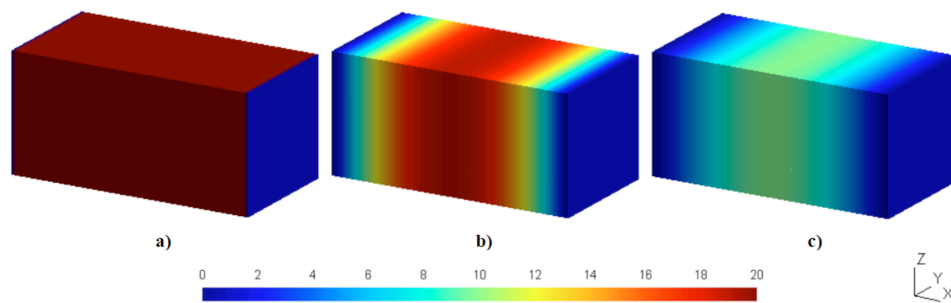




## Métodos Computacionales en Obras Civiles

# Evolución Térmica en Hormigones Masivos

### Proyecto N°3 – Entrega 3



#### Integrantes Grupo 1

- Ignacia Budd
- Maximiliano Poblete
- Lucas Raggio

## Introducción

Los hormigones masivos tienen la característica de presentar una alta concentración de temperaturas en su interior. Esto se debe a la hidratación de los materiales cementicios que se encuentran en la matriz y la baja difusividad del calor que posee el hormigón (Contreras, 2020).

Un hormigón masivo se considera como "cualquier volumen de hormigón con dimensiones lo suficientemente grandes para requerir que se tomen medidas para contrarrestar la generación del calor de hidratación del cemento y a un cambio de volumen, de esta manera se minimiza el agrietamiento" (ACI-207.1R, 2005). Esto quiere decir que, la gran diferencia de temperatura entre el interior y el exterior del elemento puede provocar tensiones térmicas y fisuras.

La evolución térmica de un cuerpo físico sólido se puede modelar con la ecuación diferencial de difusión de calor, la cual describe la temperatura del cuerpo en un punto  $x$  de su dominio, para un tiempo  $t$ , a partir de la existencia de una fuente energética, dada por una función  $q(t)$ , que describe el calor generado en cada punto en función del tiempo. En el caso del hormigón, esta fuente está controlada por su curva de hidratación. Con el objetivo de caracterizar la materialidad del cuerpo sólido, se utiliza un coeficiente de difusividad térmica  $\alpha$ , que está determinado por la densidad  $\rho$ , conductividad térmica  $\kappa$ , y calor específico  $c$  del material; según la **ecuación 1**:

$$\alpha = \frac{\kappa}{c \cdot \rho} \text{ (Ec. 1)}$$

Luego, la ecuación de calor unidimensional esta dada por la **ecuación 2** a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\kappa}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(t) \text{ (Ec. 2)}$$

Al evaluar las condiciones se borde, está presente la superficie del hormigón la cual está sometida a distintas variables que afectan el comportamiento de este. Dentro de estas, se encuentra la temperatura de ambiente o inicial. En condiciones de frío extremo, se pueden observar problemas al inicio del fraguado, por la falta de energía de activación. Lo contrario sucede con la disipación de energía a través de un medio contiguo, ya que esta puede ayudar a una estabilización de la temperatura. (Contreras, 2020)

El objetivo de este trabajo es construir un modelo computacional de elementos finitos, desarrollando un código en Python, en donde se describe la generación de calor en hormigones masivos. Se espera aprender a resolver la ecuación de difusión de calor por diferencias finitas en los casos de 1 y 2 dimensiones, de esta manera se puede llegar a predecir la evolución térmica para hormigones masivos durante su proceso de maduración.

