

# Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

23 de Agosto de 2018

## Conteúdo

### 1 Equilíbrio de um corpo rígido

#### 1 Equilíbrio de um corpo rígido

Considere uma partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  sobre a qual atua uma força  $\vec{F}$ . O **torque** da força  $\vec{F}$  é definido por  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ , onde  $\times$  denota o **produto vetorial** de dois vetores, o qual é definido por

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}.\end{aligned}$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

**Exercício 1.1.** Verifique que, para uma partícula de 10 kg na posição  $\vec{r} = \cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}$  (em metros), o torque do peso é igual a  $-49\sqrt{3}\hat{k}$  (em  $\text{N} \cdot \text{m}$ ).

Usaremos a notação  $\dot{\vec{a}}$  para representar a derivada de  $\vec{a}$  em relação ao tempo, ou seja,  $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ .

**Exercício 1.2.** Considere uma partícula de massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  sobre a qual atua uma força  $\vec{F}$ . Definindo o **momento angular** de uma partícula por  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , onde  $\vec{p}$  é o momento linear da partícula, mostre que  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ . Isso quer dizer que o torque da força  $\vec{F}$  é igual à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton). A unidade de momento angular no SI é  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

*Dica:* Na expressão do torque substitua  $\vec{F}$  por  $\dot{\vec{p}}$ , em virtude da segunda lei de Newton ( $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ ). Logo, utilize a identidade  $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$  e use o fato de que  $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$ , pois o vetor velocidade  $\dot{\vec{r}}$  é paralelo a  $\vec{p}$ .

**Exercício 1.3.** Considere duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  sobre as quais atuam forças externas  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  respectivamente. Além das forças externas, há forças internas  $\vec{F}_{12}$  (sobre a partícula 1) e  $\vec{F}_{21}$  (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Mostre que

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \\ \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 &= \dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2.\end{aligned}\tag{1}$$

*Dica:* Segue da segunda lei de Newton que

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} &= \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} &= \dot{\vec{p}}_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Somando essas equações e usando a terceira lei de Newton ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ), obtém-se a primeira equação em (1). Para se obter a segunda equação em (1), multiplicam-se vetorialmente à esquerda as equações (2) pelos vetores posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  respectivamente. Logo, somam-se as equações obtidas e usa-se o fato de que  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$ .

O exemplo anterior pode ser generalizado sem realizar nenhuma alteração fundamental para o caso de um sistema de  $n$  partículas. Nesse caso vamos ter que

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{ext}} &= \dot{\vec{p}} \\ \vec{\tau}_{\text{ext}} &= \dot{\vec{L}},\end{aligned}\tag{3}$$

onde  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$  é a força externa total sobre o sistema,  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n$  é o momento linear total do sistema,  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_1 + \dots + \vec{\tau}_n$  é o torque externo total sobre o sistema e  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_n$  é o momento angular total do sistema.

Um **corpo rígido** é um corpo não pontual que não se deforma. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em  $n$  partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de  $n$  corpos.

Se a massa da  $i$ -ésima parte é  $\Delta m_i$ , sua posição é  $\vec{r}_i$  e sua velocidade é  $\vec{v}_i$ , o momentum total do sistema é

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Delta m_i.$$

Considerando que o número de partes  $n$  tende ao infinito e simultaneamente a massa de cada parte tende a zero, as somas anteriores tornam-se integrais. Dessa maneira, encontramos que o **momento linear do corpo rígido** é dado por

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm \quad (4)$$

e o **momento angular do corpo rígido** por

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm, \quad (5)$$

onde as integrais são sobre toda a massa do corpo rígido.

As Eqs. (3) continuam valendo da mesma forma para um corpo rígido, levando em conta que  $\vec{p}$  e  $\vec{L}$  são dadas pelas Eqs. (4) e (5).

O movimento de um corpo rígido pode ser estudado analisando separadamente os movimentos de translação e de rotação em torno de um eixo que passa pelo corpo.

**Exercício 1.4.** Considere um corpo rígido de massa  $M$  que realiza um movimento de translação pura com velocidade  $\vec{v}$ . Mostre que nesse caso

$$\vec{p} = M\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}, \quad (6)$$

onde

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

é a posição do **centro de massa** do corpo.

*Dica:* Quando um corpo rígido realiza um movimento de translação pura, todos os pontos do corpo possuem a mesma velocidade. Dessa forma, a velocidade  $\vec{v}$  pode sair das integrais nas Eqs. (4) e (5).

O exercício anterior nos diz que um corpo rígido que realiza um movimento de translação pura se comporta como uma partícula de massa  $M$  localizada no centro de massa do corpo. Em outras palavras, as dimensões do corpo rígido não são relevantes no movimento de translação.

