M43 CM

Probabilités Discrètes

C.0 : Introduction

→ pas de proba si on pt ∄ prévoir
→ Φme aléatoire : prévoir !
→ lancer pièce de monnaie.
→ lois ds le hasard q ne s'exprime q pr des nbrs assez grds.

@ usine, 10 000 btls plastiqs
si 100 : 7 pb. ≈ 700 défectx

@ municipté, 10 000 votants
interrogés, si 100 votants → 7 bidule
≈ 700 pr bidules

▸ LDH dépdt :
– nbr objets (pas de la nature objets) → modélisat° mathématiques.
– s'expriment d'autant mieux q nbr d'expériences est + grd. → loi des grds nbrs → limites, stats

– on ne cherche pas "vraie" proba d'un event MS la meilleure proba contenue de l'infor° disponible → tribus, probas conditionnelles

→ utilisat° outils de la théorie des probabilités

Probabilités : faire des maths pr prévoir ou expliquer

C1 Espaces probabilisées

I/ Événements observables & opérat°s ensemblistes

▹ on réalise une xp aléatoire.
▹ on la modélise vis-à-vis d'une question qu'on se pose dessus.
→ simplifier & mathématiser infor°
▹ on note Ω : l'ens des résultats possibles de l'expérience.

▹▹ ces résultats s'appellt : événements élémentaires.
▹ les events observables st les choses dt on pt dire après l'expérience si elles se st produites ou non ! (représentés par parties Ω)

@ un ♀ & ♂ en L_2 : quel groupe ?

$$\Omega = \{(1,2), (1,1), (1,3), (2,1), \dots, (3,3)\} = \{1,2,3\}^2$$ 9 résultats possibles

• "ils st du groupe 1" : $(1,1)$ est event élémentaire.

▷ évt (observables) non élémentaires :

"ils st gr. ≠ts" :

$\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\} = A \subset \Omega$

"il ne st pas gr. 1" :

$\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} = B \subset \Omega$.

"il ne st pas gr. 1 & gr. ≠" :

$\{(2,3),(3,2)\} = A \cap B$.

"il ne st pas gr. 1 ou gr. ≠" : $A \cup B$.

$A \cup B = \Omega \setminus \{(1,1)\}$.

"il n'est pas vrai q ils ne st pas gr. 1" :

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\} = B^C = \Omega \setminus B$.

(R) notaᵒ $\overline{B}$ maladroite adhérence en topologie, on utilise B^c.

Langage probabiliste	Ecriture ensembliste
• évent certain	• Ω contient ts résultats possibles
• évent impossible	$\emptyset$ aucun résultats possibles
ω est évent élémentaire	$\omega \in \Omega$
A est un évent (observable)	$A \subset \Omega$ A est une partie de Ω $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ⚠ parfois certaines parties ne st pas des évts observables
A & B st réalisés	$A \cap B$
A ou B est réalisé	$A \cup B$
A et B st incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B st disjoints
A implique B si A est réalisé alors B est réalisé.	$A \subset B$
pour $A_1, A_2, A_3, \dots$ une suite évts : au moins un des A_i est réalisé $\exists i \in \mathbb{N}^*$, A_i est réalisé	$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$
tous les A_i st réalisés ⇔ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, A_i est réalisé.	$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$

II / Rappels sur le dénombrement & les séries

*) le nombre d'ordres possibles pr n objets.
(nbr de bijecθ de $\{1,2,\dots,n\}$ vers E de cardinal n)

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

*) le nombre de façons de prendre p objets parmi n (nbr de parties à p élémts d'un ensemble à n élt).

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

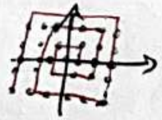
*) un ensemble infini E est dénombrable si $\exists$ une bijecθ de $\mathbb{N}^*$ vers E,
<u>ie</u> les élts de E forment une suite.

$E = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dénombrable

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ idem

$\mathbb{Z}^2 = \{(-1,0), \dots$



$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}$ dénombrable

Comme une partie de $\mathbb{Z}^2$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

*) FF du Binôme

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}}$$

*) séries géométriques :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } x \neq 1,\ \displaystyle\sum_{k=M}^{N} x^k = \frac{x^M - x^{N+1}}{1-x} \\ \text{si } |x| < 1,\ \displaystyle\sum_{k=M}^{\infty} x^k = \frac{x^M}{1-x} \end{array}}$$

*) série exponentielle :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

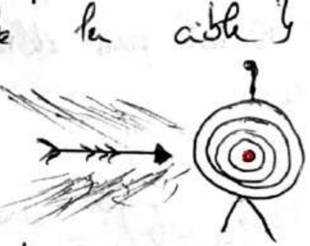
Exemple : (Tir à l'arc) @ ss de Bernoulli.

Ben & Clara tire à tour de rôles.

Ben commence. Le premier q tche la cible a gagné.

$A_i = \{$la i^e flèche touche la cible$\}$

$B = \{$Ben gagne$\}$



$C = \{$Clara gagne$\}$

$D_n = \{$la première flèche q touche est la n-ième$\}$.

$D_n = \{$1° tir raté
et 2° tir raté
et ... $(n-1)$° raté
et n° tir réussi$\}$.

$$D_n = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$$

$$D_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c\right) \cap A_n$$

$$B = D_1 \cup D_3 \cup D_5 \cup \dots$$

$$B = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{2j+1} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2j} A_i^c\right) \cap A_{2j+1}\right).$$

$$C = D_2 \cup D_4 \cup D_6 \cup \dots$$

$$C = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2j-1} A_i^c\right) \cap A_{2j}\right).$$

$E = \{$on ne touche jamais la cible$\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$

- B, C, E st 2 à 2 incompatibles.
- les D_n st 2 à 2 incompatibles (si $n \neq m$, $D_n \cap D_m = \emptyset$)
- les A_i ne st pas incompatibles.

on pt prendre $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ensemble des suites de 0 et 1

$A_i = \{\omega = (u_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \Omega, u_i = 1\}$

$E = \{(0,0,0,0,\dots)\}$ ne contient que la suite nulle.

III / Une probabilité est une fonc° d'ensembles

soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une exp.

on note $\mathcal{F}$: ens évts observables

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega$ ie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathcal{F}$ n'est pas partie de Ω.

→ évts observables st ce dt on sait dire après s'ils st réalisés ou non. (ceci ce art : probabilité de réaliser).

On impose que : (D) $\mathcal{F}$ est tribu si :

(i) • $\Omega \in \mathcal{F}$: on sait dire si évt cert$_1$ a eu lieu.

(ii) • si $B \in \mathcal{F}$ alors $B^c \in \mathcal{F}$ (evt réalisé voir voir et non réalisé)

(iii) • si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. de $\emptyset \in \mathcal{F}$

si on a une suite d'evt tous observable, on sait observer si au moins un d'entre eux s'est produit.

Un ens. $\mathcal{F}$ ayant ces propriétés s'appelle une tribu sur Ω. ($\mathcal{F}$ est ens d'ens).

(Rq) : si Ω est fini ou dénombrable, on choisit le + svt $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

On impose que : (D) $\mathcal{F}$ est tribu si :

(i) • $\Omega \in \mathcal{F}$: on sait dire si évt certain a eu lieu.

(ii) • si $B \in \mathcal{F}$ alors $B^c \in \mathcal{F}$ (est réalisé voir voir est non réalisé)

(iii) • si $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. de $\emptyset \in \mathcal{F}$

• si on a une suite d'évt tous observable, on sait observer si au moins un d'entre eux s'est produit.

Un ens. $\mathcal{F}$ ayant ces propriétés s'appelle une tribu sur Ω. ($\mathcal{F}$ est ens d'ens).

(Rq) : si Ω est fini ou dénombrable, on choisit le + svt $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

• (D) Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est 1 applicat° sur $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ σ-additive de masse totale 1 :

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \quad \text{tq}$$
$$A \longmapsto P(A)$$

• $P(\Omega) = 1$ (masse totale

• σ-additivité : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ pr tte suite (S) $(A_i)_{i \geq 1}$

d'élts de $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints

$$\forall n \neq m, \quad A_n \cap A_m = \emptyset$$

(@ livre de maths & physiq ne correspd pas).

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.
$(\Omega, \mathcal{F})$ espace probabilisable.

@ (tir à l'arc).
Pr modéliser situat° où chq flèche a $\frac{1}{10}$ de toucher cible.
On construit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tq

$$P(D_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ben : B : " Ben gagne "

$$P(B) = P\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} D_{2j+1}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} P(D_{2j+1})$$

$$P(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{2j+1-1 = 2j} = \frac{1}{10} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{81}{100}\right)^{j}$$

$$P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{81}{100}} = \frac{10}{19}.$$

Ben est avantagé car il tire le premier.

$$P(C) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(D_{2j})$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{2j-1}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{81}{100}\right)^{j}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{81/100}{1-\frac{81}{100}} = \frac{9}{19}$$

Ptés des probas

Toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie :

1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

2) si $A \cap B = \emptyset$ (disjoints) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. additivité

si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ et 2 à 2 disjoints $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

3) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

4) si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

5) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

pour $A_1, \dots, A_n$: FF de Poincaré !...

6) Continuité Séquentielle $\nearrow$ / $\searrow$:

- pr tte suite $\nearrow$ d'evts $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

- pr tte suite $\searrow$ d'evts $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(C_n)$$

7) pr evts qq (m̂ non disjoints) :

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Preuves :

1) $A_1=\emptyset, A_2=\emptyset, \dots$ suite evts 2 à 2 disjts

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ie $P(\emptyset)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \geqslant \overbrace{P(\emptyset)}^{1^\circ \text{ terme}}+\overbrace{P(\emptyset)}^{2^\circ \text{ terme}}$

dc $\underbrace{P(\emptyset)}_{\in[0,1]} \leqslant 0$. dc $P(\emptyset)=0$.

