**M44 — Fiche 3 — Exercices corrigés**

*Les énoncés sont ceux de la fiche "TD3 : angles".*
*Les exercices non-traités sont laissés en travail personnel.*
*Les figures se trouvent à la fin du corrigé.*

Comme on l'imagine bien, les exercices sur les angles font un très grand usage des quatre propriétés fondamentales suivantes : (I). dans tout triangle, la somme des angles internes est égale à cent quatre-vingt degrés (soit $\pi$ radians en langage mathématique… mais les élèves de l'école primaire et du collège ne connaissent pas le radian) ; plus généralement, dans tout polygône convexe à $n$ sommets, la somme des angles internes est $(n-2)\pi$ radians. (II). Lorsque deux droites se coupent (ce qui donne une figure semblable à la lettre "X"), les angles opposés par le sommet ont même mesure, et les angles adjacents ont $\pi$ pour somme. (III). Lorsque la droite $d$ coupe les deux parallèles $\delta$ et $\delta'$ (ce qui donne une figure semblable au symbole "$\neq$"), l'angle "en bas à gauche" et l'angle "en haut à droite" ont même mesure. (IV). Lorsqu'un triangle a deux côtés égaux, les angles internes adjacents à ces côtés ont même mesure (corollaire : les angles internes de tout triangle équilatéral valent $\pi/3$ radians). Ce dernier point montre que les définitions "un triangle est isocèle s'il a deux côtés égaux", "un triangle est isocèle s'il a deux angles égaux" sont équivalentes. Cette équivalence s'appelle *pont-aux-ânes* (*pons asinorum* en latin) parce que dans l'enseignement antique de la géométrie, elle était le premier résultat qui posât problème aux élèves peu doués (ces "ânes" ne franchissaient pas ce "pont").

**Exercice 1.**

Dans les triangles $(ABD)$ et $(ABE)$, la propriété (I) s'écrit

$$(1) \qquad \widehat{BAD}+\widehat{DBA}+\widehat{ADB}=\pi, \qquad \widehat{AEB}+\widehat{BAE}+\widehat{EBA}=\pi.$$

Par construction, nous avons également les relations

$$(2) \qquad \widehat{DBA}=\widehat{CBA}-2\widehat{CBF}, \qquad \widehat{BAE}=\widehat{BAC}-2\widehat{FAC}.$$

Ajoutons les deux égalités de (1) et remplaçons-y les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{BAE}$ par leurs valeurs qui sont fournies par (2) : tenant compte des égalités $\widehat{BAD}=\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABE}=\widehat{ABC}$, cela donne

$$\widehat{BAD}+\widehat{DBA}+\widehat{ADB}+\widehat{AEB}+\widehat{BAE}+\widehat{EBA}=2\pi$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{CBA}-2\widehat{CBF}+\widehat{ADB}+\widehat{AEB}+\widehat{BAC}-2\widehat{FAC}+\widehat{CBA}=2\pi$$

soit, en réorganisant les termes,

$$\widehat{ADB}+\widehat{AEB}+2(\widehat{CBA}-\widehat{CBF})+2(\widehat{BAC}-\widehat{FAC})=2\pi.$$

Puisque $\widehat{CBA}=\widehat{CBF}+\widehat{FBA}$ et que $\widehat{BAC}=\widehat{BAF}+\widehat{FAC}$, on a donc

$$\widehat{ADB}+\widehat{AEB}+2\widehat{FBA}+2\widehat{BAF}=2\pi$$

et comme $\widehat{FBA}+\widehat{BAF}+\widehat{AFB}=\pi$, on peut conclure que $\widehat{ADB}+\widehat{AEB}=2\widehat{AFB}$.

### Exercice 2.

Posons, pour faire plus court, $x = \widehat{ABD}$, $y = \widehat{DBC}$ et $z = \widehat{BCD}$. Puisque $AB = AD$, nous aurons $x = \widehat{BDA}$ par le pont-aux-ânes. De plus, l'angle interne en $D$ au triangle $(BCD)$ est $\pi - x$. Par conséquent, dans le triangle $(BCD)$ nous avons $y+z+(\pi-x) = \pi$ d'où $x = y+z$ ; l'énoncé nous précise que $y + x = z + \pi/6$ donc en remplaçant $x$ par $y + z$ nous aurons $2y + z = z + \pi/6$ d'où $y = \pi/12$ (soit quinze degrés, ou cinquante tiers de grade).

