[M32]

(4 pts)

○ Norme sur E :

- applicat° N à $[0,+\infty[$
- $N(x)=0 \Rightarrow x=0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| . N(x)$
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

(4 pts)

○ NE : $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

- $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \max(|x_1|,\dots,|x_n|)$
- $\|(x_1,\dots,x_n)\| = |x_1| + \dots + |x_n|$
- $\|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

○ A : ouvert (3 pts)

- $A \subset E$
- si $\forall a \in A, \exists r>0, B_r(a) \subset A$

où $B_r = \{x \in E, \|x-a\| < r\}$.

Ouverts, voisinages, équivalents

○ evn, $A \subset E$, A est ouvert si $\forall x \in E, \exists \varepsilon>0, B_\varepsilon(x) \subset A$.

○ Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

○ Tte boule ouverte $B_r(x)$ est un ouvert de E.

○ $x \in E$, un voisinage de x est un ouvert O de E tel que $x \in O$.

○ N_1, N_2 équivalents si $\exists C_1, C_2 > 0$, $\forall x \in E, N_1(x) \leq C_1 N_2(x)$ et $\forall x \in E, N_2(x) \leq C_2 N_1(x)$.

○ si N_1, N_2 équivalents, si $O \subset E$ est un ouvert pour N_1 alors $O \subset E$ est un ouvert pour N_2.

$\forall x \in E, \exists \varepsilon>0 : \{y \in E, N_1(x-y) < \varepsilon\} \subset O$

$\forall x \in E, \exists \hat{\varepsilon}>0 : \{y \in E, N_2(x-y) < \hat{\varepsilon}\} \subset O$.

Fermé, adhérence

○ un ss-ens $F \subset E$ est un fermé si son complément $E \setminus F$ est un ouvert.

○ $B_r(x)$ est un ouvert, $\forall y \in B_r(x), \exists \varepsilon>0$, $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$.

○ $A \subset E$, un point $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon>0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

○ $F \subset E$ est fermé :
$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus F, \exists \varepsilon>0, B_\varepsilon(x) \subset E \setminus F$
$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus F, \exists$ voisinage u de x, $u \subset E \setminus F$.

○ $x \in E$ ds l'ens $\{x\} \subset E$ est un fermé.

○ $\bar{A} = \{x \in E \mid x$ point adhérent à $A\}$

↳ adhérence (1) à A ou fermeture.

Fermé, point d'accumulat°, point isolé

(D) (i) $A \subset \bar{A}$.
(ii) $\bar{A}$ est fermé
(iii) si F est un fermé vérifiant $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{F}$.

→ $\bar{A}$ est le plus petit fermé q contient A.

(D) $A \subset E$ un sous-ens, $x \in E$ est un point d'accumulat° de A si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A, a \neq x, a \in B_\varepsilon(x)$.

(L) $A \subset E$, $x \in \bar{A}$ alors 2 possibilités :
1) x est un point d'accumulat°.
2) $x \in A$ et $\exists \varepsilon>0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$.
↳ x est un point isolé de A.

(Un point adhérent est un point d'accumulat° q n'est pas isolé).

Convergence, limites

(D) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, une suite dans E, $x : \mathbb{N} \to E$, $\ell \in E$, x_n admet ℓ comme limite qd $n \to +\infty$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$:
$n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon$.
Que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

(L) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

(L) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0$

(L) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall\ O$ voisinage ouvert de $\ell \in N$, $\forall n \geq N$: $x_n \in O$.

(L) A ss-ens de E, $x \in E$,
(i) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists\ a_n$ suite de A, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.
(ii) x point d'accumulat° de $A \Leftrightarrow \exists\ a_n$ suite de $A \setminus \{x\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

(P) x_n suite dans $\mathbb{R}^p$, $x_0 \in \mathbb{R}^p, \dots$, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$;
$\ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell = (\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^p)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ pour $1 \leq i \leq p$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell^i$.

(L) si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ alors $\exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_R(0)$. (ie : $\|a_n - \ell\| < \varepsilon$)

(D) (lim pour fonction) $f : A \subset E \to F$, a point accumulat° de A.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,\ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

(L) $\lim\limits_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{} = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \underbrace{\|f(x) - \ell\|}_{\text{réel}} = 0$
f à val$^{\text{r}}$ vectoriel
de f = à un vecteur ℓ

(L) ASSE :
(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \underbrace{B_\delta(a)}_{} \cap A \setminus \{a\}$: $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$

$0 < \|x - a\| < \delta$

(iii) $\forall\ O$ voisinage de ℓ, $\exists\ u$ voisin de a, $\forall x \in u \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in O$.
(iv) $\forall\ O$ voisinage de ℓ, $\exists\ u$ voisin de a, $U \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$.

