

M-52 Pr: Leonid Potyagailo

TOPOLOGIE

• CALCULS INTÉGRALES

Espaces Vectoriels Normés

1. normes, normes équivalentes, exemples classiques ; ouverts, fermés, intérieur et adhérence d'une partie, parties denses, caractérisation séquentielle ; compacité (définition séquentielle).

Fonctions entre espaces vectoriels normés

1. limite, continuité, applications lipschitziennes; image continue d'un compact ; théorème du point fixe contractant.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. équivalence des normes et continuité des applications linéaires, les compacts sont les fermés bornés.
2. Intégrales doubles et formule de Green-Riemann : intégrale d'une fonction continue sur un pavé du plan ; sous-ensembles quarrables du plan et leurs aires, exemples des parties élémentaires $(x, y) \in R^2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ avec φ_1, φ_2 continues ; intégrales sur un sous-ensemble quarrable duplan, théorème de Fubini (admis), formule du changement de variable (admise) ; champs de vecteurs sur un ouvert de R^2 , rotationnel, intégrale curviligne et formule de Green-Riemann (admise).

M52 - Topologie & Calculs d'intégrales

(C) Rappels sur Espaces Vecteurs

D₁) Un ens V est appellé espace vectoriel (e.v.) si corps \mathbb{K} il y a 2 opérations (addit & multiplication) entre les élts de V .

Addit entre 2 vecteurs

$$+: V \times V \rightarrow V, \forall x, y \in V: (x, y) \mapsto x + y$$

- $\forall x, y, z \in V:$
 - $x + y = y + x$
 - $x + (y + z) = (x + y) + z$
 - $\exists 0 \in V, 0 + x = x$
 - $\forall x \in V, \exists y \in V: x + y = 0, y := -x.$

Multiplicat entre les vecteurs

$$\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \lambda \in \mathbb{K}, x \in V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V:$
 - $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$
 - $1 \cdot x = x$
 - $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 - $\alpha(x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

D₂) Un syst fini de vecteurs e_1, \dots, e_m est libre si $\sum_{i=0}^m \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

• Un syst qv vct $\{e_i : i \in I\} = E$ est libre si tt "système fini de E est libre.

D₃) V est dim m $\in \mathbb{N}$ s'il ex \exists m vecteurs & tt syst de $m+1$ vecteurs n'est pas libre.

D₄) L'ev n'K: V & V^* st isomorphes s'il ex appli bijective $\Psi: V \rightarrow V^*$ q' respecte 2 opérations.
 si $\Psi(v) = v^*$ $\Rightarrow \Psi(u+v) = u^* + v^*$
 $\Psi(u) = u^*$ $\Psi(\lambda u) = \lambda u^*$

D₅) Un ss-ens V_1 de l'ev V est dit m-espace de V si V_1 est un ev \mathbb{K} aux m' opérations.

(Ppté) si $V_i \subset V$ ($i \in I$), un ss-ens alors $V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un m-espace de V .

D₆) Soit X un m-ens d'1 ev V .
 On note $\text{Vect}(X) = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_i \in X\}$

↳ tt les CL finis de vect \mathbb{K} de X .

Topologie et calcul intégral

M52B

Questions théoriques

- (1) Définir un espace vectoriel et donner des exemples. Démontrer que l'intersection quelconque des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Définir une norme sur un espace vectoriel. Démontrer le corollaire de l'inégalité triangulaire : $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$.
- (2) Donner la définition de la distance euclidienne sur \mathbb{R}^n . Démontrer l'inégalité de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz. En déduire l'inégalité triangulaire.
- (3) Démontrer que les espaces vectoriels l_2 et $C_2[a, b]$ sont normés.
- (4) Définir un ensemble ouvert dans V^1 . Démontrer qu'une boule ouverte est un ensemble ouvert. Démontrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ensemble ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ensemble ouvert.
- (5) Définir un ensemble fermé dans V . Démontrer que une intersection quelconque de fermés est un ensemble fermé, et qu'une réunion finie de fermés est un ensemble fermé. Démontrer que la sphère $S(a, r)$ de rayon r centrée en $a \in V$ est un ensemble fermé.
- (6) Pour un ensemble $A \subset V$ définir un point adhérent de A , l'adhérence \bar{A} de A , l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A , le bord de A , un point d'accumulation et l'ensemble $\Lambda(A)$ des points d'accumulation, un point isolé et l'ensemble des points isolés $\text{Isol}(A)$. Indiquer tous ces ensembles si $A = \mathbb{Q}$. Démontrer $x \in \partial A$ ssi pour tout voisinage U_x on a $U_x \cap A \neq \emptyset$ et $U_x \cap A^C \neq \emptyset$.
- (7) Montrer qu'un ensemble $F \subset V$ est ferméssi $\overline{F} = F$; et que \overline{F} est le plus petit sous-ensemble fermé de V contenant F . Démontrer $\partial(B(a, r)) = S(a, r)$.
- (8) Définir deux normes équivalentes. Démontrer que les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes sur \mathbb{R}^n . Expliquer pourquoi les normes de l_1 , l_2 et l_∞ ne sont pas équivalentes.
- (9) Définir un ensemble dense. Donner des exemples. Montrer que les espaces l_1 et l_2 possèdent des sous-ensembles denses dénombrables et l_∞ non. Définir un sous-ensemble nulle part dense (n.p.d) et démontrer que $A \subset X$ est n.p.dssi $\text{int}\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
- (10) Définir un espace métrique complet. Expliquer pourquoi \mathbb{Z} et \mathbb{N} sont complets sur \mathbb{R} et \mathbb{Q} non. Démontrer que l_2 (et en particulier \mathbb{R}^n) muni de la norme euclidienne est complet.
- (11) Démontrer que tout sous-ensemble A d'un espace complet X est completssi $A \subset X$ est fermé. Démontrer que $C_2[a, b]$ n'est pas complet (on peut choisir $a = -1$ et $b = 1$).
- (12) Démontrer qu'un espace métrique X non-vide est completssi toute suite de boules fermées emboîtées dont les rayons tendent vers zéro possède un point commun.
- (13) Enoncer et démontrer le théorème de Baire. En déduire qu'un espace métrique complet n'est pas une réunion dénombrables de sous-ensembles nulle part denses.

1. Dans les questions (4-7) V désigne un espace vectoriel normé.

M52

Ques Où théoriques1) a) Définir ev & donner des exemples.b) Dmg intuïtive qq ser d'un ev est ser.d) Définir une norme sur ev.d) Mq corollaire I $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$.1) a) Un espace V est espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} s'ily a 2 opérations (addit & multiplicat) entre les élts de V.@ \mathbb{R}^n , \mathbb{K} , \mathbb{R}^m , $\mathbb{K}^{(n)}$, $\mathbb{K}[X]$.b) si $V_i \subset V$ ($i \in I$), un ser alors $V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un ser de V.DM si $u, v \in V^*$ alors $\forall i \in I$, $u, v \in V_i$. $u+v \in V_i$; $\lambda u, \lambda v \in V_i \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \in I$ $\Rightarrow u+v \in V^*, \lambda u \in V^* \Rightarrow V^*$ est un espace de V.c) soit V ev sur \mathbb{K} , $f: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite normesi $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

d) $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

DM $\circ \|x-y\| = \|x+(-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

$\circ \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \quad (\text{idem } \|y\|-\|x\| \leq \|x-y\|)$
 $\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

D'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

2) a) Donner la déf^o de la distance euclidienne sur \mathbb{R}^n .

b) Dmg l'inégalité de Cauchy-Buniakowski-Schwarz

c) En déduire I2) a) L'espace normé $(V, \|\cdot\|_2)$ possède une distance euclidienne:
 $d(x, y) = \|x-y\|_2$ tel que $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les 3 axiomes:* $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ ** $d(x, y) = d(y, x)$ *** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

QT.