2) additivité :

pr $A_1, A_2, \dots, A_n$ 2 à 2 disjoints

$A_1, A_2 \dots, A_n, A_{n+1}=\emptyset, A_{n+2}=\emptyset$ ---

suite d'evts 2 à 2 disjoints.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+\underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \underbrace{P(\emptyset)}_{=0}}_{0}$$

3) cf 2) av $A_1=A$ et $A_2=A^c$.

$$P(A \cup A^c)=P(A)+P(A^c)=P(\Omega)=1$$

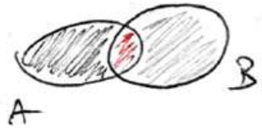
4)

$A \subset B$ cf 2) av $A_1=A$

$A_2=B \cap A^c$.

$$P(B)=P(A \cup A_2)=P(A)+\underbrace{P(A_2)}_{\geqslant 0} \geqslant P(A)$$

5) cf 2)



$A_1=A \cap B^c$

$A_2=A \cap B$

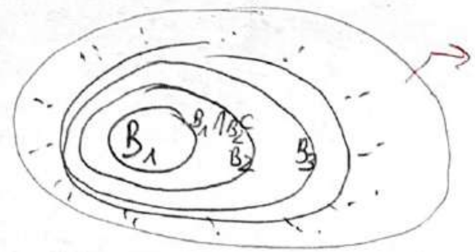
$A_3=A^c \cap B$

$$P(A \cup B)=P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=\underbrace{P(A_1)+P(A_2)}_{P(A)}+P(A_3)$$

$P(B)$ cf 2)

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

6)



$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=B_1 \cup (B_2 \cap B_1^c) \cup (B_3 \cap B_2^c) \cap \dots$$

$$=B_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty}(B_i \cap B_{i-1}^c)\right) \leftarrow$$ 2 à 2 disjoints

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(B_i \cap B_{i-1}^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(P(B_1) + \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap B_{i-1}^c)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{B_1 \cup (B_2 \cap B_1^c) \cup (B_3 \cap B_2^c) \cup \dots (B_n \cap B_{n-1}^c)}_{B_n}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

- la continuité séquentielle ↘ s'obtient en appliquant ceci à $B_1 = C_1^c \subset B_2 = C_2^c \subset \dots$

7) → cf 5)

→ DM par récurrence

→ user continuité séquentielle ↗

@ tir à l'arc

$E = \{$ on ne touche jamais la cible $\}$

$E = \{(0,0,\dots,0)\} \neq \emptyset$ ⚠

$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ où $E_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{les } n \text{ premiers tirs} \\ \text{ratent la cible} \end{array} \right\}$

$$E = D_1^c \cap D_2^c \cap \dots \cap D_n^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\right)^c$$ bO

$$P\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} D_i}_{\text{2 à 2 disjts}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(D_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1-\left(9/10\right)^n}{1 - 9/10} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$P(E_n) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_n\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

vérifier hypothèse $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

dc $P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

E est evt négligeable ($P(E)=0$)

⚠ E n'est pas event impossible. ($E \neq \emptyset$).

[Book]

(P) (i) si Ω est un ens fini :

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

▸ se donner une proba P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ revient à se donner un n-uplet $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dans $[0,1]$ tq $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

et on pose $P(\{w_i\}) = p_i$

▸ cas particulier de l'équiprobabilité :

si les p_i st tous égaux $\left(p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{card(\Omega)}\right)$,

on a $\forall B \subset \Omega$, $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nbr cas favorables}}{\text{nbr cas possible}}$

⚠ Seulement s'il y a ÉQUIPROBALITÉ.

(ii) si Ω est infini dénombrable :

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots\} = \{w_i, i \in \mathbb{N}^*\}$.

▸ se donner une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ revient à se donner une série de nombres $p_i \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ et à poser $P(\{w_i\}) = p_i$. $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

▸ équiprobabilité impossible sur un ens infini dénombrable !

(iii) Ω pt ê ∞ non dénombrable

ds ce cas $\sum_{w \in \Omega} P(\{w\})$ pt prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1 !

$P(\Omega) = 1$ reste vrai.

@ tir à l'arc

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ $\quad w = (u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de 0 et 1.

On note $F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}$ l'ensemble des suites q commencent par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, par l'ensemble F_{0100} est l'ensemble des cas où les tirs commencent par "1 raté, 1 réussi, 1 raté, 1 raté".

si $F_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}$ est réalisé, il y a exactement $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ de tirs réussis parmi les n premiers.

Avec 1 chance sur 10 de réussite :

$$P(F_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n}$$

résultats pairés ↘

si $\omega = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\{\omega\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{u_1 u_2 \dots u_n}$$

$F_{u_1} \supset F_{u_1 u_2} \supset F_{u_1 u_2 u_3} \supset \dots$ suite ↘ d'évts.

continuité séquentielle monotone :

$$P(\{\omega\}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{u_1 u_2 \dots u_n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{P(F_{u_1 \dots u_n})}_{\leq \left(\frac{9}{10}\right)^n} = 0$$

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = 0$

dc $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 0$

Ceci contredit-il la σ-additivité !!?

σ-additivité : ($\rightarrow$ somme probas vaut 1.) pr tte suite d'évts 2 à 2 disjoints $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$

les $\{\omega\}$ st 2 à 2 disjoints : si $\omega \neq \omega'$, $\{\omega\} \cap \{\omega'\} = \emptyset$.

$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$ $\qquad P(\Omega) = 1$.

$\boxed{\text{NON}}$ pas de contradicO car les $\{\omega\}$ ne forment pas une $\boxed{\text{suite d'évt}}$, ils st trop nombreux pr former une suite.

Pour toute suite (d'élts) ds Ω, on pt trouver un ω' q n'est pas ds la suite

$\omega_1 = 0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1$

$\omega_2 = 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0$

$\omega_3 = 1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0$

ω_4

$\vdots$

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ non dénombrable.

$\omega' = 1\,0\,0\,0\,1 \dots \in \Omega$

$\notin \{\omega_i, i \in \mathbb{N}^*\}$

C2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Ⓐ sachet 100 graines "fleurs variées" :

10    20 

30    40 

On sème une graine au hasard.

$$P(\{\text{fleur bleue}\}) = \frac{20+40}{10+20+30+40} = \frac{60}{100}$$

Un mois après, le plant a des feuilles circulaires

$$P(\{\text{fleur bleue}\} \mid \{\text{feuilles circ}\}) = \frac{40}{40+40} = \frac{80}{100} = \frac{P(\{\text{bleues}\}\{\text{rondes}\})}{P(\{\text{rondes}\})}$$

I / Probabilité conditionnelle

Ⓓ Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; on fixe un événement H tq $P(H) \neq 0$.
Pour tout evt A, la probabilité sachant H de A est :

$$\boxed{P_H(A) = P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}}$$

Prop : La fonc° $P_H = P(\ \mid H)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & P(A \mid H) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(H)} \end{array}$$

est une proba sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

DM • $P(\Omega \mid H) = \dfrac{P(\Omega \cap H)}{P(H)} = \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$. $H \subset \Omega$

• Vérifier σ-additivité : si les A_i st 2 à 2 disjoints :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \mid H\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap H\right)}{P(H)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap H)\right)}{P(H)}$$

disjoint 2 à 2

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap H)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid H)$$

$\Rightarrow P(\ \mid H)$ est σ-additive.

Conséquence : $P(\ \mid H)$ a toutes les pptés d'une probabilité

Rq $P(H \mid H) = \dfrac{P(H \cap H)}{P(H)} = \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$

⚠ Aucun lien entre $P(A|H)$ et $P(A|H^c)$

$A|H$ n'a pas de sens.

$H \mapsto P(A|H)$ n'est pas une probabilité.

Les probas conditionnelles st svt + faciles à calculer.

Ex : Proba de ne pas avoir 💡 utilisable si on prd 2 ds une caisse de 100 où 5 st grillées.

$P(D_1 \cap D_2) = ?$ où $D_1 = \{1° \text{ défectueuse}\}$, $D_2 = \{2° \text{ ———}\}$

(i) Calcul sans conditionnement :

→ équiprobabilité sur $\Omega = \{\text{parties à 2 élts d'un ens. à 100 éléments}\}$.

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{\operatorname{card}(D_1 \cap D_2)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^2}{C_{100}^2} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{20}{9900} \approx 0,2\ \%$$

(ii) Calcul de conditionnement

$$P(D_1) = \frac{5}{100}, \quad P(D_2 | D_1) = \frac{4}{99}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_2 | D_1) \cdot P(D_1)$$

$$= \frac{5}{100} \times \frac{4}{99} = \frac{20}{9900}$$

Règle de conditionnement successif (ou probabilités composées) :

si les evts $A_1, A_2, \dots, A_n$ st tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ alors $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots A_2 \cap A_1) =$

$$= P(A_n | A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \times P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \times \dots \times \dots \times \dots \times P(A_3 | A_2 \cap A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_1)$$

DM

$$= \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)} \times \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)} \times \dots \times \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times P(A_1)$$

→ ceci est bien défini car $\forall j$ de 1 à $n-1$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{j} A_i\right) \geq P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$$

est inclus dans

→ $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

@ (tir à l'arc 4 10% chances de réussite)

$$P(D_n) = P(D_n \cap D_{n-1}^c \cap \dots \cap D_1^c)$$

$$= \underbrace{P(D_n \mid D_{n-1}^c \cap \dots \cap D_1^c)}_{1/10} \times P(D_{n-1}^c \cap \dots \cap D_1^c) \dots \times P(D_2^c \mid D_1^c) \times P(D_1^c)$$

$n-1$ 6 égu à 1.

$$P(D_n) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

⑤ On appelle partition de Ω, une famille $(H_i)_{i\in I}$ d'evts non-vides ($\forall i \in I$, $H_i \neq \emptyset$), 2 à 2 disjoints ($i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$) et dont l'union est Ω. ($\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$). On dit aussi un système complet d'evts.

