Chapitre 6

SERIES DE FOURIER

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des séries de fonctions d'un type particulier, dites **séries trigonométriques.** On étudiera, dans une première partie, des conditions de convergence de ces séries et, dans une seconde partie, sous quelle condition une fonction f donnée se développe en série trigonométrique.

Une telle série, si elle existe, sera dite **série de Fourier** de f.

1 SERIES TRIGONOMETRIQUES

DEFINITION 6.1.1

Etant donné une partie $A \subseteq \mathbb{R}$, on appelle série trigonométrique définie sur A, une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ où

$$\begin{cases} x \in A \\ u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C}^2 \end{cases}$$

Il est en général plus commode d'étudier ces séries en utilisant l'exponentielle complexe. On a alors

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \end{aligned}$$

avec

$$n \neq 0, \begin{cases} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

$$c_0 = a_0$$

PROPOSITION 6.1.2

Si les séries $\sum_n |c_n|$ *et* $\sum_n |c_{-n}|$ *convergent, alors la série* $\sum_n u_n(x)$ *est absolument uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$. *Sa somme est continue et périodique de période* 2π.

Démonstration :
On a

$$|u_n(x)| = \left|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right| \leq |c_n| + |c_{-n}|,$$

or la série $\left(\sum_n |c_n| + |c_{-n}|\right)$ est convergente, comme somme de séries convergentes, donc la série $\sum_n |u_n(x)|$ est normalement converegente et par conséquent la série $\sum_n u_n(x)$ est absolument uniformément convergente. La convergence uniforme implique la continuité de la somme. La périodicité de 2π est évidente.

REMARQUE

Les formules qui relient les a_n, b_n et c_n montrent que la convergence des séries $\sum_n |c_n|$ et $\sum_n |c_{-n}|$ est équivalente à la convergence des séries $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$, on en déduit alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.1.3

Si les séries $\sum_n |a_n|$ *et* $\sum_n |b_n|$ *convergent, alors on a encore les conclusions de la proposition 6.1.2.*

THEOREME 6.1.4

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$ *et que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroit et converge vers zéro, alors la série* $\sum_n c_n e^{inx}$ *converge pour tout* $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *De plus sa somme est continue sur* $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration :
Calculons

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{inx}.$$

On utilise la **transformation d'Abel**. Pour cela, considérons la série géométrique

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Puisque

$$e^{inx} = E_n(x) - E_{n-1}(x), \text{ pour } n \geq 1,$$

alors

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \left(E_n(x) - E_{n-1}(x)\right) \\ &= (c_0 - c_1) E_0(x) + (c_1 - c_2) E_1(x) + \cdots + (c_{N-1} - c_N) E_{N-1}(x) + c_N E_N(x) \\ &= \sum_{n=1}^{N} (c_{n-1} - c_n) E_{n-1}(x) + c_N E_N(x). \end{aligned}$$

Estimons $E_n(x)$

$$|E_n(x)| = \frac{\left|1 - e^{i(n+1)x}\right|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|},$$

mais

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right) = e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

d'où

$$\left|1 - e^{ix}\right| = 2 \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

et par conséquent

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}.$$

Donc $E_n(x)$ est bornée $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et on en conclut que

$$\lim_{N \to \infty} c_N E_N = 0$$

et donc la convergence de $f_N(x)$ est équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left((c_{n-1} - c_n) E_n(x)\right)$. Cette dernière série converge car $E_n(x)$ est bornée et

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} (c_{n-1} - c_n)\right) = \lim_{N \to \infty} (c_0 - c_N) = c_0$$

($\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, par hypothèse).

Donc $f_N(x)$ est convergente. Ce qui établit la convergence de la série $\sum\limits_n c_n e^{inx}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Etudions maintenant la continuité de la somme de la série $\sum\limits_n c_n e^{inx}$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Puisque cette série est périodique de période 2π, il suffit d'étudier la continuité sur $[-\pi, \pi[$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[, x \neq 0$, alors $\sum\limits_n c_n e^{inx}$ est continue si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 1} ((c_{n-1} - c_n) E_n(x))$ est continue, ce qui sera le cas si elle converge uniformément sur un voisinage de x.

Si $x < 0$, choisissons $I = [-\pi, \varepsilon]$, avec $x < \varepsilon < 0$.

Si $x > 0$, choisissons $I = [\varepsilon, \pi[$, avec $0 < \varepsilon < x$.

On a

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |E_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|},$$

d'où

$$|E_{n-1}(x)(c_{n-1} - c_n)| \leq \frac{|c_{n-1} - c_n|}{\left|\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|},$$

le terme général de la série $\sum\limits_{n\geq 1} ((c_{n-1} - c_n) E_n(x))$ étant majoré par le terme général d'une série numérique convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 1} ((c_{n-1} - c_n) E_n(x))$ converge normalement, donc uniformément et par conséquent la somme est continue.

REMARQUE

On déduit, dans les mêmes conditions du théorème précédent, que les séries $\sum\limits_n a_n \cos(nx)$ et $\sum\limits_n b_n \sin(nx)$ convergent aussi, en considérant la partie rélle et la partie imaginaire de la série $\sum\limits_n c_n e^{inx}$.

COROLLAIRE 6.1.5

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$ et $c_{-n} \in \mathbb{R}$ et si les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent et convergent vers zéro, alors la série $c_0 + \sum\limits_{n\geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.De plus sa somme est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(On a le même résultat si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent et convergent vers zéro).