$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$

b) DM I : CBS

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 \right)^{1/2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

i.e.: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Puisque de $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ ($*$) $a \geq 0, b \geq 0$.

On pose $a = \frac{x_i^2}{\|x\|^2}, b = \frac{y_i^2}{\|y\|^2}$,

$$(*) \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2} \right) \quad (**)$$

On somme sur $i \in \{1, \dots, n\}$ dans (**),

$$\text{On a } \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{1}{2} (n+1) \quad \text{car } \frac{x_i^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum x_i^2}{\sqrt{\sum x_i^2}^2}$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\text{On a } \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\text{On a } \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

On obtient $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \quad \underline{\text{CBS}}$

② QT

c) En déduire I:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{par CBS}$$

$$\Leftrightarrow 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\| \|y\|$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3) D'après les (iv) $f_2 \in C_2[a, b]$ sont normés. b) Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $C_2([a, b])$ l'espace des f contenant \mathcal{C}_2 définie par l'ensemble des suites $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ à val^{rs} sur $[a, b]$ à L^p de \mathbb{K} . On définit $f \in C_2([a, b])$,

$u = (u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ à val^{rs} sur $[a, b]$ tq

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(n'empêche pas $(P_2(\mathbb{K}), +)$ $\oplus \begin{pmatrix} \text{inv} \\ \text{abel} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{d. stat.} \\ \text{asym.} \end{pmatrix}$ n'est pas un espace vectoriel)

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_2 &= \left(\sum |u_m+v_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum |u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum |v_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_2 + \|v\|_2. \end{aligned}$$

Donc $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

Comme $\|u\|_2 < \infty$, $\|v\|_2 < \infty$; il vient que

$\|u+v\|_2 < \infty$, soit $u+v \in P_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } \|2u\|_2 &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} |2u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|2|^2 \sum_{m=0}^{\infty} |u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |2| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |2| \|u\|_2. \end{aligned}$$

Donc $\|2u\|_2 = |2| \|u\|_2$ & $2u \in P_2(\mathbb{K})$.

(De même $\|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0$.

D'où $P_2(\mathbb{K})$ est un (iv) espace normé.

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} : \text{Mq} \quad \begin{aligned} \|f\|_2 &= 0 \Rightarrow f = 0 \quad \forall f, g \in C_2 \\ \|fg\|_2 &= |ab| \|f\|_2 \quad \forall a, b \in \mathbb{K}. \\ \|f+g\|_2 &\leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \end{aligned}$$

$$(i) \|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, \quad \forall t \text{ car } f \text{ cont.} \Leftrightarrow f = 0.$$

$$(ii) \|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2$$

$$(iii) \text{ D'après l'inégalité de Minkowski,} \\ \|f+g\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{+}{\leq} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

et Retenir

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p = \sum |a_k|^p + 2 \sum_{i,j=1}^n |a_i| |a_j|$$

(3)
QT

4) a) Définir un ensemble ouvert de V .

b) D'après boule ouverte est ensemble ouvert.

c) D'après Réunion qq d'ouverts est ensemble ouvert.

d) D'après Intersection finie d'ouverts est ensemble ouvert.

a) Soit $V \subset \mathbb{R}^m$, un sous-ensemble $D \subset V$ est ouvert

si $\forall x \in D$, la boule ouverte

$B(x, \delta) = \{y \in V : \|y - x\| < \delta\}$ centrée en x
de rayon δ est contenue dans D .

b) Moi la boule ouverte est ensemble ouvert.

$$B(a, r) = \{x \in V, \|x - a\| < r\}.$$

Pouvons $\delta = r - d(a, x) > 0$ où $x \in B(a, r)$

$$\begin{aligned} \forall y \in B(x, \delta) : d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) \\ &< d(a, x) + \delta \\ &= d(a, x) + r - d(a, x) \end{aligned}$$

$\forall y \in B(x, \delta) : y \in B(a, r)$.

c) La réunion qq de ss-ens ouverts est ouverts.

$$\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset V \Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \right) = D \subset V$$

d) si $D_i \subset V \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^k D_i \subset V$.

c) soit $x \in D \Rightarrow \exists \alpha \in A, x \in D_\alpha$.

Puisque $D_\alpha \subset V \Rightarrow \exists U_\alpha$ de n tq $U_\alpha \subset D_\alpha \subset D$.

Donc D est ouvert.

d) si $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}, x \in D_i$

puisque $D_i \subset V \Rightarrow \exists \delta_i > 0, B(x, \delta_i) \subset D_i$.

On pose $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i > 0$.

On a $B(x, \delta) \subset D_i, \forall i \in \{1, \dots, k\} \rightarrow B(x, \delta) \subset D$.

5) a) Définir un ensemble fermé de V .

b) D'après intersection qq de fermés est un ensemble fermé.

c) D'après Réunion finie de fermés est ensemble fermé.

d) D'après sphère $S(a, r)$ centrée en $a \in V$ est un ensemble fermé.

a) Un sous-ensemble $F \subset V$ est fermé si son complémentaire

$$F^c = \{x \in V, x \notin F\}$$

b) Soit: $\forall \alpha \in A, (D_\alpha)^c \subset V \Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha^c \subset V$

d'où D^c est un ouvert dc D est fermé.

c) si $(D_i)^c \subset V \Rightarrow D^c = \left(\bigcap_{i=1}^k D_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^k D_i^c \subset V$

d'où D^c est un ouvert dc D est fermé.

(Par les lois de Morgan & pour n ouverts d'après précédent).

4 QT.

d) Mg sphère $S(a, r)$ centre $a \in V$ est enfin : a) soit $A \subset V$, $a \in V$ est adhérent de A si $\forall U_a$ de a , $U_a \cap A \neq \emptyset$.

$$S(a, r) = \overline{B(a, r)} - \mathcal{B}(a, r)$$

$$= \{x \in V : \|x - a\| = r\}$$

$$S^c(a, r) = B(a, r) \cup (\overline{B(a, r)})^c$$

est la réunion de 2 r -ens ouverts est ouverte.

f) $\bar{A} = \{x \in V : x \text{ est adhérent de } A\}$

g) $b \in A$ est intérieur si $\exists U_b : U_b \subset A$.

h) $\overset{\circ}{A} = \{x \in V : x \text{ est intérieur de } A\}$.

i) $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ est le bord de A .

j) $a \in V$ est point d'accumulation si $\exists U_a$, $\text{card}(U_a \cap A) \geq 2$.

k) $\Lambda(A) = \{x \in V : x \text{ est point d'accumulation de } A\}$.

l) $a \in A$ est isolé si $\exists U_a : U_a \cap A = \{a\}$.

m) $I_{\text{isol}}(A) = \{x \in V : x \text{ est point isolé de } A\}$.

n) Pour $A = \mathbb{Q}$:

► $\bar{A} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0$, $B(x, r)$ contient rationnels.

► $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ car tte boule $B(x, r)$ contient irrationnels.

