Feuille 3 II Exercice 1

Montrer que les champs de vecteurs $\vec{V}(x,y) = P(x,y)\,e_1 + Q(x,y)\,e_2$ sont des champs de gradient et déterminer en un potentiel.

(1) $P(x,y) = 3x^2y + 2x + y^3 \qquad Q(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 2y$

Si $\vec{V} = \nabla f$ alors

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x + y^3$

donc $\forall y \quad \exists\, c_1(y) \in \mathbb{R}$ tq

$$f(x,y) = x^3y + x^2 + y^3x + c_1(y).$$

En supposant c_1 dérivable, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 3y^2x + c_1'(y)$$

$$= Q(x,y) + c_1'(y) + 2y$$

Donc si $c_1'(y) = -2y \quad \forall y \iff \{ c_1(y) = -y^2 + K$ pour un $K \in \mathbb{R}$

on a $\nabla f(x,y) = \vec{V}(x,y)$

Ainsi $\vec{V}$ est bien un champ de gradient associé au potentiel

$$f(x,y) = x^3y + y^3x + x^2 - y^2 \ (+K)$$

(2) $\quad P(x,y) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\, e^y \qquad Q(x,y) = -\dfrac{1}{(1+x^2)}\, e^y$

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$$\nabla f = \vec{V} \iff \begin{cases} \forall x,y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-e^y}{1+x^2} \\ \forall x,y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\, e^y \end{cases}$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \exists c_1 \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall x,y \in \mathbb{R} \;\; f(x,y) = \dfrac{e^y}{1+x^2} + c_1(x) \\ \forall x,y \in \mathbb{R} \;\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\, e^y \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists c_1 \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = \dfrac{e^y}{1+x^2} + c_1(y) \\ \text{et } \forall x,y \in \mathbb{R} \quad \cancel{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} e^y} + c_1'(y) = \cancel{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} e^y} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + K.$$

$\vec{\nabla}$ est donc bien un champ de gradient de potentiel f défini par

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} \quad (+K)$$

Exercice 2 On reprend le même exercice mais cette fois la valeur prise par le potentiel f est fixée en un certain point. Cela détermine la constante K de manière unique.

(1) $P(x,y) = 3x^2y + 2y^2$; $Q(x,y) = x^3 + 4xy - 1$

$f(1,1) = 4$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \forall x,y$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x,y) = x^3y + 2y^2x + c_1(y)$$

pour un $c_1 \in C^1(\mathbb{R})$.

Ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \ \forall x,y \iff c_1'(y) = -1 \ \forall y$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} c_1(y) = -y + K \ \forall y \\ \text{pour un } K \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On a donc bien $\forall K \in \mathbb{R}$

$$\nabla f_K(x,y) = \vec{V}(x,y) \quad \text{où} \left| \begin{array}{l} f_K(x,y) = x^3y + 2y^2x - y + K \\ \forall x,y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Finalement $f_K(1,1) = 4$

$$\iff 1 + 2 - 1 + K = 4 \iff K = 2$$

et $f(x,y) = x^3y + 2y^2x - y + 2$ est le potentiel cherché.

(2) $P(x,y) = e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$, $Q(x,y) = e^{x^2+y^2}2xy$

$f(0,0) = 1$

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \ \forall x,y \iff \begin{cases} f(x,y) = x e^{x^2} e^{y^2} + c_1(x) \\ \forall x,y \in \mathbb{R} \\ \text{pour un } c_1 \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Maintenant, pour un tel f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \ \forall x,y \iff (1+2x^2)e^{x^2}e^{y^2} + c_1'(x) = P(x,y)$$
$$\forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\iff c_1(x) = K \quad \forall x \quad \text{pour un } K \in \mathbb{R}$$

$\vec{V}$ est donc bien un champ de gradient sur $\mathbb{R}^2$ et ses potentiels sont les f_K pour $K \in \mathbb{R}$ où

$$\forall x, y \quad f_K(x,y) = x e^{x^2} e^{y^2} + K$$

Finalement $f_K(0,0) = 1 \iff K = 1$

et le potentiel cherché est f défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = x e^{x^2} e^{y^2} + 1.$$