### Exercice 3.

Avant de traiter les questions posées, commençons par analyser la situation générale. Par construction, les droites $(AB)$ et $(LM)$ sont parallèles, donc la propriété (III) s'applique et l'on a la première des deux égalités suivantes ; la seconde vient de ce que par construction, $(AD)$ bissecte l'angle en $A$ de $(ABC)$ :

$$\widehat{BAD} = \widehat{LDA}, \qquad \widehat{BAD} = \widehat{DAL}.$$

De ces deux propriétés il découle que le triangle $(ADL)$ est isocèle en $L$, donc on a $AL = LD$. Par un raisonnement semblable on montre que le triangle $(BDM)$ est isocèle en $M$, d'où $BM = MD$. De plus, le point $D$ est à l'extérieur du triangle $(ABC)$, donc il ne peut pas être sur le segment $[LM]$ : par conséquent, $LM = |LD - MD|$ et non pas $LM = LD + MD$ (ce fait saute aux yeux sur la figure, mais il est quand même réconfortant de savoir le justifier par un argument rigoureux). Répondons maintenant aux questions. (a). Avec les données de l'exercice, l'application numérique donne $LM = 2$. On observera que dans ces conditions, les droites $(LM)$ et $(AB)$ sont de part et d'autre de $C$ (donc, les points $L$ et $M$ ne sont pas sur les segments $[AC]$ et $[BC]$ mais seulement sur les droites $(AC)$ et $(BC)$). (b). Si $(ABC)$ est isocèle en $C$, alors $AL = BM$ donc $LM = 0$ : autrement dit, les points $L$, $M$ et $C$ sont confondus.

### Exercice 4.

Les triangles $(ACH)$ et $(ACB)$ sont tous deux rectangles, le premier en $H$ et le second en $C$ ; ils ont par ailleurs le même angle en $A$, donc deux de leurs angles sont égaux par paires : par conséquent, leurs trois angles sont égaux par paires, de sorte que $\widehat{ACH} = \widehat{CBA}$. Par ailleurs, le triangle $(ACB)$ étant rectangle en $C$, le point $C$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$, qui est également le cercle de centre $M$ passant par $B$ ; donc le triangle $(CBM)$ est isocèle en $M$, par conséquent $\widehat{MCB} = \widehat{CBM} = \widehat{CBA} = \widehat{ACH}$. Soit $P \in [AB]$ le pied de la bissectrice de l'angle en $C$ dans $(ABC)$ : alors

$$\widehat{HCP} = \widehat{ACP} - \widehat{ACH} = \widehat{PCB} - \widehat{MCB} = \widehat{PCM}$$

ce qui prouve que $CP$ bissecte également l'angle en $C$ de $(HCM)$. Pour voir que cette propriété n'est pas vraie sans hypothèse sur l'angle en $C$, il suffit de voir que si $(ABC)$ était plutôt rectangle en $A$, on aurait $H = A$ et $M \neq A$, de sorte que les angles $(HCM) = (ACM)$ et $(ACB)$ ne pourraient pas avoir la même bissectrice en $C$ puisque ces angles ont un et un seul côté commun.

## Exercice 7.

Rappelons plusieurs propriétés classiques du cercle et de ses tangentes : d'abord, $BO = CO$ ; ensuite, $AB = AC$ ; enfin, $(AB) \perp (BO)$ et $(AC) \perp (CO)$. Distinguons maintenant un cas particulier trivial et un cas général intéressant. Dans le cas particulier où $(AB) \perp (AC)$, il est facile de constater que $E = O$ et que la figure $(ABOC)$ est un carré ; en ce cas la formule à prouver est évidente et le nombre $BO^2 = AB.CO$ est la surface du carré. Dans le cas général, puisque $(BO) \perp (BA)$ sans que $(BA) \perp (BC)$, les droites $(BO)$ et $(AC)$ ne sont pas parallèles ; appelons $F$ leur point d'intersection. Les droites $(FB)$ et $(CE)$ sont orthogonales, les droites $(FA)$ et $(CO)$ sont orthogonales, par conséquent les angles $\widehat{BFA}$ et $\widehat{ECO}$ sont égaux. Appelons $\alpha$ leur mesure : alors, $CE = CO\cos(\alpha)$ et $CA = BE\cos(\alpha)$ (par projection orthogonale de $(FC)$ sur $(FE)$). Nous pouvons donc écrire la suite d'égalités

$$AB \times CE = AC \times (CO\cos(\alpha)) = (AC \times \cos(\alpha)) \times BO = BE \times BO.$$

