

M42① Dualité'

AL n ev → corps de base.

TD

Ex 2 Déterminer la forme linéaire  $f$  sur  $\mathbb{K}^3$  tq  $f(1,1,1) = 0$ ;  $f(2,0,1) = 1$ ,  $f(1,2,3) = 4$ . Donner une base du plan  $\ker(f)$ . AL:  $\mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ .

$$f \in (\mathbb{K}^3)^*$$

$$f(x,y,z) = ax + by + cz \text{ où } a, b, c \in \mathbb{K}.$$

$$\circ f(1,1,1) = a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$\circ f(2,0,1) = 2a + c = 1 \quad (2)$$

$$\circ f(1,2,3) = a + 2b + 3c = 4. \quad (3)$$

$$(3) - (1) \quad b + 2c = 4 \Rightarrow b = 4 - 2c$$

$$a = \frac{1-c}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-c}{2} + (4-2c) + c = 0$$

$$1-c + 2(4-2c) + 2c = 0$$

$$-3c + 9 = 0$$

$$c = 3.$$

$$\text{puis } a = -1.$$

$$\text{et } b = -2.$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = -x - 2y + 3z.$$

$\ker f ? (x,y,z) \subset \ker f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x - 2y + 3z = 0$$

$v \in \ker f \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{K} \mid$

$$x = -2y + 3z.$$

$$\text{Donc } v = (-2y + 3z, y, z)$$

$$v = (-2, 1, 0)y + (3, 0, 1)z$$

→ système génératrice + libre

[M1] Mg c'est libre, CL, coeff nécessnt = 0.

[M2] nécessairement libre ? ici  $f$  est surjectif

Par ailleurs,  $f \neq 0$ , dc  $\dim \ker f = 2$ .

↑ Th du rang  $\dim E = \dim \text{rg}(f) + \dim \ker(f)$ .

dc  $\text{Im } f = \mathbb{K}$ . d'après Th du rg, la dimension de  $\ker(f) = \dim \mathbb{K}^3 - \dim \text{Im } f = 3-1 = 2$ .

② Système générat<sup>R</sup>g à m nbr dont le nbr d'elts est exactement la dimension alors a SG est libre.

{  $v_1 = (-2, 1, 0)$ ,  $v_2 = (3, 0, 1)$  } est une base de  $\ker f$ .

①

Ex 3  $f_1, f_2$  2 élts de  $(\mathbb{R}^2)^*$  définis par  $f_1(x, y) = x + y$  et  $f_2(x, y) = x - y$ .

Mq  $\{f_1, f_2\}$  est une base de  $(\mathbb{R}^2)^*$ .

Exprimer les formes linéaires suivantes de la base  $\{f_1, f_2\}$ :  $g(x, y) = x$ ,  $h(x, y) = 2x - 6y$ .

M1  $\textcircled{1} \textcircled{2}$   $\{f_1, f_2\}$  pte libe de  $(\mathbb{R}^2)^*$ ?

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \begin{matrix} \text{linéairement} \\ \text{indépendant.} \end{matrix}$$

$$\forall (x, y): \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) = 0$$

$$\lambda_1(x+y) + \lambda_2(x-y) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 - \lambda_2)y = 0, \quad \forall x, y$$

$$\begin{cases} x=0, y=1 \\ x=1, y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \{f_1, f_2\}$  est libe.

Th si une pte génératrice q' a m nbt élts que la dimension alors génératrice

si une pte libre, m nbt élts q dimension alors c'est une base.

Comme  $\dim (\mathbb{R}^2)^* = 2 = \text{card } \{f_1, f_2\}$  alors  $\{f_1, f_2\}$  est une base.

M2 Écrire  $f_1$  et  $f_2$  sur la base  $(B_c^2)^*$

duale de la base canoniq  $B_c = \{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

$$B_c = \{e_1, e_2\}$$

$B_c^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ ,  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker)

$$f_1 = f_1(e_1)e_1^* + f_1(e_2)e_2^*$$

$$f_1 = f_1(1, 0)e_1^* + f_1(0, 1)e_2^*$$

$$\boxed{f_1 = e_1^* + e_2^*}$$

$$f_2 = f_2(e_1)e_1^* + f_2(e_2)e_2^*$$

Le déterminant de  $f_1, f_2$  dans  $B_C$  est  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\Rightarrow \{f_1, f_2\}$  est une base de  $(\mathbb{R}^2)^*$ .

soit  $g$  et  $h$  2 formes linéaires.

$$g = e_1^* \quad (= g(e_1)e_1^* + g(e_2)e_2^*)$$

$$h = 2e_1^* - 6e_2^*$$

On a  $P$  la matrice de passage de  $B_C^*$  à  $\{f_1, f_2\}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

si  $X'$  et  $X$  sont les coordonnées dans  $\{f_1, f_2\}$  et  $B_C^*$  respectivement.

Alors on a  $X = P X'$  i.e.  $X' = P^{-1}X$ .

pour  $g$  on a:  $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

on a  $X' = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$$

Pour  $h$ :  $X' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g = -2f_1 + 4f_2$$

complément: si  $\{v_1, \dots, v_m\}$  une base de  $E$ ,  $\{v_1^*, \dots, v_m^*\}$  base dual de  $E^*$ ,  $f \in E^*$ ,  $f = a_1 v_1^* + \dots + a_m v_m^*$ .  $a_i \in K$ .

$f = f(v_1) v_1^* + \dots + f(v_m) v_m^*$ .

not  $f(i \in \{1, \dots, m\})$   $f(v_j) = (a_1 v_1^* + \dots + a_m v_m^*)(v_j)$

$f(v_j) = a_j v_j^*(v_j)$  autres font 0.

$$f(v_j) = a_j$$

si  $i \neq j$  vont 0.

③

Ex 5 Soit  $v_1 = (1, \dots, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, \dots, 1)$ ,  $v_m = (0, 0, \dots, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Déterminer la base  $(v_1^*, \dots, v_m^*)$

de  $(\mathbb{R}^n)^*$ , duale de  $(v_1, \dots, v_m)$ .

On cherche  $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ . Ex 4

$$v_1^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*.$$

$$\begin{cases} v_1^*(v_1) = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \\ v_1^*(v_3) = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \underbrace{\alpha_1 e_1^*(v_1)}_{-1} + \underbrace{\alpha_2 e_2^*(v_1)}_0 + \underbrace{\alpha_3 e_3^*(v_1)}_0 = 1. \end{array} \right.$$

$$\text{et } v_1 = (-1, 1, 0) \quad -\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$v_1 = -e_1 + e_2$$

$$v_2 = -e_1 + e_3$$

$$v_3 = 2e_1 + e_3$$

$$e_1^*(v_1) = e_1^*(-e_1 + e_2) = -e_1^*(e_1) + e_1^*(e_2).$$

$$= -1 + 0$$

$$= -1.$$

(4)

Ex 4

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0) \\ v_2 &= (-1, 0, 1) \\ v_3 &= (2, 0, 1) \end{aligned}$$

Déterminer la base  
duale  $D^*$  de  $D$ .

Pour  $v_2$ .

$$\underbrace{\alpha_1 e_1^*(v_2)}_{-1} + \underbrace{\alpha_2 e_2^*(v_2)}_0 + \underbrace{\alpha_3 e_3^*(v_2)}_1 = 0$$

$$-\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Pour  $v_3$ .

$$\alpha_1 e_1^*(v_3) + \alpha_2 e_2^*(v_3) + \alpha_3 e_3^*(v_3) = 0$$

$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 \rightarrow 3\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_3.$$

$$\alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow v_1^* = e_2^* + 0 \cdot e_1^* + 0 \cdot e_3^*$$

$$v_2^* = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^* + \beta_3 e_3^*$$

$$v_2 = -e_1 + e_3$$

Pour  $v_1$ ,

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_1)}_{-1} + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_2)}_1 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_3)}_0 = 0$$

$$\underline{-\beta_1 + \beta_2 = 0}$$

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_2)}_{-1} + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_2)}_0 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_2)}_1 = 1$$

$$\underline{-\beta_1 + \beta_3 = 1}$$

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_3)}_2 + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_3)}_0 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_3)}_1 = 0$$

$$\underline{2\beta_1 + \beta_3 = 0}$$

$$\begin{cases} -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 1 \\ 2\beta_1 + \beta_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \beta_1 = \beta_2 = -3 \\ \beta_1 - \beta_3 = -2 \\ -\beta_1 - 2 - 1 = 0 \\ \beta_1 = -3 \end{array}$$

$$v_3^* = \gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^*$$

$$v_3 = 2e_1 + e_3$$

$$\begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} = \begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v_3^*(v_1) = 0 \\ v_3^*(v_2) = 1 \\ v_3^*(v_3) = 0 \end{cases}$$

$$v_3^*(v_3) = 1$$

Pour  $v_1$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_1)}_{-1} + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_1)}_1 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_1)}_0 = 0$$

$$\underline{-\gamma_1 + \gamma_2 = 0}$$

Pour  $v_2$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_2)}_{-1} + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_2)}_0 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_2)}_1 = 0$$

$$\underline{-\gamma_1 + \gamma_3 = 0}$$

Pour  $v_3$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_3)}_2 + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_3)}_0 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_3)}_1 = 1$$

$$2\gamma_1 + \gamma_3 = 1$$

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 = \gamma_2 \\ -\gamma_3 = 1 \\ \gamma_3 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\gamma_1 - 1 = 0 \\ \gamma_1 = -1 \end{array}$$

$$v_2^* = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^* + \beta_3 e_3^*$$

$$v_2 = -e_1 + e_3$$

Pour  $v_1$ ,

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_1)}_{-1} + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_1)}_1 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_1)}_0 = 0$$

$$\underline{-\beta_1 + \beta_2 = 0}$$

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_2)}_{-1} + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_2)}_0 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_2)}_1 = 1$$

$$\underline{-\beta_1 + \beta_3 = 1}$$

$$\underbrace{\beta_1 e_1^*(v_3)}_2 + \underbrace{\beta_2 e_2^*(v_3)}_0 + \underbrace{\beta_3 e_3^*(v_3)}_1 = 0$$

$$\underline{2\beta_1 + \beta_3 = 0}$$

$$\begin{cases} -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 1 \\ 2\beta_1 + \beta_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \beta_1 = \beta_2 = -3 \\ \beta_1 - \beta_3 = -2 \\ -\beta_1 - 2 - 1 = 0 \\ \beta_1 = -3 \end{matrix}$$

(5)

$$v_3^* = \gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^*$$

$$v_3 = 2e_1 + e_3$$

$$\begin{cases} v_3^*(v_1) = 0 \\ v_3^*(v_2) = 1 \\ v_3^*(v_3) = 0 \end{cases}$$

Pour  $v_1$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_1)}_{-1} + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_1)}_1 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_1)}_0 = 0$$

$$\underline{-\gamma_1 + \gamma_2 = 0}$$

Pour  $v_2$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_2)}_{-1} + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_2)}_0 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_2)}_1 = 0$$

$$-\gamma_1 + \gamma_3 = 0$$

Pour  $v_3$ ,

$$\underbrace{\gamma_1 e_1^*(v_3)}_2 + \underbrace{\gamma_2 e_2^*(v_3)}_0 + \underbrace{\gamma_3 e_3^*(v_3)}_1 = 1$$

$$2\gamma_1 + \gamma_3 = 1$$

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma_2 \\ \gamma_1 = 1 \\ \gamma_3 = -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -\gamma_1 - 1 = 0 \\ \gamma_1 = -1 \end{matrix}$$

Ex 1:  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $\dim V = n$ , pr une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ , on note  $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  la base dual de  $V^*$ . Calculons  $w_j^*(w_k)$  pour tout  $j$  et tout  $k$ .

1) Soit  $(w_1, \dots, w_n)$  une base de  $V$  donnée par mat de passage  $P = P_{(v_i) \rightarrow (w_i)}$ .

Comment la base dual  $(w_1^*, \dots, w_n^*)$  est-elle liée à  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ ?

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) & \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*) \\ P \downarrow & \downarrow Q \\ \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n) & \end{array}$$

Soit  $P = (P_{ij})_{ij}$  la mat de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad w_j = \sum_{k=1}^n P_{kj} v_k.$$

Soit  $Q = (Q_{ij})_{ij}$  la mat de pag de  $\mathcal{B}^*$  à  $\mathcal{B}'^*$ .

$$w_j^* = \sum_{e=1}^n q_{ej} v_e^*$$

$$w_j^*(w_k) = w_j^* \left( \sum_{i=1}^n p_{ik} v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ik} w_j^*(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ik} \left( \sum_{e=1}^n q_{ij} v_e^* \right) (v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ik} \left( \sum_{e=1}^n q_{ej} \underbrace{v_e^*(v_i)}_{\delta_{ei}} \right)$$

$$w_j^*(w_k) = \sum_{i=1}^n p_{ik} (q_{ij}) = \sum_{i=1}^n p_{ik} \cdot q_{ij}$$

$$({}^t P)_{ij} := P_{ji}$$

$$\underline{w_j^*(w_k)} = \sum_{i=1}^n ({}^t P)_{ki} \cdot Q_{ij} = \underbrace{({}^t P \cdot Q)_{kj}}$$

formule du produit d'une matrice.

Nous avons établi que

$$(w_j^*(w_k)) = \begin{pmatrix} {}^t P \cdot Q \end{pmatrix}_{kj}$$
$$= {}^t \begin{pmatrix} {}^t P \cdot Q \end{pmatrix}_{jk}$$
$$= \begin{pmatrix} {}^t Q \cdot P \end{pmatrix}_{jk}.$$

La matrice  $(w_j^*(w_k))$

$$\sum_j \delta_{jk} (w_j^*(w_k)) = Id$$

Donc

$$Id = {}^t P \cdot Q$$

donc  $Q = ({}^t P)^{-1}$

$$\boxed{Q = {}^t (P^{-1})}$$

2)  $\hat{m} \neq \mu (w_1, \dots, w_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$   
où  $\lambda_i \in K \setminus \{0\}$ ,  $i=1, \dots, n$ .

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}; P \cdot P^{-1} = Id$$

$$Q = {}^t (P^{-1}) = P^{-1} \text{ car mat diagonale.}$$

3)  $\hat{m} \neq \mu (w_1, \dots, w_m) = (v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n)$

$$P = \begin{pmatrix} 1+\lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) f_B: V \xrightarrow{\sim} V^* \quad \text{isomorphie}$$

$$w_j \rightarrow w_j^* \quad \forall j$$

$$f_B(w_j) = w_j^* \quad \forall j.$$

$$\mathcal{D} \xrightarrow{P} \mathcal{D}'$$

$$f_{\mathcal{D}} = f_{\mathcal{D}'} \Leftrightarrow P^{-1} = {}^t P$$

$$\Rightarrow \text{Supposons } f_{\mathcal{D}} = f_{\mathcal{D}'} \Rightarrow$$

$$\forall j, \text{ on a } f_{\mathcal{D}}(w_i) = f_{\mathcal{D}'}(w_j)$$

$$= f_{\mathcal{D}}\left(\sum_{i=1}^n p_{ij} v_i\right) \xrightarrow{w_j^*}$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ij} f_{\mathcal{D}}(v_i) = \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i^*$$

$$\text{de } \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i^* = w_j^*$$

cette égalité mq la mat de passage  $Q$   
entre  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  et  $\{w_1^*, \dots, w_n^*\}$   
est  $P$ .

Donc d'après 1),  
 $Q = {}^t(P^{-1}) = P$ . ie  $P^{-1} = {}^t P$ .

$\Leftarrow$  on suppose  $P^{-1} = {}^t P$ .

$$\begin{aligned} \text{mat } j, f_{\mathcal{D}}(w_j) &= f_{\mathcal{D}}\left(\sum_{i=1}^n p_{ij} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ij} f_{\mathcal{D}}(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i^* = \boxed{w_j^*} = f_{\mathcal{D}'}(w_j) \end{aligned}$$

now savons que

$$(w_1^*, \dots, w_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*) Q$$

$$\text{ où } Q = {}^t(P^{-1}).$$

$$\text{ si } {}^t P = P^{-1} \Leftrightarrow Q = {}^t({}^t P) = P$$

$$\text{dc on écrit } (w_1^*, \dots, w_n^*) = (v_1^*, \dots, v_n^*) P$$

$$= (v_1^*, \dots, v_n^*) \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & p_{22} & \\ & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$w_1^* = \sum_{i=1}^n p_{i1} v_i^*$$

$$\textcircled{8} \quad w_k^* = \sum_{i=1}^n p_{ik} v_i^* = \dots \boxed{w_j^*} \quad \left| \begin{array}{l} \text{dc par def } f_{\mathcal{D}}(w_j) = f_{\mathcal{D}'}(w_j) \\ \Leftrightarrow f_{\mathcal{D}} = f_{\mathcal{D}'} \end{array} \right.$$

$$@ (v_1, v_2) \quad \{w_1, w_2\} \text{ base}$$

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2$$

$$w_2 = \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$(v_1, v_2) P = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2, \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2)$$

$$= (w_1, w_2).$$

$$\begin{matrix} \cancel{\text{Ex}} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$\underline{\text{Ex 3}} \quad f_1, f_2 \quad \underline{\text{Ex 1}}) \text{ tester}$$

Changement de base

$$Q = (t_P)^{-1}$$

E.7 On a les formes linéaires sur  $\mathbb{K}^3$

$$f_1(v) = x + y + z$$

$$f_2(v) = x - y + z$$

$$f_3(v) = x + y - z$$

soit  $D_C = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$D_C^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  sa base dual.

$$f_1 = f_1(e_1) e_1^* + f_2(e_2) e_2^* + f_3(e_3) e_3^* = e_1^* + e_2^* - e_3^*$$

$$f_2 = e_1^* - e_2^* + e_3^*$$

$$f_3 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$$

soit  ~~$D_C$~~  le déterminant des formes linéaires

$f_1, f_2, f_3$  de la  $D_C^*$  est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{de } \{f_1, f_2, f_3\}$$

est une base de  $(\mathbb{K}^3)^*$ .