PROPOSITION 6.1.6

Si les séries $\sum_n n\,|c_n|$ *et* $\sum_n n\,|c_{-n}|$ *convergent, alors la série*

$$c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) = f(x)$$

est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} \left(inc_n e^{inx} - inc_{-n}e^{-inx}\right).$$

Démonstration :

Soit $u_0(x) = c_0$ et pour $n \geq 1$, $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$. L'hypothèse implique que les séries $\sum_n |c_n|$ et $\sum_n |c_{-n}|$ convergent et, d'après la proposition 6.1.2, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part la convergence des séries $\sum_n n\,|c_n|$ et $\sum_n n\,|c_{-n}|$ implique que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{'}(x)$ converge uniformément et par conséquent que $f^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} u_n^{'}(x)$ est continue, c'est à dire que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

COROLLAIRE 6.1.7

Si les séries $\sum_n n\,|a_n|$ *et* $\sum_n n\,|b_n|$ *convergent, alors la série*

$$\sum_{n\geq 0} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = f(x)$$

est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f^{'}(x) = \sum_{n\geq 0} \left(-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)\right).$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que les séries $\sum_n n\,|a_n|$ et $\sum_n n\,|b_n|$ convergent si et seulement si les séries $\sum_n n\,|c_n|$ et $\sum_n n\,|c_{-n}|$ convergent et on applique la proposition 6.1.6

EXEMPLES

1. la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{n\ln(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

EXEMPLES D'APPLICATION

Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Supposons qu'on a les hypothèses de convergence, alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n\geq 0} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}.$$

On pose

$$z = e^{ix} \text{ et } f_1(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n - ib_n}{2} z^n.$$

Alors

$$f(x) = f_1(z) + \overline{f_1(z)},$$

et donc

$$f(x) = 2R_e\left(f_1(z)\right).$$

Ainsi calculer $f(x)$ revient à calculer $f_1(z)$. Par exemples:

1. Soit à calculer $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} r^n \sin(nx)$, avec $|r| < 1$. alors

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} -\frac{i}{2} r^n z^n = -\frac{i}{2} \sum_{n\geq 1} (rz)^n = -\frac{i}{2} \cdot \frac{rz}{1 - rz},$$

   (car $|rz| = |r| < 1$) et

$$f(x) = 2R_e\left(f_1(z)\right) = \frac{r\sin(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

2. Calculer $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\cos(nx)}{n!}$. On a

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} e^z$$

   et

$$f(x) = 2R_e\left(f_1(z)\right) = R_e\left(e^z\right) = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)).$$

2 DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction donnée.

Existe-t-il une série trigonométrique telle que f soit sa somme?

On va d'abord trouver des conditions nécessaires qui nous donneront l'expression de la série, quand elle existe. On devra alors étudier :

1. si la série converge,
2. dans ce cas, si sa somme est égale à $f(x)$.

REMARQUE

Les séries trigonométriques ont pour période 2π, il faudra donc que f soit périodique de période 2π.

PROPOSITION 6.2.1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$, $f(x) = c_0 + \sum\limits_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

c_n est appelé ***coefficient de Fourier complexe*** *de f .*

Démonstration :

On a : $f(x) = c_0 + \sum\limits_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$, la convergence étant uniforme, on peut intégrer terme à terme. f est continue sur $\mathbb{R}$ à cause de la convergence uniforme.

* Calculons c_0 :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} c_0 dx + \int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) dx \\ &= 2\pi c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n \int_0^{2\pi} e^{inx} dx + c_{-n} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx \right), \end{aligned}$$

mais si $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} = \left[\frac{e^{inx}}{ni} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

d'où

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

* Calculons c_k, pour $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$f(x)e^{-ikx} = c_0 e^{-ikx} + \sum_{n\geq 1}\left(c_n e^{i(n-k)x} + c_{-n}e^{-i(n+k)x}\right),$$

on peut intégrer terme à terme car la convergence reste encore uniforme, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx &= c_0\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx \\ &\quad + \sum_{n\geq 1}\left(c_n\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}dx + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)x}dx\right),\end{aligned}$$

or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}dx = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = k \\ 0 \text{ si n} \neq k \end{cases},$$

et

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+k)x}dx = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = -k \\ 0 \text{ si n} \neq -k \end{cases},$$

d'où toutes les intégrales sont nulles sauf celle telle que $n = k$, si $k > 0$ et $n = -k$, si $k < 0$, et donc

$$2\pi c_k = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

COROLLAIRE 6.2.2

On a

$$a_0 = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}.$$

Les a_n et b_n sont appelés les ***coefficients de Fourier*** *de f.*

La série $\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ est appelée la ***série de Fourier associée à*** *f.*

Démonstration :
Par définition, on a $a_0 = c_0$, d'où le résultat.
D'autre part

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(e^{-inx} + e^{inx}\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= ic_n - ic_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(ie^{-inx} - ie^{inx}\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

REMARQUES

1. Si f est périodique de période T, alors, en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (la pulsation), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0}\left(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right) \\ &= c_0 + \sum_{n\geq 1}\left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n}e^{-in\omega x}\right), \end{aligned}$$

avec

$$a_0 = \tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T f(x)dx$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx \end{cases},$$

et

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Si f est périodique de période T, alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

En effet

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx,$$

or, par le changement de variable $x = y + T$,

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy,$$

car f est T-périodique, d'où

$$\int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Cette remarque implique qu'on pourra calculer c_n, a_n et b_n en intégrant sur tout intervalle de longueur T qui nous conviendra.

