

# Movimento retilíneo

Max Jáuregui

3 de Abril de 2018

## 1 Velocidades média e instantânea

Vamos estudar o movimento de um corpo em uma linha reta, a qual vamos considerar como sendo paralela ao eixo  $x$ .

Se em dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  o corpo se encontra respectivamente nas posições  $x_1$  e  $x_2$ , definimos o **deslocamento** do corpo no intervalo  $[t_1, t_2]$  por  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Definimos também a **velocidade média** do corpo no intervalo  $[t_1, t_2]$  por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Suponhamos que a posição de um automóvel em cada instante de tempo  $t$  seja dada por  $x(t) = (10 \text{ m/s}^2)t^2 + 5 \text{ m}$ . A velocidade média no intervalo  $[0 \text{ s}, 1 \text{ s}]$  é dada por

$$v_m = \frac{x(1 \text{ s}) - x(0 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m} - 5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

No intervalo  $[0, 9 \text{ s}, 1 \text{ s}]$ , a velocidade média será

$$v_m = \frac{x(1 \text{ s}) - x(0,9 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0,9 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m} - 13,1 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Calculando a velocidade média nos intervalos  $[0, 99 \text{ s}, 1 \text{ s}]$ ,  $[0, 999 \text{ s}, 1 \text{ s}]$ ,  $\dots$ , vamos perceber que os valores obtidos vão se aproximar cada vez mais de  $20 \text{ m/s}$ . Logo, é razoável definirmos a velocidade no instante  $t = 1 \text{ s}$  como sendo  $20 \text{ m/s}$ . Essa velocidade é chamada de **velocidade instantânea** e é definida para qualquer instante  $t$  por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

O limite do lado direito é conhecido como a **derivada** de  $x(t)$  em relação a  $t$  e é denotada por  $\frac{dx}{dt}$ .

Sobre derivadas precisamos saber o seguinte:

1.  $\frac{d}{dt}[x(t) \pm y(t)] = \frac{dx}{dt} \pm \frac{dy}{dt};$

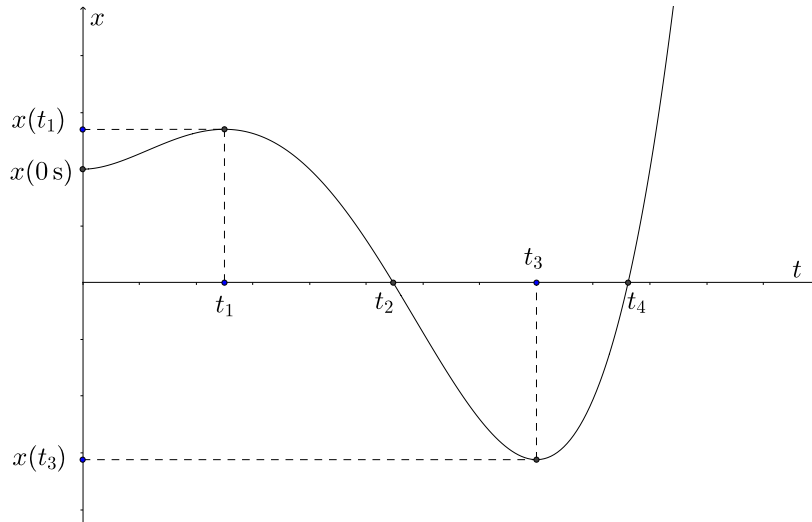


Figura 1: Exemplo de um gráfico  $x$  versus  $t$

2.  $\frac{d}{dt}[ax(t)] = a\frac{dx}{dt}$ ;
3.  $\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$ ;
4.  $\frac{d}{dt}(c) = 0$ .

Usando essas regras podemos derivar qualquer polinômio; por exemplo, se  $p(t) = 10t^3 - 2t^2 + 6$ , então  $\frac{dp}{dt} = 30t^2 - 4t$ .

Se a posição de um corpo segue a equação  $x(t) = (5 \text{ m/s}^3)t^3 - (10 \text{ m/s}^2)t^2 + 20 \text{ m}$ , qual é a velocidade instantânea do corpo no instante  $t = 2 \text{ s}$ ? A velocidade instantânea em qualquer instante  $t$  está dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)t^2 - \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t.$$

Logo, no instante  $t = 2 \text{ s}$ , vamos ter que  $v(2 \text{ s}) = 60 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$ .

