M-33 Suites Numériques (approfondissement)

BI et BS

- $m \in \mathbb{R}$, minorant, $\forall a \in A$, $m \leq a$
- $M \in \mathbb{R}$, majorant, $\forall a \in A$, $a \leq M$.
- "ppe" $\begin{cases} m \in A \\ m : \text{minorant de } A. \end{cases}$
- "pge" $\begin{cases} M \in A \\ M : \text{majorant de } A. \end{cases}$

ens minorants : $]-\infty, \alpha]$ ou $\emptyset$

ens majorants : $[\alpha, +\infty[$ ou $\emptyset$.

- BI $\begin{cases} m \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$
- BS $\begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < x_\varepsilon \end{cases}$

TH ▸ Tte pie majorée & non vide $\mathbb{R}$ a BS.
▸ Tte pie minorée & non vide $\mathbb{R}$ a BI.

⇛ $\mathbb{Q}$ n'a pas cette ppté.

Suites de nbrs réels

D $(U_m)_m$ ste nbs réels, $u_* \in \mathbb{R}$, $(U_m)_m$ CV vers u_* si
$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, |U_m - u_*| < \varepsilon$.

D $(U_m)_m$ DV vers $+\infty$ si, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, U_m \geq M$.

P Tte suite CV est bornée.

TH La lim suite lsq $\exists$ est unique.

P $M \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ alors $M = \sup A$ ssi
(i) M est majorant de A.
(ii) $\exists (x_m)_m \subset A$ q CV vers M.

Suites CVtes & Inégalités

TH Si $(U_m)_m$ CV vers ℓ, si $U_m \geq \lambda$ apcr, alors $\ell \geq \lambda$.

TH (Gendarmes)
$U_m \leq V_m \leq W_m$
ℓ idtq ; $\ell \in \mathbb{R}$; ℓ idtq

Equivalents

D $(U_m)_m$ & $(V_m)_m$ st équivalents si $\exists$ $(\varepsilon_m)_m$ CV vers 0 apcr $U_m = V_m(1 + \varepsilon_m)$: $U_m \underset{m \to +\infty}{\sim} V_m$.

P $U_m \sim V_m$ et $U_m' \sim V_m' \Rightarrow U_m U_m' \sim V_m V_m'$

Rq Si $U_m \sim V_m$ alors $U_m = 0$ ssi $V_m = 0$.

P si $(U_m)_m$, $(V_m)_m$ ne s'annulent pas apcr, alors $U_m \sim V_m$ ssi $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{U_m}{V_m} = 1$.

⚠ Somme. $\cdot + \cdot \sim \cdot + \cdot$ et $\sim f(U_m)$: ne conviennent pas.

⚠ de limite : 1) Croissance & CV

TH si $(U_m)_m \nearrow$, non-majorée $\Rightarrow$ DV $+\infty$

TH $U_m \nearrow$, $U_m \leq M$ alors U_m CV vers ℓ où $\ell \leq M$.

⚠ $U_m \nearrow$, $U_m \leq M$ $\cancel{\Rightarrow}$ $\lim U_m = M$.

Cor $(U_m)_m \nearrow$ soit : - majorée (CV)
- DV $(+\infty)$

2) Suites adjacentes

D $(U_m)_m$, $(V_m)_m$ adjacentes si :
- $U_m \nearrow$
- $V_m \searrow$
- $\lim U_m - V_m = 0$

P $(U_m)_m$, $(V_m)_m$ adjacentes. (suppose $(U_m)_m \nearrow$, $(V_m)_m \searrow$)
$\Rightarrow U_m \leq V_m$.

TH $(U_m)_m$, $(V_m)_m$ adjacentes, $(U_m)_m$, $(V_m)_m$ CV m̂ limite.

3) Suites extraites & $\boxed{\text{TBW}}$

D Suite extraite ou sous-suite de $(U_m)_m$ si $\exists$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ S^T croissante : $U_{\varphi(m)}$

TH Tte suite extraite d'une suite CV vers m̂ limite.

TH (Bolzano-Weierstrass)
soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(U_m)_m \subset [a, b]$ alors
$\exists$ suite extraite $(U_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ q CV vers $\ell \in [a, b]$.

4) Suites de Cauchy

D $(U_m)_m$ vérifie le critère de Cauchy ou dite de Cauchy, si $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m_0$, $|U_p - U_q| < \varepsilon$.

P Tte suite de Cauchy est BORNÉE.

P Si (U_m) : $\boxed{\text{SdC}}$ q admet sl-suite CV $\Rightarrow (U_m)_m$ CV.

P Tte $\boxed{\text{SdC}}$ est CV.