## Exercice 8.

Appelons $H$ le pied de la hauteur issue de $E$ dans $(BED)$ ; appelons $M$ le point où $(HE)$ coupe $(AC)$ : il faut montrer que $M$ est le milieu de $[AC]$. Par le théorème de l'arc capable on a l'égalité des angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ ; de même, on a $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. Cela étant, puisque l'angle en $H$ de $(BHE)$ est droit, on a $\widehat{HEB} + \widehat{EBH} = \pi/2$ et puisque l'angle en $E$ de $(BED)$ est droit, on a $\widehat{EBD} + \widehat{BDE} = \pi/2$, d'où $\widehat{HEB} = \widehat{BDE}$ ; on montre de même que $\widehat{DEH} = \widehat{EBD}$. En prenant les angles opposés en $E$, on a donc $\widehat{MEA} = \widehat{EAM}$ qui prouve que le triangle $(EMA)$ est isocèle en $M$ et implique que $MA = ME$ ; par le même argument on a $\widehat{CEM} = \widehat{MCE}$ qui prouve que le triangle $(CEM)$ est isocèle en $M$ et implique que $MC = ME$. Puisque $MC = MA$, le point $M$ est donc le milieu de $[CA]$, ce qu'il fallait démontrer.

**Réciproque.** Etant donnés deux segments $[AB]$ et $[CD]$ perpendiculaires en un point $E$, si la hauteur issue de $E$ dans $(EBD)$ et la médiane issue de $E$ dans $(ECA)$ coïncident, alors les points $A$, $B$, $C$, $D$ sont cocycliques.

*Preuve.* Appelons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle $(BCD)$ et $A'$ le point de $(AB)$ autre que $B$ qui est sur $\mathcal{C}$. La hauteur $(EH)$ issue de $E$ dans $(EBD)$ est égale à la médiane $(EM')$ issue de $E$ dans $(A'CE)$ en vertu de la propriété que l'on vient de montrer. Si l'on n'avait pas $A = A'$, alors par le théorème de Thalès, la droite $(EM')$ passant par le milieu des segments $[AC]$ et $[A'C]$, elle serait parallèle à $(AA')$, ce qui est faux car elle coupe $(AA')$ en $E$ : donc on a $A' = A$, ce qui fait que $A$ est sur le cercle circonscrit au triangle $(BCD)$.

**Exercice 9.**

(a). Appelons $U$ le milieu de $[ST]$ et écrivons

$$\overline{MS}.\overline{MT} = (\overline{MU} + \overline{US})(\overline{MU} - \overline{US}) = MU^2 - US^2.$$

Dans le triangle rectangle $(MOU)$, on a $MU^2 = MO^2 - OU^2$ ; dans le triangle rectangle $(OUS)$, on a $US^2 = OS^2 - OU^2$ ; donc,

$$\overline{MS}.\overline{MT} = (MO^2 - OU^2) - (OS^2 - OU^2) = MO^2 - OS^2.$$

Comme $OS$ est le rayon du cercle et $OM$ la distance de $M$ à son centre, cette quantité ne dépend donc pas vraiment de $S$ et de $T$. (b). Le signe est positif si $S$ et $T$ sont du même côté que $M$ et négatif sinon ; donc il est positif si $M$ est extérieur au cercle et négatif s'il lui est intérieur (la puissance est nulle dans le cas particulier où $M$ est sur le cercle). (c). Soient $O_1, O_2$ les centres respectifs et $R_1, R_2$ les rayons respectifs des deux cercles : alors, le point $M$ aura même puissance par rapport aux deux cercles si et seulement si