Conditionnement p/ à tous les cas possibles (proba totales).

- si $P(H) \neq 0$ et $P(H^c) \neq 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = P(A|H).P(H) + P(A|H^c).P(H^c)$
- si $H_1, H_2, \dots, H_n$ est une partition de Ω constituée d'evts tous de proba non-nulle :

$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = P(A|H_1).P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

- si $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω tq $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ alors $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i).P(H_i)$$

Formules de Bayes (proba des causes)

si $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partitiO de Ω tq $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(H_i) > 0$ et si A est un evt, $P(A) > 0$ alors $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$

→ m̂ rés p. partitiO finie $(H_1, \dots, H_n)$ ou (H, H^c).

DM Ds le cas de $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$,

les $(H_i \cap A)_{i\in\mathbb{N}}$ st 2 à 2 disjoints et

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (H_i \cap A) = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i\right) \cap A = \Omega \cap A = A$$

Donc $P(A) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}(H_i \cap A)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(H_i \cap A)$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid H_i)\, P(H_i)$$

si en plus $P(A) > 0$:

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$

@ (Tir à l'arc)

Un ami est venu au début de l'entraînement, mais il ne compte pas rester longtemps :

$P(F \mid D_n) = \frac{1}{2^n}$ où $F = \{$il assiste au 1° tir réussi$\}$

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F \mid D_n)\, P(D_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{20}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9}\, \frac{1^\circ\text{ terme}}{1-\text{raison}} = \frac{1}{9}\, \frac{9/20}{1 - 9/20} = \frac{1}{11}.$$

$$P(D_1 \mid F) = \frac{P(F \mid D_1) \cdot P(D_1)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(F \mid D_n) \cdot P(D_n)}$$

$$P(D_1 | F) = \frac{\frac{1}{2^1} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{11}} = \frac{11}{20}.$$

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \setminus \{\underbrace{(0, 0, \dots, 0, \dots)}\}$$

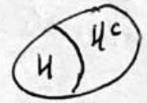
on avait calculé sa proba sur le

- $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ & faisait 0

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n \to \text{les } (D_n)_n \text{ forment}$$

une partition de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \setminus \{(0, \dots)\}$

FF Bayes pr (H, H^c) : Ω



on suppose $P(H) > 0$ et $P(H^c) > 0$ pr A,

- $P(A) > 0$:

$$P(H | A) = \frac{P(A | H) . P(H)}{P(A|H) . P(H) + P(A|H^c) . P(H^c)}$$

II / Indépendance de 2 events

Intuitivement, si la réalisat° de B n'apporte aucune informat° sur celle de A, on doit avoir $P(A | B) = P(A)$.

Si A et B sont de probas non-nulles :

$$P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$
$$\iff P(B|A) = P(B)$$

(D) Deux evts A & B sont indépendants sous la proba P si $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

Rq Deux evts incompatibles de proba non-nulle ne sont jamais indépendants :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A) . P(B)$$

L'indépendance est relative à la probabilité choisie :

@ 2 lancers d'une pièce $\Omega = \{ff, fp, pf, pp\}$

$A = \{$face à 1° lancer$\} = \{ff, fp\}$

$B = \{$pareil ax 2 lancers$\} = \{ff, pp\}$

$A \cap B = \{ff\}$

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_1)$ équiprobabilité modélisant une pièce équilibrée.

$P_1(A) = \frac{1}{2}$; $P_1(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_1(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

A et B st indépendants sous P_1.

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_2)$ modélisant une pièce q fait face de proba $\frac{2}{3}$.

$P_2(A) = \frac{2}{3}$, $P_2(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$P_2(A \cap B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

A et B ne st pas indépendts sous P_2.

Prop Si A et B st indépendants sous P alors A, B^c aussi (dc A^c, B aussi, et A^c, B^c aussi).

DM

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ $\quad A = \underline{(A \cap B)} \cup (A \cap B^c)$

III / Indépendance de plus de 2 evts

@ 3 pièces équil. dRs ≠s. P proba sur $\Omega = \{f, p\}^3$ muni de $\mathcal{P}(\Omega)$

A = {rge & jaune dnnt pareil}

B = {rge & blc " " "}

C = {jne & blc " " "}.

@ 2 lancers d'une pièce $\Omega = \{ff, fp, pf, pp\}$
$A = \{$ face à 1° lancer $\} = \{ff, fp\}$
$B = \{$ pareil aux 2 lancers $\} = \{ff, pp\}$

$A \cap B = \{ff\}$

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_1)$ équiprobabilité modélisant une pièce équilibrée.

$P_1(A) = \frac{1}{2}$, $P_1(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_1(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

A et B st indépendants sous P_1.

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_2)$ modélisant une pièce qui fait face de proba $\frac{2}{3}$.

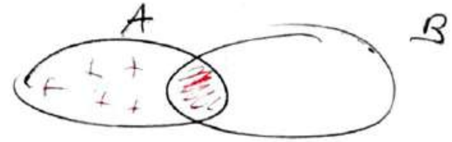
$P_2(A) = \frac{2}{3}$, $P_2(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$P_2(A \cap B) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

A et B ne st pas indépendts sous P_2.

Prop. Si A et B st indépendants sous P alors A, B^c aussi (dc A^c, B aussi, et A^c, B^c aussi).

DM



$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ $A = \underline{(A \cap B)} \cup (A \cap B^c)$

III / Indépendance de plus de 2 evts

@ 3 pièces équil. dRs ≠s. P proba sur $\Omega = \{f, p\}^3$ muni de $\mathcal{P}(\Omega)$, P équiprobabilité

A = { rge & jaune dnnt pareil }
B = { rge & blc " " " }
C = { jne & blc " " " }.

$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$

Intuitivement, A, B, C ne st pas indépendants.
(si A & B st réalisés, C l'est forcément)

$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A).P(B)$ dc A & B st indépendants

A et C aussi, B et C aussi.

$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{card(E)}{8}$

A, B, C st 2 à 2 indépendants.

Mais A, B et C ne st pas indépendants car

$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(A).P(B).P(C)$

@ Un carré au hasard ds une zone de 8 carrés.

Proba que le tiré soit ds la zone

carré rouge : ∘
carré vert : ▲
carré bleu : ✱

$R = \{rouge\}$, $B = \{bleu\}$, $V = \{vert\}$.

$P(R) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(V) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Intuitivement R, B, V ne st pas indépendants car si on sait que V et B st réalisés, on est sûr que R est réalisée.

$P(B \cap R \cap V) = \frac{1}{8} = P(B).P(R).P(V)$

$P(R \cap B) = \frac{2}{8} = P(R).P(B)$

$P(R \cap V) = 2/8 = P(R).P(V)$

$P(B \cap V) = \frac{1}{8} \neq P(B).P(V)$

D i) A, B, C st indépendants (sous P) si
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ et $P(A \cap C) = P(A).P(C)$
et $P(B \cap C) = P(B).P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B).P(C)$

ii) n évents st indépendts si la proba de l'intersection est égale au produit des probabilités.
Pour toute sous famille de 2, 3, ... ou n d'entre eux.

iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée "suite d'évts indépdts" si $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ st indépdts pr chq choix d'un ~~nbr fini~~ nombre fini d'indices distincts.

→ Suites d'épreuves indépendantes :

Lors d'une suite d'expérience, on dit qu'elles st indépendantes si tte suite d'evts $A_1, \dots, A_4,$ où chq A_i ne dépend que du résultat de la prochaine i° expérience forme une suite d'evts indépendants.

Schéma de Bernoulli

Il s'agit d'une suite d'exp. indépendantes qui ont toutes la m̂ proba p de déboucher sur un succès (evt q nous intéresse). La proba d'échec (evt contraire) est à chq fois $1-p$.

$A_i = \{$ succès à la i^e épreuve $\}$, $P(A_i) = p$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$

$D_n = \{$le 1° succès arrive à la n ième épreuve$\}$ les A_i st indépdts

$$P(D_n) = P(A_1^c \cap A_2^c \dots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$$
$$= P(A_1^c) \times \dots \times P(A_{n-1}^c) \times P(A_n)$$
$$= (1-p)^{n-1} \cdot p$$

(R) si des events st indépendts, en remplaçant certains par l^rs complémentaires, ça reste une famille d'events indép.ts.

$G_{n,k} = \{k$ succès et $n-k$ échecs parmi les n premières épreuves$\}$

$$P(G_{n,k}) = P\left(\bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \text{card } I = k}} \underbrace{\left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{j \notin I \\ 1 \le j \le n}} A_j^c\right)\right)}\right)$$

2 à 2 disjoints d'intersec° vide pr $I \neq I'$

$$= \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \text{card}(I) = k}} P\left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{j \notin I \\ 1 \le j \le n}} A_j^c\right)\right)$$ les A_i st indépdts

$$= \underbrace{\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \text{card } I = k}}}_{C_n^k \text{ termes}} \underbrace{\prod_{i \in I} P(A_i)}_{p^k} \times \underbrace{\prod_{\substack{j \notin I \\ 1 \le j \le n}} P(A_j^c)}_{(1-p)^{n-k}}$$

$$= C_n^k \; p^k (1-p)^{n-k}$$ (loi binomiale)

$G = \{$il n'y a tjrs que des succès$\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,n}$

$\forall n$, $G_{n+1,n+1}$ dc p continuité séquentielle décroissante : $P(G) = \lim_{n \to \infty} P(G_{n,n})$

$$= \lim_{n \to \infty} p^n = \begin{cases} \text{si } p = 1 \text{ alors } 1 \\ 0 \le p < 1 \text{ alors } 0. \end{cases}$$

(R) Loi de Murphy : " Tout ce q peut mal tourner finira par mal tourner si on essaye assez de fois "

$P(\{$un échec finira p arriver$\}) = 1 - P(G)$

$= \begin{cases} 0 \text{ si la proba d'échec est } \cancel{\text{positive}} \text{ nulle} \\ 1 \text{ positive} \end{cases}$

LdM $\rightarrow$ besoin hyp., events indépdts.

