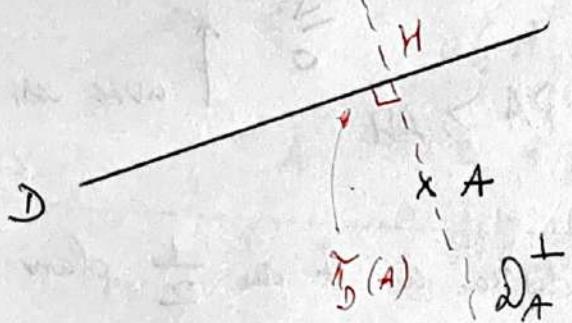


TD M44 TD 1 : Le Plan Euclidien

Ex 1 (Projeté orthogonal)



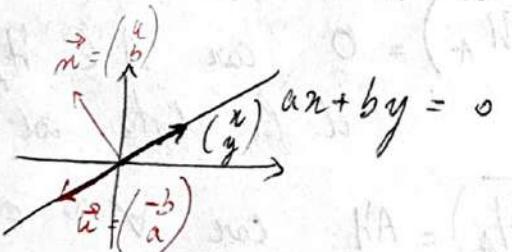
a) Trouver H en fonction de $A(x_A, y_A)$ et équation de D ,

$$D = \{ax + by = d\} \quad , \quad A = (x_A, y_A) \quad , \quad H = (x_H, y_H).$$

Indic $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur normal à D .

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur à D

C $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.



$$\langle (-b, a) | (a, b) \rangle = -ba + ab = 0$$

$$\stackrel{\uparrow}{(-b, a)} \perp (a, b)$$

[M1] on note D_A^+ , la droite $+ \perp$ à D passant par A .

$$\text{équat de } D_A^+ : -bx + ay = -bx_A + ay_A \quad \forall A \in D_A^+$$

$(-b, a)$ normal à D_A^+ .

et comme c'est un vecteur directeur de D
 $\Rightarrow D_A^+$.

Alors le point $H(x_H, y_H)$ doit vérifier

$$\begin{cases} ax_H + by_H = d \\ -bx_H + ay_H = -bx_A + ay_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_H + by_H = d \\ -bx_H + ay_H = -bx_A + ay_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} aL_1 - bL_2 &= (a^2 + b^2)x_H = ad + b^2x_A - aby_A \\ bL_1 + aL_2 &= (a^2 + b^2)y_H = bd - abx_A + a^2y_A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_H, y_H) = \left(\frac{ad + b^2x_A - aby_A}{a^2 + b^2}, \frac{bd - abx_A + a^2y_A}{a^2 + b^2} \right)$$

M2 (paramétrisation de \mathcal{D}_A^+)

$$\mathcal{D}_A^+ = \{ A + t(a, b) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{D}_A^+ = \{ (x_A + t \cdot a, y_A + t \cdot b) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

On cherche ainsi t , tel que $H(x_H, y_H)$

$$(x_H, y_H) = (x_A + t_H \cdot a, y_A + t_H \cdot b)$$

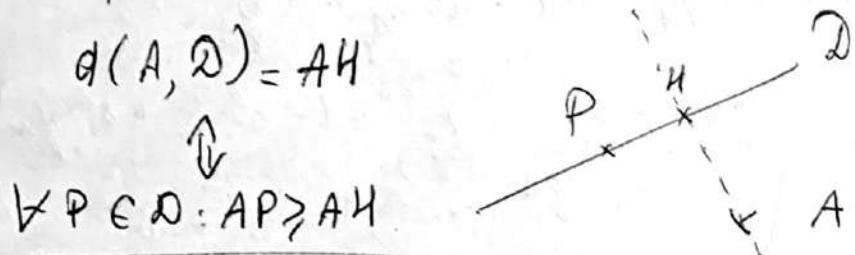
$$\Leftrightarrow a(x_A + t_H \cdot a) + b(y_A + t_H \cdot b) = d$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)t_H = d - ax_A - by_A$$

$$\Rightarrow (x_H, y_H)$$

b) H réalise la distance de A à \mathcal{D} .

$$d(A, \mathcal{D}) = AH$$



voir démo

comme $(AH) \perp \mathcal{D} \Rightarrow \triangle AH P$ est rectangle.

(Pythagore)

$$\Rightarrow PA^2 = AH^2 + HP^2 > AH^2$$

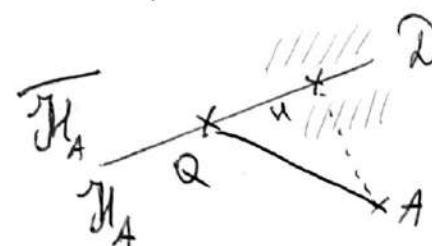
$$\Leftrightarrow PA > AH$$

↑ avec aussi $HP = 0 \Leftrightarrow H = P$

c) H réalise distance de A au $\frac{1}{2}$ -plan

délimité par \mathcal{D} & ne contenant pas A .

Quel est le point q réalise la distance entre A & autre $\frac{1}{2}$ -plan.



$$d(A, H_A) = 0 \text{ car } A \in H_A$$

(et la diste est réalisée par A)

$$d(A, \overline{H}_A) = AH \text{ car } \forall P \in \overline{H}_A$$

soit $Q = [AP] \cap \mathcal{D} \Rightarrow AP > AQ$ et

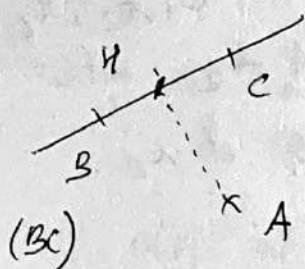
d'après b) $AQ > AH$

②

a) Quel est le pt q réalise diste de A au segment $[BC]$? On peut simplifier calculs de 2 façons :

- en choisissant repère (A, \vec{u}, \vec{v}) (RON)

et $\vec{u} + \mathcal{D}$ et $\vec{v} \parallel \mathcal{D}$.

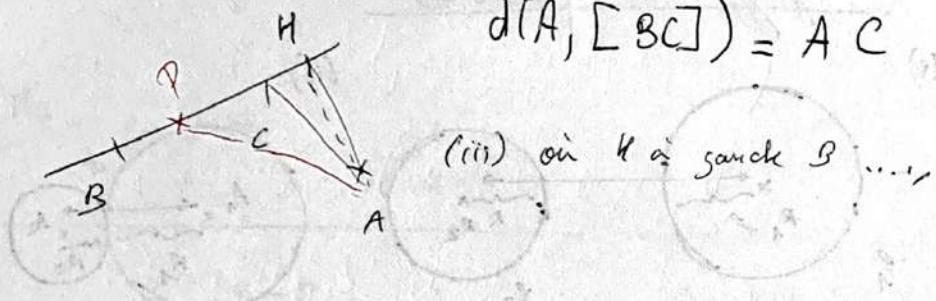


(i) si $H \in [BC]$,

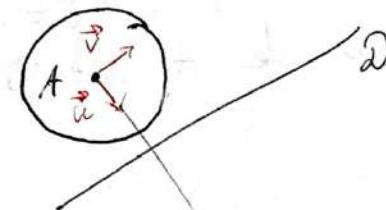
$$d(A, [BC]) = AH.$$

(ii) si $H \notin [BC], C \in [BH]$

$$d(A, [BC]) = AC$$



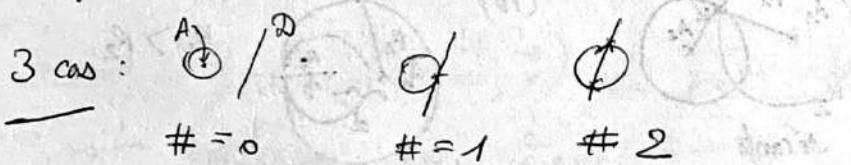
(iii) où K à gauche B ... ,



- le pb ne change pas si on translate et si on applique une rotat, dt on peut supposer $A = \mathcal{Q}(0,0)$ et $\mathcal{D} \perp Ox$.

Ex 2 (intersection droite / cercle).

a) étudier intersection droite \mathcal{D} & cercle $\mathcal{C}(A, r)$



soit $d = (A, \mathcal{D})$,

$$d > R$$

$$d = R$$

$$d < R$$

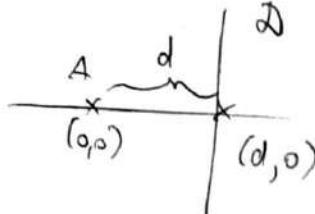
→ Dans les 2 cas, on trouve les équations :

$$\bullet \quad \mathcal{C}(A, R) = \{x^2 + y^2 = R^2\}$$

$$\bullet \quad \mathcal{D} = \{x = d\}$$

$P(x,y) \in \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}(A, R)$ ss;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = d \\ y^2 = R^2 - d^2 \end{cases}$$



Ainsi si $d > R \Rightarrow$ pas de soluo ($\emptyset \neq \emptyset$) Ex: (Intersection de cercles)

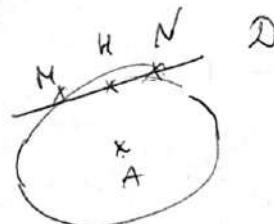
si $d = R \Rightarrow (d, o)$ uniq soluo
(cas tangent)
de plus dans ce cas, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = (d, o)$ qui
est la project de A sur \mathcal{D} .

si $d < R \Rightarrow \# \mathcal{D} \cap \mathcal{C} = 2$

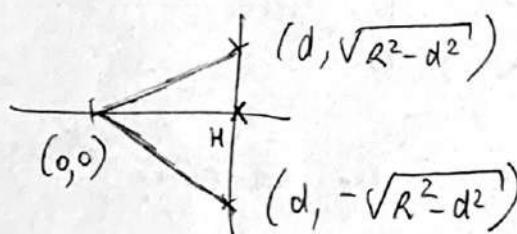
$$(d, \sqrt{R^2 - d^2}), (d, -\sqrt{R^2 - d^2})$$

M

N



$$H = (d, o) = \frac{M+N}{2}$$



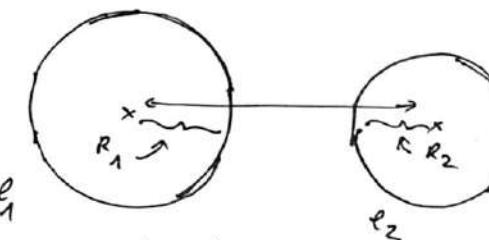
\rightarrow on vient de faire a) et b)

4

a) étude intersection 2 cercles $C(A_1, r_1)$ en f distance $d := A_1 A_2$ entre les centres & 2 rayons r_1 et r_2 .

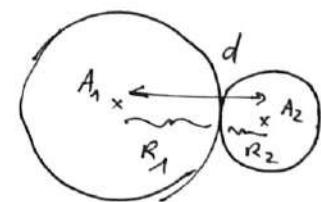
• Configurations possibles:

(i)



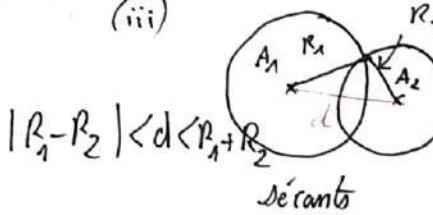
disjoint "ext"
 $d > R_1 + R_2$

(ii)



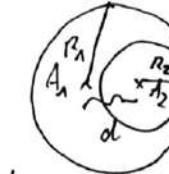
tangents ext
 $d = R_1 + R_2$

(iii)



secants

(iv)



tangents "int"
 $d = |R_1 - R_2|$

(v)



$R_1 = R_2$
 $d = 0$

"confondues"

(vi)

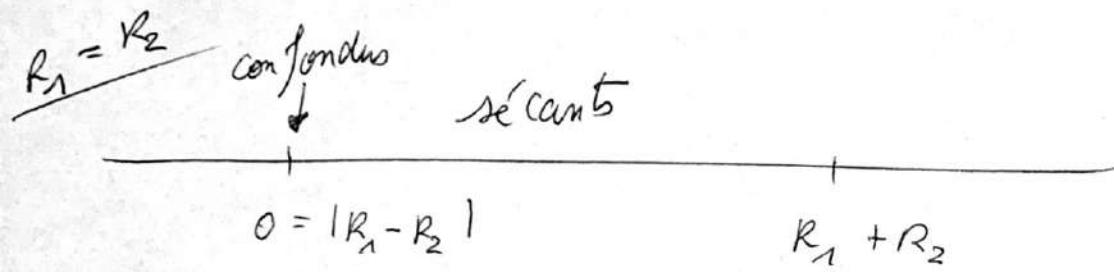
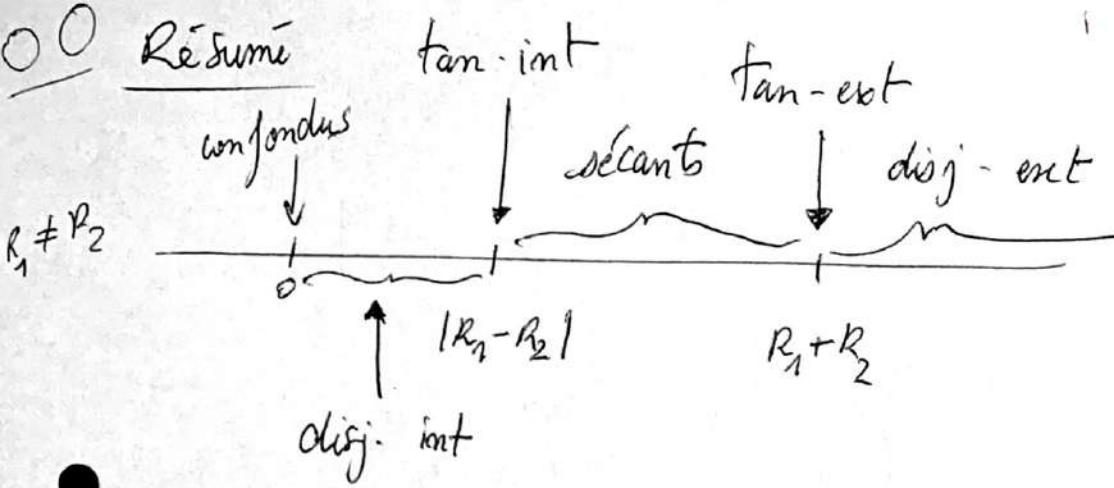


$R_1 \neq R_2$
 $d = 0$

(vii)



$d < |R_1 - R_2|$



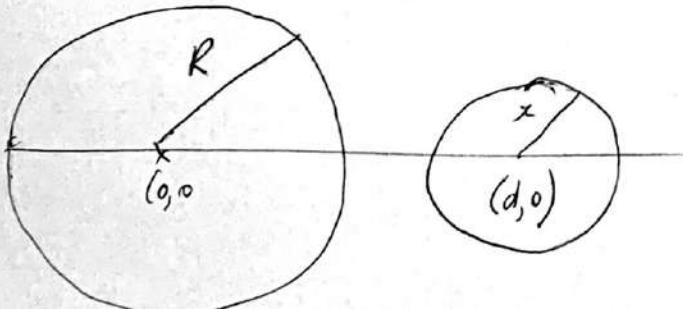
Démonstration ($\hat{\wedge}$ ds ex2) on peut

- soit fixer $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de façon adiquate
- soit appliquer une translation & rotation

peut ramener ds le cas : ($R = \max(R_1, R_2)$)

$$r = \min(R_1, R_2)$$

$$\text{rg: } |R_1 - R_2| = R - r.$$



(5)

$$\left\{ x^2 + y^2 = R^2 \right\} \text{ et } \left\{ (x-d)^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

Ainsi $(x, y) \in C_1 \cap C_2$ si

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d} \end{cases}$$

$$d \neq 0.$$

cas $d=0$, trivial.

$$\Rightarrow y^2 = R^2 - \left(\frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d} \right)^2$$

$$y^2 = \left(R - \frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d} \right) \left(R + \frac{R^2 - r^2 - d^2}{2d} \right)$$

$$y^2 = \left[\frac{x^2 - (R^2 - 2Rd + d^2)}{2d} \right] \left[\frac{R^2 + 2Rd + d^2 - r^2}{2d} \right]$$

$$\Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 0$$

si $x^2 - (R - d)^2 > 0$ deux sol

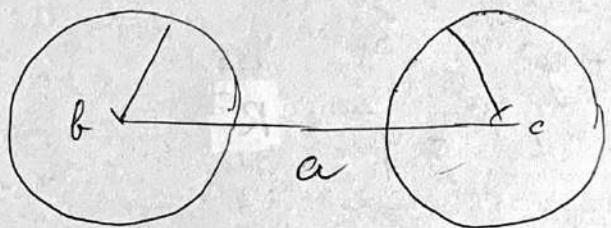
$$\Delta > 0$$

= 0 1 sol

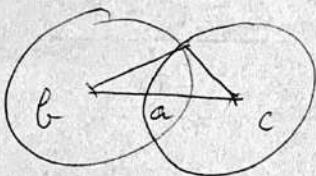
$$\Delta < 0$$

0 sol

b) Si quelle condit a, b, c il Δ'
et côte ont la longueur a, b, c.
simplifiant condit n' a \leq b et a \leq b, sc.

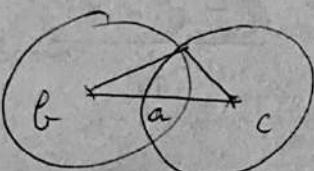
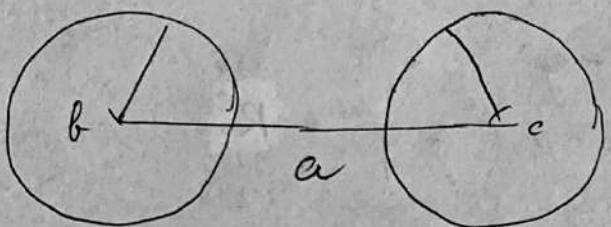


~~a \leq b + c~~



$$|b - c| < a < b + c$$

b) Si quelle condit a, b, c. Ex-t-il Δ'
dt cotes ont pr longeur a, b, c.
simplificat condit n'a $a \leq b$ et $a \leq c$.



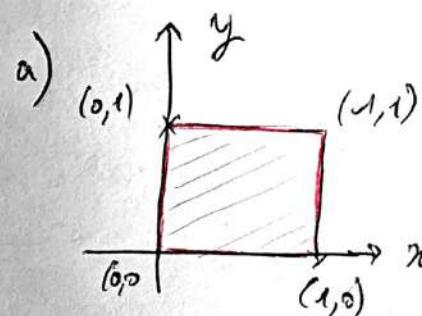
$$a \leq b+c$$

$$|b-c| < a < b+c$$

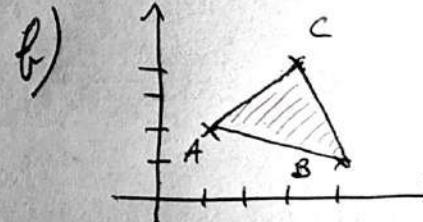
Ex 5 (Convexes & inégalités)

a) Donner un système d'inéq. ls linéaires
dt l'ens de soluds est le carré unité.

b) Soit $\begin{cases} A(1,2) \\ B(4,1) \\ C(3,4) \end{cases} \in \mathbb{R}^e$, donner syst
inégalis linéaires dt solud
est l'int ΔABC .



ctu final : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$

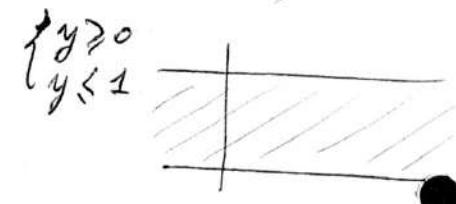
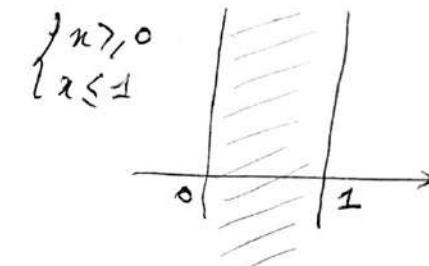


on considère la droite (AB) ayant pr vecteur
directeur $\vec{AB} (4-1, 1-2) = (3, -1)$ et pr
vecteur normal $(-1, 3)$

$$\text{D}_{AB}: x + 3y = 1 + 3 \cdot 2 = 7$$

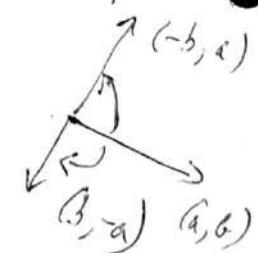
$$\text{D}_{AB}: x + 3y = 7$$

$$\text{D}_{AB}: -x - 3y = -7.$$



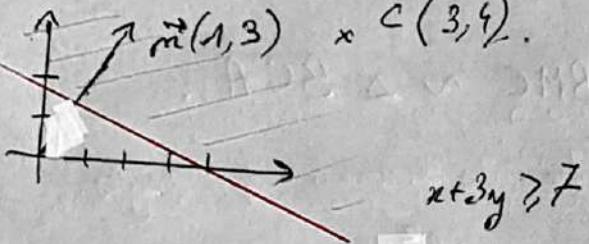
$\vec{n}(a,b)$ alors $ax+by > d$

$\vec{n}(a,b)$ alors $ax+by \leq d$



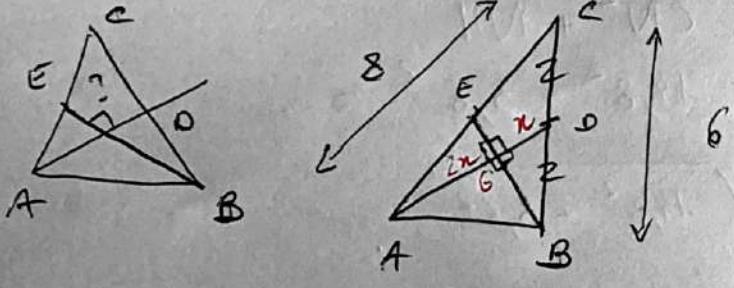
et comme $3+3\cdot 4 = 15 > 7$ le plan délimité par (AB) devant C n'est pas inclus dans le plan de C .

$$\begin{cases} x+3y \geq 7 \\ x+3y \geq 23 \end{cases}$$



Ex 7 Dans $\triangle ABC$, la médiane AD est perpendiculaire à la médiane GE .

Trouver AB sachant $BC=6$, $AC=8$.

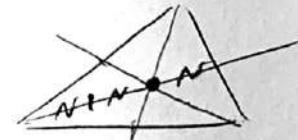


- i: cercle inscrit
- o: cercle circonscrit ?
- h: 3 hauteurs
- G: centre de gravité

Rapport $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
medianes

Pour calculer AB , on cherche BG & AG car $AB^2 = BG^2 + GA^2$ (Pythagore).

On note $GD=x \Rightarrow GE=2GD=2x$ car le barycentre qui coupe la médiane AD en rapport $(2:1)$.



$$\text{Puis } GE=y \Rightarrow GB=2GE=2y.$$

$$\text{Ainsi } AB^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = ? = 4x^2 + 4y^2 = ? = 4(x^2 + y^2) = 4(5) = 20.$$

En appliquant Pythagore au $\triangle BGD$

$$x^2 + (2y)^2 = 9$$

En appliquant Pythagore au $\triangle AGE$,

$$2x^2 + y^2 = 16 = 4^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \oplus \Rightarrow 5(x^2 + y^2) = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

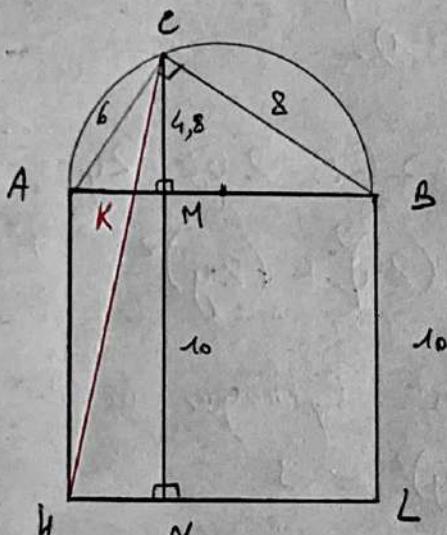
$$AB^2 = 4(x^2 + y^2) = 20$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{20}}$$

Ex 8

Sur l'hypoténuse AB du $\triangle ABC$,
tracer à l'ext. \Rightarrow le cercle $ABCH$.
En sachant $AC = 6$, $BC = 8$.

Trouver CH .



$$CM_{\text{haut}} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8$$

$$CN = MN + CM = 14,8.$$

Q? M2 triangles semblables.

$$\triangle CMA \sim \triangle BMC \sim \triangle BCA.$$

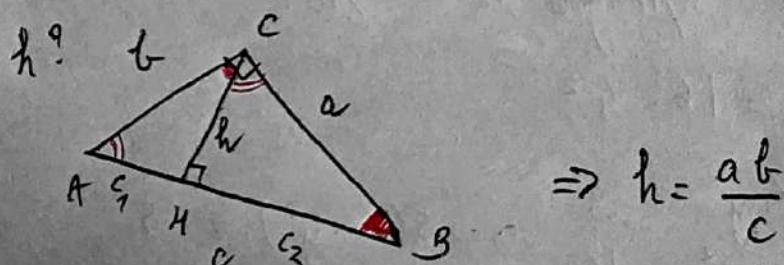
D au sens lettres \rightarrow m' ordre des symétries \Rightarrow angles.

$$\Rightarrow \frac{c_1}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow c_1 = \frac{b^2}{c}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{b^2}{c} = 3,6.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CH^2 &= CN^2 + NH^2 \\ &= 14,8^2 + 3,6^2 = \dots \end{aligned}$$

$$CH = \sqrt{14,8^2 + 3,6^2}$$



$$\Rightarrow h = \frac{ab}{c}$$

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2}$$

$c_1 = ?$ 2M1 $c_1 = \sqrt{b^2 - h^2}$ (Pythagore)

M2 triangles semblables

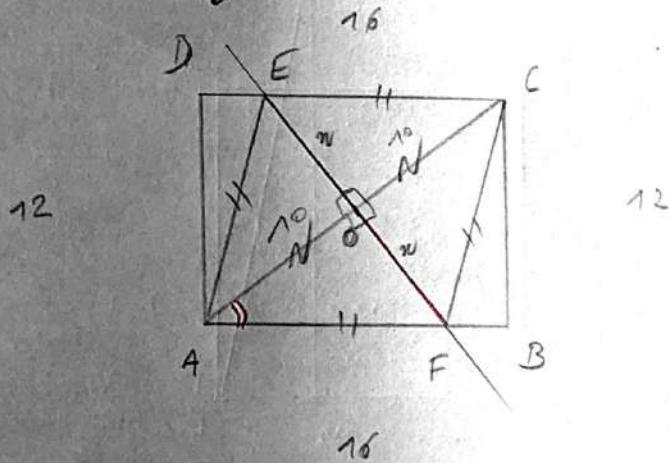
Ex 10 sur côtés AB et DC du rectangle

$ABCD$, les points F & E

sont choisis par $AFCE$ soit un

losange. $\lambda \begin{cases} AB = 16 \\ BC = 12 \end{cases}$

Trouvez EF .



$$OF = x = \frac{EF}{2}$$

on cherche $x = EF$

$\triangle AOF \sim \triangle ABC$

(rectangle $\angle A$ commun)

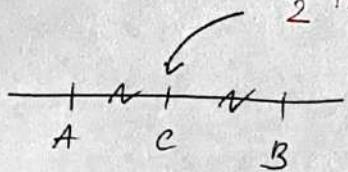
angle

$\triangle AOF$ commun

triplet pythagorien $3^2 + 4^2 = 5^2$

TD 2 : Barycentre

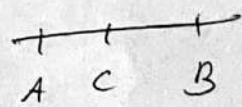
(R)



$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{A+B}{2}$$

$$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

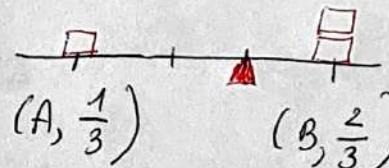
$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}.\end{aligned}$$



$$C = A + \lambda \vec{AB}$$

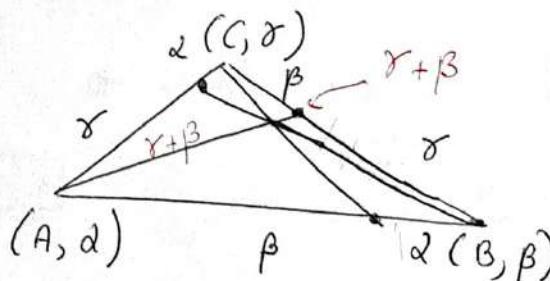
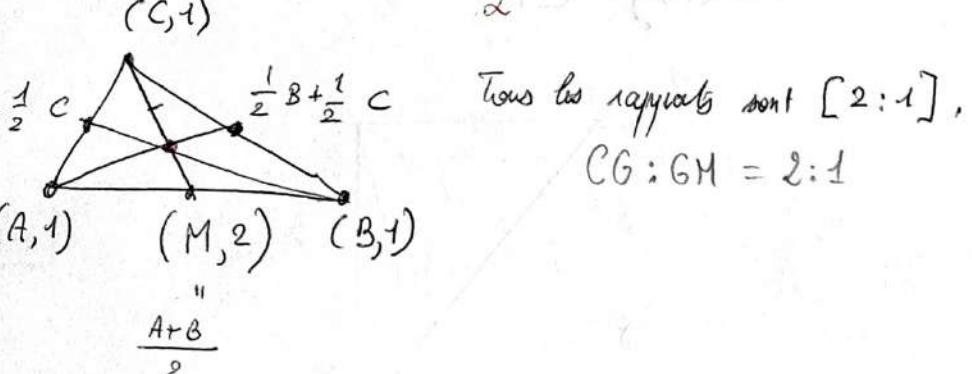
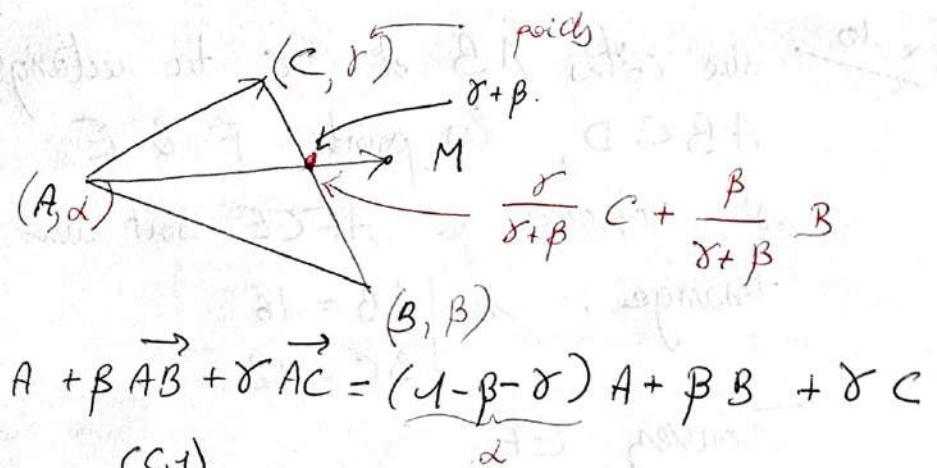
$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) \\ &\rightarrow \vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}\end{aligned}$$

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B \rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$$



longueur \times poids = longueur \times poids

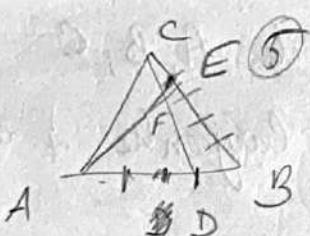
$$\frac{CA}{CB} = \frac{\ell}{1}$$



\overline{AB} : longueur algébrique orientée

Q

[1]



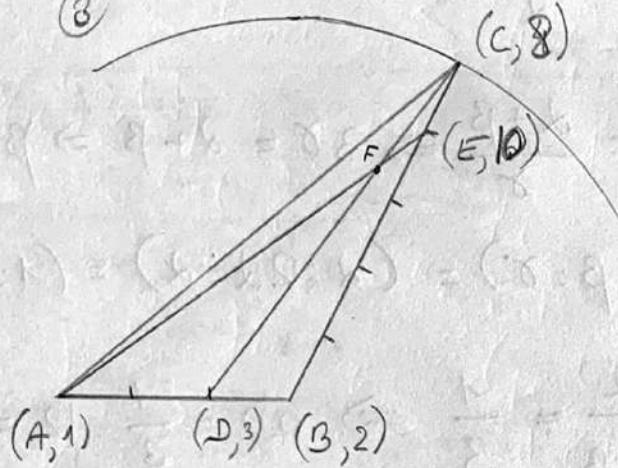
$$BD:DA = 1:2$$

$$CE:EB = 1:4$$

(3)

$$\underline{CF:FD ?}$$

18:55

Ainsi ($\alpha : \beta : \gamma$)

$$(\alpha : \beta : \gamma) = (1:2:8)$$

Donc

$$\boxed{\frac{CF}{FD} = \frac{3}{8}}$$

valeur du poids en D

valeur du poids en C.

coord. à un multiple pris,
rapport proportionnel
entre α, β, γ Énoncé en [1]

[M1]

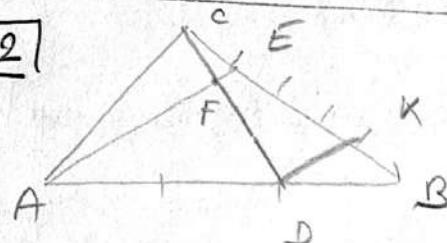
$$AF:FE = DF:FC$$

on cherche les poids α, β, γ de (A, B, C) ,F est le barycentre de
 $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

$$\text{si } \alpha=1 \Rightarrow \beta=2 \text{ car } \frac{DA}{DB} = \frac{\beta}{\alpha} = 2$$

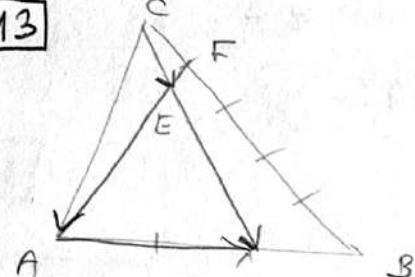
$$\Rightarrow \gamma=8 \text{ car } \frac{EB}{EC} = \frac{\gamma}{\beta} = 4$$

[M2]

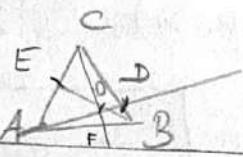


Thales

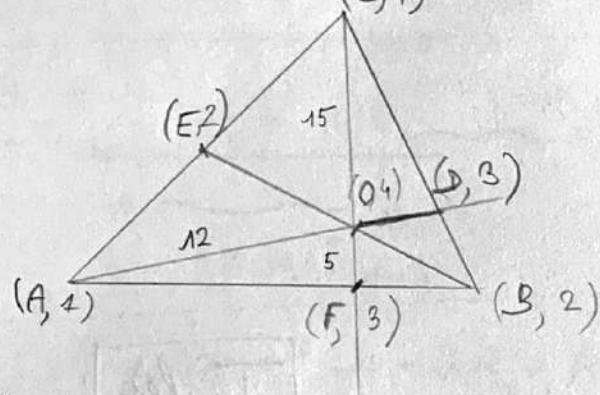
[M3]

on connaît $K \in [BC]$, $DK \parallel AE$, puis Thalèson cherche $\vec{CF} = \lambda \vec{CB}$ en les
écrivant sur la base \vec{CA}, \vec{CB} .

2] Énoncé



$$AE:EC = 1, \quad CO:OF = 15, \quad AO:OD = ?$$



$$\frac{CO}{OF} = \frac{15}{5} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{\alpha}{1} \quad \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\gamma = \frac{AO}{OD} = \frac{12}{OD} \quad \text{et} \quad \frac{AO}{OD} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{12}{OD} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad OD = \frac{12}{3} = 4.$$

On cherche ($\alpha:\beta:\gamma$) poids de A, B, C respectivement, O soit le barycentre de ces poids.

$$\bullet \quad \frac{EA}{EC} = 1 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha.$$

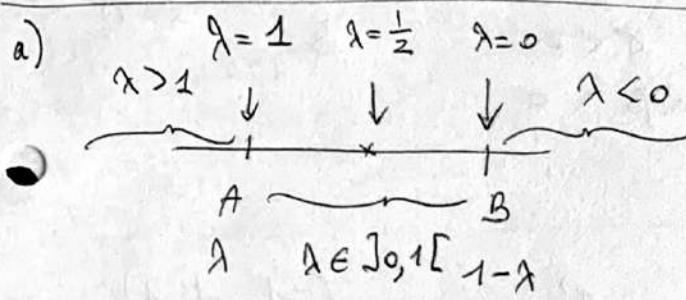
$$\bullet \quad \frac{OC}{OF} = \frac{15}{5} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \Rightarrow 3\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

$$\Rightarrow (\alpha:\beta:\gamma) = (\alpha:2\alpha:\alpha) = (1:2:1)$$

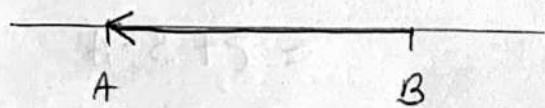
$$\bullet \quad \frac{OD}{OA} = \frac{\alpha}{\gamma+\beta} = \frac{1}{3} \Rightarrow OD = \frac{1}{3} \times 12 = 4.$$

1) Énoncé Soit Δ un triangle à sommets A, B, C .

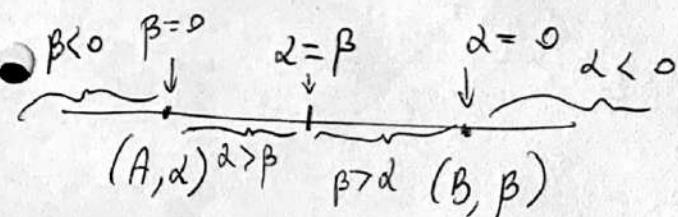
a) discuter pour $M = \lambda A + (1-\lambda)B$ par rapport à A et B en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.