TH $\mathbb{R}$ est complet. (adt, $\forall$ sdc est CV)

TH ASSE
(i) $\mathbb{R}$ est complet
(ii) $\mathbb{R}$ a ppté BS.
(iii) Tte suite majorée, $\nearrow$: CV.
(iv) 2 suites adjacentes CV m̂ lim.
(v) $\boxed{\text{TBW}}$

5) Suites Récurrentes

D $(U_m)_m$ est récurrente, s'il existe une fonction f définie int. I, $\forall m \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} U_m \in I. \\ U_{m+1} = f(U_m). \end{cases}$

P soit $I^{\mathbb{R}}_{int}$, $f : I \to I$, une application dérivable à l'intérieur de I, $c \in]0, 1[$, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq c$ alors f est contractante de rapport c.

D $I^{int}_{\mathbb{R}}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est contractante si
(i) $f(x) \subset I$.
(ii) $\exists c \in]0, 1[, \forall x, x' \in]0, 1[$,
$|f(x) - f(x')| \leq c\, |x - x'|$

rapport de contraction de f sur I.

TH (Points fixes de Banach)
$I^{\mathbb{R}}_{int}$ fermé, f appli : contractante sur I de rapport c alors $\exists$ unique $\ell \in I$, $f(\ell) = \ell$. (ℓ : point fixe de f).

D^t, $\forall u_0 \in I$, $(U_m)_m$ déf p $U_{m+1} = f(U_m)$ CV vers ℓ.

D^t, $\forall m \in \mathbb{N}$, $|U_m - \ell| \leq c^m |U_0 - \ell|$

$|U_m - \ell| \leq \dfrac{c^m}{1 - c} |U_0 - U_1|$

- $m \in \mathbb{R}$ minorant, $\forall a \in A$, $m \leq a$
- $M \in \mathbb{R}$ majorant, $\forall a \in A$, $a \leq M$.
- ppe $\to m \in A$; $\to m$: minorant de A.
- pge $\to M \in A$; $\to M$: majorant de A

ens minorants : $]-\infty, \alpha]$ ou $\emptyset$ | ens maj : $[\alpha, \infty[$ ou $\emptyset$

P $(U_n)_n$ ste nbr réels, $u_* \in \mathbb{R}$, $(U_n)_n$ CV vers u_* si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - u_*| < \varepsilon$.

P $(U_n)_n$ DV vers $+\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \geq M$.

P Tte suite CV est bornée.

TH Si $(U_n)_n$ CV vers l, si $U_n \geq \lambda$ apcr alors $l \geq \lambda$.

D $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ st équivalents si $\exists (\varepsilon_n)_n$ CV vers 0 apcr $U_n = V_n(1+\varepsilon_n)$: $U_n \underset{n \to \infty}{\sim} V_n$.

P $U_n \sim V_n$ et $U_n' \sim V_n'$ alors $U_n U_n' \sim V_n V_n'$

TH si $(U_n)_n \nearrow$, non-majorée $\Rightarrow$ DV $+\infty$.

TH $U_n \nearrow$, $U_n \leq M$ alors U_n CV vers l où $l \leq M$.

D $(b_n)_n$, $(a_n)_n$ adjacentes si :
- $b_n \nearrow$
- $a_n \searrow$
- L $b_n - a_n = 0$

$\to b_n \leq l \leq a_n$.

BI / BS

- BI $\to m$ minorant de A. $\to \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon < m + \varepsilon$
- BS $\to M$ majorant de A $\to \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

TH
- Tte pie majorée & non vide de $\mathbb{R}$ a BS
- Tte – minorée ——— — BI
- Limite suite lsq $\exists$ est uniq

$\mathbb{Q}$ n'a pas cette ppté

TH $M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ alors $M = \sup A$ ssi
(i) M est un majorant de A
(ii) $\exists (x_n)_n \subset A$ q CV vers M.

Suites de Nbrs réels

Suites CV & Inégalités

TH ds Gendarmes

$U_n \leq V_n \leq W_n$

$U_n \to l$ idtq ; $V_n \to l \in \mathbb{R}$; $W_n \to l$ idtq

Équivalents

Rq Si $U_n \sim V_n$ alors $U_n = 0$ ssi $V_n = 0$.

P si $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ ne s'annulent pas apcr, alors $U_n \sim V_n$ ssi $\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$.

⚠ somme & $f(U_n)$ ne convient pas pr $\sim$.

⚠ limite

1) Croissance & CV

Cas $(U_n)_n \nearrow$ soit : - majorée CV
- DV $(+\infty)$.

2) Suites adjacentes

P $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ adjacentes $\Rightarrow U_n \leq V_n$.

TH $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ adjacentes, CV vers $\hat{m}$ limite.

C1- Suites Numériques

3) Suites extraites & $\boxed{\text{TBW}}$

(D) **Suite extraite** ou ss-suite de $(U_n)_n$ si $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ST croissante : $U_{\varphi(n)}$

(TH) Tte suite extraite d'une suite (CV) vers m̂ limite.

