M2 301

M53: Intégrales à Paramètres

→ Résolu° équa diff, on aboutit à f

$x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$.

Étude de < cont uniforme / intég. impropres.

CI : Continuité UN & intég. généralisées

(D) (CS) I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ alors f est cont,
$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall y \in I, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

(D) (a) ..., f cont & UN sr I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
$\forall x, y \in I, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

f UN cont sr $I \Rightarrow f$ cont sr I. (~~RF~~)

(TH) Heine :
soit I compact de $\mathbb{R}$ & $f : I \to \mathbb{R}$ cont
alors f est UN cont.

DM (?!) En suppos^t que f cont sr I & pas UN cont.
$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in I$ tq $|x-y| < \delta$
$|f(x)-f(y)| > \varepsilon$.

On apply ppté à $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\exists x_n \in I, \exists y_n \in I$,
$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

ĉ I est fermé, borné & $(x_n)_n \subset I$, $\exists$ ss-suite
$(x_{\varphi(n)})_n$ q (a) vrs $\alpha \in I$.

On Rq $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(car $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ & de $\varphi(n) \geq n$).

D'où $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$.

ĉ f est cont on a : $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha)$
& $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha)$

de $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ceq (?!) $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon > 0$

0.1
13/09.

(U) Heine $\mathbb{R}^2$

soit I, J 2 compacts de $\mathbb{R}$.
soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ cont, alors f est (UN) cont
sur $I \times J$.

$\to$ f UN cont sur $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq
$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$

(DE) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$

preuve exos.

I.2.1. Intégrales généralisés

On suppose connue no° intégral de Riemann.

(D2) soit I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que
f est localem^t intégrable (au sens de Riemann)
si f est Riemann intégrable sur tt interv. compact.

(D3) soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$
& supposons f localm^t intégrable sur $[a, b[$,
on dit que l'intégrable de f sur $[a, b[$ est (CV) si
$f : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in [a, b[$ a une limite
finie qd $x \to b$ & on note $\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \underset{<}{\to} b} \int_a^x f(t)\, dt$
& c^{tte} limite s'appelle l'int. généralisée de
f sur $[a, b[$. (de m̂ sur ôtrs intervalles)

ⓐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est (CV) $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

• $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est cont sur $[1, \infty[$ dc lc^t int.

soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\, dx \overset{\text{si } \alpha = 1}{=} \int_1^x \frac{1}{x}\, dx = \ln x \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ (DV).

si $\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_1^x x^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_1^x$

$= \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1) \longrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$

$@_2$: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ CV $\Rightarrow \alpha < 1$. idem $@_1$.

I.2.2. Fausse Généralité

P3 soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ <u>cont</u> & supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$ $\exists$ (& est finie)

alors $\int_a^b f(x)\,dx$ CV.

$@_1$: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ CV.

$f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est cont, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

D+, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$ d'où p P3,

d'<u>int</u> $\int_0 \frac{\sin x}{x}\,dx$ CV.

I.2.3. Crit de CV Δ f de signe cte

TH 4 soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ lclmt integ & spps que

(i) $\exists\, c \in [a,b[,\ \forall x \in [c,b[: f(x) \geq 0$

(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$

(<u>ie</u> : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in [c,b[$, $f(x) \leq M.g(x)$)

alors (a) si $\int_a^b g(x)\,dx$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CV

(b) si $\int_a^b f(x)\,dx$ DV $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ DV.

@ $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV.

En effet, $t \mapsto e^{-t^2}$ <u>cont</u> de lclmt intgbl sr $[0,\infty[$

- $e^{-t^2} \geq 0$, $\forall t \geq 0$.
- $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, <u>ie</u> $t^2 \cdot e^{-t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV dc p le crit de comparaison,

$\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV & dc $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ CV.

TH5 $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intég.

Supposons (i) $\exists\, c \in [a, b[,\ \forall x \in [c, b[,\ f(x) \geq 0$.

(ii) $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ <}}{\sim} g(x)$ (ie $\exists\, \varepsilon : [c, b[\to \mathbb{R}$ tq

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \varepsilon(x) = 0$ & $\forall x \in [c, b[,\ f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$)

alors $\int_a^b f(x)\,dx$ CV ssi $\int_a^b g(x)\,dx$ CV.

