MNAP

Intégration Numérique.

@ claire.chainais@univ-lille.fr

MNAP → moodle : tskbat
↳ notes de cours + (énoncés TP)

4 CM
8 TP. Jupyter. → Numpy
→ Mathplotlib.

M^{di} soir
↳ TP. M1 → Clairin & Gauss.

J^{di} M^{tin} (C1) Calcul approché d'intégrales.

(C2) Recherches de zéros
↳ résolutions approchées équations non linéaires. $f(x)=0$.

(C3) Méthodes Numériques Équations Différentielles.

Évaluation : 1 TP noté le dernier ? 2h   rattrapages TP 2h.

I/ Motivation

↳ qd on sait calculer primitives. {IPP, MCV.

↳ Aire sous courbe.

FF Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Intégrales Exactes : I.

I. Approchées : J.

Valeur approchée : $J_k^Q(f)$ ← nom méthode

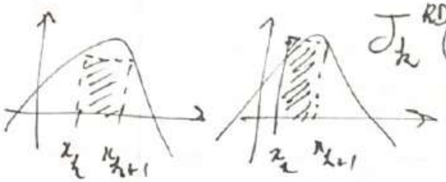
I. exactes : $I_k(f)$.

II/ Premières [M] quadrature. ① FFE

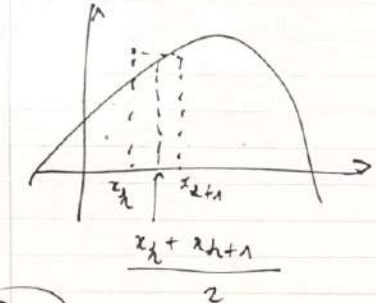
- Méthodes des rectangles.

FF élémentaires : $J_k^{RG}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k)$ FFE

$J_k^{RD}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, (f(x_{k+1}))$



- [M] rectangles au point milieu

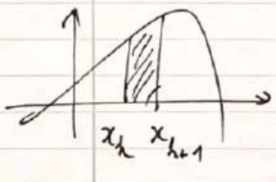


FFE : $J_k^{RPM}(f) = (x_{k+1} - x_k)\, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$.

- [M] trapèzes :

FFE

⚠ parenthèses



$J_k^T(f) = (x_{k+1} - x_k)\left(\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\right)$

$l \times \left(\frac{B \times l}{2}\right)$ ②

② FF Composées.

FF Chasles $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_0^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

$\rightarrow I_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(f)$.

Intégrat° Numériq = Quadrature.

$h = \frac{b-a}{N}$.

FF Quadrature Composée

→ FF dépd subdivi°., dépd h, N.

$$\boxed{J^Q_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} J_k^Q(f).}$$

important

on vt $h \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Méthodes rectangles & trapèzes.

RG $J^{RG}_{[a,b],h}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k)$.

RD Σ

R au point milieu Σ

Trapèzes Σ

③ numpy ⇄ vecteurs.

subdivi° : points équirépartis

→ Qualifier Précision :
on compare ≠tes $\boxed{M}$. ϕ $N = 20$.
$\check{x}$a $\boxed{M}$ cv ?...

③ Évaluat° Précision méthodes.

• VAX : $I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

• VAP : $J^{Q}_{[a,b],h}(f)$.

• $\boxed{\text{Déf erreur}}$ $\mathcal{E}_f(h) = \left| J^{Q}_{[a,b],h}(f) - I_{[a,b]}(f) \right|$

On vt q $\mathcal{E}_f(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$

si $\underline{\mathcal{E}_f(h) \simeq \overset{\leftarrow \text{cte}}{C_f} \times h^{\alpha}}$, la ⓕ de quadrature est d'autant + précise que α est grand.

si $\mathcal{E}_f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{C_f}{2^{\alpha}} h^{\alpha} = \frac{\mathcal{E}_f(h)}{2^{\alpha}}$.

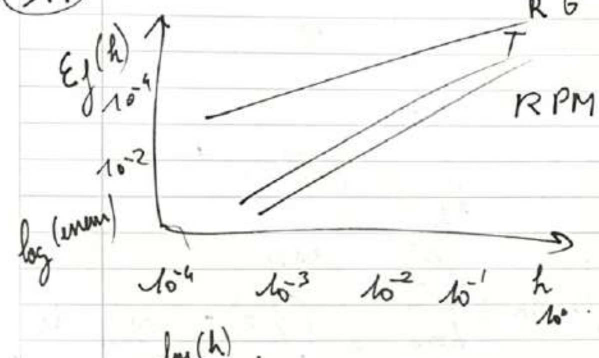
$\mathcal{E}_f\left(\frac{h}{10}\right) = \frac{\mathcal{E}_f(h)}{10^{\alpha}}$.

