Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра оптимального управления

Отчёт по практикуму

Программа для решения краевых задач методом продолжения по параметру

Преподаватели: Аввакумов С.Н.
Киселев Ю.Н.
Дряженков А.А.

Выполнил: Иванов Максим, группа 313

Москва
2021

Содержание

Постановка и описание задачи

Цель работы

Реализовать программу для решения кравевых задач методом продолжения по параметру в среде *Matlab*. Программа должна решать краевую задачу выбранным методом и показывать результаты своей работы на графиках.

Реализация задачи

Информация о среде

Программа реализована в среде *Matlab 2014b*. Использовались всевозможные средства среды для реализации пользовательского интерфейса, аналитического решения возникающих задач, чтения и записи файлов.

Описание интерфейса

Программа имеет несколько окон. Основное окно содержит семь блоков элементов интерфейса.

Первый блок - меню в верхней части окна. Меню имеет четыре пункта: «Управление», «Примеры», «Помощь» и «О программе».

В первом пункте собраны команды для сохранения введённой задачи («Сохранить задачу», комбинация горячих клавиш *Ctrl+S*), которая открывает стандартное системное окно сохранения файлов и загрузки ранее введённой задачи («Загрузить задачу», комбинация горячих клавиш *Ctrl+O*), которая открывает стандартное системное окно открытия файлов. (Рис. 1)

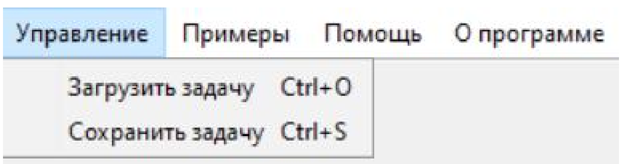

Рис. 1: Меню программы

Второй пункт меню открывает окно с библиотекой примеров, в котором представлен список примеров из учебного пособия [4] и присутствуют две кнопки для открытия примера и закрытия окна. (Рис. 2)

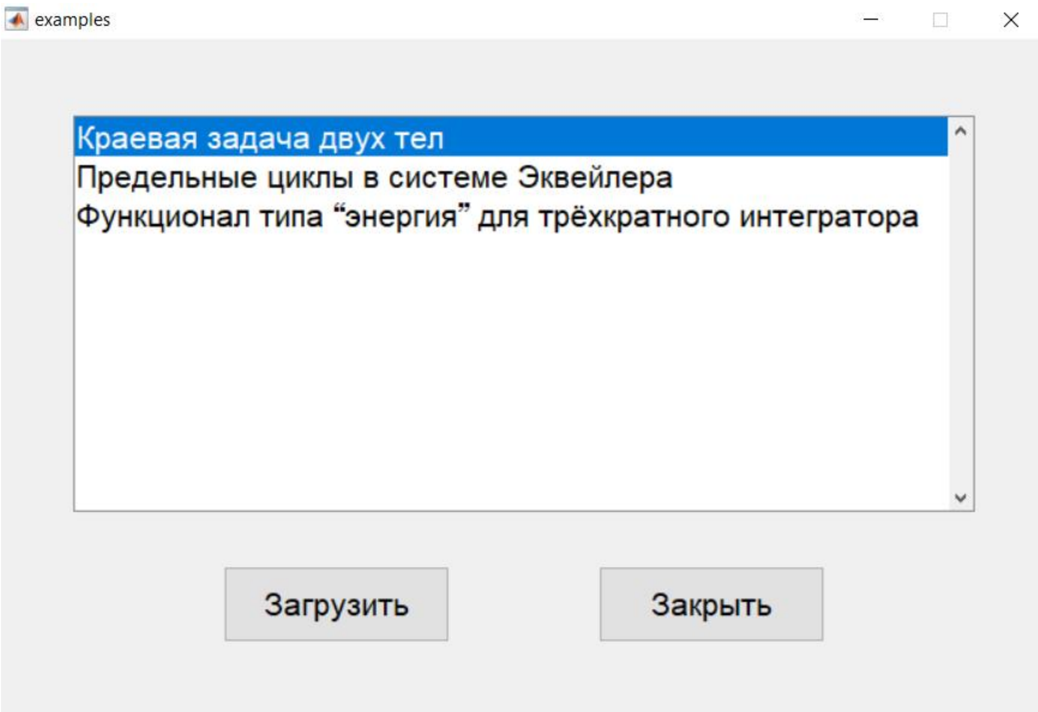

Рис. 2: Окно «Примеры»

Третий пункт меню открывает окно «Помощь» (Рис. 3).

