M54 : Analyse Numériq Matricielle

Bernhard.Beckermann@univ-lille.fr

force $= Ax \cdot b$, $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$

mat symétriq.

→ équa diff à coeff cte.

→ Résonnance

AL

→ Bibliographie.

Précision finie sr ordi

nbr machine ⊂ virgule flottante $\varepsilon \approx 10^{-8}$

$|\alpha - \text{float}(\alpha)| \leq \varepsilon |\alpha|$

nbr machine

$\alpha \otimes \beta = \text{float}(\alpha \times \beta)$, $\times \in \{+,-,\cdot,/\}$

Cmprdre err^{R} sr ordinat^{R} / opé élé^{R} ⟺ 2 nbrs machines α, β :

Ex d'err^{R} $\beta = (2+\alpha) - \alpha$ où $\alpha = 10^{20}$.

@ cancellation.

I/ Notation Rappels

① • inv : $BA = I$

• sym (hermit) : $A^T = A$ (resp $A^* = A$)

• orthgle (unit^{R}) : $A^T A = I$ (resp $A^* A = I$)

$\boxed{\text{normale si } AA^* = A^* A}$

• semi-déf ⊕ si $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $(Ax, x) \geq 0$

• déf ⊕ : si sdp & si $(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

• diagonale

• tgl^{R} supér^{R}

• simil^{R} : si $\exists$ mat inv S, $B = S^{-1} A S$.

diagonalisable si simil^{R} à mat diagonale.

• élt propre de A : (λ, x) : VP, $\vec{vp}$

• Rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$.

CM - Jeudi pro

⚠ matrice en fct°

⚠ mat inv est carrée.

Gramm-Schmidt

$(AB)^* = B^*A^*$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(K^\perp)^\perp = K$. $\ker(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^*)$

$\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = n$. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$

Matrices par blocs.

blocs de taille compatibles nbr lignes = nbr colonnes.

Cor $\nabla \times \nabla = \nabla$.

Factorisa° de Schur & onsq ces

TH 2.1 Fact de $\boxed{S}$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists U : \nabla \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unit^R orthg le & $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sorte que $T = U^*AU$.

Si A est normale $\Rightarrow$ T diagonale.

②

Preuve 2.1 Preuve p récurrence sur n,

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$n=1$: $A = (a_{11})$, $U = I_1 = (1)$, $T = U^*AU = (a_{11}) \leftarrow \nabla$

$n-1$ à n : d'après (1.13), $\exists \lambda \in Sp(A)$, ie $\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $Ax = \lambda x$

(ss perte de généralité $\|x\|_2 = 1$.

Posons $q_1 = x$, avec TH S_4, je px compléter pr trouver 1 base ortho née $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ de $\mathbb{C}^n$.

Posons $Q = (q_1, \ldots, q_n)$;

$Q^*Q = ((q_{i,j}, q_k)) = I_n$. $\boxed{\text{unit}^R}$

$\Rightarrow Q$ unitaire & $Q^*AQ = Q^*(Aq_1, Aq_2, \ldots, Aq_n)$

$= Q^*_1 (\lambda q_1 \mid *_{n-1})$

$$= \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ n-1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

écrire les dimens° pr mat p blocs.

tq $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

D'après (HDR), $\exists\, U_{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{C})$ de sorte que $U^*_{n-1} A_{n-1} U_{n-1} = T_{n-1}$ $\leftarrow$ ◸

Donc $U = Q . U_{n-1} = Q . \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right]$

$$\underline{U^* A U} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \vdots & U^*_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline \vdots & A_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \vdots & U_{n-1} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & U^*_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline 0 & U^*_{n-1} A_{n-1} U_{n-1} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & T_{n-1} \end{array}\right] \quad \square$$

si $A = A^* = A^* A \iff T$ est inv. car $TT^* = T^* T$
$= U^* A U$
$U^* A^* U$

NB: $A = U^* A U = T \iff A = U T U^*$

$T^* = (U^* A U)^* = U^* A^* U$

$TT^* - T^* T = U^* A U U^* A^* U - U^* A^* U . U^* A U$
$= U^* (A A^* - A^* A) U = 0$

(L) Tte mat normale & ◸ est ficimt DIAGONALE.