(L) $f, g : A \subset E \to F$, a point acc de A :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m \Rightarrow \underset{x\to a}{L}(f(x) + g(x)) = \ell + m$

(L) $f : A \to F$, $g : A \to \mathbb{R}$,
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m \Rightarrow \underset{x\to a}{L}(g(x) \cdot f(x)) = m\ell$

(L) si $m \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

(P) $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$, $h = g \circ f$.
a point acc de A,
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{y\to \ell} g(y) = m$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = m$

Continuité

Ⓓ $f : A \subset E \longrightarrow F$. $a \in A$,

f est continue en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,$

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

si a point acc de A alors :

f est cont en $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ⓛ ASSE,

(i) f continue en a.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

(iii) $\forall O$ voisinage de $f(a)$, $\exists U$ voisinage de a,

tq $f(U \cap A) \subset O$.

(iv) $\forall O$ voisinage de $f(a)$, $\exists U$ voisinage de a,

$U \cap A \subset f(O)$.

Ⓓ $f : A \to F$,

f est continue (sur A) si f est continue en chaque point $a \in A$.

Ⓛ ASSE,

(i) f continue sur A.

$f(U \cap A) \subset O$.

(ii) $\forall O$ ouvert de F, $\exists U$ ouvert de E, $f^{-1}(O) = A \cap U$.

(iii) $\forall W$ fermé de F, $\exists V$ fermé de E, $f^{-1}(W) = A \cap V$.

Ⓟ $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cont, $b \in \mathbb{R}$,

- $\{x \in A \mid f(x) < b\} = A \cap U$ pr un ouvert $U \subset E$.
- $\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = A \cap V$ pr un fermé $V \subset E$.
- $\{x \in A \mid f(x) = b\} = A \cap V$ pr un fermé $V \subset E$.

Compacité

D $(E, \|\cdot\|)$ evn $A \subset E$;

- x_n dans ss-ens X, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \in X$.
Une suite y_n ds X est sous-suite de x_n ou suite extraite de x_n si $\exists$ A ST $\nearrow$: $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq on ait $y_n = x_{h(n)} = x_{k_n}$.
- A est borné ($p/ \|\cdot\|$), si $\exists R \in \mathbb{R}$ tq $A \subset B_R(0) \Leftrightarrow \forall x \in A, \|x\| < R$.
- Une suite x_n ds E est bornée ($p/ \|\cdot\|$) ce q revient $\exists R \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| < R$.
- si X est un ens et $f : X \to E$, f est f bornée si l'ens $\{f(x) \mid x \in X\}$ est borné, on a $\|f(x)\| < R$.
- A est compact si tte suite ds A admt une ss-suite CV dans A.

L$_{3.1}$ soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, A ST $\nearrow$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) \geq n$.

L$_{3.2}$ E ev, $A \subset E$ ss-ens, $N_1, N_2 : E \to \mathbb{R}$ deux normes sur E. Si N_1, N_2 st équivalentes alors A est borné p/ à Norme N_1 ssi il est borné p/ à N_2.

TH$_{3.3}$ $A \subset \mathbb{R}^p$ est COMPACT ssi A est fermé & borné.

TH$_{3.4}$ soit $f : A \subset E \to F$ cont & A compact alors $f(A)$ est compact.

P$_{3.5}$ soit $A \subset E$ compact et $f : A \to \mathbb{R}$ cont alors $\exists x_m, x_M \in A, \forall y \in A : f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

P$_{3.6}$. soit N une norme sur $\mathbb{R}^p$ alors $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est cont p/ norme $\|\cdot\|_\infty$.

T$_{3.7}$ si N est norme sur $\mathbb{R}^p$, alors N est Équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

C$_{3.8}$ soit $N_1, N_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux normes alors N_1, N_2 st équivalentes.

Continuité

- f cont $\Leftrightarrow \forall O$ ouvert : $f^{-1}(O)$ ouvert
  où $f^{-1}(O) = U \cap A$. ouvert.

- f cont $\Leftrightarrow \forall F$ fermé : $f^{-1}(F)$ fermé.
  où $f^{-1}(F) = U \cap A$.

$\boxed{M}$ Si fermé ou ouvert se forme $f(x) \geq\, =\, <\, \leq\ b$.

→ justifier f cont.
→ ①② si D_f ouvert / fermé.
→ invoquer Lemme.

Mq f cont : $\Pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ est cont.

→ produit, somme, quotient, composée de f cont est cont.
quotient ⟷ non nul au dénom.

→ de m̂ pr f vectorielle à plus composantes.

Mq f n'est pas cont :

Ⓛ $f : A \to \mathbb{R}$ cont en $a \in A$ alors si a_n suite de A tq $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

ⓔ $a_n = a$, $b_n = b$; $f(a) \neq f(b)$

- TOUTE Suites Dc inutile pr mq continuité.