Четвёртый пункт меню открывает окно «О программе» (Рис. 4).

Далее основное окно делится еще на шесть блоков. Блоки «Ввод краевой задачи» и «Ввод краевых условий» предназначены для ввода системы дифференциальных уравнений и краевых условий. Данные блоки содержат таблицы, в которые необходимо вводить саму краевую задачу. Размерность таблиц регулируется автоматически, новые поля появляются при необходимости. (Рис. 5)

Блок «Настройки» и «Вектор начальных условий p0» предназначен для ввода настроек метода. Пользователь может ввести начало отрезка, конец отрезка, количество итераций, шаг сетки внешней задачи, момент времени t^*, точность и метод решения для внешней и внутренней задачи и вектор начальных условий p0. (Рис. 5)

Блок «Решение» содержит кнопки для вычисления решения, очистки данных и просмотра результатов. Также под кнопками показывается время выполнения вычислений.

Последний блок позволяет написать название и комментарий к введенной задаче. (Рис. 5)

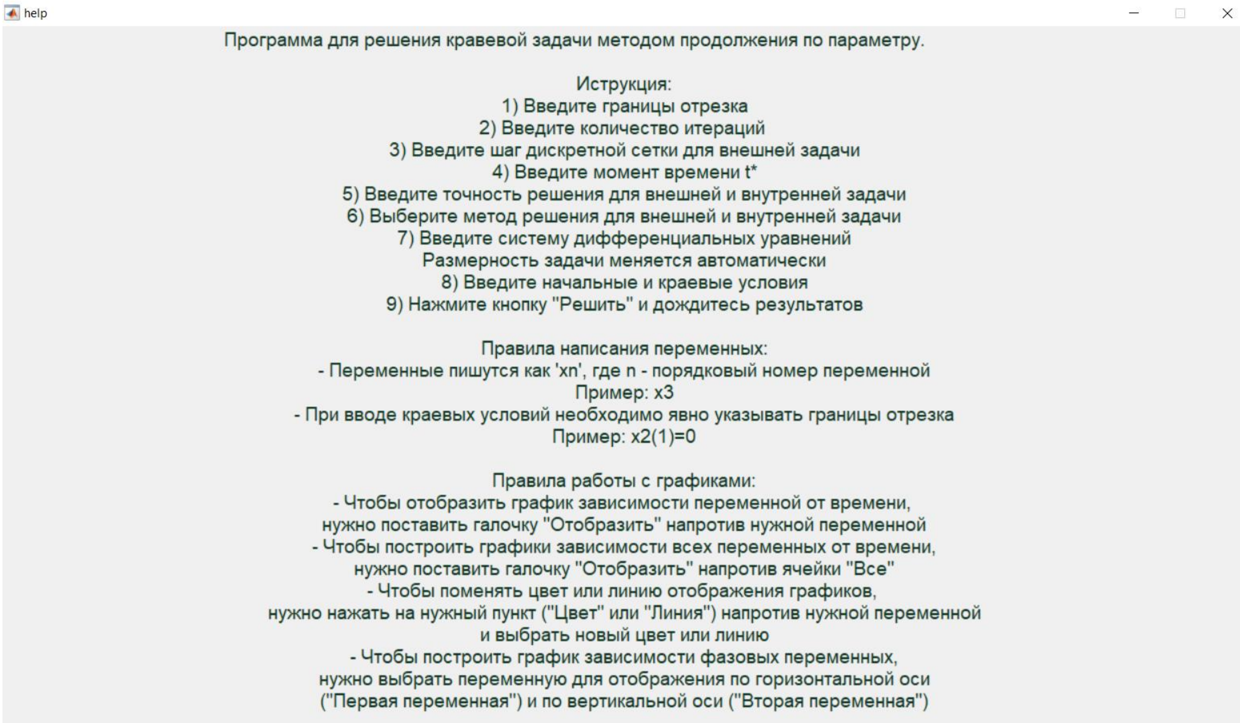

Рис. 3: Окно «Помощь»

