$M33$

$CM\ \ Scribus$

$S_3(nov - dec)$

ⓐ $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \left(n^{1/n} - 1\right)^n$.

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln u_n}$$
$$= e^{\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\left(n^{1/n} - 1\right)^n\right)}$$
$$= e^{\ln\left(n^{1/n} - 1\right)} = n^{1/n} - 1$$

- On a $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\cdot \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ dc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$.

Le critère de Cauchy $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ CV.

(P) Soit $(u_n)_n$ une suite tq $\forall n$, $u_n > 0$.
alors si $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell}$ alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$

(Rq): La prop implique que si on pt appliquer le critère d'Alembert alors on pt appliquer le critère de Cauchy.

D'autre part, si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, il est inutile d'essayer d'appliquer le CdC : il ne fera pas non plus.

Preuve : comme $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$, $\forall n \geq N_0$: on ait :
$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ainsi puisq $u_n > 0$: $u_n\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) u_n$.

On mq (PR) que $\forall n \geq N_0$, on a :
$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0} \leq u_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0}.$$
c'est vrai pour $n = N_0$.

Supposons que $\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0} \leq u_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} u_{N_0}$

alors :
$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0+1} u_{N_0} \leq u_n\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) u_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0}$$

Donc $\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0+1} \cdot u_{N_0} \leq u_{n+1} \leq \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+1-N_0} \cdot u_{N_0}$

On a (PR) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$, on a :
$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0} \leq u_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0} \cdot u_{N_0}.$$

On a alors :

$$(l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \cdot \sqrt[n]{u_{N_0}} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (l+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \sqrt[n]{u_{N_0}}$$

On a $\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{N_0}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln u_{N_0}} = e^0 = 1.$

$\cdot \lim_{n\to\infty} (l+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n-N_0}{n} \times \ln(l+\frac{\varepsilon}{2})}$

$= e^{\ln(l+\frac{\varepsilon}{2})} = l+\frac{\varepsilon}{2}$

$\cdot \lim_{n\to\infty} (l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} = l-\frac{\varepsilon}{2}.$

" ici on ne pt pas appliq Th ds gendarmes car $l-\varepsilon \neq l+\varepsilon$.

comme $\lim_{n\to\infty} (l+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \cdot \sqrt[n]{u_{N_0}} = l+\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists\ N_1$

tq $\forall n \geq N_1$, on ait : $(l+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \times \sqrt[n]{u_{N_0}} \leq (l+\frac{\varepsilon}{2})+\varepsilon/2$

$= l+\frac{2\varepsilon}{2}$

comme $\lim_{n\to\infty} (l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \sqrt[n]{u_{N_0}} = l-\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists\ N_2$

tq $\forall n \geq N_2$, on ait : $(l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \sqrt[n]{u_{N_0}} \geq (l-\frac{\varepsilon}{2})-\frac{\varepsilon}{2}$

$= l-\frac{2\varepsilon}{2}$

Ainsi $\forall n \geq N := \max(N_0, N_1, N_2)$, on a:

$$l-\frac{2\varepsilon}{2} \leq (l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \sqrt[n]{u_{N_0}} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (l-\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N_0}{n}} \cdot \sqrt[n]{u_{N_0}}$$

$$\leq l+\frac{2\varepsilon}{2}$$

$\to$ Ainsi $\forall n \geq N$,

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cqfd, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$

□

Th (Comparaison Séries - Int. généralisées)

soit $a \geq 0$, $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, f positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n\geq a} f(n)$ et $\int_a^\infty f(t)\,dt$ st de m̂ nature.

De plus, si elles convergent, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt = * \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^\infty f(t)\,dt$$

<u>Preuve</u> : on supp $a = 0$, soit $k \in \mathbb{N}$, $t \in [k, k+1]$, on a :

$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ car f est $\searrow$.

On intègre entre k et $k+1$ cette inégalité.

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$$

car $f(k+1)$ est une cte par rapport à t

idem

On a donc $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$ (*)

On ajoute ces inégalités pour k allant de 0 à n, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt}_{= \int_0^{n+1} f(t)\,dt} \leq \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

Si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (CV), alors $\sum_{k=1}^{n+1} f(k)$ est majorée $\forall n \in \mathbb{N}$ par $\int_0^\infty f(t)\,dt$.

(car $\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_0^\infty f(t)\,dt$)

(car $f \geq 0$).

Ainsi $\sum_{n \geq 0} f(n)$ (CV).