## Metodología

Con el objetivo de resolver la ecuación de calor para encontrar la función  $u(t, x)$  que describe la temperatura de cada punto del dominio en función del tiempo y espacio, es necesario discretizar los términos de la ecuación. El primer término corresponde a la derivada temporal y puede ser discretizada según la siguiente **ecuación 3**, utilizando diferencias finitas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u[k+1, i] - u[k, i]}{dt} \quad (\text{Ec. 3})$$

Donde  $k$  e  $i$  corresponden a un tiempo y posición unitarios, respectivamente. Análogamente, se aproxima el segundo término asociado a la curvatura de temperatura según la **ecuación 4**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u[k, i-1] - 2u[k, i] + u[k, i+1]}{dx^2} \quad (\text{Ec. 4})$$

A partir de lo anterior, se puede obtener la solución de la ecuación de calor para un tiempo  $k+1$  en la posición  $i$ , con la **ecuación 5**:

$$u[k+1, i] = u[k, i] + \frac{k \cdot dt}{c \cdot \rho} \cdot \frac{u[k, i-1] - 2u[k, i] + u[k, i+1]}{dx^2} \quad (\text{Ec. 5})$$

Además, se puede obtener la aproximación discreta de la derivada posicional como indica la **ecuación 6**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u[k, i+1] - u[k, i]}{dx} \quad (\text{Ec. 6})$$

## Convergencia y validación con elemento de hormigón

Para determinar el campo de temperaturas de un elemento unidimensional sólido en la dirección del eje  $x$  (ver **figura 1**) con determinadas propiedades físicas y condiciones de borde e iniciales, se utiliza la solución de diferencias discretas dada por la **ecuación 5**. Esta solución, se basa en obtener un resultado  $u$  output, a partir de tres posiciones  $x$  para algún tiempo  $t$  (o input).

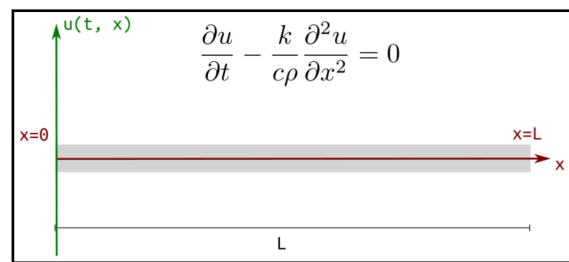


Figura 1. Elemento unidimensional

La **figura 2** muestra en forma matricial todos los posibles resultados de  $u(t, x)$ , en donde el eje horizontal (filas) representa el espacio, y el eje vertical (columnas) el tiempo. Además, se muestra la solución input-output descrita por la ecuación X, como un recuadro de líneas discontinuas verdes que “recorren” toda la matriz, conocido como “stencil”.

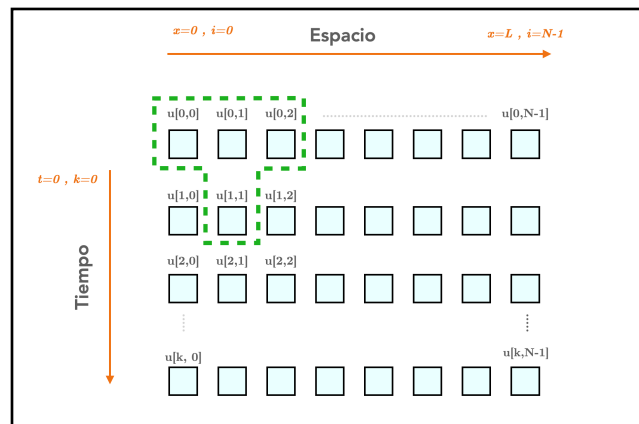


Figura 2. Representación de la evolución térmica  $u(t, x)$ .

