Movimento retilíneo

Max Jáuregui

11 de Abril de 2018

1 Velocidades média e instantânea

Vamos estudar o movimento de um corpo em uma linha reta, a qual vamos considerar como sendo paralela ao eixo x.

Se em dois instantes de tempo t_1 e t_2 o corpo se encontra respectivamente nas posições x_1 e x_2, definimos o **deslocamento** do corpo no intervalo $[t_1, t_2]$ por $\Delta x = x_2 - x_1$. Definimos também a **velocidade média** do corpo no intervalo $[t_1, t_2]$ por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,.$$

Suponhamos que a posição de um automóvel em cada instante de tempo t seja dada por $x(t) = (10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + 5\,\mathrm{m}$. A velocidade média no intervalo $[0\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$ é dada por

$$v_m = \frac{x(1\,\mathrm{s}) - x(0\,\mathrm{s})}{1\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

No intervalo $[0,9\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, a velocidade média será

$$v_m = \frac{x(1\,\mathrm{s}) - x(0,9\,\mathrm{s})}{1\,\mathrm{s} - 0,9\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\mathrm{m} - 13,1\,\mathrm{m}}{0,1\,\mathrm{s}} = 19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Calculando a velocidade média nos intervalos $[0,99\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, $[0,999\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, ..., vamos perceber que os valores obtidos vão se aproximar cada vez mais de $20\,\mathrm{m/s}$. Logo, é razoável definirmos a velocidade no instante $t = 1s$ como sendo $20\,\mathrm{m/s}$. Essa velocidade é chamada de **velocidade instantânea** e é definida para qualquer instante t por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,.$$

O limite do lado direito é conhecido como a **derivada** de $x(t)$ em relação a t e é denotada por $\frac{dx}{dt}$.

Sobre derivadas precisamos saber o seguinte:

1. $\frac{d}{dt}[x(t) \pm y(t)] = \frac{dx}{dt} \pm \frac{dy}{dt}$;

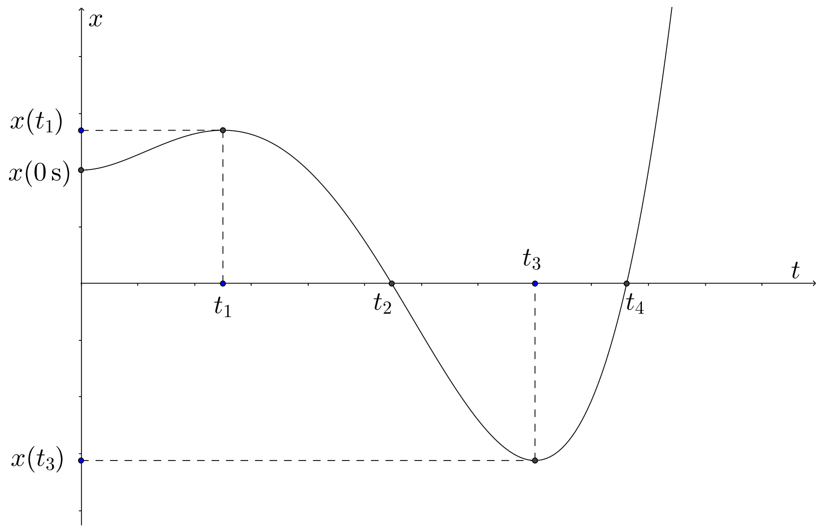

Figura 1: Exemplo de um gráfico x versus t

2. $\frac{d}{dt}[ax(t)] = a\frac{dx}{dt}$;
3. $\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$;
4. $\frac{d}{dt}(c) = 0$.

Usando essas regras podemos derivar qualquer polinômio; por exemplo, se $p(t) = 10t^3 - 2t^2 + 6$, então $\frac{dp}{dt} = 30t^2 - 4t$.

Se a posição de um corpo segue a equação $x(t) = (5\,\mathrm{m/s^3})t^3 - (10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + 20\,\mathrm{m}$, qual é a velocidade instantânea do corpo no instante $t = 2\,\mathrm{s}$? A velocidade instantânea em qualquer instante t está dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2 - \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t\,.$$

Logo, no instante $t = 2\,\mathrm{s}$, vamos ter que $v(2\,\mathrm{s}) = 60\,\mathrm{m/s} - 40\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$.

