MNAP

Pr: claire Chainais.

→ C_1 : Calcul approché d'intégrales

C_2 : Recherches de zéros, résoluᵈˢ approchées équaᵈˢ non linéaires

C_3 : Méthodes Numériques Equations Différentielles

C_1 Calcul approchée d'intégrales.

I Motivaᵈ → FF Chasles.

II Premières méthodes de quadratures

II.1 Formules élémentaires

II.2 Formules Composées → FFC, C

→ FFQC

II.3 Evaluaᵈ précision méthodes → def. Erreur

→ compaᵈ $\boxed{M}$ classiqs

→ Démo.

III Vers $\boxed{M}$ plus précises

III.1 Formalisme général → def. $\boxed{M}$ intégraᵈ numériq

→ obtenᵈ de FF élémentaires

→ CDV $[-1,1]$

→ def FF Q élémentaire

→ FFQE sur $[x_k, x_{k+1}]$

III.2 Ordre & Estimaᵈ erreur → FF g'n'ale FF composée

→ def. ordre

→ déterminer ordre FFQ

→ lien ↔ ordre & estimaᵈ erreur

III.3 Obtenᵈ nvˡˡᵉˢ méthodes

FF T
FF Simpson
FF Boole-Villarceau

→ $\boxed{M}$ Newton-Cotes

→ $\boxed{M}$ Gauss

C1 : Intégrat° Numérique

I

FF Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

Subdivi° intervalle : $[a,b]$:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_N = b$

@ Subdivi° régulière avec pas h :

$x_k = a + k\cdot\dfrac{b-a}{N}$ pour $0 \leq k \leq N$

$x_k = a + k\cdot h$

(Valeur approchée intégrale : $J_k^Q(f)$ où Q désigne la méthode)

II Premières méthodes quadratures

II.1 FFE (Formules élémentaires)

RG : $J_k^{RG}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k)$

RD : $J_k^{RD}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, f(x_{k+1})$

RPM : $J_k^{RPM}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$

T : $J_k^{T}(f) = (x_{k+1} - x_k)\left(\dfrac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\right)$

1

II.2 Formules Composées.

FFC, Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

soit $\displaystyle I_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(f)$

Formule de quadrature composée (val^R approchée de I).

→ dépend de subdivi° $(x_k)_{0\leq k\leq N}$ & dc $h \rightarrow$ "$\dfrac{b-a}{N}$".

$$J^Q_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} J_k^Q(f)$$

RG : $\displaystyle J^{RG}_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k)$

RD : $\displaystyle J^{RD}_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_{k+1})$

RPM : $\displaystyle J^{RPM}_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$

T : $\displaystyle J^{T}_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\cdot\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$

II.3 Évaluatº précision méthodes

① Erreur :

$$\mathcal{E}_f(h) = \left| J^{Q}_{[a,b],h}(f) - I_{[a,b]}(f) \right|$$

L'erreur est égale à la valeur absolue de la VAP moins la VEX.

On veut $\mathcal{E}_f(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$ qd $N \to +\infty$.

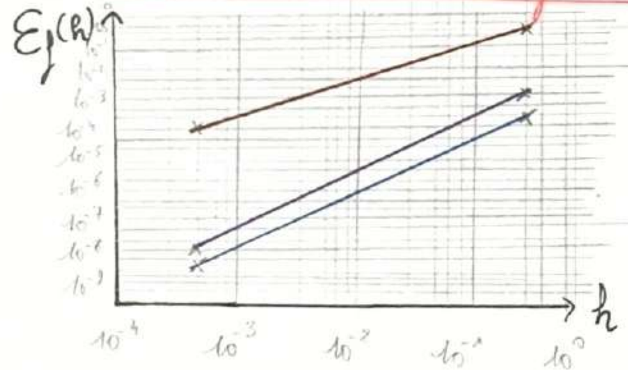
si $\underline{\mathcal{E}_f(h) = C_f \cdot h^{\alpha}}$ (FF quadrature ↗ précision quan α ↗)
cte.

si $\mathcal{E}_f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{C_f}{2^{\alpha}} h^{\alpha} = \frac{\mathcal{E}_f(h)}{2^{\alpha}}$; $\mathcal{E}_f\left(\frac{h}{10}\right) = \frac{\mathcal{E}_f(h)}{10^{\alpha}}$.

Comparaison M classiques.

$f(x) = x . \sin x$; $I = \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = 1$

Vitesse de CV^{ce} ⊄ # logarithmique



RG : $\alpha = 1$
RPM : $\alpha = 2$
T : $\alpha = 2$

$$\log \mathcal{E}_f(h) = \log C_f + \alpha . \log h$$

$y = b + ax$

Points espacés en # logarithmiq q ont un ratio cte.

$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$ 10 ↕ $10^{-1} \longleftrightarrow 2.10^{-4}$, $10^{-2} \longleftrightarrow 10^{-6}$ ↕ 10^{2}

En acer h^1, h^2, h^3 ? ...