Ex $\gamma > 0$: $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(t) + t^\gamma}\,dt$ CV si $\gamma > 1$.

en effet, $\frac{1}{\ln t + t^\gamma} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^\gamma}$

car $\frac{t^\gamma}{\ln(t) + t^\gamma} = \frac{t^\gamma}{t^\gamma\left(1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t^\gamma}}_{\xrightarrow[t \to \infty]{} 0}\right)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$

dc $\int_1^\infty \frac{1}{\ln t + t^\gamma}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^\gamma}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \gamma > 1$

CV en Valeur Absolue

TH $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intgble & (CV abs)

suppos que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ CV alors

$\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

Ex $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV

- $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont dc lclmt intg sur $[1, \infty[$
- $\forall t \geq 1,\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ CV.

M53 CV en valeur absolue

TH $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localmt intégrale & supposons que $\int_a^b |f(t)|\, dt$ CV.
(on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ CV abs) alors $\int_a^b f(t)\, dt$ CV.

ⓐ $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV

• $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est cont de loclmt intégrable sn $[1, \infty[$.

• $\forall t \geq 1, \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ CV $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ CV

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV.

à ⓐ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ CV MS ne CV pas abs.

‖ • $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ cont de loclmt intégrable sn $]0, \infty[$.

• $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ CV.

soit $x > 1$, IPP sur $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ — on vt ↗ du puisse de x, de on intègre $\frac{1}{t}$

$u(t) = \frac{1}{t}$ $\quad u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$v(t) = -\cos(t)$ $\quad v'(t) = \sin(t)$

d'où $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\cos(X)}{X} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$

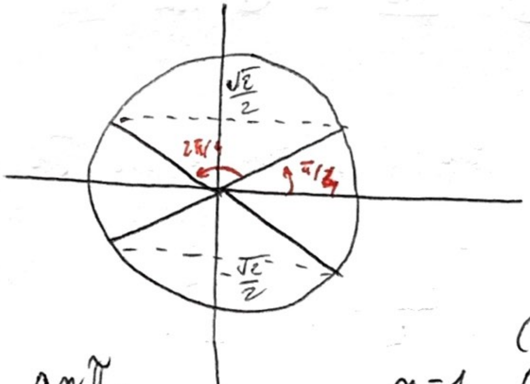
$\left|\frac{-\cos(X)}{X}\right| \leq \frac{1}{X} \xrightarrow[X \to \infty]{} 0$

$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ CV abs de CV. D'où $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\, dt \to \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt \in \mathbb{R}$

Ainsi $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ possède 1 limite finie qd $X \longrightarrow \infty$.

ⓐ Donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ ⓐ.

Étude de CV abs si @ $\frac{\sin t}{t}$



$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Dc l'int ne CV pas abs.

Critère de Cauchy

TH soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ loclmt intégrable

alors $\int_a^b f(t)\, dt$ CV $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b[$ tq

$\forall x, x'$; $x_\varepsilon < x < x' \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon$.

C2 : Intégrales définies à paramètres

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle (éventuell^t non borné) de $\mathbb{R}$, $J = [a,b]$ désigne un intervalle fermé, borné ($-\infty < a < b < \infty$).

On considère $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

& on suppose $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann intégrable sr J.

On pt de définir, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$

Q° Qd est-ce que F est cont ? dérivable, C^1, ... ?

II. 1. Continuité de F

Th Supposons que $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont alors si on pose $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, $x \in I$, la f F est bien déf & cont sr I.

⚠ a, b dvt ê des réels finis ! ne f pas pr IG.

DM (·) $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cont de Riemann intégrable. D'où F est bien déf sr I.