Mq f cont
- → déf° : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (on cherche valeur δ)
- → Ⓣⓗ invoqué : $\Pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$
- → $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Compacité

Ⓣⓗ 3.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ compact $\Leftrightarrow$ fermé & borné.

⚠ dimension finie.

Convexité

Différentiabilité

- Ds ev, $f'(x)$ devient $Df(x)$
- f dérivable en x si $\exists$ M (p×m), $\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Mh\|}{\|h\|} = 0$
- Cette mat M est uniq.
- f dérivable en a $\Leftrightarrow \forall i$: f dérivable en x.

$h = g + f$ • $Dh(x) = Df(x) + Dg(x)$

$h = g.f$ • $Dh(x) = g(x).\, Df(x) + f(x).\, Dg(x)$

$h = g \circ f$ • $Dh(x) = Dg(f(x)).\ Df(x)$ = ⚠ autre sens

$g = \frac{1}{f}$ • $Dg(x) = -\frac{1}{f(x)^2}.\ Df(x)$

- f coordonnées : π_i dériv en chq pt : $D_{\pi_i}(x) = (0, \dots, 1, 0, 0)$

$t \in \mathbb{R}$ • Dérivée directionnelle : $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$

- Cas particulier $v = e_i$ base canoniq $\mathbb{R}^n$, $e_i^i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
- $(\partial_i f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t.e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

dérivée partielle de $i^{ème}$ direct°

dérivée partielle de f p/ à x_i : ①

- si f est différentiable en $x \in A$ alors $Df(x) = \left((\partial_1 f)x \ \dots \ (\partial_n f)(x) \right)$
- si fs $\partial_i f_j$ st $\boxed{\text{cont}}$ en x alors f est différentiable en x & $Df(x) = J$.

Méthodologie : Différentiable oui ou non ?

Cas 1 Dérivées partielles $\nexists$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON}}$ pas différ.

Cas 2 Dérivées partielles $\exists$:
(i) que ds point & pas ailleurs
(ii) $\exists$ partout.
↳ st-elles cont ? si $\boxed{\text{OUi}}$ alors différent.

Cas 3 Dérivées partielles pas cont, prendre matrice : la Différentielle, calculer si $\lim \frac{\|f(x+h) - f(x) - Mh\|}{\|h\|} = 0$
si $\lim = 0$ alors $\boxed{\text{OUi}}$ différent.

$\boxed{\text{M}}$ Valeurs approchée :
→ calcul $f(a+h) = f(a) + Df(a).h$

$\boxed{\text{Ex 32}}$ i) calcul $(\partial_1 f)(x,y)$, $(\partial_2 f)(x,y)$?...
ii) cont ? partt ? point ? SPQR si besoin
dérivée directionnelle $(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t.1, 0) - f(0,0)}{t} \overset{?}{=} 0$.
iii) $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$?

si $Df(x)$ $\exists$; $Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \partial_1 f_p(x) & \partial_2 f_p(x) & \cdots & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix}$

Dérivée directionnelle

en $(0,0)$: $(\partial_1 f)(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$

$(\partial_2 f)(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0.$

si $Df(0,0)$ $\exists$, on d.t avoir $Df(0,0) = (\partial_1 f, \partial_2 f) = (0,0)$

à vérifier $\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \dfrac{|f(0+h, 0+k) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$?

à vérifier : dérivées directionnelles: $v = (v_1, v_2)$

$D_v f(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} \overset{?}{=} 0$

Si oui alors dérivées directionnelles $\exists$.

$Df(0,0)$ $\exists$ si $\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \dfrac{|f(h,k) - f(0,0) - \overbrace{Df(0,0)}^{mat(0,0)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} 0$?

Si 0 oui différentiable sinon non.

TH Si $(\partial_i f)$ st cont $\Rightarrow$ f est différentiable.

D Une f de classe C^1 $\Leftrightarrow$ $(\partial_i f)$ cont.

D $x, y \in \mathbb{R}^n$, $[x,y]$ = segment,

$[x,y] = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$.

TH (Egalité Accroissements finis)

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x, y \in U \mid [x,y] \subset U$.

f différentiable sur U alors $\exists\ \theta \in]0,1[$:

$f(y) - f(x) = Df(x + \theta(y-x)) \cdot (y-x)$

(ici pas généralisable à f vectorielle).

TH (Inégalité Accroissements Finis)

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable,

$x, y \in U$ tq $[x,y] \subset U$.

alors $\|f(y) - f(x)\| \leq m.\left(\sup\limits_{\theta \in]0,1[} \|Df(x + \theta(y-x))\|_\infty\right) \|y - x\|$

D $U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert) est $\boxed{\text{convexe}}$.

si $\forall x, y \in U$, on a $[x,y] \subset U$.