C3 Les variables aléatoires discrètes & leurs lois

I / Variables aléatoires discrètes

(D) Une (va) discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une applicat° $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto X(\omega)$

- tq • l'ens. des images $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ → ens fini ou dénombr^{ble}

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \underbrace{\{x_1, x_2, x_3, \dots\}}_{\text{forme une suite}}$

• $\forall x_k \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x_k\}) = \{w \in \Omega, X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{F}$

$\overset{\text{not}}{=} \{X = x_k\}$

- Not° : $\{X \leq t\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\}$ (image réciproq)

$= X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$

$\{a \leq X \leq b\} = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\}$

$= X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.

(e) n lancers d'une pièce $\Omega = \{0, 1\}^n$

0 face 1 pile.

$X : \{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega = (u_1, \dots, u_n) \longmapsto X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} u_i$ nbr pile tirés

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ (va) nbr fini de val^{rs}

(e) (tir à l'arc)

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \setminus \{(0,0,0,\dots)\}$.

$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega = (u_i)_{i \leq N} \longmapsto Y(\omega) = \inf\{i \in \mathbb{N}^*, u_i = 1\}$

est le rang du 1° tir réussi^t.

$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$\{Y = n\} = D_n \in \mathcal{F}$

(D) Pour X une (vad), on note $p_k = P(X = x_k)$ pr chq $x_k \in X(\Omega)$

$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 1]$

$B \longmapsto P_X(B) = \sum_{x_k \in B} p_k$

(b) $= \sum_{x_k \in B} P(X = x_k) = P(X \in B)$

P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée
<u>loi de X</u>.

(Rq) les P_k pr chq $x_k \in X(\Omega)$ suffisent à déterminer la loi P_X de X

<u>Preuve</u> P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$:

- $$P_X(\mathbb{R}) = \sum_{x_k \in \mathbb{R}} P(X = x_k)$$
$$= P\Big(\bigcup_{x_k \in \mathbb{R}} \overbrace{\{X = x_k\}}^{2 \text{ à } 2 \text{ disjts}}\Big)$$
$$= \underline{P(\Omega) = 1}.$$

- si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille ~~d'evts~~ de parties 2 à 2 disjointes de $\mathbb{R}$:
$$P_X\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i\Big) = \sum_{x_k \in \underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i}_{2 \text{ à } 2 \text{ disjoints}}} P(X = x_k)$$
$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\sum_{x_k \in B_i} P(X = x_k)}_{P(X \in B_i) = P_X(B_i)}$$

P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ appelée **loi de X**.

(Rq) les P_k pr chq $x_k \in X(\Omega)$ suffisant à déterminer la loi P_X de X

Preuve P_X est une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$:

- $P_X(\mathbb{R}) = \sum_{x_k \in \mathbb{R}} P(X = x_k)$

$$= P\Big(\underbrace{\bigcup_{x_k \in \mathbb{R}} \{X = x_k\}}_{2 \text{ à } 2 \text{ disjts}}\Big)$$

$$= P(\Omega) = 1.$$

- si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de parties 2 à 2 disjointes de $\mathbb{R}$:

$$P_X\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i\Big) = \sum_{x_k \in \underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i}_{2 \text{ à } 2 \text{ disjoints}}} P(X = x_k)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\sum_{x_k \in B_i} P(X = x_k)}_{P(X \in B_i) = P_X(B_i)}$$

@ (Tir à l'arc).

Y rang de la première flèche q touche la cible.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_Y(\{n\}) = P(Y = n) = P(D_n)$
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

$Y \sim \mathcal{G}éom\left(\frac{1}{10}\right)$ → "suit la loi géométriq de paramètre $1/10$" →

(Rq) Des v.a peuvent avoir la m̂ loi sans ê égales

@ : On lance 2 dés, un vert & un rouge.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ P équiproba

X : résultat dé vert $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$

Y : rouge $Y(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$

loi de X :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$P(X = 1) = \frac{\text{card}(\{X = 1\})}{\text{card } \Omega} \to = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ loi uniforme.

Y suit la m̂ loi.

Pour la plupart des tirages $\omega \in \Omega$:

$$X(\omega) \neq Y(\omega)$$

$$P(X \neq Y) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{36}$$

X et Y ne st pas des v.a égales.

(entre ens départ & ens d'arrivée, ne donnent pas m̂ chose)

D La f de répartition de la v.a. X est une f $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto F_X(t) = P_X(]-\infty; t]) = P(X \leq t) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq t}} P(X = x_k)$$

→ elle caractérise la loi mais pr une v.a. X discrète, la liste des $(P(X = x_k))_{x_k \in X(\Omega)}$ suffit à caractériser la loi.

II / Lois discrètes classiqs

II.1) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

$X \sim Ber(p)$ si $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Rq L'indicatrice evt A est

$$\mathbb{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

La v.a $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$.

@ Pr pièce équilibrée $\mathbb{1}_{\{pile\}} \sim Ber(\frac{1}{2})$

II.2) Loi uniforme sr l'ens fini $\{x_1, \dots, x_n\}$

$X \sim Unif(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ si $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\forall 1 \leq k \leq n$.

ie si P_X est l'équiprobabilité sur $\{x_1, \dots, x_n\}$.

@ Le tirage d'un dé non truqué suit la loi $\mathrm{Unif}(\{1, \dots, 6\})$.

⚠ Q°: Quelle loi suit variable ?

→ ça suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/4$.

→ ça suit la loi Uniforme des entiers de 1 à 100...

⇛ bien préciser le paramètre.

NB : $\mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{Unif}(\{0,1\})$.

VI.3) Loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$)

(D) La loi $\mathrm{Bin}(n,p)$ est la loi du nbr de "succès" obtenus en n expériences aléatoires indépendantes q ont ttes la m̂ proba p de "succès".

On a mtré (cf schéma de Bernoulli) que $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ si $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

(R) On a bien $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$

@ Un wagon contient 120 places réservées par 120 voyageurs indépendants q ont tous 95 % de chances de venir :

X nbr de sièges occupés : $X \sim \mathrm{Bin}(120; 0{,}95)$

Y ——— si— vides : $Y \sim \mathrm{Bin}(120; 0{,}05)$

@ si evts $A_1, \dots, A_n$ st indépendants et tous de proba p, le nbr de A_i réalisés est

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

II.4) Loi hypergéométrique de paramètres N, M et n

$N \in \mathbb{N}^*$, $M \in \{0, 1, .., N\}$, $n \in \{1, 2, ..., N\}$.

(D) Hypergéom(N, M, n) est la loi du nbr d'objets remarquables tirés qd on tire au hasard sans remise ds un tas de N objets dont M st remarquables.

$X \sim$ Hypergéom(N, M, n) si

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} & \text{si } \begin{matrix} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n-k \leq N-M \end{matrix} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

@ On prend 2 ampoules parmi 100 dont 5 sont grillées. le nbr d'ampoules grillées prises suit Hypergéométrie$(100, 5, 2$.

II.5) Loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$)

(D) Géom(p) est la loi du nbr tentatives nécessaires pr obtenir le 1° "succès" ds une suite de tentatives indépendantes q ont toutes la m̂ proba p de succès.

$X \sim$ Géom(p) si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(X = k) =$
$= p(1-p)^{k-1}$

$\boxed{Rq}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$

@ si les tirs st indépendants & 10 % de chances de succès rang de la 1° flèche q touche la cible suit Geom$\left(\frac{1}{10}\right)$

II.6) Loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda \in]0,\infty[$.

$X \sim Pois(\lambda)$ si $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k)$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Rq $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

@ Compteur GGR.

II.7) Mesure de Dirac en $c \in \mathbb{R}$

$X \sim \delta_c$ si $P(X=c) = 1$,

on dit alors la v.a X est déterministe.

III. Deux théorèmes limites

Th Convergence des binomiales vers les Poisson

si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $[0,1]$ tq $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(Y=k)$ si

$X_n \sim Bin(n, p_n)$ et $Y \sim Pois(\lambda)$.

Usage en pratiq :

Quand n est grand et p petit $\left(\begin{matrix} n \geq 100 \\ \text{et } np \leq 10 \end{matrix}\right)$ on utilise $Pois(np)$ pr calculer des valeurs approchées de $Bin(n,p)$

Preuve : pr $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$C_n^k (p_n)^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} (n \cdot p_n)^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k!} (n \cdot p_n)^k \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \times - \times \frac{1}{n^k} e^{n \ln(1-p_n)} \times \frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{k!}\,(np_n)^k(1-p_n)^n\,\frac{1}{(1-p_n)^k} \qquad = C_n^k\,(p_n)^k(1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!}\,(np_n)^k \prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\,\frac{1}{n^k}\,e^{n\ln(1-p_n)}\,\frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k!}\,\underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \prod_{j=0}^{k-1} \underbrace{\left(\frac{n-j}{n}\right)}_{1}\,\underbrace{e^{n\ln(1-p_n)}}_{e^{-\lambda}}\,\frac{1}{\underbrace{(1-p_n)}_{1}}$$

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$

$\ln(1-p_n) \sim -p_n$.

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\,\lambda^k e^{-\lambda}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{k!}\,(np_n)^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k} \qquad = C_n^k (p_n)^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!}(np_n)^k \prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\,\frac{1}{n^k}\, e^{n\ln(1-p_n)}\,\frac{1}{(1-p_n)^k}$$

Hypo : $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda \in \,]0,\infty[$

$p_n \sim \frac{\lambda}{p_n}$

$$= \frac{1}{k!}\underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k}\,\underbrace{\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n-j}{n}\right)}_{1}\,\underbrace{e^{n\ln(1-p_n)}}_{e^{-\lambda}}\,.\,\underbrace{\frac{1}{(1-p_n)}}_{1}$$

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$

$\ln(1-p_n) \sim -p_n$.