Luego, con el objetivo de validar la solución aproximada que se obtuvo del programa utilizado, se comparará la solución obtenida con la solución analítica por medio de una serie de Fourier, la cual es asumida como verídica y se muestra en la siguiente **ecuación 7**:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40(1 - (-1)^n)}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e\left[-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \quad (\text{Ec. 7})$$

Donde el elemento de hormigón unidimensional considerado tiene las propiedades mostradas en la **Tabla 1** y las condiciones de borde e iniciales del problema se muestran en la **Tabla 2**,

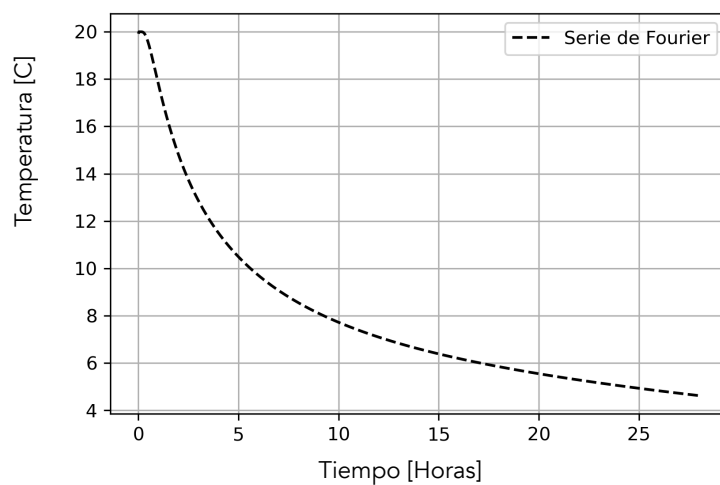
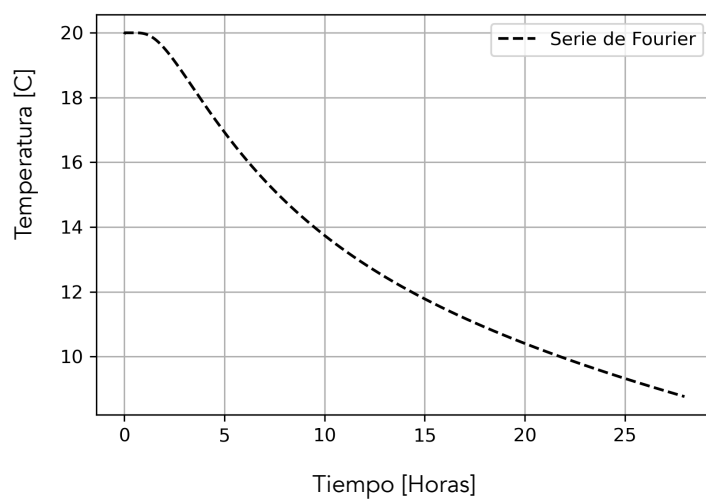
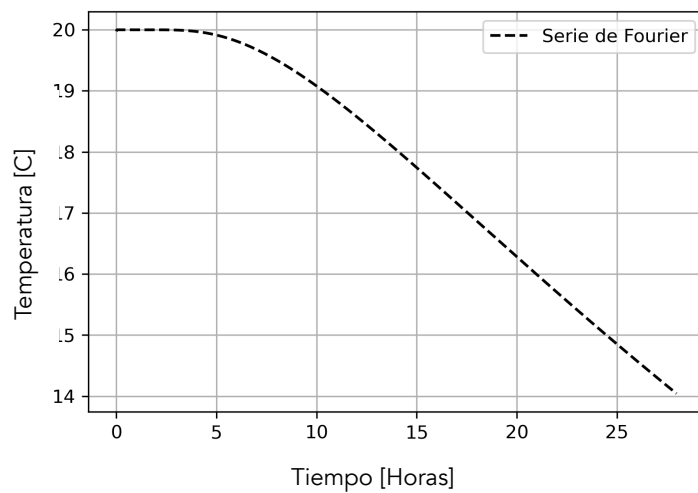
Tabla 1: Propiedades del elemento unidimensional.