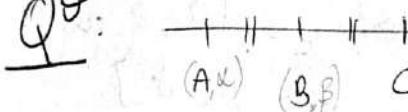
$$\lambda A + (1-\lambda)B = \lambda A - \lambda B + B \\ = \lambda \overrightarrow{BA} + B$$



on retrouve ce que l'on avait deviné.

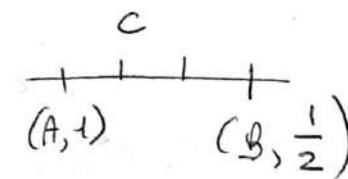


$$\alpha + \beta > 0$$

Q:  C symétrique de A/B.

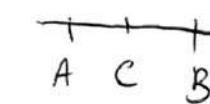
$\rightarrow C$ est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ pour quels $(\alpha : \beta)$

Rq si $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$

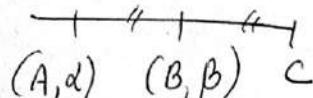


$$\boxed{M1} \quad C = B + \overrightarrow{AB} = B + (\vec{B} - \vec{A}) = 2B - A \\ = (2 + (-1) \times 1) \\ \Rightarrow (\alpha : \beta) = (-1 : 2) \text{ convient.}$$

$$\boxed{M2} \quad B = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C \Rightarrow C = 2B - A$$

NB  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$

$\boxed{M3}$



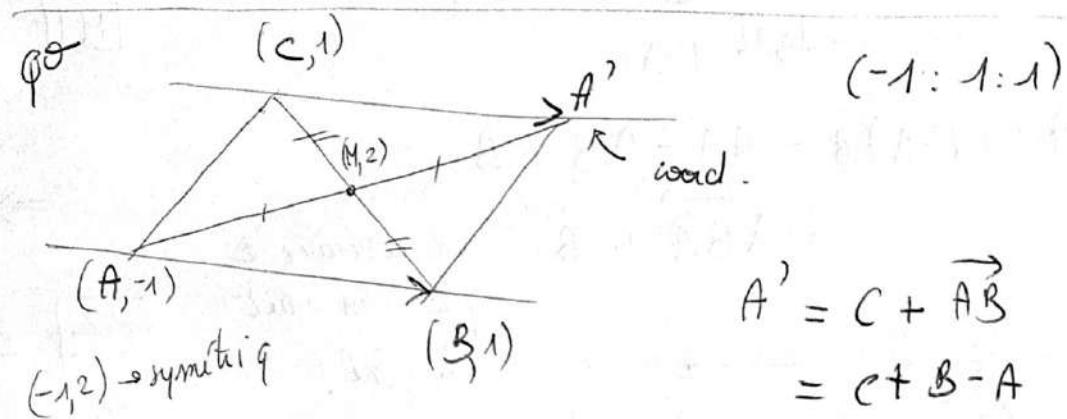
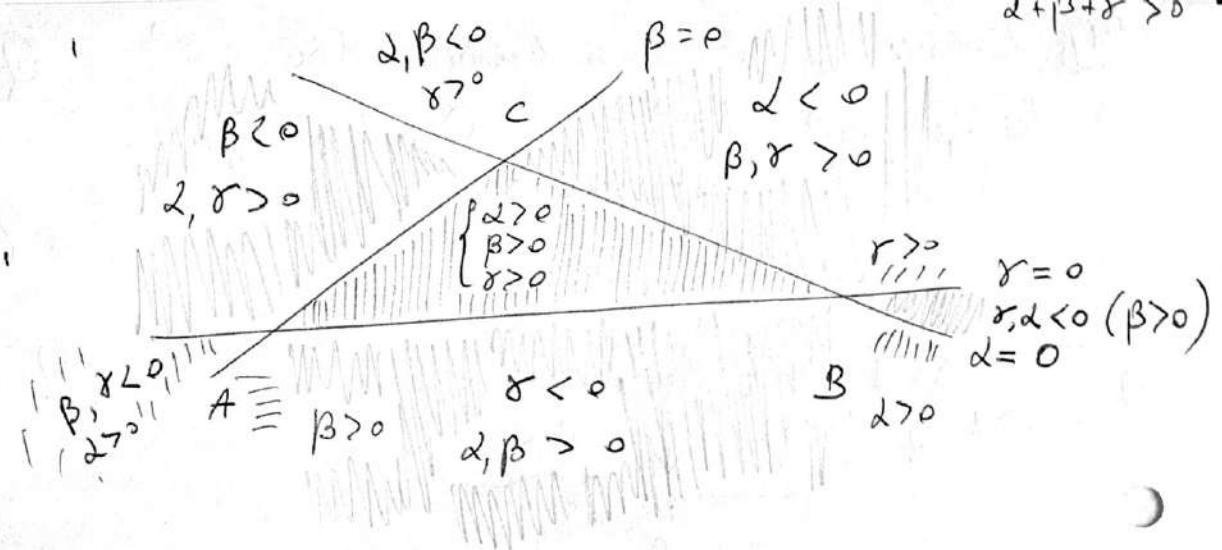
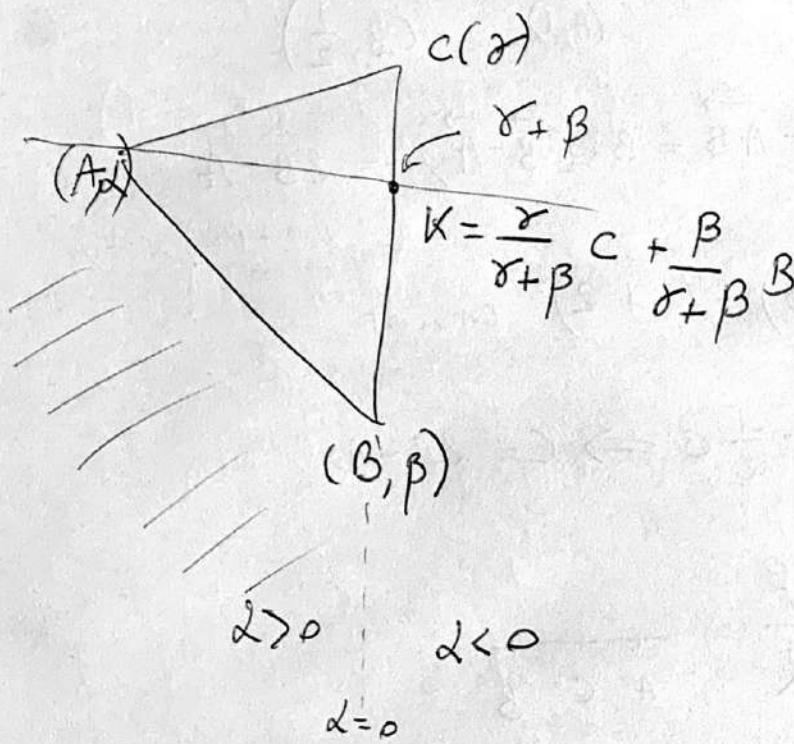
$$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\alpha : \beta) = (-1, 2)$$

a) Discuter position M par rapport à $\triangle ABC$ en fonction des signes coord. barycentriques $[\alpha, \beta, \gamma]$.

(i) condition $M \in (BC)$ $\rightarrow \alpha = 0$,

(ii) condition $M \in \frac{1}{2}$ plan (BC) contenant A:



$$\begin{aligned} A' &= C + \vec{AB} \\ &= c + b - a \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha + \beta + \gamma > 0}$$

Alignement

Ex 8

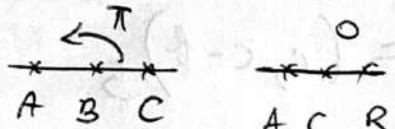
M montrer que A, B, C alignés :

- D) trouver une droite \mathcal{D} , $A, B, C \in \mathcal{D}$
- $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$
- $C \in (AB)$

$$\text{et } AB = \{ax + by = d\}, ax_c + by_c = d?$$

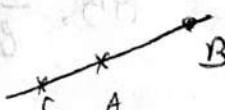
$$\text{Si } (AB) = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ et } (x_c, y_c) = A + t\overrightarrow{AB}?$$

$$\not\angle ABC = 0^\circ [\pi]$$

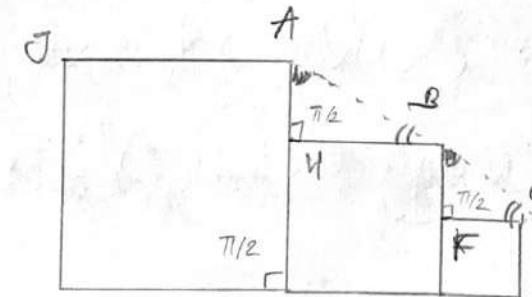


- mises en place complètes.

- homothéties $\rightarrow H_C, \lambda(A) = B$



$\downarrow H_{0, \lambda}(A) = B, H_{0, \lambda}(B) = C$



$$I \quad 4 \quad a \quad G \quad 2 \quad F \quad E \quad 10$$

$$a : b = b : c$$

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{2}{1} = 2$$

M1 (angles)

$$\triangle HBA \sim \triangle FCB \text{ car } \frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC} \text{ et } \not\angle H = \not\angle F = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{c} - 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ok}$$

Alors

$$\not\angle ABC = \not\angle ABD + \not\angle HBF + \not\angle FBC = \pi$$

$$\triangle \text{demb.} \rightarrow \text{II} \quad \text{II } \frac{\pi}{2}$$

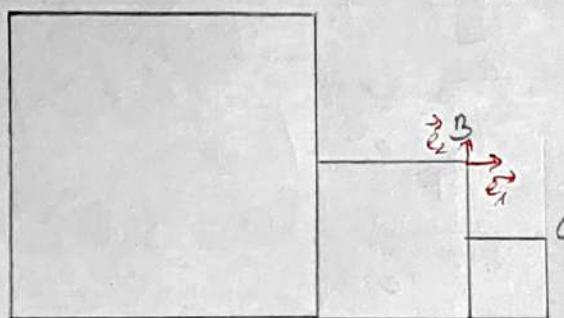
$$\not\angle BCF \quad \not\angle BFC$$

↑
Somme des
angles de
 $\triangle BFC$

(plat)

Donc A, B, C sont alignés car

$\not\angle ABC$ angle plat.



$$c \in (A, B) \Leftrightarrow (a-b)c + b(c-b) = \\ = ac - bc + bc - b^2 = ac - b^2 = 0$$

car $ac - b^2 = 0 \Leftrightarrow ac = b^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

[M3] Vecteurs

$$\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HF}$$

$$\vec{AB} = (b-a)\vec{e}_2 + b\vec{e}_1$$

$$\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC} = (c-b)\vec{e}_2 + c\vec{e}_1$$

$$\vec{AB} = (b, b-a)_B$$

$$\vec{BC} = (c, c-b)_B$$

$$\vec{AB} \cdot \frac{c}{b} = \left(c, \frac{(b-a)c}{b} \right) = \left(c, \frac{bc-ac}{b} \right)$$

$$= \left(c, c - \frac{ac}{b} \right) = \left(c, c - \frac{b}{c} \cdot c \right) = \vec{BC}$$

$$a:b = b:c$$

[M2] Équation d'une droite.

On fixe $R = (B, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\|\vec{e}_i\| = 1.$$

$$\vec{e}_1 \parallel (ID) \text{ et } \vec{e}_2 \parallel (\perp \sigma)$$

$$B = (0, 0)_R \quad A = (-b, a-b)_R, \quad C = (c, c-b)_R$$

\overrightarrow{BA} "

$$(AB) = \{(a-b)x + by = 0\} \text{ car } (a-b, b)$$

car B est alors vecteur normal
($\perp \overrightarrow{AB}$ directement)

on échange 2 coord, on a $b = -a$ une seule.

M3 bis

vérifie $\vec{a} \perp \vec{c}$, scalaire.

$$\langle \vec{AB} | \vec{BC}^\perp \rangle = 0$$

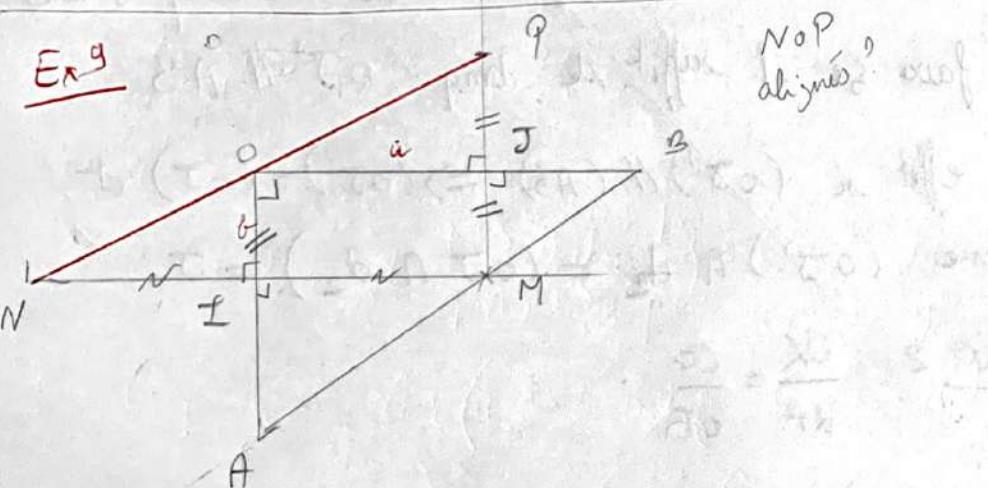
"

$$\langle (\vec{b}, \vec{b}-\vec{a}) | (\vec{b}-\vec{c}, \vec{c}) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow b(\vec{b}-\vec{c}) + \vec{b}\vec{c} + (\vec{b}-\vec{a})\vec{b} + (\vec{b}-\vec{a})\vec{c} = 0$$

$$\bullet \Leftrightarrow b^2 - \vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + b^2 - ab + \vec{b}\vec{c} - ac = 0$$

Ex 9



[M1] on se place dans $R(O, \vec{OB}, \vec{OA})$

avec $M(a, b)_R \Rightarrow P(a, -b)_R$ et $O(0, 0)_R$
 $\Rightarrow N(-a, b)_R$

$$\Rightarrow \vec{OP} = (a, -b) = -(-a, b) = -\vec{ON}$$

de \vec{OP} , \vec{ON} sont colinéaires.

Ainsi O, P, N sont alignés.

[M2] angles & triangles semblables.

$$NI = IM = OJ$$

↑
symétrie

$$IJ = MI \text{ rectangle}$$

$$IO = MJ = JP,$$

↑
symétrie

$\Rightarrow \triangle NIJ \sim \triangle OJP$ car rectangles les hauts et égaux

$$\angle NOP = \angle NOI + \angle IOJ + \angle OJP = \pi$$

$$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \parallel \quad \parallel \leftarrow \text{d'égaux}$$

$\angle NIJ \quad \angle INO$

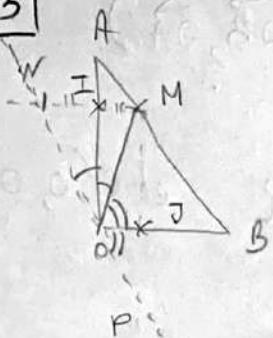
$$\angle NOP = \angle NOI + \angle NIJ + \angle INO$$

Ainsi $\angle NOP$ angle plat.

(19) De N, O, P alignés.

somme angles
un triangle = π .

M3



(angles, bijections, symétrie)

$$\angle NOI = \angle IOM \text{ (par symétrie)}$$

$$\angle JOI = \angle JOM \text{ (par symétrie)}$$

$$\Rightarrow \angle NOP = 2(\angle IOM + \angle MOJ)$$

$$= 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$$

O est le milieu de [NP]:

M1 (coordonnées): $\frac{N+P}{2} = \frac{(-a, b) + (a, -b)}{2} = (0, 0) = O.$

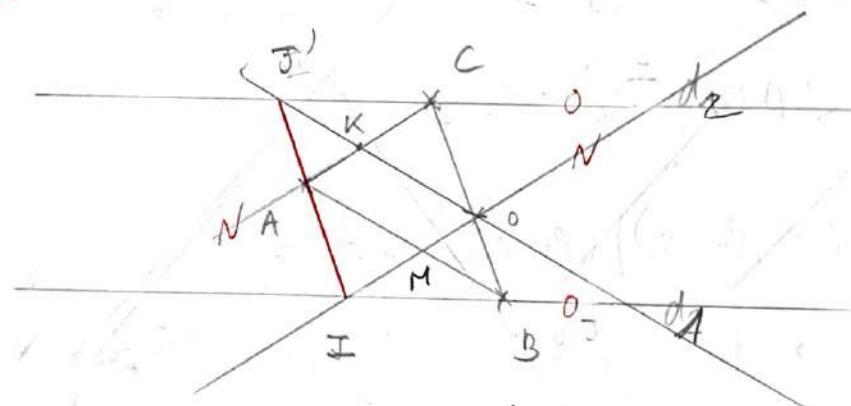
M2 (angles & triangles semblables) (égalité).

$$\triangle NOI \sim \triangle OPJ \Rightarrow NO = OP.$$

M3 (symétrie)

$$ON = OM = OP \text{ (par symétrie)}$$

Ex 6:



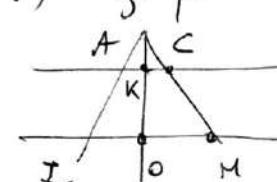
Indic 1: soit $(AI) \cap d_2 = J'$, on vt dmq $J' = J$
pr faire ça il suffit de dmq: $OJ' \parallel AB$.

en effet si $(OJ') \parallel (AB) \Rightarrow (OJ') = (OJ)$ et
comme $(OJ') \cap d_2 = (OJ \cap d_2) = J$.

Indic 2: $\frac{CK}{KA} = \frac{CO}{OB}$

comme $(CA) \parallel (IM)$ par construction de I

$$\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI}$$



$$\frac{CK}{MO} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{J'K}{J'O} = \frac{KA}{OI} \quad (\text{Thalès})$$

80

$$\text{Or} \quad \frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \stackrel{?}{=} \frac{CO}{OB}$$

qui car $d_1 \parallel d_2$.

Pour conclure d'après Thalès dans

$$\triangle CAB, \text{ la } \overset{\text{droite}}{OK} \parallel AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$$

$$\Rightarrow J \in (J'A'I) \Rightarrow J, A, I \text{ alignés.}$$

$$C_{\text{tire}} \frac{CK}{KA} = \frac{M_0}{OI} = \frac{CO}{OB}$$

qui car $d_1 \parallel d_2$.

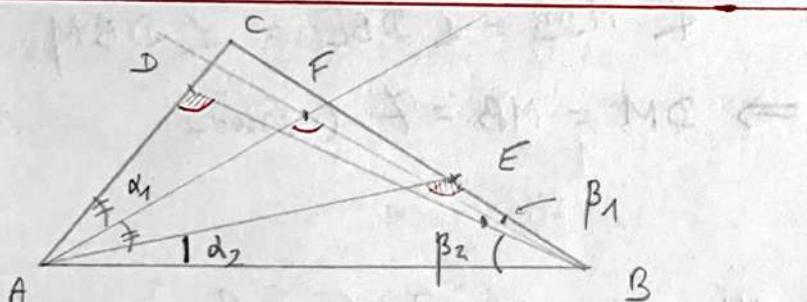
Px conclure d'après Thalès dans

$\triangle CAB$, t' $OK \parallel AB \Rightarrow J = (OK) \cap d_2 = J'$

$\Rightarrow J \in (J'A'I) \Rightarrow J, A, I$ alignés.

TD 3: Angles

Ex 1



$$M_q \widehat{AFB} = \frac{\widehat{ADB} + \widehat{AEB}}{2}$$

$$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle FAE = \alpha_1 \\ \angle EAB &= \alpha_2\end{aligned}$$

$$(\angle CAB = \omega = 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\angle CBF = \angle FBD = \beta_1$$

②

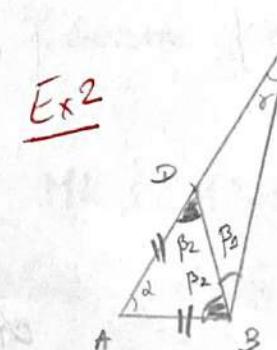
$$\angle DBA = \beta_2$$

$$\rightarrow 2 \angle AFB = 2(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2))$$

$$\angle ADB = \pi - (2\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2$$

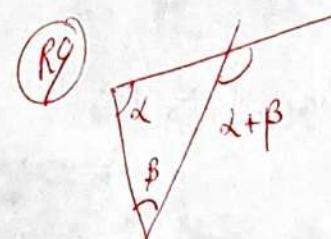
$$\angle AEB = \pi - \alpha_2 - (2\beta_1 + \beta_2)$$

$$\begin{aligned}\angle ADB + \angle AFB &= 2\pi - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2 \\ &= 2 \angle AFB\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\widehat{ABC} - \widehat{ACB} &= 30^\circ = \frac{\pi}{6} \\ \beta_1 + \beta_2 - \gamma &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 - \gamma &= \beta_1 + \beta_1 + \gamma - \gamma \\ &= 2\beta_1 = 30^\circ\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \boxed{\beta_1 = 15^\circ}$$

Ex3 Mq $(CD) \parallel (AB)$

Ainsi on pourra conclure que

$$L=M=C \Rightarrow LM=0.$$

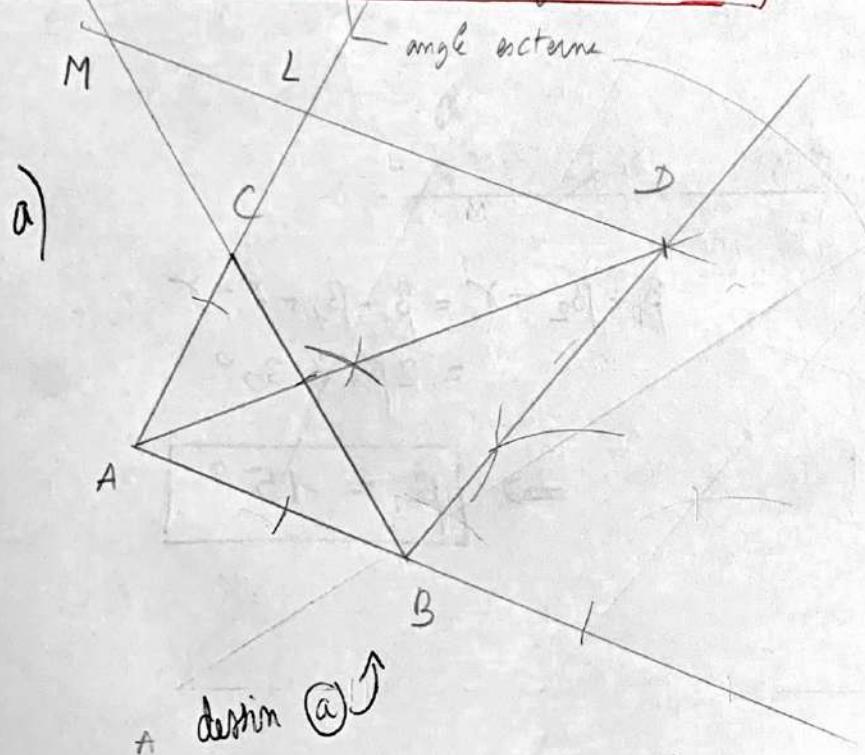
b) cas particulier
où M
coincident à L.
 $\triangle ABC$ isocèle en C.

comme D intersecte \odot des bissectrices AD & BD,
 $\Rightarrow CD$ bissectrice (Δ à distance égale
des droites (AB) , (CB) , (CA)).

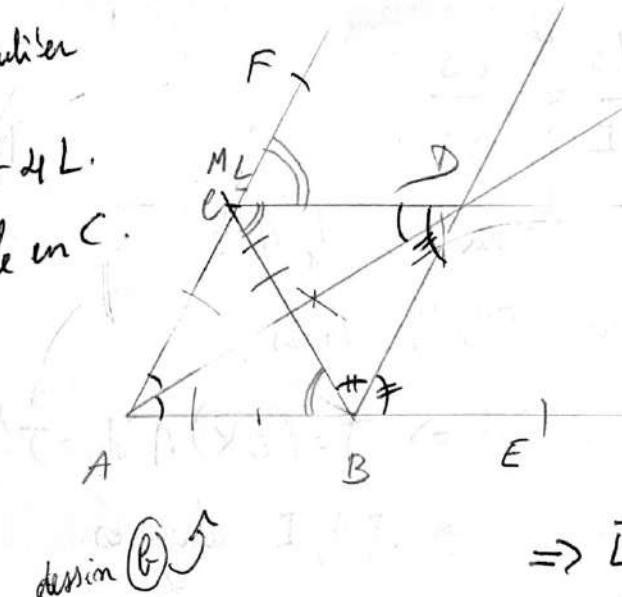
$$\Rightarrow \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle FCB) = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = \angle CBA$$

$$\Rightarrow (CD) \parallel (AB) \quad \text{b} \square \quad \Rightarrow L=M=C \Rightarrow LM=0$$

tracer bissectrice $\angle A$ à l'orange



a)



dansin (b) ↗

a) $(DL) \parallel (AB)$

$\Rightarrow \angle LDA = \angle DAB$
(alternes-internes)

$\angle DAB = \angle DAL$
(bissectrice AD)

$$\Rightarrow \widehat{LAD} = \widehat{LDA}$$

$$\Rightarrow LD = LA = 5 \quad (\text{énoncé})$$

$$\angle MDB = \angle DBE = \angle DBM$$

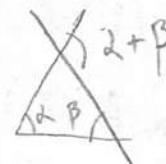
$$\Rightarrow DM = MB = 7 \quad (\text{énoncé})$$

↗ DM B

$$\text{dansin } ML = MD - LD = 7 - 5 = 2.$$

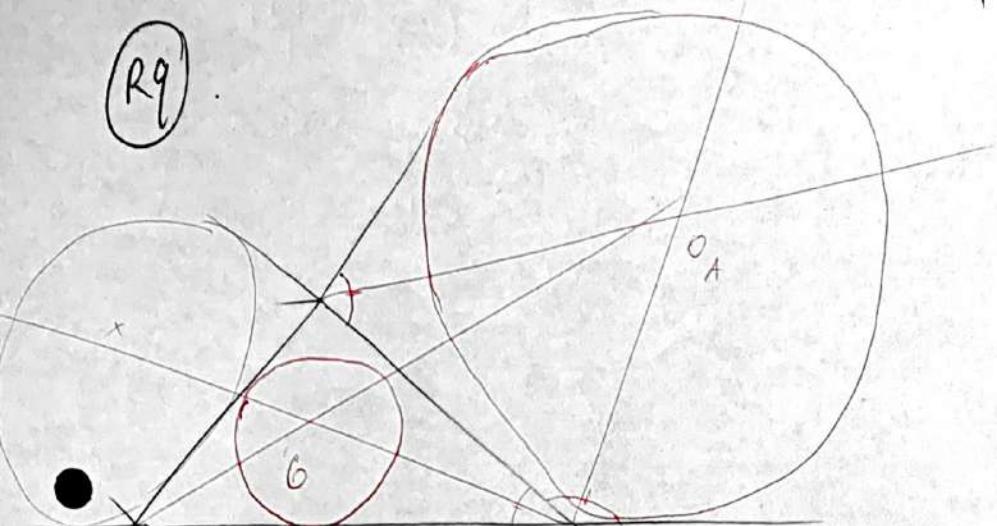
a \square

2 argument



92

(R9)



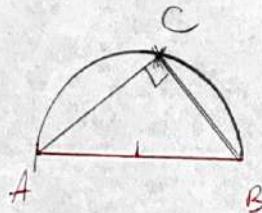
arc de inscrit

arc de exinscrit

(R9)

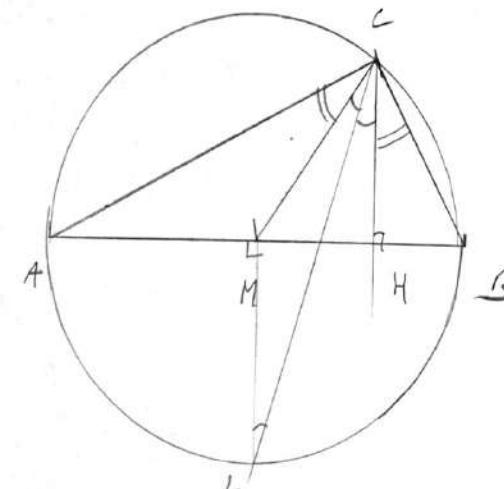
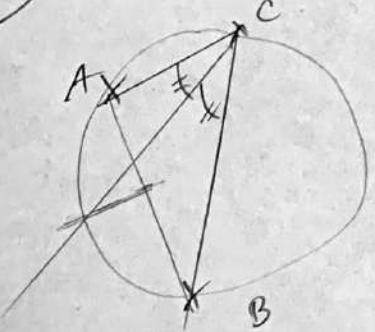
Px dessiner $\triangle ABC$ rectangle en C.

2^e choix :



(R9)

tracer bissectrice de $\angle C$.



[M I]

\Rightarrow comme CL bissectrice $\Rightarrow \widehat{AL} = \widehat{LB} \Rightarrow ML$ médiane de $\triangle AB$.
 $ML \parallel CM \Rightarrow \angle MLC = \angle LCH$.

comme $\triangle ACB$ rectangle en C $\Rightarrow M$ centre du cercle \circ circonscrit à $\triangle ABC$

$\Rightarrow ML = MC \Rightarrow \angle MCL = \angle MLC$.

$\Rightarrow \angle LCM = \angle MCL \Rightarrow CL$ bissectrice de $\angle MCH$.

[M II]

M centre de C $\Rightarrow \angle MCA = \angle MAC$ ($MA = MC = R$)

$\angle MCA = \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \angle HCB$

(23)

$\triangle ABC$ rectangle $\rightarrow \triangle HCB$

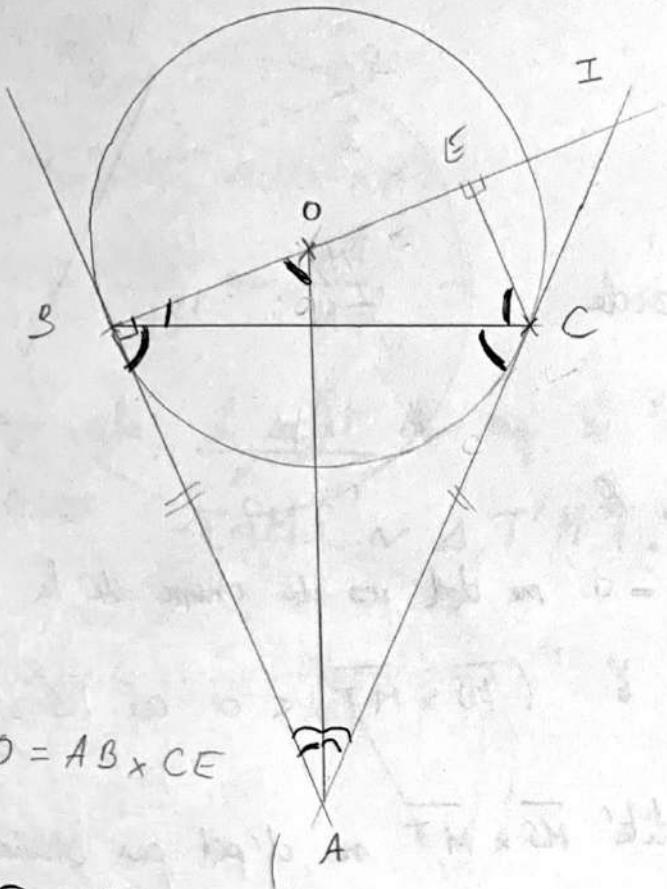
Angles → Circles

Ex 7

TH

Si les deux cercles sont semblables, alors :

- $a:b = c:d$ et une mesure d'angle égales
- 2 mesures d'angles égales



$$\text{mg } BE \times BO = AB \times CE$$

Indic

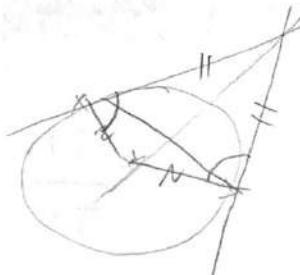
$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{OB}$$

$$\Downarrow ? \text{ car } \angle BEC = \frac{\pi}{2} = \angle ABO$$

$\triangle BEC \sim \triangle ABO$ (triangles rectangles)

$$\angle ECB = \angle BAO$$

TM x 2
(RG)



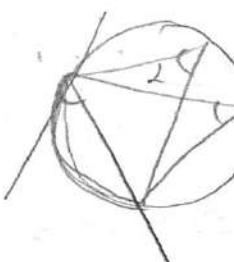
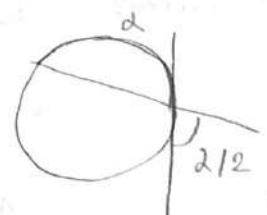
$$\rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \widehat{BC} \quad (\angle BOC = \widehat{BC})$$

$$\angle ECB = \angle CBA = \frac{1}{2} \widehat{BC} \text{ car } B(O, OB)$$

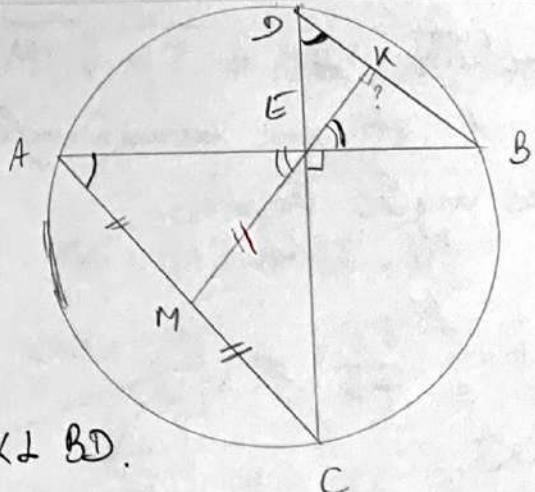
↑
angles alternes/internes
centre

$$CE \perp OB \perp AB \Rightarrow CE \parallel AB$$

dimin $\angle AOB = \angle ECB$



Ex 8



mq EM et
EK
coincident.

on cherche
à montrer $\angle EKL \perp BD$.

$$\text{où } K = (EM) \cap (BD)$$

$$AM = MC.$$

On cherche à montrer $\angle BDE = \angle KEB$
car si c'est le cas $\angle KEB + \angle KBE$

$$= \angle BDE + \angle DBE = \frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs $\angle KEB = \angle AEM$ (opposés)

$$\angle BDC = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \angle BAC$$

Et comme $\triangle AEC$ (rectangle en E) $\Rightarrow M$ centre
du cercle circonscrit à $\triangle AEC \Rightarrow MA = ME (= MC)$

$$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MEA}.$$

(Réiproq: A, C, B, D sont cocycliques)

Inverser le sens de l'indac.



Ex 9

a) $\overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MT}$

(< 0 si M dans le sens)

1^o cas / M sur B.

$\Rightarrow \overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MT} = 0$ ne dépend pas du choix de la droite D.

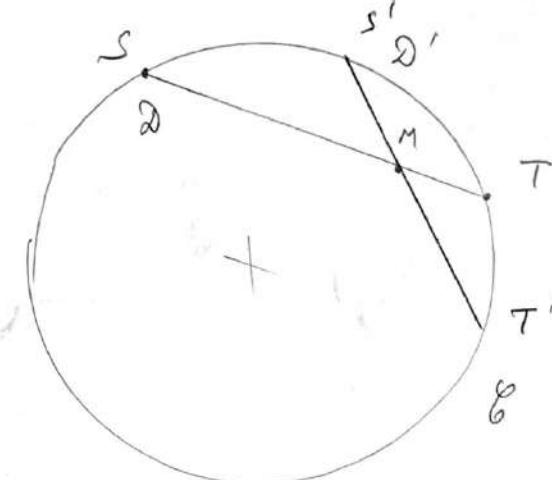
2^o cas / M dans B. ($\overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MT} < 0$ car \overrightarrow{MS} et \overrightarrow{MT} de sens opposés)

a) MQ quantité $\overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MT}$ ne dépend pas du choix de droite D.

→ le principe est de prendre 2 droites D et D',

$$D, D' \ni M, D \cap B = \{S, T\}, \\ D' \cap B' = \{S', T'\}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MS'} \times \overrightarrow{MT'}.$$



$$\Rightarrow \overline{MS} \times \overline{MT} = \overline{MS'} \times \overline{MT'} = MS \times MT = MS' \times MT'$$

$\hat{\wedge}$ $\hat{\wedge}$

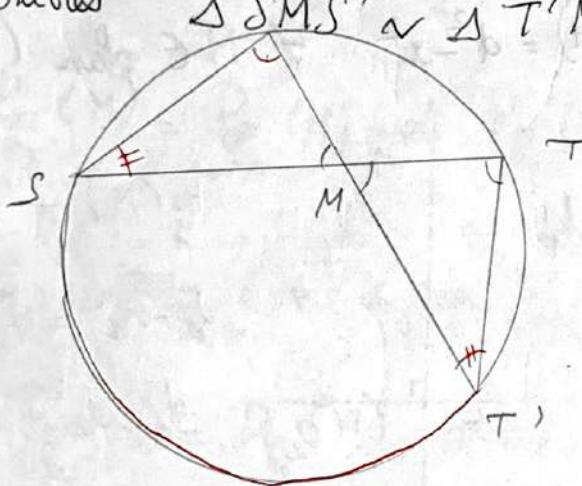
$$\frac{3^{\circ} \cos}{MS \times MT} M \text{ hors de } C > 0$$

mq $MS \times MT = MS' \times MT'$.

$$\Leftrightarrow \frac{MS}{MS'} = \frac{MT'}{MT}$$

- Ainsi
- Rapport
 \downarrow
 \triangle semblables

Pmq ala, il suffit de mq les triangles
 $\triangle SMS' \sim \triangle T'MT$.



et il faut que $\angle SMS' = \angle T'MT$ opposés.

