Résolvons l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right)y = 1 \tag{1}$$

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Dérivons deux fois f :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Alors f est solution de (1) si et seulement si

$$x^2 \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 4x \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n + \left(2 - x^2\right) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + 4 \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} 2a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n \geq 1} na_n x^n + \sum_{n \geq 0} 2a_n x^n - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow 4a_1x + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n \geq 2} na_n x^n + \sum_{n \geq 2} 2a_n x^n - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow 4a_1x + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n + 4na_n x^n + 2a_n x^n - a_{n-2} x^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow 6a_1x + 2a_0 + \sum_{n \geq 2} x^n[n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}] = 1$$

$$a_n\left(n^2 + 3n + 2\right) - a_{n-2} = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+3)(n+4)}$$

Par unicité du développement en série entière, on déduit de l'équation précédente la caractérisation suivante de $(a_n)_n$:

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_{n+2} &= \dfrac{a_n}{(n+3)(n+4)} \end{cases}$$

Voici les premiers termes de cette suite :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} & a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2.3.4} & a_3 &= 0 \\ a_4 &= \frac{1}{2.3.4.5.6} & a_5 &= 0 \end{aligned}$$

bref u_n=blablabla
Or on sait que

EX

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2(n+1))!} x^{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cosh x \end{aligned}$$

Montrer que $\sum_{n \geq 0} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} \quad |x| < 1.$

On a $\sum_{n \geq 0} 2nx^{2n} = x \sum_{n \geq 0} 2nx^{2n-1}$ et

$$\sum_{n\geq 0} 2nx^{2n-1} = \sum \left(x^{2n}\right)' = \left(\sum x^{2n}\right)' = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$ et donc

$$\sum_{n\geq 0} 2nx^{2n} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\cdot x = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad |x|<1.$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geq 0}\int_0^x t^{2n}dt = \int_0^x\sum_{n\geq 0} t^{2n}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt \;= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+t)+C]_0^x \;+\frac{1}{2}[\ln(1-t)+K]_0^x, (C, K\in\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

3) Soit la série $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n}x^n.$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier la convergence sur le cercle de conv.

D'après le critère de Cauchy, calculons la limite pour $a_n = n^{(-1)^n}$: $(a_n)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{(-1)^n}{n}}$

Passons sous la forme exponentielle :

$$n^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\frac{(-1)^n}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ (par croissance comparée)}$$

D'où le rayon de convergence vaut $R = \dfrac{1}{1} = 1.$

Etudions les cas en $x = -1$. $f(-1) = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n}(-1)^n$

En posant $a_n = n^{(-1)^n}(-1)^n$, $a_{2k} \nrightarrow 0$. Donc la série diverge.

Etudions les cas en $x = 1$. $f(1) = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n}(1)^n$

En posant $a_n = n^{(-1)^n}(1)^n,\ a_{2k} \nrightarrow 0$. Donc la série diverge.

EXOEX

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$$
$$f(x) = \sum_{n \geq 1} (2n)^{(-1)^{2n}} x^{2n} + \sum_{n \geq 1} (2n+1)^{(-1)^{(2n+1)}} x^{2n+1}$$
$$f(x) = \sum_{n \geq 1} 2nx^{2n} + \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$f(x) = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \quad + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall\ |x| < 1.$$

exos suivants : 7 et 8

F. de Cauchy : $\forall r \in]-R, R[: a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$

Id. de Parseval : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 = \sum |a_n|^2 r^{2n}$.

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$$

1) Appliquer Parseval à $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1-re^{i\theta}} \right|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1-re^{i\theta}} \right| \left| \frac{1}{1-re^{i\theta}} \right|$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

$$|1-re^{i\theta}|^2 = |1-r\cos\theta - ri\sin\theta|^2 = \sqrt{(1-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}^2$$
$$= 1-2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1+r^2-2r\cos\theta$$

Utiliser Parseval pour mq :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos\theta} d\theta$$

$$\implies \frac{1}{3} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos\theta} d\theta \quad \square$$