(TH) (**Bolzano - Weierstrass**)

soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(U_n)_n \subset [a, b]$ alors
$\exists$ suite extraite $(U_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ q (CV) vers $l \in [a, b]$

4) Suites de Cauchy

(D) $(U_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy ou dite de Cauchy, si
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0,$

$$|U_p - U_q| < \varepsilon.$$

(TH)
(i) $\mathbb{R}$ est complet
(ii) $\mathbb{R}$ a ppté (BS).
(iii) Tte suite majorée $\nearrow$: (CV).
(iv) 2 suites adjacentes (CV) m̂ lim.
(v) $\boxed{\text{TBW}}$

(P) Tte suite de Cauchy est BORNÉE.

(P) Si (U_n) : SdC q admt ss-suite (CV) $\Rightarrow (U_n)_n$ (CV).

(P) Tte SdC est (CV).

(TH) $\mathbb{R}$ est complet (tte SdC est (CV))

5) Suites Récurrentes

(D) $(U_n)_n$ est récurrente, si $\exists$ une fonc⊝ f définie I, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_n \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(P) soit $I \overset{\mathbb{R}}{\text{int}}$, $f : I \to I$, une applicat° dérivable à l'int de I, $c \in]0,1[$, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq c$ alors f est contractante de rapport c.

(D) $I \overset{\text{int}}{\mathbb{R}}$, $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante si
(i) $f(x) \subset I$.
(ii) $\exists\ c \in]0,1[, \forall x, x' \in]0,1[,$
$|f(x) - f(x')| \leq c\,|x - x'|$

(TH) (**Points fixes de Banach**)

$I \overset{\mathbb{R}}{\text{int}}$, f appli : contractante sur I de rapport c alors $\exists$ uniq $l \in I$, $f(l) = l$.

De plus, $(U_n)_n$ déf p $U_{n+1} = f(U_n)$ (CV) vers l.

De plus, $|U_n - l| \leq c^n\,|U_0 - l|$

$$|U_n - l| \leq \frac{c^n}{1-c}\,|U_0 - U_1|$$

- M32 –
Calcul Différentiel

– Normes –

Table des matières

1. Normes

1.1 Définitions. • Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$). Alors une application $N : E \to \mathbf{R}$ est appelé *une norme* si elle vérifie les quatre conditions

(i) $\forall x \in E : N(x) \geq 0$ (on aurait pu dire $N : E \to [0, \infty[$),

(ii) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,

(iii) $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbf{R} : N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$ et

(iv) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (appelée *l'inégalité triangulaire*).

Il est d'habitude de noter une norme, pas par une lettre (ici la lettre N), mais par des doubles barres, c'est-à-dire qu'on écrit $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

• Un *espace vectoriel normé* est un couple $(E, \|\cdot\|)$, où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

• Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La *boule ouverte de rayon r et de centre x (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)*, notée $B_r(x)$, est le sous-ensemble de E défini par

$$B_r(x) = \{\, y \in E \mid \|y - x\| < r \,\} \ .$$

1.2 Lemme. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $x, y \in E$ arbitraire. Alors on a l'inégalité*

$$\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ .$$

1.3 Lemme. *Soit $N : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une norme sur $\mathbf{R}$, alors $\exists r > 0\ \forall x \in \mathbf{R} : N(x) = r \cdot |x|$.*

1.4 Lemme. *Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. Alors les applications $N_1, N_2, N_\infty : E_1 \times E_2 \to \mathbf{R}$ définies par*

$$N_1(x, y) = \|x\|_1 + \|y\|_2 \qquad N_2(x, y) = \sqrt{(\|x\|_1)^2 + (\|y\|_2)^2}$$
$$N_\infty(x, y) = \max(\|x\|_1, \|y\|_2)$$

sont des normes sur $E_1 \times E_2$.

→ **1.5 Lemme.** *Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ définies par*

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i| \qquad \|(x_1, \ldots, x_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i|^2}$$
$$\|(x_1, \ldots, x_p)\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_p|)$$

sont des normes sur $\mathbf{R}^p$.

Définitions. • Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On dit que A e *ouvert (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)* si $\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$.

• Un *voisinage ouvert de $x \in E$* est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

→ **1.6 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors toute boule ouver $B_r(x)$ est un ouvert de E.*

Définition. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \to \mathbf{R}$ deux normes sur l On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in E : \|x\|_1 \leq C_1 \cdot \|x\|_2 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E : \|x\|_2 \leq C_2 \cdot \|x\|_1 \ .$$

→ **1.7 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \to \mathbf{R}$ deux normes sur et $C > 0$. Alors on a l'équivalence*

$$\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1 \iff B_1^{(1)}(0) \subset B_C^{(2)}(0) \ ,$$

où $B_r^{(i)}(x)$ désigne la boule ouvert de rayon r et de centre x par rapport à la norn $\|\cdot\|_i$.