2) soit  $\{v_1, v_2, v_3\}$  la base anti-duale,  $f_j(v_i) = d_{ij}$

$$v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$f_j(v_1) = f_{1j}$$

$$f_1(v_1) = (e_1^{+} + e_2^{+} - e_3^{+}) (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \quad \boxed{[2M]} \quad H^3 \quad (H^3)$$

$$= \alpha_1' + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \quad | \quad (a)$$

$$f_2(v_4) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \quad (2)$$

$$f_3(v_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$(3) - (2) \Rightarrow 2 \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{2} (e_1 - e_3)$$

$$f_1(v_2) = (e_1^* - e_2^* + e_3^*) (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$$

$$\begin{cases} f_2(v_2) = \\ f_3(v_2) = \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 =$$

$$f_1(v_3) =$$

$$f_2(v_3) =$$

$$f_3(v_3)$$

$$\Rightarrow v_3 =$$

$$\mathcal{D}_c \downarrow P? \\ v_1, v_2, v_3 \}$$

→ si  $P$  le mat de passage, entre 2 bases dans  $K^3$  et  $Q$  celle entre les bases duals de  $(K^3)^*$  alors (cf ex 1)  $P$  et  $Q$  st reliés tg

$$Q = t(p^{-1})$$

$$\Leftrightarrow P = (\neg Q)^{-1}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & +1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{c} 2 \ 2 \ -2 \\ 0 \ -2 \ 2 \\ 0 \ 0 \ 2 \end{array}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \\ 0 \ -2 \ 2 \\ 0 \ 0 \ 2 \end{array}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \\ 0 \ +2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 2 \end{array}}$$

$$({}^t Q)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} (e_1 - e_3)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} (e_2 + e_3)$$

Ex 9 soit  $E = K_m[x]$ . Montrer la famille  $\{f_0, \dots, f_n\}$  est une base de  $E^*$  et donner la base anti-duale lors:

1)  $f_i(p) = p(x_i)$  où  $x_0, \dots, x_n$  sont évidemment distincts de  $K$ .

• 2)  $f_i(p) = p^{(i)}(0)$

i)  $f_i : E \longrightarrow K$        $x_i = X^i$   
 $P \longmapsto f_i(P) = P(x_i)$

soit  $\mathcal{D} = \{1, X, \dots, X^n\}$  une base standard de  $E$  et sa base duale  $\mathcal{D}^*$ .

Si finé,  $f_i = f_i(e_0)e_0^* + f_i(e_1)e_1^* + \dots + f_i(e_n)e_n^*$

La matrice de  $f_i$  dans  $\mathcal{D}^*$  est

$$\begin{pmatrix} f_0(e_0) & f_1(e_0) & \dots & f_n(e_0) \\ \vdots & f_1(e_1) & \ddots & \vdots \\ f_0(e_n) & f_1(e_n) & \dots & f_n(e_n) \end{pmatrix} = Q$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

mat de Vandermonde.

$\det(Q) = \det$  de Vandermonde.

$\det(Q) = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0$  car  $x_i$  sont distincts.

La base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de  $E$  anti-duale à  $\mathcal{D}$  est associée à la matrice de passage  $P$  telle que

$$Q = {}^t P^{-1} \text{ ie } P = {}^t Q^{-1}.$$

[ "à la main" ]       $v_1 = ?$

$$f_i(v_1) = \quad 0 \leq i \leq n$$

$$f_1(v_1) =$$

$$v_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

$$f_0(v_0) = \left( f_0(e_0)e_0^* + f_1(e_1)e_1^* + \dots + f_n(e_n)e_n^* \right)'(v_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_0(v_0) = (f_0(e_0)e_0^* + f_1(e_1)e_1^* + \dots + f_n(e_n)e_n^*)_{(a_0 e_0 + \dots + a_n e_n)}$$

$$f_0(v_0) = a_0 f_0(e_0) + a_1 f_0(e_1) + \dots + a_n f_0(e_n) = 1$$

$$f_2(v_0) = a_0 f_2(e_0) + a_1 f_2(e_1) + \dots + a_n f_2(e_n) = 0$$

⋮

$$f_m(v_0) = a_0 f_m(e_0) + a_1 f_m(e_1) + \dots + a_n f_m(e_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \times 1 + a_1 \times x_0 + \dots + a_n x_0^m = 1 \\ a_0 \times 1 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ a_0 \times 1 + a_1 x_m + \dots + a_n x_m^m = 0 \end{cases}$$

$N(x_0, x_1, \dots, x_m)$  la mat de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} & a_0 \\ & \vdots \\ & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis  $f \in F^\perp \cap G^\perp$

$$\Leftrightarrow f \in F^\perp \quad \forall x \in F, f(x) = 0$$

$$\text{et } f \in G^\perp \quad \forall y \in G, f(y) = 0.$$

Ex 17 soit  $E @, FG$  ser de  $E$  ou  $E^\perp$ .

$$\text{Dmq } \boxed{a} \quad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$F, G \subseteq E$ .

$$(F+G) \supseteq F \quad , \quad F+G \supseteq G$$

sit  $f \in (F+G)^\perp$ .

$$\forall v \in F+G, f(v)=0.$$

comme  $F \subseteq F+G$ , on a

$$\forall v \in F, f(v)=0 \quad \text{ie } f \in F^\perp.$$

$$\text{et } \forall v \in G, f(v)=0 \quad \text{ie } f \in G^\perp$$

$$\Rightarrow (F+G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp.$$

soit  $z \in F+G$  ie  $z = x+y \in F+G^1$  a) Mg  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$$f(z) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0. \quad F \cap G \subseteq F \quad \text{et} \quad F \cap G \subseteq G$$

Puis  $f = 0$ ,  $F+G$  ie

$$f \in (F+G)^\perp$$

$$\text{dc } F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp.$$

$$\Rightarrow F^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp \quad \text{d'après b)} \\ \text{idem } G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

$$\Rightarrow F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

$$\text{Ainsi } (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

b)  $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$  trivial.

c)  $F \subset F^{\perp\perp}$

$$x \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall f \in F^\perp, f(x) = 0$$

$$\forall y \in F \quad \forall f \in F^\perp, f(y) = 0 \Rightarrow y \in (F^\perp)^\perp$$

soit  $z \in F+G$  ie  $z = x+y \in F+G$ , a) Mq  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$$f(z) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0. \quad F \cap G \subseteq F \quad \text{et} \quad F \cap G \subseteq G.$$

Puis  $f = 0$ ,  $F+G$  ie

$$f \in (F+G)^\perp$$

$$\text{et } F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp.$$

$$\Rightarrow F^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp \quad \text{d'après b)} \\ \text{idem } G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

$$\Rightarrow F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

$$\text{Ainsi } (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

b)  $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$  trivial.

c)  $F \subset F^{\perp\perp}$

$$x \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall f \in F^\perp, f(x) = 0$$

$$\forall y \in F \quad \forall f \in F^\perp, f(y) = 0 \Rightarrow y \in (F^\perp)^\perp$$

$$\underline{\text{Ex 22}} \quad u: \mathbb{R}_m \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}_m[x].$$

calculator  $t_u(\lambda)$

$$a) \lambda: P \mapsto P(0)$$

$$b) \lambda: P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$$

$$\mathbb{R}_m[x] \xrightarrow{u} \mathbb{R}_m[x]$$

$$\begin{matrix} & & \downarrow \lambda \\ t_u(\lambda) & \cdots \cdots \cdots & \downarrow \lambda \\ & & \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[x], t_u(\lambda)(P) = \lambda \cdot u(P)$$

$$a) \lambda: P \mapsto P(0)$$

$$t_u(\lambda)(P) = \lambda(u(P)) = \lambda(P) = P(0).$$

$$b) \lambda: P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$$

$$\begin{aligned} t_u(\lambda)(P) &= \lambda(u(P)) = \lambda(P) \\ &= \int_0^1 P'(t) dt = P(1) - P(0) \end{aligned}$$

Ex 23 soit  $E, F$  2 espaces de dimension finie,  
soit  $f \in \mathcal{L}(E, F) : M_q$

$$1) (\text{im } f)^+ = \ker {}^t f ; (\ker f)^\perp = \text{im } {}^t f.$$

Strat: double inclusion.

$$\xrightarrow{a \subseteq b} \text{soit } \lambda \in (\text{im } f)^+,$$

$$\text{alors } \forall x \in E, \lambda(f(x)) = 0$$

$${}^t f(\lambda)(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

de  ${}^t f(\lambda)$  est le morphisme nul ie  $\lambda \in \ker {}^t f$ .

$$\xrightarrow{b \subseteq a} \text{de } (\text{im } f)^\perp \subseteq \ker {}^t f.$$

$$\lambda \in \ker {}^t f.$$

$${}^t f(\lambda) = \lambda \circ f = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda$  s'annule sur  $\text{Im } f$

$$(\forall x \in E, (\lambda \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \lambda(f(x)) = 0)$$

$$\lambda \in (\text{Im } f)^\perp \text{ d'où } \ker {}^t f \subseteq (\text{Im } f)^\perp$$

- b)  $\text{Mg } (\ker f)^+ = \text{Im } {}^t f$ . signifie que  $\alpha$  se factorise comme suit
- $$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta} & F \\ \alpha \downarrow & & \\ K & & \text{i.e. } \exists \beta \in F^* \\ & & \alpha = \beta \circ f. \end{array}$$
- soit  $\alpha \in \text{Im } {}^t f$ ,  $\exists \beta \in F^*$ ,
- $$\alpha = {}^t f(\beta) = \beta \circ f$$
- soit  $x \in L$  tq  $f(x) = 0$
- $$\Leftrightarrow x \in \ker f$$
- on a  $\alpha(x) = \beta \circ f(x) = \beta(f(x))$
- $$= \beta(0) = 0$$
- Donc  $\alpha$  s'annule en  $\ker f$  i.e.  $\alpha \in (\ker f)^\perp$
- $\rightarrow$  R' t'inclu connu.
- $$(\ker f)^\perp \subseteq \text{Im } {}^t f.$$
- soit  $\alpha \in (\ker f)^+$ , mg  $\alpha \in \text{Im } {}^t f$
- Considérons  $L \xrightarrow{{}^t f} \text{Im } f \subseteq F$ .
- soit  $\beta : \text{Im } f \rightarrow K$  df  $\beta$  V $y \in \text{Im } f$ ,
- $$\beta(y) = \alpha(x)$$
- si
- $y = f(x)$
- 
- alors
- $f(x) = f(x')$
- $\Leftrightarrow f(x - x') = 0$
- 
- $\Leftrightarrow x - x' \in \ker f.$
- comme  $\alpha = 0$   $\ker f$  on a,  $\alpha(x) = \alpha(x')$   
 $\alpha(x - x') = 0$ .
- a)  $\text{Im } f \neq F$ , soit  $W$  un supplémentaire  $\text{Im } f$ .
- $$F = W \oplus \text{Im } f.$$

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1(y) & \text{si } y \in \text{Im } f \\ 0 & \text{si } y \in W. \end{cases}$$

mit  $a \in E$ ,  $\beta.f(a)$ ,  $y = f(a)$ .

$$\beta.f(a) = \beta(y) = \lambda(a)$$

Vérifier  $\beta$  est une forme linéaire sur  $F$ .

Suffit montrer  $\beta$  est linéaire sur  $\text{Im } f$ . (<sup>elle</sup> ~~est~~  $\in W$ )

soit  $y_1, y_2$  dans  $\text{Im } f$ .

$$\exists x_1, x_2 \in \text{Im } f \quad f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

$$f(y_1 + y_2) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2).$$

$$= \beta(y_1) + \beta(y_2)$$

soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lambda y = \lambda a$$

$$\Rightarrow \beta(\lambda y) = \lambda(f(a)) = \lambda \lambda(a) = \lambda \beta(y).$$

Donc  $\beta \circ f = {}^t f(\beta) = \lambda \Rightarrow \lambda \in \text{Im } {}^t f$   
 de  $(\ker f)^{\perp} \subseteq \text{Im } {}^t f$ .

$$\Rightarrow \text{Im } {}^t f = (\ker f)^{\perp}.$$

2)  $f$  surjective  $\Leftrightarrow$   $\text{Im } f$  injective ;

$f$  injective  $\Leftrightarrow$   $\text{Im } f$  surjective.

Mg  $f$  surjective  $\Leftrightarrow (\text{Im } f)^\perp = \{0\}$ .

•  $\Theta$   $f$  surjectif  $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$  est

alors  $(\text{Im } f)^\perp = F^\perp = \{0\}$

car si  $x \in F^\perp$  tq

$$f(x) = 0 \quad \forall y \in F$$

$$\text{alors } x = 0$$

$\Theta$   $(\text{Im } f)^\perp = \{0\}$ , la forme nulle est la seule q s'annule sur  $\text{Im } f$ .  
donc  $\text{Im } f = F$ .

sinon  $\text{Im } f \neq F$ .

soit  $W$ ,  $\text{Im } f \oplus W = F$ .

$\{w_1, \dots, w_n\}$  une base de  $W$ ,  
soit  $\beta$  la forme définie sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\beta(x) = 0$$

$$\beta(w_i) = \pm k_i \quad \text{tq } x \in \text{Im } f$$

Alors  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \in (\text{Im } f)^\perp$

$$\text{dc } \dim(\text{Im } f)^\perp = 0$$

$\Rightarrow \text{Im } f = F \Leftrightarrow f$  est surjectif.

$f$  surjectif  $\Leftrightarrow (\text{Im } f)^\perp = \{0\} = \ker f \Leftrightarrow f$  injectif

(Mg)  $f$  injectif  $\Leftrightarrow (\ker f)^\perp = E^\perp$

$\Rightarrow f$  injectif  $\Rightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow (\ker f)^\perp = \{0\}^\perp = E^\perp$

$\Leftarrow$  si  $(\ker f)^\perp = E^\perp$

$\forall \alpha \in E \mapsto K$ -linéaire  $\forall x \in E$ ,  
 $f(x) = 0 \quad \alpha(x) = 0$

soit  $n \neq 0 \in E$ ,

$$f(n) = 0$$

$\lambda n \in W = E$ .

$\lambda : E \rightarrow K$

$$\lambda(n) = 1$$

$$\lambda_W = 0$$

$$\lambda(n) \neq 0$$

$$\Rightarrow (\ker f)^{\perp} = E^*$$

$$\Rightarrow \ker f = 0.$$

3)  $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(t_f)$

soit  $B_E, B_F$ , des bases de  $E$  et  $F$ .

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rang} \operatorname{Mat}(f, B_E, B_F) = M$$

$$\operatorname{rg}(t_f) = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}(t_f, B_F^*, B_E^*) = L$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(t_f)$$

$$E \xrightarrow{f} F$$

$$F^* \xrightarrow{t_f} E^*$$

$$E^{**} \xrightarrow[t_f]{\quad} F^{**}$$

1) 5) + exerc 1, exerc 2, exerc 6.

$f$  injectif  $\Leftrightarrow (\ker f)^{\perp} = E^*$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} t_f = E^*$$

$\Leftrightarrow t_f$  est injectif.

Ex 23  
5) soit  $E = F$ . alors  $f$  est inversible

si  $\forall x \in E$   $f(x)$  est inversible, dans ce cas  
 $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$ .

$$E \xrightarrow{f} E.$$

Mq  $f$  inversible si  ${}^t f$  inversible.

D'après 2)

$f$  inversible  $\Leftrightarrow f$  est injectif et surjectif.

$f$  injective  $\Leftrightarrow {}^t f$  surjective.

$f$  surjective  $\Leftrightarrow {}^t f$  injective

$\Updownarrow$   
 $f$  inversible.

•  $\Rightarrow$   $f$  inversible  $\Rightarrow \exists f^{-1}: E \rightarrow E$

l'inverse de  $f$  est  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ .

$${}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t f \circ {}^t(f^{-1})$$

$$= {}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}.$$

iff,

$\Rightarrow {}^t f$  est inversible.

$f$  est un isomorphisme.

$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$$

ceci équivaut à  $\text{mg}$

$${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = \text{Id}$$

•  $\Leftarrow$   $f$  inversible  $\Rightarrow \exists g: E \xrightarrow{*} E$  on a  ${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t \text{Id} = \text{Id}$ .

$$f \circ g \circ {}^t f = \text{Id} = {}^t f \circ g.$$

$$\text{Dém}, {}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = {}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t \text{Id} = \text{Id}$$

ceci implique le morphisme réciproque de

$$g \text{ est } {}^t(f^{-1}).$$

(19)

$$\text{Donc } {}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$$

$$4) E \xrightarrow{f} E$$

$$\text{Mg } \underline{\underline{t(f)}} = f. \quad \text{identifiable.}$$

$$F^* \xrightarrow{+f} E^*$$

$$E^{**} \xrightarrow{t f} F^{**}$$

(isomorphismes)

identifiables

canoniques de  $E$  &  $F$

resp à l'isomorphisme bilinear.

$$\uparrow \beta_E \quad \uparrow \beta_F$$

$$E \xrightarrow{f} F$$

$$\text{Aisons-mons } \boxed{t(f) \circ \beta_E = \beta_F \circ f.} ?$$

$$E \xrightarrow{\beta_E} E^{**}$$

$$n \mapsto \beta_E(n)$$

$\beta_E(n)$  est une forme linéaire sur  $E^{**}$ .

$$\forall f \in E^*, \quad \beta_E(n)(f) = f(n).$$

i.e.  $\beta_E(n)$  est l'évaluation des formes linéaires dans  $E^{**}$  en  $n$ .]

$(e_i)$  base de  $E$ .

$$(e_i) \text{ tq } \forall i \quad e_i = \beta_E(e_i)$$

$$E \xrightarrow{t f} F^{**}$$

$$s \in E^{**} \text{ et } +f(s) \in F^{**}$$

$$\text{soit } \alpha \in F^* \rightarrow \text{et } t f(s)(\alpha) =$$

$$= s(t f(\alpha)) + f(\beta_E(e_i))(\alpha)$$

$$\text{Vidant } t f(e_i)(\alpha) = e_i(+f(\alpha)) = e_i(\alpha \circ f)$$

$$= \beta(e_i)(\alpha \circ f) = \alpha \circ f(e_i) = \alpha(f(e_i))$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } +f(\beta_E(e_i))(\alpha) &= \alpha(f(e_i)) \\ &= \beta_F(f(e_i))(\alpha). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \beta_F^{-1} \circ t f \circ \beta_E(e_i) = f(e_i)$$

$$\begin{array}{c} F^* \xrightarrow{+f} E \\ \alpha \mapsto f(\alpha) = \alpha \circ f \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \xrightarrow{t f} F^* \\ \beta_E \uparrow \qquad \qquad \downarrow \beta_F^{-1} \\ E \xrightarrow{f} F \end{array} \right.$$

Ex 6  $E$  de dim finie  $n$ . sur  $K$ .

$$l_1, \dots, l_n \in E^*$$

Considérons l'application

$$\ell: E \rightarrow K^n$$

$$x \mapsto \phi(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$$

$\phi$  est  $K$ -linéaire.

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= (l_1(x+y), \dots, l_n(x+y)) \\ &= (l_1(x)+l_1(y), \dots, l_n(x)+l_n(y)) \\ &= \phi(x) + \phi(y) \end{aligned}$$

$$\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x).$$

$$\ker(\phi) = \{x \in E \mid l_1(x) = l_2(x) = \dots = l_n(x) = 0\}$$

soit  $\{e_1, \dots, e_m\}$  une base fixée dans  $E$   
et  $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$  sa dual.

$$x = \sum a_i e_i \in E$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = (A_{ij})$$

21

$$\phi(x) = Ax.$$

$$\text{soit } l_i = \sum a_{ji} e_j^*$$

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \sum a_{ji} e_j^* \left( \sum_k x_k e_k \right) \\ &= \sum_{j,k} a_{ji} x_k e_j^*(e_k) = \sum_k a_{ki} x_k \end{aligned}$$

$$l_i(x) = \sum_k a_{ki} e_k^*(x)$$

$$l_i(x) = \sum_k ({}^t A)_{ik} x_k$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\forall i, l_i = \sum_k ({}^t A)_{ik} e_k^*.$$

$$\phi(x) = \quad \quad \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$A$  ou  ${}^t A$  est la mat de  $l_1, \dots, l_n$  de la  
base dual des  $l_i$ .

$$\{l_1(n) = \dots = l_s(n)\} = \{\infty\}$$

$\Leftrightarrow \phi$  est injectif

$\Leftrightarrow \phi$  est bijectif

(raison de

dim

car

$$\dim E = \dim K^n$$

$\Leftrightarrow A$  est inversible.