► $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

► $\Lambda(A) = \emptyset$

► $I_{\text{isol}}(A) = \mathbb{Q}$

6) a) Pn $A \subset V$, définir un point adhérent de A

b) l'adhérence de A

c) l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A

d) le bord ∂A de A

e) un point d'accumulation

f) l'ens $\Lambda(A)$ des pts d'accumulation

g) un point isolé h) l'ens pts isolés $I_{\text{isol}}(A)$

i) Indiquer tous ces ens si $A = \mathbb{Q}$.

j) Dém $x \in \partial A$ si et seulement si \forall voisinage U_x :

$$U_x \cap A \neq \emptyset \text{ et } U_x \cap A^c \neq \emptyset.$$

(adhérence = l'ens tout contenu de A)

(intérieur = l'ens tout contenu de A)

et isolé = un pt que A n'a pas pour voisin)

► l'ensemble des pts isolés

(5)

$$(x, r) \subset U \subset V$$

j) Mq $x \in \partial A$ si $\forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset$ et $U_x \cap A^c \neq \emptyset$ b) Mq $\bar{F} = \bigcap_{\substack{F \subset V \\ A \subset F}} F$ est fermé, par a) il suffit de montrer que $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

\Rightarrow soit $x \in \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ & U_x son voisinage de x .
 $U_x \not\subset A$ car $x \notin \overset{\circ}{A}$.

d'où $U_x \cap A^c \neq \emptyset$ puis $x \in \bar{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) supp t' $U_x : U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$.

$U_x \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow U_x \not\subset A \Rightarrow x \notin \overset{\circ}{A}$.

7) Mq ens $F \subset V$ est fermé si $\bar{F} = F$

f) Mq \bar{F} est le + petit ens fermé de V contenant F

c) Mq $\partial(B(a, r)) = S(a, r)$

a) $F \subset \bar{F}$ par définit de \bar{F} .

\Rightarrow Mq $\bar{F} \subset F$, si $x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ ouvert

$\exists U_x : U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin F$.

(\Leftarrow) si $x \notin F = \bar{F}$; $\exists U_x : U_x \cap F = \emptyset$ car $x \notin F$.

$U_x \subset F^c \Rightarrow F^c \subset V$ dc F est fermé.

On a $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$, mq $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$, soit $x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow \forall U_x : U_x \cap \bar{A} \neq \emptyset$

de $\exists y \in U_x \cap \bar{A}$.

U_x est un voisinage de y aussi p'sq $y \in \bar{A}$, on a $U_x \cap A \neq \emptyset$.

$\Rightarrow x \in \bar{A}$, dc \bar{A} est fermé.

\rightarrow si F est fermé q contient A : $F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$

soit $x \in F^c$ p'sq F est fermé:

$\exists U_x : U_x \subset F^c$ car $F^c \subset V \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow U_x \cap A = \emptyset$ car $A \subset F \Rightarrow x \notin \bar{A}$.

On a mq $F^c \subset \bar{A}^c \Rightarrow \bar{A} \subset F$.

c) Par 6j) on doit mq $\forall \delta > 0$:

$B(x, \delta) \cap B(a, r) \neq \emptyset \wedge B(x, \delta) \cap B^c(a, r) \neq \emptyset$.

On fixe $\delta > 0$, pose $y = a + \lambda(x-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On cherche $\lambda > 0$ tq $y \in B(x, \delta) \cap B(a, r)$.

$$\|y - a\| = \lambda \|x - a\| = \lambda r < r \text{ si } \lambda < 1 \quad r(1-\lambda) < \delta$$

$$\|y - x\| = \|a - x\| / |\lambda - 1| = r(1-\lambda) \text{ car } \lambda < 1 \quad 1 - \frac{\delta}{r} < 1 - \lambda < 1$$

g) Mq $\exists z \in B(x, \delta) \cap B^c(a, r)$, pose $z = a + \mu(x-a)$; $\mu > 1 \Leftrightarrow \|z - a\| > r$

$$\|z - x\| = \|r - \mu r\| (\mu - 1) \text{ car } \mu > 1$$

$$r(\mu - 1) < \delta$$

$$1 < \mu < 1 + \frac{\delta}{r} \Rightarrow (**)$$

⑥

8) a) Définir 2 normes équivalentes.

b) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur \mathbb{R}^m .

c) Expliquer pourquoi les normes $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ ne sont pas équivalentes.

8) a) Démontrer que pour $\|\cdot\|_i : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, 2 normes sur V ($i=1,2$)

$\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, noté $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, si et

$\exists C_1, C_2 > 0$, $\forall x \in V$:

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$$

où $C = \max(C_1, C_2)$: $\frac{1}{C} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$.

b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$

$$\begin{aligned} |x_i| \leq \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2} \leq \sqrt{m \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|^2} \\ &= \sqrt{m} \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| = \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$.

Montrer que $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

$$|x_i| \leq \|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i| \leq m \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| = m \cdot \|x\|_\infty$$

Donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq m \cdot \|x\|_\infty$

D'où par transitivité, on a bien

le résultat attendu. (sinon preuve par $\frac{\text{CBS}}{1 < n, \forall i \leq n, \|\cdot\|_3 \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2}$ QT)

c) des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes

si $\mathbb{R}^\infty = \{(x_m)\}_{m=1}^\infty$ car $(\frac{1}{m})_{m \geq 1} \in \ell_2 \setminus \ell_1$

car $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} = \infty$ et $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} < \infty$

$(\frac{1}{\sqrt{m}})_{m \geq 1} \in \ell_\infty \setminus \ell_2$ car $\sum_{m \geq 1} (\frac{1}{\sqrt{m}})^2 = \infty$

$\ell_1 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_1), \ell_2 = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2), \ell_\infty = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right)_{m \geq 1} \right\|_\infty = 1.$$

(2) a) Définir un ensemble dense.

b) Donner des exemples.

c) Mq espaces $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ possèdent des n -ens denses

dénombrables & los non. (\mathbb{E}_1 ens fermé défin.)
 \mathbb{E}_2 séparable

d) Définir n -ens nulle part dense (mpd)

e) Mq $A \subset X$ est mpd si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

a) D) Un n -ens $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

i.e. $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

f) \mathbb{Q} est dense de \mathbb{R} . \mathbb{Q}^m dense de \mathbb{R}^m .

Dans $C[a, b]$, les polynômes à coeff rationnels et denses.

c) Mq $\mathbb{E}_{\infty} = (\mathbb{R}^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ n'est pas séparable (possède n -ens dense dénombr.)

En effet, soit les suites $A = \{(a_m)_{m \in \mathbb{N}}\}$ tq $a_m \in \{0, 1\}$.

On sait que $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_0} = \text{card}(\mathbb{N})$

$\|a_m - b_m\|_{\infty} = 1$ si $(a_m)_m \neq (b_m)_m$.

Les ens $A \cap B(a, \frac{1}{2})$, $a \in A$ st disjoints

si $B \subset (\mathbb{R}^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ est dense alors chq boule $B(a, \frac{1}{2})$

contient un $b \in B$. $\text{Card}(\{B(a, \frac{1}{2}), a \in A\}) = \text{card } A$.

De B n'est pas dénombrable.

d) **D** si - ons mpd

③ Un n -ens A d'un espace métriq X est dit nulle part dense (mpd) si $\forall B(a,r) \subset X$, \exists ss-boule $B \subset B(a,r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.

e) Mq A est mpd $\Leftrightarrow \text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

(\Leftarrow) en effet, si $B(a,r) \subset X$ est une boule.

Puisq $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$, $B(a,r) \not\subset \bar{A}$.

$\Rightarrow \exists b \in B(a,r) \cap \bar{A}$.

\bar{A}^c est ouvert $\exists B' = B(b,r') \subset \bar{A}^c$.

Donc $B' \cap A = \emptyset$.