De plus comme $\angle SS'T' = \frac{1}{2} \widehat{ST'} = \angle STT'$

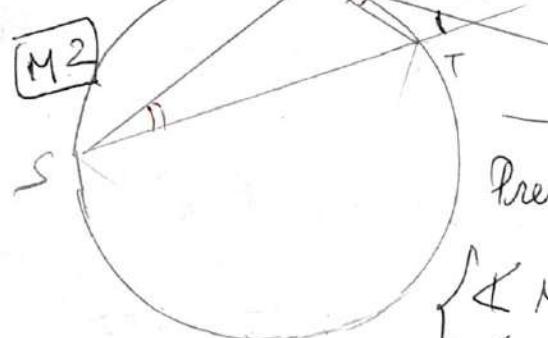
\Rightarrow les \triangle st semblables.

Ile faut que l'on

(mq) $MS \times MT = MS' \times MT'$

$$\Leftrightarrow \frac{MS}{MS'} = \frac{MT'}{MT}$$

$$\Leftrightarrow \triangle MST' \sim \triangle MS'T \text{ mais } \angle SMT' = \angle S'MT$$



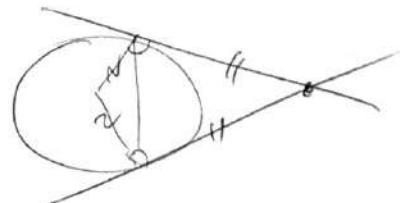
$$\angle MTS' = \frac{1}{2} \widehat{S'S} = \angle MTT'$$

Prendre \odot' tangent à $S' = T'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle MSS' = \frac{1}{2} \widehat{S'T} = \angle MTT' \\ \angle M \text{ commun} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \triangle MTT' \sim \triangle MS'S$$

(R9)

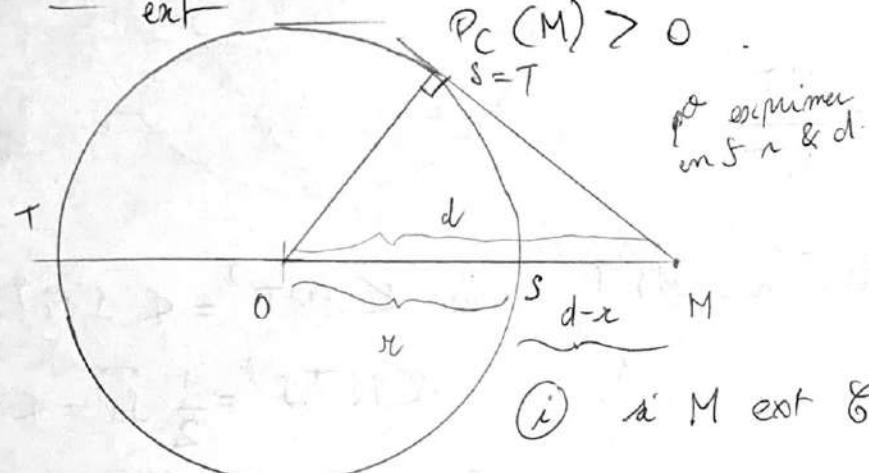


b)

\rightarrow Si M int à \mathcal{C} à $P_C(M) < 0$

\rightarrow — sun — $P_C(M) = 0$

\rightarrow — ext — $P_C(M) > 0$



(i) si M ext \mathcal{C} .

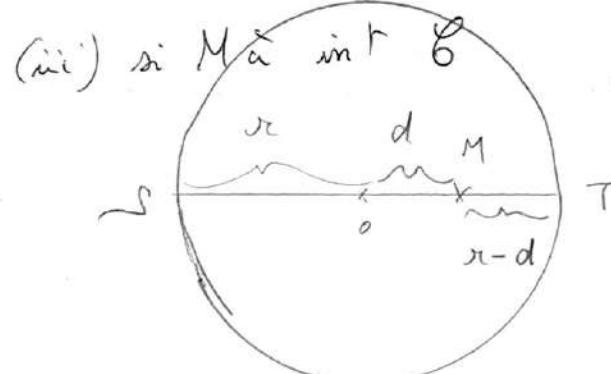
$$\boxed{M1} \quad \overline{MS} \times \overline{MT} = MS \cdot MT = (d-x)(d+x) = d^2 - x^2$$

$$\boxed{M2} \quad \text{soit } \mathcal{D} \text{ tangente } S=T, \quad \overline{MS} \times \overline{MT} = MT^2$$

$$\text{par pythagore } MT^2 = MO^2 - OT^2 = d^2 - x^2$$

(ii) si $M \in \mathcal{C}$ $d=r$

$$P_C(M) = 0 = d^2 - x^2.$$

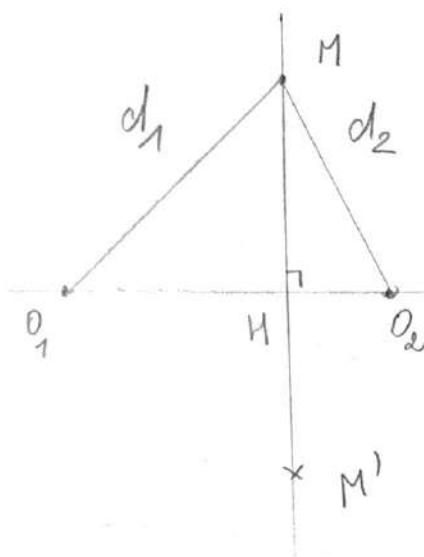


si D le diamètre
 $D \ni O, M$.

$$\begin{aligned} P_C(M) &= \overline{MS} \times \overline{MT} = -MS \times MT = -(r+d)(x-d) \\ &= -(r^2 - d^2) \\ &= d^2 - r^2. \end{aligned}$$

Ainsi $P_C(M) = d^2 - r^2 \quad \forall M \in \text{plan } (\mathbb{R}^2)$

d)



$$P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M)$$

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = cté$$

soit M un point et H la projecte orthogonale de M sur $(O_1 O_2)$.

$$d_1^2 = O_1 H^2 + M H^2 = MO_1^2$$

$$d_2^2 = MO_2^2 = MH^2 + O_2 H^2$$

$$\bullet \Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = MO_1^2 - MO_2^2 = x_1^2 - x_2^2 \\ (MO_1 - MO_2)(MO_1 + MO_2).$$

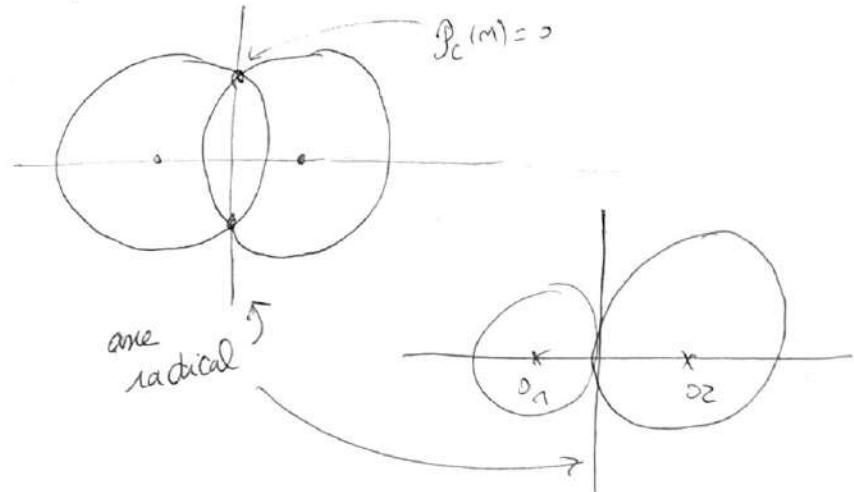
$$\rightarrow \text{si } P_{\mathcal{C}_1}(M) = P_{\mathcal{C}_2}(M) \text{ et } P_{\mathcal{C}_1}(M') = P_{\mathcal{C}_2}(M') \\ \Downarrow$$

$$\text{da } \text{proj}_{O_1 O_2}(M) = \text{proj}_{O_1 O_2}(M')$$

$$\Rightarrow P_{\mathcal{P}}(M) = P_{\mathcal{P}}(M') = \text{droite } \perp O_1 O_2.$$

qui passe par un point $H \in O_1 O_2$ tq

$$MO_1^2 - MO_2^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

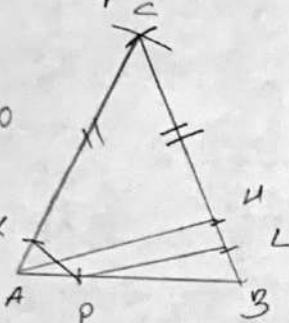


TD4 Soit $\triangle ABC$ isocèle en C, un point $P \in (AB)$. Déterminer longueur AH en 3 étapes. PK et PL de P à (CA) et (CB) .

1^o cas

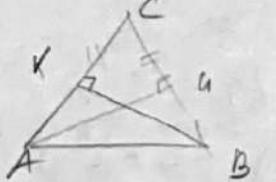
$$\Rightarrow AH = PL, AA = 0 \\ (\pm PK)$$

(max {PL, PK})



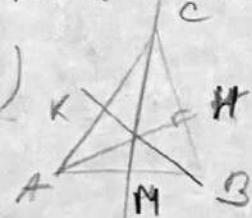
2^o cas

$$P = B \Rightarrow BK = BK \text{ hauteur}$$



$$AH = BK, AA = 0 \\ AH = PK (\pm P)$$

$(CA = CB)$



M1

- CH = médiane
- = hauteur
- = bissectrice \hat{C}
- = médiatrice de (AB)
- = axe de sym de BAC

$$S_{CH}(C) = C$$

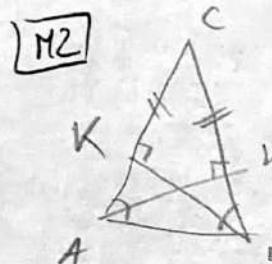
$$S_{CH}(A) = B, S_{CH}(B) = A$$

Ainsi, les symétries préserrent les angles.

\Rightarrow hauteur de A vers (BC) = AH

soit hauteur de $S_{CK}(A)$ vers $S_{CK}(BC)$

$$\Rightarrow H \xrightarrow{S_{CK}} K$$



$$AC = CB \Rightarrow \angle CAB = \angle ABC.$$

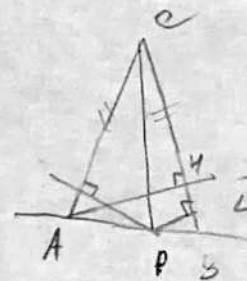
$$\triangle ABK = \triangle BAH \text{ car: } \begin{array}{l} \bullet AB \text{ commun} \\ \bullet \angle K = \angle H = \frac{\pi}{2} \\ \bullet \angle CAB = \angle ABC \end{array}$$

$$\bullet \angle K = \angle H = \frac{\pi}{2} \Rightarrow BK = AH$$

$$\bullet \angle CAB = \angle ABC$$

$$BK \cdot CA = l. \text{ et } \alpha_{ABC} = AH \cdot CB$$

3^o cas



$P \in [AB]$

$$\boxed{M1} \quad \alpha_{CPB} + \alpha_{CPA} = \alpha_{ABC}$$

$$\frac{PL \cdot CB}{2} + \frac{PK \cdot CA}{2} = \frac{AH \cdot CB}{2}$$

$$PL + PK = AH.$$

TD4 ①

M2 • Pan Thales: $\frac{PL}{AH} = \frac{BP}{PA}$

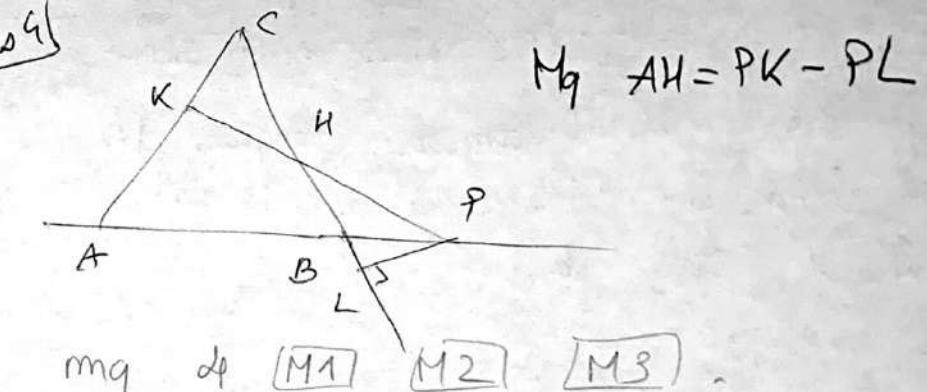
• $\triangle PBL \sim \triangle PAK$ can rectangles + $\cancel{KA} = \cancel{KB}$
 \Rightarrow dc semblables.
 $\cancel{\text{can } CA = CB.}$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{PL}{PK}$$

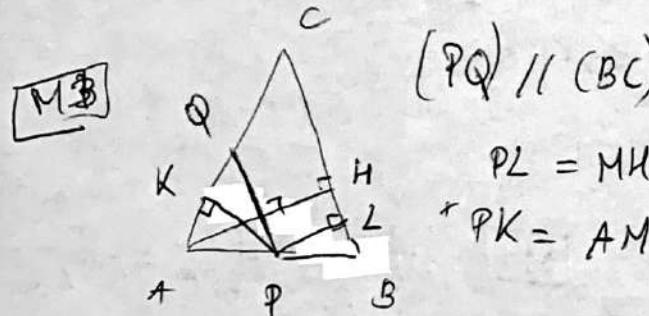
$$\text{et } AH = \frac{PA \cdot PL}{BP}.$$

$$\frac{PL}{AH} = \frac{PL}{PK}$$

$$AH = \frac{PK \cdot PL}{PL} = PK.$$



mq dp [M1] [M2] [M3]



$$PL = MH \quad (\text{justif})$$

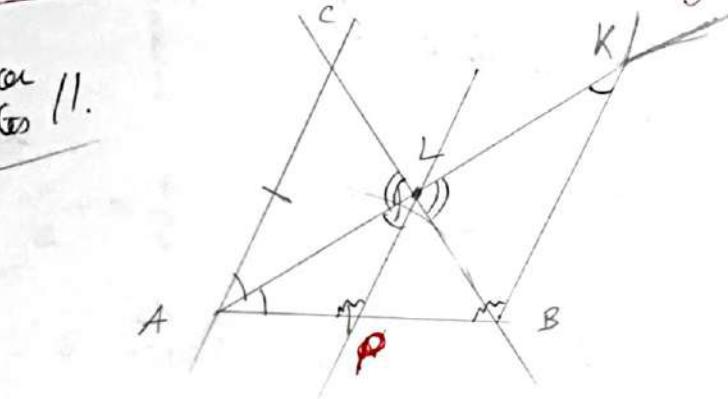
$$PK = AM \quad (\text{à justif})$$

$$PL + PK = AM + MH = AH$$

cas

$$AH = \begin{cases} PK + PL & \text{si } P \in [AB] \\ PK - PL & \text{si } P \notin [BA] \Leftrightarrow B \in [AP] \\ PL - PK & \text{si } P \notin [AB] \Leftrightarrow A \in [BP] \end{cases}$$

E*2 (Bissectrices & longueur) 1



a) M_g $AB:AC = LB:LC$,

sait $K \in AL$, $(BK) \parallel (AC)$

$$\angle CAK = \angle AKB \quad (*)$$

$$\angle BAK =$$

$$\Rightarrow BA = BK$$

De plus $\angle BLK = \angle CLA$ (opposé)

+ (*) $\Rightarrow \triangle KLB \sim \triangle ALC$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BK}{CA} = AB$$

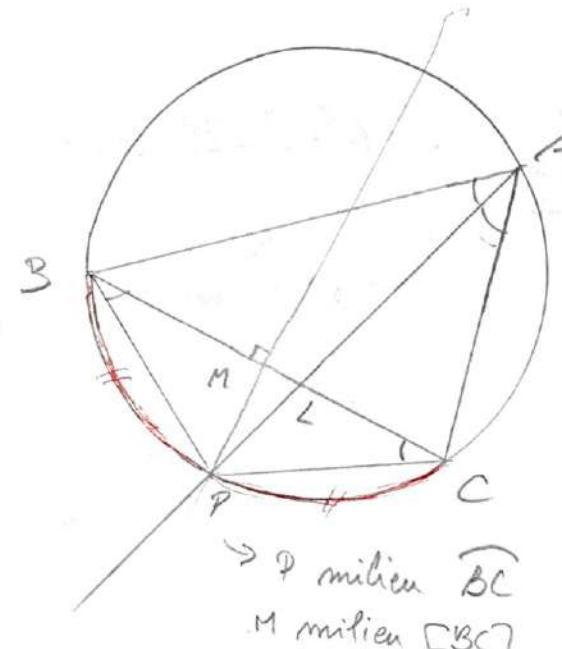
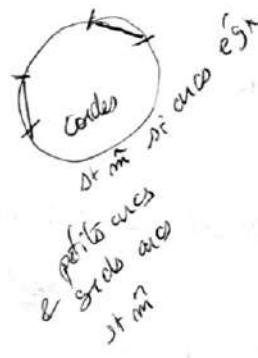
$$\Rightarrow BL:LC = BK:AC$$

$$LB:LC = AB:AC$$

③

④ de façon similaire, on pt dng m ch^e (LP) // (A)

b) M_g bissectrice AL coupe cercle circonscrit
en un point P qd sur la médiatrice de [BC].



de cercle circonscrit
bissectrice \wedge médiatrice

Idee est $P \frac{1}{2}$ de \widehat{BC}
 $\in AL$ et \in médiatrice
de $[BC]$

$$\angle CAP = \frac{1}{2} \widehat{PC} = \angle CBP.$$

bissectrice

$$\angle PAB = \frac{1}{2} \widehat{BP} = \angle PCB$$

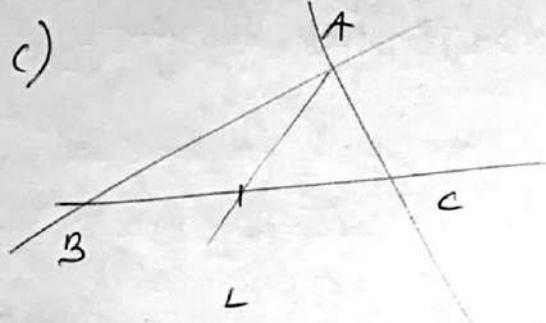
△ oriente des angles $\Rightarrow \triangle BPC$ isocèle.

si M milieu de BC $\Rightarrow MP \perp BC$ (car médiane = hauteur)
= media = bissectrice

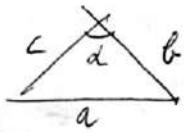
EP MP médiatrice de [BC] $\Rightarrow P$ est le point de l'énoncé.

Pour construire $P \in \ell_s \triangle ABC$

on a pris $P = AL \cap \ell_s \triangle ABC$



- vecteurs
- Al-Kashi



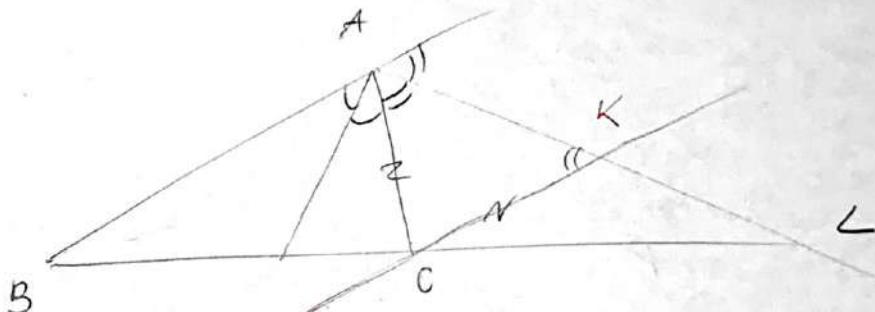
- rapports cf figure a)

$$\begin{aligned} &\text{à mq} \\ & \left\{ \begin{array}{l} AL^2 = AB \times AC \\ - LB \times LC. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

ΔM q scalaires
 $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2bc \cos(\alpha)$

d) Mg a) est vrai aussi pour L pied de bissectrice ext. issue de A.



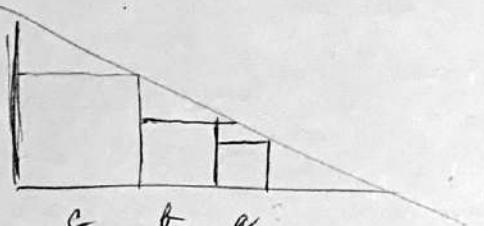
biss int \perp biss ext.

constaco //

im fine

$$\frac{LC}{LB} = \frac{CK}{AB} = \frac{AC}{AB}. \quad \text{cf isocèle thales}$$

Ex3

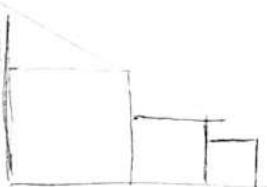


$\frac{a}{c} = \frac{b}{16}$ $c = 36$ $b = 16$

homotheties

$$\theta = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

Ex3



$\therefore \text{dima}$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad \begin{matrix} c \\ 36 \end{matrix} \quad b \quad \begin{matrix} a \\ 16 \end{matrix}$$

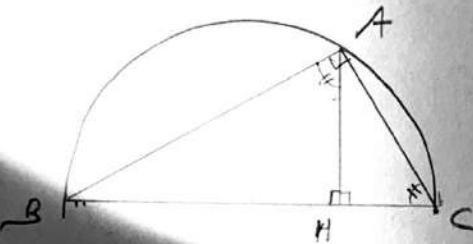
homothéties

$$b = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

$b = \sqrt{a \cdot c}$

Ex2

Dima un triangle



$$\text{mg } BA^2 = BH \cdot BC$$

↪ ctimes?

↪ Thalès? \triangle semblables?

$$BA^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$$

$\hookrightarrow = \hookrightarrow \Leftrightarrow \triangle ABH \sim \triangle CBA$

$$\angle = \begin{cases} \angle ABH = \angle ABC & \text{commun} \\ \angle AHB = \angle CAB = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

kathète 2 = pied segm⁺ au pied hauteur \times pied segm⁺ au pied hauteur

$$\text{mg } CA^2 = CH \cdot CB.$$

comme B et C jouent un rôle

\Rightarrow (p m [M] on échangent B et C)

$$CA^2 = CH \cdot CB$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Leftrightarrow \triangle AHB \sim \triangleCHA$$

$$\angle = \angle AHB = \angle CHA = \frac{\pi}{2}$$

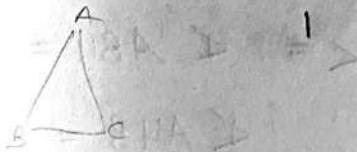
$$\text{De plus } \angle ACH = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} \underset{\triangle ABC}{\uparrow} = \angle BAH \underset{\triangle AHB}{\uparrow}$$



$$\angle BAH = \angle BAC - \angle CAB = \angle BAC - \angle BCA = \angle ACH$$

Ex 10

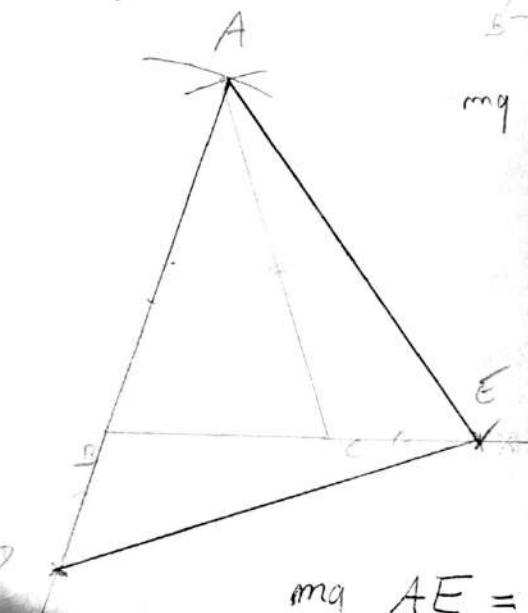
Triangle isocèle



mq $\triangle ADE$ isocèle

$$BE = BC + AB - AC$$

$$BE = AB$$



mq $AE = ED$.

M dmq \triangle isocèle \rightarrow 2 triangles égaux ?

$\triangle DBE \cong \triangle ECA$ car $BD = CE$ (d'après énoncé)

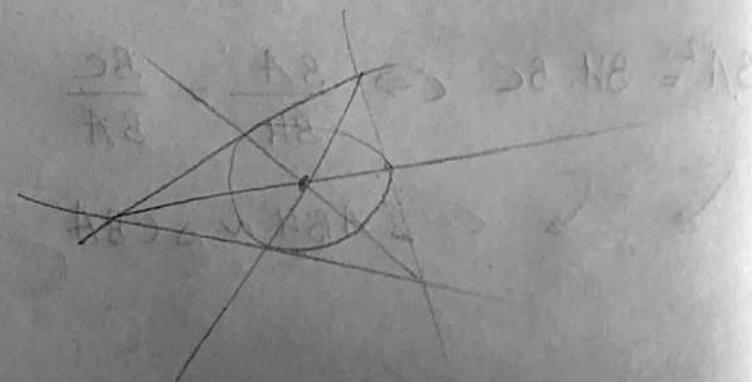
$$BE = AB = CA$$

④

\uparrow
isocèle $\triangle ABC$

angles &
 côtés adjacents
 identiques

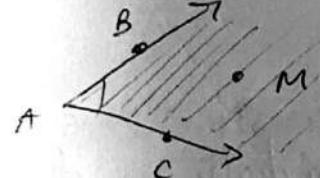
$$\angle DBE = \pi - \widehat{ABC} = \pi - \widehat{ACB} = \angle ACE$$



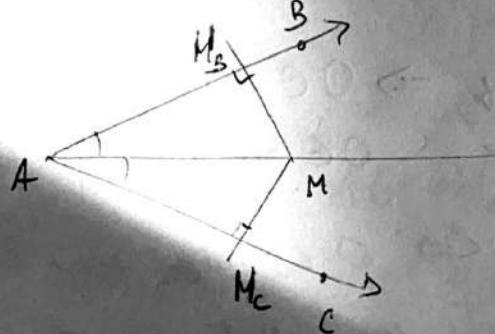
Ex 11 (Pb remarquables d'un triangle)

soit $\triangle ABC$ non dégénérée.

Lemme $M \in \ell(\angle A, \angle C)$



$d(M, (AB)) = d(M, (AC))$ si $M \in$ bissectrice de $\angle BAC$.



$\triangle AMH_B$ & $\triangle AMH_C$ sont rectangles à \hat{m} hypothénuses AM .

Ainsi $\triangle AMH_B = \triangle AMH_C$



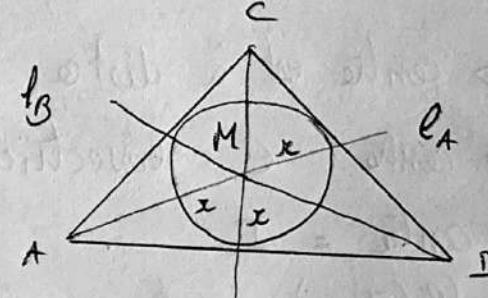
$\angle HBM = \angle MAH_C$

(2 angles + 1 longueur \hat{m})

$\Rightarrow MH_B = MH_C$ (par pythagore) $AH_C = AH_B$

?

a) Moi 3 bissectrices se concourent.



soit ℓ_A la bissectrice int $\angle A$
 ℓ_B la bissectrice int $\angle B$
 ℓ_C la bissectrice int $\angle C$

soit $M = \ell_A \cap \ell_B \Rightarrow d(M, (AB)) = d(M, (AC))$

$d(M, (AB)) = d(M, (BC)) = (M \in \ell_B)$ ($M \in \ell_A$)

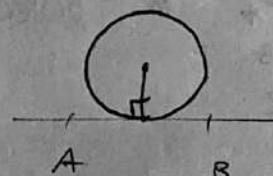
$\Rightarrow d(M, (AC)) = d(M, (BC))$ et comme
 $M \in$ int. du $\triangle ABC$

$\Rightarrow M \in \ell(CAB) \Rightarrow M \in \ell_C$.

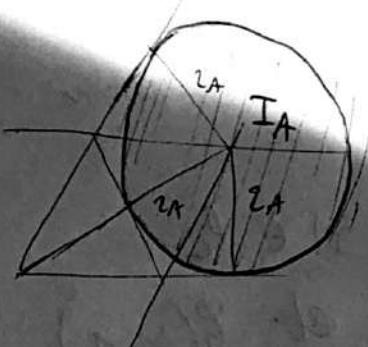
Ainsi $\ell_A \cap \ell_B \cap \ell_C = \{M\}$ et $\ell(M, r)$ tangent aux cotés

a) \odot un cercle à l'int de ABC qui est :

tangent aux cotés \Rightarrow centre est à distance égale des cotés \Rightarrow centre \in bissectrices
 \Rightarrow centre = I
 $\Rightarrow \odot(I, r)$ cercle en I
 car $r = d(I, (AB))$



b)



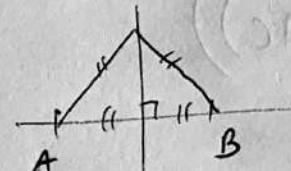
circle inscrit

On démontre que $I_A = I_B = I_C$ sont

c) 3 médiatrices se sont concourantes.

Lemme

$MA = MB \Leftrightarrow M \in$ médiatrice de $[AB]$



soit m_a la médiatrice de $[BC]$

m_b _____ [AC]

m_c _____ [AB]

soit $O = m_a \cap m_b \Rightarrow O \in m_a \Leftrightarrow OB = OC$

$O \in m_b \Leftrightarrow OA = OC$

$\Rightarrow OA = OB \Leftrightarrow O \in m_c$.

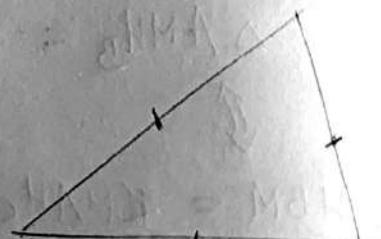
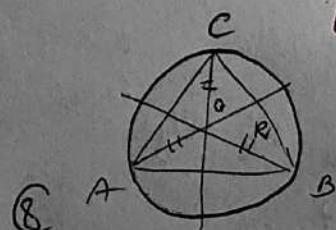
Ainsi m_a, m_b, m_c se coupent en O (uniquement)

point à distance égale de A, B et C.

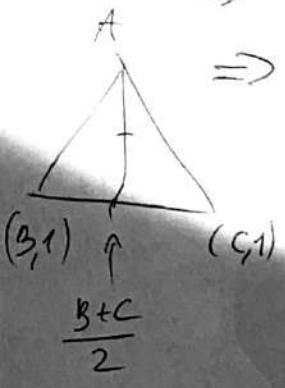
$$R = OA = OB = OC$$

Ainsi $\odot(O, R) \supset A, B, C$

circle circonscrit



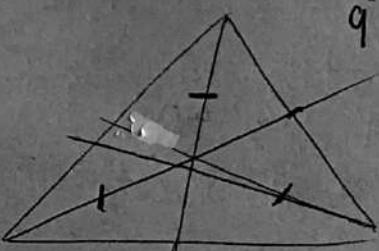
d) Mg 3 médianes et concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle centre de gravité ou barycentre le point d'intersection.



si G barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$
 $\Rightarrow G$ barycentre de $(A, 1)$ et $(\frac{B+C}{2}, B)$
 $\Rightarrow G$ médiane issue de A
 et on plus $AG : GH_A = 2 : 1$.

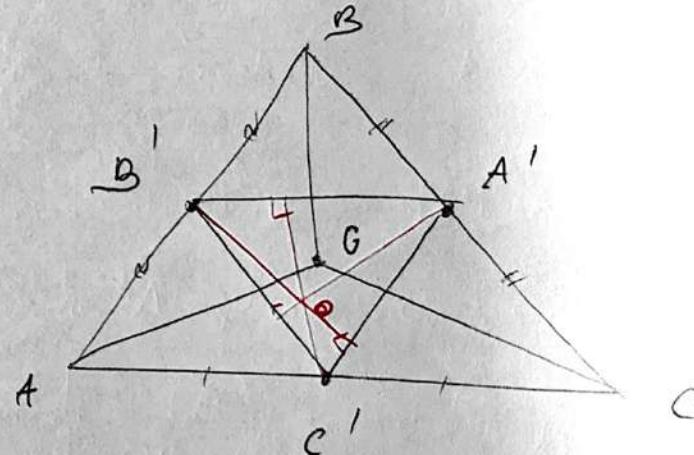
de m¹ p 2 autres médianes.

\Rightarrow les 3 médianes se rencontrent
 qd ils coupent en rapport
 $2 : 1$ du sommet.



bissectrice intérieure (sous l'égalité)
 médiane
 barycentre
 orthocentre
 droite d'Euler

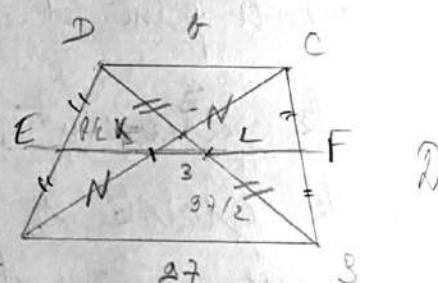
e) Mg 3 hauteurs et concourantes. On appelle orthocentre le point d'intersection.
 f) Mg centre cercle circonscrit, l'orthocentre & le centre de gravité sont alignés.
 droite restante pts : droite d'Euler.



les médiatrices de ABC et les hauteurs $A'B'C'$
 car $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' + m_A$ passant par A'
 \Rightarrow comme $hG, -2(A'B'C') = ABC \Rightarrow$ les hauteurs de $A'B'C'$
 s'envoient sur les hauteurs de $ABC \Rightarrow e) + f)$

Ex 16
FF de Héron ?

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$$A = (B+h) \times 2h$$

$$\frac{1}{2} DA = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} DB$$

→ formt points alignés sur droite

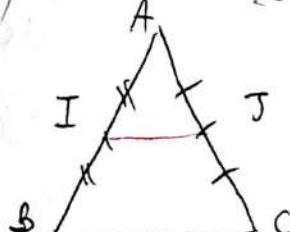
$\textcircled{1} = (KL)$: K est le milieu de $[AC]$
 L est le milieu de $[BD]$.

Mq $D \parallel (AB) \parallel (DC)$ et $D \cap (AD) = E$ milieu de $[AD]$
? $D \cap (BC) = F$ milieu de $[BC]$

→ murs droite milin.

Th des milieux

Si un segment joint les milieux de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3^e côté et sa longueur est égale à la $\frac{1}{2}$ de celle 3^e côté.



(30)

Quadrilatères

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



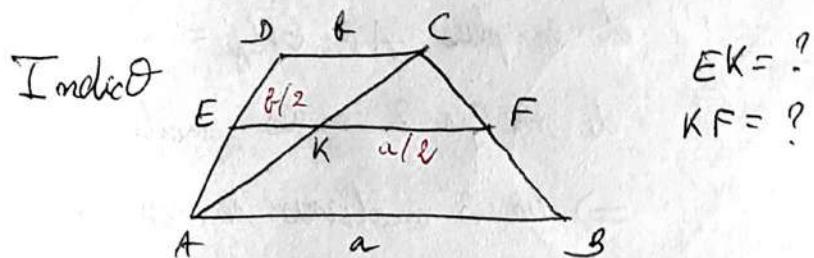
c) trouver longueur KL.

soit E, K, L, F les milieux de l'indication

$| EK \parallel DC \quad (\text{Thales / cinquième / TH des milieux})$
 $| KF \parallel AB \quad \xrightarrow{\Delta SACB} \Delta ACD$

$\Rightarrow EK \parallel KF \quad (\underbrace{KA \parallel KB}_{\text{trapèze}} \quad (EK) = (KF))$
 $(FL) \parallel (DC) \quad \text{dois } \Delta DBC \Rightarrow (FL) \parallel (EKF)$
 $\Rightarrow (FL) = (EKF).$

On sait E, K, L, F alignés sur droite $D \parallel AB \parallel CD$.



Indication

$$EK = ?$$

$$KF = ?$$

D'après Thales / TH des milieux :

$$EK = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} b \quad \text{dois } \Delta DAC$$

$$KF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a \quad \text{dois } \Delta ACB$$

$$EF = \frac{b}{2} + 3 + LF$$

Ainsi $EK = \frac{1}{2}b$, $FL = \frac{1}{2}b$ (dans $\triangle ABC$).

$$KL = KF - FL = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \boxed{\frac{a-b}{2}}$$

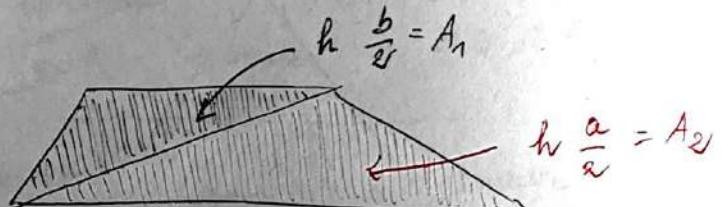
$$EF = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow b = 97 - 2 \times 3 = 91.$$

$$EF = \frac{91+97}{2} = 94.$$

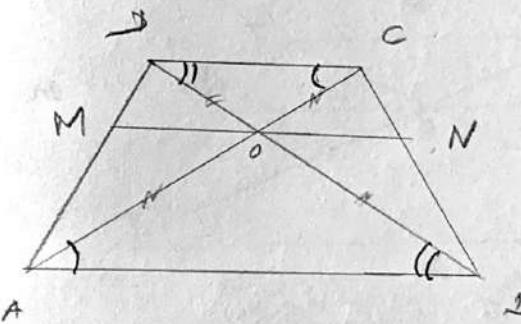


$$\frac{a+b}{2} \quad A = h \left(\frac{a+b}{2} \right)$$



$$A = h \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

Ex 17



1) Montrer que $[MN] \parallel [AB] \parallel [DC]$

$$MO = DC \times \frac{AO}{AC} \quad (\text{Thales dans } \triangle ACD)$$

$$ON = DC \times \frac{BO}{BD}$$

$$\text{Ainsi } MO = ON \Leftrightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{BD}{BO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO+OC}{AO} = \frac{BO+OD}{BD} \Leftrightarrow 1 + \frac{OC}{AO} = 1 + \frac{OD}{BO} \quad \square$$

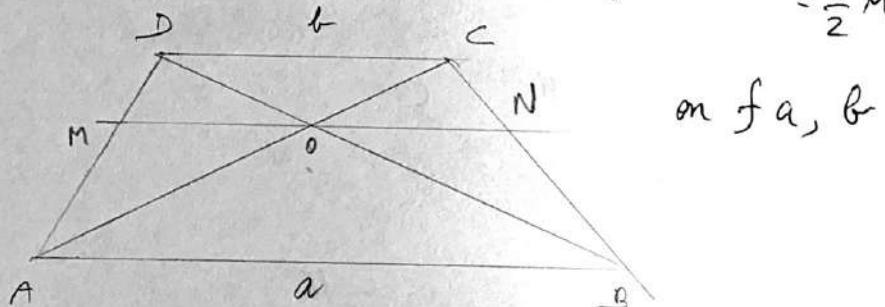
D'après Thalès, on a $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (angle à angle idfg)

$$\text{Rq} \quad (\overline{AB} : \overline{BC}) = (\overline{A'B'} : \overline{B'C'}) \Leftrightarrow (\overline{AB} : \overline{AC}) = (\overline{A'B'} : \overline{A'C'})$$

(31)

$$A \quad B \quad C \quad A' \quad B' \quad C' \quad \Leftrightarrow (\overline{AC} : \overline{BC}) = (\overline{A'C'} : \overline{B'C'})$$

b) Indice: Déterminer longueur $OM = DN$ $\stackrel{= \frac{1}{2} MN}{\text{et}}$ c) somme max? $d(O, (AD)) + d(O, (CB))$



$$OM = b \cdot \frac{AO}{AC} \quad \text{et comme } \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$$

par Thalès ou $\triangle OAB \sim \triangle OCD$.

