T) = h(\bot) = 0$
- $\varphi = x$ : $sub(\varphi, \sigma) = \sigma(x)$ et $h(sub(\varphi,\sigma)) = h(\sigma(x)) \leq N = h(\varphi) + N$ car $\varphi = x$
- $\varphi = \neg\psi$ : $h(sub(\neg\psi, \sigma)) = h(\neg sub(\psi,\sigma)) = h(sub(\psi,\sigma)) + 1$ par hypo $\leq h(\psi) + 1 + N = h(\neg\psi) + N = h(\varphi) + N$
- $\varphi = \psi_1 \; op \; \psi_2$ : $h(sub(\psi_1 \; op \; \psi_2, \sigma)) = h(sub(\psi_1, \sigma) \; op \; sub(\psi_2, \sigma))$ $= \max(h(sub(\psi_1,\sigma)), h(sub(\psi_2,\sigma))) + 1 \leq \max(h(\psi_1)+N, h(\psi_2)+N)+1$ $= h(\psi_1 \; op \; \psi_2) + N = h(\varphi) + N$ par hypo

$[\![T, v]\!] = 1$

$[\![\bot, v]\!] = 1$

$[\![x, v]\!] = v(x)$

$[\![\neg\varphi, v]\!] = 1 - [\![\varphi, v]\!] = 1$

$[\![\varphi \wedge \psi, v]\!] = \min([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

$[\![\varphi \vee \psi, v]\!] = \max([\![\varphi, v]\!], [\![\psi, v]\!])$

| P | Q | P∧Q | P∨Q | P⇒Q | P⇔Q |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Déducθ maturelle : Preuve où tt est dév jsq mq $\bot$ ou $T$.

@ $(a \wedge b) \Rightarrow (c \Rightarrow b \wedge c) \Leftrightarrow$

$= (a \wedge b) \Rightarrow (\neg c \vee (b \wedge c))$

$= \neg(a \wedge b) \vee (\neg c \vee (b \wedge c))$

$= \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee (b \wedge c)$

$= \neg a \vee \neg(b \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$= \neg a \vee T = T$

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$

ou: "fois" et: "plus."

- Satisfaisable: $\varphi$ satisf. si $\exists$ valuaθ $v$ tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On dit que $v$ satisfait $\varphi$.
- Tautologie: $\varphi$ est tautologie si $\forall$ valuaθ $v$, $[\![\varphi, v]\!] = 1$. On le note $\models \varphi$.
- Conség sémantiq: $\Gamma$ ens de ff, alors $\varphi$ est conséqce sémantiq $\Gamma$ (noté $\Gamma \models \varphi$) si $\forall v$, $v$ satisfait les ff de $\Gamma \Rightarrow v$ satisf $\varphi$.
- Equivlce sémantiq: $\varphi$ sém. équ. à $\psi$ si $\forall v$, $[\![\varphi, v]\!] = [\![\psi, v]\!]$. On le note $\varphi \equiv \psi$.
- Système complet: avec C ensemble de connecteurs logiqs. C complet si $\exists \psi$ tq: $\psi$ n'est construite de connectrs de C et $\varphi \equiv \psi$, @ $\{\vee, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \bot\}$...

littéral: $x$ ou $\neg x$

ff conj: $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$

ff disj: $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$

FND: $\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q_i} I_{i,j}$.

Mettre $\varphi$ sous FND :

1) traduire $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
2) Pousser neg
3) user distrib de $\wedge$ p/ à $\vee$.

| Algo Résolθ SAT | Algo Davis-Putnam | Algo DPLL |
|---|---|---|
| • simplificaθ<br>• PU (propaθ unitre)<br>• élimina littrx purs (LP) | • simpliθ<br>• élim clauses unitr (PU)<br>• élim (LP)<br>• élim var de résultte<br>↓<br>satisfiabilité | • élim PU<br>• élim LP<br>• simp résultante<br>↓<br>valuaθ |

Pb SAT: trouver $v$ tq $[\![\varphi, v]\!] = 1$. (Pb SAT = résoudre FNC)

Pb NP : pb résoluble en tps non-polynomial

@ mise ss FND p SAT-Solvers de coloraθ Australie:

C = couleurs, E = états, L = paires états limit,

$[e, c]$ = "e coloriable de c".

- Tout état a au moins 1 couleur: $\bigwedge_{e \in E} \bigvee_{c \in C} [e, c]$
- Aucun état n'a 2 couleurs: $\bigwedge_{e \in E, (c_1, c_2) \in C^2, c_1 \neq c_2} \neg[e, c_1] \vee \neg[e, c_2]$ " $\neg([e, c_1] \wedge [e, c_2])$
- états limitrophes n'ont pas mê couleur: $\bigwedge_{(e_1, e_2) \in L, c \in C} \neg[e_1, c] \vee \neg[e_2, c]$

```
while ((!a || b) && c) {...} (1)
  if (a || b) {(2) ...}
  else {
    if {c && b} {(3)}
    else {(4) ...}
  }
```

$\neg P_1 = \neg((\neg a \vee b) \wedge c)$ : $\varphi_1$

$= (a \wedge \neg b) \vee \neg c$

$P_2 : a \vee b$ , $\varphi_2 = \neg P_1 \wedge P_2$

mais $\neg P_1$ pas requis pr aller ds $P_2$

$\varphi_3$: $\overline{(a \vee b)} \wedge (c \wedge a) = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge b = \bot$

de supp $\varphi_3$ p optimisaθ ".