Si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (DV), alors ĉ $f \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n+1} f(t)\,dt = \infty$

donc $\lim_{n\to\infty} \sum^{n} f(k) = \infty$: $\sum_{n \geq 0} f(n)$ (DV).

Supposons que $\int_0^\infty f(t)\,dt$ et $\sum_{n \geq 0} f(n)$ (CV).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $N > n$, alors d'après (*)

$$\sum_{k=n}^{N} f(k) \geq \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_{n+1}^{N} f(t)\,dt.$$

Donc qd $N \longrightarrow \infty$, puisq $\sum_{n \geq 0} f(n)$ (CV) et $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (CV) ; $\sum_{k \geq n+1} f(k)$ et $\int_{n+1}^\infty f(t)\,dt$ (CV), On a :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(t)\, dt.$$

D'après (*),

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k}^{k+1} f(t)\, dt$$

D'où :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \leqslant \int_{n}^{N+1} f(t)\, dt.$$

Comme précédemment, on fait tendre $N \to \infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(t)\, dt.$$

On obtient finalement :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(t)\, dt$$

ⓐ On étudie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

* si $\alpha \leqslant 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \neq 0$.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ DV

* si $\alpha > 0$: Essayons appliquer le critère d'Alembert,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

⇒ on ne pt rien conclure ac CdA.

pas plus que CdC.

On essaye le critère de comparaison à une intégrale gén. CdC ig :

soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty[$,

(*) $\frac{1}{x^\alpha} > 0$, $\forall x \geqslant 1$: f positive.

(**) $\forall x, x' \geqslant 1$, ac $x > x'$ alors $x^\alpha \overset{\text{car } \alpha>0}{>} x'^\alpha \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x'^\alpha}$

$\underline{\text{af } d^t}$, $\Rightarrow f(x) < f(x') \Rightarrow f$ est décroissante.

⇒ on pt de appliquer CdC ig :

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ st de m̂ nature.

Ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

Rq On pt mq $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ a pr somme $\frac{\pi^2}{6}$,

si on calcule $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ de $N = 1000$, on a :

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{N} 1 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

et comme $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_N^A$ $\underset{\shortparallel}{}$ $\frac{1}{N}$.

Ainsi $\frac{\pi^2}{6} = \underset{\uparrow \atop \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}}{1{,}6439} \pm \frac{1}{1000}$

ⓐ $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$.

On essaye d'appliquer CdC

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{-\sqrt{n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

/!\ le CdC ne s'appliq pas.

(le CdA non plus)

On a $\lim_{n\to\infty} n^2 . e^{-\sqrt{n}} = 0$ par croissce comparée.

Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, on a :

$$\left| n^2 . e^{-\sqrt{n}} \right| \leq 1.$$

Donc $\forall n \geq N, \quad 0 \leq e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV et le $\underline{CdC^{op}}$:=>

$\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ CV aussi.

Rq | CdC et CdA st applicables pr des séries q CV TRÈS TRÈS ViTE.

↳ utile pr !

III / Séries à termes quelconques

1) CV absolue

(D) On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ est une série absolum^t CV car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est (SdR) CV car $\alpha > 1$.

Par contre, elle ne CV pas absolument si $0 < \alpha \leq 1$ puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ DV.

(TH) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV absolument, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV.

<u>Preuve</u> : On appliq le <u>CdC</u> (pas aussi de $\sqrt[n]{U_n}$).

soit $\varepsilon > 0$, on mq $\exists N \in \mathbb{N} / \forall p > q \geq N$,

$\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| < \varepsilon$. comme $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ CV dc vérifie le <u>CdC</u> des séries :

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq N$, on a :

$$\sum_{k=q}^{p} |u_k| < \varepsilon.$$

On a alors pour $p > q \geq N$:

$$\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| \leq \sum_{k=q}^{p} |u_k| < \varepsilon$$

cette série CV.

$\Rightarrow$ <u>CdC</u> des séries est vérifiée par $\sum_{n\geq 0} u_n$ dc

2) Semi-convergence

(D) Cdqu série est semi-convergente si elle CV sans converger absolument.

(RA) : $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ st adjactes si :

(i) $(a_n)_n \searrow$ (ii) $(b_n)_n \nearrow$ (iii) $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$

(TH) soit $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ 2 suites adjacentes, $\begin{cases} (a_n)_n \searrow \\ (b_n)_n \nearrow \end{cases}$

Alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ CV vers m̂ limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a <u>$b_n \leq \ell \leq a_n$</u>.