→ **1.8 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, 3$ trois normes sur l Si $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$, alors $\|\cdot\|_1$ e équivalente à $\|\cdot\|_3$.*

→ **1.9 Lemme.** *Les trois normes $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \infty$ sur $\mathbf{R}^p$ sont équivalentes.*

→ **1.10 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$ deux normes sur E. Alo les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes et*

(ii) *pour tout $A \subset E$ on a l'équivalence : A un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ si seulement si A un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_2$.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset E$ est *un fermé* si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

→ **1.11 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-ensemble. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un fermé,*

(ii) *$\forall x \notin F\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset$ et*

(iii) *$\forall x \notin F\ \exists$ voisinage ouvert U de $x : U \cap F = \emptyset$.*

→ **1.12 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x \in E$ un point. Alors l'ensemble $\{x\} \subset E$ est un fermé.*

→ **1.13 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé.*

(i) *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*

(ii) *Si A et B sont deux ouverts de E, alors $A \cap B$ est un ouvert de E.*

(iii) *Si A_i, $i \in I$ est une famille d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de E.*

(iv) *$\emptyset$ et E sont des fermés.*

(v) *Si A et B sont deux fermés de E, alors $A \cup B$ est un fermé de E.*

(vi) *Si A_i, $i \in I$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé de E.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *adhérent* à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble de tous les points adhérent à A est appelé *l'adhérence de A* ou *la fermeture de A* et est noté $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{\, x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A \,\} \ .$$

→ **1.14 Lemme.** *x est adhérent à A si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de x on a $U \cap A \neq \emptyset$.*

→ **1.15 Lemme.** *$A \subset \overline{A}$.*

1.16 Lemme. *$\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$. On dit que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

→ **1.17 Corollaire.** *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *un point d'accumulation de A* si $\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

→ **1.18 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.*

(i) *Si $x \in E$ est un point d'accumulation de A, alors x est un point adhérent à A.*

(ii) si $x \in E$ est PAD à A alors
soit x est un PAC de A
soit $\exists\, \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$. (Pt isolé).

$N : E \to \mathbb{R}$
$F \subset E$ un ss-ens.
soit $(E, \|\cdot\|)$, un evm...

→ **1.11 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-ensemble. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un fermé,*

(ii) *$\forall x \notin F\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset$ et*

(iii) *$\forall x \notin F\ \exists$ voisinage ouvert U de $x : U \cap F = \emptyset$.*

→ **1.12 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x \in E$ un point. Alors l'ensemble $\{x\} \subset E$ est un fermé.*

→ **1.13 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé.*

(i) *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*

(ii) *Si A et B sont deux ouverts de E, alors $A \cap B$ est un ouvert de E.*

(iii) *Si A_i, $i \in I$ est une famille d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de E.*

(iv) *$\emptyset$ et E sont des fermés.*

(v) *Si A et B sont deux fermés de E, alors $A \cup B$ est un fermé de E.*

(vi) *Si A_i, $i \in I$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé de E.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *adhérent* à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble de tous les points adhérent à A est appelé *l'adhérence de A* ou *la fermeture de A* et est noté $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{\, x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A \,\} \ .$$

→ **1.14 Lemme.** *x est adhérent à A si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de x on a $U \cap A \neq \emptyset$.*

→ **1.15 Lemme.** *$A \subset \overline{A}$.*

1.16 Lemme. *$\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé vérifiant $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$. On dit que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

→ **1.17 Corollaire.** *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit qu'un point $x \in E$ est *un point d'accumulation de A* si $\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

→ **1.18 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.*

(i) *Si $x \in E$ est un point d'accumulation de A, alors x est un point adhérent à A.*

Norme

- Norme
- $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\triangle$ I
- Ouvert
- Voisinage ouvert
- Normes équivalentes
- Si équivt si.... ouvert pr... alors
- Toute boule ouverte
- Un voisinage de x

- Fermé ... complémentaire
- Fermé ... boule voisinage
- Boule ouverte inclusion
- Fermé ... singleton
- Point adhérent
- ASSE entre Fermé $\longleftrightarrow$ Adhérent
- Adhérence à A ∾ Fermeture
- Point d'accumulat° ∾ PAC & PI.

Norme

Norme sur E : appli N sur $[0,+\infty[$
- $N(x)=0 \Rightarrow x=0$
- $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$
- $N(\lambda x)=|\lambda|.N(x)$

$\|\cdot\|_1 = \|(x_1,\dots,x_n)\| = |x_1| + \dots |x_n|$

$\|\cdot\|_2 = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$\|\cdot\|_\infty = \max(|x_1|,\dots,|x_n|)$.