Propiedad	Magnitud	Unidades
$\rho$	2476	[kg/m <sup>3</sup> ]
$c_p$	1.023	[kJ/kg°C]
$\kappa$	0.001495	[kW/m C]
$L$	01:04	[m]

Tabla 2: Condiciones del problema

Condiciones de Borde	Condiciones Iniciales
$u(t, 0) = 0$ [°C]	$u(0, x) = 20$ [°C]
$u(t, L) = 0$ [°C/m]	—————

Cabe destacar que se utilizaron distancias de  $x = 0,104$  m ,  $x = 0,208$  m y  $x = 0,4016$  m. De esta manera, las soluciones de Fourier para las distancias  $x$  mencionadas anteriormente, se muestran en las siguientes **figuras 3, 4 y 5**:

Figura 3.  $x = 0,104$  mFigura 4.  $x = 0,208$  mFigura 5.  $x = 0,416$  m

Elemento de Acero

Por otro lado, con el fin de determinar la solución de la ecuación de calor para un elemento unidimensional de acero con las propiedades físicas de la **tabla 3**, y las condiciones de la **tabla 4**, se utilizó el código de Python desarrollado. La **figura 6** muestra en forma matricial el “stencil” de este problema.

Tabla 3: Propiedades térmicas del acero

Propiedad	Magnitud	Unidades
$\rho$	7800	[kg/m <sup>3</sup> ]
$c_p$	450	[J/kg°C]
$\kappa$	79,5	[m <sup>2</sup> /s]
$L$	1	[m]

Tabla 4: Condiciones del problema

Condiciones de Borde	Condiciones Iniciales
$u(t, L) = 20 \text{ [°C]}$	$u(0, x) = 20 \text{ [°C]}$
$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 5 \text{ [°C/m]}$	_____

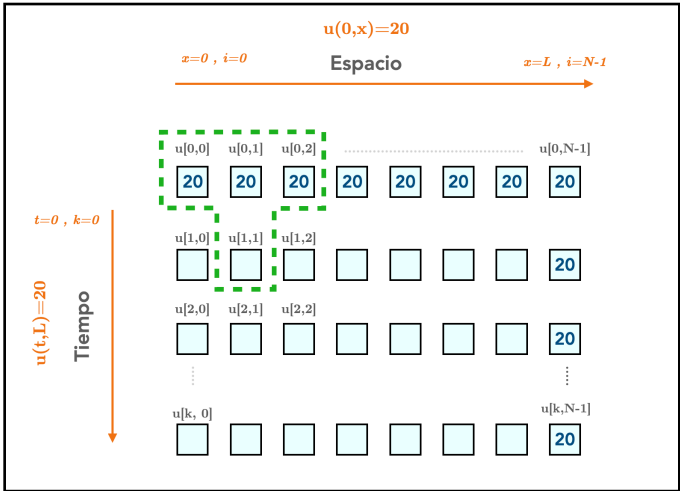


Figura 6. Representación de la evolución térmica  $u(t, x)$ .



Tal y como se puede apreciar en la anterior figura, los datos entregados por las condiciones de borde e inicial, se muestran en cada celda de la matriz de soluciones  $u(t, x)$ . Sin embargo, para la primera columna será imposible calcular los valores de la evolución térmica con la **ecuación 5**, a partir de  $u(1,0)$  hacia abajo. Por esta misma razón, se debe encontrar otro “stencil” que sirva para resolver este inconveniente.

Al plantear la derivada posicional con diferencias finitas de la **ecuación 6**, entre las posiciones  $x = 0$  y  $x = 1$  para algún tiempo  $k$ , e igualándola a un *valor constante*  $\xi$ , se hace posible despejar la solución de la ecuación de calor unidimensional para todo tiempo  $k$ , como indica la siguiente **ecuación 8**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \xi &\implies \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) \approx \frac{u[k,1] - u[k,0]}{dx} = \xi \\ \implies u[k,0] &= u[k,1] - \xi \cdot dx \quad \textbf{(Ec. 8)} \end{aligned}$$

## Resultados

Para la solución de la ecuación de difusión discretizada se utiliza un paso de integración  $dt = 2$  [s] y curvas de evolución cada 1.000 [s] hasta llegar a 50.000 [s] de simulación. En la siguiente **figura 7** se presenta la temperatura a lo largo del elemento en el tiempo.

