

# Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

31 de Outubro de 2018

## Conteúdo

- 1 Equilíbrio de um corpo rígido
- 2 Gravitação newtoniana
- 3 Movimento periódico
- 4 Ondas mecânicas

## 1 Equilíbrio de um corpo rígido

Considere uma partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  sobre a qual atua uma força  $\vec{F}$ . O **torque** da força  $\vec{F}$  é definido por  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ , onde  $\times$  denota o **produto vetorial** de dois vetores, o qual é definido por

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}.\end{aligned}$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

**Exercício 1.1.** Verifique que, para uma partícula de 10 kg na posição  $\vec{r} = \cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}$  (em metros), o torque do peso é igual a  $-49\sqrt{3}\hat{k}$  (em  $\text{N} \cdot \text{m}$ ).

Usaremos a notação  $\dot{\vec{a}}$  para representar a derivada de  $\vec{a}$  em relação ao tempo, ou seja,  $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ .

**Exercício 1.2.** Considere uma partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  sobre a qual atua uma força  $\vec{F}$ . Definindo o **momento angular** de uma partícula por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

onde  $\vec{p}$  é o momento linear da partícula, mostre que  $\dot{\vec{\tau}} = \dot{\vec{L}}$ . Isso quer dizer que o torque da força  $\vec{F}$  é igual

à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton).

1 A unidade de momento angular no SI é  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

5 *Dica:* Na expressão do torque substitua  $\vec{F}$  por  $\dot{\vec{p}}$ , em virtude da segunda lei de Newton ( $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ ). Logo, utilize a identidade  $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$  e use o fato de que  $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$ , pois o vetor velocidade  $\dot{\vec{r}}$  é paralelo a  $\vec{p}$ .

10

15

**Exercício 1.3.** Considere duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  sobre as quais atuam forças externas  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  respectivamente. Além das forças externas, há forças internas  $\vec{F}_{12}$  (sobre a partícula 1) e  $\vec{F}_{21}$  (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Mostre que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2. \quad (1)$$

*Dica:* Segue da segunda lei de Newton que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \dot{\vec{p}}_1 \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \dot{\vec{p}}_2. \quad (2)$$

Somando essas equações e usando a terceira lei de Newton ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ), obtém-se a primeira equação em (1). Para se obter a segunda equação em (1), multiplicam-se vetorialmente à esquerda as equações (2) pelos vetores posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  respectivamente. Logo, somam-se as equações obtidas e usa-se o fato de que  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$ .

O exemplo anterior pode ser generalizado sem realizar nenhuma alteração fundamental para o caso de um sistema de  $n$  partículas. Nesse caso vamos ter que

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \dot{\vec{p}} \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}, \quad (3)$$

onde  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$  é a força externa total sobre o sistema,  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n$  é o momento linear total do sistema,  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_1 + \dots + \vec{\tau}_n$  é o torque externo

total sobre o sistema e  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_n$  é o momento angular total do sistema.

Um **corpo rígido** é um corpo não pontual que não se deforma. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em  $n$  partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de  $n$  corpos. Se a massa da  $i$ -ésima parte é  $\Delta m_i$ , sua posição é  $\vec{r}_i$  e sua velocidade é  $\vec{v}_i$ , então o momentum total do sistema é

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Delta m_i.$$

Considerando que o número de partes  $n$  tende ao infinito e simultaneamente a massa de cada parte tende a zero, as somas anteriores tornam-se integrais. Dessa maneira, encontramos que o **momento linear do corpo rígido** é dado por

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm \quad (4)$$

e o **momento angular do corpo rígido** por

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm, \quad (5)$$

onde as integrais são sobre toda a massa do corpo rígido.

As Eqs. (3) continuam valendo da mesma forma para um corpo rígido, levando em conta que  $\vec{p}$  e  $\vec{L}$  são dadas pelas Eqs. (4) e (5).

O movimento de um corpo rígido pode ser estudado analisando separadamente os movimentos de translação e de rotação em torno de um eixo que passa pelo corpo.

**Exercício 1.4.** Considere um corpo rígido de massa  $M$  que realiza um movimento de translação pura com velocidade  $\vec{v}$ . Mostre que nesse caso

$$\vec{p} = M\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{L} = \vec{R} \times \vec{p},$$

onde

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

é a posição do **centro de massa** do corpo.

*Dica:* Quando um corpo rígido realiza um movimento de translação pura, todos os pontos do corpo possuem a mesma velocidade. Dessa forma, a velocidade  $\vec{v}$  pode sair das integrais nas Eqs. (4) e (5).

O exercício anterior nos diz que um corpo rígido que realiza um movimento de translação pura se comporta como uma partícula de massa  $M$  localizada no centro de massa do corpo. Em outras palavras, as dimensões do corpo rígido não são relevantes no movimento de translação.

Diferentemente do caso do movimento de translação, quando um corpo rígido realiza um movimento de rotação ao redor de um eixo que passa por ele, os pontos do corpo que estão mais próximos do eixo de rotação tem velocidade menor do que os pontos mais afastados. Logo, nesse caso a velocidade  $\vec{v}$  não pode sair da integral nas Eqs. (4) e (5).

Para simplificar nosso estudo do movimento de rotação de um corpo rígido, vamos considerar um corpo homogêneo (massa distribuída uniformemente) e simétrico. Além disso, vamos analisar o caso em que o corpo gira em torno de um dos seus eixos de simetria com velocidade angular  $\vec{\omega}$ .

Antes de continuar, lembremos que, para uma partícula que realiza um movimento circular com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , vale a relação vetorial  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula e  $\vec{r}$  é sua posição em relação a um sistema de referência fixo ao eixo de rotação.

Continuando nossa análise da rotação de um corpo rígido, vemos que o momento angular do corpo é dado por

$$\vec{L} = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm,$$

onde a posição  $\vec{r}$  é em relação a um sistema de referência fixo ao eixo de rotação. Usando a identidade vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

temos que

$$\vec{L} = \int [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] dm. \quad (6)$$

Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , então  $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = r\omega \cos \theta$  e, por conseguinte,

$$\vec{L} = \int [r^2\vec{\omega} - (r\omega \cos \theta)\vec{r}] dm.$$

Devido a que o corpo gira em torno de um eixo de simetria, podemos inferir que o vetor  $\vec{L}$  deve ter a mesma direção que o vetor  $\vec{\omega}$ . Isso quer dizer que as direções perpendiculares a  $\vec{\omega}$  devem se anular após fazer a integral na Eq. (6). Logo, vamos ter

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \left( r^2 \vec{\omega} - (r\omega \cos \theta)(r \cos \theta) \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) dm \\ &= \int (r^2 - r^2 \cos^2 \theta) \vec{\omega} dm \\ &= \int (r^2 \sin^2 \theta) \vec{\omega} dm.\end{aligned}$$

Como todo ponto do corpo rígido gira com a mesma velocidade angular, obtemos que

$$\vec{L} = I \vec{\omega}, \quad (7)$$

onde

$$I = \int (r \sin \theta)^2 dm \quad (8)$$

é o chamado **momento de inércia** do corpo. Cabe ressaltar que para cada ponto do corpo,  $r \sin \theta$  é a distância do ponto ao eixo de rotação.

A Eq. (7) nos diz que o momento angular é um indicador da rotação de um corpo rígido.

Um corpo rígido está em **equilíbrio estático** quando não realiza movimento de translação nem de rotação.

Se um corpo rígido está em equilíbrio estático, todo ponto do corpo tem velocidade nula. Logo, segue das Eqs. (4) e (5) que nesse caso vamos ter  $\vec{p} = \vec{0}$  e  $\vec{L} = \vec{0}$ , onde, na segunda condição,  $\vec{L}$  pode ser calculado em relação a qualquer ponto. Substituindo isso nas Eqs. (3), obtemos as chamadas **condições de equilíbrio** para o corpo rígido:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}, \quad (9)$$

onde, na segunda condição,  $\vec{\tau}_{\text{ext}}$  pode ser calculado em relação a qualquer ponto.

O fato de um corpo rígido satisfazer uma das condições dadas na Eq. (9) não implica que a outra será também satisfeita. Por exemplo, se temos uma barra sobre uma mesa e aplicamos forças de direções opostas sobre os extremos da barra e perpendiculares a ela, a primeira condição em (9) é satisfeita, mas a segunda não.

**Exercício 1.5.** Considere um corpo rígido de massa  $M$ . Se a aceleração da gravidade  $\vec{g}$  é constante, mostre que o torque do peso do corpo é dado por

$$\vec{\tau}_P = \vec{R} \times (M\vec{g}),$$

onde  $\vec{R}$  é a posição do centro de massa do corpo. Em outras palavras, o torque do peso do corpo rígido pode ser calculado considerando o corpo como uma partícula de massa  $M$  localizada no centro de massa do corpo.

*Dica:* O torque do peso de um corpo rígido é igual à soma de todos os torques dos pesos das partes do corpo. Quando o número de partes tende a infinito e a massa de cada parte tende a zero, essa soma torna-se uma integral. Dessa forma,  $\vec{\tau}_P = \int (\vec{r} \times \vec{g}) dm$ .