2 Gráficos x versus t

Conhecendo a posição de um corpo, que se move em linha reta, em cada instante de tempo, podemos construir um gráfico x versus t representando os pares ordenados $(t, x(t))$ em um plano cartesiano. O objetivo dessa seção é obter informação sobre o movimento de um corpo a a partir de um gráfico x versus t.

Exemplo: Da figura 1 podemos obter a seguinte informação qualitativa sobre o movimento do corpo: O corpo inicialmente está na origem; logo depois se move à direita (assume valores de x maiores do que $x(0\,\mathrm{s})$); no instante t_1 o corpo atinge a posição $x(t_1)$ e logo depois desse instante, o corpo se move à esquerda (assume valores de x menores do

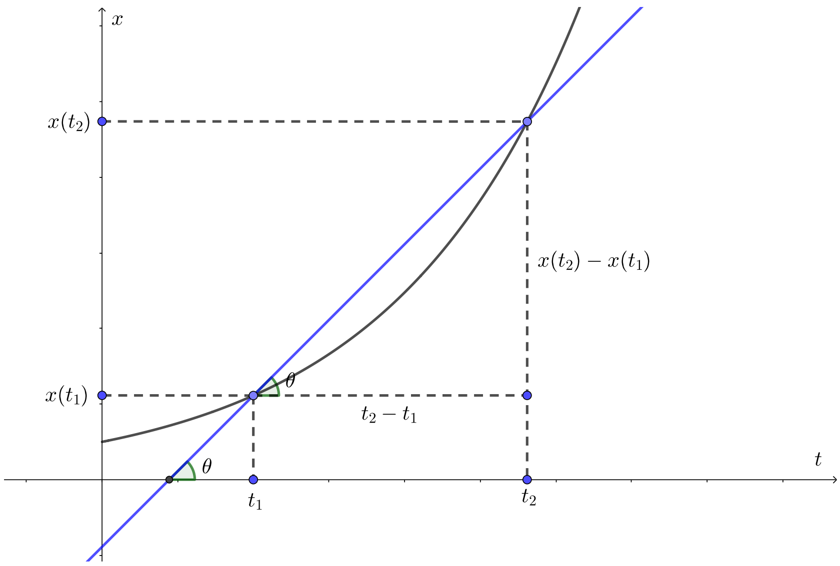

Figura 2: Cálculo da velocidade média usando um gráfico x versus t.

que $x(t_1)$); no instante t_2 o corpo passa pela origem e continua se movendo à esquerda; no instante t_3 o corpo atinge a posição $x(t_3)$ e depois desse instante se move à direita passando novamente pela origem no instante t_4.

Um gráfico x versus t também pode nos dar informação sobre as velocidades média e instantânea. Por exemplo, da figura 2 vemos que

$$\tan\theta = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

Portanto, a velocidade média no intervalo $[t_1, t_2]$ é a tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta secante ao gráfico x versus t que passa pelos pontos $(t_1, x(t_1))$ e $(t_2, x(t_2))$.

Na figura 3 consideramos um instante t_3, com $t_1 < t_3 < t_2$. A velocidade média no intervalo $[t_1, t_3]$ será, pelo que vimos, $\tan\beta$, que nesse caso é menor do que $\tan\theta$. Considerando instantes t cada vez mais próximos de t_1, a reta secante ao gráfico x versus t que passa pelos pontos $(t_1, x(t_1))$ e $(t, x(t))$ vai se aproximar da reta tangente ao gráfico que passa pelo ponto $(t_1, x(t_1))$. Se essa reta tangente faz um ângulo α com o eixo x, então $\tan\alpha$ será o valor limite da velocidade média, ou seja, $\tan\alpha$ será a velocidade instantânea no instante t_1. Como essa velocidade instantânea é a derivada da função $x(t)$ em relação a t avaliada no instante t_1, obtemos a seguinte relação que dá uma interpretação geométrica da derivada:

$$v(t_1) = \frac{dx}{dt}(t_1) = \tan\alpha\,.$$

.