(D) (Cut série alternée) :

Cdqu série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est série alternée si, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n . u_{n+1} \leq 0$.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est alternée si u_n et u_{n+1} st de signe opposé.

TH (Crit séries alternées) :

soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée tq $(|u_n|)_n \searrow$ et CV vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et $\forall n \in \mathbb{N}$,

on a $\underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|}$ ← estim$^{\circ}$ reste.

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est de m̂ signe que u_{n+1}.

<u>Preuve</u> : On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On supp $(u_n)_n$ est de signe de $(-1)^n$.

On mq $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ et adjacentes :

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} + u_{2n} + \dots + u_0 - (u_{2n} + \dots + u_0).$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+1}$$

$$= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \text{ car } u_{2n+2} \geq 0, \ u_{2n+1} \leq 0.$$

$$\geq 0 \text{ car } (|u_n|)_n \searrow.$$

Donc $(S_{2n})_n$ est $\nearrow$.

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} + u_{2n+1} + \dots + u_0 - (u_{2n+1} + \dots + u_0)$$

$$= u_{2n+3} + u_{2n+2}$$

$$= -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \quad \text{car } u_{2n+2} \geq 0, \ u_{2n+3} \leq 0$$

$$\leq 0 \text{ car } (|u_n|)_n \text{ est } \searrow.$$

<u>Enfin</u> $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} + u_{2n} + \dots + u_0 - (u_{2n} + \dots + u_0)$

$$= \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}$$

$$= 0 \text{ car } (|u_n|_n) \text{ CV vers } 0.$$

Ainsi $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ CV vers m̂ limite S.

(*) Mq $(S_n)_n$ CV vers S : soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_0$, $|S_{2n} - S| < \varepsilon$.

$\exists N_1 \in \mathbb{N} \, / \, \forall n \geq N_1$, $|S_{2n+1} - S| < \varepsilon$.

Alors pour $n \geq \max(2N_0, 2N_1 + 1)$, on a :

→ si n est pair, $n = 2k$ et $2k \geq 2N_0$ dc $k \geq N_0$ et

$$|S_n - S| = |S_{2k} - S| < \varepsilon$$

→ si n est impair, $n = 2k+1$ et $2k+1 \geq 2N_1 + 1$ dc $k \geq N_1$ et

$$|S_n - S| = |S_{2k+1} - S| < \varepsilon.$$

Donc $\forall n \geq \max(2N_0, 2N_1+1)$,

$|S_n - S| \leq \varepsilon$: $(S_n)_n$ CV vers S dc

$\sum_{n\geq 0} u_n$ CV vers S.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

$$S_{2n} - |U_{2n+1}| = S_{2n} + U_{2n+1} = S_{2n+1}$$

Ainsi $\quad 0 \leq S_{2n} - S \leq |U_{2n+1}|$

d'où $\quad 0 \leq -\sum_{k=2n+1}^{\infty} u_k \leq |U_{2n+1}|$.

on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + U_{2n+2} = S_{2n+1} + |U_{2n+2}|$$

$$0 \leq \sum_{k=2n+2}^{\infty} u_k \leq |U_{2n+2}|$$

Ainsi $\quad 0 \leq S - S_{2n+1} \leq |U_{2n+2}|$.

On cond que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |U_{n+1}|$$

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est du signe que u_{n+1}.

Si $(U_n)_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}$, on reprend la preuve avec $-U_n$ q est du signe $(-1)^n$. □

@ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

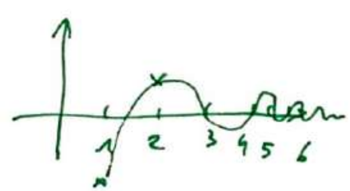
* si $\alpha > 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV absolument dc CV.
* si $1 \geq \alpha > 0$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne CV pas absolum^t.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée car $\frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{n(n+1)} \leq 0$

$\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ dc $\left(\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| \right)_n$ est ↘ car $0 < \alpha \leq 1$

et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. D'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV.

Ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente.



⚠ piège de $(-1)^n$. ⚠ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+(-1)^n n}$ n'est pas alternée.

$$\frac{(-1)^n}{1+(-1)^n n} \times \frac{(-1)^{n+1}}{1+(-1)^{n+1}(n+1)} = \frac{-1}{(1+(-1)^n n)(1+(-1)^{n+1}(n+1))}$$

si n est paire : $1+(-1)^n n > 0$

et $1+(-1)^{n+1}(n+1) = -n < 0$.