Define-se o **centro de gravidade** de um corpo rígido de massa  $M$  como o ponto no qual uma partícula de massa  $M$  teria um torque do peso igual ao torque do peso do corpo rígido. O exercício anterior mostra que, se  $\vec{g}$  é constante (por exemplo, na superfície da Terra), o centro de gravidade de um corpo rígido coincide com seu centro de massa. Para nossos fins, centro de gravidade e centro de massa serão equivalentes.

Se um corpo rígido é homogêneo e tem um eixo de simetria, o centro de massa do corpo estará localizado em algum ponto desse eixo.

Se um corpo rígido é pendurado a partir de um ponto arbitrário e está em equilíbrio, o centro de massa do corpo deve estar localizado em algum ponto da linha vertical que passa pelo ponto de suspensão. Com efeito, como nesse caso o torque do peso deve ser nulo, segue do exercício 1.5 que  $\vec{R}$  e  $\vec{g}$  devem ser vetores paralelos, ou seja,  $\vec{R}$  deve ser um vetor vertical.

Se consideramos uma pessoa como um corpo rígido, quando a pessoa se equilibra em um pé só, o centro de massa dela deve estar na linha vertical que passa pelo pé de suporte. Para isso é necessário realizar um deslocamento do centro de massa, o qual pode não ser possível se a pessoa está junto a uma parede.

**Exercício 1.6.** Considere um corpo rígido em um plano inclinado de superfície rugosa, como ilustrado na figura 1A. Dê argumentos que indiquem que o corpo pode de fato estar em equilíbrio (não vai tombar).

*Dica:* Desenhe as forças que atuam sobre o corpo. As forças normais e de atrito podem assumir valores de tal forma que a força resultante sobre o corpo seja nula. Para calcular os torques das forças escolha o ponto de apoio mais baixo, pois, em relação a esse ponto, os torques das forças de atrito e da normal que atua nesse ponto são nulos. Logo, mostre que

o torque externo total pode ser escrito como  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N$ , onde  $\vec{\tau}_P$  e  $\vec{\tau}_N$  têm direções opostas.

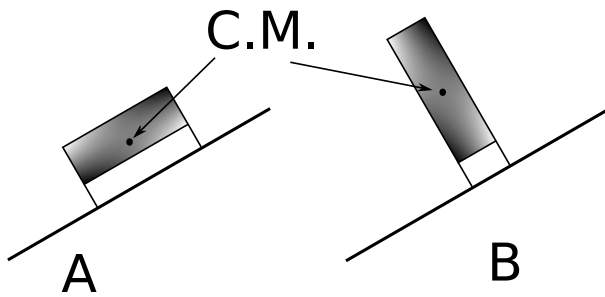


Figura 1: Estudo do tombo de um corpo rígido.

**Exercício 1.7.** Considere um corpo rígido em um plano inclinado de superfície rugosa, como ilustrado na figura 1B. Dê argumentos que indiquem que o corpo não pode estar em equilíbrio (vai tombar).

*Dica:* Proceda da mesma forma que no exercício anterior. Mostre que o torque externo total pode ser escrito como  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N$ , onde  $\vec{\tau}_P$  e  $\vec{\tau}_N$  têm a mesma direção.

Suponhamos que queremos calcular o torque de uma força  $\vec{F}$  aplicada sobre um ponto de um corpo rígido que se encontra na posição  $\vec{r}$  em relação a um ponto arbitrário  $O$ . Por definição esse torque estará dado por  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Porém, às vezes o módulo de  $\vec{r}$  ou sua direção podem ser difíceis de se conhecer. Para dar conta desse problema, observamos que se  $\vec{r}$  é um vetor qualquer paralelo a  $\vec{F}$ , então  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$  e, por conseguinte,  $\vec{\tau} = (\vec{r} + \vec{r}') \times \vec{F}$ . Dessa maneira, escolhendo o vetor  $\vec{r}'$  de forma conveniente podemos calcular  $\vec{\tau}$  de forma mais simples. Em particular, se  $\vec{r} + \vec{r}'$  é um vetor perpendicular a  $\vec{F}$ , então  $\tau = |\vec{r} + \vec{r}'|F$ .

Na maioria dos exercícios lidaremos com problemas onde as posições e as forças se encontram em um plano; especificamente, o plano do papel. Dessa forma, os torques das forças sempre serão vetores perpendiculares ao papel. Devido a isso, podemos adotar a seguinte convenção: se o vetor torque aponta para fora do papel, consideraremos ele como positivo; caso contrário, consideraremos ele como negativo. Uma regra prática para determinar o sinal do torque de uma força é a seguinte: se a força tende a fazer girar o corpo em sentido anti-horário em relação ao ponto de referência, o torque será positivo; caso contrário, será negativo.

**Exercício 1.8.** Uma barra homogênea de 12 kg está em equilíbrio estático. Um extremo dela está apoiada em uma parede rugosa e o outro está amarrado a

uma corda como ilustrado na figura 2. (i) Encontre o valor da tensão na corda. (ii) Encontre o valor da força de atrito sobre a barra devido à parede.

*Dica:* Considere o ponto de apoio da barra na parede como o ponto de referência para o cálculo de torques. Com isso, encontre o valor da tensão na corda.

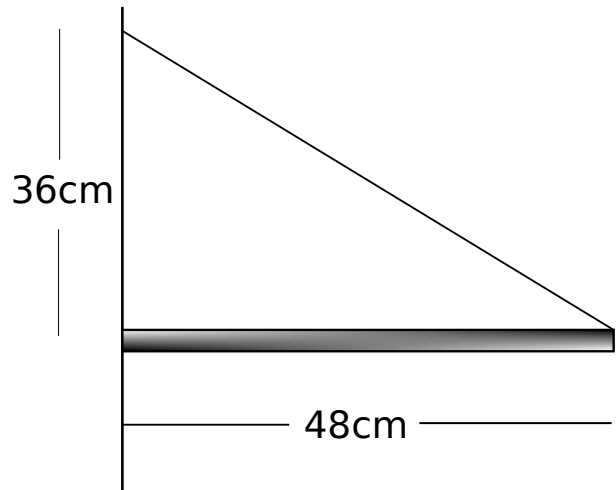


Figura 2: Barra homogênea em equilíbrio estático.

**Exercício 1.9.** Uma escada homogênea de 8 m de comprimento e 5 kg de massa é apoiada em uma parede vertical lisa fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com o chão. Se uma pessoa de 70 kg está sobre a escada e ela se encontra em equilíbrio estático, determine o valor da força de atrito sobre a base da escada quando a pessoa andou na escada (i) 4 m e (ii) 6 m.

*Dica:* Usando a condição de equilíbrio  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ , obtenha que o valor da força de atrito é igual à força normal devido à parede. Use a condição  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$  para encontrar o valor dessa força normal, tomando como ponto de referência para o cálculo de torques o ponto mais baixo da escada.

**Exercício 1.10.** Uma roda homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  se encontra atascada devido a um desnível do chão. Qual deve ser o valor mínimo de uma força  $\vec{F}$  horizontal aplicada no centro de massa da roda para que a ela comece a se mover? Esse valor mínimo é menor se a força é aplicada no ponto mais alto da roda?

*Dica:* Se a bola está prestes a se mover, a força normal devido ao chão é nula. Use a condição de equilíbrio  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$  considerando o ponto mais alto do desnível como ponto de referência para o cálculo de torques.

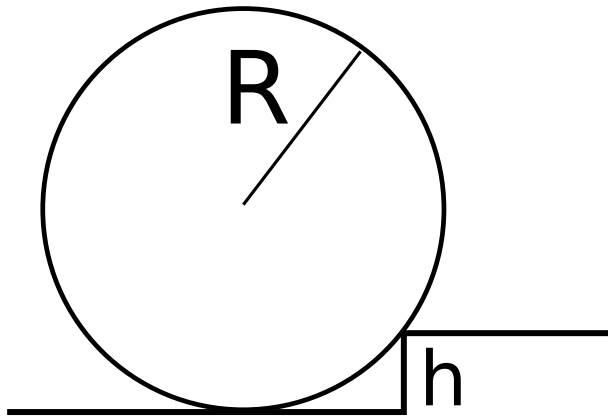


Figura 3: Roda atascada devido a um desnível do chão.

**Exercício 1.11.** Quando temos um bloco homogêneo na borda de uma mesa e queremos que ele esteja em equilíbrio estático, o centro de massa do bloco deve se encontrar dentro da mesa. Considere agora dois blocos homogêneos de comprimento  $l$ . (i) Determine as condições para que ao se colocar um bloco sobre o outro na borda da mesa eles estejam em equilíbrio estático. (ii) Determine a distância máxima entre o extremo da mesa ao extremo do bloco superior.