A figura 4 ilustra como podemos obter o sinal da velocidade instantânea em qualquer instante de tempo a partir de um gráfico x versus t. Além disso, da figura 4 também podemos obter que $|v(t_1)| < |v(t_2)|$, pois a tangente que passa pelo ponto $(t_2, x(t_2))$ é

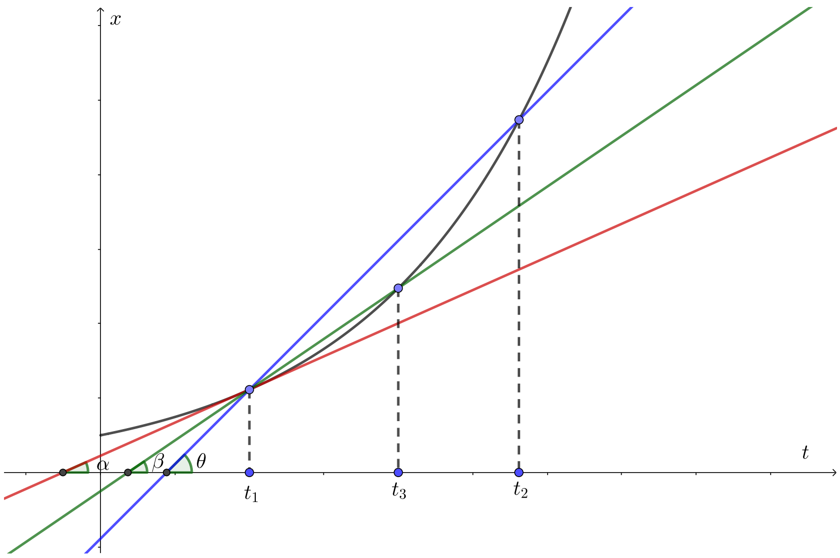

Figura 3: Cálculo da velocidade instantânea usando um gráfico x versus t.

mais vertical (mais inclinada) do que a que passa pelo ponto $(t_1, x(t_1))$. Analogamente, vamos ter que $v(t_3) < v(t_4)$. Nesse caso ambas as velocidades são positivas e, por conseguinte, não precisamos considerar o valor absoluto.

3 Acelerações média e instantânea

De forma análoga à velocidade média, definimos a **aceleração média** no intervalo $[t_1, t_2]$ por

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}\,,$$

onde $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são as velocidades instantâneas nos instantes t_2 e t_1 respectivamente. A **aceleração instantânea** em um instante t será definida então por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\,.$$

Como $v = \frac{dx}{dt}$, então

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,,$$

onde a última expressão é chamada de **segunda derivada** de $x(t)$ em relação a t.

Suponhamos que a posição de um corpo em cada instante de tempo esteja dada por $x(t) = (5\,\mathrm{m/s^3})t^3 - (10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + 20\,\mathrm{m}$. A velocidade isntantânea em qualquer instante t está dada por $v(t) = (15\,\mathrm{m/s^3})t^2 - (20\,\mathrm{m/s^2})t$. Logo, $v(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s}$ e $v(1\,\mathrm{s}) = -5\,\mathrm{m/s}$. Com essa informação podemos encontrar que a aceleração média no intervalo $[0\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$ é

$$a_m = \frac{v(1\,\mathrm{s}) - v(0\,\mathrm{s})}{1\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = -5\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