## 2 Gráficos $x$ versus $t$

Conhecendo a posição de um corpo, que se move em linha reta, em cada instante de tempo, podemos construir um gráfico  $x$  versus  $t$  representando os pares ordenados  $(t, x(t))$  em um plano cartesiano. O objetivo dessa seção é obter informação sobre o movimento de um corpo a a partir de um gráfico  $x$  versus  $t$ .

**Exemplo:** Da figura 1 podemos obter a seguinte informação qualitativa sobre o movimento do corpo: O corpo inicialmente está na origem; logo depois se move à direita (assume valores de  $x$  maiores do que  $x(0 \text{ s})$ ); no instante  $t_1$  o corpo atinge a posição  $x(t_1)$  e logo depois desse instante, o corpo se move à esquerda (assume valores de  $x$  menores do

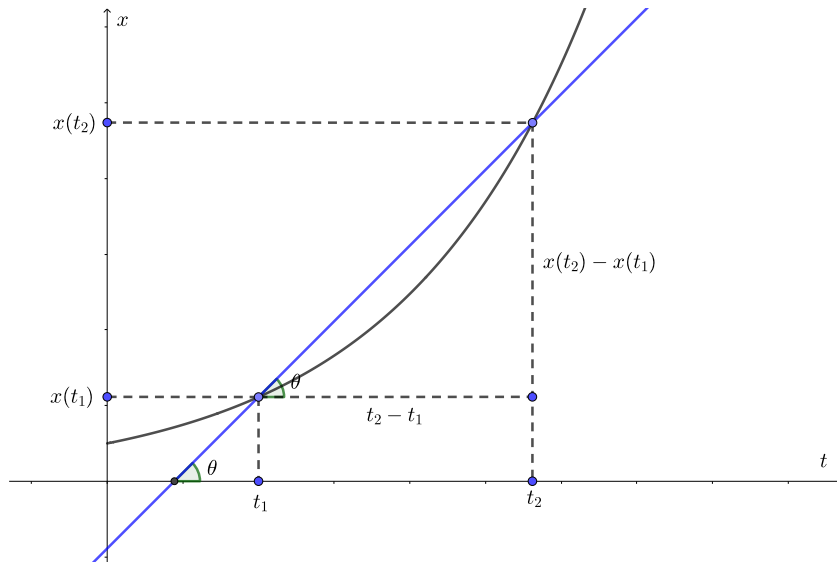


Figura 2: Cálculo da velocidade média usando um gráfico  $x$  versus  $t$ .

que  $x(t_1)$ ); no instante  $t_2$  o corpo passa pela origem e continua se movendo à esquerda; no instante  $t_3$  o corpo atinge a posição  $x(t_3)$  e depois desse instante se move à direita passando novamente pela origem no instante  $t_4$ .

Um gráfico  $x$  versus  $t$  também pode nos dar informação sobre as velocidades média e instantânea. Por exemplo, da figura 2 vemos que

$$\tan \theta = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Portanto, a velocidade média no intervalo  $[t_1, t_2]$  é a tangente do ângulo formado entre o eixo  $x$  e a reta secante ao gráfico  $x$  versus  $t$  que passa pelos pontos  $(t_1, x(t_1))$  e  $(t_2, x(t_2))$ .

Na figura 3 consideramos um instante  $t_3$ , com  $t_1 < t_3 < t_2$ . A velocidade média no intervalo  $[t_1, t_3]$  será, pelo que vimos,  $\tan \beta$ , que nesse caso é menor do que  $\tan \theta$ . Considerando instantes  $t$  cada vez mais próximos de  $t_1$ , a reta secante ao gráfico  $x$  versus  $t$  que passa pelos pontos  $(t_1, x(t_1))$  e  $(t, x(t))$  vai se aproximar da reta tangente ao gráfico que passa pelo ponto  $(t_1, x(t_1))$ . Se essa reta tangente faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$ , então  $\tan \alpha$  será o valor limite da velocidade média, ou seja,  $\tan \alpha$  será a velocidade instantânea no instante  $t_1$ . Como essa velocidade instantânea é a derivada da função  $x(t)$  em relação a  $t$  avaliada no instante  $t_1$ , obtemos a seguinte relação que dá uma interpretação geométrica da derivada:

$$v(t_1) = \frac{dx}{dt}(t_1) = \tan \alpha.$$

A figura 4 ilustra como podemos obter o sinal da velocidade instantânea em qualquer instante de tempo a partir de um gráfico  $x$  versus  $t$ . Além disso, da figura 4 também podemos obter que  $|v(t_1)| < |v(t_2)|$ , pois a tangente que passa pelo ponto  $(t_2, x(t_2))$  é