Cor 2.2. Diag mat hermitienne (sym'tiq)

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermit. Alors $\exists\, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unit^R de sorte q mat $D = U^* A U$ est diagonale & composée des (vp) de A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$(RR^*)_{1,1} = R^* R$ ◹ ◺ ◺ ◹ $\Big\} \Rightarrow r_{1,1}, r_{1,2}, \cdots r_{n,n} = 0$.

$\Rightarrow R$ diagonale.

On déduit mat. hermit. admet 1 base ornée de $\vec{vp}$.

Si A normale, on pt la diagonaliser (on a livré base ornée $\vec{vp}$).
$\Leftarrow$ $U^* A U$

normale si $AA^* = A^* A$.

Décomposiθ en valeurs singulières

L.2.3 $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les VP de A^*A st réelles & ≥ 0.

DM Posons $B = A^*A$ & $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
$B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

$B = B^*$ car $(A^*A)^* = A^*A = B$. (B est hermitien)

D'après 2.2, $Spec(B) \subset \mathbb{R}$.

soit (λ, x) un élt propre de B

alors $Bx = A^*Ax = \lambda x$

Mltplo à gauche p x^*

$$(Ax)^*(Ax) = \lambda x^* x = \lambda \|x\|$$

$$\|Ax\|_2^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\|Ax\|_2^2 \geq 0}{\|x\|_2^2 > 0}$$ □

NB Une mat unitaire est inversible.
car $Q^*Q = I$ & $Q^{-1} = Q^*$.

L.2.4 soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors les VP $\neq 0$ de AB & BA st les m̂s. (comptant multiplicité).

DM
TD ici $m = n$, B inversible
$$B(AB)B^{-1} = BA.$$

TH 2.6 Vl^{rs} singl^{rs} d'1 mat normale

Les VS d'1 mat normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ st les modules de sf VP.

DM Mq A est normale. Fac^θ Schur

(*) $\exists\, U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ unitaire tq $U^*AU = D$.
(mat diag$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ & $\lambda_j \in Sp(A)$).

$Sp(A^*A)$?

Multiplions (A) à gauche $\not\!\!\!\;\, (U^*)^{-1} = U$
& à droite $\not\!\!\!\;\, (U^{-1}) = U^*$.

$$\underbrace{(U^*)^{-1} \cdot U^*}_{I} . A . \underbrace{U \times U^{-1}}_{I} = A = UDU^*$$

$$\Rightarrow A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*)$$
$$= UD^*DU^* = UD^*DU^{-1}$$

$Sp(A^*A) = Sp(D^*D)$

ᵃᵛ $D^* = \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n})$

$D^*D = \text{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$

$\Rightarrow \mu_j = \sqrt{|\lambda_j|^2} = |\lambda_j|$

ccl Ce sont des valeurs singulières de A pr $j = 1, \dots, n$.

Th 2.7. Décomposition en v^{ls} sing, svd

soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de r valeurs sing postives alors $\exists\, U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ & $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ttes les 2 unitaires & $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ "diagonale" tq

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

av $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ où $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$

ep $rg(A) = r \leq \min(m, n)$

Rq : Schéma de calcul SVD

- calculer élts propres (μ_j^2, v_j) de A^*A av $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ & $\{v_1, \dots, v_n\}$ base onée du $\mathbb{K}^n$.
- calculer $u_j = Av_j / \mu_j$ pr $j = 1, \dots, r$ ainsi $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ base onée de $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$
- Poser $U = (u_1, \dots, u_m)$; $V = (v_1, \dots, v_n)$, Σ c avt

5 NB : ~

DM 2.7

D'après Rq : A^*A adm^t bse ornée ds Vp $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$; plus précisém^t :

$$\forall j = 1, \dots, n \ : A^*A v_j = \lambda_j v_j$$

On sait que $\lambda_j \geq 0$ d'après 2.3.