(··) F est cont sr I. Soit $x_0 \in I$ & mq F est cont en x_0. Supposons que x_0 n'est pas 1 extrémité de I (s'il y en a !) Alors $\exists\, \eta > 0$ tq $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche à mq $\exists\, \delta$, $\exists\, 0 < \delta < \eta$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt \right|$$

D'où $|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt$

La fonct° $f : [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ cont de UN cont p le Th de Heine (J est fermé borné)

$\exists\, \delta,\ 0<\delta<\eta$ tq $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\forall t \in [a,b]$, on a :

$$|f(x,t)-f(x_0,t)| \leqslant \varepsilon / b-a$$

En effet, $\exists\, \delta>0$, $\forall (s,t),(s',t') \in [x_0-\eta, x_0+\eta]\times J$,

$$\max(|s-s'|, |t-t'|) < \delta \Rightarrow |f(s,t)-f(s',t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\begin{cases} s=x \\ s'=x' \end{cases}$ $\begin{cases} t=t' \end{cases}$ → on a appliqué cela ds la démo.

D'où $|F(x)-F(x_0)| \leqslant \int_a^b |f(x,t)-f(x_0,t)|\, dt$

$$\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt = \varepsilon \frac{(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ est cont en x_0, $\forall x_0 \in I$

& F est cont sr I.

ⓐ soit $F(x) = \int_0^x \sin(x+t)\, e^{xt^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

→ calculer $\lim_{x\to 0} F(x) = ?$

On introduit $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \sin(x+t)\, e^{xt^2}$

f est continue & $[0,\pi] = J$ est $\begin{cases} \text{fermé,} \\ \text{borné.} \end{cases}$

⚠ condi TH.

Dc F est cont sr $\mathbb{R}$ (par TH -1.)

ep $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 1+1 = 2$

II.2 Condit° pr que F soit de classe C^1.

TH soit $f : I\times[a,b] \to \mathbb{R}$ & supposons que

(i) f est cont sr $I\times[a,b]$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe & est cont sr $I\times[a,b]$

alors la f $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien dlf

$x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$ & de classe C^1 sr I.

et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$.

Preuve soit $x_0 \in I$ & supposons $\exists \eta > 0,\ [x_0-\eta, x_0+\eta] \subset I$.

soit $\varepsilon > 0$. On cherche δ, $0<\delta<\eta$,

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \int_a^b (\partial_1 f)(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon$$

- On a $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$,

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| =$$

$$= \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt - \int_a^b (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) dt \right|$$

- $$\leq \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$

Fixons $t \in [a,b]$ & on applique le $\boxed{\text{TAF}}$ à

$$[x_0-\eta, x_0+\eta] \to \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto f(s,t)$$

$\forall x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$, $\exists\, c_{x,t}$ compris entre x & x_0 tq

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t)$$

D'où $$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |x-x_0| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$

$$= |x-x_0| \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt.$$

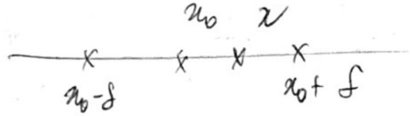
$\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sur $I \times J$ donc sur $[x_0-\eta, x_0+\eta] \times J$, & le (TH) de Heine, elle est UN cont sur $[x_0-\eta, x_0+\eta] \times J$.

Donc $\exists\, \delta$, $0<\delta<\eta$, tq :

$$\max(|s-s'|, |t-t'|) \leq \delta \Rightarrow$$
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(s,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(s',t') \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Appliquons ceci à $s = c_{x,t}$; $s' = x_0$, $t = t' \in [a,b]$.

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0| < \delta'$



D'où $|x-x_0| < \delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right|$$

$$\leqslant |x-x_0| \, \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a)$$

de $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ C^1 ou ∂ cont

---

@ $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont

2) déri part $\exists$ & cont.

Dc on pt appliquer le Th 2.

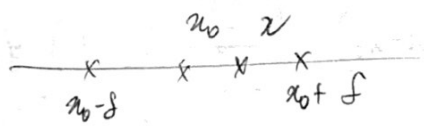
Ainsi F est C^1 & $F'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \left[\frac{1}{x} e^{xt} \right]_{t=2}^{t=2}, \quad x \neq$$

dérp. x.

intg de t.

$|s-s'| = |c_{x,t} - x_0| < \delta$ dès que $|x-x_0|<\delta$



D'où $|x-x_0|<\delta$, $t\in[a,b] \Rightarrow$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où $\left|F(x)-F(x_0)-(x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right|$

$\le |x-x_0|\,\frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a)$ de $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ C^1 car ∂ cont

@ $F(x)=\int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$

Mq F est dérivable & calculer $F'(x)$.