$A \subset E$, A **ouvert** si $\forall a \in A, \exists \varepsilon>0$, $B_\varepsilon(a) \subset A$. ie $B_\varepsilon = \{x \in E, \|x-a\| < \varepsilon\}$.

Un **voisinage ouvert** de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

N_1, N_2 **équivalents** si $\exists C_1, C_2 > 0, \forall x \in E$,
$N_1(x) \leq C_1.N_2(x)$ et $N_2(x) \leq C_2.N_1(x)$

si N_1, N_2 **équivalents**, si $O \subset E$ est **ouvert** pr N_1 alors $O \subset E$ est un ouvert pr N_2.
$\forall x \in E, \exists \varepsilon>0 : \{y \in E, N_1(x-y) < \varepsilon\} \subset O$
$\forall x \in E, \exists \hat{\varepsilon}>0 : \{y \in E, N_2(x-y) < \hat{\varepsilon}\} \subset O$

Toute **boule ouverte** $B_r(x)$ est un ouvert de E.

$x \in E$, un **voisinage** de x est un ouvert O de E tq $x \in O$.

Un ss-ens $F \subset E$ est un **fermé** si son **complémentaire $E \setminus F$** est un ouvert.

$F \subset E$ est **fermé** : $\Leftrightarrow \forall x \in E\setminus F, \exists \varepsilon>0, B_\varepsilon(x) \subset E\setminus F$.
$\Leftrightarrow \forall x \in E\setminus F, \exists$ voisinage u de x, $u \subset E\setminus F$.

$B_r(x)$ est un ouvert, $\forall y \in B_r(x), \exists \varepsilon>0$:
$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$

$x \in E$ ds l'ens, $\{x\} \subset E$ est un **fermé**.

$A \subset E$, un point $x \in E$ est **adhérent à A** si $\forall \varepsilon>0$:
$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

ASSE (i) $A \subset \bar{A}$
(ii) $\bar{A}$ est fermé.
(iii) si F fermé vérifiant $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{F}$. ($\bar{A}$: + petit fermé q contient A).

$\bar{A} = \{x \in E \mid x$ point adhérent à $A\}$ → adhérence à A, fermeture.

$A \subset E$ un ss-ens, $x \in E$ est un **point d'accumulat° de A**, si $\forall \varepsilon>0$, $\exists a \in A, a \neq x, a \in B_\varepsilon(x)$.

$A \subset E$, $x \in \bar{A}$, 2 possibilités :
- x est **PAC**
- $x \in A$ et $\exists \varepsilon>0$: $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$ → x : **point isolé de A**.

Convergence & Limite

Limite d'une suite

Lemme fondamental de la limite

Unicité de la limite

Voisinage & Limite

AJJE

Suite, limite / PAC, limite

Coord. suite, limite

Limite & boule

Limite pr 1 foncO f(x)

Lemme fondamental de la limite pr f(x)

AJJE

limite / boule / voisinage / image réciproq

Limite somme d'une foncO.

Limite produit d'une foncO

Limite inverse d'une foncO

Limite composée d'une foncO

Convergence & Limite

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, une suite $x : \mathbb{N} \to E$, $l \in E$, x_n admet l côm limite qd $n \to \infty$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \| x_n - l \| < \varepsilon$. ($\lim_{n\to\infty} x_n = l$).

$\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \lim_{n\to\infty} \| x_n - l \| = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = l_2$ alors $l_1 = l_2$

$\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \forall O$ voisinage ouvert de $l \in N, \forall n \geq N, x_n \in O$.

ASSE $A \subset E$, $x \in E$,

(i) $x \in \bar{A} \iff \exists a_n$ suite de A, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(ii) x : PAC de $A \iff \exists a_n$ suite de $A \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

- x_n suite dans $\mathbb{R}^p$, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$, $l \in \mathbb{R}^p$, $l = (l^1, \dots, l^p)$ alors $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ pour $1 \leq i \leq p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l^i$

si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ alors $\exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \in B_R(0)$. ie $\| a_n - l \| < \varepsilon$.

$f : A \subset E \to F$, a PAC A. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$, $0 < \| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - l \| < \varepsilon$

$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a} \| f(x) - l \| = 0$.

ASSE

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta \cap A \setminus \{a\}$: $f(x) \in B_\varepsilon(l)$

(iii) $\forall O$ voisinage de l, $\exists u$ vois. de a, $\forall x \in u \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in O$

(iv) $\forall O$ voisi. de l, $\exists u$ voisi. de a, $u \cap A \setminus \{a\} \subset f^{-1}(O)$.

