Vetores

Max Jáuregui

30 de Março de 2018

1 Introdução

A física é uma ciência fundamental, cujo principal objeto de estudo são os fenômenos naturais, também chamados de fenômenos físicos. O estudo desses fenômenos dá origem a teorias e princípios gerais, os quais são importantes para o próprio desenvolvimento da física assim como para eventuais aplicações práticas.

A física está sempre em constante desenvolvimento. Por exemplo, no século XVI, após várias observações da queda livre de objetos, Galileu propôs que, desprezando a resistência do ar, *a aceleração de um corpo em queda livre é constante e não depende so seu peso*. Isso pode ser verificado atualmente em uma câmera de vácuo (veja https://www.youtube.com/watch?v=hRkbx0YbHfU). No entanto, esse princípio somente é valido para corpos que caem de alturas pequenas quando comparadas com o raio da Terra. De fato, poucos anos depois da morte de Galileu, Newton desenvolveu a teoria da gravitação universal, a qual inclui a afirmação de Galileu como um caso particular aproximado. Pela sua vez, a teoria de Newton tem também um limite de validade e é um caso particular aproximado da teoria da relatividade geral de Einstein, proposta quase 200 anos depois da morte de Newton.

A física estuda os fenômenos físicos de forma qualitativa e quantitativa fazendo uso da linguagem da matemática. Para isso, na observação desses fenômenos são obtidos dados numéricos por meio de medições ou cálculos. Chamamos de uma **grandeza física** a uma quantidade numérica associada a um fenômeno físico; por exemplo, a massa de um corpo, o lapso de tempo entre dois eventos, a velocidade de um corpo, etc..

Para medir uma grandeza física associada a um sistema físico precisamos compará-la com um padrão, o qual define uma **unidade** da grandeza.

No nosso curso, usaremos o sistema internacional de unidades (SI):

- Unidade de tempo: segundo (s).
- Unidade de comprimento: metro (m).
- Unidade de massa: quilograma (kg).

O grama (g) não é unidade fundamental de massa segundo o SI.

Para denotar múltiplos e frações de unidades, usamos prefixos:

Prefixo	Símbolo	Fator
quilo	k	10^3
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

Por exemplo, $1\text{cm} = 10^{-2}\text{m}$, $5\mu\text{g} = 5 \times 10^{-6}\text{g}$.

Exemplos de conversão de unidades:

- Se o velocímetro de um carro marca 90 km/h, qual é a velocidade do carro em m/s? Vemos que
$$90\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(90\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1000\text{m}}{1\text{km}}\right)\left(\frac{1\text{h}}{3600\text{s}}\right) = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

- Um mililitro (mL) equivale a 1cm^3, a quantos litros equivale 1m^3? Vemos que
$$1\text{m}^3 = 1\text{m}^3\left(\frac{100\text{cm}}{1\text{m}}\right)^3\left(\frac{1\text{mL}}{1\text{cm}^3}\right)\left(\frac{1\text{L}}{1000\text{mL}}\right) = 1000\text{L}\,.$$

2 Vetores

Uma grandeza física é dita uma **grandeza escalar** quando é descrita por um único número; por exemplo, o lapso de tempo entre dois eventos é um exemplo de uma grandeza escalar. Outra classe importante de grandezas físicas, chamadas de **grandezas vetoriais**, não podem ser descritas por um único número. Por exemplo, para descrever a velocidade de um corpo, precisamos saber quão rápido ele se move (módulo da velocidade) e em qual direção. Grandezas vetoriais podem ser denotadas graficamente por segmentos de reta orientados (setas), os quais chamaremos de **vetores**.

Um vetor $\vec{A}$ está caracterizado pelo seu **módulo** $|\vec{A}|$ (comprimento da seta) e pela sua direção. Logo, dois vetores paralelos que têm o mesmo módulo são iguais. Podemos ter também dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ com $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ tais que $\vec{A} \neq \vec{B}$. Para ver isso, podemos desenhar um círculo e considerar dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ não paralelos, ambos com origem no centro do círculo e com as pontas na circunferência.

A **adição** de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ produz um vetor $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. Depois de unir a origem de $\vec{B}$ com a ponta de $\vec{A}$, o vetor $\vec{R}$ será obtido unindo a origem de $\vec{A}$ com a ponta do vetor $\vec{B}$. Fazendo o desenho, podemos concluir que $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$, onde a igualdade acontece quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos. Pode-se verificar geometricamente que a adição de vetores é uma operação comutativa ($\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$) e associativa ($\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$).