3. Si f est impaire, alors

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

et si f est paire, alors

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

et

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = 0 \text{ et } a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx.$$

4. Si deux fonctions f et g prennent la même valeur en tous les points, sauf au plus un nombre fini, de l'intervelle $[a, a+T[$, alors f et g ont la même série de Fourier.

En effet, on sait que si u et v sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a, b]$, on a

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^b v(x)dx,$$

on déduit de cette propriété que f et g ont les mêmes coefficients de Fourier et donc la même série de fourier.

EXEMPLES

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π, définie par

$$\begin{cases} f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Calculons la série de Fourier associée à f.
On remarque d'abord que f est "presque" impaire, en effet, si on définit la fonction g de période 2π par

$$\begin{cases} g(-\pi) = 0 \\ g(x) = -1 \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ g(0) = 0 \\ g(x) = 1 \text{ si } x \in]0, \pi[\end{cases},$$

alors g est impaire et coïncide avec f en tout point de $[-\pi, \pi[$ sauf en deux points, $-\pi$ et 0.
f et g ont donc même série de Fourier et par conséquent

$$a_n = 0,$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos(n\pi)}{n} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pour $p \geq 1$, si $n = 2p$, on a : $b_{2p} = 0$.
et si $n = 2p-1$ on a : $b_{2p-1} = \frac{4}{\pi(2p-1)}$.
La série de Fourier associée à f est donc

$$S(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{\sin(2p-1)x}{2p-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}.$$

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π, définie par

$$f(x) = e^{ax} \text{ si } x \in [0, 2\pi[\text{ et } a \in \mathbb{C}.$$

Calculons la série de Fourier associée à f.

(a) Si $a = ik$ avec $k \in \mathbb{Z}$ fixé, alors

$$f(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx),$$

et f est un polynôme trigonométrique, donc $f(x)$ est égale à sa série de Fourier.

(b) si $a \notin i\mathbb{Z}$, on calcule les c_n

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(a-in)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(a-in)x}}{a-in}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{2a\pi}-1}{a-in} = e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\cdot\frac{1}{(a-in)}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$a_0 = e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi},$$

et, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} = e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a-in}+\frac{1}{a+in}\right) \\
&= \frac{2a}{a^2+n^2}e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= i\left(c_n - c_{-n}\right) = ie^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a-in}-\frac{1}{a+in}\right) \\
&= -\frac{2n}{a^2+n^2}e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi},
\end{aligned}$$

d'où la série de fourier associée à f

$$S(f)(x) = e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{a\cos(nx) - n\sin(nx)}{a^2+n^2}\right].$$

Pour des fonctions T-périodiques et C^1 par morceaux sur $[0,T[$ (voir définition plus loin) on peut, sous certaines conditions, trouver la série de Fourier associée et établir la continuité de la somme en tout point, c'est l'objet du théorème de Dirichlet. Pour sa démonstration, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant:

THEOREME DE RIEMANN-LEBESGUE 6.2.3

Soient une fonction $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, intégrable sur $[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right) = 0.$$

Démonstration :

Soit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \chi_{[x_k, x_{k+1}[}$$

une fonction en escalier où $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une sudivision de $[a, b]$ telle que $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ et $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une suite de complexes. On a

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{i\lambda x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{e^{i\lambda x_{k+1}} - e^{i\lambda x_k}}{i\lambda},$$

d'où

$$\left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| = \frac{C_g}{|\lambda|},$$

où $C_g = 2 \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|$ ne dépend que de g, et pas de λ.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$; f étant intégrable sur $[a, b]$, il existe une fonction en escalier sur $[a, b]$, g_ε , telle que

$$\left| \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette fonction $g\varepsilon$ étant choisie, on considère $\lambda_0(\varepsilon) = \frac{4C_{g\varepsilon}}{\varepsilon}$.

On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $|\lambda| \geq \lambda_0(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| \, dx \right| + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \varepsilon,$$

et on a bien alors

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \left(\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right) = 0.$$

COROLLAIRE 6.2.4

Soient une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *, intégrable sur* $[a, b]$ *, et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *alors*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \left(\int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx \right) = \lim_{|\lambda| \to +\infty} \left(\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right) = 0.$$

Démonstration :

On utilise le théorème précédent et les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

NOYAU DE DIRICHLET

Posons

$$D_p(\omega x) = \sum_{n=-p}^{p} e^{in\omega x}, \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}, T > 0.$$

(c'est le "noyau de Dirichlet"), alors :

1) $D_p(\omega x)$ est paire et $T-$périodique.

2)

$$\int_0^T D_p(\omega x)dx = T$$

et

$$\int_0^{\frac{T}{2}} D_p(\omega x)dx = \int_{\frac{T}{2}}^0 D_p(\omega x)dx = \frac{T}{2}.$$

3)

$$D_p(\omega x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}\omega x\right)}{\sin\left(\frac{\omega x}{2}\right)} \text{ si } x \neq kT;\ k \in \mathbb{Z} \\ = 2p+1 \quad \text{si } x = kT;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En effet :

1) $D_p(\omega x) = 1 + \sum\limits_{n\geq 1}^{p} (e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) = D_p(-\omega x)$.