Ainsi $\frac{(-1)^n}{1+(-1)^n n} \times \frac{(-1)^{n+1}}{1+(-1)^{n+1}(n+1)} > 0$.

TH d'Abel :

Si $u_n = \varepsilon_n v_n$ tq :

(i) $(\varepsilon_n)_n$ est positive, ↘ & CV vers 0.

(ii) $\exists M \geq 0$ tq $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV et le reste vérifie :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leq 2\,\varepsilon_{n+1} \cdot M.$$

RQ. Le crit des séries alternées pt-ê vu ĉ Cor. du TH d'Abel.

Si $\sum_{n\geq 0} U_n$ est une série alternée,

$U_n = (-1)^n |U_n|$ si U_n est du signe $(-1)^n$

— $(-1)^{n+1}$ ——— $(-1)^{n+1}$

Dans 1° cas, on pose $\begin{cases} \varepsilon_n = |U_n| \\ v_n = (-1)^n \end{cases}$ de sorte que $(\varepsilon_n)_n$ ↘, positive & CV vers 0 si les hypo du crit st vérifiées. et

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right| = |1-1+1-1+1-1+(1)| \leq 1$$

Dc le TH d'Abel s'appliq (Ms estimaᵒ reste moins bonne).

Preuve TH d'Abel :

tsfᵒ d'Abel ; soit $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. *

soit $\varepsilon > 0$ et on va mq $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le CdC des séries : soit $p > q \geq 0$:

$$\sum_{k=q}^{p} u_k = \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k v_k \xrightarrow{\text{tdA}} \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1})$$

$$= \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k V_{k-1}$$

$$= \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=q-1}^{p-1} \varepsilon_{k+1} V_k$$

* $V_n - V_{n-1} = v_n + \dots + v_0 - (v_{n-1} + \dots + v_0) = v_n$

$$= \sum_{k=q}^{p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=q-1}^{p-1} \varepsilon_{k+1} V_k$$

$$= \sum_{k=q}^{p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k - \varepsilon_q V_{q-1} + \varepsilon_p V_p .$$

$$\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| \leq \sum_{k=q}^{p-1} | \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} | . |V_k| + \overset{1°\ \leq M}{|\varepsilon_q| . |V_{q-1}|} + \underset{2°\ \leq M}{|\varepsilon_p| . |V_p|} .$$

Comme $(\varepsilon_n)_n$ est ↘ dc $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \geq 0$ dc :

$$\sum_{k=q}^{p-1} | \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} | . |V_k| = \sum_{k=q}^{p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) |V_k| .$$

D'autre part, $\exists\, M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|V_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq M .$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=q}^{p-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| . |V_k| \leq \sum_{k=q}^{p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) . M$

$$\leq M . \underbrace{\sum_{k=q}^{p-1} \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}_{\text{somme télescopiq}}$$

Le

$$= M(\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1} + \varepsilon_{q+1} - \varepsilon_{q+2} + \dots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p)$$

$$= M(\varepsilon_q - \varepsilon_p).$$

On a aussi $|\varepsilon_q| \, |V_{q-1}| \leq M . \varepsilon_q$

et $|\varepsilon_p| . |V_p| \leq \varepsilon_p . M$.

D'où, $\displaystyle\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| \leq M(\varepsilon_q - \cancel{\varepsilon_p}) + M\varepsilon_q + \cancel{M\varepsilon_p}$

$$= 2 M \varepsilon_q$$

comme $(\varepsilon_n)_n$ CV vers 0 dc $\exists\, N /$

$\forall n \geq N$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$.

Donc $\forall p > q > N$, $\displaystyle\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| < \varepsilon$:

$\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie CdC des séries & dc CV.

Enfin $\forall p > q > 0$, on a :

$$\left| \sum_{k=q}^{p} u_k \right| \leq 2 . M . \varepsilon_q .$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient

$$\left| \sum_{k=q}^{\infty} u_k \right| \leq 2M . \varepsilon_q .$$

□

ⓐ $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$. On pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sin n$.

Alors (i) : $(\varepsilon_n)_n$ est positive, ↘, CV vers 0.

(ii) $\left|\sum_{k=0}^{n} \sin k\right| \overset{?}{\leq} M$ ← indépendant de n.

- $$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ik})\right|$$

$$= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)\right|$$ somme géométriq

$$= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right|$$ car $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$

- $$\leq \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|}$$

$$= \frac{2}{|1-e^{i}|}$$ car $|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

← ne dépend pas de n.

Le Th d'Abel implique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ CV.

