Introdução à teoria dos erros

Max Jáuregui

30 de Março de 2018

Uma **grandeza física** é qualquer quantidade numérica associada a um fenômeno físico; por exemplo, a distância entre dois corpos, o lapso de tempo entre dois eventos, a velocidade de um corpo, etc. Para obtermos um valor associado a uma grandeza física, precisamos realizar um **processo de medição**. A medição de uma grandeza física pode ser direta ou indireta.

Medição direta: A medição consiste em comparar a grandeza física diretamente com um padrão (unidade da grandeza) utilizando um instrumento de medição. Podemos realizar uma medição direta de duas formas:

- Fazendo uma única medição: Por exemplo, podemos medir o comprimento de uma mesa com uma régua cuja menor subdivisão tem comprimento igual a 1mm.
- Considerando várias repetições da medição: Por exemplo, podemos medir repetidamente com um cronômetro o tempo que demora em cair um corpo desde uma certa altura até o chão. É claro que as repetições do experimento devem estar sujeitas às mesmas condições.

Medição indireta: A medida é obtida utilizando uma equação que envolve grandezas físicas que podem ser medidas diretamente. Por exemplo, para medir o módulo da velocidade média de um corpo que cai livremente de uma altura h em relação ao chão, usamos a relação $v = h/t$, onde t é o tempo que demora o corpo em cair até o chão.

Mesmo que sejamos experientes no processo de medição de uma grandeza física, as medidas obtidas sempre apresentarão erros. Podemos classificar os erros em: erros sistemáticos, erros aleatórios.

Erros aleatórios: São erros causados principalmente pela ignorância inevitável das condições exatas de medição. Esses erros são imprevisíveis e não podem ser diminuídos.

Erros sistemáticos: São erros causados usualmente pelo uso de instrumentos não calibrados ou pelo mau costume da pessoa que faz a medição. Esses erros podem ser diminuídos.

Para explicitar o erro em uma medição de uma grandeza física, a medida deve ser expressa na forma $\overline{x} \pm \sigma_x$. Essa notação quer dizer que, com certeza ou pelo menos com grande probabilidade ($\geq 68\%$), o valor real da grandeza se encontra no intervalo $[\overline{x} - \sigma_x, \overline{x} + \sigma_x]$.

No caso de uma medida direta fazendo uma única medição, $\overline{x}$ e σ_x são respectivamente a leitura e a **incerteza** do instrumento de medição. A incerteza do instrumento é às vezes fornecida pelo fabricante; caso contrário, podemos considerar que a incerteza do instrumento é igual à menor subdivisão do instrumento. No caso de uma medida direta considerando n repetições da medição, vamos ter

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{(média aritmética)}\,,$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são as leituras (sem incerteza) do instrumento de medição nas repetições. Por outro lado,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}\,,$$

que é chamado de **desvio padrão** de $x_1, \ldots, x_n$.

Sejam $\overline{x}+\sigma_x$ e $\overline{y}+\sigma_y$ as medidas de duas grandezas. Se $z = x+y$, como determinamos $\overline{z}$ e σ_z? Primeiramente consideramos $\overline{z} = \overline{xy}$. Para determinar σ_z, vamos encontrar o maior e o menor valor possível de z. O maior valor possível de z será $\max(z) = x + y + \sigma_x + \sigma_y$ e o menor será $\min(z) = x + y - (\sigma_x + \sigma_y)$. Logo, é seguro considerar $\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$. Nessa matéria vamos considerar que σ_z é definida por essa expressão mesmo quando ela superestima o erro da medida de z. De fato, se x e y são medidas independentes, poderíamos considerar $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

Sejam $\overline{x}+\sigma_x$ e $\overline{y}+\sigma_y$ as medidas de duas grandezas. Se $z = x-y$, como determinamos $\overline{z}$ e σ_z? Fazendo uma análise similar ao caso da soma, vamos obter que $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$ e $\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$. Note que nesse caso os erros se somam.