2)

$$\int_0^T e^{in\omega x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ T & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

3) Si $x = kT;\ k \in \mathbb{Z}$, alors $e^{in\omega x} = e^{i2kn\pi} = 1$, d'où $D_p(\omega x) = 2p+1$, et si $x \neq kT;\ k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} D_p(\omega x) &= e^{-ip\omega x} \sum_{n=-p}^{p} e^{i(n+p)\omega x} = e^{-ip\omega x} \sum_{n=0}^{2p} e^{in\omega x} \\ &= e^{-ip\omega x} \frac{1 - e^{i(2p+1)\omega x}}{1 - e^{i\omega x}} = \frac{e^{-ip\omega x} - e^{i(p+1)\omega x}}{1 - e^{i\omega x}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\omega x}{2}}}{e^{-i\frac{\omega x}{2}}} \cdot \frac{e^{-ip\omega x} - e^{i(p+1)\omega x}}{1 - e^{i\omega x}} = \frac{e^{-i\left(\frac{2p+1}{2}\right)\omega x} - e^{i\left(\frac{2p+1}{2}\right)\omega x}}{e^{-i\frac{\omega x}{2}} - e^{i\frac{\omega x}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}\omega x\right)}{\sin\left(\frac{\omega x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.2.5 (FORMULE DE DIRICHLET)

Soit une fonction f intégrable, de période T et $\omega = \frac{2\pi}{T}$, alors, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega x} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t)+f(x-t)\right) D_p(\omega t)dt,$$

Démonstration :

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega x} &= \sum_{n=-p}^{p}\left(e^{in\omega x}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t)\sum_{n=-p}^{p} e^{in\omega(x-t)}\right)dt\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)D_p(\omega(x-t))dt,
\end{aligned}$$

et, par le changement de variable $t = x+u$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega x} &= \frac{1}{T}\int_{-x}^{T-x} f(u+x)D_p(\omega u)du, \text{ par parité de } D_p,\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(u+x)D_p(\omega u)du, \ f \text{ et } D_p \text{ périodiques},\\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u+x)D_p(\omega u)du\\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(u+x)D_p(\omega u)du + \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(u+x)D_p(\omega u)du\right),
\end{aligned}$$

or, par le changement de variable $t = -u$, on a

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(u+x)D_p(\omega u)du = \int_0^{\frac{T}{2}} f(x-t)D_p(\omega t)dt,$$

d'où, finalement

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega x} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t)+f(x-t)\right) D_p(\omega t)dt.$$

DEFINITION 6.2.6

Une fonction f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points de discontinuité, $a_k \in [a, b]$, $k = 1, \cdots, m$, de f tels que les limtes

$$\lim_{x \to a_k^+} f(x) = f(a_k^+)$$

$$\lim_{x \to a_k^-} f(x) = f(a_k^-)$$

existent.

REMARQUE

Si f est continue par morceaux sur $[0, T[$ alors

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) e^{-in\omega x} dx,$$

et donc c_n existe.

DEFINITION 6.2.7

Une fonction f est dite C^1 par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points $a_k \in [a, b]$, $k = 1, \cdots, m-1$, tels que $f \in C^1(]a_k, a_{k+1}[)$ et de plus si $f(a_k^+)$, $f(a_k^-)$, $f'(a_k^+)$ et $f'(a_k^-)$ existent, avec

$$f'(a_k^+) = \lim_{x \to a_k^+} \frac{f(x) - f(a_k^+)}{x - a_k}$$

$$f'(a_k^-) = \lim_{x \to a_k^-} \frac{f(x) - f(a_k^-)}{x - a_k}.$$

THEOREME 6.2.8 (THEOREME DE DIRICHLET)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, périodique de période T et C^1 par morceaux sur $[0, T[$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) &= \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ (&= f(x) \text{ si } f \text{ est continue en } x). \end{aligned}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé sur lequel f est continue.

Démonstration :
Soit $x \in [0,T[$ fixé et

$$f_p(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{p} \left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}\right) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega x},$$

les sommes partielles de la série de Fourier de f.

D'après la formule de Dirichlet, on a

$$f_p(x) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_p(\omega t)dt.$$

Il faut montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \Delta_p = \lim_{p\to+\infty} \left(f_p(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\right) = 0,$$

or

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} D_p(\omega t)dt = 1,$$

(voir la propriété 2 du noyau de Dirichlet), d'où

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x^+) + f(x^-)\right) D_p(\omega t)dt,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta_p &= f_p(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)\right) D_p(\omega t)dt, \end{aligned}$$

on pose

$$\Phi(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)}{\sin(\frac{\omega t}{2})}, \text{ pour } t \in \left]0, \frac{T}{2}\right],$$

d'où

$$\Delta_p = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \sin\left(\left(\frac{2p+1}{2}\right)\omega t\right) dt.$$

(propriété 3 du noyau de Dirichlet).

Si on montre que Φ est intégrable sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, il résultera du théotème de Riemann-Lebesgue que $\lim_{p\to+\infty} \Delta_p = 0$.

Le problème est en zéro. On a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \Phi(t) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left(\left(\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}\right)\cdot \frac{\frac{\omega t}{2}}{\sin(\frac{\omega t}{2})}\cdot\frac{2}{\omega}\right)\\ &= \left(f'(x^+)+f'(x^-)\right)\cdot\frac{2}{\omega},\end{aligned}$$

f étant C^1 par morceaux, $\Phi(t)$ est intégrable sur $\left[0,\frac{T}{2}\right]$, et le théorème est démontré.

La démonstration de la convergence uniforme étant hors programme, ce résultat est admis.