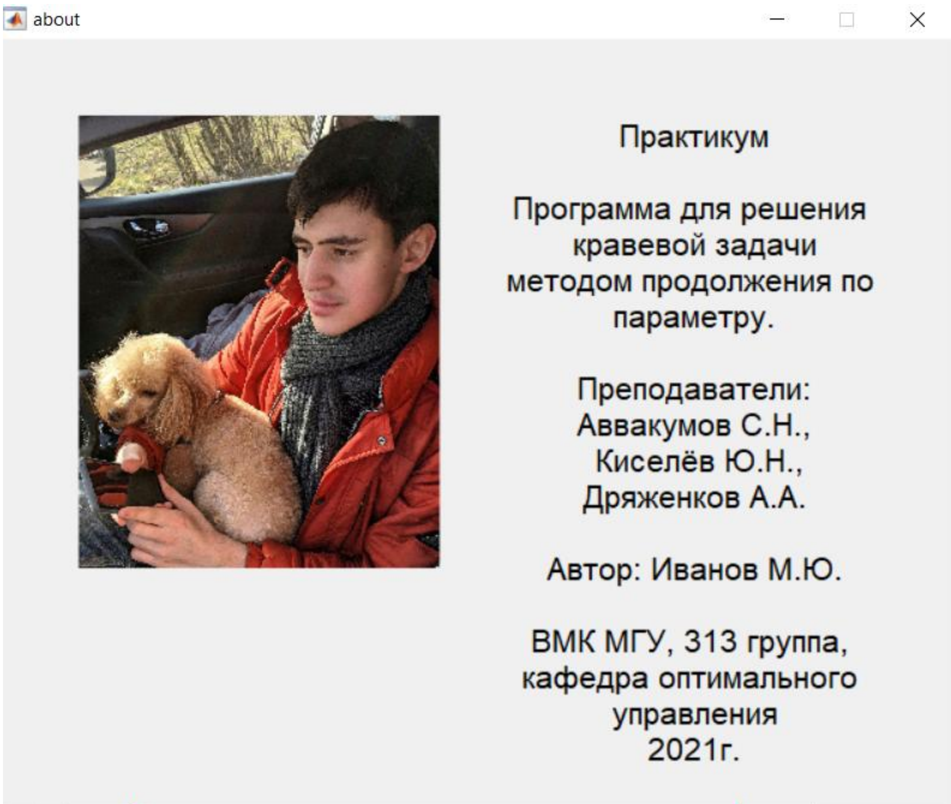

Рис. 4: Окно «О программе»