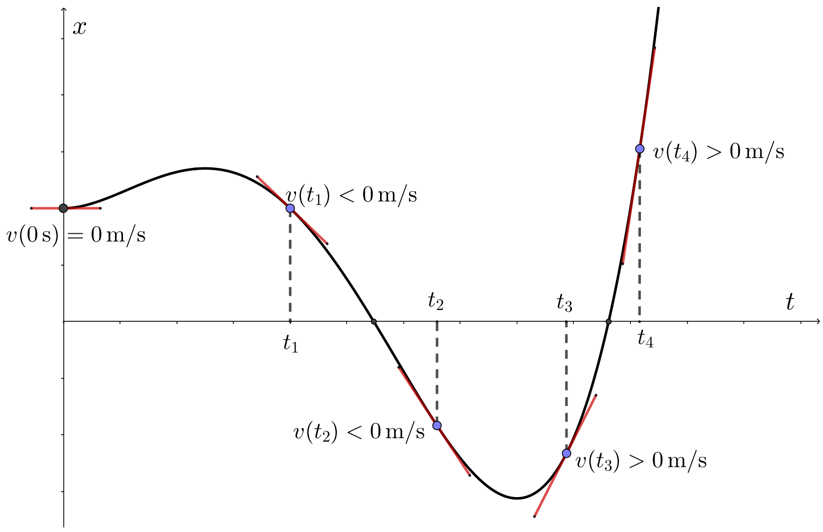

Figura 4: Sinais da velocidade instantânea.

Por outro lado, a aceleração instantânea em um instante t qualquer está dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (30\,\mathrm{m/s^3})t - 20\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Em particular, a aceleração instantânea no instante $t = 1\,\mathrm{s}$ será $a(1\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Assim como obtivemos as velocidades média e instantânea a partir de um gráfico x versus t, as acelerações média e instantânea podem ser obtidas exatamente da mesma forma a partir de um gráfico v versus t. A situação é diferente usando um gráfico x versus t; porém, nesse caso é possível pelo menos determinar os sinais das acelerações média e instantânea. Por exemplo, consideremos o gráfico x versus t dado na figura 4. Nele podemos determinar o sinal da velocidade instantânea em qualquer instante e, mais ainda, estimar o módulo dela. Logo, a aceleração média no intervalo $[0\,\mathrm{s}, t_1]$ vai ser negativa, pois $v(t_1) < 0\,\mathrm{m/s}$ e $v(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s}$; enquanto que a aceleração média no intervalo $[0\,\mathrm{s}, t_3]$ vai ser positiva, pois $v(t_3) > 0\,\mathrm{m/s}$. Além disso, a aceleração média no intervalo $[t_3, t_4]$ vai ser positiva, pois $v(t_4) > v(t_3)$.

Para determinar o sinal da aceleração instantânea em um determinado instante t_0 a partir de um gráfico x versus t, precisamos analisar as inclinações das retas tangentes em pontos ao redor de $(t_0, x(t_0))$. Se em uma vizinhança pequena ao redor do instante t_0 o gráfico x versus t é aproximadamente uma linha reta, então a aceleração instantânea no ponto t_0 será igual a $0\,\mathrm{m/s^2}$. Se nessa vizinhança pequena o gráfico tem forma de $\smile$, a aceleração instantânea no instante t_0 será positiva. Nesse caso também dizemos que o gráfico x versus t tem **curvatura positiva** no ponto t_0. Por outro lado, se em uma vizinhança pequena de t_0 o gráfico de x versus t tem forma de $\frown$, a aceleração instantânea no instante t_0 será negativa e diremos também que o gráfico tem **curvatura negativa** no ponto t_0. Por exemplo, da figura 4 podemos ver que $a(0\,\mathrm{s}) > 0\,\mathrm{m/s^2}$, $a(t_1) < 0\,\mathrm{m/s^2}$, $a(t_2) > 0\,\mathrm{m/s^2}$, $a(t_3) > 0\,\mathrm{m/s^2}$ e $a(t_4) > 0\,\mathrm{m/s^2}$. Como o gráfico x versus t tem curvatura negativa ($\frown$) no instante t_2 e curvatura positiva ($\smile$) no instante t_3, entre os instantes t_2

e t_3 deve existir um instante t^* para o qual todo instante justo antes de t^* tem curvatura negativa e todo instante justo depois de t^* tem curvatura positiva. O ponto $(t^*, x(t^*))$ é chamado de um **ponto de inflexão** do gráfico e a aceleração instantânea no instante t^* é $0\,\mathrm{m/s^2}$.