EXEMPLES D'APPLICATION

1. Reprenons l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π, définie par

$$\begin{cases} f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) = 1 \text{ si } x \in [0,\pi[\,. \end{cases}$$

f vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet. De plus f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a donc, si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

plus particulièrement

$$\forall\, x \in \,]-\pi, 0[\,,\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = -1,$$

et

$$\forall\, x \in \,]0, \pi[\,,\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = 1.$$

2. On se propose d'établir que :

   (a) La fonction $|\sin(\lambda x)|$ admet le développement en série de Fourier suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\sin(\lambda x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}.$$

(b) Si h est une intégrable sur $[a,b]$, (a et b finis), alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b h(x)\left|\sin(\lambda x)\right| = \frac{2}{\pi}\int_a^b h(x)dx.$$

Preuve :

(a) Pour $\lambda \neq 0$, la fonction $|\sin(\lambda x)|$ est paire, de période $\frac{\pi}{\lambda}$, alors les b_n sont tous nuls et les a_n sont données par

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \sin(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda}{\pi}\left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} = \frac{2}{\pi},$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)dx = \frac{4\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \sin(\lambda x)\cos(2n\lambda x)dx \\ &= \frac{4\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{1}{2}\left(\sin(\lambda x(2n+1)) - \sin(\lambda x(2n-1))\right)dx \\ &= \frac{2\lambda}{\pi}\left[-\frac{\cos(\lambda x(2n+1))}{\lambda(2n+1)} + \frac{\cos(\lambda x(2n-1))}{\lambda(2n-1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

et C^1 par morceaux

La fonction $|\sin(\lambda x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc égale à sa série de Fourier, d'où,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ |\sin(\lambda x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1},$$

en remarquant que pour $x = 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2},$$

et donc que l'égalité reste vraie pour $\lambda = 0$.

(b) D'après ce qui précède, $\forall x \in [a,b]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x)\left|\sin(\lambda x)\right| = \frac{2}{\pi}h(x) - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} h(x)\frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}.$$

h est intégrable, donc bornée sur $[a,b]$, d'où

$$\exists M > 0 \text{ tel que, } \forall x\in[a,b],\ |h(x)| \leq M.$$

On a alors
$$\left|h(x)\frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}\right| \leq \frac{M}{4n^2},$$
donc la série $\sum_{n\geq 1} h(x)\frac{\cos(2n\lambda x)}{4n^2-1}$ est normalement convergente sur $[a,b]$, on peut alors l'intégrer terme à terme, soit
$$\int_a^b h(x)\left|\sin(\lambda x)\right| dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b h(x)dx - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4n^2-1}\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx\right).$$
Or, d'après le Théorème de Riemann-Lebesgue,
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx = 0,$$
d'autre part,
$$\left|\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx\right| \leq M(b-a),$$
et donc la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4n^2-1}\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx\right)$ converge normalement par rapport à λ, d'où
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4n^2-1}\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx\right)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4n^2-1}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b h(x)\cos(2n\lambda x)dx\right) = 0,$$
par conséquent
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b h(x)\left|\sin(\lambda x)\right| = \frac{2}{\pi}\int_a^b h(x)dx.$$

3. Calcul de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

   (a) Pour $x \neq 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$, on a vu que le noyau de Dirichlet $D_n(x)$, vérifie
$$\int_0^{\pi} D_n(x)dx = \pi \text{ et } D_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

d'où

$$\pi=\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\right)dx,$$

et, en posant $\varphi(x)=\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{2}{x}$,

$$\pi=\int_0^\pi \varphi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx+2\int_0^\pi \frac{1}{x}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx.$$

D'après le Théorème de Riemann-Lebesgue, puisque $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$ dans $[0,\pi]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi \varphi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\right)=0,$$

d'où

$$\pi=2\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{1}{x}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx,$$

alors, en posant $t=\frac{2n+1}{2}x$,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}dt,$$

et, puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

4. On a établi que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de période 2π, définie par

$$f(x)=e^{ax}\text{ si }x\in[0,2\pi[\text{ et }a\in\mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$$

admet pour série de Fourier

$$S(f)(x)=e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2\sum_{n\geq 1}\frac{a\cos(nx)-n\sin(nx)}{a^2+n^2}\right].$$

D'autre part, f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,2\pi[$, et d'après le Théorème de Dirichlet, $\forall x\in]0,2\pi[$,

$$e^{ax}=S(f)(x),$$

et $\forall\, x \in 2\pi\mathbb{Z}$, pour 0 par exemple, $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = e^{2a\pi}$, on trouve alors

$$\frac{1+e^{2a\pi}}{2} = e^{a\pi}\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2}\right].$$

En multipliant cette égalité par $e^{-a\pi}$, on a

$$\cosh(a\pi) = \frac{e^{-a\pi}+e^{a\pi}}{2} = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2}\right],$$

ce qui implique la formule

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\tanh(a\pi)} + 1\right).$$

THEOREME 6.2.9 (THEOREME DE PARSEVAL)

Si f est une fonction périodique de période T, intégrable sur $[0,T]$, alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Démonstration :

La démonstration de ce théorème étant hors programme, nous ne donnerons ici qu'une démonstration élémentaire dans le cas où la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Supposons que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right),$$

en multipliant par $f(x)$ et en intégrant terme à terme sur $[0,T]$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f(x)^2dx &= a_0\int_0^T f(x)dx \\ &\quad + \sum_{n\geq 1}[a_n \underbrace{\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx}_{\frac{T}{2}a_n} + b_n \underbrace{\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx]}_{\frac{T}{2}b_n} \\ &= Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

EXEMPLE

On a vu que la série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π, définie par

$$\begin{cases} f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) = \ \ 1 \text{ si } x \in [0, \pi[\,, \end{cases}$$

est

$$S(f) = \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

donc $a_0 = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$.