*Dica:* Se  $x_1$  e  $x_2$  são as posições horizontais dos centros de massa dos blocos em relação ao bordo da mesa (origem), deve-se ter  $x_1 \leq 0$ ,  $x_2 \leq l/2 + x_1$  e  $x_1 + x_2 \leq 0$ . Para maximizar a distância entre o extremo da mesa e o extremo do bloco 2, nas condições anteriores devemos considerar  $x_2 = l/2 + x_1$  e  $x_1 + x_2 = 0$ .

**Exercício 1.12.** No espírito do exercício anterior, considere agora três blocos homogêneos de comprimento  $l$  e determine a distância máxima entre o extremo da mesa ao extremo do bloco superior. Generalizando seu resultado, infira que ao empilhar  $n$  blocos, a distância máxima entre o extremo da mesa e o extremo do bloco superior é dada por

$$d = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Mostre que usando 4 blocos vamos ter  $d > l$ .

*Dica:* Primeiramente considere os dois blocos de cima como um bloco só e encontre as posições dos centros de massa desse bloco grande e do bloco de baixo. Logo, use o resultado do exercício anterior para colocar os dois blocos de cima de tal forma que  $d$  tenha o maior valor possível.

## 2 Gravitação newtoniana

Estudando o movimento da Lua e dos planetas, Newton concluiu que existe uma força atrativa entre dois corpos quaisquer, chamada de **força gravitacional**. Mais precisamente, ele encontrou a seguinte expressão para o valor da força gravitacional entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  separadas por uma distância  $r$ :

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

onde  $G$  é uma constante chamada de **constante gravitacional**. Sobre cada partícula atua uma força de módulo  $F_g$  que aponta na direção da outra partícula, ou seja, as partículas se atraem. Dessa maneira, se as partículas estão nas posições  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , a força gravitacional sobre a partícula 1 devido à partícula 2 é dada vetorialmente por

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

e a força sobre a partícula 2 devido à partícula 1 é

$$\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

O valor da constante gravitacional  $G$  pode ser encontrado experimentalmente. Quase 100 anos depois de Newton publicar sua lei da gravitação (junto com as três leis de Newton), Cavendish conseguiu medir o valor de  $G$  usando uma balança de torção (ver livro). O valor que ele encontrou estava próximo do valor atualmente aceito, que é

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}.$$

Como toda a força, as forças gravitacionais obedecem o princípio de superposição. Por exemplo, se temos três partículas, sobre cada partícula atuarão duas forças gravitacionais devido às duas partículas restantes. Logo, se as partículas tem massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , a força gravitacional resultante sobre a partícula 1 será

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ &= \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1). \end{aligned}$$

Consideremos uma partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  sobre a qual atua uma força gravitacional devido a uma partícula de massa

$M$  que se encontra na origem do nosso sistema de coordenadas. Essa força gravitacional está dada por

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}.$$

Essa força é conservativa pois ela pode ser derivada a partir de uma energia potencial. De fato, se definirmos a **energia potencial gravitacional** da partícula de massa  $m$  por

$$V_g = -\frac{GMm}{r}, \quad (10)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= -\frac{GMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{GMmx}{r^3}. \end{aligned}$$

Analogamente vamos ter que

$$\frac{\partial V_g}{\partial y} = -\frac{GMmy}{r^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_g}{\partial z} = -\frac{GMmz}{r^3}.$$

Portanto, notamos que

$$-\left( \frac{\partial V_g}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V_g}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V_g}{\partial z} \hat{k} \right) = \vec{F}_g.$$

O vetor que está entre parêntesis no lado esquerdo dessa equação é chamado de **gradiente** de  $V_g$  e é usualmente denotado em cálculo por  $\nabla V_g$ . Assim, temos que

$$\vec{F}_g = -\nabla V_g. \quad (11)$$

A Eq. (11) nos diz que, sabendo a energia potencial de uma partícula de massa  $m$  devido a uma outra partícula, podemos encontrar o módulo e a direção da força gravitacional aplicada sobre ela. Se temos três partículas de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  nas posições  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_3$ , sabemos que as forças gravitacionais sobre a partícula 1 devido às outras partículas se somam. Logo, podemos inferir que a energia potencial gravitacional da partícula 1 nesse caso vai ser dada por

$$V_g = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}.$$

Podemos generalizar esse fato para um número arbitrário de partículas. Além disso, podemos inferir que a energia potencial gravitacional de uma

partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  devido a um corpo rígido é dado por

$$V_g = \int -\frac{Gm}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dM,$$

onde a integral é sobre todos os pontos do corpo rígido, cujas posições são dadas pelo vetor  $\vec{r}'$ .

**Exercício 2.1.** Considere uma partícula de massa  $m$  e um arame circular homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  como ilustrado na figura 4). Mostre que a energia potencial gravitacional da partícula é dada por

$$V_g = -\frac{GMm}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

*Dica:* Como o arame é homogêneo, podemos definir a densidade de massa  $\lambda = M/2\pi R$ . Um pedaço do arame de tamanho  $\Delta s$  tem massa  $\Delta M = \lambda \Delta s$ . Por geometria sabe-se que  $\Delta s = R \Delta \phi$ . Logo,  $\Delta M = \lambda R \Delta \phi$ . Por outro lado, a distância entre um pedaço do arame e a partícula é  $\sqrt{R^2 + z^2}$ . Usando esses fatos conclua que a energia potencial gravitacional da partícula é dada por

$$V_g = -\int_0^{2\pi} \frac{Gm}{\sqrt{R^2 + z^2}} \lambda R d\phi.$$

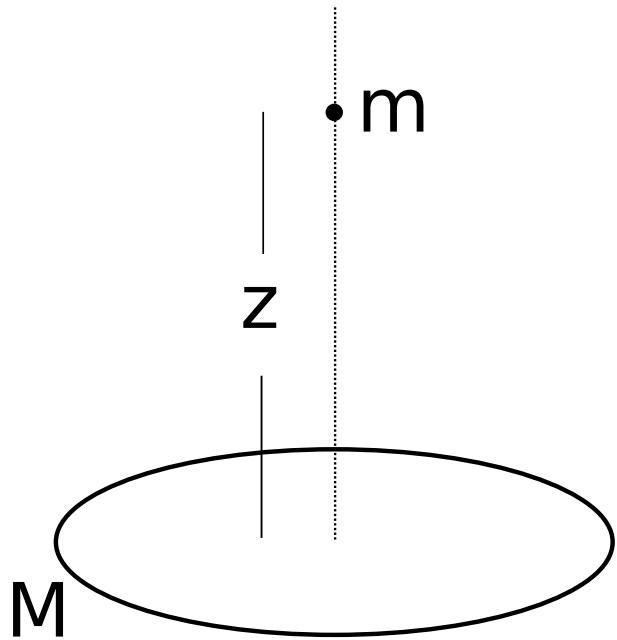


Figura 4: Partícula de massa  $m$  sobre um arame circular homogêneo de massa  $M$ .

**Exercício 2.2.** Considere uma partícula de massa  $m$  e uma casca esférica homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  como ilustrado na figura 5). Mostre que a energia potencial gravitacional da partícula é dada por

$$V_g = \begin{cases} -\frac{GMm}{z} & \text{se } z \geq R \\ -\frac{GMm}{R} & \text{se } z < R. \end{cases}$$

*Dica:* Defina a densidade de massa  $\sigma = M/4\pi R^2$ . Considere uma fita circular de raio  $R \sin \theta$  e largura  $R\Delta\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo que eixo vertical e o raio da casca fazem quando ele aponta para um ponto da fita. A massa dessa fita é  $\Delta M = \sigma(2\pi R \sin \theta)R\Delta\theta$ . A distância entre o centro da fita e a partícula é  $z - R \cos \theta$ . Usando o resultado do exercício anterior, mostre que a energia potencial gravitacional da partícula é dada por

$$V_g = - \int_0^\pi \frac{2\pi G m \sigma R^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta}} d\theta.$$

Use a mudança de variável  $u = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta$  na integral para chegar na expressão

$$V_g = -\frac{\pi G m \sigma R}{z} \int_{R^2+z^2-2Rz}^{R^2+z^2+2Rz} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

**Exercício 2.3.** Considere agora que a figura 5 se refere a uma esfera sólida de massa  $M$  e raio  $R$ . Mostre que a energia potencial gravitacional da partícula é dada por

$$V_g = \begin{cases} -\frac{GMm}{z} & \text{se } z \geq R \\ 2\pi G m \sigma \left(\frac{z^2}{3} - R^2\right) & \text{se } z < R. \end{cases}$$

*Dica:* Defina a densidade de massa  $\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$ . Considere uma casca esférica de raio  $r$  e espessura  $\Delta r$ . A massa dessa casca é  $\Delta M = \rho(4\pi r^2)\Delta r$ . Usando o resultado do exercício anterior, mostre que, se  $z \geq R$ ,

$$V_g = - \int_0^R \frac{4\pi G m \sigma r^2}{z} dr;$$

se  $z < R$ ,

$$V_g = - \int_0^z \frac{4\pi G m \sigma r^2}{z} dr - \int_z^R \frac{4\pi G m \sigma r^2}{r} dr.$$