$\frac{h}{10} \longleftrightarrow \frac{\mathcal{E}}{100} \longleftrightarrow \alpha = 2$

① Démonstration

RG $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx$

La foncº cte : $(x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, dx$

$$\int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f(x_k)\right) dx$$

TAF $\exists\, c_{x,x_k} \mid f(x) - f(x_k) = (x - x_k)\, f'(c_{x,x_k})$

IAF $|f(x) - f(x_k)| \leqslant |x - x_k| \max_{[a,b]} |f'|$

On veut obtenir :

② $$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) \right| \leqslant \frac{b-a}{2} \max_{[a,b]} |f'| . h$$

Puis, $\mathcal{E}_f(h) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| \,dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \max |f'| \,(x - x_k)\,dx$$

$$\leq \max_{[a,b]} |f'| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} (x - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$\mathcal{E}_f(h) \leq \max_{[a,b]} |f'| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{E}_f(h) \leq \max_{[a,b]} |f'| \,\frac{h}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)}_{x_N - x_0 = b - a}$$

Somme télescopique

et $h = x_{k+1} - x_k$ □

III Vers $\boxed{M}$ plus précises

III.1 Formalisme général

D $\boxed{M}$ intégrat° numérique.

soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ une f cont, $I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Une formule d'intégrat° numérique ou formule de quadrature est une approximation de $I_{[a,b]}(f)$ par une combinaison linéaire d'évaluat°s de la fonc° f en des points de $[a, b]$ donnés.

Obtent° à l'aide FF élémentaires

- on définit une FF de quadrature élémentaire $J_k^Q(f)$ pr approcher $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$
- on en déduit FF Composée :

$$J^Q_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N} J_k^Q(f)$$

CDV se ramenant à [-1, 1].

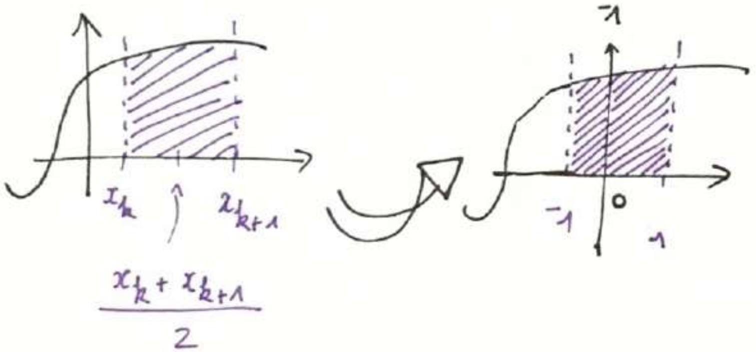
De $[x_k, x_{k+1}]$ à $[-1,1]$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} + \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2} s \\ dx = \dfrac{x_{k+1} - x}{2} \cdot ds \end{cases}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) ds$$

$$= \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^{1} \varphi_k(s)\, ds$$

→ il suffit de définir FF de quadrature élémentaire sur $[-1, 1]$, pr approcher $\int_{-1}^{1} \varphi(s)\, ds$.



FF de quadrature élémentaire sur [-1, 1]

3 Une FF de quadrature élémentaire

$J^{Q}_{[-1,1]}(\varphi)$ pr approcher $\int_{-1}^{1} \varphi(s)\, ds$

est de la forme $J^{Q}_{[-1,1]}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\ell} w_j\, \varphi(\tau_j)$.

$$\text{ou}\begin{cases} \ell \in \mathbb{N} \\ \tau_j \in [-1,1] \text{ pr } 0 \leq j \leq \ell \\ \sum_{j=0}^{\ell} w_j = 2 \end{cases}$$

ⓐ - RPM : $\ell = 0$, $\tau_0 = 0$, $w_0 = 2$

- T : $\ell = 1$, $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 1$, $w_0 = w_1 = 1$.

FF de quadrature élémentaire sur $[x_k, x_{k+1}]$

CDV $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} s\right) ds$

Applicaθ de FF élémentaire sur $[-1, 1]$:

$$\varphi_k(s) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \times s\right)$$

$$\Rightarrow J^{Q}_{[-1,1]}(\varphi_k) = \sum_{j=0}^{\ell} w_j\, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j\right)$$

4

On définit, $J_k^Q(f) = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \sum_{j=0}^{\ell} w_j f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j\right)$

soit $\lambda_j = \frac{w_j}{2}$,

$$\tau_{kj} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j, \forall\ 0 \leq j \leq \ell.$$

Une FFQE $J_k^Q(f)$ pr approcher $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ edPf

$$\underline{J_k^Q(f) = (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(\tau_{kj})}$$

↳ $\ell \in \mathbb{N}$
- $\tau_{kj} \in [x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq j \leq \ell$
- $\sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j = 1$

Ccl: f^{me} gén'le FF composée.

↳ FF Chasles, définir FFQ Composée $J_{[a,b],h}^Q(f)$, approximaⓉ de $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$J_{[a,b],h}^Q(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{k=0}^{\ell} \lambda_j f(\tau_{kj})$$

↳ $\ell \in \mathbb{N}$
- $\tau_{kj} \in [x_k, x_{k+1}]$ pr $0 \leq j \leq \ell$, $0 \leq k \leq N-1$
- $\sum \lambda_j = 1$

⑤

III.2 Ordre & estimaⓉ d'erreur.

① Ordre

Une méthode de quadrature est d'ordre p si :
- elle est exacte $\forall$ polynôm deg $\leq p$.
- elle est inexacte pr au moins plnôm deg $p+1$.

Comment déterminer l'ordre d'une formule de quadrature ?

On vérifie FF élémt^R $J_{[-1,1]}^Q(\varphi) = \sum_{j=0}^{\ell} w_j \varphi(\tau_j)$ co

- exacte (ie $J_{[-1,1]}^Q(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$ pr des fonⓉ $\varphi : x \mapsto 1, x \mapsto x, \dots, x \mapsto x^p$.
- inexacte pour $x \mapsto x^{p+1}$ (linéarité intégrale & FF quadrature

ⓐ $\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$, $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

$\boxed{RG}$ $J_{[-1,1]}^{RG}(\varphi) = 2\varphi(-1) \Rightarrow$ ordre 0.