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

2° (TH) limite :

(TH) Cvg des hypergéométriqs vers les binomiales :

Si $n \in \mathbb{N}^*$ fixé & $\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = p \in [0,1]$ alors $\forall\, k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{C_{M(N)}^k \times C_{N-M(N)}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$ ie $\lim_{N\to\infty} P(X_n = k) = P(Y=k)$ si $X_N \sim Hypg(N, M(N), n)$

et $Y \sim Bin(n,p)$.

→ Intuiθ : si taille N du tas d'objets est très grde alors tirer n objets AVEC ou SANS Remise ne change pas grd chose.

Preuve
$$\frac{C^{k}_{M(N)} \cdot C^{n-k}_{N-M(N)}}{C^{n}_{N}} = \frac{M(N)!}{k!\,(M(N)-k)!} \times \frac{(N-M(N))!}{(n-k)!\,(N-M(N)-n-k))!} \times \frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$= C^{k}_{n} \prod_{j=0}^{k-1} (M(N)-j) \prod_{i=0}^{n-k-1} (N-M(N)-i) \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(N-l)}$$

$$= C^{k}_{n} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{M(N)-j}{N-j}}_{k \text{ termes q tend}^t \text{ vers } p} \underbrace{\prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{N-M(N)-i}{N-k-i}}_{n-k \text{ termes q tend}^t \text{ vers } 1-p.}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} C^{k}_{n}\, p^{k}\, (1-p)^{n-k}$$

$$i = l-k$$

$$\prod_{l=k}^{n-1} \frac{1}{N-l} = \prod_{i=0}^{n-k} \frac{1}{N-k-l}$$

$$\frac{M!}{(M-k)!} = \frac{M(M-1)\ldots(M-(k-1))\cancel{(M-k)}\,\cancel{(M-k)}}{\cancel{(M-k)}\,(M-\cancel{(k+1)})}$$

IV / Vecteurs aléatoires discrets

@ Trois pers. répondent à un QCM (3 q°s, 2 Rep poss^{bl} p. q°) On note U, V, W nbr bonnes rep chacun.

Les 2 premiers répondent seules au hasard.
La 3° p. copie sr 1°. $W = U$.

$U \sim Bin(3, \frac{1}{2})$ $V \sim Bin(3, \frac{1}{2}) = W$

$P(U=0 \text{ et } V=0) = P(U=0)\,P(V=0)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$ $\{U=0\}$ ind'pdt de $\{V=0\}$

$P(U=0 \text{ et } W=0) = P(U=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Pr calculer probas concernant plsrs V.a, il ne suffit pas de connaître la loi de chacune !

D soit $X_1, X_2, \dots, X_m$ des V.a déf sr m̂ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ l'applicat°:

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$w \longmapsto (X_1(w), X_2(w), \dots, X_m(w))$$

Sa loi est la proba $P_{X_1,\dots,X_m}$ déf sr $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ par :

$$\forall B \subset \mathbb{R}^m \quad P_{X_1,\dots,X_m}(B) = P\left(\left\{ \begin{array}{l} w \in \Omega, \\ (X_1(w),\dots,X_m(w)) \in B \end{array} \right\}\right)$$

Elle est caractérisée par les

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_i = x_i\}\right)$$

pr ttes les val^{rs} x_1 de $X_1(\Omega)$, ttes les valeurs $x_2 \in X_2(\Omega)$, etc.

Qd $m = 2$, on parle de couple aléatoire.

La V.a X_i est la i^è marginale du vct^r aléat^{re}.
Sa loi P_{X_i} est la i^è loi marginale.

Rq De la loi, on pt déduire les lois marginales MS connaître les lois marginales ne suffit pas pr connaître la loi du vecteur

Astuce si (X,Y) couple aléatoire :

$\forall x \in X(\Omega)$, $P(X=x) =$

$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)$$

car $\{X=x\} = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X=x \text{ et } Y=y\}$

$X=1$ et $Y=1$, ou $X=1$ et $Y=2$, ou...

@ QCM

⊛ loi du couple (U,V)

loi du couple (U,V)

V \ U	0	1	2	3	total
0	$P(U=0,V=0) = \frac{1}{64}$	$P(U=1,V=0)$ $\frac{3}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$	$3/64$	$1/64$	$P(V=0) = 1/8$
1	$3/64$	$9/64$	$9/64$	$3/64$	$3/8 = P(V=1)$
2	$3/64$	$9/64$	$9/64$	$3/64$	$3/8 = P(V=2)$
3	$1/64$	$3/64$	$3/64$	$1/64$	$1/8 = P(V=3)$
total	$P(U=0) = \frac{1}{64}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{1}{64} = \frac{1}{8}$	$P(U=1) = 24/64 = \frac{3}{8}$	$P(U=2)$ " $\frac{3}{8}$	$P(U=3) = \frac{1}{8}$	

loi de V : 2° loi marginale

loi de U : 1° loi marginale

⊛ loi du couple (U,W)

W \ U	0	1	2	3	
0	$1/8$	0	0	~~0~~ 0	$1/8$
1	0	$3/8$	0		$3/8$
2	0	0	$3/8$		$3/8$
3	0	0	0	$1/8$	$1/8$
	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	

1° marginale $\mathcal{B}in(3, \frac{1}{2})$

loi de W $\mathcal{B}in(3, \frac{1}{2})$

I ⊛ 2 va discrètes X & Y déf sur 1 même $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendantes si $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

⊛ les 2 va discrètes $X_1, \ldots, X_m$ déf sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendantes si les évts $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_m \in A_m\}$ sont indépendantes pour toutes parties $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{R}$

® on dit que suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de va discrètes est indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

Prop : $X_1, \dots, X_m$ va indépdtes si $\forall x_1 \in X_1(\Omega) \dots \forall x_m \in X_m(\Omega)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i = x_i)$$

Prop si $X_1, \dots, X_m$ st va discrètes indépdtes & si $f_1, \dots, f_m$ st des appli def resp sur $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ st indépdtes.

on note : $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée :

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

On dit que suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de va discrètes est indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

Prop : $X_1, \dots, X_m$ va indépdtes si
$\forall x_1 \in X_1(\Omega) \dots \forall x_m \in X_m(\Omega)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i = x_i)$$

Prop si $X_1, \dots, X_m$ st va discrètes indépdtes & si $f_1, \dots, f_m$ st des appli def resp sur $X_1(\Omega), \dots, X_m(\Omega)$ alors $f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)$ st indépdtes.

on note : $f_i(X_i) = f_i \circ X_i$ la composée :

$$\Omega \xrightarrow{X_i} X_i(\Omega) \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$$

DM

Mq X, Y ind. $\Rightarrow V = f(X), W = g(Y)$ ind
$\forall v \in V(\Omega), \forall w \in W(\Omega)$.

$$P(V = v, W = w) = \sum_{\substack{i, f(x_i) = v \\ j, g(y_j) = w}} \underbrace{P(X = x_i, Y = y_j)}_{= P(X = x_i) P(Y = y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ indp.}}$$

$$= \sum_{i, f(x_i) = v} P(X = x_i) \underbrace{\left(\sum_{j, g(y_j) = w} P(Y = y_j) \right)}_{P(W = w)}$$

$$= P(W = w) \underbrace{\sum_{i, f(x_i) = v} P(X = x_i)}_{P(V = v)}$$

□

@ (QCM)
U, V ind. ; U, W non ind (3° p. boide ≠ 1°)
$\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $P(U = i, V = j) = P(U = i) . P(V = j)$
$P(U = 0, W = 0) = \frac{1}{8} \neq P(U = 0) . P(W = 0) = \frac{1}{64}$ (cf. tableau)

@ X, Y res dé rouge / vert.
$X ; Y$ indp^t, X^2 & Y^2 aussi ; $\sin(X), \sqrt{Y}$ aussi

Loi multinomiale de param $n, p_1, p_2, \dots, p_r$.

$n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, \dots, p_r \in [0, 1]$
tq $p_1 + \dots + p_r = 1$.

→ n exp. ind'pdtes ont chacune r résultats possibles de probabil. respectives $p_1, \dots, p_r$.
On note X_1 le nbre de fois où on obtient le res de type 1, $X_2 \dots$ type 2, $\dots$
$X_r \dots$ de type r.

$(X_1, X_2, \dots, X_r) \sim \mathcal{M}ult(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$;

$\forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) =$

$$\begin{cases} = \dfrac{n!}{(k_1!)(k_2!)\dots(k_r)!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} & \text{si } k_1 + k_2 + \dots + k_r = n. \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} (k_i!)} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{k_i}) \, \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{r} k_i = n}$$

Rq $C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \dots C_{k_r}^{k_r} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (k_i!)}$

@ On lance 1000 fois un dé équil., X_i est nbre de fois où il fait i.

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \sim \mathcal{M}ult(n, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

Rq $X \sim Bin(n, p)$

est équivalt à $(X, n - X) \sim \mathcal{M}ult(n, p, 1-p)$

C4 Espérance, Variance, Inégalités de Markov & de Tchebychev.

Марков Чебышев

I/ Espérance

@ $n = 100$ étud font un DS. On note n_i le nbr de cx q ont la note i.

on tire au hasard un étud. La loi de sa note X est : $\forall i \in \{0, 1, \dots, 20\} : P(X=i) = \frac{n_i}{n}$.

La moyenne de l'amphi est

$$\frac{\sum_{i=0}^{20} i\, n_i}{n} = \sum_{i=0}^{20} i \frac{n_i}{n} = \sum_{i \in X(\Omega)} i P(X=i)$$

1) Def

Une va. discrète X est intégrable si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X=x_k) < +\infty$$

→ elle a alors une espérance, donnée par

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X=x_k)$$

Rq : si $X(\Omega)$ est finie ($\sum_{x \in X(\Omega)}$ somme finie) ou si $X(\Omega)$ est bornée ($\forall x_k \in X(\Omega)$, $|x_k| \leqslant M$ où $M \in \mathbb{R}$ fixé) alors X est intégrable.