Diferentemente do caso do movimento de translação, quando um corpo rígido realiza um movimento de rotação ao redor de um eixo que passa por ele, os pontos do corpo que estão mais próximos do eixo de rotação tem velocidade menor do que os pontos mais afastados. Logo, nesse caso a velocidade  $\vec{v}$  não pode sair da integral nas Eqs. (4) e (5).

Para simplificar nosso estudo do movimento de rotação de um corpo rígido, vamos considerar um corpo homogêneo (massa distribuída uniformemente) e simétrico. Além disso, vamos analisar o caso em que o corpo gira em torno de um dos seus eixos de simetria com velocidade angular  $\vec{\omega}$ .

Antes de continuar, lembramos que, para uma partícula que realiza um movimento circular com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , vale a relação vetorial  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula e  $\vec{r}$  é sua posição em relação a um sistema de referência fixo ao eixo de rotação.

Continuando nossa análise da rotação de um corpo rígido, vemos que o momento angular do corpo é dado por

$$\vec{L} = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm,$$

onde a posição  $\vec{r}$  é em relação a um sistema de referência fixo ao eixo de rotação. Usando a identidade vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

temos que

$$\vec{L} = \int [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] dm. \quad (7)$$

Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , então  $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = r\omega \cos \theta$  e, por conseguinte,

$$\vec{L} = \int [r^2\vec{\omega} - (r\omega \cos \theta)\vec{r}] dm.$$

Devido a que o corpo gira em torno de um eixo de simetria, podemos inferir que o vetor  $\vec{L}$  deve ter a mesma direção que o vetor  $\vec{\omega}$ . Isso quer dizer que as direções perpendiculares a  $\vec{\omega}$  devem se anular após fazer a integral na Eq. (7). Logo, vamos ter

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \left( r^2\vec{\omega} - (r\omega \cos \theta)(r \cos \theta) \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) dm \\ &= \int (r^2 - r^2 \cos^2 \theta) \vec{\omega} dm \\ &= \int (r^2 \sin^2 \theta) \vec{\omega} dm. \end{aligned}$$

Como todo ponto do corpo rígido gira com a mesma velocidade angular, obtemos que

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (8)$$

onde

$$I = \int (r \sin \theta)^2 dm \quad (9)$$

é o chamado **momento de inércia** do corpo. Cabe ressaltar que para cada ponto do corpo,  $r \sin \theta$  é a distância do ponto ao eixo de rotação.

A Eq. (8) nos diz que o momento angular é um indicador da rotação de um corpo rígido.

Um corpo rígido está em **equilíbrio estático** quando não realiza movimento de translação nem de rotação.

Se um corpo rígido está em equilíbrio estático, todo ponto do corpo tem velocidade nula. Logo, segue das Eqs. (4) e (5) que nesse caso vamos ter

$$\vec{p} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{L} = \vec{0},$$

onde, na segunda condição,  $\vec{L}$  pode ser calculado em relação a qualquer ponto. Substituindo isso nas Eqs. (3), obtemos as chamadas condições de equilíbrio para o corpo rígido:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}, \quad (10)$$

onde, na segunda condição,  $\vec{\tau}_{\text{ext}}$  pode ser calculado em relação a qualquer ponto.

O fato de um corpo rígido satisfazer uma das condições dadas na Eq. (10) não implica que a outra será também satisfeita. Por exemplo, se temos uma barra sobre uma mesa e aplicamos forças de direções opostas sobre os extremos da barra e perpendiculares a ela, a primeira condição em (10) é satisfeita, mas a segunda não.

**Exercício 1.5.** Considere um corpo rígido de massa  $M$ . Se a aceleração da gravidade  $\vec{g}$  é constante, mostre que o torque do peso do corpo é dado por  $\vec{\tau}_P = \vec{R} \times (M\vec{g})$ , onde  $\vec{R}$  é a posição do centro de massa do corpo. Em outras palavras, o torque do peso do corpo rígido pode ser calculado considerando o corpo como uma partícula de massa  $M$  localizada no centro de massa do corpo.

*Dica:* O torque do peso de um corpo rígido é igual à soma de todos os torques dos pesos das partes do corpo. Quando o número de partes tende a infinito e a massa de cada parte tende a zero, essa soma torna-se uma integral. Dessa forma,  $\vec{\tau}_P = \int (\vec{r} \times \vec{g}) dm$ .