$\Leftrightarrow A$  est la matrice de  $\{l_1, \dots, l_n\}$

de la base  $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow \{l_1, \dots, l_n\}$  base de  $E^*$ .

Ex 11  $E$  un  $K$  espace de dimension finie  $n$ .  
 $\phi, \psi \in E^*$  tq

$\ker \phi = \ker \psi$ .

si  $\ker \phi = \ker \psi = E$ .  
 alors  $\phi = \psi = 0$ , le fl nulle sur  $E$ .

Donc  $\phi$  et  $\psi$  st proportionnels.

Supposons  $\ker \psi = \ker \phi \subset E$

alors  $\psi, \phi : E \rightarrow K$ , apply surjectives.

soit  $W = \ker \phi = \ker \psi$

$$(\dim W = 1)$$

d'après TH du rang

Donc  $W = \ker \phi = \ker \psi$  et de dimension  $n-1$   
 $(n = \dim E)$

soit  $v_0 \in E$ ,  $E = W \oplus K_{v_0}$ .

soit  $x \in E$  un vecteur de  $E$ ,

$\exists \lambda \in K$ ,  $x = \lambda v_0 + w$ ,  $w \in W$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(\lambda v_0 + w) \\ &= \lambda \phi(v_0) + \phi(w) = \lambda \phi(v_0)\end{aligned}$$

$$\text{De m } \psi(x) = \psi(\lambda v_0 + w)$$

$$= \lambda \psi(v_0) + \psi(w) = \lambda \psi(v_0).$$

on sait que  $\phi(v_0) \neq 0$  et  $\psi(v_0) \neq 0$ .

$$\phi(x) = \frac{\phi(v_0)}{\psi(v_0)} \psi(x) \Rightarrow \boxed{\phi(x) = \mu \psi(x)}$$



$$\frac{\phi(x)}{\phi(v_0)} = \lambda = \frac{\psi(x)}{\psi(v_0)}$$

Ex 6 (M)  $\{e_1, \dots, e_m\}$  base  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{x \mid l_i(x) = \dots = l_n(x)\} = \{0\}.$$

$$\phi: E \rightarrow K^n$$

$$x \mapsto \phi(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$$

$\phi$  linéaire.

$$\ker \phi = \{x \mid l_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

hypothèse  $\Leftrightarrow \phi$  est injective  $\Leftrightarrow$  bijective

$\Leftrightarrow$  la matrice de  $\phi$  à une base

inversible.

on ( $\dim E = \dim K^n$ )

si  $B$  est une base de  $E$ .

bc la base canonique de  $K^n$

alors  $\text{mat}(\phi, B, B_c)$

Alors  $M$  est la matrice des vecteurs de  $B^*$

$$l_1 \quad \dots \quad l_n$$

$$M = \begin{pmatrix} & & & \\ \vdots & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

## TD 2: Formes bilinéaires & quadratiques

Ex 1 Mg formes bilinéaires  $\rightarrow$  sym?  $\rightarrow$  alt?  $\rightarrow$  mat de  $f$ ?

$$1) E = \mathbb{R}^n, f(x, y) = (\sum (x_i + y_i))^2 - (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2.$$

$$l_1: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow l_1(x) = x_1 + \dots + x_n$$

$$l(x+y) = (x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n) = l(x) + l(y)$$

$$l(\lambda x) = (\lambda x_1) + \dots + (\lambda x_n) = \lambda l(x).$$

$$f(x, y) = l(x+y)^2 - l(x)^2 - l(y)^2$$

$$= (l(x) + l(y))^2 - l(x)^2 - l(y)^2$$

$$= 2 l(x) \cdot l(y)$$

$$f(x+x', y) = (2 l(x+x')) \cdot l(y)$$

$$= (2 l(x) \cdot l(x')) \cdot l(y).$$

$$= 2 l(x) \cdot l(y) + 2 l(x') \cdot l(y)$$

$$= f(x, y) + f(x', y)$$

A ...

→ forme quadratique  $\Leftrightarrow$

$$q(x) = f(x, x) = 2 f(x).$$

$$q(x) = 2 (x_1, \dots, x_m)^2.$$

→ base convenable ?

soit  $B_C$  base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

$$M = \text{mat}(f, B_C) = \text{mat}(q, B_C)$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + \dots + x_m^2 + 2 x_i x_j \right)$$
$$M = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{dégénérée}}{\text{det}(M)=0}$$

$$f((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = a_{11} x_1 y_1 + \dots + a_{mm} x_m y_m + \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j + a_{ij} x_j x_i$$
$$\text{ikj}$$

D) diviser par 2 les termes diagonaux.

3) à Nota des précédents  
 $E = \mathbb{R}^m$ ,  $f(x, y) = (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$

$$f(x, y) = f(x)^2 - f(y)^2 = (f(x) - f(y))(f(x) + f(y))$$
$$=$$

•  $f$  est bilinéaire,  $f(x-x', y) = f(x, y) - f(x', y)$   
 $\forall x \in E$ ,  $f(x, 0) = 0$

Preuve  $f(x, y+0) = f(x, y) + f(x, 0) \stackrel{!!}{=} 0$

$$f(x, y)$$

$$f(x, 0) = (\sum x_i)^2 \neq 0 \quad \forall x \in E.$$

$$\text{si } n = (1, 0, \dots, 0)$$

|| si un argument est nul alors la forme bilinéaire s'annule nécessaire

mais pas nécessairement suffisant.

$$5) \quad f_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto \det(M)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

$$M_2(\mathbb{R}) \text{ av dim } \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Mat}_{Q_E}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \times R}$$

$$q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}((a+d)^2 - (a-d)^2) - \frac{1}{4}((b+c)^2 - (b-c)^2)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~calculer  $Q^{-1}$~~

Calcul de  $Q^{-1}$

$$\left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\sim \left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right|$$

Donc une base orthogonale est

$$\left( \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Rang, signature.

Le rang est nbr de carres non nul ds diagonalisation de la signature  $(p, q)$   
 nbr carres coeff  $> 0$  :  $p$   
 $< 0$  :  $q$

1) rang

2)  $2(x-y+2z)^2 - (y-2z)^2 + 6y^2$   
↳ rang = 3 signature : (2, 3)

3)  $\frac{1}{4} \left( \underline{\quad} \right) - 2z^2$

↳

4) ~~4~~ ~~rang~~

5) ~~rang~~ = 4, sign = (2, 2)

Ex R<sup>\*</sup> un produit scalaire <sup>sur E</sup> wt  
FBS dif. positive.

(ie signature (n, 0))

si  $n = \dim E$ .

1. M de Gauss pr diagonaliser.

$$f(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = f((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))$$

→ f symétrique? → le coeff devant  $x_1, y_3$  est égal au coeff devant  $x_3 y_2$  ⇒  $\lambda = \mu$ .

$$\begin{aligned} q(n) &= x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3\lambda x_3)^2 - (2x_2 + 3\lambda x_3)^2 \\ &\quad + 6x_2^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + 2x_2 + 3\lambda x_3)^2 + 2x_2^2 \\ &\quad + (3-9\lambda^2)x_3^2 - (2\lambda x_2 x_3) \end{aligned}$$

$$(x_1 + 2x_2 + 3\lambda x_3)^2 + 2(x_2 - 3\lambda x_3)^2 - (3\lambda x_3)^2$$

$$(x_1 + 2x_2 + 3\lambda x_3)^2 + 2(x_2 - 3\lambda x_3)^2 + (3-9\lambda^2)x_3^2$$

f est un produit scalaire.

$f$  est produit scalaire

$$\sin 3 - 27\lambda^2 > 0 \quad \sin 27\lambda^2 < 3$$

$$\sin 9\lambda^2 < 1 \quad \sin (3\lambda)^2 < 1$$

$$\sin -1 < 3\lambda < 1 \quad \text{ie } \lambda \in ]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[.$$

Dc  $f$  est  $\textcircled{P}$  si  $\lambda = \mu \in ]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$

→ forme quadratique  $\Leftrightarrow$  3) à Nota précédent  
 $q(x) = f(x, x) = 2 f(x)$ .  $E = \mathbb{R}^m$ ,  $f(x, y) = (\sum x_i)^2 - (\sum y_i)^2$ .

$$q(x) = 2 (x_1, \dots, x_m)^2$$

$$f(x, y) = f(x)^2 - f(y)^2 = (f(x) - f(y))(f(x) + f(y))$$

→ base convenable ?

soit  $\beta_c$  base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

$$M = \text{mat}(f, \beta_c) = \text{mat}(q, \beta_c)$$

$$q(x) = \left( x_1^2 + \dots + x_m^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j \right)$$

$$M = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \det(M) = 0 \\ \text{dégénérée} \end{matrix}$$

$$f((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = a_{11} x_1 y_1 + \dots + a_{1m} x_m y_m + \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j + a_{jj} x_j y_i$$

•  $f$  est bilinéaire,  $f(x - x', y) = f(x, y) - f(x', y)$

$$\forall x \in E, f(x, 0) = 0$$

Prouve  $f(x, y + 0) = f(x, y) + f(x, 0) = 0$

$$f(x, y)$$

$$f(x, 0) = (\sum x_i)^2 \neq 0 \quad \forall x \in E.$$

$$\text{si } x = (1, 0, \dots, 0)$$

|| si un argument est nul alors la forme bilinéaire canonique nécessaire

mais pas nécessairement suffisante.

D) diviser par 2 les termes diagonaux.

Ex 1 a)  $E = C_m(\mathbb{R})$ .

$$f(A, B) = \det(A+B) - \det(A-B)$$

si  $f$  est bilinéaire,

on a  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda A, AB) = \lambda^2 f(A, B).$$

$\forall A, B \in E$ ,

$$\text{Ainsi } f(\lambda A, \lambda B) = \det(\lambda(A+B)) - \det(\lambda(A-B))$$

$$= \lambda^n \det(A+B) - \lambda^n \det(A-B)$$

$$= \lambda^n (\det(A+B) - \det(A-B))$$

$$= \lambda^n f(A, B).$$

Donc on devra avoir :

$$\lambda^n f(A, B) = \lambda^2 f(A, B).$$

Si  $f$ , on prend  $A, B$  tq

$$f(A, B) \neq 0,$$

@  $A = B$  inversible

On a  $\lambda^n = \lambda^2$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

ce q équivaut à  $n=2$ .

• si  $n=2$ , mq  $f$  est bilinéaire

Posons  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = f(A, B)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ a_3-b_3 & a_4-b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 \\ a_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 \\ b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A-B) = |A| + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} - |B|$$

Condit nécessaire

$$f(A, B) = 2 \left( \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} \right)$$

suffisante

$$\textcircled{ab} \quad f(A+A', B) = f(A, B) + f(A', B).$$

$$f(\lambda A, B) = \lambda f(A, B).$$

FB:

$f: E \times E \rightarrow K$   
bilinéaire

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

$n$  dkt  $\rightarrow$  deg  $n$ .  $a_{ij}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

5. trivial

$$E = \mathbb{C}^2, f(x, y) = |xy|$$

$$= \sqrt{xy \bar{y}}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\text{M1}) \quad f(\lambda x, y) = \operatorname{Re}((\lambda x)\bar{y}) = \operatorname{Re}(\lambda x \bar{y}) = \lambda \operatorname{Re}(x \bar{y})$$

$$= \lambda f(x, y).$$

$$x', y \in \mathbb{C}, f(x+x', y) = |(x+x')y|$$

$$= |xy + x'y|$$

$$\leq |xy| + |x'y|$$

$\Rightarrow f$  n'est pas bilinéaire.

$$\begin{aligned} \text{für } f(x, y) &= |\operatorname{Re} xy| = |x||\operatorname{Re} y| \\ &= |x| |ay| \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(x \bar{y})$$

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(x \bar{y})$$

$$x, y \in \mathbb{C}, f(x+y, y) = \operatorname{Re}((x+y)\bar{y})$$

$$= \operatorname{Re}(x \bar{y} + y \bar{y})$$

$$= \operatorname{Re}(x \bar{y}) + \operatorname{Re}(y \bar{y})$$

$$= f(x, y) + f(y, y)$$

$$f(x, y+ay') = \operatorname{Re}(x(\bar{y} + \bar{a}\bar{y}'))$$

$$= \operatorname{Re}(x \bar{y} + x \bar{a} \bar{y}') = \operatorname{Re}(x \bar{y}) + \operatorname{Re}(x \bar{a} \bar{y}')$$

$$= f(x, y) + f(x, y')$$

$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$f(yx) = \operatorname{Re}(y\bar{x}) = \operatorname{Re}(\bar{y}\bar{x}) = \operatorname{Re}(\bar{y}\bar{x}) \\ (\bar{y}\bar{x} = \overline{xy}) = f(xy)$$

$$g(n) = \operatorname{Re}(n\bar{n}) = n\bar{n}$$

$$E = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \operatorname{Im}(x\bar{y})$$

$$f(n+m, y) = \operatorname{Im}((n+m)\bar{y}) \\ = \operatorname{Im}(n\bar{y} + m\bar{y}) \\ = \operatorname{Im}(n\bar{y}) + \operatorname{Im}(m\bar{y}) \\ = f(n, y) + f(m, y)$$

$$f(\lambda n, y) = \operatorname{Im}(\lambda n\bar{y}) \\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \operatorname{Im}(n\bar{y})$$

$$f(x, y) = \operatorname{Im}(x\bar{y}) \\ = \operatorname{Im}(x\bar{y})$$

$$f(y, n) = \operatorname{Im}(y\bar{n}) = \operatorname{Im}(\bar{n}\bar{y}) \\ = -\operatorname{Im}(n\bar{y})$$

**[Ex 3]**  $f: E \times E \rightarrow K$  une forme bilinéaire  
de  $G$ . On a la famille  $f$  pour la matrice  $A$ .

$\mathcal{D}'$ ,  $P$  mat de passage de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{D}'$ .

$x$ : & vecteur colonne des coord de  $n$  dans  $\mathcal{D}$

Pos  $f(n, y) = {}^t X A Y$

$x'$  et  $y'$  de base  $\mathcal{D}'$ !

$$X = P X', \quad Y = P Y'$$

Donc  $f(n, y) = {}^t X A Y \\ = {}^t (P X') A (P Y') \\ = {}^t X' {}^t P A P Y'$

Et par ailleurs on a

$$= {}^t x' A' y'$$

et  $x' y'$ , on a

$$\# {}^t x' A' y' = {}^t x' P A \Phi y'$$

Donc  $A' = {}^t P A \Phi$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = {}^t P A \Phi$$

$$A' = \left( \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$$

comme  $-fxn$

Ex 2. Ex 3  $\rightarrow$  utiliser linéarité de  $u$ .

$$B(x, y) = g(u(x), y) \rightarrow$$

$$= {}^t (AX) \Phi y$$

$$= {}^t x \underbrace{{}^t A \Phi}_{} y$$

La matrice de  $B$  est donc  ${}^t A \Phi$

$$r(x, y) = g(x, u(y))$$

$$= {}^t x \Phi A y = {}^t x \underbrace{\Phi A y}_{} \quad$$

de la mat de  $r$  est  $\Phi A$ .

$${}^t B = -B$$

antisymétrique?

@  ${}^t B = B$  symétrique?

aut 2x2

$\mathcal{G}$  symétrique et  $\mathcal{G}$  alterné

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t(\mathcal{G} A) = {}^t A \mathcal{G} \quad (1) \\ {}^t(\theta A) = -GA \quad (2) \end{array} \right.$$

$\mathcal{G}$  mat de g ds  $\mathcal{D}_C$  où  $E = \mathbb{R}^2$ .

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$${}^t u A = {}^t A \mathcal{G}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -a+c \\ b+d & -b+d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{-a+c = b+d}$$

$$(2) {}^t \mathcal{G} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$${}^t(GA) = \begin{pmatrix} a-c & a+c \\ b-d & b+d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{a+c = b-d}$$

$$\Rightarrow a-c = -(a-c) \Rightarrow a-c=0 \Rightarrow \underline{a=c}$$

$$\Rightarrow b+d = b-d \Rightarrow d = -b.$$

$$2c = 2d \quad \& \quad c=d.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a \mathcal{G}, \quad \underline{a \in \mathbb{R}}$$

Donc  $u$  est endomorphisme de  $\mathcal{G}$  dt  
sa mat ds  $\mathcal{D}_C$  est  $a \mathcal{G}$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\text{si } A = a \mathcal{G}, \quad a^t \mathcal{G} \mathcal{G} = a^t \mathcal{G} G$$

$${}^t(GA) = GA$$

$$A = a \mathcal{G}, \quad a {}^t(G \mathcal{G}) = {}^t(GA)$$

$$-GA = -a \cdot GG.$$

B05 Diagonalise FB de gours.  
Rang ? signature ?

⑤ Rang : nbr de carrés non nul de diagonalisation de la signature  $(p, q)$ .