$J_{[-1,1]}^{RG}(x \mapsto 1) = 2 \Rightarrow x^0$

$J_{[-1,1]}^{RG}(x \mapsto x) = -2 \neq 0$

$\boxed{RD}$ $J_{[-1,1]}^{RD}(\varphi) = 2.\ \varphi(1) \Rightarrow$ ordre 0

ⓔ $\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$, $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$

$\boxed{RPM}$ $J^{RPM}_{[-1,1]}(\varphi) = 2\varphi(0) \Rightarrow$ ordre 1.

$J^{RPM}_{[-1,1]}(x \mapsto 1) = 2$

$J^{RPM}_{[-1,1]}(x \mapsto x) = 0 \Rightarrow x^{\wedge}$

$J^{RPM}_{[-1,1]}(x \mapsto x^2) = 0 \neq \frac{2}{3}$.

$\boxed{T}$ $J^{T}_{[-1,1]}(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1) \Rightarrow$ ordre 1.

$J^{T}_{[-1,1]}(x \mapsto 1) = 2$

$J^{T}_{[-1,1]}(x \mapsto x) = 0$

$J^{T}_{[-1,1]}(x \mapsto x^2) = 2 \neq \frac{2}{3}$.

Lien entre ordre et estimaᶿ d'erreur

TH soit
- $J^{Q}_{[-1,1]}(\varphi)$ (ou $J_k^{Q}(f)$) une FF élt^x d'ordre p.
- $J^{Q}_{[a,b],h}(f)$ la FF composée associée

Alors si $f \in C^{p+1}([a,b])$, $\exists$ cte C_f tq

$$\underbrace{\left| J^{Q}_{[a,b],h}(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right|}_{\mathcal{E}_f(h)} \leq C_f \cdot h^{p+1}$$

→ une FF d'ordre p CV comme h^{p+1}

→ une FF de quadrature est ↗ précise qd ↗ ordre.

III.3 Obtenir nouvelles méthodes

Méthodes de Newton-Cotes

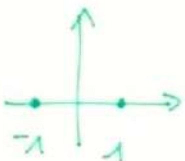
Les MNC reposent sur FF quadrature

$$J^{Q}_{[-1,1]}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\ell} w_j \, \varphi(\tau_j)$$

d'ordre maximal obtenues aux points équirépartis sur $[-1,1]$.

- $\tau_j = -1 + \frac{2j}{\ell}$ pour $0 \leq j \leq \ell$.
- w_j sont calculés pour avoir l'ordre maximal.

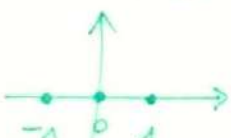
@ $\ell = 1$, τ_j équirépartis sur $[-1,1]$, $\tau_j = -1 + \frac{2j}{\ell}$



$\ell = 1$
$\tau_0 = -1$ $\Rightarrow w_0 = 1 = w_1$. FF Trapèze
$\tau_1 = 1$

$$\Rightarrow J^{T}_{[-1,1]}(\varphi) = \varphi(1) + \varphi(-1).$$

$\ell = 2$, ff de Simpson,



$\ell = 2$
$\tau_0 = -1$
$\tau_1 = 0$
$\tau_2 = 1$

$$\Rightarrow J^{S}_{[-1,1]}(\varphi) = w_0 \varphi(-1) + w_1 (\varphi(0)) + w_2 (\varphi(1))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_{[-1,1]}(x \mapsto 1) = w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ J_{[-1,1]}(x \mapsto x) = -w_0 + w_2 = 0 \\ J_{[-1,1]}(x \mapsto x^2) = w_0 + w_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ici ordre ≥ 2

$$\Rightarrow w_0 = w_2 = \frac{1}{3} \text{ et } w_1 = \frac{4}{3}$$

Puis $J_{[-1,1]}(x \mapsto x^3) = -w_0 + w_2 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx$

ici ordre $\geq$

en réalité ordre

$$\Rightarrow J^{S}_{[-1,1]}(\varphi) = \frac{1}{3}\varphi(-1) + \frac{4}{3}\varphi(0) + \frac{1}{3}\varphi(1).$$

$\ell = 4$ ff de Boole-Villarceau

$$J^{BV}_{[-1,1]} = \frac{7}{45}\varphi(-1) + \frac{32}{45}\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{15}\varphi(0) + \frac{32}{45}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{45}\varphi($$

→ Ordre de ces FF de quadrature :

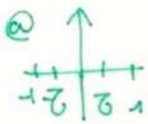
- ℓ, si ℓ est impair.
- $\ell + 1$, si ℓ est pair.

Méthode de Gauss

→ si les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ sont donnés, on peut déterm les w_j qui garantissent FF ordre maximal.

→ l'objet des méthodes gaussiennes est de choisir les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ qui conduisent à ff d'ordre maximal.

@



$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 \\ -w_0 \tau + w_1 \tau = 0 \\ w_0 \tau^2 + w_1 \tau^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{w_0 = w_1 = 1}, \ \underline{\tau = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

⇒ ordre 3.

$$J^{G2P}_{[-1,1]}(\varphi) = \varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)\left[f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)\right) + f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right.\right.$$

MNAP : python.guilled.org

Structures Homogènes

import numpy as np

Intro

→ Taille & type élts tableau Numpy : connus d'avance.

array0 = np.zeros (3, dtype = int) # vecteurs 3 entiers
array1 = np.zeros ((2,4), dtype = float) # tablo flotts taille 2×4
" 2 " " ((2,2), " = complex) # matrice carrée complexe taille 2×2
" 3 " " ((5,6,4)) # tab. tridim flottants

→ passer les donnés

array4 = np.array ([1,4,5]) # vectR entiers $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$
" 5 " " ([1,2,3,4],[1,2,3,4]) # matrice de tlle 2×4 flotts

→ on pt forcer le type, sinon ds cas précédt, détermine le type tt sf

⇒ array1.dtype → type tablo   array1.shape → taille tablo

→ tablo mutables, indices commencent à 1.