(\Rightarrow) si \forall boule $B(a,r)$ contient $B' \subset B(a,r)$

tq $B' \cap A = \emptyset$ alors $\forall x \in B'$, on a $x \notin \bar{A}$

$\Rightarrow B(a,r) \not\subset \bar{A} \Rightarrow \text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

R ④ si (X,d) espace métriq, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$,

$\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n > m_0$, $m > m_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

10) a) Définir espace métriq complet.

b) Expliquer pk \mathbb{Z} & \mathbb{N} st complets sur \mathbb{R} & \mathbb{Q} non.

c) Mq ℓ_2 (\mathbb{R}^n) muni $\|\cdot\|_2$ est complet.

d) ⑤ Un espace (X,d) est dit complet si toute de Cauchy \mathcal{C} de (X,d)

b) \mathbb{Z} et \mathbb{N} st complets sur \mathbb{R} . En effet \forall ensemble q ne contient que des pts isolés a ppté: Tte suite de Cauchy se stabilise apr.

$\exists m_0$, $\forall m, n \geq m_0$, $x_m = x_{m_0} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_{m_0}$.

e) \mathbb{Q} n'est pas complet car $\exists (q_n) \subset \mathbb{Q}$: $q_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (q_n) est Cauchy q ne \mathcal{C} de \mathbb{Q} .

f) Mq ℓ_2 est complet. Suppos $(x_i) \subset \ell_2$ est Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0$, $\forall n, m > m_0$: $\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2$ (*)

ds (*), $x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i^n - x_i^m| \leq \varepsilon$ $\forall i \in \{1, \dots, 5\}$ (**).

Par (**), $(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy $\forall i \in \{1, \dots, 5\}$. \mathbb{R} est complet \Rightarrow

$\Rightarrow \exists x_i \in \mathbb{R}$: $x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n$. On pose $x = (x_1, \dots, x_5, \dots)$; on passant à la limite si $n \rightarrow \infty$ ds (*) on a $\|x_n - x\|^2 \leq \varepsilon^2 \forall n > m_0$.

Il reste nrg $x \in \ell_2$ ic $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ (***) . Ds \mathbb{R}^n , on l'a dmqr qu'il est complet $(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2$: $x_i^2 = (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 \leq 2(x_i - x_i^n)^2 + 2(x_i^n)^2$

On ait compar. séries à termes \oplus . $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \infty$ par (*) et $\sum (x_i^n)^2 < \infty$ on $x_i \in \ell_2$

g)

Donc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, $x \in \ell_2$.

1) a) Mg t'as ens A d'un espace complet X
est complet sur $A \subset X$ est fermé.

b) Mg $C_2[a, b]$ n'est pas complet. ($a, b \in \mathbb{R}$)

a) (\Leftarrow) en effet si $(x_m) \subset A$ est une suite de Cauchy
puisq X est complet $\exists x \in X, x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$,
 $x \in \bar{A}$, $\bar{A} = A$ (A est fermé) $\Rightarrow x \in A$.

(\Rightarrow) si $x \in \bar{A}, \exists (x_m) \subset A : x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty}$

(x_m) circ $\Rightarrow (x_m)$ est Cauchy $\Rightarrow x \in A$ car A est
complet dc $\bar{A} = A$.

b) $C[a, b]$ n'est pas complet $\nexists \|f\| = \int_a^b |f(t)|^2 dt$ muni
distance $\|f-g\| = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx \right)^{1/2}$.

Conditions

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{m} \leq t \leq 1 \\ mt, & -\frac{1}{m} \leq t \leq \frac{1}{m} \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{m} \end{cases}$$

Mg (φ_m) est Cauchy do $C_2[-1, 1]$ q m'y circ pas.

• (φ_m) est de Cauchy, soit $m > n$, $\varphi_m = \varphi_n$ si $1 \geq t \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$
ie $-1 \leq t \leq -\frac{1}{m} < -\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\|^2 &= \int_{-1/m}^{1/m} (\varphi_m(t) - \varphi_n(t))^2 dt = \int_{-1/m}^{1/m} ((m-n)^2 t^2) dt + \int_{-1/m}^{1/m} (1-mt)^2 dt + \int_{-1/m}^{1/m} (-1-nt)^2 dt \\ &= \frac{(m-n)^2}{3} \frac{2}{m^3} + 2 \int_{-1/m}^{1/m} (1-2mt+m^2 t^2) dt \\ &= \frac{2}{3} \frac{(m-n)^2}{m^3} + 2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m} - 2m \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2} \right) + \frac{2m^2}{3} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^3} \right) \right) \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{4m^2}{m^3} + 2 \left(\frac{1}{m} + \frac{2m^2}{3} \frac{2}{m^3} \right) \leq \frac{2}{3} \frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \frac{8}{3} \frac{1}{m} = \left(\frac{16}{3} + 2 \right) \frac{1}{m} = \frac{8}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\|\varphi_m - \varphi_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0, \forall t \in [-1, 1], \lim \varphi_m(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$
 $\varphi \notin C[-1, 1]$, elle est discontinue en 0.

Sous par ?? $\exists f \in C[-1, 1]$ tq $\|f - \varphi_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Par l'inégalité de Minkowski

$$(\star) \left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_m(t))^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^1 (\varphi_m(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

Elle est vraie de m preuve m si φ est discontinue en 0.

$f(t) \neq \varphi(t)$ car $f(t)$ cont, $\varphi(t)$ discant. $\varphi(t) = (f(t) - \varphi(t))^2$ cont
à \mathbb{R}^* . $\exists t_0 \in \mathbb{R}^* : \varphi(t_0) = c_0 > 0$.

Par la cont de φ en 0, $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$,
 $\varphi(t) > 0$.

d'int à gauche do (∞) et minorée par $c = \sqrt{2c_0} > 0$.

Dc à droite, on doit avoir: $\|f - \varphi_m\| \rightarrow 0$ dc $f \in C[a, b]$.

12) Mq espace métriq X_{mr} est complet si la suite de boules fermées emboîtées d't les rayons tendent vers zéro partant d'un point commun.

Puisque $B_m \subset B_n$, t' contre x_m de $B_m \in B_m \forall m > n$.

Dc $d(x_m, x_n) \leq r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ alors (x_n) est de Cauchy.

Par la complétude de X : $\exists x \in X: x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$.

D'autre part t' n fixé, $x_m \in B_n$ & $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$.

De x est pt adhérent de B_n .

$\overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n \forall n. x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m, \forall y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$.

Par le m^e argument $\Rightarrow d(x, y) \leq 2r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$
au $x, y \in \underline{B_n} \forall n$.

Ex Th n boules emboîtées

soit (X, d) espace métriq **complet** ($X \neq \emptyset$) alors

t' suite de boules fermées B_m , emboîtées $B_m \subset B_{m+1}$ ($m \geq 1$), tq r_m de $B_m \rightarrow 0$,

$\exists! x \in X$ tq $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$.

13) a) Énoncer Th de Baire. b) Dmg Th de Baire.
c) id espace métriq complet n'est pas une réunion dénombr de ss-ens npd.

a) soit (X, d) un espace métriq complet (mr) alors la réunion dénombrable de ss-ens F_n fermés d'int vide est d'int vide.

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{int}(F) = \emptyset \\ \text{int}(F_n) = \emptyset \end{array} \right.$$

Sppos ce n'est pas vrai \exists boule ouverte B CF $\cap F_n \neq \emptyset$ et $\text{int}(F) \neq \emptyset$: \exists boule ouverte $B \subset F_1$

On note F_1 est formé de $F_1^c = X \setminus F_1$ est ouvert alors $B \cap F_1^c$ est ouvert.

\exists boule ouverte $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F_1$.

