

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Факультет компьютерных наук
Образовательная программа Прикладная математика и информатика
бакалавриат
01.03.02 Прикладная математика и информатика

О Т Ч Е Т
по учебной практике

Выполнил студент гр. БПМИ-171
Урманов Максим Тимурович

(подпись)

Проверили:

(должность, ФИО руководителя от организации/ НИУ ВШЭ)

(оценка)

(подпись)

(дата)

2017/2018 уч.г.

Оглавление

Введение	2
Постановка задачи	3
Определение осциллятора Ван дер Поля	4
Определение параметрического осциллятора	6
Решение параметрического осциллятора	7
Графическое представление решений параметрического осциллятора	9
Понятие бифуркации	11
Построение бифуркационной диаграммы	12
Заключение	13
Список литературы	14
Приложение — код программы на Python 3.6	15

Введение

Данная практическая работа посвящена изучению решений параметрического осциллятора и понятия бифуркации параметрического осциллятора. Различным видам осцилляторов и теории бифуркации посвящены первые две главы книги “Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности” авторов П. Берже, И. Помо и К. Видаль [1], которая была взята в качестве теоретического руководства к данной работе. Как отмечают авторы [1] во введении к первой части книги, понятия осцилляций играют важную роль в изучении динамики немонотонной эволюции в силу двух причин.

Во-первых, периодические явления часто встречаются как в живой природе, так и в неорганическом мире. Примерами того могут служить такие физические модели, как груз на упругой пружине или колебательный контур. Также существует набор химических реакций, таких как восстановительные реакции в кислой среде и горение в газовой фазе, которые осциллируют во времени. В биологических системах также наблюдаются явления, для которых характерны осцилляции. Среди них биологические ритмы, например, дыхание и сокращение мышц, размножение растений в соответствии с циклами, синтез белков и метаболическая активность животных и растений, в частности, фотосинтез. Кроме того, существует периодичность на уровне поведения популяций организмов.

Во-вторых, любая функция может быть разложена в ряд Фурье, что позволяет представить процесс изменения любой величины во времени в виде суммы периодических процессов.

Таким образом, распространённость периодических явлений в природе, возможность представлять любые процессы в виде комбинации периодически, а также простота математического описания осциллятора делают его ключевым объектом для исследования при изучении немонотонной эволюции.

Постановка задачи

В рамках данной работы предлагается, руководствуясь [1], изучить такие понятия, как осциллятор Ван дер Поля, решение параметрического осциллятора, бифуркация Хопфа, а также написать программу на языке Python (см. [приложение](#)), которая по входным параметрам рисует [решение параметрического осциллятора](#) и [бифуркационную диаграмму](#) для него.

Определение осциллятора Ван дер Поля

В первой главе [1] сначала рассматривается классический осциллятор без трения, описываемый уравнением

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, l – длина нити маятника, $\theta(t)$ – зависимость угла маятника от времени.

Далее идёт описание осциллятора с затуханием, то есть с силой трения, уравнение которого получалось из уравнения (1) путём добавления слагаемого с первой производной угла по времени и заменой слагаемого $\sin \theta$ на θ , пользуясь линейным приближением синуса при малых аргументах. Получающееся уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2)$$

где γ – коэффициент затухания, а $\omega^2 = g/l$ – квадрат угловой частоты. Во второй главе рассматривается понятие осциллятора с вынуждающей силой, основным свойством которого является усиление колебаний с малой амплитудой и затухание колебаний с большой амплитудой. Ясно, что для данной модели уравнение (2) не подходит, так как при $\gamma < 0$ энергия колебаний неограниченно возрастает. Другим его недостатком является то, что оно линейно по θ , то есть, если $\theta(t)$ является решением (2), то $a\theta(t)$ также является решением (инвариантность относительно растяжения), что несовместимо с существованием колебаний с заданной амплитудой. Поэтому необходимо изменить уравнение (2) так, чтобы выполнялись следующие свойства:

- 1) отсутствие инвариантности относительно растяжения
- 2) ограничение роста энергии при $\gamma < 0$
- 3) наличие непрерывного источника энергии, компенсирующего потери на затухание при $\gamma > 0$