**Exercício 2.4.** Determine o módulo e a direção da força gravitacional sobre uma partícula de massa  $m$  na situação dada no exercício 2.2 quando  $z \geq R$

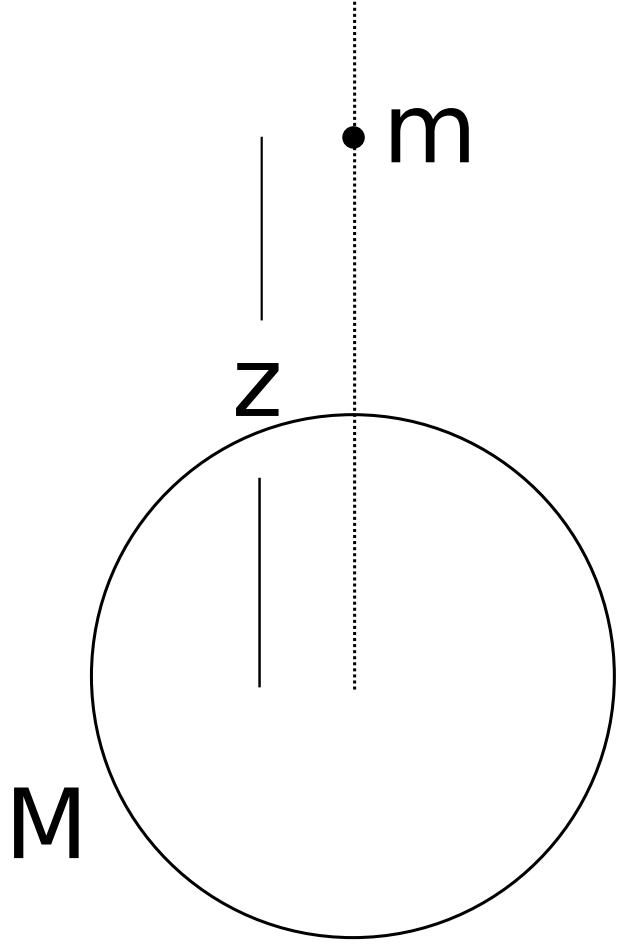


Figura 5: Partícula de massa  $m$  sobre uma casca esférica homogênea de massa  $M$ .

e quando  $z < R$ . Repita o mesmo para o caso do exercício 2.3. Mostre que seus resultados podem ser escritos de forma unificada como

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_{\text{env}}m}{z^2} \hat{k},$$

onde  $M_{\text{env}}$  é a massa do corpo esférico que está envolta por uma esfera de raio  $z$ .

Nos exercícios 2.2, 2.3 e 2.4 consideramos que a partícula se encontrava em um ponto de uma linha vertical. No entanto, devido à simetria de um corpo esférico, os resultados desses exercícios continuam valendo da mesma forma desde que escolhamos o eixo  $z$  como a semirreta que sai do centro do corpo esférico e passa pela partícula.

Dos exercícios 2.2, 2.3 e 2.4 concluímos que para obter a energia potencial ou a força gravitacional de um corpo qualquer localizado fora de um outro corpo esférico homogêneo podemos considerar o segundo como uma partícula localizada no seu centro de massa. Em particular, se consideramos a Terra

como uma esfera sólida homogênea, a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa  $m$  que se encontra a uma altura  $h$  da superfície da Terra será

$$V_g = -\frac{GM_T m}{R_T + h},$$

onde  $M_T$  e  $R_T$  são respectivamente a massa e o raio da Terra. Também podemos obter imediatamente que o valor da força gravitacional sobre a partícula é

$$F_g = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}, \quad (12)$$

a qual aponta para o centro da Terra.

Considerando a Terra como uma esfera, o raio dela pode ser medido experimentalmente de várias formas. Nós vamos considerar que o raio da Terra é

$$R_T = 6380 \text{ km}.$$

Se uma partícula de massa  $m$  se encontra a uma altura  $h \ll R_T$  em relação à superfície da Terra, a força gravitacional sobre a partícula é chamada de **peso**. Nesse caso, o peso da partícula segundo a Eq. (12) vai ser aproximadamente

$$F_g = \frac{GM_T m}{R_T^2}.$$

Por outro lado, nessa aproximação sabemos que  $F_g = mg$ , onde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Logo, a partir dessas relações podemos obter o valor da massa da Terra. De fato, vamos obter que  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ . O valor atualmente aceito para a massa da Terra é

$$M_T = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

**Exercício 2.5.** Determine a velocidade mínima que deve ser proporcionada a uma partícula de massa  $m$ , inicialmente sobre a superfície da Terra, para que ela se afaste da Terra e nunca volte. Essa velocidade é chamada de **velocidade de escape**.

*Dica:* A energia inicial da partícula é

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T}.$$

A energia final da partícula, em uma posição infinitamente distante da Terra, é  $E_f = 0$  (velocidade final nula).

**Exercício 2.6.** Uma partícula de massa  $m$  se move uniformemente em uma órbita circular de raio  $r$  em

relação ao centro da Terra. Mostre que o módulo da velocidade da partícula deve ser dado por

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$

Definindo o **período**  $T$  como o tempo que a partícula demora em dar uma volta na órbita, mostre que

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}.$$

*Dica:* A força gravitacional sobre a partícula é a força centrípeta. Logo,

$$\frac{GM_T m}{r^2} = ma_c,$$

onde  $a_c$  é a aceleração centrípeta.

**Exercício 2.7.** Encontre qual é a velocidade que deve ser proporcionada a uma partícula de massa  $m$ , inicialmente na superfície da Terra, para que ela se mova em uma órbita circular de raio  $r$  em relação ao centro da Terra.

*Dica:* Use o teorema da conservação da energia junto com a velocidade obtida no exercício anterior.

Quase 80 anos antes de Newton formular a lei da gravitação universal, Kepler, baseado em dados observacionais sobre o movimento dos planetas, obteve as seguintes leis empíricas:

1. Os planetas se movem em órbitas elípticas ao redor do Sol, o qual está localizado em um dos focos da elipse (ver figura 6).
2. O vetor posição de um planeta em relação ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais (ver figura 7).
3. O período de um planeta é diretamente proporcional ao semi-eixo maior da sua órbita elíptica elevado ao expoente  $3/2$ .

Tendo formulado a lei da gravitação universal, Newton descobriu que a partir dessa lei podem ser deduzidas as três leis de Kepler. As deduções da primeira e da terceira leis usam manipulações de equações diferenciais que estão fora do escopo do curso. A dedução da segunda lei é mais elementar e veremos que é consequência da conservação do momento angular.



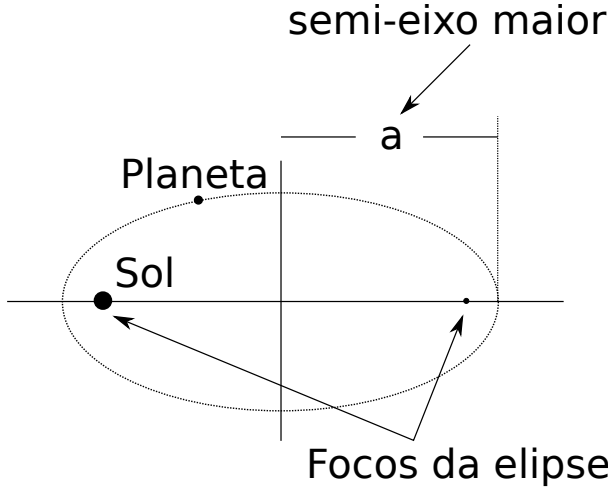


Figura 6: Primeira lei de Kepler. Uma elipse tem a propriedade de que, para qualquer ponto dela, a soma das distâncias entre o ponto e os focos é uma constante.

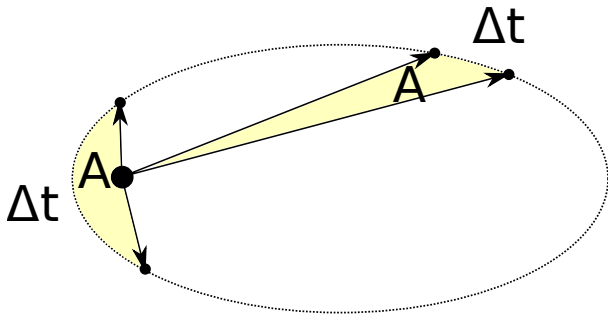


Figura 7: Segunda lei de Kepler.

Consideremos um planeta de massa  $m$  a uma distância  $r$  do centro do Sol. Se  $\vec{F}_g$  é a força gravitacional sobre o planeta devido ao Sol, então o vetor  $\vec{F}_g$  é proporcional ao vetor  $-\vec{r}$ . Dessa maneira, o torque de  $\vec{F}_g$  vai ser nulo, pois é o produto vetorial de vetores paralelos. Se  $\vec{F}_g$  é a única força que atua sobre a planeta, segue então da Eq. (3) que o momento angular do planeta  $\vec{L} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$  se conserva, ou seja,  $\vec{L}$  é um vetor constante (módulo e direção constantes). Em particular, isso implica que o vetor  $\vec{L}$  vai ser sempre perpendicular aos vetores  $\vec{r}$  e  $\dot{\vec{r}}$  e, por conseguinte, o movimento do planeta é realizado em um plano que é perpendicular a  $\vec{L}$ . Assim, podemos considerar convenientemente que o plano do movimento é o plano  $xy$  (ver figura 8).