L'application du théorème de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

d'où

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

et

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On peut déduire de ce résultat la valeur de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ de la manière suivante :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

3 COMPLEMENTS SUR LES SERIES DE FOURIER

3.1 THEOREME DE JORDAN-DIRICHLET

Donnons, sans démonstration, un autre théorème qui assure, sous certaines conditions, la convergence de la série de Fourier d'une fonction f ainsi que la valeur de sa somme.

THEOREME 6.3.1.1 (THEOREME DE JORDAN-DIRICHLET)

Soit une fonction f intégrable sur $[0,T]$ et T-périodique. Supposons f monotone par morceaux (c'est à dire qu'il existe une subdivision $(a_i)_{i=0,\ldots,n}$ de $[0,T]$ telle que $\forall i \in \{0,\ldots,n-1\}$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ soit monotone), alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en x_0 et a pour somme $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

3.2 CONVERGENCE EN MOYENNE (THEOREME DE CESARO)

DEFINITIONS 6.3.2.1

1. *On dit que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge en moyenne*** *vers l si la suite de terme général*

$$M_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

   converge vers l quand n tend vers l'infini.

2. *On dit que la série de terme général u_n* ***converge en moyenne*** *vers la somme S si la suite des sommes partielles*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

   converge en moyenne vers S.

REMARQUE

La convergence implique la convergence en moyenne, et vers la même limite. La réciproque est fausse (par exemple $u_n = (-1)^n$).

Dans la suite on notera $S_n(f)(x)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier et

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + \cdots + S_n(f)(x)}{n+1}$$

la moyenne des $n+1$ premières sommes partielles.

THEOREME 6.3.2.2 (THEOREME DE CESARO)

Soit une fonction f intégrable sur $[0,T]$ et T-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent, alors la série de Fourier de f converge en moyenne en x_0 vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. (En particuler, si f est continue en x_0, elle converge vers $f(x_0)$.)

REMARQUE

On a moins d'hypothèses que dans le théorème de Dirichlet, par contre on a une conclusion plus faible.

Pour la démonstration de ce théorème, on introduit le noyau suivant :

$$\mathbb{K}_n(u) = \sum_{p=0}^{n} D_p(u),$$

où $D_p(u)$ est le noyau de Dirichlet.

PROPOSITION 6.3.2.3

1. *On a*
$$\mathbb{K}_n(u) = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}u\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} & \text{si } u \neq 0 \text{ modulo } 2\pi \\ (n+1)^2 & \text{si } u = 0 \text{ modulo } 2\pi \end{cases}$$

2. *Formule de Césaro :*

   Soit une fonction f intégrable sur $[0,T]$ et T-périodique et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)\,T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \mathbb{K}_n(\omega t) dt.$$

<u>Démonstration :</u>

1. Si $u = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, on a

$$D_n(u) = 2n + 1,$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{n} D_p(u) = \sum_{p=0}^{n} (2p+1) = \frac{2n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2.$$

Si $u \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, alors

$$D_p(u) = \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} D_p(u) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} \sin\left((p+\frac{1}{2})u\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left((p+\frac{1}{2})u\right) \\
&= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2} \left(\cos(pu) - \cos\left((p+1)u\right)\right) \\
&= \frac{1 - \cos\left((n+1)u\right)}{2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}u\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \mathbb{K}_n(u).
\end{aligned}$$

2. On utilise la formule de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f)(x) &= \frac{S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + \cdots + S_n(f)(x)}{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_k(\omega t) dt \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\left(f(x+t) + f(x-t)\right) \sum_{k=0}^{n} D_k(\omega t) \right) dt \\
&= \frac{1}{(n+1)T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \mathbb{K}_n(\omega t) dt., \text{ (d'après (1))}.
\end{aligned}$$

EXERCICES

1. En appliquant la formule de Césaro à $f \equiv 1$,montrer que

$$\frac{2}{(n+1)T} \int_0^{\frac{T}{2}} \mathbb{K}_n(\omega t) dt = 1.$$

2. Démontrer le théorème de Césaro. (On procèdera de la même manière que dans la démonstration de théorème de Dirichlet).

Le corollaire suivant est très important car il permet d'affaiblir les hypothèses sur f dans le theorème de Dirichlet, mais il fait intervenir la convergence de la série de Fourier de f.

COROLLAIRE 6.3.2.4

Soit une fonction f intégrable sur $[0,T]$ et T-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent. Si la série de Fourier de f converge en x_0, sa somme est nécessairement $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

En particulier; si f est continue en x_0, cette somme est $f(x_0)$.

Démonstration :
D'après le théorème de Césaro

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma_n(f)(x_0)) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(f)(x_0)) = S$$

alors la suite des moyennes converge vers la même limite, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma_n(f)(x_0)) = S.$$

D'après l'unicité de la limite, on a

$$S = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}.$$

COROLLAIRE 6.3.2.5

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,T]$ et T-périodique, telles que

1. *$f-g$ est continue en x_0,*
2. $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = a_n(g) \text{ et } b_n(f) = b_n(g),$$

alors

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Démonstration :
Appliquer le corollaire 6.3.2.4 à la fonction $f-g$.

COROLLAIRE 6.3.2.6

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0, T]$ et T-périodique, telles que

1. *f et g sont continues sur $\mathbb{R}$,*
2. $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = a_n(g) \text{ et } b_n(f) = b_n(g),$$

   alors $f = g$.