На основании этих требований Ван дер Поля решил ввести коэффициент затухания, зависящий от амплитуды колебаний, так чтобы он был отрицательным при малых амплитудах и положительным при больших. Выбрав в качестве зависимости выражение

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2})$$

где $\gamma_0 > 0$, θ_0 — исходная амплитуда, видим, что требуемые условия выполняются. Подставляя данное выражение в уравнение (1), получаем так называемое уравнение Ван дер Поля:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}) \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \quad (3)$$

Определение параметрического осциллятора

Модель параметрического осциллятора основана на модели классического маятника без трения, описываемого уравнением (1), однако, в отличие от классического случая, точка подвеса маятника у параметрического осциллятора колеблется в вертикальном направлении, что является способом поддержания движения маятника, отличным от вынуждающей силы **осциллятора Ван дер Поля**. Аналогичного эффекта можно было бы добиться, поместив маятник в гравитационное поле, зависящее от времени. Рассматривая теперь ускорение свободного падения g как функцию от времени $g = g(t) = \beta_0 + \beta(t)$ и вновь пользуясь линейным приближением синуса при малых аргументах, вместо уравнения (1) получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g(t)}{l}\theta = 0 \quad (4)$$

Здесь возникает проблема, заключающаяся в том, что при произвольной функции $g(t)$ уравнение (4) не интегрируемо. В целях упрощения задачи рассматривается функция $g(t) = \beta_0 + \beta(t)$, где $\beta(t)$ периодична по времени. Следующим логичным упрощением является рассмотрение случая, где $\beta(t)$ является тригонометрической функцией. Выбирая

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(2\omega t),$$

получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega t)]\theta = 0 \quad (5)$$

где $h = g_1/g_0$, $\omega_0^2 = g_0/l$. Данное уравнение называется уравнением Маттье. Из него видно, что параметрический осциллятор задаётся тремя параметрами: ω_0 , ω и h .

Решение параметрического осциллятора

Поиск решения параметрического осциллятора основан на теории Флоке линейных уравнений с периодическими коэффициентами, описание которой выходит за рамки данной работы. Несмотря на это, мы собираемся воспользоваться её результатом о том, что решения уравнения (5) имеют вид

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t).$$

Здесь $P(t)$ — периодическая функция с периодом π/ω , а μ — константа, называемая характеристическим показателем. Ниже мы займёмся поиском функции $P(t)$ и константы μ . Её значение может быть комплексным числом. Знак вещественной части μ показывает, возрастает ли амплитуда со временем или убывает. Если вещественная часть положительна, амплитуда неограниченно возрастает со временем. В этом случае любое решение уравнения (5) неустойчиво, так как любое сколь угодно малое возмущение приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний; в противном случае колебания маятника затухают со временем и решения будут устойчивыми.

Рассматривается случай малых возбуждений, то есть параметр h близок к нулю. Как написано в [1], инструмент теории возмущений в этом случае даёт возможность вычислить значение показателя μ . При $h = 0$ общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Из непрерывности при h , близких к 0, решение $\theta(t) = e^{\mu t} P(t)$ должно вести себя как функция выше. Поэтому при малых h и частоте ω , близкой к ω_0 , хорошим приближением к решению уравнения (5) будет являться выражение

$$\theta(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi).$$

Подставляя его в уравнение (5), получаем

$$\begin{aligned} &[(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2) \cos(\omega t + \phi) - 2\omega\mu \sin(\omega t + \phi) + \frac{h}{2}\omega_0^2 \cos(\omega t - \phi) + \\ &+ \frac{h}{2}\omega_0^2 \cos(3\omega t + \phi)] \cdot e^{\mu t} = 0. \end{aligned}$$

Как показывают более подробные вычисления, которые мы не будем здесь приводить, слагаемое с $\cos(3\omega t + \phi)$ пренебрежимо мало, поэтому его можно отбросить и приравнять правую часть к 0 при всех t . Равенство выполнено тогда и только тогда, когда

