

# M54 - Analyse Numérique Matricielle

- Précis ordi,  $A^T, A^*$ ,  $\langle x, y \rangle$ , ICS,  $A^\perp$ ,  $\text{sim}^R$
- mat sym, orth, normale,  $\frac{1}{2} \text{ def } \oplus$ ,  $\text{def } \oplus$ ,  $\text{diag}^k$ ,  $\nabla$
- Élt propre, Rayon spectral

- (TH) mat diagonalisable, (D) Norme, (FF)  $\text{det}^{\text{inv}}$   $Ax=b$
- (FF) rg & orthogonal
- (TH) Facto<sup>r</sup> Schur / (Cor) Diag<sup>r</sup> mat hermitienne
- (L) mat normale &  $\nabla$

## 4. Décomposé en valeurs singulières

(L)  $A^*A$  (vp)  $G$ : (NB) mat unitaire

(L) (vp) de  $AB$  &  $BA$

• (TH)  $V \in \mathbb{R}$  singulière mat normale

(TH) Décomposé (VS), SVD :  $A = U \Sigma V^*$

Schéma calcul SVD  $\rightarrow (\mu_j^2, v_j)$  de  $A^*A$   
 $\rightarrow u_j = \frac{A v_j}{\mu_j}$

## 5. Approcher A par mat de faible rang

(TH) Eckhart-Young,  $B = U \Sigma_k V^*$  (1)

## 6. Normes matricielles & normes compatibles

(D) Normes matricielle  $\rightarrow$  compat de norme vectorielle  
 norme matricielle

(L)  $\forall [nm]$ ,  $n \text{ pt} \leftrightarrow [mv]$  q't's compat. de  $\|A\|$ ,  $\varphi(A)$

(TH) Normes  $\|A\| := \max_{x \in \mathbb{H}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$  (nm subordonnée)

(D) nms usuelles (TH) FF  $\mu$  (nms) usuels

## 7. Pptés normes & Rayon Spectral

(Cor) Pptés norme spectrale  $\begin{cases} \|A^*\|_2 = \|A\|_2 \\ \|A\|_2 = \varphi(A) \\ \|UAV\|_2 = \|A\|_2 \end{cases}$

(TH) de Gelfand  $\|A\|_* \leq \varphi(A) + \varepsilon$   $\wedge \sum_{k=1}^n \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} = \varphi(A)$

(TH) Série von Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^k = \frac{1}{I-E} \text{ si } \varphi(E) < 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{si} \\ \|E\| < 1 \end{array} \right. : \|(I-E)^{-1} - I\| \leq \frac{\|E\|}{1-\|E\|}$$

## 8. Conditionnement

(L) Pire amplif. ou rel.  $\|A\| \|A^{-1}\| = \sup \left\{ \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) / \left( \frac{\|b\|}{\|Ax\|} \right) \right\}$   $Ax=b$   
 $A(\delta x + \delta b) = b + \delta b$

(D)  $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

(L)  $\text{cond}(A) \geq 1$   $\left| \text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A) \right| \text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A) \left| \text{cond}_2(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n} \right| \begin{array}{l} \text{cond}(A) \\ 1 \\ \text{si } A \in \mathbb{U} \end{array}$

(Cor) Distce ax mat non inv :  $\frac{1}{\text{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A-B\|_2}{\|A\|_2} : B \in \mathcal{O}_m(\mathbb{H}) \text{ non inv} \right\}$

## 9. Estimation pour system perturbés

(TH) si  $\|A^{-1} \Delta A\| < 1 \rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$

(Rq) solut proche  $Ax=b$  tant que  $\text{cond}(A) \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \ll 1$

## do. Résolu si $Ax=b$ EDG & décomp LU

### Algo 4.1 EDG & pivotage naturel

Forme de  $A^{(k)}$  de cas général:

- ↳ (L) Une étape d'élimination
- ↳ (L)  $L := ( )^{-1} ( )^{-1} \dots ( )^{-1}$

Décomp LU :  $A$  / Unité

- (S) Décomp LU :  $A = LU$  :  $\nabla_x \Delta = A$  diag unit
- (TH) Unité (TH)  $A$  ASE
- (R) Utilité décomp LU

### Algo 4.2 Elim DG & pivotage partiel

- (TH) Factorisation LU & pivotage partiel



10. Résoudre  $Ax=b$  p EDG & décomp LU

Algo 4.1 EDG & pivotage naturel

Forme de  $A^{(k)}$  de cas général:

- ↳ (L) Une étape d'élimination
- ↳ (L)  $L := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Décomp LU:  $\Delta$  / Unité

- (S) Décomp LU:  $A = LU$  :  $\nabla_x \Delta = A$
- (TU) Unité (TN)  $\Delta$  ASE
- (RQ) Utilité décomp LU

Algo 4.9. Elim DG & pivotage partiel

(TN) Factorisation LU & pivotage partiel

11. Stockage en place & Vectorisation

(RQ) (RQ) Vectorisation

Triangulation de Gauss  $\rightarrow$  Algo 5.3.