à une permutat° près,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = 0 \dots \lambda_n$$

Pr les val$^{\text{Rs}}$ singulières

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \mu_r = \sqrt{\lambda_r}$$

Notons que $V_j = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire car $V^*V = I$.

Posons pr $j = 1, \dots, r$: $u_j = \dfrac{A v_j}{\mu_j} \in \mathbb{R}^n$.

Mq $\{u_1, \dots, u_r\}$ est orthonormée

soit $i, j \in \{1, \dots, r\}$

$$(u_i, u_j) = u_j^* u_i = \frac{1}{\mu_j \mu_i} v_j^* A^* A v_i$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_j \mu_i} v_j^* v_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, r \ : u_i \in \mathrm{Im}(A)$.

$\{u_1, \dots, u_r\}$ est syst. libre $\subset \mathrm{Im}(A)$

espace engendré : span : Vect.

$\underbrace{\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_r\}}_{E}$ sev de $\mathrm{Im}(A)$

$$\Rightarrow \quad r \leq \dim(\mathrm{Im}(A)) = rg(A)$$

$$\dim \mathrm{Ker}(A^*) = m - \dim \mathrm{Im}(A) \leq m - r$$

~~Posons~~ mais $v_{r+1}, \dots, v_n \in \ker(A)$ libres

$$\dim \ker(A) \geq n - r$$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A^*) \leq r \Rightarrow rg(A) = r$. égalité partout.

$\{u_1, \dots, u_r\}$ ornées / libres.

On pt ~~compléter~~ trouver $u_{r+1}, \dots, u_m \in \mathbb{K}^m$ pr former une base ornée de $\mathbb{K}^m$.

colonnes forment base ornée : unit^{re}

Plus précisément, $u_{r+1}, \dots, u_m$ doivent former une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^*)$.

$\Rightarrow U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{K})$ est unitaire et

$$A \cdot V = (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_n)$$
$$= (\mu_1 u_1, \dots, \mu_r u_r, 0, \dots, 0)$$
$$= U \cdot \Sigma = U \cdot \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\mu_1 & \\ & \mu_r\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

En multipliant par V^* :

$$A \cdot V \cdot V^* = A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

$\square$

SVD (3) : Approcher A par une matrice de faible rang.

Th 2.9 Th Eckhart-Young

Normes matricielles & normes compatibles

Plus précisément, $u_{r+1}, \dots, u_m$ doivent former une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$.

$\Rightarrow U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{K})$ est unitaire et

$$A.V = (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_n)$$
$$= (\mu_1 u_1, \dots, \mu_r u_r, 0, \dots, 0)$$
$$= U.\Sigma = U.\left(\begin{array}{ccc|c} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

En multipliant par V^* :

$$A.V.V^* = A = U.\Sigma.V^*$$

□

SVD (3) : Approcher A par une matrice de faible rang.

(Th) 2.9 Th Eckhart-Young

$\forall k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ la mat de rg $\leq k$ la + proche de A est donnée par

$$B = U \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = \sum_{j=1}^{k} u_j \mu_j v_j^*$$

de dist. donnée par μ_{k+1}.

Normes matricielles & normes compatibles

On se donne $\forall n \geq 1$, une nv $|||\cdot|||$ sur $\mathbb{K}^n$.

Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite :

- compatible à la norme vectorielle $|||\cdot|||$ si
$$\forall A\ \forall x : |||Ax||| \leq \|A\| . |||x|||$$
- sous-multipl. ou norme matricielle si
$$\forall A\ \forall B : \|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$$

@ 3.2 (Norme de Frobenius)

On va identifier $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

à $\text{Vect}(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$

alors $\|A\|_s = \|\text{Vect}(A)\|_2$

Encore preuve 32.

- sous-multiplicative

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$|(A B)_{i,k}| = |\sum A \quad B \quad|$

CS

$\leq \sqrt{\sum |A \quad|} \sqrt{\sum |B \quad|}$

$\|AB\|_2^2 \leq \sum \sum \sum |A \quad|^2 \sum |B \quad|^2$

$\|\cdot\|_S$ est compatible à norme vect. $\|\cdot\|_2$

On identifie un vect^r $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$ à mat $X^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

& $\|x\|_2 = \|X^e\|_e$

en prenant $p = 1$ ds la ~~s~~-multiplicativité.