$f, g : A \subset E \to F$, a : PAC, $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l + m$

$\lim_{x\to a} (g(x) . f(x)) = m . l$

si $m \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

$h = g \circ f$, a : PAC de A ; $\lim_{x\to a} g(f(x)) = m$

Continuité & Compacité

Définiθ continuité (cas général)

Définiθ continuité (cas PAC)

ASSE

cont / boule / voisinage / voisinage

ASSE

cont / ouvert / fermé

Prop fondamental / ouvert / fermé / fermé

Cont sr ts ses points → cont point

Définiθs préléminaires
- → sous-suite
- → appli $S^T \nearrow$
- → ens borné
- → f bornée
- → compact

Applicaθ $S^T \nearrow$.

Normes équivalentes & A borné

TH fondamental compacité (⚠ dim finie)

Compact sur une foncθ

Foncθs suites bornées

$\|\cdot\|_\infty$

$N \Leftrightarrow \|\cdot\|_\infty$

$N_1, N_2 \quad \Leftrightarrow$

Continuité & Compacité

$f : A \subset E \to F$, $a \in A$, f cont en a
$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,$
$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

si a PAC alors f cont en a
$\iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ASSE
(i) f cont en a.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$
(iii) $\forall O$ voisi de $f(a)$, $\exists u$ vois. de a, $f(U \cap A) \subset O$
(iv) $\forall O$ voisi de $f(a)$, $\exists u$ vois de a, $U \cap A \subset f(O)$

ASSE
(i) f cont en A.
(ii) $\forall O$ ouvert de F, $\exists u$ ouvert de E, $f^{-1}(O) = A \cap U$
(iii) $\forall W$ fermé de F, $\exists V$ fermé de E, $f^{-1}(W) = A \cap V$

$f : A \to \mathbb{R}$ cont, $b \in \mathbb{R}$.
- $\{x \in A \mid f(x) < b\} = A \cap U$ pr ouvert $U \subset E$
- $\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = A \cap V$ pr fermé $V \subset E$
- $\{x \in A \mid f(x) = b\} = A \cap V$ pr fermé $V \subset E$.

$f : A \to F$, f est cont sur A si f est cont en chq point $a \in A$.

$(E, \|\cdot\|)$, evn, $A \subset E$.
- x_n ds ss-ens X, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$.
- Une suite y_n ds X est sous-suite de x_n ou suite extraite de x_n si $\exists$ A $S^T \nearrow$: $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $y_n = x_{k(n)} = x_{k_n}$
- A est borné ($\forall \|\cdot\|$) si $\exists R \in \mathbb{R}$, $A \subset B_R(0)$
$\iff \forall x \in A, \|x\| < R$.

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, A $S^T \nearrow$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $k(n) \geq n$.

E : ev, $A \subset E$, $N_1, N_2 : E \to \mathbb{R}$, si N_1, N_2 équivalentes alors A est borné $\forall N_1$ ssi il est borné $\forall N_2$.

$A \subset \mathbb{R}^p$ est COMPACT ssi A est fermé & borné.

$f : A \subset E \to F$ cont, A compact alors $f(A)$ est compact.

$A \subset E$ compact, $f : A \to \mathbb{R}$ cont alors $\exists x_m, x_M \in A$, $\forall y \in A$:
$f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_M)$.

N une norme sur $\mathbb{R}^p$ alors $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est cont $\forall \|\cdot\|_\infty$.

si N est norme sur $\mathbb{R}^p$ alors N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

$N_1, N_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux normes alors N_1, N_2 st équivalentes

$(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$
- suite x_n bornée si $\exists \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| < R$.
- si X ens, $f : X \to E$, f est fonct bornée si l'ens $\{f(x) \mid x \in X\}$ est borné, on a $\|f(x)\| < R$.
- A est compact si tte suite ds A admet une ss-suite CV ds A.

Normes équivalentes $\Rightarrow$ lim

Égalité limites de mat A, B

Ⓓ f est différentiable en a.

f est différentiable en a alors

$(Df)(a) =$

$(D(f+g))(a) =$

$(D(fg))(a) =$

$(D(g \circ f))(a) =$

Ⓓ dérivée directionnelle de f au point a ds direct° v.

dérivée partielle cp dir. direct.

si f est différentiable en a alors

$(Df)(a) = \dots$

$f(x) = \dots \quad \Rightarrow (Df)(a) = \dots$

Différentielle

si dériv. part. $\exists$ ....

Ⓓ f de classe C^1, f diff sur U

Classe C^1 ssi

Ⓓ Segment de droite $[x, y]$

Ⓓ convexe

Egalité Accroissements finis

Inégalité Accroissements finis

$\boxed{M}$ Différentielle OUI ou NON

(i)
(ii)
(iii)

Dériv. directionnelle

Ⓓ convexe

Différentielle

soit $N_{(m)}, N'_{(m)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 2 normes équivalentes sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^p$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{N_{(p)}(f(a+h)-f(a)-A.h)}{N_{(m)}(h)} = 0 \Rightarrow \lim \frac{N'_{(p)}(f(a+h)-f(a)-A.h)}{N'_{(m)}(h)} = 0$$

si égalités $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Bh\|}{\|h\|}$ alors $A=B$.

f est diff en a si $\exists$ mat $A \in \mathcal{M}(p\times m, \mathbb{R})$ tq

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-A.h\|}{\|h\|} = 0$$

si f est diff en $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ alors f est cont en a.