Rq : 2 va q ont m̂ loi ont m̂ espérance.

⚠ récipq fausse.

@ si $X \sim \mathrm{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i P(X=i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{6 \times 7}{2} = 3{,}5$$

Rq Intuitivt ls vlrs prises p va "tournt autour" de l'espérce. Ça n'impliq pas que l'espérance est une valr très probable.

@ Une urne de 50 jetons marqués "1" / 100 "2".

On tire de remise jsq 1° obtent° "1". On note X le produit des nbrs tirés.

$X(\Omega) = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{P}(X = 2^k) = P(\{\text{le } 1^\circ\ 1 \text{ sort à } (k+1)^e \text{ tirage}\})$

$P(X = 2^k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3}$

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \, P(X = x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty$$

$\Rightarrow X$ n'a pas d'espérance.

2) Pptés

soit X & Y 2 va discrètes intégrables.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3) si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$

si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.

5) si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

6) si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intégrable

DM 1) $E(\lambda X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (\lambda x_k) \underbrace{P(\lambda X = \lambda x_k)}_{P(X = x_k)}$ si $\lambda \neq 0$.

$$E(\lambda X) = \lambda \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$$

$$= \lambda E(X)$$

et si $\lambda = 0$; $E(0.X) = E(0) = 0 . P(0 \times X = 0) = 0 \times 1$

$= 0 . E(X)$

4) si $\forall x_k \in X(\Omega)$, $x_k \geq a$

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} \underbrace{x_k}_{\geq a} P(X = x_k) \geq a \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = a$$

6) Crit de comparaison des séries à termes (+)

$P(X = 2^k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3}$

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \, P(X = x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty$$

$\Rightarrow$ X n'a pas d'espérance.

2) Ptés

soit X & Y 2 va discrètes intégrables.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; E(\lambda X) = \lambda E(X)$

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3) si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, si $X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$

si $X \leq a \Rightarrow E(X) \leq a$.

5) si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

6) si X intégrable & $|Z| \leq |X| \Rightarrow Z$ intégrable

DM 1) $E(\lambda X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (\lambda x_k) \underbrace{P(\lambda X = \lambda x_k)}_{P(X = x_k)}$ si $\lambda \neq 0$.

$$E(\lambda X) = \lambda \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k \, P(X = x_k)$$

$$= \lambda E(X)$$

et si $\lambda = 0$; $E(0.X) = E(0) = 0 . P(0 \times X = 0) = 0 \times 1$

$= 0.E(X)$

4) si $\forall x_k \in X(\Omega)$, $x_k \geq a$

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} \underbrace{x_k}_{\geq a} P(X = x_k) \geq a \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = a$$

6) Crit de comparaison des séries à termes (+)

X intégrable? $|x_k| \leq |z_j|$ sur $\{X = x_k, Z = z_j\}$

$$\sum |x_k| \, P(X = x_k)$$

$$= \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \sum P(X = x_k, Z = z_j)$$

$$\leq \sum_{x_k, z_j} |z_j| \, P(X = x_k, Z = z_j)$$

$$\leq \sum_{z_j} |z_j| \, P(Z=z_j) < \infty$$

car Z est intégrable "

Preuve de 2)

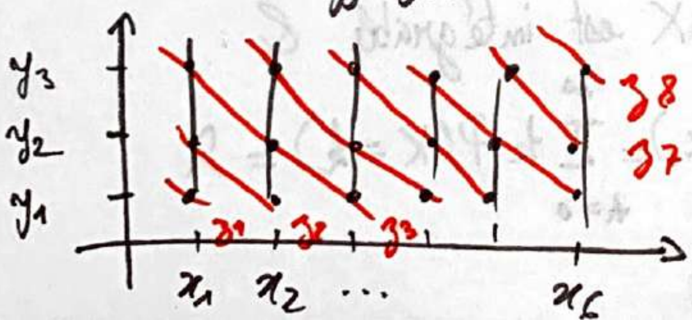
⊙ cas où $X(\Omega)$ & $Y(\Omega)$ finis, on note $Z = X+Y$.

$$E(Z) = \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \, \mathbb{P}(Z=z_k)$$

$$\{Z=z_k\} = \bigcup_{x_i+y_j=z_k} \{X=x_i, Y=y_j\}$$

$$E(Z) = \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \sum_{\substack{x_i+y_j=z_k \\ (x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i+y_j=z_k} (x_i+y_j) \, \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$



" $E(Z) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} (x_i+y_j) \, \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$

je fixe un x & je parcours tous les y. "

$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \underbrace{\sum_{y_j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{P(X=x_i)}$$

$$+ \sum_{y_j \in Y(\Omega)} y_j \underbrace{\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{P(Y=y_j)}$$

$$= E(X) + E(Y)$$

⊙ cas où $X(\Omega)$ &/ou dénombrables le m̂ calcul & le TH de Fubini pr séries à termes positifs :

$$\sum_{z_k \in Z(\Omega)} |z_k| \, P(Z=z_k) \leq \underbrace{\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i| \, P(X=x_i)}_{E(|X|)<\infty} + \underbrace{\sum_{y_j \in Y(\Omega)} |y_j| \, P(X=y_j)}_{<\infty}$$

car X et Y st intégrables

dc $Z = X+Y$ est intégrable

puis le m̂ calcul ss les v^les abs, on aura $=$ au lieu de $\leq$

et le TH de Fubini pr les séries abslmt !

CV : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

5) si $Y - X \geq 0$, $E(Y-X) = E(Y) + E(-X) \geq 0$

$= E(Y) - E(X) \geq 0$

III) Espérance des lois classiqs

v.a. cte

$\mathbb{P}(X=c) = 1$ ie $X \sim \delta_c$ pr $c \in \mathbb{R}$

$E(X) = c$.

Uniforme

si $X \sim \mathrm{Unif}(\{x_1, \dots, x_n\}) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Bernoulli

si $X \sim \mathrm{Ber}(p) \Rightarrow E(X) = p$

DM

$E(X) = 0 \times \underbrace{P(X=0)}_{1-p} + 1 \times \underbrace{P(X=1)}_{p} = p$

Consqce $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A \sim \mathrm{Ber}(P(A))$ dc $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

Binomiale

si $X \sim \mathrm{Bin}(n, p) \Rightarrow E(X) = np$.

DM X a m̂ loi que $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i st indépdts tous de proba p

$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

Poisson

si $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda$

DM $X(\Omega) = \mathbb{N}$ dc on prouve d'abord l'intégrabilité de X.

$\sum_{k=0}^{N} |k| \, P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} k . e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$

$= \lambda . e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \xrightarrow[N \to \infty]{} e^{-\lambda} . \lambda . e^{\lambda} < \infty$

dc X est intégrable &

$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \, P(X=k) = \lambda$

⊛ Hypergéométiq

si $X \sim \text{Hypergeom}(N, M, n) \Rightarrow E(X) = n\dfrac{M}{N}$.

DM on tire n objets sans remise parmi N dont M st remarquables.

Pour i de 1 à M, on note :

$A_i = \{$ l'objet remarquable n° i fait partie des n objets tirés $\}$.

$$P(A_i) = \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!}$$

$$P(A_i) = \frac{n}{N}$$

X a m̂ loi que nbr $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \mathbb{1}_{A_i}$ d'objets remarquables tirés.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{M} E(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{M} P(A_i) = M.\frac{n}{N}.$$

□

⊛ Géométiq

si $X \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow E(X) = \dfrac{1}{p}$ $\quad (p \in]0,1])$

DM Lemme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P(X=k)$$

Th de Fubini pr séries à t. ⊕

$$\downarrow = \sum_{1 \le i \le k < \infty} P(X=k)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} P(X=k)}_{P(X \geq i)}$$

ccl Pr X va tq $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) \text{ si cette série CV}$$

Th Fub $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}$

si • les u_{ik} tous ≥ 0

ou si • $\displaystyle\sum_i \sum_k |u_{ik}| < \infty$

Pour $X \sim \mathcal{G}eom(p)$:

$$P(X \geq i) = (1-p)^{i-1} = \sum_{k=i}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

IV / Espérance d'une f d'une va.

P soit X : une va discrète & f une applicaθ de $X(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$. Leur composée est la v.a discrète $f(X) = f \circ X$.

$$\Omega \xrightarrow{X} X(\Omega) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$w \longmapsto X(w) \longmapsto f(X(w))$$

$$\boxed{E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k)}$$ si cette série est abslm^t CV

Sinon $f(X)$ n'est pas intégrable.

ex $E(X^2) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^2 \, P(X = x_k)$ si cette série CV Abs

DM on note $Y = f(X)$

$Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ fini ou dénombrable

$$\forall B \subset \mathbb{R},\ Y^{-1}(B) = \{w \in \Omega,\ f(X(w)) \in B\}$$

$$= X^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\subset \mathbb{R}}) \underbrace{\in \mathcal{F}}_{\text{car } X \text{ va}}$$

dc Y est une va discrète.

$$\sum_{y_j \in Y(\Omega)} |y_j| \, P(Y = y_j) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} |y_j| \sum_{x_k,\, f(x_k) = y_j} P(X = x_k)$$

$$\{Y = y_j\} = \bigcup_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ f(x_k) = y_j}} \{X = x_k\}$$

$$= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ f(x_k) = y_j}} |f(x_k)| \, P(X = x_k)$$

$$= \sum_{x_k \in X(\Omega)} |f(x_k)| \, P(X = x_k)$$

Si cette somme vaut $+\infty$: Y non intégrable

si cette série CV : Y intégrable & le

m̂ calcul sans les $|\cdot|$ donne

$$E(Y) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) \, P(X = x_k).$$

si cette somme vaut $+\infty$: Y non intégrable
si cette série CV : Y intégrable & le
m calcul sans les $|\cdot|$. donne

$$\boxed{E(Y) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k)\, P(X = x_k)}$$

R9 si X discrète $\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|\, P(X = x_k) = E(|X|)$

P si X va d. intégrable $|E(X)| \leq E(|X|)$

DM $|E(X)| = \left| \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k\, P(X = x_k) \right|$ I

$\leq \sum |x_k|\, P(X = x_k) = E(|X|)$

Rq : on pt avoir $f(X)$ intégrable & X non intégrable.

