M31

Groupe $\mathfrak{S}_n$ Transpositions

$\mathfrak{S}_n$: pd T.

$\mathfrak{S}_n$: pd CASD

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

σ & τ : CASD $\Rightarrow \sigma.\tau = \tau\sigma$

2 parmi n : $\frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau \circ \sigma)$

nb transpositions → paire : 1 ; → impaire : -1

$\varepsilon((i\,j)) = -1$

$\varepsilon((i, i_2, \dots, i_k)) = (-1)^{k-1}$

lin, bilin, trili, n-lin

A : (as) si pr tte transp°

$\Rightarrow A(\dots, X_j, \dots, X_i \dots)$ avec $X_{\sigma(i)}$, $X_{\sigma(j)}$

$A(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots X_{\sigma(n)}) \overset{\shortparallel}{=} \varepsilon(\sigma) . A(X_1, \dots, X_n)$ — (s) ou (as)

si parmi $X_1, \dots, X_n$ 2 à 2 ég^x

ou si $X_1, \dots, X_n$ dépdts alors $A(X_1, \dots, X_n) = 0$

indépendants si $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n = 0$

dépdts si $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$ (1) $\sum_i^n \lambda_i x_i = 0$

$$A(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)} \dots X_n^{\sigma(n)}}_{\text{déterminant}} \underbrace{A(e_1, \dots, e_n)}_{\in \mathbb{R}}$$

M Diagonalisation.

- matrice A.
- $P_A(X) = \det(A - \lambda Id)$ @ $P_A(X) = (2-X)^2(6-X)^1$
- Sous-espace propre : @ $E_2 = \ker(A - 2.Id)$
- $B = A - 2.Id$
- Calcul base de $\ker(B)$: @ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  puis calcul base $\ker_2(B)$: @ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $P^{-1}.A.P =$ diagonale @ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

⚠ si $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} \neq \dim E$. alors matrice pas diagonalisable

Polynôme ; racines :

$$\begin{cases} \sum \lambda_{ip} = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n} \\ \prod \lambda_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \\ \sum \lambda_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-b}{a} \\ \lambda_1 . \lambda_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$A(X_1,\dots,X_m) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma)\, X_1^{\sigma(1)} \times \dots \times X_m^{\sigma(m)}\right] A(e_1,\dots,e_m)$$

$$\mathrm{Det}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma).\, X_{\sigma(1)} \times \dots \times X_{\sigma(m)}$$

Déterminant

- A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.
- $\det(B) = \det(P^{-1}.A.P) = \det(A)$
- $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

$\mathrm{Det}(X_1,\dots,X_m) = 0$ ssi $X_1,\dots,X_m$ st dépdts ds $\mathbb{R}^m$.

① $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$

② $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_m$

③ $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{33} & \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{mm}$

④ $\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)$

⑤ $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & ? & ? \\ 0? & \boxed{A_2} & ? \\ 0? & 0? & \boxed{A_m} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A_1) \times \mathrm{Det}(A_2) \times \dots \times \mathrm{Det}(A_m)$

- $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A).\,\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA)$

$\underset{m,n}{A} \times \underset{n,n}{Id} = A$

$\boxed{M}$ Laman

- Rang de la matrice (dim espace image)

$\Uparrow$

- Base de l'image (faire PDG puis si vecteurs indépendants, expliciter la base de l'image)
- Base du noyau (faire PDG, tous les vecteurs non nul q renvoie vers un vecteur nul)
- Déterminant (si vct^rs st dépdts alors det est nul)

Vecteur propre, valeur propre, diagonalisation

Ⓓ $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$, $Av = \lambda v$.
Dans ce cas, v s'appelle vecteur propre.