- nbr carrés coeff > 0 :  $p$
- nbr carrés coeff < 0 :  $q$

$$\begin{aligned} 1) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx) \\ &= [x^2 - 4(xy + yz)] + y^2 + z^2 - 4yz \\ &= [x^2 - 2x(2y + 2z)] + y^2 + z^2 - 4yz \\ &= [x^2 - 2y^2 - 2z^2]^2 - (2y + 2z)^2 + y^2 + z^2 - 4yz \\ &= [x^2 - 2y^2 - 2z^2]^2 - 3y^2 - 3z^2 - 12yz \\ &= A - 3(y^2 + z^2 + 4yz) \\ &= A - 3(y^2 + 4yz) - 3z^2 \\ &= A - 3(y^2 + 2yz) - 3z^2 \\ &= A - 3(y^2 + 2yz + 2z^2 - 2z^2) - 3z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A - 3(y + 2z)^2 + 9z^2 \\ &= (x^2 - 2y - 2z)^2 - 3(y + 2z)^2 + 9z^2 \\ &= x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2 \\ &= (x' y' z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rang} = 3 \quad (\text{nbr carrés non-nul}) \\ (p, q) = (2, 1) \end{array} \right.$$

rang =  $p+q$ ,

(Frap 1)

$$3) \circ = 2x^2 + 6y^2 - 4xy + 8xz, \quad Q(x,y,z) = [x^2 + 2y^2 - 6z^2]$$

$$\circ = 2(x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz).$$

$$\circ = 2(x^2 - 2xy + 4xz) + 6y^2. \quad \text{enlever facteur}$$

$$\circ = 2(x^2 - 2x(y-2z)) + 6y^2$$

$$\circ = 2\left(x^2 - 2x(y-2z) + (y-2z)^2 - (y-2z)^2\right) + 6y^2$$

$$\circ = 2((x+y-2z)^2 - 2(y-2z)^2 + 6y^2$$

$$\circ = 2A + 8z^2 + 8yz + 4y^2$$

$$\circ = 2A + 4y^2 + 8yz + 8z^2$$

$$\circ = 2A + 4(y^2 + 2yz + z^2) + 8z^2$$

$$\circ = 2A + 4(y^2 + 2yz + (yz)^2 - (yz)^2) + 8z^2$$

$$\circ = 2A + \frac{4}{2}(y+yz)^2 + 4z^2$$

$$\circ = 2x'^2 + 2y'^2 + 6z'^2 - 6$$

$$\circ = (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } q = 3, \text{ srg}(2,1)$$

$$\text{on a } \begin{cases} x = u - y + 2z \\ y = u + 3z \\ z = v \end{cases}$$

Dans  $\mathbb{D}_C$ ,

$$N = \underline{\text{mat}(q)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de  $q$  est

$$N' = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Not  $P$  la matrice de  
bases on a  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  passage de  $\mathbb{D}_C$  à  $\mathbb{D}$

$$\text{A l'écrit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\text{si } a \neq 0, \quad t(66) = -66,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (GG) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -66$$

Ex 5: Diagonaliser (FB) de Gauss.  
Rang.

$$Q(x, y, z) = \underline{\underline{\quad}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{on a dc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dc} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \cancel{B}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \rightarrow \frac{1}{3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

La base  $\mathcal{D}$  cherchée est  $\mathcal{D}_C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\boxed{\mathcal{D} = \{v_1, v_2, v_3\}}.$$

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 - e_3 \end{cases}$$

② suite.

$$\text{Ex 3) } Q(x, y, z) = xy + yz + 2zx^2$$

~~$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$~~

→ choose  $xy$  ?  
 ~~$\ell_1 = \frac{\partial q}{\partial x}$ ,  $\ell_2 = \frac{\partial q}{\partial y}$ .~~  
 $\ell_1''$

$$\ell_1(x, y, z) = y + 2z$$

$$\bullet \quad \ell_2(x, y, z) = x + z$$

$$\begin{aligned} \ell_1(x) \cdot \ell_2(x) &= (y+2z)(x+z) \\ &= \underbrace{xy + yz + 2zx}_{Q(x, y, z)} + 2z^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (x+y+z)(y+2z) - 2z^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ ((x+y+z) + (y+2z))^2 - ((x+y+z) - (y+2z))^2 \right] - 2z^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ (x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2 \right] - 2z^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{ab = \frac{1}{4} ((a+b)^2 - (a-b)^2).}$$

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= \ell_1(x)y + \ell_2(x)z - 2z^2 \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \left( \ell_1^2 - \ell_2^2 \right) - 2z^2 \end{aligned}$$

$$4) Q = (\ell_1^2 - \ell_2^2) - 2z^2$$

(3)

5)  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \ni M \mapsto \det(M)$ .  
 $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z, t)$$

La forme quadratique est

$$\begin{aligned} \det M = q(x, y, z, t) &= \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = xt - yz \\ &= \frac{1}{4} [(x+t)^2 - (x-t)^2] - \frac{1}{4} [(y+z)^2 - (y-z)^2] \\ &= \frac{1}{4} [(x+t)^2 - (x-t)^2 - (y+z)^2 + (y-z)^2] \\ &\quad \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \end{aligned}$$

→ signature est  $(2, 2)$

→ forme non dégénérée.

Base orthonormale ?

$$\det M = q(x, y, z, t) = \frac{1}{4} [x^2 - y^2 - z^2 + t^2]$$

Le changement de coordonnées s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} n \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} n \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

soit  $\mathcal{B}$  la base de  $\mathbb{R}^4$  les coordonnées  $x, y, z, t$ ,  
la matrice de passage de la base standard  
au  $\mathbb{R}^4$  à  $\mathbb{R}$  est  $P = Q^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\mathcal{B}_C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

base orthonormale

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \\ v_2 = \frac{1}{2}(e_3 + e_4) \\ v_3 = \frac{1}{2}(e_3 - e_4) \\ v_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \end{array} \right.$$

Ex7: Pris gels v/s RS param  $\lambda, \mu$   
(FB) def un produit scalaire n  $\mathbb{R}^3$ .

$$f(x, y) = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 3\lambda x_1 y_3 + 3\mu x_3 y_1.$$

$$q_f(x; x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_2 + 3\lambda x_1^2 + 3\mu x_3^2 x_1?$$

$$q_f = (x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3\lambda x_1 x_3 + 3\mu x_1 x_3) + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= (x_1^2 + 4(x_2 + 3(\lambda + \mu)x_3)x_1) + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= (x_1^2 + 2(x_2 + 3(\lambda + \mu)x_3)^2 - 4(x_2 + 3(\lambda + \mu)x_3)x_1)$$

$$= A^2 - 4x_3^2 - 24(\lambda + \mu)x_2^2 x_3 - 36(\lambda + \mu)^2 x_3^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}(\lambda + \mu)x_3)^2 - (2x_2 + \frac{3}{2}(\lambda + \mu)x_3)^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$= A^2 - 4x_2^2 - 6(\lambda + \mu)x_3 x_2 - 9(\lambda + \mu)^2 x_3^2 + 3x_3^2 + 6x_2^2$$

$$\begin{aligned} &= A^2 + 2x_2^2 - 6(\lambda + \mu)x_3 x_2 + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2\right)x_3^2 \\ &= A^2 + 2(x_2^2 - 3(\lambda + \mu)x_3 x_2) + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2\right)x_3^2 \\ &= A^2 + 2\left[x_2 - \frac{3}{2}(\lambda + \mu)x_3\right]^2 - \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2 x_3^2 \\ &\quad + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2\right)x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 + 2B^2 + \left(3 - \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2 + \frac{9}{2}(\lambda + \mu)^2\right)x_3^2 \\ &= A^2 + 2B^2 + \left(3 + \frac{9}{4}(\lambda + \mu)^2\right)x_3^2 \end{aligned}$$

soit  $A = (a_{ij})$  la mat de  $f$  ds la base canoniq  $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\lambda \\ 0 & 6 & 0 \\ 3\mu & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow f$  FB sym  $\Leftrightarrow A$  sym  
 $\Leftrightarrow \lambda = \mu$ .

$f$  est un produit scalaire  
 $\Leftrightarrow 3 - \frac{27}{4}(2\lambda)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 3 - 27\lambda^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 < \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$$

" "

$$g(x, y) = x_1 y_1 + 10x_2 y_2 + 6x_1 y_2 + \lambda x_3 y_3 \\ - x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

FB sym?

$$\begin{aligned} \text{Non car } g(e_1, e_2) &= 6 \\ g(e_2, e_1) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  n'est pas symétrique

$\Rightarrow$  n'est pas produit scalaire

enot 9  
+ enot 11

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ex 8  $f: E \rightarrow K, f': E' \rightarrow K$ .

$f$  &  $f'$  st équivalents s'  $\exists$   $\varepsilon$  base de  $E$ ,  
 $\varepsilon'$  base de  $E'$  tq  $\text{Mat}(f) = \text{Mat}(f')$

$$A = \text{Mat}_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A' = \text{Mat}_{\varepsilon'}(f') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$A'$  est symm contrainement à  $A$ .

on voit  $f$  &  $f'$  ne st pas équivalentes.

si  $f$  &  $f'$  étais équivalents abus de la base de  $\mathbb{R}^3$ .  
alors  $\exists P$  inversible tq

$$\text{Mat}_\varepsilon(f') = {}^t P \cdot \text{Mat}_\varepsilon(f) \cdot P.$$

$$\underline{\text{Ex 5}} \quad q(n, y, z, w) =$$

$$= 9n^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6ny - 14nz + 18nw \\ + 8zy + 12yw - 4zw.$$

$$= (3n+y - \frac{7}{3}z + 3w)^2 - (y - \frac{7}{3}z + 3w)^2 \\ - 6y^2 - 8z^2 + 8zy + 12zw - 4zw$$

$$= A^2 - y^2 - 6y^2 + \frac{14}{3}yz - (\frac{7}{3}z)^2 - 6yw \\ + 14zw - 9w^2 - 8z^2.$$

$$= A^2 - 7 \left[ y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{7}z - \frac{3}{7}w \right]^2 + 7 \left( \frac{1}{3}z + \frac{4}{7}z + \frac{3}{7}w \right)^2 \\ - (\frac{7}{3}z)^2 + 14zw - 9w^2 - 8z^2.$$

$$= A^2 - 7B^2 + 7 \left( \frac{19}{21}z + \frac{3}{7}w \right)^2 - (\frac{7}{3}z)^2 \\ - 8x^2 + 10zw - 9w^2.$$

$$= A^2 - 7B^2 + \frac{1}{7} \left( \frac{19}{3}z + 3w \right)^2 - (\frac{7}{3}z)^2 - 8x^2 + 10zw - 9w^2$$

$$= A^2 - 7B^2 + \frac{1}{7} \left[ \frac{361}{9} - \frac{49}{9} \right] 8z^2 + \frac{9}{7}w^2 - 9w^2 \\ + \frac{38}{7}zw + 10zw$$

$$= A^2 - 7B^2 + \left( \frac{104}{21} - 8 \right) z^2 - \frac{54}{7}w^2 + \frac{68}{7}zw$$

$$= A^2 - 7B^2 + \frac{2}{7} \left[ \frac{64}{3}z^2 - 27w^2 + 54zw \right]$$

$$= A^2 - 7B^2 + \frac{2}{7} \left[ \frac{32}{3} \left( z + \frac{54 \times 3}{32 \times 2} w \right)^2 - \left[ 27 + \frac{54 \times 3}{32 \times 2} w \right]^2 \right]$$

Rang = 4, signature = (2, 2).

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7/3 & 3 \\ 1 & -1/3 & -4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{54 \times 3}{32 \times 2} \\ 0 & 0 & 0 & 27 + \frac{54 \times 3}{32 \times 2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\uparrow$   
base orthogonale:  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(A1)

$$\text{Ex7} \quad g(x, y) = x_1 y_1 + 10 x_2 y_2 + 6 x_1 y_2 \\ + 2 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

$\rightarrow 6x_1 y_2$  mais on a pas terme symétrique  $6x_2 y_1$ .

Donc ce n'est pas forme bilin. symétrique.

De ce définit jms un produit scalaire.

$$h(x, y) = 2x_1 y_1 + 7x_1 y_2 + 7x_2 y_1 + 8x_2 y_2 \\ - 3x_3 y_3 + 2x_2 y_3 + \mu x_3 y_1.$$

$h$  est FB sym  $\Leftrightarrow \lambda = \mu$

Diagonalisons  $h$   $\not\rightarrow$  PDG.

La FQ  $\Leftrightarrow$  est  $h(x, x) = 2x_1^2 + 14x_2^2 + 8x_2^2 - 3x_3^2 + (\lambda + \mu)x_2 x_3$

$$h(x, x) = 2 \left[ x_1 + \frac{7}{2} x_2 \right]^2 - \frac{45}{2} x_2^2 + 8x_2^2 - 3x_3^2 + (\lambda + \mu)x_2 x_3 \\ = 2 \left( x_1 + \frac{7}{2} x_2 \right)^2 - \frac{33}{2} x_2^2 + (\lambda + \mu)x_2 x_3 - 3x_3^2 \\ = 2A^2 - \frac{33}{2} \left( x_2 + (\lambda + \mu)x_3 \right)^2 + \frac{(\lambda + \mu)^2}{33} x_3^2 - 3x_3^2$$

signature n'est dc jms = (3, 0).

dc  $h$  n'est jms un produit scalaire A2

Prop  $f: E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $f': E^2 \rightarrow \mathbb{K}$       Ex 11

$f \sim f' \Leftrightarrow \exists \Psi: E \rightarrow E'$  isomorphisme

$\forall x, y \in E, f'(e(x), e(y)) = f(x, y)$

Preuve  $f \sim f' : \exists \varepsilon, \varepsilon'$  bases de  $E$  &  $E'$

$$\forall x, y \in E, f(e(x), e(y)) = f'(x, y)$$

•  $\Rightarrow$  soit  $\Psi: E \rightarrow E'$  d'PL def<sub>P</sub>  $\Psi(v_i) = v'_i, \forall i$   
 $\Psi$  est un isomorphisme.

soit  $x, y \in E$ ,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad y = \sum_{j=1}^m y_j v_j$$

$$\begin{aligned} f'(\Psi(x), \Psi(y)) &= f'(\Psi(\sum x_i v_i), \Psi(\sum y_j v_j)) \\ &= f'(\sum x_i \Psi(v_i), \sum y_j \Psi(v_j)) \\ &= f'(\sum x_i v'_i, \sum y_j v'_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j f'(v'_i, v'_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j f(v_i, v_j) \quad \text{par hypo} \\ &= f(x, y) \quad \text{par } f \sim f'. \end{aligned}$$

soit  $E = \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ ,  $m \geq 2$ ,  $\phi \in \mathcal{Y}(E)$

def<sub>P</sub>  $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ .

a) Mq  $\phi$  est non-dégénérée.

$$\phi(A, B) \mapsto \phi(A, B) = \text{Tr}(AB)$$

on vt mq si  $A = (a_{ij})_{1, j}$  et tq  
 $\forall M \in E, \text{Tr}(AM) = 0$  alors  $A = 0$ .

[ $\ker \Psi = \{x \in E \mid \Psi(x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}$ ]  
 non-dégénéré :  $\ker \Psi = \{0_E\}$ .

soit  $A$  tq  $\text{Tr}(AM) = 0 \quad \forall M$ .

$$\text{sp } \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$$

$\text{Tr}(AE_{ij}) = 0$  où  $E_{ij}$  est la mat  $m \times m$   
 ayant 1 à la place  $(i, j)$  et 0 ailleurs.  
 Les  $E_{ij}$  forment une base de  $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ .

$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & s \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{1, j}$    Évaluons  $AE_{ij}$  fixer

$$(AE_{ij})_{pq} = \sum_{k=1}^m A_{pk} (E_{ij})_{kj} \quad \begin{array}{l} \triangle \text{ manip} \\ \text{formule } AxB \end{array}$$

$$(AE_{ij})_{pq} = \sum_{k=1}^m A_{pk} (E_{ij})_{kj}$$

$$= A_{pi} (E_{ij})_{iq} \quad k=i \rightarrow 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq j \\ A_{pj} & \text{si } q=j \end{cases} \quad \text{sinon } 0_m$$

$$(AE_{ij})_{pj} = A_{pi}$$

$$(AE_{ij})_{pj} = 0 \quad \text{si } q \neq j.$$

$$\begin{matrix} i & j \\ \vdots & \diagdown \\ j & \overbrace{\quad \quad \quad}^{a_{ji}} \end{matrix} \quad \begin{array}{l} \text{colonne d'indice } j \\ \text{de } (A \times E_{ij}) \\ \text{remplacée par colonne } i \text{ de } A. \end{array}$$

$$\operatorname{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0 \quad (\text{on a pris } \sum a_{ji} \text{ au } (AE_{ij}) \text{ et il est } 0)$$

si tous les autres

on a vu que si  $i \neq j$  alors non diagonale de  $E_{ij}$ .

$$\rightarrow \text{si on a l'indice } (i,i) \rightarrow E_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (AE_{ii})_{pq} = \sum_{k=1}^m A_{pk} (E_{ii})_{ki} = A_{pi} (E_{ii})_{iq}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq i \\ A_{pi} & \text{si } q=i \end{cases}$$

$$\left( \begin{matrix} \emptyset & \emptyset \end{matrix} \right)_{qii} = \text{colonne indice } i \text{ de } (AE_{ii})$$

$$(AE_{ii}) = \begin{array}{l} \text{colonne indice } i \text{ de } A. \end{array}$$

$$\operatorname{Tr}(AE_{ii}) = a_{ii} = 0.$$

$$\underline{\text{ccp}} : \forall i,j, a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

b)  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique  
 $A$  antisymétrique. On verra que  $\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(SA)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(AS) &= \operatorname{Tr}(+(AS)) = \operatorname{Tr}(+S^t A) \\ &= \operatorname{Tr}(+S(-A)) = -\operatorname{Tr}(SA) = -\operatorname{Tr}(AS) \end{aligned}$$

car  $\forall \underline{\text{Bsym}}$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Tr}(AS) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}(AS) = 0$$

car  $2$  inversible si  $\operatorname{ar}(\mathbb{R}) \neq 2$

$\hookrightarrow$  caractéristique

on suppose que les corps se logés 2 est inversible

Ex 12  $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$

Ex 13

(P.R)

si  $\dim E = 1$  évidemt

supr nos vns &  $\textcircled{av}$   $\dim n$ .

Mq  $n$   $\textcircled{av}$   $\dim n+1$ .

soit  $r \in E$  vect<sup>R</sup> isotrope.

on pt compléter ce vect<sup>R</sup> en une base  
 $(v, v_1, \dots, v_n)$  de  $E$

Appliq<sup>2</sup> hypo. qcm à  $F = \text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$

Il fm q F admt vect<sup>R</sup> isotrope.

comme  $Q$  non-deg,  $\exists y \in E$  tq  
 $Q(v, y) \neq 0$ .

•  $v$  &  $y$  ne st pas colinéaires  
(car  $Q(v, v) = Q(v) = 0$ )

on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tq

$y' = y + \lambda r$  soit isotrope.

dev par bilinéarité

$$\begin{aligned}
 Q(y') &= Q(y + \lambda v) = \phi(y + \lambda v, y + \lambda v) \\
 &= \phi(y) + 2\lambda \cdot \phi(y, v) + \lambda^2 \phi(v, v) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\phi(y)}{2\phi(y, v)}$$

$v$  &  $y'$  ne st pas coliné. dc libre.

dc on pt compléter cette famille en une base de  $E$ :  $(v, y', v_2', \dots, v_n')$

applique HDR à  $G = \text{Vect}(y', v_2', \dots, v_n')$

(il admet un vect<sup>R</sup> isotrope  $y'$  & dc p HDR il admet une base fermée de vecteurs isotropes  $y', y_2, \dots, y_n$ ).

De  $v, y, y_2, \dots, y_n$  est une base de  $E$  fermée de vecteurs isotropes

Quelqu'un a orthogonalisé Gram-Schmidt  
 (md) Il bases  $\mathcal{C}$  base  $(v_1, \dots, v_m)$  q restit à 5  
 les espaces  $F_i = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$  est (md).  
 ie si mat q de base  $(v_1, \dots, v_n)$  est  
 $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  les minors.  
 $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \neq 0$ ,  
 la forme q pt être dégénérée MS  
 pas trop (dim ker q  $\leq 1$ ).  
 ou si la forme est non dégénérée  
 (@ si produit scalaire usuel  
 sur  $\mathbb{R}^n$ ). On pt appliquer Gram-Schmidt  
 à n'importe quelle base.