$\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\|_2 = \|AX^e\|_S \leq \|A\|_S \|X^e\|_S = \|A\|_S \|x\|_2$

~~Preuve~~ L.3.3

À tte norme mat^{le} $\|\cdot\|$, on pt $\exists$ ~~!~~ norme vectorielle q lui soit compatible.

~~ep~~ $\|A\| \geq \rho(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 3.3.

La norme mat^{le} est donnée $\forall n$, $n \geq 1$

alors $|||X||| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

& la compatibilité entre $\|\cdot\|$ & $|||\cdot|||$ découle de la sous-multip. de $\|\cdot\|$.

(b) Si on a une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pr un n alors

$$|||\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}||| = \Big\| \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} x_1 & \\ \vdots & 0 \\ x_n & \end{array}\right)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Big\|$$

(c) lien entre $\|A\|$ & $\rho(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

$\rho(A)$: rayon spectral.

soit (λ, x) un élt propre de A.

$x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ & $Ax = \lambda x$

& $|||\cdot|||$ compatible & $\|\cdot\|$ norme vect.

$$|||Ax||| = |||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x||| \leq \|A\| \cdot |||x|||$$

ô $x \neq 0$ & alors $|||x||| \neq 0$ & on obtient

$$\forall \lambda \in Sp(A) : \ |\lambda| \leq \|A\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|.$$

Th 3.4 Norme matricielle subordonnée

$\forall n \geq 1$, une NV $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$ & $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\|A\| := \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|,$$ donne bien nms de NV dite norme mat subord. à la NV $\|\cdot\|$.

Pr ttes nms, $\|I_n\| = 1$. $\|I_n\|_S = \sqrt{n}$: elle n'est pas subordonnée.

Preuve 3.4

$$A \to \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$ est une norme !

∘ positivité ? $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \geq 0 = \|A\| \geq 0$

si $\|A\| = 0 \to \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1, Ax = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0$

$\Rightarrow \forall k : Ae_k = k^{\text{ième}}$ colonne de $A = 0 \Rightarrow A = 0$.

∘ homogté : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda A \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|A\|$$

∘ $\triangle$ I

$$\|A + B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} \big(\|Ax\| + \underbrace{\|Bx\|}_{\leq \max_{\|y\|=1} \|By\|}\big) \leq \|A\| + \|B\|$$

∘ compatibilité : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$

car trivial pr $y = 0$ sinon & $x = \frac{y}{\|y\|}$, $\|x\| = 1$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$$

- Sous-multip : par compat.

$$\|AB\| = \max \|ABx\| \leqslant \|A\|.\|Bx\|$$

$$\leqslant \max_{\|x\|=1} \|A\|.\|Bx\| = \|A\|.\|B\|$$

Pr tte nms, $\|I_n\| = 1$. Pr la norme de Schur, $\|I_n\|_S = \sqrt{n}$, elle n'est alors pas subordonnée.

Ⓓ 3.5 Normes mat subordonnées usuelles

Pr nv $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$, on note $\|A\|_p$ aussi la nms. La nm $\|\cdot\|_2$ est asi appelée norme spectrale.

ⓉⒽ 3.6 FF μ normes nms usuels

Pr $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ns avs $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ (la + gde vℓr singulière) &

$$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}|$$

Preuve 3.6 Notons par $N_p(A)$ l'expreΘ suggérée pour $\|A\|_p$

p = 2 : D'après 22 $\xrightarrow{\text{compat}}$ ss-mul & 2.5, $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $A^*A = UDU^*$ & D : mat diagonale.

$$D = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$$

& $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$ les valeurs singulières de A.

$$N_2(A) = \sqrt{\rho(A^*A)} = \mu_1$$

$$\forall x : \|A\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} X^*A^*Ax$$

Posons $y = U^*x$, Rq $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 = 1$

$$\|Ax\|_2^2 = \max_{\|y\|=1} y^*Dy = \max_{\|y\|=1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \underbrace{\mu_j^2}_{\leq \mu_1^2} = \mu_1^2$$

$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \mu_1$

En prenant $y = e_1$, $x = Ue_1$

$\|A\|_2^2 \geqslant \|e_1^* D e_1\| = \mu_1$ dc égalité.