- $\exists$ vecteur propre pr la valeur $\lambda \in \mathbb{R}$
$\iff \det(A - \lambda.Id) = 0$

- $P_C : \det(A - \lambda Id) = (-\lambda)^m + \mathrm{trace}(A)(-\lambda)^{m-1} + \dots + \det(A)$
(polynôme caractéristiq) (somme élts diagonale)

- Racines du polynôme st valeurs propres.
- $\deg(P_E) = \dim(E)$.
- $E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\}$: sous-espace propre pr λ.
- $E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_p}$ sont SEV somme-directe.
- $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}\dots(\lambda_p - \lambda)^{m_p}$.
- $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$. (somme multiplicités = dim espace)

Comatrice

$m_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det($matrice A sauf $i$ème ligne $j$ème colonne$)$

${}^tM.A = \det(A).\,Id = A.{}^tM$: matrice diagonale

FF Gamer : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det}.{}^tM$.

(TH) Base incomplète : Matrice

E : ev $e_1, \dots, e_p$ une famille libre (indpdts),
$f_1, \dots, f_q$ une famille génératrice (vct^{r} s'écrit c CL de f)
alors on pt choisir parmi les f_i des élts $f_{i_1}, \dots, f_{i_s}$
tq $e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_s}$ est une base de E.

- Rang (matrice) = dim (Image)

(TH) rang A = la + gde taille sm carrée q a un dét non nul.

(TH) A matrice, λ valeurs propres, m la multiplicité de λ.
E_λ sous-espace propre : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$

Diagonalisable, Trigonalisable, Polynôme scindé

(D) A est diagonalisable si $\exists$ une base ds laqlle la matrice de A est diagonale.

(TH) A est diagonale ssi :
1. le polynôme caractéristique est scindé.
   ($P_A(X)$ est produit de facteurs de deg = 1)
2. Pr tte racine λ de $P_A(X)$,
   on a $\dim(E_\lambda) = m$ = multiplicité.

(X^2+1 pas scindé ds $\mathbb{R}$. X^2+2 pas scindé ds $\mathbb{Q}$. $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq 1 \Rightarrow$ mat. diagonalisab) 3

(Coro) A matrice $n \times n$, n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diag.
(si ttes racines st distinctes de multiplicité 1,
$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq 1 \Rightarrow$ matrice diag).

(D) A est trigonalisable (matrice $n \times n$ si $\exists$ base ds lq^{lle} la matrice de A : $(P^{-1}A.P)$ est triangul^{re} supérieur.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} \ddots & \vdots \\ \emptyset & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

(TH) Si $P_A(X)$ est scindé alors A est trigonalisable.

(det) de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_n \\ a_1^2 & \ddots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

(det) ?

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \emptyset \\ & & 1 & \\ \emptyset & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} = A \rightarrow P_A(X) = (-1)^n \left[X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0\right]$$

(P)
- Sep st en somme directe.
- Ds chq Sep, on pnd une base, on les réunit $\Rightarrow$ vecteurs, ds chq s-espace indépendants, si suffisamment alors forme une base sinon compléter de vecteurs pr former base.

E_{λ_i} sep pr $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp dist$_1$, $e_1^i, \dots, e_p^i$ base de E_{λ_i} de dim p.

$\underbrace{e_1^1, e_{p_1}^1}_{\text{indep}}, \underbrace{e_1^2, e_{p_2}^2}_{\text{indep}}, \dots, e_1^q, e_{pq}^q \in E \ (= \mathbb{R}^n)$

P Ce sont des vecteurs indépendants.

Coro $\underbrace{\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)}_{\text{de dim } m_1} = \ker\left[(A - \lambda \, Id)^{m_1}\right]$

D $A_{(m \times m)}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp dist$_1$, on suppose P_A est scindé (dc mat trigonalisable), m_i multiplicité de λ_i ds P_A.

N_{λ_i} = ss-espace caractéristiq $= \ker\left[(A - \lambda_i \, Id)^{m_i}\right]$

E_{λ_i} = ss-espace propre $= \ker (A - \lambda_i \, Id)$

on sait $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq m_i$, $\dim N_{\lambda_i} = m_i$.

P si on a $x_i \in N_{\lambda_i}$ tq $x_1 + \dots + x_p = 0$ alors $\forall i, x_i = 0$.