A2

1)  $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$   
 Mat q =  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$   
 NB :  $2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$   
 $6x_2x_3 = 3x_2x_3 + 3x_3x_2$

Quels si on pt apply GS à base canoniq.  
 $\Delta_1 = \det(1) = 1 \neq 0$   
 $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ .

on cherche base autre ie  $y_1, y_2, y_3$  tq  
 $\phi(y_1, y_2) = \phi(y_1, y_3) = \phi(y_2, y_3) = 0$ .  
 $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 1 \end{pmatrix}$   
 on prd  $y_1 = v_1$ .  
 on cherche  $y_2$  tq  $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(y_1, y_2)$   
 et  $\phi(y_2, y_1) = 0$

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(y_1, y_2) \quad \& \quad \phi(y_2, y_1) = 0.$$

on cherche  $y_2$  tq  $y_2 = v_2 + \lambda y_1$ .

on vt trouv  $\lambda$  tq  $\phi(y_2, y_1) = 0$ .

$$\begin{aligned}\phi(y_2, y_1) &= \phi(v_2, y_1) + \lambda \phi(y_1, y_1) \\ &= \phi(v_2, y_1) + \lambda \phi(v_1, y_1) \\ &= 1 + \lambda\end{aligned}$$

$$\text{Dc } \lambda = -1 \quad \& \quad y_2 = v_2 - y_1 = v_2 - y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on cherche  $y_3$  tq

$$\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(y_1, y_2, y_3)$$

$$\& \quad \phi(y_3, y_2) = \phi(y_3, y_1)$$

$$\text{cherche } y_3 = v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1$$

$$\text{tq} \quad \begin{cases} \phi(y_3, y_1) = 0 \\ \phi(y_3, y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \lambda \phi(y_2, y_1) = 0 \\ \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_2) = \phi(v_3, y_2) + \mu \phi(y_3, y_2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{\phi(v_3, y_2)}{\phi(y_2, y_2)} \\ \mu = -\frac{\phi(v_3, y_1)}{\phi(y_1, y_1)} \end{cases}$$

$$\phi(v_3, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3$$

$$\begin{aligned}&= \phi((x_1, x_2, u_3), (x'_1, u'_1, u'_3)) = 5 \\ &= x_1 x'_1 + 4 x_2 x'_3 + 9 x_3 x'_3 + x'_1 + x'_2 u'_2 \\ &\quad + 3 x'_2 x'_3 + 3 x'_2 x'_3\end{aligned}$$

$$\phi(y_1, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 4 - 2 \\ = 3$$

$$\lambda = -1$$

---


$$\mu = \phi(v_3, y_1) = \phi(v_3, y_2) = 3$$

$$\phi(y_1, y_2) = 1 \quad \text{Dc } \mu = -3$$

$$\& \quad y_3 = v_3 - y_2 - 3 y_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit la base  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

est une base orthonormale pour  $q$ .

$\Rightarrow$  calculer  $\int_0^1 \left( \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) dx \right)^2 dx$  &  $\int_0^1 u_m(x) dx$

$$\text{Mat } q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

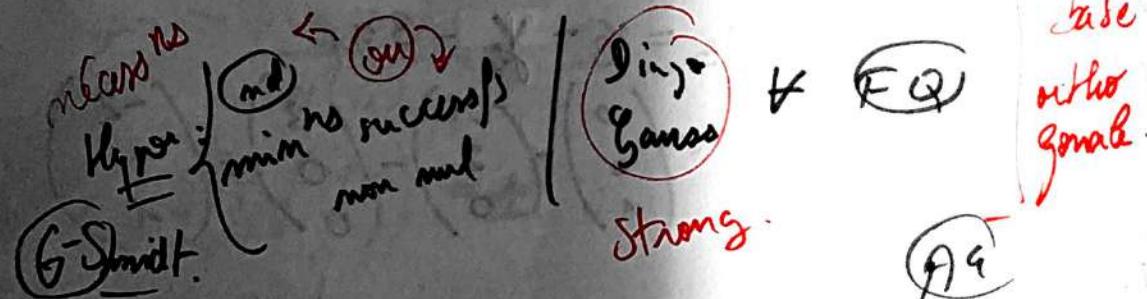
$$q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3$$

$$q\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4 + 4 + 9 + 4 - 6 = 15$$

Donc la signature de  $q$  est  $(3, 0)$ .

& une expression de  $q$  dans la base orthonormale

$$Q \text{ est: } q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \tilde{x}_1^2 + 3\tilde{x}_2^2 + 15\tilde{x}_3^2$$



$$2) q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$$

$$\int_0^1 x(x-2)^m dx = - \left[ \frac{x(1-x)^{m+1}}{m+1} \right]_0^1$$

$$+ \frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{m+1} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\text{Mat } q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc G-S applicable.

$$\text{on pose } y_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{on cherche } y_2 = v_2 + \lambda y_1 \text{ tq } \phi(y_2, y_1) = 0$$

$$\text{i.e. } \phi(v_2 + \lambda y_1, y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(v_2, y_1) + \lambda \phi(y_1, y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{q(y_1)}{\phi(v_2, y_1)} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on pt multiplie par } 2.$$

$$\text{on chercher } y_3 = v_3 + \lambda v_2 + \mu v_1 + q$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(v_3, y_2) = \phi(v_3, y_2) + \lambda q(y_2) = 0 \\ \phi(y_3, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \mu q(y_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Dc } \lambda = \frac{-\cancel{\phi(v_3, y_2)}}{\cancel{\phi(q(y_2))}} = -3 \Rightarrow y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q(y_3) = \cancel{\frac{1}{4} + 3\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}}} \quad 4+3-8=-1$$

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \phi((x, y, z), (x', y', z')) \\ &= xx' + 3yy' - 8zz' - 2xy^2 - 2xz' \\ &\quad + xz' + x'y - 5yz' - 5yz \\ &= 2 - 5 = -3 \end{aligned}$$

$$\mu = -\frac{\phi(v_3, y_2)}{q(y_1)} = -1$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\text{Dc } y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  écrire mat  $x\mathcal{B} = \{( , ), ( ), ( - )\}$   
est base orthonormale pour  $q$ .

$\rightarrow$  écrire mat des la base  $\mathcal{B}$ .

### Ex 5 Base orthogonale

si  $f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est FB symm à  $E$

@ dim  $m$ , une base orthog de  $f$  est 1 base de  $E$   $\{e_1, \dots, e_m\}$  tq  $f(e_i, e_j) = 0$  si  $i \neq j$ .

@  $\exists \langle , \rangle: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x_i)_{i=1}^m, (y_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

La base canoniq de  $\mathbb{R}^m$  est une base orthogonale.

→ Une base orthogonale p  $|FQ|$  est une base orthogonale p  $(FB)$   $\Leftrightarrow$ .

Rq: si  $X = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$  &  $\{e_1, \dots, e_m\}$  une base orthogonale p  $q$  alors de c't base  $q(X) = \sum_{i=1}^m x_i x_i^\top$  ( $x_i \in K$ )

→ Comment trouver base orthogonale?

o →  $M$  de Gauss

o → Orthogonalisation Gram-Schmidt (A1)

### @ $\boxed{M}$ Gauss

$$\begin{aligned} 1) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx) = q(x, y, z) \\ &= (x - 2y - 2z)^2 - 3(y + 2z)^2 + 9z^2 \end{aligned}$$

$$q'(x', y', z') = (x')^2 - 3(y')^2 + 9(z')^2$$

$$\text{alors } q(x, y, z) = q'(x - 2y - 2z, y + 2z, z)$$

$$\text{on a fait chgt } \begin{cases} x = x - 2y - 2z \\ y = y + 2z \\ z = z \end{cases} \quad \text{on a } q(x, y, z) = q'(x', y', z')$$

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat } q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ & } P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Expression matricielle de  $q$ :

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$q'(x', y', z') = (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow (x' y' z')^t P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on obtient

$$q(xyz) = (x' y' z')^t P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$q'(x', y', z')$

$$\text{Donc } {}^t P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Une base orthogonale pour  $q$  était donnée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , une base orthogonale

pour  $q'$  est donnée par  $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calcul de  $P^{-1}$ :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de une base orthogonale pour  $q'$  et donnée par  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Vérifier  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  &  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base orthogonale pour  $q$ .

On écrit FB sym  $\Leftrightarrow \vec{a} \perp q$ :

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + xz + yz)$$

$$xy \rightarrow \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1.$$

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = q(x, y, z)$$

$$f((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$= 2(x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_1 z_1 + z_1 y_2 + z_1 x_2 + z_2 x_1)$$

$$f((1, 0, 0), (2, 1, 0)) = 2 + 0 + 0 - 2(4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$\text{De m } f((1, 0, 0), (-2, -2, 1)) = 0 = \dots$$

$$\text{enfin } f((2, 1, 0), (-2, -2, 1)) = \dots = 0$$

M Trouver base orthogonale

M1 Diagonalisation FQ p M2 de Gauss

$$\rightarrow \text{on trouve } q = (\alpha + \beta + \gamma)^2 + \beta(\alpha - \gamma)^2 + \gamma(\alpha + \gamma)^2$$

$$\begin{cases} X' = x + y + z \\ Y' = x - y - z \\ Z' = x + 2y \end{cases} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3} q = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \div 2 \quad \text{mat départ } q \text{ ds base canoniq.}$$

$$\text{Calcul } P^{-1} \rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

base orthogonale  $\downarrow$  pour  $q$ .

$$@ q = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx)$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3} q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

M2 Orthogonalisation P Gram-Schmidt

$\Delta_{\text{hyp}} \neq 0$  : FQ md sur  $\Delta_i (\text{minors}) \neq 0$

$$\cdot q(2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3} q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \text{ check } \Delta_1 = |1| = 1 \neq 0 \quad \Delta_2 = |1| = 3 \neq 0$$

$$\{y_1, y_2, y_3\} ? \text{ tq } \phi(y_1, y_2) = \phi(y_1, y_3) = \phi(y_2, y_3) = 0$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\phi(y_2, y_1) =$$

$$\rightarrow y_1 = v_1; y_2 \text{ tq Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(y_1, y_2) \Leftrightarrow$$

$$\rightarrow y_2 = v_2 + \lambda v_1; \lambda \text{ tq } \phi(y_2, y_1) = 0.$$

$$\phi(y_3, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \lambda \phi(v_2, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \lambda \phi(v_2, y_1) = 1 + \lambda$$

$$\text{Dc } \lambda = -1, y_2 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_3 \text{ tq Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(y_1, y_2, y_3) \quad \& \quad \phi(y_3, y_1) = 0$$

$$v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1 \text{ tq } \begin{cases} \phi(y_3, y_1) = 0 \\ \phi(y_3, y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_1) = \phi(v_3, y_1) + \lambda \phi(y_2, y_1) = 0 \\ \phi(v_3 + \lambda y_2 + \mu y_1, y_2) = \phi(v_3, y_2) + \lambda \phi(y_2, y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-\phi(v_3, y_2)}{\phi(y_2, y_3)} = -\frac{3}{3} = -1 \\ \mu = \frac{-\phi(v_3, y_1)}{\phi(y_1, y_3)} = -3 \end{cases}$$

$$\phi(v_3, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 \quad \uparrow$$

$$= \phi(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) = x_1 x'_1 + 4 x_2 x'_2 + 9 x_3 x'_3 \\ + x_1 x'_2 + x'_1 x_2 + 3 x_2 x'_3 \\ + 3 x'_2 x_3 = -1 + 3 + 1$$

$$\phi(y_1, y_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$-\mu = \phi(v_3, y_1) = \phi(v_3, v_1) = 3 \quad (\phi(y_1, y_3) = 1)$$

$\Rightarrow \mu = -3$

$$\Rightarrow y_3 = v_3 - y_2 - 3y_1 \quad \begin{array}{c} \overbrace{v_3}^y \\ - \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{y_2}^x \\ - \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{3y_1}^z \\ - \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  bases orthogonales  $\{y_1, y_2, y_3\} = \mathcal{B}$

$\mu_q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  ④

$\mu_q$

$$\text{Dc } q\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3, \quad q\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{9+4+9}{+4-6} = 15.$$

Dc signature de  $q : (3, 0)$ .

$$\text{Mat}_\mathbb{R} q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 6yz \\ q\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + 4 - 2 = 3.$$

Ex 1  $E = \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$ ,  $\phi \in \mathcal{Y}(E)$  FBsym

$$(A, B) \mapsto \bar{\phi}(AB) - \phi(AB)$$

$$\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

a) on a mq'  $\phi$  (nd)

b) on a mq' mat sym est  $\phi$ -orthogonal  
à tte mat anti-symétriq  $\phi(A, B) = 0$ .

c) signature de  $\phi$ ?

↳ trouver une base.

6m mq &  $S$  mat symétriq :

$$\phi(S, S) > 0 \text{ & } \forall A \text{ mat anti-sym}$$

$$\phi(A, A) < 0$$

Ré  $E = \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$ , si on pose  $\mathcal{S}(E) : \text{sym}^+ \subset E$

$$A(E) = A \in E$$

$$E = \overbrace{S(E)}^{m \times m} \oplus \overbrace{A(E)}^{m \times m}$$

on dim  $\mathcal{S}(E)$ .

Une base de  $E$  est donné par  $\{E_{ij} + E_{ji}, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\}$

Une base de  $A(E)$ , t'ons  $\{E_{ij} - E_{ji}, i = j, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\}$

⑨

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$S \text{ symétriq } \quad S = \frac{S + tS}{2}$$

$$M = (a_{ij})_{ij} = \sum a_{ij} E_{ij}$$

$S$  symétriq

$$S = \frac{S + tS}{2} = \left( \sum_{ij} a_{ij} E_{ij} + \sum_{ij} a_{ij} E_{ji} \right) \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

$\{E_{ij} + E_{ji}, i \leq j\}$  système générat

if est facile mq c'est une base.

⑩ d't le nbr élt est

$$\binom{m}{2} + m = \frac{m!}{2(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2} + m$$

$$\frac{m^2 - m}{2} + m = \frac{m(m-1)}{2} + m$$

Pi Antisymetrica - de în coloane. 1

$$A = \frac{A - \epsilon A}{2}, \text{ calculam } \phi(S, S) = \overline{\text{Tr}}(S^2)$$

utilizand la relat: ④

$$S_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \quad (i \leq j)$$

$$S_{ij}^2 = (E_{ij} + E_{ji})^2 = (E_{ij} + E_{ji})(E_{ij} + E_{ji})$$

$$\text{⑤ } \begin{cases} E_{ij} E_{ik} = 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{ij} E_{jk} = E_{ik} \end{cases}$$

$$= E_{ij} E_{ij} + E_{ij} E_{ji} + E_{ji} E_{ij} + E_{ji} E_{ji}$$

$\rightarrow (si \ i < j)$ , sădăcă

$$= 0 + E_{ii} + E_{jj} + 0 + 0 \quad i \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Tr}(S^2) = 2$$

$\rightarrow si \ i = j$

$$\text{Tr}(S_{ii}^2) = \overline{\text{Tr}}(2E_{ii}) = 2 = 4$$

$S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ ; sădăcă  $s_{ii}(i,j)$

$$A_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad \phi(S_{ij}, S_{ik}) = 0$$

$$\phi(A_{ij}, A_{ik}) = 0 \quad s_{ii}(i,j) \neq (k,l)$$

$$\left( \begin{array}{cc} \text{shaded} & \text{white} \\ \text{white} & \text{shaded} \end{array} \right) \quad S_{ij} \quad S_{ik}$$

A antisimetrică,  $(E_{ij} + E_{ji})(E_{kl} + E_{lk}) \quad k < l$

$$s_{ij} \neq k, E_{ij} E_{ke} + E_{ij} E_{lk} + E_{ji} E_{kl} + E_{ji} E_{hk}$$

$$s_{ij} \neq l, E_{ij} E_{ke} + E_{ji} E_{lk}$$

$$s_{i=k} E_{jk} + 0$$

$$\mathcal{D} = E_{ik} (E_{hl} + E_{lh}) \quad k < l$$

$$= E_{ik} E_{hl} + E_{ik} E_{lh}$$

$$s_{i=k}, \mathcal{D} = E_{ii} E_{ik} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = l \\ i = k \end{array} \right. \quad i = l \quad i = k = (3)A$$

$$s_{i=k}, \mathcal{D} = E_{ik} \text{ et } \overline{\text{Tr}}(E_{ik})$$

alături  $i = l \Rightarrow$

$$m + \frac{(n-m)m}{2} = m + \frac{m(m-1)}{2} \quad (10)$$

Si on prend des vecteurs de la forme :

$S_{ji}$  et  $S_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

$$\phi(S_{ii}, S_{jj}) = \text{Tr}(S_{ii}, S_{jj})$$

$$\text{Tr}((2E_{ii})(2E_{jj}))$$

$$= -4 \underbrace{\text{Tr}(E_{ii} E_{jj})^2}_0 = 0$$

→ De manière analogue, on peut montrer

$$\phi(A_{ij}, A_{ji}) = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (k,\ell).$$

En Résumé,  $\phi(S_{ij}) > 0 \quad \forall i,j$

$$\phi(A_{ij}) < 0$$

$$\phi(A_{ij}, A_{ke}) = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (k,\ell)$$

$$\phi(S_{ij}, S_{ke}) = 0 \quad \text{si } \underline{\hspace{2cm}}$$

La signature est si  $\left( \frac{(m+1)n}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$

Ex 15: Orthogonalisation de Gram-Schmidt

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

↓ $q$  de forme polaire  $g(e_1, e_3) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# TD 3

## Espaces Euclidien

⑤ Un  $\mathbb{E}$  est un espace vectoriel  $E$  de dim finie muni d'un produit scalaire

$$\frac{d \Rightarrow 3}{\epsilon \text{ d}(e)} \cdot d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|$$

↓ *f metric norm (isometric)*

$$= \|f(x-y)\| = \|x-y\| = d(x, y).$$

Mg aussi  $3 \Rightarrow e$  &  $e \Rightarrow 1$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  def norm & dist in  $E$ .  
 $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$
  - $d(x, y) := \|x - y\|$
  - $D(E) = \{f \in L(E) : \forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle\}$
  - $\langle x, y \rangle \stackrel{\text{not}}{=} \langle x/y \rangle$ .
  - Ex 1 Mg  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$ .

