Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

9 de Agosto de 2018

Conteúdo

1 Equilíbrio de um corpo rígido

1.1 Torque e momento angular

Considere uma partícula de massa m na posição $\mathbf{r}$ sobre a qual atua uma força $\mathbf{F}$. O *torque* da força $\mathbf{F}$ é definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,, \tag{1}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de dois vetores, o qual é definido por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\,.$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é o momento linear da partícula. Logo, a Eq. (1) assume a forma

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}\,.$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \tag{2}$$

e o fato de que $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (devido a que $\dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{p}$ são paralelos), obtemos que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})\,. \tag{3}$$

Definimos o *momento angular* da partícula por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}\,.$$

Usando esse conceito, a Eq. (3) nos diz então que

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}\,, \tag{4}$$

ou seja, o torque da força $\mathbf{F}$ é igual à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton). A unidade de momento angular no SI é $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

1.2 Sistemas de partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 sobre as quais atuam forças externas $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ respectivamente. Além das forças externas, há forças internas $\mathbf{F}_{12}$ (sobre a partícula 1) e $\mathbf{F}_{21}$ (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Pela segunda lei de Newton vamos ter então que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} &= \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} &= \dot{\mathbf{p}}_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Somando essas equações, temos que

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2\,.$$

Como $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ pela terceira lei de Newton, a equação anterior pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \dot{\mathbf{p}}\,, \tag{6}$$

onde $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ é a força externa total sobre o sistema composto pelas partículas 1 e 2, e $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ é o momento linear total do sistema.

Multiplicando vetorialmente as Eqs. (5) pelos vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ respectivamente, vamos ter que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) &= \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) &= \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2 \end{aligned}$$

Somando essas duas equações, vamos ter que

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2\,.$$

Usando a terceira lei de Newton e a identidade (2) vamos ter que

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2+(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}_{12}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{p}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{p}_2)\,.$$

Finalmente, como $\mathbf{F}_{12}$ é paralelo a $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}_{12}=\mathbf{0}$ e, por conseguinte,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}=\dot{\mathbf{L}}\,, \tag{7}$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}=\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2$ é o torque externo total sobre o sistema e $\mathbf{L}=\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ é o momento angular total do sistema.

No caso de sistemas compostos por mais de duas partículas, as equações (6) e (7) continuam valendo.

1.3 Dinâmica do corpo rígido

Um *corpo rígido* é um corpo não pontual (tem dimensões) que não se deforma, o qual é uma idealização. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em n partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de n corpos. Se a massa da i-ésima parte é Δm_i, sua posição $\mathbf{r}_i$ e sua velocidade $\mathbf{v}_i$, o momento linear total do sistema é

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n}\dot{\mathbf{r}}_i\Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{v}}_i)\Delta m_i\,.$$

Fazendo o número de partes n tender ao infinito e ao mesmo tempo a massa das partes tender a zero, as somas anteriores tornam-se integrais. Dessa maneira, o momento linear do corpo rígido é dado por

$$\mathbf{p}=\int\mathbf{v}\,dm$$

e seu momento angular por

$$\mathbf{L}=\int\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,dm\,,$$

onde as integrais são sobre região limitada pelas dimensões do corpo rígido. Com essas definições, as equações (6) e (7) valem para o corpo rígido.