Multiplicar um vetor $\vec{A}$ por um número $c > 0$ ($c < 0$) produz um vetor $\vec{B} = c\vec{A}$ que é paralelo (antiparalelo) ao vetor $\vec{A}$ e tem módulo $|\vec{B}| = |c||\vec{A}|$.

Um **vetor unitário** é um vetor $\vec{a}$ que tem módulo $|\vec{a}| = 1$. Se $\vec{a}$ é um vetor unitário, usualmente escrevemos $\hat{a}$ no lugar de $\vec{a}$.

Dado qualquer vetor $\vec{A}$, podemos obter um vetor unitário $\hat{a}$ paralelo a $\vec{A}$. Com efeito, multiplicando o número $1/|\vec{A}|$ ao vetor $\vec{A}$, obtemos $\hat{a} = \vec{A}/|\vec{A}|$. Verificamos facilmente que $|\hat{a}| = 1$.

3 Componentes de vetores

Os eixo x de um sistema de coordenadas cartesianas no plano é paralelo a um vetor unitário que denotaremos por $\hat{\imath}$. Analogamente, o eixo y é paralelo a um vetor unitário $\hat{\jmath}$. No caso de coordenadas cartesianas no espaço, além dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, teremos o vetor unitário $\hat{k}$, que é paralelo ao eixo z.

Utilizando coordenadas cartesianas, um vetor $\vec{A}$ pode ser escrito como $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$. Os números A_x, A_y e A_z são chamados de **componentes** do vetor $\vec{A}$.

Desenhando um vetor $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$, podemos concluir, após usar o teorema de Pitágoras, que $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Analogamente podemos verificar que, se $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$, $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$.

Se um vetor $\vec{A}$ no plano forma um ângulo θ com o semieixo positivo x, então, fazendo um desenho, podemos concluir que $A_x = |\vec{A}|\cos\theta$ e $A_y = |\vec{A}|\operatorname{sen}\theta$. A partir dessas relações concluímos o seguinte:

- conhecendo o módulo de um vetor $\vec{A}$ e o ângulo θ que ele forma com o semieixo positivo x, podemos determinar os componentes A_x e A_y;

- conhecendo os componentes A_x e A_y de um vetor $\vec{A}$, podemos determinar $|\vec{A}|$ e o ângulo θ que o vetor $\vec{A}$ forma com o semieixo positivo x.

Por exemplo, se $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 3\sqrt{3}\hat{\jmath}$, vamos ter que $|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$. Além disso, se θ é o ângulo entre o vetor $\vec{A}$ e o semieixo positivo x, temos que $\cos\theta = 3/6 = 1/2$ e $\operatorname{sen}\theta = -3\sqrt{3}/6 = \sqrt{3}/2$, de onde obtemos que $\theta = 300^{\text{o}}$ (θ deve pertencer ao quarto quadrante, pois $\cos\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$).

Se $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ e $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$, usando as propriedades comutativa e associativa da adição de vetores, obtemos que

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}\,.$$

Por outro lado, podemos verificar geometricamente que, para qualquer número c,

$$c\vec{A} = cA_x\hat{\imath} + cA_y\hat{\jmath} + cA_z\hat{k}\,.$$

4 Produto escalar

Definimos o **ângulo** θ entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como sendo o menor dos ângulos obtidos ao fazer coincidir as origens de $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Dessa maneira, temos que $0^{\text{o}} \le \theta \le 180^{\text{o}}$.

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ que formam um ângulo θ entre eles, definimos o **produto escalar** deles por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta\,.$$

Observamos que o produto escalar de dois vetores é um número. Também vemos imediatamente da definição que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

Dependendo do ângulo formado entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o produto escalar desses vetores pode ser positivo, negativo ou zero. Em particular, vemos que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares (lembre que $\cos 90^{\text{o}} = 0$). Por outro lado, se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores paralelos, então $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$ (lembre que $\cos 0^{\text{o}} = 1$) e, em particular, $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$. Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores antiparalelos, então $\vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$ (lembre que $\cos 180^{\text{o}} = -1$). Usando essas propriedades vemos que $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ e $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$.

Se $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ e $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$, então, usando a distributividade do produto escalar ($\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$), encontramos que $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

Usando o produto escalar podemos encontrar o ângulo θ entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Por exemplo, se $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$, então $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 - 2 - 2 = -1$. Por outro lado, $|\vec{A}| = \sqrt{6}$ e $|\vec{B}| = \sqrt{14}$. Logo, $\sqrt{6}\sqrt{14}\cos\theta = \vec{A} \cdot \vec{B} = -1$ e, por conseguinte, $\cos\theta = -1/\sqrt{84}$. Portanto, $\theta = \arccos(-1/\sqrt{84})$.