ⓐ $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$. On pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sin n$.

Alors (i) : $(\varepsilon_n)_n$ est positive, ↘, ⓒⓥ vers 0.

(ii) $\left|\sum_{k=0}^{n} \sin k\right| \overset{?}{\leq} M$ ← indépendant de n.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ik})\right|$$

$$= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)\right| \quad \text{somme géométriq}$$

$$= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| \quad \text{car } |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$$

$$\leq \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|}$$

$$= \frac{2}{|1-e^{i}|} \quad \text{car } |e^{i\theta}| = 1,\ \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

← ne dépend pas de n.

Le Ⓣⓗ d'Abel implique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ ⓒⓥ.

3) Utilisation d'un dev asymptotiq

ⓐ $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

À ne pas faire $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série ⓒⓥ d'après Cd S. alternées car $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ décroît.

Cependant u_n $\boxed{\text{n'est pas de signe cte}}$ dc on ne pt pas appliqu le Ⓣⓗ sur les séries à termes équivalents.

On fait un dev asymptotiq de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

- Or $\frac{1}{1+x} = 1 + x + x\,\varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\varepsilon}(n) = \varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Donc $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 + \varepsilon(n))\right)$ et $\tilde{\varepsilon}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}(1 + \tilde{\varepsilon}(n)).$$

On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = \frac{1}{n}(1 + \tilde{\varepsilon}(n))$.

Alors $\sum_n V_n$ est une série alternée q CV d'après le critère des séries alternées.

D'autre part, $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est $\boxed{SdR}$ DV à termes positifs dc $\sum_n W_n$ DV.

Ainsi $\sum_n U_n$ est somme d'une série CV et d'une série DV dc $\sum_n U_n$ DV. (Rq $|U_n|$ n'est pas ↘, si ↘ $\lim |a_n| = 0$, CSA ⟹ $\sum U_n$ CV or c'est faux.)

ⓐ $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$. On pose $U_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

$\sum_n U_n$ est une série alternée : car

$$U_{2n} = \ln\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2n}}_{<1}\Big) \leq 0 \leq U_{2n+1} = \ln\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2n+1}}_{>1}\Big)$$

Donc $U_{2n} \cdot U_{2n+1} \leq 0$. dc U_n est série alternée.

Les $(U_n)_n$ ne st pas de signe cte : dc on ne pt pas utiliser d'équivalent. On pourrait essayer de mq $\left(\left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right|\right)_n$ est ↘, ms ce n'est pas facile.

→ On calcule un développement asymptotiq de U_n.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

- $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

où $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}(1 + \varepsilon(n))$

soit $V_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $W_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}(1 + \varepsilon(n))$.

On a • $\sum_n V_n$ CV (série alternée et $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ↘ et CV vers 0).

- $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est $\boxed{SdR}$ CV, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ dc $\sum_n W_n$ CV.

Donc $\sum_n U_n$ est la somme de 2 séries CV dc $\sum_n U_n$ CV.

IV/ Opérations algébriques sur les séries

1) Associativité ou Groupement de termes

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3 + u_4)$$
$$= (u_0 + u_1 + u_2) + u_3 + u_4 .$$

@ $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$: on pose $u_n = (-1)^n$, $V_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 0$

Alors $\sum_n u_n$ DV grossièrement MS $\sum_n V_n$ CV.

$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots+1-1$: pas de limite : DV

$\neq (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$: $\lim V_n = 0$

TH Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ S^t ↗.

On pose $v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et $v_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$.

Alors :

(i) si $\sum_n u_n$ CV alors $\sum_n V_n$ CV et a la même somme $\sum_n u_n$.

(ii) si $\sum_n v_n$ CV et si la condition (a) ou (b) est réalisée, alors $\sum_n u_n$ CV et a même somme que $\sum_n v_n$.

(a) $(u_n)_n$ CV vers 0 et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est fini.

(b) $\forall k \in [\![\varphi(n-1)+1, \varphi(n)]\!]$, les u_k sont même signe.

Preuve : (i) soit S la somme des $\sum_n u_n$: $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S$

soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(-1) = -1$ de sorte $\varphi(-1)+1 = 0$

et $v_0 = \sum_{l=\varphi(-1)+1}^{\varphi(0)} u_l$.

$$\sum_{k=0}^{n} v_n - S = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{l=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} u_l}_{v_k} = v_0 + \ldots + v_n - S$$

$$= u_0 + \ldots + u_{\varphi(0)} + u_{\varphi(0)+1} + \ldots + u_{\varphi(1)} + \ldots + u_{\varphi(n-1)+1} + \ldots + u_{\varphi(n)} - S$$

$$= \sum_{k=0}^{\varphi(n)} u_k - S .$$

$\left(\sum_{k=0}^{\varphi(n)} u_k \right)_n$ est une suite extraite de $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_n$ qui CV vers S.