Da figura 8 vemos que  $\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$ . Logo,

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \hat{i} + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \hat{j}$$

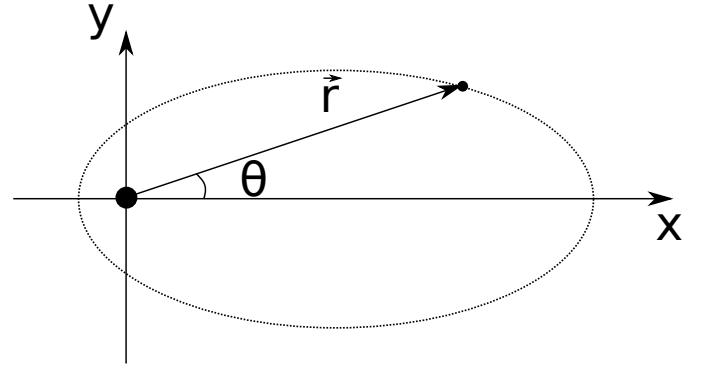


Figura 8: O movimento do planeta é realizado no plano  $xy$ .

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta & \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m[r \cos \theta(\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \\ &\quad - r \sin \theta(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)] \hat{k} \\ &= mr^2 \dot{\theta} \hat{k}. \end{aligned}$$

Como esse vetor é constante, seu módulo  $L = mr^2 \dot{\theta}$  é uma constante. Por outro lado, sabe-se dos cursos de cálculo que a área da região limitada pela elipse e os vetores  $\vec{r}(\theta_1)$  e  $\vec{r}(\theta_2)$  é dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta.$$

Se  $\theta_1 = \theta(t_1)$  e  $\theta_2 = \theta(t_2)$ , mudando a variável de integração para  $t$ , temos que

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{L}{m} dt$$

Logo, como  $L$  é constante, temos que

$$A = \frac{L}{2m} (t_2 - t_1).$$

Dessa maneira fica provada a segunda lei de Kepler, pois a área varrida pelo vetor posição do planeta entre dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ , só depende da diferença  $t_2 - t_1$  e não dos instantes individuais.

Usando a lei da gravitação de Newton, a terceira lei de Kepler pode ser formulada mais precisamente pela seguinte equação:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_S}},$$

onde  $T$  é o período do planeta,  $a$  é o comprimento do semi-eixo maior da sua órbita e  $M_S = 1,99 \times 10^{30}$  kg é a massa do Sol.

**Exercício 2.8.** O cometa Halley se move em uma órbita elíptica ao redor do Sol. No instante em que o cometa está mais próximo do Sol (**perihélio**), a distância entre o cometa e o Sol é de  $8,75 \times 10^7$  km. No instante em que o cometa está mais afastado do Sol (**afélio**), a distância entre o cometa e o Sol é de  $5,26 \times 10^9$  km. Encontre o comprimento do semi-eixo maior da órbita e o período do cometa.

As leis de Kepler, na forma em que foram anunciadas acima, valem sob a condição de que a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas. De fato, a massa do Sol é maior do que a soma das massas dos planetas. Nesse caso, o Sol fica praticamente em repouso enquanto os planetas se movem. No entanto, em um sistema solar onde um planeta tenha uma massa comparável com a do Sol, o Sol também se move. Nesse caso, ambos corpos se movem em órbitas elípticas ao redor do centro de massa. Omitindo a demonstração, afirmamos que as leis de Kepler continuam valendo para o movimento relativo. O único detalhe é que a terceira lei de Kepler é enunciada na seguinte forma:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(M_S + m)}}$$

onde  $m$  é a massa do planeta.

### 3 Movimento periódico

Uma partícula realiza um movimento **periódico** se para qualquer instante  $t$  seus vetores posição e velocidade satisfazem as condições

$$\vec{r}(t + c) = \vec{r}(t) \quad \text{e} \quad \vec{v}(t + c) = \vec{v}(t) \quad (13)$$

para algum número  $c \neq 0$ . O menor número  $c \neq 0$  para o qual as Eqs. (13) são satisfeitas é chamado de **período** da partícula (ou do movimento) e é usualmente denotado por  $T$ . A unidade de período no SI é o segundo (s).

Define-se a **frequência** do movimento como o inverso do período, ou seja,  $f = 1/T$ . A unidade de frequência no SI é o **Hertz** (Hz).

Exemplos de movimentos periódicos são os seguintes:

1. O movimento circular uniforme de uma partícula.
2. O movimento de um planeta em uma órbita ao redor do Sol.
3. O movimento horizontal de um bloco, acoplado a uma mola fixa sobre uma superfície lisa.
4. O movimento de uma partícula suspensa por uma corda unicamente sob o efeito da gravidade da Terra.
5. O movimento de um corpo rígido suspenso a partir de um ponto unicamente sob o efeito da gravidade da Terra.

Vamos estudar o movimento oscilatório (vaivém) de um bloco acoplado a uma mola fixa de massa desprezível, como mostrado na figura 9. A posição de equilíbrio indicada na figura representa a posição do bloco quando a mola não está deformada (não está esticada nem comprimida). Quando o bloco está à direita da posição de equilíbrio, ele estica a mola e, por conseguinte, a mola exerce uma força sobre o bloco orientada para a esquerda. Quando o bloco está à esquerda da posição de equilíbrio, ele comprime a mola e devido a isso a mola exerce uma força sobre o bloco orientada para a direita. Em ambos os casos a força aplicada pela mola tenta restituir a forma da mola, por isso às vezes essa força é chamada de **força de restituição**.

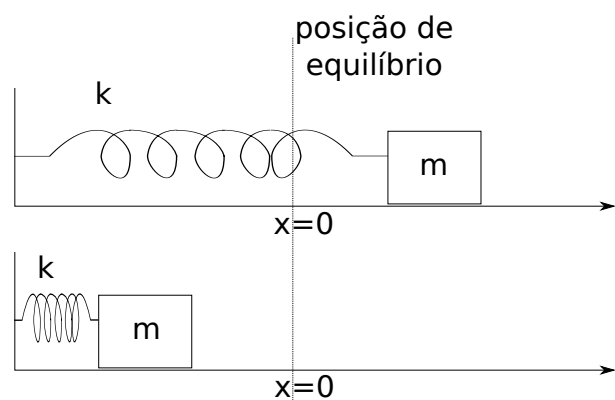


Figura 9: Movimento oscilatório de um bloco acoplado a uma mola fixa.

Se o bloco está em uma posição  $x$ , segundo a lei de Hooke, a força de restituição sobre o bloco é dada por  $F = -kx$ . Essa expressão vale quando o bloco estica a mola ( $x > 0$ ) assim como quando o bloco comprime a mola ( $x < 0$ ). Como a força de

restituição é a força resultante sobre o bloco, pela segunda lei de Newton, temos que

$$-kx = ma,$$

onde  $a$  é a aceleração do bloco. Como  $a = \dot{v}$  e  $v = \dot{x}$ , segue que  $a = \ddot{x}$  (segunda derivada de  $x$  em relação a  $t$ ). Logo, obtemos a equação diferencial

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (14)$$

que é chamada de equação do **oscilador harmônico simples**. Nesses termos, o bloco da figura 9 é chamado de um **oscilador harmônico**.

Existem vários métodos para resolver a Eq. (14) que podem ser estudados nos cursos de cálculo. No entanto, é possível obter-se a forma de uma solução dessa equação de uma maneira simples relacionando o movimento do oscilador harmônico com o movimento circular uniforme de uma partícula.