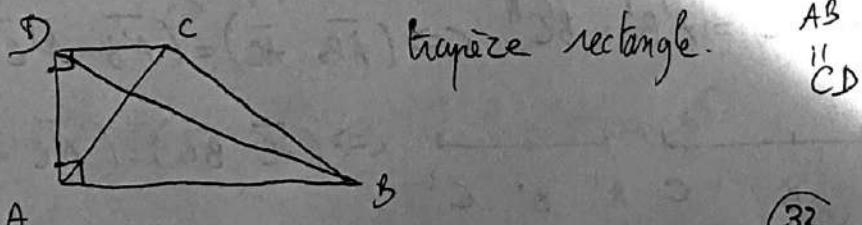
$$OM = b \cdot \frac{\frac{1}{AC}}{\frac{AO}{AC}} = b \cdot \frac{1}{\frac{AO+OC}{AO}} = b \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\rightarrow HN = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leftarrow \text{produit des bases}$$

\leftarrow segment des milieux

(q8) $d(O, (AD))$?
max

$$d(O, (AD)) \leq OM = \frac{ab}{a+b} \quad \text{si } OM \perp (AD)$$

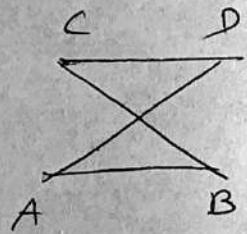


trapèze rectangle.

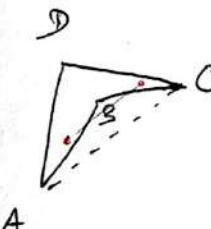
$$\begin{matrix} AB \\ \parallel \\ CD \end{matrix}$$

Ex 19 (Parallélogrammes)

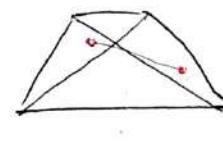
a) | quadrilatère ABCD est convexe



croisé



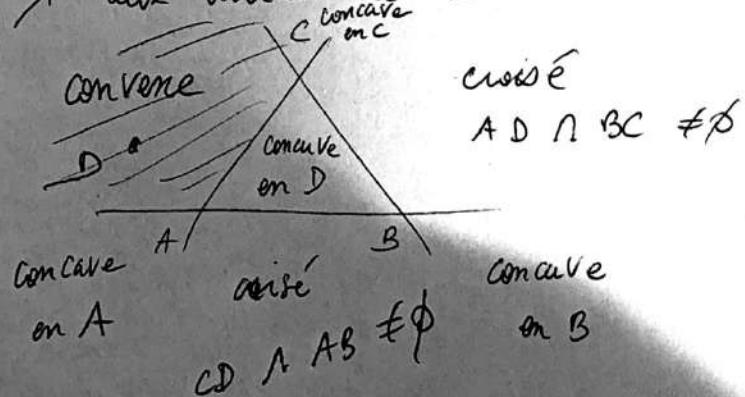
A non convexe
("concave en B")



convexe

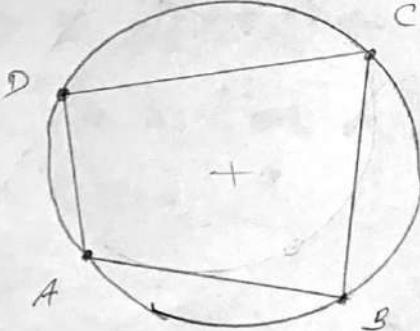
cet type de quadril. en f joint de D

✓ aux droites des côtés de ABC.



n D dans // : DB ∩ CA = ∅

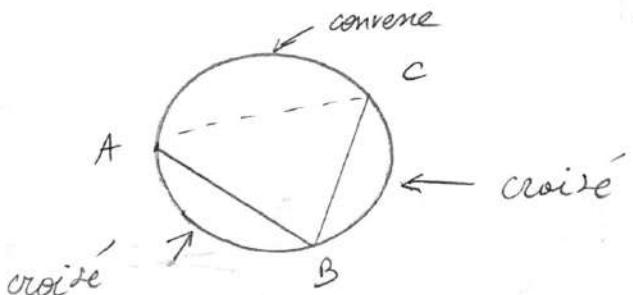
Ex 20



soit $ABCD$ un quadri non croisé,

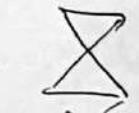
Ceci termine la qd car si $ABCD$ non croisé, non concave \Rightarrow convexe \Leftrightarrow diag se coupent.

Observation



a) Mg si $ABCD$ est inscrit du cercle $\Rightarrow ABCD$ est convexe.
(et ses diag. se coupent en un point)

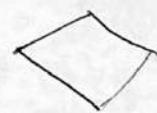
⇒ 3 types quad.



croisé
↑
exclus d'après
l'énoncé



↑
ne pt pas
être inscrit



convexe \Leftrightarrow diag se croisent.

car le cercle circinscrit d'un triangle n'a pas de point à l'intérieur du triangle.

de le 4^e point ne pt pas être à l'int du triangle & sur le cercle en m^{me} fns.



b) Mg ASSC.

- (i) $ABCD$ inscrit du cercle
- (ii) $ABCD$ convexe $\& \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 2\pi$ (hyp)

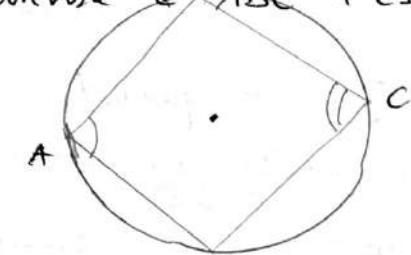
Mg (i) \Rightarrow (ii)

$$\angle A = \frac{1}{2} \widehat{BCD}$$

$$\angle C = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD})$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$



Mg (ii) \Rightarrow (i)

(ii) \Rightarrow (i)

$n \cdot D \notin \ell(A, B, C) \leftarrow$ corde à part par
 $A, B, C.$

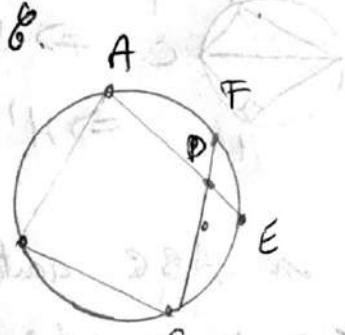
1^e cas : D à l'int. de ℓ .

$$\angle B + \angle D =$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{CEA}$$

$$+ \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{EF}).$$

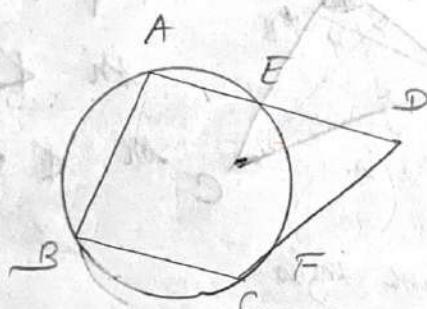
$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\widehat{CEA} + \widehat{ABC}}_{2\pi} \right) + \frac{1}{2} \widehat{EF} > \pi$$



autre de corde.

augmentant qu'

2° cas



$\angle B + \angle D$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{CEA}) + \frac{1}{2} (\widehat{ABC} - \widehat{EF})$$

$$= \pi - \frac{1}{2} \widehat{EF} < \pi$$

① $\angle D \in \ell$
 $\Leftrightarrow \angle B + \angle D = \pi$
 $(\Leftrightarrow \angle)$

(ii) \Rightarrow (iii)

(iii) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et

$$AS \times SC = BS \times SD$$



On pt le refaire mais aussi voir avec la puissance d'un point par rapport à un cercle.

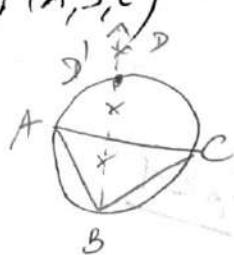
$\Rightarrow AS \cdot SC$ ne dépend pas du choix de la corde $[AC]$. $\Rightarrow S$.

non i) \Rightarrow non (iii) $n \cdot D \notin \ell(A, B, C)$

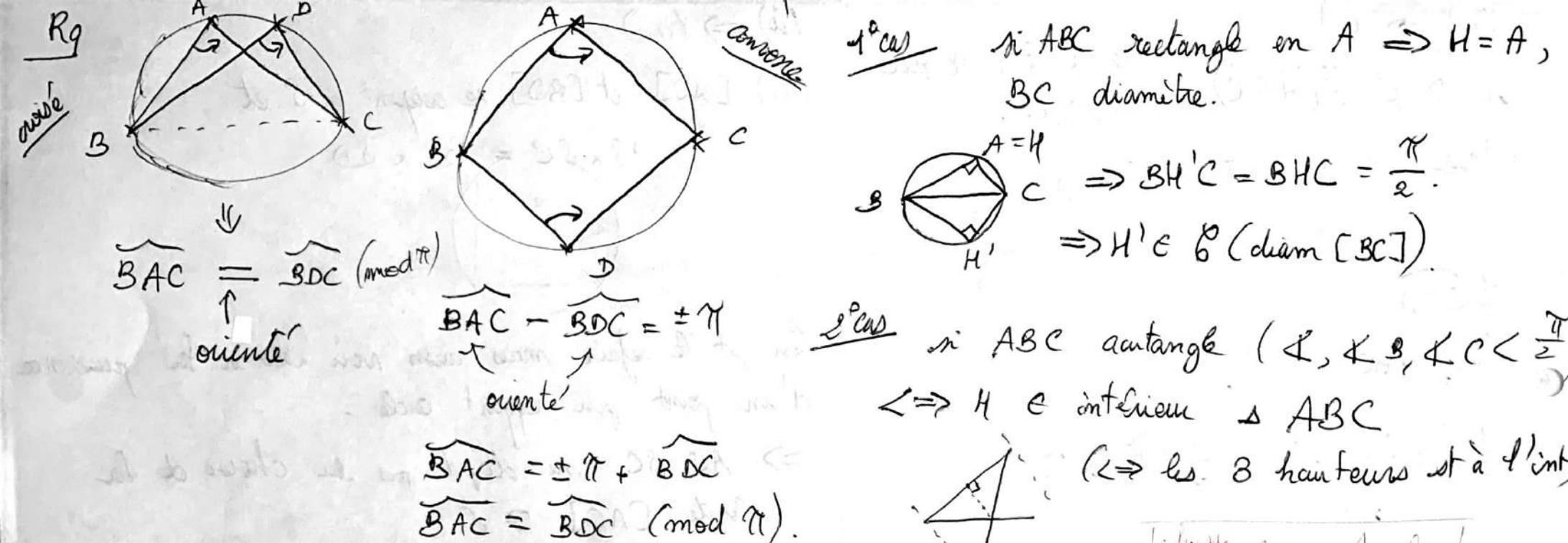
suit $D' \in [SD] \cap \ell$

$$\Rightarrow AS \cdot SC = BS \cdot SD'$$

$$\Rightarrow SD \neq SD' \Rightarrow \frac{AS \cdot SC}{BS}$$

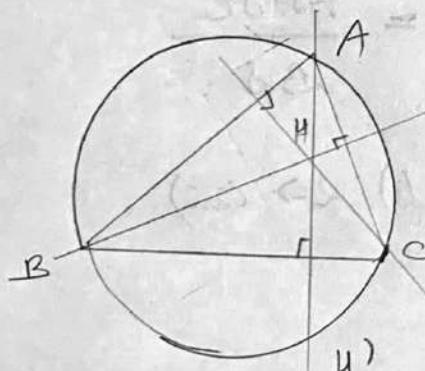


Alors i) \Rightarrow (iii).

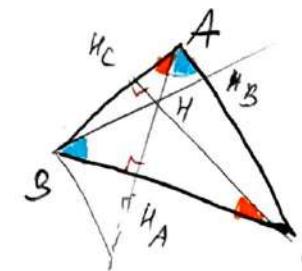


→ si 4 pts cycliqs.
on perd 2 pts

Ex 21



→ m° cat' (ex g x)
somme ut π , ex g x (mod π)



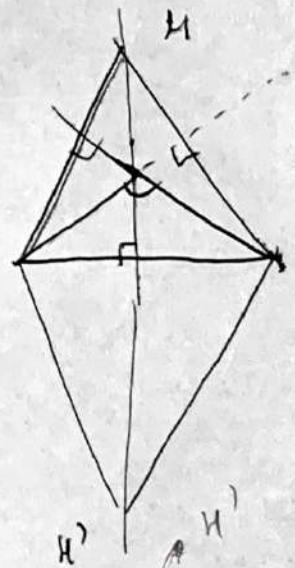
charac aux angles.

Mq $ABH'C$ st cocycliqs
si $\angle AHB + \angle ACH' = \pi$
m° $\angle BAC + \angle BH'C = \pi$

$\angle BHC$

$$\begin{aligned}
 & \widehat{BAH} + \widehat{HAC} + \widehat{BH'C} + \widehat{H'AC} \\
 & \widehat{H'CH_A} \quad \widehat{H'BH_A} \quad \text{et } \pi/2 \\
 & \text{de } \triangle HH_A C \sim \triangle H' H_A C \quad \pi/2 + \pi/2 = \pi
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{3^{\circ} \text{ cas}}{\angle A > \frac{\pi}{2}}$$



identique au cas 2)
H et A échangés.



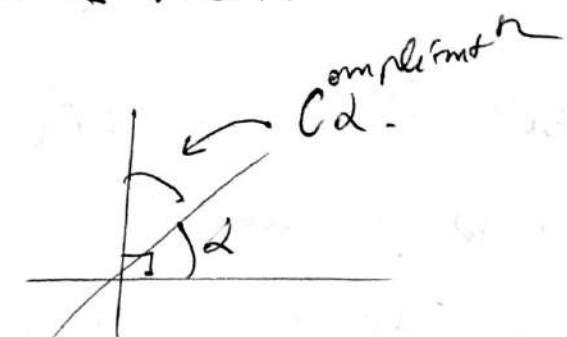
$$H' \in \mathcal{P}(B, C, A)$$

$$\sin \angle BAC = \sin \angle BH'C \quad \leftarrow \text{sym}$$

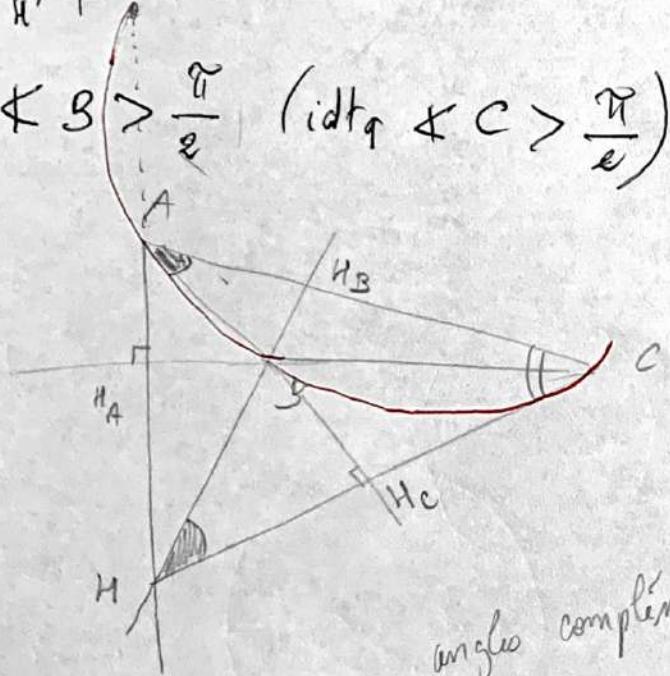
$$\angle BH'C$$

complémentaire à $\angle ACH$.

$$\angle C = \text{somme } \frac{\pi}{2}$$



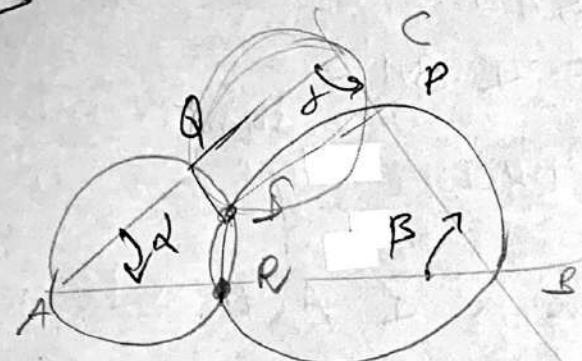
$$\stackrel{4^{\circ} \text{ cas}}{\angle B > \frac{\pi}{2}} \quad (\text{idem } \angle C > \frac{\pi}{2})$$



angles complémentaires.

$$\stackrel{5^{\circ} \text{ cas}}{\angle B = \frac{\pi}{2} \text{ (resp } C\text{)}} \Rightarrow H = B = H' \in \mathcal{P}(A, B, C)$$

Ep 22



soit $\mathcal{E}(A, R, Q) \cap \mathcal{E}(B, R, P) = \{R, SB\}$
angles orientés (non tangent)

$$\angle QAR = \angle QSR \quad (\text{R})$$

$$+\triangle RBP = \triangle RSP \quad (7)$$

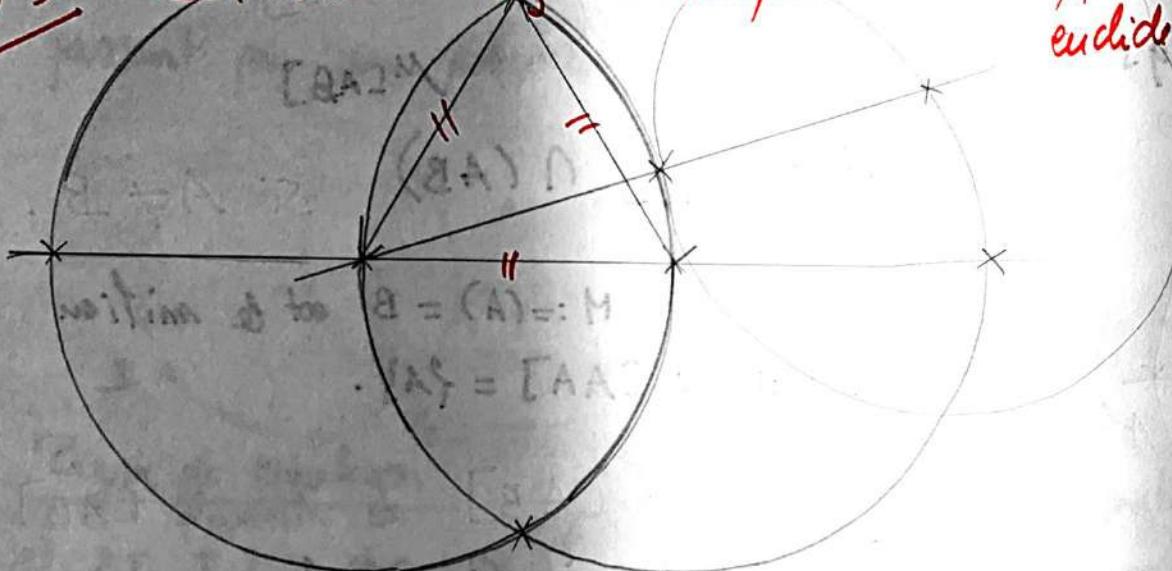
$$\Delta QCP = \Delta QSP (\%)$$

$\Rightarrow Q, C, S, P$ cocyclics

as on scales of tangents.

TD 5

[M] Construis rigs & compas.



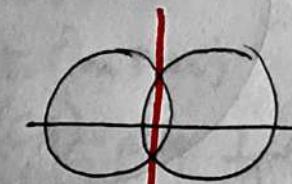
- "analyse"
- "prgm de conotica"
- "justif prgm conotico"

' App
eudidio

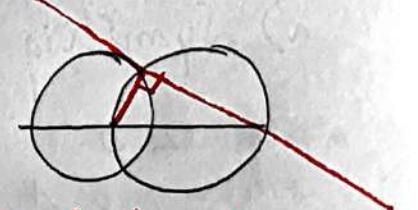
→ bsp points ex const
triangle équil



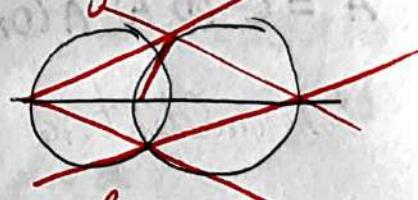
losange



médiation



rectangle
tangente



losange

Ex 1 (Construire classiques).

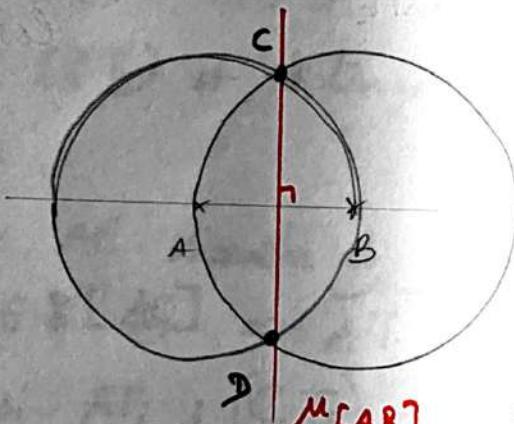
Décrire plusieurs constructions classiques :

a) Symétrique point A

- cercle Ω de centre O
- cercle passe par A
-

$$A' = \mathcal{C}(O, A) \cap (\Omega)$$

b) médiatrice $[AB]$



$$C, D := \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(B, A)$$

(CD) est médiatrice $[AB]$

2 cercles
mêmes rayons
⇒ sont constructibles
⇒ $AB = AC$
⇒ $BA = BC$
 $\Rightarrow CA = CB = AB$
donc C est pt médiant
D est pt médiant

c) milieu segment $[AB]$

et b), construire $M_{[AB]}$

$$M := M_{[AB]} \cap (AB) \quad \text{Si } A \neq B.$$

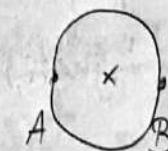
Si $A = B$, $M := (A) = B$ est le milieu de $[AB] = [AA] = \{A\}$.

d) cercle $C([AB])$ de diamètre $[AB]$

↪ besoin du milieu soit M milieu de $[AB]$

$$\mathcal{C}(M, A) = \mathcal{C}[AB]$$

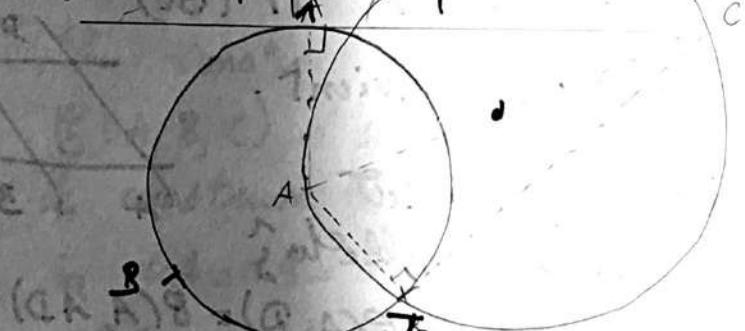
est le cercle de diamètre $[AB]$



ne pas confondre $\mathcal{C}(A, B)$ et $\mathcal{C}[AB]$

\uparrow autre point $\in \mathcal{C}$ \uparrow diamètre

e) les tangentes au cercle $\mathcal{C}(A, B)$
passant par un point ext C .



Program de construction:

$$1) \{T_1, T_2\} = \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(AC)$$

(CT_1) (CT_2) et 2 tangentes recherchées.

Justif :

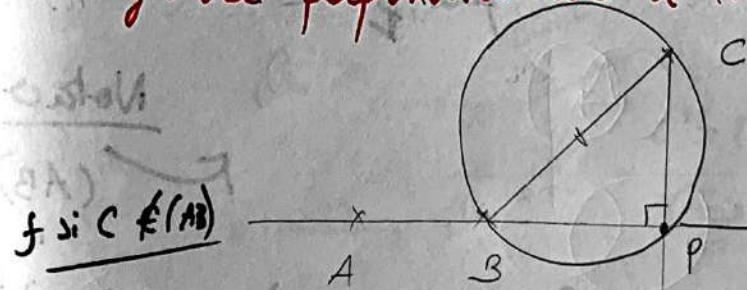
comme AC diamètre du $\mathcal{C}(AC)$ &

$$\circ T_i \in \mathcal{C}(AC) \Rightarrow \widehat{AT_i C} = \frac{\pi}{2}, i=1,2$$

○ Ainsi $AT_i \perp CT_i \Rightarrow (CT_i)$ est
tangente $\mathcal{C}(A, T_i) = \mathcal{C}(A, B)$

car $T_i \in \mathcal{C}(A, B)$.

f) La perpendiculaire à (AB) passe par C .



f si $C \notin (AB)$

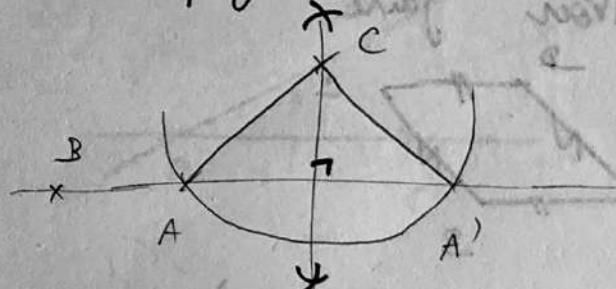
$$\frac{M1}{(P, A)} := \mathcal{C}(CA) \cap (AB)$$

(CP) convient. (car $P \neq C$)

$$\frac{Pb}{\text{pratiq si } (CA) \text{ prøg } \perp (AB)}$$

do ce cas préférable sur B à la place de A .

M2



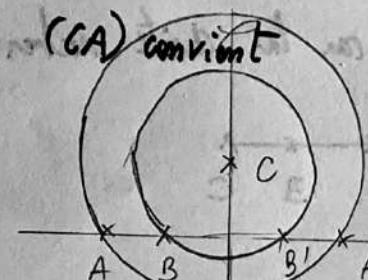
+ + jrs

Notac

$$(AB)_{\exists C}^{\perp} = (AB)^{\perp}$$

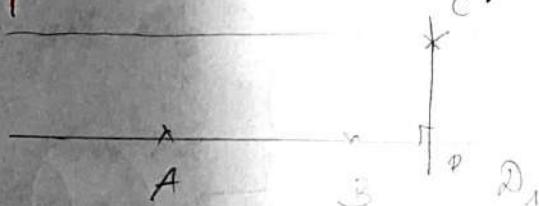
est la droite \perp
 $\perp (AB)$ passant
par C .

sinon (CA) convient



$$\perp \mu_{AA'} = \mu_{BB'}$$

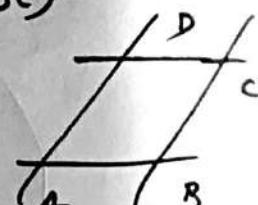
g) La parallèle à (AB) passant par C .



D_1

Notation
 $\overline{(AB)} \parallel_{\exists C}$

1) $D = (AB) \parallel^C \cap (BC) \parallel^A$
 $\mathcal{B}(A, D)$ convient.



1) $D_1 := (AB) \perp_{\exists C}$ (construction du j).

$(AB) \parallel^C$

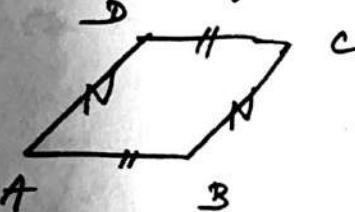
justif B constaté
 $ABCD$ parallélogramme

$$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \mathcal{B}(A, D) = \mathcal{B}(A, AD) - \mathcal{B}(A, BC)$$

2) $D_2 = D_1 \perp_{\exists C}$ convient

Rq: Qd on va pouvoir construire $\mathcal{B}(A, BC)$

on va pouvoir faire

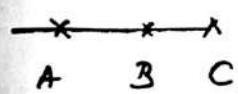


$D = \mathcal{B}(A, BC) \cap \mathcal{B}(C, AB) \Rightarrow (D)$ convient.

\hookrightarrow si $C \notin (AB)$

sinon rien à faire on la chose recherchée

est (AB)

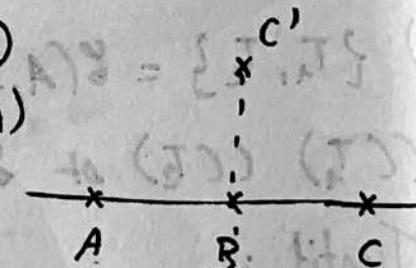


\rightarrow si $C \in (AB)$

si $C = B \Rightarrow \mathcal{B}(A, A)$

si $C \neq B$

1) $(AB) \perp^B \cap \mathcal{B}(B, C) = \{C\}$



ainsi $BC = BC'$ et $C' \notin (AB)$

on applique construction précédente à C' à la place de C .

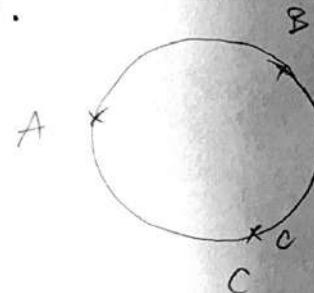
(i) construire $\mathcal{C}(A, B, C)$ qui passe par P'
3 points alignés A, B, C .

Pré construire

$\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit
de construire le centre O

$$\text{tg } OA = OB = OC$$

$$\mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B) = \mathcal{C}(O, C) = \mathcal{C}(A, B, C)$$



j) bissectrice angle \widehat{BAC} \rightarrow (losange)

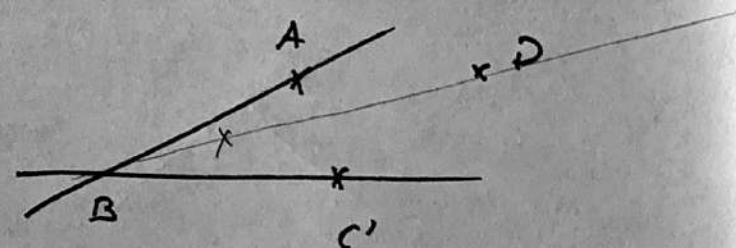
$$c' = (BC) \cap \mathcal{C}(B, A)$$

$$(\Rightarrow BC' = BA).$$

$\xrightarrow{\text{M.I}}$ $\mu[\overline{AC}']$ convient

$\xrightarrow{\text{M.II}}$ $D = \mathcal{C}(C', B) \cap \mathcal{C}(A, B) = D$

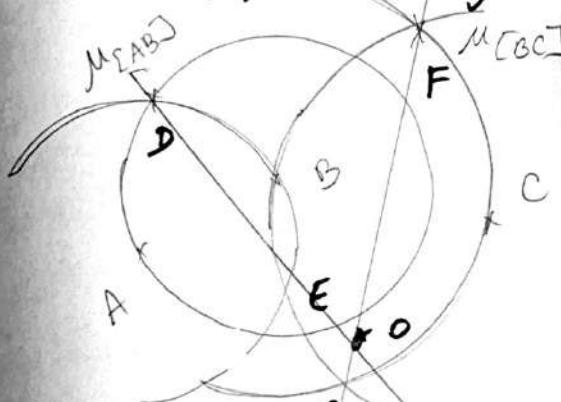
(BD) convient



$$1) \mu[\overline{AB}] \wedge \mu[\overline{BC}] = : \{D\}$$

(un point sur A, B, C non alignés)

c.q.f.d



$$1) \{D, E\} := \mathcal{C}(A, B) \wedge \mathcal{C}(B, A)$$

$$2) \{F, G\} := \mathcal{C}(B, C) \wedge \mathcal{C}(C, B)$$

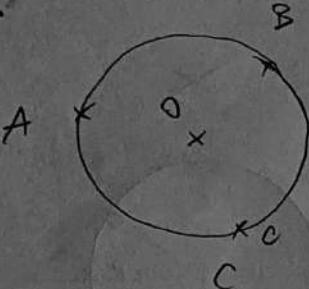
$$3) O = (DE) \wedge (FG)$$

$$4) \mathcal{C}(O, A) \text{ convient}$$

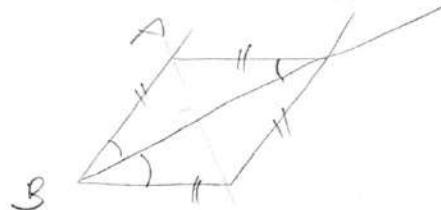
(i) cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$ q' passant p
3 p5 align A, B, C .

Pn construire
 $\mathcal{C}(A, B, C)$ il suffit
de construire le centre O
tq $OA = OB = OC$

$$\mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B) = \mathcal{C}(O, C) = \mathcal{C}(A, B, C)$$



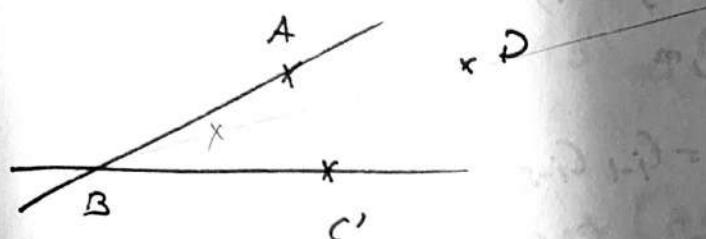
j) bissectrice angle \widehat{BAC} \rightarrow (losange)



$$c' = (BC) \cap \mathcal{C}(B, A) \\ (\Rightarrow BC' = BA).$$

M I] $\mu_{[AC']}$ convient

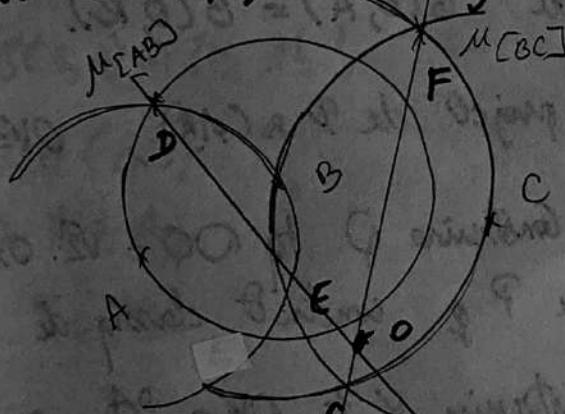
M II] $D = \mathcal{C}(C', B) \cap \mathcal{C}(A, B) = D$
(BD) convient



1) $\mu_{[AB]} \wedge \mu_{[BC]} = : \{D\}$

(un point sur A, B, C non alignés)

c.g.f.d



1) $\{D, E\} := \mathcal{C}(A, B) \wedge \mathcal{C}(B, A)$

2) $\{F, G\} := \mathcal{C}(B, C) \wedge \mathcal{C}(C, B)$

3) $O = (DE) \wedge (FG)$

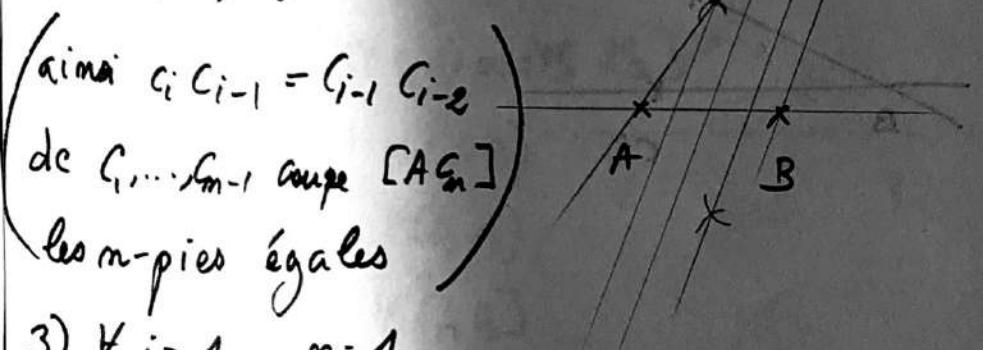
4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

ii) Le partage d'un segment $[AB]$
en m segments de m^{me} long^e.
(Thalès)

si $\exists C$ non aligné à $A \& B$.
on peut l'ajouter,

$$\text{soit } \{C, *\} = \mathcal{E}(A, B) \wedge \mathcal{E}(B, A)$$

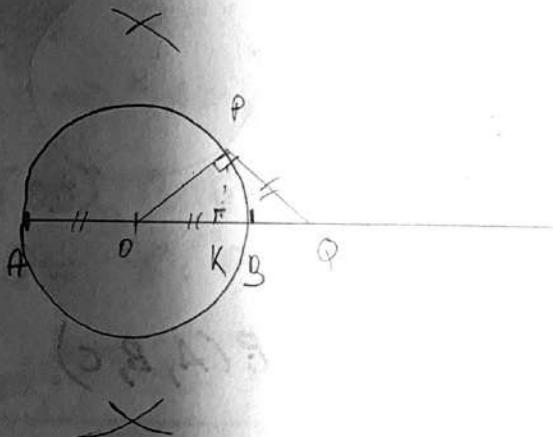
- 1) $C_1 = C, C_0 = A$
- 2) $C_i = \mathcal{G}(C_{i-1}, C_{i-2}) \cap (AC)$
 $i = 2, \dots, m$



- 3) $\forall i = 1, \dots, m-1$
 $Q_i = (BC_m)'' C_i$

$\textcircled{1} \rightarrow$ au milieu (médiane)
 \rightarrow si $i = m-1$ (milieu du milieu)

Ex 8 A, B donnés, $C(0, [AB])$. construire $P \in \mathcal{E}$
et $Q \in [AB]$ tq (PQ) tangent à C
& $\angle PQB = AB$.