Sejam $\overline{x}+\sigma_x$ e $\overline{y}+\sigma_y$ as medidas de duas grandezas. Se $z = xy$, como determinamos $\overline{z}$ e σ_z? Primeiramente definimos $\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}$. Para determinar σ_z, vamos considerar que $\sigma_x \ll |\overline{x}|$ e $\sigma_y \ll |\overline{y}|$, que é algo que acontece frequentemente na prática. Para calcular o maior e o menor valor possível de z, temos que analisar separadamente os 4 casos:

(i) $\overline{x} \geq 0$ e $\overline{y} \geq 0$;

(ii) $\overline{x} \geq 0$ e $\overline{y} < 0$;

(iii) $\overline{x} < 0$ e $\overline{y} \geq 0$;

(iv) $\overline{x} < 0$ e $\overline{y} < 0$.

A forma de analisar cada caso é bem parecida, por isso vamos detalhar só o primeiro caso. Nesse caso vamos ter

$$\max(z) = (\overline{x} + \sigma_x)(\overline{y} + \sigma_y) \quad \text{e} \quad \min(z) = (\overline{x} - \sigma_x)(\overline{y} - \sigma_y)\,;$$

Logo,

$$\frac{\max(z)}{\overline{z}} \approx 1 + \frac{\sigma_x}{\overline{x}} + \frac{\sigma_y}{\overline{y}} \quad \text{e} \quad \frac{\min(z)}{\overline{z}} \approx 1 - \frac{\sigma_x}{\overline{x}} - \frac{\sigma_y}{\overline{y}}\,,$$

onde temos desprezado o termo $\frac{\sigma_x \sigma_y}{\overline{z}} = (\frac{\sigma_x}{\overline{x}})(\frac{\sigma_y}{\overline{y}})$ em cada uma das equações, pois é muito pequeno em comparação com os outros termos. Logo, vamos ter que $\sigma_z = \overline{x}\sigma_y + \overline{y}\sigma_x$. No caso geral vamos ter que

$$\sigma_z = |\overline{y}|\sigma_x + |\overline{x}|\sigma_y\,.$$

Sejam $\overline{x}+\sigma_x$ e $\overline{y}+\sigma_y$ as medidas de duas grandezas. Se $z = x/y$, podemos obter $\overline{z}$ e σ_z de forma análoga ao caso da multiplicação. Nesse caso vamos obter que $\overline{z} = \overline{x}/\overline{y}$ e

$$\sigma_z = \frac{|\overline{y}|\sigma_x + |\overline{x}|\sigma_y}{\overline{y}^2}\,.$$

Algarismos significativos:

1. Todo algarismo diferente de zero é significativo; por exemplo, $1,23$ tem 3 algarismos significativos.

2. Todo zero à direita de um algarismo diferente de zero é significativo; por exemplo, $1,005$ e $1,300$ têm ambos 4 algarismos significativos. Usando notação científica, as potências de dez não são analisadas; por exemplo, $1,2 \times 10^2$ tem 2 algarismos significativos e $1,20 \times 10^2$ tem 3.

3. Todo zero à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não é significativo; por exemplo $0,0035$ e $0,15$ têm ambos 2 algarismos significativos.

Ao expressarmos medidas na forma $\overline{x} \pm \sigma_x$ devemos levar em conta as seguintes regras:

1. σ_x deve ter no máximo 2 algarismos significativos.

2. $\overline{x}$ deve ter o mesmo número de casas decimais que σ_x.

Por exemplo, se depois de nossos cálculos obtemos que $\overline{x} = 3,71560\,\mathrm{mm}$ e $\sigma_x = 0,04723\,\mathrm{mm}$, nosso resultado será expresso como $(3,716 \pm 0,047)\,\mathrm{mm}$ (σ_x com 2 algarismos significativos) ou como $(3,72 \pm 0,05)\,\mathrm{mm}$ (σ_x com um algarismo significativo).

Ao multiplicarmos dois números com diferente quantidade de algarismos significativos, o número de algarismos significativos do resultado deve ser igual ao do número com a menor quantidade de algarismos significativos. Por exemplo, $1,2305 \times 0,0025 = 0,00307625$ e, por conseguinte, o resultado correto deve ser $0,0031$, com dois algarismos significativos. Ao somarmos dois números, o que devemos levar em conta é que o número de casas decimais do resultado deve ser igual ao do somando com a menor quantidade de casas decimais. Por exemplo, $1,2376 + 10,58 = 11,8176$ e, por conseguinte, o resultado correto é $11,82$.