Th $\exists$ une base de $\mathbb{R}^n$ tq mat $P^{-1}.A.P$:

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}\lambda_1 & ? \\ \emptyset & \ddots \ \lambda_1\end{matrix} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline
\emptyset & \begin{matrix}\lambda_2 & ? \\ \emptyset & \ddots \ \lambda_2\end{matrix} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline
\emptyset & \emptyset & \lambda_3 & \emptyset & \emptyset \\ \hline
\emptyset & \emptyset & \begin{matrix}\lambda_p & ? \\ \emptyset & \ddots \ \lambda_p\end{matrix} & & \emptyset \\ \hline
\end{array}\right)$$

Cor 1) $P_A(A) = 0$ Cayley - Hamilton

2) Décomposit° de Dunford.

$\rightsquigarrow$ Clôture algébriq du corps.

$\hookrightarrow$ tout polynô pt ê scindé.

(R) P_A scindé $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (vp) ; $m_1, \dots, m_p$ multiplicités

$E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i Id)$ et $N_{\lambda_i} = \ker\left[(A - \lambda_i Id)^{m_i}\right]$

où $\dim N_{\lambda_i} = m_i$.

∃ une base de $E = \mathbb{R}^n$ tq ds cette base, la mat A prd fo^m :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{\text{base de } N_{\lambda_1}} & & \\ & \underbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}_{N_{\lambda_2}} & \\ & & \underbrace{\lambda_p \cdots \lambda_p}_{N_{\lambda_p}} \end{pmatrix}$$

(TH) (Cayley-Hamilton)

Une mat A, (pas hypo polyn. scindé), P_A : polyn. caractéristiq.

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Alors $(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 Id_n = \underset{\text{mat}}{0}$.

(polyn annulateur)

(D) A mat $n \times n$, le polynôme minimal de A : P_{min} est un polyn. unitaire :

$$P_{min}(X) = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

② $P_{min}(A) = \underset{\text{mat}}{0}$

③ Si Q polyn. tq $Q(A) = \underset{\text{mat}}{0}$ alors $\deg(P) \geq \deg(P_{min})$

(P) Si Q polynôme tq $Q(A) = 0$ alors ∃ polyn R tq : $Q = R.P_{min}$

(TH) (Décomposit° Dunford-Jordan-Chevalet)

A mat $(n \times n)$, $P_A(X)$ scindé

Alors ∃ 2 mat D et N uniq, $A = D + N$

① $A = D + N$

② D est diagonalisable.

③ N est nilpotente

④ $N.D = D.N$.

Motivat° Décomposit° Dunford

→ résoudre système équat°s différentielles

(P) (Forme normale de Jordan)

A mat $n \times n$, P_A scindé dc il existe une base tq la matrice $P^{-1}.A.P$ prd la forme :

$$\begin{pmatrix} B_1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & B_2 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & B_N \end{pmatrix}$$

où B_i mat carré de la forme $B_i = \begin{pmatrix} a & 1 & & \emptyset \\ & a & 1 & \\ & & a & \ddots \\ & & & 1 \\ \emptyset & & & a \end{pmatrix}$

ex : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

Ⓛ $A, B : E \to E$, 2 (AL) diagon $AB = BA$

alors $\exists\ e_1, \dots, e_m$ base de B

tq A et B st diagonales ds cette base.

(R) A diagonalisable $\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{p} V_i$.

Ⓛ V_i invariant sous $B \Leftrightarrow B(V_i) \subset V_i$. (stable)

Forme normale de Jordan : Comment trouver cette base ?

→ calcul (Vp) distinctes

→ calcul base ker (B) $e_1, \dots, e_q$ si q = multiplicité de λ_i on s'arrête

sinon

→ on calcule base ker (B^2) $e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+p}$ si $q+1$ = multiplicité, on s'arrête

sinon

→ on calcule base ker (B^3) ... etc.

(Jusq nbr vecteurs = multiplicité ; on rajoute de moins en moins de vecteurs).

⇝ voir @.