$h = \frac{b-a}{N} \Leftrightarrow N \to +\infty$.

Page t .. Comparaison de $\boxed{M}$ classiqs.

$f(x) = x \cdot \sin x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $I = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = 1$

IPP



échelle logarithmiq.

RG : $\alpha = 1$
RPM : $\alpha = 2$
T : $\alpha = 2$.

Vitesse de convergence

$$\log \mathcal{E}_f(h) = \underbrace{\log C_f}_{\text{cte}} + \underbrace{\alpha}_{\text{pente}} . \log h$$

$y = b + ax$

points espacés en échelle logarithmq q ont un ratio cte. !

$h \to \frac{h}{2}$ $\quad \log\left(\frac{h}{2}\right) = \log h - \log 2$.

N : initial

2N ...

2N

$\frac{h}{2^{\alpha}}$

10^{-2}

RPM

$10 \updownarrow \begin{matrix} 10^{-1} \Leftrightarrow 2.10^{-4} \\ 10^{-2} \Leftrightarrow 10^{-6} \end{matrix} \updownarrow 10^{2}$

tracer h^{α} ?

h^{1}
h^{2}
h^{3} ...

pente $= \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = $ ——

$\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{100} \Leftrightarrow \alpha = 2$

Démonstrations.

à gauche erreur $\leq$ majorant erreur

RG $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

la fonction cte

$$(x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx .$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(x) - f(x_k)\big)\,dx$$

TR $f'(c)=0$
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ TAF

TAF $\exists\, c_{x,x_k}$

$$f(x) - f(x_k) = (x - x_k)\, f'(c_{x,x_k})$$

IAF

supp f' continue max.

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_k)| \leq |x - x_k| \max_{[a,b]} |f'|$$

$x \geq x_k$

$$|f(x) - f(x_k)| \leq (x - x_k) \max_{[a,b]} |f'|$$

Puis, $\displaystyle \mathcal{E}_f(h) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_0^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\,dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \max |f'|\,(x - x_k)\,dx$$

$$\leq \max_{[a,b]} |f'| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

6

$$\mathcal{E}_f(h) \leq \max_{[a,b]} |f'| \sum_{k=0}^{} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$

$x_{k+1} - x_k = h$

$$\leq \max_{[a,b]} |f'| \frac{h}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)}_{x_N - x_0 = (b-a)}$$

Somme télescopique. $\square$

RPM $\displaystyle \mathcal{E}_f(h) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) dx \right.$

FF Taylor-Lagrange, $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\exists\, c \in [x,y],\quad f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \frac{(x-y)^2}{2} f''(c).$$

$$\rightarrow * \; f(x) - f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = (x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}) f'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^2}{2} f''(c_{x,k})$$

$\displaystyle \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) dx = 0$

x_k $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ x_{k+1}

f impaire $\int$ $\frac{1}{2}$ int ... abs.

finir Démo.

$$* \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) f'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \int^{x_{k+1}}$$

$\forall$ $\frac{1}{2^3}$ $(X)^3$

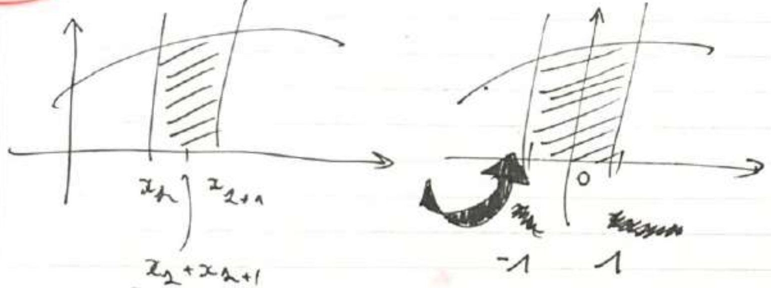
III / Vers [M] plus précises.

31. Formalisme général.

(D) MIN

Obten° + (FFE).

(CDV) à $[-1,1]$.



$$\begin{cases} x = \frac{x_k+x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1}-x_k}{2} s \\ dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2} ds \end{cases}$$

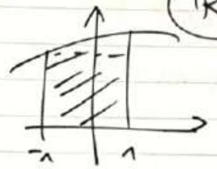
$s = 1$

$s = -1$.