$f: \mathbb{R}\times[1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,t)\longmapsto f(x,t)=\frac{e^{xt}}{t}$ est de classe C^1

$\Downarrow$

1) cont
2) déri part ∃ & cont.

Dc on pt appliquer le TH 2.

Ainsi F est C^1 & $F'(x)=\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

$$F'(x)=\underbrace{\int_1^2 \frac{t e^{xt}}{t}\,dt}_{\text{dep. } x} = \int_1^2 e^{xt}\,dt = \underbrace{\left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_{t=2}^{t=2}}_{\text{intg de } t}, \; x\neq$$

Applicat° : TH de Fubini (intvls bornés)

soit $I=[\alpha,\beta]$, $J=[a,b]$

& soit $f: I\times J\longrightarrow\mathbb{R}$, on spps cont sur $I\times J$
$(x,t)\longmapsto f(x,t)$

Alors la f° $F: I\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$

est cont sur I & la f° $G: J\longrightarrow\mathbb{R}$
$t\longmapsto G(t)$

où $G(t)=\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ est cont sur J

& $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b G(t)\,dt$.

ie $\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt$.

@

Preuve (Th) Fubini

ĉ $f : [\alpha,\beta]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est cont,

le (Th) de continuité $\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est cont sur } I. \\ G \text{ est cont sur } J. \end{cases}$

Pour G, on introduit la f $\tilde{f} : J\times I \to \mathbb{R}$

$(t,x) \mapsto \tilde{f}(t,x) = f(x,t)$

$\tilde{f}$ est cont ô composée de f & de la symétrie $(t,x) \longmapsto (x,t)$.

Idée de la preuve :

soit $\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy,\quad (x,t)\in I\times J$

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt = \int_a^b \varphi(\beta,t)\,dt$$

Posons $\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\,dt \quad , x\in I$

$$\Phi(\beta) = \int_a^b \varphi(\beta,t)\,dt,\quad \Phi(\alpha) = \int_a^b \varphi(\alpha,t)\,dt = 0$$

D'où $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt = \Phi(\beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$

en admettant que Φ est dérivable $= \int_\alpha^\beta \Phi'(x)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt \right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx$$

$\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy,\quad (x,t)\in I\times J$

$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\,dt \quad , x\in I$

Mq Φ est bien dérivable sur I.

• Mq φ est cont sur $I\times J$. soit $\varepsilon > 0$,

soit $(x_0,t_0)\in I\times J$: pr $(x,t)\in I\times J$, on a :

$$\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)\,dy$$

$$= \int_\alpha^{x_0} \big(f(y,t) - f(y,t_0)\big)\,dy + \int_{x_0}^x f(y,t)\,dy$$

soit $M = \sup_{(x,t)\in I\times J} |f(x,t)| < \infty$ (car f cont sur $I\times J$ méthode int fermé bornée)

(1) $\left| \int_{x_0}^x f(x,t)\,dt \right| \leq M\,|x - x_0|$

si $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ alors $\left| \int_{x_0}^{x} f(y,t)\, dt \right| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'après le TH de Heine, f est UN. cont sur $I \times J$.
Donc on pt trouver $\exists\, \delta > 0$,

$$\begin{cases} |y - y'| < \delta \\ |t - t'| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(y,t) - f(y',t')| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0 - \alpha|}$$

$$\boxed{|t - t_0| < \delta} \Rightarrow |f(y,t) - f(y,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0 - \alpha|}$$

$y \in J$

Donc $\left| \int_{\alpha}^{x_0} f(y,t) - f(y,t_0)\, dy \right| \leq |x_0 - \alpha| \frac{\varepsilon}{2|x_0 - \alpha|} = \frac{\varepsilon}{2}$

D'où si $|t - t_0| < \delta$ & $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ alors $|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Donc φ est continue en $(x_0, t_0) \in I \times J$

dc φ est continue sur $I \times J$.

Donc ϕ est bien définie.

