Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

10 de Agosto de 2018

Conteúdo

1 Equilíbrio de um corpo rígido

1.1 Torque e momento angular

Considere uma partícula de massa m na posição $\vec{r}$ sobre a qual atua uma força $\vec{F}$. O *torque* da força $\vec{F}$ é definido por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,, \tag{1}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de dois vetores, o qual é definido por

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Exemplo 1.1. Considere uma partícula de 10 kg na posição $\vec{r} = \cos 30° \hat{\imath} + \operatorname{sen} 30° \hat{\jmath}$. O torque do peso da partícula é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}$, onde $\vec{P} = -98\hat{\jmath}$. Logo,

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -98 & 0 \end{vmatrix} = -49\sqrt{3}\hat{k}\,.$$

Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear da partícula ($\vec{v}$ é a velocidade da partícula). Logo, a Eq. (1) assume a forma

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}.$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{2}$$

e o fato de que $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{0}$ (devido a que $\dot{\vec{r}}$ e $\vec{p}$ são paralelos), obtemos que

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})\,. \tag{3}$$

Definimos o *momento angular* da partícula por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Usando esse conceito, a Eq. (3) nos diz então que

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}\,, \tag{4}$$

ou seja, o torque da força $\vec{F}$ é igual à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton). A unidade de momento angular no SI é $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

1.2 Sistemas de partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 sobre as quais atuam forças externas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ respectivamente. Além das forças externas, há forças internas $\vec{F}_{12}$ (sobre a partícula 1) e $\vec{F}_{21}$ (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Pela segunda lei de Newton vamos ter então que

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} &= \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} &= \dot{\vec{p}}_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Somando essas equações, temos que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2\,.$$

Como $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ pela terceira lei de Newton, a equação anterior pode ser escrita como

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \dot{\vec{p}}\,, \tag{6}$$

onde $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ é a força externa total sobre o sistema composto pelas partículas 1 e 2, e $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ é o momento linear total do sistema.

Multiplicando vetorialmente as Eqs. (5) pelos vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ respectivamente, vamos ter que

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) &= \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) &= \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2\end{aligned}$$

Somando essas duas equações, vamos ter que

$$\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2+\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{21} = \vec{r}_1\times\dot{\vec{p}}_1+\vec{r}_2\times\dot{\vec{p}}_2\,.$$

Usando a terceira lei de Newton e a identidade (2) vamos ter que

$$\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2+(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1\times\vec{p}_1+\vec{r}_2\times\vec{p}_2)\,.$$

Finalmente, como $\vec{F}_{12}$ é paralelo a $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$ e, por conseguinte,

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}\,, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ é o torque externo total sobre o sistema e $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ é o momento angular total do sistema.

No caso de sistemas compostos por mais de duas partículas, as Eqs. (6) e (7) continuam valendo.

1.3 Dinâmica do corpo rígido

Um *corpo rígido* é um corpo não pontual que não se deforma. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em n partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de n corpos. Se a massa da i-ésima parte é Δm_i, sua posição é $\vec{r}_i$ e sua velocidade é $\vec{v}_i$, o momentum total do sistema é

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\Delta m_i\,.$$

Considerando que o número de partes n tende ao infinito e simultaneamente a massa de cada parte tende a zero, as somas anteriores tornam-se integrais. Dessa maneira, encontramos que o *momento linear do corpo rígido* é dado por

$$\vec{p} = \int \vec{v}\, dm \tag{8}$$

e o *momento angular do corpo rígido* por

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, dm\,, \tag{9}$$

onde as integrais são sobre toda a massa do corpo rígido.

As Eqs. (6) e (7) continuam valendo da mesma forma para um corpo rígido, levando em conta que $\vec{p}$ e $\vec{L}$ são dadas pelas Eqs. (8) e (9).

O movimento de um corpo rígido pode ser estudado analisando separadamente os movimentos de translação e de rotação em torno de um eixo que passa pelo corpo.

1.3.1 Movimento de translação

Quando um corpo rígido realiza um movimento de translação pura, todos os pontos do corpo possuem a mesma velocidade. Dessa forma, a velocidade pode sair da integral na Eq. (8) e assim o momento linear do corpo rígido vai ser dado por

$$\vec{p} = \vec{v} \int dm = M\vec{v}\,,$$

onde M é a massa total do corpo rígido. De forma análoga, na Eq. (9) vamos ter

$$\vec{L} = \left(\int \vec{r}\, dm\right) \times \vec{v}$$