коэффициенты при $e^{\mu t} \cos(\omega t)$ и $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ должны быть равны 0 (к соответствующему виду выражение приводится путём применения формулы косинуса и синуса суммы). Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2}\omega_0^2) \cos \phi - 2\omega\mu \sin \phi &= 0, \\ 2\omega\mu \cos \phi + (\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 - \frac{h}{2}\omega_0^2) \sin \phi &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим эти два равенства как систему линейных уравнений на независимые переменные $\cos \phi$ и $\sin \phi$. Она имеет решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю, то есть

$$\mu^4 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)\mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{h^2}{4}\omega_0^4 = 0.$$

Последнее равенство есть квадратное уравнение относительно μ^2 , дискриминант которого равен $16\omega_0^2\omega^2 + h^2\omega_0^4$, то есть всегда положителен, а сумма корней которого равна $-2(\omega_0^2 + \omega^2)$, то есть всегда отрицательна. Это означает, что всегда существует два действительных корня, по крайней мере один из которых отрицателен. Поскольку отрицательному значению μ^2 соответствует чисто мнимое значение μ , то данное решение будет устойчивым. Нас же интересуют неустойчивые решения, то есть те, для которых существует положительное значение μ^2 и соответственно μ . Для этого необходимо, чтобы произведение корней было отрицательно, то есть

$$h > 2 \cdot \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|. \quad (6)$$

На этом заканчивается теоретическая часть поиска решения параметрического осциллятора.

Графическое представление решений параметрического осциллятора

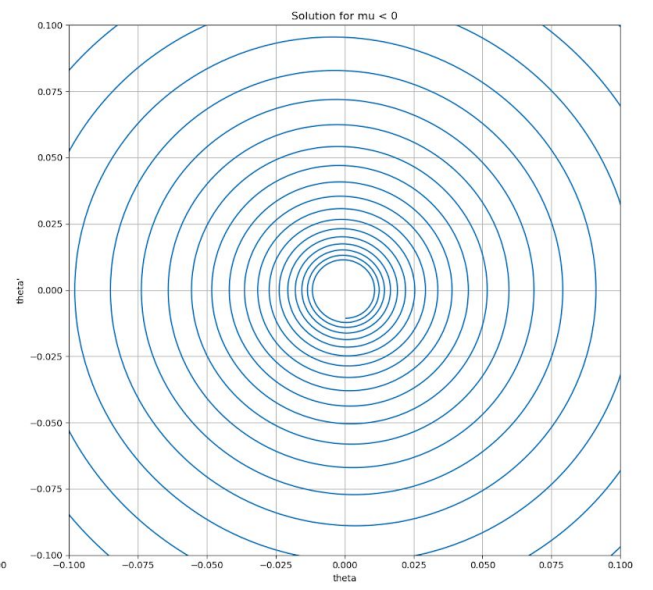
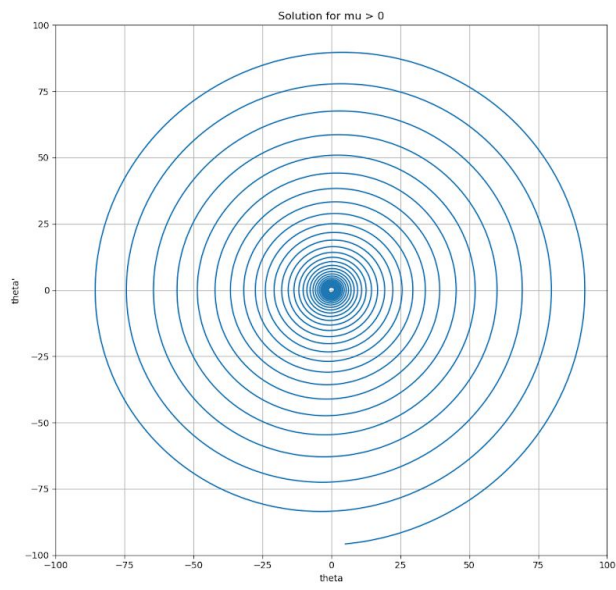
Одной из задач практики является написание программы на Python, которая по входным параметрам ω_0 , ω и h (см. раздел **определение параметрического осциллятора**) рисует решение параметрического осциллятора на плоскости $\theta - \theta'$ (одна ось соответствует значению θ , другая — значению θ' , первой производной угла по времени. Поскольку функция угла от времени имеет вид

$$\theta(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

то производная угла по времени имеет вид

$$\theta'(t) = \mu e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi) - e^{\mu t} \omega \sin(\omega t + \phi).$$