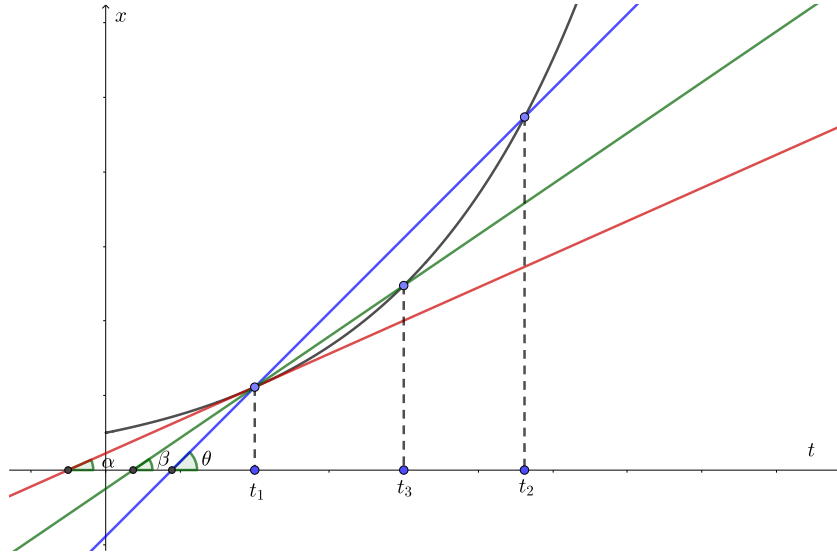


Figura 3: Cálculo da velocidade instantânea usando um gráfico  $x$  versus  $t$ .

mais vertical (mais inclinada) do que a que passa pelo ponto  $(t_1, x(t_1))$ . Analogamente, vamos ter que  $v(t_3) < v(t_4)$ . Nesse caso ambas as velocidades são positivas e, por conseguinte, não precisamos considerar o valor absoluto.

### 3 Acelerações média e instantânea

De forma análoga à velocidade média, definimos a **aceleração média** no intervalo  $[t_1, t_2]$  por

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1},$$

onde  $v(t_2)$  e  $v(t_1)$  são as velocidades instantâneas nos instantes  $t_2$  e  $t_1$  respectivamente. A **aceleração instantânea** em um instante  $t$  será definida então por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Como  $v = \frac{dx}{dt}$ , então

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

onde a última expressão é chamada de **segunda derivada** de  $x(t)$  em relação a  $t$ .

Suponhamos que a posição de um corpo em cada instante de tempo esteja dada por  $x(t) = (5 \text{ m/s}^3)t^3 - (10 \text{ m/s}^2)t^2 + 20 \text{ m}$ . A velocidade instantânea em qualquer instante  $t$  está dada por  $v(t) = (15 \text{ m/s}^3)t^2 - (20 \text{ m/s}^2)t$ . Logo,  $v(0 \text{ s}) = 0 \text{ m/s}$  e  $v(1 \text{ s}) = -5 \text{ m/s}$ . Com essa informação podemos encontrar que a aceleração média no intervalo  $[0 \text{ s}, 1 \text{ s}]$  é

$$a_m = \frac{v(1 \text{ s}) - v(0 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}^2.$$

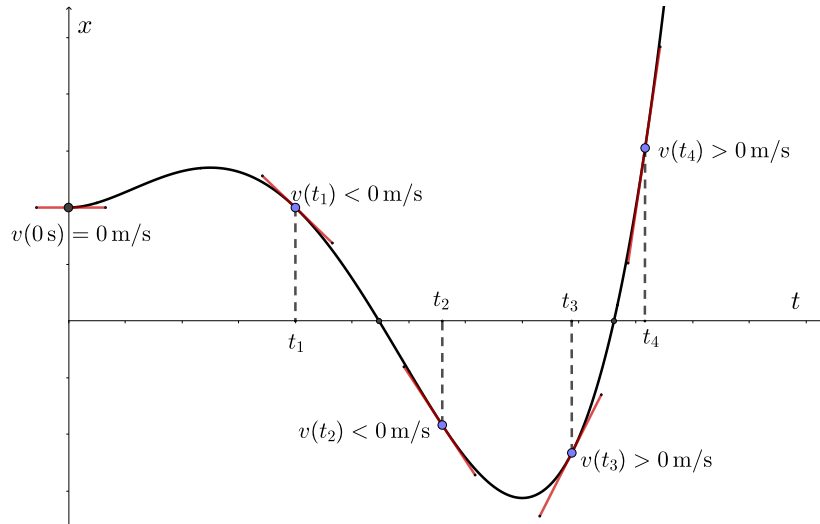


Figura 4: Sinais da velocidade instantânea.