$f \in D(E)$  &  
 $\|f(x)\| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0))$   
 $d(f(0)) = 0$

$f \text{ isometric} \Leftrightarrow d(x, 0) = \|x\|$

$\text{No } x \in FBS \text{ de } FQ \text{ q}$   
 $(q(\lambda) := f(\lambda, u)) \Rightarrow$   
 $f_1(x, u) = \frac{1}{2} (d(x+u) - d(x) - d(u))$

No si  $b \in FB\mathcal{S}$  de  $FQ$  q  
 $(q(\lambda) := b(\lambda, u)) \Rightarrow$

$$\rightarrow b(x,y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

$$\bullet \quad \frac{1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3}{}$$

$$f \in \partial(E)$$

$$\underline{1 \Rightarrow e} \quad \|f(x)\| = \sqrt{k_{f(x), f(x)}} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

AS

$$\text{iii} \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left( \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)' \quad \circ \quad \text{G' est une base car } f \text{ est un isomorph}$$

$$\text{de} \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2} \left( \|f(x)+f(y)\|^2 \right)$$

$$- \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right) \quad \square$$

$f \in \mathcal{L}(E)$

$$f \text{ preserve norme}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) = \langle x, y \rangle$$

$\overset{m}{\underset{a}{\wedge}}$  mgé (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3)

M<sub>b</sub> (1)  $\Leftrightarrow$  (4)

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$  base orth.

$$\langle b_i, b_j \rangle = d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors son image par  $f$  qui est

$\{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$  est une base ortho

& dc envoie 1 base sur 1 base

$$f: E \rightarrow E$$

car  $f = f \circ g$ . En effet si  $f(x)=0$

$$\Rightarrow \|f(x)\|=0 \Rightarrow \|x\|=0 \& x=0$$

$E^*$  est ortho. car

$$\langle f(b_i), f(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i=j \end{cases}$$

$$5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1.$$

5  $\Rightarrow$  4 évident.

( $\exists$  base ortho de  $E$   $\hat{\otimes}$  procédé  
d'ortho. g. de Gram-Schmidt)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle (Q)f, (Q)f \rangle} = \|Qf\|$$

$$j \text{ base} \rightarrow \mathcal{D} = \{b_1, \dots, b_m\}$$

$$\& \text{since } x = \sum x_i b_i \text{ & } y = \sum y_j b_j$$

as atte base.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i b_i, \sum_{j=1}^m y_j b_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i \left\langle b_i, \sum_{j=1}^m y_j b_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j \langle b_i, b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

$$f(x) = f\left(\sum x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^r x_i f(b_i)$$

$$= \sum x_i c_i$$

$$\{c_1, \dots, c_m\} \stackrel{\text{base}}{=} \{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$$

est 1 base orth. de  $\mathbb{E}$

$$f(y) = \sum_{i=1}^m y_i c_i$$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \left\langle \sum x_i c_i, \sum y_j c_j \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{bilin.} \rightarrow &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle c_i, c_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m x_i y_i = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Dc (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Leftrightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5)

(5)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (4)

As M est mat orthog si  $MM^T = Id$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$MM^T = \begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \dots & \langle g_1, g_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle g_m, g_1 \rangle & \dots & \langle g_m, g_m \rangle \end{pmatrix} = Id$$

$\langle z_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$

$z_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{mi} \end{pmatrix}$

M est orthog. sa  $\{g_1, \dots, g_m\}$   
forme base orth. de  $\mathbb{R}^m$ .

④

$tMN = Id \Rightarrow M \text{ inv} \& \text{dc columns}$   
funt base de  $\mathbb{R}^n$ .

Claim (6)  $\Leftrightarrow$  (7).

(5)  $\Leftrightarrow$  (6) :

$$f(b_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} b_i \quad \{b_1, \dots, b_m\} \text{ base ortho.}$$

$$\text{Mat}_G f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$  est base ortho. de  $G$ :

$$\langle f(b_k), f(b_l) \rangle = \sum_i a_{ki} a_{li} \langle b_k, b_l \rangle = 0 \quad \text{if } k \neq l.$$

en effet:

$$\begin{aligned} \langle f(b_k), f(b_l) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_{ik} b_i, \sum_{j=1}^m a_{jl} b_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ik} \sum_{j=1}^m a_{jl} \langle b_i, b_j \rangle \\ &= 0 \quad \text{si } k \neq l \end{aligned}$$

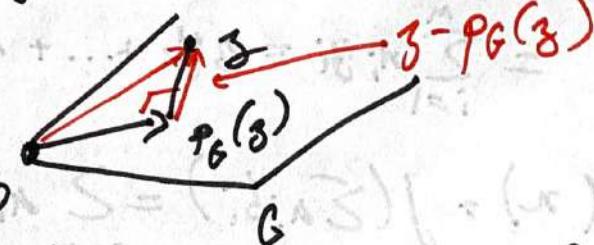
$$\begin{aligned} &= \left( \sum_{i=1}^m a_{ik} \right) \left( \sum_{j=1}^m a_{jl} \right) \quad \text{si } k = l \\ &= \left( \sum_{i=1}^m a_{ik} \right)^2 \end{aligned}$$

Ex: soit  $\mathbb{R}^3$  ap j'eu eucl.

$$w = (1, -2, -5) \in \mathbb{R}^3 \& F \text{ def}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 0\}.$$

(proj & orthogonal)



$$f_G(z) \in G \& p_G(z) + (z - p_G(z))$$

corresponds to proj & orthog.

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 0\}$

$$G = F^\perp$$

1. Déterm.  $G = F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0\}$

$$\forall w \in F$$

$$\dim F = 2 \text{ et TH } \mathcal{R}_g$$

$$\begin{cases} \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - 2y - 2z \end{cases} \quad \text{je}$$

$$F = \ker \phi \quad \& \quad \dim \ker \phi = 3 - \dim \phi = 3 - \dim \text{Vect}((1, -2, -2)) = 2$$

$$\dim G = \dim F^\perp = 3 - 2 = 1$$

$$(\dim + \dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \text{md}$$

$$w = (4, -2, -5)$$

on cherche  $w_0 \in G$  tq  $\langle w_0, w - w_0 \rangle = 0$

$$\text{dc } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } w_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \text{ &}$$

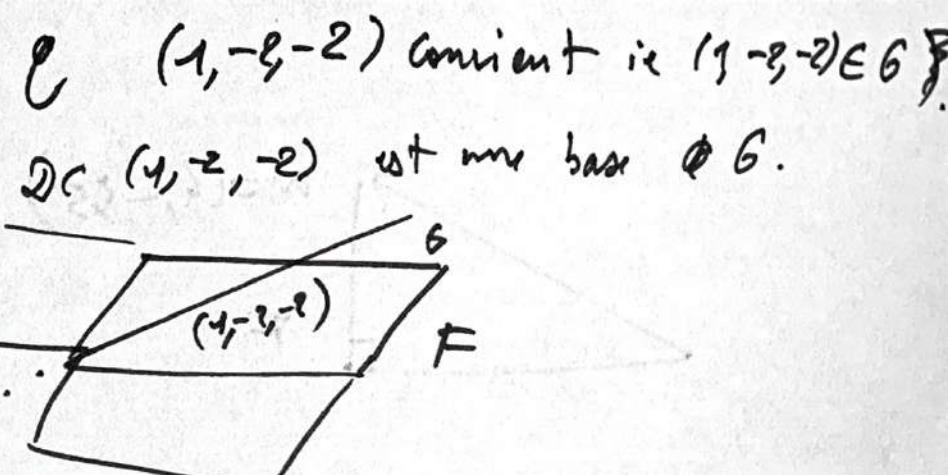
$$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-\lambda \\ -2+2\lambda \\ -5+2\lambda \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Trouver base de  $G$  suivant dc a trouv  
vecteur non nul dc  $G$ .

$$\text{le vecteur } (x_1, x_2, x_3)$$

Vérif.  $\forall (x_1, x_2, x_3) \in F, x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0$

$$\text{dc } w_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

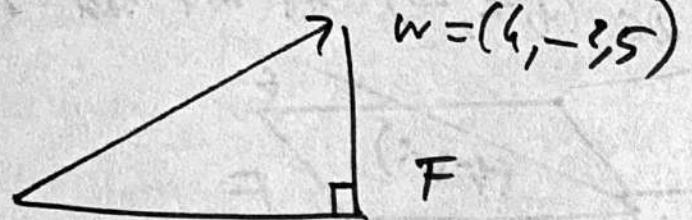


$$\Leftrightarrow 4\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda^2 + 10\lambda - 4\lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9\lambda^2 + 18\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 0$$

(19)



$$w = (4, -3, 5)$$

F

en général si  $E = E_F \oplus G$   
 $\Rightarrow \forall x \in E, p_F(x) + p_G(x) = x$ .

$$\text{dc } d(w, F) = d(w, w_F)$$

$$= \|w - w_F\| = \|w_G\|$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$3. w_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On cherche  $w_F \in F$  tq  $\langle w_F, w - w_F \rangle = 0$

$$w - w_G = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w - w_G \in F ; (2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) = 4$$

$$\& \text{ on } \langle w - w_G, w_G \rangle = 0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

on a q'médiu :

$$\text{dc } w_F = w - w_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si on prend des vecteurs de la forme :

Ex 15: Orthogonalisation de Gram-Schmidt

$S_{ji}$  et  $S_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

$$\phi(S_{ii}, S_{jj}) = \text{Tr}(S_{ii}, S_{jj})$$

$$\text{Tr}((2E_{ii})(2E_{jj}))$$

$$= -4 \underbrace{\text{Tr}(E_{ii} E_{jj})^2}_0 = 0$$

→ De manière analogue, on peut montrer

$$\phi(A_{ij}, A_{ji}) = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (k,l).$$

En Résumé,  $\phi(S_{ij}) > 0 \quad \forall i,j$

$$\phi(A_{ij}) < 0$$

$$\phi(A_{ij}, A_{kl}) = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (k,l)$$

$$\phi(S_{ij}, S_{kl}) = 0 \quad \text{si } \underline{\hspace{2cm}}$$

La signature est si  $\left( \frac{(m+1)n}{2}, \frac{m(m-1)}{2} \right)$

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{Q}_C}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbb{Q}_C = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\begin{aligned} &\text{de forme positive } f(e_1, e_3) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\text{vecteur nul dans } F_Q. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(e_1, e_2) = 1 \\ f(e_2, e_3) = 3 \\ f(e_1, e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} e_1 \perp e_2 \\ e_2 \perp e_3 \end{matrix}$$

~~Il suffit de trouver une base orthogonale~~ <sup>Bien</sup> selon M Gram-Schmidt.

$$\text{Posons } v_1 = e_1$$

$$v_2 = e_3$$

$$v_3 = e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

sous la condit q

$$f(v_1, v_3) = f(v_2, v_3) = 0$$

Q q équivaut à

$$f(v_1, v_3) = 0 = f(v_1, e_2) + \lambda_1 f(v_1, v_1) + \lambda_2 f(v_1, v_2)$$

$$f(v_1, e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \stackrel{!!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\lambda_1} = \cancel{f(v_1, e_2)}$$

$$\begin{aligned} f(v_1, v_1) &= f(e_1, e_1) = \cancel{(1, 0, 0)} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{1} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2, v_2) &= f(e_3, e_3) = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{9} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{f(v_1, e_2)}{f(v_1, v_1)} = -\frac{f(e_1, e_2)}{f(v_1, v_1)} = -\frac{f(e_1, e_2)}{1} = -1$$

$$f(v_2, v_3) = 0 = f(v_2, e_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

$$= f(v_2, e_2) + \lambda_1 f(v_2, v_1) + \lambda_2 f(v_2, v_2) \stackrel{!!}{=}$$

$$\lambda_2 = -\frac{f(v_2, e_2)}{f(v_2, v_2)} = \frac{-f(e_3, e_2)}{f(v_2, v_2)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$v_1 = e_2 - v_1 - \frac{1}{3} v_2$$

$$\begin{aligned} v_2 &= e_2 - e_1 - \frac{1}{3} e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dc  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base orthonormée

Pour calculer la signature, il suffit de trouver une base orthonormale :

$$q(v_1) = q(e_1) = 1$$

$$q(v_2) = q(e_3) = 9$$

$$q(v_3) = q\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}\right) = 8$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La signature de  $q$  est  $(3, 0)$ .

La mat de  $q$  est dans la base orthonormale

$$\mathcal{D} = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ est : } \begin{pmatrix} q(v_1) & 0 & 0 \\ 0 & q(v_2) & 0 \\ 0 & 0 & q(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_3^2.$$

$$\phi(u_1, e_3) = \phi(e_1, e_3) = 1$$

$$\phi(e_1, e_1) = \phi(u_1, u_1) = 1$$

$$\phi(u_2, e_3) = \phi(e_2 + 2e_1, e_3) = -3$$

$$(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\hookrightarrow q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}_C}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Q : forme polaire de  $q$ .

$$\mathcal{D}_C = \{e_1, e_2, e_3\}$$

on cherche base orthonormale

$$\mathcal{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\text{on pose } u_1 = e_1 ; \quad u_2 = \frac{e_2 - \phi(u_1, e_2)}{\|\phi(u_1, e_2)\|} u_1$$

$$\phi(u_1, e_2) = \phi(e_1, e_2) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\phi(e_1, e_2) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$u_2 = e_2 + 2e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\phi(u_1, e_3)}{\phi(u_1, u_1)} u_1 - \frac{\phi(u_2, e_3)}{\phi(u_2, u_2)} u_2$$

$$u_3 = e_3 - u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$q(u_3) = q\left(\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-7 \ 3 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-7 \ 3 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\hookrightarrow u_3$  vecteur isotrope.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -49 + 2(-21) + 7$$

$$= -49 + 42 + 7 = 0.$$

signature de  $q$  est  $(1, 1)$

dim espace = 3.

$\Rightarrow$  forme dégénérée

S'il n'est pas inversible.

14

Ex 12

P: plan vectoriel

q: FQ  $\text{nd}$  sur P.

on suppose  $\exists$  vct<sup>e</sup> isotrope pour q

i.e.  $v \in P \mid v \neq 0 \text{ et } q(v) = 0$ .

Mq  $\exists$  base de P ds tg<sup>le</sup> mat(q)

• vt de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Un plan P muni d'une FQ q  $\geq$  celle-ci s'appelle **plan hyperbolique**.

si  $\{v_1, v_2\}$  est une telle base, cela vt dire  
 $v_1$  et  $v_2$  st isotropes.

$$q(v_1) = 0 = q(v_2) \rightarrow v_1, v_2 \text{ isotropes.}$$

comme q est non-dégénéré et  $v \neq 0$

•  $\Rightarrow \exists w \in P \mid (v, w) \neq 0$

v étant de la forme polaire  $\Leftrightarrow$  q.

Quitte à div P par une scalaire approprié,  
on peut supposer qu'on ait

$$(v, w_1) = 1$$

Cherchons w <sup>isotope</sup> à la forme

$$w = w_1 + av$$

$$(v, w) = (v, w_1) + a(v, v) \stackrel{?}{=} 1 \quad ???$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$q(w) = (w, w) = (w_1 + av, w_1 + av)$$

$$= (w_1, w_1) + a^2(v, v) + 2a(v, w_1)$$

$$= (w_1, w_1) + 2a(v, w_1)$$

$$q(w) = 0 \Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a(v, w_1) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{C} \quad (v, w_1) \neq 0 \neq 1 \\ (v, \frac{w_1}{a}) = 1 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a = 0 \\ \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1) \end{array} \right.$$

(15)

q dégénérée  
et vct<sup>e</sup> l.<sup>e</sup> dim vct<sup>n</sup> nulle)

## Résumé :

$$\text{Donc } w = w_1 + \alpha v \quad \text{et } \alpha = \frac{1}{2}(w_1, w_1)$$

$\{v, w\}$  est une base de  $P$ .

& la mat de  $\varphi$  ds  $\{v, w\}$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si  $\varphi(v + \beta w) = 0 \Rightarrow \alpha, \beta \in K$ .

$$0 = (\alpha v + \beta w, v) = \alpha(v, v) + \beta(v, w)$$

$$= \beta(v, w) = \beta = 0$$

$\rightarrow v, w$  font bien une base.

$v$  &  $w$  st linéairement indép

$$\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$$

## Ex 10

Ex 12

P: plan vectoriel

q: FQ nd sur P.

on suppose  $\exists$  vct<sup>e</sup> isotropes pour q

i.e.  $v \in P \mid v \neq 0$  et  $q(v) = 0$ .

Mq  $\exists$  base de P ds tq le mat(q)

est de la forme (10). Un plan P muni  
d'une FQ q à celle-ci s'appelle plan hyperbolique.

si  $\{v_1, v_2\}$  est une telle base, cela va dire  
 $v_1$  et  $v_2$  st isotropes.

$q(v_1) = 0 = q(v_2) \rightarrow$  isotropes.

comme q est non-dégénéré et  $v \neq 0$

$\Rightarrow \exists w \in P \mid (v, w) \neq 0$

v étant de la forme polar  $\Leftrightarrow$  q.

q dégénérée  
s'il vct<sup>e</sup> 1st linéaire

(15)

Quitte à divisez P par scalaire approprié,  
on peut supposer qu'on ait

$$(v, w_1) = 1$$

Cherchons w sous la forme

$$w = w_1 + av \quad \text{isotope} \quad q(w) = 0$$

$$(v, w) = (v, w_1) + a(v, v) = 1 \quad ?? \quad \checkmark$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$q(w) = (w, w) = (w_1 + av, w_1 + av)$$

$$= (w_1, w_1) + a^2(v, v) + 2a(v, w_1)$$

$$= (w_1, w_1) + 2a(v, w_1) \quad \text{car isotope}$$

$$q(w) = 0 \Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a(v, w_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (w_1, w_1) + 2a = 0$$

$$(v, w_1) \neq a \neq 0$$

$$(v, \frac{w_1}{a}) = 1$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}(w_1, w_1)$$

## Résumé :

$$\text{Donc } w = w_1 + \alpha v \quad \text{si } \alpha = \frac{-1}{2}(w_1, w_1)$$

$\{v, w\}$  est une base de  $P$ .

& le mat de  $\varphi$  ds  $\{v, w\}$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si  $\varphi(v + \beta w) = 0$ ,  $\alpha, \beta \in K$ .

$$0 = (\alpha v + \beta w) = \underbrace{\alpha(v, v)}_{0} + \beta(v, w) = \beta(v, w) = \beta = 0$$

$\rightarrow v$  &  $w$  font bien une base.

$v$  &  $w$  st linéairement indépendants

$$\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$$

Ex 10  $P, Q \in K_n[x]$ , on pose

$$\varphi_P \quad \varphi(P, Q) = P(1) \cdot Q(1)$$

Qd  $\varphi$  FBS n  $K_n[x]$ .

$$\phi : K_n[x] \times K_n[x] \rightarrow \mathbb{R} \quad (P, Q) \mapsto P(1) \cdot Q(1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) &= (P_1 + \lambda P_2)(1) Q(1) \\ &= (P_1(1) + \lambda P_2(1)) Q(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P_1(1) Q(1) + \lambda P_2(1) Q(1) \\ &= \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q) \end{aligned}$$

$$\varphi(P, Q) = P(1) \cdot Q(1) = Q(1) \cdot P(1) = \varphi(Q, P)$$

$\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique.

$$\mathcal{D} = \{1, x, \dots, x^n\}$$

$$\text{mat}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(1, 1) & \cdots & \varphi(1, x^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x^n, 1) & \cdots & \varphi(x^n, x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le rg de la mat est 1.  
 $\Rightarrow \dim \text{Im } \Phi = 1$  (<sup>et colonnes</sup>)

&  $\dim \ker \Phi = \max_{\Phi(P,Q)=0} \{P \in K_m[x] \mid P \text{ est orthogonal}\}$

$\ker \Phi = \{P \in K_m[x] \mid P \text{ est orthogonal}\}$   
à  $Q \neq 0 \in K_m[x]$

$\ker \Phi = \{P \in K_m[x] \mid Mx = 0\}$

où  $X$  est vect<sup>r</sup> colonne des cond.

de  $P$  ds  $\mathcal{D}$  &  $M = \text{Mat}_{\mathcal{D}}(\Phi)$ .

