M-33

Séries & Intégrales généralisées

Pr : William Alexandre

C_1 : Approfondissement sur les suites numériques

M33 Séries & Intégrales généralisées

Clé Moodle : jxqghk. (© général).
Gpe-1 : gcgfwd   Gpe-2 : hf4dt6
Gpe-3 : 5p78ac   william.alexandre@univ-lille.fr

C_1 : $\mathbb{R}$, suites appfdie C_2 : Intég. génér. $]0,+\infty[$; $]0,1[$ pas défini en 0, pas continu C_3 : Séries — suite : ajouter termes suite

C_1 : Approfondissement sur les suites numériques.

I/ Bornes inférieures, bornes supérieures

(D) soit $A \subset \mathbb{R}$,

(i) $m \in \mathbb{R}$ est minorant de A si $\forall a \in A,\ m \leq a$.

(ii) $M \in \mathbb{R}$ est Majorant de A si $\forall\ a \in A,\ a \leq M$.   * unique

(iii) $m \in \mathbb{R}$ est plus petit élt* de A si $m \in A$ et m est un minorant de A

(iv) $M \in \mathbb{R}$ est plus grd élt de A si $M \in A$ et M est un majorant de A

(v) $m \in \mathbb{R}$ est borne inférieure de A si :

- ⊛ m est un minorant de A.
- ⊛ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Adit : m est le plus grd des minorants de A

(vi) $M \in \mathbb{R}$ est borne supérieure de A si :

- ⊛ M est un majorant de A.
- ⊛ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Adit : M : la borne supérieure est le plus petit des majorants de A.

@ $A = [0,1[$.

- 0 est un minorant.
- -1 est un minorant

↳ tout élt de $]-\infty, 0]$ sera un minorant de A.
car $\forall m \in]-\infty, 0],\ m \leq 0$ et $\forall x \in A,\ x \geq 0$, donc $m \leq x$, $\forall x \in A$.

- $\forall M \in [1,+\infty[$, M est un majorant de A car $\forall x \in A$, $x < 1$ et $M \geqslant 1$ dc $x \leq M$.
- 0 est le plus petit élt de A car $0 \in A$ et $\forall x \in A, x \geqslant 0$
- A n'a pas de plus grd élt car $\forall M \in [1,+\infty[$, $M \notin A$.
  - $\forall M \in]-\infty, 1[$, M n'est pas un majorant.
- La BI de A est 0 car l'ens des minorants est $]-\infty, 0]$ & le plus grd élt de $]-\infty, 0]$ est 0.
- 1 est BS de A car l'ensemble des majorants est $[1,+\infty[$ et 1 est le plus petit élt de $[1,+\infty[$.

@ Certains ens n'ont ni BS, BI ni + petit élt & + grd élt.

$B = [0,+\infty[$ n'a pas de majorant, dc pas BS et pas de + grd élt.

Note[5] : on note $\sup A$ la BS de A et $\inf A$ la BI de A lorsqu'elles existent.

Rq . L'ensemble des minorants est TOUJOURS de la forme $]-\infty, \alpha]$ ou $\emptyset$. Alors $\inf = \alpha$

- L'ens. des majorants est TJRS dlf $[\alpha, +\infty[$ ou $\emptyset$. Alors $\sup = \alpha$.

Quand on cherche BI / BS
- cherche ens des majorants / minorants $\to$ $]-\infty, \alpha]$ / $[\alpha, +\infty[$
- puis α correspond BI / BS.

intervalles fermés

Th Tte partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ a une BS.
Tte partie minorée & non vide de $\mathbb{R}$ a une BI.

↳ si elle est minorée alors ens minorants a tous BI.

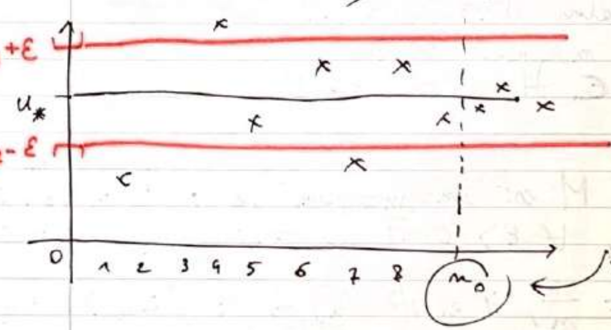
Rq $\mathbb{Q}$ n'a pas cette ppté. (cf. TD)

II/ Suite de nombres réels.

suite ↗, ↘, majorée minorée.