Consideremos uma partícula que descreve uma trajetória circular de raio  $A$  e se move uniformemente com velocidade  $v$ , como mostrado na figura 10. Nota-se dessa figura que a sombra da partícula realiza um movimento horizontal oscilatório. Se  $x = 0$  é a posição da origem do círculo e a partícula se encontra na posição indicada na figura, vemos que sua sombra estará localizada na posição

$$x = A \cos \theta. \quad (15)$$

Como a partícula se move com velocidade angular constante  $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ , segue que

$$\theta = \omega t + \phi, \quad (16)$$

onde  $\phi = \theta(0)$  é o ângulo de partida. Logo, segue das Eqs. (15) e (16) que

$$x = A \cos(\omega t + \phi). \quad (17)$$

Pode-se perceber que o movimento descrito pela sombra da partícula da figura 10 é similar ao movimento do oscilador harmônico da figura 9. Como o último é descrito pela Eq. (14), podemos procurar uma solução dessa equação da forma dada na Eq. (17). Substituindo então (17) em (14) temos que

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}A \cos(\omega t + \phi) = 0,$$

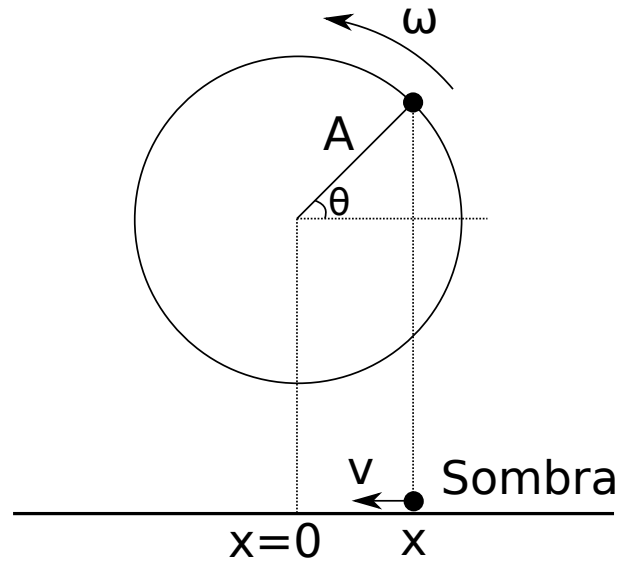
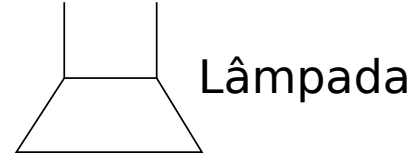


Figura 10: Relação entre movimento circular uniforme e movimento de um oscilador harmônico.

o qual é verdadeiro para quaisquer valores de  $x$  e  $t$  se, e somente se,  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Portanto, uma solução da equação do oscilador harmônico (14) é

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad \text{com} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (18)$$

De acordo com a teoria de equações diferenciais ordinárias, a solução dada na Eq. (18) é a chamada **solução geral** da Eq. (14), pois depende de duas constantes  $A$  e  $\phi$  a serem determinadas. Como veremos depois, essas constantes podem ser obtidas a partir do conhecimento da posição e da velocidade iniciais do bloco, as quais são chamadas de **condições iniciais**.

Se a Eq. (18) é a posição de um oscilador harmônico, sua velocidade é dada por

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi). \quad (19)$$

Se no instante inicial o oscilador está na posição  $x_0$  e tem velocidade  $v_0$ , segue das Eqs. (18) e (19) que  $x_0 = A \cos \phi$  e  $v_0 = -A\omega \sin \phi$ , ou, escrito de outra forma,

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{e} \quad \frac{v_0}{\omega} = -A \sin \phi. \quad (20)$$

Elevando essas equações ao quadrado e somando-as, obtemos que

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2.$$

Portanto,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (21)$$

Vemos que  $A \geq 0$  e que a igualdade acontece se  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$  (nesse caso o bloco não se move e fica na posição de equilíbrio). Logo, se  $A > 0$ , segue da Eq. (20) que

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A}.$$

A Eq. (18) junto com as condições iniciais contém toda a informação sobre o movimento de um oscilador harmônico. Em particular, deve ser possível verificar a partir daqui que o movimento do oscilador é limitado e periódico. Com efeito, segue da Eq. (18) que  $|x| \leq A$  para qualquer instante  $t$ , pois  $-1 \leq \cos z \leq 1$  para qualquer  $z$ . Logo, a posição do oscilador só pode assumir valores no intervalo  $[-A, A]$ . Por essa razão, a constante  $A$  é chamada de **amplitude** do oscilador harmônico (maior valor para a posição do oscilador). Por outro lado, as funções cosseno e seno tem período  $2\pi$  (ver figura 11), ou seja, o menor valor de  $p$  tal que  $\cos(z + p) = \cos z$  e  $\sin(z + p) = \sin z$  para qualquer  $z$  é  $p = 2\pi$ . Logo, segue da Eq. (18) que, para qualquer  $t$ ,

$$\begin{aligned} x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) &= A \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] \\ &= A \cos(\omega t + \phi + 2\pi) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= x(t). \end{aligned}$$

De forma análoga vamos podemos verificar que  $v(t + 2\pi/\omega) = v(t)$  para qualquer  $t$ . Logo, o oscilador harmônico realiza um movimento periódico com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (22)$$

O movimento que o oscilador realiza em um período é chamado de uma única **oscilação** (ver figura 12). Lembrando que a frequência é o inverso do período, segue que a frequência do oscilador é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (23)$$

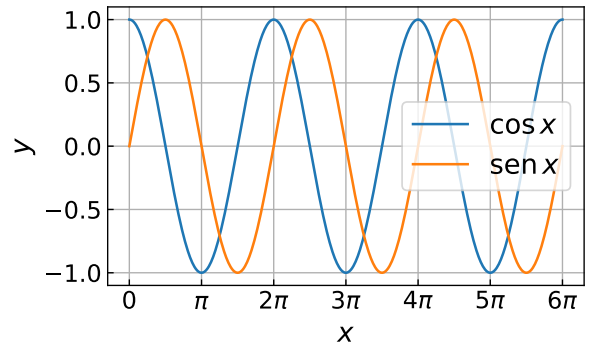


Figura 11: Gráficos das funções cosseno e seno.

A frequência do oscilador nos dá o número de oscilações que o oscilador realiza por unidade de tempo. Por outro lado, vemos da Eq. (23) que  $\omega = 2\pi f$ . Se interpretamos  $2\pi$  como o ângulo associado a uma única oscilação,  $\omega$  nos daria a variação do ângulo associado por unidade de tempo. Isso justifica chamar a grandeza  $\omega$  de **frequência angular** do oscilador harmônico.

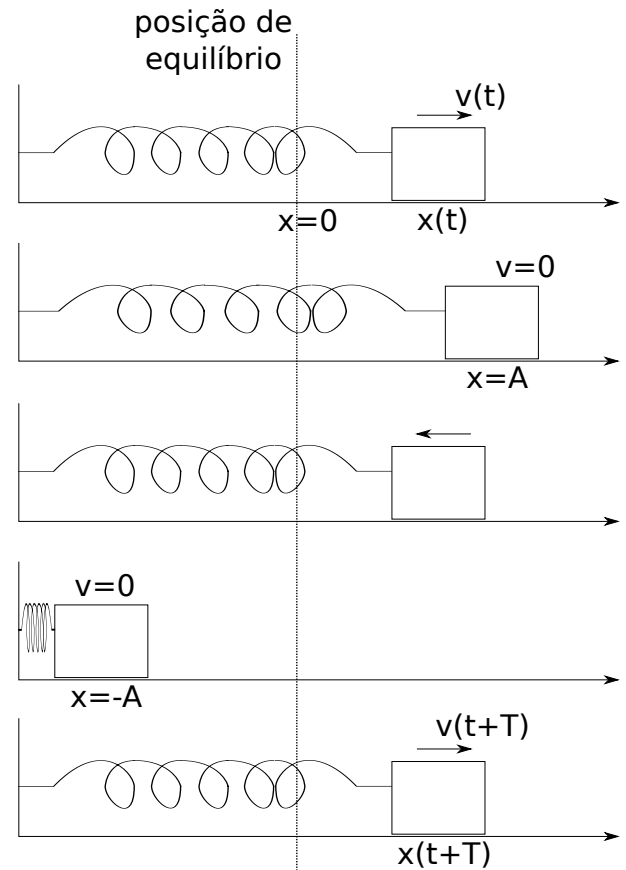


Figura 12: Ilustração de uma única oscilação.

A Eq. (22) revela que o período de um oscilador harmônico é diretamente proporcional à massa do oscilador elevada ao expoente  $1/2$ . Isso faz sentido,

pois, se o oscilador tem uma massa grande, ele vai oferecer uma grande resistência a se mover e assim o tempo que demorará para realizar uma única oscilação será também grande. Por outro lado, a Eq. (22) também expressa o fato de que o período do oscilador é inversamente proporcional à constante elástica da mola elevada ao expoente  $1/2$ . Isso também faz sentido, pois uma constante elástica grande favorece o movimento do oscilador.

As Eqs. (22) e (23) nos dizem que o período e a frequência (a frequência angular também) do oscilador harmônico não dependem das condições iniciais, pois nessas equações não aparecem as constantes  $A$  e  $\phi$ . Isso quer dizer que, dados um oscilador de massa  $m$  e uma mola de constante  $k$ , não é possível mudar o tempo que o oscilador demora em realizar uma única oscilação mudando a posição e a velocidade iniciais do oscilador. No entanto, deve-se ressaltar que a amplitude do oscilador depende das condições iniciais, como fica evidente da Eq. (21).

**Exercício 3.1.** Um bloco de 5 kg de massa está acoplado a uma mola fixa de constante elástica igual a 200 N/m. Se inicialmente o bloco está esticando a mola e é liberado do repouso a uma distância de 0,5 m em relação à posição de equilíbrio da mola, encontre o período, a frequência e a frequência angular do bloco. Determine também a expressão da posição do bloco para qualquer instante de tempo  $t$ .