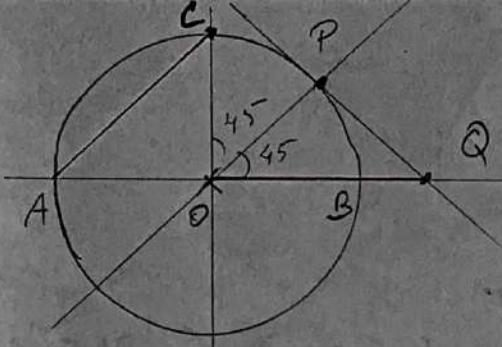


Analyse : comme $OQP \overset{\text{PTT}}{\not\sim} \Rightarrow OQ = \sqrt{2}. OP = \sqrt{2}. R$
où $\mathcal{E}(O, A) = \mathcal{E}(O, R)$.

K proj θ de P sur (AB) , $OK = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Strat 1 : construire Q tq $OQ = \sqrt{2}. OA$
puis construire P & construire classiq de tangente

Strat 2 : construire K tq $OK = \frac{OA}{\sqrt{2}}$ puis soit Q
 $Q = \mathcal{B}(K, 0) \wedge AB$.
 $P = (AB)^{\perp K} \cap \mathcal{E}$.



bissectrice de \angle cor.

- 4) $D \in \mathcal{C}(C, O) \cap \mathcal{C}(B, O)$
 $(\Rightarrow CO = CD = OB = BD \Rightarrow \text{losange } OBCD$
 $\Rightarrow OD \text{ bissectrice})$

- 5) $(OD) \cap \mathcal{C}(O, A) = P$

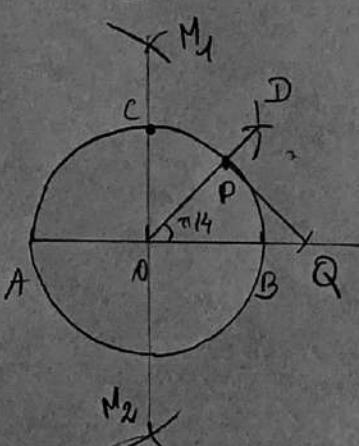
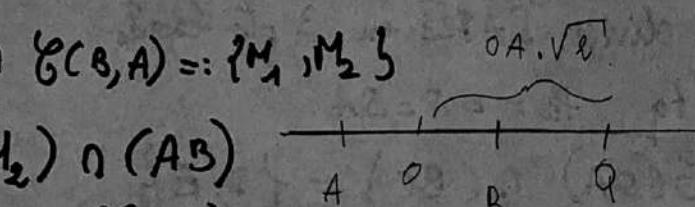
- 6) $Q = \mathcal{C}(P, O) \cap (AB)$

Justif' du psm 1

- 1) Par const r. $AM_1 = BM_1 = AB \Rightarrow (M_1 M_2)$ médiatrice de $[AB]$
 $AM_2 = BM_2 = AB$

- 2) aussi O milieu de $[AB]$ car $\angle [AB] = \angle [M_1 M_2]$ la médiatrice
- 3) $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$ car $\angle (OC) = \angle (M_1 M_2)$ la médiatrice
 $OC = OB$ car $C \in \mathcal{C}(O, A) = \mathcal{C}(O, B)$

- 4) $D \in \mathcal{C}(C, O) \Rightarrow CO = CD$
 $D \in \mathcal{C}(B, O) \Rightarrow BO = BD \Rightarrow CD = CO = BO$, 3)
 $\Rightarrow OBCD$ losange
 $\Rightarrow OD$ bissectrice de $\angle COB$
 $\Rightarrow \angle DOB = \frac{\pi}{4}$



$$5) OP = OA = OB \quad \text{et} \quad POB = \pi/4$$

$$6) Q \in \mathcal{E}(P, O) \Rightarrow PO = PQ \Rightarrow \angle DQP \text{ is right}$$

$$\Rightarrow \angle OQP = \angle QOP = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \angle OQP = \frac{\pi}{2} \Rightarrow PQ \text{ tangent to } \mathcal{E}(O, B)$$

$$\cdot PQ = PO = \frac{1}{2} AB$$

Programme 1

$$1) K, R - \mathcal{E}(B, C) \cap \mathcal{E}(C, B) \quad (\Rightarrow PBC \text{ équilatéral})$$

$$2) (PB)^{\perp A} \cap (BC) = D \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à un & seul} \\ \text{centre de} \\ \mathcal{D}^{\perp A} \end{array} \right.$$

Programme 2 : on construit Q t.q. $OQ = AC$
puis P (directement ou \mathcal{C} de V).

Programme 3 : on construit K t.q. $OK = \frac{1}{2} AC$
puis P & Q .

Programme 1

$$1) (BC) \perp A \cap (BC) = P$$

$$2) \text{divise } [AP] \text{ en 3 pts égaux}$$

$$\text{tq } PO = OS = SA$$

$$3) \mathcal{E}(OA) \cap (BC) = \{D, E\}$$

Ex 3 :

soit A, B, C non alignés.

Construire D & E sur (BC)

tq ΔADE équilatéral.

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$



46

TD5

g TD4. em 4.

Rt₁:

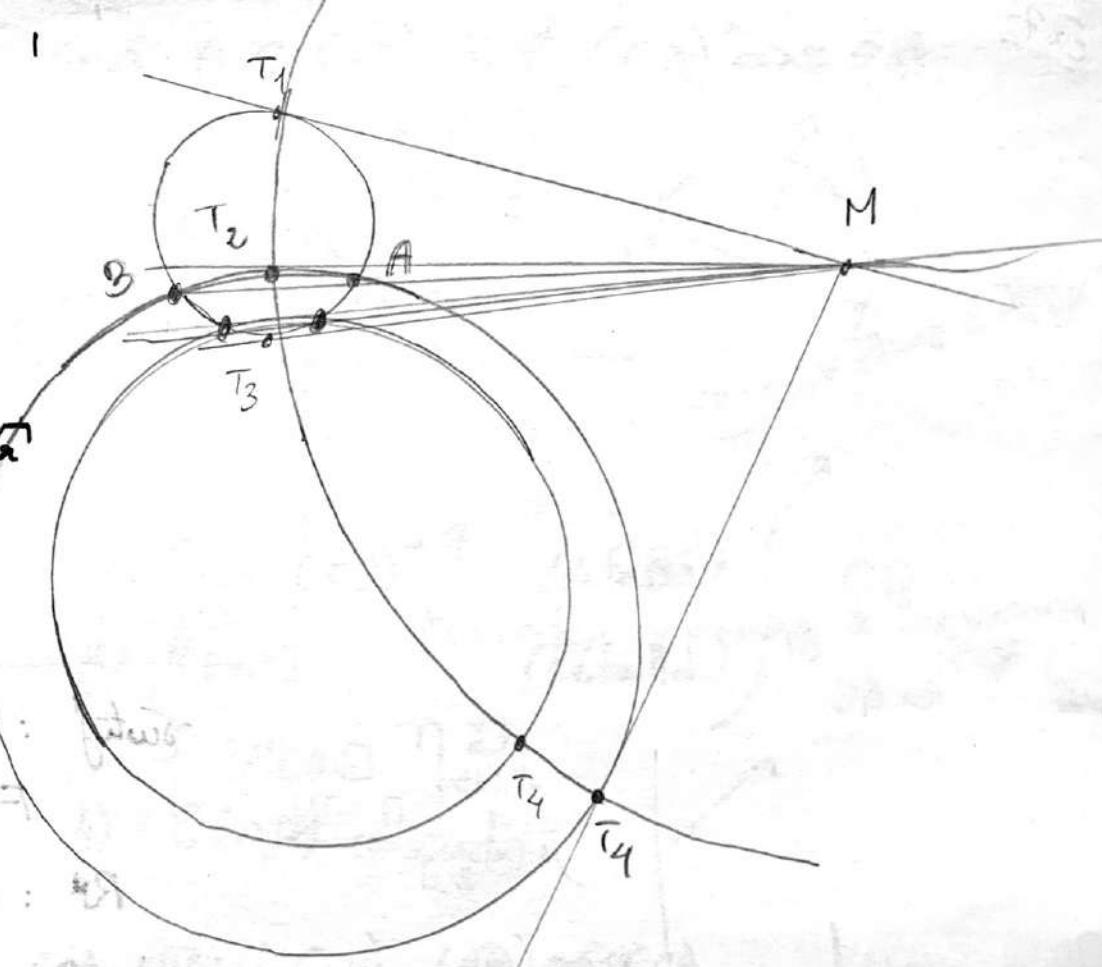
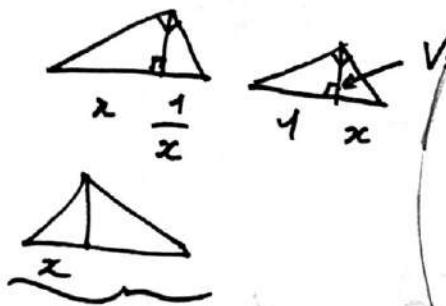
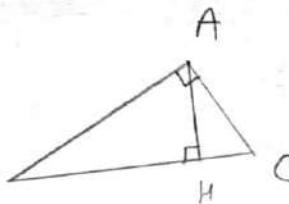
ABC rectangle $\angle A$

AH \perp BC

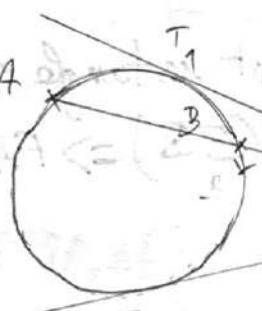
$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$\bullet AC^2 = CH \cdot CB$$



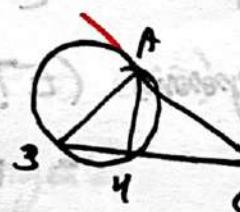
Rt₂:



$$\bullet MB \cdot MA = MT_1^2 = MT_2^2$$

Piase M \neq G

$P_G(M)$

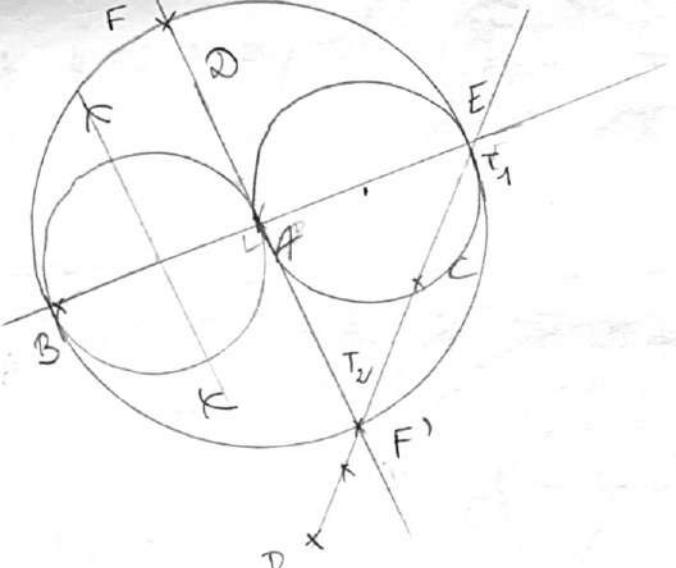


$$CA^2 = CH \cdot CB$$

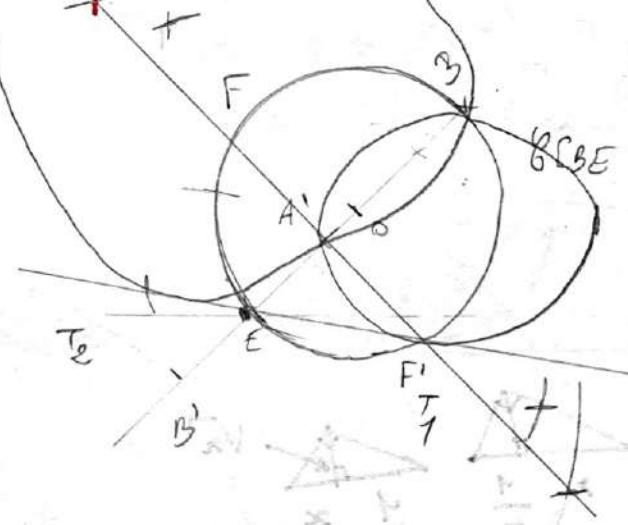
$$MT_1^2 = MA \cdot MB$$

$$MT_2^2 = MA \cdot MB$$

①



perpendiculaire \rightarrow symétrique \rightarrow centre \rightarrow médiane



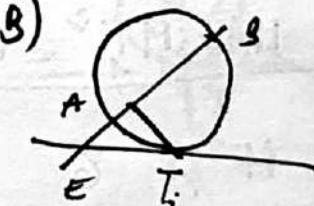
$$ET_1^2 = EA \cdot EB$$

Justif : P construit $\triangle EFB$ est rectangle en F car
 $F \in \delta[EB]$ & $(FA) \perp (EB) \Rightarrow FA$ tangent.

$$R^* : FE^2 = EA \cdot EB$$

$$\text{D'après (iv)} ET_1 = ET_2 = EF \rightarrow ET_i^2 = EA \cdot EB$$

Supposons $(ET_i) \cap \delta(A, I, B) = \{T_i, T'_i\}$



$$\Rightarrow \mathcal{P}_g(E) = EA \cdot EB$$

$$ET_1 \cdot ET'_1 \Rightarrow ET'_1 = ET_1 \Rightarrow T_i = T'_i \Rightarrow \text{cqfd } (ET_i) \text{ tangent g}$$

② $de \hat{=} ET_2$

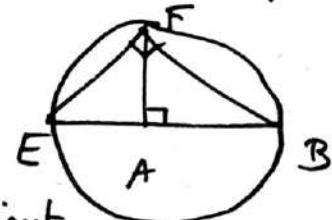
L'analyse q ms manquant



1) Pour construire le cercle cherché, il suffit de trouver centre de T.

2) $ET^2 = EA \cdot EB \Rightarrow$ il suffit de construire un pt (E)

$$\text{tq } EF^2 = EA \cdot EB$$

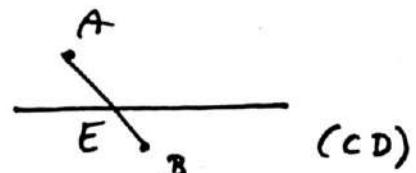


3) $\mathcal{E}[EB] \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

4) Autres PDC où tel cercle \exists .

• Si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A, E[$
idtg cosa)

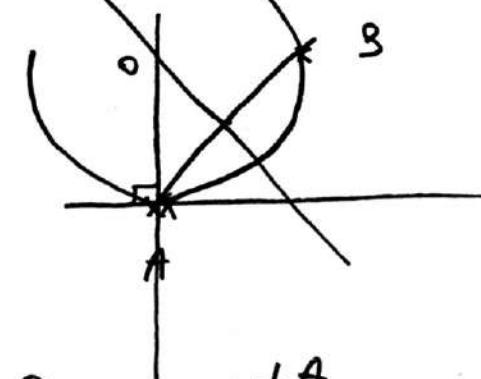
• Si $E \notin]A, B[$
un tel cercle n'existe pas



\rightarrow si $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow$ point int à $\mathcal{E} \Rightarrow (CD)$ coupe \mathcal{E} \Rightarrow ne pt pas être tangente

\rightarrow si $A, B \in (CD) \Rightarrow \exists$

• Si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$
(de m^e de A et B)



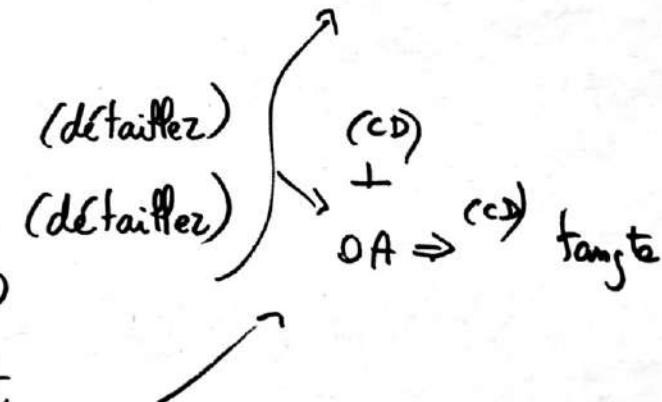
$$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{E}(O, A)$$

$$1) D := (CD)^{\perp A}$$

$$2) \mu[AB]$$

$$3) O := \mu[AB] \cap D$$

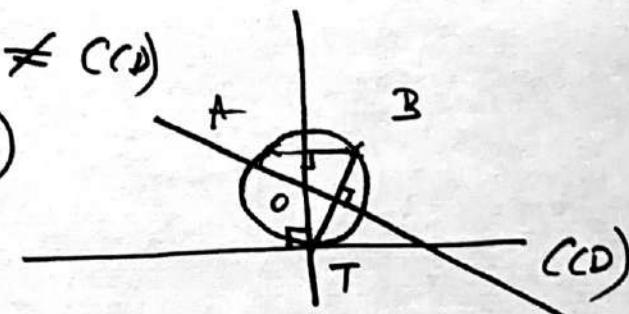
4) $\mathcal{E}(O, A)$ convient



• Si $(AB) \parallel (CD)$ ($AB \neq CD$)

$$1) T := \mu[AB] \cap (CD)$$

2) $\mathcal{E}(A, B, T)$ convient



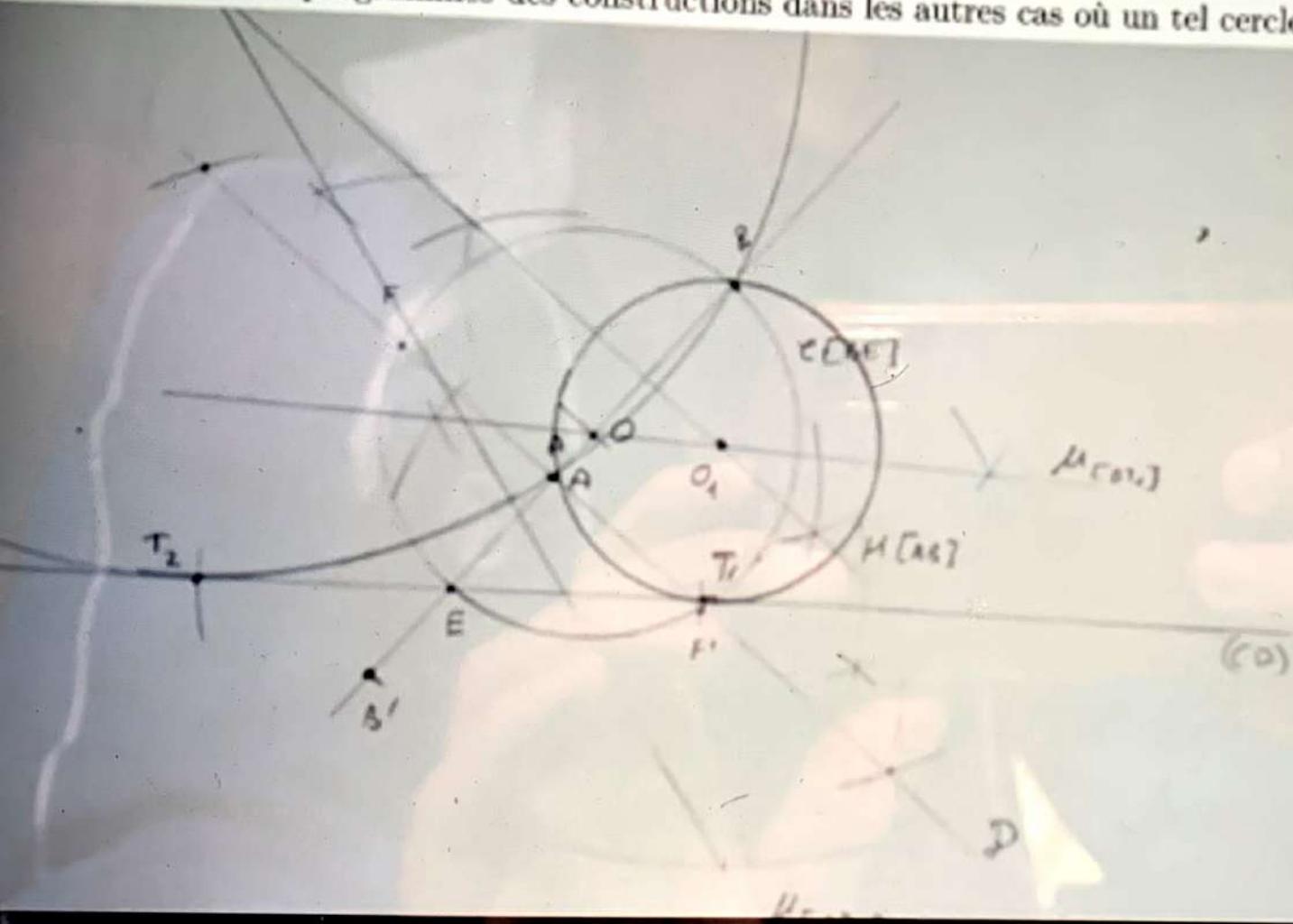
C passe par A & B (PC).

Pk T tang+ à (CD) en T.

$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{E} \Rightarrow T$ tangent à \mathcal{E} .

- (iii) $\{T, F\} = D \cap C[EB];$
- (iv) $\{T_1, T_2\} = C(E, F) \cap (CD);$
- (v) Les deux cercles qui passent par A, B et T_i , $i = 1, 2$, conviennent.

b) Donner les programmes des constructions dans les autres cas où un tel cercle existe.

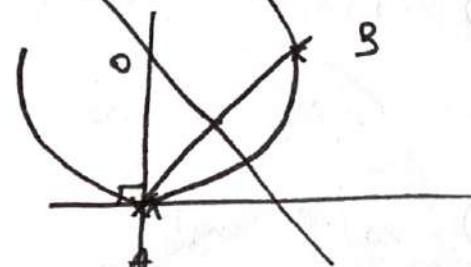


Oui

L'analyse q ms manquait



- Si $A \in (CD)$, $B \notin (CD) \Rightarrow E = A$
(de m^o de A et B)

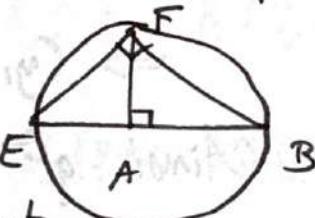


$$OA = OB \Rightarrow B \in \mathcal{C}(O, A)$$

1) Pour construire le cercle cherché, il suffit de trouver point de T.

2) $ET^2 = EA \cdot EB \Rightarrow$ il suffit de construire au pt (E)

$$\text{tq } EF^2 = EA \cdot EB$$

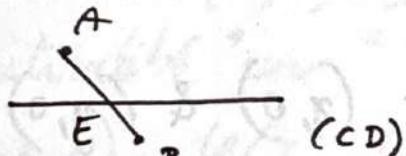


• 3) $\mathcal{C}(EB) \cap (EB)^{\perp A} = F$ convient

Q) Autres PDC où tel cercle F.

• Si $(AB) \cap (CD) = E$, $B \in]A, E[$
idtg cosa)

• Si $E \notin]A, B[$,
un tel cercle n' \exists



\rightarrow si $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow$ E point int à $\mathcal{C} \Rightarrow (CD)$ coupe \mathcal{C} \Rightarrow ne pt pas être tangente

\rightarrow si $A, B \in (CD) \Rightarrow \exists$

$$1) \mathcal{D} := (CD)^{\perp A} \quad (\text{détaillez})$$

$$2) \mu_{[AB]}$$

(détaillez)

$$3) O := \mu_{[AB]} \cap \mathcal{D}$$

4) $\mathcal{C}(O, A)$ convient

(CD)

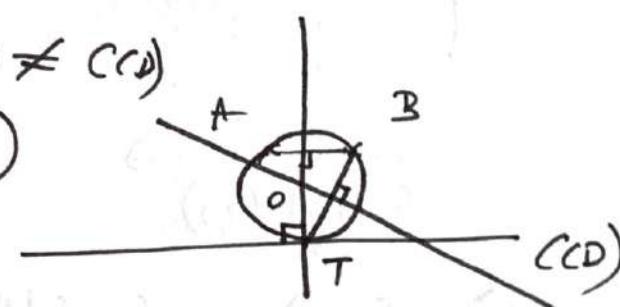
\perp

$OA \Rightarrow (CD)$ tangente

• Si $(AB) \parallel (CD)$ $(AB) \neq (CD)$

$$1) T := \mu_{[AB]} \cap (CD)$$

2) $\mathcal{C}(A, B, T)$ convient



\mathcal{C} passe par A & B PC .

Pk T tang+ à (CD) en T.

$[OT] \perp (CD)$; $T \in \mathcal{C} \Rightarrow T$ tangent à \mathcal{C} .

Ex 13 (Nombres constructibles)

→ PC $O = (0,0)$, $I = (1,0)$

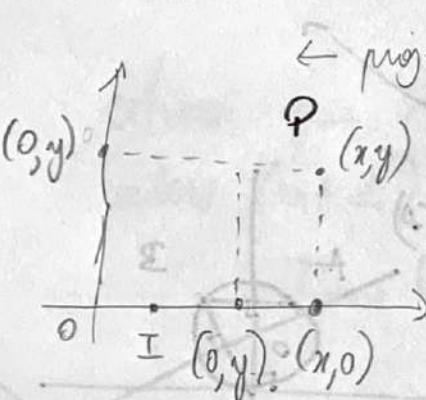
→ x const. si $(x,0)$ const.

a) Moq (x,y) est const

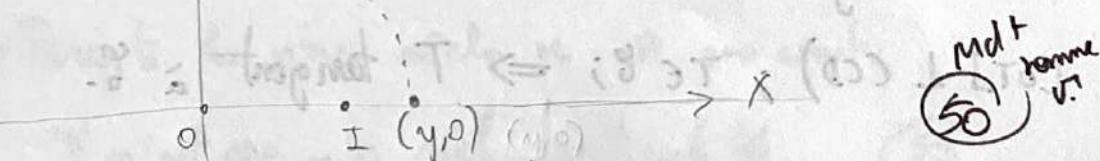
$\Leftrightarrow x$ & y st const.

x const : $(x,0)$ const

y const : $(y,0)$ const



L) $(0,y)$ constructible ssi $(y,0)$ constructible.



Accepter
construction
clés q.

$$1) Y = (0I)^{\perp 0}, X = (0I)$$

2) si $(y,0)$ constructible

$$(0,y) = \delta(O, (y,0)) \cap Y$$

\Rightarrow constructible, si $(0,y)$ constructible

$$\Rightarrow (y,0) = \delta(O, (0,y)) \cap X$$
 constructible

Ainsi qd a) devient

(x,y) constructible si $(x,0)$ & $(0,y)$ constructibles.

L) Les axes X & Y st constructibles.

si $(x,0)$ & $(y,0)$ constructibles

$$P = (0I)^{\perp (x,0)} \cap Y^{\perp (0,y)}$$

& $P(x,y)$ constructible

$$Q = Y^{\perp (x,y)} \cap X \Rightarrow Q(x,0)$$
 est constructible

$$R = X^{\perp (x,y)} \cap Y \Rightarrow R(0,y)$$
 est constructible.

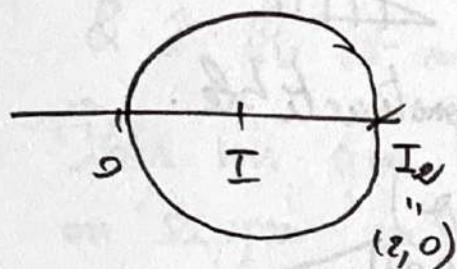
Mdt
remarque
v.t.
50

f) H_9 & point \mathbb{Z}^2 constructible

$\rightarrow \mathbb{Z}^2$ constructible si $\forall m \in \mathbb{Z}$ constructible.

En effet $\forall m \in \mathbb{N}$ est constructible :

2 constructible car $(2,0) = \mathcal{C}(I,0) \cap (2I)$



$$I_3(3,0) = \mathcal{C}(I_2, I_1) \cap (0I)$$

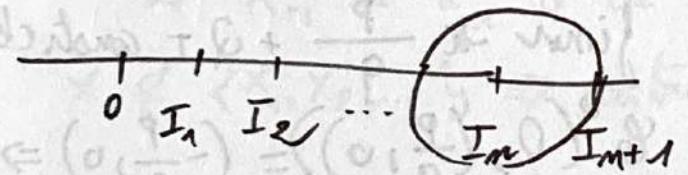
ainsi par récurrence si $\{1, \dots, m\}$ constructible alors $(m+1)$ constructible *car *par récurrence.

$$I_{m+1}(m+1,0) = \mathcal{C}(I_m, I_{m+1}) \cap (0I)$$

& $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{C}(0, f_m, 0) \cap (0, I)$$

$(m, 0)$ "

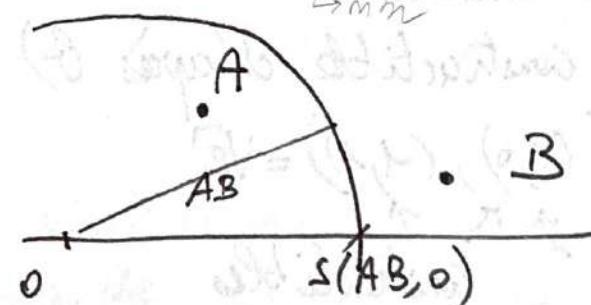


\rightarrow Pasq t le moins nels ne st pas vrai.

$\forall m'$ n'est pas mn niel constructible.

c) H_9 A & B st constructibles

\Rightarrow diste AB constructible



diste AB constructible car

$$S = [0X] \cap \mathcal{C}(0, AB) \text{ car } A \text{ est const} \& B \text{ est const}$$

const & closq

a) $\forall q \in \mathbb{N}^*$ constructible.

$\sqrt{2}$ est constructible car

$(1,1)$ constructible d'après b)

$$\Rightarrow d((0,0), (1,1)) = \sqrt{2}$$

donc constructible

$\rightarrow \sqrt{3}$ est constructible car

$(\sqrt{2}, 1)$ constructible d'après a) +

$\sqrt{2}$ est constructible.

$$\Rightarrow d((0,0), (\sqrt{2}, 1)) = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

est constructible

Par récurrence "H_n: " \sqrt{n} est constructible"

H₀, H₁, H₂, H₃ déjà vérifiés. On suppose

donc H_n vrai & ainsi

$(\sqrt{n}, 1)$ est constructible

$$\Rightarrow d((0,0), (\sqrt{n}, 1)) = \sqrt{n+1} \text{ aussi } \hookrightarrow H_{n+1}$$

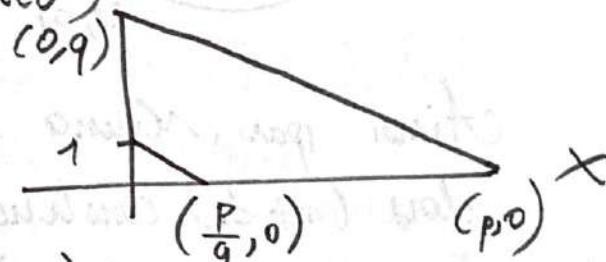
e) $\forall p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q}, 0)$ est const.

$\forall p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q}, 0)$ est const.

[M1] soit J_1, J_2, \dots, J_{q-1} les points qui partagent le segm $[(0,0)(p,0)]$ en q parties égales.
(constur classiq 

$\Rightarrow J_1(\frac{p}{q}, 0)$ constructible.

[M2] (Détaillez const)



$$(\frac{p}{q}, 0) = ((p,0), (0,q))^{||}(0,1) \cap X + \text{Thés.}$$

Et pu finir si $\frac{p}{q} + q$ + constructible alors
 $\times \cap C^*(0, (\frac{p}{q}, 0)) = (-\frac{p}{q}, 0) \Rightarrow -\frac{p}{q}$ constructible

RQ : L'ens des nbs constructibles est **Dénombrable**. comme réunion dénombrable

$$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \text{ où } K_i \text{ les nbs constructibles}$$

↳ pas.

& \mathbb{R} est non dénombrable $\Rightarrow \mathbb{R} \neq K$.

Pour voir que \mathbb{R} est non dénombrable, on suppose qu'il l'est :

$$\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$x_i = a_m^i \dots a_0^i, a_{-1}^i, a_{-2}^i, \dots$$

l'écrit
décimale
réduite

$$\text{Posons } x = 0, x_1 x_2 \dots$$

de $x_i \neq a_{-1}^i$ & de $\exists \Rightarrow x \neq x_i \forall i \Rightarrow x \pm ly \text{ constructible}$

$x \notin \{x_1, x_2, \dots\}$ \Rightarrow contradiction $\boxed{c?!$

Ex 14 (5^{e} ens nbs const)

Mq un nbs réels const. n'est pas R & qu'il est stable par : - somm, diff
- mult, inverse
- $\sqrt{}$.

On vient de voir que l'ens des nbs constructibles est dénombrable $\neq R$ non dénombrable.

► x, y constructible \Rightarrow

$$= (0,1) \cap B((x,0), ly)$$

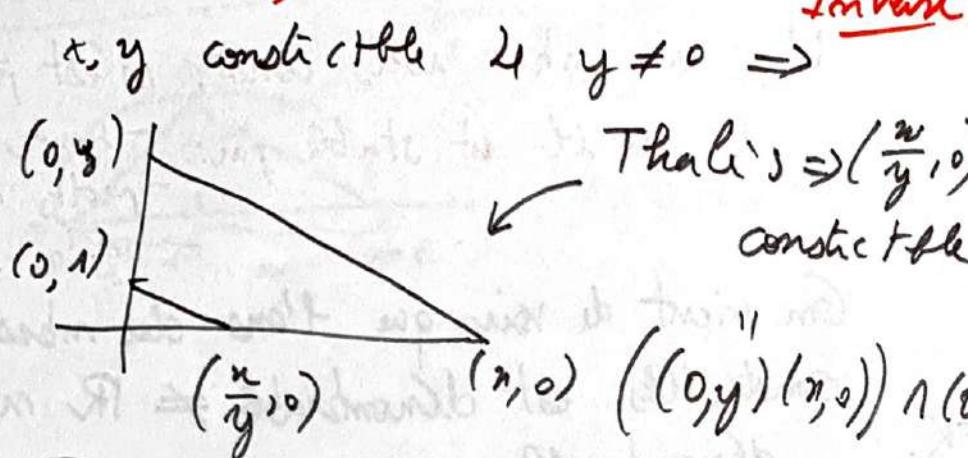
$$= \{(x+ly, 0), (x-ly, 0)\}$$

$d((0,0), (y,0))$

constructible

(min)

• Product, inverse ?

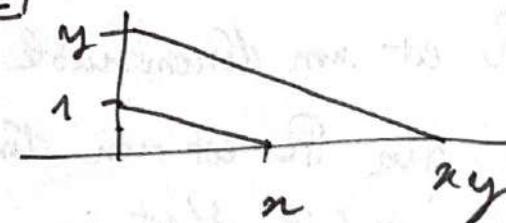


Product . $x > 0, y > 0 \Rightarrow x, y$

constructible car

[M1] $\frac{1}{y}$ constructible d'après q^o précédent

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{y}} = x \cdot y$ constructible.