Por outro lado, a aceleração instantânea em um instante  $t$  qualquer está dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (30 \text{ m/s}^3)t - 20 \text{ m/s}^2.$$

Em particular, a aceleração instantânea no instante  $t = 1 \text{ s}$  será  $a(1 \text{ s}) = 10 \text{ m/s}^2$ .

Assim como obtivemos as velocidades média e instantânea a partir de um gráfico  $x$  versus  $t$ , as acelerações média e instantânea podem ser obtidas exatamente da mesma forma a partir de um gráfico  $v$  versus  $t$ . A situação é diferente usando um gráfico  $x$  versus  $t$ ; porém, nesse caso é possível pelo menos determinar os sinais das acelerações média e instantânea. Por exemplo, consideremos o gráfico  $x$  versus  $t$  dado na figura 4. Nele podemos determinar o sinal da velocidade instantânea em qualquer instante e, mais ainda, estimar o módulo dela. Logo, a aceleração média no intervalo  $[0 \text{ s}, t_1]$  vai ser negativa, pois  $v(t_1) < 0 \text{ m/s}$  e  $v(0 \text{ s}) = 0 \text{ m/s}$ ; enquanto que a aceleração média no intervalo  $[0 \text{ s}, t_3]$  vai ser positiva, pois  $v(t_3) > 0 \text{ m/s}$ . Além disso, a aceleração média no intervalo  $[t_3, t_4]$  vai ser positiva, pois  $v(t_4) > v(t_3)$ .

Para determinar o sinal da aceleração instantânea em um determinado instante  $t_0$  a partir de um gráfico  $x$  versus  $t$ , precisamos analisar as inclinações das retas tangentes em pontos ao redor de  $(t_0, x(t_0))$ . Se em uma vizinhança pequena ao redor do instante  $t_0$  o gráfico  $x$  versus  $t$  é aproximadamente uma linha reta, então a aceleração instantânea no ponto  $t_0$  será igual a  $0 \text{ m/s}^2$ . Se nessa vizinhança pequena o gráfico tem forma de  $\smile$ , a aceleração instantânea no instante  $t_0$  será positiva. Nesse caso também dizemos que o gráfico  $x$  versus  $t$  tem **curvatura positiva** no ponto  $t_0$ . Por outro lado, se em uma vizinhança pequena de  $t_0$  o gráfico de  $x$  versus  $t$  tem forma de  $\frown$ , a aceleração instantânea no instante  $t_0$  será negativa e diremos também que o gráfico tem **curvatura negativa** no ponto  $t_0$ . Por exemplo, da figura 4 podemos ver que  $a(0 \text{ s}) > 0 \text{ m/s}^2$ ,  $a(t_1) < 0 \text{ m/s}^2$ ,  $a(t_2) > 0 \text{ m/s}^2$ ,  $a(t_3) > 0 \text{ m/s}^2$  e  $a(t_4) > 0 \text{ m/s}^2$ . Como o gráfico  $x$  versus  $t$  tem curvatura negativa ( $\frown$ ) no instante  $t_2$  e curvatura positiva ( $\smile$ ) no instante  $t_3$ , entre os instantes  $t_2$

e  $t_3$  deve existir um instante  $t^*$  para o qual todo instante justo antes de  $t^*$  tem curvatura negativa e todo instante justo depois de  $t^*$  tem curvatura positiva. O ponto  $(t^*, x(t^*))$  é chamado de um **ponto de inflexão** do gráfico e a aceleração instantânea no instante  $t^*$  é  $0 \text{ m/s}^2$ .

## 4 Cálculo do deslocamento usando um gráfico $v$ versus $t$

Consideremos um corpo que se move em linha reta com velocidade instantânea constante  $v(t) = v_0$ . O gráfico  $v$  versus  $t$  está dado na figura ???. A área da região limitada pelo gráfico entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é igual a  $v_0(t_2 - t_1)$ . Por outro lado, como a velocidade instantânea é uma constante  $v_0$ , a velocidade média em qualquer intervalo de tempo será igual a  $v_0$  (ver apêndice). Em particular, no intervalo  $[t_1, t_2]$  a velocidade média é

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0.$$

Portanto,  $x(t_2) - x(t_1) = v_0(t_2 - t_1)$ , ou seja, o deslocamento  $x(t_2) - x(t_1)$  é igual à área da região limitada pelo gráfico entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

## Apêndice\*