Quitte à diminuer r_1 , on pt spps boule fermée $\overline{B}_1 \subset B \setminus F_1$.

idem $\text{int}(F_2) = \emptyset$, $B_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ dc $\exists x_2 \in B_1 \setminus F_2$ car B_1 est ouvert. On pose $r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{2}\right)$ car B_1 est ouvert.

On pose $B_2 = B(x_2, r_2)$ vérifie $\overline{B}_2 \subset B_1$.

En effet si $y \in B_2 \Rightarrow d(y, x_2) < r_2$.

dc $d(y, x_1) \leq d(y, x_2) + d(x_2, x_1) \leq \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{2} + d(x_2, x_1) < r_1$.

Donc $\overline{B}_2 \subset B_1 \subset \overline{B}_1$.

(PR) Si k , on a une boule $\overline{B_k}$ tq $r_k \leq \frac{r_1}{2^k}$,
 $\overline{B_k} \subset B_{k-1}$.

$\text{int } F_{k+1} = \emptyset \Rightarrow \exists x_{k+1} \in B_k \setminus \overline{F_{k+1}}$.

On pose $r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{x_k - d(x_k, x_{k+1})}{2}\right)$

Par récurrence $\overline{B_{k+1}} \subset B_k \subset \overline{B_k}$ et on obtient
une suite de boules fermées imbriquées $\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$
tq rayon(B_k) = $r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Par (TH) BFE, $\exists! x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$x \in B_i \subset \overline{F_i}^c \Rightarrow x \notin \overline{F_i}.$$

d'autre part $x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. cqd

b) (Ca) TH de Baire: $X \neq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ où A_m est ss-ens npd .

X n'est pas réunion dénombrable de ss-ens npd.

DM. A_m est npd si $F_m = \overline{A_m}$ est d'int vide.

si $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ mais $\text{int}(F_m) = \emptyset$.

Par (TH) de Baire, $\text{int}(X) = \emptyset$ cqd.

car $\forall x \in X, \forall r > 0, B(x, r) \subset X$

(R)

- A ouvert : $A \subset E$, si $a \in A$, $\exists \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) \subset A$.
se $B_\varepsilon = \{x \in E, \|x - a\| < \varepsilon\}$

• Un voisinage ouvert de $x \in E$ est un ouvert $A \subset E$ contenant x .

• N_1, N_2 équivalent si $\exists c_1, c_2 > 0$,

$$\forall x \in E, N_1^{(c_1)} \subset C_1 N_2(x) \text{ et } \forall x \in E, N_2(x) \subset C_2 N_1(x)$$

• Un ε -env FCE est un fermé si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert.

• $B_\varepsilon(x)$ est ouvert, $\forall y \in B_\varepsilon(x), \exists \delta > 0, B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$.

• $A \subset E$, $x \in E$ est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

• $\bar{A} = \{x \in E \mid x \text{ point adhérent à } A\}$ (adhérence à A)

ASSE $A \subset \bar{A}$ / \bar{A} est fermé / si F fermé $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{F}$

• \bar{A} est + petit fermé qui contient A .

• $A \subset E$, $x \in E$ est point d'accumulation de A si $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a \neq x, a \in B_\varepsilon(x)$.

• $A \subset E$, $x \in \bar{A}$ $\rightarrow x$: pt accumulat

$\rightarrow x \in A$ & $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$ (pt isolé).

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x : \mathbb{N} \rightarrow E, l \in E$; x_n admet l comme limite quand $n \rightarrow \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| < \varepsilon$ ie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - l\| = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \text{ voisinage ouvert de } l \in E, \forall m \geq N : x_m \in \varepsilon$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$

• $A \subset E, n \in E$,

(i) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists a_n \text{ suite de } A, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$

(ii) n pt d'acc de $A \Leftrightarrow \exists$

• x_n suite de \mathbb{R}^p , $x_0 \in \mathbb{R}^0, \dots, x_n = (x_1, \dots, x_p)$, $l \in \mathbb{R}^p$.

R $l = (l^1, \dots, l^p) \Rightarrow \lim x_n = l$ pu que $1 \leq i \leq p \Rightarrow \lim x_n = l^i$.

A si $\lim a_n = l \Rightarrow \exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_R(l)$

P $f : A \subset E \rightarrow F, a$ pt acc de A :

P $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$

E $\lim f(x) = l \Leftrightarrow \lim \|f(x) - l\| = 0$

L ASSE $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l / \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \cap A \setminus \{a\} : f(x_n) \in B_\varepsilon(l)$

S $\forall \delta \text{ env de } l, \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \delta$

① $\forall \delta \text{ env de } l, \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \subset f^{-1}(l)$

O Généralis de limites / addit / mult / composé / inverse

P $f : A \subset E \rightarrow F, a \in A, f \text{ cont}^A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

O si a pt acc de $A \Rightarrow f \text{ cont}^A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

G ASSE $f \text{ cont en } a / \forall \varepsilon > 0, \forall x \in B_\varepsilon(a) \cap A : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

I $\forall \delta \text{ env de } f(a), \exists n \in \mathbb{N}, f(\mathbb{N} \cap A) \subset \delta$

E $\forall \delta \text{ env de } f(a), \exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \cap A \subset f^{-1}(\delta)$

f : A \rightarrow F, f \text{ cont}^A si f cont en chq pt. $a \in A$.

ASSE $f \text{ cont}^A / \forall \delta \text{ env de } f(a), \exists n \in \mathbb{N}, f(\mathbb{N} \cap A) \subset \delta$

$f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont}, b \in \mathbb{R}$,

$\{x \in A \mid f(x) < b\} = A \cap U$

$\{x \in A \mid f(x) \leq b\} = A \cap V$ pu ouvert $U \subset E$
pu fermé $V \subset E$

de $\hat{m} \Leftarrow f(a) = b$.

• $(E, \|\cdot\|)$ espace ACE , x_m do ss-ons X , $\forall m \in \mathbb{N}$:

$x_m \in X$. y_m ste ext^{te} x_m si $\exists A$ st^r \nearrow :

$k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $y_m = x_{k(m)} = x_{km}$

• A borné $\nparallel \|\cdot\|$ si $\exists R \in \mathbb{R}$, $A \subset B_n(0) \Leftrightarrow \|x\| < R$.

• suite x_m do E est bornée ($\nparallel \|\cdot\|$) ie $\exists R \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \|x_m\| < R$.

• si X ons, $f: X \rightarrow E$, f borné si $\{f(x) | x \in X\}$ est borné,

$\|f(x)\| < R$. A est compact si tte suite de A admt

ssuite $\textcircled{1}$ do A .

• $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{st} \nearrow \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, k(m) \geq m$.

• $E \textcircled{1}$, $A \subset E$ ss-ons, $N_1, N_2: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $N_1 \sim N_2$ alors A borné $\nparallel N_1$ si A borné $\nparallel N_2$.

• $A \subset \mathbb{R}^p$ est COMPACT soi A fermé et borné.

• $f: A \subset E \rightarrow F$ cont & A compact $\Rightarrow f(A)$ compact.

• $A \subset E$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow \exists x_m, x_N \in A, \forall y \in A:$

$$f(x_m) \leq f(y) \leq f(x_N)$$

• soit N norme n $\mathbb{R}^p \Rightarrow N: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est cont $\nparallel \|\cdot\|_\infty$.

• si N norme n $\mathbb{R}^p \Rightarrow N \sim \|\cdot\|_\infty$.

• $N_1, N_2: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow N_1 \sim N_2$.

R

A

P

P

E

L

S

2

T

O

P

O

L

O

G

E

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

M.52 - Topologie & Calculs d'intégrales

(C) Rappels sur Espace Vectoriel

D₁: Un ens V est appellé espace vectoriel (e.v.) si corps \mathbb{K} s'il y a 2 opérations (additif & multiplicat) entre les élts de V .