Slicing : accès à certaines parties du tableau :

array1 [2:3] ← return élts indices compris entre 2 et 3
array1 [0, :] ← rtn 1° ligne
array1 [:, -1] ← rtn D° ligne
array1 [3,3:5,1:4] ← rtn s-matrice conseqée

Itéraθ : itérer tablo sa propre dimension

for i in array
    print (np.sum (i)) ← somme des lignes

Opéraθs sur les tableaux

mat1 = np.array ([1,2,5,3], [5,6,8], [3,2,5]))

mat1 + mat1 ← rtn somme élt p élt.
mat1 * mat1 ← rtn produit élt p élt (pas produit matriciel)

Produit Matriciel :

- np.dot (mat1, mat1)
- mat1.dot (mat1)
- mat1 @ mat1

} 3 méthodes pr faire produit matriciel

→ %% time ← affiche temps évaluaθ cellule.
→ %% timeit ← plrs fois et moyenne des temps

1

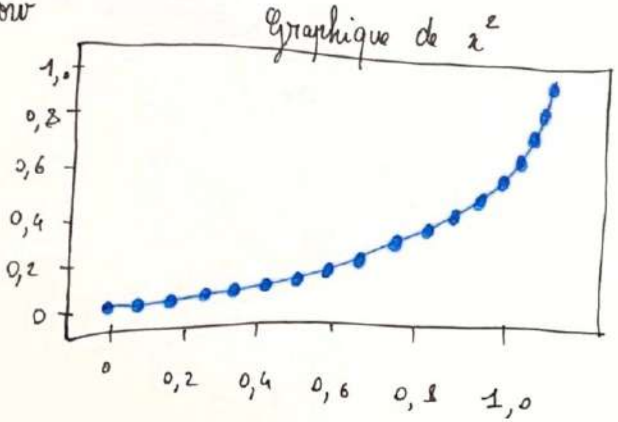
Représentaᵒ graphiq

% matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

```
x = np.linspace (0,1,50)
y = x ** 2
plt.plot(x, y)
plt.show ()
```

Pour avoir jolie figure :

```
plt.figure (figsize = (8, 5))   # taille figure en inches
plt.title (r'Graphique de $x^2$')
plt.xlabel (r' $x$ ')
plt.ylabel(r' $y$ ')
plt.plot (x, y, marker = 'o', label = r' $x^2$ ') # légende
plt.legend()   # affiche légende
plt.savfig ("test.pdf")   # exporte figure en pdf
plt.savfig ("test.png", dpi=100) # exp-   en png
plt.show
```



Indexage de tableaux

```
a = np.arange (12) **2   # tableau carrés parfaits
i = np.array ([1,3,8,5])   # tableau d'indices
a[i]   # tableau élt de a avec places i.
```

$\boxed{M}$ arange

including — excluding

np.arange ([start], stop, [step], dtype = None)

```
np.arange (3) → array ([0, 1, 2])
np.arange (3,7) → array ([3, 4, 5, 6])
np.arange (3,7,2) → array ([3, 5])
```

⚠ if using non-integer step, it's better to use : np.linspace

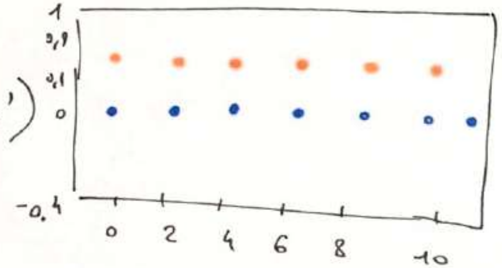
$\boxed{M}$ linspace

np.linspace (start, stop, num = 50, endpoint = True, retstep = False, dtype = None, axis = 0)

```
np.linspace (2.0, 3.0, num = 5) → array ([2., 2.25, 2.5, 2.75, 3.])
np.linspace (2.0, 3.0, num = 5, endpoint = False)
array ([2., 2.2, 2.4, 2.6, 2.8])
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
N = 8
y = np.zeros (N)
x1 = np.linspace (0, 10, N, endpoint = True)
x2 = np.linspace (0, 10, N, endpoint = False)
```

```
plt.plot(x1, y, 'o')
plt.plot(x2, y + 0.5, 'o')
plt.ylim([-0.5, 1])
plt.show()
```



M logspace

```
np.logspace(start, stop, num = 50, endpoint = True, base = 10.0,
            dtype = None, axis = 0)
```

M reshape (changer forme tableau)

Mathpotlib

M imshow()

```
imgplot = plt.imshow(img)
lum_img = img[:, :, 0]
# plt.imshow(lum_img, cmap = "hot")
—
# imgplot = plt.imshow(lum_img)
# imgplot.set_cmap('nipy_spectral')
|| imgplot = plt.imshow(lum_img)
plt.colorbar()
```

Visualisa° Fonction de 2 variables $f(x,y)$

M meshgrid()

$z = f(x, y)$

→ généra tabl^x X et Y q contiennent v^{leurs} abscisses et ordonnées μ chq 1 pts $\hat{g}$ f meshgrid()

→ calculer val^R z μ pts

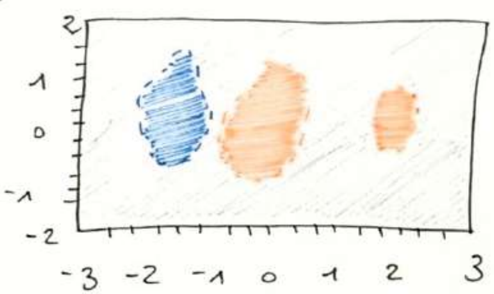
```
import numpy as np
x = np.array([3, 4, 7]) ; y = np.array([-1, 0])
X, Y = np.meshgrid(x, y)
```