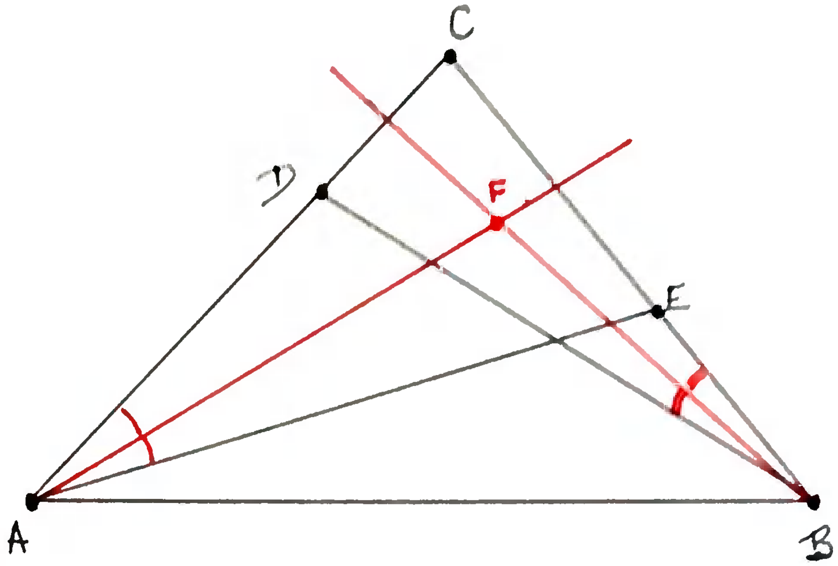
$$O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2$$

soit encore

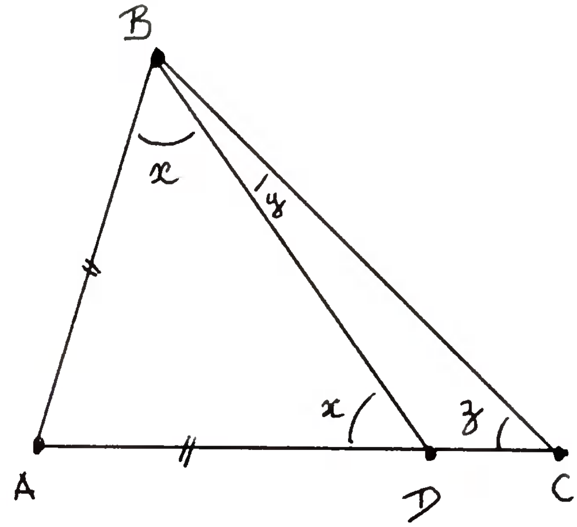
$$R_1^2 - R_2^2 = \vec{O_1M}^2 - \vec{O_2M}^2 = (\vec{O_1M} + \vec{O_2M}).\vec{O_1O_2}.$$

On reconnaît là l'équation d'une droite orthogonale au vecteur $\vec{O_1O_2}$. (d). Si les deux cercles se coupent aux points $P$ et $Q$, alors comme ces points ont des puissances nulles par rapport à chacun des deux cercles, ils sont sur l'axe radical, qui est de ce fait la droite $(PQ)$. (e). L'axe radical est une généralisation de la droite "qui passe par les points communs des deux cercles", car l'axe radical continue d'exister lorsque les cercles sont disjoints. (f). On trace un cercle $\Gamma$ quelconque parmi ceux qui coupent les deux cercles donnés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Si $\Gamma$ coupe $\mathcal{C}_\imath$ en $A_\imath$ et $B_\imath$, alors selon ce qui précède $(A_\imath B_\imath)$ est l'axe radical de $\Gamma$ et $\mathcal{C}_\imath$ ; le point $P = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ a donc la même puissance, d'une part pour $\Gamma$ et pour $\mathcal{C}_1$, d'autre part pour $\Gamma$ et pour $\mathcal{C}_2$ : ceci prouve qu'il a même puissance pour $\mathcal{C}_1$ et pour $\mathcal{C}_2$, donc qu'il est sur l'axe radical $\Delta$ de ces deux cercles. A partir de là on peut conclure de deux manières. (A). On recommence la construction avec un second cercle $\Gamma'$ qui donne un second point $P'$, et $\Delta = (PP')$. (B). La droite cherchée est la perpendiculaire à $(O_1O_2)$ issue de $P$. Cette seconde variante pose l'amusant problème de savoir si nous avons le droit de tracer $(O_1O_2)$, ou s'il nous faut la construire ? En effet, les données de l'exercice sont les deux cercles, mais pas leurs centres... On pourrait demander comment il est possible de tracer des cercles sans en connaître le centre, mais il suffit de ne pas marquer celui-ci, ce qui peut arriver lorsque l'on est tête-en-l'air. Cependant, étant donné un cercle dont on a oublié de marquer le centre, il est toujours possible de retrouver ledit centre, soit par la méthode "sale" qui consiste à inspecter la feuille à dessin pour y repérer le petit trou laissé par la pointe du compas, soit par une construction "propre" que le lecteur trouvera sans mal s'il réfléchit un peu.