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. si on écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ alors f est diff en a ssi toutes les fs f_i st diff en a. On a l'égalité

$$(Df)(a) = \begin{pmatrix} (Df_1)(a) \\ \vdots \\ (Df_p)(a) \end{pmatrix}$$

$$(D(f+g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$$

$$(D(fg))(a) = f(a).(Dg)(a) + g(a).(Df)(a)$$

$$(D(g\circ f))(a) = (Dg)(b).(Df)(a)$$

La dérivée directionnelle de f au point a ds direct° v :

$$(D_v f)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$$

$$(\partial_i f)(a) = (D_{e_i} f)(a)$$

$$(\partial_i f)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i+h, \dots, a_m) - f(a)}{h}$$

Si f est diff en a alors dériv. direct. en a ds direct° v $\exists$ et est

$$(D_v f)(a) = (Df)(a)\, v$$

$$(Df)(a) = ((\partial_1 f)(a) \ \dots \ (\partial_m f)(a))$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \Rightarrow (Df)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & \cdots & (\partial_m f_1)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_p)(a) & \cdots & (\partial_m f_p)(a) \end{pmatrix}$$

hyp, $V \subset U$ un voisi ouvert de a. Si les dér. part. de f $\exists$ $\forall$ point $x \in V$ et si elles st cont en a, alors f est différentiable en a.

f est diff sur U si elle est diff en chq pt $a \in U$. f est de classe C^1 si elle est diff sur U et si l'applicat° $Df : U \to M(p\times m, \mathbb{R})$ est cont.

f est de classe C^1 ssi toutes dér. part. $(\partial_i f_j)$ st cont.

soit E (ev), $\forall x, y \in E$, on déf segment de droite $[x,y]$ entre x et y par :

$$[x,y] = \{ tx + (1-t)y \mid t \in [0,1] \}.$$

soit $f : U \to \mathbb{R}$ une appli diffé & $a, b \in U \subset \mathbb{R}^n$ tq le segment $[a,b]$ est contenu ds U. Alors $\exists\, \theta \in \,]0,1[$ tq on a l'égalité des accroissements finis :

$$f(b) - f(a) = (Df)(a + \theta(b-a)).(b-a)$$

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli diff, $a, b \in U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $V \subset U$ un ss-ens ouvert contenant le segment $[a,b]$ alors on a l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \le m. \sup_{x\in V} \|(Df)(x)\|_\infty . \|b-a\|_\infty$$

soit $U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert) est convexe si $\forall x, y \in U$, on a $[x,y] \subset U$.

$\boxed{M}$ Diff oui ou NON ?

(i) dér part^{lle} $\exists$ ⇒ NON pas diff.

(ii) dér part^{lle} $\exists$: → que ds un point & pas ailleurs
→ $\exists$ partout

(iii) dér part pas cont, prendre matrice : la Différentielle, calculer si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-Mh\|}{\|h\|} =$
si $\lim = 0$ alors oui diff.

Dérivée direct : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$

$$(\partial_i f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t.e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

(D) Implémentat° DOS, ordre 2, k+1 .

Différentielle Ordre Supérieur

k- linéaire

k- fois différentiable en a

Classe C^k si

TH de Schwaz

Appli k- linéaire symétriq

Deux fois diff au point a

Mat Hessienne

Contexte

Procédure

Différentielle Ordre Supérieur

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

* f est **2 fois diff en a** si f est diff ds un voisin. ouvert $V \subset U$ de a & que l'applicat° $Df : V \to \mathcal{L}_p(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pm}$ est diff en a. On note $(D^2 f)(a) = (D(Df))(a)$. La différentielle d'ordre 2 de f en a.
* Par récurrence, f est **k+1 diff en a** & k+1 ème dérivée $(D^{k+1})(a)$ si f est k fois diff sr un voisinage ouvert $V \subset U$ de a.

$$(D(D^k f))(a) = (D^{k+1} f)(a) \in \mathcal{L}(pn^k \times n, \mathbb{R})$$

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ k fois diff en $a \in U$.
Alors $(D^k f)(a) : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^p$,
$(v_1, \cdots, v_k) \mapsto ((D^k f)(a))(v_1, \cdots, v_k)$ est **k-linéaire**.

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli & $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$
Alors **f est k fois diff en a** $\in U \subset \mathbb{R}^n$ ssi ttes les fs $f_i : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$ st k fois diff en a.

