Movimento retilíneo

Max Jáuregui

31 de Março de 2018

1 Velocidades média e instantânea

Vamos estudar o movimento de um corpo em uma linha reta, a qual vamos considerar como sendo paralela ao eixo x.

Se em dois instantes de tempo t_1 e t_2 o corpo se encontra respectivamente nas posições x_1 e x_2, definimos o **deslocamento** do corpo no intervalo $[t_1, t_2]$ por $\Delta x = x_2 - x_1$. Definimos também a **velocidade média** do corpo no intervalo $[t_1, t_2]$ por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,.$$

Suponhamos que a posição de um automóvel em cada instante de tempo t seja dada por $x(t) = (10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + 5\,\mathrm{m}$. A velocidade média no intervalo $[0\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$ é dada por

$$v_m = \frac{x(1\,\mathrm{s}) - x(0\,\mathrm{s})}{1\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

No intervalo $[0,9\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, a velocidade média será

$$v_m = \frac{x(1\,\mathrm{s}) - x(0,9\,\mathrm{s})}{1\,\mathrm{s} - 0,9\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\mathrm{m} - 13,1\,\mathrm{m}}{0,1\,\mathrm{s}} = 19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Calculando a velocidade média nos intervalos $[0,99\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, $[0,999\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}]$, $\ldots$, vamos perceber que os valores obtidos vão se aproximar cada vez mais de $20\,\mathrm{m/s}$. Logo, é razoável definirmos a velocidade no instante $t = 1s$ como sendo $20\,\mathrm{m/s}$. Essa velocidade é chamada de **velocidade instantânea** e é definida para qualquer instante t por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,.$$

O limite do lado direito é conhecido como a **derivada** de $x(t)$ em relação a t e é denotada por $\frac{dx}{dt}$.

Sobre derivadas precisamos saber o seguinte:

1. $\frac{d}{dt}[x(t) \pm y(t)] = \frac{dx}{dt} \pm \frac{dy}{dt}$;
2. $\frac{d}{dt}[ax(t)] = a\frac{dx}{dt}$;
3. $\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$;
4. $\frac{d}{dt}(c) = 0$.

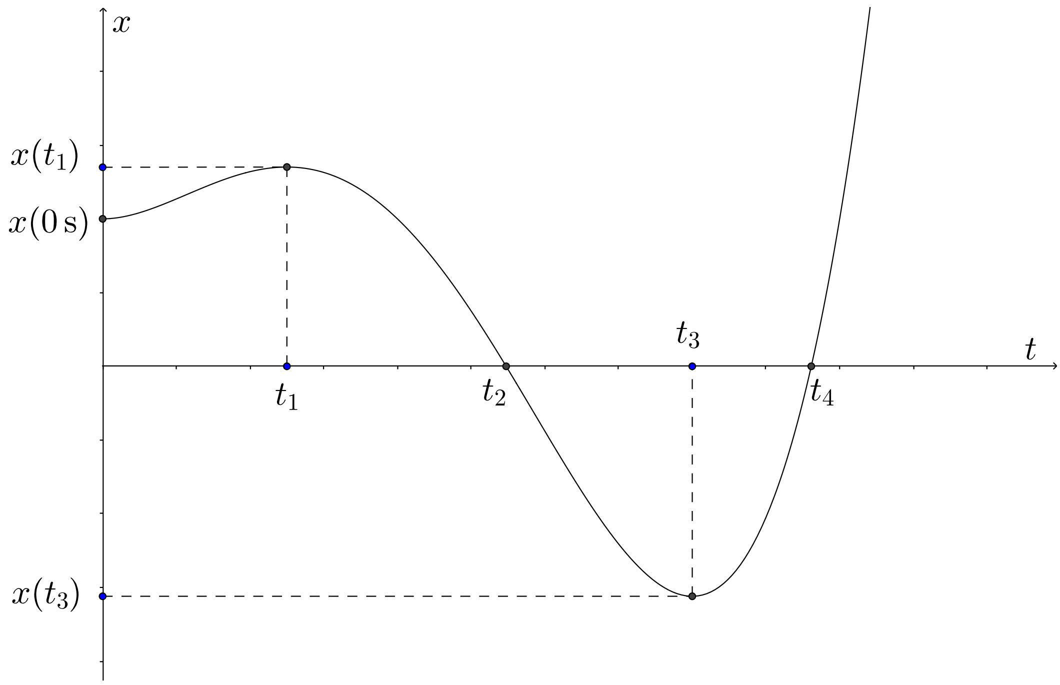

Figura 1: Exemplo de um gráfico x versus t

Usando essas regras podemos derivar qualquer polinômio; por exemplo, se $p(t) = 10t^3 - 2t^2 + 6$, então $\frac{dp}{dt} = 30t^2 - 4t$.