Déterminer si ff satisfiable de algo DP.

$\varphi_7 = (\neg p \vee t) \wedge (p \vee \neg x) \wedge (q \vee x) \wedge (\neg q \vee s)$.

ELP t : $(p \wedge \neg x) \wedge (q \vee x) \wedge (\neg q \vee s)$

ELP s : $(p \wedge \neg x) \wedge (q \vee x)$

Résl x : $p \vee q$ (résultte : soit vraie / soit faux)

ELP p : q

PU q : T

Trouver valuaθ q satisfait ff de algo DPLL.

$\varphi_2 = p \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee \neg p) \wedge x$

PU sur p : $\varphi_2[p/T] = (q \vee s) \wedge q \wedge x$

PU sur q : $\varphi_2[q/T] = x$

PU sur x : $\varphi_2[x/T] = T$

Soluθ : $[p/T, q/T, x/T]$

$\varphi_4 = (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg x \vee \neg q) \wedge (x \vee \neg q)$

Résultante q : suppose $\varphi_4[q/T]$ :

$\rightarrow \neg x \wedge x \Rightarrow$ non-SAT

backtracking $\varphi_4[q/\bot]$ :

$\rightarrow \neg p \wedge p \Rightarrow$ non-SAT

dc $\bot$.

# Syllogismes aristotéliciens

Tous les P sont des Q: $\forall x.\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Certains P sont des Q: $\exists x.\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Aucun P n'est un Q: $\forall x\ (P(x)) \Rightarrow \neg Q(x) \equiv \neg \exists x.\ (P(x) \land Q(x)$

Certains P ne st pas Q: $\exists x.\ (P(x) \land \neg Q(x))$

---

Aucun danseur ne danse 4 lui m̂ : $\neg \exists x.\ (x \in D \land d(x,x))$

$\equiv \forall x\ (x \in D \Rightarrow \neg d(x,x))$.

Aucun danseur ne danse 4 2 danseurs à la fois :

$\neg \exists x \exists y \exists z\ (x \in D \land y \in D \land z \in D \land d(x,y) \land d(x,z) \land y \neq z)$.

---

Tout acteur joue ds au moins un film: $\forall x.\ act(x) \Rightarrow joue(x,y) \land \exists y.\ film(y)$

Artiste Polyvalent (x) vraie ssi x joue dans film tt en le réalisant.

$artistepolyv(x) = \exists y\ film(y) \land joue(x,y) \land realise(x,y)$

Un film(x) vraie ssi x a réalisé exactement un film.

$unFilm(x) = \exists y.\ film(y) \land realise(x,y) \land \forall z.\ film(z) \Rightarrow realise(x,z) \Rightarrow x = z$.

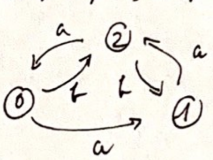
Acteur Favori (x, y) : x est acteur, y réalisateur, x joue ds tt films réal. par y et ne joue ds aucun autre film.

$Act^{r} Fav(x,y) = acteur(x) \land realisateur(y) \land \forall z.\ film(z) \Rightarrow realise(y,z) \Leftrightarrow joue(x,z)$.

---

# Logique de premier ordre

$[\![a]\!] = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$, $[\![b]\!] = \{(0,2), (2,1)\}$




check ff $\forall x.\ \neg a(x,x)$ vraie ds modèle. (autre $\boxed{M}$ fx ?)

| $x$ | $a(x,x)$ | $\neg a(x,x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 |

c@ $[\![a]\!] = \{(0,0)\}$
$[\![b]\!] = \emptyset$.

ff vraie q ds $\boxed{M}$ proposé :

⇒ X <= A : 3 élts distincts

$\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2.\ x_0 \neq x_1 \land x_0 \neq x_2 \land x_1 \neq x_2$

⇒ X <= B : si 4° élt, il ne pt q'ê = à autre élt

$\forall y.\ y = x_0 \lor y = x_1 \lor y = x_2$.

⇒ X <= C :

$\forall x. \forall y.\ a(x,y) \Leftrightarrow x = x_0 \land y = x_1 \lor x = x_1 \land y = x_2 \lor x = x_0 \land y = x_2$

⇒ X <= D :

$\forall x. \forall y.\ b(x,y) \Leftrightarrow$ idem