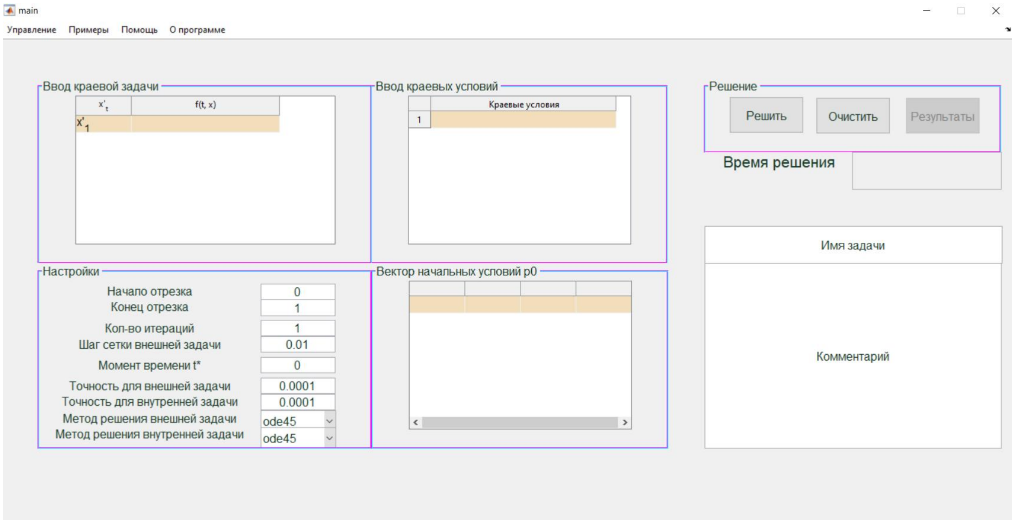

Рис. 5: Основное окно

Окно «Результаты» содержит три блока элементов интерфейса.

Первый блок содержит таблицу, в которой показаны значения всех переменных в каждой точке временной сетки. (Рис. 6)

Второй блок содержит координатную ось для вывода графиков зависимости переменных от времени и таблицу, расположенную под нею, в которой можно выбрать переменные для построения графика, выбирать для каждого из них цвет и тип линий. (Рис. 6)

Третий блок содержит координатную ось для вывода графиков зависимости фазовых переменных. Первая перменная отвечает за ось абцисс, а вторая - за ось ординат. (Рис. 6)

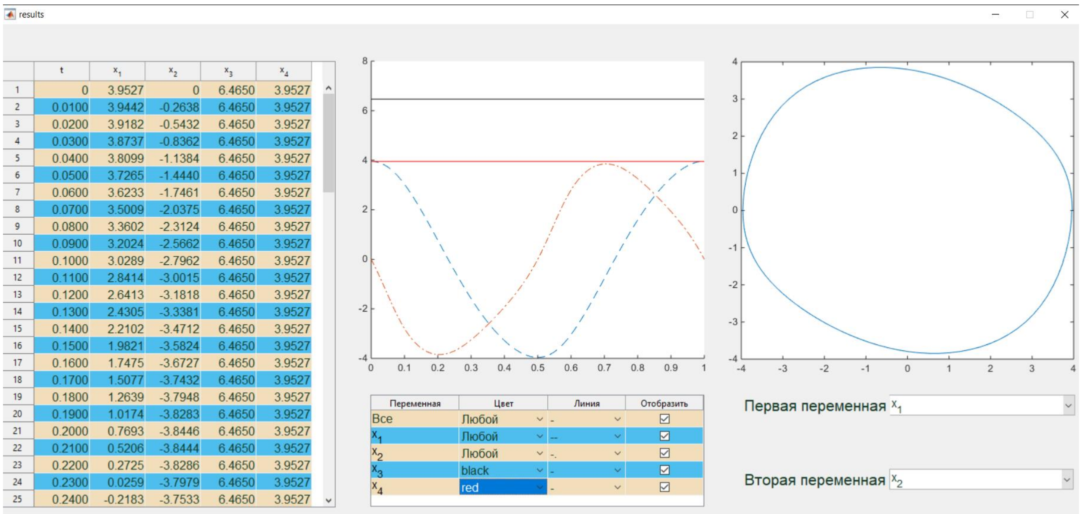

Рис. 6: Окно решения для задачи «Предельные циклы в системе Эквейлера»

Метод продолжения по параметру

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x),\ R(x(a), x(b)) = 0,\ t \in [a, b],\ x \in E^n. \tag{1}$$

Здесь $f(t, x) : E^1 \times E^n \mapsto E^n,\ R(x, y) : E^n \times E^n \mapsto E^n$ являются гладкими векторными функциями. Предполагая существование решения краевой задачи (1), обсудим алгоритмические вопросы поиска её решения. Решение краевой задачи можно свести к некоторому нелинейному векторному уравнению в E^n. Выберем некоторую точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$x = f(t, x),\ x|_{t=t_*} = p \in E^n. \tag{2}$$