Donc $\left(\sum_{k=0}^{\varphi(n)} u_k \right)_n$ CV également vers S donc $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} v_k - S = 0$

Donc $\sum_n v_n$ CV et sa somme vaut S. □

(ii) On suppose que $\sum_n v_n$ CV. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

On suppose (a) vérifiée. On pose $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n+1) - \varphi(n)$.

K est le nbre max de termes dans un paquet "v_n".

soit $\varepsilon > 0$, comme $\sum_n v_n$ (CV), $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} v_k - S\right| < \varepsilon. \quad (*)$$

Comme $(u_n)_n$ (CV) vers 0, $\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'$, on ait $|u_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. $(**)$

Alors pr $n \in \mathbb{N}$, on se donne $p \in \mathbb{N}$, $\varphi(p) \leq n < \varphi(p+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - S = (u_0 + u_1 + \dots + u_{\varphi(0)}) + (u_{\varphi(0)+1} + \dots + u_{\varphi(1)}) + \dots + u_{\varphi(p-1)+1} + \dots + u_{\varphi(p)} + \dots + (u_{\varphi(p)+1} + \dots u_{\varphi(p+1)}) - S - (u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)})$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_p + v_{p+1} - S - u_{n+1} - \dots + u_{\varphi(p+1)}$$

▶ si $p+1 \geq N$, on a $|v_0 + v_1 + \dots + v_p + v_{p+1} - S| < \varepsilon$ d'après $(*)$

▶ si $n \geq N'$, on a :

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{\varphi(p+1)}| < |u_{n+1}| + \dots + |u_{\varphi(p+1)}| < \frac{\varepsilon}{K} + \dots + \frac{\varepsilon}{K} \text{ d'après } (**) \leq \frac{\varepsilon}{K} \times K$$

Pour avoir $p+1 \geq N$ et $n > N'$, on choisit n tq :

- $n \geq \varphi(N)$ alors $\varphi(p+1) > n > N$ de $p+1 > N$ car φ est st $\nearrow$. (si $p+1 = N$, $\varphi(p+1) = \varphi(N)$: absurde, et si $p+1 < N$, $\varphi(p+1) < \varphi(N)$ car φ est st $\nearrow$: absurde).
- $n > N'$:

Ainsi pour $n \geq \max(\varphi(N), N')$ alors :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - S\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Cela mq $\sum_n u_n$ (CV) et sa somme vaut S. □

On suppose (b) vraie.

soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ tq $\varphi(p) \leq n < \varphi(p+1)$,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - S = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{p+1} v_k - S\right)$$

Comme $\sum_n v_n$ (CV) et a pr somme S.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N$, on aura :

$$\left|\sum_{k=0}^{p+1} v_k - S\right| < \varepsilon.$$

Ainsi si $n \geq \varphi(N)$ alors $\varphi(n+1) > \varphi(N)$

dc $p+1 > N$ et $\left| \sum_{k=0}^{p+1} v_k - S \right| < \varepsilon$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k = -\left(u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)}\right).$$

$$\shortparallel$$

$$u_0 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)}.$$

Si par exemple $u_k \geq 0,\ \forall k \in [\![\varphi(p)+1, \dots, \varphi(p+1)]\!]$

alors $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k \right| = u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p-1)}$

$$\leq u_{\varphi(p)+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)} = v_{p+1}$$

Comme $\sum_n v_n$ CV dc $(v_n)_n \longrightarrow 0$ et $\exists N' / \forall p \geq N'$,

on ait $|v_p| < \varepsilon$.

Donc si $n > \varphi(N')$ alors $\varphi(p+1) > n > \varphi(N')$ et $p+1 > N'$

dc $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k \right| = v_{p+1} < \varepsilon$.

Ainsi $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < 2\varepsilon$ et dc $\sum_n u_n$ CV et sa somme vaut S.