M pcolor()

```
Z = X**2 + Y**2      # calcul tableau val^ks de Z.
pcolor(X, Y, Z)
show()
```

!!= ⟹

```
import numpy as np
import mathpotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-3, 3, 51)
y = np.linspace(-2, 2, 41)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = X**2 + Y**2
plt.color(X, Y, Z)
plt.show
```



$\boxed{M}$ colorbar() : affichage ∄ couleurs

plt.colorbar()

Chg^t ∄ couleurs

help (colormaps)

pcolor (X,Y,Z , cmap = cm.hot)

pcolormesh (X,Y,Z)

Effet de fondu sur les couleurs: shading = "gouraud"

pcolormesh (X,Y,Z , shading = "gouraud")

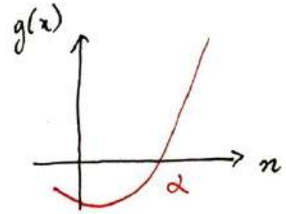
Utilisation imshow()

```
import numpy as np
import mathpotlib. pyplot as plt
xmin = -3 ; xmax = 3 ; nbx = 51; ymin = -2 ; ymax = 2; nby = 41
x = np. linspace (xmin, xmax, nbx)
y = np. linspace (ymin, ymax, nby)
X,Y = np. meshgrid (x, y)
Z = X**2 + Y**2
plt. imshow (Z, interpolation = "bicubic", origin = "lower",
             extent = [xmin, xmax, ymin, ymax])
plt. colorbar ()
plt. show ()
```

C2 : Calcul approché de zéros

I / Présentaθ du pb

Notion zéro d'une f :



(D) $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x)$.

α est un zéro de g si $g(\alpha) = 0$.

q°s : calculs ? $\exists$?

[M] Calcul approché,

$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant au moins un zéro $\alpha \in I$.

On construit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$.

[M] approximaθ dite : [M] itérative.

→ nbr fini itéraθ

→ préciθ ε, tq s'arrêter à une itéraθ $N = N(\varepsilon)$, tq $|U_N - \alpha| \leq \varepsilon$

II / Approximaθ p méthode itérative

II.1. @ approx $\sqrt{2}$

[M] Héron d'Alexandrie

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \end{cases}$$

→ positivité $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

↳ monotonie : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2 - U_n^2}{2U_n} \begin{cases} \leq 0 \text{ si } U_n \geq \sqrt{2} \\ \geq 0 \text{ si } U_n \in]0, \sqrt{2}[. \end{cases}$

↳ posiθ p $\sqrt{2}$: $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n} \geq 0 \quad \forall n \geq 0$.

↳ CVce : qq soit $u_0 > 0$, $(U_n)_{n \geq 1} \searrow$ et minorée par $\sqrt{2}$, de elle CV.

↳ soit ℓ sa limite : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \Rightarrow \ell^2 = 2 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$ (car $\ell > 0$)

↳ Vitesse de convergence : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n}$

$\forall n \geq 1$, $U_n \geq \sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\underbrace{|U_{n+1} - \sqrt{2}|}_{e_{n+1}} \leq \frac{\overbrace{|U_n - \sqrt{2}|}^{e_n}{}^2}{2\sqrt{2}}$$

HDR → $e_{n+1} \leq \dfrac{e_n^2}{2\sqrt{2}} \quad \forall n \geq 1$

(Mq) $e_n \leq 2\sqrt{2}\left(\dfrac{e_n}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$

Dm p récurrence : * $n = 1$ $e_1 \leq e_1$.

On suppose la relation vraie au rang n.

On a alors

$$e_{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot e_n^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (2\sqrt{2})^2 \left(\frac{e_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

$$\leq 2\sqrt{2} \left(\frac{e_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

ok au rang $n+1$.

• Pour avoir $|U_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$, il suffit de choisir n tq $2\sqrt{2}\left(\frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} < \varepsilon$.

$$\left(\frac{(|U_1-\sqrt{2}|)}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

$$2^{n+1} \cdot \log \frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}} < \log \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

$$2^{n-1} < \frac{\log \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}{\log \frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}} \quad \begin{matrix} <0 \\ <0 \end{matrix}$$

⚠ $\log(a^n) = n.\log a$.

$$\Rightarrow (n-1)\log 2 > \log\left(\frac{\log \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}{\log \frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}}\right)$$

soit $n-1 > \frac{1}{\ln 2} \times \log\left(\frac{\log \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}{\log \frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}}\right)$

si $\frac{|U_1-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2}} \leq 1$,

si $U_0 = 1$, $U_1 = \frac{3}{2}$, pr garantir $\varepsilon = 10^{-14}$, il suffit de choisir $n \geq 5$.

II.2. ② : calcul $\approx \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$

Étude suite sommes partielles

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. ⤴ CVce : $\forall k > 1$, $k(k-1) = k^2 - k \leq k^2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

D'où $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}_{\text{suite télescopique.}} = 1 - \frac{1}{n}$.

∘ $S_n \nearrow$, majorée par 2 donc elle CV. On admet $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

$\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim S_n$; $\ell - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2}$

or $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \leq \ell - S_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

En effet, $\underbrace{\sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}} \leq \sum^{p} \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}_{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}$

$\Downarrow p \to +\infty$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

Pr avoir $0 \leq \ell - S_n \leq \varepsilon$, il suffit de choisir $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$!
(car si $n+1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ alors $\ell - S_n \geqslant \varepsilon$).
Pgup $\varepsilon = 10^{-14}$, on prend $n \geqslant 10^{14}$!!!
Modif suite étudiée $\rightarrow T_n = S_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$
⋮
Pr avoir $|\ell - T_n| \leq \varepsilon$, il sdc $n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Pgup $\varepsilon = 10^{-14}$, on prend $n \geqslant 10^{7}$. (lent).