Remontée & Complexité  $\rightarrow$  Algo 5.4.

(TN) Complexité Algo de Gauss

Algo de Gauss en précis. finie (TN) de  $\mathcal{O}(A)$

12. Exploiter la symétrie

(TN) Décomp de Crout

(TN) Décomp de Cholesky

13. Exploiter des 0 dans A

(TN) du front

VII / Pb des moindres carrés & décomp QR

(S) Pb moindres carrés

$\Delta$  & 3<sup>e</sup> sol<sup>o</sup> pme

(P) Décomp QR pleine ou économiq

(L) 3<sup>e</sup> décomp QR.

(RQ) QR éco ou pleine

14. Résoudre p décomp QR économiq

(Ca)  $\tilde{R}x = \tilde{Q}^T b$  &  $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ .

(RQ)  $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(\tilde{R}^T \tilde{R})$ .

Algo (GS) idée

Algo décomp QR éco p (GS)

(RQ) Complexité de l'algo

15. Calcul de la décomp QR pleine par Householder & Givens

(TN) Une étape d'élim de 1 fact<sup>r</sup> QR plein,  $y^{(k)}, H^{(k)}, A^{(k)}$

(Algo) calcul  $H = Q^T, R = EA^{(n)}$  & algo Householder

(S)

⑤ mat de Householder

⑥ Pôles modif

⑦ élim et modif + complété

⑧ Hypo  $A = QR$  plein et algo Househ

⑨ 8.7 Complément algo

Simplification

Rotations de Givens

Rotation de  $\mathbb{R}^2$

⑩  $RdG$       ⑪ Produit  $RdG$  est mat orthog.

Avec zéros et rotations de Givens.

Cor 8.14.



## 10. Résoudre $Ax=b$ par EDG & décomp LU

### Algo 4.1 EDG & pivotage naturel

Forme de  $A^{(k)}$  au cas général:

- ↳ (L) Une étape d'élimination
- ↳ (L)  $L := ( )^{-1} ( )^{-1} \dots ( )^{-1}$

Décomp LU:  $A / \text{Unité}$

(S) Décomp LU:  $A = LU$  :  $\nabla_x \Delta = A$  <sup>diagonal</sup>

(TU) Unité (TH)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(RP) Utilité décomp LU

### Algo 4.2 Elim DG & pivotage partiel

(TH) Factorisation LU & pivotage partiel

## 11. Stockage en place & Vectorisation

(RP) (RP) Vectorisation

Triangulation de Gauss  $\rightarrow$  Algo 5.3.

Remontée & Complexité  $\rightarrow$  Algo 5.4.

(TH) Complexité Algo de Gauss

Algo de Gauss en place  $\rightarrow$  (TH)  $\mathcal{O}(n^3)$

## 12. Exploiter la symétrie

(TH) Décomp de Crout

(TH) Décomp de Cholesky

## 13. Exploiter des 0 dans A

(TH) du front

## VII / Pb des moindres carrés & décomp QR

(S) Pb moindres carrés

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  & 3<sup>e</sup> sol<sup>o</sup> p.m.c.

(S) Décomp QR pleine ou économiq

(L) 3<sup>e</sup> décomp QR

(RP) QR éco au plein

## 14. Résoudre par décomp QR économiq

(Ca)  $\tilde{R}x = \tilde{Q}^T b$  &  $A = \tilde{Q}\tilde{R}$

(RP)  $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(\tilde{R}^T \tilde{R})$

### Algo (GS) idée

(Algo) décomp QR éco & (GS)

(RP) Complexité de l'algo

## 15. Calcul de la décomp QR pleine par Householder & Givens

(TH) Une étape d'élim de 1 facto QR plein,  $y^{(k)}, H^{(k)}, A^{(k)}$

(Algo) calcul  $H = Q^T, R = EA^{(n)}$  & algo Householder

(S)

⑤ mat de Householder

⑥ ptes mdt

⑦ élim et mdt + complété

⑧ Algo  $A=QR$  plein et algo House

⑨ 8.7 complexité algo

Simplifiés

Rotats de Givens

Rotat de  $\mathbb{R}^2$

⑩ RdG

⑪ produit RdG est mat orthog.

Actu zéro et rotats de Givens.

Cor 8.14.

16/ Calcul numériq ⑫

→ Élé propres, utilité, stab ⑬ et perturbats

$\|ab^*\|_2 = \|a\| \|b\|$  ⑭ Bauer-Fike

⑮ Résidu

→  $[M]$  puissance

⑯ CVa  $[M]$  de puissance

Variat  $[M]$  de puissance, algo  $[M]$  puissance normalisée

$[M]$  puissance inverse à paramètre fixe

$[M]$  puissance inverse

17/[M] QR

Algo  $[M]$  QR et shift

⑰ 11.2.4