Mq ϕ est dérivable sur I

[Appliquons le TH_2 en vérifiant les hypo :
de f cont sur $I \times J$ de f & $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont sur $I \times J$

- φ est cont $I \times J$
- Mq $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & cont $I \times J$

Pr t fixé ds J, la f

$x \longmapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(y,t)\, dy$ représente la

primitive de $y \mapsto f(y,t)$ q s'annule en α.

Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\exists$ & $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

& par hypothèse, on a de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est cont $I \times J$

Dc p $TH_2 2$, ϕ est dérivable &

$\phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\, dt$ d'où $\phi'(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$

$$\Phi(\beta) - \cancel{\Phi(\alpha)} = \int_\alpha^\beta \Phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)' dx$$

$\Phi(\alpha) = 0$

$$\int_a^b \Psi(\beta, t)\,dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt \qquad \square$$

Exemples d'Applications

Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^2 y\, e^{xy}\, dy \right) dx$

$[1,2] \times [2,0] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y e^{xy}$ est cont.

D'après le TH de Fubini, on a :

$$I = \int_0^2 \left(\int_1^2 y\, e^{xy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \cancel{y} \frac{1}{\cancel{y}} \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(e^{2y} - e^{y} \right) y$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^{y} \right]_0^2$$

aussi du Paramètre

2.4. Intégrales à Paramètres dont les bornes dépendent

On s'intéresse à une f $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$.

TH I, J 2 intervalles fermés, bornés.

$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad a, b : I \longrightarrow J$.

On supp :
- ▸ a, b st de C^1 sur I.
- ▸ f cont $^{I \times J}$
- ▸ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ & cont $^{I\times J}$

Alors la f $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1

$$x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

& $\forall x \in I$,

$$\boxed{\Psi'(x) = f(x, b(x)).b'(x) - f(x, a(x)).a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt}$$

(R9) Supposons que $x \longmapsto f(x,t)$ est constante sur I égale à $\varphi(t) = f(x,t)$, $\forall x$

$$\Psi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt = \int_{a(x)}^{t_0} \varphi(t)\,dt + \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{b(x)} \varphi(t)\,dt - \int_{t_0}^{a(x)} \varphi(t)\,dt$$

si $H(t) = \int_{t_0}^{u} \varphi(t)\,dt$, $u \in J$

H est dérivable & $H'(u) = \varphi(u)$, $\forall u \in J$.

& $\Psi(x) = (H \circ b)(x) - (H \circ a)(x)$

$\Rightarrow \Psi$ est dérivable & $\Psi'(x) =$

$$\Psi'(x) = H'(b(x)).b'(x) - H'(a(x)).a'(x)$$

$$= \varphi(b(x)).b'(x) - \varphi(a(x)).a'(x)$$

$$= f(x,b(x)).b'(x) - f(x,a(x)).a'(x)$$

///

Preuve :

soit $\Theta : I \times J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,u,v) \longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt$$

- Θ est bien définie (car f est cont)
- $\Psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x))$.

D'après Th 2, si $(u,v) \in I \times J$, l'applicat° $x \longmapsto \Theta(x,u,v)$ est dérivable sur I et

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

soit $(x,v) \in I \times J$, $u \longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt = -\int_v^u f(x,t)\,dt$

q est de la primitive de la f cont $t \longmapsto f(x,t)$ q s'annule en v. & de

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v) = -f(x,u) \quad \text{\& de m :}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v) = f(x,v).$$

$\frac{\partial \Theta}{\partial u}, \frac{\partial \Theta}{\partial v}$ st cont $^{I \times J \times J}$ car f l'est.

$\frac{\partial \theta}{\partial x}$ est cont $^{I\times J\times J}$ $\left(\begin{array}{l}\text{voir DM continuité}\\ \text{la preuve (III) Fubini}\end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Θ est de classe C^1.

De plus $d\theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) =$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v).h_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v).h_3$$

$$\Psi(x) = \Theta(x,a(x),b(x)) = (\Theta \circ L)(x)$$

$$L : x \longmapsto (x, a(x), b(x))$$

L est de classe C^1 & $L'(x) = (1, a'(x), b'(x))$

Donc $\Psi'(x) = d\Theta(x,a(x),b(x))\,(1,a'(x),b'(x))$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,a(x),b(x)) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,a(x),b(x)).\,a'(x)$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,a(x),b(x)).\,b'(x)$$