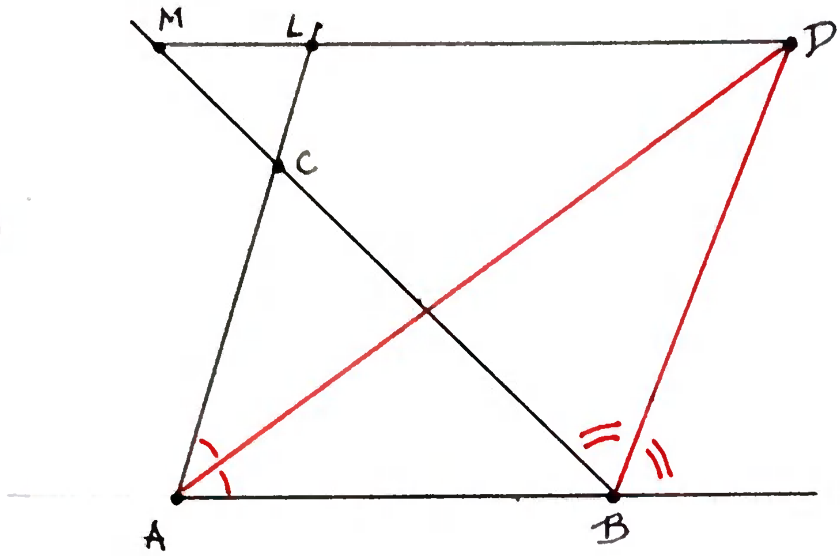
1



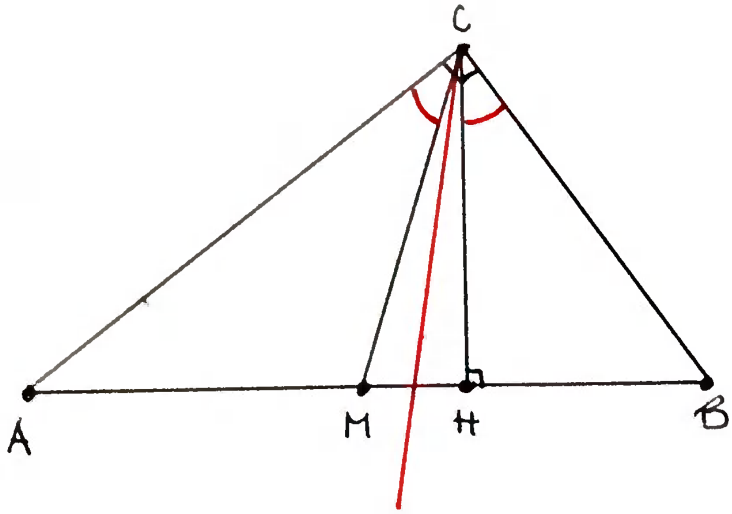

2



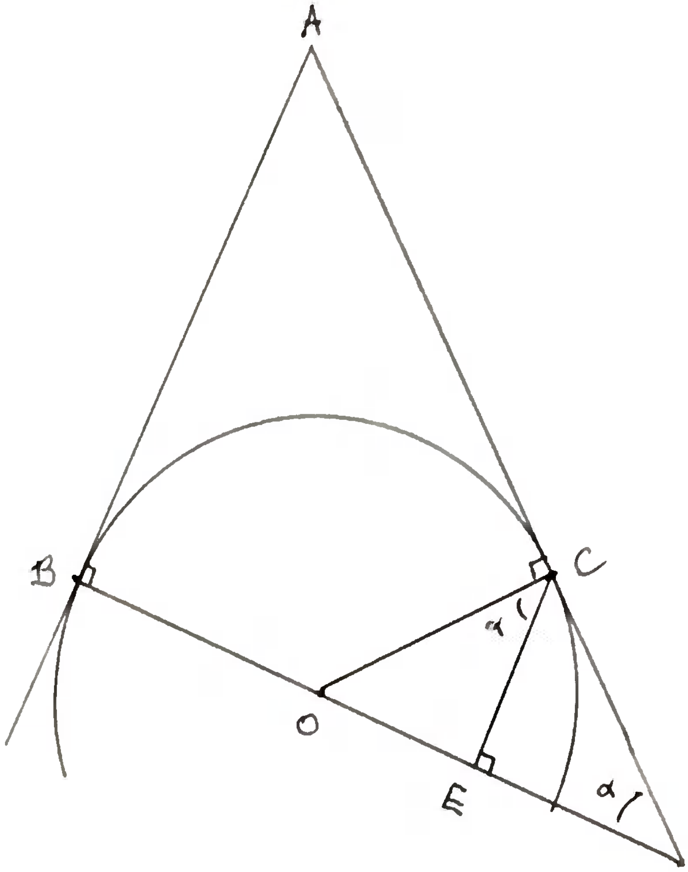