Define-se o **centro de gravidade** de um corpo rígido de massa  $M$  como o ponto no qual uma partícula de massa  $M$  teria um torque do peso igual ao torque do peso do corpo rígido. O exercício anterior mostra que, se  $\vec{g}$  é constante (por exemplo, na superfície da Terra), o centro de gravidade de um corpo rígido coincide com seu centro de massa. Para

nossos fins, centro de gravidade e centro de massa serão equivalentes.

Se um corpo rígido é homogêneo e tem um eixo de simetria, o centro de massa do corpo estará localizado em algum ponto desse eixo.

Se um corpo rígido é pendurado a partir de um ponto arbitrário e está em equilíbrio, o centro de massa do corpo deve estar localizado em algum ponto da linha vertical que passa pelo ponto de suspensão. Com efeito, como nesse caso o torque do peso deve ser nulo, segue do exercício 1.5 que  $\vec{R}$  e  $\vec{g}$  devem ser vetores paralelos, ou seja,  $\vec{R}$  deve ser um vetor vertical.

Se consideramos uma pessoa como um corpo rígido, quando a pessoa se equilibra em um pé só, o centro de massa dela deve estar na linha vertical que passa pelo pé de suporte. Para isso é necessário realizar um deslocamento do centro de massa, o qual pode não ser possível se a pessoa está junto a uma parede.

**Exercício 1.6.** Considere um corpo rígido em um plano inclinado de superfície rugosa, como ilustrado na figura 1A. Dê argumentos que indiquem que o corpo pode de fato estar em equilíbrio (não vai tombar).

*Dica:* Desenhe as forças que atuam sobre o corpo. As forças normais e de atrito podem assumir valores de tal forma que a força resultante sobre o corpo seja nula. Para calcular os torques das forças escolha o ponto de apoio mais baixo, pois, em relação a esse ponto, os torques das forças de atrito e da normal que atua nesse ponto são nulos. Logo, mostre que o torque externo total pode ser escrito como  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N$ , onde  $\vec{\tau}_P$  e  $\vec{\tau}_N$  têm direções opostas.

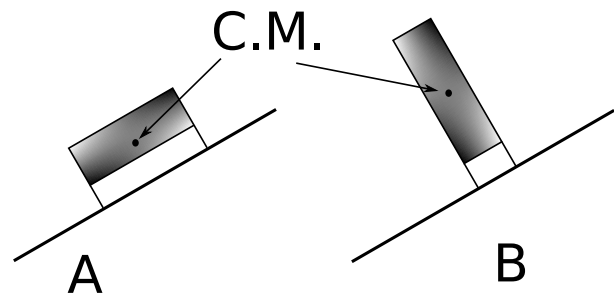


Figura 1: Estudo do tombo de um corpo rígido.

**Exercício 1.7.** Considere um corpo rígido em um plano inclinado de superfície rugosa, como ilustrado na figura 1B. Dê argumentos que indiquem que o corpo não pode estar em equilíbrio (vai tombar).

*Dica:* Proceda da mesma forma que no exercício anterior. Mostre que o torque externo total pode ser escrito como  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N$ , onde  $\vec{\tau}_P$  e  $\vec{\tau}_N$  têm a mesma direção.

Suponhamos que queremos calcular o torque de uma força  $\vec{F}$  aplicada sobre um ponto de um corpo rígido que se encontra na posição  $\vec{r}$  em relação a um ponto arbitrário  $O$ . Por definição esse torque estará dado por  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Porém, às vezes o módulo de  $\vec{r}$  ou sua direção podem ser difíceis de se conhecer. Para dar conta desse problema, observamos que se  $\vec{r}'$  é um vetor qualquer paralelo a  $\vec{F}$ , então  $\vec{r}' \times \vec{F} = 0$  e, por conseguinte,  $\vec{\tau} = (\vec{r} + \vec{r}') \times \vec{F}$ . Dessa maneira, escolhendo o vetor  $\vec{r}'$  de forma conveniente podemos calcular  $\vec{\tau}$  de forma mais simples. Em particular, se  $\vec{r} + \vec{r}'$  é um vetor perpendicular a  $\vec{F}$ , então  $\tau = |\vec{r} + \vec{r}'|F$ .

**Exercício 1.8.** Uma barra homogênea de 12 kg está em equilíbrio estático. Um extremo dela está apoiada em uma parede rugosa e o outro está amarrado a uma corda como ilustrado na figura 2. (i) Encontre o valor da tensão na corda. (ii) Encontre o valor da força de atrito sobre a barra devido à parede.