5 Produto vetorial

O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotado por $\vec{A}\times\vec{B}$, é definido como sendo um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ cujo módulo é $|\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Como existe mais de um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, para determinar de forma única o produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$, usamos a chamada **regra da mão direita**. Para descrever essa regra, consideremos que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano desta folha de papel. Logo,

1. fazemos coincidir a origem dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
2. giramos o vetor $\vec{A}$ barrendo o ângulo θ até chegar no vetor $\vec{B}$;
3. se o giro é anti-horário, $\vec{A}\times\vec{B}$ será um vetor que sai perpendicularmente da folha; se o giro é horário, $\vec{A}\times\vec{B}$ será um vetor que entra perpendicularmente na folha.

Segue da regra da mão direita que $\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$ para quaisquer vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Por outro lado, da relação $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{sen}\theta$ segue que $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$ se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos ou antiparalelos, pois em ambos os casos $\operatorname{sen}\theta=0$. Em particular, temos então que $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$. Além disso, podemos verificar facilmente que $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$ e $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$.

Se $\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$ e $\vec{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}$, então, usando a distributividade do produto vetorial ($\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$), encontramos que

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\imath}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\jmath}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}\,,$$

o que pode ser escrito também na forma de determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\,.$$

Apêndice*

Vamos provar que o produto escalar é distributivo em relação à adição, ou seja,

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \tag{1}$$

Para isso vamos provar primeiro que se $\vec{B}$ é paralelo ou antiparalelo a $\vec{A}$ e $\vec{C}$ é perpendicular a $\vec{A}$, então $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}$. Denotemos por θ o ângulo que $\vec{B}+\vec{C}$ forma com $\vec{A}$. Se $\vec{B}$ é paralelo a $\vec{A}$, fazendo um desenho vamos ver que $|\vec{B}+\vec{C}|\cos\theta=|\vec{B}|$ e, por conseguinte, $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=|\vec{A}||\vec{B}+\vec{C}|\cos\theta=|\vec{A}||\vec{B}|=\vec{A}\cdot\vec{B}$. Analogamente, se $\vec{B}$ é antiparalelo a $\vec{A}$, vamos ter que $|\vec{B}+\vec{C}|\cos\theta=-|\vec{B}|$ e, por conseguinte, $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=-|\vec{A}||\vec{B}|=\vec{A}\cdot\vec{B}$. Vamos obter agora a Eq. (1). O vetor arbitrário $\vec{B}$ pode ser decomposto como a soma de um vetor $\vec{B}_\parallel$, que é paralelo ou antiparalelo a $\vec{A}$, e um vetor $\vec{B}_\perp$ que é perpendicular a $\vec{A}$. De forma análoga, o vetor C pode ser escrito como $\vec{C}=\vec{C}_\parallel+\vec{C}_\perp$. Logo,

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot(\vec{B}_\parallel+\vec{B}_\perp+\vec{C}_\parallel+\vec{C}_\perp)=\vec{A}\cdot[(\vec{B}_\parallel+\vec{C}_\parallel)+(\vec{B}_\perp+\vec{C}_\perp)]\,.$$

Como $\vec{B}_\parallel + \vec{C}_\parallel$ é paralelo ou antiparalelo a $\vec{A}$ e $\vec{B}_\perp + \vec{C}_\perp$ é perpendicular a $\vec{A}$, vamos ter que $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{B}_\parallel + \vec{C}_\parallel)$. É fácil de se verificar que $\vec{A} \cdot (\vec{B}_\parallel + \vec{C}_\parallel) = \vec{A} \cdot \vec{B}_\parallel + \vec{A} \cdot \vec{C}_\parallel$. Portanto, $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B}_\parallel + \vec{A} \cdot \vec{C}_\parallel = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.

O produto vetorial também é distributivo em relação à adição, ou seja,

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

A demonstração dessa propriedade é similar à do produto escalar. O primeiro passo é mostrar que $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{C}$ quando $\vec{B}$ é paralelo ou antiparalelo a $\vec{A}$ e $\vec{C}$ é perpendicular a $\vec{A}$. O caso do produto vetorial apresenta uma pequena dificuldade a mais devido a que a relação $\vec{A} \times (\vec{B}_\perp + \vec{C}_\perp) = \vec{A} \times \vec{B}_\perp + \vec{A} \times \vec{C}_\perp$ não é evidente e requer demonstração.