REMARQUE

Le corollaire 6.3.2.6 montre que, si f est continue, alors elle est complètement déterminée par ses coefficients de Fourier.

THEOREME 6.4.2.7 (THEOREME DE CESARO-FEJER)

Soit une fonction f intégrable sur $[0, T]$ et T-périodique. Si f est continue sur $[a, b]$, alors $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4 APPLICATION DES SERIES DE FOURIER

4.1 EQUATION DES CORDES VIBRANTES

Le mouvement d'une corde vibrante se modélise en Physique en considérant le déplacement transversal $u(x,t)$ des points de la corde d'abscisse x à l'instant t satisfaisant à l'équation

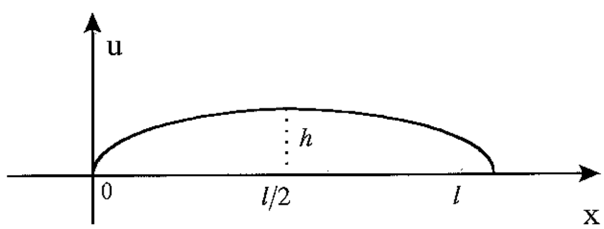
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (E),$$

où $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, T_0 désigant la tension longitudinale à laquelle est soumis la corde et ρ sa densité linéique.

Déterminons la forme de la corde à l'instant t si ses extrémités, d'abscisses $x = 0$ et $x = l$, sont fixées et si, à l'instant initial $t = 0$, la corde à la forme d'une parabole (voir figure 5) d'équation

$$u(x,0) = \frac{4h}{l^2}(l - x)x,$$

et ses points ont une vitesse nulle.



On doit donc rechercher la solution $u(x,t)$ de l'équation (E), qui satisfait aux conditions aux limites

$$u(0,t) = 0 \text{ et } u(l,t) = 0, \quad (1),$$

et aux conditions initiales

$$u(x,0) = \frac{4h}{l^2}(l - x)x \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad (2).$$

Cherchons des solutions particulières, non nulles, de l'équation (E) sous la forme suivante (séparation des variables) :

$$u(x,t) = f(x)h(t),$$

l'équation (E) devient alors

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{h''(t)}{a^2 h(t)}, \quad (3).$$

Puisque les variables x et t sont indépendantes, l'égalité (1) n'est possible que dans le cas où la valeur commune de la solution (3) est constante. Posons α cette constante, alors on obtient deux équations différentielles

$$\begin{cases} f''(x) - \alpha f(x) = 0 \\ h''(t) - \alpha a^2 h(t) = 0. \end{cases}$$

Ces équations s'intégrent facilement, explicitons le résultat pour $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\alpha x}} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha x}}, \text{ si } \alpha > 0 \\ C_1 x + C_2, \text{ si } \alpha = 0 \\ C_1 \cos\left(\sqrt{|\alpha|\, x}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{|\alpha|\, x}\right), \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Si $\alpha > 0$, f n'est pas bornée.

Si $\alpha = 0$, f n'est pas bornée, sauf pour $C_1 = 0$, et dans ce cas f est constante ($= C_2$).

La solution acceptable ne peut donc s'obtenir que pour $\alpha = -\lambda^2$. Alors

$$f(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x).$$

De même, on a

$$h(t) = A_1 \cos(\lambda x) + A_2 \sin(\lambda x).$$

La condition (1) nous donne

$$f(0) = 0 \text{ et } f(l) = 0,$$

d'où

$$C_1 = 0 \text{ et } \sin(\lambda l) = 0,$$

puisqu'alors $C_2 \neq 0$, donc $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, où $n \in \mathbb{Z}$, et sans perte de généralité, on peut supposer que $n \in \mathbb{N}$.

Donc à chaque λ_n correspond une solution particulière vérifiant la condition (1)

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{na\pi}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{l} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Formons la série $u(x,t) = \sum\limits_{n \geq 0} u_n(x,t)$, alors $u(x,t)$ satisfait à l'équation (E) et à la condition (1).

Choisissons A_n et B_n de manière que $u(x,t)$ vérifie la condition (2). Puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{na\pi}{l}\left(-A_n \sin\left(\frac{na\pi}{l}t\right) + B_n \cos\left(\frac{na\pi}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

alors on a, pour $t = 0$,

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum\limits_{n\geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{4h}{l^2}(l-x)x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{na\pi}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, pour déterminer les coefficients A_n et B_n, il faut développer en série de Fourier, suivant les sinus, la fonction $u(x,0) = \frac{4h}{l^2}(l-x)x$ et la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. On trouve alors

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{4h}{l^2}(l-x)x \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} \frac{32h}{\pi^3 n^3}, \text{ si n est impair} \\ 0, \text{ si n est pair} \end{cases}$$

et

$$\frac{na\pi}{l}B_n = \frac{2}{l}\int_0^l 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = 0 \Rightarrow B_n = 0.$$

La solution cherchée est

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n\geq 0} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{l}a\pi t\right)}{(2n+1)^3} \sin\left(\frac{2n+1}{l}\pi t\right).$$

4.2 EQUATION DE LA CHALEUR

Soit une barre supposée homogène, de longueur finie l, représentée par l'axe des x. Si on suppose qu'il n'y a pas de source de chaleur et si $u(x,t)$ désigne la température au point x et à l'instant t, alors $u(x,t)$ satisfait à l'équation, pour $x \in [0,l]$ et $t > 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (E),$$

la température initiale est donnée par

$$u(x,0) = h(x), \quad (1).$$

(remarque: la connaissance de la température à l'instant $t = 0$, permet de déduire la répartition de la chaleur dans la barre).

