

Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

8 de Agosto de 2018

Conteúdo

1 Equilíbrio de um corpo rígido	1
1.1 Torque e momento angular	1
1.2 Sistemas de partículas	1
1.3 Dinâmica do corpo rígido	2

1 Equilíbrio de um corpo rígido

1.1 Torque e momento angular

Considere uma partícula de massa m na posição \mathbf{r} sobre a qual atua uma força \mathbf{F} . O *torque* da força \mathbf{F} é definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (1)$$

onde \times denota o produto vetorial de dois vetores, o qual é definido por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é $\text{N} \cdot \text{m}$.

Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é o momento linear da partícula. Logo, a Eq. (1) assume a forma

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (2)$$

e o fato de que $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (devido a que $\dot{\mathbf{r}}$ e \mathbf{p} são paralelos), obtemos que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (3)$$

Definimos o *momento angular* da partícula por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Usando esse conceito, a Eq. (3) nos diz então que

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}, \quad (4)$$

ou seja, o torque da força \mathbf{F} é igual à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton). A unidade de momento angular no SI é $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

1.2 Sistemas de partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 sobre as quais atuam forças externas \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 respectivamente. Além das forças externas, há forças internas \mathbf{F}_{12} (sobre a partícula 1) e \mathbf{F}_{21} (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Pela segunda lei de Newton vamos ter então que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} &= \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} &= \dot{\mathbf{p}}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Somando essas equações, temos que

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2.$$

Como $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ pela terceira lei de Newton, a equação anterior pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \dot{\mathbf{p}}, \quad (6)$$

onde $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ é a força externa total sobre o sistema composto pelas partículas 1 e 2, e $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ é o momento linear total do sistema.

Multiplicando vetorialmente as Eqs. (5) pelos vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 respectivamente, vamos ter que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) &= \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) &= \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2 \end{aligned}$$

Somando essas duas equações, vamos ter que

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2.$$

Usando a terceira lei de Newton e a identidade (2) vamos ter que

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2).$$

Finalmente, como \mathbf{F}_{12} é paralelo a $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$ e, por conseguinte,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}, \quad (7)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$ é o torque externo total sobre o sistema e $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ é o momento angular total do sistema.

No caso de sistemas compostos por mais de duas partículas, as equações (6) e (7) continuam valendo.

1.3 Dinâmica do corpo rígido

Um *corpo rígido* é um corpo não pontual que não se deforma, o qual é uma idealização. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em n partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de n corpos. Se a massa da i -ésima parte é Δm_i e sua posição é \mathbf{r}_i , o momentum total do sistema é

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \Delta m_i$$