Программа производит считывание трёх параметров через стандартный поток ввода, после чего проверяет условие (6). Если оно не выполняется, программа выводит соответствующее сообщение. В противном случае далее находится положительное решение уравнения (5) и вычисляются соответствующие положительное и отрицательное значения μ . Затем решается система уравнений на угол ϕ (вычисляется тангенс этого угла, после чего берётся арктангенс от полученного значения). После этого вычисляется набор значений $\theta(t)$ для t от 0 до 200 с интервалом 0,05. Аналогично вычисляется набор значений $\theta'(t)$. Для этого используется функция `np.arange()` из пакета `numpy`, которая вычисляет необходимые значения и создаёт из них `numpy.array`. Наконец, рисуется искомое множество пар значений $(\theta(t), \theta'(t))$ с помощью пакета `matplotlib`. После этого рисуется бифуркационная диаграмма (см. раздел построение бифуркационной диаграммы) Код программы можно найти в приложении. Ниже приведены иллюстрации решений осциллятора при входных параметрах $\omega_0 = 1$, $\omega = 1,01$ и $h = 0,1$.



Понятие бифуркации

Для параметрического осциллятора условие (6) при фиксированном ω задаёт на плоскости параметров $\omega - h$ область, внутри которой μ^2 имеет положительное значение и у уравнения (5) нет устойчивого решения. Вне области неустойчивости оба значения μ^2 отрицательны. При этом одно из них близко к 0, а другое приближённо равно $2i\omega_0$. При малом отрицательном μ^2 наблюдается низкочастотная модуляция колебаний (такой режим называется квазипериодическим, здесь мы его описывать не будем). Когда параметры возбуждения на плоскости $\omega - h$ приближаются к области неустойчивости, низкочастотная модуляция стремится к 0, а на самой границе множитель $e^{i\omega t}$ заменяется на полиномиальный по времени член. В целом можно сказать, что решение параметрического осциллятора качественно меняется при переходе через границу между устойчивыми и неустойчивыми решениями. Когда решение некоторого уравнения или системы уравнений претерпевает качественные изменения при переходе через фиксированную точку в параметрическом пространстве, это называется бифуркацией, а данная точка — точкой бифуркации. Из точки бифуркации исходят несколько различных ветвей решения. Представление любого характеристического свойства решений как функции относительно параметров возбуждения образует бифуркационную диаграмму.