④ α constructible si - α constructible

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ -\alpha \quad 0 \quad \alpha \end{array}$$

. α constructible si $|\alpha|$ constructible

x, y constructible $y \neq 0 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|}$ constructible

$\Rightarrow \frac{x}{y}$ constructible

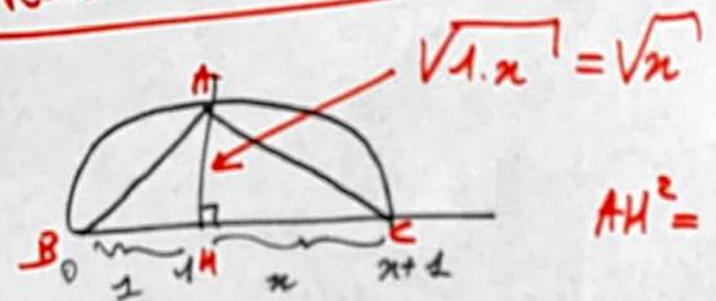
Pu conclure si x, y constructible

$\Rightarrow |x|$ et $|y|$ le sont

$\Rightarrow |x||y| = |xy|$ l'est

$\Rightarrow xy$ l'est

Racine carrée



$$AH^2 = BH \cdot HC$$

M44 TD

TD₁

→ projeté orthogonal, droites, $\frac{1}{2}$ plan, paramétrisation
droite, distance, convexité, inégalités

→ médiane du triangle $2:1$

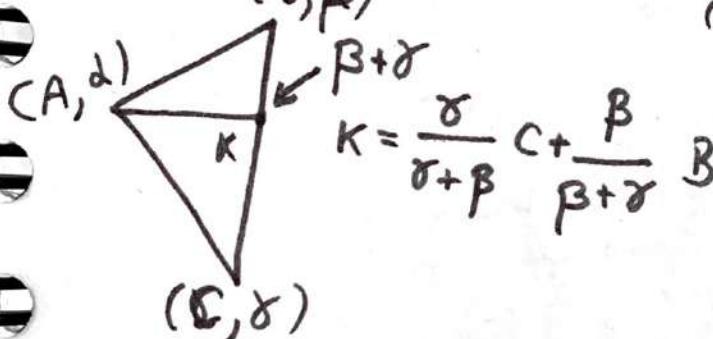
$$\rightarrow \int_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{bc}{2} \Rightarrow \text{hauteur} = \frac{\text{prod kathetes}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{(A,2)} \quad \overrightarrow{(B,5)} \quad \overrightarrow{c} = (1-\lambda) \overrightarrow{A} + \lambda \overrightarrow{B} \quad \overrightarrow{c} = (1-\lambda)A + \lambda B \quad \frac{CB}{CA} = \frac{\lambda}{B} \quad \text{TD2}$$

→ coord. barycentriques $(\alpha:\beta:\gamma)$

→ Thalès : droites //, rapport de mesure $\frac{1}{2}$

$$@ (\alpha:\beta:\gamma) = (1:2:1) \quad \overrightarrow{(A,1)} \quad \overrightarrow{(B,\frac{1}{2})} \quad \overrightarrow{B} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C}$$



Alignement

→ droite \mathcal{D} , Pls $A, B, C \in \mathcal{D}$

→ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$

→ $C \in (AB) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } AB = \{ax+by=d\}, ax_c+by_c=d ? \\ (AB) = \{A+t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (x_c, y_c) = A + t\overrightarrow{AB} \end{array} \right.$

→ $\angle ABC = 0 [\text{H}]$

→ nbs complexes

→ homothéties $\rightarrow H_{c, \lambda}(A) = B$

$$H_{c, \lambda}(A) = B \quad \overrightarrow{c} \quad \overrightarrow{A} \quad \overrightarrow{B}$$

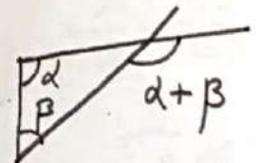
$$H_{0, \lambda}(A) = B, H_{0, \lambda}(B) = C$$

→ triangles semblables

$\triangle HBA \sim \triangle FCB$ car $\frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FC}$ & $\angle H = \angle F = \frac{\pi}{2}$

utile: $\frac{CK}{KA} = \frac{MO}{OI} \Leftrightarrow \frac{CK}{MO} = \frac{KA}{OI}$

→ Thalès (\parallel , rapport, $\frac{P}{q}$, pq constructible, de segment)

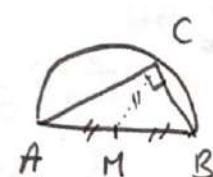


TD3: Angles

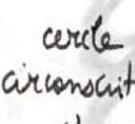
circle inscrit



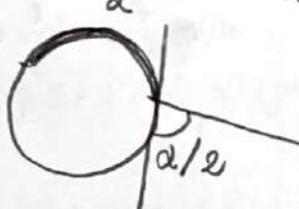
circle escaissant



circle circonscrit

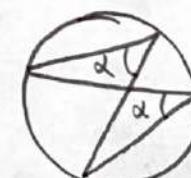


→ tracer triangle rectangle



α

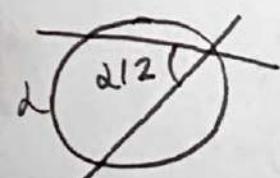
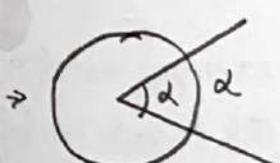
$\alpha/2$



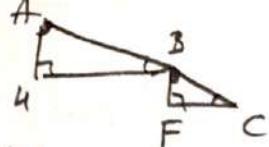
$\angle E = \angle B = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle ABO$

$\Rightarrow \angle EBC = \angle BAO$



(2)



Puissance d'un point:

$D \cap C = \{S, T\}, D' \cap C = \{S', T'\}$

$$\overline{MS} \cdot \overline{MT} = \overline{MS'} \cdot \overline{MT'}$$



$$\overline{MS} \cdot \overline{MT} = \overline{MS'} \cdot \overline{MT'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MS}{MS'} = \frac{MT}{MT'}$$

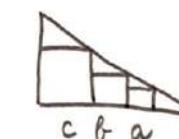
Hg $\triangle SMS' \sim \triangle TMT'$

$$\angle SMS' = \angle TMT' \text{ et } \angle SS'T' = \frac{1}{2} \widehat{ST} = \angle STT'$$

→ si M int C: $P_C(M) < 0$; M sur B: $P_C(M) = 0$; M ext P: $P_C(M) > 0$

→ triangles longés aire, angl., Thalès, bisections

TD4



$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. P homothéties.



$$\text{mg } BA^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow \frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$$

$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CBA$.

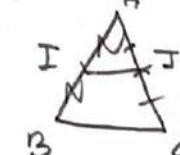
$$\left\{ \begin{array}{l} \angle ABH = \angle ABC \text{ commun} \\ \angle AHB = \angle CAB = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{catéte}^2 = \text{pi}_1 h^2 \times \text{pi}_2 h^2$$

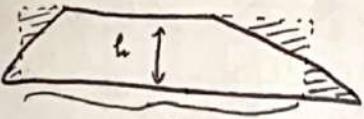
→ mg 3 bissectrices st concourantes (p36, ex 11) altitude, médianes, hauteurs ←

$$A_{trapèze} = (B+G) \cdot 2h \quad \text{base, centre de gravité}$$

→ TH des milieux: si un segment joint les milieux de 2 côtés d'un triangle alors il est parallèle au 3^e côté & sa longueur est égale à la moitié de celle 3^e côté.

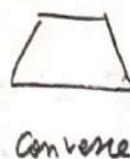
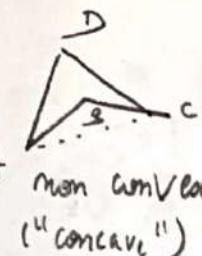
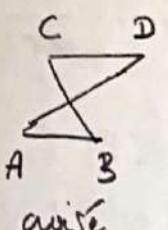


(3)



$$A = h \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$\frac{a+b}{2}$$



→ somme angles des quadri convexes: 2π .

→ points cocycliques.

→ analyse, pygm constuct, justif

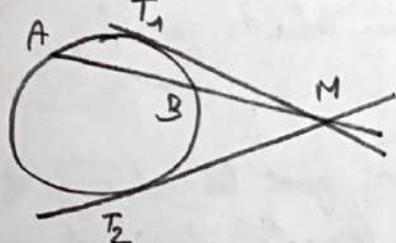
→ symétrie d'un pt, médiat [AB], milieu [AB], $\mathcal{C}[AB]$

→ tangente à $\mathcal{C}(A, B)$, perpendiculaire à $(AB)^c$ Théorème de Thales

→ parallèle à $(AB)^c$, $\mathcal{C}(A, BC)$, cercle $\mathcal{C}(A, B, C)$

→ bissectrice \widehat{BAC} (4 bisects.)

→ partage segments en n segments



$$MB \cdot MA = MT_1^2 = MT_2^2$$

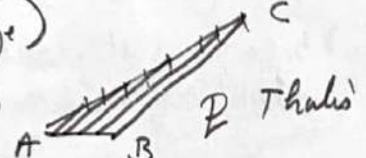
Parce que $M \notin \mathcal{C}$: $P_C(M)$

$$MT_i^2 = MA \cdot MB$$

④

Construction Rule & compass

TD 5



→ Nombres constructibles

↳ pt 0(0,0), I=(1,0); x const si $(x, 0)$ const

→ si pts \mathbb{Z}^2 const.



$$V_m \in -\mathbb{N}$$

$$B(0, (m, 0)) \cap \mathbb{Z}$$

$$(m, 0)$$

$$I_{m+1}(m+1, 0) = \mathcal{C}(I_m, I_{m+1}) \cap (0, I)$$

→ mq A, B st const. ⇒ droite AB const.

$$A \quad B \quad S = [0, x] \cap \mathcal{C}(0, AB)$$

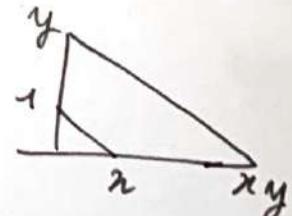
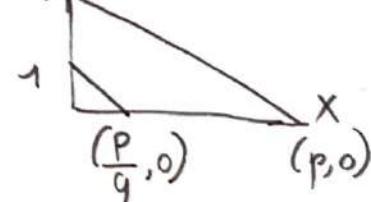
$$S(AB, 0) \Rightarrow S(AB, 0)$$

→ mq $\sqrt{2}$ constructible; $d((0,0), (1,1)) = \sqrt{2}$

$$d((0,0), (\sqrt{2}, 1)) = \sqrt{3}$$

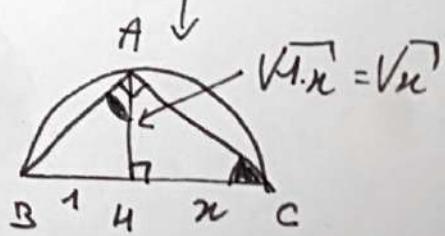
$$\text{Par } \sqrt{n} \rightarrow d((0,0), (\sqrt{n+1}, 1)) = \sqrt{n+1}$$

→ mq $\sqrt{p/q} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(\frac{p}{q}, 0)$ const. Thales



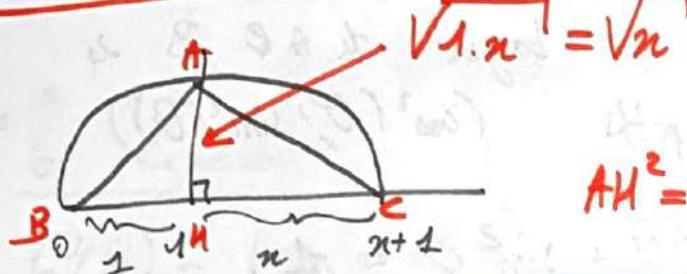
→ mq nos nombres réels n'est pas const en IR & stable par somme, différence, produit, inverse, $\sqrt{\cdot}$

$$\text{haut}^k = \pi_{1, k} h^{k_1} \times \pi_{2, k} h^{k_2}$$



⑤ B 1 4 x C

Racine carrée



$$AH^2 = BH \cdot HC$$

$$\gamma'(A) = \frac{(A + \varepsilon - A)\overrightarrow{AB}}{\varepsilon} = \overrightarrow{AB}$$

[M] normale :

$$\gamma(A) = A + A\overrightarrow{AB} \Rightarrow \gamma'(A) = 0 + 1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

\uparrow_{cte}

\hat{c} A, B, C non alignés $\Rightarrow A \neq B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$
 \Rightarrow la courbe est paramétrée.

b) Si q^{ue} condi^{on} c^{ette} paramétrisa^{tion} est "par longueur d'arc" ?

\hookrightarrow c'est une paramétrisa^{tion} p_{ar} longueur d'arc si $\forall \lambda, \|\gamma'(\lambda)\| = 1$.

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 1 \Leftrightarrow AB = 1.$$

c) donner une paramétrisa^{tion} p_{ar} longueur d'arc de (AB) .

$$\hookrightarrow$$
 soit $\gamma_1(A) = \gamma\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \quad (AB \neq 0)$

Méthode :

$$\gamma'(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(A + \varepsilon) - \gamma(A)}{\varepsilon}$$

$\overset{\text{pts}}{\swarrow} \downarrow$
 vect^*

$$\begin{aligned} \gamma: A \rightarrow (1-\lambda)A + \lambda B &= A - \lambda A + \lambda B \\ &= A + \lambda \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Dans ce cas γ_1 est une représentation de δ ($\phi(s) = \frac{s}{AB}$) .

$$\begin{aligned}\gamma_1'(A) &= \left[\delta\left(\frac{\lambda}{AB}\right) \right]' = \delta'\left(\frac{A}{AB}\right) \cdot \left(\frac{A}{AB}\right)' \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{AB} . \\ \text{ainsi } \|\gamma_1'(A)\| &= \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right\| = 1.\end{aligned}$$

d) Donner une paramétrisation du segment $[AB]$ & de $[BA]$.

$\gamma|_{[0,1]}$ est une paramétrisation de $[AB]$.

$$[AB] = \{ A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0,1] \}$$

$\gamma|_{[\pi,0]}$ ——— $[BA]$

$\lambda < 0$	1	$\lambda > 1$
paramétrage		
A		B

c) étudier courbe $G: \Theta \mapsto G_\theta$,

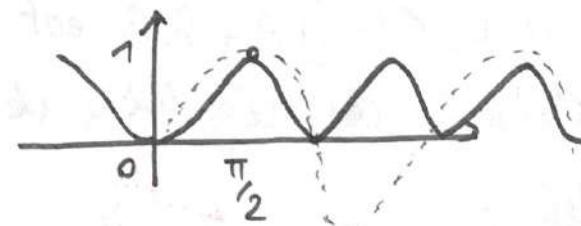
où G_θ est bayonnière de A & B &
poids respectifs $(\cos^2(\theta), \sin^2(\theta))$

$$\text{comme } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

$$G(\theta) = (1 - \sin^2 \theta) A + \sin^2 \theta B$$

$$G(\theta) = \gamma(\sin^2 \theta)$$

$$4 \quad \sin^2: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$



π -périodique

• \sin^2 est :

- π -périodique

- $s^\pi \nearrow [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0,1]$ (bijc^d)

- $s^\pi \searrow [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [0,1]$ (bijc^e).

ainsi G oscille entre A & B en passant
de A à B pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis de B à
 A pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ & ainsi de suite.

q2: La courbe de G est régulière ?
par longueur d'arc ?
et est $\| \sin^2\theta \cdot \vec{AB} \| \neq 1$, elle n'est pas
régulière ?
par longueur d'arcs m sur
 $] h \frac{\pi}{2}, (h+1) \frac{\pi}{2} [$ où où elle est régulière

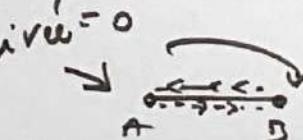
$$G'(\theta) = (\sin^2 \theta)' \vec{AB} = 2 \cos \theta \sin \theta \vec{AB} = \sin(2\theta) \vec{AB}$$

$$\begin{aligned} M1 \quad & [\cos^2 \theta A + \sin^2 \theta B]' = \\ & = (\cos^2 \theta)' A + (\sin^2 \theta)' B \\ & = 2 \cos \theta (-\sin \theta) A + 2 \sin \theta \cos \theta B \end{aligned}$$

$$M2 \quad G(\theta) = \vartheta (\sin^2 \theta)$$

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \vartheta' (\sin^2 \theta) \cdot [\sin^2 \theta]' \\ &= \vec{AB} \underbrace{2 \sin \theta \cos \theta}_{\sin 2\theta} = \sin 2\theta \cdot \vec{AB} \end{aligned}$$

et G n'est pas une paramétrisation régulière
sur \mathbb{R} car $G'(\theta) = 0$ si $\theta \in \mathbb{Z} \frac{\pi}{2}$



f) soit $I := [\vartheta_A, \vartheta_B]$, G est
injective sur cet intervalle tq $G_{\vartheta_A} = A$,
 $G_{\vartheta_B} = B$.

• Mg long^r de $|G|$ ne dépend pas du choix de I .
calculer la.

$$\text{Comme } I = [h\pi, h\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$|G|_I = \int_{h\pi}^{h\pi + \frac{\pi}{2}} \|\sin 2\theta \cdot \vec{AB}\|$$

$$= \|\vec{AB}\| \int_{h\pi}^{h\pi + \frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = AB$$

on pouvait conclure que $|G|_I = AB$ en
utilisant que $|G|_{[0, \frac{\pi}{2}]} = AB$ et un repas de $\vartheta \left(\frac{t}{AB} \right) |_{[0, AB]}$

$$\Rightarrow |\mathcal{G}|_{[0, \frac{\pi}{2}]} = |\mathcal{G}_{[0,1]}|$$

$$= |\mathcal{G}_{[0,AB]}(\pm \frac{t}{AB})|$$

$$= |[0,AB]| = AB.$$

Cercle

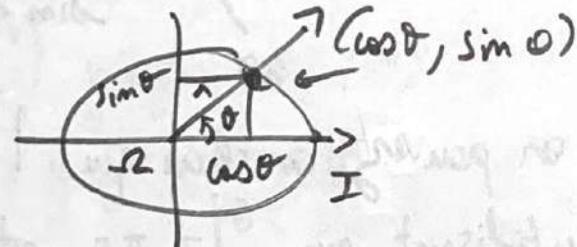
Ex2 Paramétrisation standards

→ courbe paramétrique $\mathcal{C}: \theta \mapsto \begin{pmatrix} a + r \cos(\theta) \\ b + r \sin(\theta) \end{pmatrix}$

a) Mg qu'il s'agit d'une param. du cercle $C(0,r)$ & $O(a,b)$ ← Rentr.

(M1) Par déf de $\cos\theta$ & $\sin\theta$.

$\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ est une paramétrisation du cercle unité $C(0,1)$ $O(0,0)$



Ainsi $T_{20} \circ H_{2,r} \circ \mathcal{G}(B(2,1))$
 $T_{20}(B(2,1)) = B(0,r)$

$$T_{20} \circ H_{2,r} \circ \mathcal{G}: \mathbb{R} \rightarrow B(0,r)$$

$$(a,b) \xrightarrow{\hspace{1cm}} (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$r \cos\theta, r \cdot \sin\theta$$

$$(a + r \cos\theta, b + r \sin\theta) = \mathcal{C}(\theta)$$

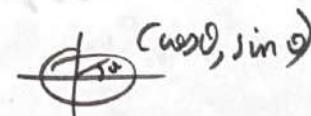
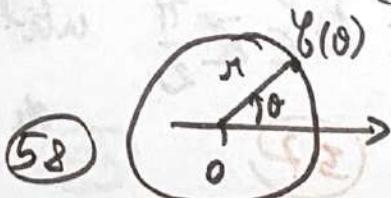
M2 $\mathcal{C}(\theta) \in C(0,r)$

$$\Leftrightarrow O\mathcal{C}(\theta) = r \Leftrightarrow \frac{\|\mathcal{O}\mathcal{C}(\theta)\|}{r} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|(\cos\theta, \sin\theta)\| = 1$$

$$\frac{\mathcal{O}\mathcal{C}(\theta)}{r} = \frac{1}{r}(\mathcal{C}(\theta) - O) = \frac{1}{r}[(a + r \cos\theta, b + r \sin\theta) - (a, b)]$$

$$= \frac{1}{r} (r \cos\theta, r \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$



b) Si γ "condit cette paramétrisation" est "par longueur d'arc".

$$\gamma'(\theta) = \begin{bmatrix} (a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) \end{bmatrix}'$$

$$\gamma'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = r \|\underline{(-\sin\theta, \cos\theta)}\|$$

$$= r = 1$$

ainsi γ est régulière (si $r \neq 0$
 $\Leftrightarrow \gamma(0, r)$ cercle non-dégénéré
 en un point).

→ Elle est par longueur d'arc si $r=1$.

c) Donner une paramétrisation par longueur d'arc de $\gamma(0, r)$.

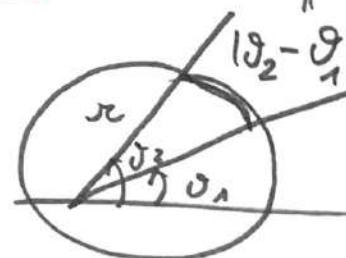
$$\gamma_1(\theta) = \gamma\left(\frac{\theta}{r}\right) \text{ vérifie } \gamma'_1(\theta) = \gamma'\left(\frac{\theta}{r}\right) \cdot \left(\frac{\theta}{r}\right)'$$

$$\Rightarrow \|\gamma'_1(\theta)\| = \|\gamma'\left(\frac{\theta}{r}\right)\| \cdot \frac{1}{r} = r \cdot \frac{1}{r} = 1.$$

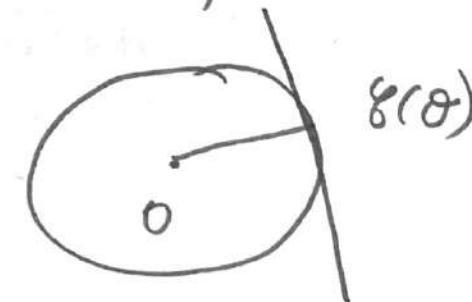
$$-\frac{1}{r^2} \sin\theta \cdot \cos\theta + \frac{1}{r^2} \cos\theta \cdot \sin\theta = 0$$

Rq $|\gamma|_{[0, 2\pi]} = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\| \, d\theta = 2\pi r$

$$|\gamma_{[0, 2\pi]}| = |\theta_2 - \theta_1| \cdot r$$



d) Mg tangente au point $\gamma(t)$ est \perp à $\overrightarrow{O\gamma(t)}$



$$T\gamma(t) = D\gamma(t), \gamma(t)$$

$$\gamma'(t) \perp \overrightarrow{O\gamma(t)} \Leftrightarrow \langle \gamma'(t) | \overrightarrow{O\gamma(t)} \rangle = 0$$

$$\langle \gamma'(t) | \overrightarrow{O\gamma(t)} \rangle =$$

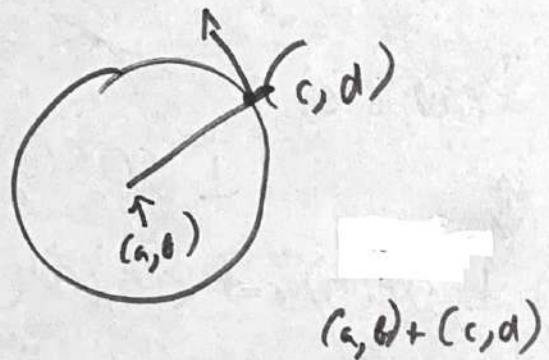
$$\langle r(-\sin\theta, \cos\theta) | r(\cos\theta, \sin\theta) \rangle =$$

c) Donner une paramétrisation de la tangente au point $\mathbf{C}(\theta)$.

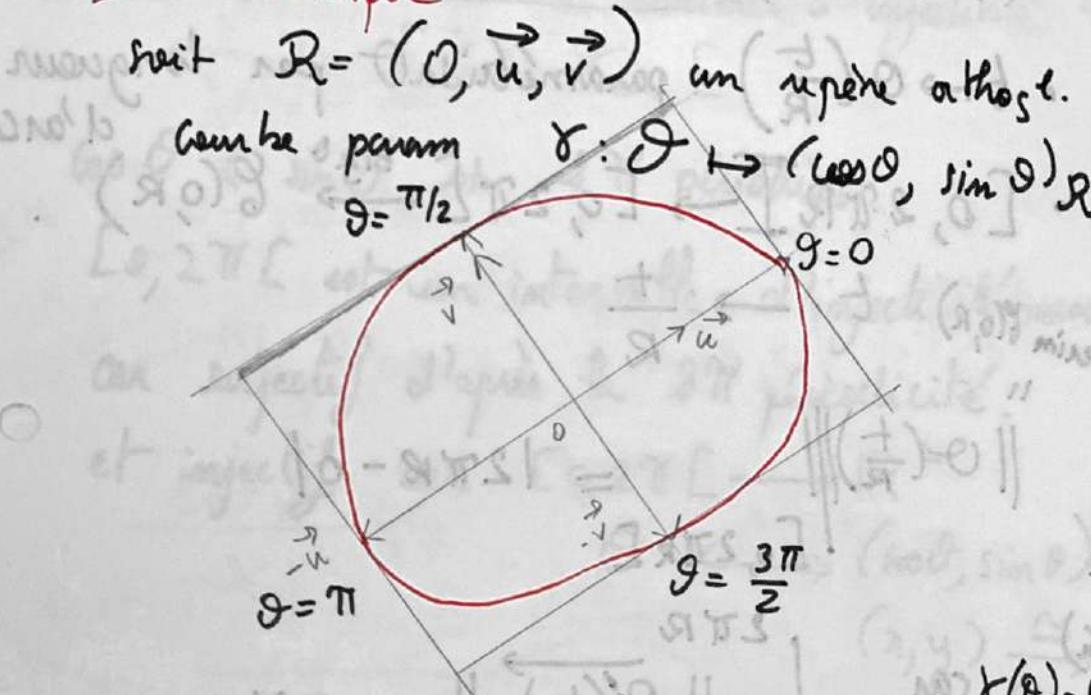
$t \mapsto \mathbf{C}(\theta) + t\mathbf{B}'(\theta)$ est une paramétrisation de $D\mathbf{C}(\theta), \mathbf{B}'(\theta)$

$$t \mapsto (a + r(\cos \theta - t \sin \theta), \theta + r(\sin \theta + t \cos \theta))$$

f) Donner



Ex5 Ellipse



La courbe est contenue dans $[[-1, 1]]^2$.

$$0 \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta)_R = 0 + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v} \in M_\theta$$

$$\frac{\theta = 0}{\theta = \frac{\pi}{2}} \quad 0 + 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = 0 + \vec{u}.$$

$$0 + 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = 0 + \vec{v}.$$

a) γ' est un cercle si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \gamma(0, \|\vec{u}\|)$ \Rightarrow la courbe est régulière car $\gamma'(0) \neq 0 \forall \theta$.

si $\|\vec{u}\| \neq \|\vec{v}\|$:

$$OM_\theta = \sqrt{\cos^2 \theta \|\vec{u}\|^2 + \sin^2 \theta \|\vec{v}\|^2}$$

car $OM_\theta = \cos \theta \|\vec{u}\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \|\vec{v}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ainsi OM_θ oscille entre $\min(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$ et $\max(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$.

b) Montrons qu'il s'agit d'une paramétrisation régulière.

$$\gamma(\theta) = M_\theta \quad \gamma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)_B \quad \theta = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$= -\sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{v}$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 \theta \|\vec{u}\|^2 + \cos^2 \theta \|\vec{v}\|^2} \geq \min(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|) \underbrace{\sqrt{\sin^2 + \cos^2}}_1 > 0$$

c) si que cette paramétrisation est "par longueur d'arc" ?

γ est paramétrisé par longueur d'arc

$$\text{et } \forall \theta \quad \|\gamma'(\theta)\| = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 \theta \|\vec{u}\|^2 + \cos^2 \theta \|\vec{v}\|^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta \|\vec{u}\|^2 + \cos^2 \theta \|\vec{v}\|^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\theta = 0) \quad \|\vec{v}\| = 1, \quad (\theta = \frac{\pi}{2}), \quad \|\vec{u}\| = 1$$

et si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ (\Rightarrow repère orthonormé)

$$\Rightarrow \|\gamma'(\theta)\| = 1$$

Dans ce cas l'ellipse est $\mathcal{E}(0, 1)$.

(Parenthèse) Périmètre du cercle.

- $t \mapsto \Theta\left(\frac{t}{R}\right)$ paramétrisation par longueur d'arc
- $[0, 2\pi R] \xrightarrow{\text{bijectif}} [0, 2\pi] \xrightarrow{\Theta(0, R)} \mathcal{E}(0, R)$

qui immeilleur "quim" $\Theta(0, R)$ $t \rightarrow \frac{t}{R}$

$$\left\| \Theta\left(\frac{t}{R}\right) \right\| = |2\pi R - 0|$$

$$\text{car } \int_0^{2\pi R} \left\| \Theta'\left(\frac{t}{R}\right) \right\| dt = 2\pi R.$$

e) Déterminer un intervalle maximal d'injectivité
 $I = [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$.

$\cos \theta$ & $\sin \theta$ sont 2π périodiques.

$[0, 2\pi]$ est un intervalle d'injectivité mais non injectif d'après la 2π périodicité.

et injectif sur $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(x, y) \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\text{bij}}{\sim}} (u, v)_R$$

la composée est injective.

Note: \hookrightarrow : injectif
 \simeq : bijectif.

on dm q g a resto kai pr

$$\mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) + \dots + \mu_m f(x_m) \leq$$

$$\leq f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m)$$

$\sum \mu_i = 1$ (st des barycentres)

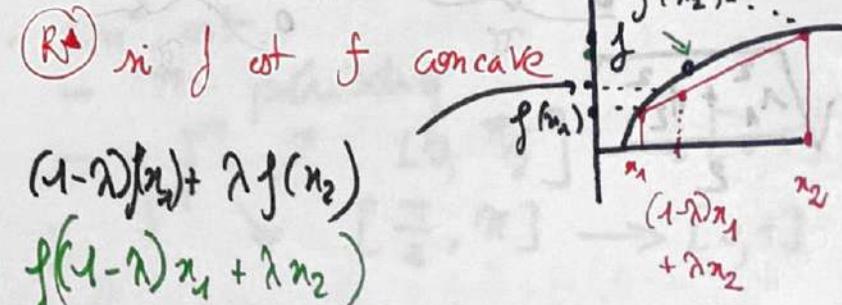
soit I' la courbe géom. de $\gamma|_I$. on note $r_{\gamma} = \|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\| = r_2$. Le support $\gamma(I)$ de γ est appelé ellipsoïde de rayons r_1 et r_2 , on note E .

E le périmètre de la longueur $|I'|$.

$$f) Mq \quad 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \leq |I| \leq 2\pi \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$$

Il faut q'm dm q que

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta r_1^2 + \cos^2 \theta r_2^2} d\theta \leq \frac{2\pi \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{\sqrt{2}}$$



$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$$

et $\int_I f(t) dt \leq f \left(\int_I u(t) dt \right)$ si $\int_I u(t) dt =$

63

Dans notre cas, $\sqrt{\cdot}$ est concave

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta x_1^2 + \cos^2 \theta x_2^2} d\theta > \sin^2 \theta \sqrt{x_1^2} + \cos^2 \theta \sqrt{x_2^2}$$

$$2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta x_1^2 + \cos^2 \theta x_2^2} \times \frac{1}{2\pi} d\theta \leq$$

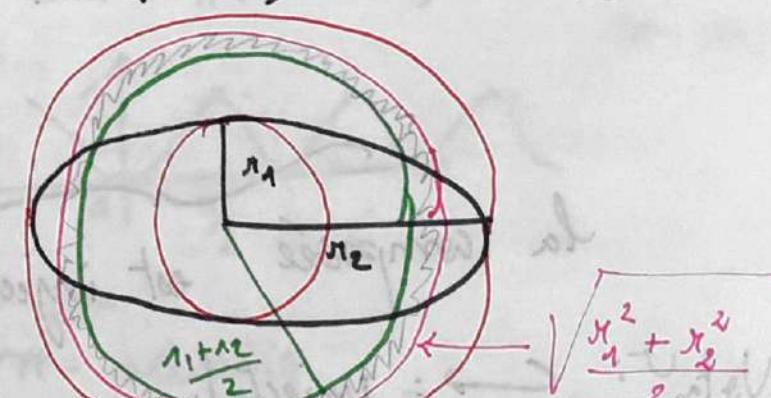
$$\leq 2\pi \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta x_1^2 + \sin^2 \theta x_2^2 d\theta}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta x_1^2 d\theta + 2\pi \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta x_2^2 d\theta}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[x_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta + x_2^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \right]}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

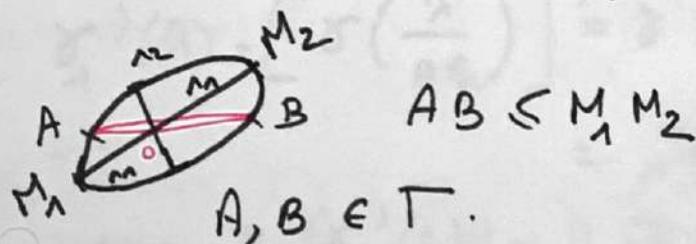
$$|\Gamma| \geq \int_0^{2\pi} x_1 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} x_2 \cos^2 \theta d\theta = \pi(x_1 + x_2) = 2\pi \frac{x_1 + x_2}{2}$$



$$r_1 < r_2$$

$$r_1 \leq \frac{r_1 + r_2}{2} \leq |\Gamma| \leq \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \leq r_2$$

g) Mq $\exists!$ unj couple de pts $\{M_1, M_2\} \Rightarrow \{\vartheta_A, \vartheta_B\} = \{0, \pi\}$.
 tq $(M_1, M_2) = \max_{A, B \in E} (AB)$ ainsi $AB \leq M_1 M_2$ si $M_2 = r(\pi)$.



$$AB \leq OA + OB$$



$$\text{si } A = r(\vartheta_A), B = r(\vartheta_B)$$

$$OA = \sqrt{\cos^2 \vartheta_A x_1^2 + \sin^2 \vartheta_A x_2^2} \leq x_1$$

$$\text{si } \cos \vartheta_A = 1, \vartheta_A = 0 [\pi]$$

$$\text{ssi } \vartheta_A = 0.$$

$$OB = \sqrt{-\vartheta_B - \vartheta_B} \leq x_1$$

$$AB \leq OA + OB \leq 2x_1$$

$$O \in [AB]$$

$$A \neq B$$

$$\begin{aligned} \vartheta_A &= 0 [\pi] \Leftrightarrow \vartheta_A \in \{0, \pi\} \\ \vartheta_A &= 0 [\pi] \Leftrightarrow \vartheta_B \in \{0, \pi\} \end{aligned}$$

h) et qu'il n'y a que 2 symétries orthogonales qui préserveront cette ellipse.

Si S une isométrie $S(\Gamma) = \Gamma$

$$\frac{\downarrow}{M'_1 M'_2 = M_1 M_2}$$

$$\begin{aligned} S(M_1) &= M'_1 \in \Gamma \\ S(M_2) &= M'_2 \in \Gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M'_1 M'_2 = \max_{A, B \in \Gamma} AB$$

$$\Rightarrow \{M'_1, M'_2\} = \{M_1, M_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} M'_1 = M'_2 \text{ ou } M'_1 = M_2 \\ M'_2 = M_1 \end{cases}$$

Si S-symétrie:

$$\text{et } M_1 = M'_1 (\Rightarrow M_2 = M'_2)$$

$\Rightarrow M_1$ et M_2 \in axe de symétrie

$$\text{et } M'_1 = M_2$$

$$\text{et } M'_2 = M_1.$$

pl fin

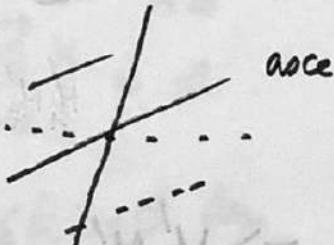
$M'_1 = M_2$ et $M'_2 = M_1$ alors $P \in M'$

$$M'_1 P = M'_2 P$$

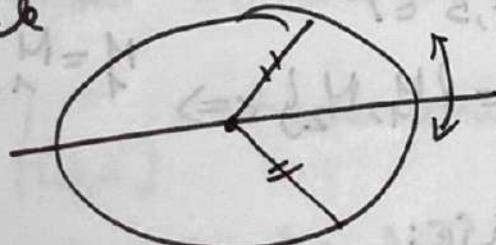
$$\Rightarrow M'_1 P' = M'_2 P' \quad (\text{on } P' = S(P) \text{ car } S\text{-isométrie})$$

$$\Rightarrow S(\mu_{[M_1, M_2]}) = \mu_{[M_1, M_2]}$$

$$\Rightarrow S = S_{\mu_{[M_1, M_2]}}$$

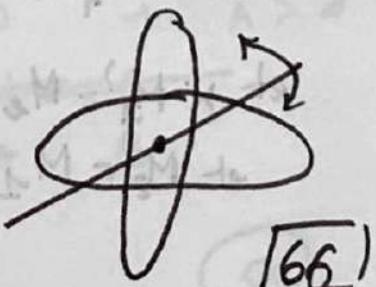
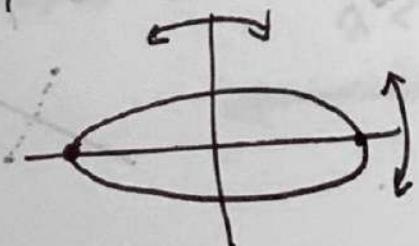


NB cercle



Un cercle a une paire d'axes de symétrie.

Une ellipse (non cercle) a seulement 2.



[66]

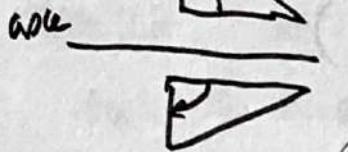
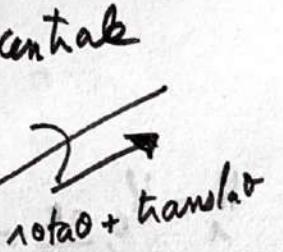


TRANSFORMATIONS & ISOMÉTRIES DU PLAN

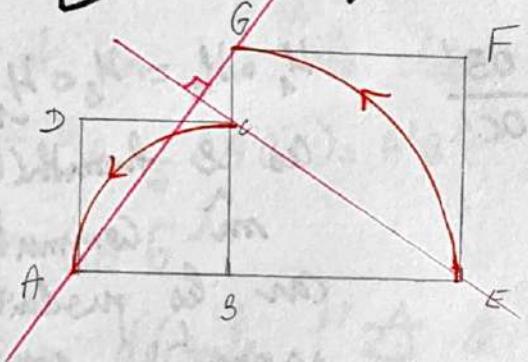
Ex 1

Isométrie du plan

↳ symétrie axiale, glissée, centrale
→ translation, rotation, réflexions



$$R_{0, \pi} = H_{\pi-1} \quad ; \quad H_{0,1} = \text{Id}$$



MII (analytique)

- on se place repère @ (B, \vec{BE}, \vec{BG})
- on exprime ds ce repère, équa droites

MII Pn drog droites st \perp , g ox rotat.