Se a posição de um corpo segue a equação $x(t) = (5\,\mathrm{m/s^3})t^3 - (10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + 20\,\mathrm{m}$, qual é a velocidade instantânea do corpo no instante $t = 2\,\mathrm{s}$? A velocidade instantânea em qualquer instante t está dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2 - \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t\,.$$

Logo, no instante $t = 2\,\mathrm{s}$, vamos ter que $v(2\,\mathrm{s}) = 60\,\mathrm{m/s} - 40\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$.

2 Gráficos x versus t

Conhecendo a posição de um corpo, que se move em linha reta, em cada instante de tempo, podemos construir um gráfico x versus t representando os pares ordenados $(t, x(t))$ em um plano cartesiano. O objetivo dessa seção é obter informação sobre o movimento de um corpo a a partir de um gráfico x versus t.

Exemplo: Da figura 1 podemos obter a seguinte informação qualitativa sobre o movimento do corpo: O corpo inicialmente está na origem; logo depois se move à direita (assume valores de x maiores do que $x(0\,\mathrm{s})$); no instante t_1 o corpo atinge a posição $x(t_1)$ e logo depois desse instante, o corpo se move à esquerda (assume valores de x menores do que $x(t_1)$); no instante t_2 o corpo passa pela origem e continua se movendo à esquerda; no instante t_3 o corpo atinge a posição $x(t_3)$ e depois desse instante se move à direita passando novamente pela origem no instante t_4.

Um gráfico x versus t também pode nos dar informação sobre as velocidades média e

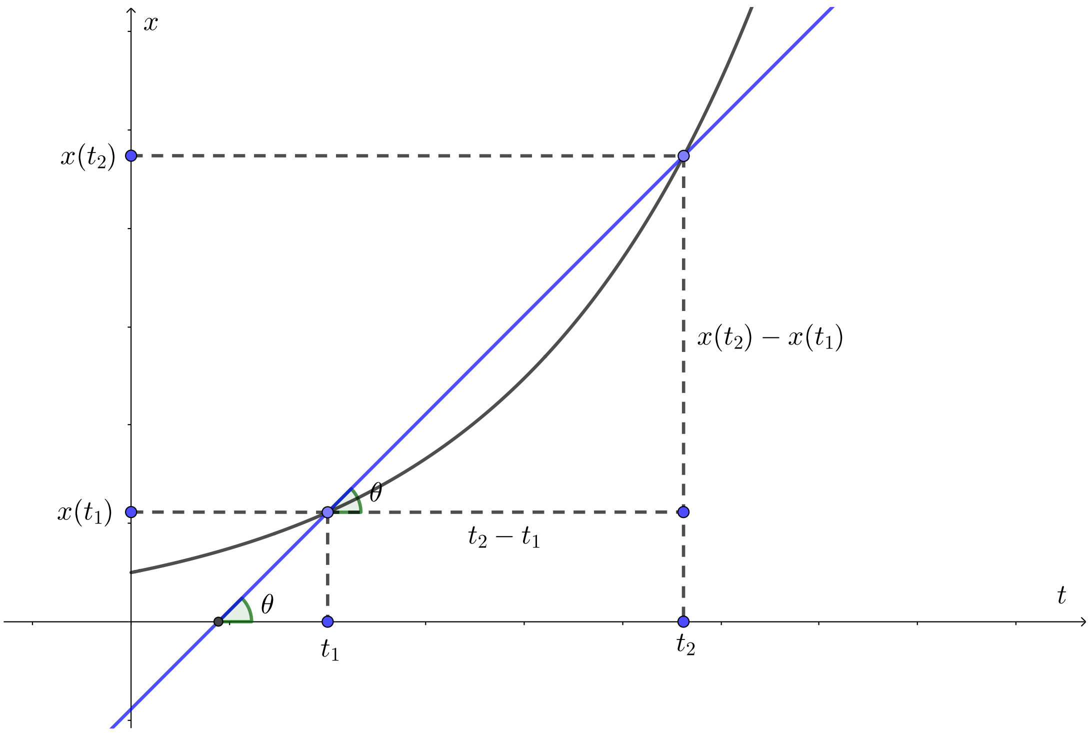

Figura 2: Cálculo da velocidade média usando um gráfico x versus t.

instantânea. Por exemplo, da figura 2 vemos que

$$\tan\theta = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

Portanto, a velocidade média no intervalo $[t_1, t_2]$ é a tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta secante ao gráfico x versus t que passa pelos pontos $(t_1, x(t_1))$ e $(t_2, x(t_2))$.