II.3. Ordre de CV d'une suite

(D) soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite approx de $\alpha \in \mathbb{R}$:

- suite CV vers α si $\lim_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 0$ tq $\forall n \geqslant N, |U_n - \alpha| < \varepsilon$.

- si de plus, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tq
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq C\, |U_n - \alpha|^p$$
↳ la CV est d'ordre au moins p.

Ds cas $p = 1$, on doit avoir aussi $C < 1$.

@1 : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \end{cases}$

$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq C.\, |U_n - \sqrt{2}|^2 \quad \forall n \geqslant 1$.

↳ la $\boxed{M}$ est d'ordre 2.

Dans cas $p=1$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq C.\, |U_n - \alpha|$
$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \underbrace{C^n}_{\text{tend} \downarrow 0} |U_0 - \alpha|$$
si $0 < 1 < 1$

(R4) si $\lim \frac{|U_{n+1} - \alpha|}{|U_n - \alpha|^p} = C \in \mathbb{R}_+$ alors CV est ordre au moins p. si $C > 0$.

si $p=1$: CV linéaire
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq C\, |U_n - \alpha|$$
$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \underbrace{C^n |U_0 - \alpha|}_{\text{td vers } 0 \text{ si } C < 1}$$

si $p=2$: CV quadratique
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq C\, |U_n - \alpha|^2$$
$$\leq \frac{1}{C}\left(C\, |U_n - \alpha|\right)^2$$

Par réc. sur n obtient :
$$C\, |U_n - \alpha| \leq \cancel{\frac{1}{C}}\left(C\, |U_0 - \alpha|\right)^{2^n}$$

⊛ ok pr $n = 0$
⊛ vrai à $n \Rightarrow$ vrai à $n+1$.
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{C}\left(C\, |U_n - \alpha|\right)^2 \underset{\text{HDR.}}{\leq} \frac{1}{C}\left(C|U_0 - \alpha|^{2^n}\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{C}\left(C|U_0 - \alpha|\right)^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{C}\left(C\, |U_0 - \alpha|\right)^{2^n}$$
td vers 0 si $C|U_0 - \alpha| < 1$.

Critères d'arrêt

soit $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, admettant au moins un zéro $\alpha \in I$ et une $\boxed{M}$ itérative $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

Associés à une *tolérance* τ.

1) $|U_{n+1} - U_n| < \tau$
2) $|g(U_{n+1})| < \tau$
3) $\dfrac{|U_{n+1} - U_n|}{|U_{n+1}|} < \tau$ (si α est proche de 0)

III. Résolution équations non linéaires

III.1. $\boxed{M}$ dichotomie & fausse position

TVI : soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f cont sur $[a, b]$ suppose $g(a) g(b) < 0$ Alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tq $g(\alpha) = 0$.

CV $\boxed{M}$ dichotomie :

Construction 3 suites récurrentes :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- $\forall n \geq 0$, $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
- si $g(x_n) = 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$
- si $g(a_n) g(x_n) < 0$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = x_n \end{cases}$
- si $g(a_n) g(x_n) > 0$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = x_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.

TH soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f cont sur $[a, b]$ $(a < b)$.
suppose $g(a) g(b) < 0$.
Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ def p $\boxed{M}$ dichotomie CV vers un zéro $\alpha \in]a, b[$ de g.

CV ce $\boxed{M}$ dichotomie.

Construct° 3 suites récurrentes.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

- $a_0 = a$, $b_0 = b$,
- $\forall n \geq 0$, $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
- si $g(x_n) = 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

  si $g(a_n).g(x_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$.

  si $g(a_n).g(x_n) > 0$ alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

TH soit $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ une f cont sur $[a,b]$, $a<b$,

supposons $g(a).g(b) < 0$.

Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf p $\boxed{MdD}$

CV vers un zéro $\alpha \in]a,b[$ de g.

Preuve : • cas 1 : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $g(x_{n_0}) = 0$.

Ds ce cas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cte à p de n_0, dc CV.

• cas 2 : $g(x_n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

Par construct°, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$.

Par ailleurs,

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 \text{ ou} \\ \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = \begin{cases} 0 \text{ ou} \\ \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dc $\nearrow$ et majorée par b et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\searrow$ et minorée par a.

Elles st dc CV et ont m̂ limite car

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Notons α la limite. Comme $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$,

on a aussi $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

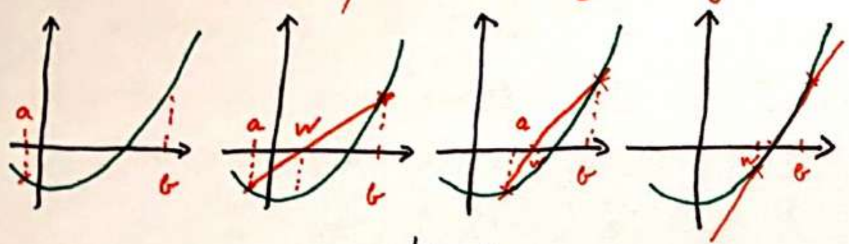
Comme g est <u>cont</u>, $\lim_{n\to\infty} g(a_n).g(b_n) = g(\alpha)^2$

Or par construct°, $g(a_n).g(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

ce q implique $\lim_{n\to\infty} g(a_n).g(b_n) \leq 0$.