- mq qu'elles st images de 2 autres droites \perp

$$\begin{cases} - R_{0, \frac{\pi}{2}}(D_1) = D_2 \\ - R_{0, \frac{\pi}{2}}(D_1) \parallel D_2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{matrix} D_1 \perp D_2 \\ D_1 \parallel R_{0, \frac{\pi}{2}}(D_2) \end{matrix} \right.$$

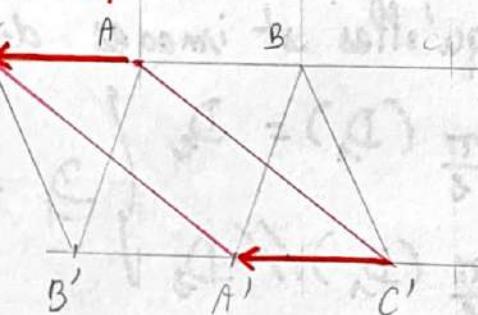
$$\text{soit } R_{0, \frac{\pi}{2}} = R \text{ alors } R(E) = G \quad \Rightarrow R((EC)) = (G)$$

$R(C) = A$
 $\Rightarrow (EC) \perp (GA)$ car l'une est l'image par rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Ex 2 (TH de Pappus)

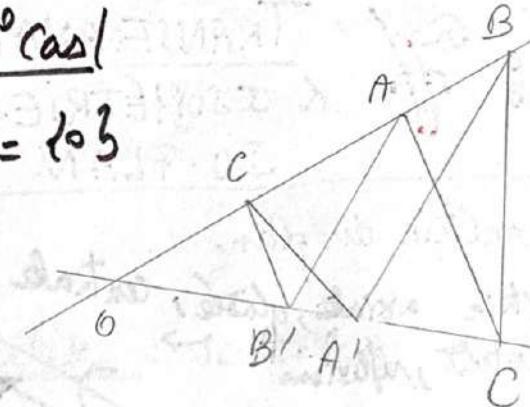
1^e cas

$D \parallel D'$



2^e cas

$D \cap D' = \{O\}$



RQ: On ne peut pas partir du principe que A, B, C & A', B', C' sont disposés exact comme sur l'image. $\Rightarrow (AC') \parallel (A'C)$.

$$T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{B'A'}} \text{ car } A \not\sim A' \text{ & } \square (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'})$$

$$T_{\overrightarrow{BC}} = T_{\overrightarrow{C'B'}} \text{ car } B \not\sim B' \text{ parallélog}$$

On aimeraient savoir $T_{\overrightarrow{AC}} = T_{\overrightarrow{C'A'}} \Rightarrow (AC') \parallel (CA')$
P cette translat.

$$\text{et } \hat{T}_{\overrightarrow{AC}} = \underbrace{T_{\overrightarrow{BC}}}_{\text{les translat. commutent}} \circ \underbrace{T_{\overrightarrow{AB}}}_{\text{commutent}} \text{ et } T_{\overrightarrow{C'A'}} = \underbrace{T_{\overrightarrow{B'A'}}}_{\text{les translat. commutent}} \circ \underbrace{T_{\overrightarrow{C'B'}}}_{\text{commutent}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{les translat.} \\ \text{commutent} \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} T_{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}} &= T_{\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{C'B'}} \\ T_{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} &= T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{BC}} = T_{\overrightarrow{B'A'}} \circ T_{\overrightarrow{C'B'}} \end{aligned}$$

$$H_1 = H_0, \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = H_0, \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OB'}} \quad (\text{Thalès})$$

$$H_2 = H_0, \frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}} = H_0, \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OC'}}$$

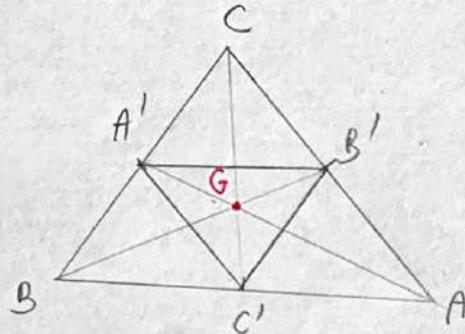
$$H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$$

ces 2 homothéties de m commutent
car les produits des rapports commutent.

On termine le cas 2 de m façon que cas 1 & $H_1 \circ H_2$ à la place de m
 $T_1 \circ T_2$.

Ex 3 Polygone des milieux

a)



Analyse : si $ABCD$ existe, alors $A'B'C'$ sera le triangle des milieux de $ABCD$.

Et on sait les choses suivantes :

$$-\quad \text{H}_{G,-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C' ; \quad \text{H}_{G,-2}(A'B'C') = ABC$$

$$-\quad G = G'$$

Ainsi découle l' \exists & l'unicité de $ABC = \text{H}_{G,-2}(A'B'C')$

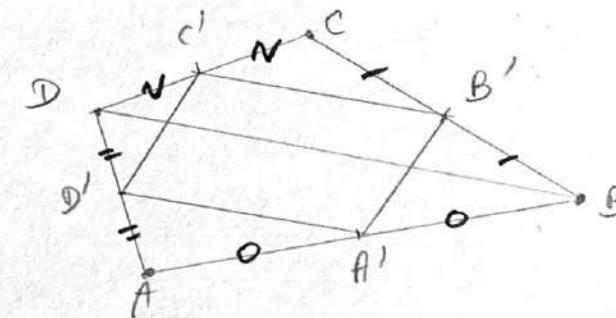
Une autre façon de voir les choses est que

(CA) est l'unique droite $\parallel (A'C)$ q' passe par B' et de m^{me} p^r les 2 autres.

mb^{me} impair p^t \Rightarrow t^{res} m^{gones} soit $\frac{1}{2}$.

69

b)



Analyse : si $ABCD$ existe.

Mq ce qu'on observe sur la fig, parallélog^g.

En effet d'après **TH des milieux** (Thalès)

$$\underbrace{\overrightarrow{D'A'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}}_{\triangle ABD} = \underbrace{\overrightarrow{C'B'}}_{\triangle CDB} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ parallélog^g.}$$

$\triangle ABD$

$\triangle CDB$

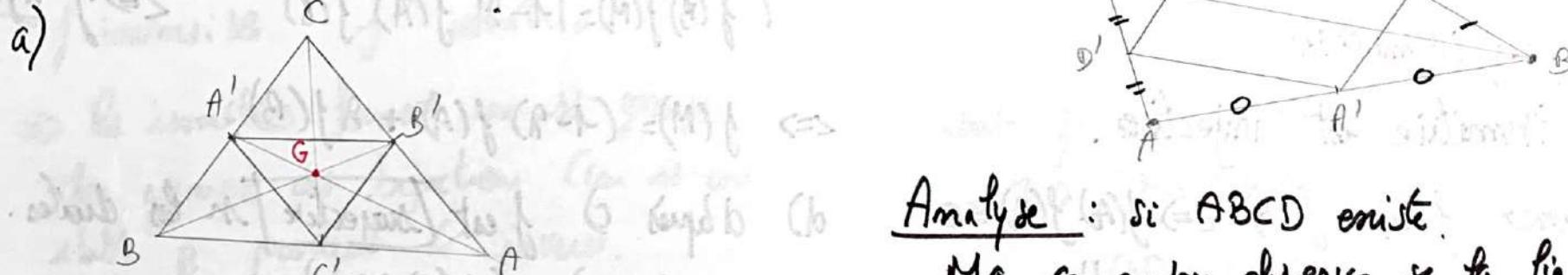
Ainsi on pt conclure directement que si $A'B'C'D'$ n'est pas un parallélog^g alors $ABCD$ n'existe pas.

on pt mq si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_A(A)$, $C = S_D(B)$, $D' = S_C(C)$ alors $S_D(D) = A$

$\Rightarrow \forall A, \& ABCD$ construct convient.

la m^{me} chose faite pm 8m points si cond^g $\sum \overrightarrow{B_i \cdot B_j} = 0$

Ex 3 Polygone des milieux



Analyse : si ABC existe, alors $A'B'C'$ sera le triangle des milieux de ABC .
Et de ce qu'on sait les choses suivantes :

$$- \text{H}_G, -\frac{1}{2} (ABC) = A'B'C' ; \text{H}_{G'} (-A'B'C') = ABC$$

$$- G = G'$$

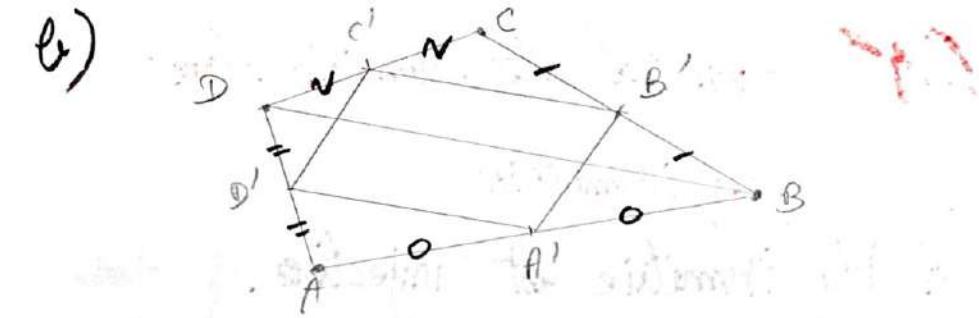
On en découle l' \triangle & l'unicité de $ABC = \text{H}_{G'} (-A'B'C')$ que si $A'B'C'D'$ n'est pas un parallélogramme alors $ABCD$ n'existe pas.

Une autre façon de voir les choses est que

(CA) est l'unique droite $\parallel (A'C)$ qui passe par B' on peut alors choisir arbitrairement et de manière à la faire passer par B' et de manière à ce que C soit sur (AC) .

Un imparfait pt \Rightarrow tous n gones soit à $\frac{1}{2}$.

et à n gones soit à $\frac{1}{2}$.



Analyse : si $ABCD$ existe.
Mq ce qu'on observe de la fig, parallélogramme.

$$\overrightarrow{D'A'} = \underbrace{\frac{1}{2} \overrightarrow{DB}}_{\triangle ABD} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{A'B'}}_{\triangle CDB} = \overrightarrow{A'C'} \text{ parallélogramme.}$$

Alors on peut conclure directement

que si $A'B'C'D'$ n'est pas un parallélogramme alors $ABCD$ n'existe pas.

on peut montrer si A choisi arbitrairement et on pose $B = S_A(A)$, $C = S_D(D)$, $D' = S_C(C)$ alors $S_D(D) = A$

$\Rightarrow \forall A, \& ABCD$ constituent convient.

la 3^e chose faite pour 3m points si cond^g $\sum \overrightarrow{B_i} \cdot \overrightarrow{B_i} = 0$

Ex

Classification des isométries planes

Ex 6 Propriétés isométriques

a) Mg isométrie est injective.

$$\text{on suppose } f(A) = f(B) \Leftrightarrow f(A) - f(B) = 0$$

si 2 images m̄ ⇒ 2 pts dépts st m̄. $\overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow A=B$. \Leftrightarrow injective.

b) Mg isom. f conserve l'alignement & l'ordre
n les droites.

$$B \in [AC] \Leftrightarrow AB + BC = AC$$

$$\Leftrightarrow f(A)f(B) + f(B)f(C) = f(A)f(C)$$

$$\Leftrightarrow f(B) \in [f(A), f(C)]$$

c) Mg isom. f préserve barycentres.



$$M = (\lambda \cdot A) + \bar{\lambda} \cdot B = A + \bar{\lambda} \cdot AB$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = |\lambda| AB \\ BM = |1-\lambda| AB \end{cases}$$

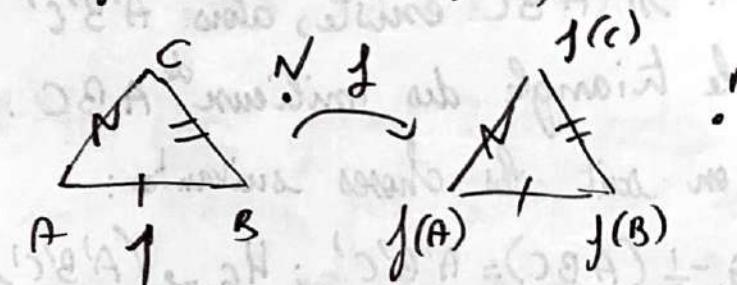
Symétrie
Roto-translation
Nécessaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(A)f(M) = |\lambda| f(A)f(B) \\ f(B)f(M) = |1-\lambda| f(A)f(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(M) = \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(M) = (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B).$$

d) d'après c) f est injective sur les droites.

$$f((AB)) = (f(A)f(B))$$



base affine

\uparrow
 A, B, C vérifient les 3 inégalités strictes $\Leftrightarrow f(A), f(B), f(C)$

base affine

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu, \nu, \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$M \in \text{Im } f \Leftrightarrow M = \lambda f(A) + \mu f(B) + \nu f(C)$$

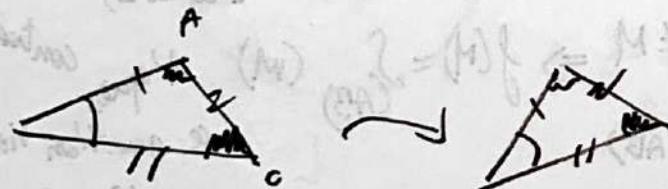
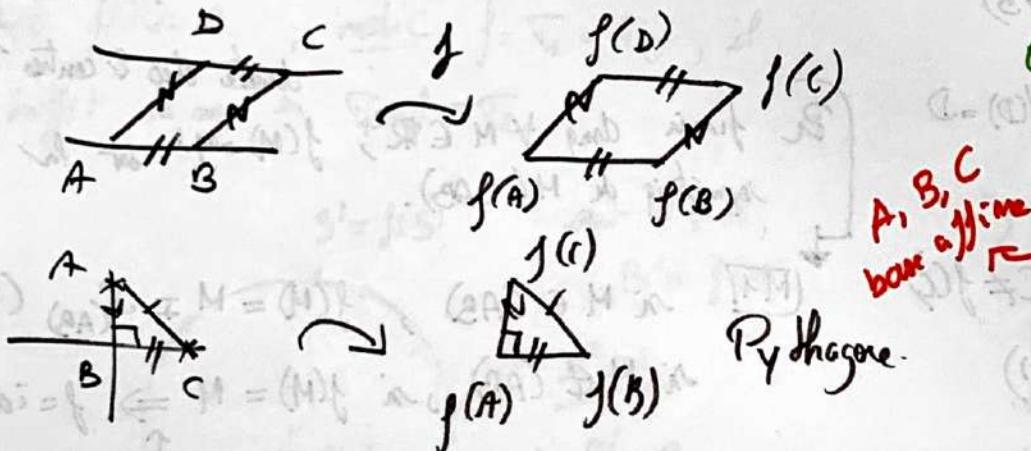
$$= f(\lambda A + \mu B + \nu C) = f$$

(2d)

Vu en cours fig isom f & g sont
 f inversible f^{-1} isométrie.

\Rightarrow les isométries forment un sous-groupe
 du groupe des bijections (car sous-ensemble stable par produit & inverse).

e) Mq isom conserve parallelisme & \perp écarté.



PQ: les isométries préservent l'angle

p. affine
angulo
bijection

Ex 7 a) Mq isom fixant 2 pts distincts A et B
 à 2 points $\not\in (AB)$.

soit $f(A)=A$, $f(B)=B$, soit $M \in (AB)$

$$\Rightarrow \exists \lambda, M = (1-\lambda)A + \lambda B$$

$$\Rightarrow f(M) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

$$f(M) = (1-\lambda)A + \lambda B = M.$$

b) Mq isom fixant 3 pts malis = id.

soit $f(A)=A$, $f(B)=B$, $f(C)=C$ & A, B, C non alignés & soit $M \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \lambda, \mu, \nu;$
 $\lambda + \mu + \nu = 1$.

$$M = \lambda A + \mu B + \nu C \Rightarrow f(M) = \lambda f(A) + \mu f(B) + \nu f(C)$$

$$= \lambda A + \mu B + \nu C = M$$

c) Mq isom fixant 3 pts distincts est l'id tte'
 ou une réflexion ct on précisera l'axe.

$f(A)=A$, $f(B)=B$, soit C non aligné de A & B

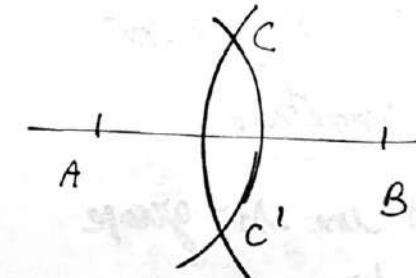
1° cas si $f(C)=C \Leftrightarrow f=\text{Id}$

2° cas si $f(C) \neq C$ (indic 1) Mq $f(C)=C'$ sym C/(AB)
 2) Mq $f=\delta_{AB}$

M₂ si $f(c) \neq c$ alors $f(c)$ & c sont symétriques

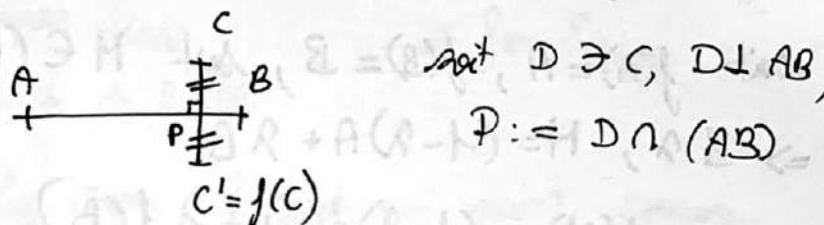
[M2]

$\not\exists (AB) \Leftrightarrow (AB)$ médiatrice de $[c\bar{f}(c)]$



2 cercles q se coupent en 2 pts
CC' est médiatrice de (AB).
 $\Rightarrow c$ symm / (AB) c' .

[M1]



d'après a), $f(P) = P \Rightarrow f(D) \ni P$ et
comme $D \perp (AB) \Rightarrow f(D) \perp f(AB) = (AB)$

$\Rightarrow f(D)$ est la droite $\perp (AB)$ m p $\Rightarrow f(D) = D$

$\Rightarrow f(c) \in D$ (ou $f(c) \in f(D) = D$)

et comme $CP = f(c)P = f(c)P$ et $\hat{c} \neq \hat{f}(c)$

$\Rightarrow P$ milieu de $[c\bar{f}(c)] \Rightarrow (AB) \perp D = (CC')$

et $(AB) \ni P$ milieu de $[CC']$

$\Rightarrow (AB)$ médiatrice de $[CC']$

$c \in \mathcal{E}(A, AC) \cap \mathcal{E}(B, BC)$ et comme

$$\begin{aligned} f(c)A &= CA & \Rightarrow c' \in \mathcal{E}(A, AC) \cap \mathcal{E}(B, BC) \\ f(c)B &= CB & \Rightarrow \text{si } c' \neq c \Rightarrow c' \text{ symm } c / (AB) \end{aligned}$$

droite des 2 centres du cercle.
Par similitud q M $\in \mathbb{R}^2$, $f(M) = M$ est la
symétrie de M / (AB).

[M1] si $M \in (AB)$, $f(M) = M \neq S_{(AB)}(M)$

si $M \notin (AB)$, si $f(M) = M \Rightarrow f = id \Rightarrow f(c) = c$
d'après 1)

$\Rightarrow f(M) \neq M \Rightarrow f(M) = S_{(AB)}(M)$ d'après contradi

$\Rightarrow f = S_{(AB)}$

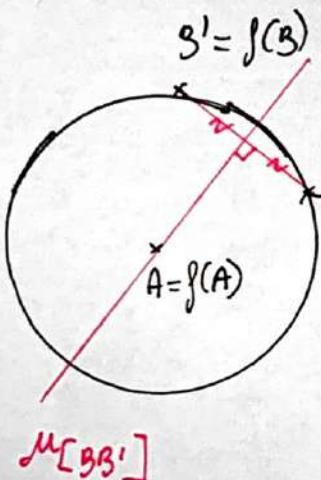
et que l'on vient de
voir pr c.

$$\boxed{S_{(AB)} \circ f : \begin{cases} A \rightarrow A \\ B \rightarrow B \\ C \rightarrow C \end{cases} \Rightarrow S_{(AB)} \circ f = Id}$$

* on compose $S_{(AB)}$
à gauche des 2 côtés

d) Mg isom fixant un point comme produit d'un plus de réflexions.

soit $f(A)=A$; indic $f=\sigma_1 \circ \sigma_2$, il suffit de mg $\sigma_1 \circ f = \sigma_2$



soit $B \neq A$,
 $B' = f(B)$

$\xrightarrow{1^{\circ} \text{ cas}}$
si $B' = B$
 $\Rightarrow f = Id$ (produit de 0 ou 2 fois une réflexion)

$S_{(B')} = B$ car $D = M[B B']$

$$\Rightarrow S_D \circ f(A) = A$$

$$S_D \circ f(B) = B$$

$S_D \circ f$ est une isométrie. (comme la composée de 2 isométries)

$$\Leftrightarrow S_D \circ f = \begin{cases} Id & f = S_D \\ \sigma\text{-réflexion} & f = S_D \circ \sigma \end{cases} \Leftrightarrow f = \begin{cases} f = S_D & * \\ f = S_D \circ \sigma & ** \end{cases}$$

* produit de 1 réflexion

** produit de 2 réflexions.

e) Conclure que l'isom est produit d'un plus de 3 réflexions.

si $f(A)=A'$ si $A=A' \rightarrow$ cf d'après d)

$$si f(A) \neq A' \quad \underbrace{S_{M[A A']}}_{\text{isométrie q fixe un point}} \circ f(A) = A$$

isométrie q fixe un point
 \Rightarrow produit d'un plus d'isom.

$$\Leftrightarrow \sigma_1 \circ f = \sigma_2 \circ \sigma_3 \Leftrightarrow f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$$

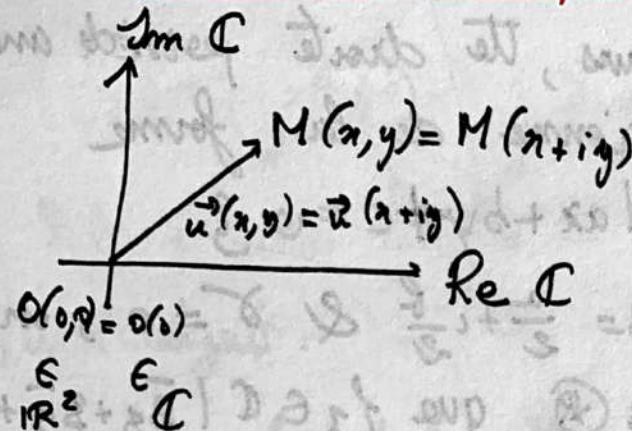
Toute isométrie est la composé d'un plus de 3 réflexions.

$\xrightarrow{2^{\circ} \text{ cas}}$ si $B' \neq B$, soit $D = M[B B']$ la droite
de $[B B']$

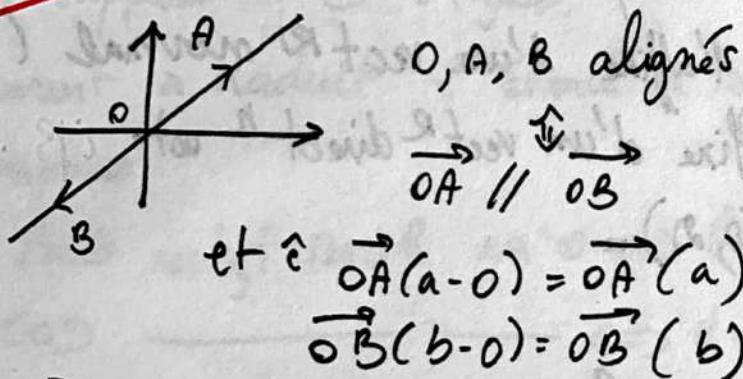
$S_D(A)=A$ car $A \in D$ car $AB=AB'$
car $AB=f(A)f(B)$ (f isométrie)

TD8 : Nombres Complexes

R



Ex1 (Drôles)



$$\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow a = \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$(\text{si } B \neq 0) \quad \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(si $B = 0$) pas de condition

$\overrightarrow{OY} : \overrightarrow{OA} \text{ & } \overrightarrow{OB}$ m tns si $A \in \mathbb{R}_+$.

si $B \neq 0$, A, O, B alignés (ds cet ordre)

ssi $a = \lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp. $\lambda \in \mathbb{R}^+$)

si "st" entre A & B .

$$a = \lambda b \Leftrightarrow \overline{ab} = \underbrace{\lambda \overline{b}}_{\lambda \in \mathbb{R}} \quad (\text{resp } \lambda \in \mathbb{R}^+) \quad | \lambda|^2 > 0$$

si $B = 0$ ($b = 0$)

A, O, B st alignés (l'0 entre A & B, pas "st")
et ds a cas $\overline{ab} = 0 \in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}_+$ & $\notin \mathbb{R}_+$.

en cl A, O, B alignés si $\overline{ab} \in \mathbb{R}$

2+, A, O, B ds cette ordre si $\overline{ab} \in \mathbb{R}$.

& $0 \in]A, B[$ si

↗ homog
 ↗ rotat
 ↗ homothétie

X5

2) Mg A n'est pas à 80° AO : 29

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 + \gamma = 0 \\ 2ax + 2by + r = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 + \gamma = 0 \\ 2ax + 2by + r = 0 \end{array} \right.$$

D'après le cours, la droite possède une équation cartésienne de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \mid ax + by + c = 0 \end{array} \right.$$

Indic : soit $\beta = a + ib$, $z = x + iy$,
 $a, b, x, y, \gamma \in \mathbb{R}$.

Qe est l'enu $\left\{ \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 + \gamma = 0 \right\}$?

Q' est l'lien entre $\bar{\beta}_3$ & $\bar{\beta}_3$?

Rép: $\bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_3$

$$\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 = 2 \cdot \operatorname{Re}(\bar{\beta}_3)$$

$$\rightarrow \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 = 2 \operatorname{Re}(\bar{\beta}_3)$$

$$= 2 \operatorname{Re}((a - ib)(x + iy))$$

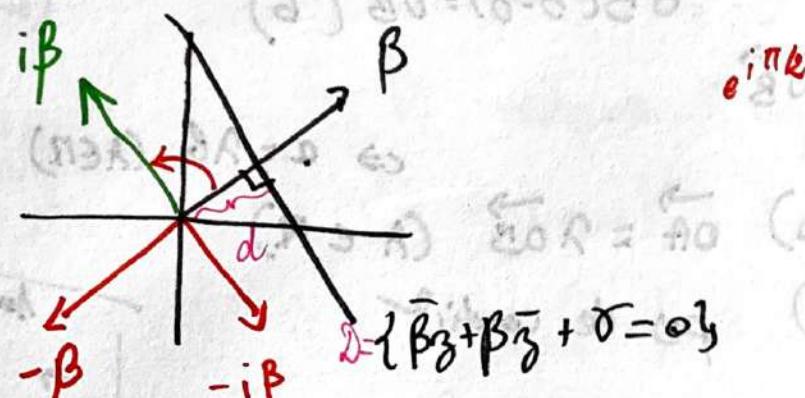
$$= 2 [ax + by]$$

produit scalaire " $\operatorname{Re}(\bar{\beta}_3)$ "

$$ax + by = \frac{\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3}{2} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

en posant $\beta = \frac{a}{2} + i\frac{b}{2}$ & $\gamma = c$, on trouve
 que d'après ④ que $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_3 + \gamma = 0\}$
 est une équation complexe de cette m^e droite.

RG: β est l'affine d'un vect^R nominal $(2(a, b))$
 & l'affine d'un vect^R direct n est $i\beta$.
 La diste $d(0, \beta) =$



16

$$\bar{z} = a - ib$$

conjugué de z

c) $a = \bar{a}i -$, $b = \bar{b}$, $\gamma = \bar{\gamma}$ N'importe

e) Déterm. les équations complexes qui définissent la m^e droite D . où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_1 z + \beta_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0 \\ \bar{\beta}_2 z + \beta_2 \bar{z} + \gamma_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{\lambda}{2} + \lambda i \right) \bar{z} + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda i \right) z - \lambda = 0 \right\}$$

ssi $\beta_1 \bar{\beta}_2 \in \mathbb{R}$ (q'a) \Leftrightarrow

$$(\Leftrightarrow \bar{\beta}_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbb{R}$$

Rq $\left\{ \bar{\beta}_1 z + \beta_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0 \right\} = \left\{ \bar{\beta}_2 z + \beta_2 \bar{z} + \gamma_2 = 0 \right\}$

$$\text{ssi } \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Leftrightarrow \beta_1 \gamma_2 = \beta_2 \gamma_1 \Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$$

$$\text{ssi } D: x + 2y = 1$$

f) Det. les équations compl. q defit droite $\parallel a^2$

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{1}{2} + i \right) \bar{z} + \left(\frac{1}{2} - i \right) z + \gamma = 0 \right\} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

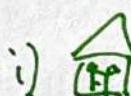
g) Det. \vec{D} , $\parallel a^2$ D q passe par O .

$$\vec{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{1}{2} + i \right) \bar{z} + \left(\frac{1}{2} - i \right) z = 0 \right\}$$

cas $\delta = 0$

h) Det. Eq. compl. q defin $\parallel a^2$ & passe par $A = (2, 1)$ et

$$\begin{aligned} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{1}{2} + i \right) \bar{z} + \left(\frac{1}{2} - i \right) z = \right. \\ \left. = \left(\frac{1}{2} + i \right) (\bar{z} + i) + \left(\frac{1}{2} - i \right) (z + i) \right\} \end{aligned}$$

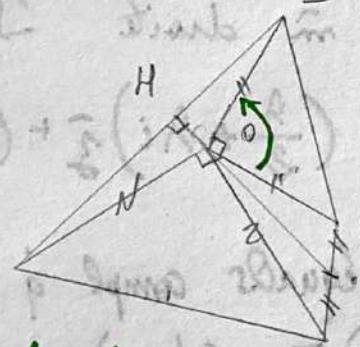


d) Équation complexe de D :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{1}{2} + i \right) \bar{z} + \left(\frac{1}{2} - i \right) z - 1 = 0 \right\}$$

$$a, b \rightarrow \frac{a}{2} + i \frac{b}{2}$$

Ex 2



a) M, O, H alignés.

Indic on note a, b, c, d les affixes des pts, A, ..., H
on supposant $O=0$ (zéro)

Comment se traduit l'énoncé en termes d'équations
complètes?

$\triangle AOB$ rectangle isocèle en $O \Leftrightarrow b = ia$ ($b = -ia$)
x et éventuellement inverse.

$\triangle COD$ $\Leftrightarrow d = ic$ ($d = -ic$)

M milieu de $[AD] \Leftrightarrow m = \frac{a+d}{2}$

$OH \perp BC \Leftrightarrow \pm ih(\overline{ab}) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow h(\overline{c-b}) \in i\mathbb{R}$

Ainsi si $b = ia$, $d = ic$; $-ib = a$

$$\Rightarrow m = \frac{a+d}{2} = \frac{i(-b+c)}{2} = i \cdot \frac{c-b}{2}$$

Ainsi $\overrightarrow{OM}(m) \perp \frac{\overrightarrow{BC}}{2} \left(\frac{c-b}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow (OM) \perp (BC)$$

col $(OH) = (OM)$ car $(OH) \perp (BC)$
cqfd.

Rq m chose + signe " $-$ " p $\frac{b}{2} = -ia$.

$$\Leftrightarrow \overline{b} = \overline{a} + \infty : Q \text{ in}$$

$$L = gL + \infty : Q \text{ in}$$

$$Q \text{ in } \text{argmax } L_{\text{exp}}(b)$$

$$\overline{g}\left(i+\frac{1}{2}\right) | \text{log} \{ -2\pi = 2\pi = gL + \infty | \text{arg } z(p)\} \}$$

$$0 = L - g\left(i-\frac{1}{2}\right) +$$

P12

Un cercle est invariant par les rotations du m^e centre que ce cercle.

D^M

$M \in \mathcal{E}(A, R)$, et $R_{A, \theta}$ est une isométrie à fine A

$$\Rightarrow R_{A, \theta}(A) R_{A, \theta}(M) = AM = R$$

$$\Rightarrow R_{A, \theta}(M) \in \mathcal{E}(A, R)$$

$$\Rightarrow R_{A, \theta}(\mathcal{E}(A, R)) \subset \mathcal{E}(A, R)$$

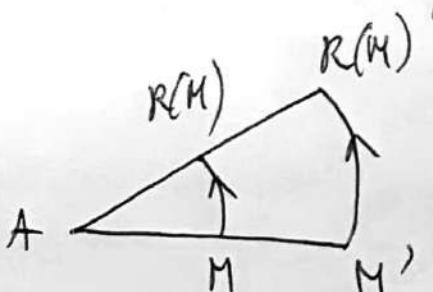
et c^o $R_{A, \theta}$ est une bijection & l'image vérifie la m^e chose:

$$R_{A, \theta}(\mathcal{E}(A, R)) \subset \mathcal{E}(A, R)$$

$$\Rightarrow R_{A, \theta}(\mathcal{E}(A, R)) = \mathcal{E}(A, R)$$

P13

$$R_{A, \theta} \circ H_{A, A} = H_{A, A} \circ R_{A, \theta}$$



M44

P14

$$R_{A, \theta}(B + \vec{u}) = R_{A, \theta}(B) + R_{\theta}(\vec{u})$$

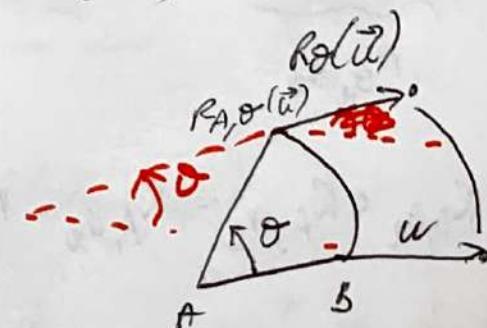
$$\text{de } R_{A, \theta} \circ T_{\vec{u}} = T_{R_{\theta}(\vec{u})} \circ R_{A, \theta}.$$

$$\underline{\text{D^M$$

$$= A + R_{\theta}(\vec{AB} + \vec{u})$$

$$= \underbrace{A + R_{\theta}(\vec{AB})}_{R_{A, \theta}(A + \vec{AB})} + R_{\theta}(\vec{u})$$

$$R_{A, \theta}(A + \vec{AB})$$



$$= R_{A, \theta}(B) + R_{\theta}(\vec{u}) = T_{R_{\theta}(\vec{u})} \circ R_{A, \theta}(B)$$

$$\text{et c^o } R_{A, \theta}(B + \vec{u}) = R_{A, \theta} \circ T_{\vec{u}}(B)$$

$$\begin{aligned}
 R_{A, \theta}(H_{A, A}(A + \vec{u})) &= R_{A, \theta}(A + \vec{x}\vec{u}) \\
 &= A + R_{\theta}(\vec{x}\vec{u}) = A + A R_{\theta}(\vec{u}) \\
 &= H_{A, A}(A + R_{\theta}(\vec{u})) = H_{A, A} = R_{A, \theta}(A + \vec{u})
 \end{aligned}$$

1

P15

M44

(i)

P15 $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_1 + \theta_2}$

$$= R_{A,\theta}(A_2) + M - A_2 = M + A_2 \underbrace{R_{A_1,\theta}(A_2)}_{\vec{u}} \\ = T_{\vec{u}}(M)$$

DM $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2}(M) = R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2}(A + \vec{AM})$

$$= R_{A,\theta_1}(A + R_{\theta_2}(\vec{AM})) \quad \underbrace{M}_{\vec{u}}$$

$$= A + \underbrace{R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2}(\vec{AM})}_{R_{\theta_1 + \theta_2}} = R_{A,\theta_1 + \theta_2}(A + \vec{AM})$$

Rq: $R_{A,\theta_1} \circ R_{A,\theta_2} = R_{A,\theta_2} \circ R_{A,\theta_1}$

P16 $R_{A,\theta} \circ R_{A,-\theta}$ est une translat.

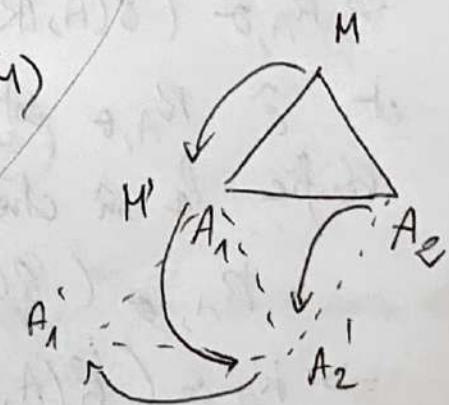
DM $R_{A_1,\theta} \circ R_{A_2,-\theta}(M) = R_{A_1,\theta}(A_2 + R_{-\theta}(\vec{AM}))$ si $A_1 = A_2$.

$$= R_{A_1,\theta}(A_2) + \underbrace{R_{\theta} \circ R_{-\theta}(\vec{AM})}_{\text{Id}}$$

$$\Rightarrow R_{A_2,\theta} \circ R_{A_1,-\theta} = T_{\vec{u}}$$

$$\text{ou } \vec{u} = A_2 R_{A_1,\theta}(A_2)$$

@ $R_{A_1,+60^\circ} \circ R_{A_2,-60^\circ}(M)$



Rq cette translat
est l'id

P17 si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ [2π]

$$\Rightarrow R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2} = R_{A_3, \theta_1 + \theta_2} \text{ mais}$$

d'après de A_3 en f de A_1, A_2, θ_1 & θ_2
n'est pas simple.

Alors $\exists! M$ tq $R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2}(M) = M$

si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ [2π]

Par conséquent

$$R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2}(M + \vec{u}) = R_{A_1, \theta_1}(R_{A_2, \theta_2}(M) +$$

$$\underbrace{R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2}(M)}_M + R_{\theta_1 + \theta_2}(\vec{u})$$

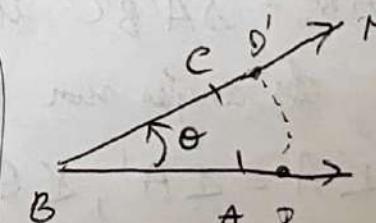
$$= R_{M, \theta_1 + \theta_2}(M + \vec{u})$$

P18 Ns avons la caractér. de la mesure algébr d'un angle [2π]:

$$\angle ABC = \theta \Leftrightarrow R_\theta(\vec{BA}) \parallel \vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow R_{B, \theta}(A) \in [BC]$$

$$\Leftrightarrow R_{B, \theta}([BA]) = [BC]$$



Dm Cherchons un point fixe de $R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2}$
M la forme $A + \vec{u}$.

$$R_{A_1, \theta_1} \circ R_{A_2, \theta_2}(A + \vec{u}) =$$

$$= R_{A_1, \theta_1}(A_2 + R_{\theta_2}(\vec{u})) \quad \text{si } A + \vec{u} \text{ fixe}$$

$$= R_{A_1, \theta_1}(A_1) + R_{\theta_1 + \theta_2}(\vec{u}) \stackrel{\checkmark}{=} A + \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow A_2 R_{A_1, \theta_1}(A_2) = (\text{Id} - R_{\theta_1 + \theta_2})(\vec{u})$$

Comme on a vu $(\text{Id} - R_{\theta_1 + \theta_2})(\vec{u})$ (prop 5)

$$\stackrel{\parallel}{\Rightarrow} \text{si } \vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \text{injective} \Rightarrow \text{invertible} \Rightarrow \exists! \vec{u} = (\text{Id} \circ R_{\theta_1 + \theta_2})^{-1}[A_1 R_{A_1, \theta_1}(A_2)]$$

(iii)

§22. Triangles

D1 Un triangle (non-dég) est la donnée d'un triplet de 3 pts (non alignés) appelés les sommets du triangle. On note $\triangle ABC$ le triangle dont les sommets sont (A, B, C) . Les côtés de ce triangle sont les segts $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ & ses droites les côtés (AB) , (BC) , (CA) .