II / Moments de va & Inégalité de Markov

D On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ le moment d'ordre r de la va X est $E(X^r)$.

X a un moment d'ordre r ssi

$$E(|X|^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k|^r\, P(X = x_k) < \infty$$

Rq
- L'espérance est le moment d'ordre 1.
- Une v.a. bornée ($\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall x_k \in X(\Omega)$ $|x_k| \leq M$) $\rightarrow X(\Omega) \subset [-M, M]$.
a des moments de tout ordre

P Une variable qui a un moment d'ordre r a des moments de ts les ordres inférieurs :

$$E(X^r) \; \exists \Rightarrow \forall n \in \{1, \dots, r\} \; E(X^n) \; \exists$$

DM
$$E(|X|^n) = \sum_{|x_k| \leq 1} |x_k|^n\, P(X = x_k) + \sum_{|x_k| > 1} |x_k|^n\, P(X = x_k)$$

$$E(|X|^m) = \sum_{\substack{x_k\in X(\Omega)\\ |x_k|\le 1}} \underbrace{|x_k|^m}_{\le 1} P(X=x_k) + \sum_{|x_k|>1} \underbrace{|x_k|^m}_{\le |x_k|^r} P(X=x_k)$$

$$\le \sum_{\substack{x_k\in X(\Omega)\\ |x_k|\le 1}} P(X=x_k) + \sum_{\substack{x_k\in X(\Omega)\\ |x_k|>1}} |x_k|^r P(X=x_k)$$

$$\le 1 + E(|X|^r) < \infty$$ car X a un moment d'ordre r.

Intuiθ

$$\lim_{t\to\infty} P(X\ge t) = \cancel{\lim_{n\to\infty}} = P\Big(\bigcap_{n\ge 1}\{X\ge n\}\Big) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} P(X\ge n)}$$ continuité séquentielle ↘.

Plus X a de moments, plus $P(X\ge t)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Inégalité de Markov

soit va d :

* si X ⊕ & int. : $\forall t>0$, $P(X\ge t)\le \dfrac{E(X)}{t}$
* si X a un moment d'ordre r : $\forall t>0$: $P(|X|\ge t)\le \dfrac{E(|X|^r)}{t^r}$

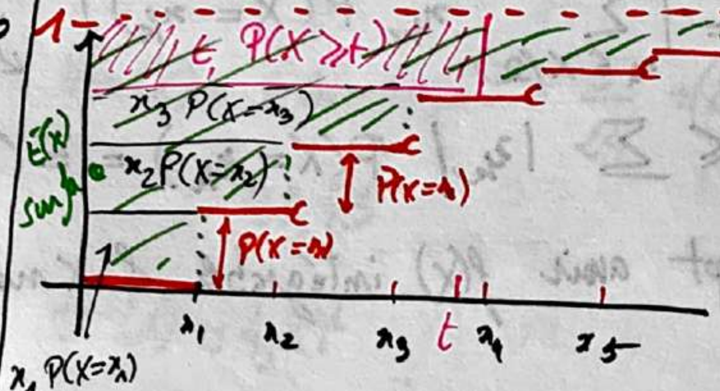
Preuve

* $E(X) = \sum_{x_k\ge t} \underbrace{x_k}_{\ge t} P(X=x_k) + \underbrace{\sum_{0\le x_k<t} x_k P(X=x_k)}_{0}$

$\ge t\sum_{x_k\ge t} P(X=x_k) + 0$

* si $|X|^r$ va ⊕ int^g

$P(|X|\ge t) = P(|X|^r\ge t^r)\le \dfrac{E(|X|^r)}{t^r}$



$F_X(t) = P(X\le t)$

$= \sum_{\substack{x_k\in X(\Omega)\\ x_k\le t}} P(X=x_k)$

f de rép

X ⊕ $\quad tP(X\ge t)\le E(X)$

$P(X\ge t) = P(X>t) + P(X=t)$

$= 1 - F_X(t) + \begin{cases} 0 & \text{si } t\notin X(\Omega) \\ P(X=t) & \text{si } t\in X(\Omega)\end{cases}$

@ (tirage au hasard ds amphi)

si moy de amphi est 12 : $E(X) = 12$

$P(X \geqslant 16) \leqslant \frac{E(X)}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Pas plus des 3/4 des étudiants ont eu la mention TB.

III / Variance & Inégalité de Tchebichev

① soit X une va ayant un moment d'ordre 2.

Sa variance est $Var(X) = E((X - E(X))^2$
$= E(X^2) - (E(X))^2$

Son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

a Var tjrs ⊕

Preuve

$E(X^2)$ ∃ donc $m = E(X) \in \mathbb{R}$ ∃.

$E((X-m)^2) = E(X^2 - 2mX + m^2)$ linéarité espérance

$= E(X^2) - 2m\,E(X) + E(m^2)$

$= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

La variance quantifie la dispersion autour de la moyenne.

$E(X - E(X)) = 0$

$E(|X - E(X)|)$ pas pratique car |·| pas régulière

@ X est la note d'un étudiant choisi au hasard ds un groupe de 24 où

1) 5 ont eu 20 & 19 ont eu 8 :

$E(X) = 20 \times \frac{5}{24} + 8 \times \frac{19}{24} = 10,5$.

$Var(X) = (20 - 10,5)^2 \times \frac{5}{24} + (8 - 10,5)^2 \times \frac{19}{24}$

$= 23,75$

$\sigma(X) \approx 4,87$

2) 12 ont eu 11 & 12 ont eu 10.

$E(X) = 11 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 10,5$.

$Var(X) = E((X - E(X))^2$
$= (11 - 10,5)^2 \times \frac{1}{2} + (10 - 10,5)^2 \times \frac{1}{2} = 0,25$

$\sigma(X) = 0,5$

Pptés de la variance :

si X a un moment d'ordre 2 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$

2) $\forall b \in \mathbb{R}$, $Var(X+b) = Var(X)$

3) $Var(X) = 0 \iff X \sim \delta_c$ où $c = E(X)$

$\iff P(X=c) = 1$

DM :

1) $Var(aX) = E((aX - E(aX))^2)$

$= E(a^2 (X - E(X))^2)$

$= a^2 E(X - E(X))^2)$

2) $Var(X+b) = E((X+b - E(X+b))^2)$

$= E((X+b-E(X)-b)^2)$

$= Var(X)$

3) $\Leftarrow$ si $X \sim \delta_c$: $P(X=c) = 1$

$E(X) = c P(X=c) = c$

$Var(X) = E((X-c)^2) = (c-c)^2 P(X=c) = 0$

$\Rightarrow$ si $Var(X) = 0$

$$Var(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} \underbrace{(x_k - E(X))^2 P(X=x_k)}_{+ \ \forall x_k} = 0$$

si $x_k \neq E(X)$ $P(X=x_k) = 0$
si $x_k = E(X)$ $P(X=x_k) = 1$ } car somme vaut 1

Rq : L'espérance est linéaire.
La variance est quadratiq.
So 2 ne dépdt que de la loi

Variances des lois classiqs

1) si $X \sim Ber(p) \Rightarrow Var(X) = p(1-p)$

DM $X(\Omega) = \{0,1\}$ dc $X^2 = X$

$E(X) = p$, $E(X^2) - (E(X))^2 = E(X) - p^2 = p - p^2$

2) Si $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow Var(X) = np(1-p)$

DM X a m̂ loi $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i '
st indép. to de proba p.

$E(X) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right)^2\right)$

½ lida 4.

9C

DM X a m̂ loi $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i $E(X^2) = np + (n^2-n)p^2$
st indép. to de proba p.

$$E(X^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right)^2\right)$$

$$Var(X) = (np + \cancel{n^2p^2} - np^2) - (\underset{\cancel{np}}{E(X)})^2$$

$$= np(1-p)$$

2) $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow Var(X) = np(1-p)$

$A_1, \dots, A_n$ indép de proba p.

$$E(X^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right)^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{1}_{A_i}^2}_{\mathbb{1}_{A_i}} + \sum_{i \neq j} \underbrace{\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}}_{\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{A_i}) + \sum_{i \neq j} E(\mathbb{1}_{A_i \cap A_j})$$

$E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

l'indicatrice d'une esp'ce suit Bernoulli

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(A_i)}_{p} + \sum_{i \neq j} \underbrace{P(A_i \cap A_j)}_{p^2}$$

½ fiche 4. 9L

3) $X \sim Pois(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \lambda$.

DM $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k)$ si cette série CV.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) + k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda}$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{(E(X))^2} = \lambda$$

4) si $X \sim \text{Géom}(p) \Rightarrow Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 1

DM

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, p(1-p)^{k-1}$$ si cette série CV.

$$= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

La série entière $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ a pr rayon de CV 1. Elle est $C^\infty(]-1,1[)$

dc $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$E(X(X-1)) = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$Var(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Inégalité de Tchebichev

Si X est va de mmt d'ordre 2

$$\forall t>0,\ P(|X-E(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

DM

Inégalité de Markov

$P(|Y| \geq t) \leq \frac{E(Y^2)}{t^2}$ appliqué à $Y = X - E(X)$

ex X : nbr piles obtenus en 1000 lancers d'une pièce équilibrée

$X \sim Bin(1000, \frac{1}{2})$

$E(X) = 500$, $Var(X) = 1000 \times \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{2})$
$= 250$

$P(X \leq 400 \text{ ou } X \geq 600) =$
$= P(X - 500 \leq -100 \text{ ou } X - 500 \geq 100)$
$= P(|X-500| \geq 100)$

$\leq \frac{Var(X)}{100^2}$ Tchebichev

$P(400 < X < 600) \geq 97{,}5\,\%$

$\rightarrow \displaystyle\sum_{k=401}^{599} \binom{1000}{k} \frac{1}{2^{1000}} \simeq 1 - 2{,}7\,10^{-10}$

$P(400 < X < 600)$.