D Soit $(U_n)_n$ est une suite de nombres réels et $U_* \in \mathbb{R}$. $(U_n)_n$ $\boxed{\text{Converge}}$ vers u_* si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on ait $|U_n - U_*| < \varepsilon$.

$\to \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ alors $|U_n - u_*| < \varepsilon$.



à partir de n_0, ils sont tous dans cette borne.

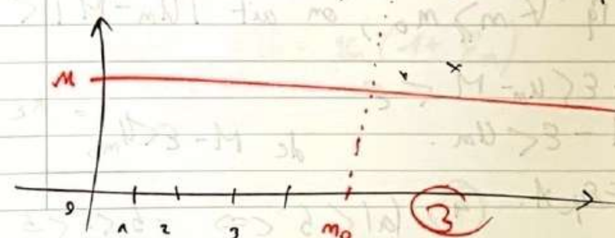
$\to \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, |U_n - u_*| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, |U_n - u_*| < \varepsilon$. CV.

La distance ε. ← petit & proche de 0.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |U_n - u_*| < \varepsilon$.

- $(U_n)_n$ tend ou diverge vers $+\infty$ si :
  - $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant M$.



M est proche de $+\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, U_n \geqslant M$

$\Rightarrow$ CV, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |U_n - u_*| < \varepsilon$.
DV $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq M$.

Sinon on dit que $(U_n)_n$ diverge.

TH La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.

1) BI, BS & suites

Prop soit $M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, alors $M = \sup A$ ssi :
(i) M est un majorant de A.
(ii) $\exists (x_n)_n \subset A$ q CV vers M.

soit $M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ alors $M = \sup A$ (ssi)
(i) M est un majorant de A.
(ii) $\exists (x_n)_n \in A$ q CV vers M.

Preuve :
$\Rightarrow$ | Si $M = \sup A$, M est un majorant de A & (i) est vérifié.
comme $M = \sup A$, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$, $x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ & $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $\underset{x_{1/n}}{u_n} \in A$, $u_n > M - \frac{1}{n}$

On a donc $M - \frac{1}{n} < u_n \leq M$
$u_n \in A$ & M est majorant de A.
et le TH des gendarmes implique que $(u_n)_n$ tend vers M.

$\Leftarrow$ | (i) dit que M est un majorant.

soit $\varepsilon > 0$, d'après (ii), $\exists (u_n)_n \in A$, $(u_n)_n$ CV vers M.
Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, on ait $|U_n - M| < \varepsilon$.

on en déduit $\quad -\varepsilon < u_n - M < \varepsilon$
$\quad M - \varepsilon < U_n$. $\quad$ de $M - \varepsilon < U_{n_0} = x_\varepsilon$
$\forall n \geq n_0$, ainsi $M = \sup A$.

④ $|a| < b \iff -b < a < b$.

III / Suites convergentes & Inégalités

Prop. Toute suite CV est bornée.

TH Si $(U_n)_n$ CV vers ℓ et si $u_n \geq \lambda$ apcr alors $\ell \geq \lambda$.

Th gendarmes soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$. 3 suites tq
* apcr : $u_n \leq v_n \leq w_n$
* $(U_n)_n$ et $(w_n)_n$ CV vers $\ell \in \mathbb{R}$. $\leftarrow$ les deux limites doivent être identiques.

alors $(v_n)_n$ CV vers ℓ.

IV / Opérations sur les limites

+ (v_n \ U_n)	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

× (V_n \ U_n)	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ / $-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ / $+\infty$ si [illegible]
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$, $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$, $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$	$+\infty$

u_n	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$1/u_n$	$1/\ell$	$+\infty$	$-\infty$	0

voir DM !

V / Équivalents

D $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont des équivalents & on note
$U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} V_n$ s'il existe $(\varepsilon_n)_n$ convergent vers 0 tq
apcr, $U_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$

(R4) Si $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ alors apcr, $U_n = 0$ ssi $V_n = 0$.

(Prop) Si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ ne s'annulent apcr alors $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$.

Preuve :

$\Rightarrow$) comme $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$, $\exists\, (\varepsilon_n)_n$ tq

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$
- $U_n = V_n(1+\varepsilon_n)$ apcr.

Puisque V_n ne s'annule pas apcr dc $\frac{U_n}{V_n} = 1 + \varepsilon_n$ apcr

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \varepsilon_n = 1$

$\Leftarrow$) On pose $\varepsilon_n = \frac{U_n - V_n}{V_n}$ alors $\varepsilon_n V_n + V_n = U_n$

Donc $U_n = V_n(1+\varepsilon_n)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n - V_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} - 1 = 0$

Donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$.