$p=1$ soit $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = 1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

alors $\|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\, x_k \right| \leq$

$\leq \max_{l=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|\ \|x\|_1$

En passant au max

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = N_1(A) = \max_{l} \sum^{m} |a_{k,l}|$

Aussi $\forall k \in \{1,\dots,n\}$:

$\|Ae_k\|_1 \underset{\|e_k\|=1}{\leq} \|A\|_1$

$\|$

$\sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|$

En prenant le max sur ts les $k \in \{1,\dots,n\}$

$N_1(A) \leq \|A\|_1 \Rightarrow$ égalité

$p = \infty$

μ A mat normale vs $= |vp|$

(L) vp non nulles AB & BA ont mm.

NB: $\|y\|_2^2 = y^* y$ ég

Pptés normes & rayon spectral

(Cα) 3.7 Pptés norme spectrale

a) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \|A^*\|_2 = \|A\|_2$

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mat hermit $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaires, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \|UAV\|_2 = \|A\|_2$.

(a) $\|A^*\|_2^2 = \rho(AA^*) \overset{2.4}{=} \rho(A^*A) = \|A\|_2^2$

(b) comme $A = A^*$ $\Rightarrow$ A est normale $(AA^* = A^*A)$,

d'après le 2.6, $\|A\|_2 \overset{3.6}{=} \max\{\mu_1, \dots, \mu_j$ VS de $A\}$

$= \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\} = \rho(A)$

(c) $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaires

$\|UAV\|_2 \overset{3.6}{=} \sqrt{\rho(\underbrace{V^*}_{=V^{-1}} A^* \underbrace{U^* U}_{I} AV)}$

dc $(UAV)^*(UAV)$ est simil^R à A^*A

m̂ spectre $= \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A\|_2^2$

Th 3.8 de Gelfand

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ & $\varepsilon > 0$ alors on peut construire une nms $\|\cdot\|_*$ tq $\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$

tq $\forall$ nm $\|\cdot\|$ & $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

DM not Th

ⓐ Soit $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \lambda^k \in Sp(A^k)$

$$\Rightarrow \rho(A)^k \leq \rho(A^k) \leq \|A^k\|$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$

ⓑ DM en TD : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

alors $\|X\|_* = \|Mx\|_2$ est une norme vectorielle

$\|B\|_* = \|MBM^{-1}\|_2$ est norme mat sub à $\|\cdot\|_2$.

ⓒ D'après Th de Schur 2.1 :

$\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitR tq $U^* A U = U^{-1} A U = T \leftarrow \triangledown$

Posons $\delta \in]0,1[$ à fixer plus tard,

posons $M^{-1} = U\Delta$, $\Delta = \mathrm{diag}(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$

Alors $\|A\|_* = \|MAM^{-1}\|_2$

$= \|\Delta^{-1} U^* A U \Delta\|_2$

$= \|\Delta^{-1} T \Delta\|_2$

Posons $S = \mathrm{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$ $\in Sp(A)$

$\|\Delta^{-1} S \Delta\|_2 = \|S\|_2 = \rho(S) = \rho(A)$

$$\|\Delta^{-1}\underbrace{(T-S)}_{j,k}\Delta\|_2 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} |\delta^{k-j} t_{j,1}|^2}$$

$\Rightarrow \|\Delta^{-1}(T-R)\Delta\|_2 \leq \delta \|T-R\|_S \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$

ⓓ $\|\cdot\|_2$ sous-mult $\Rightarrow$

$\forall k : \|A^k\|_2 \leq \|A\|_*^k$

de ⓐ : $\liminf_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} \geq \rho(A)$

$\limsup_{k \to \infty} \|A^k\|_*^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$