4 Cálculo do deslocamento usando um gráfico v versus t

Consideremos um corpo que se move em linha reta com velocidade instantânea constante $v(t) = v_0$. O gráfico v versus t está dado na figura **??**. A área da região limitada pelo gráfico entre os instantes t_1 e t_2 é igual a $v_0(t_2 - t_1)$. Por outro lado, como a velocidade instantânea é uma constante v_0, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo será igual a v_0 (ver apêndice). Em particular, no intervalo $[t_1, t_2]$ a velocidade média é

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0\,.$$

Portanto, $x(t_2) - x(t_1) = v_0(t_2 - t_1)$, ou seja, o deslocamento $x(t_2) - x(t_1)$ é igual à área da região limitada pelo gráfico entre os instantes t_1 e t_2 e o eixo t.

No caso geral em que o gráfico v versus t é uma curva arbitrária, fixados dois instantes t_1 e t_2, subdividimos o intervalo $[t_1, t_2]$ em vários subintervalos de comprimento pequeno. Em cada subintervalo consideramos que a velocidade é constante. Dessa maneira, o gráfico v versus t vai ser aproximado pelo gráfico de uma função escalonada. Além disso a soma das áreas dos degraus formados pelo gráfico da função escalonada é aproximadamente igual à área da região limitada pelo gráfico v versus t entre os instantes t_1 e t_2 e o eixo t. Por outro lado, essa soma de áreas vai ser aproximadamente igual a $x(t_2) - x(t_1)$. Logo, no limite quando o número de pontos de subdivisão se tora muito grande e, consequentemente, o comprimento dos subintervalos muito pequeno, o erro cometido nas aproximações se torna desprezível. Dessa maneira, vamos ter que o deslocamento $x(t_2) - x(t_1)$ é igual à área da região limitada pelo gráfico v versus t entre os instantes t_1 e t_2 e o eixo t. Essa área é usualmente denotada por

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,,$$

e é chamada de **integral** de $v(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$. Portanto, temos encontrado que

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,.$$

Vamos ver agora como calculamos a integral de uma função. Para isso vamos invocar o chamado **teorema fundamental do cálculo** que, para nossos fins, diz o seguinte:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = V(t)\big|_{t_1}^{t_2} = V(t_2) - V(t_1)\,,$$

onde $V(t)$ é qualquer função que satisfaz a condição

$$\frac{dV}{dt} = v(t)\,.$$

Vejamos alguns exemplos:

- Se $v(t) = c$ é a função constante, considerando $V(t) = ct$, vemos que $\frac{dV}{dt} = c = v(t)$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} c\,dt = ct|_{t_1}^{t_2} = c(t_2 - t_1)\,.$$

- Se $v(t) = ct$, considerando $V(t) = at^2$, vemos que $\frac{dV}{dt} = 2at$. Logo, para ter $\frac{dV}{dt} = v(t)$, devemos ter $2at = ct$, ou seja, $a = c/2$. Dessa maneira, a função $V(t) = ct^2/2$ é tal que $\frac{dV}{dt} = v(t)$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} ct\,dt = ct|_{t_1}^{t_2} = \frac{c}{2}(t_2^2 - t_1^2)\,.$$

Dos exemplos anteriores podemos inferir que, se $v(t) = ct^2$, a função que devemos encontrar com o objetivo de calcular $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ deve ser $V(t) = ct^3/3$. Se $v(t) = ct^3$, devemos ter $V(t) = ct^4/4$. Portanto, em geral vamos ter a seguinte fórmula de integração:

$$\int_{t_1}^{t_2} ct^n\,dt = \left.\frac{c}{n+1}t^{n+1}\right|_{t_1}^{t_2}\,.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (5t^2 - 3t + 4)\,dt &= \int_1^2 5t^2\,dt - \int_1^2 3t\,dt + \int_1^2 4\,dt \\
&= \left.\frac{5}{3}t^3\right|_1^2 - \left.\frac{3}{2}t^2\right|_1^2 + 4t|_1^2 \\
&= \frac{5}{3}(8-1) - \frac{3}{2}(4-1) + 4(2-1) \\
&= \frac{35}{3} - \frac{9}{2} + 4 \\
&= \frac{67}{6}\,.
\end{aligned}$$

5 Movimento com aceleração constante

Apêndice*