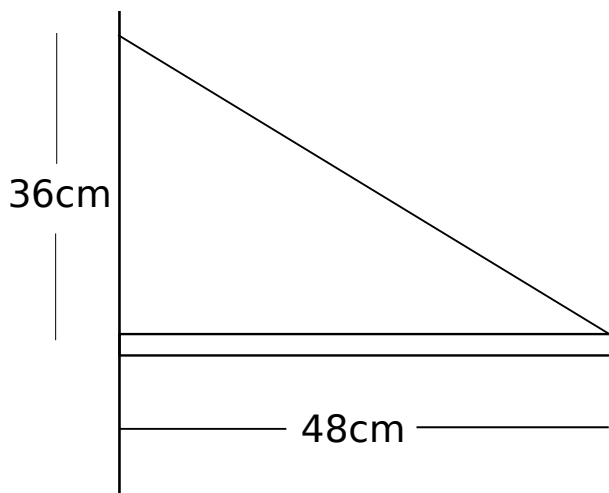


Figura 2: Barra homogênea em equilíbrio estático.

**Exercício 1.9.** Uma escada homogênea de 8 m de comprimento e 5 kg de massa é apoiada em uma parede vertical lisa fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com o chão. Se uma pessoa de 70 kg está sobre a escada e ela se encontra em equilíbrio estático, determine o valor da força de atrito sobre a base da escada quando a pessoa andou na escada (i) 4 m e (ii) 6 m. *Dica:* Usando a primeira condição de (10), obtenha que o valor da força de atrito é igual à força normal devido à parede. Use a segunda condição de (10) para encontrar o valor dessa força normal, tomando como ponto de referência para o cálculo de torques o ponto mais baixo da escada.

**Exercício 1.10.** Uma roda homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  se encontra atascada devido a um desnível

do chão. Qual deve ser o valor mínimo de uma força  $\vec{F}$  horizontal aplicada no centro de massa da roda para que a ela comece a se mover? Esse valor mínimo é menor se a força é aplicada no ponto mais alto da roda?

*Dica:* Se a bola está prestes a se mover, a força normal devido ao chão é nula. Use a condição de equilíbrio  $\vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$  considerando o ponto mais alto do desnível como ponto de referência para o cálculo de torques.

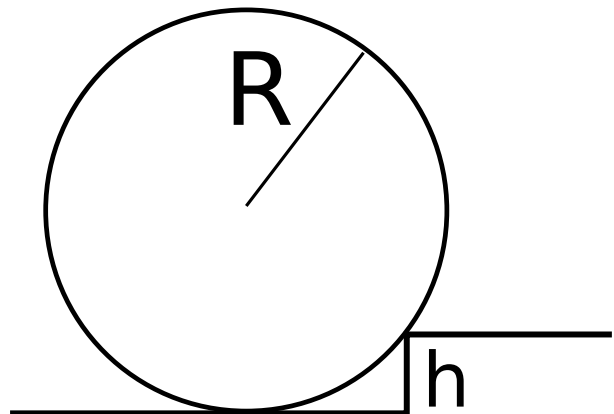


Figura 3: Roda atascada devido a um desnível do chão.

**Exercício 1.11.** Quando temos um bloco homogêneo na borda de uma mesa e queremos que ele esteja em equilíbrio estático, o centro de massa do bloco deve se encontrar dentro da mesa. Considere agora dois blocos homogêneos de comprimento  $l$ . (i) Determine as condições para que ao se colocar um bloco sobre o outro na borda de mesa eles estejam em equilíbrio estático. (ii) Determine a distância máxima entre o extremo da mesa ao extremo do bloco superior.

*Dica:* Se  $x_1$  e  $x_2$  são as posições horizontais dos centros de massa dos blocos em relação ao bordo da mesa (origem), deve-se ter  $x_1 \leq 0$ ,  $x_2 \leq l + x_1$  e  $x_1 + x_2 \leq 0$ . Para maximizar a distância entre o extremo da mesa e o extremo do bloco 2, nas condições anteriores devemos considerar  $x_2 = l + x_1$  e  $x_1 + x_2 = 0$ .

**Exercício 1.12.** No espírito do exercício anterior, considere agora três blocos homogêneos de comprimento  $l$  e determine a distância máxima entre o extremo da mesa ao extremo do bloco superior. Generalizando seu resultado, infira que ao empilhar  $n$  blocos, a distância máxima entre o extremo da mesa e o extremo do bloco superior é dada por

$$d = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Mostre que usando 4 blocos vamos ter  $d > l$ .

*Dica:* Primeiramente considere os dois blocos de cima como um bloco só e encontre as posições dos centros de massa desse bloco grande e do bloco de baixo. Logo, use o resultado do exercício anterior para colocar os dois blocos de cima de tal forma que  $d$  tenha o maior valor possível.