Si ~~E~~ muni base  $B$ . Alors la  
-  $E^*$  — base  $D^*$  mat. de  $\tilde{\Phi}$  ds  $\mathcal{D}$  et  $D^{**}$  est  
 $\text{Mat}_{\mathcal{D}}(\Phi)$  la forme linéaire  
nulle.

Si  $v \in \ker \tilde{\Phi} \Leftrightarrow f(v) = 0$

$\Leftrightarrow \forall w \in E, f(v)(w) = 0$

$\Leftrightarrow \forall w \in E, \Phi(v, w) = 0$

Soit  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$   
 $P(X) \in \ker \Phi \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{D}}(\Phi) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + \dots + a_n \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \dots + a_n = 0$$

d'ens des solv<sup>s</sup> du syst est ~~si~~

$$(-a_1 - \dots - a_n)e_1 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, e_i = x^i$$

$$a_1(e_1 - 1) + a_2(e_2 - 1) + \dots + a_n(e_n - 1)$$

$\Rightarrow \dim \ker \Phi = n$

Une base à  $\ker \Phi$  est  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$v \mapsto f(v) \mid f(v)(w)$$

$$\Phi(v, w)$$

(17)

Trouver une base orthonormale de  $\mathbb{K}_n[x]$

Si pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$P_i(x) = x^i - 1.$$

$P = \{P_1(x), \dots, P_n(x)\}$  est une base de  $\text{Ker } \Psi$ .

→ 2 à 2 orthog.

→ orthog à tout espace.

→ orthog à lui-même.

→ vecteurs isotropes.

→ fl ①

→ moyen-hyperplan  $\leftarrow$  annule  $\rightarrow$  d'une ②.

Coeffs d'un H.  $\Rightarrow$  Vect<sup>R</sup> normal.

$$AX + BX = 0 \rightarrow \text{Vect}^R \text{ normal } (A, B)$$

Soit  $Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$\text{Ker } \Psi = \{(c_0, \dots, c_n) \mid \sum_{i=0}^n c_i = 0\}$$

Prenons  $Q_0(x) = (1, \dots, 1)$

$$= 1 + x + \dots + x^n$$

$Q_0(x) \perp \text{Ker } \Psi : \forall i, P_i(1) = 0$

$$\Psi(Q_0, P_i) = Q_0(1) P_i(1) = Q_0(1) \times 0 = 0.$$

Or  $(1, \dots, 1)$  vect<sup>R</sup> orthog. au moyen de  $\Psi$ .

Pour  $Q_0$ , on peut prendre n'importe quel vect<sup>R</sup> qui n'est pas dans  $\text{Ker } \Psi$ .

on a bien complété la base  $\text{Ker } \Psi$ .

$\Rightarrow$  base orthonormée de  $\mathbb{K}_n[x]$ .

Ex 15  
 3) q de mat  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , q la forme  
 bilinéaire  $\Leftrightarrow q$ .

$$\Psi(e_1, e_1) = 0 = \Psi(e_2, e_2) = \Psi(e_3, e_3).$$

$$e'_1 = e_1 + e_2 \quad , \quad \Psi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = \\ = \Psi(e_1 + e_2) + 2\Psi(e_1, e_2) + \Psi(e_2, e_2) \\ = 0 + 2 + 0 = 2 \neq 0.$$

$$\text{Soit } \mathcal{B}' = (e'_1, e_2, e_2)$$

$$\Psi(e'_1, e_2) = (110) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Psi(e'_1, e_3) = (110) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{On fait } \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(e_2, e_3) = (010) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\mathcal{B}'$  est une base car

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = e'_1 \\ v_2 = e_2 + \lambda e_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(18)

Fiche 3 Espace euclidien  
 $\hookrightarrow$  FBS def > 0

Thm évident

$$1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3, 3 \Rightarrow 4, 4 \Rightarrow 5, 5 \Rightarrow 6, 6 \Rightarrow 7, 7 \Rightarrow 1$$

équivalences dmo.

soit  $f \in \mathcal{L}(E)$        $\langle x | y \rangle$

1.  $f \in O(E)$ , ie  $\forall x, y \in E, \langle f(x) | f(y) \rangle$

2.  $f$  préserve la norme :  $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ .

1  $\Rightarrow$  2  $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

et si  $x = y, \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x | x \rangle$

$$\text{ie } \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$$

$$\text{dc } \|f(x)\| = \|x\| \quad (\text{car norme vect} \geq 0)$$

2  $\Rightarrow$  3

3.  $f$  est une isométrie ie  $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

$$2 \Rightarrow 3 \text{ soit } d(f(x), f(y)) = \|f(y) - f(x)\|$$

$$\text{on a } d(f(x), f(y)) = \|f(y) - f(x)\|$$

$$f \text{ AL} \Rightarrow \|f(y-x)\| = \|y-x\|$$

$$= d(x, y)$$

par hypoth.  
f préserve norme.

4)  $\exists$  base ortho. de  $E$  dont l'image par  $f$  est encore une base ortho.

→ Par Gram-Schmidt  $\exists$  base orthonormée.

3  $\Rightarrow$  4 on sait q'  $\exists$  base orthonormée d'après  
l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

soit  $\{v_1, \dots, v_m\}$  une base orthonormée.

soit  $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$  l'image de  $v_m$ .

soit  $i, j$  et  $i \neq j$

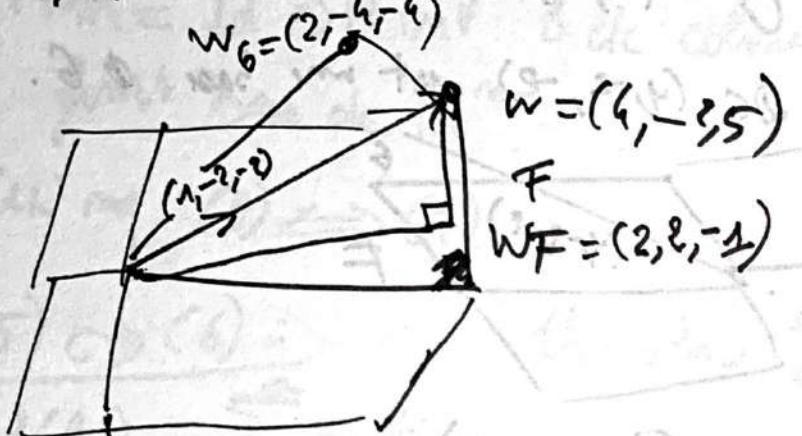
$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = ?$$

$$\begin{aligned} d(f(v_i), f(v_j)) &= d(v_i, v_j) \\ \langle f(v_i), f(v_j) \rangle + f(v_i) f(v_j) &= \langle f(v_i - v_j), f(v_i - v_j) \rangle \\ &= \langle f(v_i), f(v_i) \rangle + \cancel{\langle f(v_j), f(v_i) \rangle} - 2 \langle f(v_i), f(v_j) \rangle \\ &\quad + \langle f(v_j), f(v_j) \rangle \\ \therefore (d(f(v_i), f(v_j)))^2 &= (d(v_i, v_j))^2 \end{aligned}$$

+ ex 4

(20)

dc  $(-1, -2, -2)$  est une base de  $\mathcal{G}$



On cherche  $w_F \in \mathcal{F}$  tq  $\langle w_F, w - w_F \rangle = 0$

$$w - w_G = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$w - w_G \in \mathcal{F} ; (2 \times 2 - 2 \times 2 - 2 \times (-1)) = 4$$

$$\& \text{d}\perp \quad \langle w - w_G, w_G \rangle = 2 - 4 + 2 = 0$$

par ce q' m'aide :

$$\text{dc } w_F = w - w_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en général si  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\perp \oplus \mathcal{G}$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{E}, p_{\mathcal{E}}(x) + p_{\mathcal{G}}(x) = x$$

$$\text{dc } d(w, \mathcal{F}) = d(w, w_F)$$

$$= \|w - w_F\| = \|w_G\|$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{56} = 6$$

$$3. \quad w_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w = w_F + w_G.$$

Compléter  $w_F$  en une base orthogonale de  $\mathcal{F}$ .

on cherche un vect<sup>e</sup>  $(x, y, z) \neq 0$  appartenant à  $\mathcal{F}$  & orthogonal à  $w_F = (2, 2, -1)$ .  
Ce vecteur doit vérifier le syst<sup>e</sup>:

$$\begin{cases} \text{EF} \rightsquigarrow x - 2y - 2z = 0 \\ \text{orthog} \rightsquigarrow 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 6y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 4z \\ z = -2y \end{cases}$$

P @ le vecteur  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  convient.

6n a dc construit une base orthonormale  
de  $\mathbb{R}^3$  adapté à la décomposition  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in F}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F^\perp = G}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{base orthogonale.}} \right\}$$

4. de  $\mathcal{B}$ , déterminer les mat de  $P_F$  &  $P_G$   
des bases canoniques.

•  $\text{Mat}_{\mathcal{D}}(P_F)$ ?  $P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}}$  et  $P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}}$   
Appliquer chgt de base.

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(P_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en effet } P_F|_F = \text{Id}$$

et  $F|_{F^\perp} = 0$ .

$$P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = P.$$

$$\text{Et } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

Donc  $P^{-1} = \frac{1}{g} \cdot P$

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{Mat}_{\mathcal{D}}(P_F)} (\mathbb{R}^3, \mathcal{D})$$

$\downarrow P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}}$        $\downarrow P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}}$

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}_c) \xrightarrow{\text{Mat}_{\mathcal{D}_c}(P_F)} (\mathbb{R}^3, \mathcal{D}_c)$$

$$P_{\mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}} = \text{Mat}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_c}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

FF chgt de base

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}_c}(P_F) = P \cdot \text{Mat}_{\mathcal{D}}(P_F) \cdot P^{-1}$$

$$\text{de } \text{Mat}_{\mathcal{D}_c}(P_F) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

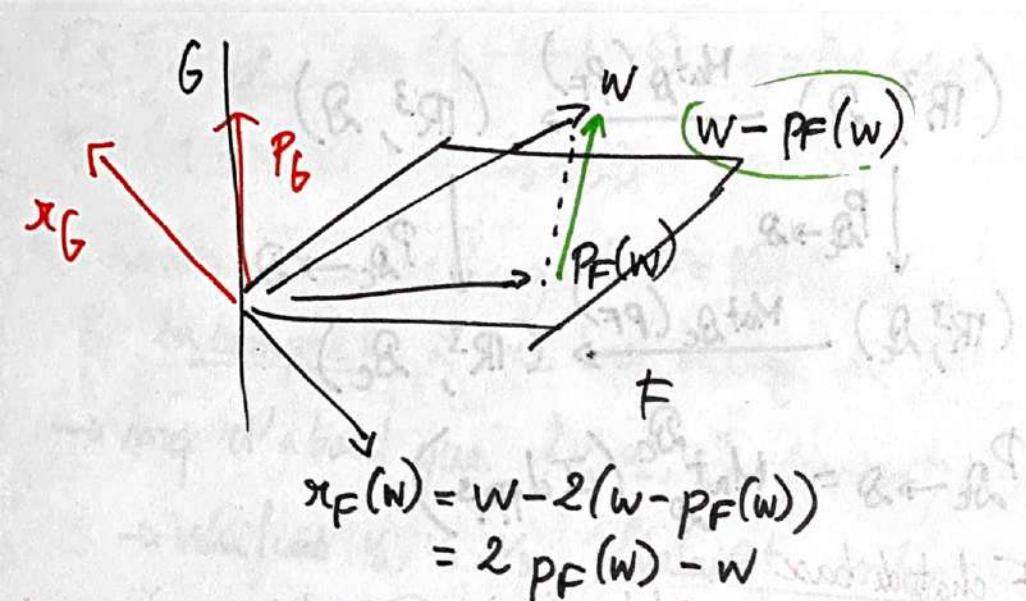
$$\text{De m } \text{Mat}_{\mathcal{D}}(P_G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} P_G|_F = 0 \\ P_G|_{F^\perp} = \text{Id} \end{cases}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}_c}(P_G) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1-5S)(1-3S) \frac{1}{2} = (7S)$$

$$(1-3S)(1-3S) \frac{1}{2} = (7S)$$

$$(1-3S)(1-3S) \frac{1}{2} = (7S)$$



$$x_F(w) = w - 2(w - PF(w)) \\ = 2PF(w) - w$$

$$x_F|_F = \text{Id} \quad x_F|_G = -\text{Id}.$$

$$\text{De m}\hat{\text{e}} \quad x_G(w) = 2p_G(w) - w.$$

$$x_G|_G = \text{Id} \quad \& \quad x_G|_F = \text{Id}$$

3) Matrice de réflexion orthogonale  $x_F$  au plan  $F$  de base  $D_F$  de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(x_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(x_F) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 9 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(x_G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(x_F)$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}^3}(x_G) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -9 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 5: 1.  $v_1 = (4, -1, -3, +4)$ ;  $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$ ;  $v_3 = (1, 2, -2, -1)$ ;  $v_4 = (1, 0, 0, 3)$

$$\langle w_2, w_1 \rangle = 0 \text{ i.e. } \langle v_2, v_1 \rangle = \alpha \langle v_4, v_1 \rangle$$

$$\text{dc } \alpha = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_4, v_1 \rangle} = 0$$

2) Trouver base orthog. de  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

& la compléter à une base orthog. de  $\mathbb{R}^4$ .

→ mq d'abord que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  forment base de  $F$ .

→ vérifions  $v_1, v_2, v_3$  linéairet indép.:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = -2\beta \\ \alpha = 2\beta \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

De  $\{v_1, v_2, v_3\}$  forme une base de  $F$ .

→ Appliquons Gram-Schmidt.

on construit une base orthonormale de  $F$ , notée  $w_1, w_2, w_3$ .

$$w_1 = v_1 \quad , \quad w_2 = v_2 - \alpha w_1$$

et  $\alpha$  vérifiant condit.  $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$

$$\text{dc } w_2 = v_2$$

$$w_3 = v_3 - \alpha v_2 - \beta v_1, \text{ si } \alpha \text{ & } \beta \text{ vérifient}$$

$$0 = \langle w_3, v_2 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle - \alpha \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$0 = \langle w_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle - \beta \langle v_3, v_2 \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \\ \beta = \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \langle v_2, v_2 \rangle = 1 \times 1 + (2 \times 2) + (-2 \times -2) \end{array} \right. = 10$$

De  $w_3 = v_3 + \frac{1}{5}v_2 - v_1$ ; pour simplifier on peut choisir

$$w_3 = 5w_3 = 5v_3 + v_2 - 5v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La base  $(v_1, v_2, w_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$  est une base orthogonale de  $F$ .

Compléter la base orthog. de  $\mathbb{R}^4$ .

on cherche  $(x, y, z, t) \neq 0 \in \mathbb{R}^4$  orthogonal

$$\text{à } \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{array} \right).$$

$(x, y, z, t)$  doit vérifier le système:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y-2z-t=0 \\ x-3y-z+9t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-3z-2t=0 \\ -4y-8z+8t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 4-3z-2t=0 \\ -4-2z+2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-3z-2t=0 \\ z=0 \end{cases}$$

on peut choisir  $\vec{v} @ (x, y, z, t)$  où  $t = 1$ .

$$\text{Dc } z=0, y=2. \quad x=-y-z-t = -2-1-3 = -5$$

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

base orthogonale de  $\mathbb{R}^4$  adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus F^\perp.$$

b) Calculer  $P_F(x)$  et  $P_{F^\perp}(x)$ , où  $P_G$  dénote proj. orth de  $\mathbb{R}^4$  sur  $G$ ,  $G$  svr de  $\mathbb{R}^4$

$$P_F(x) = ? \quad P_{F^\perp}(x) = ?$$

$$\underline{\text{Mat}_D P_F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ & } \underline{\text{Mat}_D P_{F^\perp}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Décomposer  $x = (4, -1, -3, 4)$  ds la base  $D$  & appliquer  $\text{Mat}_D P_F$  &  $\text{Mat}_D P_{F^\perp}$ .

on cherche  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  vérifiant:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ a+2b-3c+d=-1 \\ a-2b-7c=-3 \\ a-b+9c+d=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ a+2b-3c+d=-1 \\ a-2b-7c=-3 \\ a-b+9c+d=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ b-4c+5d=-5 \\ -3b-8c+3d=-7 \\ -2b+8c+9d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3d=4 \\ b-4c+5d=-5 \\ -20c+18d=-22 \\ 14d=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5+\frac{4 \times 10}{14} = \frac{1}{7} + \frac{25}{7} = \frac{25}{7} \\ c=\frac{1}{7} + 11 \div 10 = \frac{32}{70} = \frac{16}{35} \\ d=-5/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 16/35 \\ -5/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathbb{Q}}(P_F(\alpha)) = \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(P_F) \circ \text{Mat}_{\mathbb{Q}}(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 16/35 \\ -5/7 \end{pmatrix}$$

$$P_F(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{16}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$P_{F+}(\alpha) = -\frac{5}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 6 E @ dim finie & non scalaire

comme produit scalaire est non-dégénératif.

(R) :  $u \in O(E)$  :  $O(E) = \{f \in L(E) \mid$

$\ker u = \{0\}$  &  $u$  est un isomorphisme.

$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .

$\rightarrow u|_F$  est aussi un isomorphisme sur  $F$ .

1. Soit  $F$  stable de  $E$ . Moi si  $F$  est stable par  $u \Rightarrow F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

Dé  $\exists y' \in F \mid y = u(y) \quad u \in O(E)$

$\exists x \in F^\perp \quad \langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y' \rangle = 0$   
car  $x \in F^\perp$  &  $y' \in F^\perp$

De  $u(x) \in F^\perp$  &  $u$  stable de  $F^\perp$ .