Ainsi si $n \geq \varphi(N)$ alors $\varphi(n+1) > \varphi(N)$

dc $p+1 > N$ et $\left| \sum_{k=0}^{p+1} v_k - S \right| < \varepsilon$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k = -(u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)}).$$

$$\overset{\shortparallel}{u_0 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)}}.$$

Si par exemple $u_k \geq 0$, $\forall k \in [\![\varphi(p)+1, \dots, \varphi(p+1)]\!]$

alors $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k \right| = u_{n+1} + \dots + u_{\varphi(p-1)}$

$$\leq u_{\varphi(p)+1} + \dots + u_{\varphi(p+1)} = v_{p+1}$$

Comme $\sum_n v_n$ CV dc $(v_n)_n \longrightarrow 0$ et $\exists N' / \forall p \geq N'$,

on ait $|v_p| < \varepsilon$.

Donc si $n > \varphi(N')$ alors $\varphi(p+1) > n > \varphi(N')$ et $p+1 > N'$

dc $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p+1} v_k \right| = v_{p+1} < \varepsilon$.

Ainsi $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < 2\varepsilon$ et dc $\sum_n u_n$ CV et sa somme vaut S.

2) Permutat° de termes

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a+b+c = b+a+c = b+c+a.$

Est-ce encore vrai si on a une ∞té de termes de la somme ?

(D) Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **commutativement convergente** si pr tte bijec° $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV également

@ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $2n \to 2n+1$, $2n+1 \to 2n$ est une bijec° $\sigma(0)=1, \sigma(1)=0, \dots$

et $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est la série "$u_1 + u_0 + u_3 + u_2 + u_5 + u_4 + \dots +$" : σ change l'ordre des termes.

(TH) Une série **absolument CV** est **commutativem^t CV**.

__Preuve__ : soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolum^t CV, $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijec°.

Mq $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV et a pr somme S.

soit $\varepsilon > 0$, comme $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ CV et comme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait :

(*) $\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (reste d'une série CV et td vers 0).

(**) $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

soit $n \in \mathbb{N}$, on regarde :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - S \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l + \sum_{l=0}^{N} u_l - S \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l \right|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{\left| \sum_{l=0}^{N} u_l - S \right|}_{\varepsilon/2}.$$

D'après (**), $\left| \sum_{l=0}^{N} u_l - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si n est suffisament grand, tous les termes $u_0, u_1, \dots, u_N$ seront présents dans $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$

et alors $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{N} u_l = \sum_{j\in A} u_j$

$\exists A \subset \mathbb{N}$ tq $\forall j \in A, j \geq N$.

Pour cela, il suffit de prendre $n \geq \max(\sigma^{-1}(0),\dots,\sigma^{-1}(N))$

car alors $\forall \ell \in \{0,\dots,N\}$,

$\sigma^{-1}(\ell) \in \{0,\dots,n\}$ et dc $\sigma(\sigma^{-1}(\ell)) = \ell$.

Pour $k = \sigma^{-1}(\ell)$, on aura $u_{\sigma(k)} = u_\ell$.

On a alors : $\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{\ell=0}^{N} u_\ell\right| = \left|\sum_{j\in A} u_j\right|$

où $A \in \mathbb{N}$ / $\forall j \in A$, $j > N$.

$$\leq \sum_{j\in A} |u_j| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Ainsi $\forall n \geq M := \max(\sigma^{-1}(0),\dots,\sigma^{-1}(N))$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\sum_{k\geq 0} u_{\sigma(k)}$ CV et sa somme vaut S.

Th de Riemann sur le réarrangement des séries semi-CV :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série semi-CV et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $\exists$ permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV

et a pr somme α.

Voir preuve (poly).

série des harmoniqs

@ Considérons $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}}$

• $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-CV et CV vers $\ln 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2.$$

On considère le réarrangement :

$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \dots$

$\oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \ominus \dots$

donné par
$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad 3k \mapsto 2k, \quad 3k+1 \mapsto 4k+1, \quad 3k+2 \mapsto 4k+3.$$

σ est une bijection car si $n \in \mathbb{N}$,

si n est pair, $n = 2k$ alors $\sigma(3k) = n = 2k$.

si n impair, $n = 2k+1$;

si k pair, $k = 2\ell$, $n = 4\ell + 1$

dc $\sigma(3\ell+1) = n$ et si

si k impair, $k = 2\ell+1$, $n = 4\ell + 3$

dc $\sigma(3\ell+2) = n$.

Ainsi σ est surjective et si

$\sigma(n) = \sigma(m)$ alors si n est un multiple de 3

alors $\sigma(n)$ est pair dc $\sigma(m)$ aussi.

et $m = 3k$ et $n = 3l$. Alors $\sigma(3k) = 2k$

$= \sigma(3l) = 2l$ et $k = l$ dc $m = n$.

si $n = 3k+1$, alors $\sigma(n) = 4k+1 = \sigma(m)$

dc $\sigma(m)$ est congru à 1 (mod 4)

dc $m = 3l+1$ sinon $\sigma(m)$ est congru à

0, 2 ou 3 (mod 4).