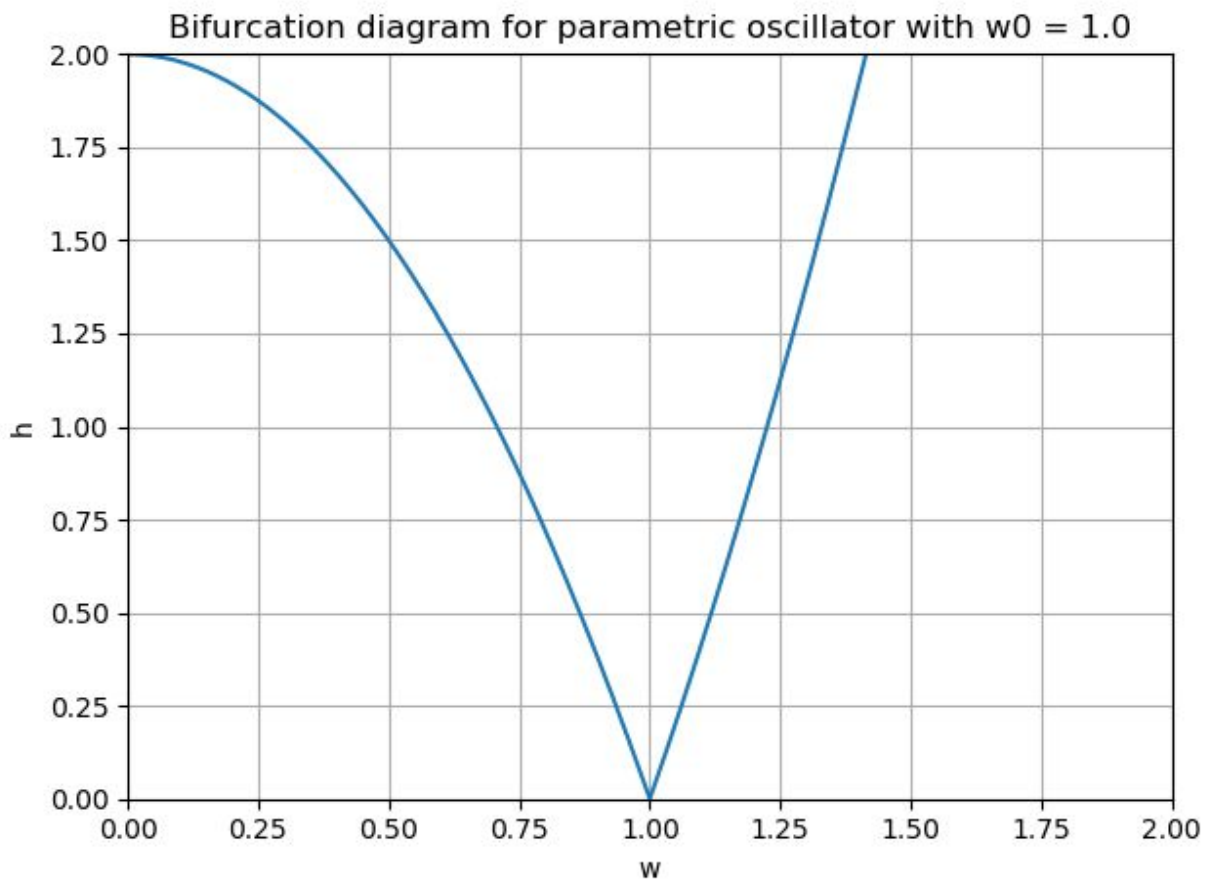
Отдельным видом бифуркации является так называемая бифуркация Хопфа. Это явление состоит в том, что при достижении точки бифуркации в параметрической плоскости траектории переходят в предельный цикл, то есть становятся периодическими. Это является одним из вариантов устойчивого состояния системы.

Построение бифуркационной диаграммы

Для параметрического осциллятора бифуркационной диаграммой является ни что иное как граница между областями устойчивости и неустойчивости, то есть множество точек на параметрической плоскости $\omega - h$, где неравенство (6) обращается в равенство. При построении бифуркационной диаграммы для параметрического осциллятора мы полагаем, что параметр ω_0 фиксирован, поэтому диаграмма выглядит как график функции

$$h(\omega) = 2 \cdot \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|.$$

Ниже приведена бифуркационная диаграмма для $\omega_0 = 1$:



Заключение

В данной работе был изучен ряд базовых, но очень важных понятий в теории динамических систем. Среди них осциллятор Ван дер Поля, параметрический осциллятор, бифуркация, бифуркация Хопфа и бифуркационная диаграмма. Также были получены практические результаты в виде написания программы, рисующей решение параметрического осциллятора и строящей для него бифуркационную диаграмму, которая показывает границу в параметрической плоскости между наличием и отсутствием устойчивых решений. Процесс написания программы помог понять природу явлений и смысл понятий, описанных в первых двух главах [1], а также предоставил возможность попрактиковаться в работе с пакетами `numpy` и `matplotlib` языка Python. Данная практическая работа вызвала у меня большой интерес, поскольку я интересуюсь математикой в целом, но не был знаком с динамическими системами до этого. Я высоко оцениваю пользу полученных знаний и навыков для моей будущей деятельности, поскольку предполагаю, что буду много пользоваться математическими вычислениями на Python, а также надеюсь продолжить изучение теории динамических систем на более высоком уровне.