**Exercício 3.2.** Considere o bloco e a mola do exercício anterior, mas agora suponha que no instante inicial o bloco está comprimindo a mola na posição  $x_0 = -0,2$  m e tem velocidade  $v_0 = 2$  m/s. Encontre o período, a frequência, a frequência angular e a amplitude do bloco.

As forças que atuam sobre um oscilador harmônico são conservativas e, por conseguinte, a energia total se conserva. Se a massa do oscilador é  $m$ , a constante da mola é  $k$ , a posição do oscilador em relação à posição de equilíbrio é  $x$  e a velocidade do oscilador é  $v$ , então a energia total do oscilador em um instante qualquer é dada por

$$E_T = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

onde o segundo termo da direita corresponde à energia potencial elástica. Como  $x = A \cos(\omega t + \phi)$  e

$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$ , com  $\omega = \sqrt{k/m}$ , temos que

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{kA^2}{2} [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_T = \frac{kA^2}{2},$$

que é uma constante.

**Exercício 3.3.** Um bloco de 2 kg de massa está acoplado a uma mola fixa de constante elástica igual a 100 N/m. Se inicialmente o bloco está esticando a mola e é liberado do repouso a uma distância de 0,2 m em relação à posição de equilíbrio da mola, determine as velocidades que o bloco pode ter quando está nas posições  $x = 0$  m e  $x = 0,1$  m.

**Exercício 3.4.** Um bloco de massa  $M$  está acoplado a uma mola fixa de constante elástica  $k$ . Suponha que o bloco oscila, tem amplitude  $A_1$  e a velocidade do bloco quando passa pela posição de equilíbrio tem módulo igual a  $v_1$ . Se no instante em que o bloco passa pela posição de equilíbrio, uma massinha de massa  $m$ , inicialmente em repouso se gruda ao bloco, determine o novo período e a nova amplitude do movimento.

*Dica:* Para encontrar a velocidade  $v_2$  que o sistema bloco + massinha tem depois da colisão entre os dois corpos, use conservação do momento linear total.

**Exercício 3.5.** Considere um bloco de massa  $m$  unido ao extremo de uma mola de constante elástica  $k$  que está na posição vertical e cujo outro extremo está fixo no teto. (i) Se  $y = 0$  corresponde à posição do bloco quando ele está em equilíbrio (força resultante nula), encontre a posição do bloco para a qual a mola não está deformada. (ii) Aplique a segunda lei de Newton sobre o bloco e mostre que a equação diferencial que descreve o movimento do bloco é igual à equação do oscilador harmônico simples. Daqui conclua que o movimento do bloco é periódico e que sua frequência angular é  $\sqrt{k/m}$ .

**Exercício 3.6.** Uma balança de açougueiro consiste em uma plataforma de 0,2 kg suspensa por uma mola de massa desprezível de constante elástica  $k = 400$  N/m. Em um determinado instante um pedaço de carne de 2,2 kg é largado do repouso a

uma altura de 0,4 m em relação à plataforma. Depois que a carne colide com a plataforma, os dois corpos ficam grudados e oscilam juntos. Determine o período e a amplitude do movimento.

**Exercício 3.7.** Um **pêndulo simples** é composto por uma partícula de massa  $m$  suspensa por uma corda sem massa de comprimento  $l$ , a qual tem um dos seus extremos fixo (no teto, por exemplo). Usando a segunda lei de Newton, mostre que a equação diferencial que descreve o movimento da partícula é

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

onde  $\theta$  é o ângulo que a corda faz com a vertical. Se  $\theta$  é pequeno ( $\leq 15^\circ$ ), podemos usar a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$ . Nesse caso, a equação diferencial anterior pode ser escrita de forma aproximada como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Conclua daqui que o movimento da partícula é oscilatório e periódico. Além disso, mostre que o período do movimento é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

o qual não depende da massa da partícula e nem das condições iniciais.

**Exercício 3.8.** Um **pêndulo físico** consiste em um corpo rígido de massa  $M$  e momento de inércia  $I$  suspenso por um ponto  $O$  do corpo, diferente do centro de massa. Se  $\theta$  é o ângulo que o segmento que une os pontos  $O$  e o centro de massa faz com a vertical, usando as equações  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}$  e  $L = I\dot{\theta}$ , mostre que a equação que descreve o movimento do pêndulo físico é

$$\ddot{\theta} + \frac{MgR}{I} \sin \theta = 0,$$

onde  $R$  é o comprimento de tal segmento. Mostre que se  $\theta$  é pequeno, o movimento do pêndulo físico é oscilatório e aproximadamente periódico, com período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgR}}.$$

**Exercício 3.9.** Considere uma barra homogênea de comprimento  $l$  suspensa por um dos seus extremos. Se a barra é liberada do repouso fazendo um ângulo pequeno com a vertical, mostre que o movimento da barra é oscilatório e periódico, com período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

Em situações do dia a dia, quando um corpo realiza um movimento oscilatório, observa-se que a amplitude do movimento diminui com o tempo. Isso se deve à presença de forças de atrito ou forças de resistência (forças dissipativas) que atuam sobre o corpo. Em determinados casos, por exemplo quando o corpo está embebido em um fluido (por exemplo, ar, óleo, etc.) a força de atrito sobre o corpo tem módulo proporcional à velocidade do corpo. Consideremos, por exemplo, um bloco de massa  $m$ , sobre uma mesa lisa, acoplado a um dos extremos de uma mola sem massa de constante elástica  $k$ , cujo outro extremo está fixo. Suponhamos que o ar aplica sobre o bloco uma força de resistência  $-bv$  ( $b > 0$ ), onde  $v$  é a velocidade do bloco. Logo, aplicando a segunda lei de Newton, vamos obter que

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (24)$$

Vemos que a única diferença entre essa equação e a do oscilador harmônico simples é o termo  $b\dot{x}/m$ . Pode-se provar, usando a teoria de equações diferenciais que, se  $b < 2\sqrt{km}$ , a solução da Eq. (24) é

$$x = Ae^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \quad (25)$$

onde  $A$  e  $\phi$  são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (26)$$

A Eq. (25) nos diz que, no caso em que a força de atrito é pouco intensa ( $b < 2\sqrt{km}$ ), o bloco realizará oscilações com amplitudes cada vez menores. Mais precisamente a amplitude do bloco decairá de forma exponencial, devido ao fator  $e^{-bt/2m}$  na Eq. (25). Se incrementamos o valor de  $b$  de tal forma que tenhamos  $b = 2\sqrt{km}$ , vemos da Eq. (26) que  $\omega' = 0$  o que significa que o bloco não oscila mais e a posição do bloco vai rapidamente à posição de equilíbrio. A condição  $b = 2\sqrt{km}$  é chamada de **amortecimento**

**crítico.** Essa situação é a ideal para o funcionamento do amortecedor de um carro.

Se  $b > 2\sqrt{km}$ , a Eq. (25) não é mais solução da Eq. (24) devido a que, na Eq. (26),  $\omega'$  torna-se um número imaginário. Nesse caso, a teoria das equações diferenciais nos diz que a solução da Eq. (24) é da forma

$$x = Ae^{-a_1 t} + Be^{-a_2 t}, \quad (27)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes determinadas pelas condições iniciais e  $a_1$  e  $a_2$  são constantes determinadas por  $k, m$  e  $b$ . Segue da Eq. (27) que, similarmente ao caso do amortecimento crítico, o bloco não oscila. No entanto, a posição do bloco assume a posição de equilíbrio com uma rapidez menor do que no caso anterior. A condição  $k > 2\sqrt{km}$  é chamada de **superamortecimento**. Nessa direção, a condição  $k < 2\sqrt{km}$  é chamada de **subamortecimento**. A figura 13 ilustra a posição de um oscilador harmônico amortecido para cada instante de tempo nas três condições de amortecimento.

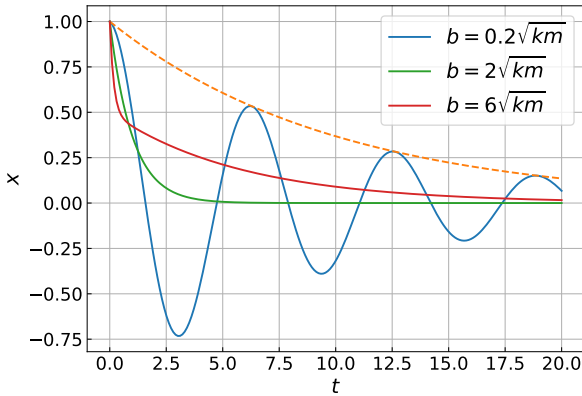


Figura 13: Gráfico da posição de um oscilador harmônico amortecido nos casos subamortecido ( $b = 0,2\sqrt{km}$ ), criticamente amortecido ( $b = 2\sqrt{km}$ ) e superamortecido ( $b = 6\sqrt{km}$ ).