Свобода выбора точки t_* может быть полезна для вычислительной практики. Пусть

$$x(t, p),\ a \leq t \leq b. \tag{3}$$

— решение задачи Коши (2). Предполагается продолжимость решения (3) на весь отрезок $[a, b]$ для любого p. Начальное значение параметра $p \in E^n$ ищется из условий выполнения векторного граничного условия в задаче (1), т.е. искомое p является решением уравнения

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \tag{4}$$

Итак, краевая задача (1) сведена к конечному векторному уравнению (4). Далее к уравнению (4) применяется метод продолжения. Матрица $\Phi'(p)$ определяется равенством

$$\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}$$

Здесь $(n \times n)$ — матрицы $R'_x(x, y),\ R'_y(x, y)$ вычисляются вдоль решения (3), т.е. при $x = x(a, p),\ y = x(b, p)$. Введём обозначение

$$X(t, p) \equiv \frac{\partial x(t, p)}{\partial p}$$

для $(n \times n)$—матрицы производных решения (3) по начальному условию. Матрица $X(t, p)$ определяется дифференциальным уравнением в вариациях

$$\dot{X} = AX,\ X|_{t=t_*} = I,\ a \leq t \leq b,$$

где $A = A(t,p) \equiv f'_x(t,x)|_{x=x(t,p)}$ есть $(n \times n)$—матрица, I—единичная матрица. Основная задача Коши схемы продолжения по параметру имеет вид

$$\textbf{IVP:} \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0),\ p(0) = p_0,\ 0 \le \mu \le 1, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Phi(p) = R(x(a,p), x(b,p)),\\
&\Phi'(p) = R'_x(x(a,p), x(b,p))X(a,p) + R'_y(x(a,p), x(b,p))X(b,p).
\end{aligned}$$

Для одновременного вычисления векторной функции $x(t,p)$ и матричной функции $X(t,p)$ может быть записана следующая векторно-матричная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), & x|_{t=t_*} = p,\\ \dot{X} = f'_x(t,x)X, & X|_{t=t_*} = I,\ a \le t \le b. \end{cases} \tag{6}$$

Задачу Коши (5) будем называть внешней задачей, задачу Коши (6) — внутренней задачей. Таким образом, предлагается итерационный процесс для решения рассматриваемой краевой задачи (1) на основе внешней задачи (5) и внутренней задачи (6). На одном шаге итерационного процесса выполняется решение внешней задачи (5), в ходе решения которой происходит многократное обращение к решению внутренней задачи Коши (6) при различных значениях параметра p.

Результаты работы

В данном разделе показаны результаты работы программы для примеров из раздела «Примеры».

Все замеры произведены с точностями для внешней и внутренней задач 0.0001.

Краевая задача двух тел

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & x_1(0) = a_1,\ x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_2 = x_4, & x_2(0) = a_2,\ x_2(T) = b_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & \\ \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}. & \end{cases}$$

Для данных $T = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1.0738644361$, $b_2 = -1.0995343576$, при выборе параметра $t_* = 0$, для начального приближения $p_0 = [2, 0, 0.5, -0.5]$.

Методы решения внешней и внутренней задачи: метод Рунге-Кутта 4-5 порядка.

Время решения: 140 секунд при 3 итерациях.