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)\ ds.$$

$$J^{RG}_{[-1,1]}(\varphi) = 2\ \varphi(-1)$$

(RG).



(D) FF quadrature élémentaire.

© - (RPM) : $\ell = 0,\ \tau_0 = 0,\ w_0 = 2$

- (T)

$\frac{(b+B)h}{2}$

(FF) Quadrature élémentaire

Ccl (FF) générale d'une formule composée.

(2) Cache & Estimat° d'erreur

(D) Notion d'ordre.

[M] de quadrature est

→ elle s^t Exacte polyn deg $\leq p$

→ elle s^t Inex. au moins — deg $p+1$

polynôme base canonique

comment d. on d'f d q?

@ $\int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2$, $\int_{-1}^{1} x \, dx = 0$

RG : $J^{RG}_{[-1,1]}(\varphi) = 2\varphi(-1)$. ordre 0.

x^0 — $J^{RG}_{[-1,1]}(x \mapsto 1) = 2$ $\Rightarrow x^0$.

x^1 — $J^{RG}_{[-1,1]}(x \mapsto x) = -2 \neq 0$

RD → ordre 0.

RPM → ordre 1.

Trapèzes → ordre 1. $J^{T}_{[-1,1]}(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1)$

Lien entre ordre & estimation erreur.

- $J^{\varphi}_{[-1,1]}(\varphi)$ ordre p.
- FF composée associée
- $\left| J^{\varphi}_{[a,b],h}(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq C_f \times h^{p+1}$

→ FF ordre p CV h^{p+1}

→ FF quad. + précise : ordre ↗. → valeurs points? → valeurs 2D?

$x \mapsto 1$

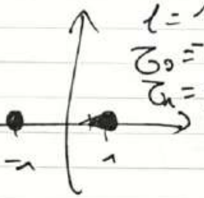
$\varphi(x) = 1$.

(6)

[M] Newton - Cotes (3.3) Formes mixtes méthodes.

τ_j équirépartis sur $[-1,1]$

$\tau_j = -1 + \frac{2j}{\ell}$, $0 \leq j \leq \ell$



$\ell = 1$
$\tau_0 = -1$
$\tau_1 = 1$

FF Trapèze

$w_0 = 1 = w_1$.

$\ell = 2$
$\tau_0 = -1$
$\tau_1 = 0$
$\tau_2 = 1$

$J^{\varphi}_{[-1,1]}(\varphi) = w_0 \varphi(-1) + w_1 \varphi(0) + w_2 \varphi(1)$

$$\begin{cases} J_{[-1,1]}(x \mapsto 1) = w_0 + w_1 + w_2 = 2. \\ J_{[-1,1]}(x \mapsto x) = -w_0 + w_2 = 0. \\ J_{[-1,1]}(x \mapsto x^2) = w_0 + w_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

ordre ≥ 2.

$w_0 = w_2 = \frac{1}{3}$ & $w_1 = \frac{4}{3}$.

$J_{[-1,1]}(x \mapsto x^3) = -w_0 + w_2 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx$ ordre ≥ 3

ordre = 3

[M] de Simpson.

Trapèze ordre 1

Simpson ordre 3.

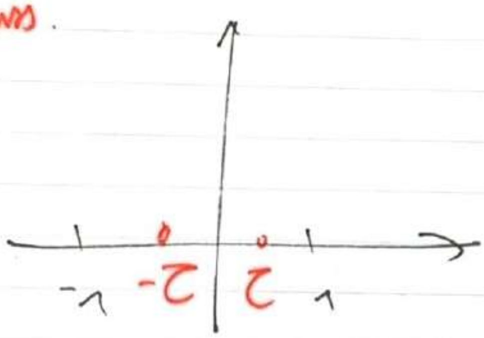
Ordre de FF de quad.

× ℓ, si ℓ est impair.

× $\ell + 1$, si ℓ est pair.

(11)

M Gauss



a)

b) on n'a pas équations linéaires

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 \\ -w_0 \tau + w_1 \tau = 0 \\ w_0 \tau^2 + w_1 \tau^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

2 points

$\Rightarrow w_0 = w_1 = 1, \ \tau = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ ordre 3.

$$J_{[-1,1]}^{G2P}(\varphi) = \varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$J_{[-1,1]}^{G2P}(f) = \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)\left(f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) + f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right)\right)$$

$\varphi_k(s) =$