Notas de Física Geral 2

Max Jáuregui

10 de Agosto de 2018

Conteúdo

1 Equilíbrio de um corpo rígido

1.1 Torque e momento angular

Considere uma partícula de massa m na posição $\vec{r}$ sobre a qual atua uma força $\vec{F}$. O *torque* da força $\vec{F}$ é definido por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,, \tag{1}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de dois vetores, o qual é definido por

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\,.$$

A unidade do torque no sistema internacional (SI) é $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Exemplo 1.1. Considere uma partícula de 10 kg na posição $\vec{r} = \cos 30°\hat{i} + \operatorname{sen} 30°\hat{j}$. O torque do peso da partícula é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}$, onde $\vec{P} = -98\hat{j}$. Logo,

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -98 & 0 \end{vmatrix} = -49\sqrt{3}\hat{k}\,.$$

Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear da partícula ($\vec{v}$ é a velocidade da partícula). Logo, a Eq. (1) assume a forma

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}\,.$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{2}$$

e o fato de que $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{0}$ (devido a que $\dot{\vec{r}}$ e $\vec{p}$ são paralelos), obtemos que

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})\,. \tag{3}$$

Definimos o *momento angular* da partícula por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,.$$

Usando esse conceito, a Eq. (3) nos diz então que

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}\,, \tag{4}$$

ou seja, o torque da força $\vec{F}$ é igual à taxa de variação do momento angular da partícula (note a semelhança com a segunda lei de Newton). A unidade de momento angular no SI é $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

1.2 Sistemas de partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 sobre as quais atuam forças externas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ respectivamente. Além das forças externas, há forças internas $\vec{F}_{12}$ (sobre a partícula 1) e $\vec{F}_{21}$ (sobre a partícula 2) devido a interação das partículas (por exemplo, interação gravitacional ou elétrica), as quais são paralelas ao vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Pela segunda lei de Newton vamos ter então que

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} &= \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} &= \dot{\vec{p}}_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Somando essas equações, temos que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2\,.$$

Como $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ pela terceira lei de Newton, a equação anterior pode ser escrita como

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \dot{\vec{p}}\,, \tag{6}$$

onde $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ é a força externa total sobre o sistema composto pelas partículas 1 e 2, e $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ é o momento linear total do sistema.

Multiplicando vetorialmente as Eqs. (5) pelos vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ respectivamente, vamos ter que

$$\vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1$$
$$\vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2$$

Somando essas duas equações, vamos ter que

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 \,.$$

Usando a terceira lei de Newton e a identidade (2) vamos ter que

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) \,.$$

Finalmente, como $\vec{F}_{12}$ é paralelo a $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$ e, por conseguinte,

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \dot{\vec{L}} \,, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ é o torque externo total sobre o sistema e $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ é o momento angular total do sistema.

No caso de sistemas compostos por mais de duas partículas, as Eqs. (6) e (7) continuam valendo.

1.3 Dinâmica do corpo rígido

Um *corpo rígido* é um corpo não pontual que não se deforma. O fato de um corpo rígido não se deformar equivale a dizer que a distância entre dois pontos quaisquer do corpo é uma constante.

Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, podemos dividir ele em n partes pequenas e assim considerar o corpo rígido como um sistema de n corpos. Se a massa da i-ésima parte é Δm_i, sua posição é $\vec{r}_i$ e sua velocidade é $\vec{v}_i$, o momentum total do sistema é

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \Delta m_i$$

e o momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Delta m_i \,.$$

Considerando que o número de partes n tende ao infinito e simultaneamente a massa de cada parte tende a zero, as somas anteriores tornam-se integrais. Dessa maneira, encontramos que o *momento linear do corpo rígido* é dado por

$$\vec{p} = \int \vec{v} \, dm \tag{8}$$

e o *momento angular do corpo rígido* por

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) \, dm \,, \tag{9}$$

onde as integrais são sobre toda a massa do corpo rígido.

As Eqs. (6) e (7) continuam valendo da mesma forma para um corpo rígido, levando em conta que $\vec{p}$ e $\vec{L}$ são dadas pelas Eqs. (8) e (9).

O movimento de um corpo rígido pode ser estudado analisando separadamente os movimentos de translação e de rotação em torno de um eixo que passa pelo corpo.

1.3.1 Movimento de translação

Quando um corpo rígido realiza um movimento de translação pura, todos os pontos do corpo possuem a mesma velocidade. Dessa forma, a velocidade $\vec{v}$ pode sair da integral na Eq. (8) e assim o momento linear do corpo rígido vai ser dado por

$$\vec{p} = \vec{v} \int dm = M\vec{v} \,, \tag{10}$$

onde M é a massa total do corpo rígido. De forma análoga, na Eq. (9) vamos ter

$$\vec{L} = \left(\int \vec{r} \, dm \right) \times \vec{v} \,. \tag{11}$$

Definindo a posição do *centro de massa* do corpo rígido por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm \,,$$

a Eq. (11) pode ser escrita como

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \vec{v} = \vec{R} \times \vec{p} \,. \tag{12}$$

As Eqs. (10) e (12) nos dizem que um corpo rígido que realiza um movimento de translação pura se comporta como uma partícula de massa M localizada no centro de massa do corpo. em outras palavras, as dimensões do corpo rígido não são relevantes no movimento de translação.

1.3.2 Movimento de rotação

Diferentemente do caso do movimento de translação, quando um corpo rígido realiza um movimento de rotação ao redor de um eixo que passa por ele, os pontos do corpo que estão mais próximos do eixo de rotação tem velocidade menor do que os pontos mais afastados. Logo, nesse caso a velocidade $\vec{v}$ não pode sair da integral nas Eqs. (8) e (9).

Para simplificar nosso estudo do movimento de rotação de um corpo rígido, vamos considerar um corpo homogêneo (massa distribuída uniformemente) e simétrico. Além disso, vamos analisar o caso em que o corpo gira em torno de um dos seus eixos de simetria.