Ainsi $\sigma(m) = 4l+1$ dc $k = l$ et $m = n$.

De même $n = 3k+2$...

Donc σ est injective et finalement bijective :

on a bien un réarrangement.

On mq $\sum_{k \geq 0} u_{\sigma(k)}$ CV et sa somme vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$

Pour cela, on fait une sommation par paquet :

soit $v_{2k} = u_{\sigma(3k)} + u_{\sigma(3k+1)}$

$v_{2k+1} = u_{\sigma(3k+2)}$

De sorte :

- $v_{2k} = \dfrac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \dfrac{(-1)^{4k+1}}{4k+1+1} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2(2k+1)}$

$v_{2k} = \frac{1}{2} u_{2k}$.

- $v_{2k+1} = \dfrac{(-1)^{4k+3}}{4k+3+1} = \dfrac{-1}{2(2k+2)} = \dfrac{1}{2} u_{2k+1}$.

Donc $\sum_{n \geq 0} v_n$ est $\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} u_n$.

On ed que $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV et sa somme vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$.

Or la longueur des paquets est au plus 2 et $(u_{\sigma(n)})_n \longrightarrow 0$.

Donc $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ CV et sa somme est égale à celle de $\sum_{n \geq 0} v_n$ dc à $\frac{1}{2}\ln(2)$.

Ainsi $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$

mais $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2$

3) Produit de série

(D) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries. Pr $n \in \mathbb{N}$,

on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0$

La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est appelée série de produit des 2 séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Pk ça et pas : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$

$(u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n) =$

$\underbrace{u_0 v_0}_{w_0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{w_1} + \underbrace{u_2 v_0 + u_1 v_2 + u_0 v_2}_{w_2} + \dots \neq u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots$

Donc la déf est ce q généralise le produit de 2 sommes finies.

(T) soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries à termes positifs CV. $\sum_n w_n$ leur série produit. Alors $\sum_n w_n$ CV et :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

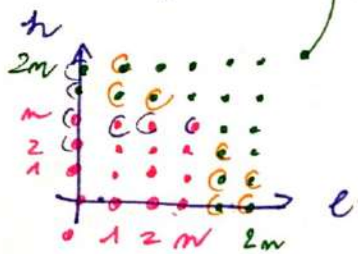
Preuve : soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \dots$, $W_n = \dots$

$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim U_n$, $V = \dots v_k = \dots$

Pr $\forall n \geq 0$:

$U_n V_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} v_l\right) = \sum_{k,l=0}^{n} u_k v_l$

$U_{2n} V_{2n} = \sum_{k,l=0}^{2n} u_k v_l$ et $W_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{k} u_l v_{k-l}$



$k = 2n$, $0 \leq l \leq 2n$

$k = 2n-1$, $0 \leq l \leq 2n-1$

⋮

On en déduit de ce graphique $U_n V_n \leq W_{2n} \leq U_{2n} V_{2n}$

Le (TH) TDG implique $\lim_{n\to\infty} W_{2n} = U.V$.

Comme $(W_n)_n$ est ↗ car $u_n, v_n \geq 0$ dc :

$W_{2n} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n+2}$

$\boxed{\text{TDG}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} W_{2n+1} = U.V$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} W_n = U.V$. on en déduit $\sum_n W_n$ CV

et sa somme vaut $U.V$.

TH soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ 2 séries absolum^t CV

et $\sum_{n\geq 0} w_n$ leur série produit.

Alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ CV et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

<u>Preuve</u> : on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| =: w_n'$$

D'après le lemme $\sum_{n\geq 0} w_n'$ est CV car c'est la série produit $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |v_n|$.

Dc par comparaison $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolm^t CV.

De plus : $\left|\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} v_l\right) - \sum_{k=0}^{n} w_k\right|$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} u_k v_l - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} u_l v_{k-l}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=n-k+1}^{n} u_k v_l\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=n-k+1}^{n} |u_k v_l|$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} |u_k|\,|v_l| - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} |u_l||v_{k-l}|$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{n} |v_l|\right) - \sum_{k=0}^{n} w_k' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ CV vers $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$

Rq : ce résultat est faux sans CV absolue :

ⓐ le produit $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$