Additif entre les vecteurs

$$+: V \times V \rightarrow V, \forall x, y \in V: (x, y) \mapsto x + y$$

- $\forall x, y, z \in V:$
 - $x + y = y + x$
 - $x + (y + z) = (x + y) + z$
 - $\exists 0 \in V, 0 + x = x$

$$\bullet \forall x \in V, \exists y \in V: x + y = 0, y := -x.$$

Multiplicat entre les vecteurs

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \lambda \in \mathbb{K}, x \in V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V:$
 - $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$
 - $1 \cdot x = x$
 - $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 - $\alpha(x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

D₂: Un syst fini de vecteurs e_1, \dots, e_m est libre si $\sum_{i=0}^m \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

• Un syst qv rct $\{e_i : i \in I\} = E$ est libre si tt "système fini de E est libre.

D₃: V est dim $m \in \mathbb{N}$ si \exists \underline{m} vecteurs & tt syst de $m+1$ vecteurs n'est pas libre.

D₄: 2 ev n \mathbb{K} : V & V^* st isomorphes s' \exists appli bijective $\Phi: V \rightarrow V^*$ q respecte les opérat.

si $\Phi(v) = v^*$ $\Rightarrow \Phi(u+v) = u^* + v^*$
 $\Phi(u) = u^*$ $\Rightarrow \Phi(\lambda u) = \lambda u^*$

D₅: Un ss-ens V_1 de l'ev V est dit ss-espace de V si V_1 est un ev \mathbb{K} aux m^e opérat.s.

Ppté: si $V_i \subset V$ ($i \in I$), un ssv alors $V^* = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un ss-espace de V .

D₆: Soit X un ss-ens d'1 ev V .

Gm note $\text{Vect}(X) = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_i \in X\}$

↳ Hes. CL finis de vectrs de X .

① Espaces Vectoriels normés

§ 1. Déf & Ex

⑤ Soit V un \mathbb{K} , $f \parallel \cdot \parallel : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite **norme** si

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ homogénéité
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cor L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ possède distance (métrique) :

$$d(x, y) = \|x-y\|.$$

Rép Une distance $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq

- a. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- b. $d(x, y) = d(y, x)$
- c. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Cor $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

⑥ (Inégalité de Cauchy-Bouniahouki-Schwarz)

$$|\sum x_i y_i| \leq \sum |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} \quad (\text{CSI})$$

⑦ Produit scalaire Euclidien

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire sur les \mathbb{R} .

$$\text{et } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

⑧ Produit scalaire hermitien (cas complexe)

$V = \mathbb{C}^n$, le produit scalaire est linéaire sur x & on vérifie

- 1) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \lambda \in \mathbb{C}$
- 2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 3) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$$\rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i ; \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i \bar{x}_i} = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

$$\bullet l_2 = \{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} ; x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$$

$$\bullet l_1 = \{ \dots \dots \dots, \sum |x_i| < \infty \}$$

$$\bullet l_\infty = \{ \dots \dots \dots, \exists c > 0 : |x_i| < c \}$$

$$\bullet C[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont } f \}$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

§ 2. Topologie sur espace vectoriel normé

⑨ Un ensemble $D \subset V$ est ouvert si $\forall x \in D$ la boule ouverte:

$B(x, r) = \{ y \in V ; \|y-x\| < r \}$ centrée en x de rayon r est contenue dans D :

$\rightarrow B(x, r)$ est appelé voisinage de x noté U_x .

⑩ Un ensemble $F \subset V$ est fermé si son complémentaire

$$F^c = \{ x \in V, x \notin F \}$$
 est ouvert.

Notao si $D \subset V$ est ouvert. On le note $D \subset V$.

(P1) 1) La réunion $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ de ss-ens ouverts est ouvert.
 V ens d'indices A , on a:

$$\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset V \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \subset V.$$

$$2) \text{ si } D_i \subset V \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^k D_i \subset V.$$

(Δ 2) pas vraie en général) par cont^o mbr des ens.

(P1') • soit $F_\alpha \subset V$ ens V fermé $\forall \alpha \in A$
 alors $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé de V .

• soit $F_i \subset V$ est fermé ($i=1, \dots, k$)

alors $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ est fermé de V .

④ Une famille ss-ens ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V est topologie de V si axiomes vrais:

$$1) \emptyset, V \in \mathcal{U}$$

2) une réunion qq d'ouverts est un ouvert.

3) une intersection finie d'ens ouverts est un ouvert.

⑤ • soit $A \subset V$, $a \in V$ est adhérent de A si
 ✓ voisinage U_a de a , $U_a \cap A \neq \emptyset$.

• $a \in V$ est point d'accumulation de $A \subset V$ si

✓ voisinage U_a de a , $\text{card}(U_a \cap A) \geq 2$.

••• $a \in A$ est isolé si: $\exists U_a: U_a \cap A = \{a\}$.

••• $b \in A$ est intérieur si: $\exists U_b: U_b \subset A$.

→ L'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$ (ou $\text{int}(A)$) est ss-ens de pt^s intérieurs de A . e.g. $A \subset V$ si $\overset{\circ}{A} = A$.

••• L'ens $\bar{A} = \{x \in V : x \text{ est adhérent de } A\}$ est l'adhérence de A .

→ $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ est le bord de A . (frontière de A , $F_A(A)$).

⑥ Verif alors $\forall A, F \subset V$, on a :

1) $x \in \partial A$ si ✓ voisinage $U_x : U_x \cap A \neq \emptyset \wedge U_x \cap A^c \neq \emptyset$.

2) F est fermé si $\bar{F} = F$

3) \bar{A} est le + petit ss-ens fermé contenant A : $\bar{A} = \bigcap_{F \subset V \text{ est fermé}, A \subset F} F$

⑦ Ver & $\| \cdot \|_i : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\&$ normes de V ($i=1, 2$)

$\| \cdot \|_1$ est équivalente à $\| \cdot \|_2$, noté $\| \cdot \|_1 \sim \| \cdot \|_2$, si $\exists c_1, c_2 > 0, \forall x \in V$:

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$$

ou bien $C = \max(c_1, c_2)$:

$$\frac{1}{C} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2.$$

⑧ NB: si V est dim finie \Rightarrow 3 normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ et équivalentes ($\| \cdot \|_1 \sim \| \cdot \|_2 \sim \| \cdot \|_\infty$).

§ 3. Sous-ensembles denses & nulle part denses

soit X un espace métrique muni de la distance $d(\cdot, \cdot)$

① Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit dense si $\overline{A} = X$.

i.e. $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

② Un espace X est séparable si \exists sous-ensemble dense dénombrable.

Ex. VB : $A = \{(a_m)_{m \in \mathbb{N}}\}, a_m \in \{0, 1\}$

$$\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_0} = \text{card}(\mathbb{N})$$

③ Un sous-ensemble A d'un espace métrique (ou e.v.m.), X est dit nulle part dense (n.p.d.)

si $\forall B(a, r) \subset X, \forall a \in X, \forall r > 0,$

\exists sous-boule $B \subset B(a, r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.



N.B.: Tous les ensembles contenant que pts isolés sont n.p.d.

④ A est n.p.d. si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$

Chap II : Espace de Banach

Lesson 1 : Espaces Métriques complets

§ 1 : Déf & @

① soit (X, d) espace métrique (e.g. e.v.m), une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pts $x_n \in X$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n > n_0, m > n_0$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

② Toute suite ① est de Cauchy. (réciproque vraie pr. espace complet).

③ Un espace (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy ① do (X, d) .