D'où $g(\alpha)^2 \leq 0$, soit $g(\alpha) = 0$.

$\boxed{M}$ Fausse posiᴼ (regula falsi).



- $w = a - g(a)\dfrac{b-a}{g(b)-g(a)}$.
- si $g(w).g(a) > 0$ alors $\alpha \in]w,b[: a \leftarrow w$
- si $g(w).g(a) < 0$ alors $\alpha \in]a,w[: b \leftarrow w$.

CVce de $\boxed{M}$ fausse position.

Constrcᴼ 3 suites récurrentes

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf p

- $a_0 = a, \; b_0 = b$.
- $\forall n \geq 0, \; w_n = a_n - g(a_n)\dfrac{b_n - a_n}{g(b_n) - g(a_n)}$.
- si $g(w_n) = 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  si $g(a_n).g(w_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = w_n$.
  si $g(a_n).g(w_n) > 0$ alors $a_{n+1} = w_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

TH soit $g \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ tq $g(a).g(b) < 0$.
supposons g'' est de signe cte sur $[a,b]$.
Alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf p $\boxed{M \; F \; P}$
CV unique zéro $\alpha \in]a,b[$ de g.

III. 2. Méthodes de point fixe

Lien point fixe / zéro.

À la base,

Réécriture du pb : $g(s) = 0$ en $h(s) = s$.

@ $h(s) = s - g(s)$, $\quad h(s) = s - \lambda g(s)$, $\quad (\lambda \neq 0)$

D α est un point fixe de h si $h(\alpha) = \alpha$.

Choix de h : doit garantir.

α point fixe de $h \iff \alpha$ zéro de g.

Principe $\boxed{M}$s point fixe

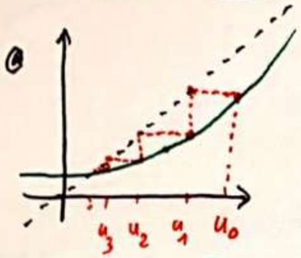
Une $\boxed{M}$ point fixe consiste en la construcᴼ d'une suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_0 \overset{PY}{=} \text{val} \\ u = h(u) \end{matrix}.$$

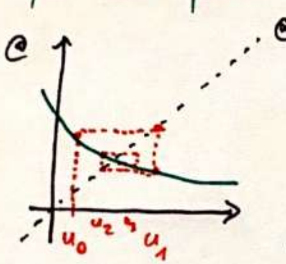
→ si suite CV et h <u>cont</u>, en passant à la limite, $u_{n+1} = u_n$ alors $h(\alpha) = \alpha$.

→ Qlles condiᴼs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV ?

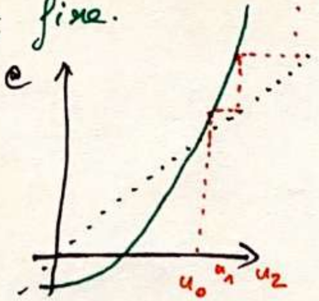
@ $\boxed{M}$ (CVce) μ $\boxed{M}$ point fixe.



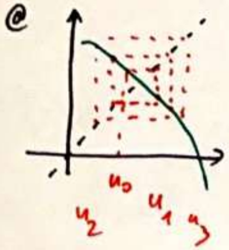
$\boxed{M}$ CV



$\boxed{M}$ CV



$\boxed{M}$ DV.



$\boxed{M}$ DV.

Vers TH point fixe de Banach.

D $h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow h(x)$.

On dit que h est une applicaθ contractante sur I si $\exists\ 0 \leq K < 1$ tq

$\forall x, y \in I, \quad |h(x) - h(y)| \leq K\,|x - y|$.

Rq
- h contractante $\Rightarrow$ h cont.
- si h est dérivable sur I et si $\exists\ 0 \leq K < 1$, $|h'(x)| \leq K \quad \forall x \in I$ alors h est contractante. (TAF).

ou TAF : $\exists\, c \in \,]x, y[, \; h(y) - h(x) = h'(c)\,(y - x)$

$\Rightarrow h(y) - h(x) = K\,(y - x)$.

TH point fixe de Banach

soit $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose :
- I est int fermé non vide de $\mathbb{R}$.
- $h(I) \subset I$ $\quad (\forall x \in I,\ h(x) \in I)$.
- h est contractante sur I.

Alors h admet un unique point fixe $\alpha \in I$.

Preuve : Unicité : Par l'absurde, on suppose $\exists\ \alpha \neq \beta \in I$ tq $h(\alpha) = \alpha$ et $h(\beta) = \beta$.

On suppose qu'on a deux points fixes.

Or f h contractante : K contractante :

$h(\alpha) - h(\beta) \leq K\,(\alpha - \beta)$.

$1 - K\ (\alpha - \beta) \Rightarrow |\alpha - \beta| \leq 0 \Rightarrow \underline{\alpha = \beta}$.

S'il y a un zéro, il est uniq.

Existence : $\begin{cases} u_0 = \text{donné} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.

Mq Suite de Cauchy :

$u_{n+1} - u_n = h(u_n) - h(u_{n-1}) \leq K\,(u_n - u_{n-1})$

Si on itère, usθ soit contractante $\leq K^n\,(u_1 - u_0)$

$$|U_{m+k} - U_{m-1} + U_{m-1} + \dots + U_{m+1} - U_m|$$

$$\leq K \,|K.U_{m-1} + \dots + K^m (U_1 - U_0)|$$

somme série géométiq.

$$= \frac{1-K^m}{1-K} \times U_1 - U_0 \leq \frac{K^m}{1-K}\, U_1 - U_0 .$$

Donc suite de Cauchy. □

CV lim ds fermeture de l'intervalle.