$[u(F) = F \quad u(F^\perp) = F^\perp]$

Si  $B$  est une base  $B = B_F \cup B_{F^\perp}$

$\Rightarrow \text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{B_F}(u) & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{B_{F^\perp}}(u) \end{pmatrix}$

Premièrement, mon  $u$  est un isomorphisme

$u: E \rightarrow E$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E.$$

Soit  $x \in \ker u$ .

$$u(x) = 0$$

$$\text{Alors } \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$$

$$= \langle 0, u(y) \rangle = 0$$

2) Mg si  $\lambda$  (VP) nulle de  $u \Rightarrow \lambda = \pm 1$ :

$$\text{Mg } \text{Spec}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$$

$\text{Spec}_{\mathbb{R}}(u) = \{ \text{VP nulles de } u \}$ .

avec  $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(u)$  alors  $\exists x \in E \setminus \{0\}$ ,

$$\text{dc } \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle \stackrel{u \in O(E)}{=} u(x) = \lambda x. \quad \text{D+}, \quad \text{P} \quad \boxed{\text{Th Range}}$$

comme  $u(x) = \lambda x$ , on obtient aussi:

$$\|u(x)\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2,$$

comme  $\lambda \neq 0$ ,  $\|x\|^2 \neq 0$  (car  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est pdt scalaire)

$$\text{dc } \lambda^2 = 1 \quad \text{dc } \lambda \in \{\pm 1\}.$$

3) Mg  $\ker(\text{id}_E - u)$  &  $\text{Im}(\text{id}_E - u)$  soit orthogonx & supplémentaires de  $E$ .

avec  $x \in \ker(\text{id}_E - u)$  &  $y \in \text{Im}(\text{id}_E - u)$

$$\text{Mg } \langle x | y \rangle = 0.$$

$\exists y' \in E \mid y = y' - u(y)$ . car image. dc  $y \in \text{Im}(\text{id}_E - u)$

$x \in \ker(\text{id}_E - u) \Rightarrow x - u(x) = 0 \Rightarrow x = u(x)$  ou  $\text{Im}(\text{id}_E - u) \cap \ker(\text{id}_E - u) = 0$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, y' \rangle - \langle x, u(y') \rangle \\ &= \langle x, y' \rangle - \langle u(x), u(y') \rangle \\ \text{u} \in O(E) \downarrow &= \langle x, y' \rangle - \langle x, y' \rangle = 0 \end{aligned}$$

D+, P Th Range

$$\dim \ker(\text{id}_E - u) + \dim \text{Im}(\text{id}_E - u) = \dim E$$

dc ces 2 espaces st orthogonx & supplémentaires.

4) Mg  $(\text{id}_E - u)^2$  si  $u = \text{id}_E$ .

$$\Leftrightarrow \text{easy si } u = \text{id}_E \text{ alors } \text{id}_E - u = 0$$

$$(\text{id}_E - u)^2 = (\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E - u)$$

$$\Rightarrow (\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E - u) = 0$$

$$\forall x \in E, (\text{id}_E - u)((\text{id}_E - u)(x)) = 0$$

$$\forall x \in E, (\text{id}_E - u)(x) \in \ker(\text{id}_E - u)$$

$$\text{dc } \text{Im}(\text{id}_E - u) \subset \ker(\text{id}_E - u)$$

$$\text{Im}(\text{id}_E - u) \cap \ker(\text{id}_E - u) = 0$$

P (93).

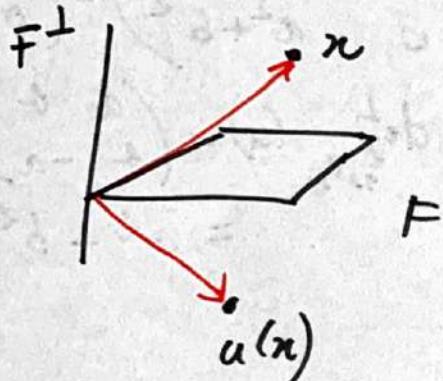
Dc  $\text{Im}(\text{id}_E - u) = \{0\}$  &  $\ker(\text{id}_E - u) = E$

Dc  $u = \text{id}_E$ .

5. Mg  $u^2 = \text{id}_E$  si  $u$  est une symétrie  
orthogonale.

Rp  $u$  symétrie orthogonale :

$$E = F \oplus F^\perp \quad | \quad u|_F = \text{id} \quad \& \quad u|_{F^\perp} = -\text{id}.$$



$\Leftarrow$  Voir que  $u^2|_F = \text{id}$  &  $u^2|_{F^\perp} = \text{id}$  dc  $u^2 = \text{id}$ .

$\Rightarrow E = \ker(\text{id}_E - u) \oplus \text{Im}(\text{id}_E - u)$

(P 49 3)  $F = \ker(\text{id}_E - u)$  "  $\ker(\text{id}_E - u)^\perp$

$u|_F = \text{id}$  ( $\forall x \in E \quad (\text{id}_E - u)(x) = 0 \Rightarrow x = u(x)$ )  
soit  $y \in \text{Im}(\text{id}_E - u)$ ;  $\exists y' \in E \mid y = y' - u(y')$

$$u(y) = u(y') - u^2.$$

Dc  $u|_{F^\perp} = -\text{id}$ .

Dc  $u$  est la symétrie orthogonale

$\mathcal{P}$  à  $\ker(\text{id}_E - u)$

Ex 7 Etude  $O(2) = O(\mathbb{R}^2)$

$(e_1, e_2)$  base canonique

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ rotation d'angle } \varphi$$

$\rho_v$  réflexion d'axe  $v^\perp$

$$\rho_v(v) = -v$$



1. soit  $u \in O(\mathbb{R}^2)$ ,  $\det u = -1$ .

Mg  $u$  est une réflexion.

$$\text{Mat}_u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad ad - bc = -1$$

$$u \in O(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = -1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

On ut mq u est réflexion orthog  
ie  $P^{-1} \in G$  tq  $\boxed{u^2 = id}$

$$(\text{Mat}(u))_{\epsilon_1, \epsilon_2}^2 = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mq } \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ d^2 + bc = 1 \\ ac + dc = 0 \\ ab + bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ d^2 + bc = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + d^2 = 0 \\ a^2 + bc = 1 \\ (a+d)^2 = 0 \\ b(a+d) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a+d)^2 + (b-c)^2 &= 0 \\ \Rightarrow a+d &= 0 \quad \& \quad b-c = 0 \\ \Rightarrow \text{Mat}_{\epsilon_1, \epsilon_2}(u) &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\& -a^2 - b^2 = -1.$$

$$\text{Mat}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^2(u) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{car det}_{\epsilon_1, \epsilon_2}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1 = a^2 - b^2 = 1$$

$$\text{NB: } (a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 \quad (a^2 + d^2 = 1)$$

$$= a^2 - 2 + 2bc + d^2$$

$$= \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}_2 - b^2 - c^2 - 2 + 2bc$$

$$= -b^2 - c^2 + 2bc$$

$$= -(b-c)^2$$

Suite en 1 :

3  $\Rightarrow$  5

On suppose  $f$  est une isométrie'  
ie,  $\forall x, y \in E \Rightarrow d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

soit  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $E$ ,  
on doit montrer  $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \delta_{ij}$

Rq : si on fait  $j=0$ , on a l'aire on a

④  $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$

Ceci étant, on a :

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \frac{1}{2} \left[ q(f(v_i) + f(v_j)) - q(f(v_i)) - q(f(v_j)) \right]$$

où  $q$  est la forme quad.  $\Leftrightarrow \exists \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle f(v_i), f(v_j) \rangle &= \frac{1}{2} \left[ q(f(v_i+v_j)) - q(f(v_i)) - q(f(v_j)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ q(v_i+v_j) - q(v_i) - q(v_j) \right] \end{aligned}$$

$= \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow$  de la base des

$(v_i)$  est

de  $f(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormée.

5  $\Rightarrow$  4 : trivial, on sait  $\exists$  une base  
orthonormée de  $E$ . D'après 5),

l'image par  $f$  de cette base est orthonormée.

4  $\Rightarrow$  5

$\exists \mathcal{D}$  base orthonormée de  $E$  dont  
l'image  $f(\mathcal{D})$  est une base orthonormée.

soit  $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ; soit  $\{w_1, \dots, w_m\} = f(\mathcal{D})$   
une base orthonormée de  $E$ .

On doit montrer  $f(\mathcal{D})$  est orthonormée.

$\rightarrow w_i$  s'écrivent de la base  $\mathcal{D}$  :

$$w_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k \quad k_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\langle f(w_i), f(w_j) \rangle = \langle f(\sum a_{ki} v_k), f(\sum a_{lj} v_l) \rangle$$

$$= \sum_{h, l} a_{ki} a_{lj} \langle f(v_h), f(v_l) \rangle$$

$$= \sum_{h, l} a_{ki} a_{lj} f_{hl}$$

$$= \sum_h a_{hi} a_{kj} f_{hh} \quad \underline{l=k}$$

④  $\Leftrightarrow$

$$q(f(x)) = q(x)$$

②

④

Puis, d'un autre côté on a :

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_j \rangle &= \left\langle \sum_k a_{ki} v_k, \sum_l a_{lj} v_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \langle v_k, v_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} f_{k,l} = \star\end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base.

$$\text{Dc } \langle f(w_i), f(w_j) \rangle = \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij} \quad \stackrel{\text{Dc}}{\Rightarrow} \quad {}^t X {}^t A A X = {}^t X Y \quad \Leftrightarrow {}^t A A = I$$

et que  $f(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  est

une base orthonormée.

$\xrightarrow{5 \Rightarrow 6}$  on suppose  $f$  renvoie la base orthogonale  
sur une base orthogonale.

Soit  $\mathcal{D}$  une base orthonormée de  $E$

$$\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$$

$$soit x = \sum x_i v_i$$

$$y = \sum y_j v_j$$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle f(v_i), f(v_j) \rangle$$

$$\begin{aligned}&= \sum_i x_i y_i \quad \text{on } f(v_i) \text{ est base} \\ &= \langle x, y \rangle \quad \text{car } \mathcal{D} \text{ est orthonormée. P hypothèse.}\end{aligned}$$

$$\text{si } A = \text{mat}_{\mathcal{D}}(f)$$

$$\varphi(y, w) : (\dots) A (\dots)$$

$$t(Ax)I(AY) = {}^t X Y$$

dc A est orthogonale.

$\xrightarrow{6 \Rightarrow 7}$  Soit  $M = \text{Mat}(g, \mathcal{D})$  où  $\mathcal{D}$  orthonormée

$\{f(v_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormée  
or  $\{f(v_i)\}$  sont les vecteurs colonnes de la  
matrice  $M$

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = {}^t (M x_i) (M x_j)$$

$$= {}^t X {}^t M M X_j$$

$$\begin{aligned}v_i &\rightarrow x_i \\ v_j &\rightarrow x_j\end{aligned}$$

(22)

$$\dim F = 2 \rightarrow (\text{car } \dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^3)$$

Par hypothèse,  $M$  est orthogonale Ex4:  $\mathbb{R}^2$ ,  $w = (4-2-5) \in \mathbb{R}^3$ ,  
 $\Rightarrow tMM = I$ . dc  $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = x_i x_j$   $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-2z=0\}$ .

7-1

On suppose les colonnes de la matrice  $f$  ds base orthonormée de  $E$   $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  la projct orthogonale  $w_s$  de  $w$  sur  $G$ . 1) Donner une base de  $G = F^\perp$ , déterminer

• fournit une base ortho.  $F \rightarrow$  est un hyperplan

soit  $x, y \in E$ ,  $x = \sum x_i v_i$ ,

$y = \sum y_j v_j$  &  $\mathcal{B}$  orthonormée.

$\mathcal{N} = \{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .

$G$  est dirigé par vect<sup>R</sup> normal à l'hyperplan.

$v_3 = (1-2-2)$  est un vect<sup>R</sup> normal à  $F$ .

&  $w \in F$ ,  $\langle v_3, w \rangle = 0$

$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle \sum x_i f(v_i), \sum y_j f(v_j) \rangle$  simon M procéder de la suit :

$$= \sum x_i y_j \langle f(v_i), f(v_j) \rangle. \quad (x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R}^3 \text{ tq}$$

$$(x, y, z) = (2z+2y, y, z) = y(2, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

•  $f(v_i)$  est la colonne  $v_i$

$$\text{d'après } t \text{ h} \quad = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j$$

de une base de  $F$  est donnée par

$$\{v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1)\}.$$

dc  $\dim G = 1$

$\dim F = 2$  ; (car  $\dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$ )

car base ortho  $\Rightarrow \langle x, y \rangle$

23

soit  $\{v_3\}$  une base de  $G$ .

on doit avoir  $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0$

$$v_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

$$\langle v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle =$$

$$\langle v_3, v_1 \rangle = 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\langle v_3, v_2 \rangle = 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\text{Pn } \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = -2.$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{et } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \text{Vect}^{\times}_{\text{normal}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

équation du plan.

$$G = \mathbb{R} v_3 \text{ où } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determiner la projection orthogonale  $w_G$  de  $x$

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G \quad \text{aussi } \mathbb{R}^3 = F \perp G.$$

$$x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\exists! x_F \in F, \exists! x_G \in G,$$

$$x = x_F + x_G \quad ; \quad P_F(x) = x_F; \quad P_G(x) = x_G$$

$$x = P_F(x) + P_G(x)$$

$\{v_3\}$  base de  $G$ ;  $w_G \in G$ , si écrit  
de  $w_G = \alpha v_3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\langle w, v_3 \rangle = \langle w_F + w_G, v_3 \rangle$$

$$= \langle w_F, v_3 \rangle + \langle w_G, v_3 \rangle$$

$$w_F \parallel F^\perp$$

$$\langle w, v_3 \rangle = \langle w_G, v_3 \rangle = \langle \alpha v_3, v_3 \rangle = \alpha \langle v_3, v_3 \rangle$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\langle w, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow w_G = 2v_3 = (2, -4, -4)$$

$$d(w, F) = \inf_{v \in F} d(v, w) ; \quad \widehat{d(w, F)} = \inf_{v \in F \setminus \{w\}} d(v, w)$$

$$d(w, F) = d(w, p_F(w))$$

$$p_F(w) + p_G(w) = w \Rightarrow$$

$$p_F(w) = w - p_G(w)$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} d(w, F) &= d(w, p_F(w)) = d(w, w - p_G(w)) \\ &= d(w, w - p_G(w)) \\ &= \|w - p_G(w) - w\| = \|p_G(w)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w - p_G(w) &= (4-2-5) - (2-4-1) \\ &= (2 2 -1) \end{aligned}$$



$$d(w, \overline{F}) = \inf_{v \in F} d(v, w) ; \quad (w, \widehat{F}) = \inf_{v \in F \setminus \{w\}} d(v, w) \quad 3)$$

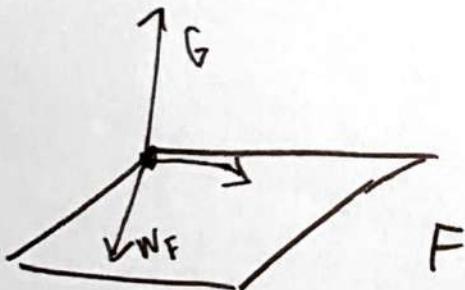
$$d(w, F) = d(w, p_F(w))$$

$$p_F(w) + p_G(w) = w \Rightarrow$$

$$p_F(w) = w - p_G(w)$$

$$\begin{aligned} d(w, F) &= d(w, p_F(w)) = d(w, w - p_G(w)) \\ &= d(w, w - p_G(w)) \\ &= \|w - p_G(w)\| = \|p_G(w)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w - p_G(w) &= (4-2-5) - (2-4-1) \\ &= (2 \ 2 \ -1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} w &= p_F(w) + p_G(w) = w_F + w_G \\ \Rightarrow w_F &= w - w_G = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Compl.  $w_F$  en une base orthogonale de  $F$ .

$$\text{on cherche } u \in F \mid \langle u, w_F \rangle = 0$$

$$v = (x \ y \ z) \in F \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}, v = (2y+2z, y, z)$$

$$u = (u_1 \ u_2 \ u_3)$$

$$v = y(2, 1, 0) + z(2, 0, 1).$$

$$\begin{cases} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 + u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -2u_1 \\ u_3 = -2u_1 \end{cases}$$

$u \in F \wedge \{w_F, u\}$  une base de  $F$ .

$$\langle w_F, u \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} >$$

$$= 4y + 4z + 2y - z = 0 = 6y + 3z = 0$$

$$\Rightarrow z = -2y$$

$$u = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Prendre } P @ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\{w_F, u\}$  forme une base orthogonale.

4. Déterminer matrice de  $p_F$  &  $p_G$   
des bases canoniques de  $\mathbb{D}$ .

calculer  $M = \text{Mat}_{\mathbb{D}^+}(\text{pf})$

$$\tilde{\mathbb{D}} = \{w_F, u, v_3\} \quad \xrightarrow{\text{e}_{F^+ \mathbb{D}}} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbb{D}_C \rightarrow \mathbb{D}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$\text{truc } P^{-1} = \frac{1}{9} + P \quad \xleftarrow{\text{AL}}$$

$$M = P^{-1} \cdot M' \cdot P$$

$$M' = P \cdot M \cdot P^{-1}$$

$$M' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$N = \text{Mat}(p_G, \tilde{\mathbb{D}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \text{Mat}(p_G, \mathbb{D})$$

$$N' = P \cdot N \cdot P^{-1}$$

car  $v_3 \in F^\perp = G$

5) Matrice de la réflexion orthogonale

rg: réflexion orthogonale  $R$  à  $F$ .

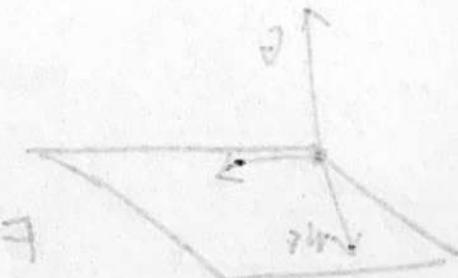
$$x = p_F(x) + p_G(x)$$

$$x(x) = p_F(x) - p_G(x) \Leftrightarrow T = M' - N'$$

matrice  $\Leftrightarrow T$

$$(x - p_F(x)) - (x - p_G(x)) = (w)_F q - w$$

$$(w - g, g) =$$



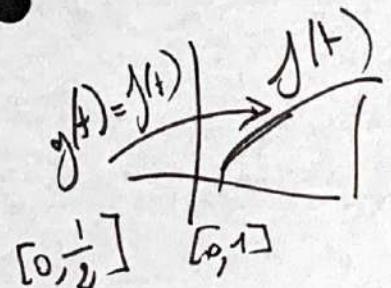
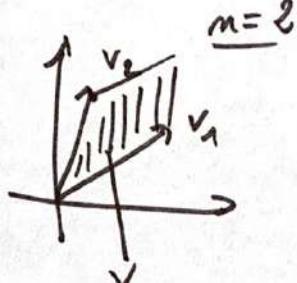
Ex2 Soit  $V = (v_1, \dots, v_m)$  sur  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$V$  : parallélépipède construit par les vect<sup>rs</sup>.

$$V = \{t_1 v_1 + \dots + t_m v_m \mid 0 \leq t_i \leq 1 \forall i\}$$

$$[0,1] \rightarrow V$$

$$(v_1, v_2) \mapsto t_1 v_1 + t_2 v_2$$



Le résultat ne dépend pas du paramétrage.