Vejamos o que acontece com a energia total de um oscilador harmônico amortecido, descrito pela Eq. (24). A energia total em um instante qualquer é dada por

$$E_T = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Logo, a derivada da energia total em relação ao tempo é

$$\dot{E}_T = mv\dot{v} + kx\dot{x}.$$

Usando o fato de que  $v = \dot{x}$ , temos que

$$\dot{E}_T = \dot{x}(m\ddot{x} + kx).$$

Finalmente usando a Eq. (24) obtemos que

$$\dot{E}_T = -b\dot{x}^2 < 0,$$

o que quer dizer que a energia total diminui com o tempo, o qual é esperado devido à presença de forças dissipativas.

Para acabar com essa seção vamos considerar o caso em que uma força externa  $F$  é aplicada sobre um oscilador harmônico amortecido. Nesse caso, a Eq. (24) assume a forma

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}.$$

O caso mais interessante é quando o valor da força  $F$  oscila no tempo com uma frequência angular  $\omega_F$ , ou seja,  $F = F_0 \cos \omega_F t$ . Pode-se mostrar que nesse caso, a amplitude do oscilador é dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_F^2)^2 + b^2\omega_F^2}}.$$

Vemos daqui que a amplitude é máxima quando  $\omega_F = \sqrt{k/m}$ , e nesse caso,  $A = \frac{F_0}{b} \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Se  $b$  é pequeno (por exemplo, no caso de subamortecimento) o valor máximo da amplitude pode ser bastante grande e corresponde a um pico pronunciado no gráfico  $A$  versus  $\omega_F$ . Quando o sistema se encontra nessa situação extrema, dizemos que ocorreu **ressonância**.

## 4 Ondas mecânicas

Uma **onda mecânica** é uma perturbação que se desloca através de um material (uma corda, o ar, a água, etc.), chamado de **meio** de propagação da onda. Conforme a onda se propaga através do meio, as partículas do meio sofrem deslocamentos. Esses deslocamentos podem ser perpendiculares à direção de propagação da onda, como no caso de uma onda que se propaga através de uma corda tensionada, podem ser paralelos, como no caso do som que se propaga no ar, ou a combinação dos dois, como no caso de uma onda que se propaga através superfície de um líquido. No primeiro caso a onda é chamada de uma



**onda transversal** e no segundo de uma **onda longitudinal** (no último caso a onda tem uma componente transversal e outra longitudinal).

Antes de uma onda se propagar através de um meio, as partículas do meio não foram perturbadas ainda e se encontram em posições de equilíbrio. Quando a onda se propaga, as partículas do meio se deslocam e aparecem forças de restituição que tentam fazer as partículas do meio voltarem às suas respectivas posições de equilíbrio. Dessa maneira, as partículas do meio realizam movimentos oscilatórios. Deve-se ressaltar que as velocidades das partículas do meio são diferentes da velocidade de propagação da onda. Por outro lado, como o movimento das partículas do meio é oscilatório, uma onda não transporta matéria de uma região do meio para outra. No entanto, como partículas do meio que estavam inicialmente em repouso começam a oscilar (ganham energia) quando a onda passa, a onda transfere energia de uma região do meio para outra.

Quando um meio é perturbado produzindo uma única ondulação que se propaga através dele, a onda produzida é chamada às vezes de **pulso ondulatorio**. Por outro lado, se o meio é perturbado de forma contínua e periódica, a onda produzida é chamada de **onda periódica**. Nesse caso, conforme a onda se propaga, as partículas do meio realizam movimentos oscilatórios e periódicos que têm o mesmo período.

Um caso importante de onda periódica ocorre quando a onda faz as partículas do meio se comportarem como osciladores harmônicos simples que têm a mesma frequência e a mesma amplitude. Nesse caso, a onda é chamada de uma **onda senoidal**, pois tem a forma do gráfico das funções trigonométricas seno ou cosseno (ver figura 14). Os pontos onde as partículas do meio sofreram um deslocamento positivo (negativo) máximo devido a uma onda senoidal são chamados de **cristas (vales)**. O comprimento de onda de uma onda senoidal pode ser obtido então medindo a distância entre duas cristas (ou entre dois vales) consecutivos.

A distância que uma onda periódica percorre em um intervalo de tempo igual a um período é chamado de **comprimento de onda** e é usualmente denotado por  $\lambda$  (lê-se lambda). Conhecendo-se o comprimento de onda  $\lambda$  e o período  $T$  de uma onda periódica, a velocidade de propagação da onda pode ser encontrada pela relação

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f, \quad (28)$$

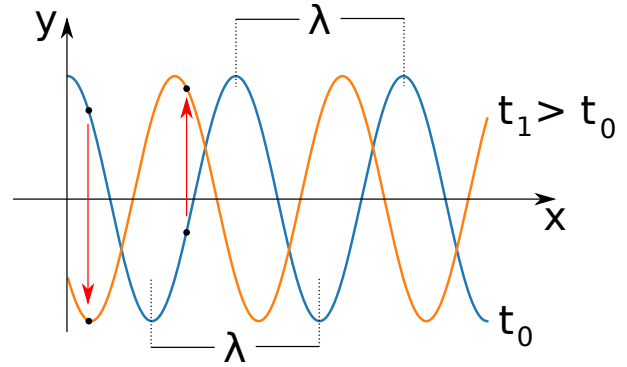


Figura 14: Onda periódica de comprimento de onda  $\lambda$  que se propaga para a direita através de uma corda em dois instantes de tempo  $t_0$  e  $t_1$ . As setas em vermelho indicam os deslocamentos das partículas da corda provocados pela propagação da onda.

onde  $f = 1/T$  é a frequência da onda. Em muitos casos, a velocidade da onda só depende das propriedades mecânicas do meio. Dessa maneira, a Eq. (28) implica que um aumento na frequência da onda produz uma diminuição no seu comprimento de onda e vice-versa.

**Exercício 4.1. Ondas sonoras** são ondas longitudinais periódicas que se propagam no ar. A velocidade de propagação de uma onda sonora (velocidade do som) depende da temperatura do ambiente. Se a velocidade do som a  $20^\circ\text{C}$  é  $344\text{ m/s}$ , determine o comprimento de onda de uma onda sonora de frequência igual a  $784\text{ Hz}$  (Nota sol na quinta oitava de um piano).

Ondas podem se propagar em mais de uma direção, por exemplo a onda produzida na superfície de um líquido quando uma gota de água cai sobre ela. No entanto, adotando um ponto de vista introdutório, nós estaremos interessados somente em ondas que se propagam em uma única direção, a qual será identificada com o eixo  $x$ .

Como as partículas de um meio se comportam como osciladores harmônicos simples que têm a mesma frequência angular  $\omega$  e a mesma amplitude  $A$  quando uma onda senoidal se propaga, o deslocamento de uma partícula na posição  $x$  para qualquer instante de tempo  $t$  será dado por

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + c(x)), \quad (29)$$

onde  $c(x)$  é uma função de  $x$ . Em particular vamos ter que  $y(0, t) = A \cos(\omega t + c(0))$ . Se a onda



se propaga para a direita com velocidade  $v$ , depois de um intervalo de tempo  $x/v$ , os deslocamentos da partícula na posição  $x \geq 0$  serão iguais que os deslocamentos sofridos pela partícula na posição  $x = 0$ . Logo, vamos ter que

$$A \cos(\omega t + c(0)) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + c(x)\right)$$

para todo  $t$ . Essa igualdade é satisfeita se

$$\omega t + c(0) = \omega t + \frac{\omega}{v}x + c(x),$$

ou seja, se

$$c(x) = c(0) - \frac{\omega}{v}x.$$

Substituindo isso na Eq. (29) temos que

$$y(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + c(0)\right).$$

Como o cosseno é uma função par ( $\cos(-z) = \cos z$  para qualquer  $z$ ), então, pondo  $c(0) = -\phi$ , vamos ter que

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi), \quad (30)$$

onde

$$k = \frac{\omega}{v}$$

é chamado de **número de onda** ou **vetor de onda**. A função  $y$  dada pela Eq. (30) é chamada de uma **função de onda**, a constante  $A$  é chamada de **amplitude** da onda e  $\phi$  de **fase**. Pode-se verificar que, no caso de uma onda senoidal que se propaga para à esquerda, o sinal de  $\omega t$  na Eq. (30) é positivo.

**Exercício 4.2.** Se uma onda senoidal tem sua função de onda dada pela Eq. (30), mostre que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi f,$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $f$  a frequência da onda.

*Dica:* Use a periodicidade da função cosseno junto ao fato de que  $y(x + n\lambda, t) = y(x, t)$  para qualquer  $t$  e qualquer inteiro  $n \geq 0$ .

**Exercício 4.3.** Uma onda transversal senoidal com amplitude igual a 0,02 m se propaga através de uma corda tensionada de esquerda para a direita com velocidade de 0,5 m/s. (i) Determine o número de onda, a frequência e a frequência angular da onda. (ii) Encontre a função de onda que descreve a onda

sabendo que no instante inicial a extremidade da esquerda está na posição de equilíbrio e se move de cima para baixo. (iii) Encontre a expressão do deslocamento de um ponto da corda que está na posição  $x = 3$  m para qualquer instante de tempo.