@ 

convexe (ü)

pas convexe (x)

(TH) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable.
U convexe

Alors f est cte ssi $\forall x \in U : Df(x) = 0$ ← mat.

Dérivées d'ordre supérieur

$$D f_{ij} = \partial_i f_j \quad \text{et} \quad \partial_i D f_{jk} = \partial_i (\partial_j f_k)$$

(L) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est deux fois différentiable si $a \in U \iff \forall i = j$, $f_i : U \to \mathbb{R}$ est deux fois diff en a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Df(a).h - \frac{1}{2}(D^2 f)(a).h)(h) \|}{\| h \|^2} = 0$$

(D) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$(\partial_i \partial_j f)(x) \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

mat Hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 f)(x) & (\partial_1 \partial_2 f)(x) & \cdots & (\partial_1 \partial_n f)(x) \\ (\partial_2 \partial_1 f)(x) & & & \\ \vdots & & & \\ (\partial_n \partial_1 f)(x) & \cdots & & (\partial_n \partial_n f)(x) \end{pmatrix}$$

Contexte :

$$(v_1 \; v_2 \dots v_n) \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & & \partial_1 \partial_n f \\ & & \\ \partial_n \partial_1 f & & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

(TH) de Schwartz : mat Hessienne est symétriq.

DL ordre 2 : $$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x).h - \frac{1}{2} D^2 f(x)(h, h) \|}{\| h \|^2} = 0$$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{Df(x)}_{\text{mat jacobienne}}.h + \frac{1}{2} \underbrace{D^2 f(x)}_{\text{mat Hessienne}}.(h, h) + \| h \|^2 \, \varepsilon(h)$$

Extrema

(D) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $a \in U$ est maximum local (ou min local) si il $\exists V$ voisinage de a $V \subset U$ tq $\forall x \in V : f(x) \leq f(a)$ (ou $f(x) \geq f(a)$).
- Maximum global : $\forall x \in U : f(x) \leq f(a)$.

(L) si a est un max / min local alors $Df(a) = 0$ ← mat
$\iff \forall i : \partial_i f(0) = 0$.

(TH) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $Df(a) = 0$. On calcule H (mat hessienne (n×n, symétriq))
On calcule les valeurs propres de H.

(i) si ttes (vp) st positives alors a : min local.
(ii) si ttes (vp) st négatives alors a : max local.
(iii) si $\exists \lambda > 0$ et $\lambda' < 0$ alors a : ni max local ni min local : point selle.
(iv) sinon on ne sait pas.

(à voir critère de Sylvester & Règle des signes de Descartes)

Inversion locale & f implicites

(TH) Invers° locale

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$.

si $\det(Df(x_0)) \neq 0$ alors $\exists\, V \subset U$,

$\mathcal{V}$ de x_0, $W \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{V}$ de y_0 tq $\exists\, f^{-1} : W \to V$.

ie $\forall y \in W, \exists!\, x \in V, \; f(x) = y$.

Inversion locale & f implicites

Th Invers° locale

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$.

si $\det(Df(x_0)) \neq 0$ alors $\exists V \subset U$,

$\mathcal{V}$ de x_0, $W \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{V}$ de y_0 tq $\exists f^{-1} : W \to V$.

ie $\forall y \in W, \exists! x \in V, f(x) = y$.

Th dim 2. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$,

$f(a,b) = 0$, $(a,b) \in U$.

si $(\partial_2 f)(a,b) \neq 0$. Alors $\exists$ une fenêtre $V \times W \subset U$

$(a,b) \in V \times W$ et $g : V \to W$ de classe C^k

tq $\forall (x,y) \in V \times W$: $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$

Th Fonct° implicites : $U \subset \mathbb{R}^{n+p}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^p$.

$f(a,b) = 0$, f de classe C^k, $k \geq 1$.

si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ mat $p \times p$ inversible $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1(a,b) & \cdots & \partial_{n+p} f_1(a,b) \\ \partial_{n+1} f_p(a,b) & \cdots & \partial_{n+p} f_p(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$

(pie de $Df(a,b)$)

Alors $\exists$ une fenêtre $V \times W$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^p$,

$(a,b) \in V \times W \subset U$ et $g : V \to W$ de classe C^k

tq $\forall (x,y) \in V \times W$: $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$.

Trouver extrema : procédure

- calcul dér. part. premières
- Résoudre système $\begin{cases} \partial_1 f = 0 \\ \partial_2 f = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ on trouve coord. pts critiqs

- calcul dér. part. secondes / mat Hessienne
- calcul vp selon $\neq$tes mat Hessienne
- calcul locx ou globx ? ... $f(x) \leq f(a)$?

(calcul val^{r} f en pts critiqs)