Na figura 3 consideramos um instante t_3, com $t_1 < t_3 < t_2$. A velocidade média no intervalo $[t_1, t_3]$ será, pelo que vimos, $\tan\beta$, que nesse caso é menor do que $\tan\theta$. Considerando instantes t cada vez mais próximos de t_1, a reta secante ao gráfico x versus t que passa pelos pontos $(t_1, x(t_1))$ e $(t, x(t))$ vai se aproximar da reta tangente ao gráfico que passa pelo ponto $(t_1, x(t_1))$. Se essa reta tangente faz um ângulo α com o eixo x, então $\tan\alpha$ será o valor limite da velocidade média, ou seja, $\tan\alpha$ será a velocidade instantânea no instante t_1. Como essa velocidade instantânea é a derivada da função $x(t)$ em relação a t avaliada no instante t_1, obtemos a seguinte relação que dá uma interpretação geométrica da derivada:

$$v(t_1) = \frac{dx}{dt}(t_1) = \tan\alpha\,.$$

.

3 Acelerações média e instantânea

De forma análoga à velocidade média, definimos a **aceleração média** no intervalo $[t_1, t_2]$ por

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}\,,$$

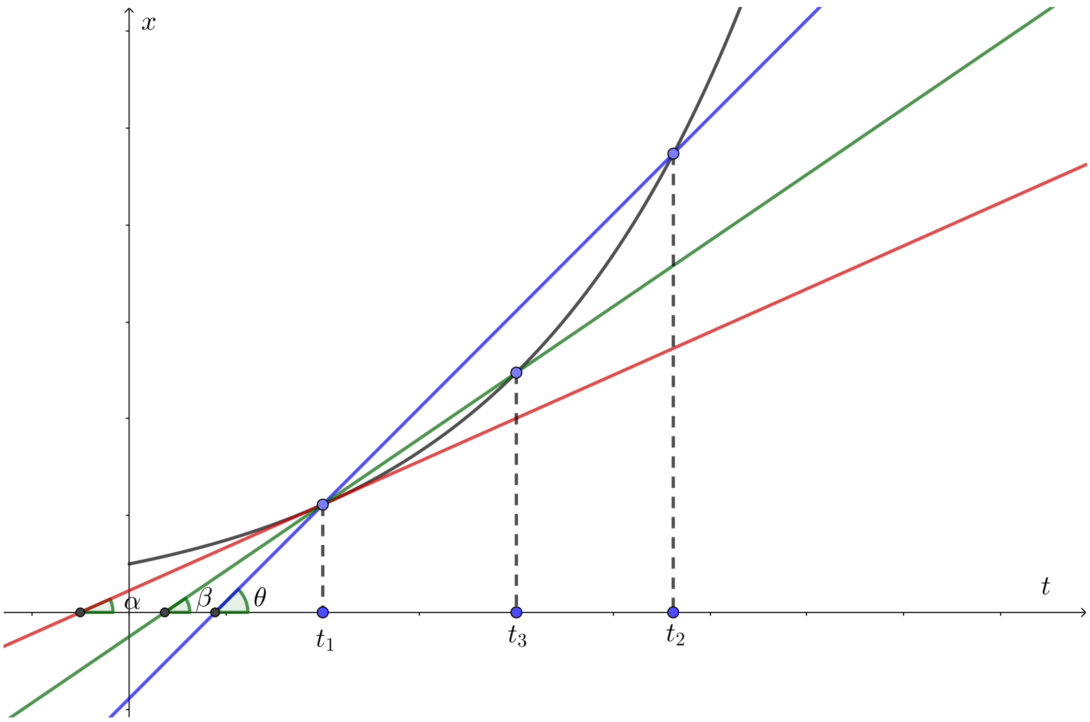

Figura 3: Cálculo da velocidade instantânea usando um gráfico x versus t.

onde $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são as velocidades instantâneas nos instantes t_2 e t_1 respectivamente. A **aceleração instantânea** em um instante t será definida então por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \, .$$

Como $v = \frac{dx}{dt}$, então

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \, ,$$

onde a última expressão é chamada de **segunda derivada** de $x(t)$ em relação a t.