On cherche une solution sous la forme

$$u(x,t) = f(x)g(t).$$

Ainsi l'équation (E) donne

$$f(x)g'(t) - f''(x)g(t) = 0,$$

soit

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Si nous supposons que la fonction u est bornée (ce qui est une hypothèse raisonnable), les deux membres sont donc égaux à une constante près, notée $-\omega^2$. Finalement, on a

$$\begin{cases} f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \\ g'(t) + \omega^2 g(t) = 0, \end{cases}$$

d'où la solution

$$\begin{cases} g(t) = e^{-\omega^2 t} \\ f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \end{cases}$$

et ainsi

$$u(x,t) = e^{-\omega^2 t}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right).$$

Supposons qu'aux extrémités 0 et l, les températures sont maintenues en u_0 et u_1. On peut toujours se ramener au cas où ces températures sont nulles en posant

$$u = u_0 + \frac{u_l - u_0}{l}x + v,$$

($v = 0$, pour $x = 0$ et $x = l$).

Supposons donc qu'aux extrémités 0 et l, la température est maintenue en 0, et déterminons A, B et ω de façon à ce que

$$u(x,t) = e^{-\omega^2 t}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right),$$

s'annule pour $x = 0$ et $x = l$, $\forall t$.

Ceci donne

$$A = 0$$

et

$$B\sin(\omega l) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{l},$$

(car $B \neq 0$, sinon $u = 0$).

Donc à chaque n, on peut associer un coefficient B_n. Finalement

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} B_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

La condition (1) donne

$$h(x) = \sum_{n\geq 0} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

ce qui fait apparaître les (B_n) comme les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire égale à $h(x)$ sur $]0,l[$ et de période $2l$. Par conséquent

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Donc la solution est donnée par

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n\geq 1} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^l h(y)\sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)dy.$$

5 EXERCICES

1. On considère une fonction f, de période T, admettant une dérivée f', continue par morceaux sur tout intervalle bornée de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que la série de Fourier de f' s'obtient par dérivation à partir de la série de Fourier de f.

   (b) Déterminer la série de Fourier de $f(x) = |x|$, si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, et de période 1.

   (c) En déduire la valeur de

   $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et de } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

   (d) Calculer la série de Fourier de g, de période 1 définie par

   $$\begin{cases} g(x) = -1 \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\\ g(x) = 1 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\end{cases}.$$

   (e) Calculer la valeur de

   $$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1}.$$

2. Soit $f(x) = x$ si $x \in [0, 2[$.

   (a) Calculer la série de Fourier de f dans les cas où

      i. f est impaire de période 4,

      ii. f est paire de période 4.

   (b) En déduire la valeur de

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

   (on utilisera Parseval dans ce dernier cas).

3. Soit $f(x) = |\sin(x)|$.

   (a) Calculer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

   (b) Calculer

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}.$$

(c) Etablir la formule

$$|\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Soit la fonction f, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \frac{3\,(x-\pi)^2 - \pi^2}{12} \text{ si } x \in [0, 2\pi]\,.$$

(a) Représenter graphiquement f.

(b) Déterminer la série de Fourier de f.

(c) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

(d) Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-x} f(x) dx,$$

et calculer I.

(e) Montrer que

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2}.$$

5. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et la fonction f, 2π-périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x), \quad x \in [-\pi, \pi[\,.$$

(a) Déterminer la série de Fourier de f.

(b) En déduire que

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

(c) Soit $M > 0$, montrer que, si $|x| < M$ et $N > \frac{M}{\pi}$, la fonction

$$x \to \sum_{n \geq N} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

est continue.En déduire la valeur de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

(d) Montrer que, si $0 < x < \pi$,

$$\ln(\sin(x)) = \ln(x) + \sum_{n\geq 1} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

(e) Montrer que, pour $x \neq k\pi$, alors

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2}.$$

6. (Phénomène de Gibbs) Soit f la fonction impaire, 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{\pi}{4}$, pour $x \in]0, \pi[$.

(a) Montrer que, si $x \in]0, \pi[$, alors

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin((2n-1)\,x)}{2n-1}.$$

(b) On pose

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)\,x)}{2k-1}.$$

f n'est pas continue en zéro, mais les sommes partielles de Fourier, $S_n(f)$, le sont. Dans la suite, on se propose d'étudier comment la suite $(S_n(f))$ tend vers f quand n tend vers l'infini.

i. Montrer que, si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n^{'}(f)(x) = \frac{\sin 2nx}{2\sin x},$$

et en déduire que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt.$$

ii. En déduire que le maximum de $S_n(f)$ est

$$z_n = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx.$$

iii. Montrer que

$$l = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}\int_0 \pi \frac{\sin u}{u} du.$$

(c) Démontrer que $l > \frac{\pi}{4}$.

(On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $\sin(x)$ pour donner une valeur approchée de l).

Remarque :

La suite de fonctions $(S_n(f))$ converge uniformément vers f, d'après le Théorème de Dirichlet , sur tout intervalle $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, où $\varepsilon \in \left]0.\frac{\pi}{2}\right[$. Mais, $\forall n$, $S_n(f)$ admet un maximum sur $[0, \pi]$ qui tend vers l, $l > \frac{\pi}{4} = f(x)$, l' abscisse de ce maximum tendant vers zéro quand n tend vers l'infini.