④ soit (X, d) est complet, un sous-ensemble $A \subset X$ est complet si A est fermé do X .

§ 2. Th sur les boules emboîtées, Th de Baire

Th sur les boules emboîtées

soit (X, d) espace métrique complet mv alors \forall suite de boules emboîtées $B_m \subset B_{m-1} (m \geq 1)$ tq rayon r_m de $B_m \rightarrow 0$, \exists point $x \in X$ tq $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$.

↳ Réciproque vraie.

Th de Baire

soit (X, d) espace métrique complet mv alors \forall réunion dénombrable F de sous-ensembles F_m formés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

$$\left. \begin{aligned} F &= \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \\ \text{int}(F_m) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{int}(F) = \emptyset.$$

Coro: $X \neq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ où A_m est ss-ens mpd.

X n'est pas une réunion di de ss-ens mpd.

§3. Fonctions cont entre les espaces métriques

$f: X \rightarrow Y$ f entre 2 espaces métriques $X, Y; d_X, d_Y$.

① $\lim_{\substack{x \in A \\ x \rightarrow a}} f(x) = A \in Y \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), A) < \varepsilon.$

② $f: X \rightarrow Y$ est cont en $x_0 \in X$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

③ $f: X \rightarrow Y$ est cont sur X si $\forall x_0 \in X$,
 f cont en x_0 .

(Prop) $f: X \rightarrow Y$ cont sur X si \forall ouvert $V \subset Y$
 $f^{-1}(V)$ l'ens $f^{-1}(V) \subset X$.

TBFÉ

TH Baire

$\circ d(x_m, x_n) \leq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

\circ de (x_n) de Cauchy

$\circ n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$, idem on \Rightarrow Cauchy

$\circ \overline{B_n} = B_n \Rightarrow x \in B_n, x \in \overline{B_n}$

$\circ \forall y \in \overline{B_n} \Rightarrow d(x, y) \leq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Cor TH Baire

$X \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ \leftarrow non npd

X n'est pas fermé il est non pd

A npd si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$
 $= \text{int}(F_n)$

$\forall X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = V F_n$

mais $\text{int}(\overline{F_n}) = \emptyset$. \square

Par TH Baire, $\text{int}(X) = \emptyset$

$A \subset X$ et dense $\Rightarrow \overline{A} = X$.

$(\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$

Q dense $\Rightarrow R$. Is C_{a,b} pd

pas ne possède pas de pd-ns

dénombrable (éparable)

$F_\alpha = (R^\infty, \| \cdot \|_\alpha)$

$A_n = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$|A| = \text{card}(\mathbb{R}) - \aleph_0$

$\|x_m - x_n\|_\alpha = 1$ si $x_m \neq x_n$

$A \cap B(a, \frac{1}{2})$, $a \in A$ bts

$\in B \subset (R^\infty, \| \cdot \|_\alpha)$ et

dense \Rightarrow qd bts $(a, \frac{1}{2})$ contient

$b \in B_a$

$\text{card}(\{B(a, \frac{1}{2}), a \in B\}) = \text{card}(A)$

B n'est pas dénombr.

ACX

spp pas vrai: $\text{int}(F) \neq \emptyset$

\exists ble ouvert $B \subset F$, $\text{int}(F) = \emptyset$

de $B \not\subset F$, $\exists x \in B \setminus F$

F fermé de $\overline{F} = X \setminus F$ ouvert

$\Rightarrow B \cap \overline{F}$ ouvert

$\exists B_1 = B(x_1, r_1) \subset B \setminus F$

$B_1 \subset B \setminus F$. idem B_2

$$r_2 \leq \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1 - d(x_1, x_2)}{c}\right)$$

$B_2 \subset B_1$; $d(y, x_2) \leq \dots$

$$\text{de } \overline{B_2} \subset B_1 \subset \overline{B_1}$$

$$(PR) \quad \overline{B_2} \text{ tq } x_2 \leq \frac{r_1}{2^k}$$

$\overline{B_k} \subset B_{k-1}$, $\text{int} F_{k+1} = \emptyset$

$$\Rightarrow \exists x_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$$

$$r_{k+1} \leq \min\left(\frac{r_1}{2^{k+1}}, \frac{r_k - d(x_k, x_{k+1})}{c}\right)$$

$$\overline{B_{k+1}} \subset B_k \subset \overline{B_k} \Rightarrow \overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$$

$$r_k \leq \frac{r_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Par TH BFE, } \exists x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

$$x \in B_i \subset \overline{F_i} \Rightarrow x \notin F_i$$

$$\text{Et } x \in B \subset F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

$ACX \leftarrow \text{npd}$ et $B(a, r) \subset X$, $\exists s < b$

$B \subset B(a, r)$ tq $A \cap B = \emptyset$.

(X, d) est complet si le sdc \square de (X, d)

\mathbb{Z} & \mathbb{N} complets de \mathbb{R} .

Voir qd pds: Le sdc est stable apr

Mq f^n ons ACX, X espace complet
 \Rightarrow ACX est fermé.

\Leftarrow $(x_n) \subset A$ sdc \Rightarrow $x \in A$ complét

$\exists x \in X$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $x \in \overline{A}$,

$\overline{A} = A$ (A fermé) $\Rightarrow x \in A$.

\Leftarrow $\forall x \in \overline{A}$, $\exists (x_n) \subset A$: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

$(x_n) \square$ sdc $\Rightarrow x \in A$ car A complét

de $\overline{A} = A$.

Mq A npd si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$

\Leftarrow si $B(a, r) \subset X$, $\text{int}(A) \neq \emptyset$,

$B(a, r) \not\subset A \Rightarrow \exists b \in B(a, r) \cap \overline{A}$

\overline{A} est ouvert $\exists B = B(b, r) \subset \overline{A}$

$B \cap A = \emptyset \Rightarrow \forall x \in B, x \notin A$

$\Rightarrow B(a, r) \not\subset \overline{A} \Rightarrow \text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Par t_1, t_2 ne st pas équivalentes

$\|t_1, t_2\|_1, \|t_1, t_2\|_2$ ne st pas équivalentes sr

$R^\infty = \{(x_n)\}_{n=1}^\infty$ car $\left(\frac{1}{n}\right)_n \in t_2 \setminus t_1$

car $\sum \frac{1}{n} = \infty$ & $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n \in t_1 \setminus t_2$ car $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$

$t_1 = (R^\infty, \| \cdot \|_1), t_2 = (R^\infty, \| \cdot \|_2), P^\infty = (R^\infty, \| \cdot \|_\infty)$

$\|(\frac{1}{\sqrt{n}})\|_1 = 1$.

Mq \overline{FCV} fermé sn $\overline{F} = F$

Car déf \overline{FCV} .

\Leftarrow Mq \overline{FCV} , $\forall x \notin F \Rightarrow x \in F^c$ ouvert

$\exists U_x: U_x \subset F^c \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow x \notin F$.