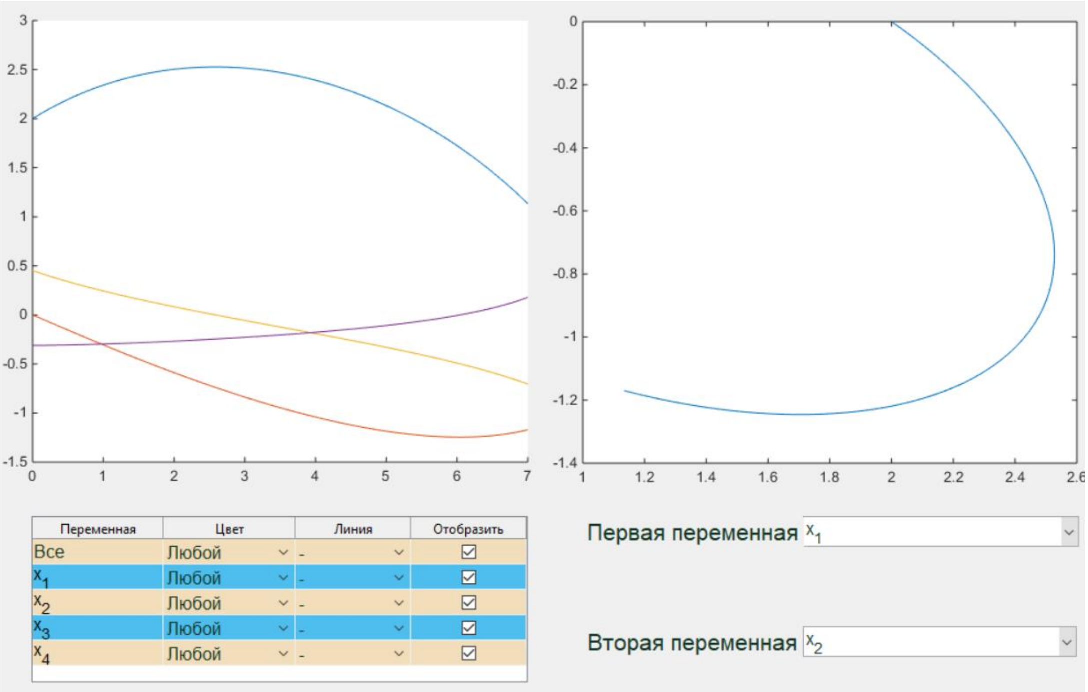

Рис. 7: Результаты решения задачи «Краевая задача двух тел»

Предельные циклы в системе Эквейлера

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, & x_1(0) = x_4(0),\ x_1(1) = x_4(1), \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + sin(x_2)), & x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 0, \\ \dot{x}_3 = 0, & \\ \dot{x}_4 = 0. & \end{cases}$$

При выборе параметра $t_* = 0$, для начального приближения $p_0 = [2, 0, 2\pi, 2]$.

Методы решения внешней и внутренней задачи: метод Рунге-Кутта 4-5 порядка.

Время решения: 225 секунд при 5 итерациях.