Список литературы

- [1] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности — Москва “Мир” 1991

Приложение — код программы на Python 3.6

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

print('Please, type in the values of w0, w and h respectively.')
print('w0 := ', end='')
w0 = float(input())
print('w := ', end='')
w = float(input())
print('h := ', end='')
h = float(input())

# sample input:
#     w0 = 1.0
#     w = 1.01
#     h = 0.1

# The equation of the parametric oscillator stands as follows:
#     
$$d^2\theta/dt^2 + w_0^2 * (1 + h * \cos(2w * t)) * \theta = 0$$


# It is suggested that we find a solution in the form of
#      $\theta(t) = e^{(\mu * t)} * \cos(w * t + \phi),$ 
# which gives
#      $\theta'(t) = \mu * e^{(\mu * t)} * \cos(w * t + \phi) - e^{(\mu * t)} * w * \sin(w * t + \phi)$ 

# An approximation gives the following system of equations on phi:
#      $(w_0^2 - w^2 + \mu^2 + h/2 * w_0^2) * \cos(\phi) - 2 * w * \mu * \sin(\phi) = 0;$ 
#      $2 * w * \mu * \cos(\phi) + (w_0^2 - w^2 + \mu^2 - h/2 * w_0^2) * \sin(\phi) = 0$ 

# The system above has a solution iff its determinant equals 0:
#      $\mu^4 + 2(w^2 + w_0^2) * \mu^2 + (w_0^2 - w^2)^2 - h^2/4 * w_0^4 = 0$ 

# If we have  $h \leq 2 * |1 - w^2/w_0^2|$ , then only complex solutions exist; however,
# we are interested in real solutions, and thus demand
#      $h > 2 * |1 - w^2/w_0^2|$ 
# Now we check, whether the above-listed condition stands, and if it does, find two
# possible values of mu:
# print(2 * abs(1 - (w / w0) ** 2))

if h <= 2 * abs(1 - (w / w0) ** 2):
    print('Unfortunately, this parametric oscillator has no real solutions')
else:
    b = 2 * (w * w + w0 * w0)
    c = (w * w - w0 * w0) ** 2 - h * h / 4 * w0 ** 4
    D = b * b - 4 * c
    mu = math.sqrt((-b + math.sqrt(D)) / 2)

    def P(mu):
```



```

        return w0 * w0 - w * w + mu * mu + h / 2 * w0 * w0

def Q(mu):
    return 2 * w * mu

phi = math.atan2(P(mu), Q(mu))

# Now we draw the two solutions, for the positive and negative values of mu respectively:

def theta(t, phi, mu):
    return np.exp(mu * t) * np.cos(w * t + phi)

def theta_o(t, phi, mu):
    return mu * np.exp(mu * t) * np.cos(w * t + phi) - np.exp(mu * t) * w * np.sin(w * t + phi)

plt.figure(1)
plt.subplot(121)
plt.axis([-100, 100, -100, 100])
t = np.arange(0.0, 200.0, 0.005)
plt.xlabel('theta')
plt.ylabel("theta'")
plt.title('Solution for mu > 0')
plt.grid(True)
plt.plot(theta(t, phi, mu), theta_o(t, phi, mu))

plt.subplot(122)
plt.axis([-0.1, 0.1, -0.1, 0.1])
t = np.arange(0.0, 200.0, 0.005)
plt.xlabel('theta')
plt.ylabel("theta'")
plt.title('Solution for mu < 0')
plt.grid(True)
plt.plot(theta(t, phi, -mu), theta_o(t, phi, -mu))

# The bifurcation diagram can be represented as a solution of the following equality:
#      h = 2 * |1 - (w/w0)^2|
# on w -- h plane with w and h being the parameters and w0 fixed

plt.figure(2)
plt.axis([0, 2 * w0, 0, 2])
t = np.arange(0, 2 * w0, 0.005)
plt.xlabel('w')
plt.ylabel("h")
plt.title('Bifurcation diagram for parametric oscillator with w0 = ' + str(w0))
plt.grid(True)
plt.plot(t, 2 * abs(1 - (t / w0) ** 2))
plt.show()

```