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli. Alors f est de **classe C^k** **ssi** toutes les dérivées partielles d'ordre k $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f : U \to \mathbb{R}^p$ existent et st **cont**.

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une appli et $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.
si f est **2 fois diff en a** alors pr $1 \leq i \leq j \leq n$ fixés :

$$(\partial_i \partial_j f)(a) = (\partial_j \partial_i f)(a)$$

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k et $a \in U$. Alors $(D^k f)(a)$, la k ème dérivée de f au point a, est une applicat° **k-linéaire symétriq** $(D^k f)(a) : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^p$

soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une applicat° **2 fois diff en $a \in U \subset \mathbb{R}^n$**
alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - (Df)(a).h - \frac{1}{2}(D^2 f)(a)(h,h) \|}{\| h \|^2} = 0$$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $(\partial_i \partial_j f)(x) \in \mathbb{R}$ $\quad 1 \leq i \leq j \leq n$.

mat Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 f)(x) & (\partial_1 \partial_2 f)(x) & & (\partial_1 \partial_n f)(x) \\ (\partial_2 \partial_1 f)(x) & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ (\partial_n \partial_1 f)(x) & \cdots & & (\partial_n \partial_n f)(x) \end{pmatrix}$$

Contexte :

$$(v_1 \; v_2 \cdots v_n) \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \cdots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \cdots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Ⓓ max local, min local

si f diff en a & a: |max / min local alors

Ⓓ point critique

Mat carrée symétrique

Ⓓ difféomorphisme

(TH) Inversion locale

Extrema

Matrice Hessienne (VP) (i) (ii) (iii) (iv)

Critère de Sylvester

Critère de Descartes

$\boxed{M}$ trouver extrema

Inversion Locale & Fonction Implicite

(TH) Fonctions Implicites (dim 2)

(TH) Fonctions Implicites

⑥

Extrema

soit $f: U \to \mathbb{R}$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. a est **max local** s'∃ voisinage ouvert $V \subset U$ de a tq

$\forall x \in V: f(x) \leq f(a)$.

et on dit que a est **max global** : $\forall x \in U: f(x) \leq f(a)$

si f est **diff en a** & si a : **max ou min local** alors $(Df)(a) = 0$.

$f: U \to \mathbb{R}$ une f diff. $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.

a est un **point critiq si $(Df)(a) = 0$**

soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors ∃ base orthonormée de vp. ~~ep~~ ttes vp de A st réelles.

soit $H_{ij} = (\partial_i \partial_j f)(a)$ (le Hessien de f au point a).

(i) si ttes vp **$> 0 \implies$ a : min local**

(ii) si ttes vp **$< 0 \implies$ a : max local**

(iii) si H a vp > 0 et < 0 alors **a : point selle**

(iv) sinon on ne pt pas conclure.

Crit. de Sylvester

Crit de Descartes

Trouver extrema : $\longrightarrow$ calcul dérivées partielles premières

$\longrightarrow$ résoudre système $\begin{cases} \partial_1 f = 0 \\ \partial_2 f = 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\implies$ on trouve coordonnées points critiqs

$\longrightarrow$ calcul dér part. secondes / mat Hessienne.

$\longrightarrow$ calcul vp selon $\neq$tes mat Hessiennes.

$\longrightarrow$ déterminer si extrema locaux ou globaux.

Inversion Locale & Fonction Implicite

Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 2 ouverts et $f: U \to V$ une applicaθ. On dit que f est un **C^k difféomorphisme** si f est de classe C^k, qu'elle est bijective et que $f^{-1}: V \to U$ est aussi de classe C^k.

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$, si **$\det(Df(x_0)) \neq 0$** alors $\exists\, V \subset U$, voisin. de x_0, $W \subset \mathbb{R}^n$ voisi de y_0, **$\exists\, f': W \to V$.**

$f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$, $(a,b) \in U$. **$f(a,b) = 0$.** si **$(\partial_2 f)(a,b) \neq 0$** alors ∃ fenêtre $V \times W \subset U$, $(a,b) \in V \times W$ et $g: V \to W$ de classe C^k tq $\forall (x,y) \in V \times W$: **$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.**

$U \subset \mathbb{R}^{m+p}$, $f: U \to \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$, $f(a,b) = 0$, f classe C^k, $k \geq 1$.

si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ mat $p \times p$ inversible $\iff$ **det** $\begin{pmatrix} \partial_{m+1} f_1(a,b) & \dots & \partial_{m+p} f_1(a,b) \\ \vdots & & \\ \partial_{m+1} f_p(a,b) & \dots & \partial_{m+p} f_p(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$

alors ∃ fenêtre $V \times W$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in V \times W \subset U$ et $g: V \to W$ de classe C^k tq $\forall (x,y) \in V \times W$: **$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.**