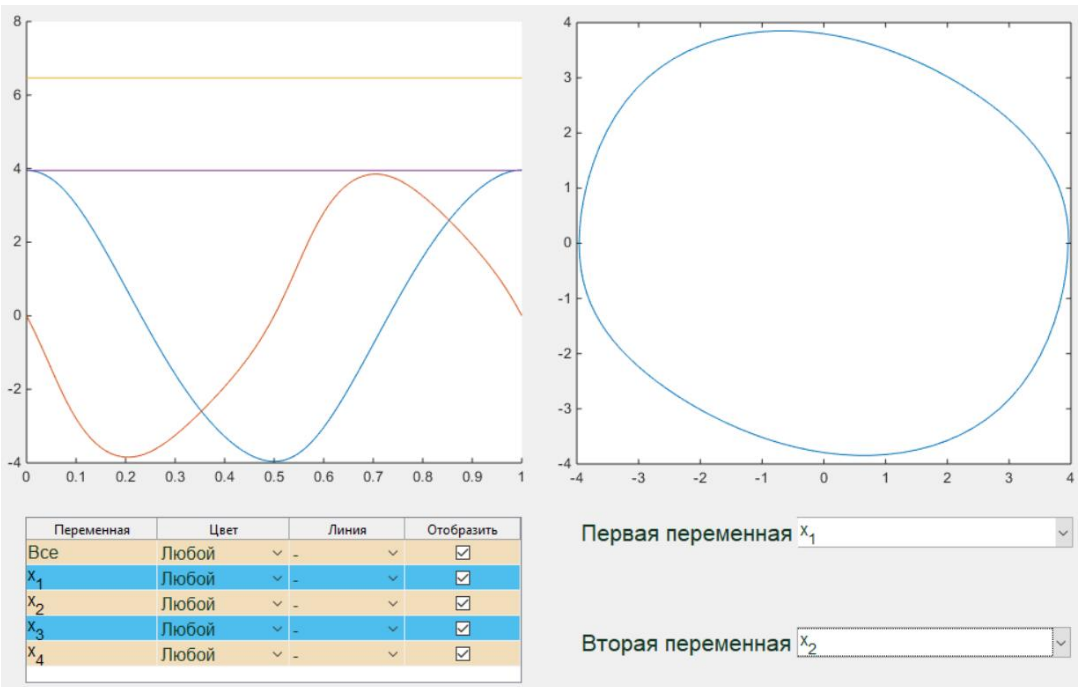

Рис. 8: Результаты решения задачи «Предельные циклы в системе Эквейлера»

Функционал типа "энергия"для трёхкратного интегратора

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{\nu + (x_6+1)^2} - \sqrt{\nu + (x_6-1)^2}), \\ \dot{x}_4 = 0, \\ \dot{x}_5 = -x_4, \\ \dot{x}_6 = -x_5. \end{cases}$$

При выборе параметров $t_* = 3.275,\ \nu = 10^{-10}$, для начального приближения

$$p_0 = [0, 0, 0, -2.9850435834, 4.8880088678, -2.9083874537].$$

Метод решения внешней задачи: метод Эйлера.

Метод решения внутренней задачи: метод Рунге-Кутта 4-5 порядка.

Время решения: 33 секунды при 5 итерациях.

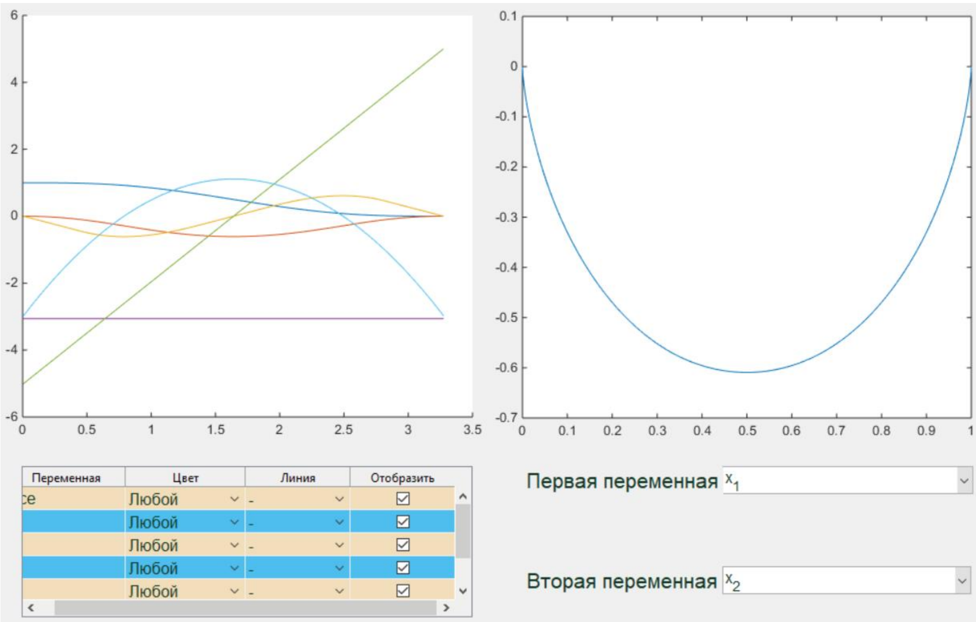

Рис. 9: Результаты решения задачи «Функционал типа "энергия"для трёхкратного интегратора»

Список литературы

1. Встроенный «Help» среды *Matlab 2014b.*

2. Официальный «Help» среды *Matlab.*
   https://www.mathworks.com/help/matlab/

3. Семинары по работе в среде Matlab Дряженкова Андрея Александровича и Аввакумова Сергея Николаевича.

4. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения* // 2007, Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 270.