\Leftarrow $\forall n \notin F = \overline{F}$, $\exists U_n, U_n \cap F = \emptyset$ car $n \notin \overline{F}$. $U_n \subset F^c \Rightarrow F^c \subset V$ de F est fermé

Mq F est + plus ferme de V contenue F

Mq $\overline{F} = \bigcap_{C \subset F} \overline{C}$ est fermé \Leftrightarrow Mq $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$

Car $a \in \overline{F} \subset \overline{\overline{F}}$, car $\overline{F} \subset \overline{\overline{F}}$

$\Rightarrow \forall U_n, U_n \cap \overline{F} \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in U_n \cap \overline{F}$

$\Rightarrow x \in \overline{F}$, de \overline{F} est fermé

\Rightarrow $x \in F$ est fermé q contient A : $F \supset A \Rightarrow F^c \subset A^c$

soit $n \in F^c$ par F est fermé: $\exists U_n, U_n \subset F^c$

car $F^c \subset V \Rightarrow U_n \cap F = \emptyset \Rightarrow U_n \cap A = \emptyset$

car $A \subset F \Rightarrow n \notin A$. de $F^c \subset A^c \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{A^c}$

Mq $E(B(a, r)) = S(a, r) \Leftrightarrow$ Mq $\forall s > 0:$

$B(s, 0) \cap B(a, r) \neq \emptyset \wedge B(s, 0) \cap S(a, r) \neq \emptyset$, fixe $s > 0$, $y = a + \lambda(s-a)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, chose $\lambda > 0$

tg $y \in B(s, 0) \cap B(a, r)$. $\|y-a\| = \|\lambda(s-a)\| = \lambda \|s-a\|$

$\|y-a\| = \|s-a\|$ car $\lambda < 1$.

Mq $\exists z \in B(s, 0) \cap B(a, r)$, pour $z = a + \lambda(s-a)$

$\mu > 1 \Leftrightarrow \|z-a\| > s$.

$\|z-a\| = \|s-a\| (\mu-1)$ car $\mu > 1$

$\mu(\mu-1) < s$

$1 < \mu < 1 + \frac{s}{z} \Rightarrow \text{cas}$

si $A = \emptyset$,

$\overline{A} = \mathbb{R}$ $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{R}$

$A = \emptyset \quad \partial A = \emptyset \quad \text{dom}(A) = \emptyset$

$\forall A \subset V$ $\exists U_A$, $U_A \cap A \neq \emptyset$

$\exists U_A$, $U_A \subset A$.

$\partial A = \overline{A} \setminus A$

$\text{I}(A) : \exists U_A, \text{card}(U_A \cap A) \geq 2$

$\text{I}(A) : \exists U_A, U_A \setminus \{a\} \neq \emptyset$

$\text{Jol}(A) : \exists U_A, U_A \cap A = \{a\}$

$\text{Mg } S(a, r)$ ut une forme

$$S(a, r) = \overline{B(a, r)} - B(a, r)$$

$$S^c(a, r) = B(a, r) \cup (\overline{B(a, r)})^c$$

est clément 2 si et seulement si tout

FCV forme si son complément

$F^c = \{x \in V : x \notin F\}$ ut ouvert

$\text{Mg int } S$ que forme est une forme

soit $V_i \subset A$, $(D_i)^c \subset V$

$$\Rightarrow (U D_i)^c = \bigcap D_i^c \subset V$$

de A de A

$\text{Mg réunion forme de formes est une forme}$

$$\text{si } (D_i)^c \subset V \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^n D_i^c$$

$$= \bigcup_{i=1}^n D_i^c \subset V.$$

Définir un ouvert de V

par ex, si $\text{D} \subset V$ est

ouvert si $\forall x \in D$, il existe

$$B(x, r) = \{y \in V : \|y - x\| < r\}$$

est contenue de D

$\text{Mg tout ouvert est un ouvert}$

$$S(a, r) = \{x \in V : \|x - a\| < r\}$$

soit $r = r - d(a, r) > 0$

$\forall y \in S(r, s)$:

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$$

$$< d(a, x) + r$$

$$= d(a, x) + r - d(a, x)$$

$$= d(a, x) + r - d(a, x)$$

$$= r$$

$$y \in S(a, r)$$

$\text{Mg réunion qq ouverts est ouvert}$
soit $x \in D \Rightarrow \exists z \in A, x \in D_z$.
 $\text{pq } D_z \subset V \Rightarrow \exists U_z$ de t q $U_z \subset D_z$
 $D_z \subset D$ dc D est ouvert.

$\text{Mg int } S$ que forme est ouvert

soit $x \in D \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x \in D_i$

$$\text{pq } D \subset V \Rightarrow \exists f_i > 0, B(x, f_i) \subset D_i$$

soit $f = \min f_i > 0$.

$$\text{On a } B(x, f) \subset D_i, \forall i \rightarrow B(x, f) \subset D_i$$

ens V est ex recoupe K si il y a 2 opérations
(addit & multi.) entre élts de V

$\forall i \in I, C V_i \subset V$, sev $\Rightarrow V^* = \bigcap V_i$ ut
sev de V.

$\text{Mg int } S$ que $\forall v \in V$ est $\forall v$

$$\forall u, v \in V^* \Rightarrow \forall i \in I, u, v \in V_i,$$

$$u + v \in V_i, \forall u, \forall v \in V_i, \forall i \in I, V_i \in I$$

$$\Rightarrow u + v \in V^*, \forall u \in V^* \Rightarrow V^*$$
 est ss-esp de V.

soit V espace K, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ ut

de la norme si $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in K$:

$$\star \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \star \|rx\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\star \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\text{Mg } \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

$$\|(x-y) - (x-y)\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\hookrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\hookrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

$\text{L'espace normé } (V, \|\cdot\|_2)$ possède

choses suivantes $d(x, y) = \|x-y\|_2$

tg $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie 3 axioms:

$$\star d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\star \star d(x, y) = d(y, x)$$

$$\star \star \star d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

$\text{Mg } \triangleleft CBS \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i, y_i| \leq (\sum x_i^2, \sum y_i^2)^{1/2}$$
$$\Rightarrow \|x, y\|_2 \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

en sachant $\sqrt{ab} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ (1)

$$\text{soit } a = \frac{x_i^2}{\|x\|_2^2}, b = \frac{y_i^2}{\|y\|_2^2},$$

$$x \Rightarrow |x_i, y_i| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_i^2}{\|x\|_2^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|_2^2} \right) \text{ (2)}$$

on somme sur i de 1 à n dans (2)

$$\sum_{i=1}^n |x_i, y_i| \leq \frac{1}{2} (1+n) \text{ car } \frac{x_i^2}{\|x\|_2^2} = \frac{\sum x_i^2}{\|x\|_2^2} \leq$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i, y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

$\star \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \Leftrightarrow$

$$\|x+y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\text{ote } \langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

$\text{En déclinaison } \triangleleft$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \text{ par CBS}$$

$$\Leftrightarrow -|\langle x, y \rangle| \leq 2 \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|_2^2 + 2 |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

$\text{Mg } \triangleleft$ est normé

$\ell_2(K)$ est aussi $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_m|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

d'après \triangleleft $M_K \Rightarrow \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

$$(\sum |u_m+v_m|^2)^{1/2} \leq (\sum |u_m|^2)^{1/2} + (\sum |v_m|^2)^{1/2}$$
$$\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

$\hat{\in} \|u\|_2 < \infty, \|v\|_2 < \infty$ il n'est

$$\|u+v\|_2 < \infty, \text{ soit } u+v \in \ell_2(K).$$

$$\text{Puis } \|Au\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_m u_m|^2 \right)^{1/2}$$

$$= (|A|^2 \sum_{m=0}^{\infty} |u_m|^2)^{1/2} = |A| \|u\|_2$$

dc $\|Au\|_2 = |A| \|u\|_2$ & $Au \in \ell_2(K)$

$$\text{de m } \|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

D'où $\ell_2(K)$ est ev. normé

$\text{Mg } \text{ev } \triangleleft [a, b]$ est normé

$[a, b]$ est une forme sur $[a, b]$ à

relatifs de K, on déf $f \in \mathcal{G}([a, b])$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$\text{Mg } \|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$

$$\|xf\|_2 = \|x\| \|f\|_2$$

$$\|fg\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$$