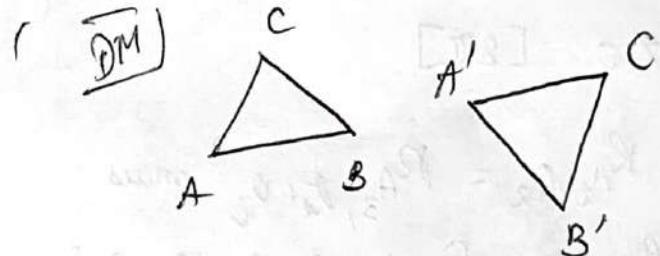
D2 2 triangles $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ sont dits égaux & on note $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ ssi si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.

\triangle autre sommets

\rightarrow égalité aussi de \cong , \sim , \triangle

D3 Si $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ alors on a les égalités des angles non orientés

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'.$$

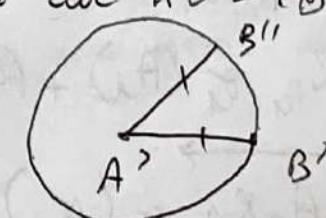


idée: Les isométries préserrent les angles (prop.) et on va démontrer que $T_{AA'} \circ R_{A', \theta} \circ T_{A'A}$ est une isométrie f_{AB}
 $T(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.
 (Isométrie) Rotat. \circ Translat.

$$\text{soit } T_{AA'}(B) = B'' \Rightarrow A'B'' = AB$$

$$\bullet R_{A', \theta}(B'') = B' \text{ existe car } A'B'' = AB = A'B'$$

$$\theta = \angle B''A'B'$$



$$\bullet R_{A', \theta} \circ T_{AA'}(C) = C''$$

si C' du m^e côté que $C'' \parallel (A'B')$

$$\text{trom } S = f_{AB}$$

On pose $T = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{A,A'}$

$$T(A) = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{A,A'}(A) = A'$$

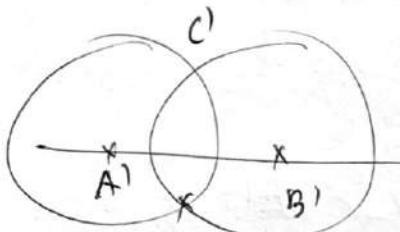
$\underbrace{A'}_{A'}$ $\underbrace{A'}_{A'}$

$$T(B) = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{A,A'}(B) = B'$$

$\underbrace{B''}_{B''}$ $\underbrace{B'}_{B'}$

$T(C) = C'''$ est un point du m̂e côté C'
par rapport à $(A'B')$ et $C'''A' = CA = C'A'$
 T isométrie $C'''B' = CB = C'B'$

$$\Rightarrow C''' \in \ell(A',C') \cap \ell(B',C') \Rightarrow C''' = C$$



alors on a bien construit
une isom. T tq

$$T(A, B, C) = A', B', C'$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$$

$$\angle C = \angle C'$$

ASSE :

$$1) \circ \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

$$\angle C = \angle C'$$

$$2) \circ AB = A'B' \text{ ainsi } \angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$$

DM

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' \xrightarrow{\text{prop}} \angle A = \angle A'$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow \textcircled{3}$$

$$3) AB = A'B', AC = A'C', \angle A = \angle A'$$

4) $\triangle A'B'C'$ est l'image d'une isom. de $\triangle ABC$.

$$\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{1}$$

par définition

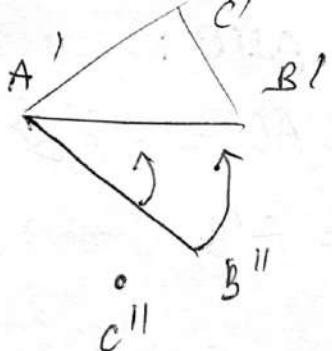
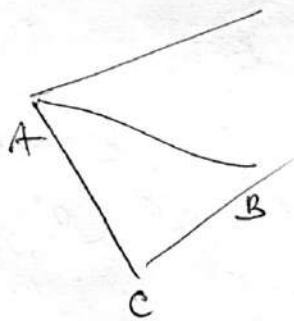
$$\text{Mq } \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

On construit T exactement à ds la démo de 5)

i.e. $T = S \circ R_{A',\theta} \circ T_{A,A'}$ de sorte que

$$T(A) = A', T(B) = B' \text{ et } T(C) \in C \text{ et}$$

de m̂e côté.

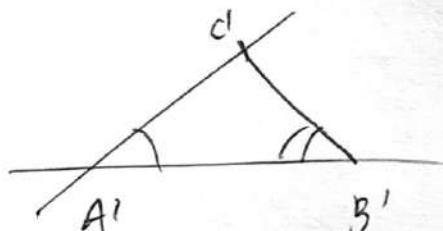


La droite d'alignement à droite est $T(C) = C$

② + T préserve la droite de les angles.

C' & $T(C)$ est de om coté de $(A'B')$
& $\angle C'A'B' = \angle CAB = \angle T(C)A'B'$

& $\angle C'B'A' = \angle CBA = \angle T(C)B'A'$



ainsi $T(C) \in [A'C']$
 $T(C) \in [B'C']$

$\Rightarrow T(C) \in [A'C'] \wedge [B'C'] = \{C'\}$
 $\Rightarrow T(C) = C' . \quad \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{4}$

Pour ③ , m procédure :

$$\angle C'A'B' = \angle CAB = \angle T(C)A'B'$$

$$\Leftrightarrow T(C) \in [A'C']$$

$$\& \text{d}+ C'A' = CA = T(C)A'$$

$$\Rightarrow T(C) \in \delta(A', C) \cap [A'C] = \{C'\}$$

$$\Rightarrow T(C) = C' \quad (\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4})$$

27 2 triangles $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$



(v)

EEx Polygones Réguliers

Ex 5 Conditions géométriques.

a) condition nécessaire, suffisante ou affixes a, b, c de 3 points A, B, C du plan complexe tel que $\triangle ABC$ soit équilatéral.

$$a, b, c \in \mathbb{C} \quad (a = x_A + iy_A, \dots)$$

où $A = (x_A, y_A)$

Idée 1 : $| \angle A | = | \angle B | = | \angle C | = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{a-c}{a-b}\right)$

Idée 2 : $|AB| = |BC| = |CA|$

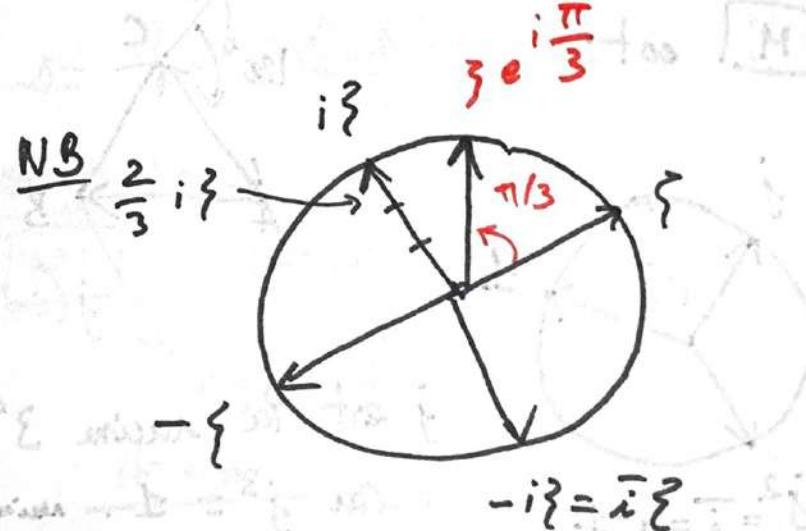
$$\Leftrightarrow |b-a| = |c-b| = |a-c|$$

Indic : $\triangle ABC$ équilatéral "direct"

m. $R_{A, 60^\circ}(B) = C$

m. $R_{60^\circ}(\vec{AB}) = \vec{AC}$

m. $e^{i\pi/3}(b-a) = (c-a)$



si $e^{i\pi/3}(b-a) = (c-a)$ triangle direct.
m. $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(b-a) = (c-a)$ égal

Dans le cas "indirect" $R_{A, -60^\circ}(B) = C$

m. $R_{-60^\circ}(\vec{AB}) = \vec{AC}$

m. $e^{-i\pi/3}(b-a) = (c-a)$

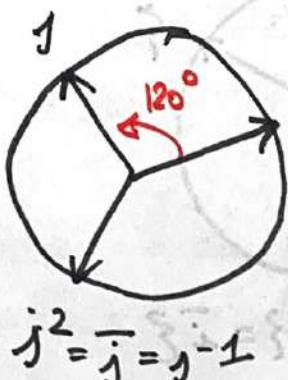
$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow e^{i\pi/3}(c-a) = (b-a)$

bonne $[M]$ est

$$= e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$j^3 = 1$$



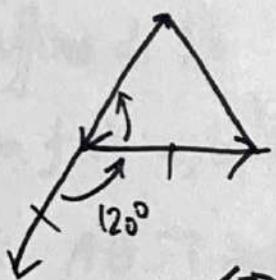
$$j^2 = \overline{j} = j^{-1}$$

$$\boxed{a + jb + j^2c = 0} \Leftrightarrow a + jb - (1+j)c = 0$$

$$1 + j + j^2 = 0$$

$$(a-c) = j(c-b)$$

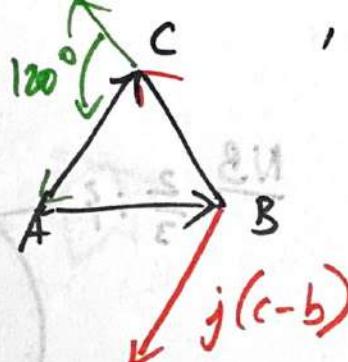
\uparrow
affine(\overrightarrow{BC})



$$\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0$$

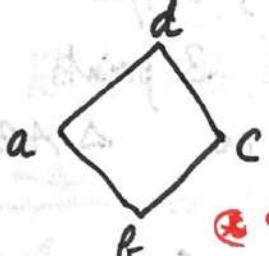
Dans cas indirect, $c + jb + j^2a = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{a + j^{-1}b + j^{-2}c = 0}$$



j est la racine 3° de l'unité
car $j^3 = 1$. $\min_j \frac{1}{j}$
 $"j = \sqrt[3]{1}"$

b) Cherchons des conditions nécessaires sur affines a, b, c, d telles que A, B, C, D forment un rectangle.



$$e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a) = (d-a)$$

$$\Leftrightarrow i(b-a) = (d-a)$$

* $i(c-b) = (a-b)$ dans le cas indirect
* $i(d-c) = (b-c)$
* $i(a-d) = (c-d)$ il suffit de

- soit changer l'ordre pts.

- soit remplacer i par $-i = \bar{i}$

* $(b-a) = (c-d)$

* $(c-b) = (d-a)$

* $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Leftrightarrow a+c = b+d$

} $ABCD$
parallélogramme

1 condition \otimes parmi * est suffisante

$\boxed{180}$ i est la racine 4° $i = e^{i\frac{\pi}{4}}$

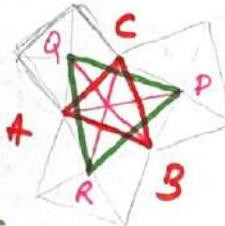
Ex7 Mg AP \perp QR

$$BQ \perp RP$$

$$CR \perp PQ$$

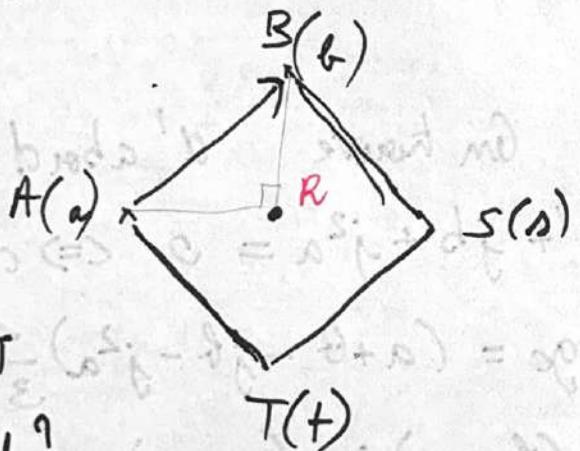
$$\text{ed } AP, BQ, CR$$

concurrents.



Comme le pb est invariant par symétrie axiale (q change l'orientation) on peut supposer A, B, C direct et a, b, c dessin.

QD:



Qd si les affines de ST sont les affines de a, b ?
on f de a, b ?

Si $ABST$ indirect

(a à droite de \overrightarrow{AB})

$$\begin{aligned} -i(b-a) &= (t-a) \\ t &= a - i(b-a) \\ &= (1+i)a - i b \end{aligned}$$

$$(T = A + R_{-90^\circ}(\overrightarrow{AB}))$$

$$s = b + i(a-b) = ia + (1-i)b$$

Trouver r :

[M1]

$$i(b-a) = (a-b)$$

$$R_{90^\circ}(\overrightarrow{RB}) = \overrightarrow{RA}$$

$$\frac{ib-a}{i-1} = r$$

[M2]

$$r = \frac{a+s}{2} = \frac{a+ia+(1-i)b}{2} = \frac{(1+i)a+(1-i)b}{2}$$

A vérifier

$$\frac{ib-a}{i-1} = \frac{(1+i)a+(1-i)b}{2}$$

$$\text{Ainsi } r = \frac{ib-a}{i-1}, p = \frac{ic-b}{i-1}.$$

$$q = \frac{ia-c}{i-1}$$

[81]

[58]

Pr $\text{dmg } (AP) \perp (QR)$, $|AP|=1$
il suffit de vérifier $R_{g_{\partial}}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{RQ}$

$$\Leftrightarrow i(p-a) = (q-a).$$

$$\bullet \quad i(p-a) = i\left(\frac{ic - b - a(i-1)}{i-1}\right)$$

$$= (-c - ib - ia(i-1)) \times \frac{1}{i-1}$$

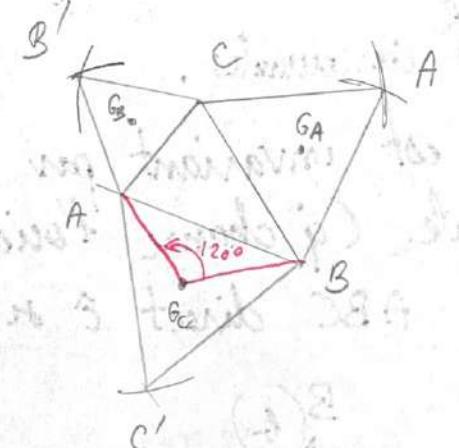
$$= (-c - ib + ia + iac) \frac{1}{i-1}$$

$$\bullet \quad q-a = \frac{ia - c - ib + a}{i-1} = \text{idem} = i(p-a)$$

De m⁺ pu 2 autres.

En cl, comme (PA) , (RD) , (QB)
st les droites des hauteurs du triangle
 $PQR \Rightarrow$ elles sont concurrentes
en H orthocentre du $\triangle PQR$.

Ex6 Triangle de Napoléon
& point de Torricelli



mit a, b, c, a', b', c'
 g_A, g_B, g_C
affines.

M^I] On trouve d'abord c'

$$c' + jb + j^2a = 0 \Leftrightarrow c' = -jb + j^2a$$

$$\Rightarrow g_C = (a + b - jb - j^2a) \frac{1}{3}$$

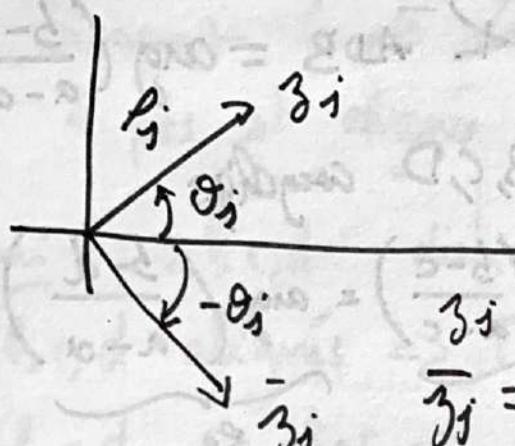
M^{II}] $(b - g_C)j = (a - g_C) \Rightarrow g_C = \frac{jb - a}{j - 1}$

$$\text{De m}^+ \quad g_A = \frac{jc - b}{j - 1}, \quad g_B = \frac{ja - c}{j - 1}$$

il suffit de vérifier

$$\hookrightarrow g_A + jg_B + j^2g_C = 0$$

RQ: a, b, c, d distincts



$$z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$$

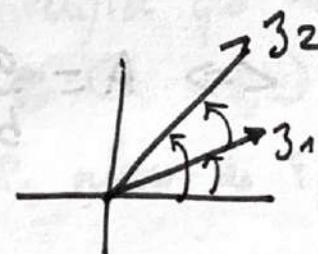
$$\bar{z}_j = \rho_j e^{-i\theta_j}$$

$$z_1 + z_2 \leq \arg_{\text{med}}$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{1}{z_1} = \rho_1^{-1} e^{-i\theta_1}$$

$$-z_1 = \rho_1 e^{i(\theta_1 + \pi)}$$



$$\angle z_2 \circ z_1 = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$= \arg(z_1 \bar{z}_2)$$

$$\begin{array}{ccc} A & C & D \\ \times & \times & \times \end{array} \quad \frac{a-c}{b-c} < 0$$

Exo (Binairements)

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{C}$$

a) Mg si g pts alignés alors binairement est réel.

→ on sait a, b, c alignés distincts on $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$
& par ailleurs $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ on $c \in [AB]$

Ainsi comme a, b, c, d alignés

$$\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}, \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R} \Rightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}^+$

on (a, b, c, d) alignés.

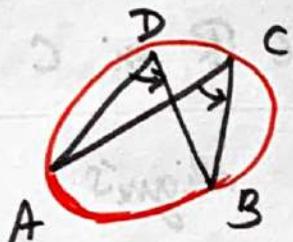
si $\frac{a-c}{b-c}, \frac{b-d}{a-d}$ de m signe

si $C, D \in [A, B]$ ou $C \& D \notin [AB]$

b) Mg si 4 pts cocycliqs alors pr
binappart est un nbre réel. Ds
quel cas le binappart est \oplus ?

R3 A, B, C, D cocycliqs \Rightarrow

$$\angle ACB = \angle ADB \pmod{\pi}$$



Et comme $\angle ACB = \angle(\vec{CA}, \vec{CB})$

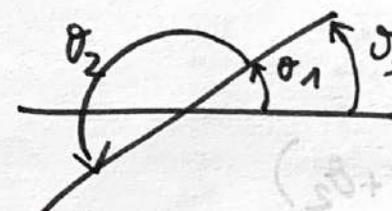
$$\begin{aligned} \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) &= \arg(b-c) - \arg(a-c) \\ &= \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \end{aligned}$$

$$(a-c)e^{i\theta} \neq b-c \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} = \rho e^{i\theta}$$

$$\text{Donc } \arg ADB = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right)$$

Ainsi A, B, C, D cocycliqs

$$\Rightarrow \underbrace{\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)}_{e_1} = \underbrace{\arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right)}_{e_2} \pmod{\pi}$$



$$\Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} = \frac{b-d}{a-d}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} = [a, b, c, d] \in \mathbb{R}^*$$

c) Mg binappart 4 pts nel
ssi 4 pts st alignés ou cocycliqs.

Résumé : a, b, c, d distincts

a, b, c, d alignés $\Rightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$

a, b, c, d cocycliqs $\Rightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$

\Leftarrow
non alignés Qs 4.

Ainsi il nous reste à vérifier que si
3 points alignés ($\Leftrightarrow @ a, b, c$)

& $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ alors les 4 aligné.

Supposons a, b, c, alignés & $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$
alors d $\in \mathbb{R}$ m droite (a & c).

a, b, c alignés $\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$

$\frac{b-d}{a-d} = \underbrace{[a, b, c, d]}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\frac{b-c}{a-c}}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow a, b, d$ alignés
 $\Rightarrow a, b, c, d$ alignés.
85 $\Rightarrow a, b, c$ alignés.

d) Mg 4 pts d'affres non nuls
st alignés alors l'ns images par
 $\frac{1}{3}$ st alignés ou cocycliqs.

$$\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right] =$$

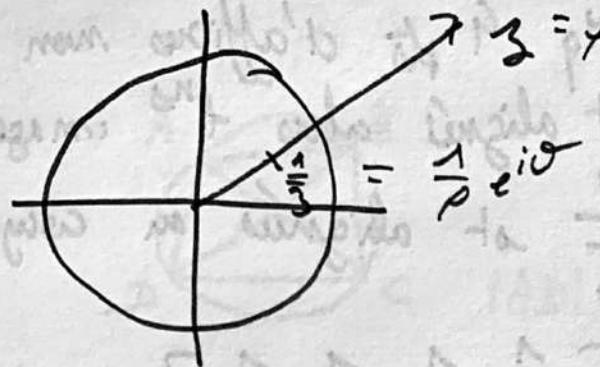
$$= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \times \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}$$

$$= \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} / \overline{abcd}$$

$$= \overline{[a, b, c, d]} \in \mathbb{R} + c)$$

a)

congugne nel = nel



$$\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg(\bar{z}) = \arg(z)$$

$$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|}$$

e) \rightarrow

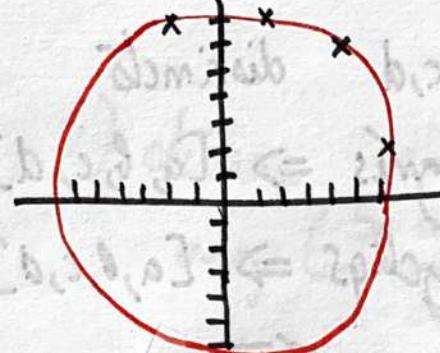
(ii) my 3 pts are aligned
conclue in cocyclic!

$$\hat{c} \frac{b-c}{a-c} = \frac{-3+i}{-6} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow a, b, c, d$ non aligned

\Rightarrow cocyclics.

f) My points $-2+6i, 1+7i, 4+6i, 6+2i$ are cocyclics



(i) Checkons $\arg [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$

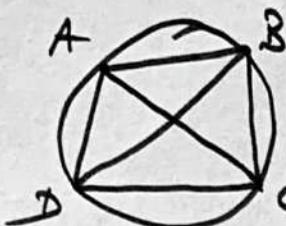
$$\frac{c-a}{b-a} : \frac{d-a}{b-a} = \frac{c-b}{a-b} : \frac{d-b}{a-b}$$

$$\begin{aligned} (b-c)(a-d) &= (-3+i)(-8+4i) \\ &= 20 - 20i = 20(1-i) \end{aligned}$$

$$(a-c)(b-d) = -6(-5+5i) = 30(1-i)$$

$$[a, b, c, d] = \frac{20(1-i)}{30(1-i)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

Ex) (Th de Ptolémé & ^{PT} wychs) car $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$$a) \text{Mq } |AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD|$$

induc calcul $(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)$
~~= $b-d - bc + ad + ac + dc - df - ac + ab$~~
 $= -bc - ad + dc + ab$
 $= (c-a)(d-b)$

b) démon

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \pmod{\pi}$$

$$"\Rightarrow" \text{ si } \frac{b-a}{d-a} = -A \frac{(b-c)}{d-c}, A \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) + \pi \quad [2\pi]$$

comme A, B, C, D convexe

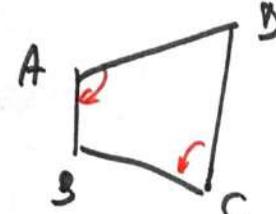
On appliq l'inégalité entre les modules (triang?)

$$|(c-a)(d-b)| = |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)| \leq |...| + |...|$$

$$\& "=" \text{ si } (b-a)(d-c) = \lambda (d-a)(c-b)$$

$$\& \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow \angle DAB$ & $\angle DCB$ st de direct opposées. Ainsi si on considère $\arg \in]-\pi, \pi[$.



Ns savons que $\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) \& \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right)$

sont l'un dans $]-\pi, 0]$ l'autre $[0, \pi]$

& si $\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \pmod{\pi}$

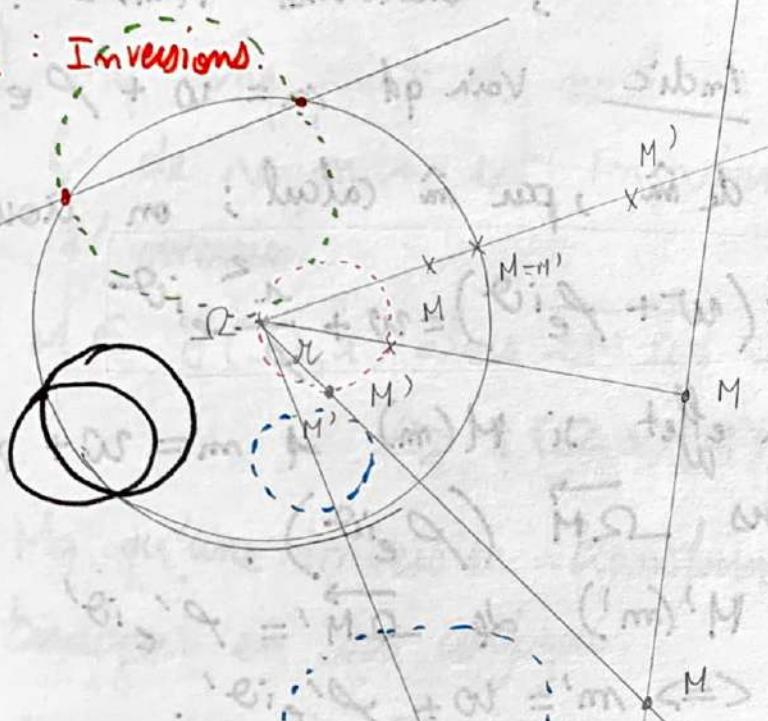
$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \pm \pi \pmod{2\pi}$

cqd

Inversions

Ex II

Inversions



Inversion

symétrie par rapport à

droite \rightarrow cercle
cercle \rightarrow droite

cercle \rightarrow cercle

droite \rightarrow droite.

si rapport
obtenu au contraire

$$\frac{r}{w-m} + w = ((w-m) + w)i =$$

Énoncé Une inversion $i(\Omega, r)$ de centre Ω , $r \in \mathbb{R}_+^*$.
ds $P \setminus \{\Omega\}$; $M \mapsto M'$.

$$\begin{cases} M' \text{ n'est pas } \Omega \\ \Rightarrow \overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2 \end{cases}$$

a) Déterminer l'image de $i(\Omega, r)$

$$D_i = P \setminus \{\Omega\}. \quad \text{et} \quad i(D_i) = D_i$$

\rightarrow Soit $M \in D_i$, on pose $M' = i(M)$ l'unique point de $[\Omega M]$ à distance $\frac{r^2}{\Omega M}$ de Ω .

Ainsi $M = i(M')$ car $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2$

$$\Rightarrow M \in i(D_i).$$

Par passage on a démontré $i(i(M)) = M \Leftrightarrow f$

l'inversion est involutive.



c) en identifiant plan \mathcal{P} de \mathbb{C} , donner • cas général:
 exprime $i : (0,1)$ puis $i(w, 1)$ $i = i(w, x)$, cherchons $i(m) = ?$

$\forall w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*$.

• cas de l'inverse & celle unité.

$i = i(0,1)$, $M(m)$, $m \in \mathbb{C}$, $m = \rho e^{i\theta}$
 $\Omega(w)$, $w \in \mathbb{C}$

Indic Voir qt $m = w + \rho e^{i\theta}$.
 de \hat{m} , par \hat{m} calcul ; on trouvera

$i(w + \rho e^{i\theta}) = w + \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta}$

$i(\rho e^{i\theta}) = \rho' e^{i\theta}$, mais comme $M' \in [\mathcal{L}M]$ En effet si $M(m) \dashv m = w + \rho e^{i\theta}$.
 $\Leftrightarrow \arg M' = \arg M \Rightarrow \theta' = \theta$. alors $\overrightarrow{\Omega M'} (\rho e^{i\theta})$.

$i(\rho e^{i\theta}) = \rho' e^{i\theta}$, de $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$ Si $M'(m')$ $\dashv \overrightarrow{\Omega M'} = \rho' e^{i\theta'}$
 $\Leftrightarrow m' = w + \rho' e^{i\theta'}$.

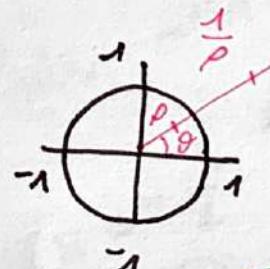
Comme on sait que $\overrightarrow{\Omega M} \parallel \overrightarrow{\Omega M'} \Rightarrow \theta = \theta'$
 et $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2 > 0$.

Et comme $|\overrightarrow{\Omega M}| / |\overrightarrow{\Omega M'}| = r^2 \Rightarrow \rho' = \frac{r^2}{\rho}$.

alors $i(w + \rho e^{i\theta}) = w + \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta} = w + \frac{r^2}{\rho e^{i\theta}}$

$i(m) = w + \frac{r^2}{m-w}$

car $i(m) = i(w + (m-w)) = w + \frac{r^2}{m-w}$



(90)

$$\underline{R9}: i(w, r) = T_w \circ H_{\Omega, r^2} \circ i \circ T_{-w}^{-1}$$

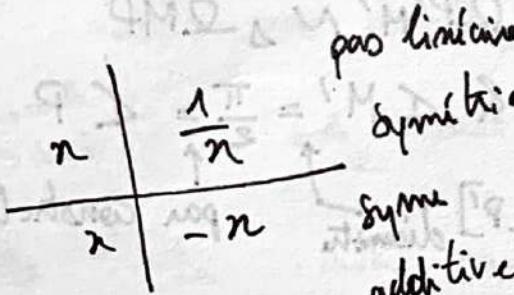
d) Mg chq point du cercle de centre Ω & de rayon r est invariant par l'inversion.

- \bullet si $M \in \mathcal{C}(\Omega, r)$ alors $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M} = \Omega M \cdot \Omega M = r^2$
 $\Rightarrow i(\Omega, r)(M) = M$.

e) Mg qu'une inversion transforme un binapport en son conjugué.

Indic: $i(w, r) = T_w \circ H_{\Omega, r^2} \circ i \circ T_{-w}$

binapport: T, H invariant
 \Leftrightarrow inv. régulier: \Leftrightarrow conjugué binapport.



pas linéaire
symétrique multiplicative.

si $z = \frac{1}{\bar{z}}$ alors
cycloïde.

symme additive

$$\text{binapport: } [a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}$$

$$\text{ainsi } [a+3, b+3, c+3, d+3] = [a, b, c, d]$$

$$\text{car } (a+3) + (c+3) = a+c, \text{ d'apr\acute{e}s...}$$

$\Rightarrow [a, b, c, d]$ invariant par $T_3 \circ T_3$

$$[\mu a, \mu b, \mu c, \mu d] = \frac{\mu(a-c)}{\mu(b-c)} \cdot \frac{\mu(b-d)}{\mu(a-d)} = [a, b, c, d]$$

$\Rightarrow [a, b, c, d]$ invariant par $H_{\mu, \mu}$. ($\mu = r^2$)

$$\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right] = [a, b, c, d] \quad \text{d'apr\acute{e}s ex. 10.1)$$

R9 si $[a, b, c, d] \in R$

$$\Rightarrow [i(a), i(b), i(c), i(d)] = \frac{[a, b, c, d]}{[a, b, c, d]} \in R$$

dc si a, b, c, d alignés ou alignés

$\Rightarrow i(a), i(b), i(c), i(d)$ de m.

$$z \rightarrow \frac{1}{z}$$

$$z \rightarrow \frac{1}{z} \rightarrow \frac{1}{z} \text{ g\'eom\'etrique}$$

Soit

Ainsi l'image d'une droite ou d'un cercle est contenu ds une droite ou un cercle.

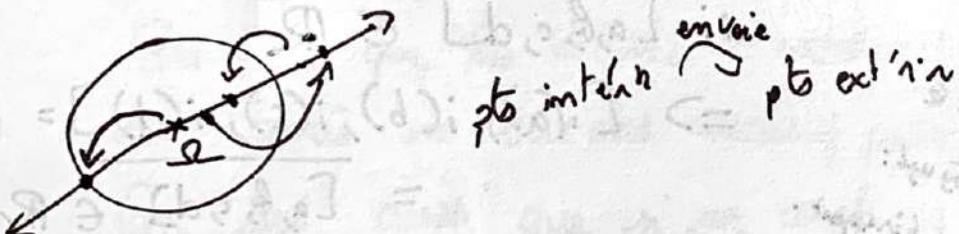
j) Mo inversion préserve les droites q passent par ∞ .

D'après la déf^e: $i(\{\infty\}) \subset [\infty M]$

$$\& \tilde{c}^2 = id \Rightarrow i([\infty M]) = [\infty M]$$

sp $D \ni \infty \Rightarrow D_+ \sqcup D_- \text{ 2 } \frac{1}{2} \text{ droites}$

$$i(D \setminus \infty) = i(D_+ \sqcup D_-) = D_+ \sqcup D_- = D \setminus \{\infty\}$$



g) Mo qu'elle envoie une droite q ne passe pas par ∞ sur une cercle q passe par ∞ .

soit la projectio orth.

$P \in \infty$ sur droite $D \ni \infty$.

soit $P' = i(\infty, \nu)(P)$

$$\text{ie } \infty P \perp \infty P' = \nu^2, P' \in [\infty, \nu]$$

soit C cercle de diamètre $[\infty P']$

$$\& C^* = C \setminus \infty$$

et ainsi $\forall M \in D$, notons $M' = [\infty M] \cap C^*$
(\exists ' existence vient du fait que $(\infty M) \times D \rightarrow$
 \Rightarrow non tangent à C .

Et maintenant $\Delta \infty P' M' \sim \Delta \infty M P$

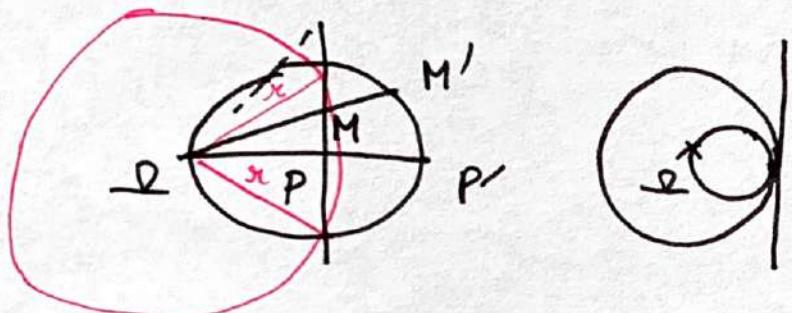
car $\angle \infty$ commun & $\angle M' = \frac{\pi}{2} = \angle P$

$[\infty P']$ diamètre ↑↑
par constatation

$$\Rightarrow \frac{\Omega P'}{\Omega M'} = \frac{\Omega M}{\Omega P} \Rightarrow \Omega M' \cdot \Omega M = \Omega P' \cdot \Omega P = r^2$$

$$\Rightarrow i(\Omega, x)(M) = M'$$

$$\Rightarrow i(D) = \gamma^*, \quad i(\beta^*) = D$$



a) Montrons qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par Ω sur un cercle qui ne passe pas par Ω .

On sait que les droites s'envoient sur des droites ou sur des cercles qui passent par Ω .

On sait aussi que si un cercle s'envoie sur une droite, $\hat{i}^2 = id$, cette droite s'envoie sur le cercle.

autre cercle
autre droite

cercle \rightsquigarrow droite

droite \rightsquigarrow droite

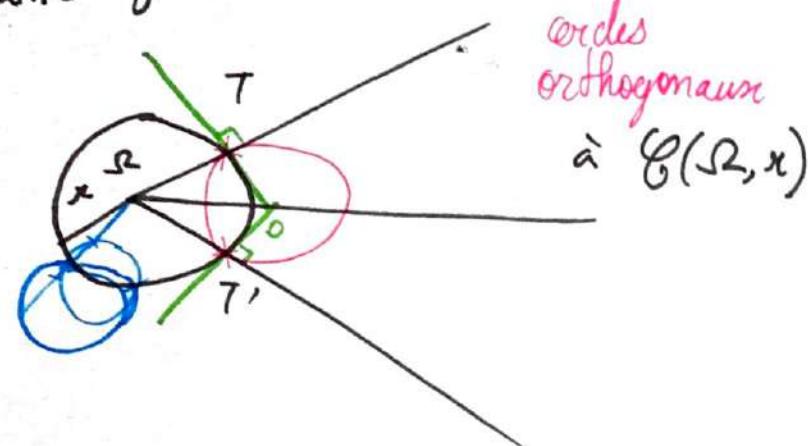
droite \rightsquigarrow cercle

cercle \rightsquigarrow droite \rightsquigarrow cercle
(93)

et ainsi un cercle qui ne passe pas par Ω ne peut pas s'envoyer sur une droite. Mais nous avons vu que l'image d'un cercle est une droite ou un cercle, donc dans notre cas c'est un cercle. Et par ailleurs : $i(\gamma) = \gamma'$ et $\Omega \notin \gamma$
 $\Rightarrow \Omega \in \gamma'$ car $i(\gamma') = \gamma$ est une droite.

i) Quels sont les cercles invariants par $i(\Omega, x)$.

- $B(\Omega, r)$ est invariant car composé de points fixes.



Ex 13