IV / Covariance

Ⓟ si X & Y st 2 va independ. ayant une espérance, alors XY a une espérance & $E(XY) = E(X).E(Y)$

DM Pr va discrètes :

$$E(|XY|) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} |x_i y_j| \, P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} |x_i| \, |y_j| \, P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i| \, P(X = x_i) \right)}_{E(|X|)} \underbrace{\left(\sum_{y_j \in Y(\Omega)} |y_j| \, P(Y = y_j) \right)}_{E(|Y|)}$$

$< +\infty$ dc XY est intégrable

De m̂ $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

Inégalité de Cauchy - Schwarz :

si X & Y st 2 va ayant un moment d'ordre 2 alors $E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)} . \sqrt{E(Y^2)}$

DM $|xy| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ car $(|x| - |y|)^2 \geq 0$

dc $E(X^2) < \infty$ et $E(Y^2) < \infty$

impliquant $E(|XY|) < \infty$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$E((|X| + t|Y|)^2) =$

$= E(X^2) + 2t\,E(|XY|) + t^2 E(Y^2)$

≥ 0

dc le discriminant de cette équa° du 2° deg est ⊖

$\Delta = 4(E(|XY|))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

(D) si (X,Y) est un couple de v.a. ayant des moments d'ordre 2 la **covariance** est

$$Cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

si de plus l^rs variances st non-nulles :

leur coeff de corrélat° est

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\,\sqrt{Var(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

(P) si X, Y et Z ont des moments d'ordre 2 :

- 1 $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- 2 $cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + cov(Y,Z)$
- 3 $cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y) \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$
- 4 $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\,\sqrt{Var(Y)}$ ie $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

DM 3 $Cov(aX+b, cY+d) =$

$$= E\Big((aX+\cancel{b} - \underbrace{E(aX+b)}_{aE(X)+\cancel{b}})(cY+\cancel{d} - \underbrace{E(cY+d)}_{cE(Y)+\cancel{d}})\Big)$$

$$= ac\,E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$

4 Cauchy-Schwarz pr $(X-E(X))$ & $(Y-E(Y))$

Rq $cov(X,X) = Var(X)$

Corrélat° :

- si $Cov(X,Y) = 0$, on dit que X & Y st non-corrélées ou décorrélées.
- si $cov(X,Y) > 0$, on dit que X & Y st ⊕ corrélées : Y a tdce à ↗ qd X ↗.

  @ Taille & Poids

- si $cov(X,Y) < 0$, on dit que X & Y st ⊖ corrélées. Y a tdce à ↘ qd X ↗.

  @ nbr ABS étud & moy géné

ⓟ si X & Y st independ alors $cov(X,Y)=0$

⚠ Réciproq fausse.

@

Y \ X	−1	0	1	
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/2	0	1/2
	1/4	1/2	1/4	

$Y = 1-|X|$

$Y \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{2}\right)$

$E(XY) = (-1) \times 0 \times P(X=-1, Y=0)$

$+ (1) \times (-1) \times P(X=1, Y=-1)$

$+ \dots$ 6 termes $= 0$

R! : $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(XY)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \in [-1,1]$

⚠ • Ne pas confondre une corrélaθ (positive ou négative) & un lien de cause à effet

@ le nbr de glaces vendues un été est très positivement corrélé & nbr de noyades. Interdire vente de glaces sauvent-il des vies ? (corrélaθ due à la météo).

@ les gens q boivent 1 🍷 vin rouge ont moins d'infarctus. Dois-je en boire pr mn R$^{?}$!

• Prétendre prouver un lien de cause à effet par une étude statistiq (mesure de corrélaθ) est TOUJOURS une ESCROQUERIE.

Mais une CORRÉLATION nette pt ê un indice pr découvrir un lien de cause à effet.

Variance d'une somme de v.a.

• si les v.a. X & Y ont mmt d'ordre 2 :

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)$

• si $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont ttes mo2 :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} cov(X_i, X_j)$$

Dm $\bullet$ $Var(X+Y) = \mathbb{E}((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2$

$= \mathbb{E}(X^2+Y^2+2XY) - (E(X))^2 - ((E(Y))^2 - 2E(X)E(Y))$

$= Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{Cov(X,Y)}$

Récurrence :

$\bullet$ $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1}\right) =$

$= Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + Var(X_{n+1}) + 2\,cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_{n+1}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j) + Var(X_{n+1})$

bilinéarité $\rightarrow$ $+ 2\sum_{i=1}^{n} cov(X_i, X_{n+1})$

Conséqce :

Ch des va, indépendtes ayant un moe, la variance de la somme est la somme des variances.

Ch. 5. Convergence va & Lois grds nbrs.

I Convergce de moyennes empiriq.

On répète n fois indépendamment la même expérience. On obtient n va f^{ls} $X_1, \dots X_n$ q st des v.a indépend & même loi.

La moyenne empiriq de ces n données est la v.a :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Quel rapport ac le résultat moyen de l'expérience " $E(X_1)$

② Empiriqmt observer réaliser (f^{R} expérience) n f^{re} cal.

Ex On lance n fois un dé numéroté de 1 à 6 : le résultat du i^{o} lancer est

$X_i \sim \mathrm{Unif}(\{1,2,\dots,6\})$

$\overline{X_n}$ est la moy des res des lancers

$E(X_1) = 3,5$ est l'espérance de $\mathrm{Unif}(\{1,2,\dots,6\})$.

Ex Expérience qui donne "succès" de proba p

$X_i = \mathbb{1}$ succès au i^{o} coup $\sim \mathrm{Ber}(p)$ ind.

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nbr de succès en n expériences indep.

$\overline{X_n} = \frac{\sum^n X_i}{n}$ est la proportion empiriq

ou fréquence empiriq de succès. $E(X_1)=p$ est l'espérance de $\mathrm{Ber}(p)$.

Ex On sonde 900 personnes avant 1 élection

$X_i = \mathbb{1}$ le i^{o} sondé vote pr Zzzz.

$\overline{X_{900}} = \frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} X_i$ est la proportion de sondés votant pr Zzzz.

D Sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la suite de v.a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la v.a. W si $\forall\ \varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|V_n - W| \geq \varepsilon) = 0$$

On note $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{proba}} W$.

Th loi faible des grds nombres

si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. indépend ayant ttes m̂ loi qui a un mmt d'ordre 2 alors :

$\forall\ \varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$P(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2}$$

& donc $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Proba}} E(X_1)$

va cte.

(loi de Dirac)

DM • $E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$$\overset{\text{m̂ loi}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_1) = E(X_1)$$

• $Var(\overline{X_n}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$\overset{\text{indépdts}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_1) = \frac{Var(X_1)}{n}$$

Tchebichev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\overline{X_n} - \underbrace{E(\overline{X_n})}_{E(X_1)}| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq P(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{\frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n}}_{n \to \infty} \longrightarrow 0$$

@ dés : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{\text{proba}} E(X_1) = 3{,}5$.

@ Sondage : on note p la proport° inconnue de gens q votent pr Zzz ds tt l'électorat.

Pour i de 1 à 900,

$X_i = \mathbb{1}$ le i° sondé vote pr Zzz $\sim Be(p)$

On suppose les X_i indépendants.

$\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

$$P(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1/4}{n\varepsilon^2}$$

$p \mapsto p - p^2$ est max sur $[0,1]$ en $p = \frac{1}{2}$.

On choisit ε p $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$ soit petit.

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{10} \iff \varepsilon^2 \geq \frac{10}{4n}$$

$$\iff \varepsilon \geq \sqrt{\frac{5}{2n}} \approx 0{,}0527.$$

$$P(|\overline{X_n}-p| < \varepsilon) = 1 - P(|\overline{X_n}-p| \geq \varepsilon)$$

- $P(-\varepsilon < p - \overline{X_n} < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 90\%$

$$P(\overline{X_n} - \varepsilon < p < \overline{X_n} + \varepsilon) \geq 90\%.$$

On a 90% de chances d'avoir raison si on affirme que p est entre $\overline{X_n} - 0{,}0527$ et $\overline{X_n} + 0{,}0527$.

- → si 486 sondés sur 900 q votent pr Zzz

pour θ empiriq observée $\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega) = \frac{486}{900} = 54\%$

intervalle de confiance ("fourchette") observée :

$]48{,}7\%\ ;\ 59{,}3\%[$

II Convergence presq sûre

D $A \in \mathcal{F}$ est évent négligeable si $P(A) = 0$.

ex suite ∞ de lancers d'un dé.

$A = \{$on ne tire jamais de 6$\} \neq \emptyset$

$P(A) = \lim_{n\to\infty} P($pas de 6 ds n premiers lancers$)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

D sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la suite de v.a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV presq sûrement vers la v.a. W si

$$P(\{w \in \Omega,\ \lim_{n\to\infty} V_n(w) = W(w)\}) = 1$$

ie si l'evt $\{V_n$ ne CV pas vers $W\}$ est négligeable.

On note

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{P.p.s} W$$

(ω)

@ $X_1, X_2, X_3, \ldots$ rés d'un dé :

$V_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ maximum des n premiers.

$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.s} 6 \longleftarrow$ v.a. cte $W : \Omega \to \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w \mapsto 6$

$P(V_n$ ne tend pas vers $6) =$

$= P(\{w \in \Omega, \forall i \in \mathbb{N}^* \; X_i(w) \leq 5\})$

$= P($on ne fait jamais $6)$

$= P(A) = 0.$