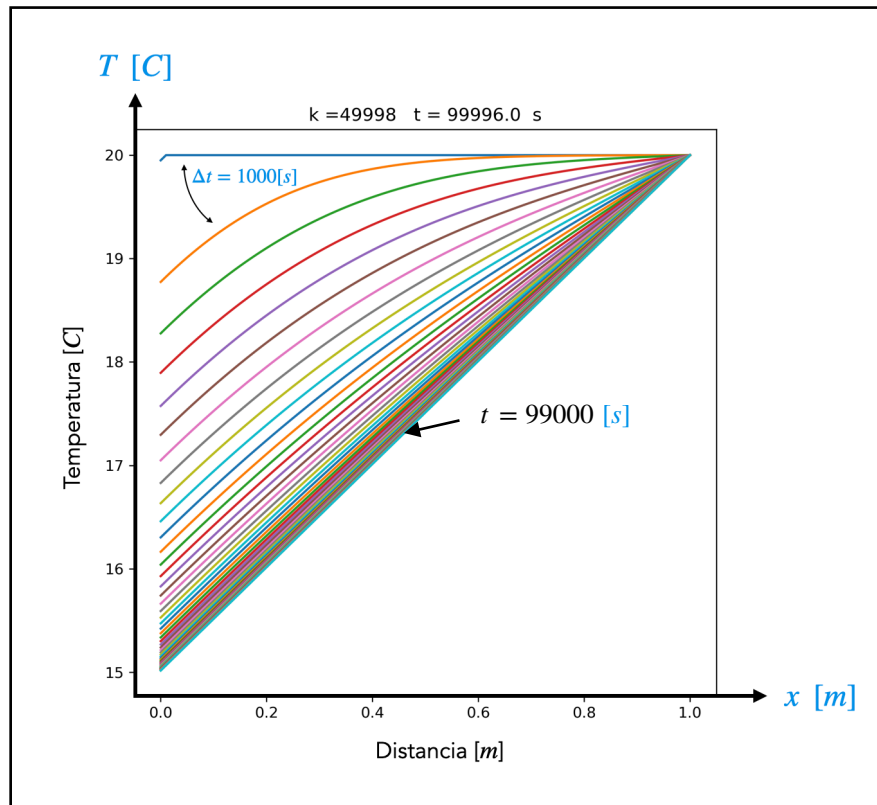


Figura 7. Temperatura a lo largo del elemento en el tiempo

En la **figura 7** se puede observar múltiples líneas, las cuales representan la temperatura del elemento para un tiempo  $t$ , en múltiplos de 1000 [s]. La línea superior (de color azul) corresponde a la temperatura del elemento para un tiempo  $t = 0$  [s], donde claramente la temperatura es constante e igual a 20 [°C] (condición inicial). Luego de este tiempo, para valores de  $x < 1$  [m] la temperatura del elemento comienza a disminuir. Esta disminución de

temperatura se debe a la condición de borde, la cual indica que por cada metro que se aleja una partícula del borde, la temperatura disminuye 5 [°C]. Esto se representa en la **figura 7**, donde la pendiente de la línea inferior ( $t = 99000$  [s]) corresponde a aproximadamente 5 [°C/m].

Las condiciones de bordes utilizadas en el presente informe son del estilo; (1) la frontera del elemento se encuentra a temperatura constante o (2) la temperatura de la frontera varía en el espacio según un gradiente de temperatura. Las condiciones de borde del estilo 1 podrían ser cuando una pila de hormigón se encuentra sumergida en el agua, pues en este caso, el agua brinda una temperatura constante al elemento (y si varía, lo hace muy lentamente); mientras que una condición del estilo 2, podría ser los muros de un edificio de hormigón armado, pues, la temperatura disminuye a una razón promedio de 6,5 [°C/km].