SdC, I fermé, CV vers un élt ds I.

Donc α : point fixe.

Convergence globale des $\boxed{M}$ de point fixe

TH soit $h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose :

- I est int fermé non vide de $\mathbb{R}$.
- $h(I) \subset I$ $(\forall x \in I,\ h(x) \in I)$,
- h est contractante sur I.

Alors la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ déf p. $U_{m+1} = h(U_m)$, (u_0 donné) CV uniq point fixe $\alpha \in I$ de h.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{m+1} - \alpha| \leq K\, |U_m - \alpha|$, cf $K \in [0,1]$, la CV est au moins linéaire.

→ si $K \neq 0$, la $\boxed{M}$ est d'ordre 1.

→ si $K = 0$; très rare lim = 0 ?

Convergence locale $\boxed{M}$ de point fixe

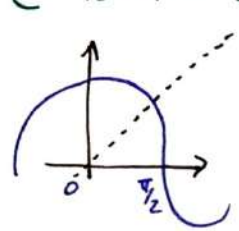
- h est de classe C^1 sur I.
- h possède un point fixe α situé ds intérieur de I
- $|h'(\alpha)| < 1$.

Alors $\exists\, \rho > 0$ tq $\forall$ suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ déf par :

$$\begin{cases} u_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \\ u_{m+1} = h(u_m). \end{cases}$$ est CV de limite α.

CV globale	CV locale
h contracte sur tt I, u_0 qq ds I	h contract au $\mathcal{V}$ de α, u_0 proche de α

@ $h(x) = \cos(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.



$\exists\, \alpha \dots$ tq $h(\alpha) = \alpha$.

$h'(x) = -\sin(x)$.

$|h'(\alpha)| = \sin \alpha$.

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin \alpha < 1$

obtenir val^{r} app de α.

p@ $u_0 = \frac{\pi}{6}$ - - - -> return α.

Ordre $\boxed{M}$ point fixe.

Convergence au moins linéaire

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= h(u_n) \\ \alpha &= h(\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - \alpha = h(u_n) - h(\alpha)$$

d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq K\,|u_n - \alpha|$.

Cas part: $h \in C^2(I, \mathbb{R})$, $h'(\alpha) = 0$,

$$h(u_n) = h(\alpha) + h'(\alpha)(u_n - \alpha) + h''(\xi_n)\frac{(u_n-\alpha)^2}{2}$$

$$u_{n+1} = \alpha + 0 + h''(\xi_n)\frac{(u_n-\alpha)^2}{2}$$

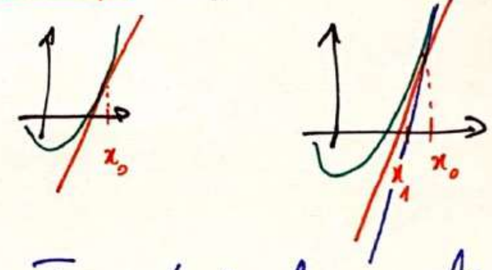
Par conséquent, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sup|h''|}{2}\,|u_n - \alpha|^2$.

$\Rightarrow$ CV au moins quadratiq si $h'(\alpha) = 0$.
(d'ordre au moins 2).

↳ CV très vide
↳ @ ordre 2 : $\boxed{M}$ Héron, en 6 itéraᶿs : préciᶿ machine.
↳ en général $\boxed{M}$ pf linéaire.

III. 3. $\boxed{M}$ de Newton

Principe : $g \in C^1(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in I$, $g'(x_0) \neq 0$.



- Tangente à la courbe au point $(x_0, g(x_0))$:
$$Y - g(x_0) = g'(x_0)(X - x_0).$$
- Interseᶿ ax abscisses : $x_1 = x_0 - \dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}$

↳ si $g'(x_1) \neq 0$, on pt itérer pf.

Convergence de $\boxed{M}$ de Newton

D $\boxed{M}$. $\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$

→ $\boxed{M}$ pf ax $h(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$

→ si $g'(\alpha) \neq 0$, on a bien $g(\alpha) = 0 \iff h(\alpha) = \alpha$.

Convergence et ordre

On suppose $g \in C^2(I, \mathbb{R})$, $\alpha \in I$,

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot g''(x)}{g'(x)^2}$$

→ $h'(\alpha) = 0$.

→ CV locale de $\boxed{M}$ + CV quadratiq.

CV $\boxed{M}$ Newton.

TH soit $g \in C^2(I, \mathbb{R})$ une f admettant un zéro α ds l'intérieur de I.

On suppose que $g'(\alpha) \neq 0$.

Alors $\exists \rho > 0$, $\forall x_0 \in]\alpha-\rho, \alpha+\rho[$, la suite de la $\boxed{M}$ de Newton.

$$\begin{cases} x_0 \in]\alpha-\rho, \alpha+\rho[\\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$

est bien définie et CV vers α.

De plus, la CV est au moins quadratiq.

@ La CV est locale.

{ équatiOs non-linéaires, résoluOs.
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\boxed{M}$ de Newton très efficace.

↳ variante utiliser le tx d'accroissmt.

R $\boxed{M}$ Héron ⟷ $\boxed{M}$ Newton :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{où } \lim_{n \to \infty} u_n = \sqrt{2}.$$

soit $g(x) = x^2 - 2$. écrire $\boxed{M}$ Newton.

$g'(x) = 2x$ si $\ell = \sqrt{2}$.

x_0 donné, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

$$x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{2}x_n + \frac{2}{x_n}.$$

```py
"""py
while test_arrêt ___
    |
u_{n+1} = h(u_n)   # sle ligne à changer.
"""
```