③



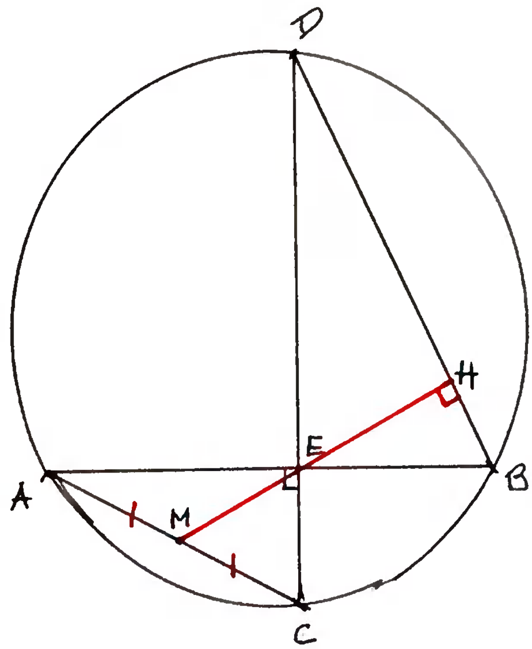

④



7

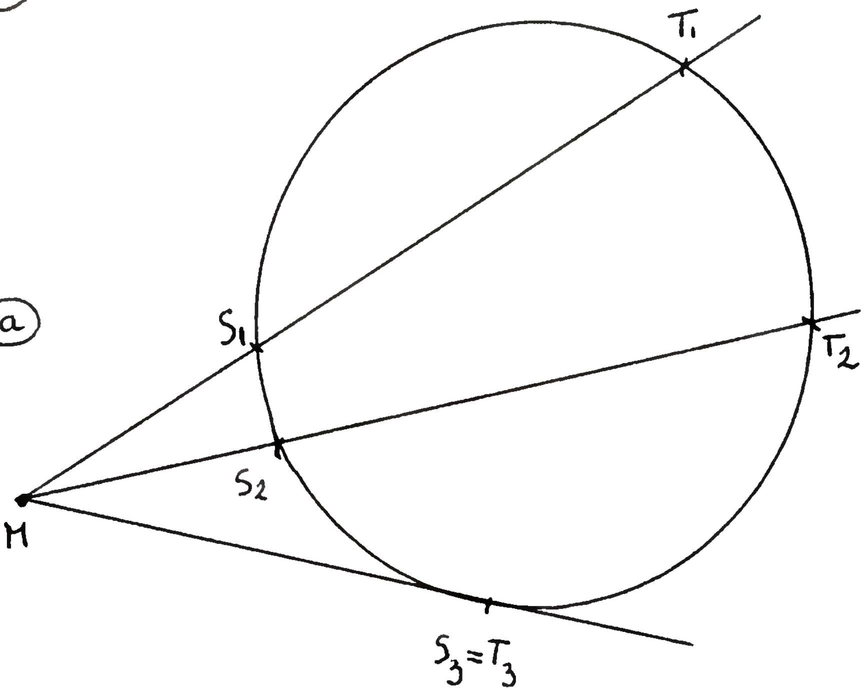



8



(g)

(a)




(f)